
Erhard Quaisser

**Bewegungen in der Ebene und im
Raum**

1983 Deutscher Verlag der Wissenschaften

MSB: Nr. 116

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Und nichts ist schlimmer,
als ein Buch anzufangen
und es dann nicht mehr
zu Ende lesen zu können.
K. Tucholsky

Eine Anregung zu diesem Bändchen erwuchs aus meiner mehrjährigen Tätigkeit in der an außerunterrichtlichen Arbeit mit Schülern und in der Ausbildung von Lehrerstudenten. Es wendet sich deshalb besonders an diesbezügliche Leserkreise.

Das Bändchen möchte als Lehr- und Übungsmaterial vor allem für Schüler in mathematischen Arbeitsgemeinschaften nützlich sein und als Handreichung das Studium der Lehrerstudenten sowie die Arbeit der Fachlehrer unterstützen. Darüber hinaus möchte es einen breiten Kreis von Lesern ansprechen, die sich für Mathematik interessieren.

Es wird deshalb auf einfache und elementar dargestellte Sachverhalte aus der ebenen und räumlichen Geometrie zurückgegriffen und hauptsächlich eine konstruktiv-synthetische Darstellung benutzt. Auf solche Mittel wie die der analytischen Geometrie wird bewusst so gut wie ganz verzichtet.

Bevor mit dem eigentlichen Thema begonnen wird, findet der Leser zunächst einige Sachverhalte und Bezeichnungen aus der ebenen und räumlichen Geometrie nebst einigen Anmerkungen zu Abbildungen und Gruppen als Grundlage und zur Verständigung in einem vorbereitenden Abschnitt. Es genügt, diesen Abschnitt zunächst nur flüchtig zur Kenntnis zu nehmen; ungeläufige Begriffe und Bezeichnungen können nötigenfalls später (mit Hilfe des Verzeichnisses "Bezeichnungen und Symbole") nachgeschlagen werden.

Der Bewegungsbegriff erscheint als Idealisierung von Sachverhalten aus der objektiven Realität, aus der uns umgebenden materiellen Welt, die zu seiner Definition benutzten Eigenschaften entsprechen einfachen Erfahrungen. Die gegenständlichen Betrachtungen sollen nicht nur diesen Aspekt unterstreichen, sondern wir möchten mit ihnen dem Leser ein Hilfsmittel in die Hand geben, um Bewegungen und Bewegungseigenschaften zu erkennen, zu verstehen und um auch selbst etwas zu entdecken, selbst tätig zu werden.

Die Bewegungen sind hier eindeutige Abbildungen der Ebene bzw. des Raumes auf sich, die neben gewissen anordnungsgeometrischen Eigenschaften vor allem den Abstand und damit weitere metrische Größen wie die Größe eines Winkels und Relationen wie das Senkrechtsein unverändert lassen.

Spezielle ebene Bewegungen wie Geradenspiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Punktspiegelungen werden durch zusätzliche Forderungen ausgezeichnet, welche wiederum an Hand realer Sachverhalte motiviert sind.

Besonderer Wert wird auf Eigenschaften gelegt, die konstruktiv nutzbar sind. Außerdem wird frühzeitig jeweils Anschluss an solche Beschreibungen spezieller ebener Bewegungen hergestellt, wie sie vom Schulunterricht her als Begriffserklärung bekannt sind.

Der innere Aufbau der Teile I und II über die ebenen Bewegungen orientiert sich an der Möglichkeit, diese Bewegungen als Produkte von Geradenspiegelungen darzustellen. Rein theoretische Gesichtspunkte bleiben hier aber bewusst im Hintergrund.

Der Hauptteil der Darlegungen besteht vielmehr aus Aufgaben und Problemstellungen. Einige Lösungen werden vorgeführt, um den Leser mit den Möglichkeiten vertraut zu machen und um ihm Anregungen zu geben. Vor allem möchten wir zu aktiver Mitarbeit auffordern. In die Aufgaben sind Sachverhalte aus Natur, Technik und Kunst einbezogen.

Die Behandlung der Bewegungen im Raum unterliegt entsprechenden Gesichtspunkten. Hinzu kommt die Möglichkeit, das räumliche Vor- und Darstellungsvermögen zu schulen und Kenntnisse über elementare raumgeometrische Sachverhalte zu erweitern und zu vertiefen.

Dabei helfen vergleichende Betrachtungen zu den ebenen Sachverhalten in erheblichem Maße, räumliche Bewegungen zu erfassen, sie systematisch und übersichtlich zu untersuchen, weitere Aussagen zu finden und Aufgabenstellungen zu lösen. Analogiebetrachtungen werden als Mittel und Methode genutzt.

Ein kurzer abschließender Teil soll einige Einblicke zur Stellung und der Rolle der Bewegungen in der Geometrie vermitteln; dies sind überwiegend theoretische Aspekte.

Bewegungen in der Ebene - insbesondere Verschiebungen, Drehungen und Geradenspiegelungen - werden im Geometrieunterricht der Oberschulen behandelt. Doch die dabei gelegten Potenzen werden nicht genügend genutzt.

Man kehrt oft schnell zu den "guten alten" Kongruenzbetrachtungen zurück. Die Vorteile, die sich mit Hilfe der Bewegungen als Mittel und Methode bieten, bleiben vielfach verschenkt. -

Zur Allgemeinbildung eines Menschen gehören einige grundlegende Kenntnisse über räumliche Sachverhalte und das Vermögen, sich diese vorzustellen und sie darzustellen, räumliche Bewegungen mit eingeschlossen. Diese Forderung erwächst unmittelbar aus der Natur und dem Wesen des Menschen.

Das Bändchen möchte den Leser mit den ebenen und räumlichen Bewegungen vertraut machen. Der Kenner wird sicherlich manches vermissen, was noch zum Thema gesagt werden könnte. Der Umfang gebot, auf einiges nur aufmerksam zu machen und manches wegzulassen. So sind im Abschnitt 16 nur einige Seitenblicke auf die Kristallographie und die Kinematik möglich gewesen.

Wir möchten auf diese interessanten Themen aufmerksam machen und zu weitergehender Beschäftigung mit ihnen anregen. Einige Literaturhinweise findet der interessierte Leser am Schluss des Bändchens.

Bei den verwendeten Aufgaben konnte vielfach die Urheberschaft nicht geklärt werden, so dass nur bei den Aufgaben aus den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (und der Internationalen Mathematikolympiade) ein Quellenhinweis erfolgte.

Wir hoffen, dass das vorliegende Material, insbesondere die umfangreichen Aufgaben-

stellungen, vielfältig genutzt werden können. Zahlreiche Abbildungen möchten dem Leser dabei helfen.

In die inhaltliche Gestaltung des Bändchens sind eine Reihe von Erfahrungen aus der Geometrieausbildung eingegangen, die in der Pädagogischen Hochschule von Prof. Klotzek geleitet wird.

Herr Prof. Argunov (Pädagogisches Institut in Smolensk) ermöglichte und unterstützte den Entwurf erster größerer Teile des Manuskripts während meines Studienaufenthaltes, wofür ich ihm zu Dank verpflichtet bin.

Für die freundlichen und vielfältigen Hinweise danke ich den Herren Prof. Böhm und Prof. Geise. Mein Dank gilt außerdem dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die gute Zusammenarbeit sowie dem VEB Druckhaus "Maxim Gorki" für die sorgfältige Arbeit.

Potsdam, im Frühjahr 1983

Erhard Quaisser

Inhaltsverzeichnis

Einführung - Einige Sachverhalte und Bezeichnungen aus der ebenen und räumlichen Geometrie sowie über Abbildungen und Gruppen	6
I. Ebene Bewegungen	13
1 Was ist eine ebene Bewegung?	13
2 Spiegelungen an Geraden	17
3 Drehungen	20
4 Verschiebungen	27
5 Punktspiegelungen	30
6 Schubspiegelungen	35
II. Produkte und Gruppen ebener Bewegungen	39
7 Dreispiegelungssätze	39
8 Eine Übersicht über ebene Bewegungen; Produkte von Bewegungen	43
9 Gruppen und Untergruppen ebener Bewegungen	48
10 Erzeugte Bewegungsgruppen und Figuren	50
III. Räumliche Bewegungen	59
11 Spiegelungen an Ebenen	59
12 Räumliche Bewegungen und Ebenenspiegelungen	62
13 Drehungen um eine Gerade und Verschiebungen	65
14 Schub-, Dreh- und Punktspiegelungen	72
15 Schraubungen	79
16 Produkte und Gruppen räumlicher Bewegungen	80
IV. Anhang	91
17 Einiges zur Rolle und Stellung der Bewegungen in der Geometrie	91
18 Abbildungsgruppen als Ordnungsprinzip in der Geometrie	92
V. Lösungsanmerkungen	94
Literatur	97

Einführung - Einige Sachverhalte und Bezeichnungen aus der ebenen und räumlichen Geometrie sowie über Abbildungen und Gruppen

Bevor wir uns dem eigentlichen Gegenstand dieses Büchleins, den Bewegungen, zuwenden, scheint es angebracht, einige grundlegende Sachverhalte aus der ebenen und räumlichen Geometrie bereitzustellen und sich über diesbezügliche Bezeichnungen zu verständigen.

Die Grundbegriffe der Geometrie wie Punkt, Gerade und Ebene sind durch Abstraktion aus der uns umgebenden Realität entstanden. Im Vergleich zu anderen mathematischen Wissenschaften ist in der Geometrie der ursprüngliche Charakter als Erfahrungswissenschaft noch vielfach deutlich sichtbar. Es ist oft leicht, geeignete Dinge aus unserer Umgebung zu finden, die wiederum der Veranschaulichung geometrischer Sachverhalte dienen.

So können wir ein Blatt Papier oder die Tischplatte zur Veranschaulichung einer Ebene nutzen, und die uns in einem Zimmer umgebenden Wände können uns zusammen mit dem Fußboden und der Decke den Schnitt von Ebenen demonstrieren.

Wir bezeichnen Punkte mit A, B, \dots, P, \dots , Geraden mit a, b, \dots, g, \dots und Ebenen mit ε, η, \dots und fassen Geraden und Ebenen als Punktmengen auf.

Zu zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es genau eine Gerade g , die diese Punkte enthält ($A, B \in g$); diese Gerade wird Verbindungsgerade von A und B genannt und mit g_{AB} bezeichnet.

Es gibt folgende Lagebeziehungen zwischen Geraden g und h (und nur diese):

- a) g und h haben alle Punkte gemeinsam ($g = h$);
- b) g und h haben genau einen Punkt P gemeinsam ($g \cap h = \{P\}$), d.h., sie schneiden sich;
- c) g und h haben keinen Punkt gemeinsam ($g \cap h = \emptyset$), und es gibt eine Ebene, in der sie beide enthalten sind;
- d) g und h haben keinen Punkt gemeinsam, und sie sind in keiner gemeinsamen Ebene enthalten; in diesem Fall werden g und h zueinander windschiefe Geraden genannt.

Gilt der Fall a) oder c), so heißt die Gerade g parallel zu der Geraden h , und man schreibt $g \parallel h$. Die Parallelität zwischen Geraden ist eine Äquivalenzrelation, d.h., sie ist reflexiv (für alle Geraden a gilt $a \parallel a$), symmetrisch (aus $a \parallel b$ folgt $b \parallel a$) und transitiv (aus $a \parallel b$ und $b \parallel c$ folgt $a \parallel c$).

Unter der Richtung einer Geraden g wird die Menge aller zu g parallelen Geraden verstanden. (Die Richtungen sind demnach die Äquivalenzklassen bezüglich der Parallelitätsrelation.)

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine zu g parallele Gerade, die P enthält.

Beschränkt man sich auf die Punkte und Geraden einer Ebene, so entfällt die Lagebe-

ziehung (1).

Eine Gerade g heißt parallel zu einer Ebene ε (und man setzt $g \parallel \varepsilon$) genau dann, wenn $g \subset \varepsilon$ oder $g \cap \varepsilon = \emptyset$ ist.

Im Fall $g \not\parallel \varepsilon$ haben die Gerade g und die Ebene ε genau einen Punkt gemeinsam; man nennt ihn den Schnittpunkt von g und ε .

Eine Ebene ε heißt parallel zu einer Ebene η (kurz $\varepsilon \parallel \eta$) genau dann, wenn $\varepsilon = \eta$ oder $\varepsilon \cap \eta = \emptyset$ gilt. Diese Parallelität ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation. Zu jeder Ebene ε und jedem Punkt P gibt es genau eine zu ε parallele Ebene, die P enthält. Im Fall $\varepsilon \not\parallel \eta$ ist „ $\varepsilon \cap \eta$ eine Gerade, die Schnittgerade von ε und η “.

u drei Punkten A, B, C , die nicht in ein und derselben Geraden enthalten sind, gibt es genau eine Ebene, die die Punkte A, B, C enthält; diese Ebene heißt Verbindungsebene von A, B, C und wird mit ε_{ABC} bezeichnet. Demnach gibt es auch die Verbindungsebene ε_{Pg} falls $P \notin g$ ist, und die Verbindungsebene e_{gh} , falls g, h sich schneiden oder falls $g \parallel h$ und $g \neq h$ gilt.

Punkte heißen kollinear bzw. komplanar genau dann, wenn sie in einer gemeinsamen Geraden bzw. in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Weitere grundlegende Lage-Aussagen findet der Leser u.a. in der für einen breiten Leserkreis verfassten Literatur [18].

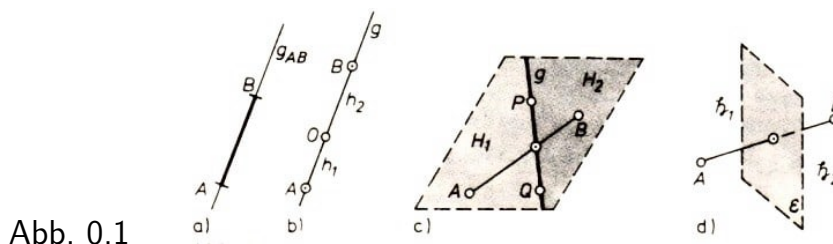


Abb. 0.1

Den Begriff Strecke setzen wir als bekannt voraus. Mit \overline{AB} bezeichnen wir die Strecke mit den Endpunkten A und B ($\neq A$); sie besteht aus A, B und allen Punkten, die zwischen A und B liegen. Das Innere dieser Strecke (d.h. $\overline{AB} \setminus \{A, B\}$) wird mit AB bezeichnet (Abb. 0.1 a).

Wählt man auf einer Geraden g einen Punkt O , so wird durch O die Menge der restlichen Punkte von g (d.h. $g \setminus \{O\}$) in genau zwei Teilmengen h_1 und h_2 zerlegt (Abb. 0.1b), die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen:

Zwei verschiedene Punkte A, B liegen in verschiedenen Teilmengen, wenn $O \in AB$ ist, und sie liegen in der gleichen Teilmenge, wenn $O \notin AB$ gilt. Diese Teilmengen heißen recht treffend Halbgeraden mit dem Scheitel O . Fügen wir diesen Punktmengen noch jeweils den Punkt O hinzu, dann liegen Strahlen vor.

Mit $O(p)$ bezeichnen wir den Scheitel einer Halbgeraden p . Eine Halbgerade ist durch ihren Scheitel O und einen Punkt A bestimmt, den sie enthält; man bezeichnet sie mit OA^+ . Für die zu OA^+ entgegengesetzte Halbgerade wird OA^- geschrieben. (Es ist also $OA^+ \cup OA^- = g_{OA} \setminus \{O\}$.)

Analoge Sachverhalte bestehen in einer Ebene ε bezüglich einer Geraden g und im

Raum bezüglich einer Ebene ε :

Ist $g \subset \varepsilon$, so wird die Punktmenge $\varepsilon \setminus g$ durch g in genau zwei Teilmengen H_1 und H_2 so zerlegt, dass $A \in H_1$ und $B \in H_2$, genau dann gilt, wenn AB von der Geraden g geschnitten wird (Abb. 0.1 c).

Die Mengen H_1 und H_2 heißen Halbebenen von ε bezüglich g , und g heißt die Begrenzung von H_1, H_2 . Mit PQA^+ wird diejenige Halbebene der Ebene ε_{PQA} bezüglich g_{PQ} bezeichnet, die den Punkt A enthält; PQA^- bedeutet die ihr entgegengesetzte Halbebene. (Demnach ist $PQA^+ \cup PQA^- = \varepsilon_{PQA} \setminus g_{PQ}$)

Ist ε eine Ebene (im Raum) und \mathfrak{P} die Menge der Raumpunkte, so wird die Punktmenge $\mathfrak{P} \setminus \varepsilon$ durch ε in genau zwei Teilmengen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 so zerlegt, dass $A \in \mathfrak{H}_1$ und $B \in \mathfrak{H}_2$, genau dann gilt, wenn AB von ε geschnitten wird (Abb. 0.1d). Die Mengen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 heißen die Halbräume bezüglich ε und ε die Begrenzung von $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$.

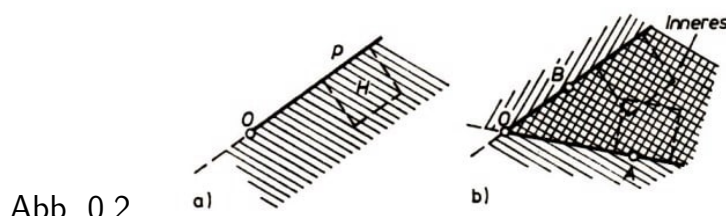


Abb. 0.2

Weniger bekannt, aber nicht weniger wichtig ist der Begriff der Fahne. Man versteht darunter die Vereinigung $p \cup H$ einer Halbgeraden p und einer Halbebene H , wenn p in der Begrenzung von H liegt (Abb. 0.2 a).

Sind p und q Halbgeraden mit gemeinsamem Scheitelpunkt, so nennt man die Menge $\{p, q\}$ einen (elementaren) Winkel und bezeichnet ihn mit $\sphericalangle p, q$.

Die Halbgeraden p und q heißen die Schenkel von $\sphericalangle p, q$. Mit $\sphericalangle AOB$ bezeichnet man den Winkel, der aus den Halbgeraden OA^+ und OB^+ besteht. Unter dem gerichteten Winkel $\sphericalangle p, q$ wird das geordnete Paar (p, q) verstanden.

Das Innere des Winkels $\sphericalangle AOB$, bei dem $OB^+ \neq OA^+, OA^-$ ist, lässt sich einfach durch die Halbebenen OAB^+ und OBA^- charakterisieren: Es ist der Durchschnitt $OAB^+ \cap OBA^-$ (Abb. 0.2 b).

In der Ebene unterscheidet man zwei Orientierungen. Die in Abb. 0.3 a vorliegenden Dreiecke ABC und PQR werden als gleichorientiert, dagegen die Dreiecke ABC und ACB als entgegengesetzt orientiert aufgefasst. Der Orientierungsbegriff lässt sich mit Hilfe von Fahnen erklären.

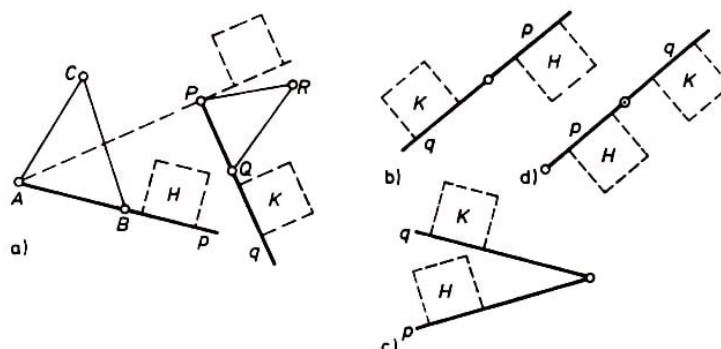


Abb. 0.3

Die Menge der Fahnen (in der Ebene) zerfällt in zwei Teilmengen von zueinander gleichorientierten Fahnen so, dass $p \cup H$ und $p \cup H^-$ entgegengesetzt orientiert sind und dass für die gleiche Orientierung der Fahnen $p \cup H$ und $q \cup K$ hinreichend ist, wenn $(q = p^-$ und $K = H^-)$ oder $(O(p) = O(q)$ und $q \neq p, p'$ und entweder $p \subset K$ oder $q \subset H)$ oder $(q \subset p$ und $K = H)$ gilt (siehe Abb. 0.3 b-d).

Zwei Dreiecke ABC und PQR heißen nun gleichorientiert genau dann, wenn die Fahnen $AB^+ \cup ABC^+$ und $PQ^+ \cup PQR^+$ gleichorientiert sind.

In Abb. 0.3a ist nun $AB^+ \cup ABC^+$ gleichorientiert mit $AP^+ \cup APC^+$ (wegen $AP^+ \subset ABC^+$ und $AB^+ \not\subset APC^+$), diese Fahne ist gleichorientiert mit $PA^- \cup PAR^-$ (wegen $PA^- \subset PA^+$ und $PAR^- = APC^*$), und diese ist schließlich gleichorientiert mit $PQ^+ \cup PQR^+$ (wegen $PQ^+ \not\subset PAR^-$ und $PA^- \subset PQR^+$).

Auch im Raum unterscheidet man zwei Orientierungen. Als Grundlage können analog zu den Fahnen in der ebenen Geometrie solche geometrischen Figuren dienen, die jeweils aus einer Fahne und einem Halbraum bestehen, in dessen Begrenzung die Fahne liegt. Die Menge dieser Figuren zerfällt in zwei Teilmengen jeweils gleichorientierter Figuren.

Für die späteren Darlegungen genügt es hier, folgendes festzustellen: Ist \mathfrak{H} ein Halbraum und $p \cup H$ eine Fahne, die in der Begrenzung von \mathfrak{H} liegt, so sind $p \cup H \cup \mathfrak{H}$ und $p \cup H \cup \mathfrak{H}^-$ entgegengesetzt orientiert (Abb. 0.4a), ebenso die Paare $p \cup H \cup \mathfrak{H}$, $p^- \cup H \cup \mathfrak{H}$ und $p \cup H \cup \mathfrak{H}$, $p \cup H^- \cup \mathfrak{H}$ (Abb. 0.4b).

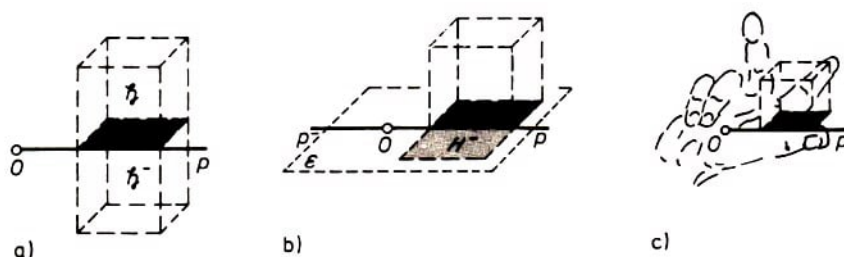
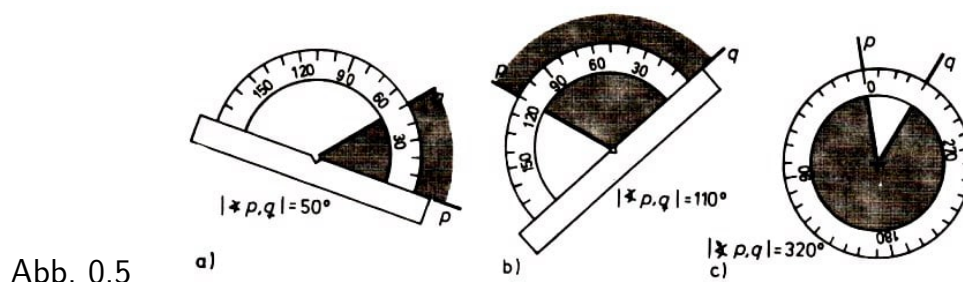


Abb. 0.4

Es gelingt vom Scheitel O der Halbgeraden p aus, den Daumen, den Zeigefinger und den Mittelfinger genau einer Hand so an die Figur $p \cup H \cup \mathfrak{H}$ zu legen, dass der Daumen in p , der Zeigefinger in H und der Mittelfinger in \mathfrak{H} liegt (Abb. 0.40). Für $p \cup H \cup \mathfrak{H}^-$ gelingt dies dann nur mit der anderen Hand.

Im folgenden bezeichnet $|AB|$ die Länge der Strecke \overline{AB} (bzw. deren Maßzahl bezüglich einer Längeneinheit). Zu je zwei Punkten A und B gibt es den Mittelpunkt M von A, B (kurz $M_p(A, B)$). Er ist durch die Bedingungen $|AM| = |MB|$ und $M \in g_{AB}$ charakterisiert.

Die Größe eines Winkels $\sphericalangle p, q$ (bzw. deren Maßzahl bezüglich einer Winkelgrößeneinheit) wird mit $|\sphericalangle p, q|$ bezeichnet. Da es hier auf die Reihenfolge von p und q nicht ankommt, ergibt die Messung mit einem Winkelmesser auf der Grundlage der Einheit (Alt-) Grad Maßzahlen zwischen 0 und 180 (siehe Abb. 0.5a, b); insbesondere 0 für Winkel $\sphericalangle p, p$, 180 für gestreckte Winkel $\sphericalangle p, p^-$.

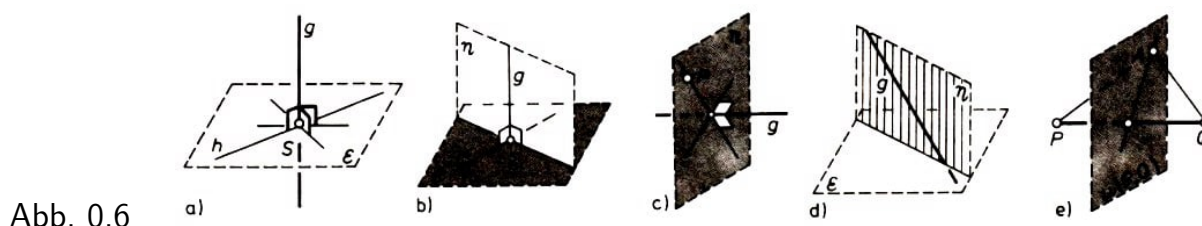


Bei der Messung gerichteter Winkel $\angle p, q$ ist die Reihenfolge von p, q zu berücksichtigen; dies kann durch einen Maßzahlenbereich $0 \leq \dots < 360$ bezüglich (Alt-) Grad bewerkstelligt werden (siehe Abb. 0.5c).

Bezüglich der Messung in Abb. 0.5c ergibt sich $|\angle p, q| = 320^\circ$ und $|\angle q, p| = 40^\circ$. Dabei sind Winkelmesser mit einer gleichorientierten Skala zu verwenden.

(Das heißt: Werden zwei derartige Winkelmesser auf ein und dieselbe Ebene gelegt, so sind die Fahnen $MO^+ \cup MOR^+$ und $M'O' \cup M'O'R'^+$ gleichorientiert, wobei M, M' die Markierungspunkte für die Mittelpunkte (Scheitellage) und O, O' bzw. R, R' die Markierungspunkte für 0° bzw. 90° auf den Skalen der Winkelmesser sind.)

Ist die Gerade g senkrecht zu der Geraden h , dann schreiben wir $g \perp h$ und verstehen darunter im Raum Geraden, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und einen rechten Winkel einschließen. Für senkrecht bzw. Senkrechte werden auch die Bezeichnungen orthogonal bzw. Orthogonale oder Lot verwendet.



Eine Gerade g heißt senkrecht zu einer Ebene ε (kurz $g \perp \varepsilon$) genau dann, wenn g die Ebene ε in einem Punkt S schneidet und zu jeder Gerade h senkrecht ist, die durch S geht und in ε liegt (Abb. 0.6a). Weiterhin heißt eine Ebene η senkrecht zu einer Ebene ε (kurz $\eta \perp \varepsilon$) genau dann, wenn es in η eine Gerade g gibt, die zu ε senkrecht ist (Abb. 0.6b).

Es gelten folgende Lotaussagen:

- Liegen P und g in einer Ebene ε , so gibt es in ε genau eine Gerade h durch P mit $g \perp h$.
- Zu jedem Punkt P und jeder Ebene ε gibt es genau eine Gerade g durch P mit $g \perp \varepsilon$.
- Zu jedem Punkt P und jeder Gerade g gibt es genau eine Ebene η durch P mit $g \perp \eta$ (Abb. 0.6c).
- Zu jeder Ebene ε und jeder Gerade g , die nicht senkrecht zu ε ist, gibt es genau eine Ebene η , die g enthält und für die $\eta \perp \varepsilon$ ist (Abb. 0.6d).
- Ein Punkt Q der Ebene ε ist Fußpunkt des Lotes von einem Punkt $P \notin \varepsilon$ auf ε genau dann, wenn $|PR| > |PQ|$ für jeden Punkt $R \neq Q$ der Ebene ε gilt.

Nach der Lotaussage c) gibt es zu je zwei Punkten P und $Q \neq P$ genau eine Ebene η derart, dass $g_{PQ} \perp \eta$ ist und der Mittelpunkt von (P, Q) auf η liegt. Diese Ebene heißt die Mittellotebene von P, Q und wird mit $\mu(P, Q)$ bezeichnet. Man überlegt sich leicht, dass $\mu(P, Q)$ alle und nur die Punkte A des Raumes enthält, für die $|PA| = |QA|$ gilt (Abb. 0.6e).

Schließlich verständigen wir uns noch über einige wenige Begriffe und Eigenschaften im Zusammenhang mit Abbildungen und Gruppen.

Eine Abbildung α aus einer Menge M in eine Menge N ordnet Elementen aus M (nicht notwendig allen) in eindeutiger Weise je ein Element in N zu.

Bezeichnet $M \times N$ die Menge aller geordneten Paare (x, y) von Elementen $x \in M$ und $y \in N$, so ist also α eine Teilmenge von $M \times N$ mit der Eigenschaft, dass aus $(x, y_1), (x, y_2) \in \alpha$ die Gleichheit von y_1 und y_2 folgt.

Es wird für uns später zweckmäßig sein, das Bild von x bei der Abbildung α mit x^α zu bezeichnen. Ist der Definitionsbereich von α - kurz $D(\alpha)$ - gleich der Menge M bzw. der Wertebereich von α - kurz $W(\alpha)$ - gleich der Menge N , so wird "von M " anstelle von "aus M " bzw. "auf N " anstelle von "in N " geschrieben.

Eine Abbildung α heißt eineindeutig (oder eindeutig umkehrbar) genau dann, wenn aus der Gleichheit $x_1^\alpha = x_2^\alpha$ der Bilder stets die Gleichheit $x_1 = x_2$, der Originale folgt.

Die Menge α^{-1} aller geordneten Paare (y, x) , für die $y = x^\alpha$ gilt, ist dann ebenfalls eine Abbildung; sie heißt die Umkehrabbildung von α . Ist α eine eineindeutige Abbildung von M auf N , so ist α^{-1} eine eineindeutige Abbildung von N auf M . Eineindeutige Abbildungen von einer Menge M auf sich nennt man auch Transformationen von M .

Wenn α eine Abbildung aus M in N und T eine Teilmenge des Definitionsbereichs $D(\alpha)$ von α ist, dann ist die Einschränkung von α auf T , d.h. die Menge der geordneten Paare $(x, y) \in \alpha$ mit $x \in T$ ebenfalls eine Abbildung aus M in N sie wird mit $\alpha|_T$ bezeichnet. Die Eigenschaft der Eineindeutigkeit bleibt bei Einschränkung erhalten.

Es sei α eine Abbildung aus M in N und β eine Abbildung aus N in P . Unter der Nacheinanderausführung (oder Produkt oder Verkettung) $\alpha \circ \beta$ wollen wir hier entgegen der sonst üblichen Erklrung¹ die Menge derjenigen geordneten Paare (x, z) mit $x \in D(\alpha)$ und $z \in W(\beta)$ verstehen, für die es ein $y \in N$ derart gibt, dass $y = x^\alpha$ und $z = y^\beta$ ist. Auf Grund unserer Erklärung ist $x^{\alpha \circ \beta} = (x^\alpha)^\beta$.

Sind α und β jeweils eineindeutig (und "von-auf"), dann ist $\alpha \circ \beta$ ebenfalls eine eineindeutige Abbildung (von M auf P), und es gilt $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$. Man beachte, dass dabei $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ (die Kommutativität) im allgemeinen nicht gilt.

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Operation \circ (d.h. mit einer Abbildung von $G \times G$ in G ; für das Bild von $(\alpha, \beta) \in G \times G$ schreibt man $\alpha \circ \beta$), in der folgende Eigenschaften gelten:

¹Siehe u.a. Asser: Grundbegriffe der Mathematik. Bd. 1 der Reihe "Mathematik für Lehrer", Berlin, 4. Aufl. 1980. Nach der dortigen Definition wäre für den obigen Sachverhalt $\beta \circ \alpha$ zu setzen. Hier wird später unsere Erklärung von Vorteil sein.

G 1. $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in G$ (assoziatives Gesetz).

G 2. Es gibt (genau) ein Element $e \in G$ derart, dass $\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha$ für alle $\alpha \in G$ gilt. (Man nennt e das Einselement der Gruppe.)

G 3. Zu jedem Element $\alpha \in G$ gibt es (genau) ein Element $\beta \in G$ derart, dass $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = e$ gilt. (Man nennt β das inverse Element von α und bezeichnet es mit α^{-1} .)

Eine Gruppe ist also eine Struktur (G, \circ) , bestehend aus einer Menge G und einer Operation \circ in G , die die Eigenschaften G 1 bis G 3 besitzt.

Mit den Eigenschaften G 2 und G 3 ist gleichwertig

G 4. Zu beliebigen Elementen $\alpha, \beta \in G$ gibt es (eindeutig bestimmte) Elemente $x, y \in G$ derart, dass $\alpha \circ x = \beta$ und $y \circ \alpha = \beta$ ist.

Die Gruppe heißt insbesondere kommutativ genau dann, wenn folgende Eigenschaft gilt:

G 5. $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ für alle $\alpha, \beta \in G$.

Für die Verkettung \circ von Abbildungen gilt stets die Assoziativität (Eigenschaft G 1).

Betrachten wir speziell die Menge G aller eineindeutigen Abbildungen von einer Menge M auf sich (d.h. aller Transformationen von M , so ist bezüglich der Verkettung \circ als Operation die identische Abbildung ι der Menge M (d.h. $\iota = \{(x, x) : x \in M\}$) diejenige Abbildung aus G mit der Eigenschaft G 2 (d.h., ι ist Einselement), und für die Umkehrabbildung α^{-1} einer Abbildung $\alpha \in G$ gilt $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \iota$ (d.h., zu jedem $\alpha \in G$ existiert das inverse Element; Gruppenbedingung G 3).

Also gilt:

Die Transformationen von einer Menge M bilden eine Gruppe.

Eine Struktur (U, \circ') heißt Untergruppe einer Gruppe (G, \circ) genau dann, wenn U eine Teilmenge von G , die Operation \circ' die Einschränkung der Operation \circ auf U ist und wenn (U, \circ') selbst eine Gruppe darstellt.

Für jede Gruppe (G, \circ) sind offenbar (G, \circ) selbst und die nur aus dem Einselement e bestehende Gruppe Untergruppen, die sogenannten trivialen Untergruppen von (G, \circ) .

Für den Nachweis, dass eine Untergruppe vorliegt, ist folgendes Kriterium nützlich:

Eine Teilmenge U von G einer Gruppe (G, \circ) bildet (mit der auf U eingeschränkten Operation \circ) eine (Unter-)Gruppe genau dann, wenn $\alpha \circ \beta \in U$ und $\alpha^{-1} \in U$ für alle Elemente $\alpha, \beta \in U$ gilt.

I. Ebene Bewegungen

1 Was ist eine ebene Bewegung?

Die Worte "bewegen" und "Bewegung" werden in unserer Sprache im Zusammenhang mit recht unterschiedlichen Sachverhalten verwendet:

So setzt sich eine Straßenbahn "in Bewegung", an einer jungen Dame gefallen die "anmutigen Bewegungen", nach längerem Stillsitzen im Unterricht möchten wir uns "Bewegung verschaffen", beim Angriff der heimischen Mannschaft auf das gegnerische Tor "kommt Bewegung" in die Zuschauer, wir beobachten eine "scheinbare Bewegung" der Sonne um die Erde, er muss "alle Hebel in Bewegung setzen"; außerdem kennen wir aus der Geschichte verschiedene "demokratische Bewegungen", wir sind "tief bewegt" von einem Ereignis, der Mann wollte "seine Bewegung nicht zeigen".

Handelt es sich um Gegenstände der uns umgebenden Umwelt, so ist damit gewöhnlich ihre Ortsveränderung gemeint. Andere Eigenschaften als die Ortslage, die etwa "während der Bewegung" (also im Laufe der Zeit) einer Veränderung unterworfen sein können, bleiben unberücksichtigt.

Der mathematische Begriff "Bewegung" entstand - wie viele grundlegende Begriffsbildungen der Geometrie - durch Idealisierung objektiver Sachverhalte, durch Abstraktion aus der objektiven Realität, und zwar mit Rücksicht auf die Anwendungsfähigkeit in verschiedenen Versionen.

So ist in der Kinematik ein Bewegungsbegriff grundlegend, der die Abhängigkeit des Ablaufs einer Bewegung von der Zeit berücksichtigt. Der Bewegungsbegriff der (klassischen) euklidischen Geometrie abstrahiert dagegen von der Dauer und der Art der Bewegung und berücksichtigt nur die Anfangs- und Endlage von Punkten; er ist eine Punktabbildung.

Mit den folgenden gegenständlichen Betrachtungen möchten wir dem Leser ein Hilfsmittel in die Hand geben, um Bewegungen und diesbezügliche Eigenschaften zu erkennen, zu verstehen und um damit auch selbständig tätig zu werden. Wir benötigen dazu nur ein Zeichenblatt und Transparentpapier (ohne Qualitätsansprüche).

Wir legen auf unsere Zeichenebene ein Blatt Transparentpapier. Beide denken wir uns unbegrenzt, also in der Idealisierung "Ebene". Jeden Punkt P der (Zeichen-) Ebene - im weiteren kurz ε - können wir auf dem Transparentpapier kopieren; P_t sei die Kopie von P .

Nun bewegen wir (mechanisch) das Transparentpapier; wir lassen dabei noch zu, dass man das Transparentpapier wendet. Danach wird wieder kopiert. Diesmal von dem Transparentpapier auf die Ebene ε . Aus P_t entsteht dabei ein Punkt P' auf ε .

Wir interessieren uns nur für die Anfangs- und Endlage der Punkte, die auf Grund einer einmaligen Manipulation mit dem Transparentpapier besteht. Wie diese Abbildung konkret ausgeführt wird, ob dabei zwischendurch das Transparentpapier beiseite gelegt wird oder zwischendurch einer anderen Beschäftigung nachgegangen wird, wird völlig ignoriert.

Wir beziehen auch den Fall mit ein, dass die ursprüngliche Lage des Transparentpapiers nicht verändert wurde. Der Punkt P' heißt das Bild von P (Abb. 1.1a-c).

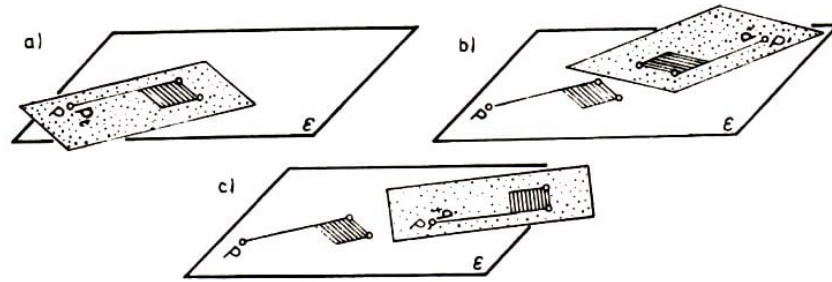


Abb. 1.1

Folgende Eigenschaften werden dabei ersichtlich:

B 1. Jedem Punkt P der Ebene ε wird genau ein Punkt P' der Ebene zugeordnet; umgekehrt ist jeder Punkt das Bild genau eines Punktes der Ebene, d.h., es besteht eine eindeutige Abbildung der Ebene ε auf sich.

B 2. Das Bild einer Geraden ist eine Gerade (Geradentreue).

B 3. Das Bild einer Halbgeraden PQ^+ ist die Halbgerade $P'Q'^+$; das Bild einer Halbebene PQR^+ ist die Halbebene $P'Q'R^+$ (Anordnungstreue).

B 4. Es ist stets $|PQ| = |P'Q'|$ (Invarianz des Abstandes).

Einige weitere Eigenschaften können nun bereits als Folgerungen der bisher genannten bewiesen werden. So folgt aus B 3:

B 3'. Das Bild der Strecke PQ ist die Strecke $P'Q'$; das Bild einer Fahne ist eine Fahne.

Beweis. Für $P \neq Q$ ist $PQ = PQ^+ \cap QP^+$ und damit

$$(PQ)' = (PQ^+)' \cap (QP^+)' = P'Q'^+ \cap Q'P'^+ = P'Q'$$

Die zweite Behauptung ergibt sich in entsprechender Weise:

$$(AB^+ \cup ABC^+)' = A'B'^+ \cup A'B'C'^+$$

Beim Bewegen des Transparentpapiers werden weitere Eigenschaften einsichtig; eine möchten wir noch vorstellen.

Wir wählen dazu zwei Fahnen $p \cup H$ und $g \cup K$ in ε . Dann gelingt es durch Bewegen des Transparentpapiers, die erste Fahne in die zweite überzuführen, d.h., $O(p)$ geht in $O(q)$, p in q und H in K über.

Wir empfehlen, diese Schritte unter Zugrundelegung eines Dreiecks ABC praktisch auszuführen. Dabei sei $p \cup H = AB^+ \cup ABC^+$ und $g \cup K$ gleich der Fahne $BC^+ \cup BCA^+$ bzw. $AC^+ \cup ACB^+$ (Abb. 1.2). Im zweiten Fall gelingt das nur durch Wenden des Transparentpapiers.

Auf Grund dieser Erfahrungen mit dem Transparentpapier erklären wir einen abstrakten Bewegungsbegriff in der ebenen Geometrie.

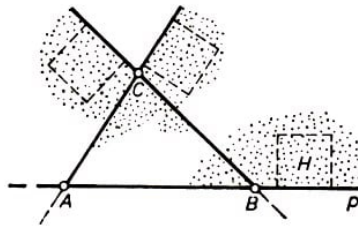


Abb. 1.2

Definition. α ist eine Bewegung der Ebene ε genau dann, wenn α eine eindeutige Abbildung von ε auf sich ist, bei der Geradentreue (B 2), Anordnungstreue (B 3) und Invarianz des Abstandes (B 4) besteht.

Andere Möglichkeiten der Definition ergeben sich aus späteren Erörterungen. Nach der obigen Definition ist die identische Abbildung ι der Ebene eine Bewegung.

Im folgenden bezeichnet P^α bzw. \mathfrak{F}^α das Bild des Punktes P bzw. der beliebigen Punktmenge (Figur) \mathfrak{F} bei der Bewegung α .

Wir halten zunächst fest, dass auf Grund der bisherigen Überlegungen für jede Bewegung die Eigenschaft B 3' gilt. Weiterhin kann der Leser anhand der Definition leicht folgende Eigenschaft zeigen:

B 5. Sind α, β Bewegungen, dann sind die Nacheinanderausführung $\alpha \circ \beta$ und die inverse Abbildung α^{-1} ebenfalls Bewegungen.

(1.1) Aufgabe. Für jede Bewegung α gilt

- a) Sind p, q Halbgeraden und $p^\alpha = q$, so ist $(p^-)^\alpha = q^-$.
- b) Sind H, K Halbebenen und $H^\alpha = K$, so ist $(H^-)^\alpha = K^-$.

Mit Hilfe des Dreieckskongruenzsatzes sss kann aus B 4 sofort folgende Eigenschaft gefolgert werden:

B 6. Bei einer Bewegung gehen Winkel in Winkel gleicher Größe über (Invarianz der Winkelgröße).

Unsere bisherigen Erfahrungen mit Hilfe des Transparentpapiers rechtfertigen, folgendes zunächst noch vorauszusetzen:

B 7. Zu je zwei Fahnen $p \cup H$ und $q \cup K$ gibt es eine Bewegung α mit $p^\alpha = q$ und $H^\alpha = K$ (Beweglichkeit).

Einen Beweis von B 7, der auf der Grundlage elementarer Eigenschaften der ebenen Geometrie (siehe die Einführung) und bisheriger Bewegungseigenschaften erbracht werden kann, vertagen wir auf später, um den Anfang nicht mit theoretischen Erörterungen zu überlasten.

Dagegen wollen wir folgende Eindeutigkeitsaussage jetzt schon ableiten:

B 8. Haben Bewegungen α, β bezüglich einer Fahne $p \cup H$ das gleiche Bild, d.h. $p^\alpha = p^\beta$ und $H^\alpha = H^\beta$, so gilt $\alpha = \beta$, d.h., für alle Punkte P ist $P^\alpha = P^\beta$ (Starrheit).

Der folgende Beweis kann beim Lesen zunächst auch übergangen werden; diese Aussage erscheint auf Grund unserer bisherigen Erfahrungen recht einsichtig.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Fahne $p \cup H$ mit $p^\alpha = p^\beta$ und $H^\alpha = H^\beta$. Es sei O der Scheitelpunkt von p und f die Gerade, die p enthält. Wegen $(p^\alpha)^{\beta^{-1}} = p$ und $((p^-)^\alpha)^{\beta^{-1}} = p^-$ gilt $(O^\alpha)^{\beta^{-1}} = O$ und weiter $(F^\alpha)^{\beta^{-1}} = F$ für jeden Punkt F ($\neq O$) auf f , da noch $|O(F^\alpha)^{\beta^{-1}}| = |OF|$ und die Längenantragung von O aus auf p bzw. p^- eindeutig ist.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $P \neq f$ der Ebene und fällen das Lot h von P auf die Gerade f ; der Fußpunkt des Lotes sei Q (Abb. 1.3). Dann ist wegen

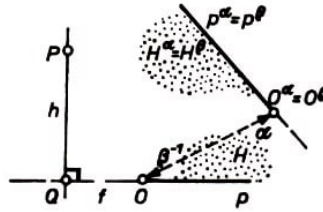


Abb. 1.3

$(Q^\alpha)^{\beta^{-1}} = Q$ und der Invarianz der rechten Winkel (Eigenschaft B 6) noch $(h^\alpha)^{\beta^{-1}} = h$. Das Bild $(P^\alpha)^{\beta^{-1}}$ von P liegt also auf h und außerdem in H wegen $(H^\alpha)^{\beta^{-1}} = H$. Die Längeninvarianz erzwingt nun $(P^\alpha)^{\beta^{-1}} = P$. Also ist $\alpha = \beta$.

(1.2) Aufgabe. Es sei $\sphericalangle p, q$ ein rechter Winkel und H die Halbebene, die an p liegt und q enthält; ferner sei K die Halbebene, die an q liegt und p enthält (Abb. 1.4).

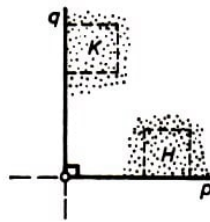


Abb. 1.4

Weiterhin sei α, β bzw. γ die Bewegung, die die Fahne $p \cup H$ in die Fahne $p'' \cup H''$ bzw. $q \cup K$ bzw. $q \cup K^-$ überführt.

Welches Bild hat die Fahne $q \cup K$ bei α, β bzw. γ . Man gewinne mit Hilfe des Transparentpapiers jeweils eine Vermutung und beweise diese.

(1.3) Aufgabe. Man zeige unter den Voraussetzungen der Aufgabe (1.2) und den dortigen Ergebnissen, dass gilt

a) $\beta \circ \beta = \iota$ (identische Abbildung); b) $\gamma \circ \gamma = \alpha$; c) $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$; d) $\beta \circ \gamma \neq \gamma \circ \beta$.

(Hinweis: Auch hier ist eine Überprüfung mittels Transparentpapier angebracht. Zum Beweis steht B 8 zur Verfügung!)

Das Ergebnis (1) der Aufgabe (1.3) macht deutlich, dass die Reihenfolge bei der Nacheinanderausführung von Bewegungen im allgemeinen nicht vertauschbar ist.

(1.4) Aufgabe. Man zeige: Haben Bewegungen α, β bezüglich der Ecken A, B, C eines Dreiecks die gleichen Bilder, so gilt $\alpha = \beta$.

Diese Aussage ist eine Verschärfung von B 8; die Behauptung $\alpha = \beta$ wird in (1.4)

aus schwächeren Voraussetzungen gefolgt. Zum Beweis steht B 8 zur Verfügung. Es genügt also, $(AB^+)^{\alpha} = (AB^+)^{\beta}$ und $(ABC^+)^{\alpha} = (ABC^+)^{\beta}$ zu zeigen. Wir wenden uns nun speziellen Bewegungen zu.

2 Spiegelungen an Geraden

Wir markieren in der Ebene ε eine Gerade g , kopieren g auf das Transparentpapier (dazu genügt es, zwei verschiedene Punkte von g zu kopieren!) und bewegen das Transparentpapier auf folgende Weise: Es wird gewendet und wieder so auf ε gelegt, dass alle Punkte von g festbleiben.

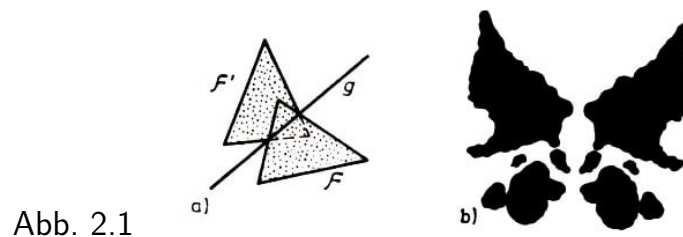


Abb. 2.1

Dabei werden die Halbebenen bezüglich g vertauscht. Gibt man sich in ε irgendeine Figur \mathfrak{F} vor, so ergeben \mathfrak{F} und ihr Bild \mathfrak{F}' zusammen eine symmetrische Figur bezüglich g (Abb. 2.1 a). Den gleichen Effekt erzielen Kinder, wenn sie ein Blatt Papier mit Farbklecken versehen und es anschließend falten (Abb. 2.1 b); und sie nutzen es beim Herstellen von Scherenschnitten mit Symmetrieachsen.

Wir erklären

Definition. σ ist eine Spiegelung an der Geraden g genau dann, wenn σ eine nicht identische Bewegung ist und $P^{\sigma} = P$ für alle Punkte $P \in g$ gilt.

Die Bezeichnung "Spiegelung" scheint zunächst ungerechtfertigt. Die russische Bezeichnung "symmetrisch bezüglich g " trifft das bisher Vorgestellte besser. Durch die nachfolgend noch aufgeführten Eigenschaften wird sich eine Rechtfertigung der Benennung ergeben.

(2.1) Aufgabe. Ist die Bewegung β in der Aufgabe (1.2) eine Geradenspiegelung? (Man prüfe das zunächst mittels Transparentpapier.)

Ist σ eine Spiegelung an g und ist H eine Halbebene bezüglich g , so gilt offenbar $p^{\sigma} = p$ für jede Halbgerade p aus g und außerdem $H^{\sigma} = H^{-}$ (und damit $(H^{-})^{\sigma} = H$). Würde letzteres nämlich nicht gelten, so wäre $H^{\sigma} = H$ und damit σ die identische Abbildung (Bewegung) nach B 8.

Nun ist leicht einsichtig, dass es an der Geraden g nicht mehr als eine Spiegelung geben kann; denn mit $p^{\alpha} = p = p^{\sigma}$ und $H^{\alpha} = H^{-} = H^{\sigma}$ ist $\alpha = \sigma$ (nach B 8). Die Existenz einer Spiegelung an g ist hier zunächst durch B 7 gesichert. Damit haben wir

(2.2) Satz. An jeder Geraden g gibt es genau eine Spiegelung.

Wir bezeichnen sie im folgenden kurz mit σ_g . Für das Bild eines Punktes P bzw. einer

Punktmenge \mathfrak{F} bei der Spiegelung σ_g schreiben wir statt P^{σ_g} bzw. \mathfrak{F}^{σ_g} kürzer P^g bzw. \mathfrak{F}^g .

Unsere Überlegung ergibt mit $(p \cup H)^\sigma = p \cup H^-$ außerdem

(2.3) Satz. Jede Geradenspiegelung σ vertauscht die beiden Orientierungen der Ebene.

Das Lot von einem beliebig gewählten Punkt $P \in g$ auf die Gerade g geht bei der Spiegelung σ an g wegen der Invarianz der Winkelgrößen in sich über. Ist Q der Fußpunkt dieses Lotes, so muss nun das Bild P^σ von P - da die Halbebenen bezüglich g vertauscht werden - in der Halbgeraden QP^- liegen.

Außerdem gilt $|PQ| = |QP^\sigma|$. Damit haben wir eine einfache konstruktive Darstellung von P^σ (Abb. 2.2):

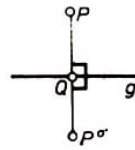


Abb. 2.2

(2.4) Satz. Ist σ die Spiegelung an g , dann ist g die Mittelsenkrechte von $\overline{PP^\sigma}$ für alle Punkte $P \in g$.

(2.5) Folgerung. Für jede Geradenspiegelung σ gilt $\sigma \circ \sigma = \iota$.

(2.6) Aufgabe. Wenn bei einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig (OJM 31046).²

Eine Figur \mathfrak{F} heißt axialsymmetrisch genau dann, wenn es eine Gerade g derart gibt, dass $\mathfrak{F}^g = \mathfrak{F}$ ist.

Wir kehren nochmals zu einer Betrachtung an unserer Zeichenebene ε zurück und stellen dazu längs der Geraden g senkrecht zu ε einen Spiegel η auf (Abb. 2.3).

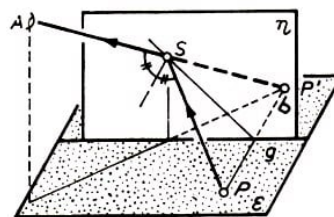


Abb. 2.3

Wir betrachten im Spiegel einen Punkt $P \in g$ der Ebene ε . Nach den optischen Gesetzen liegt der vom Auge A wahrgenommene Punkt P' bezüglich des Originals P so, dass $g_{PP'}$ senkrecht zur Spiegelebene η ist und η durch den Mittelpunkt von $\overline{PP'}$ geht.

Wegen $\eta \perp \varepsilon$ liegt P' in ε , und g ist die Mittelsenkrechte von $\overline{PP'}$. Im Zusammenhang mit dem Satz (2.4) haben wir damit eine Rechtfertigung für die Bezeichnung "Spiegelung".

²Die Abkürzung OJM steht hier und im folgenden für "Olympiaden Junger Mathematiker der DDR". Die anschließende Zahlenangabe bedeutet: 3. OJM, Startklasse 10, 4. Stufe (d.h. DDR-Stufe), 6. Aufgabe.

(2.7) Aufgabe. Es seien A, B zwei verschiedene Punkte, die auf einer Seite einer Geraden g liegen. Man konstruiere diejenigen Punkte $C \in g$, für die die Abstandssumme $|AC| + |CB|$ minimal ist.

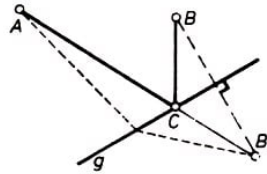


Abb. 2.4

Lösung (Abb. 2.4). Es sei $C \in g$ eine Lösung. Bei der Spiegelung an g geht B in einen Punkt B' über. Da $|CB| = |CB'|$ ist und $|AC| + |CB|$ minimal ist, müssen A, C und B' auf einer Geraden liegen (Dreiecksungleichung!). Also ist für einen Lösungspunkt C notwendig, dass C der Schnitt von $g_{AB'}$ und g ist. Dieser Schnittpunkt ist andererseits tatsächlich eine Lösung.

In ähnlicher Weise lässt sich die folgende Aufgabenstellung lösen.

(2.8) Aufgabe. Gegeben sind ein Winkel $\sphericalangle p, q$ (mit $q \neq p, p^-$) und Punkte A, B im Innern des Winkels. Man konstruiere Punkte $P \in p$ und $Q \in q$ so, dass $|AP| + |PQ| + |QB|$ minimal ist. (Man prüfe sorgfältig, ob die Aufgabe immer lösbar ist.)

(2.9) Aufgabe. Es seien g und h zwei verschiedene parallele Geraden und A, B zwei Punkte, die im Streifen zwischen g und h liegen. Man konstruiere den Weg eines Lichtstrahls von A nach B , der je zweimal an g und h reflektiert wird.

(2.10) Aufgabe. Gegeben seien zwei Geraden g und h sowie ein Kreis k . Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ derart, dass $A \in g$; $B, D \in h$ und $C \in k$ gilt.

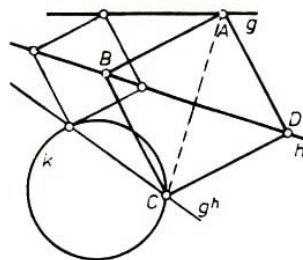


Abb. 2.5

Lösung (Abb. 2.5). Es sei $ABCD$ eine Lösung. Dann geht bei der Spiegelung an der Geraden h der Punkt A in C über. Demnach ist C ein gemeinsamer Punkt von g^h (dem Bild von g bei σ_h) und dem Kreis k . -

Die Aufgabe besitzt zwei, eine bzw. keine Lösung, wenn die Gerade g^h den Kreis schneidet bzw. berührt bzw. meidet und wenn außerdem der Schnittpunkt von g und h (falls er existiert) nicht in k enthalten ist. -

Für den Sonderfall, dass sich g und h auf k schneiden, ist die Lösung nun auch klar.

Auf diese Weise lässt sich eine ganze Klasse von Aufgaben lösen, wenn die gewünschte Konfiguration - wie hier ein Quadrat - Axialsymmetrie bezüglich vorgegebener Geraden aufweist. In der Aufgabe (2.10) könnte g etwa durch einen Kreis oder k durch ein n -Eck ausgetauscht werden.

Zur Begründung der Existenz einer Spiegelung an g hatten wir von der Eigenschaft B 7 Gebrauch gemacht. Diese Bewegungseigenschaft kann aber später selbst bewiesen werden, wobei entscheidend die Existenz von Geradenspiegelungen eingeht. Wir haben deshalb die Existenzaussage im Satz (2.2) ohne B 7 zu begründen. Wir begnügen uns dazu mit kurzen Ausführungen:

In der Ebene ε sei eine Abbildung α konstruktiv wie folgt erklärt: Es sei $P^\alpha = P$ für alle Punkte $P \in g$, und es sei für $P \notin g$ derjenige Punkt das Bild P^α , für den g die Mittelsenkrechte von $\overline{PP^\alpha}$ ist. (Eine solche Festlegung ist durch den Satz (2.4) motiviert.)

Für diese Abbildung gilt offensichtlich B I. Die Geradentreue (B 2) ergibt sich im wesentlichen mit Hilfe der Strahlensätze (Abb. 2.6).

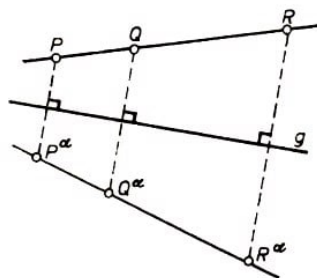


Abb. 2.6

Anhand von Abb. 2.6 wird auch deutlich, dass die Eigenschaft " Q liegt zwischen P und R " invariant bleibt.

(Wir können P^α , Q^α und R^α als Bilder von P , Q , R bei einer Parallelprojektion deuten.) Damit kann im einzelnen B 3 begründet werden. Schließlich folgt $|PQ| = |P^\alpha Q^\alpha|$ aus der Eigenschaft, dass $PQQ^\alpha P^\alpha$ ein gleichschenkliges Trapez (ein Giebel) ist, wenn von speziellen Lagen abgesehen wird.

3 Drehungen

Wir wählen in der Zeichenebene ε einen Punkt P und heften mit einer Stecknadel das Transparentpapier an dieser Stelle an ε . Die Bewegungsmöglichkeiten des Transparentpapiers sind damit eingeschränkt; wir können es nur um die Stecknadel drehen, um eine Abbildung von ε auf ε zu stiften.

Wir erklären nun:

Definition. ρ ist eine Drehung (oder Rotation) um den Punkt P genau dann, wenn ρ eine Bewegung ist und wenn entweder $\rho = \iota$ (identische Bewegung) oder P der einzige Fixpunkt von ρ ist.

Mit ρ ist offenbar auch die Umkehrabbildung ρ^{-1} eine Drehung um P .

(3.1) Aufgabe. Sind die Bewegungen α und γ in der Aufgabe (1.2) Drehungen? (Man prüfe dies zunächst mittels Transparentpapier.)

Bei einer Drehung ρ um P liegt das Bild Q^ρ eines Punktes $Q \neq P$ auf dem Kreis um P durch Q , denn es gilt $|PQ^\rho| = |PQ|$. Das Drehzentrum P liegt demnach auf der

Mittelsenkrechten von $\overline{QQ^\rho}$, falls $Q^\rho \neq Q$ ist.

(3.2) Aufgabe. Eine rechteckige Platte $ABCD$ soll drehbar so gelagert werden, dass - ausgehend von $ABCD$ - die in der Abb. 3.1 vorgegebene Lage $A'B'C'D'$ eingenommen werden kann. Wo muss das Drehzentrum liegen?

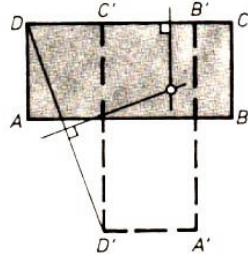


Abb. 3.1

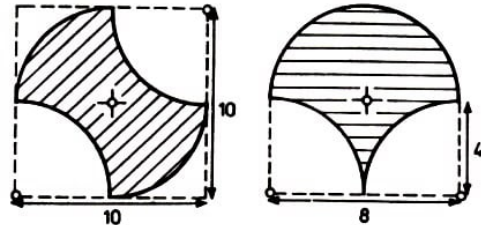


Abb. 3.2, 3.3

Lösung. Das Drehzentrum muss auf den Mittelsenkrechten von $\overline{CC'}$ und $\overline{DD'}$ liegen und kann damit konstruktiv bestimmt werden (Abb. 3.1). I

(3.3) Sofort-Aufgabe.³ Man bestimme die Maßzahl des Inhalte der schraffierten Fläche a) in Abb. 3.2; b) in Abb. 3.3.

(3.4) Aufgabe. Gegeben seien Geraden g und h durch einen Punkt P und eine Fahne $p \cup H$ mit $O(p) = P$ und $p \subset g$, wobei $g = h$ nicht ausgeschlossen ist. Durch die Nacheinanderausführung $\sigma_g \circ \sigma_h$ entsteht aus der Fahne $p \cup H$ eine Fahne $q \cup K$ (Abb. 3.4a). Man untersuche, ob durch eine Drehung oder eine Geradenspiegelung die Fahne $p \cup H$ in $q \cup K$ überführt werden kann. Die gleiche Frage ist bezüglich $p \cup H$ und $q \cup K^-$ zu klären.

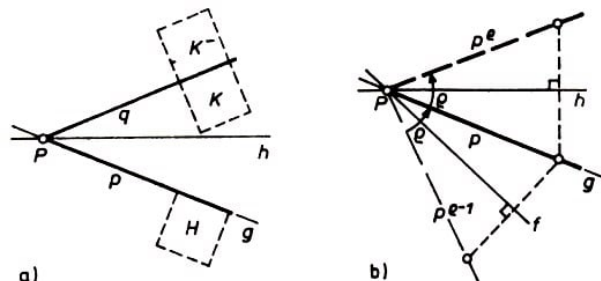


Abb. 3.4 a)

Lösung (Abb. 3.4a). Für den Fall $g = h$ ist $\sigma_g \circ \sigma_h = \iota$, und damit entsteht $qu \cup K$ aus $p \cup H$ durch die Drehung ι und $q \cup K^-$ aus $p \cup H$ durch die Spiegelung σ_h .

Es sei jetzt $g \neq h$. Angenommen, $\sigma_g \circ \sigma_h$ hat einen weiteren Fixpunkt $F (\neq P)$. Aus $(F^g)^h = F$ folgte dann $F^g = F^h$ nach der Folgerung (2.5). Da dieser gemeinsame Punkt von F verschieden ist (wegen $F \notin g \cap h$), müssten nach dem Satz (2.4) die Geraden g und h als Mittelsenkrechten von $\overline{FF^g}$ und $\overline{FF^h}$ gleich sein; das widerspricht $g \neq h$.

Also ist $\sigma_g \circ \sigma_h$ eine Drehung um P . - Wegen $K = H^{gh} = (H^-)^h$ gilt $H^h = K^-$ (nach Aufgabe (1.1b)). Außerdem ist $p^h = q$. Nach der Starrheitsaussage B 8 ist demnach die Spiegelung an h diejenige Bewegung, die $p \cup H$ in $q \cup K$ überführt.

³Mit der Bezeichnung "Sofort-Aufgabe" möchten wir deutlich machen, dass die Lösung anhand der Vorlage sofort ohne weitere (schriftliche) Ausarbeitungen gefunden werden kann.

Diese Überlegungen haben uns zu verschiedenen bemerkenswerten Einsichten geführt:

(3.5) Satz. Sind g und h Geraden durch einen Punkt P , so ist $\sigma_g \circ \sigma_h$ eine Drehung um P .

(3.6) Satz. a) Zu je zwei Fahnen $p \cup H$ und $q \cup K$ mit gemeinsamen Scheitel P gibt es entweder eine Drehung ρ um P mit $(p \cup H)^\rho = q \cup K$, oder $q \cup K$ ist das Bild von $p \cup H$ bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle p, q$.

b) Zu Halbgeraden p, q mit gemeinsamen Scheitel P gibt es eine und nur eine Drehung ρ um P , die p in q abbildet.

Die Aussage b) ist eine Folgerung aus a); dabei ergibt sich die Eindeutigkeitsaussage nach B 8.

Die Frage in der Aufgabe (3.1) lässt sich jetzt einfach mit "Ja" beantworten. So ist γ eine Drehung, wenn (und nur wenn) β eine Geradenspiegelung ist; und letzteres gilt nach der Lösung der Aufgabe 2.1.

Außerdem möchten wir hervorheben, dass die Existenz der Drehungen im Satz (3.6) ohne die Voraussetzung von B 7 (Beweglichkeit) nachgewiesen ist, da sie mit Geradenspiegelungen dargestellt worden sind.

Wir betrachten jetzt eine beliebige Drehung ρ um P ; ferner sei g eine beliebige Gerade durch P und p eine Halbgerade auf g mit dem Scheitel P .

Es gilt $O(p^\rho) = P$. Ist h die Winkelhalbierende von $\sphericalangle p, p^\rho$, so gilt $(p^\rho)^h = p^h = P^\rho$ (Abb. 3.4b) und somit $\sigma_g \circ \sigma_h = \rho$ nach den Sätzen (3.5) und (3.6 b)). Entsprechend erhält man $\sigma_f \circ \sigma_g = \rho$ für die Winkelhalbierende f von $\sphericalangle p, p^{\rho^{-1}}$ (Abb. 3.4b). Damit haben wir folgende Umkehrung des Satzes (3.5):

(3.7) Darstellungssatz. Ist ρ eine Drehung um P und g eine Gerade durch P , so gibt es (eindeutig bestimmte) Geraden h und f durch P derart, dass die Nacheinanderausführung $\sigma_g \circ \sigma_h$ der Spiegelungen an den Geraden g und h gleich der Drehung ρ ist und ebenso $\sigma_f \circ \sigma_g = \rho$ gilt.

Zusammen mit dem Satz (2.3) gilt dann

(3.8) Satz. Bei jeder Drehung bleibt die Orientierung erhalten.

Wir wenden uns wieder einigen Aufgaben zu.

(3.9) Aufgabe. Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und der Radiuslänge r , und P sei ein innerer Punkt des Kreises (d.h. $|MP| < r$). Man konstruiere alle Sehnen \overline{AB} , die eine gegebene Länge s ($s < 2r$) besitzen und P enthalten.

(3.10) Aufgabe. Es sei $ABCD$ ein Rhombus, und es seien ρ_1, ρ_2 und ρ_3 die Drehungen um A mit $D^{\rho_1} = B$ bzw. um B mit $A^{\rho_2} = C$ bzw. um C mit $B^{\rho_3} = D$.

a) Was für eine Bewegung ist $\rho_1 \circ \rho_2$?

b) Man bestimme alle Punkte P der Ebene, die bezüglich ρ_1 und ρ_3 das gleiche Bild besitzen.

Wir empfehlen, diese Aufgabe nicht zu übergeben!

(3.11) Aufgabe. Für zwei nicht parallele Geraden a und b gilt $a \perp b$ genau dann, wenn $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$ ist.

Lösung. Es sei S der Schnittpunkt von a , b . Wir wählen auf a eine Halbgerade p mit dem Scheitel S . Die Produkte $\sigma_a \circ \sigma_b$ und $\sigma_b \circ \sigma_a$ sind nach dem Satz (3.5) Drehungen um S . Gilt $a \perp b$, so ist $(p^a)^b = p^b = p^-$ (Satz (2.4)) und $(p^b)^a = (p^-)^a = p^-$, d.h., p wird bei beiden Drehungen auf die gleiche Halbgerade p^- abgebildet. Nach dem Satz (3.6 b) sind dann diese Drehungen gleich.

Umgekehrt setzen wir nun die Gleichheit der Drehungen voraus und betrachten einen Punkt P aus $a \setminus b$. (Es ist $a \setminus b \neq \emptyset$ wegen $a \nparallel b$):

Dann gilt $P^b \neq P$ (wegen $P \notin b$) und $P^b = P^{ab} = (P^b)^a$ auf Grund der Voraussetzung. Nach der letzten Aussage muss $P^b \in a$ und damit a die Verbindungsgerade von P und P^b sein. Überdies ist b die Mittelsenkrechte von $\overline{PP^b}$. Folglich gilt $a \perp b$.

Das Ergebnis der Aufgabe zeigt insbesondere, dass es bei der Nacheinanderausführung zweier Geradenspiegelungen - bis auf eine spezielle Lage der Geraden zueinander - stets auf die Reihenfolge ankommt.

Wir haben dargelegt, dass sich die Drehungen um einen Punkt P durch Produkte von zwei Spiegelungen an Geraden durch P darstellen lassen und dass Produkte dieser Art stets Drehungen um P sind. Diese Darstellung kann - wie die bisherigen Darlegungen zeigen - in konstruktiver und einfacher Weise ausgeführt werden.

Eine Drehung ρ ist außerdem nach dem Satz (3.6 b) durch das Drehzentrum P und durch ein geordnetes Paar (p, q) von Halbgeraden mit dem Scheitel P (d.h. durch einen gerichteten Winkel $\angle p, q$) bestimmt, für das $q = p^\rho$ ist.

Für eine Konstruktion der Bilder bei der Drehung ist nützlich, die Beziehung zwischen $\angle p, q$ und einem weiteren gerichteten Winkel $\angle p', q'$ zu kennen, der die gleiche Drehung ρ durch $q' = p^\rho$ bestimmt.

Wir zeigen zunächst

(3.12) Satz. Sind ρ_1 und ρ_2 Drehungen um P , dann ist auch $\rho_1 \circ \rho_2$ eine Drehung um P , und es gilt $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

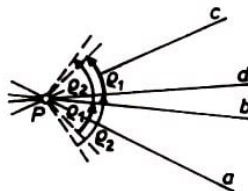


Abb. 3.5

Beweis (Abb. 3.5). Wir können hier mit Vorteil die Darstellung der Drehungen mit Hilfe der Geradenspiegelungen ausnutzen. Zu einer beliebig gewählten Geraden a durch P gibt es eine Gerade b durch P mit $\rho_1 = \sigma_a \circ \sigma_b$ und außerdem eine Gerade c durch P mit $\rho_2 = \sigma_b \circ \sigma_c$. Nun ist

$$\rho_1 \circ \rho_2 = (\sigma_a \circ \sigma_b) \circ (\sigma_b \circ \sigma_c) = \sigma_a \circ \sigma_c$$

und damit nach Satz (3.5) eine Drehung um P .

Die restliche Behauptung $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$ beweisen wir durch "Rechnen" mit Spiegelungen. Es gibt eine Gerade d durch P mit $\rho_2 = \sigma_a \circ \sigma_d$. Nun ist $\sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_a \circ \sigma_d$ und damit

$$\sigma_a \circ (\sigma_b \circ \sigma_c) \circ \sigma_c = \sigma_a \circ (\sigma_a \circ \sigma_d) \circ \sigma_c$$

und weiter $(\rho_1 =) \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$. Folglich gilt

$$\rho_2 \circ \rho_1 = (\sigma_a \circ \sigma_d) \circ (\sigma_d \circ \sigma_c) = \sigma_a \circ \sigma_c = \rho_1 \circ \rho_2$$

Nun lässt sich einfach zeigen, dass q durch dieselbe Drehung α in q' übergeführt wird, die p auf p' abbildet. Nach dem eben bewiesenen Satz ist nämlich $\rho \circ \alpha = \alpha \circ \rho$ und damit $q' = (p')^\rho = (p^\alpha)^\rho = (p^\rho)^\alpha = q^\alpha$ (Abb. 3.6).

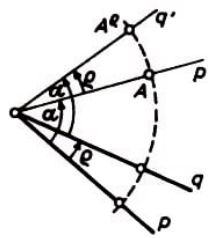


Abb. 3.6

Damit ist $\angle p', q'$ das Bild von $\angle p, q$ bei einer Drehung um den Scheitel des Winkels; nach B 6 und Satz (3.8) gilt dann wie erwartet $|\angle p, q| = |\angle p', q'|$.

Diese Größe gerichteter Winkel heißt Drehmaß. Die Drehung um P mit dem Drehmaß $\vec{\alpha}$ bezeichnen wir mit $\rho(P, \vec{\alpha})$.

Der obige Sachverhalt zwischen $\angle p, q$ und $\angle p', q'$ ist die Grundlage für die in der Schule übliche Konstruktion des Bildes eines Punktes A bei einer Drehung ρ (Abb. 3.6), die durch das Zentrum P und einen gerichteten Winkel $\angle p, q$ mit $q = P^rho$ gegeben ist.

(3.13) Aufgabe. Gegeben sind drei verschiedene zueinander parallele Geraden a, b, c und ein Punkt $A \in a$. Man konstruiere alle gleichseitigen Dreiecke ABC mit $B \in b$ und $C \in c$.

Lösung. Es sei ABC eine Lösung. Dann geht bei der Drehung ρ um A mit $B\rho = C$ die Gerade b in eine Gerade b' über, die c in dem Punkt C schneidet (Abb. 3.7a).

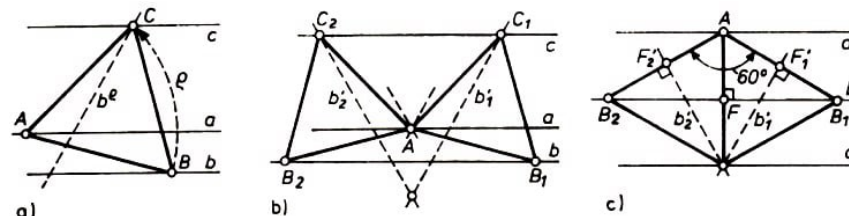


Abb. 3.7

Der gerichtete Winkel $\angle BAC$ hat dabei die Größe 60° oder 300° . - Aus diesen für eine Lösung notwendigen Bedingungen ist sofort eine Konstruktion ersichtlich:

Wir drehen b um A mit 60° und mit 300° . Die Bilder b'_1 und b'_2 schneiden c in Punkten C_1 und C_2 (Abb. 3.7b). -

Jedes dieser Resultate ergibt offenbar eine Lösung. Die beiden Schnittpunkte C_1 und

C_2 fallen genau dann zusammen, wenn der Schnittpunkt von b'_1 und b'_2 auf c liegt; und dies ist genau dann der Fall, wenn b zwischen a und c liegt und - wie eine einfache Rechnung zeigt (siehe dazu Abb. 3.7 c) - $d(b, c) = d(b, a)$ für die Abstände zwischen den parallelen Geraden a, b, c gilt.

In diesem Fall sind aber zwei geeignete Punkte B_1, B_2 auf b möglich; damit liegen auch hier genau zwei Lösungen vor.

Auf diese Weise ist wieder eine ganze Klasse von Aufgaben lösbar. So können anstelle der drei parallelen Geraden in der Aufgabe (3.13) drei sich in einem Punkt schneidende Geraden oder drei konzentrische Kreise gewählt werden. Wir stellen noch folgende Aufgaben:

(3.14) Aufgabe. Zu einem beliebig vorgegebenen Dreieck ABC und vorgegebenem Punkt $P \in BC$ sind Punkte $Q \in CA$ und $R \in AB$ derart zu konstruieren, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck ist. Der Frage der Lösbarkeit sollte besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

(Mit der Lösung dieser Aufgabe durch Drehungen ist dann auch eine einfache bewegungsgeometrische Behandlung von OJM 61043 gegeben.⁴)

(3.15) Aufgabe. In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegener Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe das Quadrat (den Streckenzug $ABCD$). Man beschreibe die Menge aller derjenigen Punkte R von ε , für die das Dreieck PQR gleichseitig ist. (OJM 61241.)

(3.16) Aufgabe. Gegeben seien zwei beliebige Geraden a und c und ein Punkt $B \notin a, c$. Man konstruiere alle Quadrate $ABCD$ mit $A \in a$ und $C \in c$.

Wir wenden uns nun einigen Beweisaufgaben zu.

(3.17) Aufgabe. Über den Seiten \overline{AB} und \overline{BC} eines Dreiecks seien Quadrate $ABDE$ und $BCFG$ konstruiert. Man beweise, dass das Lot h_B von B auf g_{CA} die Strecke \overline{DG} halbiert!

Lösung. Es sei ρ die Drehung um B mit $D^\rho = A$. Dann ist $G = C^\rho$ und B der Mittelpunkt von $\overline{CG^\rho}$. Ferner gilt $g_{AC} \perp h_B^\rho$ (Abb. 3.8). Folglich halbiert h_B^ρ mit $\overline{CG^\rho}$ auch die Strecke $\overline{AG^\rho} = \overline{D^\rho G^\rho}$. Damit gilt die Behauptung.

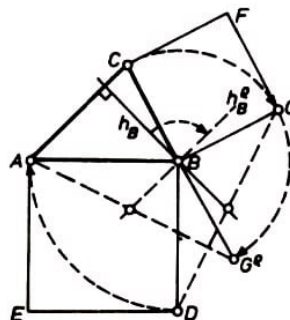


Abb. 3.8

⁴Vgl. dazu Engel/Pirl: Aufgaben mit Lösungen aus OJM der DDR, Bd. II (Berlin 1975), S. 70/71. (Dort wird ein anderer Lösungsweg beschritten.)

(3.18) Aufgabe. Über den Seiten eines Parallelogramms werden nach außen die Quadrate konstruiert. Man beweise, dass deren Mittelpunkte die Ecken eines Quadrates sind. (Gilt dies auch, wenn die Quadrate nach innen gelegt werden?)

(3.19) Aufgabe. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Man bestimme alle Punkte P , für die $|CP| = |AP| + |BP|$ gilt. (OJM 171224.)

Lösung. Es sei a die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks. Offenbar gilt für jeden Punkt P der Ebene $|PA| + a = |PA| + |AC| \geq CP$ bzw. $|PB| + a \geq |CP|$.

Demnach kann P nur den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn $|AP| \leq a$ und $|BP| \leq a$ gilt. Somit liegen die gesuchten Punkte im Durchschnitt der Kreisflächen mit dem Radius a und den Mittelpunkten A und B . Nach der Dreiecksungleichung scheiden aus dieser Punktmenge alle diejenigen Punkte aus, die mit C auf der gleichen Seite von g_{AB} liegen (Abb. 3.9).

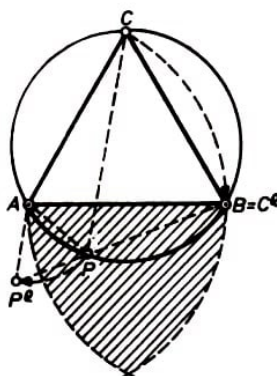


Abb. 3.9

3. Drehungen 37 Nun sei P ein Punkt des verbleibenden Flächenstücks, für den $|CP| = |AP| + |BP|$ ist. Für $P = A$ oder $P = B$ gilt offenbar diese Bedingung.

Es sei jetzt $P \neq A, B$. Durch die Drehung ρ um A mit $C = B$ entsteht das gleichseitige Dreieck APP^ρ (Abb. 3.9), und es gilt

$$|PP^\rho| + |PB| = |AP| + |BP| = |CP| = |BP^\rho|$$

also ist $P \in \overline{BP^\rho}$. Die Größe des Winkels $\sphericalangle APB$ beträgt somit $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$; folglich liegt P auf dem Umbogen des Dreiecks ABC zwischen A und B .

Umgekehrt sind aber auch alle Punkte dieses Kreisbogens (einschließlich A und B) Lösungen der Aufgabe.

(3.20) Aufgabe. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Man bestimme alle Punkte P , für die $|CP|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$ gilt.

Bemerkung. Durch die Drehung ρ um A mit $C^\rho = B$ hat man die Längen $|AP|$, $|BP|$ und $|CP|$ wieder als Längen der Seiten eines Dreiecks.

Eine einfachere Lösung ergibt sich hier mit Koordinaten, d.h. mit Mitteln der analytischen Geometrie. Wir wählen dazu ein kartesisches Koordinatensystem so, dass $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ und $C(0, \sqrt{3})$ ist. Für $P(x, y)$ gilt dann

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PB|^2 &= |PC|^2 \Leftrightarrow ((x+1)^2 + y^2) + ((x-1)^2 + y^2) = x^2 + (y-\sqrt{3})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4 \end{aligned}$$

Und die letzte Gleichung ist eine Gleichung der Punkte des Kreises um $D(0, -\sqrt{3})$ durch A (Abb. 3.10).

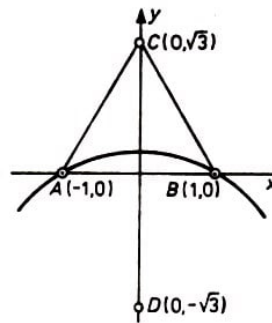


Abb. 3.10

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass bewegungsgeometrische Mittel und Methoden in der Elementargeometrie nun keinesfalls stets zu bevorzugen sind.

(3.21) Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Auf seinen Seiten werden nach innen die gleichseitigen Dreiecke ABK , BCL , CDM und DAN errichtet. Man beweise, dass die Mittelpunkte der vier Strecken \overline{KL} , \overline{LM} , \overline{MN} und \overline{NK} zusammen mit den Mittelpunkten der acht Strecken \overline{AK} , \overline{BK} , \overline{BL} , \overline{CL} , \overline{CM} , \overline{DM} , \overline{DN} und \overline{AN} die Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks sind. (IMO 191.)⁵

4 Verschiebungen

Wir zeichnen auf unserer Zeichenebene ε eine Gerade g aus, legen das Transparentpapier auf die Zeichenebene und erhalten durch Kopieren von g auf dem Transparentpapier die Gerade g_t .

Das Transparentpapier verschieben wir nun so, dass g , längs g gleitet (Abb. 4.1). Wir sehen dabei, dass jede in der Richtung von g liegende Gerade h ebenfalls auf sich abgebildet wird und dass jede Gerade f , die nicht parallel zu g ist, in eine zu f echt parallele Gerade $f' \neq f$ (d.h. $f \cap f' = \emptyset$) übergeht.

Bis auf die echte Parallelität von f und f' bestehen alle diese Eigenschaften auch, wenn wir das Transparentpapier nicht bewegen, also die identische Abbildung ι von ε betrachten. Es ist zweckmäßig, diesen Fall in den Begriff der Verschiebung mit einzu beziehen.

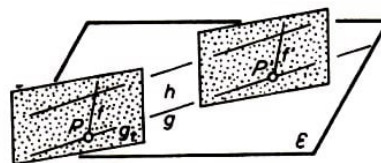


Abb. 4.1

Definition. τ ist eine Verschiebung (oder Translation) genau dann, wenn τ eine Bewegung und $\tau = \iota$ ist oder es andernfalls eine Richtung⁶ $R(g)$ so gibt, dass $h^\tau = h$ für

⁵Die Abkürzung IMO bedeutet "Internationale Mathematikolympiade"; die anschließenden Zahlen geben den Jahrgang (19.) und die Aufgabennummer (1.) an.

⁶Wir erinnern daran, dass die Richtung $R(g)$ der Geraden g die Menge der zu g parallelen Geraden (hier jetzt nur aus der Ebene ε) ist.

alle Geraden $h \in R(g)$ und $f^\tau \cap f = \emptyset$ für alle Geraden $f \notin R(g)$ gilt.

Anhand der Definition ist leicht ersichtlich, dass mit τ auch die Umkehrabbildung τ^{-1} eine Verschiebung ist.

Es sei τ eine nicht identische Verschiebung. Dann kann τ auf Grund der Definition keinen Fixpunkt besitzen. Nun seien weiter P und Q zwei Punkte so, dass Q nicht auf g_{PP^τ} liegt. Nach der Definition der Verschiebung liegt Q^τ auf der Parallelen zu g_{PP^τ} durch Q und auf der Parallelen zu $g - PQ$ durch P^τ , d.h., $QPP^\tau Q^\tau$ ist ein Parallelogramm (Abb. 4.2).

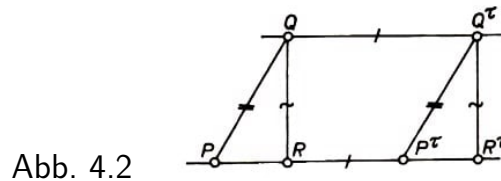


Abb. 4.2

Das Bild von Q lässt sich demnach allein mit den Punkten P und P^τ durch eine einfache Parallelogrammkonstruktion darstellen.

Mit Hilfe von Q kann nun auf die gleiche Weise das Bild jedes Punktes R auf der Geraden g_{PP^τ} bestimmt werden (Abb. 4.2).

Demnach gibt es zu Punkten A, B nicht mehr als eine Verschiebung τ mit $A^\tau = B$. Die Existenz einer solchen Verschiebung ist dabei aber noch offen.

Wir betrachten dazu das Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b$ von Spiegelungen an zueinander parallelen Geraden a, b . Für $a = b$ ist $\sigma_a \circ \sigma_b$ die identische Abbildung ι , also eine Verschiebung. Es sei jetzt $a \cap b = \emptyset$. Für eine Gerade g , die zu a und damit auch zu b orthogonal ist, gilt $(g^a)^b = g^b = g$. Liegt eine Gerade f nicht in dieser Richtung $R(g)$, dann gilt $(f^a)^b \cap f = \emptyset$.

Sonst hätten nämlich $(f^a)^b$ und f einen gemeinsamen Punkt F , und es wäre $(F^a)^b = F$ und damit $a = b$. (Vgl. Lösung der Aufgabe 3.10 b.) Somit ist nach Definition das Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b$, im Fall $a \cap b = \emptyset$ eine nicht identische Verschiebung. Wir haben also

(4.1) Satz. Sind a, b zueinander parallele Geraden, dann ist $\sigma_a \circ \sigma_b$ eine Verschiebung.

Damit ist nach dem Abschnitt 2 auch die Existenz von Verschiebungen - unabhängig von B 7 - gesichert. Wir können leicht noch mehr zeigen.

Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so legen wir durch A die Orthogonale a zur Verbindungsgeraden g_{AB} ; ferner sei b die Mittelsenkrechte von \overline{AB} (Abb. 4.3).

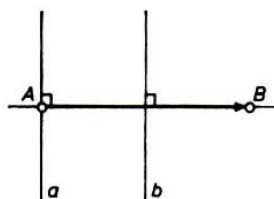


Abb. 4.3

Nach Satz 4.1 ist $\sigma_a \circ \sigma_b$ eine Verschiebung τ ; und für sie gilt $A^\tau = (A^a)^b = A^b = B$. Beziehen wir nun noch die obigen Betrachtungen zur Eindeutigkeit einer Verschiebung

und den Sonderfall $A = B$ mit ein, so ergibt sich

(4.2) Satz. Zu Punkten A, B gibt es eine und nur eine Verschiebung τ mit $A^\tau = B$.

Diese Verschiebung wird kurz mit \overrightarrow{AB} oder $v(A, B)$ bezeichnet.

(4.3) Aufgabe. Man zeige:

a) $(\overrightarrow{AB})^{-1} = \overrightarrow{BA}$.

b) Ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ und liegen A, B, C auf keiner gemeinsamen Geraden, so gilt $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

(4.4) Aufgabe. Es seien zwei Kreise k_1 und k_2 sowie eine Gerade h gegeben. Man konstruiere zwei Punkte $A \in k_1$ und $B \in k_2$, derart, dass $g_{AB} \parallel h$ und $|AB|$ einer vorgegebenen Länge l gleich ist.

(4.5) Aufgabe. Man konstruiere ein konvexen Trapez $ABCD$ aus den Seitenlängen a, b, c, d , für das \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{CD} parallele Seiten sind.

Nach einigem Probieren mit üblichen Dreiecks- oder Viereckskonstruktionen, die nur auf den vorgegebenen Längen aufbauen, ist ersichtlich, dass man so zu keiner Lösung der Aufgabe (4.5) kommt. Ein Viereck mit festen Seitenlängen ist eben noch beweglich (Abb. 4.4a). Um so überraschender erscheint die folgende einfache Lösung mit einer Verschiebung.

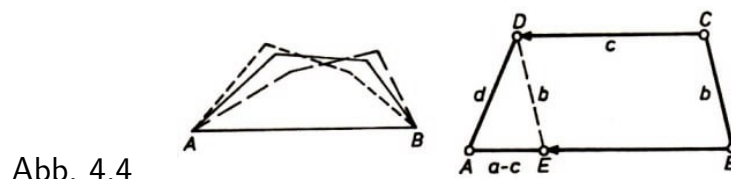


Abb. 4.4

Lösung (Abb. 4.4b). Es sei $ABCD$ eine Lösung; o.B.d.A. kann noch $a \geq c$ vorausgesetzt werden. Bei der Verschiebung \overrightarrow{CD} geht dann B in einen Punkt E über, der auf der Strecke AB liegt. Ist $a > c$, so bilden A, E, D ein Dreieck mit den Seitenlängen $a - c, b$ und d , d.h., $a - c, b$ und d erfüllen die Dreiecksungleichungen. Im Fall $a = c$ ist $b = d$. Dies sind nun notwendige Bedingungen für die Existenz einer Lösung.

Eine Konstruktion ist jetzt leicht anzugeben. - Ist $a > 0$ und erfüllen $a - c, b, d$ die Dreiecksungleichungen, dann gibt es bis auf Kongruenz genau eine Lösung. Gilt $a = c$ und $b = d$, dann gibt es beliebig viele nicht kongruente Lösungen, nämlich alle Parallelogramme mit diesen Seitenlängen.

(4.6) Aufgabe. Man unterst die Lösbarkeit, wenn in der Aufgabenstellung (4.5) die Forderung nach Konvexität nicht erhoben wird.

(4.7) Aufgabe. An welcher Stelle eines breiten Flusses ist senkrecht zu seinen Ufern eine Brücke zu bauen, damit zwei Orte A und B , die auf verschiedenen Seiten des Flusses liegen, auf dem kürzesten Wege verbunden werden.

(4.8) Aufgabe. Unter Verwendung des Satzes (4.1) löse man nochmals die Aufgabe (2.3).

Ausgehend von den Darlegungen, die anhand der Abb. 4.3 geführt wurden, wäre noch zu klären, welche Geraden g, h ebenfalls von der Art sind, dass $\sigma_g \circ \sigma_h$ die Verschiebung \overrightarrow{AB} darstellt. Dazu müssen notwendigerweise g, h parallel zueinander sein. (Sonst wäre $\sigma_g \circ \sigma_h$ nach Satz (3.5) eine (nicht identische) Drehung.) Weiterhin müssen A, B auf einem gemeinsamen Lot zu g liegen.

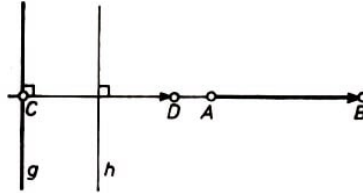


Abb. 4.5

Letzteres sei nun gegeben. Es sei C der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes von A, B auf g und D das Bild von C bei der Verschiebung \overrightarrow{AB} (Abb. 4.5). Es ist $D = C$ genau dann, wenn $B = A$ gilt. Für diesen Sonderfall leistet $h = g$ das Gewünschte.

Ansonsten wählen wir als Gerade h - entsprechend Abb. 4.3 - die Mittelsenkrechte von \overline{CD} (Abb. 4.5). Nach Satz (4.2) ist $\overline{CD} = \overrightarrow{AB}$ und damit $\sigma_g \circ \sigma_h = \overrightarrow{AB}$. Entsprechend gibt es (genau) eine Gerade $f \parallel g$ mit $\sigma_f \circ \sigma_g = \overrightarrow{AB}$. Wir haben somit eine zum Darstellungssatz (3.7) analoge Aussage

(4.9) Darstellungssatz. Ist \overrightarrow{AB} eine Verschiebung und g eine Gerade, so dass A, B auf einem gemeinsamen Lot bezüglich g liegen, dann gibt es (genau) eine Gerade $h \parallel g$ derart, dass $\sigma_g \circ \sigma_h = \overrightarrow{AB}$ gilt.

Zusammen mit dem Satz (2.3) ergibt sich daraus

(4.10) Satz. Bei Verschiebungen bleibt die Orientierung unverändert.

5 Punktspiegelungen

Wir wenden uns hier speziellen Drehungen zu. Um den Scheitel S einer Halbgeraden p gibt es genau eine Drehung ρ , die p in p^- überführt (Satz (3.6 b)). Bei dieser Drehung geht dann auch jede andere Halbgerade q mit dem Scheitel S in ihre entgegengesetzte Halbgerade über. Den Nachweis dafür überlassen wir dem Leser als Aufgabe (5.1.)

Definition. σ heißt eine Spiegelung an dem Punkt S (oder eine Halbdrehung an S) genau dann, wenn σ eine Drehung um S ist und $p^\sigma = p^-$ für alle Halbgeraden p mit dem Scheitel S gilt.

Auf Grund des Satzes (3.6b)) und der Aussage in der Aufgabe (5.1) gibt es an jedem Punkt S eine und nur eine Spiegelung; wir bezeichnen sie kurz mit σ_S ; statt \mathfrak{F}^{σ_S} schreiben wir später auch kurz \mathfrak{F}^S .

Eine Rechtfertigung für die Bezeichnung "Spiegelung" lässt sich leicht geben. Ist P irgendein von S verschiedener Punkt, so liegt sein Bild P^σ nach der Definition auf SP^- ; außerdem gilt $|SP^\sigma| = |SP|$.

Demnach ist S der Mittelpunkt von $\overline{PP^\sigma}$. Die damit gegebene einfache konstruktive Darstellung des Bildpunktes P^σ (Abb. 5.1) gleicht weitgehend der bei der Spiegelung an einer Geraden (siehe Abb. 2.2).

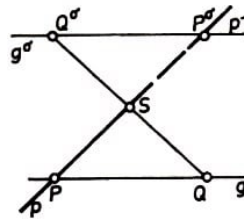


Abb. 5.1

Eine Figur \mathfrak{F} heißt zentralsymmetrisch (oder punktsymmetrisch) genau dann, wenn es einen Punkt S derart gibt, dass $\mathfrak{F}^S = \mathfrak{F}$ ist.

Analog zu Folgerung (2.5) bei den Spiegelungen an Geraden gilt offenbar auch hier

(5.2) Satz. Für jede Spiegelung σ an einem Punkt ist $\sigma \circ \sigma = \iota$.

Mit Hilfe des Strahlensatzes ist die folgende Aussage leicht einsichtig (Abb. 5.1).

(5.3) Satz. Bei der Spiegelung an einem Punkt S gilt $g^S \parallel g$ für jede Gerade g ; insbesondere ist $g^S \cap g = \emptyset$ für jede Gerade $g \not\ni S$.

(5.4) Sofort-Aufgabe. Man bestimme die Maßzahl des Inhalts der schraffierten Fläche a) in der Abb. 5.2; b) in der Abb. 5.3.

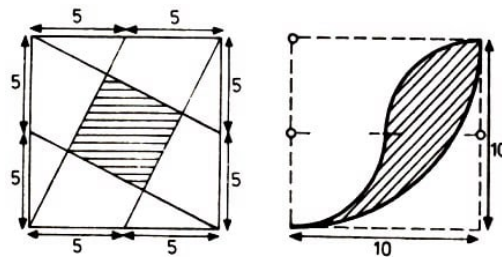


Abb. 5.2,5.3

(5.5) Sofort-Aufgabe. Ein Quadrat $ABCD$ mit 18 cm Seitenlänge ist in 9 mal 9 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie die Abb. 5.4 es zeigt. Der Streifenzug ist grau hervorgehoben. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang dieses Streifenzuges. (Nach OJM 21511.)

(5.6) Aufgabe. Gegeben sei ein Winkel $\sphericalangle p, q$ und ein Punkt A in seinem Inneren. Man konstruiere Punkte $P \in p$ und $Q \in q$ derart, dass A Mittelpunkt von \overline{PQ} ist. (OJM 18733.)

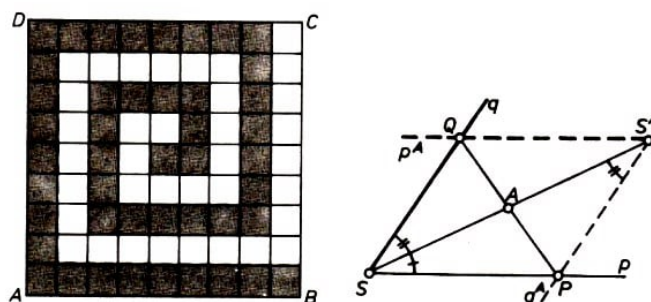


Abb. 5.4,5.5

Lösung (Abb. 5.5). Es seien P, Q zwei Punkte der gewünschten Art. Dann werden bei der Spiegelung an A die Punkte P und Q vertauscht. Also muss notwendigerweise P der Schnittpunkt von p und dem Bild q^A von q bei der Spiegelung an A sein. -

Die Halbgeraden p und q^A schneiden sich nun tatsächlich stets. Denn p und q liegen, da A ein innerer Punkt des Winkels $\sphericalangle p, q$ mit dem Scheitel S ist, auf verschiedenen Seiten von g_{AS} . Folglich liegt q^A mit p auf einer Seite.

Außerdem ist die Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle p, SA^+$ und $\sphericalangle q^A, S^A A^+$ gleich der Größe von $\sphericalangle p, q$ (siehe Abb. 5.5) und damit kleiner als 180° . - Demnach besitzt die Aufgabe stets genau eine Lösung.

Auf diese Weise lassen sich durch Punktspiegelung eine Reihe von Aufgaben lösen, bei denen die gewünschte Konfiguration - wie hier $\{P, Q\}$ - bei der Spiegelung an einem gegebenen Punkt in sich übergeht, also bezüglich eines vorgegebenen Punktes zentral-symmetrisch ist.

(5.7) Aufgabe. Man konstruiere zu vorgegebenem Dreieck AP_1P_2 kongruente Kreise k_1 und k_2 derart, dass k_1 und k_2 sich in A berühren und $P_1 \in k_1$ sowie $P_2 \in k_2$ gilt.

(5.8) Aufgabe. Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 , die sich in zwei Punkten P und Q schneiden. Man konstruiere alle Geraden g durch P , aus denen die beiden Kreise gleichlange Sehnen ausschneiden.

(5.9) Aufgabe. In einem Sehnenviereck werden von den Seitenmitten die Lote auf die jeweils gegenüberliegende Seite gefällt. Man beweise, dass diese Lote einen gemeinsamen Punkt besitzen.

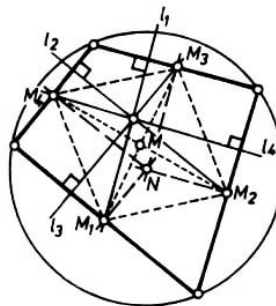


Abb. 5.6

Lösung (Abb. 5.6). Es seien M_1, M_2, M_3 und M_4 die Mitten aufeinanderfolgender Seiten des Sehnenvierecks und l_1, l_2, l_3 und l_4 die zugehörigen Lote. Bekanntlich ist $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm. Beim Spiegeln an dem Mittelpunkt M dieses Parallelogramms gehen nun l_1, \dots, l_4 in die Mittelsenkrechten der Seiten des vorgegebenen Sehnenvierecks über (Satz (5.3)). Diese Mittelsenkrechten schneiden sich aber in einem Punkt N , dem Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks. Folglich gehen l_1, \dots, l_4 durch das Bild von N bei der Spiegelung an M .

Häufig wird mit dem Sehnenviereck die Vorstellung von einem konvexen Viereck verbunden - völlig zu Unrecht. Spielt die Konvexität bei der gerade behandelten Aufgabe eine Rolle? Die letzten Zweifel verschwinden, wenn man sich ein nicht konvexes Sehnenviereck einmal vergibt und die Beweisgedanken daran konstruktiv nachvollzieht. Wir möchten das nachdrücklich empfehlen.

(5.10) Aufgabe. Es sei ein Viereck $P_1P_2P_3P_4$ und ein Punkt A gegeben, der von den Mitten M_1, M_2, M_3 und M_4 der Seiten $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ bzw. $\overline{P_4P_1}$ verschieden ist. Man beweise, dass die Parallelen zu $g_{AM_{i+2}}$ durch M_i ($i = 1, 2, 3, 4; 5 \equiv 1, 6 \equiv 2$) genau einen Punkt gemeinsam haben (Abb. 5.7).

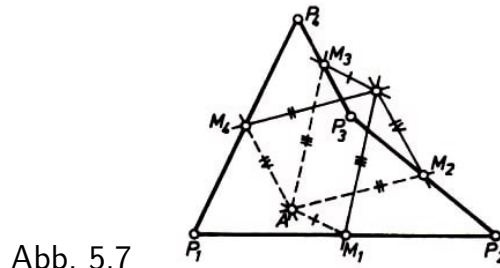


Abb. 5.7

Während bei den Geradenspiegelungen für die Vertauschbarkeit (Kommutativität) in einem Zweierprodukt $\sigma_a \circ \sigma_b$ hinreichend und notwendig ist, dass $a = b$ oder $a \perp b$ gilt, tritt diese Eigenschaft bei Punktspiegelungen nur bei Gleichheit der Punkte auf.

(5.11) Aufgabe. Man zeige, dass $A = B$ für $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$ hinreichend und notwendig ist.

Lösung. Offensichtlich ist $A = B$ eine hinreichende Bedingung. - Umgekehrt folgt aus $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$ zunächst $A^B = (A^A)^B = (A^B)^A$ und daraus $A^B = A$ und weiter $B = A$.

Da sich jede Drehung als Produkt $\sigma_g \circ \sigma_h$ von zwei Geradenspiegelungen darstellen lässt (Satz (3.7)), ist für die Punktspiegelung eine spezielle Form dieser Darstellung zu erwarten. Nach Satz (5.2) muss $(\sigma_g \circ \sigma_h) \circ (\sigma_g \circ \sigma_h) = \iota$ und damit $\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \sigma_g$ sein. Das ist für nicht parallele Geraden g, h aber gleichwertig mit $g \perp h$. (Siehe Aufgabe (3.11).)

Zusammenfassend haben wir

(5.12) Satz. a) Ist $g \perp h$, dann ist $\sigma_g \circ \sigma_h$ die Spiegelung an dem Schnittpunkt von g und h .

b) Gilt $A \in g$ und $\sigma_A = \sigma_g \circ \sigma_h$, dann ist h die Senkrechte von A auf g .

Diese Aussage lässt sich verschärfen: Aus $\sigma_A = \sigma_g \circ \sigma_h$ allein folgt bereits $A \in g$. (Beweis als Aufgabe!)

(5.13) Aufgabe. Aus $A \in g$ folgt $\sigma_A \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_A$.

(5.14) Aufgabe. Gegeben ist ein konvexes Trapez $ABCD$ (mit $g_{AB} \parallel g_{CD}$) und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle vier Seiten berührt. Sein Mittelpunkt sei M . Man zeige, dass die Winkel $\sphericalangle DMA$ und $\sphericalangle BMC$ rechte Winkel sind.

(5.15) Aufgabe. Über den Seiten eines konvexen Vierecks $ABCD$ seien zu seinem Inneren hin die rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke APB , BQC , CRD und DSA konstruiert. (Die Scheitel der rechten Winkel sind P , Q , R und S .) Man zeige, dass aus $P = R$ die Gleichheit $Q = S$ folgt.

Im Anschluss an den Satz (5.11) können wir noch leicht eine Beziehung zu den Verschie-

bungen herstellen. Alle Verschiebungen sind nämlich durch Produkte $\sigma_g \circ \sigma_h$ darstellbar, für die g und h zu einer gemeinsamen Geraden orthogonal sind (Satz (4.9)), und alle Produkte dieser Art sind Verschiebungen (Satz (4.1)).

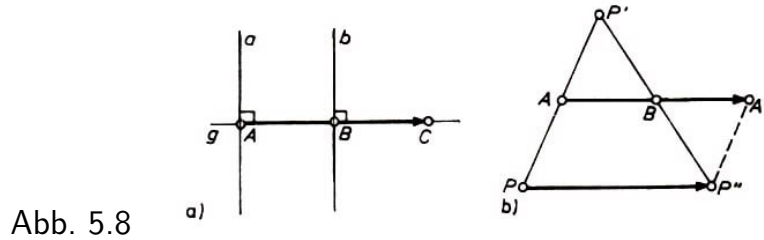


Abb. 5.8

Sind A und B beliebige Punkte, wobei $A = B$ nicht ausgeschlossen ist, so können wir A und B durch eine Gerade g verbinden und dazu die Senkrechten a und b durch A bzw. B legen (Abb. 5.8a).

Nach dem Satz 5.12a gilt

$$\sigma_A \circ \sigma_B = (\sigma_a \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_b) = \sigma_a \circ \sigma_b$$

Da die Geraden a und b parallel zueinander sind, ist $\sigma_a \circ \sigma_b$ eine Verschiebung (Satz (4.1)), nämlich die Verschiebung \overrightarrow{AC} , wobei $C = A^B$ ist.

Man kann zu diesem Ergebnis auch allein auf Grund der Eigenschaften der Punktspiegelungen und einfacher bekannter Kenntnisse aus der Schulgeometrie gelangen. Man entwickle anhand der Abb. 5.8b eine Begründung.

Umgekehrt sei jetzt eine Verschiebung τ und ein beliebiger Punkt A gegeben. Ferner sei B der Mittelpunkt von $\overline{AA^\tau}$, falls $\tau \neq \iota$ ist; im Fall $\tau = \iota$ sei $B = A$. Dann ist $\sigma_A \circ \sigma_B$ die Verschiebung $\overrightarrow{AA^\tau}$, also $\tau = \sigma_A \circ \sigma_B$.

Der Punkt B ist durch diese Gleichung eindeutig bestimmt, denn aus $\sigma_A \circ \sigma_{B'} = \sigma_A \circ \sigma_B$ folgt (wegen Satz (5.2)) $\sigma_{B'} = \sigma_B$ und daraus $B' = B$.

Zusammenfassend haben wir

(5.16) Satz. $\sigma_A \circ \sigma_B$ ist die Verschiebung $\overrightarrow{AA^B}$.

(5.17) Darstellungssatz. Ist τ eine Verschiebung und A irgendein Punkt, so gibt es genau einen Punkt B derart, dass $\tau = \sigma_A \circ \sigma_B$ gilt.

Diese Sätze stehen in Analogie zu den Sätzen (3.5) und (3.7) über die Darstellung der Drehungen mit Hilfe der Geradenspiegelungen. Damit wird der analoge Charakter von Geraden- und Punktspiegelungen weiter unterstrichen. In den späteren "Dreispiegelungssätzen" kommt dieser Gesichtspunkt erneut zum Ausdruck.

(5.18) Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA^B}$.

Lösung. Im Fall $A = B$ ist die Behauptung klar. - Es sei nun $A \neq B$ und M der Mittelpunkt von \overline{AB} . Dann gilt $\sigma_A \circ \sigma_M = \overrightarrow{AB}$ wegen $A^M = B$ (Satz (5.16)) und außerdem $\sigma_M \circ \sigma_B = \overrightarrow{AB}$ wegen $(A^M)^B = B^B = B$. Folglich ist

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = (\sigma_A \circ \sigma_M) \circ (\sigma_M \circ \sigma_B) = \sigma_A \circ \sigma_B = \overrightarrow{AA^B}$$

(5.19) Aufgabe. Man beweise, dass die Aussagen $\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_C \circ \sigma_D$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ äquivalent sind.

Aus dieser Äquivalenz folgt: Wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, so $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. (In Aufgabe (4.3b)) war dazu noch eine einschränkende Voraussetzung verwendet werden.)

(5.20) Aufgabe. Gegeben sei ein Kreis k um M mit der Radiuslänge r und eine Strecke \overline{AB} mit $|AB| < 2r$. Man gebe die Verschiebungen an, bei denen \overline{AB} in eine Sehne des Kreises übergeht.

6 Schubspiegelungen

Nach den bisherigen Ergebnissen könnte man den Eindruck gewinnen, dass mit den aufgestellten speziellen Bewegungen: Geradenspiegelung, Drehung (insbesondere Punktspiegelung) und Verschiebung alle Bewegungen der Ebene erfasst sind.

Und man könnte darin noch bestärkt werden, wenn man in einem Schulbuch sinngemäß liest (zurecht, wie sich noch zeigen wird): Bewegungen (in der Ebene) sind die Geradenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen sowie alle endlichen Nacheinander Ausführungen dieser Abbildungen.

Rückblickend muss man in der Tat feststellen, dass die bisherigen Betrachtungen bereits recht umfassend sind.

Eine Bewegung α ist ja bereits durch ein zugeordnetes Paar von Fahnen $p \cup H$ und $q \cup K$ bestimmt (B 8, Starrheit). Gibt es ein solches Paar, bei dem die Scheitelpunkte der Fahnen zusammenfallen (und damit dieser Punkt fix ist), dann ist nach Satz (3.6 a)) die Bewegung α entweder eine Geradenspiegelung oder eine Drehung um diesen Punkt.

Damit bleiben zunächst nur noch solche Bewegungen unberücksichtigt, die keinen Fixpunkt besitzen. Derartige Bewegungen haben wir aber auch schon betrachtet; die nicht identischen Verschiebungen sind Bewegungen dieser Art. Sowohl die Definition der Verschiebungen als auch die bisherigen Darlegungen über sie lassen aber hoffen, dass es noch andere fixpunktfreie Bewegungen gibt.

Wir experimentieren einfach einmal, um erste Anhaltspunkte bezüglich dieser Existenzfrage zu finden. Wir betrachten gewisse Fahnen $p \cup H$ und $q \cup K$ und fragen, ob sie sich durch eine der bisherigen speziellen Bewegungen ineinander überführen lassen. Dabei sind natürlich Fahnen mit gemeinsamem Scheitelpunkt nicht von Interesse.

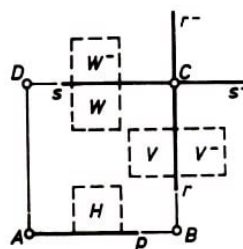


Abb. 6.1

(6.1) Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $p \cup H$ bezeichnen wir die Fahne

$AB^+ \cup ABC^+$. Ferner seien r und s die Halbgeraden CB^+ bzw. CD^+ , und V und W seien die Halbebenen CBD^+ bzw. CDB^+ (Abb. 6.1).

In Tabelle 1 ist jeweils - falls möglich - eine der bisherigen speziellen Bewegungen einzutragen, die die Fahne $p \cup H$ in die vorgegebene Fahne $q \cup K$ überführt.

Tabelle 1

$q \cup K$	$r \cup V$	$r \cup V^-$	$r^- \cup V$	$r^- \cup V^-$	$s \cup W$	$s \cup W^-$	$s^- \cup W$	$s^- \cup W^-$
Bewegung α mit $p^\alpha = q$ und $H^\alpha = K$								

Lösung. Wir werden nicht in den einzelnen acht Fällen nach einer möglichen bekannten Bewegung fragen, sondern bisher behandelte Bewegungen einfach nach ihrer Eignung hin durchmustern. Allein schon durch die Forderung, dass A auf C abgebildet werden muss, sind die Möglichkeiten stark eingeschränkt.

So kann als Geradenspiegelung nur noch die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von \overline{AC} , also an der Geraden $f = g_{BD}$ in Frage kommen. Wegen $B^f = B$ ist $p^f = CB^+ = r$; außerdem gilt $D^f = D$ und damit $H^f = CBD^+ = V$ (Abb. 6.2a). Damit entsteht $r \cup V$ aus $p \cup H$ durch die Spiegelung an f .

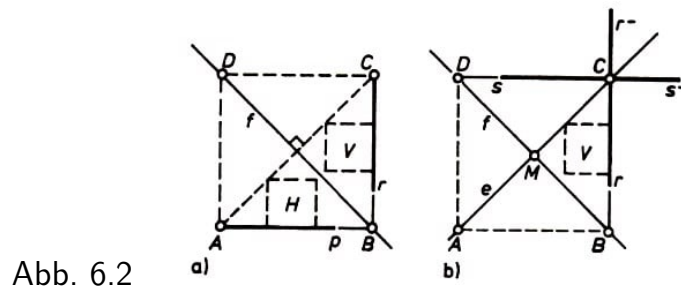


Abb. 6.2

Wir sehen uns nun nach geeigneten Drehungen um. Diese müssen A auf C abbilden. Bei ihrer möglichen Darstellung als Produkt von zwei Geradenspiegelungen (Satz (3.7)) kann als erste Gerade die Mittelsenkrechte von \overleftarrow{AC} , also die Gerade f genommen werden.

Die zweite Gerade muss durch C gehen und f schneiden. Außerdem muss bei der Spiegelung an ihr die Halbgerade $p^f = r$ in eine der Halbgeraden r , r^- , s oder s^- übergehen.

Die zweite Gerade kann dann nur $b = g_{CB}$ oder $c = g_{CD}$ oder die Winkelhalbierende e von $\sphericalangle r, s$ sein (Abb. 6.2b). (Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle r, s^-$ ist parallel zu f !)

Wegen $(r \cup V)^b = r \cup V^-$, $(r \cup V)^c = r^- \cup V$ und $(r \cup V)^e = s \cup W$ führen nun in der Tat die Drehungen $\sigma_f \circ \sigma_b$ (Drehung um B), $\sigma_f \circ \sigma_c$ (Drehung um D) und $\sigma_f \circ \sigma_e$ die Fahne $p \cup H$ in eine der vorgegebenen über. Insbesondere ist $\sigma_f \circ \sigma_e$ wegen $f \perp e$ die Spiegelung an dem Schnittpunkt M von f und e (Satz (5.11a)), an dem Mittelpunkt des Quadrats.

Schließlich wären noch Verschiebungen zu betrachten; hier kann nur die Verschiebung $\tau = \overrightarrow{AC}$ in Frage kommen. Wegen $\overrightarrow{AC} = \sigma_M \circ \sigma_C$ ist $(p \cup H)^\tau = (s \cup W)^C = s^- \cup W^-$; τ ist also tatsächlich geeignet. Als Ergebnis haben wir Tabelle 2.

Unsere Überlegungen schließen aus, dass die drei Lücken mit den bisher behandelten speziellen Bewegungen ausgefüllt werden können!

Tabelle 2	$q \cup K$	$r \cup V$	$r \cup V^-$	$r^- \cup V$	$r^- \cup V^-$
	Bewegung α mit $p^\alpha = q$ und $H^\alpha = K$	Spiegelung an f	Drehung um B	Drehung um D	-
	$q \cup K$	$s \cup W$	$s \cup W^-$	$s^- \cup W$	$s^- \cup W^-$
	Bewegung α mit $p^\alpha = q$ und $H^\alpha = K$	Spiegelung an M	-	-	Verschiebung \overrightarrow{AC}

Demnach gibt es weitere spezielle Bewegungen, wenn noch Beweglichkeit (B 7) vorausgesetzt wird. Es ist naheliegend zu fragen, ob sich die Lücken im Ergebnis der Aufgabe (6.1) wenigstens durch Produkte von Geradenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen schließen lassen.

(6.2) Aufgabe. Lässt sich in Bezug auf die Aufgabe (6.1) die Fahne $p \cup H$ in die Fahne $r^- \cup V^-$ durch ein Produkt aus Grundspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen überführen? Man gebe gegebenenfalls Beispiele an.

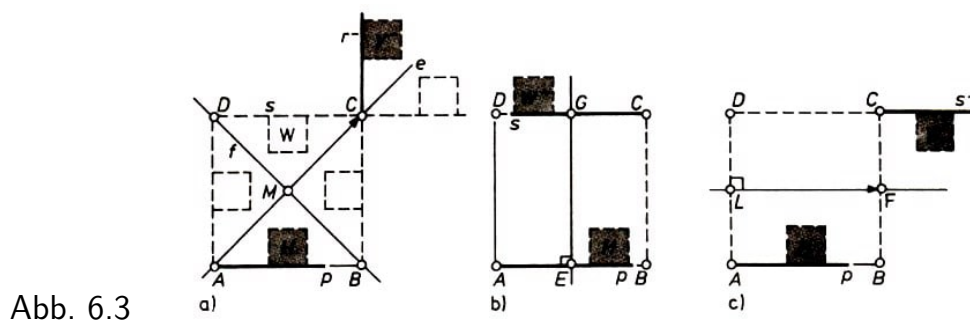
Lösung. Auf Grund der Überlegungen zur Aufgabe (6.1) erkennt man leicht mehrere Möglichkeiten, so folgende (Abb. 6.3 a):

$$p \cup H \xrightarrow{\overrightarrow{AC}} s^- \cup W^- \xrightarrow{\sigma_e} r^- \cup V^-$$

$$p \cup H \xrightarrow{\sigma_M} s \cup W \xrightarrow{\sigma_{f'}} r^- \cup V^-, \quad \text{wobei } f' \text{ die Winkelhalbierende von } \sphericalangle s, r^- \text{ ist}$$

$$p \cup H \xrightarrow{\sigma_f} r \cup V \xrightarrow{\sigma_C} r^- \cup V^-$$

$$p \cup H \xrightarrow{\sigma_e} AD^+ \cup ADB^+ \xrightarrow{\overrightarrow{AC}} r^- \cup V^-$$



Und damit sind noch nicht alle Möglichkeiten aufgezählt. Eine vollständige Aufzählung ist ohnehin nicht möglich, da die Aneinanderfolge von Geradenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen, die $p \cup H$ auf $r^- \cup V^-$ abbildet, beliebig lang gemacht werden kann.

Wir wenden uns nun der ersten angeführten Möglichkeit zu; sie ist die Verkettung der Verschiebung \overrightarrow{AC} mit anschließender Spiegelung an der Verbindungsgerade e von A und C .

Können die restlichen beiden Lücken in analoger Weise ausgefüllt werden?

Im Hinblick auf $s \cup W^-$ kann man offenbar nicht mehr mit \overrightarrow{AC} beginnen. Das muss auch nicht sein. Man gelangt über die Verschiebung \overrightarrow{AD} und anschließender Spiegelung an der Mittelsenkrechten von \overline{AB} zum Ziel. Diese Lösung hat aber einen "Schönheitsfehler":

Die Spiegelung erfolgt nicht an der Verbindungsgeraden von A und D . Das kann verbessert werden. Sind E und G die Mittelpunkte von \overline{AB} bzw. \overline{CD} , so gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EG}$, da G das Bild von E bei der Verschiebung \overrightarrow{AD} ist.

Somit wird durch die Verkettung $\overrightarrow{EG} \circ \sigma_{g_{EG}}$ aus $p \cup H$ die Fahne $s \cup W^-$ (Abb. 6.3b).

Auch die Abbildung von $p \cup H$ auf $s^- \cup W$ gelingt auf diese Weise, nämlich durch $\overrightarrow{LF} \circ \sigma_{g_{LF}}$, wobei L und F die Mittelpunkte von \overline{AD} und \overline{BC} sind (Abb. 6.3c).

Als weitere spezielle Bewegung erklären wir nun

Definition. α ist eine Schubspiegelung längs der Geraden g (oder Schubspiegelung mit der Achse g) genau dann, wenn α sich als Produkt $\tau \circ \sigma_g$ einer Verschiebung τ mit $g^\tau = g$ und der Spiegelung an der Geraden g darstellen lässt.

In dieser Definition lassen wir zu, dass τ die identische Verschiebung ι ist. In diesem Fall gilt $g^\tau = g$ für jede Gerade g . Die Geradenspiegelungen sind damit spezielle Schubspiegelungen.

(6.3) Aufgabe. Zu vorgegebener Gerade g und vorgegebenen Punkten A und B , die auf einer Seite von g liegen, konstruiere man Punkte $P, Q \in g$ derart, dass \overline{PQ} vorgegebene Länge a besitzt und der Streckenzug $APQB$ minimale Länge hat.

Die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten bei der Lösung der Aufgabe (6.2) lassen eine Reihe von Eigenschaften für die Schubspiegelungen erwarten; so gilt dort: a) $\overrightarrow{AC} \circ \sigma_e = \sigma_e \circ \overrightarrow{AC}$, und b) $\overrightarrow{AC} \circ \sigma_e$ lässt sich als Verkettung von Punkt- und Geradenspiegelung ($\sigma_M \circ \sigma_{f'}$ bzw. $\sigma_{f'} \circ \sigma_C$) darstellen.

(6.4) Satz. Zu jeder Schubspiegelung $\tau \circ \sigma_g$ und zu jedem Punkt $P \in g$ gibt es (genau) eine Gerade $h \perp g$ derart, dass das Produkt $\sigma_P \circ \sigma_h$ gleich der vorgegebenen Schubspiegelung ist.

Beweis. Es sei f die Senkrechte zu g durch P . Wegen $g^\tau = g$ gibt es nach Satz (4.9) eine Gerade $h \perp g$ so, dass $\tau = \sigma_f \circ \sigma_h$ ist. Dann gilt

$$\tau \circ \sigma_g = (\sigma_f \circ \sigma_h) \circ \sigma_g = \sigma_f \circ \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_P \circ \sigma_h$$

mit Hilfe der Sätze (3.11) und (5.11).

Umgekehrt gilt:

(6.5) Satz. Für jeden Punkt P und jede Gerade h ist sowohl $\sigma_P \circ \sigma_h$ als auch $\sigma_h \circ \sigma_P$ eine Schubspiegelung.

Beweis als Aufgabe!

(6.6) Aufgabe. Ist $\tau \circ \sigma_g$ eine Schubspiegelung, so gilt $\tau \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \tau$.

II. Produkte und Gruppen ebener Bewegungen

7 Dreispiegelungssätze

Wir beginnen mit einer speziellen geometrischen Fragestellung.

(7.1) Aufgabe. Es seien P_1, \dots, P_6 sechs verschiedene Punkte auf einem Kreis und es gelte $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{P_4P_5}$ und $\overline{P_2P_3} \parallel \overline{P_5P_6}$. Welche Beziehung gilt dann zwischen $\overline{P_3P_4}$ und $\overline{P_6P_1}$? Man beweise die Vermutung.

In dieser Aufgabe ist ein Sechseck gegeben, dessen Ecken auf einem Kreis liegen und bei dem zwei Paare von zueinander parallelen Gegenseiten bestehen. Anhand einer ordentlichen Zeichnung ersehen wir, dass dann wohl auch das dritte Paar von Gegenseiten Parallelität besitzt.

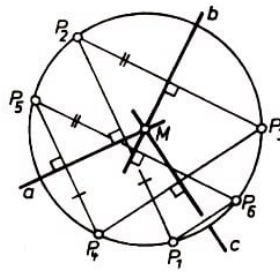


Abb. 7.1

Sind zwei Strecken parallel zueinander, dann gilt dies auch für ihre Mittelsenkrechten (und umgekehrt). Für zwei parallele Kreissehnen müssen nun ihre Mittelsenkrechten zusammenfallen, da sie noch durch den Mittelpunkt M des Kreises verlaufen. Auf Grund der Voraussetzung haben also $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_4P_5}$ eine gemeinsame Mittelsenkrechte a und $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_5P_6}$ eine gemeinsame Mittelsenkrechte b (Abb. 7.1). Offenbar wäre nun unsere Behauptung bewiesen, wenn die Mittelsenkrechte c von $\overline{P_3P_4}$ auch die von $\overline{P_6P_1}$ ist.

Denkt man an einen Beweis mit Bewegungen, so liegen bei Mittelsenkrechten die Geradenspiegelungen nahe. Die Behauptung ist mit $P_6^v = P_1$ äquivalent. Der Punkt P_1 geht beim Spiegelungsprodukt $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_b$ in den Punkt P_6 über. Die Behauptung $P_6^c = P_1$ ist dann äquivalent mit der Aussage, dass P_1 Fixpunkt bei $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ ist.

Von Interesse ist nun, welche Bewegung $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ für drei Geraden darstellt, wenn diese einen gemeinsamen Punkt M besitzen. Die Antwort ist mit Hilfe der Sätze im Abschnitt 3 leicht zu finden.

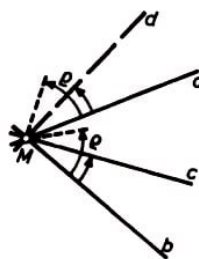


Abb. 7.2

Das Produkt $\sigma_b \circ \sigma_c$ ist nämlich eine Drehung ρ um M (Satz (3.5)), und zu dieser und der Geraden a durch M gibt es (genau) eine Gerade d durch M , so dass $\rho = \sigma_a \circ \sigma_d$ gilt (Satz 3.7; siehe dazu Abb. 7.2).

Ein entsprechendes Ergebnis ist bereits in Abb. 3.5 dargestellt.). Aus $\sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_a \circ \sigma_d$ folgt schließlich $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Wir haben damit folgende Aussage bewiesen:

(7.2) Erster Dreispiegelungssatz. Sind a, b, c Geraden mit einem gemeinsamen Punkt M , so ist $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ eine Spiegelung an einer Geraden d durch M .

Dabei wollen wir bewusst bemerken, dass diese Gerade d aus den vorgegebenen Geraden durch eine einfache Konstruktion angegeben werden kann.

Abschließende Lösung der Aufgabe (7.1). Nach dem Dreispiegelungssatz ist $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ eine Geradenspiegelung. Also ist $(\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c) \circ (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c)$ die identische Bewegung und damit insbesondere P_1 Fixpunkt.

(7.3) Aufgabe. Zu einem vorgegebenen Dreieck ABC konstruiere man alle Punkte D der Seite \overline{CA} mit folgender Eigenschaft:

Das Antragen von $|AD|$ an AB^+ (von A aus) ergibt einen Punkt $E \in AB$; das Antragen von $|BE|$ an BC^+ (von B aus) ergibt einen Punkt $F \in BC$; und das Antragen von $|CF|$ an CA^+ (von C aus) ergibt wieder den Ausgangspunkt D .

Naheliegender ist die Frage, bei welcher anderen Lage der Geraden a, b, c ebenfalls $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ eine Geradenspiegelung ist. Ein Vergleich der Sätze (4.1) und (4.9) mit den Sätzen (3.5) und (3.7) zeigt die Möglichkeit, die Beweisüberlegungen für den ersten Dreispiegelungssatz völlig analog mit Verschiebungen nachzuvollziehen (Abb. 7.3).

Sie ergeben den

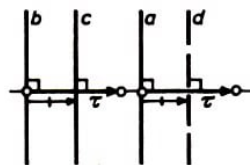


Abb. 7.3

(7.4) Zweiten Dreispiegelungssatz. Sind a, b, c zueinander parallele Geraden, so ist $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ eine Spiegelung an einer zu ihnen parallelen Geraden d .

Beweis als Aufgabe!

Bei allen anderen Lagen von a, b, c kann es keinen Dreispiegelungssatz geben. Das Produkt $\sigma_b \circ \sigma_c$ ist nämlich eine Drehung oder eine Verschiebung. Und gilt $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$, dann müsste $\sigma_a \circ \sigma_d$ die gleiche Drehung bzw. Verschiebung sein.

Welche Bewegung ist nun aber das Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ bei beliebiger Lage von a, b und c ? Es sind nur noch zwei Lagen zu diskutieren:

- a) a, b schneiden sich in einem Punkt P und P liegt nicht auf c ;
- b) $a \parallel b$ und $c \nparallel a$.

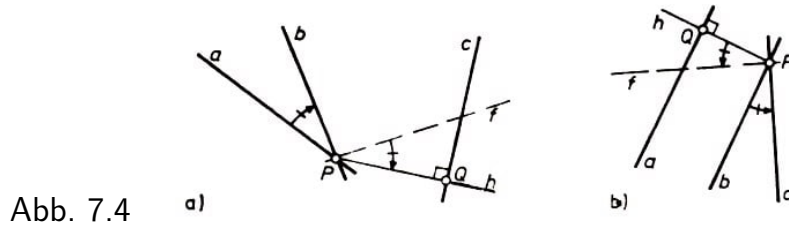


Abb. 7.4

Wir betrachten den ersten Fall (Abb. 7.4a). Hier sei h das Lot von P auf c und Q der Fußpunkt dieses Lotes. Nach dem ersten Dreispiegelungssatz ist $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_h$ eine Spiegelung an einer Geraden f durch P . Wegen $f \neq h$ liegt Q nicht auf f . Damit haben wir

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_h) \circ (\sigma_h \circ \sigma_c) = \sigma_f \circ \sigma_Q$$

und das ist wegen $Q \notin f$ eine echte Schubspiegelung (Satz (6.5)).

Der Fall b) lässt sich völlig analog zu einem Produkt $\sigma_Q \circ \sigma_f$, umformen (Abb. 7.4b); und auch hier liegt wegen $Q \notin f$ eine echte Schubspiegelung vor (Satz (6.5)).

Zusammenfassend ergibt sich

(7.5) Satz. Jedes Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ ist eine Schubspiegelung.

Dieser Sachverhalt ist eine wesentliche Ergänzung der Darlegungen in Abschnitt 6.

(7.6) Aufgabe. Zu vorgegebenen Punkten E, F, G , die nicht auf einer Geraden liegen, ist ein Dreieck ABC derart zu konstruieren, dass E, F und G die Mittelpunkte von \overline{BC} , \overline{CA} und \overline{AB} sind.

Die Mittelpunktsbedingung legt nahe, sich um eine Lösung mit Hilfe von Punktspiegelungen zu bemühen. - Es sei ABC eine Lösung. Dann wird der Punkt B bei dem Spiegelungsprodukt $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$ auf sich ab abgebildet (Abb. 7.5a).

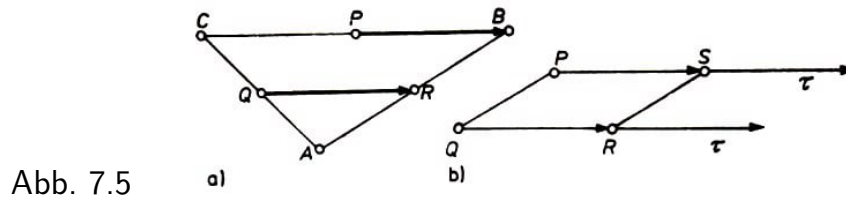


Abb. 7.5

Von Interesse ist nun, was $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$ für eine Bewegung ist.

Wir erinnern an die Analogien, die wir zwischen Geraden- und Punktspiegelungen schon bemerkt haben. So entsprechen die Sätze (5.16) und (5.17) über Punktspiegelungen und Verschiebungen den Sätzen (3.5) und (3.7) über Geradenspiegelungen und Drehungen. Damit können wir die Beweisüberlegungen, die zum ersten Dreispiegelungssatz führten, auf die vorliegende Problemstellung übertragen (Abb. 7.5 b): $\sigma_Q \circ \sigma_R$ ist eine Verschiebung τ (Satz (5.16)).

Zu dieser und dem Punkt P gibt es (genau) einen Punkt S mit $\sigma_P \circ \sigma_S = \tau$ (Satz (5.17)). Aus $\sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_P \circ \sigma_S$ folgt schließlich $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_S$. Dabei sind für P, Q, R keine einschränkende Bedingungen erforderlich!

(7.7) Dreispiegelungssatz für Punkte. $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$ ist stets eine Punktspiegelung σ_S .

Der Punkt S lässt sich einfach aus P, Q, R konstruieren. Wegen der Beziehung $\sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_P \circ \sigma_S$ ist nämlich $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$. (Aufgabe (5.19)) und damit S das Bild von P bei der Verschiebung \overrightarrow{QR} .

Abschließende Lösung der Aufgabe (7.6). Unsere bisherigen Überlegungen ergeben:
Ist ABC eine Lösung, dann muss B das Bild von P bei der Verschiebung \overrightarrow{QR} sein. Wählen wir umgekehrt dieses Bild als Ecke B und dann weiter $C := B^P$ und $A := C^Q$, dann erfüllt das Dreieck ABC wegen $A^R = ((B^P)^Q)^R = B^P = B$ auch die Eigenschaft, dass R Mittelpunkt von \overline{AB} ist. - Die Aufgabe besitzt also stets genau eine Lösung.

Es ist bemerkenswert, dass auch in entarteten Lagen eine entsprechende Aufgabenstellung sinnvoll ist und dass sie stets genau eine Lösung besitzt.

(7.8) Aufgabe. Zu einem vorgegebenen Viereck $PQRS$ ist ein Viereck $ABCD$ derart zu konstruieren, dass P, Q, R und S die Mitten der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ bzw. \overline{DA} sind. (Wir empfehlen, diese Aufgabe nicht zu übergehen!)

(7.9) Aufgabe. Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen. Man begründe und beschreibe die Konstruktion eines Fünfecks $ABCDE$, für das F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$ des Fünfecks sind.

Man untersuche, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist. Dabei wird nicht vorgeschrieben, dass das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, dass Ecken zusammenfallen oder Seiten teilweise oder in der Verlängerung voneinander liegen. (OJM 141235)⁷.

(7.10) Aufgabe. Wenn eine Figur \mathfrak{F} zwei verschiedene Symmetriezentren hat, dann besitzt sie beliebig viele. Man beweise diese Aussage und gebe eine Figur dieser Art an.

Lösung. Es seien S_1 und S_2 zwei Symmetriezentren von \mathfrak{F} und S_{i+1} das Bild von S_i ($i = 2, 3, \dots$) bei der Verschiebung $\overrightarrow{S_1 S_2}$. Zweierlei ist für die Menge der Punkte S_i zu zeigen: Jeder der Punkte S_i , $i \geq 3$, ist ebenfalls Symmetriezentrum von \mathfrak{F} , und er ist von den Punkten S_1, S_2, \dots, S_{i-1} verschieden.

Da die Punkte S_i induktiv definiert sind, werden diese Behauptungen durch vollständige Induktion⁸ bewiesen. Für S_2 gelten die Behauptungen nach Voraussetzung. -

Zum Schluss "von n auf $n + 1$ " setzen wir voraus, dass sie für alle Punkte S_n , mit $n \geq 2$ erfüllt sind.

Wegen $\overrightarrow{S_n S_{n+1}} = \overrightarrow{S_1 S_2}$ ist $\sigma_{S_n} \circ \sigma_{S_{n+1}} = \sigma_{S_1} \circ \sigma_{S_2}$ (nach (5.19)) und damit $\sigma_{S_{n+1}} = \sigma_{S_1} \circ \sigma_{S_2} \circ \sigma_{S_n}$. Folglich gilt $\mathfrak{F}^{S_{n+1}} = \mathfrak{F}$, d.h., auch S_{n+1} ist Symmetriezentrum von \mathfrak{F} .

⁷Siehe dazu auch den Beitrag des Verfassers in alpha 10 (1976), Heft 3, S. 52 bis 53.

⁸Zum Selbststudium dieser mathematischen Beweismethode sei das leicht verständliche Büchlein von I. S. Sominski: Die Methode der vollständigen Induktion (MSB Nr. 8, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin) empfohlen.

Wäre S_{n+1} mit einem Punkt S_i , $2 \leq i \leq n$, gleich, so würde sich wegen $\overrightarrow{S_n S_{n+1}} = \overrightarrow{S_1 S_2} = \overrightarrow{S_{i-1} S_i}$ zunächst $\overrightarrow{S_n S_{i+1}} = \overrightarrow{S_i S_i}$ (nach (5.19)) und weiter $S_n = S_{i-1}$ im Widerspruch zur Voraussetzung für S_n ergeben.

Im Fall $S_{n+1} = S_1$ ergäbe sich $S_n = S_2^{S_1}$ und damit $S_n \in S_1 S_2^-$. Es gilt aber $S_i \in S_1 S_2^+$, $i \geq 2$, was man leicht durch vollständige Induktion bestätigt.

Ein einfaches Beispiel für eine Figur mit (wenigstens) zwei Symmetriezentren ist ein Streifen (Abb. 7.6 a).

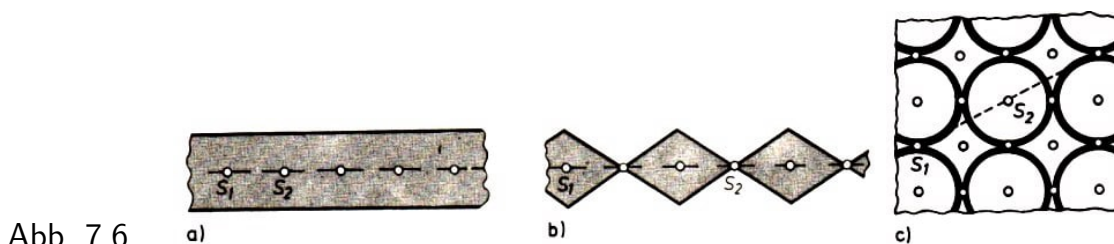
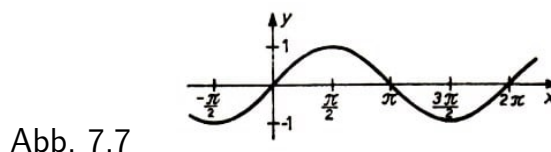


Abb. 7.6 b zeigt, dass nicht wie beim Streifen mit S_1, S_2 alle Punkte der Geraden $g_{S_1 S_2}$ Symmetriezentren sein müssen; die Symmetriezentren müssen auch nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen (Abb. 7.6 c).

(7.11) Aufgabe. Hat ein Vieleck mehr als zwei Symmetrieachsen, so schneiden sich diese in einem Punkt.



(7.12) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieachsen und alle Symmetriezentren des Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ (der "Sinuskurve"; Abb. 7.7).

Das Ergebnis in (7.12) vermittelt eine bemerkenswerte Einsicht: Die Aussage in (7.11) ist nicht für alle Figuren mit mehr als zwei Symmetrieachsen gültig. Und Symmetriezentren müssen nicht - wie in Abb. 7.6a bis c - auf Symmetrieachsen liegen.

8 Eine Übersicht über ebene Bewegungen; Produkte von Bewegungen

In den bisherigen Darlegungen wurden zwei wesentliche Fragen angesprochen aber nicht vollständig beantwortet:

Erstens ist noch offen, ob es neben den Geradenspiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Schubspiegelungen noch weitere ebene Bewegungen gibt. Zweitens wollten wir die Beweglichkeitsaussage B 7 beweisen. Der folgende Satz und sein Beweis werden darauf umgehend eine Antwort geben.

(8.1) Darstellungssatz für ebene Bewegungen. Jede Bewegung kann als Produkt von höchstem drei Geradenspiegelungen dargestellt werden.

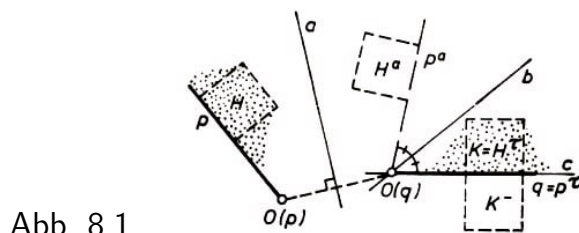


Abb. 8.1

Beweis. Es sei τ irgendeine Bewegung und $p \cup H$ eine beliebige Fahne; weiterhin sei $q = p^\tau$ und $K = H^\tau$ (Abb. 8.1). - Es gibt eine Gerade a , an der der Scheitel $O(p)$ gespiegelt in den Scheitel $O(q)$ übergeht; falls $O(p) \neq O(q)$ ist, leistet das gerade die Mittelsenkrechte bezüglich dieser Punkte.

Die Fahnen $q \cup K (= (p \cup H)^\tau)$, und $(p \cup H)^a$ haben einen gemeinsamen Scheitel. Im weiteren können wir deshalb den Überlegungen folgen, die zum Satz (3.6a) führten. (Vgl. dazu Abb. 3.4a.)

Danach spiegeln wir nun an der Winkelhalbierenden b von $\angle p^a, q$. Wegen $(p^a)^b = q$ muss $(H^a)^b = K$ oder $(H^a)^b = K^-$ sein.

Im ersten Fall folgt $\tau = \sigma_a \circ \sigma_b$ auf Grund der (bereits bewiesenen) Starrheit B 8.

Im zweiten Fall ergibt die Spiegelung an derjenigen Geraden c , die q enthält, zunächst $((p^a)^b)^c = q^c = q = p^\tau$ und $((H^a)^b)^c = (K^-)^c = K = H^\tau$; damit ist $\tau = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ ebenfalls nach B 8.

Wir haben eine Fahne $p \cup H$ durch höchstens drei Geradenspiegelungen in eine Fahne $q \cup K$ überführen können; die dafür geeigneten Geraden konnten wir durch eine Konstruktion angeben. Da es - wie wir am Ende von Abschnitt 2 erkannten - an jeder Geraden eine Spiegelung gibt, ist damit die Existenz einer Bewegung τ mit $p^\tau = q$ und $H^\tau = K$ nachgewiesen, d.h., die Beweglichkeitsaussage B 7 ist bewiesen.

Weiterhin gibt der Satz (8.1) eine vollständige Übersicht über alle Bewegungen in der Ebene. Nach ihm sind nur die Zweier- und Dreierprodukte von Geradenspiegelungen zu betrachten. Und das geschah bereits ausgiebig in den Abschnitten 3 bis 7. Die Zweierprodukte sind Drehungen (speziell auch Punktspiegelungen) oder Verschiebungen (nach den Sätzen (3.5) und (4.1)); die Dreierprodukte sind Schubspiegelungen (Satz (7.5)), in speziellen Fällen Geradenspiegelungen (Dreispiegelungssätze (7.2) und (7.4)). Mit den bisher behandelten speziellen Bewegungen sind demnach alle Bewegungen erfasst.

Die Erklärung der Bewegung, die in den Schulbüchern zu finden ist, besteht zu Recht, wonach eine Bewegung eine Geradenspiegelung, Drehung, Verschiebung oder eine endliche Nacheinanderausführung dieser Abbildungen ist. Man könnte diese Erklärung sogar auf die Spiegelungen an Geraden und auf endliche Produkte mit diesen reduzieren.

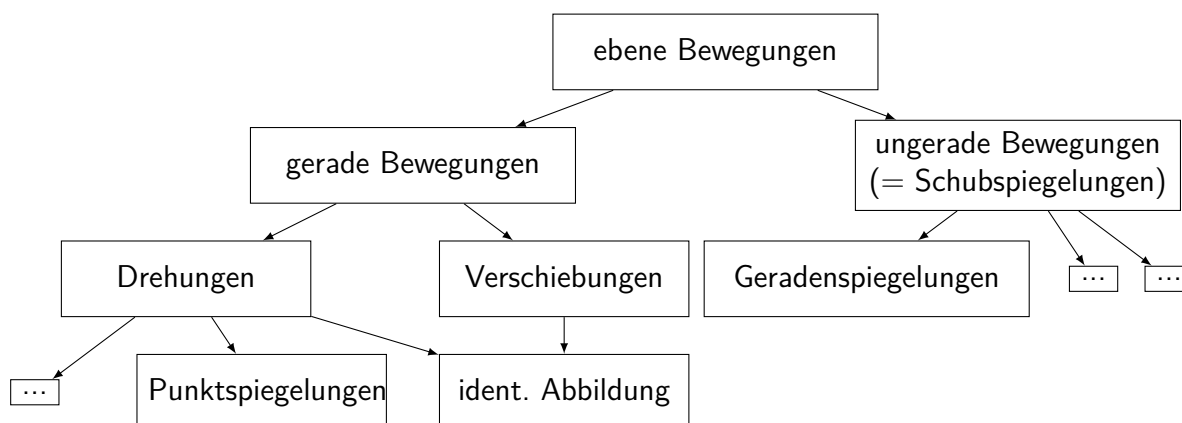
Eine ebene Bewegung heißt gerade, wenn sie sich durch die Verkettung einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen darstellen lässt. Die Orientierung der Ebene bleibt bei einer solchen Bewegung invariant. Deshalb kann sie niemals gleich einem Produkt einer ungeraden Anzahl von Geradenspiegelungen - also ungerade - sein.

Aus einer mehr den Anwendungen zugewandten Sicht unterscheidet man zwischen eigentlichen und uneigentlichen Bewegungen, je nachdem, ob die Orientierung erhalten

bleibt oder nicht. So interessieren in der Physik vielfach nur die eigentlichen Bewegungen. (Bei ihrer Veranschaulichung mit dem Transparentpapier kommt man ohne Wenden aus.) Die Begriffe "gerade" und "eigentlich" bzw. "ungerade" und "uneigentlich" sind hier offenbar äquivalent.

Nach dem Satz (8.1) ist jede gerade (bzw. ungerade) Bewegung einer Verkettung von zwei (bzw. drei) Geradenspiegelungen gleich.

Unsere bisherigen Einsichten erlauben folgende Übersicht über die ebenen Bewegungen:



Für jede Geraden- und Punktspiegelung σ gilt $\sigma \neq \iota$ und $\sigma \circ \sigma = \iota$ (Folgerung (2.5), Satz (5.2)). Dementsprechend nennt man eine Bewegung mit diesen Eigenschaften⁹ eine Spiegelung.

(8.2) Aufgabe. Man zeige, dass es außer den Geraden- und Punktspiegelungen keine weiteren Spiegelungen (in der Ebene) gibt.

Aus dem Darstellungssatz (8.1) ergibt sich (zusammen mit dem Satz (6.4)) noch die bemerkenswerte

(8.3) Folgerung. Jede ebene Bewegung ist gleich einer Verkettung von zwei Spiegelungen.

(8.4) Aufgabe. Wie viele Bewegungen der Ebene gibt es, die eine Strecke \overline{AB} auf sich abbilden?

Lösung. Als mögliche Lösungen sieht man sofort die Spiegelung an dem Mittelpunkt von \overline{AB} und die identische Abbildung ι . Aber sind das bereits alle Lösungen?

Da $(\overline{AB})^\tau = \overline{A^\tau B^\tau}$ (Eigenschaft B 3') für jede Bewegung τ gilt, sind diejenigen Bewegungen zu suchen, die $\{A, B\}$ auf sich abbilden. Dazu sei B eine Halbebene mit der Begrenzung g_{AB} . Nun sind offenbar die vier Bewegungen, die die Fahne $AB^+ \cup H$ in die Fahne $AB^+ \cup H^+$ oder $AB^+ \cup H^-$ oder $BA^+ \cup H$ oder $BA^+ \cup H^-$ überführen, alle Lösungen. (Existenz und Eindeutigkeit gewährleisten B 7 und B 8.)

Das sind neben der identischen Abbildung ι die Spiegelung an g_{AB} , die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von \overline{AB} und die Spiegelung an dem Mittelpunkt von \overline{AB} .

⁹Eine eindeutige Abbildung α von einer Menge auf sich mit $\alpha \neq \iota$ und $\alpha \circ \alpha = \iota$ wird gewöhnlich involutorisch genannt.

(8.5) Aufgabe. Über den Seiten eines beliebigen Dreiecke ABC werden gleichseitige Dreiecke errichtet. Es ist zu zeigen, dass die Mittelpunkte¹⁰ dieser Dreiecke selbst ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Es seien D , E und F die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke über den Seiten \overline{BC} , \overline{CA} und \overline{AB} . Um diese Punkte gibt es Drehungen ρ_D , ρ_E und ρ_F , die durch $B^{\rho_D} = C$, $C^{\rho_E} = A$ und $A^{\rho_F} = B$ bestimmt sind.

Bei geeigneter Orientierung ist $\rho_D = \rho(D, 120^\circ)$, $\rho_E = \rho(E, 120^\circ)$ und $\rho_F = \rho(F, 120^\circ)$. Für weitere Schlussfolgerungen scheint es nützlich, zunächst Näheres über die Verkettung zweier Drehungen bereitzustellen.

Es sei ρ_1 die Drehung um P mit dem Drehmaß $\vec{\alpha}$ und ρ_2 die Drehung um Q mit dem Drehmaß $\vec{\beta}$. Wir legen durch P und Q eine Gerade g - im Fall $P = Q$ steht uns dazu jede Gerade durch P zur Wahl - und bestimmen dazu die Geraden e durch P und f durch Q derart, dass $\rho_1 = \sigma_e \circ \sigma_g$ und $\rho_2 = \sigma_g \circ \sigma_f$ gilt (Satz (3.7); Abb. 3.4b).

Die Verkettung $\rho_1 \circ \rho_2$ ergibt dann $\sigma_e \circ \sigma_f$.

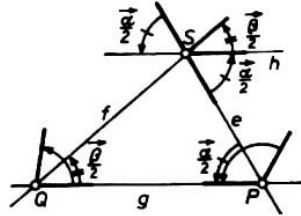


Abb. 8.2

Sind e und f nicht parallele Geraden, so ist $\rho_1 \circ \rho_2$ eine Drehung um ihren Schnittpunkt S . Zur Bestimmung des Drehmaßes legen wir durch S die Parallele h zu g (Abb. 8.2). Da bei den Verschiebungen $\tau_1 = \overrightarrow{PS}$ und $\tau_2 = \overrightarrow{QS}$ offenbar $g^{\tau_1} = h = g^{\tau_2}$ sowie $e^{\tau_1} = e$, $f^{\tau_2} = f$ gilt und Verschiebungen orientierungserhaltend sind, hat $\sigma_e \circ \sigma_h$ das Drehmaß $\vec{\alpha}$ und $\sigma_h \circ \sigma_f$ das Drehmaß $\vec{\beta}$. Folglich besitzt $\sigma_e \circ \sigma_f$ das Drehmaß $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Diese Summe ist auf Grund der vereinbarten Messung von Größen gerichteter Winkel bis auf Vielfache von 360° zu bilden.

Die Parallelität von e und f ist äquivalent mit der Gleichung $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 0^\circ \pmod{360^\circ}$ ¹¹. Mit $e \parallel f$ ist $\sigma_e \circ \sigma_f$ eine Verschiebung. Dabei ist $e = f$ nicht ausgeschlossen. Zusammenfassend gilt

(8.6) Satz. Das Produkt $\rho(P, \vec{\alpha}) \circ \rho(Q, \vec{\beta})$ zweier Drehungen ist entweder eine nicht identische Drehung mit dem Drehmaß $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \pmod{360^\circ}$, falls diese Summe ungleich $0^\circ \pmod{360^\circ}$ ist, oder eine Verschiebung, falls $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 0^\circ \pmod{360^\circ}$ gilt.

Bevor wir uns wieder der Lösung der Aufgabe (8.5) zuwenden, möchte der Leser noch folgenden Sachverhalt begründen.

¹⁰In einem gleichseitigen Dreieck (und allgemein in jedem einfachen regelmäßigen n -Eck) fallen Schwerpunkt und Mittelpunkt des Umkreises zusammen. Wir nennen ihn dann Mittelpunkt der Figur. Er ist nämlich das Zentrum einer hier bestehenden Drehsymmetrie (Abschnitt 10).

¹¹Als Abkürzung für "bis auf ein Vielfaches von 360° ".

(8.7) Aufgabe. Haben Drehungen ρ_1 und ρ_2 um P und Q mit gleichem Drehmaß für einen Punkt A ein und dasselbe Bild, dann ist $\rho_1 = \rho_2$.

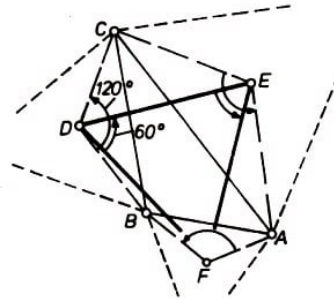


Abb. 8.3

Abschließende Lösung der Aufgabe (8.5). Das Produkt $\sigma_D \circ \sigma_E$ ist nach dem Satz 8.6 eine Drehung $\rho(G, 240^\circ)$ um einen Punkt G , und dieser bildet mit D und E ein gleichseitiges Dreieck (wegen $|\angle GDE| = |\angle DEG| = 60^\circ$; Abb. 8.3).

Die Drehungen $\rho(G, 240^\circ)$ und $g_{F^{-1}}$ haben gleiches Drehmaß und bilden beide B auf A ab. Nach (8.7) folgt daraus $F = G$.

(8.8) Aufgabe. Es sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen und dessen Längen der Seiten \overline{AB} , \overline{CD} und \overline{EF} gleich der Radiuslänge des Kreises sind. Man beweise, dass dann die Mittelpunkte P , Q und R der übrigen Seiten \overline{BC} , \overline{DE} und \overline{FA} ein gleichseitiges Dreieck bilden.

(8.9) Aufgabe. Über den Seiten eines konvexen Vierecks $ABCD$ seien die rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke APB , BQC , CRD und DSA errichtet. (Die Scheitel der rechten Winkel sind P , Q , R und S .) Die Strecken \overline{PR} und \overline{QS} sind dann gleichlang und senkrecht zueinander.

Als Spezialfall ergibt sich die Aussage in der Aufgabe (3.18).

Unter Einbeziehung von Entartungen gilt die Behauptung auch, wenn die Dreiecke zum Inneren des Vierecks hin errichtet werden. Hier ist die Aussage in der Aufgabe (5.15) ein Spezialfall.

Man beweise diese Behauptungen.

Unter den noch nicht im einzelnen erörterten Nacheinanderausführungen von zwei speziellen Bewegungen ist die von zwei Verschiebungen von wesentlicher Bedeutung.

(8.10) Satz. Die Verkettung zweier Verschiebungen ist stets eine Verschiebung; es gilt $\overline{AB} \circ \overline{BC} = \overline{AC}$.

Beweis. Wir können offenbar von einem Produkt der Art $\overline{AB} \circ \overline{BC}$ ausgehen. Nach dem Satz (5.17) ist dieses Produkt gleich einem Produkt von vier Punktspiegelungen; und dieses lässt sich nach dem Dreispiegelungssatz (7.7) auf ein Produkt von zwei Punktspiegelungen reduzieren. Folglich ist $\overline{AB} \circ \overline{BC}$ eine Verschiebung (Satz (5.16)). Sie bildet A offensichtlich auf C ab.

(8.11) Aufgabe. Ist $\alpha = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$, so ergibt $\alpha \circ \alpha$ stets eine Verschiebung.

Die nächste Aufgabe bietet Gelegenheit, sich mit weiteren Verkettungen von zwei speziellen Bewegungen zu beschäftigen und sich eine diesbezügliche Übersicht zu verschaffen.

(8.12) Aufgabe. Man bestimme die speziellen Bewegungen, die bei den durch Tabelle 3 vorgegebenen Verkettungen (in der Reihenfolge "Zeile" \circ "Spalte") jeweils entstehen. (Dabei sind Fallunterscheidungen nicht ausgeschlossen!) Die mit "×" gekennzeichneten Teile sind bereits ausreichend behandelt.

(8.13) Aufgabe. Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Wie viele Bewegungen der Ebene gibt es, die die Strecke \overline{AB} auf die Strecke \overline{CD} abbilden? (Man nutze die Ergebnisse aus (8.4).)

Tabelle 3

	Spiegelung an b	Drehung um Q	Spiegelung an S	Verschiebung \overrightarrow{CD}
Spiegelung an a	1) ×	2)	3) ×	4)
Drehung um P	5)	6) ×	7)	8)
Spiegelung an R	9) ×	10)	11) ×	12)
Verschiebung \overrightarrow{AB}	13)	14)	15)	16) ×

9 Gruppen und Untergruppen ebener Bewegungen

Wir betrachten zunächst die Menge \mathfrak{B} aller Bewegungen der Ebene ε .

Die Nacheinanderausführung \circ ist nach der Eigenschaft B 5 Abschnitt 1) eine Operation in \mathfrak{B} . Dabei erweist sich die identische Abbildung ι von ε als Einselement; und mit α ist auch die Umkehrabbildung α^{-1} in \mathfrak{B} enthalten (siehe B 5), d.h., jedes Element von \mathfrak{B} besitzt sein Inverses.

Schließlich ist die Nacheinanderausführung assoziativ. (Das gilt ja bereits für Abbildungen.) Damit sind alle Eigenschaften für eine Gruppe (vgl. die Einführung) erfüllt.

(9.1) Satz. Die Bewegungen der Ebene bilden mit der Verkettung \circ als Operation eine Gruppe, die Bewegungsgruppe (\mathfrak{B}, \circ) der Ebene.

Die Gruppe (\mathfrak{B}, \circ) ist nicht kommutativ, denn z.B. gilt im allgemeinen nicht $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$. (Siehe Aufgabe (3.11).)

(9.2) Aufgabe. Bilden die Bewegungen (der Ebene), die eine Strecke \overline{AB} auf sich abbilden (Aufgabe (8.4)), eine Gruppe? (Abb. 9.1)

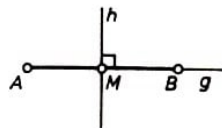


Abb. 9.1

Lösung. Die Menge besteht aus der identischen Abbildung ι (der Ebene) der Spiegelung σ_g an $g = g_{AB}$, der Spiegelung σ_h an der Mittelsenkrechten von \overline{AB} sowie aus der Spiegelung σ_M an dem Mittelpunkt M von \overline{AB} (Lösung der Aufgabe (8.4)).

Es sei $\mathfrak{B}_{\overline{AB}} = \{\iota, \sigma_g, \sigma_h, \sigma_M\}$. Wir bilden nun bezüglich \circ sämtliche 16 Zweierprodukte und stellen sie in Tabelle 4 zusammen.

Tabelle 4

\circ	ι	σ_g	σ_h	σ_M
ι	ι	σ_g	σ_h	σ_M
σ_g	σ_g	ι	σ_M	σ_h
σ_h	σ_h	σ_M	ι	σ_g
σ_M	σ_M	σ_h	σ_g	ι

Tabelle 5

\circ	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4
α_2	α_2	α_1	α_4	α_3
α_3	α_3	α_4	α_1	α_2
α_4	α_4	α_3	α_2	α_1

Man erkennt sofort, dass die Verkettung \circ eine Operation in $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$ ist, dass ι Einselement ist und dass jedes Element sein Inverses besitzt. Die Assoziativität (Gruppeneigenschaft G 1) steht für Bewegungen stets zur Verfügung. Die Struktur $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$ ist also eine Gruppe.

In der Tabelle 4 ist auffällig, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element aus $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$ genau einmal auftritt. Das ist kein Zufall, sondern eine Eigenschaft, die jede Gruppe (mit endlich vielen Elementen) in einer solchen tabellarischen Darstellung (Cayleysche Gruppentafel¹²) zeigt. Sie besagt nämlich, dass sowohl die Gleichung $\alpha \circ x = \beta$ als auch die Gleichung $y \circ \alpha = \beta$ (genau) eine Lösung x bzw. y besitzt, d.h., dass die Gruppeneigenschaft G 4 gilt.

Überdies geht die Tafel beim Spiegeln an der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) in sich über. Das bedeutet, dass $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}_{\overline{AB}}$ gilt (Eigenschaft G 5); die Gruppe ist demnach kommutativ.

Eine Gruppe von vier Elementen $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, deren Gruppentafel der Struktur nach wie die der Gruppentafel von $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$ ist - siehe Tabelle 5 - heißt Kleinsche Vierergruppe.¹³

Zweite Lösung für (9.2). Da $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$ eine Teilmenge von \mathfrak{B} ist, genügt es nachzuweisen, dass $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$ eine Untergruppe von (\mathfrak{B}, \circ) ist. Und dafür reicht aus, dass mit $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}_{\overline{AB}}$ auch $\alpha \circ \beta$ und α^{-1} in $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$ liegen. Dies erkennt man leicht (auch ohne Tafel).

Das Untergruppenkriterium können wir günstig auch zum Beweis des Satzes 9.1 einsetzen. Die Bewegungen sind eine Teilmenge der Transformationen der Ebene; und diese bilden mit der Verkettung \circ eine Gruppe (Einführung). Es genügt nun zu zeigen, dass mit $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ auch $\alpha \circ \beta, \alpha^{-1} \in \mathfrak{B}$ gilt; und dies gewährleistet gerade die Eigenschaft B 5 (Abschnitt 1).

(9.3) Aufgabe. Bilden die Bewegungen (der Ebene), die die Seite \overline{AB} eines regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ auf die Seite \overline{CD} abbilden (Aufgabe (8.13)) eine Gruppe?

Wir mustern anhand der "Übersicht über die ebenen Bewegungen" spezielle Bewegungen nach (Unter-) Gruppeneigenschaften durch.

(9.4) Aufgabe. Man untersuche die folgenden Mengen von Bewegungen danach, ob sie eine Gruppe bilden:

- a) alle geraden Bewegungen;
- b) alle ungeraden Bewegungen;
- c) alle Drehungen;
- d) alle Verschiebungen;
- e) alle Punktspiegelungen
- f) alle Geradenspiegelungen.

¹²benannt nach Arthur Cayley (1821-1895), englischer Mathematiker (Professor in Cambridge).

¹³Felix Klein (1849-1925), deutscher Mathematiker (Professor in Erlangen, München, Leipzig und Göttingen); in seinem berühmten "Erlanger Programm" (1872) systematisierte er die Geometrie mit Hilfe der Gruppentheorie.

Lösungsbeispiele.

a) Ja. Sind α, β gerade Bewegungen, dann ist offenbar $\alpha \circ \beta$ gerade und auch α^{-1} gerade, denn aus $a = \sigma_a \circ \sigma_b$ folgt $\alpha^{-1} = \sigma_b \circ \sigma_a$.

b) Nein, denn das Produkt zweier ungerader Bewegungen ist natürlich gerade.

c) Ja. Das Produkt zweier Verschiebungen ist wieder eine Verschiebung (Satz 8.10). Die Umkehrabbildung einer Verschiebung \overrightarrow{AB} ist die Verschiebung \overrightarrow{BA} (wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \iota$). Überdies gilt mit Hilfe des Dreispiegelungssatzes (7.7) (für Punkte)

$$\begin{aligned}\tau_1 \circ \tau_2 &= (\sigma_a \circ \sigma_b) \circ (\sigma_c \circ \sigma_d) = (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c) \circ \sigma_d = (\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a) \circ \sigma_d \\ &= \sigma_c \circ (\sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_d) = \sigma_c \circ (\sigma_d \circ \sigma_a \circ \sigma_b) = \tau_2 \circ \tau_1\end{aligned}$$

Die Verschiebungen bilden also eine kommutative Gruppe.

10 Erzeugte Bewegungsgruppen und Figuren

Aus Teilmengen von Bewegungen können durch endliche Produkte ihrer Elemente Untergruppen der Bewegungsgruppe entstehen. So bildet die Menge aller Geradenspiegelungen, die selbst keine Untergruppe von (\mathfrak{B}, \circ) ist, durch endlich lange Verkettungen die Bewegungsgruppe (\mathfrak{B}, \circ) . Dabei reichen schon - wie der Satz (8.1) zeigt - Produkte von höchstens drei Geradenspiegelungen aus.

Auf entsprechende Weise wird die Gruppe $\mathfrak{B}_{\overline{AB}}$ von $\{\sigma_g, \sigma_h\}$ aber auch von $\{\sigma_g, \sigma_M\}$ erzeugt.

Welche Bedingungen sind nun an eine Teilmenge T von Bewegungen zu stellen, damit sie auf solche Weise eine Untergruppe erzeugt?

Wir klären diese Frage gleich allgemein bezüglich irgendeiner Gruppe. Dabei ist der Begriff "Erzeugung" noch präzise zu erfassen. (Eine Einschränkung der Darlegungen auf die Bewegungsgruppe würde hinsichtlich der folgenden Überlegungen keine Vereinfachungen erbringen. Wir empfehlen dennoch dem Leser, der in gruppentheoretischen Fragen unerfahren ist, an die konkrete Bewegungsgruppe zu denken.)

Es sei (G, \circ) eine Gruppe und $T \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G . Mit $\langle T \rangle$ bezeichnen wir die Menge, die aus allen Produkten $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n$, $n \geq 1$, besteht, bei denen die Elemente α_i , oder ihre Inversen α_i^{-1} aus T sind.¹⁴

(10.1) Satz. $(\langle T \rangle, \circ)$ ist stets eine Untergruppe von (G, \circ) .

Beweis. Sind $\alpha = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n$ und $\beta = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_m$ aus $\langle T \rangle$, so ist offensichtlich

$$\alpha \circ \beta = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n \circ \beta = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_m$$

aus $\langle T \rangle$. Weiterhin liegt auch $\alpha^{-1} = (\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \circ \dots \circ \alpha_1^{-1}$ in $\langle T \rangle$; denn ist α_i oder α_i^{-1} aus T , so ist natürlich auch α_i^{-1} oder $(\alpha_i^{-1})^{-1} = \alpha_i$ aus T .

¹⁴Da wir in einer Gruppe arbeiten, existiert natürlich zu jedem Element α aus T das dazu inverse α^{-1} ; dieses muss aber nicht in T liegen (!).

Ist (U, \circ) eine Untergruppe von (G, \circ) , die T enthält, so ist auf Grund der Gruppeneigenschaften von U jedes Element von $\langle T \rangle$ in U enthalten. Demnach bildet $\langle T \rangle$ die kleinste Untergruppe in (G, \circ) , die T enthält.

$(\langle T \rangle, \circ)$ - oder auch kurz $\langle T \rangle$ - heißt die von T erzeugte Untergruppe und T ein Erzeugendensystem dieser Untergruppe. Sie kann auch ein weiteres Erzeugendensystem besitzen, wie das Beispiel $(\mathfrak{B}_{\overline{AB}}, \circ)$ zeigt.

Zur eingangs gestellten Frage ist nun zu sagen, dass jede Teilmenge $T \neq \emptyset$ aus \mathfrak{B} genommen werden kann.

(10.2) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die von $\{\sigma_a, \sigma_b\}$ erzeugte Untergruppe, wenn a und b verschiedene und zueinander parallele Geraden sind.

Lösung. Da σ_a und σ_b mit ihren Inversen σ_a^{-1} bzw. σ_b^{-1} übereinstimmen, haben wir nur Produkte endlicher Länge zu betrachten, die mit σ_a und σ_b gebildet sind. Stehen innerhalb eines solchen Produkts zwei gleiche Faktoren nebeneinander, so verkürzt sich das gesamte Produkt wegen $\sigma_a \circ \sigma_a = \iota$ und $\sigma_b \circ \sigma_b = \iota$.

Die geraden Produkte (d.h. mit einer geraden Anzahl von Faktoren) haben dann bis auf $\sigma_a \circ \sigma_a = \iota$ und $\sigma_b \circ \sigma_b = \iota$ die Form $(\sigma_a \circ \sigma_b)^n$ oder $(\sigma_b \circ \sigma_a)^n$, $n \geq 1$.

Dabei soll hier und später α^n einfach die Abkürzung für das Produkt $\alpha \circ \dots \circ \alpha$ sein, in dem α n -mal auftritt.¹⁵ Wir erweitern diese Festlegung auf ganzzahlige "Exponenten" durch $\alpha^0 := \iota$ und $\alpha^{-n} := (\alpha^{-1})^n$ für $n \geq 1$.

Da a, b echt parallel sind, ist $\sigma_a \circ \sigma_b$ eine nicht identische Verschiebung τ ; ferner ist

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_b^{-1} \circ \sigma_a^{-1} = (\sigma_a \circ \sigma_b)^{-1} = \tau^{-1}$$

Mit τ ist auch τ^n eine Verschiebung für jede ganze Zahl n .

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $A_0 \in a$ und setzen A_n für das Bild von A_0 bei der Verschiebung τ^n . (Damit ist $\tau^n = \overrightarrow{A_0 A_n}$. In diese Darstellung ordnet sich $\tau^0 = \overrightarrow{A_0 A_0}$ wegen $\tau^0 = \iota$ mit ein.)

Die Punkte $\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots$ liegen auf der Senkrechten zu a und b durch A_0 (Satz (4.9)), und sie sind voneinander verschieden, was man genau so wie bei der Lösung der Aufgabe (7.2) zeigen kann. Demnach sind auch die Verschiebungen $\overrightarrow{A_0 A_n}$ (n ganzzahlig) alle voneinander verschieden.

Die ungeraden Produkte sind neben σ_a und σ_b die Produkte der Form $\sigma_a \circ (\sigma_b \circ \sigma_a)^n = \sigma_a \circ \tau^{(-n)}$ und $\sigma_b \circ (\sigma_a \circ \sigma_b)^n = \sigma_b \circ \tau^n$, $n \geq 1$.

Nach dem zweiten Dreispiegelungssatz (7.4) sind es Geradenspiegelungen. Wir bezeichnen diese Geraden mit a_{-n} bzw. a_{n+1} , so dass $\sigma_a \circ \tau^{(-n)} = \sigma_{-n}$ und $\sigma_b \circ \tau^n = \sigma_{a_{n+1}}$ für $n \geq 1$ gilt. In diese Bezeichnung fügt sich die Festlegung $a_0 := a$ und $a_1 := b$ gut ein; tatsächlich ist $\sigma_a = \sigma_a \circ \tau^0 = \sigma_{a_0}$ und $\sigma_b = \sigma_b \circ \tau^0 = \sigma_{a_1}$.

Die Lage dieser Geraden lässt sich mit Hilfe der Punkte A_n (n ganzzahlig) einfach beschreiben:

Wegen $(A_0^a)^{\tau^{(-n)}} = A_0^{\tau^{(-n)}} = A_n$ und $(A_0^b)^{\tau^n} = ((A_0^a)^b)^{\tau^n} = A_{n+1}$ für $n \geq 0$ ist a_i die

¹⁵Präzise lässt sich α^n induktiv erklären: $\alpha^1 := \alpha$; $\alpha^{k+1} := \alpha^k \circ \alpha$.

Mittelsenkrechte von $\overline{A_0 A_i}$ für jede ganze Zahl $i \neq 0$ (Abb. 10.1).

Die Spiegelungen σ_{a_i} sind ebenfalls alle voneinander verschieden. Wären nämlich die Mittelsenkrechten von $\overline{A_0 A_i}$ und $\overline{A_0 A_j}$ ($i, j \neq 0$, ganzzahlig) gleich, so wäre $A_i = A_j$.

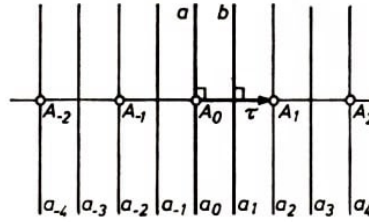


Abb. 10.1

Folglich besteht $\langle \{\sigma_a, \sigma_b\} \rangle$ aus den Verschiebungen $\overrightarrow{A_0 A_n}$ und den Geradenspiegelungen σ_{a_n} , n ganzzahlig.

Die Aufgabe (10.2) steht mit folgendem physikalischen Sachverhalt in enger Beziehung. Wir stellen zwei ebene Spiegelflächen α und β parallel zueinander auf, die spiegelnden Seiten einander zugewandt (Abb. 10.2).

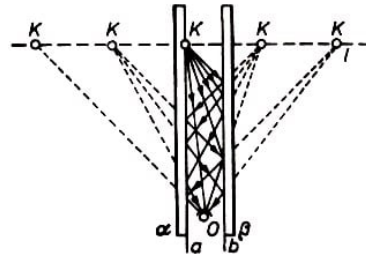


Abb. 10.2

In der Spiegelfläche α sei eine Lichtquelle K eingebaut (etwa eine in das Material eingelassene Glühbirne; näherungsweise auch eine Kerze, die möglichst dicht an die Spiegelfläche gestellt wird). Zwischen den Spiegelflächen stehe ein Betrachter so, dass sein Auge O nicht von der Senkrechten l auf die Spiegelfläche α durch den Punkt K getroffen wird.

(Die in Abb. 10.2 gewählte Mittellage von O ist nur für eine übersichtliche Darstellung von Lichtstrahlen günstig, für die weiteren Darlegungen und Ergebnisse aber ohne Bedeutung.)

Welche von K ausgehenden Lichtstrahlen treffen nun das Auge O , was sieht das Auge?

Zunächst gibt es eine direkte geradlinige Verbindung von K nach O . Weitere Lichtstrahlen können nur nach Reflexion an den Spiegelebenen α und β zu O gelangen.

Der Lichtstrahl, der nach einmaliger Reflexion an β das Auge O trifft, vermittelt auf Grund optischer Gesetze von K eine solche scheinbare Lage K_1 (virtuelles Bild), dass die Strecke $\overline{K K_1}$ von der Ebene β halbiert wird und $g_{K K_1} \perp \beta$ (und damit $K_1 \in l$) ist.

Außerdem verläuft dieser Lichtstrahl in der Ebene, die durch die Gerade l und den Punkt O geht. (Siehe dazu nochmals Abb. 2.3.) Die Schnittgeraden dieser Ebene mit den Ebenen α und β seien a und b . Bezüglich dieser Hilfsebene ist also K_1 das Bild von K bei der Spiegelung ab.

Nun ist leicht zu erkennen, dass das Auge O im Spiegel β diejenigen (Leucht-)Punkte

K_1, K_2, \dots und im Spiegel α diejenigen (Leucht-)Punkte K_{-1}, K_{-2}, \dots sieht, wie sie sich aus K mit Hilfe von σ_a und σ_b entsprechend der Lösung von (10.2) (Abb. 10.1) ergeben.

Dieser visuelle Eindruck entspricht dem beim Betrachten einer Lampenreihe an einer geradlinigen Straße (beliebiger Länge), wenn die Lampen in gleichen Abständen angebracht sind.

(10.3) Aufgabe. Welche Untergruppe erzeugt die Menge der Punktspiegelungen?

(10.4) Aufgabe. Es sei AA_1B ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A_1 . Aus welchen Bewegungen besteht die erzeugte Untergruppe $\langle \alpha \rangle$, wenn α die (echte) Schubspiegelung $\overrightarrow{AA_1} \circ \sigma_{g_{AA_1}}$ ist? Man zeichne die Bilder der Dreiecksfläche AA_1B bei diesen Bewegungen.

(10.5) Aufgabe. Es sei SAB ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A und ρ die Drehung um S , die SA^+ in SB^+ überführt. Man bestimme die Bewegungen, aus denen $\langle \rho \rangle$ besteht und zeichne die Bilder der Dreiecksfläche SAB bei diesen Bewegungen. Man stelle eine Strukturtafel von $\langle \rho \rangle$ auf.

Lösung. Bei geeigneter Vorgabe der Orientierung der Ebene ist die gegebene Drehung $\rho = \rho(S, 45^\circ)$. Folglich sind $\rho^0, \rho^1, \rho^2, \dots, \rho^7$ voneinander verschieden, aber $\rho^8 = \rho(S, 8 \cdot 45^\circ)$ ist die identische Drehung $\iota = \rho^0$ um S .

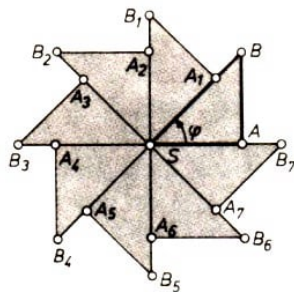


Abb. 10.3

Tabelle 6

\circ	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^6	ρ^7
ι	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^6	ρ^7
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^6	ρ^7	ι
ρ^2	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^6	ρ^7	ι	ρ
ρ^3	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^6	ρ^7	ι	ρ	ρ^2
ρ^4	ρ^4	ρ^5	ρ^6	ρ^7	ι	ρ	ρ^2	ρ^3
ρ^5	ρ^5	ρ^6	ρ^7	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4
ρ^6	ρ^6	ρ^7	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5
ρ^7	ρ^7	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^6

Für ganze Zahlen i und j mit $i < j$ ist nun $\rho^i = \rho^j$ genau dann, wenn $j - i$ ein Vielfaches der Zahl 8 ist. Tatsächlich folgt aus $j = t \cdot 8 + i$ sofort

$$\rho^j = \rho^{t \cdot 8} \circ \rho^i = (\rho^8)^t \circ \rho^i = \iota \circ \rho^i = \rho^i$$

Umgekehrt benutzen wir, dass sich $j - i$ in der Form $t \cdot 8 + r$ mit natürlichen Zahlen t und $0 \leq r < 8$ darstellen lässt. Dann folgt aus $\rho^i = \rho^j$ zunächst $\rho^{(j-i)} = \iota$ und daraus weiter $\iota = \rho^{(j-i)} = \rho^{t \cdot 8} \cdot \rho^r = \iota \circ \rho^r$, also $\rho^r = \iota$ und damit $r = 0$.

Die (Unter-)Gruppe $\langle \rho \rangle$ besteht demnach aus den Elementen $\rho^0 = \iota, \rho, \rho^2, \dots, \rho^7$ und nur aus diesen. Sie ist kommutativ nach dem Satz 3.12.

Die Bilder der Dreiecksfläche SAB bezüglich dieser Bewegungen lassen sich leicht angeben (Abb. 10.3), ebenso die Strukturtafel für (9) (Tabelle 6).

(10.6) Aufgabe. Man gebe für jedes $\alpha \in \langle \rho \rangle$ (in der Aufgabe (10.5)) die Untergruppe

$\langle \alpha \rangle$ an. Sind damit alle Untergruppen von $\langle \rho \rangle$ beschrieben?

Die Gruppe $\langle \rho \rangle$, sämtliche Untergruppen von ihr sowie die Untergruppe $\langle \tau \rangle = \{\tau^i, i \text{ ganzzahlig}\}$ in der Aufgabe (10.2) und die Gruppe $\langle \alpha \rangle$ der Aufgabe (10.4) sind Beispiele für sogenannte zyklische Gruppen.

Eine Gruppe G heißt zyklisch, wenn sie von einem einzigen Element α erzeugt werden kann: $G = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^i, i \text{ ganzzahlig}\}$.

Sind alle α^i voneinander verschieden - wie in der Gruppe $\langle \alpha \rangle$ der Aufgabe (10.4) oder in der Untergruppe $\langle \tau \rangle$ der Aufgabe (10.2) - so heißt G unendliche zyklische Gruppe (oder freie zyklische Gruppe). Anderenfalls gibt es eine kleinste natürliche Zahl $n > 0$; für die α^n gleich dem Einselement e der Gruppe G ist. G heißt dann eine endliche zyklische Gruppe; sie besteht aus n verschiedenen Elementen. Die Ordnung der Gruppe (d.h., die Anzahl ihrer verschiedenen Elemente) ist deshalb n .

Ist $G = \langle \alpha \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n , dann erhält man durch $\langle \alpha^m \rangle$ genau alle Untergruppen $U \neq \langle e \rangle$ von G , wenn man für $m > 0$ alle von n verschiedenen Teiler von m wählt. Der Quotient $\frac{n}{m}$ gibt dann jeweils die Ordnung von $\langle \alpha^m \rangle$ an. (Die Überlegungen zur Lösung der Aufgabe (10.6) sind eine geeignete Vorlage für einen Beweis dieser Behauptungen.) Anhand der Gruppe $\langle \rho \rangle$ kann man sich diese Zusammenhänge leicht veranschaulichen.

In einer unendlichen zyklischen Gruppe ist jede Untergruppe, die von der trivialen Untergruppe $\langle e \rangle$ verschieden ist, ebenfalls von unendlicher Ordnung. So ist in der Aufgabe (10.4) $\langle \alpha^2 \rangle$ eine echte Untergruppe von $\langle \alpha \rangle$.

Die Gruppe $\langle \rho \rangle$ (aus der Aufgabe (10.5)) und die Figur in der Abb. 10.3, die damit in enger Beziehung steht, führt uns zu einem weiteren Begriff, der sogenannten Drehsymmetrie.

Eine Figur \mathfrak{F} heißt m -fach drehsymmetrisch ($m \geq 1$) bezüglich M genau dann, wenn es eine Drehung ρ um M derart gibt, dass $\langle \rho \rangle$ die Ordnung m hat und \mathfrak{F} gegenüber ρ invariant ist. Dabei wird M der Mittelpunkt dieser Drehsymmetrie genannt.

Ist n die größte natürliche Zahl, bei der die Figur \mathfrak{F} n -fach drehsymmetrisch bezüglich M ist, so heißt n der Grad der Drehsymmetrie von \mathfrak{F} bezüglich M . Der Grad $n = 1$ ist nicht ausgeschlossen, aber im allgemeinen uninteressant, da dann $\rho = \iota$ ist.

Die Figur in Abb. 10.3 ist achtfach drehsymmetrisch bezüglich S .

Ist \mathfrak{F} n -fach drehsymmetrisch und $1 \leq t \leq n$, dann ist - wie leicht zu zeigen - \mathfrak{F} genau dann auch t -fach drehsymmetrisch (mit dem gleichen Mittelpunkt), wenn t ein Teiler von n ist. Folglich ist jede n -fach drehsymmetrische Figur mit geradzahligem n insbesondere zweifach drehsymmetrisch, d.h. zentralsymmetrisch.

Der Grad der Drehsymmetrie eines regelmäßigen n -Ecks ($n \geq 3$) ist offensichtlich gleich n .

(10.7) Aufgabe. Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Quadrat, wenn es zum Schnittpunkt seiner Diagonalen vierfach drehsymmetrisch ist.

In der Natur, der Technik und in der Kunst finden wir vielfältige Beispiele für drehsymmetrische Figuren.

Viele Blüten und Blumen zeigen in der Draufsicht (Grundriss) eine Drehsymmetrie vom Grade 3 oder höher. Man benutzt sogenannte Blütendiagramme - das sind schematische Grundrisse der Blüten - als wichtiges Hilfsmittel für die systematische Gliederung von Samenpflanzen. Abb. 10.4 zeigt das Blütendiagramm der Tulpe; es besitzt eine Drehsymmetrie vom Grade 3.



Abb. 10.4

Welchem Grad der Drehsymmetrie zeigen die Blütenblätter der Kirsche (im Grundriss) oder der ebene Schnitt durch einen Apfel (senkrecht zur Achse Stengel-Blüte)?

In der Technik bieten sich insbesondere bei rotierenden Teilen viele Beispiele an. Welchen Grad der Drehsymmetrie besitzt das vordere Rad eines Fahrrades im Seitenriss?
¹⁶ Stimmt dieser Grad mit dem des Hinterrades überein?

Zur Kontrolle des Gleichlaufs und der richtigen Drehzahl des Plattenspieltellers dienen einfache Stroboskopscheiben, die auf den Plattenteller aufgelegt werden und bei Rotation unter Wechselstromlicht (Frequenz 50 Hz) betrachtet werden. Der scheinbare Stillstand des Kreisringes zeigt die richtige Umlaufgeschwindigkeit des Plattentellers an.



Abb. 10.5

Abb. 10.5 zeigt in einem Ausschnitt die Struktur des Kreisringes. Welche Ordnung muss die Drehsymmetrie des Kreisringes haben, damit die heute übliche Umlaufgeschwindigkeit von $33\frac{1}{3} \text{ U min}^{-1}$ kontrolliert werden kann?

Künstlerische wie technische Meisterleistungen sind die (Fenster-)Rosetten gotischer Architektur. (Wir erinnern an solche bekannten Bauwerke wie das Strasburger Münster, den Dom zu Meissen und das Rathaus in Stralsund.) Abb. 10.6 zeigt eine Rosette; ihr Seitenriss besitzt eine Drehsymmetrie vom Grade 8.

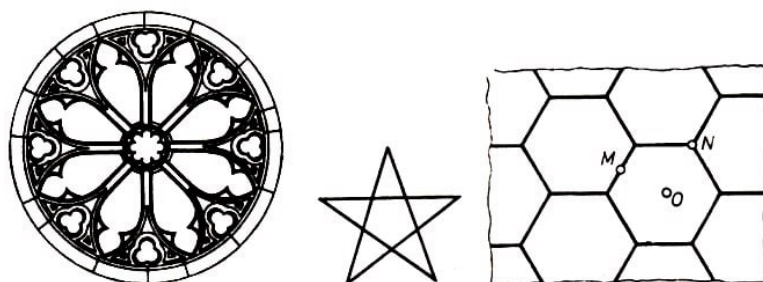


Abb. 10.6,7,8

¹⁶Dieser Grad ist nicht gleich der Speichenzahl!

Das Pentagramm (Abb. 10.7), das Ordenszeichen der Pythagoreer ist drehsymmetrisch vom Grade 5. (Im Mittelalter kam dieser Figur als Drudenfuß mystische Bedeutung zu; die Seiten des Pentagramms teilen sich nach dem Goldenen Schnitt.)

Die Ebene kann bekanntlich mit regelmäßigen Sechsecken gleicher Größe einfach überdeckt werden (Abb. 10.8), die Fotografie einer Honigwabe zeigt eine gleiche Struktur. Bezüglich der Punkte M , N und O (Abb. 10.8) hat diese Parkettierung eine Drehsymmetrie vom Grade 2 bzw. 3 bzw. 6. Dieses Beispiel macht deutlich, dass der Grad der Drehsymmetrie vom gewählten Bezugspunkt abhängt.

Man entwerfe eine Parkettierung der Ebene, die Drehsymmetrien von vier verschiedenen Graden ($\neq 1$) aufweist!

(10.8) Aufgabe. Man beantworte die gestellten Fragen.

(10.9) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die von $\{\sigma_a, \sigma_b\}$ erzeugte Untergruppe, wenn a und b zwei sich schneidende Geraden sind?

Lösung. Formal können wir vieles sofort aus der Lösung von 10.2 übernehmen. Das Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b$ ist hier jedoch eine Drehung ρ um den Schnittpunkt S von a und b . Sie besitzt ein Drehmaß $t \cdot 360^\circ$ mit $0 < t < 1$.

Formal besteht demnach $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ aus den Drehungen ρ^i und den Geradenspiegelungen σ_{a_i} (i ganzzahlig) mit $\sigma_{a_i} = \sigma_a \circ \rho^i$ für $i \leq 0$ und $\sigma_{a_i} = \sigma_b \circ \rho^{i-1}$, für $i > 0$; wobei hier der erste Dreispiegelungssatz (7.2) eingeht.

Wir wählen wieder einen beliebigen Punkt $A_0 \in a$, selbstverständlich verschieden von S und setzen $A_i := A_0^{\rho^i}$ entsprechend (9.2).

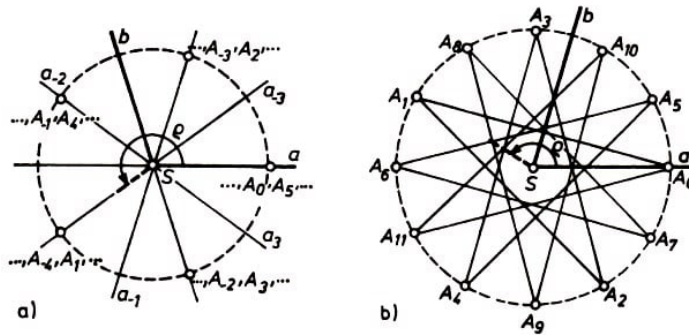


Abb. 10.9

Nun bleibt noch der Nachweis der Verschiedenheit der Gruppenelemente.

Ist die aus den Drehungen ρ^i bestehende zyklische Untergruppe endlich und ist m ihre Ordnung, so gilt $m \cdot (t \cdot 360^\circ) = 0^\circ \pmod{360^\circ}$ wegen $\rho^m = \text{id}$, d.h., $m \cdot t$ ist eine natürliche Zahl r mit $0 < r < m$. (In den Abb. 10.9a, b ist $r = 3$ bzw. $r = 5$.) Aus der Endlichkeit von $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ folgt also, dass $t \left(= \frac{r}{m} \right)$ rational ist.

Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Endlichkeit. Es sei $0 < t < 1$ eine rationale Zahl. Dann kann man sie in eindeutiger Weise als Quotient $\frac{r}{m}$ positiver teilerfremder ganzer Zahlen darstellen, und folglich ist $\langle \rho \rangle$ von der Ordnung m , und die Gruppe $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ besteht aus m Drehungen und m Geradenspiegelungen.

Für irrationales $0 < t < 1$, z.B. für $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, ist die von $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ erzeugte Menge der

Drehungen unendlich und damit auch die Menge der erzeugten Geradenspiegelungen. Dennoch wird auf diese Weise nicht jede Drehung um S erfasst!

So z.B. nicht die Drehung $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 360^\circ$, wenn $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist. Denn man überzeugt sich durch Quadrieren leicht davon, dass $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ keine rationale Zahl $\frac{m}{r}$ ist.

(10.10) Aufgabe. Man gebe für $t = \frac{1}{5}$ eine optische Interpretation wie sie zur Aufgabe (10.2) vorgenommen wurde.

(10.11) Aufgabe. Für welche rationale Zahlen $0 < t < 1$ ist $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ eine Kleinsche Vierergruppe?

(10.12) Aufgabe. Ist $0 < t < 1$ irrational, so liegt die Menge der Punkte A_i dicht auf dem Kreis um S durch A_0 , d.h., sind A_i, A_k zwei verschiedene Punkte aus $\{(A_i, i \text{ ganzzahlig})\}$, so liegt in jedem der beiden Kreisbögen, die von A_j, A_k begrenzt werden, mindestens ein weiterer Punkt aus $\{A_i\}$.

Man nennt entsprechend den erzeugten Gruppen in (10.2) und (10.9) eine Gruppe eine Diedergruppe der Ordnung n (kurz D_n), wenn sie von zwei Elementen α, β ($\neq \alpha$) erzeugt wird, für die $\langle \alpha \rangle$ und $\langle \beta \rangle$ die Ordnung 2 und $\langle \alpha \circ \beta \rangle$ die Ordnung $n \geq 2$ haben, wobei man durch $n = \infty$ zum Ausdruck bringt, dass die unendliche Ordnung mit einbezogen ist.

Eine dazu äquivalente Definition ist folgende:

Das Erzeugendensystem besteht aus zwei Elementen σ und ρ ($\neq \sigma$), für die $\langle \sigma \rangle$ die Ordnung 2 und $\langle \rho \rangle$ die Ordnung $n \geq 2$ (∞ nicht ausgeschlossen) haben und $\sigma^{-1} \circ \rho \circ \sigma = \rho^{-1}$ gilt. - In den Beispielen (10.2) und (10.9) ist in der Tat die Gruppe $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ die gleiche wie $\langle \sigma_a, \tau \rangle$ bzw. $\langle \sigma_a, \rho \rangle$.

Unter der Deckabbildung einer (ebenen) Figur \mathfrak{F} versteht man eine Bewegung α der Ebene mit $\mathfrak{F}^\alpha = \mathfrak{F}$. Die Deckabbildungen von \mathfrak{F} bilden offenbar eine Gruppe, die sogenannte Symmetriegruppe von \mathfrak{F} . Insbesondere interessieren Deckabbildungen regelmäßiger n -Ecke ($n \geq 2$, endlich).¹⁷

Ist die Gruppe $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ von endlicher Ordnung $n \geq 2$, dann bilden die Punkte A_0, \dots, A_{n-1} ein regelmäßiges n -Eck. (Die Abb. 10.9a, b zeigen, dass diese n -Ecke nicht einfach sein müssen.) Alle Bewegungen aus $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ sind Deckabbildungen dieses n -Ecks. Umgekehrt kann man zeigen:

(10.13) Aufgabe. Die Bewegungen aus $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ sind alle Deckabbildungen für das regelmäßige n -Eck $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$.

Das bedeutet, dass eine endliche Diedergruppe D_n und die Gruppe der Deckabbildungen eines regelmäßigen n -Ecks ($n \geq 2$) ihrer Struktur nach das Gleiche sind. (In einigen Lehrbüchern wird die Diedergruppe D_n gerade als Gruppe der Deckabbildungen eines regelmäßigen n -Ecks eingeführt. Auf den geometrischen Ursprung der Bezeichnung weist das Wort "Dieder" hin.)

(10.14) Aufgabe. Man bezeichne die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit A, B und

¹⁷Der Fall $n = 2$ bedeutet eine Strecke m .

C und stelle den Permutationen der Menge $\mathfrak{E} = \{A, B, C\}$, d.h. den eindeutigen Abbildungen von \mathfrak{E} auf sich, die Bewegungen aus $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ gegenüber, wobei a die Mittelsenkrechte von \overline{BC} und b die Mittelsenkrechte von \overline{CA} sein soll.

(10.15) Aufgabe. Man beschreibe die Symmetriegruppe einer "Honigwaben"-Parkettierung der Ebene (Abb. 10.8), indem man ein Erzeugendensystem für diese Gruppe angibt.

Man kann zeigen, dass die endlichen Diedergruppen D_n ($n \geq 2$) und die endlichen zyklischen Gruppen (einschließlich der aus der identischen Bewegung ι bestehenden Gruppe) ihrer Struktur nach gerade alle endlichen Gruppen sind, die von den Bewegungen in der Ebene gebildet werden können.

Besonders reizvoll ist die Beschäftigung mit Streifenmustern (Abb. 7.6 b und Abb. 7.7 zeigen sehr einfache Formen) und ebenen Ornamenten (wie etwa die einfachen Formen in den Abb. 7.6 und 10.8) sowie mit ihren Symmetriegruppen (wie in der Aufgabe (10.15)).

Diesbezügliche Vorlagen aus Natur, Technik und Kunst und eingehende Erörterungen findet der interessierte Leser u.a. in [12, 19, 21, 7] und [10].

III. Räumliche Bewegungen

Unsere Kenntnisse und Erfahrungen über die Bewegungen in der ebenen Geometrie können wir vielfältig für die räumlichen Bewegungen nutzen.

Das ermöglichen vor allem Analogien zwischen geometrischen Sachverhalten in der Ebene und solchen im Raum.¹⁸ Dies ist allein schon deshalb von großem Wert, da uns im Raum leider nichts zur Verfügung steht, das dem Transparentpapier und seiner Möglichkeit zur Realisierung ebener Bewegungen entspricht.

Bevor wir den Bewegungsbegriff im Raum erklären, beginnen wir mit einer einfachen Abbildung, die später die gleiche grundlegende Rolle spielen wird wie die Geradenspiegelung für die Bewegungen in der Ebene.

11 Spiegelungen an Ebenen

Wir gehen von den bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten bei der Reflexion an einer ebenen spiegelnden Fläche aus. Sie wurden bereits in den Abschnitten 2 und 10 aufgegriffen:

Beim Betrachten des Punktes P im Spiegel η erscheint für das Auge A der Punkt P in derjenigen Lage P' , dass $g_{PP'} \perp \eta$ ist und η durch den Mittelpunkt von $\overline{PP'}$ geht (Abb. 2.3).

Dementsprechend erklären wir folgende geometrische Abbildung, wobei \mathfrak{P} die Menge aller Punkte des Raumes bedeutet:

Definition. σ ist eine Spiegelung an der Ebene ε genau dann, wenn σ eine Abbildung von \mathfrak{P} in \mathfrak{P} ist, bei der jeder Punkt $P \in \varepsilon$ Fixpunkt ist und bei der jedem Punkt $P \notin \varepsilon$ derjenige Punkt $P' (\neq P)$ zugeordnet wird, der auf dem Lot von P auf ε liegt und für den der Mittelpunkt von PP' auf ε liegt.

Anhand dieser konstruktiven Festlegung der Bildpunkte ist ohne weiteres folgender Satz ersichtlich:

(11.1) Satz. An jeder Ebene ε gibt es genau eine Spiegelung.

Wir bezeichnen diese Spiegelung im folgenden mit σ_ε . Für das Bild eines Punktes P bzw. einer Figur \mathfrak{F} bei σ_ε schreiben wir kurz P' bzw. \mathfrak{F}^ε . Ist $P \notin \varepsilon$ und $Q \neq P$, dann ist $Q = P^\varepsilon$ offenbar äquivalent damit, dass ε die Mittellotebene von P, Q ist ($\varepsilon = \mu(P, Q)$).

Eine Ebene ε heißt Symmetrieebene einer Figur \mathfrak{F} genau dann, wenn $\mathfrak{F}^\varepsilon = \mathfrak{F}$ gilt.

Aus der Definition folgt außerdem sofort

(11.2) Satz. Ist σ die Spiegelung an einer Ebene, so gilt $\sigma \circ \sigma = \iota$. (Dabei ist ι die identische Abbildung von \mathfrak{P} .)

¹⁸Dazu möchten wir auf das Büchlein "Räumliche Geometrie" [17] verweisen.

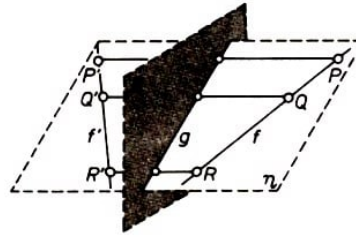


Abb. 11.1

Wir fragen nach weiteren Eigenschaften und orientieren uns dabei bewusst an Eigenschaften der Bewegungen in der Ebene.

Zunächst ist die Spiegelung σ an einer Ebene ε offenbar eine eindeutige Abbildung von \mathfrak{P} (der Menge der Punkte des Raumes) auf sich, also eine Transformation von \mathfrak{P} . Ist dabei η eine zu ε senkrechte Ebene, dann gilt $P^\varepsilon \in \eta$ für alle $P \in \eta$ (auf Grund der obigen Definition) und damit $\eta^\varepsilon = \eta$. Die Punkte der Schnittgeraden g der Ebenen ε und η bleiben fest.

Beschränken wir die Abbildung σ_ε auf die Punkte der Ebene η (also $\sigma_\varepsilon|_\eta$), so erhalten wir in η die Spiegelung an der Geraden g (Abb. 11.1). Nun können wir die Eigenschaften aus dem Abschnitt 2 (Geradenspiegelungen) nutzen, und zwar für alle Figuren, die in einer zu ε senkrechten Ebene liegen.

Bei der Spiegelung σ_ε gehen demnach Geraden in Geraden über (Geradentreue), die Eigenschaft " Q liegt zwischen P und R " bleibt invariant, und es gilt $|PQ| = |P'Q'|$ (Invarianz des Abstandes). Damit kann man weiter begründen, dass Ebenen in Ebenen und Halbräume in Halbräume übergehen.

Bei der Spiegelung an der Ebene ε werden die beiden Halbräume bezüglich ε vertauscht. Folglich vertauscht sie die beiden Orientierungen des Raumes.

Auf Grund unserer bisherigen Darlegungen ist die folgende Aussage zum Teil schon direkt bewiesen:

(11.3) Aufgabe. a) Es ist $g \perp \varepsilon$ genau dann, wenn $g \not\subset \varepsilon$ und $g^\varepsilon = g$ gilt.

b) Für $\eta \perp \varepsilon$ ist notwendig und hinreichend, dass $\eta \not\subset \varepsilon$ und $\eta^\varepsilon = \eta$; gilt.

(11.4) Aufgabe. Welche Symmetrieebenen besitzt ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$?

Lösung. Es sei ε eine Symmetrieebene. Da nicht alle vier Punkte A, B, C, D auf ε liegen können, gibt es wenigstens einen von ihnen, etwa A , der nicht auf ε liegt. Sein Bild A' muss dann einer der anderen Punkte sein, etwa B .

Folglich ist ε die Mittellotebene $\mu(A, B)$. - Umgekehrt ist $\mu(A, B)$ tatsächlich eine Symmetrieebene, da wegen $|C'A| = |CB|$ und $|DA| = |DB|$ die Punkte C und D auf $\mu(A, B)$ liegen.

Folglich sind die sechs Mittellotebenen $\mu(A, B)$, $\mu(B, C)$, $\mu(C, A)$, $\mu(A, D)$, $\mu(B, D)$ und $\mu(C, D)$ genau die Symmetrieebenen des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$.

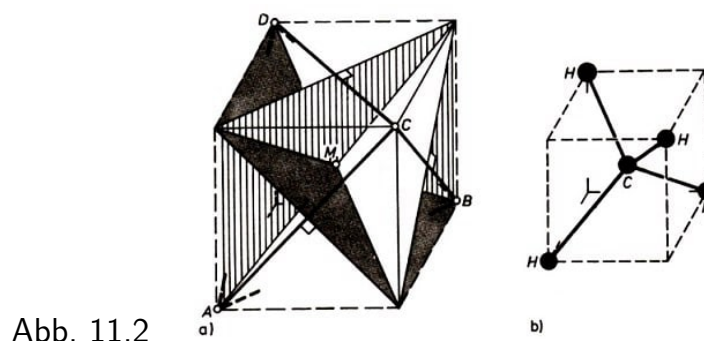


Abb. 11.2

Diese Ebenen lassen sich in einem Schrägbild des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ leicht zeichnen, wenn man die Eigenschaft ausnutzt, dass sich das Tetraeder durch (genau) einen Würfel umschreiben lässt, bei dem die Tetraederkanten Diagonalen von Seitenflächen sind.¹⁹ Abb. 11.2a zeigt einen Schrägriss, in dem der besseren Übersicht wegen nur die Symmetrieebenen $\mu(A, C)$, $\mu(B, C)$ und $\mu(C, D)$ eingezeichnet worden sind.

Symmetriebetrachtungen spielen in der Chemie, insbesondere in der Kristallographie eine große Rolle. Ein regelmäßiges Tetraeder bilden u.a. die Kerngerüste der Moleküle von (CH_4 , Abb. 11.2 b), Tetrafluorsilan (SiF_4), Tetrachlormethan (CCl_4). Moleküle anderer chemischer Verbindungen wie Schwefelhexafluorid (SF_6) und Chromhexacarbonyl ($Cr(CO)_6$) besitzen ein Kerngerüst, das ein regelmäßiges Oktaeder bildet.

(11.5) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieebenen eines regelmäßigen Oktaeders.

Analog zur Aufgabe (2.7) lässt sich lösen:

(11.6) Aufgabe. Gegeben seien eine Ebene ε und zwei Punkte A und B im Raum, die auf einer Seite von ε liegen. Man bestimme alle Punkte $C \in \varepsilon$, für die die Abstandssumme $|AC| + |CB|$ minimal ist (nach OJM 181232).

(11.7) Aufgabe. Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder und P ein im Innern der Kante \overline{AD} beliebig gewählter Punkt. Man bestimme unter allen Punkten Q im Innern des Dreiecks ABC und R im Innern des Dreiecks DBC diejenigen $\{Q, R\}$, für die die Abstandssumme $|PQ| + |QR| + |RP|$ minimal ist.

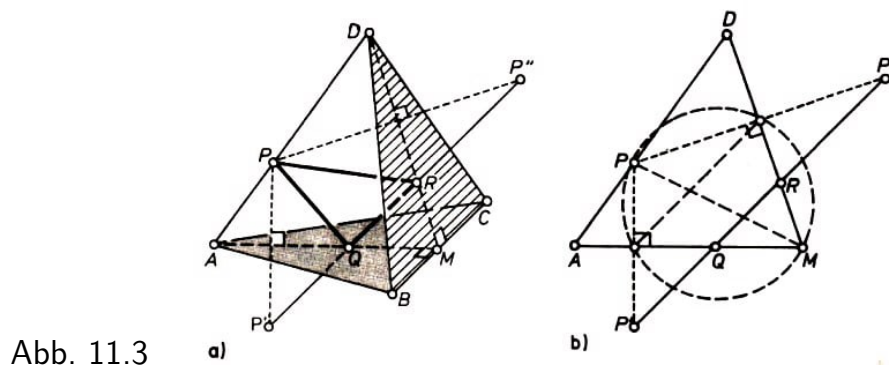


Abb. 11.3

Lösung. Auf Grund ähnlicher Aufgabenstellungen in der ebenen Geometrie (wie Aufgabe (2.8)) ist es naheliegend, P an den Ebenen ε_{ABC} und ε_{DBC} zu spiegeln. Dabei

¹⁹Siehe dazu u.a. [17], S. 14.

erhält man Punkte P' bzw. P'' (Abb. 11.3a). Ist M der Mittelpunkt von \overline{BC} , so ist wegen $A, D \in \mu(B, C)$ die Ebene ε_{ADM} sowohl senkrecht zu der Ebene ε_{ABC} als auch zu ε_{DBC} . Demnach sind P' und P'' die Bilder von P bei den ebenen Spiegelungen in ε_{ADM} an den Geraden g_{AM} und g_{DM} (Abb. 11.3b). Es lässt sich nun leicht zeigen, dass die Strecke $\overline{P'PP''}$ die Strecken \overline{AM} und \overline{DM} jeweils in einem inneren Punkt Q und R schneidet und dass auf Grund der Dreiecksungleichung $\{Q, R\}$ die Lösung der Aufgabe ist.

(11.8) Aufgabe. Zu vorgegebener Geraden f , Ebene α und Kugel(-Fläche) k bestimme man alle regelmäßigen Oktaeder $ABCDEF$ (mit den gegenüberliegenden Ecken $A - C$, $B - D$ und $E - F$), für die A, B, C, D in α , E auf f und F auf k liegen.

Als Beispiel wähle man in einem Würfel $PQRSTU VW$ die Gerade $f = g_{TR}$ (Raumdiagonale), die Ebene $\alpha = \varepsilon_{UVW}$ und k als Umkugel des Würfels. Die Konstruktion einer Lösung ist hier nicht zuletzt auch eine nützliche Übung für das räumliche Vorstellen und Darstellen!

Die Aufgabe (11.8) lässt sich mit Hilfe einer Ebenenspiegelung lösen. Entsprechend gelingt das bei einer ganzen Reihe von Aufgaben, wenn die gewünschte Konfiguration - wie hier das Oktaeder - Symmetrie bezüglich einer Ebene aufweist.

(11.9) Aufgabe. Man zeige:

- a) Zu zwei verschiedenen Halbgeraden p, q mit gemeinsamem Scheitel O gibt es genau eine Ebene ε mit $p^\varepsilon = q$.
- b) Zu zwei verschiedenen Halbebenen H, K mit gemeinsamer Randgeraden g gibt es genau eine Ebene ε mit $H^\varepsilon = K$.

Diese Aussagen spielen später eine Rolle, und man sollte ihren Beweis deshalb nicht übergehen.

12 Räumliche Bewegungen und Ebenenspiegelungen

Zunächst ist zu klären, was unter einer Bewegung des Raumes verstanden wird. Wir treffen die Festlegung in Analogie zu der der ebenen Bewegungen (vgl. Abschnitt 1). Dabei haben wir durch die Eigenschaften der Spiegelung an einer Ebene eine gewisse Rechtfertigung für die Forderungen.

Definition. τ ist eine Bewegung des Raumes \mathfrak{P} genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

B1: τ ist eine eineindeutige Abbildung von \mathfrak{P} auf sich.

B2: Das Bild einer Geraden ist eine Gerade; das Bild einer Ebene ist eine Ebene (Geraden- und Ebenentreue).

B3: Das Bild der Halbgeraden PQ^+ , der Halbebene PQR^+ bzw. des Halbraumes $PQRS^+$ ist die Halbgerade $P^\tau Q^{\tau+}$ bzw. die Halbebene $P^\tau Q^\tau R^{\tau+}$ bzw. der Halbraum $P^\tau Q^\tau R^\tau S^{\tau+}$ (Anordnungstreue).

B4: Es ist stets $|PQ| = |P^\tau Q^\tau|$ (Invarianz des Abstandes).

Die Spiegelung an einer Ebene ist auf Grund ihrer Eigenschaften offenbar eine räumliche Bewegung.

Weiterhin sind leicht einsichtig

B5: Sind τ, φ Bewegungen des Raumes, so auch $\tau \circ \varphi$ und τ^{-1} .

B6: Bei einer Bewegung des Raumes gehen Winkel in Winkel gleicher Größe über.

(12.1) Satz. Ist τ eine Bewegung des Raumes und ε eine Ebene, die bezüglich τ auf sich abgebildet wird, so ist die Einschränkung von τ auf ε eine ebene Bewegung der Ebene ε .

Von Interesse sind eine Übersicht über alle räumliche Bewegungen und Zusammenhänge zwischen ihnen. Ein erster Schritt dazu ist die folgende Aussage:

B8: Gibt es für Bewegungen τ und φ nicht komplanare Punkte²⁰ P, Q, R, S so, dass $P^\tau = P^\varphi$, $(PQ^+)^\tau = (PQ^+)^\varphi$, $(PQR^+)^\tau = (PQR^+)^\varphi$ und $(PQRS^+)^\tau = (PQRS^+)^\varphi$ gilt, dann ist $\tau = \varphi$, d.h., für alle Punkte des Raumes gilt $P^\tau = P^\varphi$ (Starrheit).

Beweis. Wir treffen folgende Bezeichnungen: $\varepsilon = \varepsilon_{PQR}$, $\mathfrak{H} = PQRS^+$.

Die Ebene ε geht bei der Bewegung $\tau \circ \varphi^{-1}$ in sich über. Nach dem Satz (12.1) ist die Einschränkung von $\tau \circ \varphi^{-1}$ auf ε eine ebene Bewegung der Ebene ε . Dabei geht außerdem nach der Voraussetzung P in P , PQ^+ in PQ^+ und die Halbebene PQR^+ in sich über. Nach der Starrheit B 8 für ebene Bewegungen ist dann jeder Punkt der Ebene ε Fixpunkt bezüglich $\tau \circ \varphi$.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $X \notin \varepsilon$ des Raumes, fällen das Lot h von X auf ε und erhalten den Fußpunkt Y (Abb. 12.1).

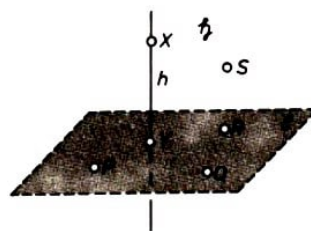


Abb. 12.1

Wegen $(Y^\tau)^{\varphi^{-1}} = Y$ und B 6 (Invarianz der Winkelgröße) ist $(h^\tau)^{\varphi^{-1}} = h$. Das Bild $(X^\tau)^{\varphi^{-1}}$ von X liegt also auf h und außerdem in \mathfrak{H} (wegen $(\mathfrak{H}^\tau)^{\varphi^{-1}} = \mathfrak{H}$). Auf Grund der Längeninvarianz B 1 und der Eindeutigkeit der Längenantragung auf einer Halbgeraden muss $(X^\tau)^{\varphi^{-1}} = X$ sein. Damit gilt $\tau = \varphi$.

(12.2) Aufgabe. Sind τ und φ Bewegungen, die bezüglich der Ecken eines Tetraeders $ABCD$ die gleichen Bildpunkte besitzen, so gilt $\tau = \varphi$. (Dies ist eine zu (1.4) analoge Aussage.)

²⁰Dies sind - wie bereits in der Einführung erklärt - Punkte, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.

(12.3) Aufgabe. Wie viele verschiedene Bewegungen gibt es höchstens, die ein vorgegebene regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ auf sich abbilden?

Lösung. Bei jeder dieser Deckabbildung wird die Menge $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D\}$ der Ecken auf sich abgebildet. Nach der Aussage (12.2) sind die Bewegungen bereits gleich, wenn sie bezüglich der Bilder von A, B, C und D übereinstimmen. Also gibt es höchstens so viele Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders, wie es Transformationen von \mathfrak{E} gibt. Und die Zahl dieser eineindeutigen Abbildungen von \mathfrak{E} auf sich ist (bekanntlich) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Damit ist noch nicht gesagt, dass es auch zu jeder Transformation α von \mathfrak{E} eine passende Bewegung τ (d.h. mit $\alpha = \tau|_{\mathfrak{E}}$) existiert. Sechs geeignete Bewegungen kennen wir bereits (Aufgabe (11.4)). Bei späteren Erörterungen (Abschnitt 16) zeigen wir, dass es auch tatsächlich 24 verschiedene Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders gibt.

Von grundlegender theoretischer wie praktischer Bedeutung ist nun

(12.4) Satz. Zu vorgegebenen nicht komplanaren Punkten P, Q, R, S und P', Q', R', S' gibt es stets ein Produkt τ von höchstem vier Ebenenspiegelungen derart, dass $P\tau = P', (PQ^+)\tau = P'Q'^+, (PQR^+)\tau = P'Q'R'^+$ und $(PQRS^+)\tau = P'Q'R'S'^+$ ist.

Beweis. Wir bezeichnen der Einfachheit halber $p = PQ^+, H = PQR^+, \mathfrak{H} = PQRS^+, p' = P'Q'^+, H' = P'Q'R'^+$ und $\mathfrak{H}' = P'Q'R'S'^+$. Den Beweis können wir nun so wie beim Satz 8.1 anlegen.

Es gibt eine Ebene α mit $P^\alpha = P'$ (Abb. 12.2); für $P \neq P'$ leistet das die Mittellotebene $\mu(P, P')$. Die Halbgeraden p^α und p' haben dann den gemeinsamen Scheitel P' .

Nun gibt es eine Ebene β so, dass $(p^\alpha)^\beta = p'$ ist (Aufgabe (11.9a)). Die Halbebenen $(H^\alpha)^\beta$ und H' haben die Gerade $g_{P'Q'}$ als gemeinsame Randgerade. Dann gibt es eine Ebene γ mit $((H^\alpha)^\beta)^\gamma = H'$ (Aufgabe (11.9b)). Da jetzt $((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma$ und \mathfrak{H}' Halbräume bezüglich ein und derselben Ebene - nämlich $\varepsilon_{P'Q'R'}$ - sind, ist entweder $((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma = \mathfrak{H}'$ oder $((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma = \mathfrak{H}'^-$. Im zweiten Fall fügen wir noch die Spiegelung an der Ebene $\delta = \varepsilon_{P'Q'R'}$ hinzu und erhalten $((((\mathfrak{H}^\alpha)^\beta)^\gamma)^\delta = \mathfrak{H}'$.

Da jede Ebenenspiegelung eine Bewegung ist, folgt mit B 5 aus Satz (12.4)

B7: Zu je zwei Tetraedern $PQRS$ und $P'Q'R'S'$ gibt es eine Bewegung τ mit $P^\tau = P', (PQ^+)\tau = P'Q'^+, (PQR^+)\tau = P'Q'R'^+$ und $(PQRS^+)\tau = P'Q'R'S'^+$ (Beweglichkeit).

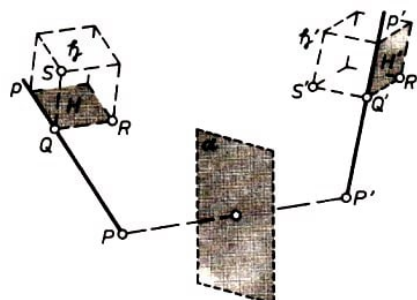


Abb. 12.2

Wenn eine Bewegung τ einen Fixpunkt besitzt, dann kann von nicht komplanaren Punkten P, Q, R, S mit $P^\tau = P$ ausgegangen werden, und es gelingt bereits durch eine Verkettung von drei Ebenenspiegelungen P in P^τ , PQ^+ in $P^\tau Q^{\tau+}$, PQR^+ in $P^\tau Q^\tau R^{\tau+}$ und $PQRS^+$ in $P^\tau Q^\tau R^\tau S^{\tau+}$ zu überführen.

Auf Grund der Starrheit B 8 folgt aus dem Satz (12.4) der

(12.5) Darstellungssatz für räumliche Bewegungen. Jede räumliche Bewegung τ lässt sich als Produkt von höchstem vier Ebenenspiegelungen darstellen. Besitzt τ einen Fixpunkt, dann reichen dazu bereits drei Ebenenspiegelungen aus.

Bei der Darstellung von Bewegungen im Raum spielen also die Spiegelungen an Ebenen die gleiche Rolle wie die Spiegelungen an Geraden bei der Darstellung von Bewegungen in der Ebene.

(12.6) Aufgabe. Es seien $p = OP^+$, $q = OQ^+$ und $r = OR^+$ drei Halbgeraden, die paarweise einen rechten Winkel bilden; ferner seien $H = OPQ^+$, $\mathfrak{H} = OPQR^+$, $K = OQR^+$ und $\mathfrak{K} = OQRP^+$. Welche Bilder haben q , K und \mathfrak{K} bei der Bewegung τ , die durch $O^\tau = O$, $p^\tau = p^-$, $H^\tau = H$ und $\mathfrak{H}^\tau = \mathfrak{H}^-$ bestimmt ist?

Es ist im Vergleich zu den ebenen Bewegungen wünschenswert, die Spiegelungen an den Ebenen im Rahmen des Bewegungsbegriffs im Raum zu charakterisieren.

(12.7) Satz. Eine Bewegung σ ist eine Spiegelung an der Ebene ε genau dann, wenn $P^\sigma = P$ für alle Punkte $P \in \varepsilon$ gilt und wenn σ die Halbräume bezüglich ε vertauscht.

Beweis als Aufgabe.

Der Darstellungssatz (12.5) bietet eine geeignete Grundlage für eine systematische Übersicht über die Bewegungen im Raum. Dies und mögliche Analogien zur ebenen Geometrie werden im folgenden genutzt.

Wir beginnen mit den Produkten $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ von zwei Ebenenspiegelungen. Zwei Ebenen α und β haben eine Gerade gemeinsam oder sie sind parallel zueinander. Das ist kein ausschließendes "oder"; genau für $\alpha = \beta$ liegen beide Lagebeziehungen vor.

13 Drehungen um eine Gerade und Verschiebungen

Wir studieren zunächst den Fall, dass α und β eine Gerade g gemeinsam haben.

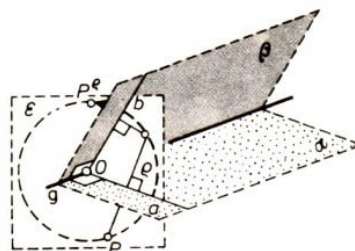


Abb. 13.1

Jede zu g senkrechte Ebene ε ist sowohl senkrecht zu α als auch zu β . Sie schneidet α und β in Geraden a und b , die durch den Schnittpunkt O von g und ε gehen (Abb.

13.1).

Wegen $\alpha \perp \varepsilon$ und $\beta \perp \varepsilon$ gilt $\varepsilon^\alpha = \varepsilon$, $\varepsilon^\beta = \varepsilon$, und die Einschränkung von σ_α auf ε ist die ebene Spiegelung σ'_a in der Ebene ε an der Geraden a ; entsprechend ist $\sigma_\beta|_\varepsilon$ die ebene Spiegelung σ'_b in ε an der Geraden b .

Die Einschränkung von $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ auf ε ist nun $\sigma'_a \circ \sigma'_b$, und dies ist in ε eine Drehung um O (nach dem Satz (3.6)).

Wir erklären deshalb

Definition. ρ ist eine Drehung um die Gerade g genau dann, wenn es Ebenen α und β durch g so gibt, dass $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ gilt.

(13.1) **Folgerung.** Jede Drehung um eine Gerade lässt die Orientierung des Raumes unverändert.

Bei einer Drehung ρ um g liegt offenbar das Bild P^ρ eines Punktes $P \notin g$ auf der durch P und senkrecht zu g verlaufenden Ebene ε und dort auf dem Kreis um O durch P , wobei O der Schnittpunkt von g und ε ist.

(13.2) **Aufgabe.** An welchen Punkten der Seitenwände der Garage ist das Garagentor $ABCD$ drehbar zu lagern, damit es durch Drehung (um eine gedachte Achse) die Lage $A'B'C'D'$ einnehmen kann? (Vgl. Abb. 13.2.)

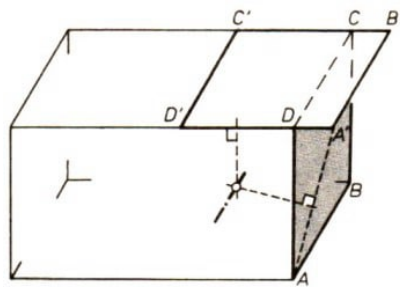


Abb. 13.2

(13.3) **Aufgabe.** Auf einer Kugel befinden sich zwei gleichgroße Kreise k und k' . Kann durch eine Drehung um eine Gerade der Kreis k auf k' abgebildet werden?

In Analogie zu dem Satz (3.6b) für ebene Drehungen gilt

(13.4) **Satz.** Zu Halbebenen H und K mit gemeinsamer Randgeraden g gibt es eine und nur eine Drehung um g , bei der K das Bild von H ist.

Beweis. Es sei α die Ebene, die H enthält. Außerdem gibt es eine Ebene β durch g mit $H^\beta = K$ (Aufgabe (11.9b)). Die Drehung $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$, bildet H auf K ab.

Gäbe es eine weitere Drehung ρ' um g mit $H^{\rho'} = K$, so würden in einer zu g senkrechten Ebene ε die Halbgeraden $p = H \cap \varepsilon$ und $q = K \cap \varepsilon$ ebenfalls durch zwei verschiedene ebene Drehungen ineinander überführt werden. Das widerspricht dem Satz (3.6 b)).

Zum Darstellungssatz (3.7) ebener Drehungen gibt es folgende Analogie:

(13.5) **Satz.** Ist ρ eine Drehung um g und γ eine Ebene durch g , so gibt es genau eine Ebene δ durch g mit $\rho = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$.

Beweis. Wir wählen auf γ eine Halbebene H mit g als Randgerade. H^ρ besitzt dann

ebenfalls die Randgerade g . Nun existiert eine Ebene δ durch g mit $H^\delta = H^\rho$ (Aufgabe (11.9b)). Aus $(H^\gamma)^\delta = H^\rho$ folgt $\rho = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$ nach dem Satz (13.4).

Die Eindeutigkeit von δ ist leicht einsichtig: $\sigma_\gamma \circ \sigma_\delta = \rho = \sigma_\gamma \circ \sigma_{\delta'}$ hat $\sigma_\delta = \sigma_{\delta'}$ und damit $\delta = \delta'$ zur Folge.

Dieser Satz (13.5) ist entsprechend den Sachverhalten in der ebenen Geometrie - die Grundlage für einen Dreispiegelungssatz

(13.6) Erster Dreispiegelungssatz. Sind α, β und γ Ebenen durch eine Gerade g , dann existiert eine Ebene δ durch g derart, dass $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\delta$ ist.

Beweis als Aufgabe.

(13.7) Aufgabe. Zu einer Geraden g und zwei Punkten A und B , die zusammen mit g in keiner gemeinsamen Ebene liegen, bestimme man alle Punkte $C \in g$, für die die Abstandssumme $|AC| + |CB|$ minimal ist!

Lösung. Zu den Halbebenen H und K mit der Randgeraden g , die A bzw. B enthalten, gibt es eine Drehung ρ um g derart, dass $H^\rho = K^-$ ist (Abb. 13.3a). Für jeden Punkt $C \in g$ ist $|AC| = |A^\rho C|$. Also ist $|AC| + |CB|$ minimal genau dann, wenn dies für $|A^\rho C| + |CB|$ zutrifft.

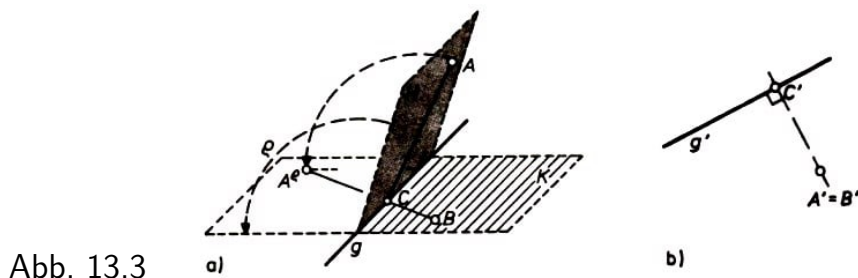


Abb. 13.3

Die Aufgabe ist damit auf eine Frage in der ebenen Geometrie zurückgeführt, und diese haben wir bereits mit der Aufgabe (2.7) gelöst. Danach ist der Schnittpunkt C' von g' mit der Verbindungsgeraden von A' und B' und nur dieser die Lösung.

Im Rahmen eines mathematischen Zirkels bot ein Schüler folgende Lösung: Wir wählen eine Ebene ε senkrecht zu g_{AB} und projizieren im Sinne der orthogonalen Eintafelprojektion die Vorgabe (also g , A und B) auf die Ebene ε . (Das Bild g' von g ist eine Gerade. Andernfalls wäre g' ein Punkt, und dann lägen g und g_{AB} in einer gemeinsamen Ebene.)

In der (Bild-) Ebene ε wird das Lot von A' ($= B'$) auf g' gefällt und der Fußpunkt C' bestimmt (Abb. 13.3b). Sein Original C ist die Lösung.

Ein Teil der Zirkelteilnehmer stimmte dieser einfachen und plausibel erscheinenden Antwort sofort zu. Sie ist aber falsch!

(13.8) Aufgabe. Man suche den Fehler.

(13.9) Aufgabe. Es seien zwei windschiefe Geraden f und g und eine Länge a vorgegeben. Man bestimme alle gleichseitigen Dreiecke ABC mit der Seitenlänge a , für die A, B auf f und C auf g liegen.

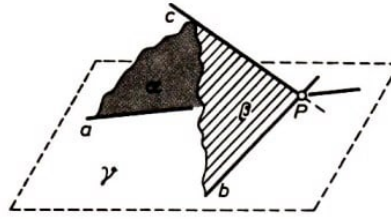


Abb. 13.4

Wir betrachten jetzt Geraden a, b mit einem gemeinsamen Punkt P und Drehungen ρ_1 um a und ρ_2 um b . Die Geraden a und b liegen in einer gemeinsamen Ebene γ . Nach dem Satz (13.5) existieren dazu Ebenen α durch a und β durch b derart, dass $\rho_1 = \sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma$ und $\rho_2 = \sigma_\gamma \circ \sigma_\beta$ ist (Abb. 13.4).

Nun gilt $\rho_1 \circ \rho_2 = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$. Da α und β wenigstens einen gemeinsamen Punkt besitzen, nämlich P , gibt es eine Gerade c durch P , die in den Ebenen α, β enthalten ist. (Für $a \neq b$ ist c die Schnittgerade $\alpha \cap \beta$.) Folglich ist $\rho_1 \circ \rho_2$ eine Drehung um c .

Damit haben wir eine Eigenschaft erhalten, die bereits L. Euler²¹ 1776 bemerkte:

(13.10) Satz. Sind ρ_1 und ρ_2 Drehungen um a bzw. b und geben a, b durch einen Punkt P , so ist $\rho_1 \circ \rho_2$ eine Drehung um eine Gerade c durch P .

(13.11) Aufgabe. Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel, und es seien ρ_1 die Drehung um g_{AB} mit $E^{\rho_1} = D$ und ρ_2 die Drehung um g_{BC} mit $F^{\rho_2} = A$. Man bestimme alle Punkte P des Raumes, die bezüglich ρ_1 und ρ_2 das gleiche Bild besitzen.

Der Satz (13.10) spielt u. a. im Zusammenhang mit technischen Problemen wie z.B. der räumlichen Getriebelehre eine Rolle. Wir kommen darauf später zurück.

(13.12) Aufgabe. Man zeige, dass für zwei nicht parallele Ebenen α, β gilt:

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

Lösung. Nach Voraussetzung schneiden sich α und β längs einer Geraden g . Die weiteren Überlegungen können wir an Hand der Abb. 13.1 führen, wobei ε irgendeine zu g senkrechte Ebene ist.

Mit $\alpha \perp \beta$ ist $a \perp b$ äquivalent. Letzteres ist hinreichend und notwendig dafür, dass $\sigma'_\alpha \circ \sigma'_\beta = \sigma'_\beta \circ \sigma'_\alpha$ gilt (Aufgabe (3.11)), wobei $\sigma'_\alpha \circ \sigma'_\beta$ die Einschränkung von $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ auf ε ist. Daraus folgt $(P^\alpha)^\beta = (P^\beta)^\alpha$ für alle Punkte P des Raumes und umgekehrt.

Für eine Drehung $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ um g gilt demnach $\rho \circ \rho = \iota$ und $\rho \neq \iota$ genau dann, wenn $\alpha \perp \beta$ ist. Die Eigenschaften $\rho \circ \rho = \iota$ und $\rho \neq \iota$ sind kennzeichnend für eine Spiegelung. Wir erklären deshalb:

Definition. σ ist eine Spiegelung an der Geraden g genau dann, wenn σ eine nicht identische Drehung um g mit $\sigma \circ \sigma = \iota$ ist.

Auf Grund der Aussage in (13.12) und des Satzes (13.5) existiert an jeder Geraden g genau eine Spiegelung; wir bezeichnen sie mit σ_g und schreiben statt \mathfrak{F}^{σ_g} wieder kurz

²¹Leonhard Euler (1707-1783), einer der bedeutendsten Mathematiker des 18. Jh. (Professor in Berlin und St. Petersburg).

\mathfrak{F}^g .

Ferner ist aus den bisherigen Darlegungen auch eine einfache konstruktive Darstellung der Bildpunkte ersichtlich: Für $P \in g$ ist $P' = P$, und für $P \notin g$ ist das Bild derjenige Punkt P' , der auf dem Lot von P auf g liegt und für den g durch den Mittelpunkt von PP' geht.

Im Gegensatz zu den ebenen Geradenspiegelungen bleibt hier die Orientierung erhalten (Folgerung (13.1)).

(13.13) Aufgabe. Es seien a und b zwei sich schneidende Geraden. Kann das Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b$ der Geradenspiegelungen selbst wieder eine Geradenspiegelung sein? Gegebenenfalls ist dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung anzugeben.

Lösung. Wir folgen einfach dem Beweis des Satzes (13.10) unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass ρ_1 und ρ_2 Spiegelungen an a und b sind.

Wegen $\alpha, \beta \perp \gamma$ ist $c \perp \gamma$. Und $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ ist genau dann eine Spiegelung an c , wenn $\alpha \perp \beta$, d.h., wenn $a \perp b$ gilt.

(13.14) Aufgabe. Man zeige, dass $a \perp b$ äquivalent zu $a \neq b$ und $a^b = a$ ist.

Eine Gerade g heißt eine Symmetrieachse der Figur \mathfrak{F} genau dann, wenn bei der Spiegelung σ_g , die Figur \mathfrak{F} auf sich abgebildet wird.

(13.15) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieachsen eines regelmäßigen Tetraeders $ABCD$! (Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgabe (11.4) können genutzt werden.)

(13.16) Aufgabe. Welche Symmetrieachsen besitzt ein regelmäßiges Oktaeder?

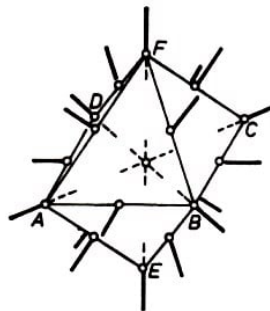


Abb. 13.5

Lösung (Abb. 13.5). Eine Symmetrieachse kann höchstens zwei Ecken des regelmäßigen Oktaeders enthalten, und diese können nicht durch eine Kante verbunden sein. (Wäre etwa g_{AB} Symmetrieachse, dann müsste z.B. auf g_{BC} eine weitere Ecke des Oktaeders, das Bild von C bezüglich $\sigma_{g_{AB}}$ liegen.) Dann bleiben als Möglichkeiten nur die drei Geraden g_{AC} , g_{BD} und g_{EF} und diese sind tatsächlich Symmetrieachsen des Oktaeders.

Jede weitere Symmetrieachse g kann dann nicht durch eine Ecke des Körpers gehen, denn die Eckenzahl ist gerade. Die Menge der Ecken zerfällt bezüglich g in vier Paare so, dass g in den Mittellotebenen dieser Punktepaare liegt.

Wegen $\mu(A, B) = \mu(C, D)$, $\mu(B, C) = \mu(D, A)$, $\mu(A, E) = \mu(C, F)$, $\mu(B, E) = \mu(D, F)$, $\mu(C, E) = \mu(A, F)$ und $\mu(D, E) = \mu(B, F)$ kommen als weitere Symme-

trieachsen also nur noch die Schnittgeraden

$$\mu(A, B) \cap \mu(E, F), \quad \mu(B, C) \cap \mu(E, F), \quad \mu(A, E) \cap \mu(B, D),$$

$$\mu(C, E) \cap \mu(B, D), \quad \mu(B, E) \cap \mu(A, C), \quad \mu(D, E) \cap \mu(A, C)$$

in Frage. Und diese sechs Geraden sind in der Tat Symmetrieachsen. Also besitzt das Oktaeder neun Symmetrieachsen.

(13.17) Aufgabe. Man untersuche ein Molekül des 1,3-Dichlorallens ($HClC = C = CHCl$) nach Symmetrieebenen und -achsen. Abb. 13.6 zeigt einen Schrägriss des Kerngerüsts eines solchen Moleküls.

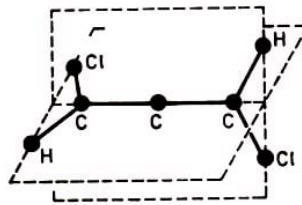


Abb. 13.6

An diesem Beispiel wird ersichtlich, dass aus der Existenz einer Symmetrieachse nicht die Existenz einer Symmetrieebene folgt.

Mit der Untersuchung der Produkte $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$, bei denen α und β zueinander parallele Ebenen sind, wird das Studium der Zweierprodukte von Ebenenspiegelungen abgeschlossen. Auch hier können wir mit einer zu α und β senkrechten Ebene ε arbeiten und damit Kenntnisse über die ebenen Bewegungen nutzen.

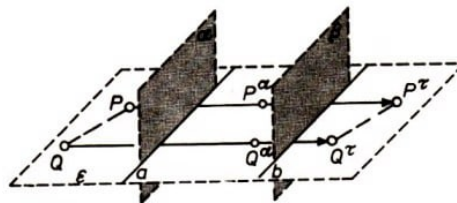


Abb. 13.7

Sind P und Q irgendzwei Punkte des Raumes, dann gibt es eine Ebene durch P und Q , die senkrecht zu α ist. (Die Ebene ε ist eindeutig bestimmt, falls $P \neq Q$ und $g_{PQ} \not\perp \alpha$ gilt.) Mit $\alpha \parallel \beta$ ist dann auch $\varepsilon \perp \beta$. Die Einschränkung von σ_α und σ_β auf ε ist wieder die ebene Spiegelung σ'_α an der Schnittgeraden $a = \varepsilon \cap \alpha$ bzw. σ'_β an der Schnittgeraden $b = \varepsilon \cap \beta$. Wegen $\alpha \parallel \beta$ gilt $a \parallel b$ (Abb. 13.7).

Folglich ist die Einschränkung von $\tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ auf ε , d.h. das Produkt $\sigma'_a \circ \sigma'_b$, eine Verschiebung in ε (Satz (4.1)). (Nach den Darlegungen in Abschnitt 4 lässt sich das Bild Q' von Q bereits allein mit Hilfe von P und P' durch eine Parallelkonstruktion in der Ebene ε bestimmen.)

Damit ist folgende Erklärung gerechtfertigt.

Definition. τ ist eine Verschiebung (des Raumes) genau dann, wenn es zueinander parallele Ebenen α, β so gibt, dass $\tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ ist.

Wegen $\tau^{-1} = \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ ist mit τ auch die Umkehrabbildung eine Verschiebung.

Unsere Ausführungen zeigen bereits, dass es zu A und B nicht mehr als eine Verschiebung gibt, die A auf B abbildet. Die Existenz einer solchen Verschiebung ist leicht nachzuweisen: Es gibt nämlich stets eine Ebene β mit $A^\beta = B$. (Im Fall $A \neq B$ leistet das die Ebene $\mu(A, B)$.) Dazu nehmen wir noch die zu β parallele Ebene α durch A (Abb. 13.8). Für die Verschiebung $\tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ gilt in der Tat $A^\tau = B$.

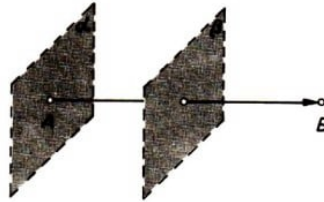


Abb. 13.8

Damit haben wir wie in der ebenen Geometrie

(13.18) Satz. Zu Punkten A, B gibt es eine und nur eine Verschiebung τ mit $A^\tau = B$.

Wir bezeichnen sie (entsprechend der ebenen Geometrie) mit \overline{AB} .

(13.19) Aufgabe. Lassen sich Verschiebungen angeben, die sich wie Spiegelungen verhalten?

Am Rande von bewegungstheoretischen Gesichtspunkten lässt sich lösen:

(13.20) Aufgabe. Es sei ein konvexes Polyeder P_1 mit genau neun Eckpunkten A_1, A_2, \dots, A_9 gegeben. P_i sei das Polyeder, das man aus P_1 durch die Verschiebung $\overrightarrow{A_1 A_i}$, $i = 2, \dots, 9$, erhält. Man beweise, dass wenigstens zwei der Polyeder P_1, P_2, \dots, P_9 mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben. (IMO 132.)

Es lässt sich ein weiterer Dreispiegelungssatz beweisen.

(13.21) Zweiter Dreispiegelungssatz. Sind α, β und γ zueinander parallele Ebenen, dann existiert eine Ebene $\delta \parallel \alpha$ derart, dass $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\delta$.

Beweis als Aufgabe.

Anhand der bisherigen Darstellungen erkennt man leicht: Jedes Produkt $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ - also jede Drehung um eine Gerade oder jede Verschiebung - kann durch ein Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b$ von zwei Geradenspiegelungen dargestellt werden. Dabei können sogar bezüglich der Lage einer der Geraden a und b zusätzliche Forderungen berücksichtigt werden.

(13.22) Aufgabe. Zu jedem Produkt $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ und zu jeder Geraden g gibt es Geraden a und b derart, dass $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_a \circ \sigma_b$ und b eine Senkrechte zu g ist.

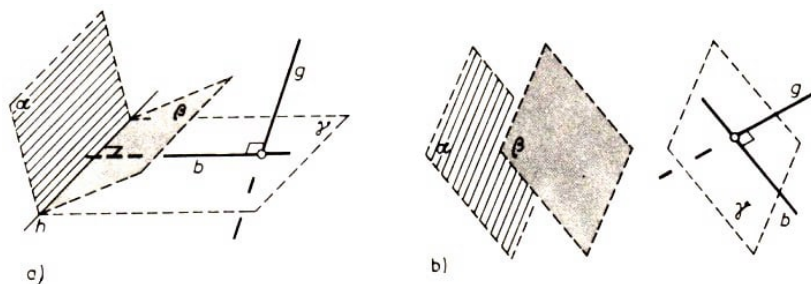


Abb. 13.9

Lösung. Die Ebenen α und β haben eine Gerade h gemeinsam oder sie sind parallel zueinander. Im ersten Fall existiert eine Gerade b , die zu g und h senkrecht ist. (Falls g und h windschief ist, leistet dies genau eine Gerade b !)

Im zweiten Fall gibt es eine Gerade b senkrecht zu g und parallel zu der Ebene α .

Nun können wir in beiden Fällen durch b eine Ebene γ legen, die mit α und β im Büschel liegt, d.h., die (im ersten Fall) die Gerade h enthält bzw. die (im zweiten Fall) zu α parallel ist (Abb. 13.9a und b).

Nach dem ersten bzw. zweiten Dreispiegelungssatz gibt es eine Ebene δ (dieses Büschels) derart, dass $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\delta \circ \sigma_\gamma$ gilt. Die zu γ senkrechte Ebene ε durch b ist auch senkrecht zu δ ; und es sei a die Schnittgerade von ε und δ . Nun gilt

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_\delta \circ \sigma_\gamma = (\sigma_\delta \circ \sigma_\varepsilon) \circ (\sigma_\varepsilon \circ \sigma_\gamma) = \sigma_a \circ \sigma_b$$

14 Schub-, Dreh- und Punktspiegelungen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt die Produkte von zwei Ebenenspiegelungen vollständig behandelt haben, wenden wir uns den Verkettungen $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$ von drei Ebenenspiegelungen zu.

Es wäre naheliegend, einfach nach den möglichen Lagebeziehungen zwischen den drei Ebenen α, β und γ das jeweilige Dreierprodukt zu untersuchen. Das führt sicherlich zu umfangreichen Fallunterscheidungen.

Wir erinnern uns der Ergebnisse bei der Untersuchung der Produkte $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ dreier ebener Geradenspiegelungen. Es kann stets als Produkt $\sigma_g \circ \sigma_Q$ einer Geraden- und einer Punktspiegelung dargestellt werden. (Siehe dazu Abb. 7.4.) Damit sind nur noch zwei Fälle zu diskutieren: entweder $Q \in f$ oder $Q \notin f$.

Im ersten Fall liegt eine Geradenspiegelung vor. Er umfasst gerade die Sachverhalte, die bei den Dreispiegelungssätzen (7.2) und (7.4) bestehen. Im zweiten Fall liegt eine echte Schubspiegelung vor; der Verschiebungsanteil ist ungleich der identischen Bewegung ι . Lässt sich im Raum analog ein Produkt von drei Ebenenspiegelungen als Produkt von zwei Spiegelungen, etwa einer Geraden- und einer Ebenenspiegelung darstellen?

Das würde sicherlich zu einer Vereinfachung in Hinblick auf eine vollständige Übersicht führen. Überdies ist auch hier die Möglichkeit zu prüfen, Eigenschaften ebener Bewegungen auszunutzen, was wir bereits vorteilhaft in Abschnitt 13 praktizieren konnten. Dazu war erforderlich, dass bezüglich der betrachteten Ebene ε die räumliche Bewegung auf ε eine ebene Bewegung induziert.

Wir wollen den ebenen Sachverhalt bei der Verkettung dreier Geradenspiegelungen hier nochmals kurz darlegen, um ohne Mühe Analogien zu erkennen. (Das ist auch deshalb angebracht, weil wir bei seiner bisherigen Behandlung von anderen Gesichtspunkten ausgegangen sind.)

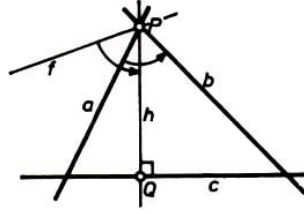


Abb. 14.1

Gegeben sei in der Ebene das Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ von (ebenen) Geradenspiegelungen. Haben a und b einen Punkt P gemeinsam, so fallen wir das Lot h von P auf die Gerade c ; der Fußpunkt sei Q . Nun gibt es eine Gerade f durch P mit $\sigma_f = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_h$ (Dreispiegelungssatz (7.2)). Und damit ist

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_f \circ (\sigma_h \circ \sigma_c) = \sigma_f \circ \sigma_Q$$

(Abb. 14.1). Ist $a \parallel b$ und $c \nparallel a$, dann wird durch

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_a \circ \sigma_c \circ (\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_c)$$

dieser Fall auf den ersten zurückgeführt, denn $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ ist stets eine Geradenspiegelung. Nun bleibt noch $a \parallel b$ und $a \parallel c$. Dann ist $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ eine Spiegelung σ_d (Dreispiegelungssatz (7.4)) und diese kann durch $\sigma_f \circ \sigma_Q$ ersetzt werden, wenn Q irgendein Punkt auf d und f das Lot von Q auf d ist.

Wir versuchen nun, in analoger Weise bezüglich der Verkettung $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$ von drei Ebenenspiegelungen vorzugehen. Zuerst betrachten wir den Fall, dass die Ebenen α und β eine Gerade l gemeinsam haben.

Durch l kann eine Ebene χ gelegt werden, die senkrecht zu der Ebene γ ist. (Gilt $l \nparallel \gamma$, dann ist χ eindeutig bestimmt.) Es sei $g = \chi \cap \gamma$.

Nach dem ersten Dreispiegelungssatz (13.6) existiert eine Ebene κ durch l so, dass $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\kappa$ ist (Abb. 14.2).

Folglich gilt

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = (\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\kappa) \circ (\sigma_\kappa \circ \sigma_\gamma) = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$$

und damit ist tatsächlich ein entsprechendes Ergebnis für die Ebenenspiegelungen erreicht worden. -

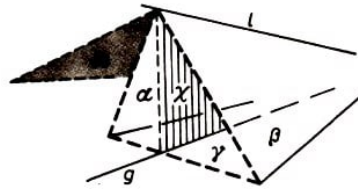


Abb. 14.2

Weitere Fälle sind noch zu betrachten. Gilt $\alpha \parallel \beta$ und $\gamma \nparallel \alpha$, dann kann dieser Fall durch

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma = \sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma \circ (\sigma_\gamma \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma)$$

auf den ersten zurückgeführt werden.

Wenn schließlich $\alpha \parallel \beta$ und $\gamma \parallel \alpha$ gilt, dann ist $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$ eine Ebenenspiegelung σ_δ (zweiter Dreispiegelungssatz (13.21)), und diese ist gleich dem Produkt $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$, wenn g irgendeine Gerade in der Ebene δ und κ die Lotebene durch g auf δ ist.

$\kappa \perp \chi$ und eine Gerade g mit $g \subset \kappa$ und $g \parallel \kappa$ derart, dass dann $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$ gilt. Man beweise diese Aussage. Sind g und κ durch φ eindeutig bestimmt?

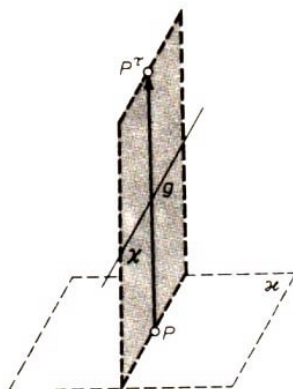


Abb. 14.4

Lösung. In der Aufgabe geht es um eine Umkehrung des gerade behandelten Sachverhalts, nach dem $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ für $g \parallel \kappa$ eine Schubspiegelung ist. - Nach Voraussetzung ist $\varphi = \tau \circ \sigma_\chi$.

Für den Spezialfall, dass $\tau = \iota$ gilt, ist die Lösung offensichtlich.

Wir setzen nun $\tau \neq \iota$ voraus und wählen einen beliebigen Punkt $P \in \chi$. Dann ist P' ($= P$) auch ein Punkt der Ebene χ . In χ sei g die Mittelsenkrechte von $\overline{PP'}$. Ferner sei κ die Ebene durch P mit $\kappa \perp \chi$ und $g \parallel \kappa$ (Abb. 14.4). Mit Hilfe der Abb. 14.3 ist ohne Mühe einsichtig, dass $(X^\kappa)^g = (X^\tau)^\chi$ für alle Punkte X und damit $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$ gilt. - Wir sehen, dass g und κ durch die Schubspiegelung φ nicht eindeutig bestimmt sind.

Zum Abschluss der Diskussion von $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ bleibt der Fall $g \nparallel \kappa$.

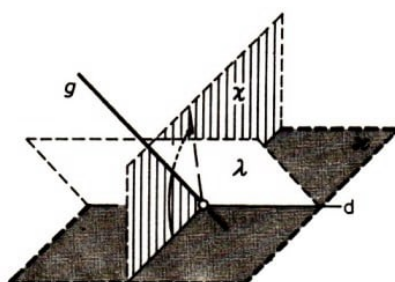


Abb. 14.5

Wir wählen wieder eine zu κ senkrechte Ebene χ durch g und die zu χ senkrechte Ebene λ durch g und erhalten $\sigma_\kappa \circ \sigma_g = (\sigma_\kappa \circ \sigma_\lambda) \circ \sigma_\chi$. Wegen $g \nparallel \kappa$ sind κ und λ zwei sich schneidende Ebenen. Da $\kappa, \lambda \perp \chi$ gilt, ist die Schnittgerade d von κ und λ eine zu χ senkrechte Gerade (Abb. 14.5). Folglich haben wir hier $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ als Produkt einer (nichtidentischen) Drehung um d mit der Spiegelung an der Ebene χ erhalten, wobei $d \perp \chi$ gilt.

Derartige Bewegungen des Raumes erhalten eine eigene Bezeichnung.

Definition. φ heißt eine Drehspeieglung (des Raumes) genau dann, wenn φ das Produkt $\rho \circ \sigma_\chi$ einer Drehung ρ um eine Gerade d und der Spiegelung an einer Ebene χ mit $d \perp \chi$ ist.

Diese Definition lässt zu, dass der Drehanteil gleich der identischen Abbildung ist. Damit sind Ebenenspiegelungen spezielle Drehspiegelungen.

(14.6) Aufgabe. Ist φ eine Drehspiegelung mit d als Achse der Drehung und χ als Spiegelungsebene, dann gibt es eine Ebene κ mit $\kappa \perp \chi$ und $d \subset \kappa$ sowie eine Gerade g mit $g \subset \kappa$ und $g \perp d$ derart, dass $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$ gilt. Man beweise die Aussage. Sind g und κ durch φ eindeutig bestimmt?

Die Ebenenspiegelungen und nur diese sind sowohl Schubspiegelungen als auch Drehspiegelungen. Schließen wir nämlich diese speziellen Bewegungen aus den Betrachtungen aus, dann besitzt eine Schubspiegelung keinen und eine Drehspiegelung genau einen Fixpunkt.

Unsere bisherigen Untersuchungen der Dreierprodukte von Ebenenspiegelungen ergeben

(14.7) Satz. Jedes Produkt von drei Ebenenspiegelungen ist eine Schubspiegelung oder eine Drehspiegelung. Dabei gilt sogar "entweder - oder", wenn das Produkt keine Ebenenspiegelung ist.

Wir stellen schließlich auch für die Produkte von drei Ebenenspiegelungen die Frage, welche von ihnen Spiegelungen sind. Dabei können wir von der Darstellung $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ ausgehen.

(14.8) Aufgabe. Das Produkt $\varphi = \sigma_\kappa \circ \sigma_g$ ist eine Spiegelung (d.h. mit $\varphi \neq \iota$ und $\varphi \circ \varphi = \iota$) genau dann, wenn $g \subset \kappa$ oder $g \perp \kappa$ gilt.

Der Fall $g \subset \kappa$ ist uns bereits bekannt: $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ ist die Spiegelung an der zu κ senkrechten Ebene χ durch g .

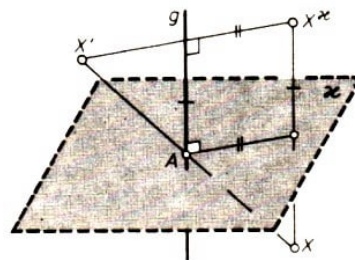


Abb. 14.6

Im Fall $g \perp \kappa$ liegt eine spezielle Drehspiegelung vor; wegen $\sigma_\kappa \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_\kappa$ ist hier der Drehanteil eine Geradenspiegelung. Ferner ergibt sich (vgl. dazu Abb. 14.6):

Das Bild eines Raumpunktes $X \neq A$ ist derjenige Punkt X' , für den A der Mittelpunkt von $\overline{XX'}$ ist. Für $X = A$ ist $X' = A$. Dies ist in der ebenen Geometrie eine charakteristische Eigenschaft für die Spiegelung an dem Punkt A .

Wir erklären deshalb

Definition. σ heißt eine Spiegelung (des Raumes) an dem Punkt A genau dann, wenn σ eine spezielle Drehspiegelung $\sigma_g \circ \sigma_\kappa$ mit $A \in g, \kappa$ ist.

Da $X^\sigma = X$ für $X = A$ und A der Mittelpunkt von $\overline{XX^\sigma}$ für alle $X \neq A$ ist, gibt es an jedem Punkt A nicht mehr als eine, also genau eine Spiegelung. Wir bezeichnen sie

mit σ_A ; und \mathfrak{F}^A sei wieder das Bild der Figur \mathfrak{F} bei der Spiegelung an A .

Bemerkenswert ist, dass bei jeder Punktspiegelung (des Raumes) die Orientierung vertauscht wird.

Die Spiegelung an dem Punkt A ist identisch mit jedem Produkt $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$, bei dem α, β und γ drei paarweise orthogonale und A enthaltende Ebenen sind, denn jede Geradenspiegelung σ_g ist identisch mit den Produkten $\sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma$, bei denen α und β zueinander senkrechte Ebenen durch g sind.

(14.9) Aufgabe. Für jede Ebene ε gilt $\varepsilon^A \parallel \varepsilon$ und insbesondere $\varepsilon^A \cap \varepsilon = \emptyset$, falls der Punkt A , am dem gespiegelt wird, nicht in ε liegt. Entsprechendes gilt für Geraden.

(14.10) Aufgabe. In einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder wird durch den Mittelpunkt jeder Kante die Ebene gelegt, die senkrecht zur gegenüberliegenden Kante verläuft. Man zeige, dass diese sechs Ebenen sich in einem Punkt schneiden.

Ein sogenannter "Dreiseitspiegel" besteht im wesentlichen aus drei spiegelnden ebenen Flächen, die paarweise senkrecht zueinander sind und im Innern der von ihnen gebildeten räumlichen Ecke zugewandt sind. Ein Dreiseitspiegel besitzt die besondere Eigenschaft, dass ein Lichtstrahl (z.B. von einer Lampe eines Fahrzeuges), der auf ihn auftrifft, stets parallel zu sich reflektiert wird. Man findet den Dreiseitspiegel im Rückstrahler ("Katzenauge") bei Fahrrädern, Kraftfahrzeugen und Verkehrszeichen. Aus Metall gefertigt, spielt er auch eine große Rolle in der Radartechnik.

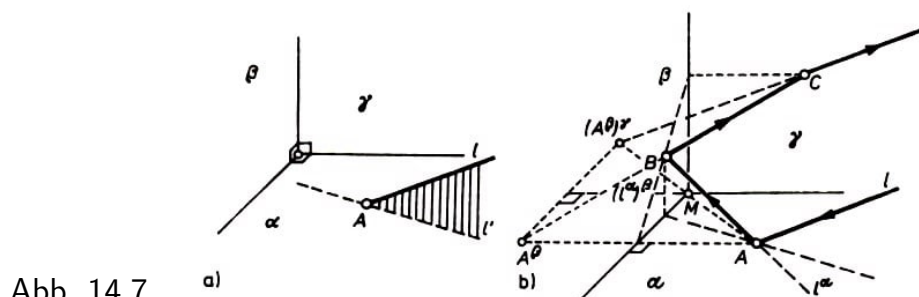


Abb. 14.7

(14.11) Aufgabe. Man beweise die Reflexionseigenschaft des Dreiseitspiegels.

In Abb. 14.7 a, die ein Schrägriss eines Dreiseitspiegels und eines einfallenden Lichtstrahls samt der Einfallsebene $\varepsilon_{ll'}$ bezüglich der Spiegelebene α ist, konstruiere man den weiteren Verlauf des Lichtstrahls.

Lösung (Abb. 14.7 b). Aus praktischer Sicht können wir voraussetzen, dass der einfallende Lichtstrahl innerhalb der räumlichen Ecke liegt, die von den spiegelnden ebenen Flächen begrenzt wird, und dass er o.B.d.A. nicht parallel zu einer dieser Flächen ist und bei der Reflexion auf keine der Schnittgeraden zwischen den Spiegelebenen trifft. Nach der Reflexion an der ersten Spiegelebene α verläuft der Weg des Lichtes längs des Bildes l^α derjenigen Geraden l weiter, die den einfallenden Lichtstrahl enthält. Die Einfallsebene $\varepsilon_{ll'}$ des Lichtstrahls bezüglich der Spiegelebene α , in der auch l^α liegt, schneidet eine weitere Spiegelebene β , und diese Schnittgerade schneidet l^α in demjenigen Punkt B , in dem das Licht auf β auftrifft.

Bezüglich β ist ε_{ABA^β} die Einfallsebene und $(l^\alpha)^\beta = g_{BA^\beta}$ die Gerade, längs der das

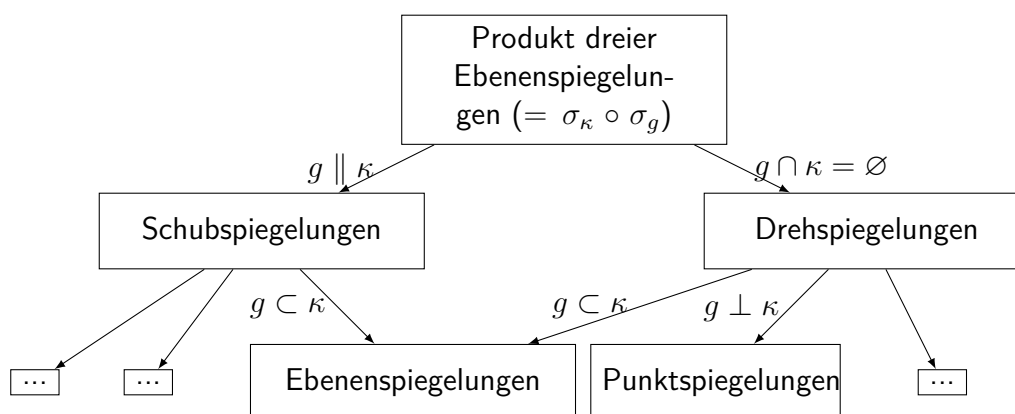
Licht nach der Reflexion an β weiter verläuft.

Der Punkt C , in dem das Licht auf die dritte Spiegelungsebene γ auftrifft, ist entsprechend der Schnittpunkt von $\varepsilon_{ABA^\beta} \cap \gamma$ mit der Geraden $(l^\alpha)^\beta$. Der weitere Weg des Lichtes (nach der Reflexion an γ) verläuft längs der Geraden $((l^\alpha)^\beta)^\gamma$.

Nun ist aber $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$ gleich der Spiegelung an dem gemeinsamen Punkt M der Spiegelebenen. Und damit gilt in der Tat $((l^\alpha)^\beta)^\gamma \parallel l$ (Aufgabe (14.9)).

Die eingangs genannten Bedingungen für den einfallenden Lichtstrahl sichern, dass tatsächlich der Lichtstrahl nacheinander die drei spiegelnden Ebenenteile trifft, was man an Hand der Abb. 14.7b nach jeder Reflexion an den vorliegenden anordnungsgeometrischen Bedingungen ohne Mühe erkennt. Dabei wird jedoch benutzt, dass der Dreiseitspiegel beliebig groß ist. - Die Einschränkung auf eine endliche Ausdehnung bedeutet jedoch nur, sich auf Strahlen zu beschränken, die hinreichend nahe an M auf den ersten Spiegel auftreffen, und davon kann in der Praxis i.a. ohnehin ausgegangen werden.

Unsere Einsicht in die Struktur der Produkte von drei Ebenenspiegelungen ermöglicht folgende Übersicht:



In der ebenen Geometrie kennen wir grundlegende Beziehungen zwischen den Punktspiegelungen und den Verschiebungen (Satz (5.16) und (5.17)).

Diese gelten wörtlich auch für den Raum:

(14.12) Satz. $\sigma_A \circ \sigma_B$ ist stets eine Verschiebung.

(14.13) Satz. Ist τ eine Verschiebung und A irgendein Punkt, so gibt es genau einen Punkt B derart, dass $\tau = \sigma_A \circ \sigma_B$ gilt.

Ein Beweis des Satzes (14.12) kann analog zu dem des Satzes (5.16) geführt werden. (Entsprechendes gilt bezüglich (14.13).)

Es gibt eine Gerade g , die A und B enthält. (Für $A \neq B$ ist das g_{AB}) Durch A und B legen wir die zu g senkrechten Ebenen α und β . Wegen $\alpha \parallel \beta$ und

$$\sigma_A \circ \sigma_B = (\sigma_b \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_\beta) = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$$

ist $\sigma_A \circ \sigma_B$ nach Definition eine Verschiebung.

Den Beweis des Satzes (14.13) überlassen wir dem Leser als Aufgabe.

15 Schraubungen

Wenn wir jetzt noch die Produkte von vier Ebenenspiegelungen untersuchen, so haben wir insgesamt auf Grund des Darstellungssatzes (12.5) alle räumlichen Bewegungen erfasst.

Gegeben sei also ein Produkt $\varphi = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$ von Ebenenspiegelungen. Es ist hier erst recht angebracht, nach einer vereinfachten Darstellung wie im Abschnitt 14 zu suchen, etwa nach einer mit zwei Spiegelungen.

Das Teilprodukt $\sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$ lässt sich durch ein Produkt $\sigma_\kappa \circ \sigma_g$ aus einer Ebenen- und Geradenspiegelung ersetzen (Satz (14.1)). Weiterhin gibt es nach dem Ergebnis der Aufgabe (13.22) Geraden a und b derart, dass $b \perp g$ und $\sigma_\alpha \circ \sigma_\kappa = \sigma_a \circ \sigma_b$ gilt. Nun ist $\varphi = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_g$. Wegen $b \perp g$ ist $\sigma_b \circ \sigma_g$ eine Spiegelung an einer Geraden c (Aufgabe (13.13)). Damit ist schließlich die Bewegung φ gleich dem Produkt $\sigma_a \circ \sigma_c$. Wir haben damit konstruktiv gezeigt:

(15.1) Satz. Jedes Produkt $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$ von vier Ebenenspiegelungen kann als Produkt von zwei Geradenspiegelungen dargestellt werden.

Eine vollständige Übersicht über die Viererprodukte von Ebenenspiegelungen kann nun leicht anhand der möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden gegeben werden. Es sei $\varphi = \sigma_a \circ \sigma_b$.

Fall 1. $a = b$. Dann ist φ die identische Bewegung ι .

Fall 2. $a \parallel b$ und $a \neq b$. Dann ist φ eine von ι verschiedene Verschiebung.

Fall 3. a und b schneiden sich in einem Punkt P . Dann ist φ eine von ι verschiedene Drehung um diejenige Gerade g , die senkrecht zu a, b ist und durch P geht.

Fall 4. a und b sind windschief (d.h., sie liegen in keiner gemeinsamen Ebene).

Nur dieser Fall ist noch eingehend zu betrachten. Bekanntlich gibt es genau eine Gerade g , die senkrecht zu a und b ist. Nun seien α', β' die Verbindungsebenen ε_{ag} und ε_{bg} und γ', δ' die zu g senkrechten Ebenen durch a bzw. b (Abb. 15.1). Dann gilt

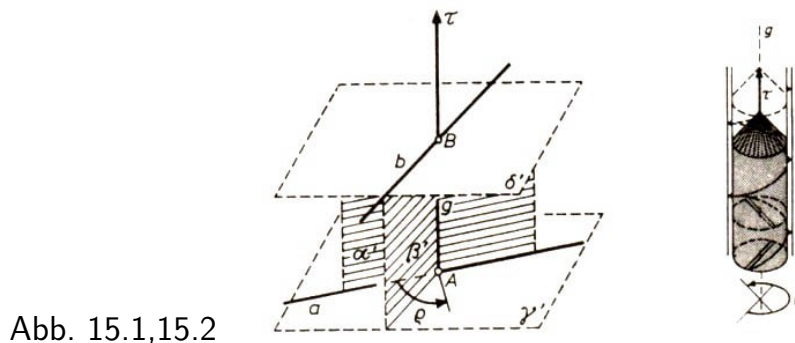


Abb. 15.1, 15.2

$$\sigma_a \circ \sigma_b = (\sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\gamma'}) \circ (\sigma_{\beta'} \circ \sigma_{\delta'}) = (\sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'}) \circ (\sigma_{\gamma'} \circ \sigma_{\delta'})$$

wobei die Vertauschung $\sigma_{\gamma'} \circ \sigma_{\beta'} = \sigma_{\beta'} \circ \sigma_{\gamma'}$ wegen $\gamma' \perp \beta'$ möglich ist (Aufgabe 13.12). Das Teilprodukt $\sigma_{\alpha'} \circ \sigma_{\beta'}$ ist eine Drehung um g , und $\sigma_{\gamma'} \circ \sigma_{\delta'}$ ist eine Verschiebung

längs g .

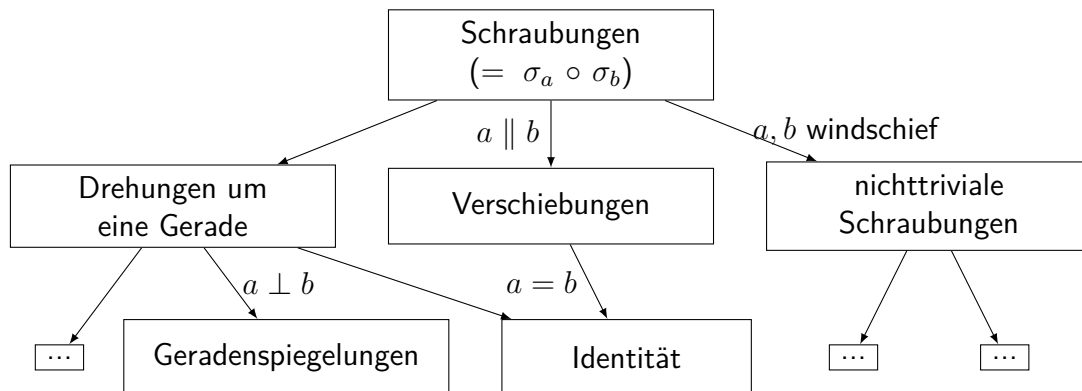
Eine Zusammensetzung aus derartigen Bewegungen liegt mechanisch z.B. beim Gebrauch einer Schraube vor (Abb. 15.2). Man erklärt deshalb

Definition. φ heißt eine Schraubung längs der Geraden g (oder Schraubung mit der Achse g) genau dann, wenn φ sich als Produkt $\rho \circ \tau$ einer Drehung ρ um g und einer Verschiebung τ längs g darstellen lässt.

Diese Erklärung lässt zu, dass ρ oder τ gleich der identischen Bewegung ι sind. Ein Viererprodukt von Ebenenspiegelungen ist also stets eine Schraubung.

(15.2) Aufgabe. Gibt es neben den Geradenspiegelungen noch andere Schraubungen $\sigma_a \circ \sigma_b$, die Spiegelungen sind?

Unsere Untersuchungen über Produkte von vier Ebenenspiegelungen ermöglichen folgende Übersicht:

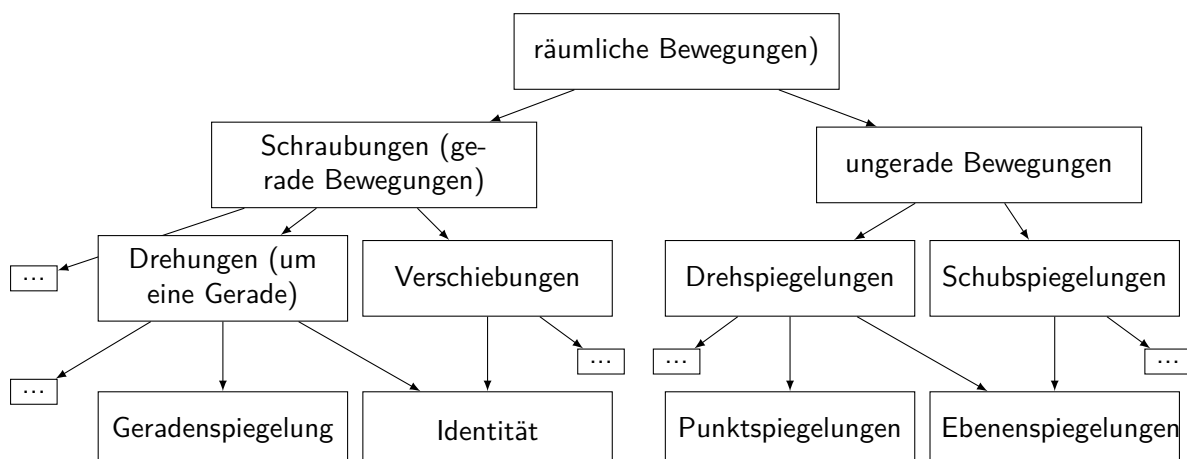


(15.3) Aufgabe. Ist $\rho \circ \tau$ eine Schraubung mit der Achse g , dann gilt $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$.

Lösung. Nach Voraussetzung gibt es Ebenen α, β durch g und γ, δ senkrecht zu g derart, dass $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ und $\tau = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$ ist. Wegen $\alpha, \beta \perp \gamma, \delta$ ist die Reihenfolge in den Produkten $\sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma$, $\sigma_\alpha \circ \sigma_\delta$, $\sigma_\beta \circ \sigma_\gamma$ und $\sigma_\beta \circ \sigma_\delta$ vertauschbar. Folglich gilt

$$\rho \circ \tau = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta \circ \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \tau \circ \rho$$

16 Produkte und Gruppen räumlicher Bewegungen



Vermöge des Darstellungssatzes (12.5) und den Übersichten in den Abschnitten 14 und 15 ergibt sich obige Übersicht über die räumlichen Bewegungen.

(16.1) Aufgabe. Auf einer schalenförmigen Unterlage liegt ein Fußball oder ein anderer als Kugel angenommener Körper (Abb. 16.1). Kann er neu so auf die Schale gelegt werden, dass kein Punkt seiner Oberfläche mit seiner ursprünglichen Lage übereinstimmt?

Lösung. Der Lageveränderung des Fußballs entspricht eine räumliche Bewegung φ , bei der es einen Fixpunkt gibt, nämlich den Mittelpunkt des als Kugel angesehenen Körpers. Außerdem bleibt die Orientierung erhalten, d.h., φ ist eine gerade Bewegung.



Abb. 16.1

Dann kann φ nur noch eine Drehung um eine Gerade sein. Demnach gibt es bei jeder Lageveränderung wenigstens zwei (diametral gelegene) Punkte der Kugeloberfläche (als Schnittpunkte der Drehachse mit der Kugeloberfläche), die fest bleiben. Die Frage ist also mit "Nein" zu beantworten.

Die Überlegung verdeutlicht, dass es keine räumliche Bewegung gibt, die man als "Drehung um einen Punkt" ansehen könnte, nämlich eine gerade Bewegung mit genau einem Fixpunkt.

In der Kinematik²² untersucht man die räumliche und zeitliche Änderung der Lage von Figuren, z.B. von beweglichen Teilen an Geräten und Maschinen. (Die Kinematik benutzt demnach einen anderen Bewegungsbegriff.)

Naturgemäß sind die Bewegungen, die im Zusammenhang mit technischen Sachverhalten stehen, i.a. orientierungserhaltend, d.h. gerade. Im Vordergrund stehen also Drehungen, Verschiebungen und allgemein Schraubungen.

In der Getriebelehre interessieren insbesondere Zusammensetzungen von Drehungen oder Schraubungen. Diese "Zusammensetzung" (im Sinne der Getriebelehre) entspricht einer mehrfachen Nacheinanderausführung von Bewegungen. Wir gehen darauf noch ein. Zunächst wenden wir uns der Nacheinanderausführung zweier Drehungen zu.

(16.2) Aufgabe. Man bestimme das Produkt $\rho_1 \circ \rho_2$ zweier Drehungen ρ_1 um die Gerade a und ρ_2 um die Gerade b , wenn

a) $a = b$; b) a und b sich schneiden; c) $a \parallel b$; d) a und b windschief sind.

Lösung. Im Abschnitt 15 liegen bereits spezielle Ergebnisse vor, nämlich eine vollständige Untersuchung des Produkts $\sigma_a \circ \sigma_b$ der Spiegelungen an a und b . Überdies ist der allgemeine Charakter der Verkettung $\rho_1 \circ \rho_2$ auch klar; sie ist eine Schraubung, da sie

²²Unter "Kinematik" wird z.T. in technisch orientierter Literatur das Gebiet der "Maschinengetriebelehre" verstanden.

mit ρ_1 und ρ_2 auch selbst eine gerade Bewegung ist.

Zu a) und b). Haben die Gerade a und b einen Punkt P gemeinsam, dann ist $\rho_1 \circ \rho_2$ eine Drehung um eine Gerade c durch P (Satz (13.10)).

Zu c). Gilt $a \parallel b$, dann ergeben völlig gleiche Darstellungen mit Hilfe von Ebenenspiegelungen, die zum Satz (13.10) führten (Abb. 13.4), dass $\rho_1 \circ \rho_2$ eine Drehung um eine zu a, b parallele Gerade c ist, falls die Ebenen α und β sich längs c schneiden (Abb. 16.2) oder eine Verschiebung ist, falls $\alpha \parallel \beta$ ist.

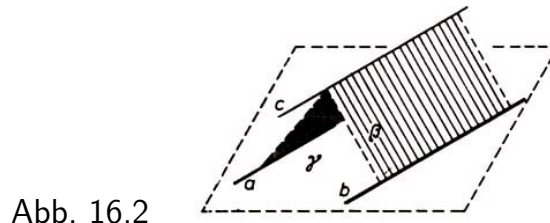


Abb. 16.2

Zu d). Dazu sei g die zu a und b senkrechte Gerade und A, B die Schnittpunkte von g mit a bzw. b .

Nun gibt es (genau) eine Gerade e durch A mit $\rho_1 = \sigma_e \circ \sigma_g$ (und e liegt mit g in einer zu a senkrechten Ebene sowie (genau) eine Gerade f durch B mit $\rho_2 = \sigma_g \circ \sigma_f$ (und f liegt mit g in einer zu b senkrechten Ebene). Anhand von Abb. 16.3 ist dies leicht einsichtig.

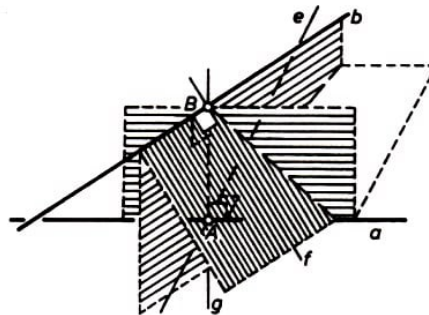


Abb. 16.3

(Augenfällig ist dabei eine Analogie zu einem Sachverhalt in der ebenen Geometrie, zu der Untersuchung des Produkts $\rho_1 \circ \rho_2$ zweier Drehungen um verschiedene Punkte P und Q ; siehe dazu Abb. 8.2.) Wir erhalten $\rho_1 \circ \rho_2 = \sigma_e \circ \sigma_f$. Ein solches Produkt ist bereits im Abschnitt 15 eingehend untersucht und dargestellt worden. (Siehe dazu Abb. 15.1.)

Die Darstellungsweise im Fall d) ist übrigens für alle anderen Fälle auch möglich, denn es gibt stets eine Gerade g , die zu den Geraden a und b senkrecht ist.

(16.3) Aufgabe. Es sei $(O; X, Y, Z)$ ein kartesisches Koordinatensystem (d.h. O der Ursprung und X, Y, Z die Einheitspunkte auf der x -, y - bzw. z -Achse) und $(O; X', Y', Z')$ ein dazu gleichorientiertes.

Dann können (nach Euler) X in X' , Y in Y' und Z in Z' übergeführt werden, indem man nacheinander Drehungen ρ_1 um g_{OX} , ρ_2 um $(g_{OY})^{\rho_1}$ und ρ_3 um $(g_{OZ})^{\rho_1 \circ \rho_2}$ ausführt.

Die dabei (in gleicher Orientierung) bestimmten Drehmaße, die Eulerschen Winkel, sind für die Darstellung einer Drehung von Bedeutung.

Die Nacheinanderausführung zweier Drehungen (bzw. Schraubungen) ist abbildungsmäßig nicht gleich der "Zusammensetzung" zweier Drehungen (bzw. Schraubungen), wie sie in der Getriebetechnik vorliegt. Im Fall der Drehungen bedeutet die Zusammensetzung folgendes:

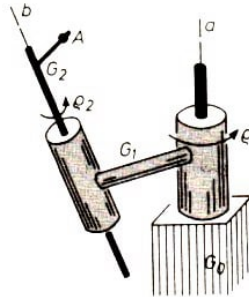


Abb. 16.4

Gegenüber dem Gestell G_0 dreht sich (um eine Achse a) ein Glied G_1 und ferner gleichzeitig ein Glied G_2 (um die Achse b) gegenüber G_1 (Abb. 16.4). Von Bedeutung ist die relative Bewegung der Punkte A des Gliedes G_2 gegenüber dem Gestell G_0 .

Bei der Drehung ρ_2 um b geht A in $A' = A^{\rho_2}$ über. Dieses Paar (A, A') zugeordneter Punkte bezüglich der Abbildung ρ_2 ist nun der Drehung ρ_1 um a zu unterwerfen, und man erhält das Paar $(A^{\rho_1}, A'^{\rho_1})$, wobei $A'^{\rho_1} = (A^{\rho_2})^{\rho_1}$ ist.

Welche Beziehung besteht nun zwischen den Punkten dieses Paares?

Wegen $\rho_1 \circ (\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1) = \rho_2 \circ \rho_1$ geht A^{ρ_1} bei der Abbildung $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$ in den Punkt A'^{ρ_1} über. Außerdem ist $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$ nach B 5 eine Bewegung. Bei diesen Überlegungen wird nur benutzt, dass ρ_1, ρ_2 Bewegungen sind.

Es kann also ganz allgemein das Produkt $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ als das "Bild der Bewegung τ " bei der Bewegung φ aufgefasst werden; es ist wieder eine Bewegung. (Abb. 16.5 verdeutlicht schematisch die Zusammenhänge.) Im Rahmen einer Gruppe - und die Bewegungen des Raumes bilden eine Gruppe - sagt man auch: $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$ ist das Element, das aus τ durch Transformation mit φ entsteht.

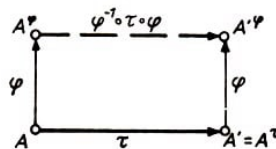


Abb. 16.5

Bevor wir zu unserer eigentlichen Aufgabenstellung zurückkehren, lösen wir

(16.4) Aufgabe. Ist σ eine Spiegelung an der Ebene ε und φ eine Bewegung, dann ist $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ die Spiegelung an der Ebene ε^{φ} , an dem Bild der Ebene ε bei der Bewegung φ .

Lösung. Zunächst ist $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ eine Bewegung. Nach der Charakterisierung der Ebenenspiegelungen, die im Satz (12.7) gegeben wird, bleibt zu zeigen, dass $P^{\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi} =$

P für jeden Punkt $P \in \varepsilon^\varphi$ gilt und dass $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ die Halbräume bezüglich der Ebene ε^φ vertauscht.

In der Tat gilt folgende Äquivalenz:

$$P \in \varepsilon^\varphi \Leftrightarrow P^{\varphi^{-1}} \in \varepsilon \Leftrightarrow (P^{\varphi^{-1}})^\sigma = P^{\varphi^{-1}} \Leftrightarrow ((P^{\varphi^{-1}})^\sigma)^\varphi = P$$

Ein Halbraum \mathfrak{H} mit der Begrenzung ε^φ kann nun bei der Bewegung $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ nur noch in sich selbst oder in \mathfrak{H}^- übergehen. Da diese Bewegung aber ungerade ist, gilt letzteres.

Unsere Frage nach der Art von $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$ wird im wesentlichen mit folgender Aufgabe beantwortet.

(16.5) Aufgabe. Ist ρ eine Drehung um b und φ eine Bewegung, dann ist $\varphi^{-1} \circ \rho \circ \varphi$ eine Drehung um das Bild von der Geraden b bei der Bewegung φ .

Zur Lösung ist nicht nur das Ergebnis aus (16.4), sondern auch die diesbezügliche Be-
weisanlage nützlich.

Die Zusammensetzung der Drehungen ρ_1 und ρ_2 ist also eine Drehung um das Bild der Geraden b bei der Drehung ρ_1 . Schneiden sich die Drehachsen a und b , so geht auch die Drehachse b^{ρ_1} durch diesen Schnittpunkt.

Mit unserem Bewegungsbegriff lassen sich nur einige Aspekte erfassen, die in der Kinematik und in der Getriebelehre von Bedeutung sind. Die Kinematik bezieht zeitliche Veränderungen der Lage von Figuren mit ein. Man nutzt dafür vielfach die Methoden der Differentialgeometrie.

Mit diesem Seitenblick auf die Kinematik - nähere Ausführungen müssen hier unterbleiben - möchten wir auf diese bedeutende Disziplin aufmerksam machen und zur Beschäftigung mit ihr anregen. (Siehe diesbezügliche Literaturhinweise im Literaturverzeichnis.)

(16.6) Aufgabe. a) Man bestimme $\rho_1^{-1} \circ \rho_2 \circ \rho_1$ für die Drehungen aus der Aufgabe (13.11).

b) Man zeige durch Transformation: $A \in \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_a \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_a$.

Im Rahmen der geraden Bewegungen sind die Betrachtungen über Produkte von Drehungen natürlich durch einige über Produkte von Verschiebungen zu ergänzen. Wir beginnen mit

(16.7) Dreispiegelungssatz für Punktspiegelungen. Sind A , B und C irgendwelche Punkte (des Raumes), dann ist $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$ eine Spiegelung an einem Punkt D .

Ein Beweis kann mit Hilfe der Sätze (14.12) und (14.13) so wie in der ebenen Geometrie geführt werden. Dabei ergibt sich, dass der Punkt D das Bild von A bei der Verschiebung \overrightarrow{BC} ist und damit zusammen mit A , B und C in einer gemeinsamen Ebene liegt. Der obige Satz führt uns weiter zu dem

(16.8) Satz. Das Produkt zweier Verschiebungen ist eine Verschiebung; insbesondere gilt $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Beweis als Aufgabe.

(16.9) Aufgabe. Gibt es zu einer vorgegebenen Kugel mit der Durchmesserlänge d und einem Dreieck ABC , dessen Seitenlängen kleiner als d sind, eine Verschiebung τ so, dass die Bildpunkte A' , B' und C' auf der Kugel liegen?

Gegebenenfalls bestimme man alle derartigen Verschiebungen.

Es ergäbe sich im Zusammenhang mit Verkettungen von speziellen räumlichen Bewegungen noch eine Reihe von Aufgabenstellungen, wenn man allein entsprechenden Untersuchungen in der ebenen Geometrie folgt.

Es bleibt in einigen Fällen auch die Frage, ob mit den bereits gewonnenen Ergebnissen ein gewisser Abschluss erzielt worden ist. So haben wir z.B. für die Ebenen- und Punktspiegelungen Dreispiegelungssätze (Satz (13.6) und (13.21) bzw. Satz (16.7)) angegeben. Gibt es eine derartige Aussage auch für Geradenspiegelungen?

(16.10) Aufgabe. Unter welchen Bedingungen für die Geraden a , b , c ist $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ wieder eine Geradenspiegelung?

Auf einem auffallenden Unterschied zu den Ebenen- und Punktspiegelungen möchten wir dabei noch aufmerksam machen: Es kann bereits ein Produkt von zwei Geradenspiegelungen wieder eine Geradenspiegelung sein (Aufgabe (13.13)).

Mehr möchten wir (aus Platzgründen) nicht direkt zum engeren Thema Verkettungen von speziellen räumlichen Bewegungen ausführen. Für den Leser bleibt hier noch viel Raum zu eigenschöpferischer Tätigkeit.

Getreu der Überschrift dieses Abschnittes wenden wir uns noch einigen Gruppen von Bewegungen zu.

Da bietet sich zunächst das doch recht reichhaltige Spektrum an speziellen räumlichen Bewegungen aus der Übersicht an.

(16.11) Aufgabe. Welche Arten von räumlichen Bewegungen, die in der Übersicht dieses Abschnittes ausgewiesen sind, bilden eine Gruppe? Welche dieser Gruppen sind kommutativ?

Lösung. Zunächst bilden alle Bewegungen des Raumes eine Gruppe, und zwar aus gleichen Gründen wie in der ebenen Geometrie.

Alle ungeraden Bewegungen fallen sofort außer Betracht, denn je zwei von ihnen ergeben als Produkt eine gerade Bewegung.

Die geraden Bewegungen (die Schraubungen) bilden eine (Unter-)Gruppe, die aber nicht kommutativ ist, wie allein schon die Aussage in der Aufgabe (13.12) zeigt.

Die Drehungen ergeben keine Gruppe; das zeigt uns das Ergebnis der Aufgabe (16.2); auch nicht speziell die Geradenspiegelungen.

Dagegen bilden die Verschiebungen sogar eine kommutative (Unter-)Gruppe, denn mit τ_1 und τ_2 sind auch $\tau_1 \circ \tau_2$ (Satz (16.8)) und τ_1^{-1} Verschiebungen, und den Nachweis der Kommutativität können wir auf Grund des Satzes (14.13) wie in der ebenen Geometrie mit Hilfe des Dreispiegelungssatzes für Punktspiegelungen führen.

Damit ist die obige Übersicht ausgeschöpft. Doch es bleibt eine unerschöpfliche Fülle an Mengen von Bewegungen, die eine Gruppe ergeben. Vielfache Anregungen bietet hier wieder die ebene Geometrie. Wir können auch hier nur einige Beispiele herausgreifen und zu weiteren (eigenen) Betrachtungen ermuntern.

Eine Deckabbildung φ einer Figur \mathfrak{F} sei wie an früherer Stelle in der ebenen Geometrie (Abschnitt 10) erklärt: φ ist eine Bewegung des Raumes mit $\mathfrak{F}^\varphi = \mathfrak{F}$. Dazu lassen wir hier ebenfalls ungerade Bewegungen zu.

Offenbar bilden auch im Raum die Deckabbildungen einer vorgegebenen Figur eine Gruppe, eine Untergruppe der Bewegungsgruppe. Diese Symmetriegruppe der Figur kann recht arm sein, sie kann nur aus einem Element - der identischen Bewegung - bestehen. Besonders interessante Deckabbildungsgruppen mit endlich vielen Elementen besitzen die fünf regelmäßigen Polyeder: regelmäßiges Tetraeder, Würfel, regelmäßiges Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

(16.12) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Tetraeders $ABCD$?

Lösung. Wir können bereits auf Vorleistungen zurückgreifen. Nach der Lösung der Aufgabe (12.3) wissen wir, dass jede Deckabbildung des Tetraeders eine Permutation der Menge $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D\}$ der Ecken (d.h. eine eineindeutige Abbildung von \mathfrak{E} auf sich) bewirkt und dass es zu jeder Permutation von \mathfrak{E} höchstens eine passende Deckabbildung des Tetraeders gibt. Demnach gibt es höchstens 24 Deckabbildungen.

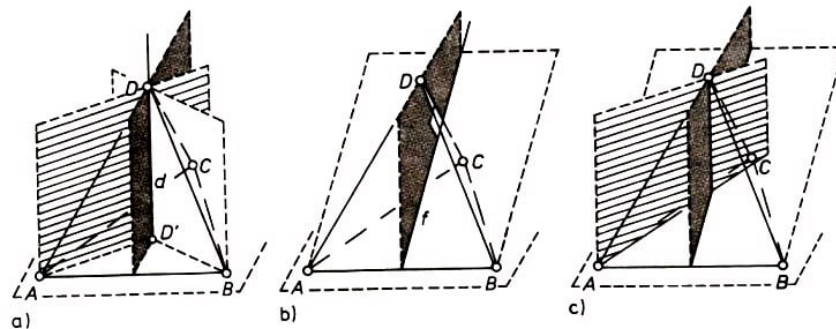


Abb. 16.6

Ferner haben wir bei der Lösung der Aufgabe (11.4) gezeigt, dass dafür aus der Menge der Ebenenspiegelungen nur die Spiegelungen an den sechs Mittellotebenen $\mu(A, B)$, $\mu(B, C)$, $\mu(C, A)$, $\mu(A, D)$, $\mu(B, D)$ und $\mu(C, D)$ in Frage kommen. Wir sehen uns die von ihnen erzeugte Untergruppe näher an, denn sie besteht natürlich nur aus Deckabbildungen des Tetraeders.

Die Ebenen $\mu(A, B)$, $\mu(B, C)$ und $\mu(C, A)$ schneiden sich in dem Lot d von D auf die Ebene ε_{ABC} (Abb. 16.6 a). Das Produkt der Spiegelungen an den Ebenen $\mu(A, B)$ und $\mu(B, C)$ ist eine nicht identische Drehung um d , und diese ergibt bei der Einschränkung auf die Ebene ε_{ABC} eine nicht identische Drehung von ε_{ABC} , die eine Deckabbildung des gleichseitigen Dreiecks ABC ist.

Es gibt aber neben der identischen nur zwei nicht identische Drehungen von ε_{ABC} , die Deckabbildungen des Dreiecks ABC sind. Folglich ergeben die betrachteten drei Ebenenspiegelungen durch Verkettung neben der identischen nur zwei nicht identische

Drehungen um d .

Entsprechendes gilt für die Lote von den übrigen drei Ecken auf die jeweils gegenüberliegende Tetraederseitenfläche. So erhalten wir $4 \cdot 2 = 8$ nicht identische Drehungen als Deckabbildungen.

Es bleiben nur noch diejenigen Verkettungen von zwei der sechs Ebenenspiegelungen offen, bei denen die Mittellotebenen zu gegenüberliegenden Tetraederkanten gehören; das sind z.B. $\mu(A, B)$ und $\mu(C, D)$. Da diese Ebenen jeweils senkrecht zueinander sind, ist das Produkt eine Geradenspiegelung, bezüglich $\mu(A, B)$ und $\mu(C, D)$ an der Schnittgeraden $f = \mu(A, B) \cap \mu(C, D)$ (Abb. 16.6b).

Damit haben wir drei Geradenspiegelungen als weitere Deckabbildungen des Tetraeders. Wir verketteten schließlich die Spiegelung an der Ebene $\mu(A, B)$ jeweils mit den bereits aufgeführten zwei nicht identischen Drehungen an dem Lot durch A sowie an dem Lot durch B und mit den Spiegelungen an den Geraden, die die Mittelpunkte $M_p(A, C)$, $M_p(B, D)$ bzw. $M_p(B, C)$, $M_p(A, D)$ verbinden.

Diese sechs ungeraden Produkte sind nichttriviale Drehspiegelungen (d.h. keine Ebenenspiegelungen), und sie sind offenbar voneinander und von den bisherigen $1 + 6 + 8 + 3 = 18$ Deckabbildungen verschieden.

Wegen $18 + 6 = 24$ haben wir damit bereits die Elemente der Deckabbildungsgruppe vollständig erfasst.

Im letzten Teil der Lösung könnte man auch folgender Überlegung folgen. Wir verketteten die Spiegelung an der Geraden f jeweils mit den Spiegelungen an den Ebenen $\mu(A, C)$, $\mu(B, C)$, $\mu(A, D)$ und $\mu(B, D)$. (In den restlichen beiden Symmetrieebenen ist die Gerade f enthalten.)

Das ergibt offenbar vier voneinander verschiedene ungerade Produkte, die keine Spiegelungen an Ebenen sind, also nichttriviale Drehspiegelungen sind. Das gleiche kann bezüglich der beiden anderen Geraden gesagt werden, die die Mitten gegenüberliegender Tetraederkanten verbinden.

Wir bekämen damit $3 \cdot 4 = 12$ nichttriviale Drehspiegelungen als Deckabbildungen und damit insgesamt $18 + 12 = 30$ Gruppenelemente.

(16.13) Aufgabe. Wo steckt bei diesen Überlegungen der Fehler ?

Unsere Lösung der Aufgabe (16.12) zeigt ferner, dass sich die Symmetriegruppe des regelmäßigen Tetraeders mit den Spiegelungen an den sechs Symmetrieebenen erzeugen lässt. Naheliegend ist folgende Frage.

(16.14) Aufgabe. Lässt sich dieses Erzeugendensystem reduzieren?

Lösung. Da die Symmetriegruppe nichttriviale Drehspiegelungen enthält, sind mindestens drei der Ebenenspiegelungen notwendig. Und man kommt in der Tat mit so vielen aus!

Natürlich gelingt das nur mit solchen, die zusammen als Produkt eine nicht triviale Drehspiegelung ergeben, so z.B. die Spiegelungen σ_1 an $\mu(A, B)$, σ_2 an $\mu(B, C)$ und σ_3 an $\mu(C, D)$ (Abb. 16.6 c).

Das Transformieren hilft uns nun leicht weiter. Es ist $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ die Spiegelung σ_4 an $\mu(C, A)$, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_3 \circ \sigma_2$ die Spiegelung σ_5 an $\mu(B, D)$ und schließlich $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_5 \circ \sigma_1$ die Spiegelung σ_6 an $\mu(A, D)$.

Die aufgezeigten Sachverhalte über Symmetriegruppen sind für kristallographische Betrachtungen von Molekülen (und den von ihnen gebildeten Strukturen) von Interesse. Während für den Konstrukteur nur eigentliche Bewegungen relevant sind, betrachtet der Kristallograph fiktive Bewegungen, denn kein Kristall führt auch nur eine seiner Deckabbildungen jemals aus!

Diese braucht man aber zur Aufdeckung der Physik der Kristalle, zur Beschreibung ihrer geometrischen Struktur, natürlich in dem Bewusstsein, dass die Physik der Kristalle ihre Geometrie bestimmt.

(16.15) Aufgabe. Welchen Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$, die bei der Lösung der Aufgabe (16.12) einzeln aufgeführt wurden, entsprechen welchen Permutationen von $\mathfrak{E} = \{A, B, C, D\}$?

(16.16) Aufgabe. Welche Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ erzeugt die nicht triviale Drehspiegelung $\sigma_2 \circ \sigma_f$, wobei σ_2 die Spiegelung an der Symmetrieebene $\mu(B, C)$ und f für Symmetrieachse entsprechend Abb. 16.6b ist?

(16.17) Aufgabe. Man bestimme alle Untergruppen der Symmetriegruppe des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$. Welche von ihnen sind zyklisch, welche stimmen in ihrer Struktur miteinander überein?

(16.18) Aufgabe. Man bestimme die Bewegungen, aus denen die Symmetriegruppe eines Würfels besteht! Man gebe ein möglichst kleines Erzeugendensystem für diese Gruppe an.

Kochsalz kristallisiert zum Teil als Würfel und zum Teil als regelmäßiges Oktaeder aus.
- Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels bilden ein regelmäßiges Oktaeder (Abb. 16.7).

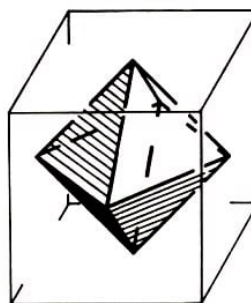


Abb. 16.7

Für die Untersuchungen in der Aufgabe (16.18) kann es von Wert sein, sich auf diese Figur zu stützen. (16.19) Aufgabe. Aus welchen Bewegungen besteht die Gruppe der Deckabbildungen eines geraden Kreiskegels?

Bisher haben wir im Raum die Symmetrie einer Figur bezüglich einer Ebene, einer Geraden und eines Punktes erklärt, und zwar jeweils nur durch die Spiegelung an ihnen. Der Symmetriebegriff wird auch im Raum i.a. weiter gefasst.

Eine Figur \mathfrak{F} heißt bezüglich einer Geraden g m -fach drehsymmetrisch genau dann, wenn es eine Drehung ρ um g derart gibt, dass $\mathfrak{F}^\rho = \mathfrak{F}$ und $\rho^m = \iota$ gilt.

Man nennt g eine Symmetrieachse n -ter Ordnung der Figur \mathfrak{F} oder eine n -zählige Symmetrieachse von \mathfrak{F} genau dann, wenn n die größte natürliche Zahl ist bei der \mathfrak{F} bezüglich g n -fach drehsymmetrisch ist. (Der bisherige Begriff "Symmetrieachse von \mathfrak{F} " ordnet sich hier mit ein.)

Dabei interessieren natürlich nur Symmetrieachsen mit einer Ordnung ≥ 2 .

Ferner heißt g eine Symmetrieachse unendlicher Ordnung, wenn es eine Drehung ρ um g so gibt, dass $\mathfrak{F}^\rho = \mathfrak{F}$ und $\langle g \rangle$ eine unendliche zyklische Gruppe ist. Ein Beispiel dafür liefert Aufgabe (16.19).

Rückblickend können wir alle Symmetrieachsen für das regelmäßige Tetraeder angeben:

- drei zweizählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Tetraederkanten (Aufgabe (13.15) und (16.12));
- vier dreizählige Achsen, nämlich die Lote von den Ecken auf die gegenüberliegenden Tetraederseitenflächen (Aufgabe (16.12)).

Für das regelmäßige Oktaeder ergibt sich:

- sechs zweizählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Kanten (Aufgabe (13.16); Abb. 13.5);
- drei vierzählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken (Aufgabe (13.16); Abb. 13.5);
- vier dreizählige Achsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mitten gegenüberliegender Oktaederseitenflächen (gleichseitige Dreiecke).

(16.20) Aufgabe. Man bestimme alle Symmetrieachsen des Würfels und vergleiche das Ergebnis mit dem beim regelmäßigen Oktaeder! Man begründe das Ergebnis des Vergleichs.

Die Achsen einer Figur mit der größten Ordnung heißen Hauptachsen. Das regelmäßige Tetraeder hat vier Hauptachsen, und drei das regelmäßige Oktaeder.

Wir erklären schließlich noch: Eine Gerade g ist eine Drehspiegelachse n -ter Ordnung der Figur \mathfrak{F} genau dann, wenn es eine Drehung ρ um g und eine Spiegelung σ an einer zu g senkrechten Ebene so gibt, dass $\mathfrak{F}^{\rho\sigma} = \mathfrak{F}$ und $g^n = \iota$ gilt und jede andere Drehspiegelung mit der Achse g , die \mathfrak{F} auf \mathfrak{F} abbildet, bezüglich der Drehung eine kleinere Ordnung als n besitzt.

Beim regelmäßigen Tetraeder sind die drei zweizähligen Achsen gleichzeitig Drehspiegelachsen vierter Ordnung.

Auf spezielle Symmetriebezeichnungen, deren sich die Kristallographie bedient, verzichten wir bewusst. Auch bezüglich der Kristallographie war hier nur ein Seitenblick möglich; einschlägige Darlegungen findet man u.a. in [3, 8, 21, 19, 12].

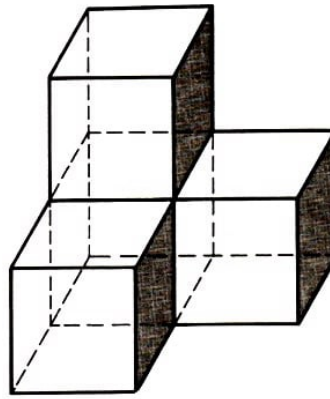


Abb. 16.8

(16.21) Aufgabe. Der Raum lässt sich mit kongruenten Würfeln so (lückenlos) parkettieren, dass Würfecken nur mit Würfecken zusammenstoßen (Abb. 16.8). Man bestimme die Symmetriegruppe dieser Raumparkettierung, indem man ein Erzeugendensystem findet.

Die letzte Betrachtung in diesem Abschnitt soll dem (Fernseh)-Fußball gelten. Wissen Sie auf Anhieb, welche Gestalt die schwarzen und weißen Teile haben, aus denen er zusammengesetzt ist? Er besteht aus 12 schwarzen regelmäßigen Fünfecks- und 20 weißen regelmäßigen Sechsecksflächen. Um jedes schwarze Fünfeck liegen fünf weiße Sechsecke, alle natürlich kugelförmig gewölbt (Abb. 16.9).

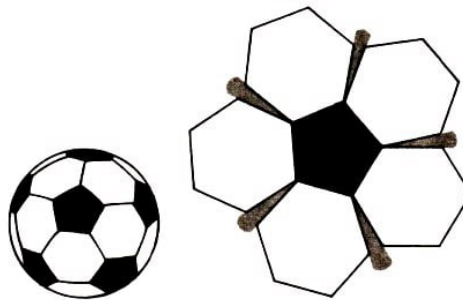


Abb. 16.9, 16.10

Eine Ebene kann man in dieser Art mit regelmäßigen Fünf- und Sechsecken nicht überdecken (Abb. 16.10). Um so erstaunlicher ist die Möglichkeit auf der Kugel.

(16.22) Aufgabe. Man weise die Existenz einer derartigen Parkettierung der Kugeloberfläche nach, indem man eine Bewegungsgruppe findet, die Symmetriegruppe für die $12 \cdot 5 = 60$ Ecken ist.

(Hinweis: Dies gelingt u.a. durch ein Erzeugendensystem, das aus einer Drehung fünfter Ordnung und einer Ebenenspiegelung besteht. Man berücksichtige die Möglichkeit des Transformierens.)

Schließlich möchten wir noch auf den weltweit bekannt gewordenen "Zauberwürfel" aus Ungarn hinweisen.²³

Es werden an ihm zwar nur Drehungen um drei zueinander senkrechte Achsen mit schrittweise jeweils 90° ausgeführt, dennoch lassen sich viele Sachverhalte im Zusammenhang mit Verkettungen von Drehungen leicht erkennen und veranschaulichen.

²³Näheres zu diesem mathematischen Spiel siehe u.a. "alpha" 16 (1982), Heft 1, S. 16-17; "practic", Heft 3/1981, S. 100-105, und W. Hintze: Der ungarische Zauberwürfel, 4. Aufl., Berlin 1986.

IV. Anhang

17 Einiges zur Rolle und Stellung der Bewegungen in der Geometrie

Bei der Einführung der Bewegungen in der ebenen bzw. der räumlichen Geometrie haben wir von metrischen Größen und Beziehungen, im wesentlichen vom Längenbegriff (siehe Eigenschaft B 4) Gebrauch gemacht.

Das steht im Einklang damit, dass man normalerweise schon frühzeitig mit Längen und ihren Eigenschaften vertraut wird, z.T. schon im Vorschulalter (!).

Dieser Gesichtspunkt hat uns vor allem bewogen, die Bewegungen nicht als undefinierten Grundbegriff einzuführen. Bewegungen und ihre Eigenschaften erweisen sich äußerst nützlich bei der Darstellung und Lösung geometrischer Aufgabenstellungen, und wir hoffen, dass der Leser nach den bisherigen Einblicken dem zustimmt.

Dem Bewegungsbegriff kommt aber auch eine grundlegende Bedeutung für eine Begründung der Geometrie zu. Ein axiomatischer Aufbau geht von nicht näher erklärten Grundbegriffen (wie Punkt, Gerade, Ebene, Lagebeziehung (Inzidenz), u.a.m.) sowie damit formulierten und ohne Beweis vorausgesetzten Aussagen, den Axiomen aus.

Weitere Begriffe werden definiert; weitere (wahre) Aussagen werden aus den bisherigen durch logisches Schließen gewonnen. Bereits Euklid²⁴ hat um 325 v.u.Z. in seinem Buch "Elemente" einen streng logischen Aufbau der Geometrie versucht.

Einen mustergültigen Aufbau der euklidischen Geometrie (und der klassischen nicht-euklidischen Geometrie), der heutigen Maßstäben entspricht, gab Hilbert²⁵ in seinem richtungweisenden Buch "Grundlagen der Geometrie" (1899).

Im Euklid-Hilbertschen Aufbau ist die Strecken- und Winkelskongruenz die metrische Grundrelation.

Weitere Fortschritte verdankt man J. Hjelmslev²⁶, der durch die systematische Verwendung von Spiegelungen fundamentale Ideen und Methoden für einen Aufbau der Geometrie schuf. In dem grundlegenden Buch [2] von F. Bachmann fand die weitere Entwicklung dieser Ideen eine erste umfassende Ausarbeitung.

Anstelle von (Strecken- und Winkel-) Kongruenzaxiomen können Bewegungsaxiome verwendet werden, etwa solche Aussagen wie B 1, B 2, B 3, B 5, B 7, B 8.

Weitere metrische Begriffe und Aussagen können aufgebaut werden. So wird eine Figur \mathfrak{F} kommt (deckungsgleich) zu einer Figur \mathfrak{F}' genannt, wenn es eine Bewegung φ mit $\mathfrak{F}^\varphi = \mathfrak{F}'$ gibt. Insbesondere ist damit die Kongruenz von Strecken ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$) gegeben; als Länge von \overline{AB} kann die Menge der zu \overline{AB} kongruenten Strecken aufgefasst werden.

Spezielle Bewegungen wie die Spiegelungen werden durch zusätzliche Forderungen aus-

²⁴Euklid von Alexandria, 365(?)–300(?) v.u.Z.

²⁵David Hilbert (1862–1943), Professor in Königsberg und Göttingen.

²⁶Johannes Hjelmslev (1873–1950), dänischer Mathematiker.

gezeichnet. (Siehe dazu die Definitionen in den Abschnitten 2, 5, 13 und 14 sowie den Satz (12.7).)

In einfacher Weise lässt sich eine so grundlegende metrische Relation wie die Orthogonalität erklären:

$$\begin{aligned} a \perp b &: \Leftrightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a \text{ und } \sigma_a \neq \sigma_b \\ g \perp \varepsilon &: \Leftrightarrow \sigma_g \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_g \text{ und } \sigma_g \neq \sigma_\varepsilon \\ \eta \perp \varepsilon &: \Leftrightarrow \sigma_\eta \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_\eta \text{ und } \sigma_\eta \neq \sigma_\varepsilon \end{aligned}$$

Eine Rechtfertigung dazu geben die Aussagen in den Aufgaben (3.11), (11.3) und (13.14).

In den für die Lehreraus- und -weiterbildung verfassten Geometrielehrbüchern [15] und [16] wird die Bewegung (von Figuren) als einziger metrischer Grundbegriff verwendet. Die Geometrie lässt sich allein aus dem Spiegelungsbegriff begründen. Wir können dazu hier nur auf einige gewichtige Sachverhalte aufmerksam machen, zu denen wir in unseren bisherigen Betrachtungen mit teilweise gänzlich anderen Absichten gelangt sind und verweisen ansonsten vor allem auf [2].

Die Bewegungsgruppe der ebenen (bzw. räumlichen) Geometrie lässt sich allein mit den Spiegelungen an Geraden (bzw. an Ebenen) erzeugen. Im Rahmen dieser Gruppe lassen sich die Punktspiegelungen (bzw. Punkt- und Geradenspiegelungen) und - wie wir gerade feststellten - die Orthogonalität beschreiben. Darüber hinaus kann in dieser Gruppe auch die Lagebeziehung (Inzidenz) dargestellt werden:

$$A \in g \Leftrightarrow \sigma_A \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_A$$

(siehe Aufgaben (5.12) und (5.13)); im Raum gilt gleiches und außerdem

$$A \in \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_A \circ \sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon \circ \sigma_A$$

(Aufgabe (16.6)).

Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Geometrie in ihrer (von Spiegelungen erzeugten) Bewegungsgruppe zu formulieren. Eine geometrische Aussage kann als gruppentheoretische Aussage über Spiegelungen und Spiegelungsprodukte formuliert werden, und es bietet sich an, die Behauptung aus den Voraussetzungen durch Gruppenrechnen in der Bewegungsgruppe, durch Rechnen mit Spiegelungen zu beweisen.

Nachträglich lässt sich diese Methode an vielen Stellen unserer Darlegungen mehr oder minder deutlich erkennen, das erste Mal haben wir den Leser beim Beweis des Satzes (3.12) bewusst darauf aufmerksam gemacht. (Beim Lösen der Aufgaben möchte der Leser diese Möglichkeit besonders in Betracht ziehen.)

18 Abbildungsgruppen als Ordnungsprinzip in der Geometrie

Wir haben gesehen, dass die Spiegelungen neue und grundlegende Mittel und Methoden - gruppentheoretische - für die Geometrie eröffnen.

In seiner unter dem Namen "Erlanger Programm" bekannt gewordenen Antrittsvorlesung hat F. Klein 1872 durch die Einführung des Gruppenbegriffs erreicht, die Fülle der bis dahin vorliegenden geometrischen Kenntnisse nach einem einheitlichen Prinzip zu ordnen. Einem Teilgebiet der Geometrie wird eine Gruppe von Abbildungen so zugeordnet, dass diese Geometrie durch die Eigenschaften, die bei der Abbildungsgruppe invariant bleiben, vollständig bestimmt ist.

Wir legen das für die Ebene kurz näher dar.

Die Transformationen der Ebene, die den Forderungen B 2, B 3 und B 4 genügen, sind die Bewegungen und bilden die Bewegungsgruppe. Die Geometrie, die durch die Invarianten zu dieser Gruppe bestimmt ist, ist die Geometrie, die man gewöhnlicherweise in der Schule zugrunde legt, die Kongruenzgeometrie oder euklidische Geometrie.

Werden die Forderungen an die Transformationen (Invarianzforderungen) abgeschwächt, so enthält die neue Transformationsgruppe die bisherige als Untergruppe, die zugehörige Geometrie wird allgemeiner, jedoch inhaltlich ärmer (weniger Invarianten).

Ersetzt man B 4 durch die Forderung, dass Teilverhältnisse invariant bleiben, dann bekommt man Dehnungen hinzu; man erhält die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen und diesbezüglich die äquiforme Geometrie, mit der man in der Schule in der Ähnlichkeitslehre vertraut gemacht wird.

Werden nur noch B 2 und B 3 gefordert (und, falls man anordnungsgeometrische Beziehungen außer Betracht lässt, nur noch B 2), dann ergibt sich die sogenannte Gruppe der affinen Abbildungen und diesbezüglich die affine Geometrie.

V. Lösungsanmerkungen

Zu (1.2). $(q \cup K)^\alpha = q^- \cup K^-$; $(q \cup K)^\beta = p \cup H$; $(q \cup K)^\gamma = p^- \cup H$.

Zu (2.6). Man betrachte die Spiegelung an der Mittelsenkrechten einer Dreiecksseite.

Zu (2.8). Im Fall $|\angle p, q| \leq 60^\circ$ und nur dann gibt es für alle Lagen von A, B stets genau eine Lösung.

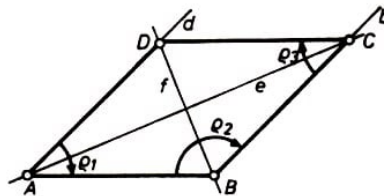


Abb. L.1

Zu (3.10). (Siehe Abb. L. 1.) a) $\rho_1 \circ \rho_2 = \sigma_e \circ \sigma_f$

b) $\rho_1 \circ \rho_3^{-1} = \sigma_d \circ \sigma_b$; mit $P^{\rho_1} = P^{\rho_3}$ wäre $(P^{\rho_1})^{\rho_3^{-1}} = P$ und weiter $P^d = P^b$ ($\neq P$) und damit $d = b$.

Zu (3.18). Betrachte die Drehung ρ um das Zentrum des Quadrats über \overline{AB} mit $A^\rho = B$.

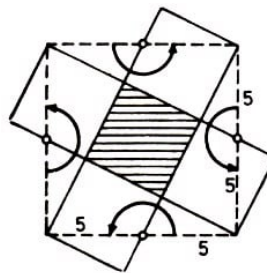


Abb. L.2

Zu (5.4). a.) Abb. L. 2; $5A = (5 + 5)^2 \Rightarrow A = 20$.

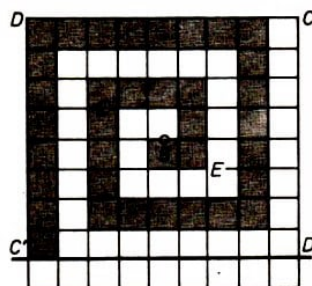


Abb. L.3

Zu (5.5). Ohne letzte Zeile liegt eine zentralsymmetrische Figur vor (Abb. L. 3); $A = \left(\frac{81-9}{2} + 9\right) \cdot 4 \text{ cm}^2 = 180 \text{ cm}^2$, $U = 43 \cdot 4 \text{ cm} + 2 \cdot 6 \text{ cm} = 184 \text{ cm}$.

Zu (5.12). Mit $A \notin g$ wäre $A^g \neq A$. Aus $A^g = A^h$ folgte dann $g = h$.

Zu (5.19). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_B = \overrightarrow{AA^B} = \overrightarrow{CC^D} = \sigma_C \circ \sigma_D$; Umkehrung indirekt.
Zur Folgerung:

$$\sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_C \circ \sigma_D \Rightarrow \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_C \circ \sigma_D \Rightarrow \sigma_B \circ \sigma_D = \sigma_A \circ \sigma_C$$

Zu (14.4). Das gilt genau dann, wenn $\varepsilon \perp \chi$ und $g_{PP^\varphi} \parallel \varepsilon$ für irgendeinen Punkt $P \notin \chi$ ist.

Zu (14.10). Der gemeinsame Punkt ist das Bild des Mittelpunktes der Tetraederumkugel bei der Spiegelung am Schwerpunkt des Tetraeders. (Vgl. dazu Aufgabe (5.9).)

Zu (15.2). Nein.

Zu (16.5). Mit $\rho = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$ ist

$$\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ (\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta) \circ \varphi = (\varphi^{-1} \circ \sigma_\alpha \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \sigma_\beta \circ \varphi)$$

Zu (16.10). Es gibt eine Ebene ε mit $a, b, c \perp \varepsilon$ oder es gibt eine Gerade g mit $a, b, c \perp g$.

Zu (16.13). Diese 12 nichttrivialen Drehspiegelungen sind nicht alle voneinander verschieden. (Vgl. Aufgabe (14.6).)

Zu (16.16). Für $\varphi = \sigma_2 \circ \sigma_f$ ist $\langle \varphi \rangle = \{\iota, \varphi, \varphi^2, \varphi^3\}$.

Zu (16.19). Alle Drehungen um die Achse des Kegels.

Ausführliche Darstellungen der Lösungen zu den gestellten Aufgaben (nebst weiteren Aufgaben) findet man in

A. Rossland: Aufgaben zu Bewegungen in der Ebene. Diplomarbeit, PHKL Potsdam 1984,

Th. Gaertner: Aufgaben zu Bewegungen im Raum. Diplomarbeit, PHKL Potsdam 1984.

Literatur

- [1] Argunow, B.I., M.B. Balk: Geometrische Konstruktionen in der Ebene, Moskau 1955 (russisch)
- [2] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1973. (Übersetzung ins Russische, Moskau 1969.)
- [3] Belger, M., und L. Ehrenberg: Theorie und Anwendung der Symmetriegruppen. Bd. 23, Leipzig 1981.
- [4] Beyer, R.: Technische Raumkinematik. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
- [5] Beyer, R., und E. Schörner: Raumkinematische Grundlagen (grafisch behandelt und plastisch gesehen). München 1953.
- [6] Böhm, J., u. a.: Geometrie II. MfL Bd. 7, 2. Aufl., Berlin 1978.
- [7] Coxeter, H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Basel-Stuttgart 1963 (Autorisierte Übersetzung aus dem Englischen).
- [8] Dmitriev, I. S.: Symmetrie in der Welt der Moleküle. Leipzig 1979 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [9] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. IV: Geometrie. 2. Aufl., Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [10] Gilde, W.: Gespiegelte Welt. Leipzig 1979.
- [11] Hameister, E.: Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. MSB Bd. 4, Leipzig 1966.
- [12] Hilbert, D., und C. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Berlin 1932 (Übersetzung ins Russische, Moskau 1981).
- [13] Jaglom, H. M.: Geometrische Darstellungen, Moskau 1955 (russisch)
- [14] Jeger, M.: Konstruktive Abbildungsgeometrie. 3. Aufl. Luzern-Stuttgart 1964.
- [15] Klotzek, B.: Geometrie. Berlin 1971.
- [16] Klotzek, B., und E. Quaisser: Nichteuklidische Geometrie. MfL Bd. 17, Berlin 1978.
- [17] Ljubitsch, J.I., L.A. Schorr, Kinematische Methoden in der Geometrie, Moskau 1976 (russisch)
- [18] Quaisser, E., und H.-J. Sprengel. Räumliche Geometrie. MSB Bd. 103, Berlin 1981.
- [19] Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung 4. Aufl., Basel- Stuttgart 1956.
- [20] Vollmer, J. (Herausgeber): Getriebetechnik. Berlin 1969.
- [21] Weyl, H.: Symmetry. Princeton 1952 (deutsche Übersetzung, Basel-Stuttgart 1955).