

---

**I.S. Sominski, L.I. Golovina,  
I.M. Jaglom**

**Die vollständige Induktion**

Übersetzung von W.Ficker, R.-D.Schröter, R.Fredersdorf, M.Schmidt

1986 Deutscher Verlag der Wissenschaften

MSB: Nr. 126

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

## Vorwort der Redaktion der deutschsprachigen Ausgabe

In der Reihe "Populjarnye lekcii po matematike" erschien im Jahre 1950 das Büchlein "Metod matematiceskoj indukcii" von I. S. Sominskij. Es wurde in viele Sprachen übersetzt, u.a. in die deutsche; die deutsche Übersetzung erschien erstmalig 1954 als Band III der "Kleinen Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik" und wurde als Band 8 in die "Mathematische Schülerbücherei" aufgenommen. Seither sind 13 Auflagen erschienen.

Die Autoren L. I. Golovina und I. M. Jaglom hatten die Absicht, mit ihrer erstmalig 1956 erschienenen Broschüre "Indukcija v geometrii"- ebenfalls in der Reihe "Populjarnye lekcii po matematike" - die genannte Schrift von I. S. Sominskij durch geometrische Beispiele und Aufgaben zu ergänzen.

Nach dem Tode von I. S. Sominskij im Jahre 1962 haben sie für den Verlag Nauka die beiden Broschüren "Metod matematiceskoj indukcii" und "Indukcija v geometrii" zu einem Band über die vollständige Induktion unter dem Titel "O matematiceskoj indukcii" (Moskau 1967) zusammengefasst; ein Nachwort von Ju. A. Gastev, in dem einige terminologische und methodologische Fragen berührt werden, wurde ebenfalls aufgenommen.

Ein geplanter Band XXVI der "Kleinen Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik" sollte deren Band III durch geometrische Beispiele und Aufgaben ergänzen.

Unter der Anleitung von S. Kloth und mir haben Studenten der Pädagogischen Hochschule "Karl Liebknecht" Potsdam Teil II und Nachwort des 1967 in Moskau erschienenen Bandes "O matematiceskoj indukcii" übersetzt.

Die Autoren fügten ein Beispiel und zwei Aufgaben neu ein und schlossen sich bereitwillig den in Potsdam vorgeschlagenen Änderungen an. Einige Beweise wurden etwas modifiziert.

Das betrifft insbesondere § 3 in Teil II (Abschnitt 2.3 in der Nummerierung des vorliegenden Bändchens), in dem danach u.a. mit geometrischen Abbildungen wie Spiegelungen an Punkten, Drehungen und Verschiebungen gearbeitet wird. Außerdem wurden einige Bezeichnungen unserer Lehrbuchliteratur angepasst.

Wie im russischen Original wurden schwierigere oder am Rande des Hauptthemas liegende Betrachtungen im Kleindruck gebracht, wie dort nicht alle Lösungen der Aufgaben angegeben; vielmehr wurde auf vorhandene Literatur verwiesen. Einige Aufgaben benötigen zu ihrer Lösung nicht das Prinzip der vollständigen Induktion; sie stehen jedoch in einem engen Zusammenhang zu Aufgaben und Beispielen, die sich wesentlich auf dieses Prinzip stützen.

Das Projekt wurde 1973 abgeschlossen. Unter dem Titel "Vollständige Induktion in der Geometrie" wurde das Bändchen unter der Nummer 75 in die "Mathematische Schülerbücherei" aufgenommen.

---

Als der Verlag mir mitteilte, dass die getrennten Titel "Die Methode der vollständigen Induktion" und "Vollständige Induktion in der Geometrie" in einem Band zusammengefasst werden sollten, habe ich mich gern zur Mitarbeit entschlossen.

In der vorliegenden Ausgabe entsprechen Einführung und Kapitel 1 im wesentlichen dem Band III der "Kleinen Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik", während sich Kapitel 2 und Nachwort mit dem Band XXVI dieser Reihe decken. Gegenüber dem Band III sind folgende Änderungen zu verzeichnen:

- neue Gliederung,
- Unterscheidung von Beispielen und Aufgaben,
- neue Beispiele und neue Lösungen im Text, insbesondere in der Einführung,
- neue Fußnoten und stilistische Änderungen in Kapitel 1.

Diese Änderungen bedeuten nicht nur eine Anpassung an die russische Ausgabe von 1967, sie stellen meines Erachtens auch eine merkliche Verbesserung dar. Ich hoffe, dass dem vorliegenden Band eine ähnliche Popularität wie den getrennten Übersetzungen beschieden ist.

Er wendet sich an Schüler höherer Klassen, Studenten der ersten Semester an Universitäten, Pädagogischen Hochschulen und anderen Hochschulen. Auch Mathematiklehrer werden den Band zur Vertiefung ihres Unterrichts und zur Arbeit in Mathematikzirkeln vorteilhaft verwenden können.

Dank gilt den Übersetzern und Bearbeitern. Dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, insbesondere Frau E. Arndt, ist für die sachkundige und umsichtige redaktionelle Bearbeitung der Vorlagen zu danken. In den Dank sei schließlich die Druckerei "Thomas Müntzer" wegen ihrer sorgfältigen Arbeit eingeschlossen.

Potsdam, im Januar 1986

B. Klotzek

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>5</b>
<b>1 Vollständige Induktion in Arithmetik und Algebra</b>	<b>14</b>
1.1 Beweise von Gleichungen, arithmetische Aufgaben . . . . .	14
1.2 Trigonometrische und algebraische Aufgaben . . . . .	24
1.3 Aufgaben zum Beweis von Ungleichungen . . . . .	27
1.4 Beweis einiger Sätze der elementaren Algebra und Kombinatorik mittels vollständiger Induktion . . . . .	33
1.5 Lösungen . . . . .	37
<b>2 Vollständige Induktion in der Geometrie</b>	<b>45</b>
2.1 Berechnung mittels vollständiger Induktion . . . . .	45
2.2 Beweise mittels vollständiger Induktion . . . . .	49
2.2.1 Aufgaben über Karten . . . . .	54
2.2.2 Färbungsprobleme . . . . .	56
2.3 Vollständige Induktion bei Konstruktionen . . . . .	70
2.4 Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion . . . . .	77
2.5 Definition mittels vollständiger Induktion . . . . .	81
2.6 Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl . . . . .	90
2.6.1 Berechnung und Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl . . . . .	93
2.6.2 Definition und Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl . . . . .	97
2.7 Lösungen . . . . .	110
<b>3 Nachwort</b>	<b>124</b>
<b>4 Literatur</b>	<b>130</b>

## Einführung

Bei Aussagen unterscheidet man allgemeine und spezielle. Wir wollen zunächst einige Beispiele für allgemeine Aussagen anführen:

1. Alle Bürger der UdSSR besitzen das Recht auf Bildung.
2. In jedem Parallelogramm werden die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt halbiert.
3. Alle Zahlen, die mit einer Null enden, sind durch 5 teilbar.

Die entsprechenden Beispiele spezieller Aussagen sind:

Petrow besitzt das Recht auf Bildung.

1. In dem Parallelogramm  $ABCD$  werden die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt halbiert.
2. 140 ist durch 5 teilbar.

Den Übergang von allgemeinen zu speziellen Aussagen nennt man Deduktion. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

1. Alle Bürger der UdSSR besitzen das Recht auf Bildung
2. Petrow ist Bürger der UdSSR.
3. Petrow besitzt das Recht auf Bildung.

Aus der allgemeinen Aussage 1 haben wir mit Hilfe der Aussage 2 die spezielle Aussage 3 gefolgert.

Den Übergang von speziellen Aussagen zu allgemeinen nennt man Induktion. Dabei kann die Induktion sowohl zu richtigen als auch zu falschen Schlussfolgerungen führen. Wir wollen dies an zwei Beispielen erläutern.

1. 140 ist durch 5 teilbar.
2. Alle Zahlen, die mit einer Null enden, sind durch 5 teilbar.

Aus der speziellen Aussage 1 erhielt man die allgemeine Aussage 2, und diese ist richtig.

1. 140 ist durch 5 teilbar.
2. Alle dreistelligen Zahlen sind durch 5 teilbar.

Aus der speziellen Aussage 1 entstand die allgemeine Aussage 2. Diese Aussage ist jedoch falsch.

Es fragt sich nun, wie die Induktion in der Mathematik zu handhaben ist, damit man richtige Folgerungen erhält. Die Antwort auf diese Frage soll in dieser Broschüre gegeben werden.

1. Wir wollen zunächst zwei Beispiele für eine in der Mathematik unzulässige Induktion betrachten.

Beispiel 1. Es sei

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Man bestätigt leicht, dass

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

ist. Auf Grund der erhaltenen Ergebnisse behaupten wir, dass für jede natürliche Zahl  $n$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

ist.

Beispiel 2. Wir betrachten das von dem Mathematiker L. Euler, einem der ersten Mitglieder der Berliner und der Petersburger Akademie, angegebene Trinom  $x^2 + x + 41$ . Setzen wir in diesem Trinom für  $x$  die Zahl Null, so erhalten wir die Primzahl 41. Setzen wir dann in dem gleichen Trinom  $x$  gleich Eins, so erhalten wir wiederum eine Primzahl, und zwar 43.

Lassen wir in dem Trinom  $x$  die Folge 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 durchlaufen, so erhalten wir die Primzahlen 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. Auf Grund dieser Ergebnisse könnten wir behaupten, dass man stets eine Primzahl erhält, wenn man in diesem Trinom für  $x$  eine ganze nichtnegative Zahl einsetzt.

Warum ist die in diesen Beispielen angeführte Überlegung in der Mathematik unzulässig ? Worin liegt die Unzulänglichkeit unserer Schlussfolgerungen ?

Bei diesen Überlegungen machten wir eine allgemeine Aussage über jedes  $n$  (bzw. jedes  $x$  im 2. Beispiel) lediglich auf Grund dessen, dass sich diese Aussage für gewisse Werte von  $n$  (bzw.  $x$ ) als richtig erwies.

Man wendet die Induktion in der Mathematik sehr oft an, aber man muss sie auch richtig anwenden, da man bei leichtfertiger Verwendung der Induktion zu unrichtigen Schlussfolgerungen gelangen kann.

So wird sich zwar unsere in Beispiel 1 aufgestellte allgemeine Aussage - wie später im Beispiel 5 bewiesen werden soll - als richtig, unsere allgemeine Aussage von Beispiel 2 dagegen als falsch herausstellen.

In der Tat ergibt sich bei aufmerksamer Untersuchung, dass das Trinom  $x^2 + x + 41$  für  $x = 0, 1, 2, \dots, 39$  Primzahlen liefert, dass dieses Trinom aber für  $x = 40$  gleich  $41^2$ , d.h. gleich einer zusammengesetzten Zahl ist.

2. Im Beispiel 2 begegneten wir einer Aussage, die sich in 40 Fällen als richtig, im allgemeinen aber als falsch erwies.

Wir wollen deshalb noch 2 Beispiele anführen, in denen die Aussagen in gewissen speziellen Fällen richtig, allgemein jedoch falsch sind.

Beispiel 3. Das Binom  $x^n - 1$  ( $n$  eine natürliche Zahl) ist für die Mathematiker von großem Interesse, da es mit der geometrischen Aufgabe der Teilung des Kreises in  $n$  gleiche Teile eng verknüpft ist. Es ist daher nicht verwunderlich, dass dieses Binom in der Mathematik allseitig untersucht wird.

Insbesondere interessiert die Mathematiker die Frage der Zerlegung dieses Binoms in Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten.

Bei der Betrachtung dieser Zerlegung bei vielen speziellen Werten von  $n$  stellten die Mathematiker fest, dass die absoluten Beträge aller Koeffizienten bei einer Zerlegung die Zahl Eins nicht übertreffen. Es gelten nämlich die Identitäten

$$\begin{aligned}x - 1 &= x - 1, \\x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1), \\x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1), \\x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1), \\x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1), \\x^6 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\&= \dots\end{aligned}$$

Es wurden Tabellen aufgestellt, innerhalb deren die Koeffizienten auch die genannte Eigenschaft besaßen. Versuche aber, diese Tatsache für jedes  $n$  zu beweisen, schlugen fehl.

Im Jahre 1938 erschien darauf in der Zeitschrift 'Fortschritte der mathematischen Wissenschaften', Heft IV, eine Veröffentlichung des hervorragenden sowjetischen Mathematikers und korrespondierenden Mitglieds der Akademie der Wissenschaften der UdSSR N. G. Tschebortarew, in der er die sowjetischen Mathematiker aufforderte, dieses Problem zu lösen.

Diese Aufgabe löste W. Iwanow. Es zeigte sich, dass die erwähnte Eigenschaft allen Binomen  $x^n - 1$  zukommt, deren Grad kleiner als 105 ist. Einer der Faktoren von  $x^{105} - 1$  aber ist das Polynom

$$\begin{aligned}&x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} \\&\quad - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 \\&\quad - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1\end{aligned}$$

das diese Eigenschaft nicht mehr besitzt.

Beispiel 4. Wir betrachten die Zahlen  $2^{2^n} + 1$ . Für  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  erhalten wir mit  $2^{2^0} + 1 = 3$ ,  $2^{2^1} + 1 = 5$ ,  $2^{2^2} + 1 = 17$ ,  $2^{2^3} + 1 = 257$  und  $2^{2^4} + 1 = 65537$  sämtlich Primzahlen. P. Fermat, bedeutender französischer Mathematiker des 17. Jhs., vermutete, dass alle so gebildeten Zahlen prim sind. Im 18 Jh. fand L. Euler, dass  $2^{2^5} + 1$

zusammengesetzt ist:

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

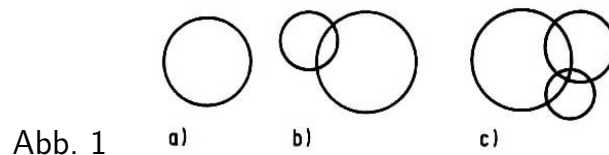
(Der junge C.F. Gauß erkannte schließlich die Bedeutung der in der Form  $2^{2^n} + 1$  darstellbaren Primzahlen, der Fermatschen Primzahlen, für die Theorie der mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen regelmäßiger  $n$ -Ecke; speziell ist ein regelmäßiges  $p$ -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn  $p$  Fermatsche Primzahl ist).

Beispiel 5. Der bedeutende deutsche Mathematiker des 17. Jhs.. Mitbegründer der Differential- und Integralrechnung, G. W. Leibniz bewies, dass für jede positive ganze Zahl  $n$  die Zahl  $n^3 - n$  durch 3,  $n^5 - n$  durch 5 und  $n^7 - n$  durch 7 teilbar ist (vgl. Aufgabe 27 in [17]). Daraufhin vermutete er, dass für jede ungerade Zahl  $k$  und für jede positive ganze Zahl  $n$  die Zahl  $n^k - n$  durch  $k$  teilbar sei, aber bald merkte er selbst, dass  $2^9 - 2 = 510$  nicht durch 9 teilbar ist.

Beispiel 6. Ähnlich erging es dem bekannten sowjetischen Mathematiker D. A. Grave, als er vermutete, dass  $2^{p-1} - 1$  für Primzahlen  $p$  nicht durch  $p^2$  teilbar sei. Umgehend wurde die Vermutung für alle Primzahlen  $p < 1000$  bestätigt.

Aber bald wurde entdeckt, dass  $2^{1092} - 1$  durch  $1093^2$  teilbar ist (1093 ist eine Primzahl). Somit musste die Vermutung Graves aufgegeben werden.

Beispiel 7. Es ist die größtmögliche Zahl der Teile zu finden, in die eine Ebene durch  $n$  Kreise zerlegt werden kann.



Es ist klar, dass diese Zahl 2 für  $n = 1$  (Abb. 1a), 4 für  $n = 2$  (Abb. 1b) und 8 für  $n = 3$  (Abb. 1c) ist. Es ist natürlich zu erwarten, dass auch im folgenden jedes Mal ein Kreis so gelegt werden kann, dass er alle früher erhaltenen Teile in zwei Teile zerlegt; unter dieser Voraussetzung verdoppelte sich die Anzahl der Teile bei Hinzunahme eines weiteren Kreises, ergäben sich bei  $n$  Kreisen  $2^n$  Teile.

Aber diese Annahme ist falsch, denn die größte Zahl von Teilen, in die man eine Ebene durch vier Kreise zerlegen kann, ist 14 und nicht 16; für  $n$  Kreise ist die gesuchte Zahl  $n^2 - n + 2$ .

Beispiel 8. In wieviel Teile wird der Raum durch  $n$  Ebenen, die durch einen Punkt gehen, zerlegt, wenn keine drei von ihnen eine Schnittgerade gemeinsam haben ?

Wir betrachten die einfachsten Spezialfälle dieses Problems.

Eine Ebene zerlegt den Raum in 2 Teile. Zwei durch einen Punkt gehende Ebenen zerlegen den Raum in 4 Teile. Drei Ebenen, die einen Punkt, aber keine Gerade gemeinsam haben, zerlegen den Raum in 8 Teile.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, dass bei Vergrößerung der Anzahl der Ebenen um Eins der Raum in die doppelte Anzahl von Teilräumen zerlegt würde und dass daher



vier Ebenen den Raum in 16 Teile, fünf in 32 Teile usw. zerlegen, allgemein, dass  $n$  Ebenen den Raum in  $2^n$  Teile zerlegen.

In Wirklichkeit ist es jedoch nicht so, denn 4 Ebenen zerlegen den Raum in 14 Teile, 5 Ebenen in 22 Teile. Allgemein gilt, dass  $n$  Ebenen den Raum in  $(n - 1)n + 2$  Teile zerlegen.<sup>1</sup>

Beispiel 9. Wir führen noch ein überzeugendes Beispiel an.

Wir berechnen  $991n^2 + 1$  für  $n = 1, 2, 3$ , und erhalten kein Quadrat, auch wenn wir (ohne Hilfsmittel; Anm. d. Red.) Tage oder gar Jahre der Berechnung opfern. Aber wenn wir hieraus schließen, dass es unter diesen Zahlen keine Quadrate gäbe, dann irren wir.

Denn es erweist sich, dass sich unter den Zahlen  $991n^2 + 1$  auch Quadrate befinden, jedoch ist die kleinste natürliche Zahl, für welche  $991n^2 + 1$  quadratisch ist, sehr groß:

$$n = 12055735790331359447442538767$$

Die betrachteten Beispiele erlauben den einfachen, aber gleichzeitig auch wichtigen Schluss:

Eine Aussage kann in einer ganzen Reihe spezieller Fälle richtig und trotzdem allgemein falsch sein.

§ 3. Es entsteht jetzt folgende Frage: Eine Aussage sei in einigen speziellen Fällen richtig; alle Fälle können jedoch unmöglich untersucht werden; wie kann man erkennen, ob diese Aussage allgemein richtig ist?

Diese Frage kann mit Hilfe einer besonderen Methode, der sogenannten Methode der vollständigen Induktion (Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ ) manchmal gelöst werden.

Diese Methode beruht auf dem Prinzip der vollständigen Induktion, des in Folgendem besteht:

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl  $n$  richtig, wenn sie

- 1) für  $n = 1$  richtig ist und wenn
- 2) aus der Richtigkeit der Aussage für eine willkürliche natürliche Zahl  $n = k$  die Richtigkeit für  $n = k + 1$  folgt.

Beweis. Wir nehmen an, die Aussage sei nicht für jede natürliche Zahl  $n$  richtig. Es würde dann eine natürliche Zahl  $m$  existieren mit der Eigenschaft, dass

- 1) die Aussage für  $n = m$  falsch.
- 2) für jedes  $n$ , das kleiner als  $m$  ist, die Aussage richtig ist. (Mit anderen Worten:  $m$  wäre die erste natürliche Zahl, für welche die Aussage falsch ist.)

Offenbar wäre  $m > 1$ , da für  $n = 1$  die Aussage richtig ist (Bedingung 1). Folglich wäre  $m - 1$  eine natürliche Zahl. Daraus ergäbe sich weiter, dass für die natürliche Zahl  $m - 1$  die Aussage richtig, aber für die nachfolgende natürliche Zahl  $m$  falsch wäre. Dies widerspräche der Bedingung 2.

Bemerkung. Beim Beweis des Prinzips der vollständigen Induktion haben wir benutzt,

---

<sup>1</sup>Lösung siehe Aufgabe 30.

dass in jeder Menge natürlicher Zahlen eine kleinste enthalten ist. Es ist leicht zu sehen, dass diese Eigenschaft ihrerseits als Folgerung aus dem Prinzip der vollständigen Induktion abgeleitet werden kann. Somit sind beide Aussagen äquivalent. Jede von ihnen kann man als Axiom ansehen, welches die Folge der natürlichen Zahlen definiert; die andere ist dann ein Satz. Gewöhnlich nimmt man als Axiom das Prinzip der vollständigen Induktion selbst.

§ 4. Einen auf dem Prinzip der vollständigen Induktion beruhenden Beweis nennt man Beweis durch vollständige Induktion. Ein derartiger Beweis muss notwendigerweise aus zwei Teilen bestehen, aus dem Beweis der beiden voneinander unabhängigen Sätze:

Satz 1. Die Aussage ist für  $n = 1$  richtig.

Satz 2. Die Aussage ist für  $n = k + 1$  richtig, wenn sie für  $n = k$  richtig ist, wobei  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist.

Sind diese beiden Sätze bewiesen, so ist auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion die Aussage für jedes natürliche  $n$  richtig.

Beispiel 10. Man berechne die Summe (vgl. Beispiel 1)

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Wir wissen, dass

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad S_3 = \frac{3}{4} \quad , \quad S_4 = \frac{4}{5}$$

ist.

Jetzt wollen wir den Fehler, den wir im Beispiel 1 zuließen, nicht wiederholen und nicht gleich behaupten, für jedes natürliche  $n$  sei

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Wir sind vorsichtig und sagen, die betrachteten  $S_1, S_2, S_3, S_4$  würden die Vermutung nahelegen, dass die Beziehung  $S_n = \frac{n}{n+1}$  für jedes natürliche  $n$  gilt. Gleichzeitig wissen wir, dass diese Vermutung für  $n = 1, 2, 3, 4$  richtig ist. Zum Beweis der Allgemeingültigkeit jener Vermutung wollen wir nun die Methode der vollständigen Induktion benutzen.

Satz 1. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig, da  $S_1 = \frac{1}{2}$  ist.

Satz 2. Wir nehmen an, die Vermutung sei für  $n = k$  richtig, d.h., es sei

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

wobei  $k$  eine natürliche Zahl ist. Wir zeigen, dass dann die Vermutung auch für  $n = k+1$  richtig ist. d.h., dass

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

gilt.

In der Tat ist

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

und folglich nach Induktionsannahme

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Damit sind beide Sätze bewiesen. Auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion gilt also die Aussage, dass für jede natürliche Zahl  $n$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

ist.

Bemerkung 1. Es ist notwendig, zu betonen, dass ein Beweis durch vollständige Induktion unbedingt den Beweis der beiden Sätze 1 und 2 verlangt.

Wir sahen schon, zu welchem Ergebnis die Nichtbeachtung des Satzes 2 führt (Beispiel 2). Nunmehr zeigen wir, dass auch Satz 1 niemals weggelassen werden darf. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 11. Behauptung. Jede natürliche Zahl ist der ihr folgenden natürlichen Zahl gleich.

Wir "beweisen" dies durch vollständige Induktion. Wir nehmen dazu an, es sei

$$k = k + 1 \tag{1}$$

und beweisen, dass dann

$$k + 1 = k + 2 \tag{2}$$

gilt.

In der Tat erhalten wir, wenn wir auf jeder Seite der Gleichung (1) eine 1 addieren, die Gleichung (2). Hieraus folgt: Ist die Aussage für  $n = k$  richtig, so ist sie auch für  $n = k + 1$  richtig, und die Behauptung wäre bewiesen.

Folgerung. Alle natürlichen Zahlen sind einander gleich.

Wo ist hier aber der Fehler? Der Fehler liegt darin, dass der erste der für die Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion notwendigen Sätze hier nicht bewiesen wurde und auch gar nicht richtig ist, dass vielmehr nur der zweite Satz bewiesen wurde.

Die Sätze 1 und 2 haben beide ihre spezielle Bedeutung.

Satz 1 schafft sozusagen die Basis für die Durchführung der vollständigen Induktion. Satz 2 liefert die Berechtigung der automatischen Ausdehnung (Verbreiterung) dieser Basis, die Berechtigung für den Übergang von dem gegebenen speziellen Fall zu dem folgenden, von  $n$  auf  $n + 1$  (daher die Bezeichnung "Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ "; d. Red.)

Ist Satz 1 nicht bewiesen, wohl aber Satz 2 (siehe Beispiel 6), so ist die Basis für die

Anwendung der Induktion nicht geschaffen; daher ist es sinnlos, Satz 2 anwenden zu wollen, da eigentlich nichts zum Verbreitern vorhanden ist.

Wurde aber Satz 2 nicht bewiesen, sondern nur Satz 1 gezeigt (vgl. Beispiel 1 und 2), so fehlt die Berechtigung für eine Verallgemeinerung, obgleich die Basis für die Anwendung der Induktion vorhanden ist.

Bemerkung 2. Die vollständige Induktion wurde im vorstehenden für einfachste Fälle untersucht. In komplizierteren Fällen müssen die Formulierungen der Sätze 1 und 2 entsprechend geändert werden.

Bisweilen stützt sich der zweite Teil des Beweises auf die Richtigkeit der Aussage nicht nur für  $n = k$ , sondern auch für  $n = k - 1$ . In diesem Falle muss die Aussage im ersten Teil für zwei aufeinanderfolgende Werte von  $n$  bewiesen werden (siehe später Aufgabe 18).

Manchmal kann man eine Aussage nicht für alle natürlichen  $n$ , wohl aber für alle ganzen  $n$ , die oberhalb einer gewissen ganzen Zahl  $m$  liegen, beweisen. In diesem Fall verifiziert man im ersten Teil des Beweises die Aussage für  $n = m + 1$  und, wenn dies notwendig ist, auch für gewisse nachfolgende Werte von  $n$ ; (vgl. Beispiel 10).

§ 5. Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir zur Klärung einer wesentlichen Seite der vollständigen Induktion noch einmal auf Beispiel 1 zurückkommen.

Als wir die Summe

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

für verschiedene Werte von  $n$  untersuchten, berechneten wir

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad S_3 = \frac{3}{4} \quad , \quad S_4 = \frac{4}{5}, \dots$$

Dies führte uns zu der Vermutung, dass für jedes  $n$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

gilt. Zum Beweis dieser Vermutung benutzten wir die vollständige Induktion.

Wir hatten Glück und sprechen eine Vermutung aus, die sich dann auch bestätigte. Hätten wir eine sich als falsch erweisende Vermutung aufgestellt, so hätte sich der Fehler beim Beweis des Satzes 2 gezeigt.

Beispiel 12. Wir wissen, dass

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (1)$$

ist. Nehmen wir an, wir hätten

$$S_n = \frac{n+1}{3n+1} \quad (2)$$

vermutet.

Für  $n = 1$  ist die Formel (2) richtig, da  $S_1 = \frac{1}{2}$ . Nehmen wir an, die Formel (2) sei für  $n = k$  richtig, d.h., es gelte

$$S_k = \frac{k+1}{3k+1}$$

Wir versuchen nun zu zeigen, dass die Formel (2) dann auch für  $n = k+1$  richtig ist, d.h., dass

$$S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}$$

gilt. Nun ist aber

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^3 + 4k^2 + 8k + 3}{(k+1)(k+2)(3k+1)}$$

d.h., wir finden ein anderes als das erwartete Resultat. Die beiden Ausdrücke für  $S_{k+1}$  sind nicht identisch; setzt man sie gleich, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für  $k$ , die keine reellen Lösungen hat.

Also folgt aus der Richtigkeit der Formel (2) für  $n = k$  nicht die für  $n = k+1$ . Wir haben vielmehr gefunden, dass die Formel (2) falsch ist.

Daher gestattet die vollständige Induktion, die bei der Suche nach einem allgemeinen Gesetz entstehenden Vermutungen zu prüfen, falsche zu verwerfen und richtige zu bestätigen.

Um die vollständige Induktion anwenden zu lernen, muss man eine genügende Anzahl von Aufgaben betrachten.

Um die Bezeichnungen "Satz 1" und "Satz 2" nicht immer wiederholen zu müssen, vereinbaren wir, im folgenden den ersten und zweiten Teil eines Induktionsbeweises mit 1. bzw. 2. zu bezeichnen (diese Teile bilden den Inhalt zweier Sätze, deren Beweis der Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion gleichwertig ist).

Außerdem werden wir Beispiele und Aufgaben unterscheiden; den Beispielen folgen genaue Lösungen, die Aufgaben sind für die selbständige Arbeit gedacht. Für sie sind am Ende des Büchleins die Lösungen oder Lösungshinweise angegeben, mitunter auch nur Hinweise auf andere leicht verständliche Literatur.

# 1 Vollständige Induktion in Arithmetik und Algebra

## 1.1 Beweise von Gleichungen, arithmetische Aufgaben

Beispiel 1. Wir schreiben die ungeraden Zahlen der Größe nach auf; 1, 3, 5, 7, ... Die erste bezeichnen wir mit  $u_1$  die zweite mit  $u_2$  die dritte mit  $u_3$  usw., d.h., wir wollen

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 5, \quad u_4 = 7, \quad \dots$$

setzen. Jetzt stellen wir uns die Aufgabe, eine Formel zu finden, welche die ungeraden Zahlen  $u_n$  durch ihre Indizes  $n$  ausdrückt.

Lösung. Die erste ungerade Zahl  $u_1$  kann man in der Form

$$u_1 = 2 \cdot 1 - 1 \tag{1}$$

schreiben, die zweite ungerade Zahl  $u_2$  in der Form

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1 \tag{2}$$

die dritte ungerade Zahl  $u_3$  in der Form

$$u_3 = 2 \cdot 3 - 1 \tag{3}$$

usw.

Bei aufmerksamer Betrachtung der Gleichungen (1), (2), (3) gelangt man zu der Annahme, dass man jede ungerade Zahl erhält, wenn man ihren Index mit 2 multipliziert und davon 1 subtrahiert, d.h., für die  $n$ -te ungerade Zahl gilt die Formel,

$$u_n = 2 \cdot n - 1 \tag{4}$$

Wir wollen beweisen, dass diese Formel richtig ist.

1. Die Gleichung (1) zeigt, dass die Formel (4) für  $n = 1$  richtig ist.
2. Wir nehmen an, die Formel (4) sei für  $n = k$  richtig. d.h., die  $k$ -te ungerade Zahl besitze die Form

$$u_k = 2k - 1$$

Wir beweisen, dass die Formel (4) dann auch für die  $(k + 1)$ -te ungerade Zahl richtig sein muss, d.h., dass diese die Form

$$u_{k+1} = 2(k + 1) - 1$$

oder, was das gleiche ist,

$$u_{k+1} = 2k + 1$$

haben muss.

Um die  $(k + 1)$ -te ungerade Zahl zu erhalten, genügt es, zur  $k$ -ten ungeraden Zahl die

Zahl 2 zu addieren, d.h.  $u_{k+1} = u_k + 2$  zu bilden. Nach Annahme ist  $u_k = 2k - 1$ . Daher gilt

$$u_{k+1} = (2k - 1) + 2 = 2k + 1$$

was zu beweisen war.

Ergebnis:  $u_n = 2n - 1$ .

Beispiel 2. Man berechne die Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen.

Lösung. Wir wollen die gesuchte Summe mit  $S_n$  bezeichnen, also

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es in der Mathematik eine bestimmte Formel. Für uns ist es aber interessant, nicht auf eine fertige Formel zurückzugreifen, sondern zur Lösung dieser Aufgabe vollständige Induktion zu benutzen. Dazu ist es zunächst notwendig, eine Vermutung aufzustellen, d.h. zu versuchen, die Lösung zu erraten.

Wir lassen  $n$  die Werte 1, 2, 3, ... durchlaufen, bis wir das nötige Material gesammelt haben, um auf dieser Grundlage eine mehr oder weniger aussichtsreiche Vermutung aufstehen zu können. Danach ist dann noch diese Vermutung durch vollständige Induktion zu beweisen.

Es ist

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 9, \quad S_4 = 16, \quad S_5 = 25, \quad S_6 = 36$$

Jetzt hängt alles von der Beobachtungsgabe des Studierenden ab, von seiner Fähigkeit, aus den speziellen Werten die allgemeine Lösung zu folgern.

Wir glauben, dass man in den gegebenen Fällen sehr schnell

$$S_1 = 1^2, \quad S_2 = 2^2, \quad S_3 = 3^2, \quad S_4 = 4^2$$

bemerkt. Auf Grund dessen kann man dann annehmen, dass allgemein  $S_n = n^2$  gilt. Dass diese Annahme richtig ist, wollen wir jetzt beweisen.

1. Für  $n = 1$  besteht die Summe aus der Zahl 1. Der Ausdruck  $n^2$  ist für  $n = 1$  ebenfalls gleich 1. Folglich ist die Annahme für  $n = 1$  richtig.

2. Wir nehmen an, die Vermutung sei für  $n = k$  richtig, d.h., es sei  $S_k = k^2$ . Wir beweisen, dass die Vermutung dann auch für  $n = k + 1$  richtig sein muss, d.h.

$$S_{k+1} = (k + 1)^2$$

ist. In der Tat ist

$$S_{k+1} = S_k + (2k + 1)$$

Da aber  $S_k = k^2$  ist, gilt

$$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

was zu beweisen war.

Ergebnis:  $S_n = n^2$ .

Aufgabe 1. Man bestimme das allgemeine Glied  $u_n$ , wenn  $u_1 = 1$  und für jede natürliche Zahl  $k > 1$  die Beziehung

$$u_k = u_{k-1} + 3$$

gilt.

Hinweis:  $u_1 = 3 \cdot 1 - 2$ ,  $u_2 = 3 \cdot 2 - 2$ .

Aufgabe 2. Man bestimme die Summe

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

Hinweis: 1)  $S_1 = 2 - 1$ ;  $S_2 = 2^2 - 1$ ;  $S_3 = 2^3 - 1$ , oder 2) man betrachte  $2S_n - S_n$ .

Beispiel 3. Man beweise, dass die Summe der ersten  $n$  Zahlen der natürlichen Zahlenfolge gleich  $\frac{n(n-1)}{2}$  ist.

Lösung. Diese Aufgabe unterscheidet sich von den vorhergehenden dadurch, dass es hier nicht nötig ist, eine Vermutung aufzustellen; sie ist gegeben. Es ist nur zu zeigen, dass diese Vermutung richtig ist.

Wir bezeichnen die gesuchte Summe mit  $S_n$ , d.h., es ist

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

1. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig.

2. Es sei

$$S_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Wir beweisen, dass

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ist. In der Tat gilt

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Beispiel 4. Man beweise, dass die Summe der Quadrate der ersten  $n$  Zahlen der natürlichen Zahlenfolge gleich  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ist.

Lösung. Es sei  $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ .

1.  $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

2. Es sei  $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Dann ist

$$S_2(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$



und schließlich

$$S_2(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

Beispiel 5. Man beweise

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

Lösung. 1. Für  $n = 1$  ist die Annahme offenbar richtig ( $(-1)^0 = 1$ ).

2. Es sei

$$S_k = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$$

Wir beweisen, dass

$$S_{k+1} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

gilt. In der Tat ist

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 = \\ &= (-1)^k \left[ (k+1) - \frac{k}{2} \right] (k+1) = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Man beweise

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Aufgabe 4. Man beweise, dass die Summe der Kuben der ersten  $n$  natürlichen Zahlen gleich  $\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$  ist.

Aufgabe 5. Man beweise

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

Beispiel 6. Man beweise

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Lösung. 1.  $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$

2. Wenn

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

gilt, dann ist

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n + n \cdot (n+1) &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Das Beispiel 6 kann wegen

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n &= 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots \\ &\quad + (n-1)[(n-1)+1] \\ &= [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + [1 + 2 + \dots + (n-1)] \end{aligned}$$

auch auf die Beispiele 3 und 4 zurückgeführt werden.

Aufgabe 6. Man beweise

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Aufgabe 7. Man beweise

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Aufgabe 8. Man beweise

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Aufgabe 9. Man beweise

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Aufgabe 10. Man beweise

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

Aufgabe 11. Man beweise

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

Beispiel 7. Man beweise, dass  $v_n = 2^n + 1$  ist, wenn  $v_0 = 2$ ,  $v_1 = 3$  und für jedes natürliche  $k$  die Beziehung

$$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$$

gilt.

Lösung. Für  $n = 0$  und  $n = 1$  ist die Aussage nach Voraussetzung richtig. Nehmen wir an, es sei

$$v_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \quad ; \quad v_k = 2^k + 1$$

denn gilt

$$v_{k+1} = 3(2^k + 1) + 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1$$

Aufgabe 12. Man beweise, dass

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

ist, wenn

$$u_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} \quad ; \quad u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

und. für jedes natürliche  $k > 2$  die Beziehung

$$u_k = (\alpha + \beta)u_{k-1} - \alpha\beta u_{k-2}$$

gilt.

Beispiel 8. Das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  bezeichnet man mit dem Zeichen  $n!$  (lies "n-Fakultät"). Es gilt:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$ .

Man berechne

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$$

Lösung.

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$$

$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$$

$$S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$$

Bei einer genauen Betrachtung dieser Ergebnisse bemerkt man, dass

$$S_1 = 2! - 1, \quad S_2 = 3! - 1, \quad S_3 = 4! - 1, \quad S_5 = 5! - 1$$

ist. Dies gibt zu der Vermutung Anlass, dass

$$S_n = (n + 1)! - 1$$

gilt. Wir wollen diese Annahme beweisen.

1. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig, da

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 2! - 1$$

ist.

2. Es sei

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$$

wir zeigen

$$S_{k+1} = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1) \cdot (k+1)! = [(k+1)! - 1] + (k+1) \cdot (k+1)! = \\ &= (k+1)! [1 + (k+1)] - 1 = (k+1)! (k+2) - 1 = (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Man beweise die Identität

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

Beispiel 9. Es sei

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = a, \quad A_2 = m - \frac{a}{m-1}$$

$$A_3 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}, \quad A_4 = m - \frac{a}{m - \frac{a}{m - \frac{a}{m-1}}}, \quad \text{usw.}$$

gegeben, d.h. für  $k > 1$  gelte

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \quad (m \neq 1, \alpha \neq \beta)$$

Man beweise

$$A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})} \quad (1)$$

Lösung. 1. Wir beweisen zunächst, dass die Formel (1) für  $n = 2$  richtig ist. Nach Voraussetzung gilt

$$A_2 = m - \frac{a}{m-1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta) - 1} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - 1}$$

Nach Formel (1) ist

$$A_2 = \frac{(\alpha - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}$$

Kürzt man diesen Bruch durch  $\alpha - \beta$ , so erhält man

$$A_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - 1}$$

was zu beweisen war.

2. Die Formel (1) sei für  $n = k$  richtig, d.h., es gelte

$$A_k = \frac{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)}{(\alpha^k - \beta^k) - (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})} \quad (2)$$

Wir beweisen, dass sie denn auch für  $n = k + 1$  richtig sein muss, d.h.

$$A_{k+1} = \frac{(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}) - (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)}$$

ist. In der Tat, es ist

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \quad \text{oder} \quad A_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{A_k}$$

Benutzt man die Gleichung (2), so erhält man

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta[(\alpha^k - \beta^k)(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)} \\ &= \frac{(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}) - (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)} \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 14. Man vereinfache das Polynom

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

Ergebnis: 
$$(-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}$$

Beispiel 10. Man beweise, dass man jeden Rubelbetrag, der größer als 7 ist, mit Geldscheinen im Werte von 3 und 5 Rubel bezahlen kann, ohne dass herausgegeben werden muss.

Lösung. Für 8 Rubel ist die Aussage richtig.

Die Aussage sei für  $k$  Rubel richtig, wobei  $k$  eine ganze Zahl größer oder gleich 8 ist. Es sind zwei Fälle möglich: 1)  $k$  Rubel werden ausschließlich in 3-Rubelscheinen bezahlt und 2)  $k$  Rubel werden in Geldscheinen bezahlt, unter denen sich mindestens ein 5-Rubelschein befindet.

Im ersten Falle dürfen es nicht weniger als drei 3-Rubelscheine sein, da in diesem Falle  $k > 8$  ist. Um  $k + 1$  Rubel zu bezahlen, müssen wir drei 3-Rubelscheine durch zwei 5-Rubelscheine ersetzen.

Im zweiten Falle müssen wir einen 5-Rubelschein durch zwei 3-Rubelscheine ersetzen, um  $k + 1$  Rubel zu bezahlen.

Beispiel 11. Man zeige, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist.

Lösung. Die Summe  $1^3 + 2^3 + 3^3$  ist durch 9 teilbar. Folglich ist die Behauptung richtig, falls die erste der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gleich 1 ist.

Sei nun die Summe  $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ , wobei  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist, durch 9 teilbar. Die Summe

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$$

lässt sich aber in zwei Summanden zerlegen, von denen jeder durch 9 teilbar ist. Sie ist also ebenfalls durch 9 teilbar.

Aufgabe 15. Man zeige, dass für ganze nichtnegative Zahlen  $n$  der Ausdruck

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist.

Beispiel 12. Man wähle aus den  $2n$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n$  beliebig  $(n+1)$  Zahlen aus und beweise, dass unter diesen mindestens zwei sind, von denen eine durch die andere teilbar ist.

Lösung<sup>2</sup>. 1. Wir nehmen an, aus den  $2n$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n$  mit  $n \geq 2$  hätte man  $(n+1)$  Zahlen so aussuchen können, dass keine von diesen Teiler einer anderen ist. Die Menge dieser  $(n+1)$  Zahlen bezeichnen wir zur Abkürzung mit  $M_{n+1}$ . Wir zeigen nun, dass aus den  $2n-2$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n-2$  dann  $n$  Zahlen derart ausgewählt werden könnten, dass wiederum keine von ihnen durch eine andere teilbar ist.

Es sind vier Fälle möglich:

1. In  $M_{n+1}$  sind weder die Zahl  $2n-1$  noch die Zahl  $2n$  enthalten.
2. In  $M_{n+1}$  ist die Zahl  $2n-1$  enthalten, jedoch nicht  $2n$ .
3. In  $M_{n+1}$  ist die Zahl  $2n$  enthalten, jedoch nicht  $2n-1$ .
4. In  $M_{n+1}$  sind sowohl  $2n-1$  als auch  $2n$  enthalten.

Fall 1. Wir nehmen aus  $M_{n+1}$  eine beliebige Zahl heraus. Dann verbleiben in  $M_{n+1}$  noch  $n$  Zahlen, von denen keine größer als  $2n-2$  ist. Keine dieser Zahlen ist durch eine andere teilbar.

Fall 2. Wir nehmen aus  $M_{n+1}$  die Zahl  $2n-1$  heraus. Unter den restlichen  $n$  Zahlen ist ebenfalls keine größer als  $2n-2$ , und keine von ihnen ist durch eine andere teilbar.

Fall 3. Wir nehmen aus  $M_{n+1}$  die Zahl  $2n$  heraus und kommen wieder zu dem gleichen Ergebnis.

Fall 4. Wir bemerken zunächst, dass in  $M_{n+1}$  die Zahl  $n$  nicht enthalten sein kann, da sonst in  $M_{n+1}$  zwei Zahlen, nämlich  $2n$  und  $n$ , zu finden wären, von denen eine durch die andere teilbar ist. Wir nehmen nun aus  $M_{n+1}$  die Zahlen  $2n-1$  und  $2n$  heraus. Die Menge der restlichen  $n-1$  Zahlen werde mit  $M_{n-1}$  bezeichnet. Wir fügen nun die Zahl  $n$  zu  $M_{n-1}$  hinzu und erhalten  $n$  Zahlen, von denen keine größer als  $2n-2$  ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass unter diesen  $n$  Zahlen keine durch eine andere teilbar ist.

In  $M_{n+1}$  existieren keine zwei Zahlen, von denen eine die andere teilt. Folglich gibt es auch in  $M_{n-1}$  keine solchen Zahlen. Man muss sich nur noch davon überzeugen, dass zwei solche Zahlen auch dann nicht vorhanden sind, wenn wir die Zahl  $n$  zur Menge  $M_{n-1}$  hinzunehmen.

---

<sup>2</sup>Diese Lösungsmethode wurde dem Verfasser von M. Fridmann, einem Studenten des Leningrader staatl. "Herzen-Instituts für Pädagogik" mitgeteilt.

Für diesen Fall genügt es nachzuprüfen, dass 1) keine der Zahlen aus  $M_{n-1}$  durch  $n$  teilbar ist und 2) die Zahl  $n$  nicht durch irgendeine Zahl aus  $M_{n-1}$  teilbar ist.

Dass die erste Forderung erfüllt ist, folgt aus der Tatsache, dass alle Zahlen aus  $M_{n-1}$  nicht größer als  $2n - 2$  sind.

Die zweite folgt daraus, dass die Zahl  $2n$  durch keine der Zahlen aus  $M_{n-1}$  teilbar ist.

Nehmen wir also an, die Behauptung sei für die  $2n$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n$  falsch, so muss sie auch für die  $2(n-1)$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n-2$  falsch sein. Wäre also die Behauptung für die  $2(n-1)$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n-2$  richtig, so müsste sie es auch für die  $2n$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n$  sein.

Für zwei Zahlen  $1, 2$  gilt die Behauptung. Also ist sie auch für  $2n$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n$  gültig, wobei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl sein kann.

Diese Aufgabe kann man auch auf folgende einfache Art lösen:

Wir wählen aus den  $2n$  Zahlen  $1, 2, \dots, 2n$  beliebige  $n+1$  Zahlen aus und bezeichnen die Menge dieser Zahlen mit  $M_{n+1}$ .

Jede gerade Zahl aus  $M_{n+1}$  teilen wir durch eine solche Potenz von 2, dass der Quotient ungerade ist. Aus diesen Quotienten und den ungeraden Zahlen aus  $M_{n+1}$  bilden wir die Menge  $\overline{M}_{n+1}$ . In  $\overline{M}_{n+1}$  sind  $n+1$  ungerade Zahlen enthalten, von denen jede kleiner als  $2n$  ist.

Da es  $n$  positive ungerade Zahlen kleiner als  $2n$  gibt, so muss es in  $\overline{M}_{n+1}$  mindestens zwei gleiche Zahlen geben. Jede dieser gleichen Zahlen bezeichnen wir mit dem Buchstaben  $k$ .

Dieses Ergebnis bedeutet, dass es in  $M_{n+1}$  mindestens zwei Zahlen  $2^s k$  und  $2^t k$  geben muss. Eine von diesen ist jedoch durch die andere teilbar.

Aufgabe 16. Man beweise, dass  $n$  verschiedene Geraden, die in einer Ebene durch einen gemeinsamen Punkt gehen, die Ebene in  $2n$  Teile zerlegen.

Beispiel 13. Man zeige, dass  $n$  Ebenen, die durch einen Punkt gehen, aber so, dass nicht drei von ihnen eine gemeinsame Schnittgerade haben, den Raum in  $A_n = n(n-1) + 2$  Teile zerlegen.

Lösung. 1. Eine Ebene teilt den Raum in zwei Teile, also  $A_1 = 2$ . Für  $n = 1$  gilt also die Behauptung.

2. Wir nehmen an, die Behauptung sei richtig für  $n = k$ , d.h.,  $k$  Ebenen mögen den Raum in  $k(k-1) + 2$  Teile zerlegen. Wir zeigen nun, dass dann  $k+1$  Ebenen den Raum in  $(k+1)k + 2$  Teile zerlegen.

Es sei  $P$  die  $(k+1)$ -te Ebene. Mit jeder der ersten  $k$  Ebenen hat die Ebene  $P$  eine Schnittgerade gemeinsam; sie wird daher durch die  $k$  verschiedenen Geraden, die alle durch einen Punkt gehen, zerlegt. Aus Aufgabe 28 folgt, dass die Ebene  $P$  demnach in  $2k$  Teile zerlegt wird, von denen jeder einen ebenen Winkel mit dem Scheitel im gegebenen Punkt darstellt.

Die ersten  $k$  Ebenen teilen den Raum in gewisse Polyederecken, von denen einige durch die Ebene  $P$  in zwei Teile zerlegt werden.

Die gemeinsame Fläche zweier solcher Teile bildet der Teil der Ebene, welcher von

zwei Strahlen begrenzt wird, längs welcher  $P$  die Flächen der gegebenen Polyederecke schneidet, d.h. einer der  $2k$  ebenen Winkel, in welche die Ebene  $P$  zerlegt wird.

Das bedeutet, dass die Zahl der Polyederecken, die durch die Ebene  $P$  in zwei Teile zerlegt werden, nicht größer als  $2k$  sein kann. Andererseits ist jeder der  $2k$  Teile, in welche die Ebene  $P$  infolge ihres Schnitte mit den ersten  $k$  Ebenen zerlegt wird, die gemeinsame Fläche zweier Polyederecken und teilt folglich die Polyederecke, welche von den ersten  $k$  Ebenen gebildet wird, in zwei Teile.

Die Anzahl der Polyederecken, die durch die Ebene  $P$  in zwei Teile zerlegt werden, kann also auch nicht kleiner als  $2k$  sein.

Die Ebene  $P$  teilt somit genau  $2k$  Teile des Raumes, die von den ersten  $k$  Ebenen erzeugt werden, in zwei Teile. Teilen also  $k$  Ebenen den Raum in  $k(k-1) + 2$  Teile, so zerlegen  $k+1$  Ebenen den Raum in  $[k(k-1) + 2] + 2k = k(k+1) + 2$  Teile. Damit ist die Behauptung bewiesen.

## 1.2 Trigonometrische und algebraische Aufgaben

Beispiel 14. Man beweise die Identität

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin^{2n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$$

Lösung. 1. Für  $n = 0$  ist die Gleichung richtig, da

$$\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$$

gilt.

2. Die Gleichung gelte für  $n = k$ , d.h.

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^k \alpha = \frac{\sin^{2k+1} \alpha}{2^{k+1} \sin \alpha}$$

Dann gilt sie jedoch auch für  $n = k+1$ , denn es ist

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^{k+1} \alpha = \frac{\sin^{2k+1} \alpha \cos 2^{k+1} \alpha}{2^{k+1} \sin \alpha} = \frac{\sin^{2k+2} \alpha}{2^{k+2} \sin \alpha}$$

Beispiel 15. Man zeige, dass  $A_n = \cos n\Theta$  ist, wenn bekannt ist, dass  $A_1 = \cos \Theta$ ,  $A_2 = \cos 2\Theta$  und für jedes natürliche  $k > 2$  die Beziehung

$$A_k = 2 \cos \Theta A_{k-1} - A_{k-2}$$

gilt.

Lösung. 1. Die Behauptung ist richtig für  $n = 1$  und  $n = 2$ .

2. Es sei

$$A_{k-2} = \cos(k-2)\Theta \quad , \quad A_{k-1} = \cos(k-1)\Theta$$



Dann folgt

$$A_k = 2 \cos \Theta \cdot \cos(k-1)\Theta - \cos(k-1)\Theta = \cos k\Theta$$

Beispiel 16. Man beweise die Beziehung

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = \sin \frac{nx}{2}$$

Lösung. 1. Für  $n = 1$  ist die Behauptung richtig.

2. Es gelte

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = \sin \frac{kx}{2}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx + \sin(k+1)x &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin(k+1)x \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + 2 \sin \frac{k+1}{2}x \cos \frac{k+1}{2}x = \frac{\sin \frac{k+2}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(k+1)x}{2} \end{aligned}$$

da

$$2 \cos \frac{k+1}{2}x \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{k+2}{2}x - \sin \frac{kx}{2}$$

Aufgabe 17. Man beweise

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Aufgabe 18. Man beweise die Beziehung

$$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Aufgabe 19. Man beweise die Beziehung

$$\cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos(n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Aufgabe 20. Man beweise die Beziehung

$$\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x \quad (x \neq m\pi)$$

Aufgabe 21. Man beweise die Beziehung

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} 3 + \operatorname{arccot} 5 + \dots + \operatorname{arccot}(2n+1) &= \arctan 2 + \arctan \frac{3}{2} + \dots \\ &\quad + \arctan \frac{n+1}{n} - n \arctan 1 \end{aligned}$$

Beispiel 17. Man beweise die Beziehung

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

Lösung. 1. Für  $n = 1$  ist die Behauptung richtig, da

$$1+i = 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

gilt.

2. Es sei

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}} \left( \cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4} \right)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} (1+i)^{k+1} &= 2^{\frac{k}{2}} \left( \cos \frac{k\pi}{4} + i \sin \frac{k\pi}{4} \right) \cdot 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}} \left( \cos \frac{(k+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(k+1)\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 22. Man beweise

$$(\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

Beispiel 18. Man beweise folgenden Satz:

Erhält man unter Anwendung endlich vieler rationaler Rechenoperationen (d.h. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) auf die komplexen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  die Zahl  $u$ , so kommt man unter Anwendung derselben Operationen auf die konjugiert komplexen Zahlen  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  zur Zahl  $\bar{u}$ , d.h. der zu  $u$  konjugierten.

Lösung. Zunächst beweisen wir, dass die Behauptung für jede der vier Operationen bei zwei komplexen Zahlen erfüllt ist. Es sei  $x_1 = a + bi$  und  $x_2 = c + di$  ( $a, b, c, d$  reell). Dann folgt

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (a+c) + (b+d)i = u \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 &= (a-bi) + (c-di) = (a+c) - (b+d)i = \bar{u} \end{aligned}$$

Auf die gleiche Art lässt sich die Richtigkeit der Behauptung für die Subtraktion, Multiplikation und Division nachweisen.

Es sei jetzt ein gewisser rationaler Ausdruck der komplexen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  gegeben. Die Berechnung dieses Ausdrucks lässt sich bekanntlich auf die sukzessive Ausführung von je einer der vier Rechenoperationen auf zwei komplexe Zahlen zurückführen, wobei diese Operationen nummeriert werden können.

Es sei z.B.

$$u = \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3}$$

Zur Berechnung von  $u$  genügt es, folgende Operationen auszuführen:

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1. $x_1 x_2 = u_1$   | 4. $u_3 - x_3 = u_4$ |
| 2. $x_3 x_4 = u_2$   | 5. $u_1 + u_2 = u_5$ |
| 3. $x_1 + x_2 = u_3$ | 6. $u_5 : u_4 = u$   |

Wir nehmen an, die Behauptung sei richtig für alle Ausdrücke, zu deren Berechnung nicht mehr als  $k$  Operationen erforderlich sind. Unter Operationen verstehen wir hier Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division zweier komplexer Zahlen. Wir zeigen nun, dass dann die Behauptung auch für Ausdrücke gilt, die  $k+1$  Operationen erfordern.

Die letzte,  $(k+1)$ -te Operation führen wir an den Zahlen  $u_i$  und  $u_j$  aus, die selber mittels höchstem  $k$  Operationen berechenbar sind.

Ersetzt man die Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  durch ihre Konjugierten, so gehen die Zahlen  $u_i$  und  $u_j$  in ihre Konjugierten  $\bar{u}_i$  und  $\bar{u}_j$  über.

Denn leistet dies aber auch die Anwendung der  $(k+1)$ -ten Operation auf sie, d.h., auch die Zahl  $u$  geht in ihre Konjugierte  $\bar{u}$  über.

Aufgabe 23. Man zeige, dass für jede natürliche Zahl  $n$  die Beziehung

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

gilt. (Satz von Moivre)

### 1.3 Aufgaben zum Beweis von Ungleichungen

Beispiel 19. Man zeige, dass für jede natürliche Zahl  $n > 1$  die Beziehung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

gilt.

Lösung. Wir bezeichnen die linke Seite der Ungleichung mit  $S_n$ .

1.  $S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24}$ , folglich gilt für  $n = 2$  die Behauptung.

2. Es sei  $S_k > \frac{13}{24}$  für ein gewisses  $k$ . Wir beweisen nun, dass dann auch  $S_{k+1} > \frac{13}{24}$  ist; offenbar ist

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

Subtrahieren wir  $S_k$  von  $S_{k+1}$ , so erhalten wir

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \quad \text{d.h.} \quad S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

Für jede natürliche Zahl  $k$  ist die rechte Seite dieser Gleichung positiv. Daher ist  $S_{k+1} > S_k$ , und da  $S_k > \frac{13}{24}$  ist erst recht  $S_{k+1} > \frac{13}{24}$ .

Aufgabe 24. Man suche den Fehler in dem folgenden Beweis:

Behauptung. Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt die Ungleichung

$$2^n > 2n + 1$$

Beweis. Die Ungleichung möge für  $n = k$  ( $k$  eine natürliche Zahl) erfüllt sein, d.h., es gelte

$$2^k > 2k + 1 \quad (1)$$

Wir beweisen nun, dass dann die Ungleichung auch für  $n = k + 1$  gilt, d.h.

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1 \quad (2)$$

Für jede natürliche Zahl  $k$  ist  $2^k$  nicht kleiner als 2. Wir addieren zur linken Seite der Ungleichung (1) die Zahl  $2^k$ , zur rechten Seite die Zahl 2. Wir erhalten die Ungleichung

$$2^k + 2^k > 2k + 1 + 2$$

oder

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 25. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  gilt die Ungleichung

$$2^n > 2n + 1 \quad ?$$

Beispiel 20. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  gilt die Ungleichung

$$2^n > n^2 \quad ?$$

Lösung.

Für  $n = 1$  ist die Behauptung richtig, da  $2^1 > 1^2$ .

Für  $n = 2$  ist die Behauptung falsch, da  $2^2 = 2^2$ .

Für  $n = 3$  ist die Behauptung falsch, da  $2^3 < 3^2$ .

Für  $n = 4$  ist die Behauptung falsch, da  $2^4 = 4^2$ .

Für  $n = 5$  ist die Behauptung richtig, da  $2^5 > 5^2$ .

Für  $n = 6$  ist die Behauptung richtig, da  $2^6 > 6^2$ .

Anscheinend gilt die Behauptung für  $n = 1$  und für beliebiges  $n > 4$ . Wir wollen dies beweisen.

1. Für  $n = 5$  gilt die Behauptung.

2. Es sei

$$2^k > k^2 \quad (1)$$

erfüllt, wobei  $k$  eine gewisse natürliche Zahl  $> 4$  ist. Wir zeigen nun, dass dann auch

$$2^{k+1} > (k + 1)^2 \quad (2)$$

gilt.

Wir wissen, dass  $2^k > 2k + 1$  für  $k > 4$  ist (Aufgabe 45). Addieren wir also zur linken Seite der Ungleichung (1)  $2^k$ , zur rechten Seite  $2k + 1$ , so erhalten wir die richtige Ungleichung (2).

Antwort.  $2^n > n^2$  für  $n = 1$  und alle  $n > 4$ .

Beispiel 21. Man beweise, dass

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$$

gilt, wenn  $\alpha > -1$ ,  $\alpha \neq 0$  und  $n$  eine natürliche Zahl größer als Eins ist. (Das ist die sog. Bernoullische Ungleichung)

Lösung. 1. Für  $n = 2$  ist die Ungleichung richtig, da  $\alpha^2 > 0$  ist.

2. Die Ungleichung sei für  $n = k$  erfüllt, wobei  $k$  eine gewisse natürliche Zahl ist, d.h., es gelte

$$(1 + \alpha)^k > 1 + k\alpha \quad (1)$$

Wir zeigen nun, dass die Ungleichung dann auch für  $n = k + 1$  gilt, d.h.

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha \quad (2)$$

Nach Voraussetzung ist nämlich  $(1 + \alpha) > 0$ , und daher gilt die Ungleichung

$$(1 + \alpha)^{k+1} > (1 + k\alpha)(1 + \alpha) \quad (3)$$

die man aus der Ungleichung (1) durch Multiplikation jeder ihrer Seiten mit dem Faktor  $(1 + \alpha)$  erhält. Schreiben wir die Ungleichung (3) nun in der Form

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha + k\alpha^2$$

und lassen auf der rechten Seite der letzten Ungleichung den positiven Summanden  $k\alpha^2$  unberücksichtigt, dann erhalten wir die richtige Ungleichung (2).

Aufgabe 26. Man beweise, dass für jede natürliche Zahl  $n > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

gilt.

Aufgabe 27. Man beweise, dass für jede natürliche Zahl  $n > 1$  die Beziehung

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

gilt.

Beispiel 22. Man beweise die Beziehung

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n \quad (1)$$

wenn  $a + b > 0$ ,  $a \neq b$  und  $n$  eine natürliche Zahl größer als 1 ist.

Lösung. 1. Für  $n = 2$  hat die Ungleichung (1) die Form

$$2(a^2 + b^2) > (a + b)^2 \quad (2)$$

Du  $a \neq b$  vorausgesetzt wurde, gilt die Ungleichung

$$(a - b)^2 > 0 \quad (3)$$

Addieren wir auf jeder Seite der Ungleichung (3) den Ausdruck  $(a + b)^2$ , so erhalten wir die Ungleichung (2).

Damit ist gezeigt, dass die Ungleichung (1) für  $n = 2$  richtig ist.

2. Die Ungleichung (1) sei bereits für  $n = k$  richtig, wobei  $k$ : eine beliebige natürliche Zahl ist, d.h., es gelte

$$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a + b)^k \quad (4)$$

Wir zeigen, dass die Ungleichung (1) dann auch für  $n = k + 1$  gültig sein muss, d.h.

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > (a + b)^{k+1} \quad (5)$$

Wir multiplizieren beide Teile der Ungleichung (4) mit  $(a + b)$ . Da nach Voraussetzung  $a + b > 0$  ist, erhalten wir die folgende Ungleichung

$$2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b) > (a + b)^{k+1} \quad (6)$$

Um die Richtigkeit der Ungleichung (5) zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b) \quad (7)$$

oder, was das gleiche ist,

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + a b^k \quad (8)$$

gilt. Die Ungleichung (8) kann nun umgeschrieben werden:

$$(a^k - b^k)(a - b) > 0 \quad (9)$$

Ist  $a > b$ , so ist auch  $a^k > b^k$ , und auf der linken Seite der Ungleichung (9) erhalten wir ein Produkt zweier positiver Zahlen.

Ist  $a < b$ , so ist auch  $a^k < b^k$ , und wir erhalten auf der linken Seite der Ungleichung (9) das Produkt zweier negativer Zahlen. Die Ungleichung (9) ist also in beiden Fällen richtig.

Damit ist gezeigt, dass aus der Richtigkeit der Ungleichung (1) für  $n = k$  ihre Gültigkeit für  $n = k + 1$  folgt.

Beispiel 23. Man zeige, dass für beliebiges  $x > 0$  und für jede natürliche Zahl  $n$  die Ungleichung

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1 \quad (1)$$

gilt.

Lösung. 1a): Für  $n = 1$  besitzt die Ungleichung (1) die Form

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (2)$$

Die Ungleichung (2) folgt aus der trivialen Ungleichung

$$(x - 1)^2 > 0$$

1b): Für  $n = 2$  hat die Ungleichung (1) die Gestalt

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3 \quad (3)$$

Die Ungleichung (2) gilt für beliebiges  $x > 0$ , man kann also  $x$  durch  $x^2$  ersetzen und erhält

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$$

Fügen wir zu jeder Seite der letzten Ungleichung die Zahl 1 hinzu, so erhalten wir die Ungleichung (3).

2) Wir nehmen an, die Ungleichung (1) sei bereits für  $n = k$  bewiesen, wo  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist, d. h., es gelte

$$x^k + x^{k-2} + \dots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k + 1 \quad (4)$$

Wir beweisen nun, dass die Ungleichung (1) dann auch für  $n = k + 2$  erfüllt ist, d.h., dass

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \dots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k + 3 \quad (5)$$

gilt. Ersetzen wir in der Ungleichung (2)  $x$  durch  $x^{k+2}$ , so erhalten wir

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq 2 \quad (6)$$

Addieren wir die beiden Ungleichungen (4) und (6), so bekommen wir die Ungleichung (5).

Fassen wir das Ergebnis kurz zusammen. In 1a) und 1b) haben wir bewiesen, dass die Ungleichung (1) für  $n = 1$  und  $n = 2$  gültig ist, und in 2) zeigten wir, dass aus der Richtigkeit der Ungleichung (1) für  $n = k$  ihre Gültigkeit auch für  $n = k + 2$  folgt. Mit anderen Worten, 2) erlaubt uns den Übergang von  $n = k$  zu  $n = k + 2$ .

Die Ergebnisse von 1a) und 2) geben uns das Recht auszusagen, dass die Ungleichung (1) für jedes ungerade  $n$  erfüllt ist. Genauso folgt aus den Ergebnissen von 1b) und 2) die Richtigkeit der Ungleichung (1) für jedes gerade  $n$ . Die Ungleichung (1) gilt also für jede natürliche Zahl  $n$ .

Beispiel 24. Man beweise folgenden Satz:

Das geometrische Mittel einer gewissen Anzahl positiver Zahlen ist nicht größer als ihr arithmetisches Mittel, (d.h. bei positiven  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gilt

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1)$$

Lösung. 1) Für  $n = 2$  nimmt die Ungleichung (1) die Form

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (2)$$

an. Für beliebige positive  $a_1$  und  $a_2$  gilt die Ungleichung

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

Aus dieser Ungleichung ist aber die Ungleichung (2) leicht herzuleiten.

Die Ungleichung (2) besitzt eine einfache geometrische Bedeutung. Auf der Geraden  $AB$  seien die Abschnitte  $a_1$  und  $a_2$ , nebeneinander abgetragen. Über ihrer Summe als Durchmesser beschreiben wir einen Kreis. Dann ist  $\frac{a_1 + a_2}{2}$  der Radius dieses Kreises und  $\sqrt{a_1 a_2}$  die Hälfte der Sehne, die senkrecht zum Durchmesser durch den gemeinsamen Punkt von  $a_1$  und  $a_2$ , geht. (vgl. Abb. 2 mit  $a_1 = a$  und  $a_2 = b$ )

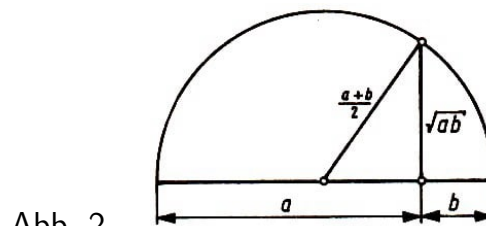


Abb. 2

2) Wir nehmen an, die Ungleichung (1) sei für  $n = k$  richtig. Wir werden zeigen, dass sie dann auch für  $n = 2k$  gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \sqrt[2k]{a_1 a_2 \dots a_{2k}} &= \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}} \leq \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}}{2} \\ &\leq \frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \dots + a_{2k}}{k}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{2k}}{2k} \end{aligned}$$

Die Ungleichung (1) war richtig für  $n = 2$ , ist also dann auch gültig für  $n = 4, 8, 16$  usw., d.h. allgemein für  $n = 2^s$ , wo  $s$  eine natürliche Zahl ist.

3) Um die Richtigkeit der Ungleichung (1) für jedes natürliche  $n$  zu zeigen, beweisen wir, dass aus der Gültigkeit der Ungleichung für  $n = k$  auch ihre Gültigkeit für  $n = k-1$  folgt.

Seien also  $a_1, \dots, a_{k-1}$  gewisse positive Zahlen. Es sei  $\lambda$  eine gewisse, vorläufig unbestimmte Zahl. Dann gilt

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1} \lambda} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \lambda}{k}$$



Wir wählen  $\lambda$  so, dass

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + \lambda}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$$

d.h., wir setzen

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$$

Wir erhalten

$$\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})}{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$$

d.h.

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{k-1}$$

Sei nun  $m$  eine willkürliche natürliche Zahl. Ist  $m = 2^s$ , so ist nach 2) für  $m$  die Ungleichung erfüllt. Ist dagegen  $m \neq 2^s$ , so kann man ein  $s$  finden, so dass  $m < 2^s$  ist, und daraus folgt auf Grund von 2) und 3) die Richtigkeit der Ungleichung auch für  $n = m$ .

Dieser hübsche Beweis stammt von A. Cauchy, 1789-1857.

## 1.4 Beweis einiger Sätze der elementaren Algebra und Kombinatorik mittels vollständiger Induktion

Satz 1. Das Quadrat eines Polynome ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder, vermehrt um alle möglichen doppelten Produkte je zweier verschiedener Glieder, d.h.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n) \quad (1)$$

Für  $n = 2$  kann die Formel (1) durch unmittelbares Ausmultiplizieren bewiesen werden. Wir nehmen an, die Formel (1) sei richtig für  $n = k-1$ , d.h., es gelte

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k-1}^2 + 2S$$

wobei  $S$  die Summe aller möglichen Produkte je zweier verschiedener aus den  $a_1, \dots, a_{n-1}$  darstellt. Wir werden zeigen, dass dann auch

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k-1}^2 + a_k^2 + 2S_1$$

gilt, wobei  $S_1$  die Summe aller möglichen Produkte je zweier verschiedener aus den  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$  ist, d.h.

$$S_1 = S + (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})a_k$$

In der Tat gilt dann

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k)^2 &= [(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}) + a_k]^2 \\&= (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})^2 + 2(a_1 + \dots + a_{k-1})a_k + a_k^2 \\&= a_1^2 + \dots + a_{k-1}^2 + 2S + 2(a_1 + \dots + a_{k-1})a_k + a_k^2 \\&= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + 2S_1\end{aligned}$$

Satz 2. Das  $n$ -te Glied einer arithmetischen Reihe kann durch die Formel

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad (1)$$

ausgedrückt werden, wobei  $a_1$  das erste Glied der Reihe und  $d$  die Differenz der Reihe ist.

Für  $n = 1$  ist die Formel (1) richtig.

Wir nehmen an, die Formel (1) gelte auch für  $n = k$ , d.h., es sei

$$a_k = a_1 + d(k - 1)$$

Dann folgt

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k - 1) + d = a_1 + dk$$

d.h., die Formel (1) erweist sich auch für  $n = k + 1$  als richtig.

Satz 3. Das  $n$ -te Glied einer geometrischen Reihe kann in der Form

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (1)$$

dargestellt werden, wobei  $a_1$  das erste Glied und  $q$  der Quotient der Reihe ist.

Für  $n = 1$  ist die Formel (1) richtig.

Es sei

$$a_k = a_1 q^{k-1}$$

Dann folgt

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^k$$

Satz 4. Die Anzahl der Permutationen von  $n$  Elementen wird durch die Formel

$$P_m = m! \quad (1)$$

angegeben.

Zunächst bemerken wir, dass  $P_1 = 1$ , die Formel (1) für  $m = 1$  also gültig ist. Es sei nun  $P_k = k!$ . Wir beweisen nun, dass dann auch

$$P_{k+1} = (k + 1)!$$

gilt. Aus den gegebenen  $k + 1$  Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$  nehmen wir die ersten  $k$  heraus und bilden unter diesen sämtliche möglichen Permutationen. Nach unserer

Annahme ist ihre Anzahl gleich  $k!$ .

In jede dieser Permutationen setzen wir nacheinander das Element  $a_{k+1}$  vor das erste Element, vor das zweite, ..., vor das  $k$ -te, hinter das  $k$ -te. Auf diese Weise erhalten wir aus einer einzigen Permutation von  $k$  Elementen  $k + 1$  Permutationen aus  $k + 1$  Elementen. Insgesamt haben wir also

$$k!(k + 1) = (k + 1)!$$

Permutationen von  $k + 1$  Elementen.

Dabei muss noch geklärt werden:

- 1) Gibt es unter diesen  $(k + 1)!$  Permutationen nicht zwei gleiche ?
- 2) Haben wir auch sämtliche Permutationen von  $k + 1$  Elementen erfasst ?

1) Wir nehmen an, unter den  $(k + 1)!$  Permutationen wären zwei gleiche vorhanden. Wir nennen sie  $p_1$  und  $p_2$ . In der Permutation  $p_1$  stehe das Element  $a_{k+1}$  an der  $s$ -ten Stelle, von links gerechnet. Dann muss auch in  $p_2$  das Element  $a_{k+1}$  an der  $s$ -ten Stelle von links stehen.

Wir nehmen nun aus  $p_1$  und  $p_2$  das Element  $a_{k+1}$  heraus und erhalten zwei gleiche Permutationen von  $k$  Elementen:  $\bar{p}_1$  und  $\bar{p}_2$ .

Es ergibt sich folgendes: Um  $p_1$  und  $p_2$  aus ein und derselben Permutation aus den Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  zu erhalten, muss das Element  $a_{k+1}$  zweimal an dieselbe Stelle gesetzt werden. Dies widerspricht aber der Regel, nach welcher die Permutationen gebildet wurden.

2) Wir nehmen an, eine gewisse Permutation  $p$  von  $k + 1$  Elementen sei von uns nicht erfasst werden. In  $p$  stehe das Element  $a_{k+1}$  an der  $s$ -ten Stelle von links. Wir nehmen aus  $p$  das Element  $a_{k+1}$  heraus und erhalten eine Permutation  $\bar{p}$  aus den ersten  $k$  Elementen.

Das bedeutet aber, dass es zur Bildung von  $p$  genügt, die Permutation  $\bar{p}$  zu nehmen und in ihr das Element  $a_{k+1}$  so einzusetzen, dass es die  $s$ -te Stelle von links einnimmt.

Wir konnten jedoch die Permutation  $\bar{p}$  nicht heranziehen, da alle möglichen Permutationen der ersten  $k$  Elemente bereits erfasst sind. Wir konnten auch nicht  $a_{k+1}$  an der bezeichneten Stelle einsetzen, da wir es sowohl an der ersten, zweiten, ..., als auch der  $(k + 1)$ -ten Stelle von links eingesetzt hatten.

Unsere Permutationen sind also alle verschieden, und jede Permutation von  $k + 1$  Elementen ist erfasst worden.

Aus dem Gesagten folgt also, dass tatsächlich

$$P_{k+1} = (k + 1)!$$

gilt.

Satz 5. Die Anzahl der Kombinationen zu je  $n$  von  $m$  verschiedenen Elementen (unter Berücksichtigung der Anordnung) kann nach der Formel

$$A_m^n = m(m - 1) \dots (m - n + 1) \quad (1)$$

berechnet werden.

Wir stellen zunächst fest, dass  $A_m^1 = m$ , die Formel (1) also, für  $n = 1$  richtig ist. Wir nehmen nun an, die Formel

$$A_m^k = m(m-1)\dots(m-k+1)$$

sei richtig, falls  $k < m$  ist. Wir beweisen nun, dass dann

$$A_m^{k+1} = m(m-1)\dots(m-k)$$

gilt.

Um alle Kombinationen  $(k+1)$ -ter Ordnung von  $m$  Elementen zu erhalten, genügt es, alle Kombinationen  $k$ -ter Ordnung dieser  $m$  Elemente zu nehmen und jeder von ihnen jedes der verbleibenden  $(m-k)$  Elemente als letztes Element hinzuzufügen.

Man überzeugt sich leicht davon, dass die so gebildeten Kombinationen  $(k+1)$ -ter Ordnung von  $m$  Elementen alle verschieden sind und außerdem jede Kombination zu je  $(k+1)$  von  $m$  Elementen erfasst ist. Man erhält also

$$A_m^{k+1} = A_m^k(m-k) = m(m-1)\dots(m-k)$$

Satz 6. Die Anzahl der Kombinationen zu je  $n$  von  $m$  Elementen (ohne Berücksichtigung der Anordnung) wird durch den Ausdruck

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \quad (1)$$

gegeben.

Wir bemerken zunächst, dass  $\binom{m}{1} = m$ , und daher die Formel (1) für  $n = 1$  richtig ist. Nehmen wir an, es gelte

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Wir wollen zeigen, dass dann

$$\binom{m}{k+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)}$$

gilt.

Um alle Kombinationen  $(k+1)$ -ter Ordnung von  $m$  Elementen zu erhalten, schreiben wir alle Kombinationen  $k$ -ter Ordnung von  $m$  Elementen auf und fügen zu jeder von ihnen als  $(k+1)$ -tes Element jedes der  $(m-k)$  restlichen Elemente hinzu.

Es ist klar, dass man auf diese Weise alle Kombinationen  $(k+1)$ -ter Ordnung von  $m$  Elementen erhält, aber jede von ihnen  $(k+1)$ -mal.

Die Kombination  $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$  erhält man nämlich, indem man zur Kombination  $a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$  das Element  $a_1$  hinzunimmt, indem man zur Kombination

$a_1, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$  das Element  $a_2$  hinzufügt usw., schließlich, wenn man zur Kombination  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  das Element  $a_{k+1}$  hinzufügt. Auf diese Weise erhalten wir

$$\binom{m}{k+1} = \binom{m}{k} \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)}$$

Satz 7. Für beliebige Zahlen  $a$  und  $b$  und für jede natürliche Zahl  $n$  gilt die Gleichung

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{s} a^{n-s} b^s + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \quad (1)$$

(der binomische Satz).

Für  $n = 1$  gilt  $a + b = a + b$ , für diesen Fall ist die Gleichung (1) also richtig.

Es sei nun

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + b^k$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k (a+b) = \left( a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \dots + b^k \right) (a+b) \\ &= a_{k+1} + \left( 1 + \binom{k}{1} \right) a^k b + \left( \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right) a^{k-1} b^2 + \dots \\ &\quad + \left( \binom{k}{s} + \binom{k}{s+1} \right) a^{k-s} b^s + \dots + b^{k+1} \end{aligned}$$

Beachten wir, dass

$$\binom{k}{s} + \binom{k}{s+1} = \binom{k+1}{s+1}$$

ist, so ergibt sich

$$(a+b)^{k+1} = a_{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{s+1} a^{k-s} b^s + \dots + b^{k+1}$$

## 1.5 Lösungen

1. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$u_k = 3k - 2$$

Dann folgt

$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 2 + 3 = 3(k+1) - 2$$

2. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$S_k = 2^k - 1$$

Dann folgt

$$S_{k+1} = S_k + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

3. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es gelte

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Dann folgt

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

4. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left[ \frac{k(k+1)}{2} \right]^2$$

Dann folgt

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

5. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

Dann folgt

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$$

6. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \end{aligned}$$

7. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

8. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = (k+1) \frac{k(2k+3) + 2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 5k + 2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} \end{aligned}$$

9. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4} \end{aligned}$$

10. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} \\ &= \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5} \end{aligned}$$

11. Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Es sei

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{k}{a(a+k)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} \\ &= \frac{k}{a(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k+1}{a(a+k+1)} \end{aligned}$$

12. Für  $n = 1$  und  $n = 2$  gilt die Behauptung. Es sei

$$u_{k-2} = \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta} \quad ; \quad u_{k-1} = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$$

Dann folgt

$$u_k = (\alpha + \beta) \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} - \alpha \beta \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}$$

13. Für  $n = 0$  erhalten wir

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2}$$

Die Behauptung gilt also für  $n = 0$ . Angenommen, es sei

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \dots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \dots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} &= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}} \end{aligned}$$

14. Für  $n = 1$  gilt

$$1 - \frac{x}{1!} = -\frac{x-1}{1}$$

für  $n = 2$

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} = -\frac{x-1}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{(x-1)(x-2)}{2!}$$

für  $n = 3$

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = -\frac{(x-1)((x-2)(x-3))}{3!}$$

Dies führt zu der Vermutung

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)((x-2)\dots(x-n))}{n!}$$

Für  $n = 1$  ist die Vermutung richtig. Gilt

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(x-1)((x-2)\dots(x-k))}{k!}$$

so folgt

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)\dots(x-k)}{(k+1)!} \\ = (-1)^k \frac{(x-1)((x-2)\dots(x-k))}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{x(x-1)\dots(x-k)}{(k+1)!} \\ = (-1)^{k+1} \frac{(x-1)((x-2)\dots(x-k))}{k!} \left( \frac{x}{k+1} - 1 \right) \\ = (-1)^{k+1} \frac{(x-1)((x-2)\dots(x-k)(x-k-1))}{(k+1)!} \end{aligned}$$

15. Für  $n = 0$  ist die Behauptung richtig. Wir nehmen an, die Behauptung gelte für  $n = k$ , d.h.

$$A_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$$



sei durch 133 teilbar. Dann folgt

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 11^{k+3} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} \\ &= 11 \cdot 11^{k+2} + 133 \cdot 12^{2k+1} + 11 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} \\ &= 11A_k + 133 \cdot 12^{2k+1} \end{aligned}$$

Wir haben  $A_{k+1}$  als Summe zweier Summanden dargestellt, die beide durch 133 teilbar sind. Folglich ist auch  $A_{k+1}$  durch 133 teilbar.

16. Für  $n = 1$  ist die Behauptung richtig, da eine Gerade die Ebene in zwei Teile zerlegt. Wir nehmen an, dass  $k$  verschiedene Geraden, die durch einen Punkt gehen, die Ebene in  $2k$  Teile zerlegen. Dann zerlegt die  $(k + 1)$ -te Gerade, die durch den gleichen Punkt geht, zwei dieser Teile in je zwei Teile, die Ebene wird also in  $2k + 2 = 2(k + 1)$  Teile zerlegt.

17. Für  $n = 1$  ist die Behauptung richtig, da

$$\frac{\sin \frac{3x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x$$

gilt, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos kx + \cos(k+1)x &= \frac{\sin \frac{2k+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \cos(k+1)x \\ &= \frac{\sin \frac{2k+1}{2}x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos(k+1)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{2k+1}{2}x + (\sin \frac{2k+3}{2}x - \sin \frac{2k+1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{2k+3}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 18. Für  $n = 1$  gilt die Behauptung wegen

$$\frac{2 \sin x - \sin 2x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin x(1 - \cos x)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sin x$$

Es sei

$$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + k \sin kx = \frac{(k+1) \sin kx - k \sin(k+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

dann ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + k \sin kx + (k+1) \sin(k+1)x \\ &= \frac{(k+1) \sin kx - k \sin(k+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + (k+1) \sin(k+1)x \\ &= \frac{(k+1) \sin kx - k \sin(k+1)x + 2(k+1) \sin(k+1)x(1 - \cos x)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{(k+2) \sin(k+1)x + (k+1) \sin kx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{2(k+1) \cos x \sin(k+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{(k+2) \sin(k+1)x + (k+1) \sin kx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{(k+1)[\sin(k+2)x + \sin kx]}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{(k+2) \sin(k+1)x + (k+1) \sin(k+2)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

19. Für  $n = 1$  ist die Behauptung richtig, weil

$$\frac{2 \cos x - \cos 2x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos x - 2 \cos^2 x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos x (1 - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \cos x$$

gilt. Gilt nun

$$\cos x + 2 \cos 2x + \dots + k \cos kx = \frac{(k+1) \cos kx - k \cos(k+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

so folgt

$$\begin{aligned} & \cos x + 2 \cos 2x + \dots + k \cos kx + (k+1) \cos(k+1)x \\ &= \frac{(k+1) \cos kx - k \cos(k+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + (k+1) \cos(k+1)x \\ &= \frac{(k+1) \cos kx - k \cos(k+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{2(k+1) \cos(k+1)x (1 - \cos x)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{(k+2) \cos(k+1)x + (k+1) \cos kx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{2(k+1) \cos x \cos(k+1)x + 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{(k+2) \cos(k+1)x + (k+1) \cos kx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{(k+1) [\cos(k+2)x + \cos kx] + 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{(k+2) \cos(k+1)x - (k+1) \cos(k+2)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

20. Für  $n = 1$  ist die Behauptung richtig wegen

$$\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1 \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}} = \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2}$$

Es sei

$$\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k} \cot \frac{x}{2^k} - \cot x$$

dann folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{x}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2^k} \cot \frac{x}{2^k} - \cot x + \frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\cot^2 \frac{x}{2^{k+1}} - 1}{\cot \frac{x}{2^{k+1}}} + \frac{1}{2^{k+1} \cot \frac{x}{2^{k+1}}} - \cot x \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{x}{2^{k+1}} - \cot x \end{aligned}$$

21. Es gilt

$$\tan(\arctan 2 - \arctan 1) = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \text{folglich ist} \quad \arctan 2 - \arctan 1 = \arctan \frac{1}{3} = \operatorname{arccot} 3$$

Für  $n = 1$  ist die Behauptung also richtig. Wir beweisen zunächst

$$\operatorname{arccot}(2k+3) = \arctan \frac{k+2}{k+1} - \arctan 1 \tag{1}$$

Es ist nämlich

$$\tan \left( \arctan \frac{k+2}{k+1} - \arctan 1 \right) = \frac{\frac{k+2}{k+1} - 1}{1 + \frac{k+2}{k+1}} = \frac{1}{2k+3}$$

also

$$\arctan \frac{1}{2k+3} = \operatorname{arccot}(2k+3) = \arctan \frac{k+2}{k+1} - \arctan 1$$

Nehmen wir nun an, die Behauptung sei für  $n = k$  richtig, d.h., es gelte

$$\operatorname{arccot} 3 + \operatorname{arccot} 5 + \dots + \operatorname{arccot}(2k+1) = \arctan 2 + \arctan \frac{3}{2} + \dots + \arctan \frac{k+1}{k} - k \arctan 1 \quad (2)$$

Wir beweisen, dass sie dann auch für  $n = k+1$  erfüllt ist, d.h.

$$\operatorname{arccot} 3 + \operatorname{arccot} 5 + \dots + \operatorname{arccot}(2k+3) = \arctan 2 + \dots + \arctan \frac{k+2}{k+1} - (k+1) \arctan 1 \quad (3)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (1) und (2) erhalten wir die Gleichung (3).

22. Für  $n = 1$  gilt die Behauptung wegen

$$\sqrt{3} - i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Es sei

$$(\sqrt{3} - i)^k = 2^k \left( \cos \frac{k\pi}{6} - i \sin \frac{k\pi}{6} \right)$$

dann folgt daraus

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{k+1} &= 2^k \left( \cos \frac{k\pi}{6} - i \sin \frac{k\pi}{6} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2^{k+1} \left[ \cos \frac{(k+1)\pi}{6} - i \sin \frac{(k+1)\pi}{6} \right] \end{aligned}$$

23. Für  $n = 1$  gilt die Behauptung. Es sei

$$(\cos x + i \sin x)^k = \cos kx + i \sin kx$$

dann ergibt sich

$$(\cos x + i \sin x)^{k+1} = (\cos kx + i \sin kx)(\cos x + i \sin x) = \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x$$

24. Fehlerhaft ist gerade der letzte Satz: "Damit ist die Behauptung bewiesen".

In Wirklichkeit haben wir gezeigt, dass die Ungleichung

$$2^n > 2n + 1$$

für  $n = k+1$  gültig ist, wenn sie für  $n = k$  gilt, wo  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist.

Daraus folgt aber noch nicht, dass diese Ungleichung auch nur für einen einzigen Wert von  $n$  oder gar für jede natürliche Zahl  $n$  gilt.

Kurz gesagt, der Fehler liegt darin, dass nur Aussage 2. bewiesen wurde, die Aussage 1. jedoch nicht beachtet und keine Induktionsbasis geschaffen wurde.

25. Man sieht leicht, dass 3 die kleinste natürliche Zahl  $n$  ist, für welche die Ungleichung  $2^n > 2n + 1$  erfüllt ist.

Berücksichtigen wir, dass aus der Gültigkeit der Ungleichung für  $n = k$  ihre Richtigkeit für  $n = k + 1$  (Aufgabe 44) folgt, so können wir schließen, dass die Ungleichung für jede natürliche Zahl  $n \geq 3$  richtig ist.

26. Für  $n = 2$  ist die Behauptung richtig wegen

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

Es sei

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \quad (1)$$

Wir beweisen nun, dass dann auch

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \quad (2)$$

gilt. Für beliebiges  $k \geq 0$  gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \quad (3)$$

denn die Ungleichung (3) folgt aus der Ungleichung

$$1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} > 1$$

durch Multiplikation beider Seiten mit der positiven Zahl  $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ . Addieren wir die Ungleichungen (1) und (3) gliedweise, so erhalten wir die Ungleichung (2).

27. Für  $n = 2$  hat die Ungleichung die Form  $\frac{16}{3} < 6$  und ist richtig. Es sei

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

und  $k \geq 2$ . Es ist leicht nachzuprüfen, dass für  $k > 0$  die Beziehung

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

gilt. Daher gilt

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

d.h. aber

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}$$

## 2 Vollständige Induktion in der Geometrie

### 2.1 Berechnung mittels vollständiger Induktion

In der Geometrie lässt sich die Methode der vollständigen Induktion ganz naturgemäß bei der Lösung geometrischer Aufgaben durch Berechnung verwenden, und das kommt ihrer Verwendung in Algebra und Zahlentheorie am nächsten. Wir betrachten zunächst einige Beispiele.

Beispiel 1. Man berechne die Länge  $a_{2^n}$  der Seite eines (konvexen)  $2^n$ -Ecks, das einem Kreis mit dem Radius  $R$  eingeschrieben ist.

Lösung. 1. Für  $n = 2$  ist das  $2^n$ -Eck ein Quadrat; seine Seitenlänge beträgt  $a_4 = R\sqrt{2}$ . Ferner finden wir gemäß der Formel

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_{2^n}^2}}$$

das die Länge der Seite eines regelmäßigen 8-Ecks  $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ , die Länge der Seite eines regelmäßigen 16-Ecks

$$a_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

die Länge der Seite eines regelmäßigen 32-Ecks

$$a_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

ist.

Man vermutet daher, dass für  $n \geq 2$  die Länge der Seite eines regelmäßigen eingeschriebenen  $2^n$ -Ecks

$$a_{2^n} = R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ Zweien}}}$$

ist.

2. Wir setzen voraus, die Länge der Seite eines regelmäßigen eingeschriebenen  $2^n$ -Ecks werde durch die Formel (1) ausgedrückt. Dann gilt für ein regelmäßiges  $2^{n+1}$ -Eck

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2 \frac{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}{4}}} = R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ Zweien}}}$$

somit ist die Formel (1) für alle  $n$  richtig.

Aus (1) folgt, dass der Umfang  $U = 2\pi R$  eines Kreises mit dem Radius  $R$  gleich dem Grenzwert von

$$2^n R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ Zweien}}}$$

bei unbegrenzt wachsendem natürlichen  $n$  ist und dass daher

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ Zweien}}} \quad \text{oder} \quad \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ Zweien}}}$$

gilt.

Aufgabe 1. Man zeige mit Hilfe von (1), dass der Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)}$$

mit einem unendlichen Produkt im Nenner die Zahl  $\pi$  darstellt (Formel von Vieta). Das Bildungsgesetz für die Faktoren im Nenner wird durch die ersten drei angegebenen Faktoren festgelegt.

Beispiel 2. Man berechne die Radien  $r_n$  und  $R_n$  des ein- bzw. umschriebenen Kreises eines regelmäßigen (konvexen)  $2^n$ -Ecks, das den Umfang  $U$  besitzt.

Lösung. 1.  $r_2 = \frac{U}{8}$ ,  $R_2 = \frac{U\sqrt{2}}{8}$ .

2. Kennen wir die Radien  $r_n$  und  $R_n$  des ein- bzw. umschriebenen Kreises eines regelmäßigen  $2^n$ -Ecks mit dem Umfang  $U$ , dann berechnen wir die Radien  $r_{n+1}$  und  $R_{n+1}$  des ein- bzw. umschriebenen Kreises eines  $2^{n+1}$ -Ecks mit dem gleichen Umfang wie folgt:

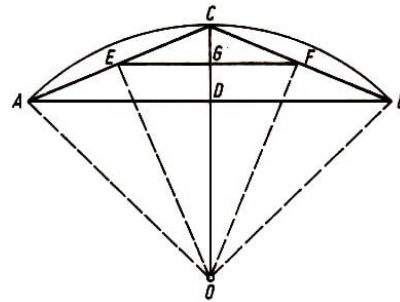


Abb. 1

Es sei  $AB$  (Abb. 1) Seite eines regelmäßigen  $2^n$ -Ecks vom Umfang  $U$ , ferner  $O$  sein Mittelpunkt,  $C$  der Schnittpunkt des Umkreises mit der Winkelhalbierenden vom  $\angle AOB$  und  $D$  der Mittelpunkt der Sehne  $AB$ ; weiter sei  $EF$  bezüglich  $AB$  die Mittellinie des Dreiecks  $ABC$  und  $G$  ihr Mittelpunkt.

Wegen  $\angle AOE \cong \angle EOC \cong \angle COF \cong \angle FOB$  ist  $EF$  Seite eines regelmäßigen  $2^{n+1}$ -Ecks, das einem Kreis mit dem Radius<sup>3</sup>  $l(OE)$  eingeschrieben ist, wobei der Umfang dieses  $2^{n+1}$ -Ecks gleich

$$2^{n+1}l(EF) = 2^{n+1}\frac{l(AB)}{2} = 2^n l(AB)$$

d.h. ebenfalls gleich  $U$  ist. Damit gilt  $r_{n+1} = l(OG)$  bzw.  $R_{n+1} = l(OE)$ . Weiter ist klar, dass  $G$  Mittelpunkt von  $CD$  ist und dass somit wegen  $r_n = l(OD)$  und  $R_n = l(OC)$

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

gilt.

Im rechtwinkligen Dreieck  $OEC$  ist nach dem Kathetensatz  $R_{n+1}^2 = R_n \cdot r_{n+1}$ . Insgesamt erhalten wir

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}, \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n \cdot r_{n+1}}$$

Wir betrachten die Folge  $r_2, R_2, r_3, R_3, \dots, r_n, R_n, \dots$ . Die Glieder dieser Folge streben gegen den Radius eines Kreises vom Umfang  $U$ , d.h. gegen  $\frac{U}{2\pi}$ .

<sup>3</sup>Mit  $l(OE)$  wird die Länge der Strecke  $OE$  bezeichnet.

Insbesondere ist  $r_2 = \frac{1}{4}$  und  $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$  bei  $U = 2$ . Setzen wir noch  $r_1 = 0$  und  $R_1 = \frac{1}{2}$  dann erhalten wir den folgenden Satz:

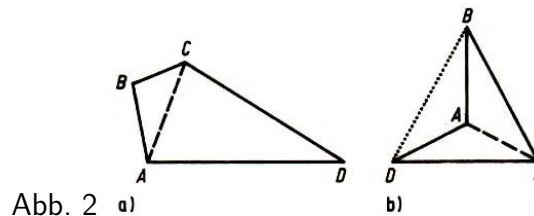
Die Glieder der Zahlenfolge

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2+1}}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{8}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4} + \sqrt{2+1}}{16}, \dots$$

deren Anfangsglieder 0 und  $\frac{1}{2}$  sind und deren übrige Glieder abwechselnd gleich dem arithmetischen bzw. dem geometrischen Mittel der beiden vorangehenden Folgenglieder sind, streben gegen  $\frac{1}{\pi}$ .

Beispiel 3. Man bestimme die Summe der Größen der Innenwinkel eines einfachen<sup>4</sup> (nicht notwendig konvexen)  $n$ -Ecks.

Lösung. 1. Die Summe der Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ist  $2R$ , eines einfachen Vierecks  $4R$ , weil jedes solche Viereck in zwei Dreiecke zerlegt werden kann (Abb. 2).



2. Wir setzen voraus, die Summe der Größen der Innenwinkel eines beliebigen einfachen  $k$ -Ecks für  $k < n$  sei gleich  $2R(k - 2)$ , und betrachten ein einfaches  $n$ -Eck  $A_1A_2\dots A_n$ .

Zunächst zeigen wir, dass in jedem einfachen Vieleck mit wenigstens vier Ecken eine Diagonale existiert, die es in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenanzahl zerlegt.<sup>5</sup>

Für konvexe Vielecke ist das klar. Es seien  $A, B, C$  drei beliebige benachbarte Eckpunkte eines beliebigen einfachen Vielecks. Im Innenwinkel mit dem Scheitel  $B$  ziehen wir von  $B$  aus alle Strecken, deren zweiter Endpunkt einer Vielecksseite angehört und deren Inneres sowohl im Inneren des Vielecks als auch des Innenwinkels mit dem Scheitel  $B$  liegt:

Es sind zwei Fälle möglich:

A. Alle von  $B$  verschiedenen Endpunkte liegen in genau einer Seite des Vielecks (Abb. 3a). In diesem Fall zerlegt die Diagonale  $AC$  unser  $n$ -Eck in ein  $(n - 1)$ -Eck und ein Dreieck.

B. Nicht alle von  $B$  verschiedenen Endpunkte liegen in genau einer Seite (Abb. 3b). In diesem Fall ist einer dieser Endpunkte  $M$  eine Ecke des Vielecks, und die Diagonale  $BM$  zerlegt das Vieleck in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenzahl.

Wir werden uns jetzt dem Beweis unserer ursprünglichen Behauptung zu.

Die Bezeichnung der Ecken des  $n$ -Ecks sei so gewählt, dass die Diagonale  $A_1A_k$  das Vieleck  $A_1A_2\dots A_n$  in das  $k$ -Eck  $A_1A_2\dots A_k$  und das  $(n - k + 2)$ -Eck  $A_1A_kA_{k+1}\dots A_n$  zerlegt.

<sup>4</sup>"Einfach" bedeute in diesem Zusammenhang stets "einfach zusammenhängend".

<sup>5</sup>Man beachte, dass eine Diagonale eines nichtkonvexen Vielecks das Vieleck zerlegen oder ganz außerhalb desselben liegen kann (wie die Diagonale  $BD$  in Abb. 2b).

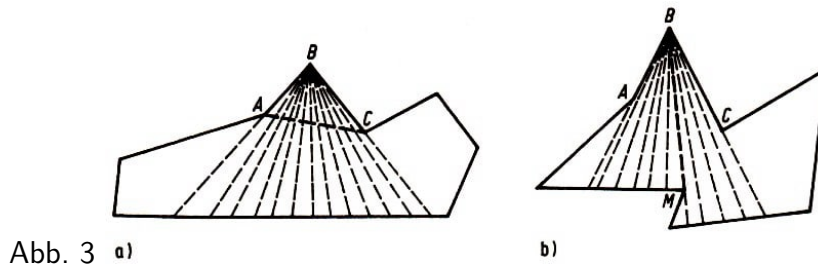


Abb. 3 a)

b)

Nach Voraussetzung sind die Summen der Größen der Innenwinkel des  $k$ -Ecks bzw. des  $(n - k + 2)$ -Ecks gleich  $2R(k - 2)$  bzw.  $2R[(n - k + 2) - 2] = 2R(n - k)$ ; daher wird die Summe der Winkelgrößen des  $n$ -Ecks  $A_1A_2...A_n$  gleich  $2R(k - 2) + 2R(n - k) = 2R(n - 2)$ , woraus die Richtigkeit unserer Behauptung für alle  $n$  folgt.

Wie wir in Beispiel 3 sahen, kann man in jedem einfachen Vieleck eine Diagonale finden, die es in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenzahl zerlegt. Jedes dieser Vielecke, das noch kein Dreieck ist, kann man wieder in zwei einfache Vielecke mit kleinerer Seitenzahl zerlegen usw. Folglich kann man jedes einfache Vieleck durch Diagonalen, die einander nicht schneiden, in Dreiecke zerlegen.

Beispiel 4. In wieviel Dreiecke kann ein einfaches (nicht unbedingt konvexes)  $n$ -Eck durch Diagonalen, die einander nicht schneiden, höchstens zerlegt werden?

Lösung. 1. Für das Dreieck ist diese Zahl 1 (im Dreieck kann man keine Diagonale ziehen); für das Viereck ist diese Zahl offensichtlich 2 (vgl. Abb. 2a und b).

2. Wir setzen voraus, dass jedes  $k$ -Eck mit  $k < n$  durch einander nicht schneidende Diagonalen (unabhängig von der Art der Zerlegung) in  $k - 2$  Dreiecke zerlegbar ist. Wir betrachten eine der Zerlegungen des  $n$ -Ecks  $A_1A_2...A_n$  in Dreiecke. Es sei  $A_1A_k$  eine der Diagonalen dieser Zerlegung; sie zerlegt das  $n$ -Eck  $A_1A_2...A_n$  bei geeigneter Wahl der Bezeichnung in ein  $k$ -Eck  $A_1A_2...A_k$  und ein  $(n - k + 2)$ -Eck  $A_1A_kA_{k+1}...A_n$ . Nach Voraussetzung ist die Gesamtzahl der Dreiecke der Zerlegung gleich

$$(k - 2) + [(n - k + 2) - 2] = n - 2$$

damit ist unsere Behauptung für alle  $n$  bewiesen.

Aufgabe 2. Man bestimme die Anzahl  $N$  der Diagonalen, die einander nicht schneiden und bei der Zerlegung eines  $n$ -Ecks in Dreiecke benutzt werden.

Beispiel 5. Wieviel Möglichkeiten  $P(n)$  gibt es, ein konvexes  $n$ -Eck durch Diagonalen, die einander nicht schneiden, in Dreiecke zu zerlegen?

Lösung. 1. Für ein Dreieck ist diese Zahl offenbar gleich 1; also ist  $P(3) = 1$ .

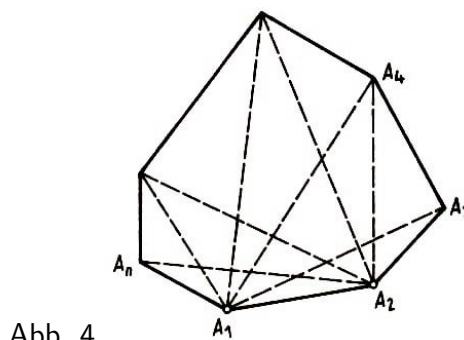


Abb. 4



2. Wir setzen voraus, dass wir die Zahl  $P(k)$  für alle  $k < n$  bestimmt haben, und wollen  $P(n)$  bestimmen. Dazu betrachten wir ein konvexes  $n$ -Eck  $A_1A_2\dots A_n$  (Abb. 4). Für jede seiner Zerlegungen in Dreiecke wird die Seite  $A_1A_2$  Seite eines Dreiecks der Zerlegung; der dritte Eckpunkt dieses Dreiecks muss einer der Punkte  $A_3, A_4, \dots, A_n$  sein.

Die Anzahl der Arten der Zerlegung des  $n$ -Ecks, für die dieser Eckpunkt mit dem Punkt  $A_3$  übereinstimmt, ist gleich der Anzahl der Arten der Zerlegung des  $(n-1)$ -Ecks  $A_1A_3A_4\dots A_n$  in Dreiecke, d.h. gleich  $P(n-1)$ .

Die Anzahl der Arten der Zerlegung, für die dieser Eckpunkt mit  $A_4$  übereinstimmt, ist gleich der Anzahl der Arten der Zerlegung des  $(n-2)$ -Ecks  $A_1A_4A_5\dots A_n$ , d.h. gleich  $P(n-2) = P(n-2) \cdot P(3)$ ; die Anzahl der Arten der Zerlegung, für die er mit  $A_5$  übereinstimmt, ist gleich  $P(n-3) \cdot P(4)$ , da jede der Zerlegungen des  $(n-3)$ -Ecks  $A_1A_5\dots A_n$  dabei mit jeder der Zerlegungen des Vierecks  $A_2A_3A_4A_5$  kombiniert werden kann usw.

So kommen wir zu der Beziehung

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2) \cdot P(3) + P(n-3) \cdot P(4) + \dots + P(3) \cdot P(n-2) + P(n-1) \quad (2)$$

Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir

$$P(4) = P(3) + P(3) = 2,$$

$$P(5) = P(4) + P(3) \cdot P(3) + P(4) = 5,$$

$$P(6) = P(5) + P(4) \cdot P(3) + P(3) \cdot P(4) + P(5) = 14,$$

$$P(7) = P(6) + P(5) \cdot P(3) + P(4) \cdot P(4) + P(3) \cdot P(5) + P(6) = 42$$

Bemerkung. Mit Hilfe der Formel (2) kann man zeigen, dass für jedes  $n$  die Beziehung

$$P(n) = \frac{2(2n-5)!}{(n-1)!(n-3)!}$$

gilt.

Aufgabe 3. In wieviel Teile wird ein konvexes  $n$ -Eck durch alle seine Diagonalen zerlegt, wenn sich keine drei von ihnen in einem Punkt schneiden?

## 2.2 Beweise mittels vollständiger Induktion

Einige Sätze von Abschnitt 2.1 können bereits als Beispiele für die Anwendung der vollständigen Induktion beim Beweis geometrischer Sätze angesehen werden.

Zum Beispiel kann der Satz des Beispiels 3 folgendermaßen formuliert werden: Man zeige, dass die Summe der Winkelgrößen eines einfachen  $n$ -Ecks gleich  $2R(n-2)$  ist; in Beispiel 4 war zu beweisen, dass die sich nicht schneidenden Diagonalen ein einfaches  $n$ -Eck in  $n-2$  Dreiecke zerlegen.

In diesem Abschnitt betrachten wir weitere Beispiele dieser Art.

Beispiel 6. Es seien  $n$  beliebige Quadratflächen gegeben. Man beweise, dass man sie so in Teile zerlegen kann, dass sich aus sämtlichen Teilen eine neue Quadratfläche zusammensetzen lässt.

Lösung. 1. Für  $n = 1$  ist kein Beweis erforderlich. Wir beweisen nun, dass die Behauptung auch für  $n = 2$  richtig ist. Die Seitenlängen der gegebenen Quadrate  $ABCD$  und  $abcd$  bezeichnen wir mit  $x$  bzw.  $y$ ; es sei etwa  $x \geq y$ .

Auf den Seiten des Quadrates  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $x$  (Abb. 5a) tragen wir die Strecken

$AM \cong BN \cong CP \cong DQ$  der Länge  $\frac{x+y}{2}$  ab und zerlegen die Fläche dieses Quadrates durch die Geraden  $MP$  und  $NQ$ , die sich offenbar im Mittelpunkt  $O$  des Quadrats schneiden und aufeinander senkrecht stehen.

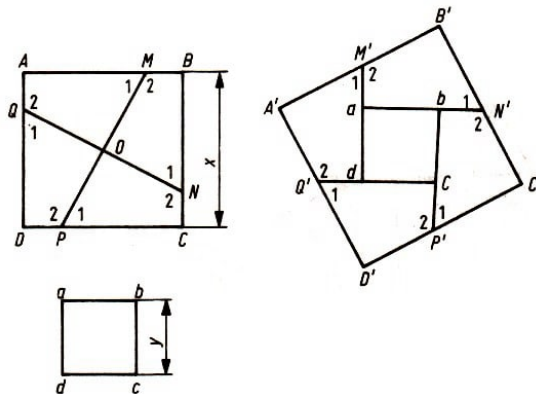


Abb. 5a, b

Dabei wird die Quadratfläche in vier kongruente Teile zerlegt. Diese Stücke legen wir an die zweite Quadratfläche an, wie in Abb. 5b gezeigt wird.

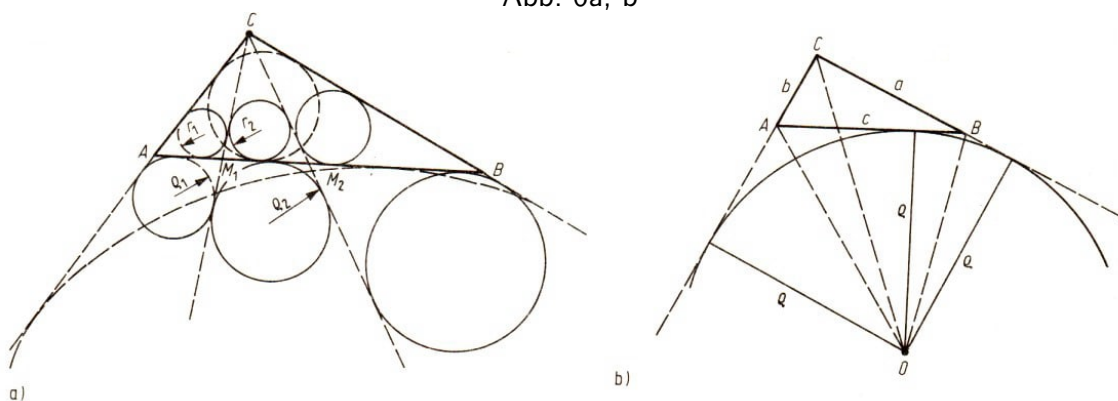
Die erhaltene Figur ist wieder eine Quadratfläche, da die Winkel bei den Punkten  $M', N', P', Q'$  Nebenwinkel und die Winkel  $A', B', C', D'$  rechte Winkel sind und  $A'B' \cong B'C' \cong C'D' \cong D'A'$  ist.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für  $n$  Quadratflächen schon bewiesen, und es seien  $n + 1$  Quadratflächen  $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$  gegeben.

Wir greifen zwei beliebige Quadratflächen, etwa  $K_n$  und  $K_{n+1}$  heraus. Wie in 1. gezeigt wurde, kann man eine neue Quadratfläche  $K'$  erhalten, wenn man eine dieser Quadratflächen zerlegt und die erhaltenen Teile an die zweite anlegt.

Ferner kann man nach Voraussetzung die Quadratflächen  $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K'$  so in Teile zerlegen, dass man aus diesen Teilen eine neue Quadratfläche zusammensetzen kann, was zu beweisen war.

Abb. 6a, b



Beispiel 7. Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$ . Durch seinen Eckpunkt  $C$  seien  $n - 1$  Geraden gelegt, die das Dreieck in  $n$  kleinere Dreiecke  $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_{n-1}CB$  zerlegen.

Wir bezeichnen mit  $r_1, r_2, \dots, r_n$  und  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  die Radien der In- bzw. Ankreise dieser Dreiecke, wobei alle betrachteten Ankreise im Winkel mit dem Scheitel  $C$  des ursprünglichen Dreiecks  $ABC$  liegen (Abb. 6 a);  $r$  und  $\rho$  seien die Radien des In- bzw. Ankreises im Winkel mit dem Scheitel  $C$  unseres Dreiecks  $ABC$ .

Man beweise die Beziehung

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \dots \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$$

Lösung. Wir bezeichnen mit  $F$  den Inhalt der Fläche des Dreiecks  $ABC$  und mit  $s$  seinen halben Umfang; dann ist bekanntlich  $F = sr$ . Ist  $O$  der Mittelpunkt des betrachteten Ankreises dieses Dreiecks (Abb. 6b), so gilt andererseits

$$F = F_{\Delta OAC} + F_{\Delta OCB} - F_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}b\rho + \frac{1}{2}a\rho - \frac{1}{2}c\rho = \frac{1}{2}(a+b-c)\rho = (s-c)\rho$$

folglich ist  $sr = (s-c)\rho$  und  $\frac{r}{\rho} = \frac{s-c}{s}$ .

Ferner ergibt sich aus einer bekannten Formel der Trigonometrie (Halbwinkelsatz)

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{und} \quad \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

woraus

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} \cdot \frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{s-c}{s} = \frac{r}{\rho} \quad (3)$$

folgt. Nach diesen einleitenden Bemerkungen wenden wir uns dem Beweis des Satzes zu.

1. Für  $n = 1$  ist unsere Behauptung offensichtlich. Wir beweisen ihre Richtigkeit für  $n = 2$ . In diesem Fall zerlegt eine Gerade das Dreieck  $ABC$  in zwei kleinere Dreiecke  $ACM$  und  $CMB$ . Nach der Formel (3) gilt (mit  $\delta$  als Größe des Winkels  $\angle ACM$ )

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} &= \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\delta}{2} \cdot \tan \frac{180^\circ - \delta}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\delta}{2} \cot \frac{\delta}{2} \tan \frac{\beta}{2} \\ &= \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{\rho} \end{aligned}$$

2. Wir setzen nun voraus, unsere Behauptung sei für  $n - 1$  Geraden bewiesen und es seien  $n$  Geraden gegeben, die das Dreieck  $ABC$  in  $n + 1$  kleinere Dreiecke  $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_nCB$  zerlegen. Jetzt betrachten wir zwei von diesen Dreiecken, etwa  $ACM_1$  und  $M_1CM_2$ .

Wie wir in 1. sahen, ist

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r_{12}}{\rho_{12}}$$

wobei  $r_{12}$  und  $\rho_{12}$  die Radien des In- bzw. des betrachteten Ankreises des Dreiecks  $ACM_2$  sind. Für  $n$  Dreiecke  $ACM_2, M_2CM_3, \dots, M_nCB$  gilt aber nach Voraussetzung

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}} \cdot \frac{r_3}{\rho_3} \dots \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

also ist

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \dots \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

Aufgabe 4. Geraden durch den Punkt  $C$  mögen das Dreieck  $ABC$  auf zwei Arten in zwei Dreiecke  $ACM, CMB$  und  $ACM', CM'B$  zerlegen;  $r_1, r_2$  bzw.  $r'_1, r'_2$  seien die Radien der Inkreise dieser Dreiecke.

Man beweise, dass aus  $r_1 = r'_1$  stets  $r_2 = r'_2$  folgt und dass die analoge Eigenschaft auch für die Radien der Ankreise im Dreieckswinkel mit dem Scheitel  $C$  gilt.

Aufgabe 5. Man beweise (in den Bezeichnungen des Beispiels 7), dass

$$\frac{r_1 + \rho_1}{R_1} + \frac{r_2 + \rho_2}{R_2} + \dots + \frac{r_n + \rho_n}{R_n} = \frac{r + \rho}{R}$$

gilt, wobei  $R_1, R_2, \dots, R_n$  und  $R$  die Radien der Umkreise der Dreiecke  $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_nCB$  bzw.  $ABC$  sind.

Aufgabe 6. Es seien  $n$  Kreise  $\mathfrak{k}_1, \dots, \mathfrak{k}_n$  durch einen Punkt  $O$  gegeben, wobei sich  $\mathfrak{k}_1$  und  $\mathfrak{k}_2$ ,  $\mathfrak{k}_2$  und  $\mathfrak{k}_3, \dots, \mathfrak{k}_n$  und  $\mathfrak{k}_1$  jeweils in einem von  $O$  verschiedenen Punkt  $A_1, A_2, \dots$  bzw.  $A_n$  schneiden (Abb. 7).

Ferner sei  $B_1$  ein von  $O$  verschiedener Punkt des Kreises  $\mathfrak{k}_1$ . Mit  $g_1$  bezeichnen wir im Fall  $A_1 \neq B_1$  die Verbindungsgerade dieser Punkte und im Fall  $A_1 = B_1$  die Tangente an  $\mathfrak{k}_1$  im Punkt  $A_1$ .

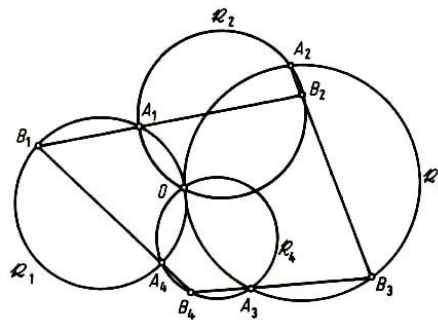


Abb. 7

Ferner sei  $B_2$  der von  $A_1$  verschiedene Schnittpunkt von  $g_1$  und  $\mathfrak{k}_2$ , falls  $g_1$  Sekante von  $\mathfrak{k}_2$  ist, und wir setzen  $B_2 = A_1$ , falls  $g_1$  Tangente von  $\mathfrak{k}_2$  ist.

Mit  $g_2$  bezeichnen wir im Fall  $A_2 \neq B_2$  die Verbindungsgerade dieser Punkte und im Fall  $A_2 = B_2$  die Tangente an  $\mathfrak{k}_2$  im Punkt  $A_2$ . Analog werden  $B_3, \dots$  und  $g_3, \dots$  bestimmt. Man beweise, dass der auf dem Kreis  $\mathfrak{k}_1$  erhaltene Punkt  $B_{n+1}$  mit  $B_1$  übereinstimmt.

Beispiel 8. Man zeige, dass die Fläche jedes konvexen Vielecks, das von einem Parallelogramm verschieden ist, in eine Dreiecksfläche eingeschlossen werden kann, deren Seiten drei Seiten des Vielecks enthalten (Abb. 8).

Lösung. Wir zeigen zunächst (\*), dass die Fläche jedes konvexen  $n$ -Ecks in die Fläche eines Dreiecks oder eines Parallelogramms eingeschlossen werden kann, deren Seiten drei bzw. vier Seiten des Vielecks enthalten (Abb. 8).

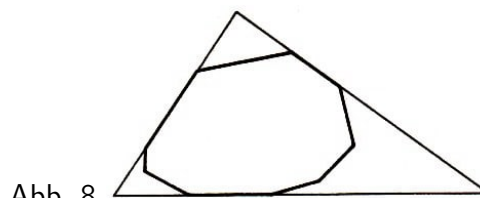


Abb. 8

1. Für  $n = 3$  bedarf unsere Behauptung keines Beweises, für  $n = 4$  ist sie offenbar ebenfalls richtig; denn entweder ist unser betrachtetes Viereck ein Parallelogramm, oder es hat zwei nichtparallele Gegenseiten, die wir bis zum Schnitt verlängern; wir erhalten ein Dreieck der gewünschten Art, das in seiner Fläche unsere Vierecksfläche enthält (Abb. 9 a).

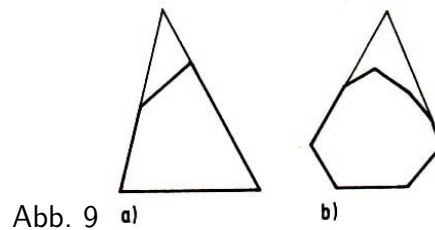


Abb. 9 a)

b)

2. Wir setzen jetzt voraus, unsere Behauptung sei schon für alle konvexen Vielecke, die weniger als  $n$  Seiten haben, richtig, und betrachten die Fläche eines beliebigen (konvexen!)  $n$ -Ecks  $\mu$  (mit  $n \geq 5$ ).

Dieses  $n$ -Eck hat sicherlich zwei nicht benachbarte und nicht parallele Seiten: Die Gesamtzahl der zu einer gegebenen Seite  $AB$  nicht benachbarten Seiten des  $n$ -Ecks  $\mu$  gleich  $n - 3 \geq 2$ , und das konvexe Vieleck kann nur eine einzige zu  $AB$  parallele Seite haben.

Wenn wir diese nichtparallelen Seiten bis zu ihrem Schnitt verlängern (Abb. 9 b), dann erhalten wir ein  $m$ -Eck  $\mu_1$ , dessen Fläche die Fläche von  $\mu$  enthält; dabei gilt  $m < n$ . Alle Seiten dieses  $m$ -Ecks enthalten Seiten von  $\mu$ .

Wenn wir noch das  $m$ -Eck  $\mu_1$  in die Fläche eines Dreiecks (Fall 1) oder eines Parallelogramms (Fall 2) einschließen - was nach Induktionsvoraussetzung möglich ist -, dann erhalten wir ein gewünschtes Dreieck oder Parallelogramm, dessen Fläche also die Fläche des  $n$ -Ecks  $\mu$  enthält.

Jetzt können wir unsere Behauptung (\*) für alle konvexen  $n$ -Ecke als bewiesen ansehen; wir zeigen, dass aus ihr auch die Behauptung des Beispiels folgt.

Im Fall 1 ist nichts mehr zu beweisen. Im Fall 2 sei  $ABCD$  das erhaltene Parallelogramm. Ist das Vieleck  $\mu$  aber kein Parallelogramm, dann ist wenigstens ein Eckpunkt von  $ABCD$ , etwa  $A$ , kein Eckpunkt von  $\mu$ .

Wir betrachten jetzt den zu  $A$  nächstgelegenen Eckpunkt  $K$  des Vielecks  $\mu$ , der in der Seite  $AB$  des Parallelogramms liegt und von dem die Seite  $KL$  des Vielecks  $\mu$  ausgeht, die nicht in der Seite  $AB$  liegt.

Da das Vieleck  $\mu$  konvex ist, meidet es die Halbebene bezüglich  $g_{KL}$ , die den Punkt  $A$  enthält (Abb. 10). Dann erzeugen die drei Geraden  $g_{BC}$ ,  $g_{CD}$  und  $g_{KL}$  eine  $\mu$  enthaltende Dreiecksfläche, deren Existenz wir nachweisen mussten.

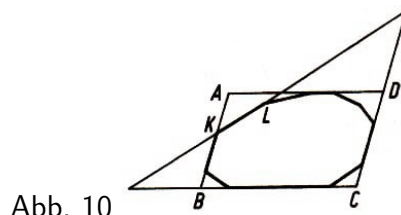


Abb. 10

Das Beispiel 9 ist deshalb besonders interessant, weil aus ihm mühelos die Lösung der folgenden Aufgabe folgt:

Aufgabe 7. Man zeige, dass die Fläche jedes von einem Parallelogramm verschiedenen Vielecks von drei ihrer gestauchten Bilder überdeckt werden kann.

Dieser Satz wurde zuerst von dem deutschen Geometer F. Levi im Jahre 1955 ausgesprochen; unabhängig von ihm wurde dieses Ergebnis von den Kisinjover Mathematikern I.Z. Gochberg und A.S. Markus bewiesen.

Da eine Parallelogrammfläche offensichtlich stets durch vier ihrer gestauchten Bilder überdeckt werden kann, aber niemals durch drei (Warum ?), ergibt sich somit der folgende Satz, den man

Satz von Levi-Gochberg-Markus nennen kann.<sup>6</sup>

Es sei die Fläche eines konvexen Vielecks  $\mu$  gegeben; die kleinste Anzahl ihrer gestauchten Bilder, mit denen man sie überdecken kann, ist 4 bzw. 3, je nachdem, ob es ein Parallelogramm ist oder nicht.

Von diesem Satz gehen sowohl F. Levi als auch I.Z. Gochberg und A.S. Markus zur entsprechenden stereometrischen Aufgabe über; dabei sprechen alle drei folgende Vermutung aus:

Die kleinste Anzahl gestauchter Bilder eines konvexen Polyeders  $\mu$ , die  $\mu$  vollständig überdecken, liegt zwischen 4 (sie ist gleich 4 z.B. für ein Tetraeder) und 8 (sie ist gleich 8 z.B. für einen Würfel); sie ist gleich 8 genau dann, wenn  $\mu$  ein Parallelepiped ist.

An der Richtigkeit dieser Aussage zweifelt auch heute noch anscheinend keiner der an dieser Frage interessierten Gelehrten; jedoch ist es bisher niemandem gelungen, diese Behauptung zu beweisen, obwohl das viele bekannte Mathematiker versucht haben. Bezüglich dieses ganzen Problemkreises kann man dem Leser etwa [1] empfehlen.

Es gibt eine große Anzahl geometrischer Beweisaufgaben der verschiedensten Art, die mit der Methode der vollständigen Induktion gelöst werden können. In diesem Abschnitt werden wir jedoch nur noch einen Problemkreis berühren, der insbesondere deshalb interessant ist, weil er sich auf eines der berühmtesten Probleme, das sogenannte Vierfarbenproblem, konzentriert. Dieser Problemkreis hängt mit den (mathematischen) Begriffen "Karte" und deren "regulärer Färbung" zusammen.

### 2.2.1 Aufgaben über Karten

In der Ebene sei ein Netz von Linien gegeben, die beliebige Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_p$  ( $p \geq 1$ ) verbinden und keine anderen gemeinsamen Punkte haben.

Wir nehmen weiter an, dass dieses Netz aus einem Stück besteht, d.h., dass man von jedem Punkt  $A_1, A_2, \dots, A_p$  zu jedem anderen Punkt gelangen kann, wenn man sich längs der Linien des Netzes bewegt (das Netz sei also "zusammenhängend").

Ein solches Netz werden wir eine Karte nennen, die gegebenen Punkte ihre Ecken<sup>7</sup>, die Abschnitte der Kurven zwischen zwei benachbarten Ecken Grenzen der Karte, die Teile der Ebene, in die sie zerlegt wird (einschließlich des unendlichen äußeren Gebiets), Länder der Karte. So stellen in Abb. 11 die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_8$  die Ecken der Karte, die Kurven  $A_1A_2, A_2A_7, A_1A_6, A_6A_7, A_1A_4, A_4A_3, A_3A_6, A_6A_5, A_5A_7, A_4A_8$  ihre Grenzen, die Gebiete  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und das unendliche äußere Gebiet  $\sigma$  ihrer Länder dar.

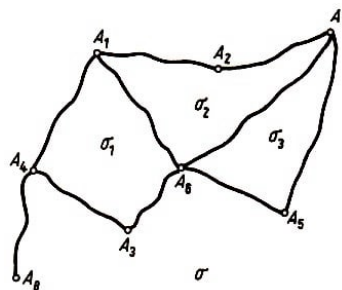


Abb. 11

<sup>6</sup>F. Levi sowie I.Z. Gochberg und A.S. Markus betrachteten nicht nur konvexe Vielecksflächen, sondern beliebige konvexe Figuren (vgl. [1], [2], [9]); aus der Gültigkeit des obigen Satzes folgt jedoch unmittelbar der entsprechende Satz für beliebige konvexe Figuren.

<sup>7</sup>In der Graphentheorie sind auch die Bezeichnungen Eckpunkte, Knotenpunkte bzw. Knoten gebräuchlich. - Anm. d. Red.

Beispiel 9 (Satz von Euler). Wir bezeichnen die Anzahl der Länder einer beliebigen Karte mit  $s$ , die Anzahl ihrer Grenzen mit  $l$  und die Anzahl der Ecken mit  $p$ . Dann gilt  $s + p = l + 2$ .

Beweis (durch Induktion nach der Anzahl  $l$  der Kartengrenzen).

1. Es sei  $l = 0$ ; dann ist  $s = 1$ ,  $p = 1$  (wegen  $p \geq 1$  und  $l = 0$ ); in diesem Fall gilt  $s + p = l + 2$ .

2. Wir setzen voraus, der Satz gelte für eine beliebige Karte, die  $n$  Grenzen hat, und betrachten eine Karte, die  $l = n + 1$  Grenzen,  $s$  Länder und  $p$  Ecken enthält. Es sind zwei Fälle möglich:

a) Zu je zwei Ecken der Karte existiert genau ein Verbindungsweg längs der Kartengrenzen (mindestens ein solcher Weg existiert ja, da die Karte zusammenhängend ist).

In diesem Fall enthält die Karte keinen einzigen geschlossenen Weg; daher hat sie die Gestalt, die Abb. 12 zeigt, und es ist  $s = 1$ .

Wir zeigen, dass sich auf einer solchen Karte mindestens eine Ecke befindet, die nur einer einzigen Grenze angehört, eine sogenannte äußere Ecke (wie  $A_1$  in Abb. 12).

Wir wählen eine beliebige Ecke der Karte. Ist sie keine äußere Ecke, dann gehört sie zu wenigstens zwei Grenzen. Wir bewegen uns auf einer dieser Grenzen bis zu ihrer zweiten Ecke. Ist auch diese Ecke keine äußere, dann endet in ihr noch eine andere Grenze; wir bewegen uns auf dieser Grenze zu ihrem zweiten Ende usw.

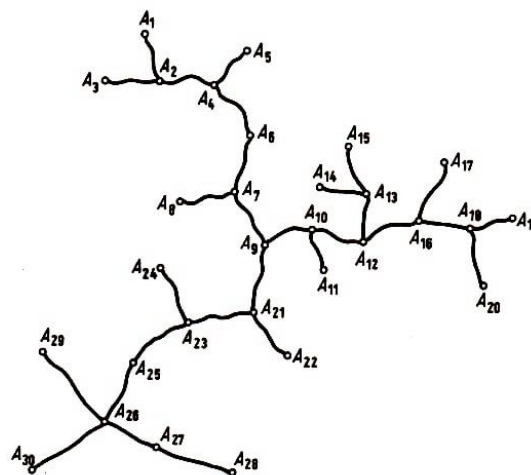


Abb. 12

Da die Karte nach Voraussetzung keine geschlossenen Wege enthält, kommen wir zu keiner der früher berührten Ecken zurück; da die Karte nur endlich viele Ecken hat, kommen wir schließlich zu einer äußeren Ecke.

Wir entfernen diese Ecke und diejenige Grenze, die diese Ecke als Endpunkt hat, und bekommen eine neue Karte, in der  $l' = l - 1 = n$ ,  $s' = s$  und  $p' = p - 1$  ist, wobei diese neue Karte zusammenhängend bleibt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $s' + p' = l' + 2$ , woraus  $s + p = l + 2$  folgt.

b) Es existieren zwei Ecken, die durch wenigstens zwei Wege verbunden sind (Abb. 11). In diesem Fall existiert auf der Karte wenigstens ein geschlossener Weg, der durch diese Ecken geht. Entfernen wir eine der Grenzen dieses Weges (ohne Ecken), so erhalten wir eine neue zusammenhängende Karte, in welcher  $l' = l - 1 = n$ ,  $p' = p$ ,  $s' = s - 1$  ist. Nach Voraussetzung gilt  $s' + p' = l' + 2$ , woraus wieder  $s + p = l + 2$  folgt.

Beispiel 10. Man beweise: Gehen von jeder Ecke einer Karte mindestens drei Grenzen aus (enthält also die Karte keine Ecken wie  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_5$ ,  $A_8$  in Abb. 13), so gibt es ein Land mit höchstens fünf Grenzen.

Lösung. Da von jeder der  $p$  Ecken der Karte nicht weniger als drei Grenzen ausgehen und da jede Grenze zwei Ecken verbindet, gilt

$$\frac{3p}{2} \leq l \quad (4)$$

Wir nehmen jetzt an, jedes der  $s$  Länder habe wenigstens sechs Grenzen; da jede Grenze höchstens zwei Länder trennt, würde

$$\frac{6s}{2} \leq l \quad (5)$$

gelten. Die Ungleichungen (4) und (5) ergeben

$$s + p \leq \frac{1}{3}l + \frac{2}{3}l = l$$

im Widerspruch zum Satz von Euler. Also ist unsere Annahme, jedes Land habe wenigstens sechs Grenzen, falsch.

Aufgabe 8. In einer Ebene seien fünf Punkte gegeben. Man beweise, dass es nicht möglich ist, in dieser Ebene jeden dieser Punkte mit jedem anderen Punkt zu verbinden, ohne dass sich Linien schneiden (Abb. 13).

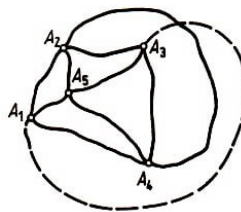


Abb. 13

Andere Beispiele der Anwendung des Satzes von Euler über Karten findet der Leser in [5] bzw. [15].

Aufgabe 9 (Eulerscher Polyedersatz). Man beweise, dass  $s + p = l + 2$  gilt, wenn  $p$  die Anzahl der Ecken,  $l$  die Anzahl der Kanten und  $s$  die Anzahl der Seitenflächen eines konvexen Polyeders ist.<sup>8</sup>

Aufgabe 10. Man beweise, dass jedes konvexe Polyeder drei- oder vier- oder fünfeckige Flächen enthält.

Aufgabe 11. Man beweise, dass kein konvexes Polyeder mit sieben Kanten existiert.

### 2.2.2 Färbungsprobleme

In einer Ebene sei eine beliebige Karte gegeben. Wir nennen sie regulär gefärbt, wenn jedes ihrer Länder mit einer bestimmten Farbe gefärbt ist, und zwar so, dass je zwei Länder, die eine gemeinsame Grenze haben, verschieden gefärbt sind.

Als Beispiel einer regulär gefärbten Karte kann jede geographische Karte dienen. Selbstverständlich kann jede Karte regulär gefärbt werden, wenn man soviel Farben verwendet, wie Länder existieren; jedoch ist eine solche Färbung nicht ökonomisch.

Uns interessiert die minimale Anzahl der Farben, die zur regulären Färbung einer Karte notwendig ist. Offenbar kann man z.B. die in Abb. 14a dargestellte Karte mit zwei Farben regulär

<sup>8</sup>Dieser Satz war schon dem französischen Philosophen, Mathematiker und Physiker René Descartes (1596-1650) bekannt.



färben; für eine reguläre Färbung der Karte, die in Abb. 14b dargestellt ist, sind schon drei Farben nötig; die Karte, die in Abb. 14c dargestellt ist, kann man nur mit vier Farben regulär färben. Bis jetzt wurde noch keine Karte gefunden, die man nicht mit vier Farben hätte regulär färben können.

Als erster lenkte vor mehr als hundert Jahren der bedeutende deutsche Mathematiker A. F. Möbius die Aufmerksamkeit auf diese Tatsache. Bis jetzt haben viele bedeutende Gelehrte versucht, das Vierfarbenproblem zu lösen, d.h. entweder zu beweisen, dass vier Farben zur Färbung jeder Karte ausreichen, oder ein Beispiel für eine Karte zu finden, die nicht mit vier Farben regulär gefärbt werden kann.

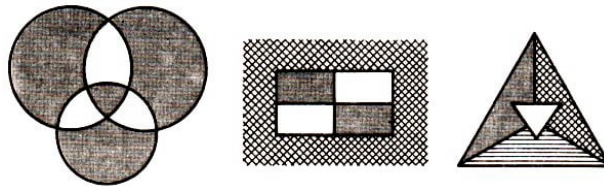


Abb. 14 a)

b)

c)

Bisher ist dies jedoch niemandem auf herkömmliche Weise gelungen.<sup>9</sup>

Man konnte nur beweisen, dass zur regulären Färbung jeder Karte in jedem Fall fünf Farben ausreichen (vgl. Beispiel 14). Es ist nicht schwer, solche Bedingungen zu finden, unter denen man eine Karte mit zwei (Beispiel 12) oder mit drei Farben (Beispiel 13) regulär färben kann. Wir beweisen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Karte mit vier Farben regulär gefärbt werden kann (Beispiel 15): die Frage, ob diese Bedingung von jeder beliebigen Karte erfüllt wird oder ob es eine Karte gibt, die sie nicht erfüllt, bleibt hier offen.

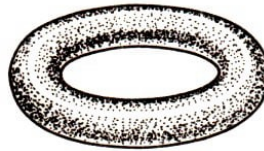


Abb. 15

Es ist interessant zu bemerken, dass für einige Flächen, die anscheinend komplizierter sind als die Ebene, das Problem der Färbung von Karten völlig gelöst ist. So ist z.B. bewiesen, dass auf einem "Autoschlauch" oder auf einem Torus (Abb. 15) zur regulären Färbung einer beliebigen Karte sieben Farben ausreichen, und es existieren Karten, die man mit sechs Farben nicht regulär

<sup>9</sup>Die Vermutung, dass für jede denkbare Landkarte vier Farben genügen, wurde wahrscheinlich zuerst von dem Londoner Mathematikstudenten Francis Guthrie 1852 ausgesprochen, aber erst 1878 durch eine Anfrage auf einer Sitzung der Londoner Mathematischen Gesellschaft richtig bekannt. Daraufhin gaben A. B. Kempe und P. G. Tait 1879 bzw. 1880 je einen "Beweis" an, die jedoch fehlerhaft waren. Der Fehler Kempes wurde erst 1890 durch P. J. Heawood entdeckt; er konnte jedoch den Fünffarbensatz beweisen. Trotz vielfältiger Lösungsversuche, bei denen u.a. die Graphentheorie ganz wesentlich weiterentwickelt wurde, blieb das Vierfarbenproblem ungelöst. Nach Vorarbeiten von H. Heesch konnten Wolfgang Haken und Kenneth Appel mit Hilfe aufwendiger Computerechnung (mehr als 1000 Rechnerstunden!) an der Universität von Illinois in Urbana (USA) die ursprüngliche Vermutung bestätigen; der angegebene Beweis umfasst 56 Seiten Text und 114 Seiten Abbildungen, mehr als 30 Abbildungen je Seite. Die Grundlage bildet die sogenannte Entladungstheorie. Trotz dieses Resultates geht jedoch die Suche nach einem computerunabhängigen Beweis des Satzes von Kempe-Heesch-Appel-Haken weiter.

Färben kann.<sup>10</sup>

Im weiteren werden wir voraussetzen, die Karte enthalte keine nichttrennenden Grenzen, d.h. Grenzen, zu deren beiden Seiten ein und dasselbe Land liegt (wie die Grenze  $A_4A_8$  in Abb. 11), weil anderenfalls die Aufgabenstellung über die reguläre Färbung keinen Sinn hätte.

Wir werden ferner voraussetzen, die Karte enthalte keine Ecken, von denen nur zwei Grenzen ausgehen (wie die Ecke  $A_2$  in Abb. 11), da eine solche Ecke überflüssig ist. Mit anderen Worten, wir werden nur solche Karten betrachten, von deren Ecken mindestens drei Grenzen ausgehen, d.h. Karten, die der Bedingung des Beispiels 10 genügen; das Resultat dieses Beispiels wird im weiteren oftmals benutzt werden.<sup>11</sup>

Für uns wird es außerdem vorteilhaft sein, vorauszusetzen, dass sich auf der Karte nur ein einziges unendliches Gebiet befindet, d.h., dass die Karte keine Grenzen hat, "die ins Unendliche gehen"; man kann zeigen, dass der Verzicht auf diese Bedingung keine einzige der folgenden Schlussfolgerungen ändert.

Eine Karte, in der von jeder Ecke genau drei Grenzen ausgehen, werden wir normal nennen. Es sei eine beliebige Karte  $S$  (Abb. 17a) gegeben. Um jede Ecke dieser Karte, von der mehr als drei Grenzen ausgehen, ziehen wir einen hinreichend kleinen Kreis und fügen ihn einem der Länder hinzu, die an diese Ecke grenzen.

<sup>10</sup>Im Jahre 1959 hat der deutsche Geometer G. Ringel (vgl. [15]) Resultate veröffentlicht, die der endgültigen Lösung des Problems der Färbung von Karten auf einer beliebigen, von der Ebene und von der Kugel verschiedenen Fläche nahekommen. Die kleinste Zahl von Farben, die zur regulären Färbung der Oberfläche eines Körpers notwendig ist, der wie ein "Kugelkörper mit  $p$  durchgehenden Löchern" gebaut ist, wird nach Ringel durch die verhältnismäßig komplizierte Formel

$$\left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rceil$$

gegeben. Dabei bezeichnen die eckigen Klammern den ganzen Teil der eingeklammerten Zahl. So ist für den Torus (Abb. 15), der ein "Loch" hat, diese Zahl gleich

$$\left\lceil \frac{7 + \sqrt{49}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{14}{2} \right\rceil = 7$$

für die "Brezel" mit zwei Löchern (Abb. 16) lautet sie



Abb. 16

$$\left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48 \cdot 2}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{7\sqrt{97}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{16,8...}{2} \right\rceil = 8$$

<sup>11</sup>Bezüglich der regulären Färbung einer Karte stellt diese Voraussetzung aus folgenden Gründen keine Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtungen dar: Wenn von einer Ecke  $A$  nur zwei Grenzen ausgehen, die zu verschiedenen Ecken  $B$  und  $C$  führen, dann ist  $A$  offenbar überflüssig. Anderenfalls entsteht bei der Beseitigung von  $A$  eine sogenannte Schlinge; man kann zunächst diese Schlinge und das von ihr umschlossene Land beseitigen, wobei eine Karte entsteht, zu deren regulären Färbung ebenso viele Farben nötig sind wie für die ursprüngliche Karte. - Anm. d. Red.

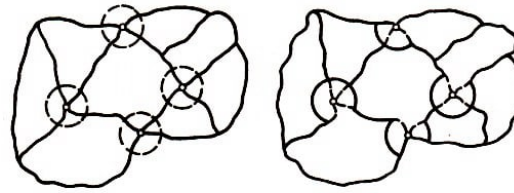


Abb. 17 a)

b)

Wir erhalten dadurch eine normale Karte  $S'$  mit ebensoviel Ländern (Abb. 17b). Aus jeder regulären Färbung der Karte  $S'$  lässt sich aber leicht eine reguläre Färbung der Karte  $S$  mit derselben Anzahl Farben gewinnen und umgekehrt. Aus diesem Grunde werden wir uns bei dem Problem der regulären Färbung von Karten oft auf die Betrachtung normaler Karten beschränken.

Wir untersuchen jetzt die Struktur der einfachsten normalen Karten.<sup>12</sup>

Es sei  $p$  die Anzahl der Ecken,  $l$  die Anzahl der Grenzen und  $s$  die Anzahl der Länder einer normalen Karte; dann gilt  $2l = 3p$ , woraus  $p = \frac{2}{3}l$  folgt. Außerdem gilt nach dem Satz von Euler  $s + p = l + 2$ , also  $s = (l - p) + 2 = \frac{l}{3} + 2$ , und daraus folgt  $s \geq 2$ . Für  $s = 2$  findet man aber  $l = 0$ ; so kann aber eine normale Karte offenbar nicht beschaffen sein.

Wählen wir  $s = 3$ , so erhalten wir  $l = 3$  und  $p = 2$ ; diese einfachste normale Karte hat die in Abb. 18a dargestellte Form. Für  $s = 4$  erhalten wir  $l = 6$  und  $p = 4$ . Wir zeigen, dass die Karte in diesem Fall die in Abb. 18b oder c dargestellte Form hat.

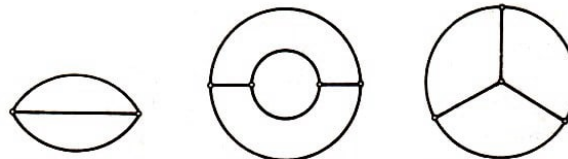


Abb. 18 a)

b)

c)

Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit  $k_2$  die Anzahl der Zweiecke der Karte, mit  $k_3$  die Anzahl ihrer Dreiecke und mit  $k_4$  die Anzahl der Vierecke (da  $p = 4$  ist, kann die Karte keine Länder mit mehr als vier Ecken haben). Dann ist

$$k_2 + k_3 + k_4 = s = 4 \quad \text{und} \quad 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, dass  $k_3$  geradzahlig ist. Die Summe  $k_2 + k_3 + k_4$ , die ja gleich 4 ist, kann bis auf die Reihenfolge der Summanden die Form  $2 + 2 + 0$ ;  $2 + 1 + 1$ ;  $3 + 1 + 0$ ;  $4 + 0 + 0$  haben. Wir betrachten diese Fälle einzeln.

Sind zwei der Werte  $k$  gleich 2 und ist einer gleich 0, dann ist für  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 2$ ,  $k_4 = 0$  die Summe  $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 10 < 12$ ;

für  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 0$ ,  $k_4 = 2$  ist  $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$  - diesem Fall entspricht die Karte, die in Abb. 18b dargestellt ist;

für  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 2$ ,  $k_4 = 2$  ist  $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 14 > 12$ .

Ist einer der Werte  $k$  gleich 2 und sind zwei gleich 1, dann hat nur für  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 2$ ,  $k_4 = 1$  die Summe  $2k_2 + 3k_3 + 4k_4$  den Wert 12; eine solche Karte existiert, sie ist aber nicht normal (Abb. 19).

<sup>12</sup>Hier und im folgenden unterscheiden wir nicht zwischen Karten gleicher Struktur (wie sie Abb. 14c und 27a zeigen), deren Länder und Grenzen man so nummerieren kann, dass in beiden Karten gleich nummerierte Länder durch gleich nummerierte Grenzen getrennt werden.

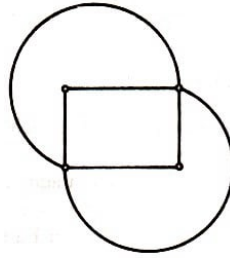


Abb. 19

Ist einer der Werte  $k$  gleich 3 und einer gleich 1, so muss  $k_3 = 0$  sein, da  $k_3$  geradzahlig ist; dann ist  $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 \neq 12$ .

Ist schließlich einer der Werte  $k$  gleich 4 und sind die restlichen 0, so ist nur für  $k_2 = k_4 = 0$ ,  $k_3 = 4$  die Summe  $2k_2 + 3k_3 + 4k_4$  gleich  $2l = 12$ ; die entsprechende Karte hat dann die in Abb. 18c dargestellte Form.

Manchmal werden wir nicht nur die Länder, sondern auch die Grenzen einer Karte färben; dabei werden wir die Farben, mit denen die Grenzen gefärbt sind, mit Ziffern 1, 2, 3, ... bezeichnen. Wenn alle Grenzen, die von ein und derselben Ecke ausgehen, bei dieser Nummerierung verschiedene Nummern erhalten, nennen wir die Nummerierung der Grenzen der Karte regulär (vgl. etwa Abb. 20).

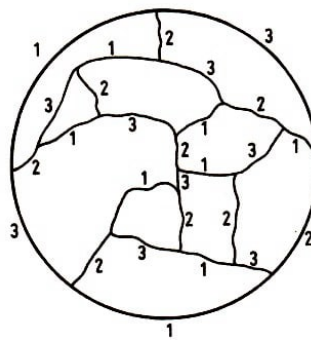


Abb. 20

Wir weisen darauf hin, dass das Problem, die Ecken einer Karte so zu nummerieren, dass "benachbarte" Ecken, d.h. Ecken, die durch eine Grenze verbunden sind, verschiedene Nummern erhalten, ebenfalls mit dem Problem der regulären Färbung der Länder einer Karte zusammenhängt (vgl. [5], dort kann der Leser auch andere Beweise für viele der hier genannten Sätze finden).

Beispiel 11. In einer Ebene seien  $n$  Kreise gegeben. Man beweise, dass man bei beliebiger Anordnung dieser Kreise die so entstandene Karte mit zwei Farben regulär färben kann.

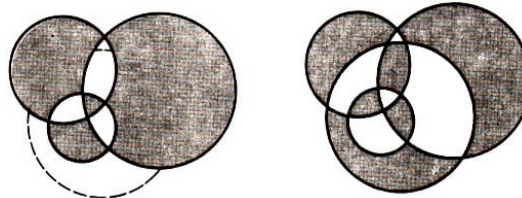


Abb. 21 a)

b)

Lösung. 1. Für  $n = 1$  ist die Behauptung offenbar richtig.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für jede Karte, die von  $n$  Kreisen gebildet wird, richtig. In einer Ebene seien  $n + 1$  Kreise gegeben. Entfernen wir einen dieser Kreise, so erhalten wir eine Karte, die man nach Induktionsvoraussetzung mit zwei Farben regulär färben kann, z.B. mit Schwarz und Weiß (Abb. 21 a).

Danach fügen wir den zuvor entfernten Kreis wieder hinzu und ändern auf der einen seiner Seiten (etwa in seinem Inneren) die Farbe jedes Gebietes in die entgegengesetzte (d.h. schwarz in weiß und umgekehrt); es ist leicht zu sehen, dass wir dabei eine Karte erhalten, die mit zwei Farben regulär gefärbt ist (Abb. 21 b).

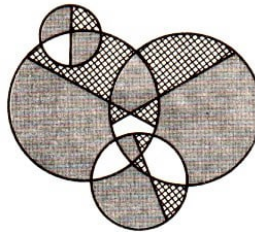


Abb. 22

Aufgabe 12. In einer Ebene seien  $n$  Kreise gegeben. Durch jeden der Kreise wird eine Sehne gelegt. Man zeige, dass die so entstandene Karte mit drei Farben regulär gefärbt werden kann (Abb. 22).

Beispiel 12 (Zweifarbensatz). Eine Karte kann mit zwei Farben genau dann regulär gefärbt werden, wenn von jeder ihrer Ecken eine gerade Anzahl von Grenzen ausgeht.

Lösung. Die Bedingung ist offenbar notwendig; denn würde von irgendeiner Ecke einer Karte eine ungerade Anzahl von Grenzen ausgehen, dann könnten schon die an diese Ecke angrenzenden Länder nicht mit zwei Farben regulär gefärbt werden (Abb. 23).

Den Beweis, dass die Bedingung hinreichend ist, führen wir durch Induktion nach der Anzahl der Grenzen der Karte.

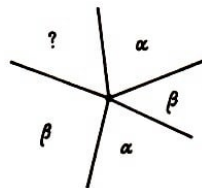


Abb. 23

1. Für eine Karte mit zwei Grenzen ist die Behauptung trivial (Abb. 24).
2. Wir setzen voraus, der Satz sei für alle Karten, in denen von jeder Ecke eine gerade Anzahl von Grenzen ausgeht und bei denen die Gesamtzahl der Grenzen  $n$  nicht überschreitet, richtig. Es sei eine Karte  $S$  gegeben, die  $n + 1$  Grenzen hat und derselben Bedingung genügt.



Abb. 24

Wir beginnen mit einer beliebigen Ecke  $A$  der Karte  $S$  und bewegen uns in beliebiger Richtung längs der Grenzen der Karte. Da die Karte endlich viele Ecken hat, kommen wir schließlich in eine schon durchlaufene Ecke zurück. (Die Karte hat ja keine äußeren Ecken, da es keine nichttrennenden Grenzen gibt.)

Somit können wir einen sich nicht überschneidenden geschlossenen Weg herausnehmen, der aus Grenzen der Karte besteht. Auf diese Weise erhalten wir eine Karte  $S'$  mit weniger Grenzen, in der ebenfalls von jeder Ecke eine gerade Anzahl von Grenzen ausgeht, weil jede Ecke der Karte um eine gerade Anzahl von Grenzen - 0 oder 2 - verringert wird.

Nach Induktionsvoraussetzung kann man die Karte  $S'$  mit zwei Farben regulär färben. Fügen wir den herausgenommenen Weg hinzu und ändern wir etwa im Inneren des Weges alle Farben, so erhalten wir eine reguläre Färbung der Karte  $S$ .

Beispiel 13 (Dreifarbensatz). Eine normale Karte kann genau dann mit drei Farben regulär gefärbt werden, wenn jedes ihrer Länder eine gerade Anzahl von Grenzen besitzt.

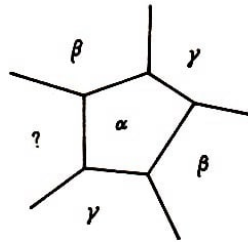


Abb. 25

Beweis. Die Bedingung ist offenbar notwendig; denn hätte die Karte ein Land  $s$  mit einer ungeraden Anzahl von Grenzen, dann wäre es schon unmöglich,  $s$  und die angrenzenden Länder mit drei Farben regulär zu färben (Abb. 25).

Den Beweis, dass die Bedingung hinreichend ist, führen wir durch Induktion nach der Anzahl  $n$  der Länder der Karte.

1. Für eine normale Karte, die aus drei Ländern besteht (Abb. 18a), ist der Satz richtig. Die normale Karte, die aus vier Ländern besteht und die in Abb. 18b dargestellt ist, kann schon mit drei Farben regulär gefärbt werden (es genügt, das "innere" Land mit derselben Farbe zu färben wie das äußere); die normale Karte, die in Abb. 18c dargestellt ist, genügt nicht der Bedingung, dass die Anzahl der Grenzen jedes Land gerade ist.

Somit kann jede normale Karte mit drei oder vier Ländern, bei der jedes Land eine gerade Anzahl von Grenzen hat, mit drei Farben regulär gefärbt werden.

2. Wir setzen voraus, der Satz sei für jede normale Karte richtig, bei der jedes Land der Karte eine gerade Anzahl von Grenzen besitzt und bei der Gesamtzahl der Länder  $n - 1$  oder  $n$  ist. Wir betrachten eine normale Karte  $S$ , die ebenfalls dieser Bedingung genügt und  $n + 1$  Länder besitzt. Wie aus Beispiel 10 folgt, existiert auf der Karte  $S$  ein Land  $\sigma$ , das nicht mehr als fünf Grenzen hat. In unserem Fall wird  $\sigma$  entweder zwei oder vier Grenzen besitzen. Wir betrachten diese Fälle einzeln.

A. Das Land  $\sigma$  habe zwei Grenzen. Es seien  $A$  und  $B$  Ecken dieses Landes,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Nachbarländer von  $\sigma$  (Abb. 28).

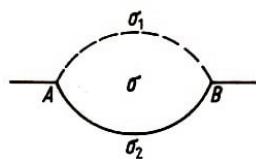


Abb. 26

Entfernt man die Grenze zwischen den Ländern  $\sigma$  und  $\sigma_1$  sowie die Ecken  $A$  und  $B$ , so erhält man eine Karte  $S'$ . Diese ist eine normale Karte, da von ihren Ecken Grenzen in der ursprünglichen Anzahl ausgehen.

Jedes Land der Karte  $S'$  besitzt sogar eine gerade Anzahl von Grenzen; denn die Anzahl der Grenzen von jedem der Länder  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  wurde um 2 verringert, während sich die Anzahl der Grenzen der übrigen Länder nicht geändert hat. Da die Anzahl der Länder der Karte  $S'$  gleich  $n$  ist, kann man sie nach Induktionsvoraussetzung mit drei Farben  $\alpha, \beta, \gamma$  regulär färben.

Die Länder  $\sigma'_1 = \sigma_1 \cup \sigma$  und  $\sigma'_2 = \sigma_2$  seien mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  gefärbt. Stellen wir das Gebiet  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\gamma$ , so erhalten wir eine reguläre Färbung der Karte  $S$ .



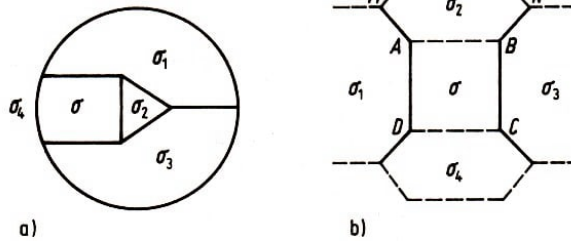


Abb. 27 a)

b)

B. Das Land  $a$  besitze vier Grenzen. Es kann vorkommen, dass gegenüberliegende Grenzen von  $\sigma$  zu Ländern mit einer gemeinsamen Grenze ( $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  in Abb. 27a) oder sogar zu einem einzigen Land (Abb. 18b) gehören.

Die übrigen Grenzen gehören zu zwei Ländern, die nicht aneinander grenzen. Es seien  $\sigma_2$  und  $\sigma_4$  solche Länder (Abb. 27 b).

Wir gliedern die Länder  $\sigma_2$  und  $\sigma_4$  an  $\sigma$  an, indem wir die Grenzen  $AB$  und  $CD$  entfernen. So erhalten wir eine Karte  $S'$ , die offenbar sogar eine normale Karte ist. Auch auf dieser Karte hat jedes Land eine gerade Anzahl von Grenzen.

Ist nämlich die Anzahl der Grenzen des Landes  $\sigma_1$  gleich  $2k_1$  die Anzahl der Grenzen des Landes  $\sigma_2$  gleich  $2k_2$ , die Anzahl der Grenzen des Landes  $\sigma_3$  gleich  $2k_3$  und die Anzahl der Grenzen des Landes  $\sigma_4$  zu gleich  $2k_4$ , dann hat das Land  $\sigma' = \sigma \cup \sigma_2 \cup \sigma_4$  offenbar  $2k_2 + 2k_4 - 4$  Grenzen. Bezeichnen  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  verschiedene Länder, dann hat das Land  $\sigma'_1 = \sigma_1$  offenbar  $2k_1 - 2$  Grenzen und das Land  $\sigma'_3 = \sigma_3$  offenbar  $2k_3 - 2$  Grenzen; bezeichnen  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  das gleiche Land, dann wird dieses Land auf der Karte  $S'$  vier Grenzen weniger besitzen als auf der Karte  $S$ . Die Anzahl der Grenzen der übrigen Länder ändert sich nicht.

Die Karte  $S'$  hat  $n - 1$  Länder, folglich kann sie nach Induktionsvoraussetzung mit drei Farben  $\alpha, \beta, \gamma$  regulär gefärbt werden.

Wir zeigen nun, dass dabei die Länder  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_3$  mit ein und derselben Farbe gefärbt werden können. Das ist klar, wenn  $\sigma'_3$  und  $\sigma'_1$  das gleiche Land bezeichnen.

Anderenfalls sei das Land  $\sigma'$  mit der Farbe  $\alpha$  und das Land  $\sigma'_1$  mit der Farbe  $\beta$  gefärbt. Da längs des Abschnittes  $MN$  von  $\sigma'$  eine ungerade Anzahl  $2k_2 - 3$  von Ländern liegt und die Farben dieser Länder in der Reihenfolge  $\gamma, \beta, \gamma, \beta, \dots, \gamma$  abwechseln müssen, wird das Land  $\sigma'_3$  mit der Farbe  $\beta$  gefärbt. Wir stellen das Land  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\gamma$ , während  $\sigma_2$  und  $\sigma_4$  die Farbe  $\alpha$  behalten. So erhalten wir eine reguläre Färbung der Karte  $S$ .

Beispiel 14 (Fünffarbensatz). Man kann jede normale Karte mit fünf Farben regulär färben.

Beweis. 1. Für Karten, die nicht mehr als fünf Länder haben, ist die Behauptung offensichtlich richtig.

2. Wir setzen voraus, der Satz sei für alle normalen Karten mit  $n - 1$  oder mit  $n$  Ländern gültig, und betrachten eine Karte  $S$ , die aus  $n + 1$  Ländern besteht. Wie in Beispiel 10 gezeigt wurde, enthält die Karte  $S$  wenigstens ein Land  $\sigma$  mit höchstens fünf Grenzen. Im folgenden betrachten wir alle dabei möglichen Fälle.

a) Das Land  $\sigma$  besitze zwei Grenzen (Abb. 26). Es seien  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die zu  $\sigma$  benachbarten Länder. Gliedern wir das Land  $\sigma_1$  an  $\sigma$  an, so erhalten wir eine normale Karte  $S'$  mit  $n$  Ländern. Nach Induktionsvoraussetzung kann die Karte  $S'$  mit fünf Farben regulär gefärbt werden.

Die Länder  $\sigma'_1 = \sigma \cup \sigma_1$  und  $\sigma'_2 = \sigma_2$  werden dabei mit zwei der fünf möglichen Farben gefärbt. Stellen wir das Land  $\sigma$  wieder her, so können wir es sogar mit einer der drei übrigen Farben

färben.

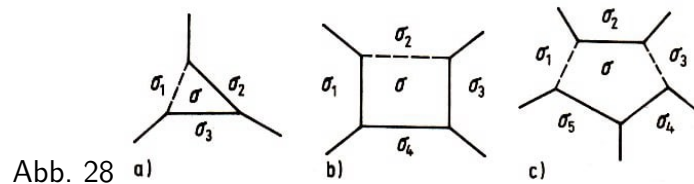


Abb. 28 a)

b)

c)

b) Das Land  $\sigma$  besitze drei Grenzen (Abb. 28a). Wir gliedern  $\sigma_1$  an  $\sigma$  an. Wenn wir die so entstehende Karte  $S'$  mit fünf Farben färben, dann können wir später das Gebiet  $\sigma$  mit einer der beiden Farben färben, die nicht bei der Färbung der Länder  $\sigma'_1 = \sigma \cup \sigma_1$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_2$ ,  $\sigma'_3 = \sigma_3$  verwendet wurden.

c) Das Land  $\sigma$  besitze vier Grenzen (Abb. 28b). Es gibt zwei an  $\sigma$  anliegende Länder, die keine gemeinsame Grenze haben (vgl. Beispiel 13). Wir gliedern eines dieser Länder, etwa  $\sigma_2$ , an  $\sigma$  an und erhalten eine aus  $n$  Ländern bestehende Karte  $S'$ , die nach Induktionsvoraussetzung mit fünf Farben regulär gefärbt werden kann.

Dabei sind die Länder  $\sigma'_1 = \sigma_1$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_2 \cup \sigma$ ,  $\sigma'_3 = \sigma_3$  und  $\sigma'_4 = \sigma_4$  mit höchstens vier der fünf Farben gefärbt (wenn  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_3$  das gleiche Land bezeichnen, sind  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  und  $\sigma'_4$ , mit drei Farben regulär gefärbt). Belassen wir  $\sigma_2$  in der Farbe von  $\sigma'_2$ , dann brauchen wir  $\sigma$  nur mit einer von den Farben von  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  verschiedenen Farbe zu färben.

d) Das Land  $\sigma$  besitze fünf Grenzen (Abb. 28c). Wie in Beispiel 13 gibt es zwei zu  $\sigma$  benachbarte Länder, die nicht aneinander grenzen und nicht zusammenfallen. Es seien  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  solche Länder. Gliedern wir diese beiden Länder an  $\sigma$  an, so erhalten wir eine normale Karte  $S'$ , die  $n - 1$  Länder besitzt. Nach Induktionsvoraussetzung kann die Karte  $S'$  mit fünf Farben regulär gefärbt werden.

Dabei werden die Länder  $\sigma'_1 = \sigma_1 \cup \sigma \cup \sigma_3$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_2$ ,  $\sigma'_4 = \sigma_4$  und  $\sigma'_5 = \sigma_5$  mit irgendwelchen vier der fünf Farben gefärbt. Stellen wir das Land  $\sigma$  wieder her, so können wir es mit der fünften Farbe färben.

Aufgabe 13. Auf einem Globus sind Staaten verteilt, wobei einige aus einem einzigen Teil und andere aus zwei Teilen (ohne gemeinsame Grenzen) bestehen. Man färbe die Karte dieses Planeten regulär, und zwar derart, dass das Territorium jedes Staates, unabhängig davon, ob er aus einem Teil oder aus zwei Teilen besteht, mit einer einzigen Farbe gefärbt wird und dass Staaten mit gemeinsamer Grenze mit verschiedenen Farben gefärbt werden.

Man beweise, dass dies immer möglich ist, wenn man zwölf Farben zur Verfügung hat, dass jedoch elf Farben zu diesem Zweck nicht immer ausreichen.

Beispiel 15 (Satz von Volynskij)<sup>13</sup>. Eine normale Karte kann genau dann mit vier Farben regulär gefärbt werden, wenn sich ihre Grenzen mit drei Ziffern regulär nummerieren lassen.

Lösung. A. Wenn eine normale Karte mit vier Farben regulär färbbar ist, kann man ihre Grenzen mit drei Ziffern regulär nummerieren.

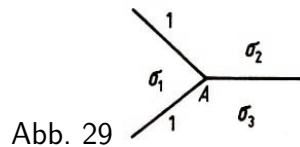
Die normale Karte  $S$  sei mit den vier Farben  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  regulär gefärbt. Wir bezeichnen mit Ziffer 1 die Grenzen zwischen den Ländern, die mit den Farben  $\alpha$  und  $\beta$  bzw. mit den Farben  $\gamma$  und  $\delta$  gefärbt sind, mit Ziffer 2 die Grenzen zwischen den Ländern, die mit den Farben  $\alpha$  und  $\gamma$  bzw. mit den Farben  $\beta$  und  $\delta$  gefärbt sind, und mit Ziffer 3 die Grenzen zwischen den Ländern, die mit den Farben  $\alpha$  und  $\delta$  bzw. mit den Farben  $\beta$  und  $\gamma$  gefärbt sind.

Die erhaltene Nummerierung der Grenzen ist regulär. Denn gingen von einer beliebigen Ecke  $A$

<sup>13</sup>V.V. Volynskij (1923-1943), sowjetischer Mathematiker.



zwei Grenzen aus, die mit ein und derselben Ziffer (z.B. mit Ziffer 1, Abb. 29) bezeichnet sind, dann müssten die Länder  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  die vom Land  $\sigma_1$  durch Grenzen derselben Ziffer abgegrenzt sind ein und dieselbe Farbe haben.



(Wenn  $\sigma_1$  in unserem Beispiel die Farbe  $\alpha$  hat, werden  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  mit der Farbe  $\beta$  gefärbt.) Das kann aber nicht sein, da  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  in einer normalen Karte aneinander grenzen.

B. Wenn man die Grenzen einer normalen Karte mit drei Ziffern regulär nummerieren kann, dann kann man ihre Länder mit vier Farben regulär färben. Den Beweis dieser Behauptung führen wir durch Induktion nach der Anzahl  $n$  der Länder der Karte.

1. Die Grenzen der einfachsten normalen Karte mit drei Ländern (Abb. 18a) kann man eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Ziffern) mit den Ziffern 1, 2, 3 nummerieren.

Wir betrachten die Karte, die Abb. 30a zeigt. Dabei hat die Grenze zwischen den Ländern, die mit den Farben  $\alpha$  und  $\beta$  gefärbt sind, die Nummer 1, die Grenze zwischen den Ländern, die mit den Farben  $\beta$  und  $\delta$  gefärbt sind, die Nummer 2 und die Grenze zwischen den Ländern, die mit den Farben  $\alpha$  und  $\delta$  gefärbt sind, die Nummer 3.

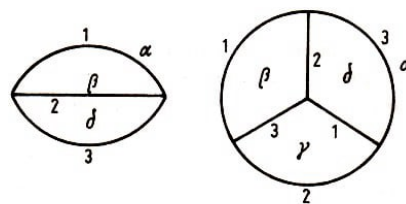


Abb. 30 a)

b)

Eine reguläre Färbung einer Karte  $S$  mit den vier Farben  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , bei der die Grenzen zwischen den Farben  $\alpha$  und  $\beta$  und zwischen den Farben  $\gamma$  und  $\delta$  die Nummer 1, die Grenzen zwischen den Farben  $\alpha$  und  $\gamma$  und zwischen den Farben  $\beta$  und  $\delta$  die Nummer 2 und die Grenzen zwischen den Farben  $\alpha$  und  $\delta$  und zwischen den Farben  $\beta$  und  $\gamma$  die Nummer 3 besitzen, nennen wir zulässig.

Wir haben gezeigt, dass man die einfachste normale Karte, die aus drei Ländern besteht, zulässig mit vier Farben regulär färben kann. Wir zeigen nun, dass dies auch für normale Karten mit vier Ländern zutrifft (Abb. 18b und c).

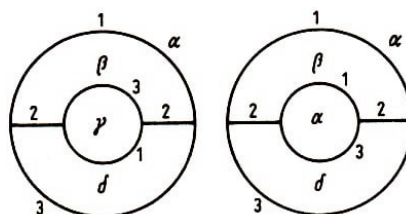


Abb. 31 a)

b)

Die Grenzen der Karte, die in Abb. 18b dargestellt ist, kann man eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Ziffern) mit den Ziffern 1, 2, 3 regulär nummerieren (Abb. 30b). Die Färbung dieser Karte, die in Abb. 30b gezeigt ist, ist zulässig. Die Karte, die in Abb. 30b dargestellt ist, gestattet zwei wesentlich verschiedene Nummerierungen der Grenzen (Abb. 31a und 31b). Die Färbung dieser Karten, die in Abb. 31a und b gezeigt werden, ist ebenfalls zulässig.

2. Wir setzen voraus, dass jede normale Karte, deren Grenzen durch Ziffern regulär nummeriert sind und die aus  $n - 1$  oder  $n$  Ländern besteht, mit vier Farben zulässig gefärbt werden kann. Jetzt betrachten wir eine normale Karte  $S$ , die aus  $n + 1$  Ländern besteht und deren Grenzen durch drei Ziffern regulär nummeriert werden können. Wie wir in Beispiel 10 sahen, gibt es auf der Karte  $S$  ein Land  $\sigma$ , das höchstens fünf Grenzen besitzt.

Wir betrachten nun die verschiedenen Unterfälle einzeln.

a) Das Land  $\sigma$  besitze zwei Grenzen. Die einzig (bis auf die Reihenfolge der Ziffern) mögliche Nummerierung der Grenzen in der Umgebung von  $\sigma$  ist in Abb. 32a dargestellt.

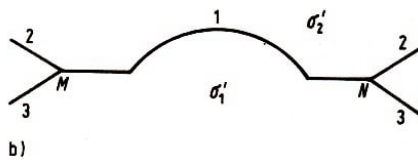
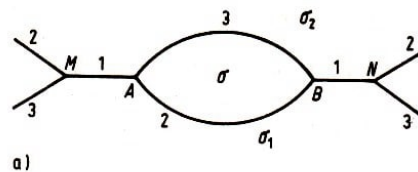


Abb. 34

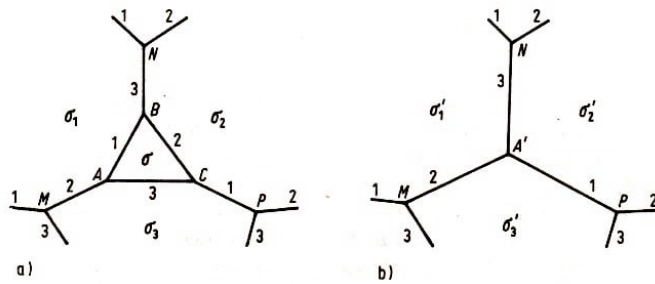


Abb. 32,33

Wir gliedern das Land  $\sigma_1$  dem Land  $\sigma$  an; die neue Grenze  $MN$ , die die Länder  $\sigma'_1 = \sigma_1 \cup \sigma$  und  $\sigma'_2 = \sigma_2$  (Abb. 32b) trennt, trägt die Nummer 1; die Nummern der übrigen Grenzen lassen wir unverändert.

Die entstandene Karte  $S'$  ist normal. Ihre Grenzen sind mit drei Ziffern regulär nummeriert. Da die Anzahl der Länder der Karte  $S'$  gleich  $n$  ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben, wobei das Land  $\sigma'_2$  die Farbe  $\beta$  hat, wenn das Land  $\sigma'_1$  die Farbe  $\alpha$  besitzt. Stellen wir das Land  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\gamma$ , so erhalten wir eine zulässige Färbung der Karte  $S$  mit vier Farben.

b) Das Land  $\sigma$  besitze drei Grenzen. Die einzig mögliche Nummerierung der Grenzen in der Umgebung von  $\sigma$  zeigt Abb. 33a. Wir stellen uns vor, die Karte  $S$  sei auf einer Gummihaut aufgezeichnet, und ziehen das Land  $\sigma$  in einem Punkt zusammen. Dabei gehen die Grenzen  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  verloren und die Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  fallen in einer Ecke  $A'$  zusammen (Abb. 33 b).

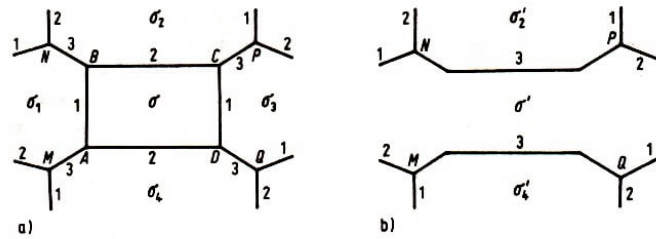


Abb. 36

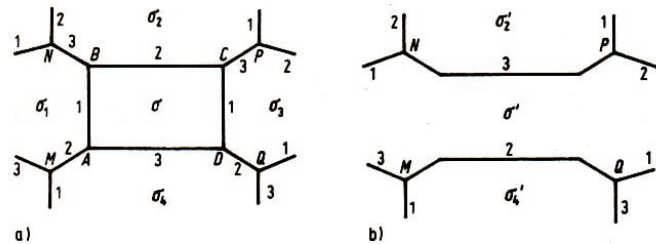
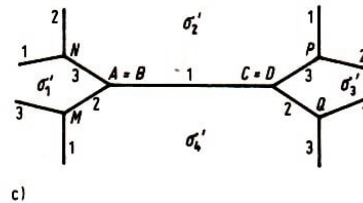


Abb. 34,35



Vertauscht man die Nummerierung der Grenzen  $MA'$ ,  $NA'$ ,  $PA'$  (ehemals  $MA$ ,  $NB$ ,  $PC$ ) und aller übrigen Grenzen nicht, so erhält man eine normale Karte  $S'$  mit regulär nummerierten Grenzen. Da die Anzahl der Länder der Karte  $S'$  gleich  $n$  ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben.

Wenn das Land  $\sigma'_1$  mit der Farbe  $\alpha$  gefärbt wird, muss das Land  $\sigma'_2$  die Farbe  $\delta$  und das Land  $\sigma'_3$  die Farbe  $\gamma$  besitzen. Wir stellen das Land  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\beta$ . So erhalten wir eine zulässige Färbung der Karte  $S$ .

c) Das Land  $\sigma$  besitze vier Grenzen. In diesem Fall sind zwei wesentlich verschiedene Nummerierungen der Grenzen in der Umgebung des Landes  $\sigma$  möglich (Abb. 34a und 35a). Zunächst betrachten wir den ersten Fall.

Es gibt zwei zu  $\sigma$  benachbarte Länder, die keine gemeinsamen Grenzen haben (vgl. Beispiel 13). Da die beiden Paare gegenüberliegender Länder  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  und  $\sigma_2$ ,  $\sigma_4$  im Sinne der Nummerierung der Grenzen gleichberechtigt sind, können wir annehmen, dass die Länder  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  keine gemeinsamen Grenzen haben.

Wir gliedern an  $\sigma$  die Länder  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  an. Die neuen Grenzen  $NP$  und  $MQ$  erhalten die Nummer 3 (Abb. 34b). Die entstandene Karte  $S'$  ist normal mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte  $S'$  gleich  $n - 1$  ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben; dabei muss man die Länder  $\sigma'_2 = \sigma_2$  und  $\sigma'_4 = \sigma_4$  mit der Farbe  $\delta$  färben, wenn man das Land  $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$  mit der Farbe  $\alpha$  färbt. Wir stellen das Land  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\beta$ .

Im zweiten Fall (Abb. 35a), wenn die Länder  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  keine gemeinsamen Grenzen haben, kann man analog vorgehen. In diesem Fall erhält zwar die neue Grenze  $NP$  wieder die Nummer 3, aber die Grenze  $MQ$  die Nummer 2 (Abb. 35b). Das Land  $\sigma'_4 = \sigma_4$  wird mit der Farbe  $\gamma$  gefärbt. Wir stellen das Land  $\sigma$  wieder her und färben es wieder mit der Farbe  $\beta$ .

Schließlich setzen wir voraus, dass die Länder  $\sigma_2$  und  $\sigma_4$  keine gemeinsame Grenze besitzen.

Wir ziehen das Viereck  $ABCD$  so in eine Strecke zusammen, dass die Ecke  $A$  mit der Ecke  $B$  und die Ecke  $C$  mit der Ecke  $D$  zusammenfällt; dabei fällt die Grenze  $BC$  mit der Grenze  $AD$  zusammen.

Die Nummerierung der Grenzen  $MA$ ,  $BN$ ,  $PC$  und  $QD$  bleibe erhalten; die neue Grenze  $BC = AD$  bekomme die Nummer 1 (Abb. 35c). Die entstandene Karte  $S'$  ist normal mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte  $S'$  gleich  $n$  ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben. Wenn das Land  $\sigma'_1$  die Farbe  $\alpha$  hat, muss das Land  $\sigma'_2$  die Farbe  $\delta$ , das Land  $\sigma'_3$  die Farbe  $\alpha$  und das Land  $\sigma'_4$  die Farbe  $\gamma$  haben. Wir stellen nun das Land  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\beta$ .

d) Das Land  $\sigma$  besitze fünf Grenzen. In diesem Fall ist die Nummerierung der Grenzen in der Umgebung des Landes  $\sigma$  (bis auf die Reihenfolge der Ziffern 1, 2, 3) eindeutig bestimmt (Abb. 36 a).

Wir betrachten zuerst den Fall, dass das Land  $\sigma_5$  weder mit  $\sigma_2$  noch mit  $\sigma_3$  gemeinsame Grenzen besitzt.

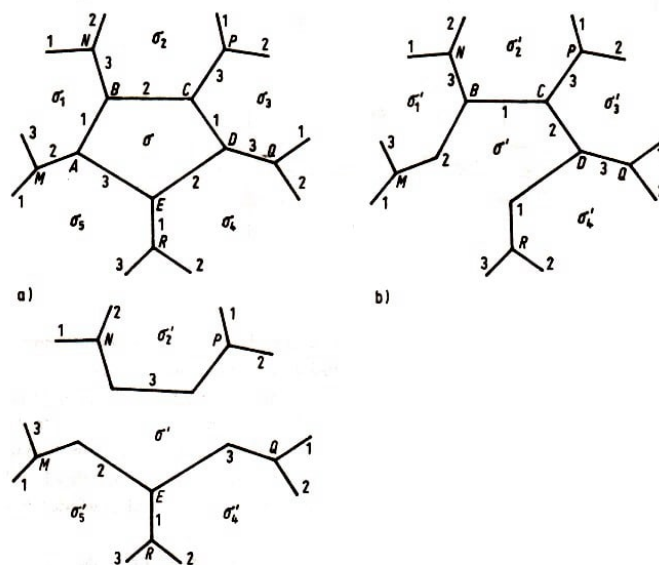


Abb. 36 c)

An  $\sigma$  wird das Land  $\sigma_5$  angegliedert. Die neue Grenze  $MB$  bekommt die Nummer 2, die neue Grenze  $RD$  die Nummer 1, die Grenze  $BC$  nummerieren wir in 1, die Grenze  $CD$  in 2 um. So erhalten wir die normale Karte  $S'$  (Abb. 36 b) mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte  $S'$  gleich  $n$  ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben. Wenn das Land  $\sigma' = \sigma \cup \sigma_5$  mit der Farbe  $\alpha$  gefärbt ist, müssen die Länder  $\sigma'_2$  und  $\sigma'_4$  mit der Farbe  $\beta$  gefärbt werden und die Länder  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_3$  mit der Farbe  $\gamma$ . Wir stellen das Land  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\delta$ .

Wenn das Land  $\sigma_5$  an  $\sigma_2$  grenzt oder  $\sigma_5$  und  $\sigma_2$  das gleiche Land bezeichnen, grenzen die (dann verschiedenen) Länder  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  nicht aneinander.

Wenn aber  $\sigma_5$  und  $\sigma_3$  das gleiche Land bezeichnen oder aneinandergrenzen, können die Länder  $\sigma_2$  und  $\sigma_4$  weder aneinandergrenzen noch identisch sein. Die beiden letzten Fälle sind im Sinne der Nummerierung der Grenzen gleichberechtigt.

Es genügt, den ersten Fall zu betrachten. Wir gliedern die Länder  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  an  $\sigma$  an. Die neue Grenze  $NP$  bekommt die Nummer 3, die neue Grenze  $ME$  die Nummer 2 und die neue

Grenze  $EQ$  die Nummer 3. Dadurch erhalten wir eine normale Karte  $S'$  (Abb. 36c) mit regulär nummerierten Grenzen.

Da die Anzahl der Länder der Karte  $S'$  gleich  $n_1$  ist, kann man sie mit vier Farben regulär färben. Wenn das Land  $\sigma' = \sigma \cup \sigma_1 \cup \sigma_3$  mit der Farbe  $\alpha$  gefärbt ist, müssen die Länder  $\sigma'_2 = \sigma_2$  und  $\sigma'_4 = \sigma_4$  mit der Farbe  $\delta$  und das Land  $\sigma'_5 = \sigma_5$  mit der Farbe  $\gamma$  gefärbt werden. Wir stellen das Land  $\sigma$  wieder her und färben es mit der Farbe  $\beta$ .

Da wir nicht wissen, ob jede normale Karte mit vier Farben regulär gefärbt werden kann; wissen wir auch nicht, ob man die Grenzen jeder normalen Karte mit drei Ziffern regulär nummerieren kann. Man kann nur folgende schwächere Behauptung beweisen.

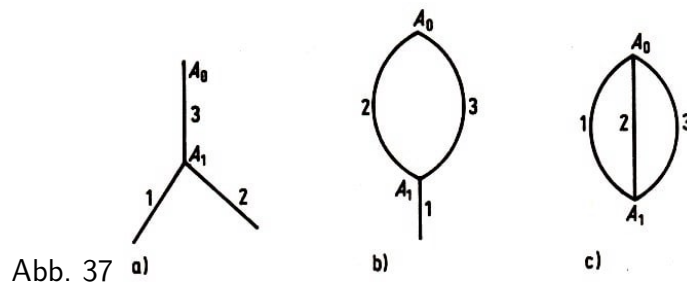
Beispiel 16. Man kann die Grenzen jeder normalen Karte mit vier Ziffern regulär nummerieren.

Beweis. Wir beweisen diese Behauptung für beliebige (nicht notwendig zusammenhängende) Karten, bei denen von jeder Ecke höchstens drei Grenzen ausgehen. Den Beweis führen wir durch Induktion nach der Anzahl  $n$  der Ecken der Karte.

1. Für  $n = 2$  ist die Behauptung offenbar richtig.

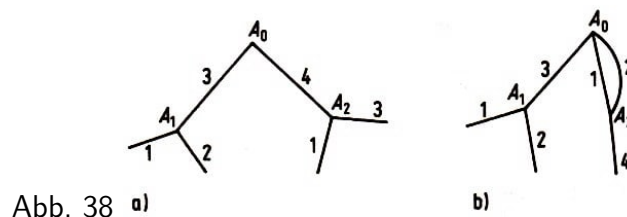
2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für jede Karte, bei der von jeder Ecke höchstens drei Grenzen ausgehen und deren Eckenzahl  $n$  ist, richtig. Jetzt betrachten wir eine Karte  $S$ , die dieselbe Bedingung erfüllt und  $n + 1$  Ecken hat. Wir entfernen eine dieser Ecken, etwa  $A_0$ , zusammen mit den von ihr ausgehenden Grenzen.

So erhalten wir die Karte  $S'$ , bei der von jeder Ecke höchstens drei Grenzen ausgehen und die  $n$  Ecken hat. Nach Induktionsvoraussetzung kann man die Grenzen der Karte  $S'$  mit den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 regulär nummerieren. Wir fügen nun die Ecke  $A_0$  mit ihren Grenzen hinzu. Dann sind drei Fälle möglich:



a) Die Ecke  $A_0$  ist nur zu einer Ecke  $A_1$  der Karte  $S'$  benachbart und mit dieser durch eine, zwei oder drei Grenzen verbunden (Abb. 37a, b, c). In diesem Fall lässt sich die Nummerierung der Grenzen der Karte  $S'$  leicht in die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte  $S$  fortsetzen.

b) Die Ecke  $A_0$  ist zu zwei Ecken  $A_1$  und  $A_2$  der Karte  $S'$  benachbart. Eine der benachbarten Ecken kann mit ihr durch zwei Grenzen verbunden sein (Abb. 38a, b). Man prüft leicht nach, dass man dabei in allen Fällen die Nummerierung der Grenzen der Karte  $S'$  in die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte  $S$  fortsetzen kann.



c) Die Ecke  $A_0$  ist zu drei Ecken  $A_1, A_2, A_3$  der Karte  $S'$  benachbart (Abb. 39). Der ungünstigste Fall liegt vor, wenn von jeder der Ecken  $A_1, A_2, A_3$  der Karte  $S'$  zwei Grenzen ausgehen. In diesem Fall haben wir für jede der Grenzen  $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3$  zwei mögliche Nummern, aus denen nur dann keine drei verschiedenen Nummern ausgewählt werden können, wenn diese drei Paare gleich sind, d.h., wenn die drei Paare von Grenzen der Karte  $S'$ , die durch die Ecken  $A_1, A_2, A_3$  gehen, die gleichen Nummern, etwa 1 und 2, erhalten haben.

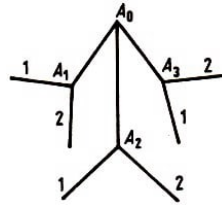


Abb. 39

Wir heben dann auf der Karte  $S'$  einen Weg maximaler Länge hervor, der in der Ecke  $A_1$  beginnt und abwechselnd aus Grenzen mit den Nummern 1 und 3 besteht (ein solcher Weg kann aus einer einzigen Grenze bestehen und in einer der Ecken  $A_2, A_3$  enden).

Dieser Weg kann sich nicht überschneiden, weil die Grenzen der Karte  $S'$  nach Voraussetzung regulär nummeriert sind. Wir ändern nun die Nummern dieses Weges, indem wir die 1 durch die 3 ersetzen und umgekehrt. Dabei bleibt die Nummerierung der Grenzen der Karte  $S'$  regulär, wobei in der neuen Nummerierung die drei Paare von Grenzen, die durch die Ecken  $A_1, A_2$  und  $A_3$  der Karte  $S'$  gehen, nicht mehr in derselben Weise nummeriert sind.

In diesem Fall kann man jedoch leicht die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte  $S'$  in die reguläre Nummerierung der Grenzen der Karte  $S$  fortsetzen.

## 2.3 Vollständige Induktion bei Konstruktionen

Wenn in den Bedingungen einer Konstruktionsaufgabe eine natürliche Zahl auftritt (wenn beispielsweise  $n$ -Ecke zu konstruieren sind), dann lässt sich die Methode der vollständigen Induktion anwenden.

Wir werden eine Reihe von Beispielen der ebenen Geometrie betrachten, wobei wir in diesem Abschnitt auch überschlagene Vielecke (Abb. 40) und beliebige geschlossene Streckenzüge  $A_1A_2\dots A_nA_1$  die wir hier kurz  $n$ -Eck  $A_1A_2\dots A_n$  nennen, untersuchen werden.

Ist  $M$  Mittelpunkt der Strecke  $AB$ , dann erhalten wir  $B$  aus  $A$  durch Spiegelung am Punkt  $M$  (in der Ebene Drehung um  $M$  um  $180^\circ$ ) und  $A$  aus  $B$  ebenfalls durch Spiegelung am Punkt  $M$ ; bezeichnen wir die Spiegelung am Punkt  $M$  mit  $\sigma_M$  und den Bildpunkt von  $X$  bei der Spiegelung an  $M$  mit  $X\sigma_M$  oder  $X^M$ , dann können wir den genannten Sachverhalt durch  $A\sigma_M = A^M = B$  und  $B\sigma_M = B^M = A$  notieren.

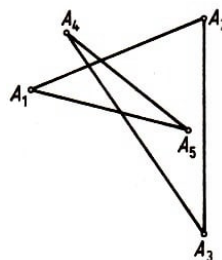


Abb. 40

Mitunter ist es zweckmäßig, mehrere Spiegelungen eines Punktes an Punkten nacheinander auszuführen. Werden die Spiegelungen  $\sigma_P$  und  $\sigma_Q$  nacheinander ausgeführt, dann ist die resultierende Abbildung  $\sigma_P \circ \sigma_Q$  eine Verschiebung (Translation) des ursprünglichen Punktes um den doppelten gerichteten Abstand zwischen  $P$  und  $Q$ .

Werden drei Spiegelungen  $\sigma_P, \sigma_Q, \sigma_R$  nacheinander ausgeführt, dann ist die resultierende Abbildung  $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$  wieder Spiegelung an einem Punkt  $S$ , es ist also

$$\sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R = \sigma_S \quad \text{bzw.} \quad \sigma_P \circ \sigma_Q = \sigma_S \circ \sigma_R$$

folglich stimmt der gerichtete Abstand von  $P$  nach  $Q$  mit dem von  $S$  nach  $R$  überein; bilden  $P, Q, R$  ein Dreieck, dann ist  $S$  speziell die vierte Ecke des Parallelogrammes  $PQRS$  (vgl. [11] und [8]). Diese Aussagen lassen sich vorteilhaft bei der Lösung des folgenden Beispiels verwenden.

Beispiel 17. Es seien  $2n + 1$  Punkte in einer Ebene gegeben. Man konstruiere ein  $(2n + 1)$ -Eck, für welches diese Punkte Seitenmitten sind.

Lösung.

1. Sind im Fall  $n = 1$  die Punkte  $A_1, A_2$  und  $A_3$  gegeben und nicht kollinear (d.h., liegen sie nicht auf einer Geraden), dann ziehen wir zu jeder Dreiecksseite die Parallele durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Parallelen schneiden sich in den Punkten  $X_1, X_2, X_3$  eines gesuchten Dreiecks.

Diese Lösung können wir auch wie folgt erhalten: Wir bestimmen  $X_1$  durch die Gleichung  $\sigma_{A_1} \circ \sigma_{A_2} \circ \sigma_{A_3} = \sigma_{X_1}$  sowie  $X_2, X_3$  durch  $X_2 = X_1^{A_1}$  und  $X_3 = X_2^{A_2}$ . Dann gilt

$$X_3^{A_3} = (X_2^{A_2})^{A_3} = ((X_1^{A_1})^{A_2})^{A_3} = X_1^{X_1} = X_1$$

d.h., dass neben  $A_1$  und  $A_2$  auch  $A_3$  ein Seitenmittelpunkt des Dreiecks  $X_1X_2X_3$  ist.

In der zweiten Lösung wird nicht benötigt, dass  $A_1A_2A_3$  ein Dreieck ist. Durch sie wird also der Fall  $n = 1$  gelöst.

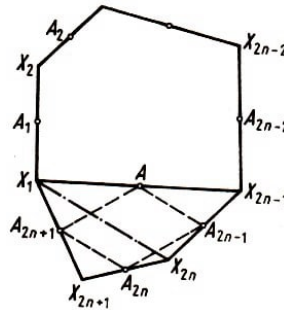


Abb. 41

2. Wir setzen voraus, die Aufgabe sei für je  $2n - 1$  vorgegebene Punkte gelöst. Es seien jetzt  $2n + 1$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$  gegeben. Wir bestimmen einen Punkt  $A$  durch die Gleichung (Abb. 41)

$$\sigma_{A_{2n-1}} \circ \sigma_{A_{2n}} \circ \sigma_{A_{2n+1}} = \sigma_A$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es zu den  $A_1, A_2, \dots, A_{2n-2}, A$  Punkte  $X_1, X_2, \dots, X_{2n-2}, X_{2n-1}$  mit der geforderten Eigenschaft, wobei  $A$  Mittelpunkt von  $X_{2n-1}$  und  $X_1$  ist, d.h., es gilt  $X_{2n-1}^A = X_1$ .

Wir setzen  $X_{2n} = X_{2n-1}^{A_{2n-1}}, X_{2n+1} = X_{2n}^{A_{2n}}$  voraus. Dann gilt schließlich auch noch

$$X_{2n+1}^{A_{2n+1}} = (X_{2n}^{A_{2n}})^{A_{2n+1}} = ((X_{2n-1}^{A_{2n-1}})^{A_{2n}})^{A_{2n+1}} = X_{2n-1}^A = X_1$$

Zu den ebenen Bewegungen gehören die Drehungen und Verschiebungen. Bei der Nacheinanderausführung von Drehungen und Verschiebungen erhalten wir stets wieder Drehungen und Verschiebungen, zu denen wir auch die identische Abbildung zählen (vgl. [11], [8]).



Während die Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen als resultierende Abbildung wieder eine Verschiebung ergibt, kann die resultierende Abbildung bei der Nacheinanderausführung zweier Drehungen sowohl Drehung als auch Verschiebung sein (vgl. [11], S. 121, 122).

Bezeichnen wir die Drehung um einen Punkt  $A$  um den Drehwinkel  $\varphi$  mit  $\rho(A, \varphi)$ , dann können wir genauer folgendes ausführen:

Die Nacheinanderausführung  $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2)$  zweier Drehungen ist eine Drehung oder Verschiebung, je nachdem, ob  $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 0$  oder  $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$  gilt; ist  $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \neq 0$ , dann ist die resultierende Abbildung eine Drehung mit dem Drehwinkel  $\varphi$  um ein geeignetes Drehzentrum; im Fall  $A_1 = A_2$  ist die resultierende Abbildung stets eine Drehung um  $A_1$  (vgl. [11], S. 136/137). Diese Aussagen werden wir bei der Lösung des folgenden Beispiels benutzen.

Beispiel 18.<sup>14</sup> In einer Ebene seien  $n$  Punkte  $A_1, \dots, A_n$  und  $n$  Drehwinkel  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  gegeben. Man konstruiere ein  $n$ -Eck  $X_1 \dots X_n$ , das so beschaffen ist, dass

$$X_1 \rho(A_1, \varphi_1) = X_2, \quad X_2 \rho(A_2, \varphi_2) = X_3, \quad \dots, \quad X_n \rho(A_n, \varphi_n) = X_1$$

gilt (Abb. 44).<sup>15</sup>

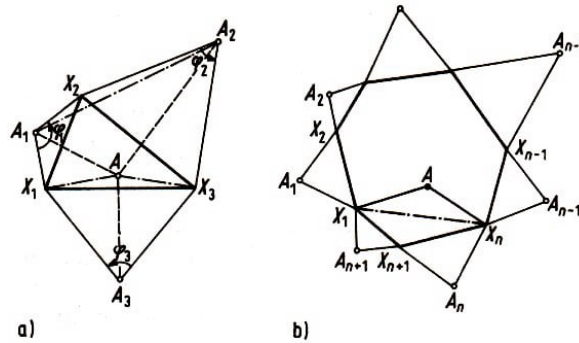


Abb. 42 a)

b)

Lösung. Diese Aufgabe ist nicht immer lösbar. Wenn sie lösbar ist, kann es mehrere Lösungen geben.

1. Es sei  $n = 2$ . Zu gegebenen Punkten  $A_1, A_2$  und Drehwinkeln  $\varphi_1, \varphi_2$  sind Punkte  $X_1, X_2$  mit  $X_1 \rho(A_1, \varphi_1) = X_2$  und  $X_2 \rho(A_2, \varphi_2) = X_1$  zu konstruieren.

Es muss also ein Punkt  $X_1$  mit

$$X_1 = X_2 \rho(A_2, \varphi_2) = X_1 \rho(A_1, \varphi_1) \circ X_2 \rho(A_2, \varphi_2)$$

bestimmt werden. Ist  $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2)$  eine nichtidentische Drehung  $\rho(A, \varphi)$ , dann kann  $X_1 = A$  und  $X_2 = X_1 \rho(A_1, \varphi_1)$  gewählt werden; weitere Lösungen  $X_1$  existieren nicht. Ist die resultierende Abbildung  $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2)$  die identische Abbildung, dann kann jeder Punkt der Ebene als  $X_1$  und  $X_2 = X_1 \rho(A_1, \varphi_1)$  gewählt werden. Ist schließlich die resultierende Abbildung eine nichtidentische Verschiebung, dann ist die Aufgabe nicht lösbar.

Zur näheren Erläuterung dieser Aufgabe wollen wir noch den Fall  $n = 3$  diskutieren (Abb. 42a). Zu gegebenen Punkten  $A_1, A_2, A_3$  und Drehwinkeln  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sind Punkte  $X_1, X_2, X_3$  mit

<sup>14</sup>Das Beispiel 17 kann als Spezialfall dieses Beispiels mit  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{2n+1} = 180^\circ$  aufgefasst werden.

<sup>15</sup>Eine andere Formulierung dieser Aufgabe lautet: Zu gegebenen  $n$  Punkten konstruiere man ein  $n$ -Eck, dessen Seiten Grundlinien gleichschenkliger Dreiecke mit den gegebenen Punkten als Spitzen und den Winkeln  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  an diesen Spitzen sind.



$X_1\rho(A_1, \varphi_1) = X_2$ ,  $X_2\rho(A_2, \varphi_2) = X_3$  und  $X_3\rho(A_3, \varphi_3) = X_1$  zu konstruieren. Es muss also ein Punkt  $X_1$  mit

$$X_1 = X_3\rho(A_3, \varphi_3) = X_2\rho(A_2, \varphi_2) \circ X_3\rho(A_3, \varphi_3) = X_1 \circ \rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \rho(A_3, \varphi_3)$$

bestimmt werden. Nun ist aber  $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \rho(A_3, \varphi_3)$  eine Drehung oder Verschiebung. Dann ist auch  $\tau \circ \rho(A_3, \varphi_3)$  eine Drehung oder Verschiebung. Die Aufgabe ist eindeutig bzw. mehrdeutig, wobei alle Punkte der Ebene Lösungen sind, bzw. nicht lösbar, je nachdem, ob  $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \rho(A_3, \varphi_3)$  eine nichtidentische Drehung, die identische Abbildung bzw. eine nichtidentische Verschiebung ist.

2. Wir setzen voraus, dass  $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \dots \circ \rho(A_n, \varphi_n)$  Drehung oder Verschiebung ist. Gegeben seien nun  $n + 1$  Punkte  $A_1, \dots, A_{n+1}$  und Drehwinkel  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Zur Lösung der Aufgabe ist ein Punkt  $X_1$  zu finden, für den

$$X_1 = X_1 \circ \rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \dots \circ \rho(A_{n+1}, \varphi_{n+1})$$

gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\rho(A_1, \varphi_1) \circ \rho(A_2, \varphi_2) \circ \dots \circ \rho(A_n, \varphi_n) = \tau$  eine Drehung oder Verschiebung. Nun ist es leicht, die Lösbarkeit der Aufgabe zu diskutieren.

Aufgabe 14. In einer Ebene seien  $n$  Punkte gegeben. Man konstruiere ein  $n$ -Eck, für das diese Punkte Eckpunkte von Dreiecken sind, die auf den Seiten des  $n$ -Ecks konstruiert werden; dabei sollen die Dreiecke vorgegebene Drehwinkel bei diesen Eckpunkten und vorgegebene Seitenverhältnisse besitzen.<sup>16</sup>

Beispiel 19. In einer Ebene seien ein Kreis und  $n$  Punkte gegeben. Man beschreibe diesem Kreis ein  $n$ -Eck ein, dessen Seiten bzw. deren Verlängerungen in einer vorgeschriebenen Reihenfolge durch die gegebenen Punkte hindurchgehen.

Lösung. Diese Aufgabe ist schwierig. Um sie zu lösen, werden wir die vollständige Induktion auf ganz unerwartete Weise anwenden, nämlich nicht nach der Anzahl  $n$  der Seiten des Vielecks. Statt dessen werden wir die allgemeinere Aufgabe betrachten, ein  $n$ -Eck zu konstruieren, bei dem  $k$  benachbarte Seiten oder deren Verlängerungen in einer vorgeschriebenen Reihenfolge durch  $k$  gegebene Punkte hindurchgehen, während die übrigen  $n - k$  Seiten in einer ebenfalls vorgeschriebenen Reihenfolge parallel zu gegebenen Geraden sind. Diese Aufgabe geht für  $k = n$  in die ursprüngliche über. Wir führen die Induktion nach der Zahl  $k$ .

1. Für  $k = 1$  haben wir folgende Aufgabe: Einem Kreis ist ein  $n$ -Eck einzubeschreiben, dessen Seite  $A_n A_1$  oder deren Verlängerung durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht, während die  $n - 1$  Seiten  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$  der Reihe nach parallel zu gegebenen Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  sind.

Dabei ist zugelassen, dass benachbarte Punkte  $A_k, A_{k+1}$  zusammenfallen, wenn die Parallele zu  $l_k$  durch  $A_k$  eine Tangente ist.

Wir setzen zunächst voraus, die Aufgabe sei schon gelöst und ein gesuchtes Vieleck konstruiert (Abb. 43a, b).

<sup>16</sup>Diese Aufgabe ist als Verallgemeinerung des Problems im Beispiel 18 mit den gleichschenkligen Dreiecken  $A_1 X_1 X_2, A_2 X_2 X_3, \dots$  aufzufassen. Demzufolge sind hier Drehstreckungen statt Drehungen zu betrachten.

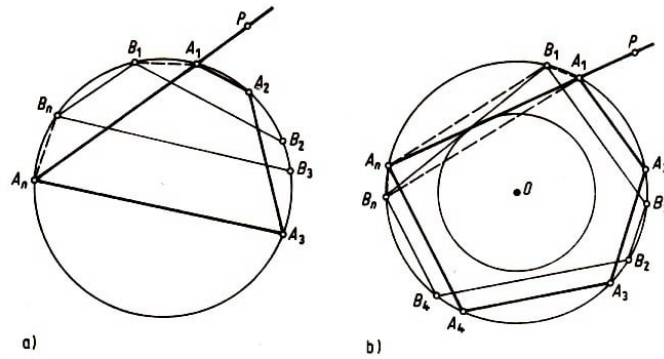


Abb. 43 a)

b)

Wir wählen auf dem Kreis einen beliebigen Punkt  $B_1$  und konstruieren ein einbeschriebenes Vieleck  $B_1B_2\dots B_n$ , dessen Seiten  $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{n-1}B_n$  der Reihe nach zu  $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  parallel sind; dabei ist  $B_k = B_{k+1}$  genau dann zugelassen, wenn die Parallele zu  $l_k$  durch  $B_k$  Tangente ist.

Wir betrachten die Menge der Drehungen um den Kreismittelpunkt  $O$ . Die Drehung, die  $A_1$  auf  $B_1$  abbildet, habe den Drehwinkel  $\varphi_1$ . (Dabei kann  $\varphi_1$  als Maß des gerichteten Bogens  $\widehat{A_1B_1}$  aufgefasst werden.) Entsprechend werden  $\varphi_2, \dots, \varphi_n$  erklärt. Wegen der vorhandenen Parallelitäten gilt  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_3 = \dots$  (vgl. [11], Satz A auf S. 142).

Fall 1. Es sei  $n$  gerade. Dann gilt  $\varphi_1 = -\varphi_n$ . Nach dem genannten Satz A liegen  $A_1, A_n$  und  $B_1, B_n$  in zueinander parallelen Geraden (Abb. 43a). Um die Aufgabe zu lösen, können wir von einem beliebigen Punkt  $B$ , des Kreises ausgehen und die Parallele  $g$  zu  $g_{B_1B_n}$  (für  $B_1 = B_n$  Tangente) durch  $P$  betrachten. Falls diese Gerade  $g$  den Kreis trifft, kann leicht eine Lösung angegeben werden; das ist z.B. für alle Punkte  $P$  der Kreisfläche erfüllt. Anderenfalls ist die Aufgabe nicht lösbar.

Fall 2. Es sei  $n$  ungerade. Dann gilt  $\varphi_1 = \varphi_n$ . Nach dem oben genannten Satz A liegen  $A_1, B_n$  und  $B_1, A_n$  in zueinander parallelen Geraden (Abb. 43 b).

Bei der Spiegelung am Lot von  $O$  auf diese Geraden werden jeweils  $A_1$  und  $B_n$  sowie  $B_1$  und  $A_n$  vertauscht, d.h.. die Punktepaaire  $A_1, A_n$  und  $B_1, B_n$  liegen in Tangenten eines Kreises um  $O$ , oder  $O$  liegt in  $g_{A_1A_n}$  und  $g_{B_1B_n}$ .

Um die Aufgabe zu lösen, können wir von einem beliebigen Punkt  $B$ , des Kreises ausgehen und  $g_{B_1B_n}$  (für  $B_1 = B_n$  Tangente) bestimmen. Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit ist die Bedingung, dass der Punkt  $P$  vom Kreismittelpunkt keinen kleineren Abstand hat als diese Gerade.

Wenn die Bedingung erfüllt ist, dann können wir  $g_{B_1B_n}$  um  $O$  derart drehen, dass ihr Bild  $g$  durch  $P$  geht. Dabei geht  $B_1$  in einen Punkt  $A_1$  des Kreises über und es kann leicht eine Lösung angegeben werden. Hinreichend für die Lösbarkeit ist z.B., dass  $P$  kein innerer Kreispunkt ist.

2. Wir setzen voraus, die Aufgabe, ein in den Kreis einbeschriebenes  $n$ -Eck zu konstruieren, von dem  $k$  benachbarte Seiten oder deren Verlängerungen in einer vorgeschriebenen Reihenfolge durch  $k$  Punkte hindurchgehen, während die übrigen  $n - k$  Seiten in einer ebenfalls vorgeschriebenen Reihenfolge parallel zu gegebenen Geraden sind, sei gelöst.

Zu konstruieren ist ein Vieleck  $A_1A_2\dots A_n$ , das dem Kreis einbeschrieben ist und bei dem die  $k + 1$  benachbarten Seiten  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k+1}A_{k+2}$  oder deren Verlängerungen der Reihe nach durch  $k + 1$  gegebene Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{k+1}$  hindurchgehen und die übrigen  $n - k - 1$  Seiten in einer vorgegebenen Reihenfolge zu gegebenen Geraden parallel sind.

Um diese Aufgabe auf die Induktionsvoraussetzung zurückzuführen, wollen wir  $P_1$  und  $P_2$  durch  $g_{P_1P_2}$  und einen geeigneten Punkt  $P'_2$  "ersetzen".

Wir setzen zunächst voraus, dass  $A_1A_2\dots A_n$  Lösung der Aufgabe ist (Abb. 44). Die Parallele  $g$  zu  $g_{P_1P_2}$  durch  $A_1$  möge den Kreis in  $A'_2$  treffen, wobei  $A'_2 = A_1$  nur dann zugelassen ist, wenn  $g$  Tangente ist.

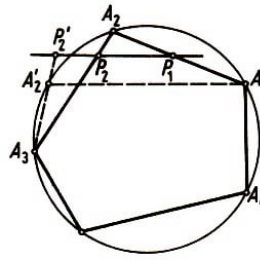


Abb. 44

Die Sekante oder Tangente durch  $A'_2$  und  $A_3$  möge  $g_{P_1P_2}$  in  $P'_2$  schneiden. Dann gelten die folgenden gleichsinnigen Kongruenzen der gerichteten Winkel zwischen Geraden (vgl. [11], besonders S. 144):

$$(g_{A_1A_2}, g_{P_1P_2}) \cong (g_{A_1A_2}, g_{A_1A'_2}) \cong (g_{A_2A_3}, g_{A'_2A_3})$$

folglich ist  $P_1P'_2A_3A_2$  ein Sehnenviereck bezüglich eines geeigneten zweiten Kreises. Da  $A_2A_3$  gemeinsame Sehne beider Kreise ist, hat  $P_2$  bezüglich dieser Kreise dieselbe Potenz (Sekanten- bzw. Sehnensatz).

Somit lässt sich  $P'_2$  aus  $P_1$  und  $P_2$  ohne Kenntnis der Lösung  $A_1A_2\dots A_n$  konstruieren. Nach Induktionsvoraussetzung können wir ein  $n$ -Eck  $A_1A_2A_3\dots A_n$  konstruieren. Nun ist es nicht schwierig, ein gesuchtes  $n$ -Eck  $A_1A_2\dots A_n$  zu konstruieren. Ist die in Beispiel 19 formulierte Aufgabe nach 1. und 2. gelöst?

Aufgabe 15. Man beschreibe einem gegebenen Kreis ein  $n$ -Eck ein, von dem  $k$  (nicht unbedingt benachbarte) Seiten durch  $k$  gegebene Punkte hindurchgehen, während die übrigen  $n - k$  Seiten zu gegebenen Geraden parallel sind.

Beispiel 20. Es seien zwei parallele Geraden  $l$  und  $l_1$  gegeben. Mit alleiniger Hilfe eines Lineals zerlege man die Strecke  $AB$  auf der Geraden  $l$  in  $n$  deckungsgleiche Teile.

Lösung. 1. Es sei  $n = 2$ . Einen beliebigen Punkt  $S$  der Ebene, der nicht auf den Geraden  $l$  und  $l_1$  liegt, verbinden wir mit den Punkten  $A$  und  $B$  (Abb. 45 a). Wir bezeichnen mit  $C$  und  $D$  die Schnittpunkte der Geraden  $g_{AS}$  bzw.  $g_{BS}$  mit der Geraden  $l_1$ .

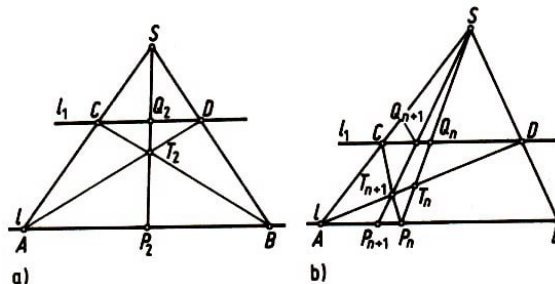


Abb. 45 a)

b)

Den Schnittpunkt der Geraden  $g_{AD}$  und  $g_{BC}$  bezeichnen wir mit  $T_2$ , den Schnittpunkt der Geraden  $g_{ST_2}$  und  $l$  mit  $P_2$ . Wir beweisen, dass der Punkt  $P_2$  der gesuchte ist, d.h., dass  $\overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{P_2B}$  gilt.

Mit  $Q_2$  bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden  $g_{ST_2}$  und  $l_1$ . Nach dem Strahlensatz gelten die Beziehungen

$$\frac{\overrightarrow{P_2B}}{\overrightarrow{Q_2C}} = \frac{\overrightarrow{T_2B}}{\overrightarrow{T_2C}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{DC}} \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{P_2A}}{\overrightarrow{Q_2C}} = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$$

Folglich ist  $\frac{\overrightarrow{P_2B}}{\overrightarrow{Q_2C}} = \frac{\overrightarrow{AP_2}}{\overrightarrow{Q_2C}}$ , und daher gilt

$$\overrightarrow{AP_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2. Wir setzen nun voraus, wir hätten mit alleiniger Hilfe eines Lineals einen solchen Punkt  $P_n$  der Strecke  $AB$  konstruiert, für den  $\overrightarrow{AP_n} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$  gilt.

Außerhalb von  $l$  und  $l_1$  wählen wir einen beliebigen Punkt  $S$  und bezeichnen mit  $T_n$  und  $Q_n$  die Schnittpunkte der Geraden  $g_{SP_n}$  mit  $g_{AD}$  bzw.  $l_1$  (Abb. 45b).

Den Schnittpunkt  $T_{n+1}$  der Geraden  $g_{AD}$  und  $g_{CP_n}$  verbinden wir mit  $S$ . Die Schnittpunkte von  $g_{ST_{n+1}}$  mit den Geraden  $l_1$  und  $l$  bezeichnen wir mit  $Q_{n+1}$  bzw.  $P_{n+1}$ . Wir beweisen, dass  $P_{n+1}$  der gesuchte Punkt ist, d.h., dass

$$\overrightarrow{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$$

gilt.

Nach dem Strahlensatz gelten die Beziehungen

$$\frac{\overrightarrow{P_nP_{n+1}}}{\overrightarrow{CQ_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{P_nT_{n+1}}}{\overrightarrow{CT_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{P_nA}}{\overrightarrow{CB}} \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{AP_{n+1}}}{\overrightarrow{CQ_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} \quad (6,7)$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) erhalten wir

$$\frac{\overrightarrow{P_nP_{n+1}}}{\overrightarrow{AP_{n+1}}} = \frac{\overrightarrow{P_nA}}{\overrightarrow{AB}} = -\frac{1}{n}, \quad \overrightarrow{AP_{n+1}} = \overrightarrow{AP_n} + \overrightarrow{P_nP_{n+1}} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{n}\overrightarrow{AP_{n+1}}$$

und schließlich  $\overrightarrow{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$ .

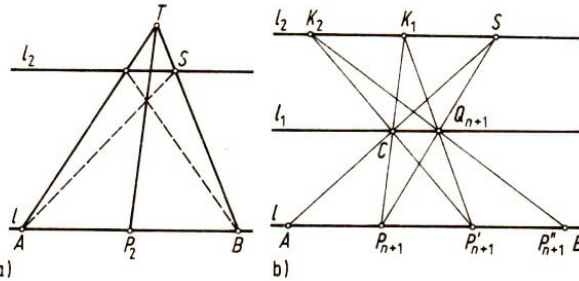


Abb. 46 a)

Um die folgenden Punkte  $P'_{n+1}$ ,  $P''_{n+1}$ , ... der Zerlegung zu finden, genügt es, nach demselben Verfahren die Strecken

$$\overrightarrow{P_{n+1}P'_{n+1}} = \frac{1}{n}\overrightarrow{P_{n+1}B}, \quad \overrightarrow{P'_{n+1}P''_{n+1}} = \frac{1}{n-1}\overrightarrow{P'_{n+1}B} \quad \text{usw.}$$

zu konstruieren.

Bemerkung. Bei der Konstruktion der Punkte  $P'_{n+1}$ ,  $P''_{n+1}$  kann man auch wie folgt verfahren: Mit Hilfe des Punktes  $P_2$  kann man durch den Punkt  $S$  die Gerade  $l_2 \parallel l$  hindurchlegen (vgl. Abb. 45a, bei der der Punkt  $T$  auf  $g_{BS}$  beliebig gewählt wurde). Es sei  $K_1$  der Schnittpunkt der Geraden  $g_{P_{n+1}C}$  mit  $l_2$  und  $P'_{n+1}$  der Schnittpunkt der Geraden  $g_{K_1Q_{n+1}}$  mit  $l$  (Abb. 46 b). Dann ist leicht nachzuweisen, dass  $\overrightarrow{P_{n+1}P'_{n+1}} \parallel \overrightarrow{AP_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$  ist<sup>17</sup>. Die Konstruktion der folgenden Punkte  $P''_{n+1}$ ,  $P'''_{n+1}$ , ... verläuft analog.

Aufgabe 16. Man konstruiere mit Hilfe eines Zirkels gegebener Schenkelöffnung  $a$  und eines Lineals eine Strecke der Länge  $\frac{a}{n}$ .

<sup>17</sup>Das Zeichen  $\parallel$  bedeutet Parallelgleichheit (vgl. auch [11], S. 125).

## 2.4 Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion

Wir behandeln nun einige Aufgaben zur Bestimmung von Figuren mit Hilfe vollständiger Induktion.

Beispiel 21. Auf den Seiten des konvexen  $n$ -Ecks  $A_1 \dots A_n$  werden die Strecken  $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$  abgetragen. Man bestimme die Menge der inneren Punkte  $M$  des Vielecks, für welche die Summe der Flächeninhalte der Dreiecksflächen  $MB_1C_1, MB_2C_2, \dots, MB_nC_n$  konstant ist. (gleich der Summe  $F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0B_2C_2} + \dots + F_{\Delta M_0B_nC_n}$  ist, wobei  $M_0$  ein bestimmter Punkt im Innern des Vielecks ist).

Lösung. 1. Es sei  $n = 3$  (Abb. 47). Auf den Seiten  $A_3A_2$  und  $A_3A_1$  des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  tragen wir die Strecken  $A_3P \cong BC_2$  und  $A_3Q \cong B_3C_3$  ab.

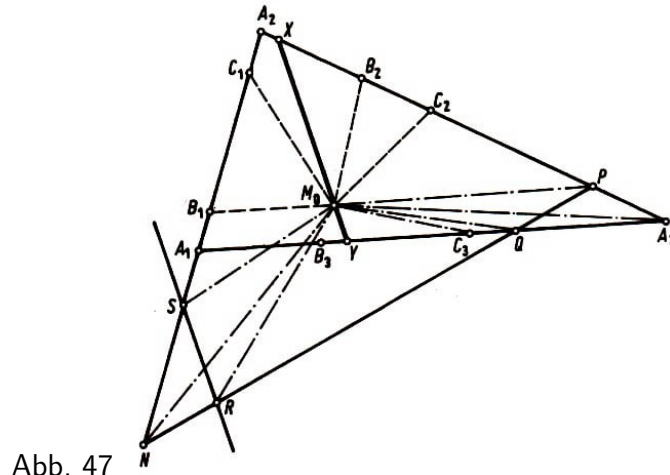


Abb. 47

Dann gilt<sup>18</sup>

$$F_{\Delta M_0B_2C_2} + F_{\Delta M_0B_3C_3} = F_{\Delta M_0PA_3} + F_{\Delta M_0QA_3} = F_{\Delta PQA_3} + F_{\Delta M_0PQ}$$

also

$$F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0B_2C_2} + F_{\Delta M_0B_3C_3} = F_{\Delta PQA_3} + (F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0PQ})$$

Entsprechend gilt

$$F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MB_2C_2} + F_{\Delta MB_3C_3} = F_{\Delta PQA_3} + (F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MPQ})$$

Daher ist die gesuchte Figur durch folgende Bedingung charakterisiert:

$$F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MPQ} = F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0PQ}$$

Es sei  $N$  der Schnittpunkt der Geraden  $g_{A_1A_2}$  und  $g_{PQ}$  (wenn diese Geraden parallel sind, wird die gesuchte Figur eine Strecke parallel zu diesen Geraden). Wir tragen auf den Schenkeln des Winkels  $\angle A_2NP$  die Strecken  $NR \cong PQ$  und  $NS \cong B_1C_1$  ab; dann gilt

$$F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0PQ} = F_{\Delta M_0NS} + F_{\Delta M_0NR} = F_{\Delta NRS} + F_{\Delta M_0RS}$$

und entsprechend

$$F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MPQ} = F_{\Delta NRS} + F_{\Delta MRS}$$

Folglich besteht die gesuchte Figur aus den Punkten  $M$ , die innerhalb des Dreiecks liegen und für die  $F_{\Delta MRS} = F_{\Delta M_0RS}$  gilt, d.h., es ist eine Strecke  $XY$  einer Geraden, die durch den Punkt  $M_0$  verläuft (und parallel zur Geraden  $g_{RS}$  ist).<sup>19</sup>

<sup>18</sup>Wir nehmen hier an, der Punkt  $M_0$  liege im Innern des Vierecks  $A_1A_2PQ$ ; anderenfalls würde sich die Überlegung geringfügig ändern.

<sup>19</sup>Es wäre möglich, die Induktion mit  $n = 2$  zu beginnen, wenn das "2-Eck" als  $n$ -Eck aus zwei Strecken mit gemeinsamem Endpunkt definiert wird.

2. Wir nehmen nun an, wir wüssten schon, dass die gesuchte Figur für das  $n$ -Eck aus einer Strecke besteht (die selbstverständlich durch den Punkt  $M_0$  hindurchgeht), und betrachten jetzt das  $(n+1)$ -Eck  $A_1A_2\dots A_nA_{n+1}$ .

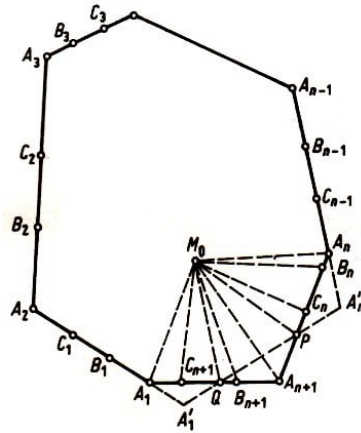


Abb. 48

Es seien  $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n, B_{n+1}C_{n+1}$  auf seinen Seiten abgetragene Strecken und  $M_0$  ein Punkt im Innern dieses  $(n+1)$ -Ecks (Abb. 48). Auf den Schenkeln des Winkels  $\angle A_1A_{n+1}A_n$  tragen wir vom Scheitel aus die Strecken  $A_{n+1}P \cong B_nC_n$  und  $A_{n+1}Q \cong B_{n+1}C_{n+1}$  ab. Dann gilt für einen Punkt  $M$  der gesuchten Figur

$$F_{\Delta MB_nC_n} + F_{\Delta MB_{n+1}C_{n+1}} = F_{\Delta MA_{n+1}P} + F_{\Delta MA_{n+1}Q} = F_{\Delta A_{n+1}PQ} + F_{\Delta MPQ}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} F_{\Delta MB_1C_1} + F_{\Delta MB_2C_2} + \dots + F_{\Delta MB_{n-1}C_{n-1}} + F_{\Delta MPQ} \\ = F_{\Delta M_0B_1C_1} + F_{\Delta M_0B_2C_2} + \dots + F_{\Delta M_0B_{n-1}C_{n-1}} + F_{\Delta M_0PQ} \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die gesuchte Figur eine Strecke, die durch den Punkt  $M_0$  verläuft.

Anhand der Lösung dieser Aufgabe lässt sich auch eine Methode zur Konstruktion der gesuchten Figur finden.

Aufgabe 17. Gegeben seien  $n$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_n$  und auf jeder von ihnen eine Strecke  $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$ , ferner ein Punkt  $M_0$ . Man bestimme die Menge der Punkte  $M$ , für welche die algebraische Summe der Flächeninhalte der Dreiecksflächen  $MB_1C_1, MB_2C_2, \dots, MB_nC_n$  gleich der entsprechenden Summe für den Punkt  $M_0$  ist.

Dabei ist der Flächeninhalt der Dreiecksfläche  $MB_iC_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) positiv zu rechnen, wenn der Punkt  $M$  auf der gleichen Seite der Geraden  $l_i$ , wie der Punkt  $M_0$  liegt, anderenfalls negativ.

Aufgabe 18. Man zeige, dass in einem Viereck, das einem Kreis umschrieben ist, die Mitten der Diagonalen auf einer Geraden durch den Kreismittelpunkt liegen (Satz von Newton; vgl. Abb. 49).

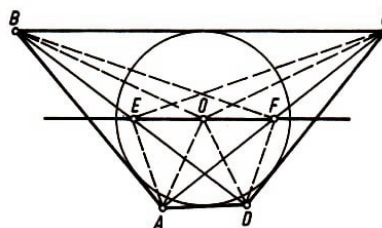


Abb. 49

Aufgabe 19. Man zeige, dass die Gerade, welche die Mittelpunkte der Diagonalen eines konvexen Vierecks (das weder ein Trapez noch ein Parallelogramm ist) verbindet, die Strecke halbiert, welche die Schnittpunkte der Verlängerungen gegenüberliegender Seiten verbindet (Satz von Gauß; vgl. Abb. 50).

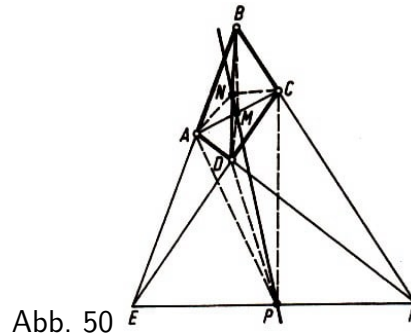


Abb. 50

Beispiel 22. Gegeben seien  $n$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  und  $n$  (positive oder negative reelle) Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Man bestimme die Menge der Punkte, für welche die Summe

$$a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 + \dots + a_n l(MA_n)^2$$

konstant ist.

Lösung. 1. Es sei  $n = 2$ . Wir wollen zunächst annehmen, die beiden Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  seien positiv. Auf der Strecke  $A_1A_2$  wählen wir den Punkt  $O$ , der  $A_1A_2$  im Verhältnis  $a_2 : a_1$  teilt. Dann gilt also

$$l(OA_1) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2) \quad , \quad l(OA_2) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} l(A_1A_2) \quad (*)$$

Nun sei  $M$  ein beliebiger Punkt der Ebene und  $H$  Fußpunkt des Lotes, das von  $M$  auf die Gerade  $g_{A_1A_2}$  gefällt wird (Abb. 51). Dann ist nach dem Kosinussatz

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 &= l(MO)^2 + l(A_1O)^2 \pm l(A_1O)l(HO) \\ l(MA_2)^2 &= l(MO)^2 + l(A_2O)^2 \pm l(A_2O)l(HO) \end{aligned}$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen mit  $l(A_2O)$  und die zweite mit  $l(A_1O)$  multiplizieren und die übereinanderstehenden Glieder addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} &l(MA_1)^2 \cdot l(A_2O) + l(MA_2)^2 \cdot l(A_1O) \\ &= l(MO)^2 (l(A_2O) + l(A_1O)) + l(A_1O)^2 \cdot l(A_2O) + l(A_2O)^2 \cdot l(A_1O) \\ &= l(MO)^2 \cdot l(A_1A_2) + l(A_1O) \cdot l(A_2O) \cdot l(A_1A_2) \end{aligned}$$

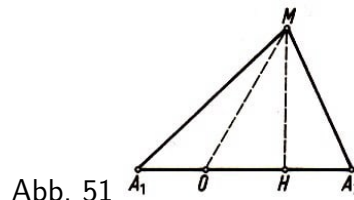


Abb. 51

Unter Berücksichtigung von (\*) erhalten wir also

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 \frac{a_1 l(A_1A_2)}{a_1 + a_2} + l(MA_2)^2 \frac{a_2 l(A_1A_2)}{a_1 + a_2} &= l(MO)^2 \cdot l(A_1A_2) \\ &+ \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{a_2}{a_1 + a_2} l(A_1A_2)^2 \end{aligned}$$

oder

$$a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 = (a_1 + a_2) l(MO)^2 + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2$$

Wenn also  $a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 = R^2$  ist, gilt

$$l(MO)^2 = \frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2 = \text{const.}$$

Daher ist  $\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2 > 0$  die gesuchte Punktmenge ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius

$$\sqrt{\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2}$$

Für

$$\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2 = 0$$

besteht die gesuchte Figur aus einem einzigen Punkt  $O$ . Ist schließlich

$$\frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} l(A_1 A_2)^2 < 0$$

so gibt es keinen Punkt, der die Bedingung erfüllt.

Der Fall, dass  $a_1$  und  $a_2$  beide negativ sind, lässt sich offenbar auf den vorhergehenden zurückführen. Im Fall  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$  und  $a_1 + a_2 \neq 0$  (etwa  $a_1 + a_2 > 0$ ) kann der Punkt  $O$  auf der Verlängerung der Strecke  $A_1 A_2$  über  $A_2$  hinaus so gewählt werden, dass

$$l(A_2 O) : l(A_1 O) = \left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right| : \left| \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right|$$

gilt. Die weiteren Überlegungen unterscheiden sich dann nicht von den obigen.

Ist schließlich  $a_1 + a_2 = 0$ , so lautet die Aufgabe: Man bestimme die Menge der Punkte  $M$ , für welche die Differenz der Quadrate der Abstände von zwei vorgegebenen Punkten  $A_1$  und  $A_2$  konstant ist. Es sei  $H$  Fußpunkt des Lotes vom Punkt  $M$  auf die Gerade  $g_{A_1 A_2}$  (Abb. 51), dann ist

$$l(MA_1)^2 = l(MH)^2 + l(A_1 H)^2, \quad l(MA_2)^2 = l(MH)^2 + l(A_2 H)^2$$

also

$$l(MA_1)^2 - l(MA_2)^2 = l(A_1 H)^2 - l(A_2 H)^2$$

Setzt man

$$l(MA_1)^2 - l(MA_2)^2 = R^2 \quad \text{so ist} \quad l(A_1 H) - l(A_2 H) = \frac{R^2}{l(A_1 A_2)}$$

oder - wenn der Punkt  $H$  auf eine Verlängerung der Strecke  $A_1 A_2$  fällt -

$$l(A_1 H) + l(A_2 H) = \frac{R^2}{l(A_1 A_2)}$$



Es gibt genau einen Punkt  $H$ , der dieser Bedingung genügt; die gesuchte Punktmenge ist dann die Senkrechte zur Geraden  $g_{A_1A_2}$  im Punkt  $H$ .

2. Wir nehmen nun an, wir hätten schon bewiesen, dass die gesuchte Figur bei  $n$  ( $n \geq 2$ ) gegebenen Punkten für  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$  ein Kreis und für  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$  eine Gerade ist.

Jetzt betrachten wir  $n + 1$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  und  $n + 1$  Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ . Falls sich unter  $a_1, \dots, a_{n+1}$  eine Null befindet, gilt die Behauptung offensichtlich.

Anderenfalls gibt es unter  $a_1, \dots, a_{n+1}$  zwei Zahlen gleichen Vorzeichens; wir dürfen voraussetzen, dass  $a_n, a_{n+1}$  gleiche Vorzeichen besitzen, da wir das anderenfalls durch Umm nummerieren so einrichten. Folglich gibt es in der Strecke  $A_nA_{n+1}$  einen Punkt  $O$  derart, dass für jeden Punkt  $M$  der Ebene

$$a_n l(MA_n)^2 + a_{n+1} l(MA_{n+1})^2 = (a_n + a_{n+1}) l(MO)^2 + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} (A_n A_{n+1})^2$$

gilt. Somit führt unsere Aufgabe auf die Bestimmung der Menge der Punkte  $M$ , für welche die Summe

$$a_1 l(MA_1)^2 + a_2 l(MA_2)^2 + \dots + a_{n-1} l(MA_{n-1})^2 + (a_n + a_{n+1}) l(MO)^2$$

konstant ist.

Nach Induktionsvoraussetzung wird die gesuchte Figur für  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \neq 0$  ein Kreis und für  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = 0$  eine Gerade.

Aufgabe 20. Man bestimme die Menge der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von  $n$  gegebenen Punkten konstant ist.

Aufgabe 21. Man bestimme einen Punkt, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu  $n$  gegebenen Punkten minimal ist.

Aufgabe 22. Man bestimme die Menge der Punkte, für die das Verhältnis der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist.

Aufgabe 23. Gegeben sei das  $n$ -Eck  $A_1A_2\dots A_n$ . Man bestimme die Menge der Punkte  $M$ , für welche die Fläche des Vielecks, dessen Eckpunkte die Projektion von  $M$  auf die Seiten des gegebenen Vielecks sind, einen gegebenen Flächeninhalt  $F$  hat.

## 2.5 Definition mittels vollständiger Induktion

Interessante Beispiele der Anwendung der vollständigen Induktion in der Geometrie liefern Aufgaben, die Begriffe enthalten, bei deren Definition der Übergang "von  $n$  auf  $n + 1$ " benutzt wird. Aufgaben dieser Art ist der vorliegende Abschnitt gewidmet.

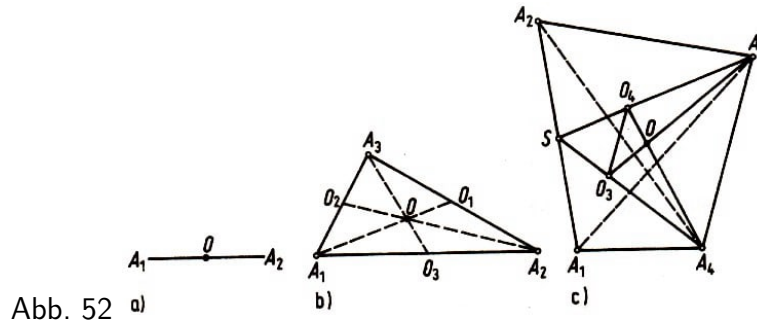
Beispiel 23. Definition der Schwerelinien und des Schwerpunktes eines  $n$ -Ecks.<sup>20</sup>

1. Unter dem Schwerpunkt einer Strecke  $A_1A_2$  wollen wir ihren Mittelpunkt  $O$  verstehen (Abb.

<sup>20</sup>Es ist zweckmäßig, in den Beispielen und Aufgaben über Schwerpunkte und Schwerelinien unter einem  $n$ -Eck stets ein konvexes Vieleck zu verstehen, bei dem drei aufeinander folgende Eckpunkte nicht kollinear sind. Die Definitionen und abgeleiteten Aussagen lassen sich auf  $n$ -Ecke ohne diese Nebenbedingungen ausdehnen. Das ist unter Verwendung der Mittel der analytischen Geometrie bzw. des Vektorbegriffes besonders leicht möglich.

52a). Danach kann man die Schwerlinien eines Dreiecks  $A_1A_2A_3$  als diejenigen Strecken definieren, welche die Eckpunkte des Dreiecks mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden (Abb. 52b).

Bekanntlich schneiden sich die Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt und teilen - von den Eckpunkten aus gerechnet - einander im Verhältnis 2:1. Der Punkt, in dem sich alle Schwerlinien des Dreiecks schneiden, nennt man den Schwerpunkt des Dreiecks.



Wir wollen jetzt unter den Schwerlinien eines Vierecks  $A_1A_2A_3A_4$  diejenigen Strecken verstehen, die seine Eckpunkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  mit den Schwerpunkten  $O_1, O_2, O_3, O_4$  der von den übrigen drei Eckpunkten gebildeten Dreiecke verbinden (Abb. 52c).

Wir beweisen nun, dass sich die Schwerlinien eines Vierecks in einem Punkt schneiden und dort - von den Eckpunkten aus gerechnet - einander im Verhältnis 3:1 teilen:

Mit  $S$  bezeichnen wir den Schwerpunkt (Mittelpunkt) der Seite  $A_1A_2$  und mit  $O_4$  und  $O_3$  die Schwerpunkte der Dreiecke  $A_1A_2A_3$  bzw.  $A_1A_2A_4$ . Es sei  $O$  der Schnittpunkt der Schwerlinien  $A_3O_3$  und  $A_4O_4$  des Vierecks. Da  $SA_3$  und  $SA_4$  die Schwerlinien der Dreiecke  $A_1A_2A_3$  und  $A_1A_2A_4$  sind, ist

$$\frac{\overrightarrow{SA_3}}{\overrightarrow{SO_4}} = 3 \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{SA_4}}{\overrightarrow{SO_3}} = 3 \quad \text{also} \quad \frac{\overrightarrow{SA_3}}{\overrightarrow{SO_4}} = \frac{\overrightarrow{SA_4}}{\overrightarrow{SO_3}}$$

Hieraus folgt aber  $\overrightarrow{O_3O_4} \parallel \overrightarrow{A_3A_4}$  und

$$\frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\overrightarrow{SA_3}} = \frac{\overrightarrow{O_4O_3}}{\overrightarrow{SO_4}} = 3$$

Nach dem Strahlensatz folgt hiernach

$$\frac{\overrightarrow{OA_4}}{\overrightarrow{OO_4}} = \frac{\overrightarrow{OA_3}}{\overrightarrow{OO_3}} = \frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\overrightarrow{O_3O_4}} = -3$$

Somit werden je zwei benachbarte (d.h. von benachbarten Eckpunkten ausgehende) Schwerlinien des Vierecks durch ihren Schnittpunkt im Verhältnis 3:1 geteilt.

Hieraus folgt, dass alle vier Schwerlinien des Vierecks durch den Punkt  $O$  hindurchgehen und durch ihn sämtlich im Verhältnis 3:1 geteilt werden. Den Schnittpunkt  $O$  der Schwerlinien des Vierecks nennt man den Schwerpunkt des Vierecks.

2. Wir setzen nun voraus, wir hätten schon für alle  $k < n$  die Schwerlinien des  $k$ -Ecks als diejenigen Strecken definiert, welche die Eckpunkte des  $k$ -Ecks mit den Schwerpunkten der  $(k-1)$ -Ecke verbinden, die jeweils von den übrigen  $k-1$  Eckpunkten gebildet werden.

Für alle  $k < n$  sei ferner der Schwerpunkt des  $k$ -Ecks als Schnittpunkt seiner Schwerlinien definiert. Wir setzen ferner als bereits bewiesen voraus, dass die Schwerlinien jedes  $k$ -Ecks für

$k < n$  durch den Schwerpunkt des  $k$ -Ecks - von den Eckpunkten aus gerechnet - im Verhältnis  $(k - 1) : 1$  geteilt werden.

Jetzt definieren wir die Schwerlinien des  $n$ -Ecks als diejenigen Strecken, welche die Eckpunkte des  $n$ -Ecks mit den Schwerpunkten der  $(n - 1)$ -Ecke verbinden, die von den übrigen  $n - 1$  Ecken gebildet werden. Unter diesen Annahmen beweisen wir, dass sich alle Schwerlinien des  $n$ -Ecks  $A_1 A_2 \dots A_n$  in einem Punkt schneiden und dort - von den Eckpunkten aus gerechnet - im Verhältnis  $(n - 1) : 1$  geteilt werden.

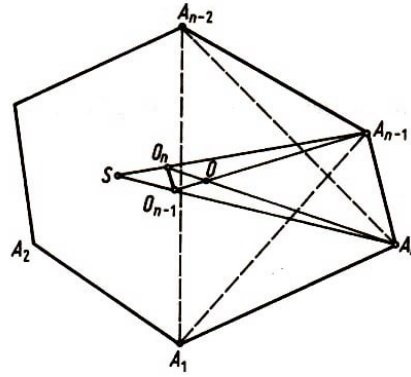


Abb. 53

Es sei  $S$  der Schwerpunkt des  $(n - 2)$ -Ecks  $A_1 A_2 \dots A_{n-2}$ . Dann werden die Strecken  $SA_{n-1}$  und  $SA_n$  Schwerlinien der  $(n - 1)$ -Ecke  $A_1 A_2 A_{n-1}$  und  $A_1 A_2 \dots A_{n-2} A_n$  (Abb. 53). Sind  $O_n$  und  $O_{n-1}$  die Schwerpunkte dieser  $(n - 1)$ -Ecke, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\frac{\overrightarrow{SA_{n-1}}}{\overrightarrow{SO_n}} = \frac{\overrightarrow{SA_n}}{\overrightarrow{SO_{n-1}}} = n - 1$$

Folglich ist

$$O_n O_{n-1} \parallel A_n A_{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{\overrightarrow{A_{n-1} A_n}}{\overrightarrow{O_n O_{n-1}}} = n - 1$$

Bezeichnen wir mit  $O$  den Schnittpunkt der Schwerlinien  $O_{n-1} A_{n-1}$  und  $O_n A_n$  des  $n$ -Ecks  $A_1 A_2 \dots A_n$ , so folgt nach dem Strahlensatz

$$\frac{\overrightarrow{OA_{n-1}}}{\overrightarrow{OO_{n-1}}} = \frac{\overrightarrow{OA_n}}{\overrightarrow{OO_n}} = \frac{\overrightarrow{A_{n-1} A_n}}{\overrightarrow{O_{n-1} O_n}} = -(n - 1)$$

Somit werden je zwei benachbarte Schwerlinien des  $n$ -Ecks durch den Schnittpunkt innen im Verhältnis  $(n - 1) : 1$  geteilt. Hieraus folgt aber, dass sich alle Schwerlinien des  $n$ -Ecks in einem Punkt schneiden und dort im Verhältnis  $(n - 1) : 1$  geteilt werden. Jetzt können wir den Schwerpunkt des  $n$ -Ecks als Schnittpunkt seiner Schwerlinien definieren (und dann die Schwerlinien eines  $(n + 1)$ -Ecks als diejenigen Strecken, welche die Eckpunkte des  $(n + 1)$ -Ecks mit den Schwerpunkten der  $n$ -Ecke verbinden, die von den übrigen  $n$  Eckpunkten gebildet werden).

Die Methode der vollständigen Induktion erlaubt zu behaupten, dass unsere Definition der Schwerlinien und des Schwerpunktes des  $n$ -Ecks für jedes  $n$  sinnvoll ist.

Aufgabe 24. Im  $n$ -Eck  $A_1 A_2 \dots A_n$  bezeichnen wir mit  $O_1$  den Schwerpunkt des  $(n - 1)$ -Ecks  $A_2 A_3 \dots A_n$ , mit  $O_2$  den Schwerpunkt des  $(n - 1)$ -Ecks  $A_1 A_3 \dots A_n$ , ..., mit  $O_n$  den Schwerpunkt des  $(n - 1)$ -Ecks  $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ .

Man beweise, dass das  $n$ -Eck  $O_1O_2\dots O_n$  aus dem gegebenen  $n$ -Eck  $A_1A_2\dots A_n$  durch eine Stauchung hervorgeht.

Unter einer Schwerelinie  $k$ -ter Ordnung eines  $n$ -Ecks ( $k < n$ ) versteht man diejenige Strecke, die den Schwerpunkt eines aus  $k$  beliebigen Eckpunktes des  $n$ -Ecks gebildeten  $k$ -Ecks mit dem Schwerpunkt des aus den übrigen  $n - k$  Eckpunkten gebildeten  $(n - k)$ -Ecks verbindet, wobei sich die Reihenfolge der Eckpunkte dieser Vielecke aus der des  $n$ -Ecks ergibt.

Somit ist eine Schwerelinie  $k$ -ter Ordnung auch gleichzeitig eine Schwerelinie  $(n - k)$ -ter Ordnung. Die Schwerelinien des  $n$ -Ecks, die im Beispiel 23 definiert wurden, könnte man Schwerelinien erster Ordnung nennen.

Aufgabe 25. Man beweise, dass sich alle Schwerelinien  $k$ -ter Ordnung eines  $n$ -Ecks in einem Punkt schneiden und dort im Verhältnis  $(n - k) : k$  geteilt werden.

Aufgabe 26. Man formuliere die Behauptung der Aufgabe 25 für  $n = 4$ ,  $k = 2$ .

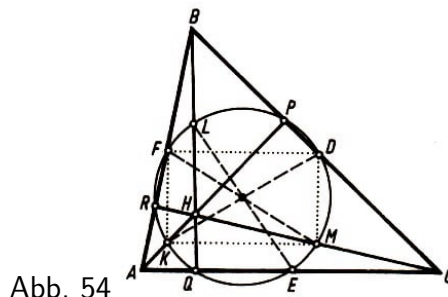


Abb. 54

Der Kreis, der durch die Mitten der drei Seiten eines Dreiecks hindurchgeht (Abb. 54), heißt Eulerscher Kreis<sup>21</sup> dieses Dreiecks. Er besitzt eine Reihe interessanter Eigenschaften (so z.B. geht der Eulersche Kreis außer durch die Mitten  $D$ ,  $E$ ,  $F$  der Seiten noch durch die Fußpunkte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  der Höhen  $AP$ ,  $BQ$  und  $CR$  sowie durch die drei Punkte  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , welche die Strecken  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  halbieren, wobei  $H$  der Schnittpunkt der Höhen ist;<sup>22</sup> deshalb wird der Eulersche Kreis oft auch Neunpunktekreis des Dreiecks genannt.)

Da der Eulersche Kreis des Dreiecks  $ABC$  dem Dreieck  $DEF$  umschrieben ist, das ein Bild des Dreiecks  $ABC$  im Maßstab  $1/2$  ist, beträgt sein Radius  $R/2$ . (Hier und im folgenden ist  $R$  der Radius des Umkreises des Ausgangsdreiecks  $ABC$ .)

Der Begriff des Eulerschen Kreises kann folgendermaßen auf beliebige einem Kreis eingeschriebene Vielecke verallgemeinert werden.

<sup>21</sup>In der Literatur wird dieser Kreis meist Feuerbachscher Kreis genannt, nach Karl Feuerbach (1800-1834). Wie uns I.M. Jaglom mitteilte, war dieser Kreis schon Leonhard Euler (1707-1783) bekannt. Deshalb scheint es ihm richtiger zu sein, vom Eulerschen Kreis zu sprechen. Das hat sich in den letzten fünfzig Jahren in der UdSSR bereits durchgesetzt.

<sup>22</sup>Das Viereck  $KFDM$  (Abb. 54) ist ein Rechteck, denn es gilt  $FK \parallel BH \parallel DM$ , weil  $KF$  und  $DM$  die Mittellinien der Dreiecke  $ABH$  und  $CBH$  mit der gemeinsamen Seite  $BH$  sind,  $FD \parallel AC \parallel KM$ , weil  $FD$  und  $KM$  die Mittellinien der Dreiecke  $ABC$  und  $AHC$  mit der gemeinsamen Seite  $AC$  sind, sowie  $BH \perp AC$ . Folglich sind die Strecken  $FM$  und  $DK$  kongruent und halbieren einander. Ebenso beweist man, dass auch die Strecke  $EL$  zu diesen kongruent ist und dass der Mittelpunkt von  $EL$  mit dem gemeinsamen Mittelpunkt von  $FM$  und  $DK$  zusammenfällt. Hieraus folgt, dass der Eulersche Kreis, der durch die Punkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  hindurchgeht, auch durch  $K$ ,  $L$  und  $M$  verläuft: der Mittelpunkt dieses Kreises fällt mit dem gemeinsamen Mittelpunkt von  $DK$ ,  $EL$  und  $FM$  zusammen, und der Durchmesser ist zu diesen Strecken kongruent.

Da nach dem bereits Bewiesenen  $K$  und  $D$  diametral gegenüberliegende Punkte des Eulerschen Kreises sind und der Winkel  $\angle KPD$  ein rechter Winkel ist, geht der Eulersche Kreis durch den Punkt  $P$  hindurch. Ebenso lässt sich beweisen, dass er auch durch die Punkte  $Q$  und  $R$  verläuft.

Aufgabe 27. 1. Ein Kreis vom Radius  $R/2$ , dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Sehne  $A_1A_2$  ist (Abb. 55a), heißt Eulerscher Kreis der Sehne  $A_1A_2$  des Kreises  $\mathfrak{k}$  mit dem Radius  $R$ . Die drei Eulerschen Kreise der Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  mit dem Umkreis  $\mathfrak{k}$  schneiden sich in einem Punkt  $O$ , welcher Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius  $R/2$  ist, der durch die Mittelpunkte der drei Eulerschen Kreise geht. Dieser Kreis heißt Eulerscher Kreis des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  (Abb. 55b).

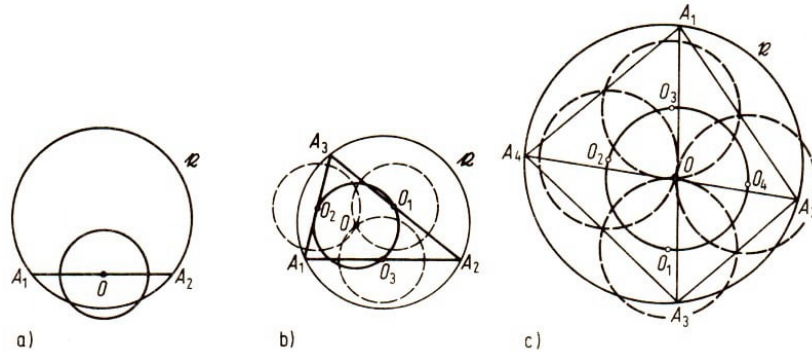


Abb. 55 a)

b)

c)

2. Wir nehmen nun an, der Eulersche Kreis eines einem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschriebenen  $n$ -Ecks sei definiert, und es sei bekannt, dass sein Radius  $R/2$  beträgt ( $R$  Radius des Kreises  $\mathfrak{k}$ ).

Nun betrachten wir das  $(n+1)$ -Eck  $A_1A_2A_3\dots A_{n+1}$ , das dem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschrieben ist. Dann schneiden sich die  $n+1$  Eulerschen Kreise der  $n$ -Ecke  $A_2A_3\dots A_{n+1}$ ,  $A_1A_3\dots A_{n+1}$ , ...,  $A_1A_2\dots A_n$  in einem Punkt, welcher Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius  $R/2$  ist, der durch die Mittelpunkte aller  $n+1$  Eulerschen Kreise geht.

Dieser Kreis heißt Eulerscher Kreis des  $(n+1)$ -Ecks  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  (vgl. Abb. 55c, in der der Eulersche Kreis eines Vierecks dargestellt ist).

Aufgabe 28. Es sei  $A_1A_2\dots A_n$  ein beliebiges  $n$ -Eck, das einem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschrieben ist. Man beweise, dass der Schwerpunkt des  $n$ -Ecks (vgl. Beispiel 23) auf derjenigen Strecke liegt, die den Mittelpunkt von  $\mathfrak{k}$  mit dem Mittelpunkt des Eulerschen Kreises des  $n$ -Ecks verbindet und diese Strecke im Verhältnis  $2 : (n-2)$  teilt.

Aufgabe 29. 1. Es sei ein dem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschriebenes Dreieck  $A_1A_2A_3$  gegeben, und  $P$  sei ein beliebiger Punkt dieses Kreises. Man beweise, dass die Fußpunkte der Lote, die vom Punkt  $P$  auf die Seiten des Dreiecks  $ABC$  gefällt werden, auf einer Geraden liegen (Abb. 56); diese Gerade heißt Simsonsche Gerade des Punktes  $P$  bezüglich des Dreiecks  $A_1A_2A_3$ .<sup>23</sup>

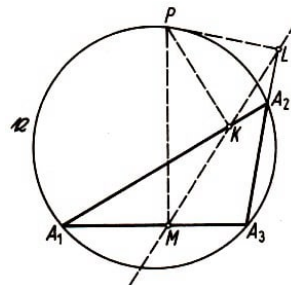


Abb. 56

2. Wir nehmen nun an, wir hätten bereits die Simsonsche Gerade eines Punktes  $P$  des Kreises  $\mathfrak{k}$  bezüglich jedes eingeschriebenen  $n$ -Ecks definiert. Es sei  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  ein dem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschriebenes  $(n+1)$ -Eck.

<sup>23</sup>Robert Simson (1687-1768), schottischer Mathematiker; nicht zu verwechseln mit dem bedeutend bekannteren Londoner Mathematiker Thomas Simpson (1710-1761).

Man beweise, dass die Fußpunkte der Lote, die vom Punkt  $P$  auf die  $n + 1$  Simsonschen Geraden dieses Punktes bezüglich aller möglichen  $n$ -Ecke, die von  $n$  Eckpunkten des  $(n + 1)$ -Ecks  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  gebildet werden, auf einer Geraden liegen.

Diese Gerade nennen wir die Simsonsche Gerade des Punktes  $P$  bezüglich des  $(n + 1)$ -Ecks  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ .

Beispiel 24. 1. Es seien  $l_1, l_2, l_3, l_4$  vier Geraden allgemeiner Lage, d.h., keine zwei von ihnen sind parallel und keine drei von ihnen gehen durch denselben Punkt.

Es bezeichne  $O_1$  den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks, das von den Geraden  $l_2, l_3, l_4$  gebildet wird,  $O_2$  den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks, das von den Geraden  $l_1, l_3, l_4$  gebildet wird, usw. Dann liegen die vier Punkte  $O_1, O_2, O_3, O_4$  auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der vier Geraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  (Abb. 57).

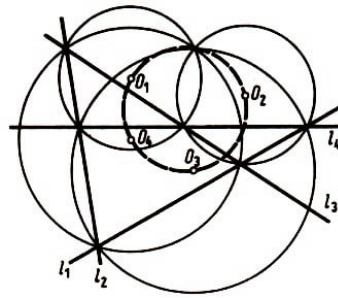


Abb. 57

2. Der Mittelpunktskreis von  $n$  Geraden sei schon definiert, und es seien  $n + 1$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$  allgemeiner Lage gegeben.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Mittelpunktskreises der  $n$  Geraden  $l_2, l_3, \dots, l_{n+1}$  mit  $O_1$ , den Mittelpunkt des Mittelpunktskreises der  $n$  Geraden  $l_1, l_3, \dots, l_{n+1}$  mit  $O_2$  usw. Dann liegen die  $n + 1$  Punkte  $O_1, O_2, \dots, O_{n+1}$  auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der  $n + 1$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ .

Beweis. 1. Es seien  $l_1, l_2, l_3, l_4$  vier Geraden allgemeiner Lage (Abb. 59),  $A_{12}$  Schnittpunkt von  $l_3$  und  $l_4$ , ferner  $A_{13}$  Schnittpunkt von  $l_2$  und  $l_4$  usw.;  $O_1$  sei der Mittelpunkt des Umkreises  $\mathfrak{E}_1$  des Dreiecks, das von den Geraden  $l_2, l_3, l_4$  gebildet wird, usw.

Wir beweisen zunächst, dass sich die Kreise  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$  und  $\mathfrak{E}_4$  in einem Punkt  $M$  schneiden.

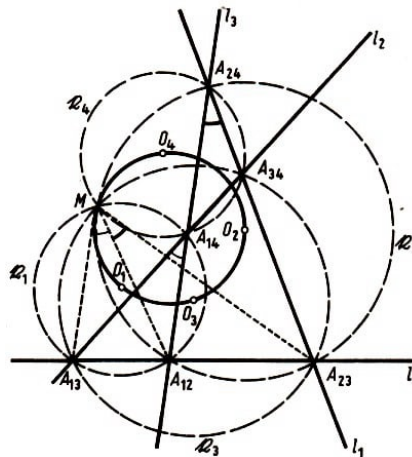


Abb. 58

Ist  $M$  Schnittpunkt von  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  und von  $A_{12}$  verschieden, dann gelten die folgenden gleichsinnigen Kongruenzen der gerichteten Winkel zwischen Geraden (vgl. [11], besonders S. 144);

$$(g_{MA_{13}}, g_{MA_{12}}) \cong (l_2, l_3) \quad ; \quad (g_{MA_{12}}, g_{MA_{23}}) \cong (l_3, l_1)$$

Hieraus folgt  $(g_{MA_{13}}, g_{MA_{23}}) \cong (l_2, l_1)$ , so dass auch  $\mathfrak{k}_3$  durch  $M$  geht. Ebenso beweist man, dass auch  $\mathfrak{k}_4$  durch  $M$  geht.

Jetzt können wir bereits beweisen, dass die Punkte  $O_1, O_2, O_3$  und  $O_4$  auf einem Kreis liegen. Wir betrachten die drei Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$  und  $\mathfrak{k}_3$  die durch einen Punkt  $M$  gehen. Die Kreise  $\mathfrak{k}_1$  und  $\mathfrak{k}_3$  schneiden sich noch im Punkt  $A_3$ , die Kreise  $\mathfrak{k}_2$  und  $\mathfrak{k}_3$  im Punkt  $A_{23}$ . Hieraus folgt (vgl. die Lösung der Aufgabe 6)

$$(g_{O_3O_1}, g(O_3O_2)) \cong (g_{MA_{13}}, g_{MA_{23}}) \cong (l_2, l_1)$$

Ebenso lässt sich auch  $(g_{O_4O_1}, g(O_4O_2)) \cong (l_2, l_1)$  zeigen, und damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für  $n$  Geraden schon bewiesen, und betrachten jetzt  $n + 1$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$  allgemeiner Lage.

Es sei  $O_1$  Mittelpunkt des Mittelpunktskreises  $\mathfrak{k}_1$  der  $n$  Geraden  $l_2, l_3, \dots, l_{n+1}$  usw.,  $O_{12}$  Mittelpunkt des Mittelpunktskreises  $\mathfrak{k}_{12}$  der  $n - 1$  Geraden  $l_3, l_4, \dots, l_{n+1}$  usw.

Wir beweisen zunächst, dass sich die Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{n+1}$  in einem Punkt  $M$  schneiden. Es sei  $M$  ein von  $O_{12}$  verschiedener Schnittpunkt der Kreise  $\mathfrak{k}_1$  und  $\mathfrak{k}_2$ . In diesem Fall haben wir (vgl. den Schluss von 1.)

$$(g_{MO_{13}}, g_{MO_{12}}) \cong (l_2, l_3) \quad , \quad (g_{MO_{12}}, g_{MO_{23}}) \cong (l_3, l_1)$$

Hieraus folgt

$$(g_{MO_{13}}, g_{MO_{23}}) \cong (l_2, l_1) \cong (g_{O_{34}O_{13}}, g_{O_{34}O_{23}})$$

d.h., dass der Kreis  $\mathfrak{k}_3$  durch  $M$  geht. Genauso wird bewiesen, dass jeder der übrigen Kreise  $\mathfrak{k}_4, \mathfrak{k}_5, \dots, \mathfrak{k}_{n+1}$  durch  $M$  geht.

Wir betrachten jetzt die drei Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$  und  $\mathfrak{k}_3$  die durch den einen Punkt  $M$  gehen. Die Kreise  $\mathfrak{k}_1$  und  $\mathfrak{k}_3$  schneiden sich noch im Punkt  $O_{13}$ , die Kreise  $\mathfrak{k}_2$  und  $\mathfrak{k}_3$  im Punkt  $O_{23}$ .

Entsprechend den obigen Überlegungen gilt

$$(g_{O_3O_1}, g_{O_3O_2}) \cong (g_{MO_{13}}, g_{MO_{23}}) \cong (g_{O_{34}O_{13}}, g_{O_{34}O_{23}}) \cong (l_2, l_1)$$

Genauso zeigt man, dass auch für jeden der Punkte  $O_i$  ( $i = 4, \dots, n + 1$ )

$$(g_{O_iO_1}, g_{O_iO_2}) \cong (l_2, l_1)$$

gilt. Hieraus folgt aber, dass alle Punkte  $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots, O_{n+1}$  auf einem Kreis liegen. Damit ist der Beweis von Beispiel 24 beendet.

In der Formulierung des Beispiels 24 kann man überall die Umkreise durch einbeschriebene Kreise ersetzen. Hier taucht jedoch eine zusätzliche Schwierigkeit auf, die damit zusammenhängt, dass zwar der Umkreis eines Dreiecks eindeutig (als Kreis durch die Eckpunkte) definiert ist, aber ein einbeschriebener Kreis (als Kreis, der alle Seiten des Dreiecks berührt) einer von vier Kreisen sein kann.

Alle drei Seiten werden nämlich von dem Inkreis und drei Ankreisen berührt.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, können wir folgendermaßen vorgehen. Wir führen gerichtete Geraden und Kreise in unserer Betrachtung ein, wobei auf jeder Linie der Durch- bzw. Umlaufsinn durch einen Pfeil festgelegt wird.



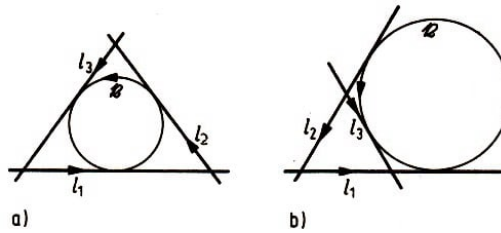


Abb. 59 a)

b)

Ferner werden wir gerichtete Geraden und Kreise genau dann als einander berührend ansehen, wenn auch ihre Richtungen im Berührungspunkt zusammenfallen. Dann existiert ein einziger gerichteter Kreis, der drei gegebene gerichtete Geraden  $l_1, l_2, l_3$ , die sich nicht in einem Punkt schneiden, berührt (Abb. 59 a, b), der gerichtete einbeschriebene Kreis des von den gerichteten Geraden  $l_1, l_2$  und  $l_3$  gebildeten Dreiecks.

Man beweise die Behauptungen der Aufgaben 30 bis 34.

Aufgabe 30. 1. Es seien  $l_1, l_2, l_3$  und  $l_4$  vier gerichtete Geraden allgemeiner Lage (vgl. Beispiel 24),  $O_1, O_2, O_3$  und  $O_4$  die Mittelpunkte der gerichteten einbeschriebenen Kreise der Dreiecke, die von  $l_2, l_3$  und  $l_4$ , von  $l_1, l_3$  und  $l_4$  usw. gebildet werden. Dann liegen die vier Punkte  $O_1, O_2, O_3$  und  $O_4$  auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der vier gerichteten Geraden  $l_1, l_2, l_3$  und  $l_4$  (Abb. 60).

2. Der Mittelpunktskreis von  $n$  gerichteten Geraden sei schon definiert, und es seien  $n + 1$  gerichtete Geraden allgemeiner Lage  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n, l_{n+1}$  gegeben. Mit  $O_1, O_2, \dots, O_n, O_{n+1}$  bezeichnen wir die Mittelpunkte der Mittelpunktskreise der  $n + 1$  Systeme von  $n$  gerichteten Geraden, die man aus unseren  $n + 1$  Geraden auswählen kann.

Dann liegen die  $n + 1$  Punkte  $O_1, O_2, \dots, O_{n+1}$  auf einem Kreis, dem Mittelpunktskreis der  $n + 1$  gerichteten Geraden.

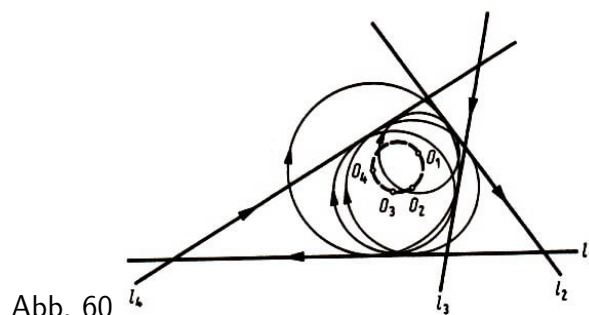


Abb. 60

Aufgabe 31. Definition des Orthozentrums eines einem Kreis eingeschriebenen Vielecks.

1. Als Orthozentrum eines Dreiecks wird bekanntlich der Höhenschnittpunkt bezeichnet.

2. Das Orthozentrum des dem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschriebenen  $n$ -Ecks  $A_1 A_2 \dots A_n$  sei schon definiert, und es liege ein dem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschriebenes  $(n + 1)$ -Eck  $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$  vor.

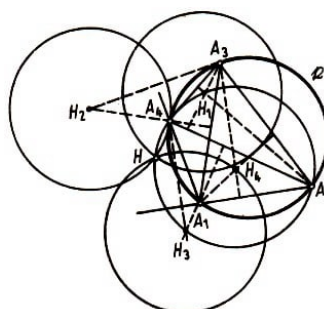


Abb. 61



Wir bezeichnen mit  $H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$  die Orthozentren der  $n+1$  Vielecke  $A_2A_3\dots A_{n+1}, A_1A_3\dots A_{n+1}, \dots, A_1A_2\dots A_n$ . Dann schneiden sich die Kreise mit den Mittelpunkten  $H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$  und den gleichen Radien wie  $\mathfrak{k}$  in einem Punkt  $H$ ; dieser Punkt wird dann Orthozentrum des  $(n+1)$ -Ecks  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  (vgl. das Orthozentrum des Vierecks  $A_1A_2A_3A_4$  in Abb. 61) genannt.

Aufgabe 32. 1. Unter dem Zentralpunkt zweier (sich schneidender) Geraden wollen wir ihren Schnittpunkt verstehen (Abb. 62a).

Unter dem Zentralkreis dreier Geraden allgemeiner Lage (vgl. Beispiel 23) verstehen wir denjenigen Kreis, der durch die Zentralpunkte jedes Paares dieser Geraden geht (Abb. 62b).

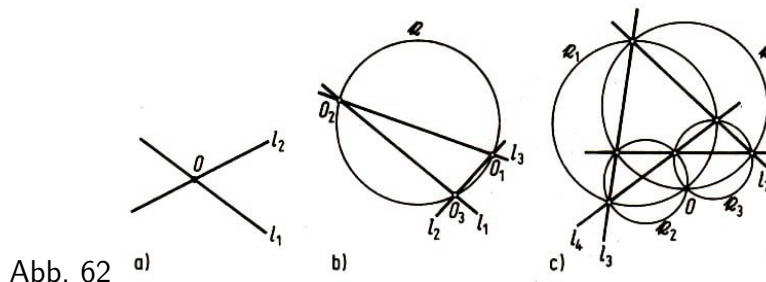


Abb. 62 a)

b)

c)

Es seien jetzt vier Geraden allgemeiner Lage  $l_1, l_2, l_3, l_4$  gegeben. Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{k}_1$  den Zentralkreis der drei Geraden  $l_2, l_3, l_4$  mit  $\mathfrak{k}_2$  den Zentralkreis der drei Geraden  $l_1, l_3, l_4$  usw. Dann schneiden sich die vier Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_4$  in einem Punkt  $O$ , den man Zentralpunkt der vier Geraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  nennt (Abb. 62c).

2. Wir nehmen nun an, der Zentralkreis von  $2n - 1$  Geraden und der Zentralpunkt von  $2n$  Geraden seien schon definiert, und es seien  $2n + 1$  Geraden allgemeiner Lage  $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$  gegeben. Mit  $A_1$  bezeichnen wir den Zentralpunkt der  $2n$  Geraden  $l_2, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ , mit  $A_2$  den Zentralpunkt der  $2n$  Geraden  $l_1, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$  usw., mit  $A_{2n+1}$  den Zentralpunkt der  $2n$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n}$ . Dann liegen die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$  auf einem Kreis, den wir Zentralkreis der  $2n + 1$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$  nennen.

Es seien schließlich  $2n + 2$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$  allgemeiner Lage gegeben. Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{k}_1$  den Zentralkreis der  $2n + 1$  Geraden  $l_2, l_3, \dots, l_{2n+2}$ , mit  $\mathfrak{k}_2$  den Zentralkreis der  $2n + 1$  Geraden  $l_1, l_3, \dots, l_{2n+2}$  usw., mit  $\mathfrak{k}_{2n+2}$  den Zentralkreis der  $2n + 1$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}$ .

Dann schneiden sich die Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{2n+1}, \mathfrak{k}_{2n+2}$  in einem Punkt, den wir den Zentralpunkt der  $2n + 2$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$  nennen.

Aufgabe 33. 1. Gegeben seien drei Geraden  $l_1, l_2, l_3$  allgemeiner Lage. Der Mittelpunkt des Umkreises des von ihnen gebildeten Dreiecks heißt Zentralpunkt der drei Geraden.

Wir betrachten jetzt vier Geraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  allgemeiner Lage. Mit  $A_1$  bezeichnen wir den Zentralpunkt der drei Geraden  $l_2, l_3, l_4$ , mit  $A_2$  den Zentralpunkt der drei Geraden  $l_1, l_3, l_4$  usw. Dann liegen die vier Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  auf einem Kreis (vgl. Beispiel 24), welcher Zentralkreis der vier Geraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  genannt wird.

2. Der Zentralpunkt von  $2a - 1$  Geraden und der Zentralkreis von  $2n$  Geraden seien schon definiert und es seien  $2n + 1$  Geraden allgemeiner Lage  $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$  gegeben. Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{k}_1$  den Zentralkreis der  $2n$  Geraden  $l_2, l_4, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ , mit  $\mathfrak{k}_2$  den Zentralkreis der  $2n$  Geraden  $l_1, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$  usw., mit  $\mathfrak{k}_{2n+1}$  den Zentralkreis der  $2n$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n}$ . Dann schneiden sich die Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{2n+1}$  in einem Punkt, den wir Zentralpunkt der  $2n + 1$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$  nennen.

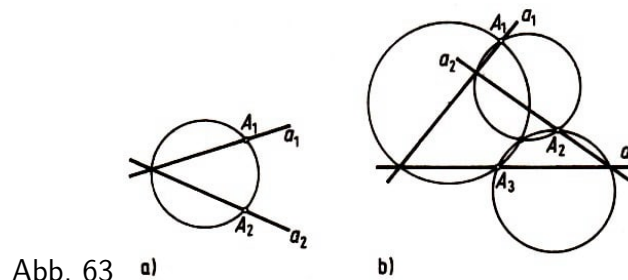
Es seien schließlich  $2n + 2$  Geraden allgemeiner Lage  $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$  gegeben. Den Zentralpunkt der  $2n + 1$  Geraden  $l_2, l_3, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$  bezeichnen wir mit  $A_1$ , den Zentralpunkt der  $2n + 1$  Geraden  $l_1, l_3, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$  mit  $A_2$  usw., den Zentralpunkt der  $2n + 1$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$  mit  $A_{2n+2}$ . Dann liegen die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+2}$  auf einem Kreis, den wir Zentralkreis der  $2n + 2$  Geraden  $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$  nennen.

Unter einem Linienelement versteht man das Paar aus einem Punkt  $A$  und einer Richtung, d.h. einer Geraden  $a$ , die durch  $A$  hindurchgeht. Ein Linienelement wird mit  $(A, a)$  bezeichnet.

Die  $n$  Linienelemente  $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$  werden wir konzyklisch (von "Zyklus"-Kreis) nennen, wenn die Geraden  $a_1, a_2, \dots, a_n$  Geraden allgemeiner Lage sind (vgl. Beispiel 24) und die  $n$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 34. 1. Als Richtungskreis zweier Linienelemente  $(A_1, a_1)$  und  $(A_2, a_2)$ , die so beschaffen sind, dass die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  voneinander verschieden sind und die Geraden  $a_1$  und  $a_2$  sich schneiden, wird der Kreis bezeichnet, der durch die Punkte  $A_1, A_2$  und durch den Schnittpunkt von  $a_1$  und  $a_2$  geht (Abb. 63 a); wenn dabei etwa der Punkt  $A_1$  mit dem Schnittpunkt von  $a_1$  und  $a_2$  übereinstimmt, dann verlangen wir noch, dass dieser Kreis die Gerade  $a_1$  in  $A_1$  berührt.

Die Richtungskreise dreier Paare von Linienelementen  $(A_1, a_1)$  und  $(A_2, a_2)$ ,  $(A_1, a_1)$  und  $(A_3, a_3)$ ,  $(A_2, a_2)$  und  $(A_3, a_3)$  (die so beschaffen sind, dass die Punkte  $A_1, A_2, A_3$  sämtlich voneinander verschieden sind und die Geraden  $a_1, a_2, a_3$  allgemeine Lage haben) schneiden sich in einem Punkt, dem sogenannten Richtungspunkt der Linienelemente  $(A_1, a_1)$ ,  $(A_2, a_2)$  und  $(A_3, a_3)$  (Abb. 63 b).



2. Der Richtungskreis von  $2n - 2$  konzyklischen Linienelementen und der Richtungspunkt von  $2n - 1$  Linienelementen seien schon definiert.

Wir betrachten  $2n$  konzyklische Linienelemente. Die  $2n$  Richtungspunkte aller möglichen Systeme von je  $2n - 1$  dieser konzyklischen Linienelemente liegen auf einem Kreis, dem Richtungskreis der  $2n$  konzyklischen Linienelemente. Wenn man  $2n + 1$  konzyklische Linienelemente betrachtet, dann bestimmen alle Systeme von je  $n$  Linienelementen  $2n + 1$  Richtungskreise, die sich sämtlich in einem Punkt schneiden, dem Richtungspunkt der  $2n + 1$  konzyklischen Linienelemente.

## 2.6 Vollständige Induktion nach der Dimensionszahl

Beim Studium der Stereometrie fällt eine gewisse Analogie zwischen Sätzen der Stereometrie und Sätzen der Planimetrie auf. So sind Eigenschaften des Parallelepipeds (bzw. Spates) in vielem Eigenschaften des Parallelogramms ähnlich; man betrachte z.B. die Sätze:

"Im Parallelepiped sind die gegenüberliegenden Seitenflächen kongruent, die Körperdiagonalen schneiden sich in einem Punkt und halbieren einander" und "Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten kongruent, und die Diagonalen halbieren einander";

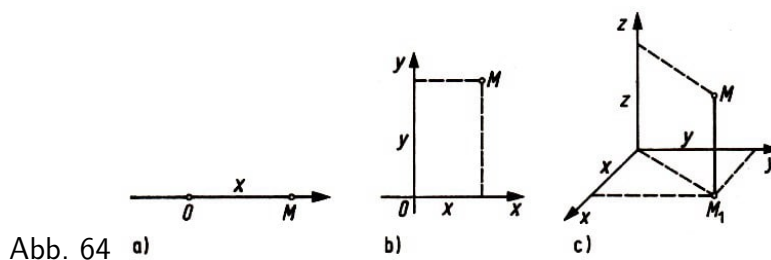
Eigenschaften der Kugel sind Eigenschaften des Kreises ähnlich (man betrachte z.B. die Sätze:

"Die Tangentialebene einer Kugel steht senkrecht auf dem Berührungsradius" und "Die Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem Berührungsradius").

Andererseits gibt es wesentliche Unterschiede zwischen den Eigenschaften ebener und räumlicher Figuren. Der Hauptunterschied besteht darin, dass die Figuren der Ebene zwei Dimensionen ("Länge" und "Breite") besitzen, während die räumlichen Körper drei Dimensionen ("Länge", "Breite" und "Höhe") haben.

Dementsprechend lässt sich die Lage eines Punktes in der Ebene durch zwei Koordinaten  $x$  und  $y$  charakterisieren (Abb. 64b), während man zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raum drei Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  braucht (Abb. 64c).

Deshalb nennt man unseren gewöhnlichen Raum häufig den dreidimensionalen Raum ("Raum mit drei Dimensionen"), während man bei der Ebene sagt, sie sei ein zweidimensionaler Raum ("Raum mit zwei Dimensionen").



Diese Terminologie kann man noch weiter ausdehnen. Die Lage eines Punktes auf einer Geraden wird durch eine einzige Koordinate  $x$  charakterisiert (Abb. 64a).

Das hängt damit zusammen, dass auf einer Geraden alle Figuren (z.B. Strecken) nur eine Dimension ("Länge") besitzen. Deshalb nennt man eine Gerade einen eindimensionalen Raum. Das erlaubt zu sagen, die Dimension eines Raumes kann 1, 2 oder 3 sein.

Sätze der Stereometrie sind gewöhnlich schwieriger als die entsprechenden Sätze der Planimetrie. Die Eigenschaften ebener Figuren sind ihrerseits komplizierter als die Eigenschaften der Figuren der Geraden (Strecken).

Beim Beweis "dreidimensionaler" (d.h. stereometrischer) Sätze stützt man sich oft wesentlich auf die Kenntnis der entsprechenden "zweidimensionalen" (d.h. planimetrischen) Sätze.

Beispielsweise stützt sich der Beweis, dass die (Körper-)Diagonalen des Parallelepipeds einander halbieren, auf die entsprechende Eigenschaft der Diagonalen des Parallelogramms. Seinerseits stützt sich der Beweis "zweidimensionaler" Sätze manchmal auf den der analogen "eindimensionalen".

Dieser Umstand ermöglicht es, in einigen geometrischen Aufgaben die Methode der vollständigen Induktion nach der Dimensionszahl anzuwenden, die den aufeinanderfolgenden Übergang vom eindimensionalen zum zweidimensionalen und schließlich zum dreidimensionalen Raum umfasst. Beispiele solcher Art sind in diesem Abschnitt zusammengestellt.

In der modernen Mathematik und Physik spielt der Begriff des  $n$ -dimensionalen Raumes, in dem die Lage eines Punktes durch  $n$  Koordinaten festgelegt ist, eine große Rolle.

Hierbei ist  $n$  eine beliebige natürliche Zahl, die auch größer als 3 sein kann (vgl. etwa [3], [4], [16]). Eigenschaften von Figuren im  $n$ -dimensionalen Raum beweist man oft durch vollständige Induktion nach der Dimension des Raumes.

Dabei können wir eigentlich nur beim Beweis " $n$ -dimensionaler" Sätze mit beliebigem natürlichen  $n$  mit vollem Recht von der "Methode der vollständigen Induktion" sprechen (denn nur dann kommt der "Satz 2", der zur Beschreibung dieser Methode verwendet wird und der die

Möglichkeit des Übergangs von einem beliebigen  $n = k$  zu dem nächsten Wert  $n = k + 1$  behauptet, voll zur Geltung).

Die Methode der vollständigen Induktion ermöglicht es, alle Resultate dieses Abschnitts auf den  $n$ -dimensionalen Raum zu übertragen, wobei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl ist. Da aber der Begriff des  $n$ -dimensionalen Raumes über den Rahmen der mathematischen Vorkenntnisse hinausgeht, die beim Leser dieses Büchleins vorausgesetzt werden können, beschränken wir uns im folgenden auf die Fälle  $n = 1, 2$  oder  $3$  (d.h. auf den Fall der Geraden, der Ebene und des gewöhnlichen Raumes).

Bei der Untersuchung der Beispiele und der Lösungen der Aufgaben dieses Abschnitts beachte man, dass dem Kreis in der Ebene (d.h. der Menge der Punkte, die von einem gegebenen Punkt  $O$  gleich weit entfernt sind, Abb. 65 b) im Raum die Kugel (Abb. 65 c) und auf der Geraden ein Paar von Punkten, die von  $O$  gleich weit entfernt sind (Abb. 65 a), entspricht.

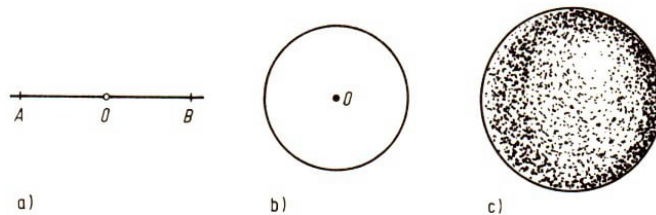


Abb. 65 a)

b)

c)

Der Kreisfläche in der Ebene entspricht im Raum der Kugelkörper und auf der Geraden die Strecke. Dem Dreieck  $ABC$  in der Ebene (Abb. 66 b) entspricht im Raum das Tetraeder (d.h. eine beliebige dreiseitige Pyramide mit den vier Eckpunkten  $ABCD$  (Abb. 66 c) und in der Geraden die Strecke  $AB$ , welche die beiden "Eckpunkte"  $A, B$  besitzt (Abb. 66 a).

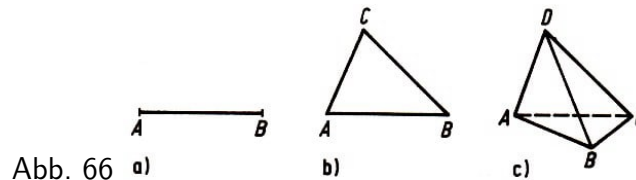


Abb. 66 a)

b)

c)

Es sei bemerkt, dass die Frage, welcher Satz der Stereometrie einem gegebenen Satz der Planimetrie entspricht, im allgemeinen nicht eindeutig beantwortet werden kann. Manchmal ist es zweckmäßig, anzunehmen, dem Dreieck in der Ebene entspreche nicht das Tetraeder - eine Figur, deren Dimension um 1 höher ist -, sondern wieder ein Dreieck, das im Raum liegt. Analog dazu kann man annehmen, einer Geraden in der Ebene entspreche im Raum eine Gerade oder eine Ebene.

Auf diese Weise kann man verschiedene "stereometrische Analoga" zu einem und demselben Satz der Planimetrie erhalten. Beispielsweise entsprechen dem Satz

"Die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes  $M$  der Ebene von allen Eckpunkten eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Umkreisradius  $R$  ist gleich  $n(R^2 + l(OM)^2)$ ".<sup>24</sup>

<sup>24</sup>Nach dem Kosinussatz gilt für die fragliche Summe  $S$  zunächst

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \left( r^2 + l(OM)^2 - 2Rl(OM) \cos \left( \alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) \right) \\ &= n(R^2 + l(OM)^2) - 2Rl(OM) \cdot \sum_{k=1}^n \cos \left( \alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

die beiden folgenden Sätze der Stereometrie:

"Die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes  $M$  des Raumes von allen Eckpunkten eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Umkreisradius  $R$  ist gleich  $n(R^2 + l(OM)^2)$ ."

und

"Die Summe der Quadrate der Abstände eines Punktes  $M$  des Raumes von allen Eckpunkten eines regelmäßigen Polyeders mit  $n$  Eckpunkten, das einer Kugel mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $R$  eingeschrieben ist, ist gleich  $n(R^2 + l(OM)^2)$ ".

Beide Sätze sind richtig, und beide lassen sich aus dem entsprechenden "zweidimensionalen" in der Weise folgern, dass bei der Herleitung jeweils vollständige Induktion nach der Dimensionszahl benutzt wird. Wir wollen auf diese Fragen nicht näher eingehen, schlagen vielmehr dem Leser vor, den Übergang vom "eindimensionalen" zum "zweidimensionalen" und "dreidimensionalen" Satz in den Beispielen 27 und 34 mit dem in den Beispielen 25 und 32 zu vergleichen.

In allen Beispielen und Aufgaben dieses Abschnitts wird der "dreidimensionale" (stereometrische) Satz als der grundlegende betrachtet, obwohl häufig der entsprechende Satz, der sich auf den zweidimensionalen (ebenen) Fall bezieht, am interessantesten ist, und der Übergang vom zweidimensionalen zum dreidimensionalen Fall nur skizziert, aber nicht vollständig ausgeführt wird.

### 2.6.1 Berechnung und Bestimmung von Figuren mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl

Beispiel 25. In wieviel Teile wird der Raum von  $n$  Ebenen zerlegt, von denen sich je drei schneiden und keine vier gemeinsame Punkte haben (solche Ebenen werden wir "Ebenen allgemeiner Lage" nennen)?

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. Man stelle fest, in wie viele Teile die Gerade durch  $n$  Punkte zerlegt wird. Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

Lösung. Wir bezeichnen diese Zahl mit  $F_1(n)$ . Offenbar ist  $F_1(n) = n + 1$ .

Damit ist die Behauptung äquivalent dazu, dass die Summe

$$C_\alpha := \sum_{k=1}^n \cos \left( \alpha + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

verschwindet. Nach einem Additionstheorem gilt

$$C_\alpha = \sum_{k=1}^n \cos \left( \cos \alpha \cos \frac{2k\pi}{n} - \sin \alpha \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = \cos \alpha \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} - \sin \alpha \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n}$$

Da  $\sin \frac{2k\pi}{n} = -\sin \frac{2(n-k)\pi}{n}$  gilt, verschwindet der Subtrahend. Für eine gerade Zahl  $n$  ist analog  $C_0 = 0$ . Allgemein kann gesagt werden, dass eine Umnummerierung der Ecken

$$\cos \alpha C_0 = C_\alpha = C_{\alpha + \frac{2k\pi}{n}} = \cos \left( \alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) C_0$$

ergibt. Folglich verschwindet  $C_0$ , und die behauptete Aussage besteht zu Recht.

B. In wieviele Teile zerlegen  $n$  Geraden, von denen sich je zwei schneiden, während je drei keine gemeinsamen Punkte haben ( $n$  Geraden "allgemeiner Lage"), die Ebene?

Lösung. 1. Eine Gerade zerlegt ihre Ebene in zwei Teile.

2. Wir nehmen an, die Anzahl  $F_2(n)$  der Teile, in welche  $n$  Geraden allgemeiner Lage die Ebene zerlegen, sei uns bekannt, und betrachten  $n+1$  Geraden allgemeiner Lage. Die ersten  $n$  Geraden zerlegen die Ebene in  $F_2(n)$  Teile.

Die  $(n+1)$ -te Gerade  $l$  wird nach Voraussetzung von jeder der übrigen  $n$  Geraden in  $n$  verschiedenen Punkten geschnitten. Diese Punkte zerlegen die Gerade  $l$  in  $F_1(n) = n+1$  Teile (siehe A).

Folglich schneidet die Gerade  $l$  noch  $n+1$  früher erhaltene Teile der Ebene, d.h., zu den  $F_2(n)$  Teilen kommen  $F_1(n) = n+1$  Teile hinzu. Damit ist

$$F_2(n+1) = F_2(n) + F_1(n) = F_2(n) + (n+1) \quad (8)$$

Setzen wir in Gleichung (8) die Werte  $n-1, n-2, \dots, 2, 1$  für  $n$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F_2(n) &= F_2(n-1) + n \\ F_2(n-1) &= F_2(n-2) + (n-1) \\ &\dots \\ F_2(3) &= F_2(2) + 3, \\ F_2(2) &= F_2(1) + 2. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von  $F_2(1) = 2$  erhalten wir durch Einsetzen

$$F_2(n) = F_2(1) + [n + (n-1) + \dots + 2] = 1 + [n + (n-1) + \dots + 2 + 1]$$

und schließlich

$$F_2(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. 1. Eine einzige Ebene zerlegt den Raum in zwei Teile.

2. Wir setzen voraus, die Zahl  $F_3(n)$  der Teile, in welche  $n$  Ebenen allgemeiner Lage den Raum zerlegen, sei bekannt, und betrachten  $n+1$  Ebenen allgemeiner Lage. Die ersten  $n$  Ebenen zerlegen den Raum in  $F_3(n)$  Teile. Die  $(n+1)$ -te Ebene  $\pi$  schneidet diese  $n$  Ebenen in  $n$  Geraden allgemeiner Lage; folglich wird  $n$  in  $F_2(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$  Teile zerlegt (siehe B). Damit erhalten wir

$$F_3(n+1) = F_3(n) + F_2(n) = F_3(n) + \frac{n^2+n+2}{2} \quad (9)$$

Ersetzen wir  $n$  in Gleichung (9) durch  $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} F_3(n) &= F_3(n-1) + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} \\ F_3(n-1) &= F_3(n-2) + \frac{(n-2)^2 + (n-2) + 2}{2} \\ &\dots \\ F_3(3) &= F_3(2) + \frac{2^2 + 2 + 2}{2} \\ F_3(2) &= F_3(1) + \frac{1^2 + 1 + 2}{2} \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$F_3(n) = F_3(1) + \frac{1}{2}[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2] + \frac{1}{2}[(n-1) + (n-2) + \dots + 1] \\ + \frac{1}{2} \underbrace{[2 + 2 + \dots + 2]}_{n-1 \text{ Zweien}}$$

und hieraus schließlich unter Berücksichtigung von  $F_3(1) = 2$

$$F_3(n) = 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{(n-1)n}{4} + (n-1) = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

Aufgabe 35. In wieviel Teile wird der Raum von  $n$  Kugeln zerlegt, von denen je drei einander in zwei Punkten schneiden und keine vier durch einen Punkt gehen?

Beispiel 26. Man bestimme die Menge der Punkte des Raumes, bei denen die Summe der Quadrate der Abstände von  $n$  gegebenen Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_n$  konstant (gleich  $d^2$ ) ist.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben:

A. Auf einer Geraden seien  $n$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gegeben. Man bestimme diejenigen Punkte  $M$  der Geraden, für welche  $l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 = d^2$  ist, wobei  $d$  eine gegebene Länge ist.

Lösung. Wir wählen unsere Gerade als Zahlengerade. Die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mögen den Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und der gesuchte Punkt  $M$  der Zahl  $x$  entsprechen. Nun können wir den Abständen  $M$  von  $A_1$ ,  $M$  von  $A_2$ , ...,  $M$  von  $A_n$  die Maßzahlen bezüglich einer Längeneinheit  $e$  zuordnen. Folglich gilt

$$l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 = [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2]e^2$$

Nun ist

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2 = \\ = x^2 - 2a_1x + a_1^2 + x^2 - 2a_2x + a_2^2 + \dots + x^2 - 2a_nx + a_n^2 \\ = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ = n \left( x - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}$$

Den Punkt mit der Koordinate  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  bezeichnen wir mit  $A$ ; dann gilt

$$l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 = \\ = nl(MA)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)e^2 - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}e^2 \quad (10)$$

Somit ist

$$nl(MA)^2 = d^2 - \left( (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \right)$$

also

$$l(MA) = \sqrt{\frac{1}{n} \left[ d^2 - \left( (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \right) \right] e^2}$$

Diese Gleichung definiert, wenn der Radikand positiv ist, zwei Punkte  $M$ , welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen; sie liegen auf verschiedenen Seiten des Punktes  $A$ .

B. Man bestimme die Menge der Punkte der Ebene, deren Summe der Quadrate der Abstände von  $n$  gegebenen Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_n$  konstant (gleich  $d^2$ ) ist.

Lösung.<sup>25</sup> Wir wählen in der Ebene ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem und bezeichnen die Projektionen der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  auf die  $x$ -Achse und auf die  $y$ -Achse mit  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  bzw.  $A''_1, A''_2, \dots, A''_n$ . Die Projektionen des Punktes  $M$  auf die Koordinatenachsen bezeichnen wir mit  $M'$  bzw.  $M''$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 &= l(M'A'_1)^2 + l(M''A''_1)^2 \\ l(MA_2)^2 &= l(M'A'_2)^2 + l(M''A''_2)^2 \\ &\dots \\ l(MA_n)^2 &= l(M'A'_n)^2 + l(M''A''_n)^2 \end{aligned}$$

also

$$l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 = l(M'A'_1)^2 + l(M'A'_2)^2 + \dots + l(M'A'_n)^2 + l(M''A''_1)^2 + l(M''A''_2)^2 + \dots + l(M''A''_n)^2$$

Nach (10) gilt

$$\begin{aligned} l(M'A'_1)^2 + l(M'A'_2)^2 + \dots + l(M'A'_n)^2 &= \\ &= nl(M'A')^2 + \left[ (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} \right] e^2 \\ l(M''A''_1)^2 + l(M''A''_2)^2 + \dots + l(M''A''_n)^2 &= \\ &= nl(M''A'')^2 + \left[ (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right] e^2 \end{aligned}$$

wobei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Abszissen und  $y_1, y_2, \dots, y_n$  die Ordinaten der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , ferner  $A'$  und  $A''$  Punkte der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse mit den Koordinaten

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

sind. Damit gilt

$$\begin{aligned} l(MA_1)^2 + l(MA_2)^2 + \dots + l(MA_n)^2 &= \\ &= nl(MA)^2 + \left[ (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right] e^2 \end{aligned} \quad (11)$$

wobei  $A$  der Punkt der Ebene ist, dessen Projektionen auf die Koordinatenachsen  $A'$  bzw.  $A''$  sind. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} nl(MA)^2 &= d^2 - \left( (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right) e^2 \end{aligned}$$

<sup>25</sup>Eine andere Lösung dieser Aufgabe wurde schon früher angegeben (vgl. Beispiel 22 und Aufgabe 20).



also mit<sup>26</sup>

$$\rho = d^2 - \left( (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) - \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n} - \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}{n} \right) e^2$$

$$l(MA) = \sqrt{\frac{1}{n}\rho}$$

Die gesuchte Figur ist also der Kreis mit dem Radius  $\sqrt{\frac{1}{n}\rho}$  wenn der Radikand positiv ist. Die Figur besteht aus einem einzigen Punkt  $A$ , wenn der Radikand 0 ist, und enthält keinen Punkt, wenn der Radikand negativ ist.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Hinweis. Man betrachte im Raum ein kartesisches Koordinatensystem und projizierte alle Punkte auf die  $x, y$ -Ebene und auf die  $z$ -Achse. Ferner verwende man die Formeln (10) und (11).

## 2.6.2 Definition und Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl

Beispiel 27. Ein Tetraeder, dessen vier Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 nummeriert sind, wird so in kleinere Tetraeder zerlegt, dass je zwei der Tetraeder der Zerlegung keine gemeinsamen Punkte oder einen gemeinsamen Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante (aber nicht einen Teil einer Kante) oder eine gemeinsame Seitenfläche (aber nicht einen Teil einer Seitenfläche) besitzen.

Alle Eckpunkte der so entstandenen kleinen Tetraeder werden wieder mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 nummeriert. Dabei werden diejenigen Eckpunkte, die auf einer Seitenfläche des großen Tetraeders liegen, mit den drei Ziffern nummeriert, mit denen die Eckpunkte dieser Seitenfläche nummeriert sind, während diejenigen Eckpunkte, die auf einer Kante des großen Tetraeders liegen, mit den beiden Ziffern nummeriert werden, mit denen die Eckpunkte dieser Kante nummeriert sind.

Man beweise, dass man wenigstens ein kleines Tetraeder finden kann, dessen vier Eckpunkte sämtlich mit verschiedenen Ziffern nummeriert sind.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben:

A. Eine Strecke, deren Eckpunkte mit den Ziffern 1 und 2 bezeichnet sind, wird durch einige sich nicht überlappende kleinere Strecken zerlegt. Alle Punkte der Zerlegung werden mit den Ziffern 1 oder 2 (Abb. 67 a) nummeriert. Man beweise, dass es wenigstens eine Strecke der Zerlegung gibt, deren Eckpunkte mit verschiedenen Ziffern bezeichnet sind.

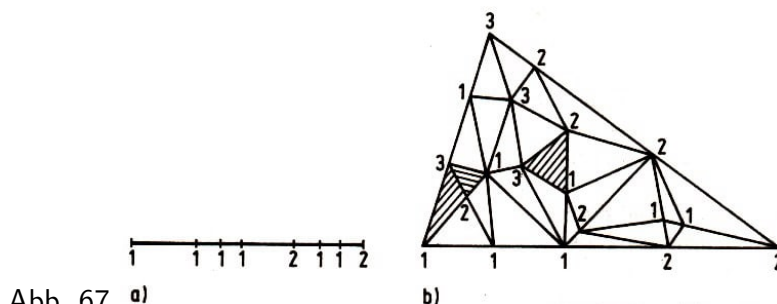


Abb. 67 a)

b)

<sup>26</sup>Variable  $\rho$  in dieser Abschrift eingefügt

Lösung. Wir zeigen, dass die Anzahl der Strecken, die mit den Ziffern 1, 2 bezeichnet sind, ungerade ist. Hieraus folgt aber die Existenz einer solchen Strecke (denn 0 ist eine gerade Zahl). Mit  $A$  bezeichnen wir die Anzahl der Eckpunkte der Strecken der Zerlegung, die mit der Ziffer 1 bezeichnet sind.

Diese Zahl ist offenbar ungerade; denn jede Ziffer 1, die im Innern der großen Strecke steht (die Anzahl dieser Ziffern bezeichnen wir mit  $k$ ), ist Eckpunkt von zwei Strecken der Zerlegung, und nur diejenige Ziffer 1, mit der ein Eckpunkt der großen Strecke bezeichnet ist, gehört genau einer Strecke der Zerlegung an.

Folglich ist  $A = 2k + 1$ . Ist andererseits  $p$  die Anzahl der 1,1-Strecken unter allen Strecken der Zerlegung und  $q$  die Anzahl der 1,2-Strecken, dann wird die Anzahl  $A$  der 1-Eckpunkte gleich  $A = 2p + q$ . Aus  $2k + 1 = 2p + q$  ergibt sich, dass  $q$  ungerade ist.

B. Ein Dreieck, dessen Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2 und 3 nummeriert sind, wird so in kleinere Dreiecke zerlegt, dass zwei Dreiecke der Zerlegung entweder gar keine gemeinsamen Punkte oder einen gemeinsamen Eckpunkt oder eine gemeinsame Seite (aber nicht einen Teil einer Seite) haben.

Alle Eckpunkte des Dreiecks der Zerlegung werden mit den Ziffern 1, 2 und 3 nummeriert; dabei werden die Eckpunkte, die auf einer Seite des großen Dreiecks liegen, mit einer der Ziffern, mit denen die Eckpunkte dieser Seiten nummeriert sind, bezeichnet (Abb. 67 b). Man beweise, dass man wenigstens ein Dreieck der Zerlegung finden kann, dessen Ecken sämtlich mit verschiedenen Ziffern nummeriert sind.

Lösung. Wir zeigen, dass die Anzahl der 1,2,3-Dreiecke ungerade ist. Zu diesem Zweck berechnen wir die Gesamtzahl  $A$  der Seiten der Dreiecke der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2 nummeriert sind. Die Anzahl der 1,2-Strecken, die im Innern des ursprünglichen Dreiecks liegen, bezeichnen wir mit  $k$ , die Anzahl der Strecken, die auf der Seite  $\overline{12}$  des großen Dreiecks liegen, mit  $l$  (auf den anderen Seiten des ursprünglichen Dreiecks kann keine der 1,2-Strecken liegen). Weil jede der ersten  $k$  Strecken der Zerlegung zu zwei Dreiecken der Zerlegung und jede der  $l$  letzten Strecken zu einem Dreieck gehört, ist  $A = 2k + l$ .

Nun sei  $p$  die Anzahl der Dreiecke der Zerlegung, deren Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 2 oder 1, 2, 1 nummeriert sind, und  $q$  die Anzahl der 1,2,3-Dreiecke. Weil jedes der ersten  $p$  Dreiecke zwei 1,2-Seiten und jedes der  $q$  letzten eine solche Seite besitzt, ist  $A = 2p + q$ . Aus  $2k + l = 2p + q$  folgt, dass  $q$  und  $l$  zugleich gerade oder ungerade sind. Die Zahl  $l$  ist aber nach Satz A ungerade; folglich ist auch  $q$  ungerade.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. Es sei  $A$  die Anzahl der Flächen der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2, 3 bezeichnet sind. Wenn  $k$  solche Flächen im Innern des ursprünglichen Tetraeders liegen und  $l$  auf der Seitenfläche 123, ist  $A = 2k + l$ .

Ist andererseits  $p$  die Zahl der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 1, 2, 3; 1, 2, 2, 3 oder 1, 2, 3, 3 nummeriert sind und  $q$  die Anzahl der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 bezeichnet sind, so ist  $A = 2p + q$ . Aus  $2k + l = 2p + q$  folgt, dass die Zahlen  $q$  und  $l$  zugleich gerade oder ungerade sind. Die Zahl  $l$  ist aber nach B ungerade, folglich ist auch  $q$  ungerade.

In der Einführung zu diesem Abschnitt haben wir darauf hingewiesen, dass die vollständige Induktion nach der Dimensionszahl manchmal durch übliche vollständige Induktion ersetzt werden kann.

Wir führen hier entsprechende Beispiele an.

Beispiel 28. Man beweise den in Beispiel 27 A formulierten Satz mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl  $n$  der Strecken der Zerlegung.

Lösung. 1. Für  $n = 1$  ist die Behauptung offensichtlich richtig.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für jede Zerlegung der Strecke in  $n$  kleinere Strecken bewiesen. Es sei eine Zerlegung der Strecke  $\overline{12}$  in  $n + 1$  kleinere Strecken gegeben. Sind nicht alle diese Strecken mit den Ziffern 1, 2 bezeichnet, so gibt es eine Strecke, deren Endpunkte mit einer einzigen Ziffer, etwa 1, 1, bezeichnet sind.

Wir ziehen diese Strecke auf einen Punkt zusammen. Dann erhalten wir eine Zerlegung der Strecke  $\overline{12}$  in  $n$  kleinere Strecken.

Nach Induktionsvoraussetzung finden wir in dieser Zerlegung und schließlich auch in der ersten Zerlegung wenigstens eine Strecke, die mit den Ziffern 1, 2 bezeichnet wurde, was zu beweisen war.

Beispiel 29. Man beweise den in Beispiel 27 B formulierten Satz mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl  $n$  der Dreiecke der Zerlegung.

Lösung. 1. Für  $n = 1$  ist die Behauptung offensichtlich richtig. Für  $n = 2$  ist sie leicht zu verifizieren.

2. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für jede Zerlegung des Dreiecks 123 in  $n$  oder weniger Dreiecke schon bewiesen.

Es sei eine Zerlegung des Dreiecks in  $n + 1$  Dreiecke gegeben. Sind nicht alle diese Dreiecke mit den Ziffern 1, 2, 3 bezeichnet, so finden wir ein Dreieck, bei welchem zwei Eckpunkte die gleiche Nummer tragen, etwa 1.

Zur Seite  $\overline{11}$  gehören entweder zwei Dreiecke der Zerlegung (wenn diese Seite im Innern des ursprünglichen Dreiecks liegt, Abb. 68 a) oder ein Dreieck (wenn diese Seite auf einer Seite des ursprünglichen Dreiecks liegt, Abb. 68 b).

Wir ziehen diese Strecke auf einen Punkt zusammen.

Dadurch erhalten wir eine neue Zerlegung des Dreiecks 123 in  $n - 1$  (im ersten Fall, Abb. 68 c) oder in  $n$  (im zweiten Fall, Abb. 68 d) Dreiecke. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es in dieser Zerlegung wenigstens ein Dreieck, dessen Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 3 bezeichnet sind; dann gibt es aber auch schon in der ersten Zerlegung ein solches Dreieck (Warum?).

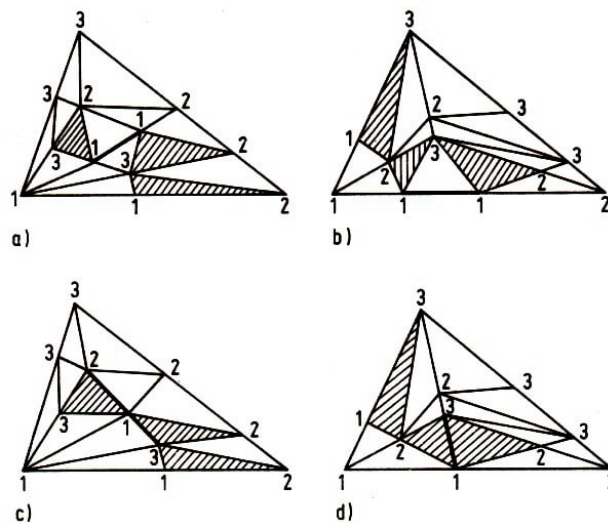


Abb. 68

Aufgabe 36. Man beweise den Satz des Beispiels 27 C mittels vollständiger Induktion nach der

Anzahl der Tetraeder der Zerlegung.

Den Satz des Beispiels 27 kann man noch präzisieren. Wir führen den Begriff der "Orientierung" eines Tetraeders ein, dessen Eckpunkte mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 nummeriert sind, indem wir die Tetraeder, für die - vom Eckpunkt 4 aus betrachtet - der Umlaufsinn des Dreiecks 123 (vom Eckpunkt 1 zum Eckpunkt 2 und dann zum Eckpunkt 3) mit dem Uhrzeigersinn übereinstimmt, von den Tetraedern unterscheiden für die dieser Umlaufsinn - vom Eckpunkt 4 aus betrachtet - sich vom Uhrzeigersinn unterscheidet. Dann gilt die Aussage der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 37. Man beweise, dass unter der Bedingung des Beispiels 27 die Zahl der Tetraeder der Zerlegung, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 nummeriert und so orientiert sind wie das Haupttetraeder, um 1 größer ist als die Anzahl der 1,2,3,4-Tetraeder, die davon verschieden orientiert sind.

Beispiel 30. Im Raum seien  $n > 3$  Kugeln gegeben, von denen je vier einen gemeinsamen Punkt haben. Man beweise, dass ein Punkt existiert, der allen Kugeln angehört.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. Auf einer Geraden seien  $n$  Strecken gegeben, von denen jeweils zwei gemeinsame Punkte besitzen. Man beweise, dass ein Punkt existiert, der allen Strecken angehört.

Lösung. 1. Für  $n = 2$  ist die Behauptung offenbar richtig.

2. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für je  $n$  Strecken schon bewiesen, und auf einer Geraden seien  $n + 1$  Strecken  $l_1, l_2, \dots, l_n$  gegeben, die der Voraussetzung des Satzes genügen. Nach Induktionsvoraussetzung haben die  $n$  Strecken  $l_1, l_2, \dots, l_n$  wenigstens einen gemeinsamen Punkt. Wir bezeichnen ihren Durchschnitt (welcher offenbar ein Punkt oder eine Strecke ist) mit  $l$ .

Wir beweisen, dass die Strecken  $l_{n+1}$  und  $l$  wenigstens einen gemeinsamen Punkt haben. Anderenfalls existiert ein Punkt  $A$ , der  $l_{n+1}$  und  $l_n$  trennt (Abb. 69 a).

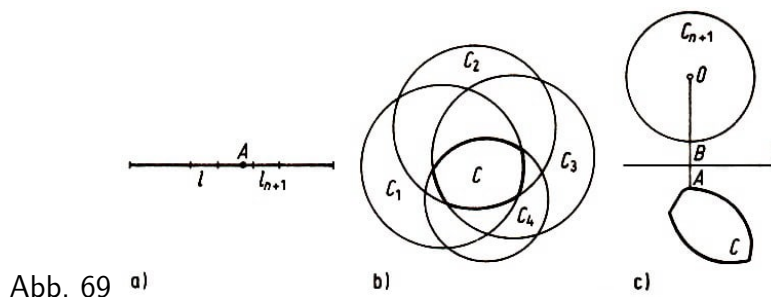


Abb. 69 a)

b)

c)

Jede der Strecken  $l_1, l_2, \dots, l_n$  enthält aber  $l$  und nach Voraussetzung wenigstens einen Punkt der Strecke  $l_{n+1}$ . Folglich enthält jede dieser Strecken den Punkt  $A$ ; folglich müsste  $A$  in  $l$  liegen.

Der erhaltene Widerspruch beweist, dass  $l_{n+1}$  und  $l$  gemeinsame Punkte haben. Der Durchschnitt von  $l$  und  $l_{n+1}$  gehört allen Strecken  $l_1, l_2, \dots, l_n$  an.

B. In der Ebene seien  $n > 2$  Kreisflächen gegeben, von denen je drei gemeinsame Punkte besitzen. Man beweise, dass mindestens ein Punkt existiert, der in allen Kreisflächen liegt.

Lösung. 1. Für  $n = 3$  ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für je  $n$  Kreisflächen schon bewiesen und in der Ebene seien  $n + 1$  Kreisflächen  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$  gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung

haben die  $n$  Kreisflächen  $C_1, C_2, \dots, C_n$  wenigstens einen gemeinsamen Punkt. Wir bezeichnen den Durchschnitt von  $C_1, C_2, \dots, C_n$  mit  $C$  (das ist ein Kreisbogenvieleck (Abb. 69 b); es kann auch zu einer Kreisfläche oder zu einem Punkt entarten).

Wir werden beweisen, dass die Figur  $C$  mit der Kreisfläche  $C_{n+1}$  gemeinsame Punkte hat. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann kann eine Gerade  $l$  gefunden werden, die die Figuren  $C_{n+1}$  und  $C$  trennt:

Es sei  $A$  der Punkt der Figur  $C$ , der dem Mittelpunkt  $O$  von  $C_{n+1}$  am nächsten liegt, und  $B$  der Schnittpunkt der Strecke  $OA$  mit dem Rand von  $C_{n+1}$ . (Ein solcher Punkt existiert im Innern der Strecke  $OA$ , da nach unserer Annahme der Abstand des Punktes  $A$  von  $O$  größer als der Radius von  $C_{n+1}$  ist.) Die Mittelsenkrechte von  $AB$  kann als Gerade  $l$  benutzt werden.<sup>27</sup>

Da alle Kreisflächen  $C_1, C_2, \dots, C_n$  die Figur  $C$  enthalten und nach Voraussetzung gemeinsame Punkte mit  $C_{n+1}$ , treffen sie auch die Gerade  $l$ . Wir bezeichnen die Strecke, die  $C_1$  aus der Geraden  $l$  schneidet, mit  $a_1$ , die Strecke, die  $C_2$  aus dieser Geraden schneidet, mit  $a_2$  usw.

Auf der Geraden  $l$  werden wir dann  $n$  Strecken  $a_1, a_2, \dots, a_n$  haben. Je zwei der Strecken  $a_1, a_2, \dots, a_n$  haben wenigstens einen gemeinsamen Punkt: Wir betrachten zwei von ihnen, etwa  $a_1$  und  $a_2$ .

Es sei  $M$  ein beliebiger Punkt der Figur  $C$ , dann gehört der Punkt  $M$  sowohl  $C_1$  als auch  $C_2$  an. Da sich je drei von den gegebenen Kreisflächen schneiden, existiert ein Punkt  $N$  im Durchschnitt von  $C_1, C_2$  und  $C_{n+1}$ . Dann gehört die Strecke  $MN$  ganz  $C_1$  und  $C_2$  an. Folglich wird ihr Schnittpunkt mit der Geraden  $l$  gemeinsamer Punkt der Strecken  $a_1$  und  $a_2$ .

Wie aus dem Satz A folgt, existiert auf der Geraden  $l$  ein Punkt, der allen Strecken  $a_1, a_2, \dots, a_n$  angehört, also auch  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , folglich auch der Figur  $C$ . Das widerspricht der Konstruktion der Geraden  $l$ .

Demnach müssen  $C_{n+1}$  und  $C$  einen gemeinsamen Punkt haben, und dies ist ein gemeinsamer Punkt von  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ .

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. 1. Für  $n = 4$  ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir setzen voraus, unsere Behauptung sei für je  $n$  Kugeln schon bewiesen, und es seien  $n + 1$  Kugeln  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$  gegeben.

Den Durchschnitt der  $n$  Kugeln  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  (der nach Induktionsvoraussetzung nicht leer ist) bezeichnen wir mit  $\Phi$ . Dann kann man wie in Beispiel 30 B zeigen:

Wenn der Kugelnkörper  $\Phi_{n+1}$  keinen Punkt von  $\Phi$  enthält, dann existiert eine Ebene  $\pi$ , die  $\Phi$  und  $\Phi_{n+1}$  trennt. Die Figuren, in denen die einzelnen Kugelnkörper  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  die Ebene  $\pi$  schneiden, sind Kreisflächen, von denen je drei gemeinsame Punkte besitzen. Folglich existiert in der Ebene  $\pi$  ein Punkt, der allen diesen Kreisflächen angehört und der also in  $\Phi$  liegt. Das widerspricht der Definition der Ebene  $\pi$ .

<sup>27</sup>Wenn die Gerade  $l$  die Figuren  $C_{n+1}$  und  $C$  nicht trennt, befindet sich auf ihr ein Punkt  $K$ , der der Figur  $C$  angehört. Im Dreieck  $OAK$  ist der Winkel  $\angle OAK$  ein spitzer; außerdem gilt  $l(OA) \leq l(OK)$  nach Definition des Punktes  $A$ . Folglich wird der Fußpunkt  $L$  des Lotes von  $O$  auf die Gerade  $g_{AK}$  zwischen den Punkten  $A$  und  $K$  liegen, wobei  $l(OL) < l(OA)$  gilt. Da die beiden Punkte  $A$  und  $K$  allen Kreisflächen  $C_1, C_2, \dots, C_n$  angehören, gilt das auch für die ganze Strecke  $AK$ ; folglich gehört auch ihr Punkt  $L$  jeder Kreisfläche  $C_1, C_2, \dots, C_n$  an, also liegt auch ihr Punkt  $L$  in der Figur  $C$ . Deshalb muss  $l(OL) \geq l(OA)$  gelten. Dieser Widerspruch, nach welchem das Lot länger wäre als eine Schräge, beweist unsere Behauptung.

Der Satz des Beispiels 30 kann statt mittels vollständiger Induktion nach der Dimensionszahl auch direkt mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kreisflächen bewiesen werden.

Beispiel 31. Man beweise den Satz des Beispiels 30 B mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kreisflächen.

Lösung. Wir beweisen den entsprechenden Satz für Kreisbogenvielecksflächen, d.h. für Figuren, die Durchschnitt endlich vieler Kreisflächen, d.h. für Figuren, die Durchschnitt endlich vieler Kreisflächen sind; hieraus wird als Spezialfall unsere ursprüngliche Behauptung folgen:

1. Für  $n = 3$  ist die Behauptung offenbar richtig.

Gegeben seien vier Kreisbogenvielecksflächen  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , von denen sich je drei schneiden. Wir bezeichnen mit  $A_1$  einen gemeinsamen Punkt der Figuren  $C_2, C_3$  und  $C_4$ , mit  $A_2$  einen gemeinsamen Punkt der Figuren  $C_1, C_3$  und  $C_4$  usw. Es sind zwei Fälle möglich:

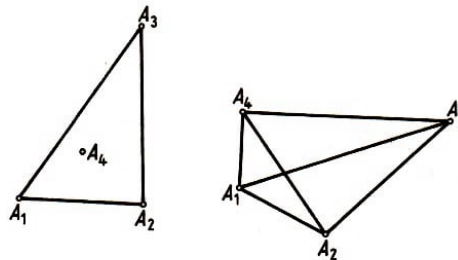


Abb. 70 a)

b)

a) Einer der Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , etwa  $A_4$ , gehört der (eventuell zu einer Strecke entarteten) Dreiecksfläche an, die durch die übrigen drei Punkte bestimmt wird (Abb. 70a). Da das Dreieck  $A_1A_2A_3$  ganz zu  $C_4$  gehört, ist auch  $A_4$  ein Punkt der Figur  $C_4$ ; folglich ist  $A_4$  gemeinsamer Punkt aller vier Figuren  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

b) Keiner der Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  gehört der Dreiecksfläche an, die von den übrigen Punkten bestimmt wird. Dann wird der Schnittpunkt  $A$  der Diagonalen des (konvexen) Vierecks  $A_1A_2A_3A_4$  (Abb. 70 b) als gemeinsamer Punkt der Dreiecksflächen  $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4$  und  $A_2A_3A_4$  gemeinsamer Punkt aller vier Figuren  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

2. Unsere Behauptung sei für  $n$  Kreisbogenvielecksflächen schon bewiesen. Wir betrachten jetzt  $n + 1$  Kreisbogenvielecksflächen  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ . Mit  $C$  bezeichnen wir den Durchschnitt der Figuren  $C_n$  und  $C_{n+1}$  (offenbar ist  $C$  ebenfalls eine Kreisbogenvielecksfläche) und beweisen, dass sich je drei der  $n$  Figuren  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C$  schneiden; nach Voraussetzung existiert zu je drei der Figuren  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  wenigstens ein gemeinsamer Punkt; wir betrachten jetzt  $C$  und zwei weitere dieser Figuren, etwa  $C_1, C_2, C$ . Da sich von den Figuren  $C_1, C_2, C_n, C_{n+1}$  je drei schneiden, haben diese vier Figuren nach 1. einen gemeinsamen Punkt, und dies ist ein gemeinsamer Punkt der Figuren  $C_1, C_2$  und  $C$ .

Da sich je drei der  $n$  Figuren  $C_1, C_2, \dots, C_n, C$  schneiden, haben nach Induktionsvoraussetzung alle diese Figuren einen gemeinsamen Punkt, der auch gemeinsamer Punkt der  $n + 1$  Figuren  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$  ist.

Aufgabe 38. Man beweise die Aussage des Beispiels 30 C mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kugelkörper.

Aufgabe 39. In der Ebene seien  $n$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gegeben, und der Abstand zwischen je zwei von ihnen sei nicht größer als die Längeneinheit  $e$ . Man beweise, dass alle diese Punkte in einem Kreis mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{3}}e$  enthalten sind (Satz von Young<sup>28</sup>).

<sup>28</sup>J.W. Young (1863-1942), englischer Mathematiker.

Aufgabe 40. Im Raum seien  $n$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gegeben, und der Abstand zwischen je zwei von ihnen sei nicht größer als die Längeneinheit  $e$ . Man beweise, dass alle diese Punkte in einem Kugelkörper mit dem Radius  $\frac{\sqrt{6}}{4}e$  enthalten sind.

Eine Verallgemeinerung der Aussage des Beispiels 30 und zahlreiche Anwendungen findet man in [9].<sup>29</sup>

Beispiel 32. Wir betrachten endlich viele Halbräume<sup>30</sup>, die den ganzen Raum ausfüllen. Man beweise, dass man aus ihnen vier (oder weniger) Halbräume auswählen kann, die schon den ganzen Raum ausfüllen.

Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. Eine Gerade sei von endlich vielen Halbgeraden (Strahlen) überdeckt. Man beweise, dass man aus ihnen zwei Halbgeraden auswählen kann, die schon die Gerade überdecken.

Lösung. Es sei  $A$  der Anfangspunkt, der bei allen "nach links gerichteten" Halbgeraden am weitesten "rechts" liegt, und  $B$  der Anfangspunkt, der bei allen "nach rechts gerichteten" Halbgeraden am weitesten "links" liegt. Da die Halbgeraden nach Voraussetzung die Gerade überdecken, liegt der Punkt  $B$  nicht rechts von  $A$ , und die beiden Halbgeraden mit den Anfangspunkten  $A$  und  $B$  überdecken die Gerade vollständig.

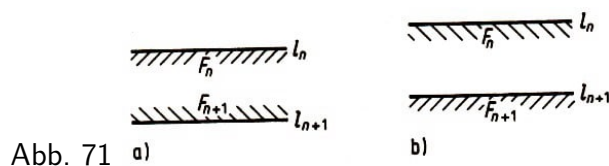
B. Die ganze Ebene werde von endlich vielen Halbebenen<sup>31</sup> überdeckt. Man beweise, dass man aus ihnen zwei oder drei Halbebenen auswählen kann, die schon die ganze Ebene überdecken.

Lösung. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Anzahl  $n$  der Halbebenen.

1. Für  $n = 3$  ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir nehmen nun an, unsere Behauptung sei für  $n$  Halbebenen wahr, und es seien  $n + 1$  Halbebenen  $F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}$  gegeben, welche die ganze Ebene überdecken. Die Trägergeraden dieser Halbebenen bezeichnen wir mit  $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$ . Es sind zwei Fälle möglich:

Fall 1. Die Gerade  $l_{n+1}$  ist ganz in einer der gegebenen Halbebenen enthalten, etwa in  $F_n$ . Dann sind die Geraden  $l_n$  und  $l_{n+1}$  parallel. Liegen die Halbebenen  $F_n$  und  $F_{n+1}$  auf verschiedenen Seiten ihrer Trägergeraden (Abb. 71 a), dann überdecken schon die Halbebenen  $F_n$  und  $F_{n+1}$  die Ebene.



<sup>29</sup>Die Aussage in Beispiel 30 B ist auch dann noch richtig, wenn statt der Kreisfläche beliebige konvexe Figuren betrachtet werden. (Das ist nach dem Beweis zum Beispiel 30 unmittelbar einzusehen.) Dieser allgemeinere Satz ist als Satz von Helly bekannt.

<sup>30</sup>Jede Ebene zerlegt die Menge der übrigen Punkte des Raumes in zwei Teile, sogenannte Halbräume, derart, dass die Verbindungsstrecke je zweier Punkte, die in verschiedenen Teilen des Raumes liegen, die Ebene trifft und die Verbindungsstrecke zweier Punkte aus ein und demselben Raumteil die Ebene meidet. Die Ebene wird Trägerebene dieser Halbräume genannt.

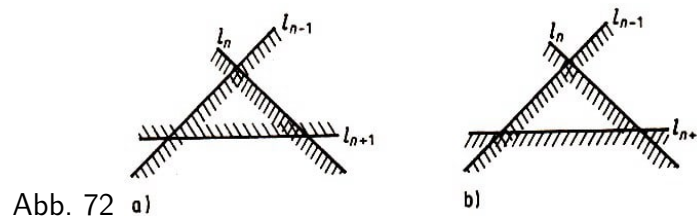
<sup>31</sup>Jede Gerade einer Ebene zerlegt die Menge der übrigen Punkte der Ebene in zwei Teile, sogenannte Halbebenen, derart, dass die Verbindungsstrecke je zweier Punkte aus verschiedenen Teilen die Gerade trifft und die je zweier Punkte aus ein und demselben Teil der Ebene die Gerade meidet. Die Gerade wird Trägergerade dieser Halbebenen genannt.

Anderenfalls ist eine dieser beiden Halbebenen ganz in der anderen enthalten (beispielsweise  $F_{n+1}$  in  $F_n$ ; Abb. 71 b), und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung, weil in diesem Fall schon  $n$  Halbebenen (in unseren Fall  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ) die ganze Ebene überdecken.

Fall 2. Die Gerade  $l_{n+1}$  ist in keiner der Halbebenen  $F_1, F_2, \dots, F_n$  enthalten. Diese Halbebenen überdecken die Gerade  $l_{n+1}$  und schneiden aus ihr  $m$  ( $\leq n$ ) Halbgeraden heraus, die  $l_{n+1}$  überdecken.

Wie wir in A sahen, kann man aus diesen Halbgeraden zwei auswählen, die ebenfalls schon die Gerade überdecken. Die entsprechenden Halbebenen seien  $F_{n-1}$  und  $F_n$ . Wir betrachten jetzt die beiden möglichen Fälle der gegenseitigen Anordnung der Halbebenen  $F_{n-1}, F_n$  und  $F_{n+1}$  einzeln:

a) Die Halbebene  $F_{n+1}$  enthält den Schnittpunkt der Geraden  $l_{n-1}$  und  $l_n$  (Abb. 72 a). Dann überdecken schon die drei Halbebenen  $F_{n-1}, F_n$  und  $F_{n+1}$  die Ebene.



b) Die Halbebene  $F_{n+1}$  enthält den Schnittpunkt der Geraden  $l_{n-1}$  und  $l_n$  nicht (Abb. 72 b). Dann wird die Ebene von den  $n$  Halbebenen  $F_1, F_2, \dots, F_n$  überdeckt, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Lösung. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach der Anzahl  $n$  der gegebenen Halbräume.

1. Für  $n = 4$  ist die Behauptung offensichtlich.

2. Wir nehmen an, unsere Behauptung sei für  $n$  Halbräume wahr, und es seien  $n + 1$  Halbräume  $V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1}$  gegeben, die den Raum überdecken. Die Trägerebenen dieser Halbräume bezeichnen wir mit  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1}$ . Es sind zwei Fälle möglich:

Fall 1. Die Ebene  $\pi_{n+1}$  ist völlig in einem der Halbräume  $V_1, V_2, \dots, V_n$  enthalten, etwa in  $V_n$ . Dann sind die Ebenen  $\pi_{n+1}$  und  $\pi_n$  parallel. Wenn die Halbräume  $V_{n+1}$  und  $V_n$  auf verschiedenen Seiten ihrer Trägerebenen liegen, überdecken schon diese beiden Halbräume den ganzen Raum. Anderenfalls ist einer der beiden Halbräume ganz in dem anderen enthalten, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

Fall 2. Die Ebene  $\pi_{n+1}$  ist nicht in einem der Halbräume  $V_1, V_2, \dots, V_n$  enthalten. Dann wird sie von diesen Halbräumen, die aus ihr  $m \leq n$  Halbebenen  $F_1, F_2, \dots, F_m$  ausscheiden, vollständig überdeckt. Nach B kann man aus diesen Halbebenen zwei oder drei auswählen, die bereits  $\pi_{n+1}$  überdecken (Abb. 71a und 72a). Wir betrachten die hier möglichen Fälle einzeln:

a) Die Ebene  $\pi_{n+1}$  wird von zwei Halbebenen (Abb. 71 a) überdeckt, etwa von  $F_1$  und  $F_2$ , wobei die entsprechenden Ebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  parallel sind (Abb. 73a). Dann wird der ganze Raum von den beiden Halbräumen  $V_1$  und  $V_2$  ausgefüllt.



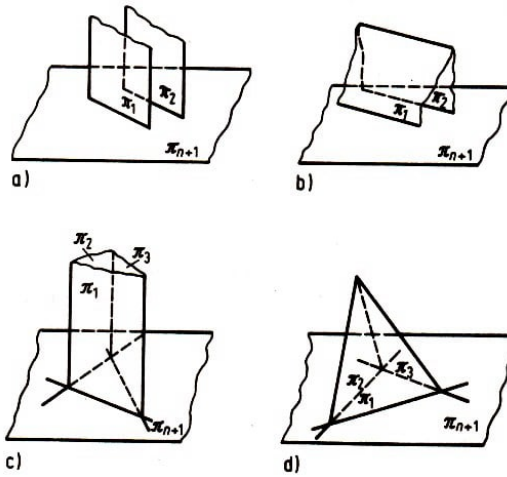


Abb. 73 c)

d)

b) Die Ebene  $\pi_{n+1}$  wird etwa von den beiden Halbebenen  $F_1$  und  $F_2$  überdeckt und die entsprechenden Ebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  schneiden sich (Abb. 73b). Wenn der Halbraum  $V_{n+1}$  die Schnittgerade der Ebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  enthält, dann füllen die drei Halbräume  $V_1, V_2$  und  $V_{n+1}$  den ganzen Raum aus. Anderenfalls wird der Halbraum  $V_{n+1}$  durch die Halbräume  $V_1$  und  $V_2$  überdeckt, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

c) Die Ebene  $\pi_{n+1}$  wird von drei Halbebenen (Abb. 72a), etwa  $F_1, F_2$  und  $F_3$  überdeckt, wobei die Ebene  $\pi_3$  zur Schnittgeraden der Ebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  parallel ist. Die entsprechenden Ebenen bilden ein "Prisma" (Abb. 73c). Dann füllen die drei Halbräume  $V_1, V_2$  und  $V_3$  den ganzen Raum aus.

d) Die Ebene  $\pi_{n+1}$  wird etwa von den drei Halbebenen  $F_1, F_2$  und  $F_3$  überdeckt. Die Ebene  $\pi_3$  ist nicht der Schnittgeraden der Ebenen  $\pi_1, \pi_2$  parallel. Die Ebenen  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  und  $\pi_{n+1}$  bilden eine "Pyramide" (Abb. 73d).

Wenn der Halbraum  $V_{n+1}$  den Schnittpunkt der Ebenen  $\pi_1, \pi_2$  und  $\pi_3$  enthält, füllen die vier Halbräume  $V_1, V_2, V_3$  und  $V_{n+1}$  den Raum aus. Anderenfalls wird der Halbraum  $V_{n+1}$  von den Halbräumen  $V_1, V_2$  und  $V_3$  überdeckt, und der Satz folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe 41. Man beweise, dass im Raum nicht mehr als vier Halbgeraden (Strahlen) existieren können, die paarweise zwischen sich stumpfe Winkel bilden.

Beispiel 33. Man beweise die Existenz einer Zahl  $C_3$ , derart, dass die Seiten jedes räumlichen Vielecks  $A_1A_2\dots A_n$ , wenn sie sämtlich höchstens gleich der Längeneinheit sind, ohne Änderung ihrer Größe und ihrer Richtung so umgeordnet werden können, dass das entstehende Vieleck in einen Kugelkörper mit dem Radius  $C_3$  eingeschlossen werden kann.

Wie überall in diesem Abschnitt betrachten wir zuerst entsprechende "eindimensionale" und "zweidimensionale" Aufgaben.

A. Man beweise: Es gibt eine Länge  $C_1$  derart, dass für jeden geschlossenen Streckenzug  $A_1A_2\dots A_n$  in einer Geraden, bei dem die Länge jeder der Strecken  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  die Längeneinheit nicht übertrifft, ein geschlossener Streckenzug  $B_1B_2\dots B_n$  und eine eindeutige Zuordnung seiner Seiten zu den Seiten von  $A_1A_2\dots A_n$  existieren, bei der einander zugeordnete gerichtete Seiten  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{B_kB_{k+1}}$  den gleichen Vektor bestimmen ( $\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \# \overrightarrow{B_kB_{k+1}}$ ) und  $B_1B_2\dots B_n$  in einer Strecke der Länge  $2C_1$  enthalten ist.

Lösung. Wir vereinbaren, die Länge  $a_i$  der Seite  $A_iA_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ; unter  $A_{n+1}$  verstehen wir den Punkt  $A_1$ ) unseres geschlossenen Streckenzuges  $A_1A_2\dots A_n$  positiv zu zählen, wenn der Punkt  $A_{i+1}$  rechts von  $A_i$  liegt (wir wählen unsere Gerade, auf der alle Punkte liegen,

waagerecht), und negativ im anderen Fall;  $a_i$  ist also der gerichtete Abstand von  $A_i$  nach  $A_{i+1}$ . Dann ist  $a_1 + a_2$  der gerichtete Abstand von  $A_1$  und  $A_3$  (der nach unserer Verabredung positiv oder negativ werden kann),  $a_1 + a_2 + a_3$  der gerichtete Abstand von  $A_1$  nach  $A_4$ , ...,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$  der gerichtete Abstand von  $A_1$  nach  $A_n$  und  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = 0$  der gerichtete Abstand von  $A_1$  nach  $A_1$ .

Nach der Voraussetzung über den geschlossenen Streckenzug  $B_1B_2\dots B_n$  kann unsere Aussage wie folgt formuliert werden:

Es seien  $n$  positive bzw. negative Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  gegeben. Die Beträge dieser  $n$  Zahlen übertreffen die Zahl 1 nicht, und ihre Summe ist gleich Null. Man beweise, dass diese Zahlen in eine solche Reihenfolge  $a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_{i_n}$  umgestellt werden können (hier sind  $i_1, i_2, \dots, i_n$  die Zahlen  $1, 2, \dots, n-1, n$  aber in anderer Reihenfolge), dass alle Summen  $a_{i_1}, a_{i_1} + a_{i_2}, \dots, a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}$  dem Betrag nach eine Zahl  $C_1$  (die von der Reihenfolge  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und von der Zahl  $n$  nicht abhängt) nicht übertreffen.

Wir beweisen, dass  $C_1 = 1$  gewählt werden kann. Es seien  $a'_1, a'_2, \dots, a'_p$  alle positiven Zahlen der Folge  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und  $a''_1, a''_2, \dots, a''_q$  die übrigen Glieder dieser Folge ( $p + q = n$ ).

Wir nehmen so viele der ersten positiven Zahlen  $a'_1, a'_2, \dots, a'_k$  ( $k < p$ ), dass ihre Summe die Zahl 1 nicht übertrifft (z.B. nur die Zahl  $a'_1$ ). Danach fügen wir so viele der negativen Zahlen  $a''_1, a''_2, \dots, a''_l$  ( $l \leq q$ ) hinzu, dass die Summe aller verwendeten Zahlen negativ, aber dem Betrage nach nicht größer als 1 wird.

Nun wenden wir uns von neuem den positiven Zahlen zu usw., bis wir alle gegebenen Zahlen verbraucht haben. Die dabei erhaltene Folge

$$a_1^* = a'_1, a_2^* = a'_2, \dots, a_k^* = a'_k, a_{k+1}^* = a''_1, a_{k+2}^* = a''_2, \dots, a_{k+l}^* = a''_l, \dots$$

besitzt die geforderte Eigenschaft.

Den eben bewiesenen Satz über  $n$  positive bzw. negative Zahlen können wir auch in einer anderen Form aussprechen:

Die Ecken unseres Streckenzuges bestimmen Vektoren  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  derart, dass  $A_i$  durch  $\alpha_i$  in  $A_{i+1}$  abgebildet wird. Die Beträge dieser  $n$  Vektoren übertreffen die Zahl 1 nicht, und ihre Summe ist gleich dem Nullvektor.

Diese Vektoren können in eine solche Reihenfolge  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}$  umgestellt werden, dass alle Summen  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n}$  dem Betrag nach die Zahl  $C_1 = 1$  nicht übertreffen.

B. Man beweise: Es gibt eine Länge  $C_2$  derart, dass in einer Ebene für jeden geschlossenen Streckenzug  $A_1A_2\dots A_n$ , bei dem die Länge der Seiten die Längeneinheit nicht übertrifft (Abb. 74), ein geschlossener Streckenzug  $D_1D_2\dots D_n$  und eine eindeutige Zuordnung seiner Seiten zu den Seiten von  $A_1A_2\dots A_n$  existieren, bei der einander zugeordnete gerichtete Seiten  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$  und

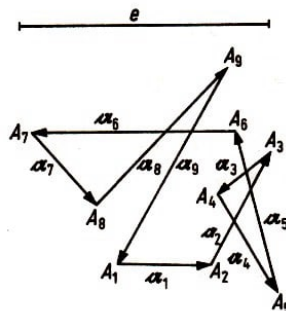


Abb. 74

$\overrightarrow{D_k D_{k+1}}$  den gleichen Vektor bestimmen ( $\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \neq \overrightarrow{D_k D_{k+1}}$  und  $D_1 D_2 \dots D_n$  in einer Kreisfläche vom Radius  $C_2$  enthalten ist).

Lösung. Wir beweisen, dass man für  $C_2$  stets  $\sqrt{5}$  Längeneinheiten wählen kann. Die Ecken eines beliebigen Streckenzuges bestimmen Vektoren  $a_1, a_1, \dots, a_n$  derart, dass  $A_i$  durch  $a_i$  in  $A_{i+1}$  abgebildet wird (Abb. 74).

Wir wählen aus den Vektoren einige, mit  $b_1, \dots, b_s$  bezeichnete Vektoren derart aus, dass  $b = b_1 + b_2 + \dots + b_s$  maximalen Betrag besitzt bzw. dass die die Figur schließende Strecke  $B_1 B_{s+1}$  größtmögliche Länge hat (Abb. 75).

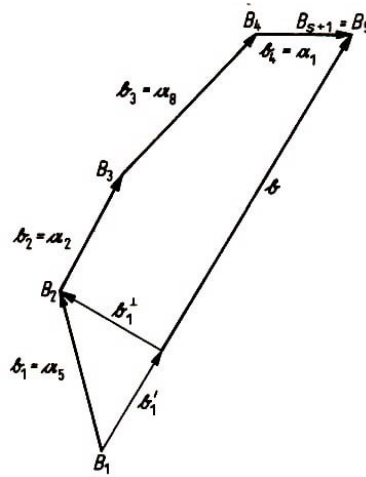


Abb. 75

Die übrigen der Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bezeichnen wir mit  $b_{s+1}, \dots, b_n$ . Es gilt

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$$

Wir zerlegen jeden der Vektoren  $b_\nu$  in seine Parallelkomponente  $b'_\nu$  und seine Normalkomponente  $b_\nu^\perp$  bezüglich  $b$ , d.h., es gilt  $b'_\nu \parallel b$ ,  $b_\nu^\perp \perp b$  und  $b_\nu = b'_\nu + b_\nu^\perp$ . Dann gilt offenbar

$$b'_1 + b'_2 + \dots + b'_s = b \quad , \quad b_1^\perp + b_2^\perp + \dots + b_s^\perp = 0$$

$$b'_{s+1} + \dots + b'_n = -b \quad , \quad b_{s+1}^\perp + \dots + b_n^\perp = 0$$

sowie  $|b'_\nu| \leq 1$  und  $|b_\nu^\perp| \leq 1$  für  $\nu = 1, \dots, n$ .

Nach A können  $b_1, b_2, \dots, b_s$  bzw.  $b_{s+1}, \dots, b_n$  derart zu  $c_1, \dots, c_s$  bzw.  $c_{s+1}, \dots, c_n$  umgeordnet werden, dass

$$|c_1^\perp + \dots + b_\mu^\perp| \leq 1 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \dots, s$$

$$|c_{s+1}^\perp + \dots + b_\nu^\perp| \leq 1 \quad \text{für} \quad \nu = s+1, \dots, n$$

gilt.

Wiederum nach A können wir die Vektoren  $c_1, \dots, c_n$  derart zu Vektoren  $d_1, \dots, d_n$  umordnen, dass erstens die Reihenfolge  $c_1, \dots, c_s$  bzw.  $c_{s+1}, \dots, c_n$  erhalten bleibt und zweitens

$$|d'_1 + \dots + d'_\nu| \leq 1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, n$$

gilt. Wir erhalten nach dem Satz des Pythagoras und nach der Dreiecksungleichung für Vektoren folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |d_1 + \dots + d_\lambda|^2 &= |d'_1 + \dots + d'_\lambda|^2 + |d_1^\perp + \dots + d_\lambda^\perp|^2 \\ &\leq 1 + |c_1^\perp + \dots + c_\mu^\perp + c_{s+1}^\perp + \dots + c_\nu^\perp|^2 \\ &\leq 1 + (|c_1^\perp + \dots + c_\mu^\perp| + |c_{s+1}^\perp + \dots + c_\nu^\perp|)^2 \leq 5 \end{aligned}$$

für  $\lambda = 1, \dots, n$  und geeignete  $\mu$  und  $\nu$ . Daraus folgt wie behauptet

$$|\mathfrak{d}_1 + \dots + \mathfrak{d}_\lambda| \leq \sqrt{5}$$

für  $\lambda = 1, \dots, n$ .

Es sei  $D_1 = A_1$  und  $D_{i+1}$  der Punkt, der aus  $D_i$  durch Anwendung von  $\mathfrak{d}_i$  hervorgeht. Wir haben dann ein  $n$ -Eck  $D_1 D_2 \dots D_n$ , das in der Kreisfläche um  $D_1$  mit dem Radius von  $\sqrt{5}$  Längeneinheiten liegt.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

Hinweis. Man beweise, dass für  $C_3$  stets  $\sqrt{21}$  Längeneinheiten gewählt werden können. Die Überlegungen in diesem Fall verlaufen analog zu B; es sind die senkrechten Projektionen der Vektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$  auf die Ebene  $K$ , die senkrecht auf der schließenden Strecke  $\overline{B_1 B_{s+1}}$  steht, zu betrachten.

Beispiel 34. Definition der Schwerlinien und des Schwerpunktes eines Tetraeders.

A. Der Schwerpunkt einer Strecke sei wie in Beispiel 23 definiert.

B. Auch die Schwerlinien und der Schwerpunkt eines Dreiecks seien wie in Beispiel 23 definiert.

C. Unter einer Schwerlinie eines Tetraeders verstehen wir eine Strecke, die einen Eckpunkt des Tetraeders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche verbindet.

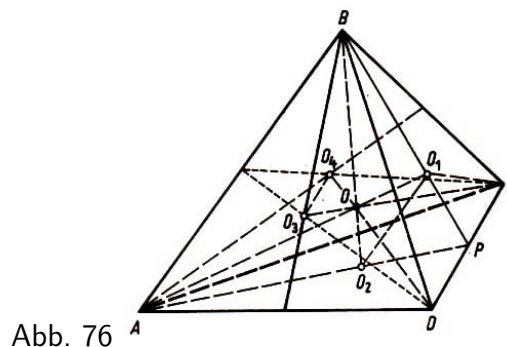


Abb. 76

Wir beweisen, dass sich die Schwerlinien eines Tetraeders in einem Punkt schneiden. Dazu betrachten wir das Tetraeder  $ABCD$  (Abb. 76).

Es seien  $O_1, O_2, O_3, O_4$  die Schwerpunkte der Dreiecke  $BCD, CDA, DAB$  bzw.  $ABC$ . Da sich die Geraden  $g_{BO_1}$  und  $g_{AO_2}$  im Mittelpunkt  $P$  der Strecke  $CD$  schneiden, schneiden sich auch die Geraden  $g_{AO_1}$  und  $g_{BO_2}$  in einem Punkt  $O_{12}$ .

Analog dazu schneiden sich die Geraden  $g_{AO_1}$  und  $g_{CO_3}$ , die Geraden  $g_{AO_1}$  und  $g_{DO_4}$ , die Geraden  $g_{BO_2}$  und  $g_{CO_3}$ , die Geraden  $g_{BO_2}$  und  $g_{DO_4}$  und die Geraden  $g_{CO_3}$  und  $g_{DO_4}$  in den Punkten  $O_{13}$  bzw.  $O_{14}$  bzw.  $O_{23}$  bzw.  $O_{24}$  bzw.  $O_{34}$ .

Wir beweisen nun, dass alle diese Punkte übereinstimmen (auf der Zeichnung mit dem Punkt  $O$ ). Würden etwa  $O_{12}$  und  $O_{13}$  nicht übereinstimmen, dann lägen die Geraden  $g_{AO_1}, g_{BO_2}$  und  $g_{CO_3}$  in einer Ebene  $\pi$  durch die Punkte  $O_{12}, O_{13}$  und  $O_{23}$ .

Dann läge aber auch die Gerade  $g_{DO_4}$ , die die Geraden  $g_{AO_1}, g_{BO_2}$  und  $g_{CO_3}$  schneidet, in dieser Ebene  $\pi$ , d.h., alle vier Eckpunkte des Tetraeders müssten in der Ebene  $\pi$  liegen. Da dies nicht richtig ist, müssen die Punkte  $O_{12}$  und  $O_{13}$  übereinstimmen. Mit diesen Punkten stimmen auch alle übrigen Punkte  $O_{14}, O_{23}, O_{24}$  und  $O_{34}$  überein.

Den Schnittpunkt der Schwerlinien des Tetraeders nennt man den Schwerpunkt des Tetraeders.

Aufgabe 42. Man beweise, dass jede der Schwerelinien des Tetraeders durch den Schwerpunkt im Verhältnis 3:1 (von den Eckpunkten aus gerechnet) geteilt wird.

## 2.7 Lösungen

1. Wir bezeichnen mit  $F_{2^n}$  den Flächeninhalt des regelmäßigen  $2^n$ -Ecks, das dem Kreis mit dem Radius  $R$  einbeschrieben ist, mit  $h_{2^n}$  den Abstand seiner Seiten vom Mittelpunkt. Dann folgt aus (1)

$$h_{2^n} = \sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}} = \frac{R}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ Zweien}}$$

und (für  $n \geq 3$ )

$$F_{2^n} = 2^n \left( \frac{1}{2} a_{2^n} \right) h_{2^n} = 2^{n-1} R^2 \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-3 \text{ Zweien}}} = 2^{n-2} R a_{2^{n-1}}$$

Ferner ist

$$\frac{F_{2^n}}{F_{2^{n+1}}} = \frac{2^{n-1} a_{2^n} h_{2^n}}{2^{n-1} R a_{2^n}} = \frac{h_{2^n}}{R} = \cos \frac{180^\circ}{2^n}$$

woraus

$$\frac{F_4}{F_{2^n}} = \frac{F_4}{F_8} \cdot \frac{F_8}{F_{16}} \dots \frac{F_{2^{n-1}}}{F_{2^n}} = \cos \frac{180^\circ}{4} \cos \frac{180^\circ}{8} \dots \cos \frac{180^\circ}{2^{n-1}}$$

folgt. Da

$$F_4 = 2R^2 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{2^n} = \pi R^2$$

gilt, ist  $\frac{2}{\pi}$  Grenzwert des Ausdrucks  $\cos 45^\circ \cdot \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ}{4} \dots$ . Danach braucht man nur die Formel

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

zu benutzen.

2. Weil  $N$  Diagonalen und  $n$  Seiten des  $n$ -Ecks Seiten von  $n - 2$  Dreiecken sind (vgl. Beispiel 4), folgt  $2N + n = 3(n - 2)$  und somit

$$N = n - 3$$

3. Das konvexe  $(n + 1)$ -Eck  $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$  wird von der Diagonalen  $A_1 A_n$  in das  $n$ -Eck  $A_1 A_2 \dots A_n$  und das Dreieck  $A_1 A_n A_{n+1}$  zerlegt. Wir setzen die Zahl  $F(n)$  der Teile, in welche das  $n$ -Eck  $A_1 A_2 \dots A_n$  durch seine Diagonalen zerlegt wird, als bekannt voraus und bestimmen, um welche Zahl diese Zahl  $F(n)$  wächst, wenn der Eckpunkt  $A_{n+1}$  hinzukommt. Diese Zahl ist um 1 größer als die Anzahl der Teile, in welche die vom Eckpunkt  $A_{n+1}$  ausgehenden Diagonalen durch die übrigen Diagonalen zerlegt werden. So finden wir

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + 1 + [1(n-2) + 1] + [2(n-3) + 1] + \dots + [(n-2)(n-(n-1)) + 1] \\ &= F(n) + (n+1) \cdot 1 + [1 + 2 + \dots + (n-2)] \cdot n - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-2)(n-1)] \\ &= F(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= F(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = F(n) + \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} - 1 \end{aligned}$$

(vgl. Kap. 1, Beispiele 3 und 6).

Durch Addition der einzelnen Zuwächse (vgl. Kap. 1, Beispiele 3 und 4 sowie Aufgabe 4), erhalten wir

$$F(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

4. Mit den Bezeichnungen im Beispiel 7 ist zuerst zu beweisen, dass  $\frac{r}{\rho} = 1 - \frac{2r}{h}$  und  $\frac{\rho}{r} = 1 + \frac{2\rho}{h}$  gilt, wobei  $h$  die vom Punkt  $C$  ausgehende Höhe ist. Daraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2r_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) &= 1 - \frac{2r}{h} = \left(1 - \frac{2r'_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2r'_2}{h}\right) \\ \left(1 - \frac{2\rho_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2\rho_2}{h}\right) &= 1 - \frac{2\rho}{h} = \left(1 - \frac{2\rho'_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2\rho'_2}{h}\right) \end{aligned}$$

5. Bekanntlich gilt  $F = sr = (s-c)\rho = \frac{abc}{4R}$ , woraus wir mit Hilfe des Kosinussatzes

$$\begin{aligned} \frac{r+\rho}{2R} &= \frac{\frac{F}{s} + \frac{F}{s-c}}{\frac{abc}{2F}} = \frac{(a+b)[c^2 - (a-b)^2]}{2abc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \cos \alpha + \cos \beta \end{aligned}$$

erhalten.

6. Zunächst beweist man den folgenden Hilfssatz:

Es seien  $O_1$  bzw.  $O_2$  die Mittelpunkte der Kreise  $\mathfrak{k}_1$  bzw.  $\mathfrak{k}_2$ , die sich in  $O$  schneiden,  $B_1B_2$  eine Sehne durch den zweiten Schnittpunkt  $A_1$  dieser Kreise (Abb. 77). Dann erscheinen  $B_1B_2$  und  $O_1O_2$  von  $O$  aus unter ein und demselben Winkel. Dann beweist man die Behauptung für drei Kreise. Danach nimmt man an, der Satz sei für  $n-1$  Kreise richtig und betrachtet  $n$  Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_n$ .

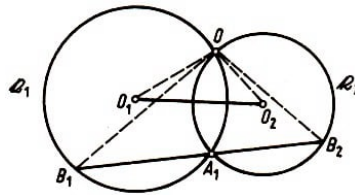


Abb. 77

Man zieht die Sehne durch den Punkt  $B_{n-1}$  und den Schnittpunkt der Kreise  $\mathfrak{k}_{n-1}$  und  $\mathfrak{k}_1$ . Auf die  $n-1$  Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{n-1}$  wendet man die Induktionsvoraussetzung an.

2. Lösung. Wir betrachten gerichtete Winkel zwischen Geraden, auch Kreuze genannt (vgl. [11]). Es gelten folgende gleichsinnige Kongruenzen

$$(g_{OB_1}, g_{A_1B_1}) \cong (g_{OO_1}, g_{O_1O_2}) \quad , \quad (g_{A_1B_1}, g_{OB_2}) \cong (g_{O_1O_2}, g_{OO_2})$$

daraus folgt

$$(g_{OB_1}, g_{OB_2}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_2})$$

Analog erhalten wir

$$(g_{OB_2}, g_{OB_3}) \cong (g_{OO_2}, g_{OO_3})$$

usw. Dann gilt

$$(g_{OB_1}, g_{OB_{k+1}}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_{k+1}})$$

unter der Voraussetzung

$$(g_{OB_1}, g_{OB_k}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_k})$$

wegen

$$(g_{OB_k}, g_{OB_{k+1}}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_1})$$

Für  $k = n + 1$  erhalten wir

$$(g_{OB_1}, g_{OB_{n+1}}) \cong (g_{OO_1}, g_{OO_1})$$

woraus mit  $g_{OB_1} = g_{OB_{n+1}}$  die Behauptung folgt.

**7.** Es sei  $M = A_1A_2A_3\dots A_n$  ein konvexes  $n$ -Eck, das kein Parallelogramm ist, und  $ABC$  ein Dreieck, wobei etwa  $A_1A_2 \subseteq AB$ ,  $A_kA_{k+1} \subseteq BC$  und  $A_lA_{l+1} \subseteq CA$  gelten. Wir wählen im Innern von  $M$  einen Punkt  $O$  und verbinden ihn durch Strecken mit drei beliebigen Punkten  $P$ ,  $Q$  und  $R$  der Seiten  $A_1A_2$ ,  $A_kA_{k+1}$  bzw.  $A_lA_{l+1}$ . Die Strecken  $OP$ ,  $OQ$  und  $OR$  zerlegen die zu  $M$  gehörige Fläche  $F$  in drei Teile  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$ .

Mit  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  bezeichnen wir Flächen, die wir aus  $F$  durch Stauchungen mit den Zentren  $A$ ,  $B$  bzw.  $C$  erhalten, wobei die Stauchungsfaktoren so gewählt werden, dass  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  (bei geeigneter Nummerierung) von  $F_1$ ,  $F_2$  bzw.  $F_3$  überdeckt werden.

**8.** Wir nehmen an, alle diese Punkte seien entsprechend der Bedingung der Aufgabe verbunden. Dabei können wir voraussetzen, dass zu je zwei Punkten genau eine Verbindung gehört. Wir kommen zu einer Karte, die fünf Ecken,  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  Grenzen und folglich sieben Länder hat (Satz von Euler).

Dass solche Karten unmöglich sind, folgt aus Überlegungen, die denen ähnlich sind, die zur Ungleichung (5) führten.

**9.** Zu einem konvexen Polyeder wählen wir eine Kugel mit hinreichend großem Radius, deren Mittelpunkt im Innern des Polyeders liegt. Vom Mittelpunkt der Kugel projizieren wir alle Punkte des Polyeders auf die Kugeloberfläche  $S$ .

Die dort entstandene Karte projizieren wir von einem beliebigen ihrer Punkte  $P$ , der auf keiner Grenze liegt, auf diejenige Ebene, die die Kugeloberfläche im Gegenpol von  $P$  berührt (stereografische Projektion). Auf die erhaltene ebene Karte wenden wir den Satz von Euler an.

**10.** Vgl. Beispiel 10.

**11.** Man wende den Satz von Euler an.

**12.** Es sei eine Karte gegeben, die von  $n$  Kreisen mit Sehnen gebildet wird und mit drei Farben  $\alpha, \beta, \gamma$  regulär gefärbt ist. Wir führen einen  $(n + 1)$ -ten Kreis ein und färben die Länder um, die im Innern des Kreises liegen:

a) auf der einen Seite der Sehne nach der Vorschrift

$$\alpha \rightarrow \beta, \quad \beta \rightarrow \gamma, \quad \gamma \rightarrow \alpha$$



b) auf der anderen Seite der Sehne nach der Vorschrift

$$\alpha \rightarrow \gamma, \quad \beta \rightarrow \alpha, \quad \gamma \rightarrow \beta$$

13. Wir zeigen zunächst, dass zwölf Farben immer zur regulären Färbung der Karte unseres Planeten ausreichen. Wenn die Zahl der Länder der Karte 12 nicht übertrifft, ist klar, dass uns zwölf Farben genügen.

Wir setzen nun voraus, unsere Behauptung sei für alle Karten, die  $n$  ( $n \geq 12$ ) Länder enthalten, richtig, und betrachten irgendeine Karte, die  $n + 1$  Länder enthält.

Wie schon früher können wir uns auf den Fall normaler Karten beschränken; ferner können wir annehmen, dass jedes Land aus zwei Teilen besteht, da wir einem Land  $\sigma$ , das nur aus einem Teil besteht, ein nicht sehr großes Territorium zuteilen können, das wir um eine Ecke herauslösen, in der irgendwelche drei von  $\sigma$  verschiedene Länder zusammenstoßen.

Man kann auch den Fall der Länder ausschließen, die einen ringförmigen Teil enthalten; denn wenn ein Land  $\sigma_1$  die Form eines Ringes hat, das Land  $\sigma'$  an diesen Ring von innen grenzt, das Land  $\sigma''$  von außen angrenzt, dann können wir zu  $\sigma'$  einen solchen Teil des Ringes, der von  $\sigma'$ ,  $\sigma_1$  und von  $\sigma''$  (das ist selbstverständlich) begrenzt wird, hinzufügen; wenn zwölf Farben für die Färbung der neuen Karte ausreichen, dann wird das auch für die alte Karte möglich sein.

Wir bezeichnen jetzt mit  $p$  die Anzahl der Ecken, mit  $l$  die Anzahl der Grenzen und mit  $s$  die Anzahl der Länder der Karte; dann gilt, weil die Karte normal ist  $2l = 3p$ ; andererseits gilt nach der Eulerschen Formel (Beispiel 9) in diesem Fall  $2s + p = l + 2$ , weil die Zahl der Gebiete auf der Karte gleich  $2s$  ist.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$12s = 3p + 12$$

oder, wenn wir die Anzahl der Länder mit  $i$  Grenzen mit  $s^{(i)}$  bezeichnen, wobei  $i = 4, 5, 6, \dots$  ist,

$$12(s^{(4)} + s^{(5)} + s^{(6)} + \dots) = (4s^{(4)} + 5s^{(5)} + 6s^{(6)} + \dots) + 12, \quad \text{d.h.}$$

$$8s^{(4)} + 7s^{(5)} + 6s^{(6)} + \dots + 2s^{(10)} + s^{(11)} = s^{(13)} + 2s^{(14)} + 3s^{(15)} + \dots + 12$$

Hieraus folgt, da eine der Zahlen  $s^{(4)}, s^{(5)}, \dots, s^{(11)}$  positiv sein muss, dass es ein Land  $\sigma$  gibt, das weniger als zwölf Grenzen besitzt; wenn wir jeden der zwei Teile dieses Landes zu einem der an diesen Teil grenzenden Länder hinzufügen, erhalten wir eine Karte mit  $n$  Ländern, die man nach Induktionsvoraussetzung mit zwölf Farben regulär färben kann.

Danach wird es einfach, die Ausgangskarte regulär mit zwölf Farben zu färben (vgl. Abb. 78).

Um nachzuweisen, dass elf Farben nicht ausreichen können, genügt es, ein Beispiel einer Karte mit zwölf Ländern anzugeben, von denen jeweils jedes von elf Ländern begrenzt wird.

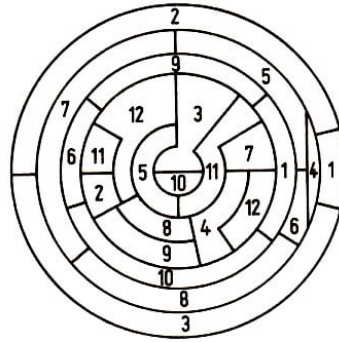


Abb. 78

**14.** In der Ebene seien also  $n$  Punkte  $A_1, \dots, A_n$ , Drehwinkel  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  und Streckungsfaktoren  $k_1, \dots, k_n$  gegeben. Es ist ein  $n$ -Eck  $X_1 \dots X_n$  derart zu konstruieren, dass

$$X_1 \rho(A_1, \varphi_1) \mathfrak{d}(A_1, k_1) = X_2, \quad X_2 \rho(A_2, \varphi_2) \mathfrak{d}(A_2, k_2) = X_3, \quad \dots$$

$$X_n \rho(A_n, \varphi_n) \mathfrak{d}(A_n, k_n) = X_1$$

gilt. Die Aufgabe kann analog zum Beispiel 18 (einem Spezialfall dieser Aufgabe) gelöst werden.

Nur wird anstatt der Drehung  $\rho(A_1, \varphi_1)$  um den gegebenen Punkt  $A_1$  um den bekannten Drehwinkel  $\varphi_1$  hier eine Ähnlichkeitsabbildung betrachtet, die aus der Drehung um den Drehwinkel  $\varphi_1$  und einer Streckung (Homothetie)  $\mathfrak{d}(A_1, k_1)$  mit dem Zentrum  $A_1$  und einem Streckungsfaktor  $k_1$  (Seitenverhältnis des entsprechenden Dreiecks) besteht.

Für  $A_2, A_3, \dots, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  und  $k_2, k_3, \dots$  gilt Entsprechendes. Die aufeinanderfolgende Ausführung zweier solcher Ähnlichkeitsabbildungen ist einer gewissen dritten Ähnlichkeitsabbildung gleich (vgl. [11], S. 251, Formel (64) in Verbindung mit dem Satz 79 oder [8]).

Durch vollständige Induktion kann man sich eine Übersicht über Produkte von  $n$  Drehstreckungen verschaffen und dann die Lösbarkeit der Aufgabe diskutieren.

**15.** Die Seite  $A_1 A_2$  eines gesuchten Vielecks gehe durch den Punkt  $P$  und die Seite  $A_2 A_3$  sei parallel zur Geraden  $l$  (Abb. 79). Wir bezeichnen mit  $P'$  bzw.  $A'_2$  den Punkt, der symmetrisch zum Punkt  $P$  bzw.  $A_1$  bezüglich des Lotes zur Geraden  $l$  durch den Kreismittelpunkt liegt.

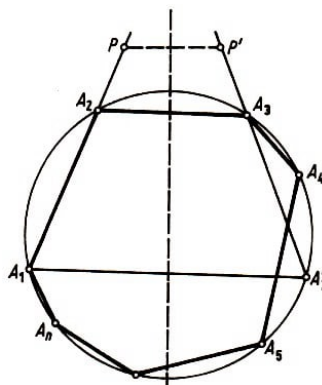


Abb. 79

Im  $n$ -Eck  $A_1A_2A_3\dots A_n$  ist die Seite  $A_1A_2$  parallel zur gegebenen Geraden  $l$  und die Seite  $A'_2A_3$  geht durch den bekannten Punkt  $P'$ .

Wenn wir diese Konstruktion hinreichend oft durchführen, reduziert sich die Aufgabe auf die Konstruktion des  $n$ -Ecks, bei dem  $k$  benachbarte Seiten durch bekannte Punkte gehen und die übrigen  $n - k$  Seiten parallel zu gegebenen Geraden sind.

**16.** Auf dem Kreis vom Radius  $a$  legen wir die Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  fest als Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Wir nehmen an, der Punkt  $B_n$  auf der Strecke  $OA_n$  mit  $l(OB_n) = \frac{1}{n}l(OA_n) = \frac{a}{n}$  sei schon bekannt (hier wird  $A_{6m+k} = A_k$  für jedes  $m$  und  $k = 1, 2, \dots, 6$  angesehen;  $B_1 = A_1$ ), und bezeichnen mit  $B_{n+1}$  den Schnittpunkt der Geraden  $g_{OA_{n+1}}$  und  $g_{B_nA_{n+2}}$ . Dann ist

$$l(OB_{n+1}) = \frac{a}{n+1}$$

Die Lösung der Aufgabe 16 kann auch aus der Lösung des Beispiels 20 gefolgert werden (wie?).

**17.** Die gesuchte Figur ist eine Gerade. Der Beweis ist analog zur Lösung des Beispiels 21.

**18.** Mit den Bezeichnungen der Abb. 49 gilt

$$F_{\Delta BCE} + F_{\Delta ADE} = F_{\Delta BCF} + F_{\Delta ADF} = F_{\Delta BCO} + F_{\Delta ADO} = \frac{1}{2}F$$

wobei  $F$  der Flächeninhalt der Vierecksfläche ist. Hieraus ergibt sich nach Beispiel 21 (oder Aufgabe 17), dass die Punkte  $E, F$  und  $O$  auf einer Geraden liegen.

**19.** Mit den Bezeichnungen der Abb. 50, wobei die Punkte  $M$  und  $N$  die Mitten der Diagonalen  $AC$  und  $BD$  sind und  $P$  die Mitte der Strecke  $EF$  ist, gilt

$$F_{\Delta ABM} + F_{\Delta CDM} = F_{\Delta ABN} + F_{\Delta CDN} = F_{\Delta ABP} - F_{\Delta CDP} = \frac{1}{2}F$$

wobei  $F$  der Flächeninhalt der Vierecksfläche ist. Hieraus ergibt sich nach Aufgabe 17, dass die Punkte  $M, N$  und  $P$  auf einer Geraden liegen.

20. Es genügt, in der Voraussetzung des Beispiels 22  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  zu setzen.

21. Es ist dies der Mittelpunkt des Kreises, der in Aufgabe 20 gesucht wurde.

22. Wenn  $M$  Punkt der gesuchten Figur ist, so gilt  $\frac{l(AM)}{l(BM)} = c$ , also  $l(AM)^2 - c^2 \cdot l(BM)^2 = 0$ ; damit ist die vorliegende Aufgabe auf das Beispiel 22 zurückgeführt.

23. Man kann zeigen, dass der Flächeninhalt einer Dreiecksfläche mit Eckpunkten, die Fußpunkte der Lote von einem Punkt  $M$  auf die Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  sind, gleich

$$\frac{1}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| F_{\Delta A_1A_2A_3}$$

ist, wobei  $R$  der Radius des umbeschriebenen Kreises  $\mathfrak{k}$  des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  und  $d$  der Abstand des Punktes  $M$  vom Mittelpunkt des Kreises  $\mathfrak{k}$  ist. Hieraus folgt, dass für  $n = 3$  die gesuchte Figur ein zu  $\mathfrak{k}$  konzentrischer Kreis oder ein Paar solcher Kreise ist. Mit Hilfe vollständiger Induktion nach der Anzahl der Seiten des Vielecks lässt sich zeigen, dass auch für jedes  $n$  die gesuchte Figur ein Kreis oder ein Paar konzentrischer Kreise ist.

24. Im Beispiel 23 wurde

$$\frac{\overrightarrow{OA_{n-1}}}{\overrightarrow{OO_{n-1}}} = \frac{\overrightarrow{OA_n}}{\overrightarrow{OO_n}} = -(n-1)$$

bewiesen. Mit der gleichen Überlegung erhält man

$$\frac{\overrightarrow{OA_k}}{\overrightarrow{OO_k}} = \frac{\overrightarrow{OA_{k+1}}}{\overrightarrow{OO_{k+1}}} = -(n-1)$$

für  $k = 1, \dots, n-1$ . Folglich ist  $O$  das Zentrum und  $-\frac{1}{n-1}$  der Stauchungsfaktor.

25. Es seien  $S_1$  und  $S_2$  die Schwerpunkte des  $(k-1)$ -Ecks  $A_2A_3\dots A_k$  und des  $(n-k-1)$ -Ecks  $A_{k+2}A_{k+3}\dots A_n$ , ferner  $O_1$  und  $O_2$  die Schwerpunkte der  $k$ -Ecke  $A_1A_2\dots A_k$  und  $A_2A_3\dots A_{k+1}$ , schließlich  $O_3$  und  $O_4$  die Schwerpunkte der  $(n-k)$ -Ecke  $A_{k+1}\dots A_n$  und  $A_{k+2}\dots A_nA_1$  (Abb. 80).

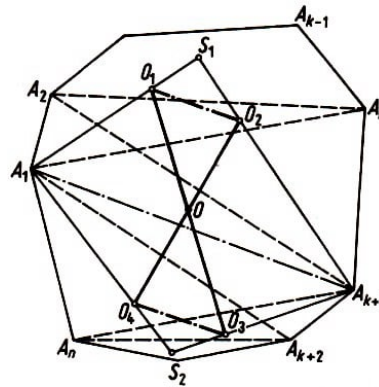


Abb. 80

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{O_1S_1}}{\overrightarrow{O_1A_1}} &= \frac{\overrightarrow{O_2S_1}}{\overrightarrow{O_2A_{k+1}}} = -\frac{1}{k-1} & \text{und} & \quad O_1O_2 \parallel A_1A_{k+1} \\ \frac{\overrightarrow{O_3S_2}}{\overrightarrow{O_3A_{k+1}}} &= \frac{\overrightarrow{O_4S_2}}{\overrightarrow{O_4A_1}} = -\frac{1}{n-k-1} & \text{und} & \quad O_3O_4 \parallel A_1A_{k+1} \end{aligned}$$

Wenn jetzt  $O$  Schnittpunkt der Schwerlinien  $k$ -ter Ordnung  $\overrightarrow{O_2O_4}$  und  $\overrightarrow{O_1O_3}$  ist, so gilt

$$\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO_3}} = \frac{\overrightarrow{OO_2}}{\overrightarrow{OO_4}} = \frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{\overrightarrow{O_3O_4}} = \frac{\frac{1}{k}\overrightarrow{A_1A_{k+1}}}{\frac{1}{n-k}\overrightarrow{A_{k+1}A_1}} = -\frac{n-k}{k}$$

Man kann sogar beweisen, dass für beliebige  $k$  der Schnittpunkt der Schwerelinie  $k$ -ter Ordnung des  $n$ -Ecks mit seinem Schwerpunkt übereinstimmt.

26. Die Strecken, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten und die Mittelpunkte der Diagonalen eines beliebigen Vierecks miteinander verbinden, schneiden sich in einem Punkt und halbieren einander.

27. Es sei  $A_1A_2A_3A_4$  ein beliebiges Viereck, das dem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschrieben ist. Der Eulersche Kreis des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  geht durch die drei Mittelpunkte der Strecken  $H_4A_1$ ,  $H_4A_2$ ,  $H_4A_3$ , wobei  $H_4$  Schnittpunkt der Höhen von  $A_1A_2A_3$  ist.

Daraus folgt, dass er aus  $\mathfrak{k}$  durch Stauchung mit dem Zentrum  $H_4$  und dem Stauchungsfaktor  $\frac{1}{2}$  hervorgeht. Daher gehört der Mittelpunkt der Strecke  $H_4A_4$  diesem Kreis an.

Jetzt bleibt nur zu bemerken, dass die Mittelpunkte der Strecken  $H_1A_1$ ,  $H_3A_2$ ,  $H_3A_3$  und  $H_4A_4$ , wobei  $H_1, H_2$  und  $H_3$  Schnittpunkte der Höhen der entsprechenden Dreiecke sind, zusammenfallen. Dies folgt daraus, dass z.B. das Viereck  $A_1H_2H_1A_2$  ein Parallelogramm ist, weil bei der Streckung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks  $A_2A_3A_4$  bzw.  $A_3A_4A_1$  als Zentrum und dem Faktor  $-2$  (mit  $P$  als Mittelpunkt von  $A_3A_4$ )

$$\frac{\overrightarrow{H_1A_2}}{\overrightarrow{NM}} = -2 = \frac{\overrightarrow{H_2A_1}}{\overrightarrow{MP}}$$

gilt.

Wir nehmen jetzt an, für alle  $k$ -Ecke, deren Seitenzahl  $k$  der Ungleichung  $k \leq n$  ( $n \geq 4$ ) genügt, sei die Existenz des Eulerschen Kreises schon bewiesen, und betrachten ein  $(n+1)$ -Eck  $A_1 \dots A_n A_{n+1}$  das dem Kreis  $\mathfrak{k}$  eingeschrieben ist.

Es ist zu beweisen, dass sich die Eulerschen Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_{n+1}$  der  $n$ -Ecke  $A_2A_3 \dots A_{n+1}$ ,  $A_1A_3A_4 \dots A_{n+1}$ ,  $\dots$ ,  $A_1A_2 \dots A_n$  in einem Punkt schneiden. Dazu genügt es zu beweisen, dass sich je drei von ihnen in einem Punkt schneiden, etwa  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$  und  $\mathfrak{k}_3$ ; denn schneiden sich je drei von  $m \geq 5$  paarweise verschiedenen Kreisen in einem Punkt, dann schneiden sich auch alle Kreise in einem Punkt.<sup>32</sup>

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{13}, \mathfrak{k}_{23}$  die Eulerschen Kreise der  $(n-1)$ -Ecke  $A_3A_4 \dots A_{n+1}$ ,  $A_2A_4A_5 \dots A_{n+1}$ ,  $A_1A_4A_5 \dots A_{n+1}$  und mit  $O_{12}, O_{13}, O_{23}$  ihre Mittelpunkte. Es seien noch  $O_1, O_2$  und  $O_3$  die Mittelpunkte der Kreise  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$  und  $O_{123}$  Mittelpunkt des Eulerschen Kreises im des  $(n-2)$ -Ecks  $A_4A_5 \dots A_{n+1}$ .

In diesem Fall kommen wir zu Abb. 82.

<sup>32</sup>Für  $m = 4$  ist dieser Schluss falsch (Abb. 81).

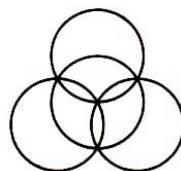


Abb. 81

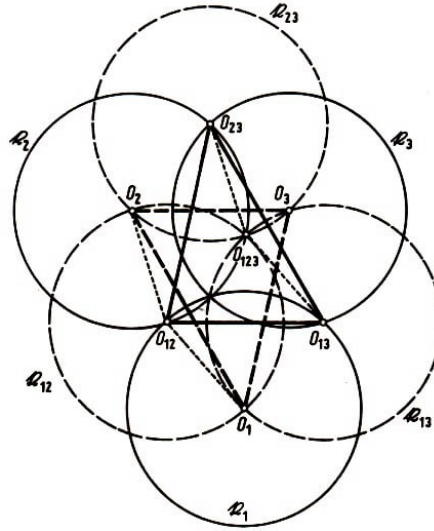


Abb. 82

Die Dreiecke  $O_1O_2O_{12}$  und  $O_{23}O_{13}O_{123}$  sind parallelkongruent, denn die Verschiebung  $s(\overrightarrow{O_1O_{13}})$  führt auch  $O_{12}$  in  $O_{123}$  und  $O_2$  in  $O_{23}$  über, weil  $O_1O_{12}O_{123}O_{13}$  und  $O_2O_{12}O_{123}O_{23}$  Rhomben sind.

Insbesondere sind  $O_1O_2$  und  $O_{13}O_{23}$  kongruent; analog erweist sich, dass  $O_1O_3 \cong O_{23}O_{12}$  und  $O_2O_3 \cong O_{13}O_{12}$  ist. Folglich gilt

$$\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle O_{23}O_{13}O_{12}$$

Da die Kreise  $k_{23}$ ,  $k_{13}$  und  $k_{12}$  sich im Punkt  $O_{123}$  schneiden, müssen sich auch die Kreise  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  in einem Punkt schneiden.

**28** (vgl. [6], Bd. 1, Lösung von Aufgabe 52c). Es sei  $r$  der Radius von  $k$ . Die Kreise  $k(A_i, r)$  um die Eckpunkte  $A_i$  mit demselben Radius  $r$  gehen durch den Mittelpunkt  $M$  von  $k$ .

1. Es sei  $A_1A_2A_3$  ein Dreieck. Seine Seitenhalbierenden  $A_iS_i$  schneiden sich im Schwerpunkt  $S$  des Dreiecks. Nach dem Beispiel 23 gilt  $A_iS : SS_i = 2 : 1$ . Bei der Stauchung  $\vartheta(S, -\frac{1}{2})$  geht jeder Kreis  $k(A_i, r)$  in den Eulerschen Kreis der  $A_i$  gegenüberliegenden Seite und  $k(M, r)$  in den Eulerschen Kreis  $k(O, \frac{r}{2})$  von  $A_1A_2A_3$  über. Folglich gilt wie behauptet  $MS : SO = 2 : 1$ .

2. Nun sei  $n \geq 4$  und die Behauptung für alle  $(n-1)$ -Ecke gültig. Der Schwerpunkt von  $A_2A_3 \dots A_n$  werde mit  $S_1$  bezeichnet, der von  $A_1A_3 \dots A_n$  mit  $S_2$  usw. Wir führen zuerst die Stauchung  $\vartheta(S, -\frac{1}{n-1})$  mit dem Zentrum im Schwerpunkt  $S$  des gegebenen  $n$ -Ecks  $A_1A_2 \dots A_n$  aus. Nach dem Beispiel 23 gehen dabei die Eckpunkte  $A_i$  in die Schwerpunkte  $S_i$  über, die Kreise  $k(A_i, r)$  in die Kreise  $k(S_i, \frac{r}{n-1})$ , welche das Bild  $M'$  von  $M$  als gemeinsamen Punkt besitzen.

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt für die Mittelpunkte  $O_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) der Eulerschen Kreise der  $(n-1)$ -Ecke  $A_2A_3 \dots A_n$ ,  $A_1A_3 \dots A_n$  usw.

$$MS_i : S_iO_i = 2 : ((n-1) - 2) = 2 : (n-3)$$

und folglich

$$MS_i : MO_i = 2 : (n-1)$$

wird jetzt die Stauchung  $\mathfrak{d}\left(M, \frac{n-1}{2}\right)$  ausgeführt, dann gehen die Kreise  $\mathfrak{k}\left(S_i, \frac{r}{n-1}\right)$  in Kreise mit dem Mittelpunkt  $O_i$  und dem Radius  $\frac{r}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{r}{2}$ , d.h. in die Eulerschen Kreise von  $A_2A_3\dots A_n$ ,  $A_1A_3\dots A_n$  usw. über.

Sie haben das Bild  $O$  von  $M'$  gemeinsam;  $O$  ist der Mittelpunkt des Eulerschen Kreises des gegebenen  $n$ -Ecks  $A_1A_2\dots A_n$ . Der Punkt  $O$  ist letztlich Bild von  $M$ , und es gilt

$$MS : SM' = 1 : \frac{1}{n-1} = (n-1) : 1 \quad \text{bzw.} \quad MS : MM' = (n-1) : n$$

$$MM' : MO = 1 : \frac{n-1}{2} = 2 : (n-1)$$

und folglich

$$MS : MO = 2 : n \quad \text{d.h.} \quad MS : SO = 2 : (n-2)$$

**29.** Der Satz über die Simsonsche Gerade des Punktes  $P$  des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  ist weithin bekannt. Beim Beweis kann man sich vorteilhaft auf die gleichsinnige Kongruenz gerichteter Winkel zwischen Geraden stützen.

**30.** Die Lösung dieser Aufgabe ist der Lösung des Beispiels 24 ähnlich.

**31.** Wir bemerken, dass die Orthozentren der einem Kreis eingeschriebenen Vielecke eine Reihe von Eigenschaften besitzen, die den Eigenschaften der Orthozentren der Dreiecke ähnlich sind. Viele davon, deren Beweis zwangsläufig mittels vollständiger Induktion geführt wird, weil das Orthozentrum des Vielecks durch Induktion definiert ist, sind in [6] angegeben.

**32.** (vgl. [6], Bd. 2, Lösung von Aufgabe 218a), oder [17], Bd. 2, Lösung von Aufgabe 125). Zur Lösung des ersten Teils der Aufgabe verwendet man zweckmäßigerweise Aussagen über Drehstreckungen.

Zur Lösung des zweiten Teils werden zusätzlich solche über Spiegelungen am Kreis benutzt (siehe [8]; [6], Bd. 2). Bei Spiegelungen an Kreisen ist es üblich, die gewöhnlichen Kreise und die Geraden Kreise zu nennen.

1. Hier ist nur die Existenz des Zentralpunktes  $O$  von vier Geraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  allgemeiner Lage zu beweisen. Es sei  $A_{12}$  der Schnittpunkt von  $l_3$  und  $l_4$ ,  $A_{13}$  der von  $l_2$  und  $l_4$  usw.

Dann schneiden sich  $\mathfrak{k}_1$  und  $\mathfrak{k}_2$  in  $A_{12}$  und einem weiteren Punkt  $O$ . Wir zeigen, dass auch  $\mathfrak{k}_3$  und  $\mathfrak{k}_4$  durch  $O$  gehen:

Zunächst ist  $O$  Zentrum der Drehstreckung, die  $A_{13}A_{23}$  auf  $A_{14}A_{24}$  abbildet, denn die gerichteten Peripheriewinkel  $\angle A_{13}A_{12}A_{14}$ ,  $\angle A_{13}OA_{14}$  und  $\angle A_{23}A_{12}A_{24}$ ,  $\angle A_{23}OA_{24}$  sind kongruent (vgl. etwa [11], S. 144, und [6], S. 105/106 in Bd. I).

Aus

$$\angle A_{13}OA_{14} \cong \angle A_{23}OA_{24} \quad \text{folgt} \quad \angle A_{13}OA_{23} \cong \angle A_{14}OA_{24}$$

aus

$$OA_{13} : OA_{23} = OA_{14} := A_{24} \quad \text{folgt} \quad OA_{13} : OA_{14} = OA_{23} := A_{24}$$

d.h.,  $O$  ist auch Zentrum der Drehstreckung, die  $A_{13}A_{14}$  auf  $A_{23}A_{24}$  abbildet. Folglich gilt

$$\angle A_{13}OA_{23} \cong \angle A_{13}A_{34}A_{23} \cong \angle A_{14}A_{34}A_{24} \cong \angle A_{14}OA_{24}$$

und die Kreise  $\mathfrak{k}_3$  und  $\mathfrak{k}_4$  gehen somit durch  $O$ .

2. Es seien jetzt  $l_1, l_2, \dots, l_n$  ( $n \geq 5$ ) Geraden allgemeiner Lage.

a)  $n$  ungerade.

Es sei  $A_1$  der Zentralpunkt von  $l_2, l_3, \dots, l_n$ ,  $A_2$  der von  $l_1, l_3, \dots, l_n$  usw. Es sei  $\mathfrak{k}_{12}$  der Zentralkreis von  $l_3, \dots, l_n$ ,  $\mathfrak{k}_{13}$  der von  $l_2, l_4, \dots, l_n$  usw.

Ferner sei  $A_{123}$  der Zentralpunkt von  $l_4, \dots, l_n$ ,  $A_{124}$  der von  $l_3, l_5, \dots, l_n$  usw. Mit  $\mathfrak{k}_{1234}$  werde schließlich der Zentralkreis von  $l_5, \dots, l_n$  usw. bezeichnet.

(Die gewählten Indizes gehören also stets zu den ausgelassenen Geraden; für  $n = 5$  sei  $\mathfrak{k}_{1234} = l_5$ ,  $\mathfrak{k}_{1235} = l_4$ , ...)

Zu zeigen ist, dass  $A_1, A_2, \dots, A_n$  auf einem Kreis liegen. Das ist klar, wenn je vier dieser Punkte auf einem Kreis liegen. Es genügt sogar zu zeigen, dass  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$  auf einem Kreis liegen.

Durch  $A_1$  gehen gemäß der Definition  $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{13}, \dots, \mathfrak{k}_{1n}$ ; allgemein gilt  $A_i \in \mathfrak{k}_{ij}$  für  $i \neq j$ . Ferner geht  $\mathfrak{k}_{12}$  durch  $A_{123}, A_{124}, \dots, A_{12n}$  usw. Durch  $A_{123}$  gehen aber auch  $\mathfrak{k}_{1234}, \dots, \mathfrak{k}_{123n}$  usw. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} A_2, A_{123} &\in \mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23} & , & & A_3, A_{234} &\in \mathfrak{k}_{23}, \mathfrak{k}_{34} \\ A_4, A_{134} &\in \mathfrak{k}_{34}, \mathfrak{k}_{14} & , & & A_1, A_{124} &\in \mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{14} \end{aligned}$$

Da  $A_{123}, A_{234}, A_{134}$  und  $A_{124}$  einem Kreis angehören, muss auch durch  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ein Kreis gehen. (Dieses Teilproblem kann mit Hilfe einer Spiegelung an einem Kreis auf eine Aufgabe mit Geraden zurückgeführt werden; dazu vgl. etwa [6], S. 487 in Bd. 2 und dann [6], S. 239 und S. 125f. in Bd. 1.)

b)  $n$  gerade.

Nun sei  $\mathfrak{k}_1$  der Zentralkreis von  $l_2, l_3, \dots, l_n$ ,  $\mathfrak{k}_2$  der von  $l_1, l_3, \dots, l_n$  usw.  $A_{12}$  bezeichne den Zentralpunkt von  $l_3, l_4, \dots, l_n$  usw. analog den Bezeichnungen in a).

Hier ist zu zeigen, dass  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \dots, \mathfrak{k}_n$  einen gemeinsamen Punkt haben. Wegen  $n > 5$  genügt es zu beweisen, dass je drei der Kreise, etwa  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$  und  $\mathfrak{k}_3$ , durch einen Punkt gehen.

Gemäß Definition gilt

$$\begin{aligned} A_{12}, A_{13}, A_{14} &\in \mathfrak{k}_1, & , & & A_{12}, A_{23}, A_{24} &\in \mathfrak{k}_2, & , & & A_{13}, A_{23}, A_{34} &\in \mathfrak{k}_3 \\ A_{12}, A_{14}, A_{24} &\in \mathfrak{k}_{124}, & , & & A_{13}, A_{14}, A_{34} &\in \mathfrak{k}_{134}, & , & & A_{23}, A_{24}, A_{34} &\in \mathfrak{k}_{234} \end{aligned}$$

Wegen  $A_{1234} \in \mathfrak{k}_{124}, \mathfrak{k}_{134}, \mathfrak{k}_{234}$  gehen  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$  durch einen gemeinsamen Punkt (vgl. obige Verweise auf [6]).

**33.** Die Beweise der hier formulierten Sätze sind völlig analog zu den Beweisen der Sätze, die den Inhalt der Aufgabe 32 bilden.

**34.** (vgl. [6], Bd. 2, Lösung von Aufgabe 218b)). Die Aufgabe kann mit denselben



Hilfsmitteln wie die Aufgabe 32 gelöst werden. Das trifft auf den Induktionsanfang mit  $n = 3, 4$  wie auf den Schluss von  $n - 1$  auf  $n$  zu.

Um die Analogie des Vorgehens deutlich zu machen, werde hier der Fall einer ungeraden Zahl  $n \geq 5$  etwas näher betrachtet:

Es seien  $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$  konzyklische Linienelemente. Ferner sei  $\mathfrak{k}_1$  der Richtungskreis von  $(A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ ,  $\mathfrak{k}_2$  der von  $(A_1, a_1), (A_3, a_3), \dots, (A_n, a_n)$  usw.

Werden die zwei Linienelemente  $(A_i, a_i)$  und  $(A_j, a_j)$  ausgelassen, dann besitzen die übrigen einen Richtungspunkt  $A_{ij}$ .

Der Richtungskreis der  $n - 3$  Linienelemente, die beim Auslassen von  $(A_i, a_i), (A_j, a_j)$  und  $(A_k, a_k)$  verbleiben, werde mit  $\mathfrak{k}_{ijk}$  bezeichnet. Schließlich sei  $A_{ijkl}$  der Richtungspunkt der  $n - 4$  Linienelemente  $(A_p, a_p)$  mit  $p \neq i, j, k, l$  oder im Sonderfall  $n = 5$  einfach  $A_p$ .

Es ist zu beweisen, dass  $k_1, k_2, \dots, k_n$  einen gemeinsamen Punkt besitzen. Wegen  $n \geq 5$  genügt es zu zeigen, dass je drei dieser Kreise diese Eigenschaft haben, etwa  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3$ . Aufgrund der Festlegung der Bezeichnungen gilt

$$A_{12}, A_{13}, A_{14} \in \mathfrak{k}_1, \quad A_{12}, A_{23}, A_{24} \in \mathfrak{k}_2, \quad A_{13}, A_{23}, A_{34} \in \mathfrak{k}_3$$

$$A_{12}, A_{14}, A_{24} \in \mathfrak{k}_{124}, \quad A_{13}, A_{14}, A_{34} \in \mathfrak{k}_{134}, \quad A_{23}, A_{24}, A_{34} \in \mathfrak{k}_{234}$$

Auch der Fall einer geraden Zahl  $n$  kann auf die Lösungshinweise zur Aufgabe 32 zurückgeführt werden.

**35.** Wir betrachten nacheinander folgende Aufgaben.

A. In wieviel Teile zerlegen  $n$  "eindimensionale" Kreise (d.h.  $n$  Punktpaare) ohne gemeinsame Punkte die Gerade (siehe in Einführung zu 2.6.)?

Lösung.  $2n$  Punkte zerlegen die Gerade in  $2n + 1$  Teile.

A'. Man ermittle die Anzahl  $\Phi_1(n)$  der Teile, in die  $n$  Punktpaare ohne gemeinsame Punkte, die auf einem Kreis liegen, diesen Kreis zerlegen.

Lösung.  $\Phi_1(n) = 2n$ .

B. Man ermittle die Anzahl  $\Phi_2(n)$  der Teile, in welche  $n$  sich paarweise schneidende Kreise die Ebene zerlegen (jedoch sollen keine drei Kreise durch einen Punkt gehen).

Lösung. Da  $n$  Kreise den  $(n + 1)$ -ten Kreis in  $n$  Punktpaaren schneiden und ihn daher in  $\Phi_1(n) = 2n$  Teile zerlegen (vgl. A'), schneidet der  $(n + 1)$ -te Kreis  $\Phi_1(n) = 2n$  aus den  $\Phi_2(n)$  Teilen, in die  $n$  Kreise die Ebene teilen, aus. Hieraus erhalten wir die Gleichung

$$\Phi_2(n + 1) = \Phi_2(n) + \Phi_1(n) = \Phi_2(n) + 2n$$

Mittels dieser Gleichung und  $\Phi_2(1) = 2$  erhalten wir  $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ .

B'. In wieviel Teile zerlegen  $n$  sich paarweise schneidende Kreise die Kugeloberfläche, in der sie liegen, wenn keine drei Kreise durch einen Punkt gehen?

Lösung. In  $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$  Teile.

C. Lösung der ursprünglichen Aufgabe. Da  $n$  Kugeln die  $(n+1)$ -te Kugel in  $n$  Kreisen schneiden, die sich paarweise schneiden, wobei keine drei durch einen Punkt gehen, wird die  $(n+1)$ -te Kugel in  $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$  Teile zerlegt (vgl. B'); und da  $n$  Kugeln nach der Induktionsvoraussetzung den Raum in  $\Phi_3(n)$  Teile zerlegen, teilen die  $n+1$  Kugeln den Raum in

$$\Phi_3(n+1) = \Phi_3(n) + \Phi_2(n) = \Phi_3(n) + (n^2 - n + 2)$$

Teile. Hieraus und aus  $\Phi_3(1) = 2$  folgt schließlich

$$\Phi_3(n) = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}$$

**36.** Der Beweis ist analog zum Beweis der Behauptung des Beispiels 29.

**37.** Folgende Aufgaben werden nacheinander betrachtet:

A. In den Voraussetzungen des Beispiels 27 A werden wir die 1,2-Strecken, für welche die Richtung vom Eckpunkt 1 zum Eckpunkt 2 mit der Richtung von 1 nach 2 für die Hauptstrecke übereinstimmt, von den 1,2-Strecken unterscheiden, für welche die Richtung von 1 nach 2 der Richtung der Hauptstrecke entgegengerichtet ist.

Man beweise, dass die Anzahl der erstgenannten Strecken um 1 größer ist als die der zweiten.

B. Wir wollen sagen, das Dreieck 123 (vgl. Beispiel 27 B) sei im Uhrzeigersinn (oder entgegen dem Uhrzeigersinn) orientiert, wenn der Umlauf seiner Eckpunkte von 1 nach 2 und dann nach 3 im Uhrzeigersinn (oder entgegen dem Uhrzeigersinn) erfolgt.

Man beweise, dass die Anzahl der Teildreiecke, die mit den Ziffern 1, 2, 3 nummeriert und wie das ursprüngliche Dreieck orientiert sind, um 1 größer ist als die Anzahl der übrigen Teildreiecke, die mit den Ziffern 1, 2, 3 nummeriert sind.

C. Man löse die ursprüngliche Aufgabe.

**38.** Man beweise den entsprechenden Satz für "Kugelflächenpolyeder", d.h. für Körper, die Durchschnitt endlich vieler Kugellkörper sind. Der Beweis dieses Satzes wird analog zum Beweis der Behauptung des Beispiels 31 geführt.

**39.** Man zeige zunächst, dass man je drei dieser Punkte in einen Kreis vom Radius  $\frac{1}{\sqrt{3}}e$  einschließen kann. Danach wird um jeden der gegebenen Punkte eine Kreisfläche mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{3}}e$  konstruiert und gezeigt, dass sich je drei dieser Kreisflächen treffen. Ein gemeinsamer Punkt aller dieser Kreisflächen, der nach dem Ergebnis im Beispiel 30 B existiert, ist eben der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{3}}e$ , der alle gegebenen Punkte enthält.

**40.** Der Beweis ist analog zur Lösung der Aufgabe 39.

**41.** Im Raum sei ein endliches System von Halbgeraden gegeben, die paarweise einen stumpfen Winkel bilden, wobei wir voraussetzen, dass dieses System in dem Sinn maximal ist, dass keine weitere Halbgerade existiert, die mit allen gegebenen Halbgeraden einen stumpfen Winkel bildet.

Wir tragen an jede Halbgerade einen Halbraum an, der durch die Ebene begrenzt ist, die durch den Träger des Halbgeradensystems geht und auf der Halbgeraden senkrecht steht, und der die Halbgerade enthält. Da unser System der Halbgeraden maximal ist, füllen diese Halbräume den ganzen Raum aus, und unsere Behauptung folgt aus dem Ergebnis des Beispiels 32.

**42.** Man benutze die Tatsache, dass der Schwerpunkt des Dreiecks die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt (vgl. Beispiel 23).

## 3 Nachwort

Ju. A. Gastev

Induktion<sup>33</sup> (lat. *inductio* - Hinführen) ist der Übergang vom Speziellen zum Allgemeinen; Deduktion (lat. *deductio* - Ableitung) ist der Übergang vom Allgemeinen zum Speziellen.

Die Bedeutung von Verallgemeinerungen der Ergebnisse von einzelnen Beobachtungen und Experimenten, also von Induktionen, für die empirischen, experimentellen Wissenschaften ist wohlbekannt. Dagegen gilt die Mathematik schon von alters her als klassisches Beispiel der Anwendung rein deduktiver Methoden, weil hierbei - ob ausgesprochen oder nicht - stets die Auffassung besteht, dass sich alle mathematischen Sätze (außer den Grundannahmen, den Axiomen) beweisen lassen und dass die konkreten Anwendungen dieser Sätze aus den auf die allgemeinen Fälle zugeschnittenen Beweisen hergeleitet, deduziert werden.

Nun findet man aber Formulierungen wie: "Man wendet die Induktion in der Mathematik sehr oft an, aber man muss sie auch richtig anwenden" oder "Es fragt sich nun, wie die Induktion in der Mathematik zu handhaben ist, damit man richtige Folgerungen erhält".

Was bedeuten solche Ausführungen?

Könnte man sie nicht so auffassen, als gäbe es unter den mathematischen Methoden eine "zuverlässige", gültige, sozusagen störungsfreie Methode - die deduktive Methode -, und eine "nicht völlig zuverlässige" Methode, die, insbesondere in ungeschickten Händen, oder, wie manche Autoren sich ausdrücken, "bei leichtsinnigem Verhalten", zu einem Fehlschlag führen kann - die induktive Methode?

Wenn dem wirklich so wäre, wo wären dann Kriterien für die Zuverlässigkeit solcher "induktiver" Methoden zu finden?

Wie kann man sich darüber Gewissheit verschaffen, dass mathematische Schlussfolgerungen zu richtigen Ergebnissen führen?

Oder ist das ein hoffnungsloses Unterfangen, und ist die Richtigkeit mathematischer Schlüsse von derselben Art wie die von Verallgemeinerungen von Experimenten in den Naturwissenschaften, so dass man jede bewiesene Tatsache nochmals "verifizieren" müsste, so wie man häufig Schülern die Richtigkeit des Ergebnisses arithmetischer Operationen oder der Lösung von Gleichungen mittels einer allgemeinen Formel zu "verifizieren" empfiehlt?

In Wirklichkeit verhält sich die Sache aber ganz anders. Die Induktion schlechthin, d.h. das "Hinführen" (auf eine Idee, auf eine Vermutung, auf eine Hypothese) spielt in der Mathematik zweifellos eine sehr große Rolle, aber nur eine rein heuristische:

Sie erlaubt, darauf zu kommen, wie die Lösung aller Wahrscheinlichkeit nach beschaffen sein muss. Mathematische Sätze müssen aber deduktiv bestätigt werden. Kein einziges

---

<sup>33</sup>Diese Ausführungen vorwiegend terminologischen und methodologischen Charakters sind in erster Linie für Mathematiklehrer und Leiter von mathematischen Arbeitsgemeinschaften bestimmt. Soweit Fragen des Sprachgebrauchs berührt werden, wurde der Text der deutschen Sprache entsprechend redigiert.

mathematisches Resultat kann Anspruch auf Sicherheit, auf Wahrheit erheben, wenn es nicht aus den Ausgangsvoraussetzungen hergeleitet wurde.

Was ist nun aber "die Methode der vollständigen Induktion"?

Die vollständige Induktion ist eine deduktive Methode; denn analysieren wir die Struktur mathematischer Schlüsse, die wie der Übergang vom Besonderen zum Allgemeinen aussehen, einmal näher, so erkennen wir leicht, dass die sogenannte vollständige Induktion in Wirklichkeit gar keine Induktion im obigen Sinne, sondern eine rein deduktive Methode der Überlegung ist.

Ein Beweis, der mit dieser Methode geführt wird, besteht aus zwei Teilen:

1. dem sogenannten Induktionsanfang, dem (deduktiven!) Beweis des behaupteten Satzes für eine spezielle natürliche Zahl (oder auch für mehrere spezielle natürliche Zahlen, z.B. für 0 oder 1) (Satz 1) und
2. dem Induktionsschritt (Satz 2), der im (ebenfalls deduktiven) Beweis der folgenden allgemeinen Behauptung besteht: Für alle  $n$  gilt, dass aus der Gültigkeit der Behauptung für  $n$  auch die Richtigkeit für  $n + 1$  folgt.<sup>34</sup>

Das "Prinzip der vollständigen Induktion" ist ein exakt formulierbarer Satz - seine anschauliche Überzeugungskraft wird von vielen Mathematikern als unanfechtbar angesehen; für den axiomatischen Aufbau der Arithmetik dagegen ist es ein Axiom, das es erlaubt, aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt einen rein deduktiven Beweis des betrachteten Satzes für alle natürlichen Zahlen  $n$  zu gewinnen.

Somit werden tatsächlich alle, auch die in der Prämisse nicht berücksichtigten Fälle, auf welche danach ("durch Induktion") der Schluss ausgedehnt werden müsste, erfasst; der Satz lässt sich nämlich für alle natürlichen Zahlen beweisen:

Aus dem Induktionsanfang, der etwa für die Zahl 0 bewiesen wurde, erhalten wir durch den Induktionsschritt den Beweis für die Zahl 1, danach auf gleiche Weise für die Zahl 2, anschließend für 3, ... - und so kann die Behauptung für jede natürliche Zahl begründet werden.<sup>35</sup>

Mit anderen Worten, die Bezeichnung "vollständige Induktion" hat sich dadurch eingebürgert, dass diese Methode in unserem Bewusstsein Erinnerungen an die traditionellen "induktiven" Schlussweisen hervorruft (wird doch der Induktionsanfang tatsächlich nur für einen speziellen Fall bewiesen); der Induktionsschritt dagegen ist im Unterschied zu den auf Erfahrung beruhenden Wahrheitskriterien der induktiven Schlüsse in den Natur- (und Gesellschaftswissenschaften eine allgemeine Aussage, die keinerlei Einzelprämisse benötigt und nach den strengen Regeln der deduktiven Schlussweise zu beweisen ist.

Aus diesem Grunde spricht man hier von "vollständiger" oder auch "mathematischer" Induktion, die eine deduktive - "hundertprozentig zuverlässige"- Methode des Beweises ist, im Gegensatz zur gewöhnlichen "unvollständigen" Induktion, die uns kein sicheres Wissen gewährleistet.

---

<sup>34</sup>Aus diesem Grunde wird diese Methode gelegentlich "Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ " genannt.

<sup>35</sup>Über die im Zusammenhang mit einer derartigen Begründung der Methode auftauchenden Probleme vgl. das Literaturverzeichnis.

Somit ist in der Mathematik die unvollständige Induktion als Beweismethode nicht anwendbar, was selbstverständlich in keiner Weise die breite Anwendung der deduktiven Methode der "vollständigen Induktion"<sup>36</sup> ausschließt.<sup>37</sup>

Nachdem wir uns über die Auslegung des Fachausdrucks verständigt haben, können wir uns natürlich auch übertragene Bedeutungen erlauben; so lautet beispielsweise die wörtliche Übersetzung der Überschrift des zweiten Kapitels dieses Büchleins kurz "Induktion in der Geometrie"<sup>38</sup>.

Man spricht auch gelegentlich von "Induktion in der Mathematik", da wir wissen, was gemeint ist, nämlich vollständige Induktion.

Man muss sich bei solchen Abkürzungen aber immer bewusst sein, dass der Terminus "Induktion in der Geometrie" eigentlich gar nicht dieselbe Bedeutung hat wie die zwar längere, aber genaue Bezeichnung "Anwendung der deduktiven Methode der vollständigen Induktion zum Beweis von Sätzen geometrischen Inhalts" und dass "Induktion in der Mathematik" genau genommen nicht dasselbe ist wie "mathematische Induktion". Der Terminus "mathematische Induktion" ("vollständige Induktion") ist als einheitlicher Ausdruck zu verstehen, nicht im Sinne von "Induktion in der Mathematik".

Besondere Aufmerksamkeit in dieser Beziehung verlangt Abschnitt 2.6. Die dort geführten Beweise von Sätzen der Planimetrie, die sich auf den Beweis der analogen Behauptungen für Geraden stützen, und die Beweise von Sätzen der Stereometrie, die sich auf die entsprechenden Resultate der Planimetrie stützen, sind selbst natürlich nicht "gewöhnliche" Induktionen, Induktion schlechthin, sondern ebenfalls Anwendungen des Prinzips der vollständigen Induktion.

In diesem Abschnitt geht es gar nicht darum, alle Aussagen für alle  $n$  zu formulieren und zu beweisen (im gegebenen Fall ist  $n$  die Dimension des Raumes); es handelt sich vielmehr einfach um die Übergänge von einem speziellen Fall ( $n = 1$  bzw.  $n = 2$ ) zu einem anderen speziellen Fall ( $n = 2$  bzw.  $n = 3$ ).

Allerdings ermöglicht die Analogie, die in diesen Beweisen zu erkennen ist, auch die Abstraktion zu dem echten Induktionsschritt ("Satz 2"), der zum Beweis des betrachteten Satzes für den allgemeinen Fall, d.h. für alle  $n$ , nötig ist.

Die Methode der vollständigen Induktion ist (in der Form, in der sie in diesem Buch betrachtet wird) eine Methode zum Beweisen von Sätzen der Arithmetik, genauer, von Sätzen, welche allgemeine Eigenschaften der natürlichen Zahlen (0, 1, 2, ...) zum Ausdruck bringen; manchmal, wie in diesem Buch, lässt sich die Folge der natürlichen Zahlen mit 1 beginnen; das ist aber unwesentlich.

Für die Arithmetik der natürlichen Zahlen ist diese Methode in gewissem: hinlänglich einsichtigem und starkem Sinne ein universelles, oft sogar das einzige Mittel für Beweise.

---

<sup>36</sup>Über die außerordentlich nützliche Rolle der "gewöhnlichen" ("unvollständigen") Induktion bei dem Zustandekommen mathematischer Vermutungen, die dann auch zur Entdeckung neuer Fakten führen, sowie über den Zusammenhang der "gewöhnlichen" Induktion mit den Methoden der vollständigen Induktion vgl. [13] (insbesondere Kap. 7).

<sup>37</sup>Ebensowenig wie den Gebrauch der unvollständigen Induktion als heuristisches Hilfsmittel.

<sup>38</sup>Der bei der deutschen Ausgabe unmissverständlich formuliert wurde.

Beim axiomatischen (deduktiven) Aufbau der Arithmetik stützt sich das ganze Gebäude auf die Definition der Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion<sup>39</sup>; beispielsweise wird bei der Definition der Addition zuerst gesagt - als Induktionsanfang -, was es heißt, 1 oder 0 zu addieren; danach - als Induktionsschritt der Definition - wird die Addition einer beliebigen natürlichen Zahl auf die Addition der ihr vorhergehenden Zahl zurückgeführt.

Daher ist es verständlich, dass wir bei einer axiomatischen Begründung der allgemeinen Eigenschaften der natürlichen Zahlen, die mit Addition und Multiplikation zusammenhängen, diejenige "Treppe" erklimmen müssen, auf deren unterster "Stufe" die entsprechende Eigenschaft für die kleinste natürliche Zahl gilt, und auf der wir "den Aufstieg" bis zu dem uns interessierenden allgemeinen Begriff "vollbringen"; anders ist nicht zu sehen, wie wir einen gewünschten Beweis "in den Griff bekommen" könnten.<sup>40</sup> Ebenso verhält sich die Sache mit dem Beweis beliebiger allgemeiner arithmetischer Sätze!

Wenn dies im Schulunterricht in Arithmetik und Algebra nicht zutage tritt, so liegt das daran, dass dieser sich, was zweifellos seinen Sinn hat, viel weniger auf die axiomatische Methode als vielmehr auf Erfahrung und Anschauung stützt.<sup>41</sup>

Schließlich wird sich auch der anspruchsvollste und kritischste Leser oft mit dem Wissen begnügen, dass etwa das Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition bewiesen werden kann, und auf den Beweis selbst verzichten. Diese, wenn auch begründete Gewissheit unterscheidet sich allerdings von einem echten Beweis etwa so, wie, sagen wir, die Information durch eine Zeitung vom authentischen Wissen eines Augenzeugen, wobei diese Analogie sehr weit geht.

Deshalb lernen die Schüler die Methode der vollständigen Induktion im Unterricht meist später kennen als die anschaulichen und leicht verständlichen Eigenschaften der arithmetischen Operationen, z.B. erst in Verbindung mit dem binomischen Satz, bei Operationen also, welche keineswegs schon so beschaffen sind, dass ihre Richtigkeit auf der Hand liegt.

In dem Maße, in dem andere Teile der Mathematik auf arithmetischen Grundlagen beruhen, benötigen sie die Methode der vollständigen Induktion. Dies hat zweierlei Gründe.

---

<sup>39</sup>Man nennt sie auch rekursive Definitionen.

<sup>40</sup>Genauso, wie jeder Satz über Eigenschaften der "Orthozentren von Vielecken", die durch vollständige Induktion definiert wurden, notwendigerweise mit dieser Methode bewiesen werden muss.

<sup>41</sup>In solchen Fällen, in denen in der Schule irgendwelche allgemeinen Eigenschaften der natürlichen Zahlen bewiesen werden, verläuft der Beweis, wenn er nicht schon induktiv geführt wird, nur deshalb so, weil - häufig unausgesprochen - als Prämissen Sätze benutzt werden, zu deren strenger Begründung vollständige Induktion nötig ist.

In analoger Weise kann man in der euklidischen Geometrie die Verwendung des euklidischen Parallelenaxioms "verschleiern", indem man an seiner Stelle irgendeine seiner Folgerungen benutzt.

(Diese Auffassung bezieht sich auf den Aufbau der Arithmetik, bei dem die natürlichen Zahlen als Menge mit Nachfolgerfunktion betrachtet und die Peanoschen Axiome vorausgesetzt werden. Bei der Definition der natürlichen Zahlen sowie deren Addition, Multiplikation und Ordnung in der Mengenlehre werden viele induktive Beweise entbehrlich; auf dieser Grundlage auch können Beweise und Definitionen mit Hilfe der vollständigen Induktion gerechtfertigt werden.)

Zunächst lassen sich viele Teile der Mathematik auf der Grundlage der Arithmetik der natürlichen Zahlen aufbauen, z.B. die Theorie der rationalen Zahlen, die ihrerseits zur Theorie der reellen Zahlen führt; andere Teile können in arithmetischen Ausdrücken interpretiert werden; beispielsweise kann man jeden Sachverhalt der euklidischen Geometrie in der Sprache der "Koordinaten" mittels reeller Zahlen ausdrücken.

In diesen Fällen können Behauptungen, etwa geometrischen Inhalts, eben für diese arithmetische Interpretation mit Hilfe vollständiger Induktion bewiesen werden. Man kann sagen, dass der geometrische Inhalt oder ein anderes Spezifikum derartiger Sätze für den Beweis selbst keine größere Rolle spielt als z.B. die Natur der betrachteten Objekte bei der Aufgabe, drei Gurken zu fünf Gurken oder drei Dampfer zu fünf Dampfern zu addieren.

Es kommt aber auch vor, dass der Induktionsanfang sich mit nichtarithmetischen Methoden beweisen lässt.<sup>42</sup>

Selbst in diesem Fall ist aber der Induktionsschritt, sogar wenn er sich auf geometrische oder irgendwelche anderen Axiome stützt, eine allgemeine Aussage über natürliche Zahlen, da es sich dabei darum handelt, dass eine gewisse Eigenschaft für jede natürliche Zahl zutrifft.<sup>43</sup>

Wir weisen noch darauf hin, dass die Methode, welche sich zur Durchführung von Beweisen, die dem Prozess des Aufbaus der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... folgen, als so fruchtbar erweist, auch auf Prozesse völlig anderer Art verallgemeinert werden kann; beispielsweise können im Kalkül der mathematischen Logik, der mit Formeln ("Ausdrücken") operiert, die aus "elementaren Formeln" ("Elementaren Ausdrücken") der Form  $A, B, C$ , - mit Hilfe der Zeichen  $\wedge$  ("und"),  $\vee$  ("oder"),  $\Rightarrow$  ("Wenn ..., so ...") und  $\neg$  ("nicht") aufgebaut sind, allgemeine Eigenschaften der Formeln auf dem Wege der sogenannten (vollständigen) Induktion nach der Konstruktion der Formeln bewiesen werden.

Man beweist erstens, dass jede elementare Formel die gesuchte Eigenschaft besitzt (Induktionsanfang) und zweitens, dass aus der Tatsache, dass die Formeln  $X$  und  $Y$  die Eigenschaft besitzen, folgt, dass auch die Formeln  $(X \wedge Y)$ ,  $(X \vee Y)$ ,  $(X \Rightarrow Y)$  und  $\overline{X}$  diese Eigenschaft besitzen (Induktionsschritt). In dieser Weise wird die Richtigkeit eines beweisbaren Satzes für alle Formeln der erwähnten Art gezeigt.

Die Analogie zu der im vorliegenden Buch betrachteten vollständigen Induktion ist so durchsichtig, dass sie auch dem unvorbereiteten Leser in die Augen springt.<sup>44</sup>

Im allgemeinen kann jede mathematische oder logische Konstruktion, die im Übergang von einem Ausgangsobjekt oder mehreren Ausgangsobjekten zu neuen Objekten mit Hilfe einer Operation oder mehrerer Operationen besteht, als Grundlage einer entsprechenden "induktiven" Methode des Definierens und Beweisens dienen; diese ist dann, wie wir gesehen haben, rein deduktiv.

(Die relativ geringe Rolle der Methode der vollständigen Induktion in der Analysis er-

---

<sup>42</sup>Beispiele solcher Art findet der Leser in diesem Buch.

<sup>43</sup>Dabei wird ja der Übergang "von  $n$  zu  $n + 1$ " für jedes  $n$  bewiesen.

<sup>44</sup>Vgl. dazu etwa [12].



klärt sich daraus, dass die reellen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen nicht das Produkt einer solchen entwickelten und exakt beschreibbaren Konstruktion sind, so dass verschiedene Arten der "Induktion nach reellen Zahlen" bei weitem nicht die Allgemeingültigkeit besitzen wie die Methode der vollständigen Induktion in der Arithmetik und ihre Modifikation in der mathematischen Logik.)

Zur Behandlung solcher Fragen allgemeinlogischen und allgemeinmathematischen Charakters, die beim Leser jetzt entstehen können, verweisen wir auf die Spezialliteratur<sup>45</sup>.

Die Aufgabe, eine erste Einführung in die Methode der vollständigen Induktion in der Elementarmathematik zu vermitteln, erfüllt das vorliegende Buch erfolgreich.

---

<sup>45</sup>Vgl. etwa E. Landau, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930; S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, Amsterdam 1952, §§ 7, 13, 21, 38 u. a.; P. S. Novikov, Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin-Braunschweig 1973.

## 4 Literatur

- [1] Boltjanski, W. G., und I. Z. Gochberg, Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [2] Boltjanski, W. G., und I. M. Jaglom, Konvexe Figuren und Körper, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band V, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [3] Boltjanski, W. G., und I. M. Jaglom, Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV, 2. Aufl., 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [4] Brehmer, S., und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 3. Aufl, Berlin 1972.
- [5] Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski, Mathematische Unterhaltungen, 1: Mehrfarbenprobleme, 4. Aufl., Berlin 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [6] Jaglom, I. M., Geometrische Darstellung, Band 1 und 2, Moskau 1955 und 1956 (russisch).
- [7] Jaglom, I. M., Komplexe Zahlen, Moskau 1963 (russisch).
- [8] Jaglom, I. M., und L. S. Atanasjan, Geometrische Transformationen, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV, 2. Aufl., Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [9] Jaglom, I. M., und W. G. Boltjanski, Konvexe Figuren, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [10] Jaglom, A. M., und I. M. Jaglom, Nichtelementare Aufgaben, Moskau 1954 (russisch)
- [11] Klotzek, B., Geometrie, Berlin 1971 (Studienbücherei).
- [12] Novikov, P. S., Grundzüge der mathematischen Logik, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [13] Polya, G., Mathematik und plausibles Schließen, Band 1 (Induktion und Analogie in der Mathematik), Basel 1962 (Übersetzung aus dem Englischen).
- [14] Polya, G., Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung; Lernen und Lehren, Basel und Stuttgart 1966 (Übersetzung aus dem Englischen).
- [15] Ringel, G., Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin 1959.
- [16] Rosenfeld, B. A., und I. M. Jaglom, Mehrdimensionale Räume, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band V, Berlin 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [17] Schklarski, D. O., Theorie der Elementarmathematik, Band 2 und 3, Moskau 1952 und 1954 (russisch).

### **Zusatz bei der deutschen Ausgabe**

Bakelman, I. J., Spiegelung am Kreis, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

1976 (Übersetzung aus dem Russischen).

Belkner, H., Determinanten. 3. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig 1976.

Boltjanski, V. G., und V. A. Efremovis, Anschauliche kombinatorische Topologie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986, (Übersetzung aus dem Russischen).

Donath, E., Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

Enzyklopädie der Elementarmathematik, Teil IV, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).

Flachsmeyer, J., Kombinatorik, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

Gelfans, I. M., E. G. Glagolewa und E. N. Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen, 2. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974 (Übersetzung aus dem Russischen).

Gelfand, I. M., E. G. Glagolewa und A. A. Kirillow, Die Koordinatenmethode, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).

Hilbert, D., und S. Cohn-Vosse, Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin 1932; Nachdruck Dover Publications, New York 1944.

Hajos, G., Einführung in die Geometrie, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (Übersetzung aus dem Russischen).

Hameister, E., Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene, 3. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Klotzek, B., U. Lengtat, E. Letzel und K. Schröder, kombinieren, parkettieren, färben, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1985.

Markuschewitsch, A. I., Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).

Miller, M., Rechenvorteile, 7. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig 1983

Pieper, H., Die komplexen Zahlen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984

Rademacher, O., und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Springer, Berlin 1930;

Sedlacek, J., Einführung in die Graphentheorie, 2. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972 (Übersetzung aus dem Tschechischen).

Sedlacek, J., Keine Angst vor Mathematik. 5. Aufl., VEB Fachbuchverlag Leipzig 1969 (Übersetzung aus dem Tschechischen).

Wilenskin, N. J., Unterhaltsame Mengenlehre, 2. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).