

---

**Herbert Pieper**

**Heureka  
Ich hab's gefunden**

1988 Deutscher Verlag der Wissenschaften

MSB: Nr. 135

Abschrift und LaTeX-Satz: 2023

<https://mathematikalpha.de>

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>1 Eine Tontafel aus dem alten Babylon</b>	<b>7</b>
<b>2 Ähnliche Dreiecke</b>	<b>10</b>
<b>3 Der Pyramidenstumpf</b>	<b>11</b>
<b>4 Brot und Bier</b>	<b>13</b>
<b>5 Der „Satz“ des Thales</b>	<b>15</b>
<b>6 Rechensteine</b>	<b>16</b>
<b>7 Gerade und ungerade Zahlen</b>	<b>17</b>
<b>8 Ein Mündchen des Hippokrates</b>	<b>19</b>
<b>9 Die Verdoppelung des Quadrats</b>	<b>20</b>
<b>10 Die mittlere Proportionale</b>	<b>26</b>
<b>11 Die Quadratur des Rechtecks</b>	<b>27</b>
<b>12 Der Goldene Schnitt</b>	<b>28</b>
<b>13 Dodekaeder und Pentagramm</b>	<b>30</b>
<b>14 Goldenes Dreieck und regelmäßiges Fünfeck</b>	<b>31</b>
<b>15 Die Wechselwegnahme</b>	<b>33</b>
<b>16 Heureka, ich hab's gefunden</b>	<b>34</b>
<b>17 Die Verdoppelung des Würfels</b>	<b>35</b>
<b>18 Das Lebensalter Diophants</b>	<b>38</b>
<b>19 Die Weinmischung</b>	<b>39</b>
<b>20 Die Quadratur des Kreises</b>	<b>42</b>
<b>21 Hund und Hase</b>	<b>43</b>
<b>22 Die Höhe einer Meeresinsel</b>	<b>44</b>
<b>23 Weizenkörner auf einem Schachbrett</b>	<b>45</b>

<b>24 Die Fahrt ans andere Ufer</b>	<b>46</b>
<b>25 Die Verteilung einer Geldsumme</b>	<b>47</b>
<b>26 Das Problem der 100 Vögel</b>	<b>48</b>
<b>27 Eine orientalische Gewichtsaufgabe</b>	<b>49</b>
<b>28 Die Eierfrau</b>	<b>49</b>
<b>29 Die Bestimmung eines Dreiecks</b>	<b>50</b>
<b>30 In einem Wirtshaus</b>	<b>51</b>
<b>31 Das „Erraten“ einer natürlichen Zahl</b>	<b>52</b>
<b>32 Wie spät ist es schon?</b>	<b>53</b>
<b>33 Der Zylinder größten Volumens in einer Kugel</b>	<b>54</b>
<b>34 Vier-Quadrate-Sätze</b>	<b>55</b>
<b>35 Die Tangentenaufgabe</b>	<b>56</b>
<b>36 Kegel mit größter Oberfläche in einer Kugel</b>	<b>58</b>
<b>37 Das Problem der gerechten Teilung</b>	<b>59</b>
<b>38 Eine überraschende Identität</b>	<b>61</b>
<b>39 Regelmäßiges Fünf- und Zehneck</b>	<b>62</b>
<b>40 Eine Gerade gegebener Länge in einem rechten Winkel</b>	<b>64</b>
<b>41 Die sieben Brücken</b>	<b>65</b>
<b>42 Beim Graben eines Brunnens</b>	<b>66</b>
<b>43 Ein Maultier und ein Esel</b>	<b>68</b>
<b>44 Stiere und Kühe</b>	<b>69</b>
<b>45 Konzentrische Kreise und quadratische Gleichungen</b>	<b>70</b>
<b>46 Die Teilung eines Königreiches</b>	<b>71</b>
<b>47 Ebene Figuren gleichen Umfangs mit größtem Flächeninhalt</b>	<b>73</b>
<b>48 Gitterpunkte</b>	<b>73</b>

<b>49 Die Vielfachen der 9</b>	<b>76</b>
<b>50 Umfüllen von Wein</b>	<b>77</b>
<b>51 Die Anzahl aller Primzahlen</b>	<b>78</b>
<b>52 Die Färbung einer Landkarte</b>	<b>79</b>
<b>53 Das Kästchenproblem</b>	<b>81</b>
<b>54 Der Streckenübertrager</b>	<b>82</b>
<b>55 Die Russellsche Antinomie</b>	<b>83</b>
<b>56 Lösungen</b>	<b>85</b>

## Vorwort

Fünfundfünfzig mathematische Rätsel und Aufgaben werden in diesem Büchlein gestellt und gelöst. Es sind Probleme, die aus vergangenen Zeiten überliefert sind oder die sich dem Mathematikhistoriker beim Rekonstruieren und Interpretieren alter Quellen darbieten.

Einige Aufgaben gehören zur Unterhaltungsmathematik; sie dienten immer vor allem der "Schärfung des Verstandes". Aber Mathematik ist mehr als nur eine Sammlung von Knobelaufgaben. Darum werden neben anderen auch Aufgaben vorgestellt, die Probleme berühren, aus denen sich umfassende mathematische Theorien entwickelten (wie Aufgaben, die auf algebraische Gleichungen führen - Algebra; Diophantische Aufgaben - Zahlentheorie; Extremwertaufgaben, Tangentenaufgabe - Höhere Analysis; Problem der gerechten Teilung - Wahrscheinlichkeitstheorie; Vierfarbenproblem, Königsberger Brückenproblem - Graphentheorie, Topologie; Russellsche Antinomie - Mengentheorie).

Die Aufgaben und Themen wurden so ausgewählt, dass verschiedene Gebiete der Mathematik vertreten sind (Tabelle 1) und zugleich möglichst alle mathematikhistorisch relevanten Zeiträume berücksichtigt werden. Überdies handelt es sich um Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsstufen, so dass viele Aufgaben schon mit geringen mathematischen Vorkenntnissen lösbar sind (Stufe 1), einige aber auch umfassendere Kenntnisse zur Lösung erfordern (Stufe 3) (siehe Tabelle 2).

Jede Aufgabe wird nicht nur formuliert, sie erscheint vielmehr als Teil eines etwas ausführlicher beschriebenen mathematikhistorischen Sachverhalts. Das Büchlein ist daher nicht nur eine Sammlung von Mathematikaufgaben, sondern gleichzeitig ein Sachbuch über Mathematikgeschichte. Das Büchlein wendet sich in erster Linie an Schüler im Alter von zwölf bis 16 Jahren, aber auch an Abiturienten, Studenten, Lehrer und andere Mathematikliebhaber.

Obwohl zu jeder Aufgabe eine ausführliche Lösung angegeben wird, ist es zur Schulung des selbständigen Denkens empfehlenswert, dieselbe (oder eine andere Lösung) durch eigene Mühe zu finden, um dann verkünden zu können: "Heureka, ich hab's gefunden!", so wie es einst Archimedes aus Freude über eine Entdeckung (siehe Aufgabe 16) ausgerufen haben soll.

Ich bedanke mich bei Frau Dipl.-Math. Erika Arndt (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften), die diese Publikation angeregt, vorbildlich betreut und durch zahlreiche Hinweise bereichert hat, und bei Herrn Prof. Dr. Walter Purkert (Karl-Sudhoff-Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig), der das Manuskript begutachtet und - mit kritischen Randbemerkungen versehen hat. Den Mitarbeitern der Druckerei sei für ihre sorgfältige Arbeit gedankt.

Berlin, im Frühjahr 1988

Herbert Pieper

### **Tabelle 1**

Gebiete, zu denen die Aufgaben gehören

Arithmetik/Algebra	Geometrie	Logik u. a.
1, 4, 6, 7, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 34, 38, 42, 43, 44, 48, 49, 51	2, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 29, 33, 35, 36, 39, 40, 45, 54	24, 27, 37, 41, 46, 47, 50, 52, 53, 55

### **Tabelle 2**

Schwierigkeitsstufen, zu denen die Aufgaben gehören

Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3
1, 4, 5, 6, 7, 21, 23, 24, 27, 28, 32, 37, 41, 42, 43, 46, 47, 49, 50, 51, 52	2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 25, 26, 29, 30, 31, 39, 40, 45, 48, 53, 54, 55	19, 33, 34, 35, 36, 38, 44

### **Hinweis**

Die Lebensdaten der im Text genannten Personen sind dem Namenverzeichnis zu entnehmen. Bei der Bezugnahme auf Literatur (Quellen, Zitate) werden Kurzbezeichnungen verwendet, die aus dem Namen des Autors und dem Jahr des Erscheinens der betreffenden Veröffentlichung bestehen. Die vollständigen Angaben sind im Quellenverzeichnis enthalten.

# 1 Eine Tontafel aus dem alten Babylon

Die Griechen des Altertums hoben einige Bau- und Kunstwerke der antiken Welt als "sieben Weltwunder" besonders hervor. Die älteste, uns bekannte Überlieferung aus dem 2. Jh. v. u. Z. zählt die folgenden "sieben Schauwerke der bewohnten Welt" auf: die Mauern und den Turm der in der mesopotamischen Tiefebene am Euphrat gelegenen Stadt Babylon; die gewaltige, mit Elfenbein, Gold und Edelsteinen verkleidete Statue des Zeus in Olympia; die zu Unrecht der legendenumwobenen assyrischen Königin Semiramis zugeschriebenen "hängenden Gärten" von Babylon; den Koloss von Rhodos - ein 37 m hohes Standbild des Sonnengottes Helios mit dem brennenden Leuchtf Feuer in der erhobenen Hand - im Hafen der ägäischen Insel Rhodos; die Pyramiden (Pharaonengräber) in der Nähe der alten ägyptischen Stadt Memphis; das Mausoleum in Halikarnassos an der Südwestküste Kleinasiens; den Riesentempel der Artemis (griechische Göttin der Jagd) in Ephesos an der Westküste Kleinasiens.

Einige dieser "sieben Weltwunder" wurden später durch andere ersetzt, so durch den auf der damaligen Insel Pharos vor der ägyptischen Hafenstadt Alexandria gebauten Leuchtturm, oder die Memnonsäulen, zwei große Sitzfiguren aus Sandstein bei Theben in Ägypten.

Man rechnete zu den "Weltwundern" auch römische Bauten, wie das Kolosseum und das Kapitol in Rom, oder biblische, wie die Arche Noah und Salomos Tempel in Jerusalem, oder chinesische, wie den Porzellanturm in Peking und die Große Mauer.

Diese und andere Denkmäler zeichneten sich durch Einzigartigkeit, Schönheit, Kostbarkeit oder besondere Größe aus. Auch unter den überlieferten Quellen zur Mathematik im Altertum gibt es besondere Juwelen, die man als "Schauwerke der mathematischen Wissenschaft", die unsere Bewunderung erregen, besonders hervorheben kann.

Eine dieser Kostbarkeiten ist eine gebrannte Tontafel mit recht rätselhaften Zeichen. Die Zeichen müssen einst mittels eines Griffels in weichen Ton eingedrückt worden sein (danach wurde der Ton gebrannt).

Bei den geheimnisvollen Zeichen handelt es sich um eine alte Bilderschrift, die wegen des keilförmigen Aussehens ihrer einzelnen Bestandteile "Keilschrift" genannt wird. (Eine erste Untersuchung zur Deutung jener zunächst nicht erklärbar scheinenden Schrift hatte am 4. September 1802 der Gymnasiallehrer G. F. Grotefend der Göttinger Akademie der Wissenschaften vorgelegt.)

Unsere Tontafel gehört zur Plimpton-Sammlung der Columbia- University in New York; sie hat die Katalog-Nummer 322. Die Wissenschaftshistoriker O. Neugebauer und A. Sachs haben sie dort aufgefunden, erschlossen und 1945 die gewonnenen Erkenntnisse veröffentlicht.

Die Tafel stammt aus Mesopotamien, dem Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris. Geschrieben wurde der Keilschrifttext in jener Zeit, als Hammurapi König von Babylon war.

Die Stadt Babylon, eine der ältesten und prächtigsten Städte des Altertums, erlebte unter Hammurapi (der wahrscheinlich zwischen 1728 und 1686 v. u. Z. regierte) den Höhepunkt ihrer Entwicklung. Babylon war Mittelpunkt eines Großreiches, das sich im

Zweistromland (im mittleren Irak) vom Persischen Golf bis hinauf nach Assur (dem Zentrum Assyriens, am rechten Tigrisufer über 350 km nordöstlich von Babylon) erstreckte.

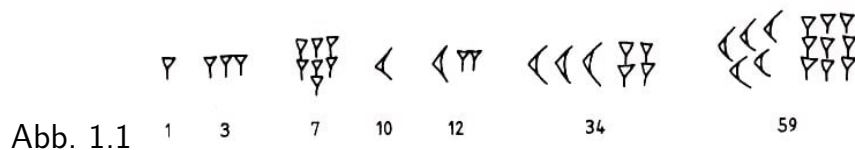
Die Tontafel "Plimpton 322" hat eine Größe von etwa 22,7 cm × 8,8 cm. Der Text ist eine Tabelle mit vier Spalten und stellt nur das rechte Teilstück einer größeren Tontafel dar. Jede Spalte hat eine Überschrift, und darunter stehen 15 Zeilen. Die Überschrift der ersten Spalte ist beschädigt, die Überschriften der zweiten, dritten und vierten Spalte lauten:

"Lösungszahl der Breite", "Lösungszahl der Diagonale", "sein Name".

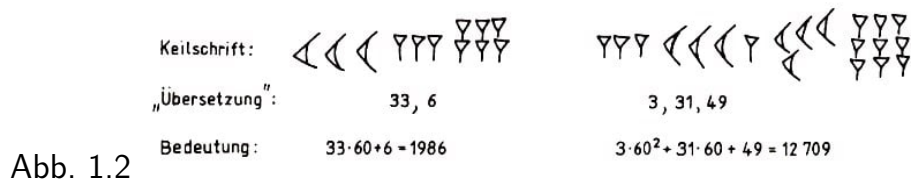
Die letzte (vierte) Spalte enthält die laufende Nummer der 15 Zeilen. Auch in den anderen Spalten stehen Zahlen. Es handelt sich also um eine Zahlentabelle.

Die Babylonier benutzten zur Darstellung der Zahlen das Sechzigersystem. Die Grundzahl des Systems ist die Zahl 60. (Das Sexagesimalsystem ist heute noch in unseren Zeitmaßen (1 Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden) und Winkelmaßen ( $1^\circ = 60'$ ,  $1' = 60''$ , Kreisteilung in  $360^\circ$ ) vorhanden.)

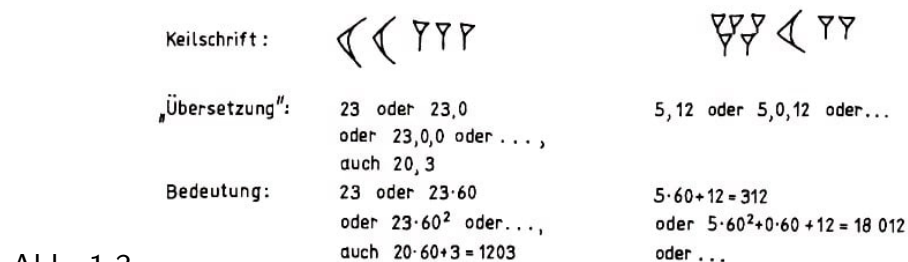
Die natürlichen Zahlen bis 60 wurden durch die Anzahl der Zehner und der Einer dargestellt. Das Zeichen für die Zehner ist ein stumpfer Keil, das Zeichen für die Einer ein spitzer Keil (Abb. 1.1).



Natürliche Zahlen über 60 wurden mit den aus Zehnern und Einern zusammengesetzten "Ziffern" geschrieben (Beispiele in Abb. 1.2).



Manchmal muss aus dem Zusammenhang entschieden werden, um welche Zahlen es sich handelt; denn die Babylonier kennen kein Zeichen für die Null (Beispiele in Abb. 1.3).





In der vierten Zeile von "Plimpton 322" stehen folgende Sexagesimalzahlen: 3, 31, 49 in der zweiten Spalte und 5, 9, 1 in der dritten Spalte. Die Umrechnung ins Dezimalsystem ergibt die Zahlen:

$$3 \cdot 60^2 + 31 \cdot 60 + 49 = 12709 \quad , \quad 5 \cdot 60^2 + 9 \cdot 60 + 1 = 18541$$

Bezeichnet man die Zahlen der zweiten Spalte mit  $b$ , die der dritten Spalte (gleicher Zeile) mit  $d$ , so zeigt es sich, dass es zu jedem Paar  $b$  und  $d$  irgendeiner Zeile stets eine natürliche Zahl  $h$  derart gibt, dass

$$d^2 - b^2 = h^2$$

gilt. In der Zeile 4 ist  $h = 13500$ , also  $18541^2 = 13500^2 + 12709^2$ .

Man rechne alle im Plimpton-Text sexagesimal gegebenen Werte  $b$ ,  $d$  ins Dezimalsystem um und bestimme die zugehörigen Zahlen  $h$  mit  $h^2 + b^2 = d^2$ .

$b$	$d$	Nr.	$b$	$d$	Nr.
1,59	2,49	1	56,7	1,20,25	2
1,16,41	1,50,49	3	3,31,49	5,09,01	4
1,05	1,37	5	5,19	8,1	6
38,11	59,1	7	13,19	20,49	8
8,1	12,49	9	1,22,41	2,16,1	10
45	1,15	11	27,59	48,49	12
2,41	4,49	13	29,31	53,49	14
56	1,46	15			

Die 15 Zahlentripel lassen sich nach dem sogenannten "Satz von Pythagoras" als Seiten rechtwinkliger Dreiecke mit den Katheten  $h$  und  $b$  und der Hypotenuse  $d$  deuten. Der "Satz von Pythagoras" wurde tatsächlich schon in der babylonischen Mathematik bei konkreten Fragestellungen benutzt, wie zahlreiche Keilschrifttexte zeigen.

Die zu den Tripeln gehörigen 15 Dreiecke verändern sich von der ersten bis zur 15. Zeile wie folgt: Das erste rechtwinklige Dreieck ist (fast) ein halbes Quadrat, da  $h$  und  $b$  (fast) übereinstimmen. Der Quotient  $\frac{b}{h}$  nimmt dann von 0,99 bis 0,62 ab. Das letzte rechtwinklige Dreieck hat (annähernd) die Winkel  $90^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ .

Die erste Spalte vom vorhandenen Reststück der Tontafel enthält nicht  $h$ , sondern die Quadrate  $\left(\frac{d}{h}\right)^2$ , deren Werte von der ersten bis zur letzten Zeile fast linear abnehmen. Das alles zeigt eine gewisse sinnvolle Anordnung der Zahlen in der Tabelle.

Es ist schon eine überraschende, bewunderungswürdige Tontafel aus der ersten Hälfte des 2. Jahrtausends v. u. Z., deren Zahlen 15 rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen beschreiben.

Darüber, wie die alten Babylonier diese Zahlen berechnet haben (und wie die in der Originaltabelle an einigen Stellen stehenden falschen Zahlenwerte erklärt werden könnten), haben die Mathematikhistoriker verschiedene Hypothesen aufgestellt. Leider werden wir es kaum je erfahren, wie es wirklich gewesen ist.

Quellen: Pieper 1984a, Vogel 1959b.

## 2 Ähnliche Dreiecke

In der ersten der vier erhaltenen Spalten von "Plimpton 322" steht (mit den in der Aufgabe 1 verwendeten Bezeichnungen) wahrscheinlich

$$\left(\frac{d}{h}\right)^2 = \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1$$

Manche Mathematikhistoriker meinen, dort würde  $\left(\frac{d}{h}\right)^2 = \left(\frac{b}{h}\right)^2 - 1$  stehen. Dieser Wert hätte folgende geometrische Bedeutung:

Wird das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten  $b$ ,  $h$  und der Hypotenuse  $d$  durch die Höhe auf  $d$  in zwei Teildreiecke mit den Flächen  $A$ ,  $B$  zerlegt (Abb. 2.1), dann gilt

$$h^2 A = b^2 B \quad (1)$$

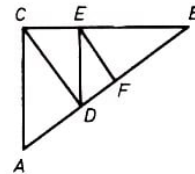
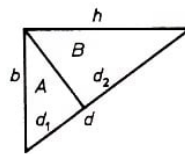


Abb. 2.1, 2.2

(Warum?) Ein solcher Satz scheint den Babyloniern bekannt gewesen zu sein. Sind  $\left(\frac{b}{h}\right)^2$  und  $B$  gegeben, so kann man die Fläche  $A$  sofort ausrechnen:  $A = \left(\frac{b}{h}\right)^2 B$ . Ebenfalls gilt (Warum?)

$$d_1^2(A + B) = b^2 A \quad (2)$$

Auf einer im Tell Harmal bei Bagdad, dem alten Schurrupak, gefundenen Tontafel (aus der Anfangszeit der ersten babylonischen Dynastie), die heute unter: der Nr. IM 55357 im Irak-Museum in Bagdad aufbewahrt wird, ist folgendes Problem gestellt:

In einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  (Abb. 2.2) sind die Höhe  $\overline{CD}$  auf  $\overline{AB}$ , im Dreieck  $BCD$  die Höhe  $\overline{DE}$  auf  $\overline{CB}$  und im Dreieck  $DBE$  die Höhe  $\overline{EF}$  auf  $\overline{DB}$  eingezeichnet. Gegeben sind  $a = \overline{BC} = 1$  ( $= 60$ ),  $b = \overline{AC} = 45$  und  $c = \overline{AB} = 75$ . Gegeben sind ferner die Dreiecksflächen

$$F_{ABC} = 22,30 (= 22 \cdot 60 + 30 = 1350),$$

$$F_{ADC} = 8,6 (= 8 \cdot 60 + 6 = 486),$$

$$F_{CDE} = 5,11; 52,24 \left( = 5 \cdot 60 + 11 + \frac{2}{60} + \frac{24}{60^2} = 311 + \frac{124}{3600} = 311,0344... \right),$$

$$F_{DFE} = 3; 19; 3, 56, 9, 56 \left( = 3 \cdot 60 + 19 + \frac{3}{60} + \frac{56}{60^2} + \frac{9}{60^3} + \frac{56}{60^4} \right),$$

$$F_{EFB} = 5, 53; 53, 39, 50, 24 \left( = 5 \cdot 60 + 53 + \frac{53}{60} + \frac{39}{60^2} + \frac{50}{60^3} + \frac{24}{60^4} \right)$$

Zunächst wird  $\overline{AD}$  berechnet. Der Text lautet: "... nimm das Reziproke von 1 ( $= 60$ ) der Länge und multipliziere es mit 45. 45 siehst du. Multipliziere 45 mit 2 und 1,30 ( $=$

90) siehst du. Multipliziere 1,30 (= 90) mit 8,6 (= 486), der oberen Fläche ( $F_{ADC}$ ), und du siehst 12,9 (= 729).

Was ist die Quadratwurzel von 12,9 (= 729)? 27 ist die Quadratwurzel. 27 ist die Breite ( $\overline{AD}$ ) des oberen Dreiecks ( $ADC$ ).“ (1)

Die Rechnung ist  $\sqrt{\frac{1}{60} \cdot 45 \cdot 2 \cdot 486} = 27$ . Die Vorschrift lautet also

$$\overline{AD} = \sqrt{\frac{1}{a} \cdot b \cdot 2 \cdot F_{ADC}} \quad (3)$$

Wie die Babylonier darauf gekommen sind, ist nicht angegeben.

Wie kann man die Formel (3) gewinnen, indem man eine zu der Formel (2) analoge Formel benutzt?

Anschließend wird  $\overline{CD}$  berechnet:

Aus  $\frac{\overline{AD} \cdot \overline{CD}}{2} = F_{ADC}$  folgt  $\overline{CD} = \frac{486 \cdot 2}{27} = 36$ .

Aus  $c = \overline{AB} = 75$ ,  $\overline{AD} = 27$  folgt  $\overline{DB} = 75 - 27 = 48$ .

Bei der Berechnung von  $\overline{CE}$  wird dasselbe Verfahren wie bei der Berechnung von  $\overline{AD}$  angewandt (mit dem Dreieck  $BCD$  anstelle von  $ABC$ . (Wie und mit welchem Ergebnis?) Mitten in der Berechnung von  $\overline{DE}$  bricht der Text ab.

Quellen: Gericke 1984, Vogel 1959b. Zitat: (1) Gericke 1984, S. 23.

### 3 Der Pyramidenstumpf

Der fruchtbare Landstreifen beiderseits des Nils ist eines der ältesten Zentren menschlicher Zivilisation. Die monumentalen Königsgräber Ägyptens, von den Griechen als Pyramiden bezeichnet, sind Zeugnisse des "alten Reiches" (ca. 27.-22. Jh. v. u. Z.).

Die Planung und der Bau dieser Grab- und Tempelanlagen der Pharaonen, aber auch die Verwaltung der ägyptischen Großwirtschaften (z. B. die Vermessung von Ländereien nach der Nilüberschwemmung) erforderten gute mathematische Kenntnisse.

Quellen für die alt-ägyptische Mathematik sind vor allem zwei mit Hieroglyphen beschriftete Papyrusrollen: der "Papyrus Rhind" (von dem Engländer Rhind 1858 in Luxor erworben, heute im Britischen Museum London) und der "Papyrus Moskau". Dieser im Moskauer Museum der schönen Künste aufbewahrte Papyrus ist eine Buchrolle von 5,44 m Länge und 8 cm Breite. Er enthält 25 Aufgaben des täglichen Lebens.

In der 14. Aufgabe wird das Volumen eines Pyramidenstumpfes berechnet.

Die Grund- und Deckfläche sind Quadrate mit den Seitenlängen  $a = 4$  bzw.  $b = 2$  Ellen (der Name des Längenmaßes wird jedoch nicht angegeben), die Höhe beträgt  $h = 6$  Ellen (Abb. 3).

Der Text beschreibt die Volumenberechnung richtig in der Form (in moderner Schreibweise)

$$V = (a^2 + ab + b^2) \frac{h}{3}$$

Es soll zuerst  $(a =)4$  quadriert, 4 verdoppelt ( $ab = 4 \cdot 2$ ) und  $(b =)2$  quadriert werden. Dann heißt es: "Addiere du zusammen diese 16 mit dieser 8 und mit dieser 4. Es entsteht 28.

Berechne du 3 von 6. Es entsteht 2. Rechne du mit 28 2 mal. Es entsteht 56. Siehe: er [der Inhalt des Pyramidenstumpfes] ist 56. Du hast richtig gefunden." (1)

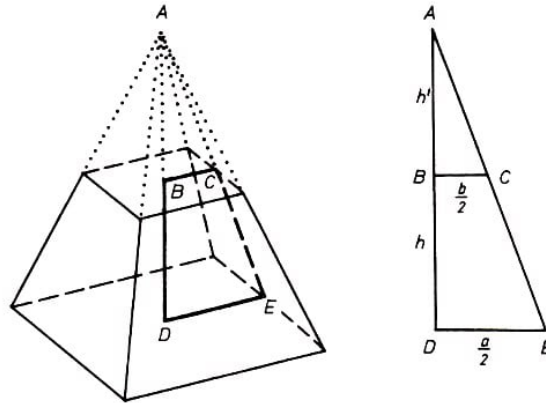


Abb. 3

Es ist nicht überliefert, wie die Ägypter auf die Vorschrift zur Volumenberechnung des quadratischen geraden Pyramidenstumpfes gekommen sind. Vielleicht haben sie auf empirischem Wege den Rauminhalt der quadratischen Pyramide mit der Grundfläche  $G = a^2$  und der Höhe  $H$  zu  $\frac{1}{3}GH$  bestimmt (davon "findet sich [jedoch] in den Texten nichts, erst bei Demokrit und Eudoxos [...] hören wir von ihr [der Volumen-'formel' für die Pyramide]" (2)):

Taucht man eine solche Pyramide in ein bis zum Rand mit Wasser gefülltes Gefäß, das ein gerades Prisma mit der Grundfläche  $G$  und der Höhe  $H$  ist, so fließt genau  $\frac{1}{3}$  des Wassers über.

"Ausgehend von der Formel des Volumens einer Pyramide konnte der ägyptische Schreiber auf Grund theoretischer Betrachtung, die im Bereich der ägyptischen Mathematik lag, die richtige Formel der Berechnung eines Pyramidenstumpfes finden. Das Volumen eines quadratischen Pyramidenstumpfes konnte er ausdrücken als Differenz zwischen dem Volumen der ganzen quadratischen Pyramide und dem Volumen deren abgeschnittener Spitze." (3)

Dieses schrieb der Herausgeber des Moskauer Papyrus Wassili W. Struve und fuhr fort: "Die Höhe  $[h]$  der abgeschnittenen Pyramidenspitze konnte der ägyptische Mathematiker leicht [aus  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ] errechnen" (3), nämlich unter Benutzung von Proportionen, die aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke  $ABC$  und  $ADE$  folgen.

(Die ägyptische Kenntnis der Proportion  $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$  ist im Moskauer Papyrus belegt, die Kenntnis der Proportion  $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$  wurde von Struve vermutet.)

Man leite auf die von Struve vermutete Weise die Volumenformel (1) des quadratischen Pyramidenstumpfes her. (Dabei ist die Zerlegung  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  zu benutzen, Struve schrieb, es ist "leichter anzunehmen, dass die ägyptischen Mathematiker die Auflösung von  $a^2 - b^2$  in  $(a + b)(a - b)$  gekannt haben, als anzunehmen, dass sie eine so komplizierte Formel, wie  $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$  auf rein empirischem Wege gefunden

haben."(4))

Dass die Ägypter das Pyramidenstumpfvolumen genau berechnen konnten, "diese Tatsache von größter kulturgeschichtlicher Tragweite" (5) kennen wir erst seit dem Jahre 1917. Der damalige Konservator der ägyptologischen Abteilung des Moskauer Museums der schönen Künste, der Akademiker B. Turajeff, hatte in der Zeitschrift "Ancient Egypt" darauf aufmerksam gemacht. Er war der erste, der den vom Moskauer Museum 1912 erworbenen Papyrus (Nr. 4676 des Inventars) untersucht hatte.

Der Papyrus stammt aus der Nekropolis von Dra Abu'l Negga bei Theben. Die darin enthaltenen Aufgaben hatte ein Schreiber der 13. Dynastie von einer Vorlage aus der 12. Dynastie (19. Jh. v. u. Z.) abgeschrieben.

Wahrscheinlich handelt es sich um ein "Prüfungsheft" eines angehenden ägyptischen Schreibers. "Solch ein Adept einer ägyptischen Schreiberschule musste offenbar bei seiner Prüfung im buntesten Durcheinander die verschiedensten Aufgaben lösen. Bei der Ausübung seines Berufes wurde ja der Schreiber vor die verschiedensten Rechenaufgaben gestellt, wobei ihm die letzteren durchaus nicht systematisch geordnet entgegentraten." (6)

Quellen: Struve 1930, Vogel 1959a.

Zitate: (1) Struve 1930, S. 135; (2) Vogel 1959a, S. 68; (3) Struve 1930, S. 175; (4) ebenda, S. 176; (5) ebenda, S. VII; (6) ebenda, S. 39.

## 4 Brot und Bier

Die Ägypter unterteilten das Land, das sie bewohnten, in Unter- und Oberägypten. Unterägypten war das fruchtbare Gebiet des Nildeltas, Oberägypten das fast regenlose, periodisch vom Nil überschwemmte Niltal. Die Bewässerung durch den Nil und die künstliche Entwässerung ermöglichten im Niltal die Bewirtschaftung des Landes.

Die Masse des Volkes Ägyptens bestand aus Landarbeitern. Als Entlohnung erhielten die Arbeiter hauptsächlich Brot und Bier. Brot galt als ein Hauptnahrungsmittel und gehörte zusammen mit dem Bier zu den Grundlagen der Ernährung, sowohl für den einfachen Arbeiter als auch für den hohen Beamten des Pharaonenstaates. Die wichtigsten Getreidesorten, aus denen Brot gebacken und Bier gebraut wurde, sind Gerste, Emmer und Spelt gewesen. Für Oberägypten war Gerste das charakteristische Getreide ("oberägyptisches Getreide").

Die Weizenarten Emmer und Spelt unterscheiden sich durch die Form ihrer Ähren und vom eigentlichen Weizen dadurch, dass sich beim Dreschen die Körner nicht von den Spelzen trennen. Das Bier wurde aus angebackenen Braubrotten bereitet. Es wurde in mit Lehm verschmierten und verschlossenen Krügen gelagert, musste jedoch schnell verbraucht werden.

Die Stärke des Bieres hängt von dem Verhältnis von Getreide und Wasser ab. Je größer die Menge des zur Herstellung eines Kruges Bier verwendeten Getreides ist, desto stärker ist das Bier. Entspricht ein Bierkrug einer bestimmten Anzahl von Braubrotten,

so hängt die Bierstärke letztlich vom Korngehalt des Brotes ab. Als Fachausdruck bei der Herstellung von Brot und dem damit zusammenhängenden Brauen von Bier war ein Wort üblich, das wir "pesu" aussprechen und als "Backverhältnis" übersetzen können.

Das Pesu gibt an, wieviel Brote aus einem Scheffel Getreide gebacken werden. Ein Brot vom Pesu 5 enthält  $\frac{1}{5}$  Scheffe Korn. Werden zehn Brote aus einem Scheffel Getreide gebacken, so haben sie das Pesu 10. Auf Bier bezogen gibt das Pesu an, welche Anzahl von Bierkrügen aus einem Scheffel Getreide bereitet werden. Bier mit kleinem Pesu ist also stärker als Bier mit einem größeren Pesu.

Bezeichnet  $a$  die Anzahl der Brote oder der Krüge Bier und  $m$  die dazu benutzte Menge Getreide, so berechnet man das Pesu als Quotient  $p = \frac{a}{m}$ .

Zahlreiche der in den ägyptischen Papyri überlieferten Rechenprobleme beschäftigen sich mit der Aufgabe, eine dieser Größen aus den anderen zu berechnen.

Hat man Gerstenbiere mit verschiedenen Pesu, etwa drei Sorten Bier mit den Pesu  $p_1 = \frac{a_1}{m_1}$ ,  $p_2 = \frac{a_2}{m_2}$ ,  $p_3 = \frac{a_3}{m_3}$ , so erhält man

$a_1 a_2 a_3$  Bierkrüge aus  $m_1 a_2 a_3$  Scheffel Gerste bzw.

$a_2 a_1 a_3$  Bierkrüge aus  $m_2 a_1 a_3$  Scheffel Gerste bzw.

$a_3 a_1 a_2$  Bierkrüge aus  $m_3 a_1 a_2$  Scheffel Gerste, also

$3a_1 a_2 a_3$  Bierkrüge aus  $a_2 a_3 m_1 + a_1 a_3 m_2 + a_1 a_2 m_3$  Scheffel Gerste,

hat also "(aus drei Sorten) gemischtes" Bier mit dem Pesu

$$\bar{p} = \frac{3a_1 a_2 a_3}{a_2 a_3 m_1 + a_1 a_3 m_2 + a_1 a_2 m_3} = \frac{3}{\frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} + \frac{m_3}{a_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right)}$$

( $\bar{p}$  Krüge "gemischtes" Bier werden dann aus einem Scheffel Getreide gebraut). Bier von "gemischtem" Pesu ( $p_1, p_2, p_3$ ) ist ein solches, bei dem  $\bar{p}$  Krüge Bier aus drei Scheffel Getreide bereitet werden, d. h.

$$\frac{\bar{p}}{3} = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}}$$

Krüge Bier aus einem Scheffel Getreide entstehen.

Neben aus Gerste gebrautem Bier gab es auch Bier anderer Getreidesorten. Die Ägypter pflegten dem Bier auch Datteln beizumischen. Das Spelt-Dattelbier war so stark, dass es vor dem Trinken mit Wasser verdünnt werden musste. Einem dreiviertel Krug Spelt-Dattelbier wurde ein viertel Krug Wasser hinzugefügt. Spelt-Dattelbier wurde deshalb wahrscheinlich auch als Vielfaches von Dreiviertelkrügen gemessen.

Das Stärkeverhältnis zwischen Spelt-Dattelbier und Gerstenbier war bekannt: ein Dreiviertelkrug Spelt-Dattelbier entsprach zwei Krügen Gerstenbier.

Die Aufgabe 9 des Moskauer Papyrus behandelt folgendes Problem:

Gegeben sind 16 Scheffel oberägyptischen Getreides (Gerste). Aus einem Teil davon sollen 100 Brote mit dem Pesu 20 gebacken werden. Aus den übrigen Scheffeln soll Bier des gemischten Pesu (2, 4, 6) bereitet werden.

Wieviele Dreiviertelkrüge Spelt-Dattelbier entsprechen diesem Gerstenbier?

Quellen: Struve 1930, Vogel 1959a.

## 5 Der „Satz“ des Thales

Milet - eine seit dem 11. Jh. v. u. Z. von Griechen besiedelte Stadt am Mittelmeer an der Südwestküste Kleinasien - erreichte im 6. Jh. v. u. Z. ihre höchste wirtschaftliche und kulturelle Blüte. Hier wirkten die Gelehrten Thales, Anaximandros und Anaximenes; Milet war ein Zentrum der materialistischen Naturphilosophie.

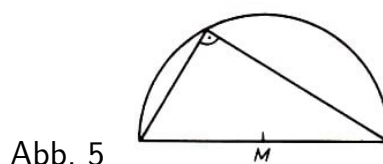
Thales (um 624-546 v. u. Z.) wurde im Altertum zu den Sieben Weisen gerechnet, zu jenen griechischen Denkern und Staatsmännern, die sich durch praktische Lebensweisheit und staatsmännische Klugheit auszeichneten.

Schon im 4. Jh. v. u. Z. waren wahrscheinlich keine Originalschriften von Thales mehr vorhanden. Nach späteren antiken Überlieferungen soll er ausgedehnte Reisen, so nach Ägypten und Mesopotamien, unternommen und von dort mathematische Kenntnisse und Methoden mitgebracht und erstmals "streng" formuliert haben.

Als Quelle für den nach Thales benannten Satz, dass der Peripheriewinkel im Halbkreis ein rechter ist, dient die im 3. Jh. u. Z. verfasste Schrift "Leben und Lehren berühmter Philosophen" des Diogenes Laertios. Dieser beruft sich auf die römische Historikerin Pamphila von Epidaurus (1. Jh. u. Z.). Die folgende Übersetzung (von F. Krafft) der Stelle bei Diogenes Laertios trifft den griechischen Urtext am besten:

"Pamphila sagt, Thales habe, nachdem er die Geometrie von den Ägyptern gelernt habe, als erster das rechtwinklige Dreieck des Kreises aufgezeichnet und ein Rind geopfert; andere sagen, Pythagoras sei es gewesen..." (1)

Andere Übersetzungen interpretieren den Text sofort als den Satz über den rechten Peripheriewinkel: Thales habe als erster einen Kreis um ein rechtwinkliges Dreieck beschrieben. Mit anderen Worten:



Jedem rechtwinkligen Dreieck kann ein Kreis umbeschrieben werden, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Hypotenuse ist (Abb. 5).

Eine davon verschiedene Interpretation (von F. Krafft) ist die folgende:

Thales habe als erster Grieche einen Kreis in das flächengleiche rechtwinklige Dreieck verwandelt.

Wie ist das Dreieck zu zeichnen, wenn man den Näherungswert 3 für die Kreiszahl  $\pi$  verwendet? Sowohl in demotischer Schrift auf ägyptischen Papyri als auch in Keilschrift auf altbabylonischen Tontafeln geschriebene Texte enthalten übrigens den Wert 3 für die Kreiszahl.

Quelle: Krafft 1971. Zitat: (1) Krafft 1971, S. 90.

## 6 Rechensteine

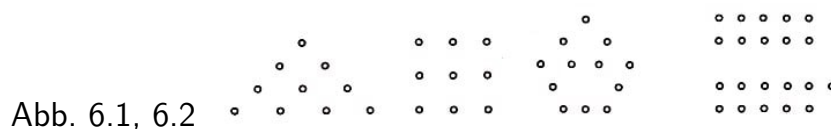
Im 5. Jh. v.u.Z. lebte in Syrakus, der Stadt an der Ostküste Siziliens, der griechische Komödiendichter Epicharmos. Von seinen Stücken sind nur Fragmente erhalten. In einem von ihnen heißt es:

"Wenn einer zu einer ungeraden Zahl, meinetwegen auch einer geraden, einen Stein zulegen oder von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bliebe noch dieselbe?" (1)

Steine, Rechensteine (griechisch: psephoi) wurden damals zum Rechnen verwendet. Das griechische Verb für "rechnen" heißt "psephizein", wörtlich "steineln".

Auf Rechentafeln (griechisch: abakion, lateinisch: abacus) waren durch Linien (Geraden) Spalten gekennzeichnet, die den Stellenwert der Rechensteine bestimmen, die in sie hinein gelegt wurden. Mitte des vorigen Jahrhunderts wurde auf der griechischen Insel Salamis eine solche Rechentafel aus weißem Marmor gefunden, die im Nationalmuseum Athen aufbewahrt wird.

Die Griechen benutzten die Rechensteine aber nicht nur zum Rechnen. Sie veranschaulichten mit ihnen auch Zahlen, z. B. solche Zahlen, die durch Anordnung von Steinchen in Form von Polygonen dargestellt werden können, wie Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, ..., Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, ..., Pentagonalzahlen 1, 5, 12, 22, ... (Abb. 6.1).



Auch gerade und ungerade Zahlen lassen sich mit Rechensteinen illustrieren (vgl. Abb. 6.2).

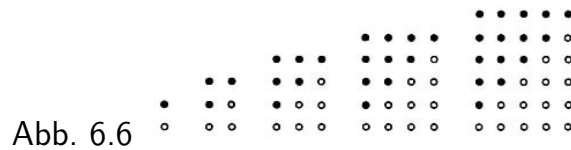
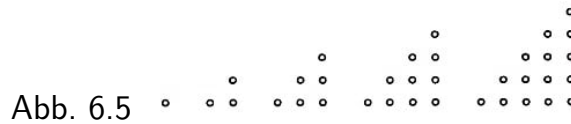
Abb. 6.3, 6.4

$$\begin{array}{l}
 \circ\circ\circ + \circ\circ\circ\circ\circ + \circ\circ = \circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ \\
 \circ\circ\circ\circ + \circ\circ\circ = \circ\circ\circ\circ\circ\circ
 \end{array}$$

Hierauf bezieht sich offenbar die Anspielung des Epicharmos. Mit den Steinen kann man leicht Aussagen über gerade und ungerade Zahlen demonstrieren; zwei Beispiele: die Summe gerader Zahlen ist gerade (Abb. 6.3). Die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade (Abb. 6.4).

Durch Legen von Dreieckszahlen und Verdoppelung dieser Zahlen entdeckt man die Summenformel für die Folge der natürlichen Zahlen: Aus den Dreieckszahlen  $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \dots$  (Abb. 6.5) entstehen durch Verdoppelung Rechteckzahlen (Abb. 6.6). Die Seiten dieser Rechteckzahlen unterscheiden sich um einen Stein.





Solche Rechteckzahlen nannten die Griechen "Heteromeken":  $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 4 \cdot 5, 5 \cdot 6, \dots$ . Die Dreieckszahlen sind nun jeweils die Hälfte der Heteromeken. Somit gilt für die Summen der natürlichen Zahlen

$$1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3, 1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4, 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5, \dots$$

allgemein

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

Durch geeignetes Legen von Quadratzahlen kann man die Summenformel für die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen entdecken. (Wie?)

Diese Entdeckungen scheinen spätestens in der ersten Hälfte des 5. Jh. v. u. Z. von den Pythagoreern gemacht worden zu sein.

Quellen: Becker 1936, Becker 1957. Zitat: (1) Becker 1936, S. 537.

## 7 Gerade und ungerade Zahlen

Im letzten Drittel des 6. Jh. v. u.Z. gründete der von der Insel Samos stammende Grieche Pythagoras (um 580-496 v. u. Z.) in der unteritalienischen Stadt Kroton einen Geheimbund. Es war ein Bund von Aristokraten, die sich konspirativ betätigten und sich strengen Ritualen und Lebensvorschriften zu unterwerfen hatten.

Pythagoras trat mit dem ungeheuren Anspruch der Überlegenheit seiner Person auf, er wäre göttlichen Ursprungs. Die Geheimlehren waren mystisch, quasireligiös. So sollen Pythagoras und seine Anhänger eine Seelenwanderungslehre vertreten haben. Mathematik war ein Teil ihrer Religion.

Ihre Lehre "Alles ist Zahl" bedeutete den Glauben, dass alle Dinge sich in natürlichen Zahlen oder in Verhältnissen natürlicher Zahlen erfassen lassen. So würden die Entfernungen der Planeten und ihre Geschwindigkeiten in einem "harmonischen" Verhältnis zueinander stehen und eine Sphärenharmonie erzeugen, die Pythagoras zu hören imstande gewesen sein sollte.

Die Pythagoreer entdeckten, dass bei Saiteninstrumenten die Tonhöhe von der Länge der Saiten abhängig ist, dass mathematische Verhältnisse der musikalischen Harmonie zugrunde liegen.

Ihre Beschäftigung mit Mathematik bezeichneten die Pythagoreer als eine "freie Lehre", frei von praktischen Zwecken. Die Mathematik entwickelten sie losgelöst und in

Distanz zur Rechen- und Feldmesskunst. Bedenkt man den aristokratischen Charakter der Pythagoreer, so wird - wie der Mathematikhistoriker Hans Wussing deutet - aus der freien Lehre eine "Mathematik der Freien" (1).

Die Namen einiger pythagoreischer Mathematiker sind bekannt: Hippasos von Metapont (um 500 v. u. Z.), Archytas von Tarent (428-365 v. u. Z.). Anonyme Pythagoreer, die in der Zeit zwischen Hippasos und Archytas lebten, wandelten die Mathematik in eine exakte Wissenschaft um.

Der Orden der Pythagoreer übte zeitweise einen beträchtlichen politischen Einfluss aus. Er verfolgte eine antidemokratische, aristokratische Politik. Als um 445 v. u. Z. in Unteritalien die Demokraten die Oberhand gewannen, wurden die Pythagoreer blutig verfolgt. Im 4. Jh. v. u. Z. löste sich der Bund auf.

Was nicht mit dem Bund verging, sondern bestehen blieb, war die in ihm entstandene wissenschaftliche Mathematik.

Die wohl älteste (überlieferte) mathematische Theorie dieser Pythagoreer ist die Lehre von den geraden und ungeraden (natürlichen) Zahlen. Es ist nicht nur eine Sammlung von Sätzen, es ist "ein zusammenhängendes Lehrstück" (2). In der Tat zeigt eine nähere Untersuchung, dass zwischen den Beweisen ein Zusammenhang besteht: Spätere Sätze bauen auf frühere auf.

Die Theorie beginnt mit Definitionen (Zahlen sind dabei als natürliche Zahlen  $> 1$  anzusehen):

Definition 1: Gerade ist die Zahl, die sich halbieren lässt.

Definition 2: Ungerade ist die Zahl, die sich nicht halbieren lässt oder die sich um die 1 von einer geraden Zahl unterscheidet.

In den ersten Sätzen geht es um die Addition gerader und ungerader Zahlen (gerade Zahl + gerade Zahl = gerade Zahl, die Summe ungerader Zahlen von gerader Anzahl ist gerade, die Summe ungerader Zahlen von ungerader Anzahl ist ungerade).

Es folgen vier Sätze über die Subtraktion (gerade Zahl - gerade Zahl = gerade Zahl, gerade Zahl - ungerade Zahl = ungerade Zahl, ungerade Zahl - ungerade Zahl = gerade Zahl, ungerade Zahl - gerade Zahl = ungerade Zahl) und zwei Sätze über die Multiplikation (ungerade Zahl  $\times$  gerade Zahl = gerade Zahl, ungerade Zahl  $\times$  ungerade Zahl = ungerade Zahl; die Aussage "gerade Zahl  $\times$  gerade Zahl = gerade Zahl" folgt sofort aus dem ersten Additionssatz). Alle diese Sätze werden ohne Schwierigkeit direkt bewiesen.

Nun folgen nicht einfach analoge Divisionssätze. Es gibt nämlich Zahlen, die überhaupt nicht in Faktoren, und Zahlen, die auf verschiedene Weise in gerade und ungerade Faktoren zerlegt werden können.

Es ist notwendig, verschiedene Arten von Zahlen zu unterscheiden: gerade Zahlen, die durch Verdoppelung der 2 entstehen (Potenzen  $2^n$ ), gerade Zahlen, deren Hälfte ungerade ist (also Zahlen der Form  $2u$ ,  $u$  ungerade),

gerade Zahlen, deren Hälfte nicht ungerade ist und die nicht durch Verdoppelung der 2 entstehen,

ungerade Zahlen, die Primzahlen sind,

ungerade Zahlen, die nicht Primzahlen sind.

Es ist klar, dass ungerade Zahlen, die Primzahlen sind, sich nicht in Faktoren zerlegen lassen, und dass ungerade Zahlen, die nicht Primzahlen sind, sich nur in ungerade Faktoren zerlegen lassen. Um die Zerlegungsmöglichkeiten der geraden Zahlen zu behandeln, werden in der pythagoreischen Lehre von den geraden und ungeraden Zahlen zuvor zwei Sätze bewiesen.

Satz 1: Wenn eine ungerade Zahl eine gerade teilt, teilt sie auch deren Hälfte.

Satz 2: Wenn eine ungerade Zahl mit irgendeiner Zahl teilerfremd ist, dann ist sie auch mit der doppelten Zahl teilerfremd.

Im Unterschied zu den Additions-, Subtraktions- und Multiplikationssätzen werden die beiden Sätze und die auf sie folgenden drei Sätze über die Zerlegung gerader Zahlen in gerade und ungerade Faktoren sämtlich indirekt bewiesen.

Wie sind die indirekten Beweise der Sätze 1 und 2 unter Benutzung der zuvor genannten Aussagen dieses pythagoreischen Lehrstücks zu führen? Es scheint übrigens nicht etwa so zu sein, dass die Methode des indirekten Beweises eine Errungenschaft der Mathematiker ist. Der Mathematikhistoriker Arpad Szabo vertritt die Ansicht, dass die älteste deduktive Mathematik der Griechen letztlich einer Anregung der philosophischen Dialektik zu verdanken ist.

Es ist die Dialektik, die Kunst des Dialogführens, die sich zuerst des indirekten Beweises bedient hat. Die frühesten Beispiele dieser Beweistechnik stammen von Parmenides (um 540-480 v. u. Z.) und Zenon (um 490-430 v. u. Z.), den bedeutendsten Vertretern eines anderen griechischen aristokratischen Bundes (der Eleaten) in Elea in Unteritalien.

Quellen: Becker 1957, Lefevre 1981, Szabo 1956, Szabo 1969b, Wussing 1965. Zitate: (1) Wussing 1965, S. 83; (2) Lefevre 1981, S. 126.

## 8 Ein Mündchen des Hippokrates

Hippokrates von Chios, ein älterer Zeitgenosse des Sokrates (469 bis 399 v.u. Z.), ist einer der bedeutendsten Mathematiker der frühgriechischen Zeit. Ihm verdanken wir die Erkenntnis, dass ein krummliniges Flächenstück einem geradlinigen, nämlich einem Quadrat, flächengleich sein kann.

Sein Ziel war dabei, die einfachste aller krummlinigen Figuren, den Kreis, in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Über die Quadraturen des Hippokrates berichtete im 6. Jh. u. Z. der griechische Gelehrte Simplicios. Er konnte dabei auf die zu seiner Zeit noch vorhandene, aber heute verschollene "Geschichte der Geometrie" zurückgreifen, die im 4. Jh. v. u. Z. Eudemos von Rhodos, ein Schüler des Aristoteles (384-322 v. u. Z.), verfasst hatte.

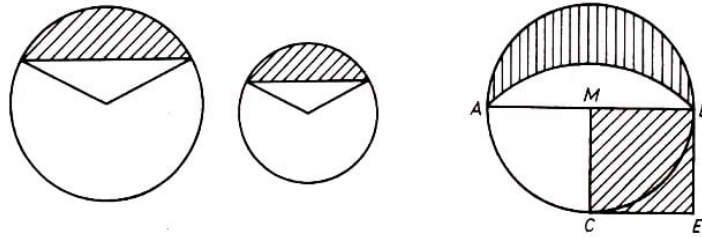


Abb. 8.1, 8.2

Als Ausgangspunkt, so berichtete Eudemos, habe Hippokrates den Satz benutzt, dass ähnliche Segmente (Segmente, die zu gleichen Winkeln gehören; Abb. 8.1) zweier verschiedener Kreise sich wie die Quadrate über ihren Sehnen verhalten.

Hippokrates konstruierte auf folgende Weise ein Möndchen, ein von zwei Kreisbögen begrenztes Flächenstück: Er halbierte einen Kreis durch einen Durchmesser  $AB$ , schlug um die Mitte  $C$  des unteren Halbkreises als Mittelpunkt den Kreis, der durch  $A$  und  $B$  geht.

Er bewies nun, indem er sich auf den Satz über ähnliche Segmente stützte, dass das konstruierte Möndchen (in Abb. 8.2 schraffiert) den gleichen Flächeninhalt hat wie das Quadrat über dem Radius ( $MB$ ) des Kreises. (Wie?)

Hippokrates gelang es übrigens, weitere Möndchen zu konstruieren, die Ähnliches leisten wie das angegebene. Aus diesen Quadraturen von durch Kreislinien begrenzten Figuren schloss er wahrscheinlich, dass sich durch weitere Bemühungen mit ähnlichen Methoden schließlich auch der Kreis müsse quadrieren lassen.

"Denn was für ein krummliniges Flächenstück gelungen war, nun für das denkbar einfachste krummlinige Flächenstück, den Kreis zu leisten, war gewiss eine verlockende Aufgabe, die durch zwei Jahrtausende viele angezogen hat, und auch heute, wo ihre Unlösbarkeit bewiesen ist, noch viele Nichtmathematiker anzieht, die nicht verstanden haben, worum es sich handelt." (1)

Quellen: Toeplitz 1934, Toeplitz 1949. Zitat: (1) Toeplitz 1949, S. 8.

## 9 Die Verdoppelung des Quadrats

"Niemand trete ein, der keine Kenntnis in der Geometrie hat." (1)

Dieser Ausspruch soll, wie eine Anekdote erzählt, am Eingang der Akademie Platons zu lesen gewesen sein. Auf einer Reise nach Unteritalien hatte der griechische Philosoph Platon (427-347 v. u. Z.) nachhaltige Berührung mit dem Denken der Pythagoreer gewonnen. Nach dem Vorbild des pythagoreischen Bundes begründete er zwischen 388 und 385 v.u.Z. einen Kultverein zur Verehrung der Musen und zur gemeinsamen Forschung und Lehre.

Im Hain des Heros Ajademos, nordwestlich vor der Stadt Athen, unter schattigen Bäumen gelegen, befanden sich das Museion (ursprünglich nur Stätte zur Verehrung der Musen, nun gleichzeitig wissenschaftliches Forschungsinstitut), das Akademiegymnasion und Wohnhäuser der Gelehrten. An dieser geweihten Stätte traf man sich, um Vorlesungen zu hören, an Diskussionen teilzunehmen, aber auch zu gemeinsamen Mahlzeiten

und Festen.

Man beschäftigte sich mit der Arithmetik, der Geometrie, der Astronomie und der Geographie, aber auch mit der Einteilung und der Systematik der Pflanzen, der Tiere, der menschlichen Betätigungen, der sittlichen Begriffe.

Unterricht hat es sicher in den mathematischen Fächern, insbesondere der Geometrie gegeben. Denn nach Platons Ansicht wäre doch "für die bessere Erfassung aller übrigen Lehrfächer derjenige, der sich mit der Geometrie vertraut gemacht hat, unendlich im Vorteil vor dem, der es nicht getan hat" (2).

Ein "lebendiges Bild des geometrischen Elementarunterrichts der Zeit" (3) wird uns in der folgenden Szene aus Platons Schrift "Menon" vermittelt.

(Der Philosoph Sokrates - als Geometrielehrer - leitet den unwissenden Sklaven - als Schüler - an, von sich aus zu den richtigen Ergebnissen zu kommen. Durch Sokrates brachte Platon hier seine Ansicht zum Ausdruck, dass die Erkenntnis und das Lernen nichts anderes wären als eine Wiedererinnerung der "unsterblichen Seele". Der Sklave hätte sein - insbesondere mathematisches - Wissen bereits vor der Geburt besessen.

Durch die Methode des geeigneten Fragens und Antwortens gelangt er wieder zum Verständnis der (geometrischen) Wahrheit.)

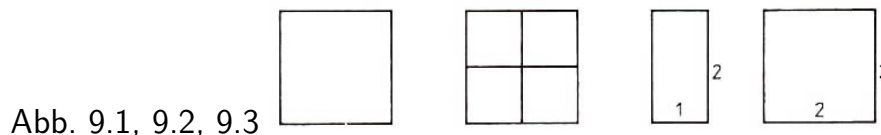
"Sokrates (Zum Sklaven). Sage, mein Bursche, siehst du dieser viereckigen Fläche [Abb. 9.1] an, dass sie ein Viereck ist?

Sklave. Ja.

Sokrates. Es ist doch eine viereckige Figur mit lauter gleichen Seiten - diesen da -, vieren an der Zahl.

Sklave. Jawohl.

Sokrates. Sind nicht auch diese durch die Mitte (den Seiten parallel) gezogenen Linien gleich? [Abb. 9.2]



Sklave. Ja.

Sokrates. Eine solche Figur könnte man sich doch auch größer und kleiner denken?

Sklave. Gewiss.

Sokrates. Wenn nun diese Seite zwei Fuß betrüge und auch diese zwei Fuß, wieviel [Quadrat-]Fuß betrüge das Ganze? Mache dir dies aber so klar: Wenn die Strecke auf dieser Seite zwei Fuß betrüge, auf dieser aber nur einen Fuß [Abb. 9.3], würde nicht dann die Figur einmal zwei [Quadrat-]Fuß enthalten?

Sklave. Ja.

Sokrates. Da es aber auch auf dieser Seite zwei Fuß sind, kommen da nicht zwei mal zwei [Quadrat-]Fuß heraus? [Abb. 9.3]

Sklave. Das ist der Fall.

Sokrates. Die Figur enthält also zwei mal zwei [Quadrat-]Fuß?

Sklave. Ja.

Sokrates. Wieviel macht aber zwei mal zwei [Quadrat-]Fuß aus? Rechne es aus und sag es mir.

Sklave. Vier, mein Sokrates.

Sokrates. Ließe sich nun nicht ein zweites, doppelt so großes Viereck herstellen, und zwar von der gleichen Art, mit lauter gleichen Seiten wie dieses?

Sklave. Ja.

Sokrates. Wieviel [Quadrat-]Fuß wird es also enthalten?

Sklave. Acht.

Sokrates. Wohlan denn, versuche mir zu sagen, wie lang jede Seite desselben sein wird. Die Seite unseres Vierecks hier ist zwei Fuß lang; wie lang wird nun aber die Seite des doppelten sein?

Sklave. Offenbar, mein Sokrates, doppelt so lang. [...]

Sokrates. [...] Die doppelte Seite soll deiner Behauptung zufolge das doppelte Viereck ergeben? Ich meine das aber nicht so, dass es in dieser Richtung lang, in jener dagegen kurz sein soll [Abb. 9.4], sondern es soll allseitig gleich sein wie dieses Viereck hier [Abb. 9.1], aber doppelt so groß, nämlich acht[quadrat-]füßig. Nun sieh zu, ob du noch immer der Meinung bist, dass die doppelte Seite dies Viereck ergeben werde.



Sklave. Ich bleibe dabei.

Sokrates. Erhält nun nicht diese Seite die doppelte Länge, wenn wir ihr eine gleich große Strecke von diesem Punkte aus anfügen? [Abb. 9.5]

Sklave. Gewiss.

Sokrates. Diese (verdoppelte) Strecke also, behauptest du, soll das acht[quadrat-]füßige Viereck ergeben, wenn man vier gleich große Seiten bildet?

Sklave. Ja.

Sokrates. Lass uns also auf ihr ein Viereck mit lauter gleichen Seiten konstruieren. Dann muss doch wohl dies hier das Viereck sein, welches du für ein acht- [quadrat-]füßiges aus gibst? [Abb. 9.6]

Sklave. Allerdings.

Sokrates. Sind in ihm nicht diese vier Quadrate enthalten [Abb. 9.7], deren jedes diesem vier[quadrat-]füßigen gleich ist [Abb. 9.1]?

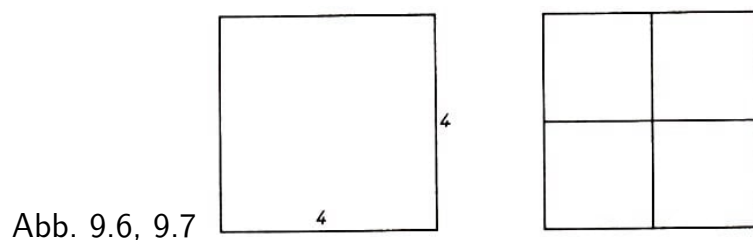
Sklave. Ja.

Sokrates. Wie groß also muss es sein? Nicht viermal so groß?

Sklave. Ohne Zweifel.

Sokrates. Was nun viermal so groß ist, ist denn das das doppelte?

Sklave. Nein, beim Zeus.



Sokrates. Sondern das Wievielfache?

Sklave. Das Vierfache.

Sokrates. Die doppelte Seitenlinie, mein Bursche, ergibt also nicht das doppelte, sondern das vierfache Quadrat.

Sklave. Du hast recht.

Sokrates. Denn vier mal vier ist sechzehn. Nicht wahr?

Sklave. Ja.

Sokrates. Welche Linie aber ergibt das acht[quadrat-]füßige? Diese ergibt doch das Vierfache?

Sklave. Ja.

Sokrates. Die Hälfte hier aber von ihr ergibt das vier[quadrat-]füßige hier?

Sklave. Ja.

Sokrates. Gut. Ist das acht[quadrat-]füßige nicht das doppelte von diesem da, von dem da aber die Hälfte?

Sklave. Ja.

Sokrates. Muss also die Seite desselben nicht größer sein als diese, dagegen kleiner als diese da? Oder nicht?

Sklave. Meiner Meinung nach, ja.

Sokrates. Schön; denn nichts anderes als deine Meinung sollst du in deiner Antwort zum Ausdruck bringen. Und so sage mir: War diese nicht zwei Fuß lang, diese da aber vier Fuß?

Sklave. Ja.

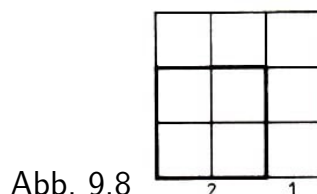
Sokrates. Es muss also doch die Seite des acht[quadrat-]füßigen Quadrats größer sein als diese zweifüßige hier, kleiner aber als die vierfüßige?

Sklave. Notwendig.

Sokrates. Versuche also zu sagen, wie lang sie nach deiner Meinung sein muss.

Sklave. Drei Fuß lang.

Sokrates. Wenn sie also drei Fuß lang sein soll, so müssen wir doch die Hälfte von dieser anfügen, um sie dreifüßig zu machen? Denn diese Seite beträgt zwei, diese da einen Fuß. Und ebenso von dieser Seite hier. Dies hier sind zwei, dies ein Fuß. Und so ergibt sich denn dies von dir gemeinte Viereck. [Abb. 9.8]



Sklave. Ja.

Sokrates. Wenn es nun auf dieser Seite drei Fuß lang ist und auf dieser auch, so muss die ganze Fläche doch dreimal drei [Quadrat-]Fuß groß sein?

Sklave. Offenbar.

Sokrates. Drei mal drei macht aber wieviel Fuß?

Sklave. Neun.

Sokrates. Das doppelte aber musste wieviel Fuß sein?

Sklave. Acht.

Sokrates. Also auch die dreifüßige Seite ergibt noch nicht das acht[quadrat-]-füßige Quadrat.

Sklave. Offenbar noch nicht.

Sokrates. Aber wie groß muss sie denn sein? Versuche es uns genau anzugeben; und wenn du es nicht in einer Zahl ausdrücken willst (4), so zeige uns in der Figur die betreffende Linie.

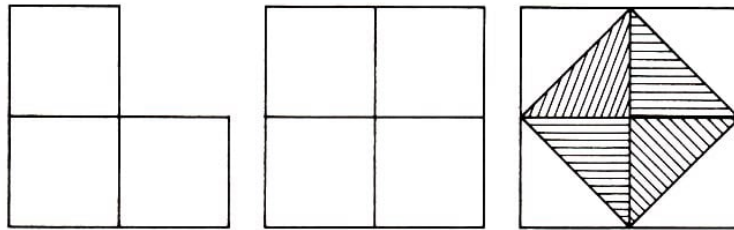


Abb. 9.9, 9.10, 9.11

Sklave. Aber beim Zeus, mein Sokrates, ich weiß es nicht. [...]

Sokrates. [...] So sage [...] mir denn: Ist dies nicht unser vier[quadrat-]-füßiges Quadrat? Du verstehst doch?

Sklave. Ja.

Sokrates. Wir können ihm doch hier ein zweites gleiches anfügen.

Sklave. Ja.

Sokrates. Und an sie beide wieder hier dieses gleiche dritte? [Abb. 9.9]

Sklave. Ja.

Sokrates. Und endlich können wir noch zur Vervollständigung in dem (entstandenen) Winkel dieses da hinzufügen?

Sklave. Gewiss.

Sokrates. So wären das also nun vier gleiche Quadrate? [Abb. 9.10]

Sklave. Ja.

Sokrates. Wieviel mal so groß ist nun also dies Ganze als das ursprüngliche hier?

Sklave. Viermal so groß.

Sokrates. Es sollte aber nur doppelt so groß sein; oder erinnerst du dich nicht?

Sklave. Ja, gewiss.

Sokrates. Teilt nun nicht eine Linie von dieser Art, von Winkel zu Winkel, jedes dieser Quadrate in zwei gleiche Teile? [Abb. 9.11]

Sklave. Ja.

Sokrates. So entstehen doch vier gleiche Linien, die dieses Quadrat hier einschließen? [Abb. 9.11: gestricheltes Quadrat.]

Sklave. So ist es.

Sokrates. Überlege also: Wie groß ist dieses Quadrat?

Sklave. Ich kann nicht darauf kommen.

Sokrates. Sind dies nicht vier Quadrate und hat nicht jede Linie von jedem die Hälfte innen abgeschnitten? Oder nicht?

Sklave. Ja.

Sokrates. Wie viele solcher Hälften (Dreiecke) sind nun in diesem Quadrat enthalten?

Sklave. Vier.

Sokrates. Wie viele aber in diesem da?

Sklave. Zwei.



Sokrates. Die vier aber sind im Verhältnis zu den zwei was?

Sklave. Das doppelte.

Sokrates. Wieviele [Quadrat-]Fuß groß ist nun dieses Quadrat da?

Sklave. Acht [Quadrat-]Fuß.

Sokrates. Mit welcher Seite?

Sklave. Mit dieser.

Sokrates. Mit derjenigen, die von einem Winkel des vierfüßigen Quadrates zu dem anderen gezogen ist?

Sklave. Ja.

Sokrates. Der Name aber für diese Linie ist bei den Gelehrten "Diagonale". Ist dies aber der Fall, so wird, deiner Behauptung zufolge, du Sklave des Menon, die Diagonale die Seite des doppelten Quadrates bilden. Sklave. Ohne Zweifel, Sokrates." (5)

Wie verdoppelt man die Fläche eines Quadrats (in Quadratform), dessen Seite 2 Fuß lang ist? - Das ist das im Dialog zwischen Sokrates und dem Sklaven diskutierte Problem.

Mit anderen Worten: Wie lang wird die Seite des Quadrats - als Zahl ausgedrückt -, dessen Fläche das Doppelte der Fläche des gegebenen Quadrats mit 2 Fuß langer Seite darstellt?

Es wird von Sokrates angedeutet, dass sich die gesuchte Seitenlänge wohl nicht als eine Zahl angeben lässt: "Wenn du es nicht in einer Zahl ausdrücken willst, so zeige uns in der Figur die betreffende Linie." (4)

Der Zahlbegriff umfasste in jener Zeit nur die natürlichen Zahlen. Die "betreffende Linie", nämlich die Diagonale des gegebenen Quadrats, erweist sich im Verhältnis zu dessen Seite der Länge nach als unmessbar.

Die Länge der Quadratdiagonale lässt sich nicht als eine Zahl angeben, wenn die Länge der Seite des Quadrats als eine Zahl gegeben ist. ("Zahl" bedeute hier, wie im folgenden, stets "natürliche Zahl".)

Geometrisch ist die Aufgabe der Quadratverdoppelung lösbar. Als Seite des gesuchten (doppelten) Quadrats dient - wie Sokrates mit seiner Zeichnung zeigt - die Diagonale des gegebenen Quadrats. Die Aufgabe erweist sich jedoch als arithmetisch unlösbar. Ist nämlich  $a$  eine Zahl (die Seitenlänge des gegebenen Quadrats), so gibt es keine Zahl  $x$  mit  $x^2 = 2a^2$ . Warum?

Da  $x^2 = 2a^2$  gleichbedeutend mit der Proportion  $a : x = x : 2a$  ist, so heißt dies: Zwischen einer Zahl ( $a$ ) mit ihrem Doppelten ( $2a$ ) gibt es keine mittlere Proportionale.

Quellen: Jürss 1982, Szabo 1958, Szabo 1969a, Szabo 1969.

Zitate: (1) Jürss 1982, S. 258; (2) Platon 1978, S. 319; (3) Becker 1964, S. 109; (4) Szabo 1969b, S. 122; (5) Platon 1985, S. 23-29.

## 10 Die mittlere Proportionale

Die Frage nach der mittleren Proportionale  $m$  zwischen zwei gegebenen Zahlen oder Strecken,  $a$ ,  $b$ ,

$$a : m = m : b$$

behandelte der griechische Gelehrte Euklid (4. Jh. v. u. Z.) in seinem Hauptwerk "Elemente" an verschiedenen Stellen.

Über Euklids Leben ist wenig bekannt. Der neuplatonische Philosoph Proklos Diadochos (5. Jh. u. Z.), unter dessen Leitung die von Platon gegründete Akademie in Athen zur letzten Blüte kam, schrieb über Euklid:

"Er lebte zur Zeit des ersten Ptolemaios [dessen Regierungszeit von 323 bis 285 v. u. Z. war]. Denn Archimedes, der nach dem ersten Ptolemaios lebte, erwähnt Euklid. Man erzählte, dass Ptolemaios ihn einmal gefragt habe, ob es nicht für die Geometrie einen kürzeren Weg gebe als die Lehre der "Elemente". Er aber antwortete, es gäbe keinen besonderen Weg zur Geometrie für Könige." (1)

Der griechische Philosoph und Schriftsteller Ioannes Stobaios (5. Jh. u. Z.) erzählte die folgende Anekdote:

Ein reicher Jugendlicher suchte einmal Euklid auf, um bei ihm Geometrie zu studieren. Nachdem er den ersten geometrischen Lehrsatz gelehrt hatte, fragte er Euklid, was er mit seinen geometrischen Kenntnissen verdienen könne, worauf Euklid zu einem Sklaven sagte: "Gib ihm drei Groschen, damit er etwas am Erlernen des Satzes verdienen kann!" (2)

In den 13 Kapiteln (Bücher I-VI über Planimetrie, Bücher VI-IX über elementare Zahlentheorie, Buch X über "irrationale Zahlen", Bücher XI-XIII über Stereometrie) der "Elemente" fasste Euklid die Grundlagen der Mathematik seiner Zeit in einer meisterhaften Darstellung zusammen.

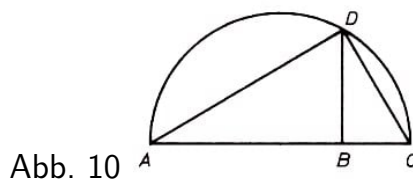


Abb. 10

Das Problem der mittleren Proportionale zwischen natürlichen Zahlen legte Euklid im Buch VIII dar. Dort (VIII, 18 und 20) wird gezeigt, dass es zwischen zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  dann und nur dann eine mittlere Proportionale  $m$  gibt, also eine natürliche Zahl  $m$  mit  $a : m = m : b$ , wenn sich  $a$  und  $b$  wie folgt darstellen lassen:  $a = cd$ ,  $b = ef$ , wobei  $c : e = d : f$  ist. (a) Warum?)

Wird also diese Bedingung nicht erfüllt (beispielsweise für ein  $a$  und  $b = 2a$ , b) warum?), so findet man keine mittlere Proportionale zwischen den gegebenen natürlichen Zahlen! Im VI. Buch (VI, 13) der "Elemente" zeigte Euklid, dass es zwischen zwei Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  stets die mittlere Proportionale gibt, also eine Strecke  $\overline{BD}$  mit  $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BD} : \overline{BC}$ .

Die Konstruktion ist Abb. 10 zu entnehmen:  $\overline{AB}, \overline{BC}$  seien die zwei gegebenen Strecken. Das Lot  $\overline{BD}$  aus dem rechten Winkel bei  $D$  ist die mittlere Proportionale ( $c$  warum).

Quellen: Euklid 1984, Stamatis 1963, Szabo 1969. Zitate: (1) Stamatis 1971, S. 239; (2) Stamatis 1963, S. 78.

## 11 Die Quadratur des Rechtecks

Das Problem der mittleren Proportionale  $m$  zwischen gegebenen Strecken  $a, b$  ( $a : m = m : b, ab = m^2$ ) ist ersichtlich äquivalent mit der folgenden Aufgabe:

Gegeben ist das Rechteck  $ab$ , gesucht ist das dazu flächengleiche Quadrat  $m^2$ . Nach dem Satz von Pythagoras lässt sich ein Quadrat  $m^2$  stets als Differenz zweier Quadrate erhalten. Man nehme ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete  $m$ ; die andere Kathete sei  $k$  und die Hypotenuse  $h$  (Abb. 11.1). Dann gilt

$$m^2 = h^2 - k^2$$

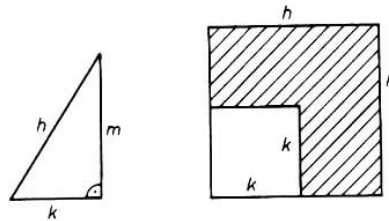


Abb. 11.1, 11.2

Lässt sich ein Rechteck  $ab$  in ein flächengleiches Quadrat  $m^2$  verwandeln, so muss sich notwendig auch das Rechteck  $ab$  als Differenz zweier Quadrate auffassen lassen. Subtrahiert man von einem größeren Quadrat  $h^2$  ein kleineres  $k^2$ , so bleibt ein Gnomon (eine dem Winkelhaken vergleichbare Fläche) übrig (Abb. 11.2), der leicht in das Rechteck

$$(h + k)(h - k) \quad (= h^2 - k^2)$$

verwandelt werden kann. Soll  $h + k = a, h - k = b$  werden, so muss

$$h = \frac{a + b}{2}, \quad k = \frac{a - b}{2}$$

sein. Man kann tatsächlich das Rechteck  $ab$  als Differenz der beiden Quadrate  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$  auffassen:

$$ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

Hat man ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $h = \frac{a+b}{2}$  und einer Kathete  $k = \frac{a-b}{2}$ , dann gilt für die andere Kathete  $m$  also  $m^2 = ab$ .

Wie ist dieses Dreieck aus den gegebenen Seiten  $a, b$  des Rechtecks zu konstruieren?

Die Konstruktion befindet sich im Buch II (II, 14) der "Elemente" Euklids. Auf den Zusammenhang dieses "tetragonismos" (das war das griechische Fachwort für das Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat) mit dem Problem der mittleren Proportionalen zu zwei beliebigen Strecken  $a, b$  wird an der Stelle (II, 14) der "Elemente" aber nicht eingegangen.

Johann Ludvig Heiberg, Philologe in Kopenhagen, dessen Edition der "Elemente" Euklids (zwischen 1883 und 1885) noch immer die maßgebende Ausgabe ist, vertrat die Ansicht, dass das Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat ursprünglich (etwa zur Zeit des Aristoteles) auf die im Buch VI (VI, 13) der "Elemente" beschriebene Weise (siehe Aufgabe 10,c) gelöst wurde.

Euklid behandelte die dabei verwendete, für Anfänger doch recht komplizierte Proportionentheorie aus didaktischen Gründen erst im Buch V (und im Anschluss daran die Ähnlichkeitslehre). So musste der Tetragonismos anders begründet werden, und dabei entstand die in II, 14 gegebene Lösung.

Für den ungarischen Philologen und Mathematikhistoriker Arpad Szabo ist das jedoch recht unwahrscheinlich. Das Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat wäre vielmehr schon von den Pythagoreern wie in II, 14 ausgeführt worden.

Quellen: Euklid 1984, Szabo 1969a, Szabo 1969 b, Szabo 1974.

## 12 Der Goldene Schnitt

Eine Umwandlung eines bestimmten Rechtecks in ein Quadrat behandelte Euklid auch in der berühmten Aufgabe ("Elemente", Buch II, 11):

"Eine Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist."

Die Strecke  $\overline{AB}$  ist in  $H$  so zu teilen (Abb. 12.1), dass  $\overline{AB} \cdot \overline{HB} = \overline{AH}^2$  ist. Setzt man  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AH} = x$ , dann ist  $\overline{HB} = a - x$ , und es muss  $a(a - x) = x^2$  sein.

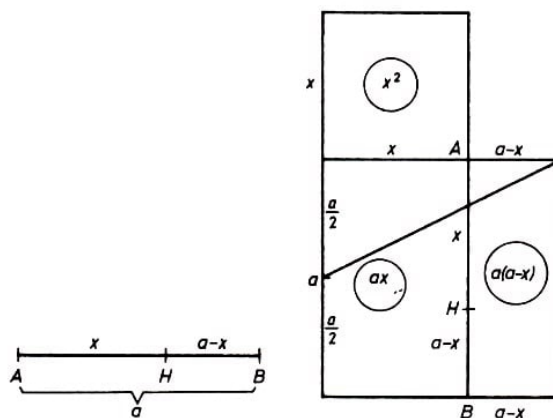


Abb. 12.1, 12.2

Das Rechteck  $a(a - x)$  wird durch das Rechteck  $ax$  zu dem Quadrat  $a^2$  ergänzt (Abb. 12.2):

$$a(a - x) + ax = a^2$$

Ist  $a(a - x) = x^2$  erfüllt, so muss das Rechteck  $x^2 + ax = (a + x)x$  also gleich dem Quadrat  $a^2$  sein:

$$(a + x)x = a^2$$

Andererseits lässt sich dieses Rechteck  $(a + x)x$  zu einem Quadrat ergänzen:<sup>1</sup>

$$(a + x)x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

Dann muss auch

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

sein. Nach dem Satz von Pythagoras ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $\frac{a}{2}$  zu konstruieren. Ist die Hypotenuse dieses Dreiecks  $h$ , so ergibt sich die gesuchte Teilstrecke  $x = h - \frac{a}{2}$ .<sup>2</sup>

Wie ist also die Aufgabe Euklids zu lösen?

Durch seinen Satz 16 des Buches VI ("Aus  $a : c = e : f$  folgt  $af = ce$  und umgekehrt; wobei  $a, c, e, f$  Strecken sind.") wurde es Euklid möglich, für  $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB}$  auch

$$\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{HB}$$

zu schreiben. Es handelt sich bei der Bestimmung von  $\overline{AH}$  ( $= x$ ) also um einen Spezialfall der Konstruktion der mittleren Proportionale (nämlich der mittleren Proportionale zwischen einer gegebenen Strecke und einer anderen, deren Größe erst nach Lösung der Aufgabe bekannt sein wird).

Euklid verwendete folgende Bezeichnung (Definition 3 im Buch VI):

"Eine Strecke heißt nach äußerem und mittlerem Verhältnis geteilt, wenn sich, wie die ganze Strecke zum größeren Abschnitt, so der größere Abschnitt zum kleineren verhält." (Der größere Abschnitt soll mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt sein.)

Für diese Teilung einer Strecke sind auch verschiedene andere Fachausdrücke üblich: "Divina proportio" (göttliches Verhältnis; Ende des 15. Jh., Luca Pacioli), "sectio aurea" (goldener Schnitt; Anfang des 16. Jh., Leonardo da Vinci), proportionale Teilung (Johannes Kepler), stetige Proportion, stetige Teilung (18. Jh.).

Die Bezeichnung "Goldener Schnitt" wurde im 19. Jh. allgemein gebräuchlich.<sup>3</sup>

Quellen: Euklid 1984, Szabo 1974.

<sup>1</sup>Dieses ist in den "Elementen" (Buch II,6) so formuliert: Eine Strecke  $\overline{AB}$  ( $= a$ ) halbiere man im Punkt  $C$  und setze ihr eine Strecke  $\overline{BD}$  ( $= x$ ) gerade an. Dann gilt  $\overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$ , also

$$(a + x)x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

<sup>2</sup>Ersichtlich ist  $h^2 = \frac{5}{4}a^2$ , also  $h = \frac{\sqrt{5}}{2}a$  und  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ .

<sup>3</sup>Die Aufgabe, eine gegebene Strecke nach dem Goldenen Schnitt zu teilen, wird auch im Buch VI,30 der "Elemente" behandelt. Hier wird schon die Aufgabe anders formuliert als in II, 11; die Lösung erfolgt unter Benutzung von vorher bewiesenen Sätzen über Proportionen, während sie in II, 11 ohne Proportionentheorie geschieht.

## 13 Dodekaeder und Pentagramm

Ein von Ebenen begrenzter Körper heißt Polyeder. Die Seitenflächen des Polyeders sind Polygone (Vielecke). Jede Seite eines Polygons gehört zu zwei Seitenflächen. Diese Seiten werden Kanten des Polyeders genannt. Jeder Eckpunkt eines Polygons gehört zu wenigstens drei Seitenflächen. Diese Eckpunkte heißen Ecken des Polyeders.

Ein Polyeder heißt konvex, wenn es vollständig auf einer Seite der Ebene jeder seiner Seitenflächen liegt. Ist  $e$  die Anzahl der Ecken,  $f$  die Anzahl der Seitenflächen und  $k$  die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so gilt stets

$$e + f - k = 2 \quad (\text{Eulerscher Polyedersatz})$$

Sind die Seitenflächen eines konvexen Polyeders untereinander kongruente regelmäßige Vielecke derselben Seitenzahl und haben sämtliche Ecken dieselbe Kantenzahl, so heißt das konvexe Polyeder regelmäßig oder regulär.

Euklid bewies im XII. Buch der "Elemente", dass es nur fünf reguläre Polyeder gibt: das Tetraeder mit vier gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen (Pyramide mit dreieckiger Grundfläche), das Hexaeder mit sechs Quadraten als Seitenflächen (Würfel), das Dodekaeder mit zwölf regelmäßigen Fünfecken als Seitenflächen, das Oktaeder mit acht gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen (Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche) und das Ikosaeder mit zwanzig gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen.

Oft werden diese Polyeder auch Platonische Körper genannt. In Platons Dialog "Timaios" spielen die regulären Polyeder nämlich eine wichtige Rolle. Den vier Elementen - Erde, Luft, Feuer und Wasser -, aus denen nach antiker Vorstellung alles innerhalb der Mondsphäre Befindliche zusammengesetzt sein sollte, wurden besondere Gestalten gegeben:

Der Würfel wurde der Erde zugeordnet, das Oktaeder der Luft, die Pyramide (Tetraeder) dem Feuer, das Ikosaeder dem Wasser. Der Weltschöpfer hätte die ganze Welt in Form eines Dodekaeders angelegt.

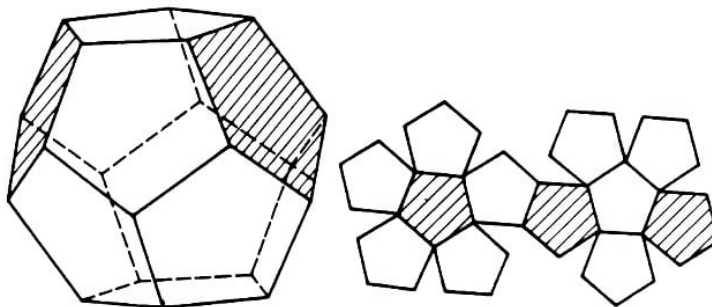


Abb. 13.1, 13.2

Das Dodekaeder (Abb. 13.1, Netz: Abb. 13.2), von den alten Griechen auch "die Kugel aus den 12 Fünfecken" genannt, muss schon bei den Pythagoreern eine besondere Rolle gespielt haben. "Wenn die Kenntnis vom Dodekaeder durch die Erfahrung zuerst erworben wurde, so konnte diese Kenntnis nirgends anders als gerade in Oberitalien zuerst auftauchen." (1)

Nur auf der vor der Toscana gelegenen Mittelmeerinsel Elba und in den nach Piemont ausmündenden Tälern der Westalpen gibt es den Dodekaedern gleichende Kristallformen des Pyrit (Schwefelkies), eines Eisenerzes. "Nichts natürlicher, als dass man dem so seltsam regelmäßig geformten Minerale [...] eine Art besonderer Verehrung zollte, oder ihm eine besondere symbolische Bedeutung beilegte." (1)

Historische Untersuchungen, angeregt durch ein in Oberitalien (bei Padua) gefundenes, aus Stein (Steatit, Speckstein) geschnittenes, aus vorgeschichtlicher Zeit stammendes Dodekaedermodell und durch weitere im ehemaligen Gallien gefundene aus Bronze gegossene Dodekaeder, ließen den Mathematiker Ferdinand Lindemann zu der Vermutung kommen, dass sich der mit dem Dodekaeder verbundene Kult bis zu den Galliern ausgebreitet habe und über die Gallier auch den Pythagoreern bekannt geworden wäre, die dann das Dodekaeder und das regelmäßige Fünfeck (als Seitenfläche des Dodekaeders) geometrisch untersuchten.

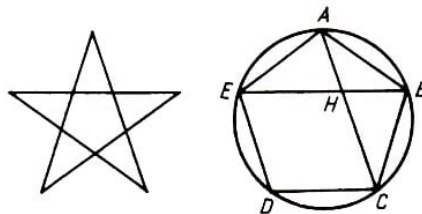


Abb. 13.3, 13.4

Zeichnet man die Diagonale des regelmäßigen Fünfecks, so bekommt man ein Pentagramm (Abb. 13.3, griechisch "Fünfstern", regelmäßiges Sternfünfeck), das das Ordenszeichen der Pythagoreer wurde.

Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks schneiden einander stetig (nach dem Goldenen Schnitt, vgl. Aufgabe 12 und Abb. 13.4), und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich (Euklid "Elemente", XIII, 8). Warum?

"Darum glaube ich", so formulierte der Mathematikhistoriker Arpad Szabo, "dass wohl eben ihr heiliges Symbol, das Pentagramm, die alten Pythagoreer zur Untersuchung der stetigen Teilung veranlasst haben mag." (2)

Quellen: Euklid 1984, Lindemann 1897, Neuenschwander 1974. Zitate: (1) Lindemann 1897, S. 726; (2) Szabo 1974, S. 311.

## 14 Goldenes Dreieck und regelmäßiges Fünfeck

Den Dodekaedern gleichende Kristallformen des Pyrit haben regelmäßige Fünfecke als Seitenflächen (vgl. Aufgabe 13). Knotet man einen schmalen rechteckigen Papierstreifen und drückt den Knoten behutsam eben, so entsteht ein regelmäßiges Fünfeck (Abb. 14.1).

Will man ein regelmäßiges Fünfeck zeichnen, dessen Seitenlänge  $a$  ist, so markiere man eine Strecke der Länge  $a$  auf einem Lineal. Man zeichne dann zuerst  $\overline{AB} = a$  (Abb. 14.2).

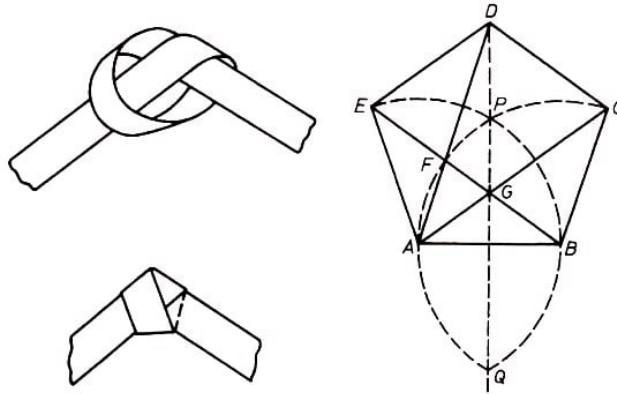


Abb. 14.1, 14.2

Mittels der Kreisbögen um  $A$  und  $B$  mit dem Radius  $a$  erhält man die Mittelsenkrechte  $PQ$  zu  $AB$ . Mit dem Lineal, auf dem die Strecke  $a$  markiert ist, kann man die Strecke  $a$  zwischen der Mittelsenkrechten und dem Kreis um  $B$  auf zwei Arten so "einschieben"<sup>4</sup> (es entstehen die Punkte  $C$  (auf dem Kreis um  $B$ ) und  $G$  (auf der Mittelsenkrechten) bzw. die Punkte  $D$  (auf der Mittelsenkrechten) und  $F$  (auf dem Kreis um  $B$ )), dass  $AGC$  bzw.  $AFD$  Geraden sind (wobei also  $\overline{FD} = \overline{GC} = a$  ist). Es sei  $E$  der Schnittpunkt der Geraden durch  $B, G, F$  mit dem Kreis um  $A$ . Die Punkte  $A, B, C, D, E$  bilden dann ein regelmäßiges Fünfeck.

Der Mathematikhistoriker Joseph Ehrenfried Hofmann schrieb:

"Diese Konstruktion könnte sich mit der Pythagoreischen decken, von der nur bekannt ist, dass sie durch Einschiebung ausgeführt wurde." (2)

Eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks ohne Einschiebelineal, nur mit Zirkel und Lineal, beschrieb Euklid ("Elemente" IV, 11). Ausgangspunkt ist dabei die folgende Erkenntnis: Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks teilen einander nach dem Goldenen Schnitt, und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich (siehe Aufgabe 13 mit Lösung).

Folglich ist im gleichschenkligen Dreieck  $CDA$  die Grundlinie  $\overline{CD}$  gleich dem größeren Abschnitt  $\overline{AK}$  des stetig geteilten Schenkels  $\overline{AD}$  (Abb. 14.3).

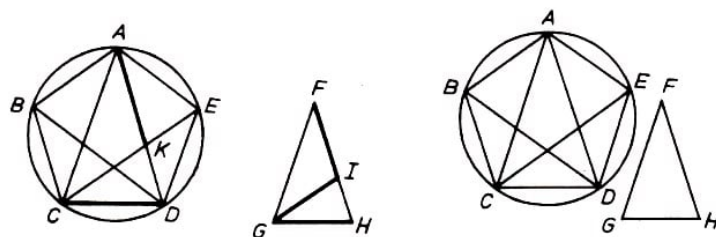


Abb. 14.3, 14.4, 14.5

Ein gleichschenkliges Dreieck  $GHI$  (Abb. 14.4), in dem die Grundlinie  $\overline{GH}$  gleich dem größeren Abschnitt  $\overline{FI}$  des nach Goldenem Schnitt geteilten Schenkels  $\overline{FH}$  ist, heiße Goldenes Dreieck.

In einem Goldenen Dreieck ist jeder der beiden Winkel an der Grundlinie doppelt so groß wie der Winkel an der Spitze (a) Warum? -

<sup>4</sup>"Fügt man das Einschiebelineal zu den schulgerechten Konstruktionsmitteln der ebenen Geometrie, nämlich Zirkel und Lineal, hinzu, so wird der Bereich der lösaren Aufgaben wesentlich erweitert." (1)



Die Basiswinkel bei  $G$  und  $H$  betragen also je  $72^\circ$  und der Winkel an der Spitze  $F$   $36^\circ$ .) Umgekehrt ist ein gleichschenkliges Dreieck, in dem jeder der beiden Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist wie der Winkel an der Spitze, ein Goldenes Dreieck. (b) Warum?)

Um nun einem Kreis ein regelmäßiges Fünfeck einzubeschreiben, geht Euklid wie folgt vor: Er zeichnet ein Goldenes Dreieck  $GHF$  und beschreibt dem gegebenen Kreis ein zu diesem Dreieck ähnliches (also winkelgleiches) Dreieck  $CDA$  ein. (c) Wie?)

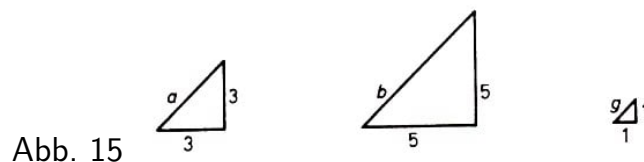
Nun (Abb. 14.5) halbiert er die beiden Winkel  $\alpha ACD$  und  $\alpha CDA$ . Die Winkelhalbierenden schneiden den Kreis in  $E$  und  $B$ . Dann bildet  $ABCDE$  ein regelmäßiges Fünfeck (d) Warum).

Quellen: Euklid 1984, Heller 1958, Hofmann 1926. Zitate: (1) Hofmann 1926, S. 433; (2) Hofmann 1926, S. 435.

## 15 Die Wechselwegnahme

Die Länge einer Strecke kann unterschiedliche Zahlenwerte haben, je nachdem, welche Längeneinheit gewählt wird. Um die Längen zweier Strecken zu vergleichen, wird man eine gemeinsame Längeneinheit wählen. Bei geeigneter Wahl dieser Längeneinheit kann man oft das Längenverhältnis mit natürlichen Zahlen ausdrücken.

Sind beispielsweise die Längen der Diagonalen  $a$ ,  $b$  der Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm bzw. 5 cm zu vergleichen (Abb. 15), so gilt  $a = 3g$ ,  $b = 5g$ , wenn  $g$  die Länge der Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 cm bezeichnet, also  $a : b = 3 : 5$ . Sind  $c$ ,  $d$  zwei Strecken der Längen 1680 cm und 1275 cm, so haben sie als größtes gemeinsames Maß 15 cm :  $1680 = 112 \cdot 15$ ,  $1275 = 85 \cdot 15$ ,  $c : d = 112 : 85$ .



Zwei Strecken  $a_1, a_2$  heißen kommensurabel, wenn es eine gemeinsame Teilstrecke  $e$  so gibt, dass  $a_1 = k_1 e$ ,  $a_2 = k_2 e$  ist mit natürlichen Zahlen  $k_1, k_2$ . ( $e$  heißt gemeinsames Maß von  $a_1, a_2$ .) Strecken, die nicht kommensurabel sind, heißen inkommensurabel.

Im zehnten Buch seiner "Elemente" gab Euklid ein Kommensurabilitätskriterium an und löste die Aufgabe, zu zwei gegebenen kommensurablen Strecken das größte gemeinsame Maß zu finden. Grundlage für beides ist der folgende Prozess der Wechselwegnahme (griechisch: anthypharesis):

Sind  $a_1$  und  $a_2$  zwei Strecken und ist  $a_2 < a_1$ , so bildet man die Differenzstrecke  $a_3 = a_1 - a_2$ . Es sind drei Fälle möglich:

Fall 1: Ist bereits  $a_3 = a_2$ , so ist  $a_2$  gemeinsames Maß für  $a_1, a_2$  ( $a_1 = 2a_2$ ).

Fall 2: Ist  $a_3 < a_2$ , so bildet man  $a_2 - a_3 = a_4$ .

Fall 3: Ist jedoch noch  $a_3 > a_2$ , so bildet man  $a_3 - a_2 = a_4$ .

Ist im zweiten Fall bereits  $a_4 = a_3$ , so ist  $a_3$  gemeinsames Maß für  $a_2, a_3$ , ( $a_2 = 2a_3$ ), also auch für  $a_1, a_2$  ( $a_1 = 3a_3, a_2 = 2a_3$ ). Ist  $a_4 < a_3$ , so bildet man  $a_3 - a_4 = a_5$ . Ist noch  $a_4 > a_3$ , so bildet man  $a_4 - a_3 = a_5$ .

Ist im dritten Fall bereits  $a_4 = a_2$ , so ist  $a_2$  gemeinsames Maß für  $a_1, a_2$  ( $a_1 = 3a_2$ ). Ist  $a_4 < a_2$ , so bildet man  $a_2 - a_4 = a_5$ . Ist noch  $a_4 > a_2$ , so bildet man  $a_4 - a_2 = a_5$ . Und so weiter!

Man nimmt abwechselnd immer die kleinere von der größeren Strecke weg.

Dieser Prozess kann nach endlich vielen Schritten dadurch abbrechen, dass man zwei gleiche Strecken erhält. Dann ist diese Strecke ein gemeinsames Maß für alle bei der Wechselwegnahme auftretenden Strecken, insbesondere für  $a_2, a_1$ . (Warum?)

Wenn der Prozess der Wechselwegnahme abbricht, sind die zwei Strecken  $a_2$  und  $a_1$  also kommensurabel, und umgekehrt (warum?).

Wendet man die Wechselwegnahme auf die Diagonale und die Seite eines regelmäßigen Fünfecks bzw. auf die Diagonale und die Seite eines Quadrats an (wie?), so erkennt man:

Die Diagonale und die Seite des regelmäßigen Fünfecks sind inkommensurabel.

Die Diagonale und die Seite des Quadrats sind inkommensurabel.

Quellen: Becker 1957, Fritz 1945

## 16 Heureka, ich hab's gefunden

Zu den bedeutendsten, originellsten Mathematikern des Altertums gehört Archimedes. Bei ihm "haben wir nicht nur das Aufarbeiten vorhandener Stoffe; sein Gegenstand ist immer etwas Neues, ein bestimmter Zuwachs zur Summe des Wissens" (so betonte der Mathematikhistoriker Thomas L. Heath), "und seine vollkommene Originalität muss jedem auffallen, der seine Werke mit Verständnis liest." (1)

Er bereicherte die wissenschaftlichen Gebiete Geometrie, Arithmetik, Mechanik, Hydrostatik und Astronomie mit neuen Erkenntnissen.

"Archimedes soll seine Freunde und Verwandten gebeten haben, auf seinem Grabmal eine Darstellung eines Zylinders mit einer eingeschriebenen Kugel anzubringen und das Verhältnis des Zylinders zur Kugel als Inschrift hinzuzufügen; wir können daraus schließen", so schrieb Heath, "dass er selbst die Entdeckung dieses Verhältnisses als seine größte Errungenschaft ansah." (2)

In einem seiner Werke bewies Archimedes die folgende Beziehung zwischen den Rauminhalten von Kegel, Kugel und Zylinder, sofern Kegel und Kugel dem Zylinder einbeschrieben sind (also die Höhe des Kegels bzw. des Zylinders gleich dem Kugeldurchmesser ist):

Volumen des Zylinders: Volumen der Kugel: Volumen des Kegels = 3:2:1.

Archimedes hatte in Alexandria, vermutlich bei Euklids Nachfolgern studiert. Danach wirkte er in seiner Vaterstadt Syrakus und verkehrte am Hofe des Königs Hieron II. und seines Sohnes Gelon.

Bei der Zerstörung der Stadt (212 v. u. Z.) durch römische Soldaten "starb Archimedes, wie er gelebt hatte, in mathematische Betrachtungen vertieft" (3).

Der Architekt Vitruvius, der etwa 200 Jahre später zur Zeit des Kaisers Augustus in Rom lebte, hat die folgende Anekdote über Archimedes überliefert.

Der König Hieron II. von Syrakus hatte einem seiner Goldschmiede einen Klumpen Gold übergeben. Der Handwerksmeister sollte einen Weihkranz aus reinem Gold herstellen. Als die Arbeit ausgeführt war, befürchtete der König jedoch, dass der Schmied im Innern des Kranzes einen Teil des Goldes durch Silber ersetzt habe. Er wandte sich an Archimedes und bat ihn, die Sache zu untersuchen, also festzustellen (ohne das Kunstwerk zu zerbrechen), ob Silber für den Kranz verwendet worden wäre.

Der Gelehrte konnte das Problem nicht sogleich lösen. Eines Tages bemerkte er beim Einsteigen in eine bis zum Rand mit Wasser gefüllte Wanne, dass wohl ebenso viel Wasser überläuft, wie sein Körper verdrängt.

Da kam ihm plötzlich der Gedanke, dass man die vom König gestellte Aufgabe lösen kann, indem man den Kranz in ein bis zum Rand mit Wasser gefülltes Gefäß taucht und die überlaufende Wassermenge bestimmt.

In der Freude über seine Entdeckung eilte Archimedes nackt aus dem Bade auf die Straße und rief: "Heureka, heureka!" (Ich hab's gefunden, ich hab's gefunden!)

Wie konnte Archimedes die Aufgabe lösen? Kann man das Gold- Silber-Mischungsverhältnis des Kranzes berechnen?

Quellen: Archimedes 1914, Cantor 1922. Zitate: (1) Archimedes 1914, S. 29; (2) ebenda, S. 4; (3) ebenda, S. 3.

## 17 Die Verdoppelung des Würfels

"Eratosthenes berichtet in der Schrift, die den Titel 'Platonikos' trägt, dass zufolge eines Orakelspruchs des Gottes an die Delier, des Inhalts: Sie sollten zur Befreiung von der Pest einen Altar von doppelter Größe des bereits bestehenden errichten, die Architekten in große Verlegenheit geraten seien, als sie forschten, wie man einen Körper verdoppeln müsse; und sie seien schließlich gegangen, um in dieser Sache Platon um Rat zu fragen." (1)

Dies schrieb der griechische Philosoph Theon von Smyrna.

Auf der kleinen griechischen Insel Delos befand sich ein würfelförmiger Altar des Apollon. Apollon, Sohn des höchsten griechischen Gottes Zeus, auf Delos geboren, Gott des Lichts, Gott der Weisheit, Gott der Künste, Gott der Heilkunst, tötete bei Delphi mit einem Pfeil den Drachen Python und richtete an jener Stelle sein Heiligtum ein. Seine dort von ihm inspirierte Priesterin, die Pythia, gab Weissagungen (Orakel).

Als sich die Delier um Abwendung einer Seuche an das Orakel in Delphi wandten, erhielten sie die Aufgabe, den Altar Apollons unter Beibehaltung seiner Form zu verdoppeln.

Hat der gegebene würfelförmige Altar die Seitenlänge  $a$ , so besteht das "Delische Problem" darin, die Seitenlänge  $x$  eines doppelt so großen Würfels zu finden:  $x^3 = 2a^3$ .

Die Geschichte, dass das Problem zur Zeit der Blüte der platonischen Akademie im Zusammenhang mit einem Orakelspruch an die Delier entstanden sein soll, entstammt nicht historischen Quellen, sondern ist eine Erfindung des Dichters Eratosthenes. Dieser war seit 246 v.u.Z. Leiter der Bibliothek des Museion, einer Forschungsstätte in Alexandria. Er dichtete nicht nur, sondern arbeitete vor allem als Astronom, Geograph, Mathematiker und Philosoph.

Jahrhunderte später gab Eutoklos einen Brief wieder, den angeblich Eratosthenes an den ägyptischen König Ptolemaios III. geschrieben haben soll. Auch darin wird die Geschichte von den Deliern erzählt, zuvor jedoch eine andere Version der Entstehungsgeschichte des Problems der Verdoppelung des Würfels berichtet:

"Es wird erzählt, einer der alten Tragödiendichter habe den Minos [die Sage von Minos, dem mächtigen, gerechten König über Kreta und die Inselwelt] auf die Bühne gebracht, wie er eben daran war, dem Glaukos das Grabmal aufrichten zu lassen.

Wie er aber erfahren hatte, dass das Grab nach allen drei Richtungen hundert Fuß messe, habe er gesagt:

'Zu klein hast du das Heiligtum des königlichen Grabes genannt; doppelt so groß soll es sein. Ohne die Schönheit zu verderben, verdopple schnell jede Seite des Grabes!'

Er schien sich aber geirrt zu haben. Durch Verdoppelung der Seiten wird die Fläche vervierfacht, der Körper aber verachtfacht. Er erkundigte sich aber bei den Geometern, mit welchem Verfahren man einen gegebenen Körper unter Beibehaltung seiner Form verdoppeln könne, und das Problem wurde die 'Verdoppelung des Würfels' genannt.

Einen Kubus zugrunde legend trachteten sie diesen zu verdoppeln. Wie sie nun lange hin und her überlegten, entdeckte als erster Hippokrates von Chios, dass, wenn zwei mittlere Proportionale in fortlaufender Proportion gefunden werden könnten, von denen die größte doppelt so groß ist wie die kleinste, dass dann der Würfel verdoppelt würde, so dass die Schwierigkeit selbst auf eine andere, nicht geringere übertragen würde." (2)

Ist auch diese Überlieferung nicht sicher historisch, so wird doch allgemein anerkannt, dass schon im 5. Jh. v. u. Z. Hippokrates von Chios das Problem der Würfelverdoppelung auf die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen  $x, y$  zwischen der einfachen ( $a$ ) und der doppelten Seite ( $2a$ ) des gegebenen Würfels zurückgeführt hat:

$$a : x = x : y = y : 2a$$

Sind  $x$  und  $y$  so gefunden, dass diese Proportionen gelten, so folgt

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \frac{x}{y} \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}$$

also  $x^3 = 2a^3$ ; der Kubus der ersten mittleren Proportionalen  $x$  wird dann der gesuchte Würfel sein.

Unproblematisch wäre die Aufgabe, einen achtmal so großen Würfel herzustellen. Die Seite  $t$  mit  $t^3 = 8a^3$  ist die erste von zwei mittleren Proportionalen  $t, u$  mit

$$a : t = t : u = u : 8a$$

Offenbar genügen  $t = 2a, u = 4a$  diesen Proportionen!

Der erste Mathematiker, der das Problem - unmittelbar an Hippokrates anknüpfend - erfolgreich behandelt hat, war der Pythagoreer Archytas von Tarent, ein Zeitgenosse Platons.

Im zweiten Teil des von Eutokios überlieferten pseudo-eratosthenischen Briefes heißt es:

"Wie sich nun diese [die Geometer um Platon in der Akademie] mit Eifer dem Problem hingaben, zwischen zwei gegebenen Größen zwei mittlere Proportionale zu finden, habe Archytas von Tarent das Problem durch Halbzylinder, Eudoxos aber durch [gewisse] Kurven gelöst.

Es traf sich aber für diese Lösungen, dass sie in beweisender Form verfasst waren, und dass sie nicht für den praktischen Gebrauch benutzt werden konnten außer in geringem Maße die Lösung des Menaichmos, aber auch diese nur mit Mühe." (2)

Im Brief wird nun von der folgenden (mechanischen) Lösung des Eratosthenes berichtet, die für den praktischen Gebrauch geeignet sein soll. Nach Eutokios behauptete Eratosthenes, ein einfaches, "Mesolab" genanntes Instrument erfunden zu haben, das er als bronzene Weihgabe im Tempel des Ptolemaios in Alexandria über einer in Stein gemeißelten Gebrauchsanweisung aufstellen ließ.

Das Instrument bestand aus drei rechteckigen kongruenten Plättchen  $AEFL$ ,  $L'F'GI$  und  $I'G'HM$  (Abb. 17.1) mit eingeritzten Diagonalen  $\overline{AF}$ ,  $\overline{LG}$  bzw.  $\overline{TH}$ , die sich in einem Rahmen  $NOPQ$  befinden.

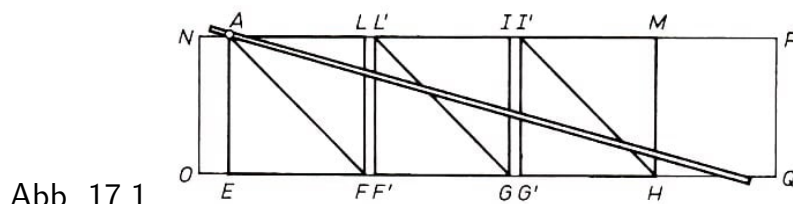


Abb. 17.1

Das erste Plättchen ist fest, die andern beiden sind parallel zu  $\overline{NP}$  und  $\overline{OQ}$  beweglich. Hinzu kommt ein um  $A$  drehbares Lineal.

Sind nun zwei ungleiche Strecken  $b, a$  gegeben und die beiden mittleren Proportionalen  $x, y$  mit  $b : y = y : x = x : a$  gesucht, so kann man wie folgt vorgehen.

Auf dem einen beweglichen Rechteckplättchen ( $I'G'HM$ ) werde  $\overline{DH}$  so abgetragen, dass  $\overline{AE} : \overline{DH} = b : a$  gilt. (Im Fall  $b = 2a$  ist  $\overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{HM}$ )

Nun verschiebt man die beiden beweglichen Plättchen so lange, bis die Punkte  $A, B$  (Schnittpunkt von  $\overline{LF}$  mit der Diagonalen  $\overline{LG}$ ),  $C$  (Schnittpunkt von  $\overline{IG}$  mit der

Diagonalen  $\overline{IH}$  und  $D$  auf eine Gerade zu liegen kommen, die durch das Lineal markiert wird

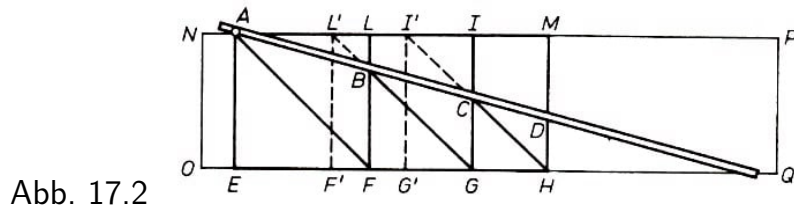


Abb. 17.2

(Abb. 17.2). Dann sind  $\overline{BF} = y$  und  $\overline{CG} = x$  die gesuchten mittleren Proportionalen. Warum?

R. Böker betonte, dass die Einstellung des beweglichen Lineals auf eine Stellung, die die Punkte  $A, B, C, D$  genau auf eine Gerade fallen ließ, aber "ein sehr mühsames Geschäft war, so dass Nikomedes nicht Unrecht hat, wenn er das Verfahren lächerlich, unbrauchbar und jeder geometrischen Systematik entbehrend nennt." (3)

Es sei bemerkt, dass es unmöglich ist, mit Zirkel und Lineal allein die Seite eines Würfels zu konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist, wie das Volumen des gegebenen Würfels.

Quellen: Böker 1961, Wolfer 1954. Zitate: (1) Wolfer 1954, S. 6; (2) ebenda, S. 5; (3) Böker 1961, Sp. 1215.

## 18 Das Lebensalter Diophants

"Da ich weiß, mein sehr verehrter Dionysios, dass Du voller Eifer bist, die Lösung arithmetischer Probleme kennenzulernen, so habe ich versucht, Dir die Wissenschaft der Arithmetik, mit den Elementen beginnend, zu erklären. Vielleicht erscheint der Stoff etwas schwierig, da er Dir noch nicht vertraut ist und da es dem Anfänger manchmal an Selbstvertrauen fehlt. Aber diese Wissenschaft wird Dir dennoch infolge Deiner Lernbegierde und meiner Erklärungen wegen wohl verständlich werden, denn Lerneifer begreift schnell." (1)

So beginnt Diophants Schrift "Arithmetische Probleme". Sie ist kein Lehrbuch. Diophant reiht Aufgabe an Aufgabe (jeweils mit Lösungen).

"Da es sich um viele und umfangreiche Probleme handelt und da es deswegen lange dauert, bis sie von denjenigen, die sie studieren, im Gedächtnis behalten und beherrscht werden, so habe ich mich entschlossen, soweit wie möglich eine Teilung der Probleme vorzunehmen, mit den elementaren Problemen anzufangen und allmählich zu den schwierigeren vorzuschreiten. So nämlich wird der Weg für den Anfänger leichter sein, und so wird der Stoff auch leichter im Gedächtnis bleiben. Wir behandeln den Stoff in 13 Büchern [Kapiteln]." (2) - So schreibt Diophant am Ende der Einleitung zum ersten Buch.

Diophants Lebenszeit ist unbestimmt. Man weiß nicht, wer der "sehr verehrte Dionysios" gewesen ist: der heilige Dionysios, der im Jahre 247 Bischof in Alexandria wurde,

oder jener Dionysios, der 187/88 Statthalter von Ägypten war, oder ein anderer Dionysios?

Aus einem Brieffragment des byzantinischen Philosophen Psellos geht hervor, dass Diophant nicht nach Anatolios lebte, der im letzten Drittel des 3. Jh. Bischof von Laodicea war.

Der Mathematikhistoriker J. Klein führte mehrere Argumente dafür an, dass Diophant als Zeitgenosse von Heron (mit dem Beinamen "der Mechaniker", Ingenieur, Mathematiker und Vermessungstechniker in Alexandria) anzusehen ist.

Nun steht aber die Zeit Herons auch nicht eindeutig fest. (Er beschrieb in seiner Schrift "Dioptra" eine Mondfinsternis, die im Jahre 62 u. Z. stattgefunden hat.)

In Zeugnissen, die aus der Zeit Neros, der von 54 bis 68 u. Z. römischer Kaiser war, stammen, wird über einen Astronomen Diophant berichtet.

Sind der Astronom und der Verfasser der "Arithmetischen Probleme" identisch, so dürfte Diophant im 1. Jh. u. Z. gelebt haben. (Es ist auch üblich, Heron ins 1. Jh. u. Z. zu datieren.)

Alles, was wir von seinem Lebenslauf wissen, ist in dem folgenden Rätselgedicht überliefert:

"Unter dem Grabhügel ruht Diophantos. Tatsächlich ein Wunder: Rechnerisch sagt uns der Stein, geistreich, das Alter des Manns. Über ein Sechstel des Lebens vergönnte der Gott ihm die Jugend, schenkte den flaumigen Bart über ein Zwölftel ihm dann, steckte nach fernem Siebtel in Brand ihm die Fackel der Hochzeit, sagte fünf Jahre danach gnädig den Sprössling ihm zu Elend der stattliche Junge: Nur halb so alt wie sein Vater ward er, vom Froste entrafte, hoch auf dem Holzstoß verbrannt! Durch arithmetische Forschungen suchte der Vater vier Jahre lang noch zu bannen den Schmerz, ehe er selber verstarb." (3)

Wie alt wurde Diophant?

Quellen: Anthologie 1981, Diophant 1952, Klein 1936. Zitate: (1) Diophant 1952, S. 5; (2) ebenda, S. 7; (3) Anthologie, Band 3, S. 229.

## 19 Die Weinmischung

Diophants Schrift "Arithmetische Probleme" wurde um 900 von dem in Bagdad wirkenden Gelehrten Qusta ibn Luqa wohl erstmalig teilweise ins Arabische übersetzt und beeinflusste die von arabisch schreibenden Mathematikern (insbesondere al-Karagi) in den mittelalterlichen islamischen Ländern betriebene Algebra.

(Diese wurde im Zuge der Übersetzungen aus dem Arabischen ins Lateinische im 12. Jh. auch den lateinisch schreibenden Mathematikern in einigen europäischen Feudalstaaten bekannt.)

Wohl ohne direkte Kenntnis des Diophantischen Werkes, sich jedoch auf arabische Quellen stützend, konnte Leonardo Fibonacci in dem "Buch vom Abakus" (1202) und

dem "Buch von den Quadraten" (1225) Aufgaben behandeln, die in der Diophantischen Tradition stehen.

Von einer griechischen Handschrift der "Arithmetischen Probleme" des Diophant wurde im 11. Jh. im Byzantinischen Reich berichtet. Dort schrieb Ende des 13. Jh. der Mönch Maximus Planudes einen Kommentar zu den ersten beiden Kapiteln.

Im Jahre 1463 entdeckte Regiomontan, der berühmteste Astronom des 15. Jh., in Venedig eine griechische Handschrift der "Arithmetischen Probleme".

Der Italiener Rafael Bombelli in Bologna legte im dritten Kapitel seines 1572 erschienenen Algebra-Buches in Anlehnung an Diophants Werk eine Sammlung von 271 Aufgaben mit Lösungen vor, von denen 147 mit Aufgaben aus Diophants "Arithmetischen Problemen" (davon 81 sogar noch in den Zahlenwerten) übereinstimmen.

Im Jahre 1575 wurde die erste lateinische Diophant-Übersetzung (der sechs griechisch überlieferten Kapitel) gedruckt. Der Herausgeber war der Philologe und Philosoph Wilhelm Holtzmann (auch Xylander genannt), der Bombellis Werk übrigens nicht kannte.

Im 11. und 12. Kapitel des III. Buches seines 1577 in Paris erschienenen algebraischen Werkes behandelte auch Guillaume Gosselin Diophantische Aufgaben. Er hat übrigens erstmals zu der alten Einteilung der Mathematik in Geometrie, Astronomie, Arithmetik und Musik die Algebra hinzugefügt.

Der Niederländer Simon Stevin, dem wir die Einführung der Dezimalbrüche verdanken, bearbeitete in seinem 1585 erschienenen arithmetischen Buch (beeinflusst durch Bombelli) ebenfalls Diophantische Aufgaben.

Die Beschäftigung mit den Schriften Diophants durch den genialen französischen Mathematiker Francois Viète (Vieta) war für dessen Entwurf einer symbolischen Algebra (und damit für die Entstehung einer mathematischen Formelsprache) wichtig.

In einer 1593 erschienenen Abhandlung (mit 82 Aufgaben) hat er 35 Aufgaben behandelt, deren Problemstellungen denen Diophants entsprechen. Er konnte darin die Vorteile seiner symbolischen algebraischen Schreibweise verdeutlichen.<sup>5</sup>

Im Jahre 1621 publizierte Claude G. Bachet de Meziriac, Mathematiker und Philosoph in Paris, die sechs griechisch überlieferten Bücher der Diophantischen "Arithmetischen Probleme" im griechischen Original und mit einer lateinischen Übersetzung.

---

<sup>5</sup>In der Algebra werden zwei Arten von Gleichungen unterschieden: Eine Gleichung, in der nur eine einzige Unbekannte enthalten ist, heißt "bestimmte Gleichung"; eine solche, worin zwei oder mehr Unbekannte vorkommen, heißt "unbestimmte Gleichung". Die Beschäftigung mit den folgenden beiden mit solchen (algebraischen) Gleichungen verbundenen Problemen führte zur Entwicklung der Algebra als Teilgebiet der Mathematik:

1. die Lösung von bestimmten Gleichungen durch allgemeine "Auflösungsformeln",
2. die Lösung einer unbestimmten Gleichung in rationalen oder ganzen Zahlen (z. B. in Aufgabe 1) bzw. (allgemeiner) die ganzzahlige oder rationalzahlige Auflösung unbestimmter (algebraischer) Aufgaben, d. h. solcher Aufgaben, bei denen zur Bestimmung der Unbekannten weniger Gleichungen als Unbekannte gegeben sind (z. B. die Aufgaben 26, 30). Solche Aufgaben überlassen immer einige Unbekannte der willkürlichen Annahme.

Das Gebiet, das sich mit der Auflösung unbestimmter (algebraischer) Aufgaben beschäftigt, wird seit Vietes Interpretation des Diophantischen Werkes als Diophantische Analysis bezeichnet, die Gleichungen selbst als diophantische Gleichungen bzw. diophantische Gleichungssysteme.



Diese Diophant-Ausgabe diente in den folgenden Jahrhunderten zahlreichen Mathematikern, wie Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauß, Cauchy, Jacobi und Dirichlet, als Ausgangspunkt mancher ihrer algebraischen Forschungen.

Im Jahre 1968 fand der Orientalist F. Sezgin in einer iranischen Bibliothek Teile der arabischen Übersetzung des Qusta ibn Luqa. (Erstdruck mit englischer Übersetzung durch Sestano 1984.)

Von den 13 Büchern der "Arithmetischen Probleme" sind somit zehn überliefert: sechs in griechischen Handschriften (nämlich die Bücher 1-3 und weitere drei, die wohl die Bücher 8-10 darstellen) und vier in arabischen Handschriften (Bücher 4-7).

Eine Aufgabe aus dem Buch 9 (bei Bachet Buch V), die im Original in Versen ausgedrückt ist, diene als Kostprobe aus Diophants Werk:

"Zweierlei Wein, acht Drachmen das Maß, und schlechteren zu fünf nur  
mischte der gütige Herr seinen Bedienten zum Fest.  
Was er als Preis für beides bezahlt, war eine Quadratzahl:  
legst du zu dem Quadrat aber noch Sechzig hinzu,  
siehe so hast du ein zweites Quadrat; nun merke, die Wurzel  
zeigt dir, wieviel Maß jener im Ganzen gekauft.  
Und nun sage mir an, wieviel des besseren Weines,  
und wieviel zu fünf, wurde zusammengemischt?" (1)

Diophant beginnt seine Lösung so: "Der Sinn dieses Epigramms ist folgender. Es hat jemand zwei Fässer Wein gekauft; von dem einen kostet das Maß 8 Drachmen, von dem andern 5 Drachmen. Der Preis, den er für alles zusammen bezahlt hat, ist eine Quadratzahl; und wenn man dazu 60 addiert, so wird das wieder eine Quadratzahl, deren Wurzel die Anzahl der Maße angibt. Wieviel waren da zu 8, wieviel zu 5 Drachmen?

Die Anzahl der Maße sei  $x$ , so ist der Preis  $x^2 - 60$ , und es soll  $x^2 - 60$  eine Quadratzahl sein; ihre Wurzel muss man gleich  $x$  weniger einer gewissen Zahl setzen [ $x^2 - 60 = (x - p)^2$ ].

Aber  $x^2 - 60$  ist zusammengesetzt aus zwei Zahlen, dem Preise des Weins zu 8 Drachmen und dem Preise des Weins zu 5 Drachmen; und ein Fünftel des letzteren ist die Anzahl der Maße zu 5 Drachmen, ein Achtel des ersteren die Anzahl der Maße zu 8 Drachmen; und da die Anzahl der Maße beider Arten  $x$  sein soll, so kommt es darauf an,  $x^2 - 60$  in zwei Zahlen zu zerlegen, so dass ein Fünftel der einen und ein Achtel der andern zusammen genommen  $x$  ausmacht." (1)

Die Aufgabe hat unendlich viele Lösungen! Man finde wenigstens eine Lösung.

Quellen: Basmakova 1974, Diophant 1952, Klein 1936, Nesselmann 1842, Viète 1973.  
Zitat: (1) Nesselmann 1842, S. 394.

## 20 Die Quadratur des Kreises

In der elementaren Lehre vom Kreis, die den Umfang und den Inhalt des Kreises behandelt, gibt es drei grundlegende Sätze.

Satz A. Die Umfänge  $U_1, U_2$  zweier Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser  $d_1, d_2$ .

Die Proportion  $U_1 : U_2 = d_1 : d_2$  bedeutet auch  $\frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}$ , d.h. das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser ist für alle Kreise gleich. Dieses konstante Verhältnis werde mit  $\rho$  bezeichnet ( $U = \rho d$ ).

Satz B. Die Flächeninhalte  $F_1, F_2$  zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate  $r_1^2, r_2^2$  über den Radien.

Die Proportion  $F_1 : F_2 = r_1^2 : r_2^2$  bedeutet auch  $\frac{F_1}{r_1^2} = \frac{F_2}{r_2^2}$ , d.h. das Verhältnis des Kreisflächeninhalts zum Quadrat über dem Radius ist für alle Kreise gleich. Dieses konstante Verhältnis werde mit  $\sigma$  bezeichnet ( $F = \sigma r^2$ ).

Satz C. Die Fläche  $F$  eines Kreises ist gleich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete dem Radius  $r$  und dessen andere Kathete dem Umfang  $U$  des Kreises gleich ist.

Der Satz B ist der Satz XII,2 in den "Elementen" von Euklid. Die Sätze B und C befinden sich in der "Kreismessung" des Archimedes.

Es ist, mathematisch und historisch gesehen, nicht selbstverständlich, dass  $\sigma = \rho$  ist. Mathematisch folgt diese Gleichheit  $\sigma = \rho$  (diese Konstante wird seit EULER mit  $\pi$  bezeichnet) aus dem Satz C:

Einerseits ist  $F = U \frac{r}{2} = \rho d \frac{r}{2} = \sigma 2g \frac{r}{2} = \sigma r^2$ , andererseits ist  $F = \sigma r^2$ ; somit  $\sigma = \rho$ . (Durch  $F = U \frac{r}{2}$  wird die Berechnung des Flächeninhalts des Kreises auf die Aufgabe der Berechnung des Kreisumfangs zurückgeführt, und umgekehrt.)

Dass die Gleichheit  $\sigma = \rho$  auch historisch gesehen nicht selbstverständlich ist, zeigen beispielsweise Texte aus dem alten Indien. Den Verfassern der "Sulvasutras" (sie lebten wahrscheinlich im 8. bzw. 5. Jh. v. u. Z.), jenen altindischen vedischen Schriften (der Vedismus ist eine Naturreligion - Hauptgott Indra - mit Opferritualen, Zauberriten und mythologischer Symbolik), die Anweisungen für die Konstruktion und den Bau von Opferaltären enthalten, war die Identität von  $\sigma$  und  $\rho$  nicht bekannt.

In den "Sulvasutras" wird zunächst die folgende Aufgabe behandelt:

Ein gegebenes Quadrat ist in einen Kreis mit gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. Ist  $a$  die Seite des Quadrats,  $e$  die Diagonale des Quadrats, so wird als Radius  $r$  des Kreises

$$r = \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{e}{2} - \frac{a}{2} \right) \quad (*)$$

genommen.

Danach wird die Aufgabe dargelegt, zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu zeichnen. Eine Regel zu dieser Quadratur des Kreises lautet:

"„Wünscht man einen Kreis in ein Quadrat zu verwandeln, so teile man seinen Durch-

messer in 8 Teile, und nochmals einen von diesen 8 Teilen in 29 Teile, nehme 28 Teile von diesen 29 Teilen fort und ferner den 6. Teil (des einen übrig bleibenden Teils) vermindert um den 8. Teil (des 6. Teils)." (1)

Ist also  $d$  der Durchmesser des Kreises, so wird hier als Seite  $a$  des Quadrats

$$a = \left\{ 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8} \right) \right\} d \quad (**)$$

genommen.

Bei diesen Flächenverwandlungen ist  $\sigma \neq 3$ . (Wie groß ist  $\sigma$ ?)

Für die Bestimmung des Kreisumfangs haben die Verfasser der "Sulvasutras" stets  $U = 3d$  angegeben (also  $\rho = 3$  angenommen). Man darf mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, dass den alten Indern nicht bekannt war, dass  $\sigma$  und  $\rho$  identisch sind.

Die Aufgabe der Mathematikhistoriker besteht u. a. darin, die alten Texte zu interpretieren und zu rekonstruieren.

Man zeige, dass sich der Wert (\*\*) für  $a$  bei gegebenem  $d$  aus der Regel (\*) gewinnen lässt, wenn man ferner die folgenden Regeln aus den "Sulvasutras" berücksichtigt.

Quadratdiagonale-Regel: "Die quer über das Quadrat (gelegte) Schnur bringt die doppelt so große (Boden-)Fläche hervor." (2)

Das heißt:  $e^2 = 2a^2$  (Spezialfall des Satzes von Pythagoras!).

Berechnung der Länge der Diagonale  $e_1$  im Quadrat mit der Seitenlänge 1 (Grundmaß): "Er (der Opferverrichter) soll das (Grund-) Maß um ein Drittel und dieses (Drittel) um (sein eigenes) Viertel, (das) um ein Vierunddreißigstel vermindert (wird), vermehren." (3)

Das heißt:

$$e_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \left( = \frac{577}{408} \right)$$

Quellen: Drenckhahn 1936, Michaels 1978, Müller 1930, Pieper 1980.

Zitate: (1) Drenckhahn 1936, S. 5-6; (2) Müller 1930, S. 190; (3) Michales 1978, S. 142.

## 21 Hund und Hase

Das älteste uns überlieferte rein mathematische Werk des chinesischen Altertums ist in einer Ausgabe von Liu Hui erhalten. Dieser lebte in der Periode der Dreiteilung des chinesischen Reiches (3. Jh. u. Z.) in der Dynastie Wei.

Das von ihm edierte und kommentierte "Mathematische Handbuch in neun Kapiteln" ist wahrscheinlich zwischen 50 v. u. Z. und 100 u. Z. geschrieben worden. Das Werk ist eine abwechslungsreiche Sammlung von 246 Aufgaben mit Lösungen.

In den meisten Aufgaben geht es um die verschiedensten Probleme des täglichen Lebens: Ausmessen von Feldern unterschiedlicher Formen, Regelung des Tausches von

Feldfrüchten, Bezahlung des Lohnes in Abhängigkeit von der Arbeitszeit und der Leistung, gerechte Steuereinschätzung, Zins und Gewinn beim Handel, Gewichtsbestimmungen, Rauminhaltsbestimmungen und weitere Probleme.

Andere Aufgaben kann man als mathematische Rätsel, also Probleme der Unterhaltungsmathematik ansehen. Dazu gehört die folgende "Bewegungsaufgabe" des einen Hasen verfolgenden Hundes, der die Verfolgung aufgibt. Es wird gefragt, wann er den Hasen erreicht hätte:

"Ein Hase war zuerst 100 Schritt gelaufen. Ein Hund verfolgte ihn auf 250 Schritt. Er erreichte ihn nicht um 30 Schritt und blieb stehen. Frage: Wieviel hätte der Hund, wenn er nicht stehengeblieben wäre, weiter laufen müssen, um ihn zu erreichen?" (1)

Solche und ähnliche "Verfolgungsaufgaben" sind in Schriften des Mittelalters (in Indien, in den islamischen Ländern, in Westeuropa) immer wieder enthalten. Die Aufgabe vom Hund und Hasen ist in den Rechenbüchern des 15. bis 17. Jh. besonders beliebt. In einem byzantinischen Rechenbuch des 15. Jh. lautet sie:

"Ein Hund jagt einen Hasen, und der Hase ist dem Hund voraus um 100 Sprünge, und alle acht Sprünge des Hasen, für die macht der Hund 7. Ich frage dich, nach wieviel Hasensprüngen und nach wieviel Hundesprüngen der Hund den Hasen erreichen wird." (2)

Die Aufgabe ist so gemeint, dass acht Hasensprünge die gleiche Länge haben wie sieben Hundesprünge. Aus der angegebenen Lösung ist zu entnehmen, dass in der Aufgabe noch eine Angabe fehlt: Die Sprünge der beiden sind von unterschiedlicher Dauer. Der Hund macht 39 Sprünge, wenn der Hase 16 macht.

Quellen: Vogel 1968, Vogel-Hunger 1963. Zitate: (1) Vogel 1968, S. 63; (2) Vogel-Hunger 1963, S. 65.

## 22 Die Höhe einer Meeresinsel

Der sowjetische Mathematikhistoriker Adolf Pavlovic Juskevic nannte das "Mathematische Handbuch in 9 Kapiteln" das "zentrale Werk" der frühen chinesischen Literatur: "In dieser Abhandlung finden wir die Zusammenfassung der Arbeit der Mathematiker, die im ersten Jahrtausend v. u. Z. gelebt haben. Darüber hinaus hat dieses Werk die gesamte weitere Entwicklung der Mathematik in China und teilweise auch außerhalb Chinas sehr stark beeinflusst." (1)

Am Schluss des Buches werden einige Vermessungsaufgaben behandelt. In der einen (IX, 23) soll die Höhe eines Berges bestimmt werden:

"Ein Berg liegt westlich eines Pfahles; seine Höhe kennt man nicht. Die Entfernung des Berges von dem Pfahl ist 53 Meilen, die Höhe des Pfahles 9 Klafter 5 Fuß. Ein Mann steht 3 Meilen östlich des Pfahles; er erblickt die Spitze des Pfahles in gleicher Richtung mit der Bergspitze. Das Auge des Mannes liegt in einer Höhe von 7 Fuß. Frage: Wie groß ist die Höhe des Berges?"

(1 Klafter = 10 Fuß, 1 Fuß = 10 Zoll x 23 cm.)

Als Ergänzung zu seinem Kommentar zum "Mathematischen Handbuch in 9 Kapiteln" formulierte Liu Hui im Jahre 263 u. Z. neun Vermessungsaufgaben, die unmittelbar an die letzten Aufgaben des neunten Kapitels anknüpfen. Später wurden diese unter dem Titel "Mathematische Abhandlung über eine Meeresinsel" zu einem selbständigen Werk.

In der ersten dieser Aufgaben (die der Schrift den Namen gab) soll die Höhe einer Insel über dem Meeresspiegel berechnet werden.

Es werden zwei Stangen von jeweils 30 Fuß Höhe in einer geraden Linie mit dem höchsten Punkt der Insel aufgestellt, und zwar im Abstand von 1000 Schritt voneinander (1 Schritt = 6 Fuß). Von der ersten Stange aus muss man 123 Schritt zurückgehen, damit man vom Erdboden aus die Spitze des Stabes und die Spitze der Insel sieht, von der zweiten Stange aus 127 Schritt.

Wie hoch ist der höchste Punkt der Insel?

Quellen: Gericke 1984, Juskevic 1964, Vogel 1968.

## 23 Weizenkörner auf einem Schachbrett

Das Schachspiel ist wahrscheinlich in Indien erfunden worden. Über die Perser lernten auch die Völker der arabischen Kalifate das Spiel kennen. Der Historiker al-Ja'qubi, der dort im 9. Jh. lebte, berichtete über die Erfindung des Schachspiels.

Nach seinem Bericht erbat sich der Erfinder des Schachspiels von der Tochter des Königs Balhait als Geschenk die Menge aller Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein Korn, auf das zweite zwei, auf das dritte vier und so auf jedes folgende die doppelte Anzahl der Körner legt, die das vorhergehende Feld enthält. In der von al-Ja'qubi überlieferten Anekdote heißt es weiter:

"Da sagte sie: Und wieviel ist der Betrag davon ? Hierauf befahl sie, dass der Weizen herbeigebracht werde. Und es genügte nichts dafür, bis die Getreidevorräte des Landes erschöpft waren; dann wurde das Getreide in Geld umgewertet, bis der Schatz erschöpft war.

Da dies nun viel war, sagte er: Ich brauche das nicht, mir genügt eine geringe Menge von irdischem Gut. Dann fragte sie ihn nach der Zahl der Körner, die er verlangt hatte."

(1)

Wie groß ist die Zahl?

Es sei erwähnt, dass diese Aufgabe später auch bei anderen Gelehrten der arabischen Kalifate gestellt wurde. Im Jahre 1202 formulierte Leonardo Fibonacci in seinem "Liber abaci" die Aufgabe, ohne die Anekdote zu nennen.

Später berechnete Christoph Calvius nicht nur die Anzahl der Getreidekörner, sondern auch noch die Anzahl von Schiffen, die benötigt würden, um das Getreide bzw. das Geld zu transportieren, ferner auch den Anteil der Erdkugel, den das Getreide ausfüllen würde.

Quellen: Ruska 1906; Tropfke 1980, S. 630-632. Zitat: (1) Ruska 1906, S. 281.

## 24 Die Fahrt ans andere Ufer

Die älteste Aufgabensammlung der Unterhaltungsmathematik in lateinischer Sprache ist Anfang des 9. Jh. am fränkischen Hof entstanden (Erstdruck 1563). Keine der überlieferten Handschriften, die vor allem im 10./11. Jh. mehr oder weniger sorgfältig von Kopisten angefertigt worden sind, nennt einen Autor.

Doch durch die Untersuchungen des Mathematikhistorikers Mensu Folkerts gewinnt die Vermutung, dass der angelsächsische Mönch Alkuin Verfasser dieser Sammlung sei, wieder an Wahrscheinlichkeit.

Alkuin war 781 als Gesandter an den Hof Karls des Großen (Karl I., seit 768 König der Franken) gekommen. Er machte St. Martin in Tours zu einer der führenden Bildungsstätten des Fränkischen Reiches und amtierte als Leiter der Hofschule in Aachen. Er setzte sich dafür ein, das Wissen des Altertums zu pflegen und weiterzutragen.

Die Klöster und Bischofssitze im Frankenreich sollten nach seinen Plänen Schulen erhalten.

In den Elementarschulen mussten Lesen und Schreiben, einfaches Rechnen sowie Religion und Psalmengesang, in den höheren Schulen die "Sieben freien Künste" gelehrt werden. Zu diesen gehörte die "Unterstufe", Trivium genannt, mit Grammatik (der lateinischen Sprache), Rhetorik (Redeübungen auf dem Gebiet des Rechtswesens) und Dialektik (Denklehre, Erörterung wissenschaftlicher Fragen) und die "Oberstufe", Quadrivium genannt, mit Arithmetik, Geometrie (zugleich mit Erdkunde und Naturgeschichte), Musik (Theorie und Pflege des Kirchengesangs) und Astronomie.

Die dem Alkuin zugeschriebene Aufgabensammlung enthält 56 Aufgaben. Unmittelbar auf die jeweilige Aufgabe folgt die Lösung.

Die Probleme stehen überwiegend in der römischen Tradition, daneben sind griechisch-byzantinische und arabische Einflüsse anzunehmen. Einige Aufgaben treten erstmals in dieser Aufgabensammlung auf.

Dazu gehören die Aufgaben 17 bis 20, die "Transportprobleme" behandeln. Die Aufgabe 18 ist besonders populär geworden:

Ein Mann musste einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl über einen Fluss hinüberbringen und konnte kein anderes Boot finden, außer ein solches, das nur den Mann und mit ihm entweder den Wolf oder die Ziege oder die Kohlköpfe zu tragen vermochte. Natürlich wollte er alles unverletzt hinüberbringen.

Es durften also weder der Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit den Kohlköpfen allein gelassen werden. Wer es kann, der möge zeigen, auf welche Weise der Mann alles unverletzt hat hinüberbringen können.

In der Aufgabe 17 sind drei Männer mit ihren Frauen über den Fluss zu setzen (keine der Frauen soll sich ohne ihren Bruder mit anderen Männern auf demselben Ufer befinden); in der Aufgabe 19 wollen ein Mann, eine Frau und zwei Kinder über den Fluss (der Kahn

trägt aber entweder nur den Mann oder die Frau oder die beiden Kinder); in der Aufgabe 20 handelt es sich um zwei Igel mit ihren Jungen.

Mehrere der mittelalterlichen Aufgabensammlungen sind von der des Alkuin beeinflusst worden. Die Transportaufgaben befinden sich darin in unterschiedlichen Varianten.

Quelle: Folkerts 1978.

## 25 Die Verteilung einer Geldsumme

An der Wende vom 10. zum 11. Jh. schrieb in Bagdad al-Karagi ein Buch über Algebra. Es war dem Wezir Fahrilmull gewidmet worden und wird kurz mit dem Titel "al-Fahri" bezeichnet. Der zweite Teil des Werkes enthält insgesamt 254 Aufgaben, die auf bestimmte oder unbestimmte Gleichungen führen. Eine dieser Aufgaben lautet:

"[Es ist] eine [ganzzahlige] Menge (zu verteilen) zwischen drei Personen. Die erste hat die Hälfte, die zweite ein Drittel, die dritte ein Sechstel zu bekommen. Sie teilen sich (das Ganze auf eine besondere Art).

Dann gab der, der die Hälfte bekommen sollte, die Hälfte dessen, was er genommen hatte, zurück. Der, der ein Drittel bekommen sollte, gab ein Drittel dessen, was er genommen hatte, zurück, und derjenige, der ein Sechstel bekommen sollte, gab ein Sechstel dessen, was er genommen hatte, zurück. Sie teilten untereinander das, was sie zurückgegeben hatten [ebenfalls eine ganzzahlige Menge) zu gleichen Teilen, so dass dann jeder von ihnen gerade seinen Anteil hatte. (Wieviel hatte jeder von ihnen zuerst genommen?)" (1)

Diese Aufgabe al-Karagis erschien etwa ein Jahrhundert später in einer "Flos" (Blume) betitelten Abhandlung des Leonardo Fibonacci von Pisa. Der Mathematikhistoriker Moritz Cantor schrieb darüber:

"Den Titel 'Flos' erläutert Leonardo selbst in der Widmung mit Berufung teils auf die blumenreiche Beredsamkeit des Gönners, dem die Abhandlung gewidmet ist [einem Cardinal R.], teils auf die blühende Art, in welcher schwierige Aufgaben bewältigt werden". (2)

Die Aufgabe von den drei Männern, welche gemeinsam eine Geldsumme besitzen, hätte ihm einst - wie auch andere Aufgaben - der Philosoph Johann von Palermo in Gegenwart des Kaisers Friedrich II. vorgelegt.

Leonardo hat die Aufgabe auch in seinem dem Kaiser gewidmeten Buch "Liber abaci" auf drei Arten gelöst. Er diskutierte außerdem Varianten des Problems. Bei einer geben die drei Personen nicht mehr die Hälfte, das Drittel bzw. das Sechstel ihrer zuerst verteilten Beträge zurück, sondern ein Drittel, ein Viertel bzw. ein Fünftel.

In dieser Form behandelte im 16. Jh. auch Geronimo Cardano das Problem. Allerdings ist nicht mehr von einer friedlichen Verteilung des Geldes die Rede, vielmehr sind drei Gesellen in Streit geraten und haben sich mit Gewalt das Geld angeeignet. Als sie sich später wieder vertragen, lieferten sie  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  bzw.  $\frac{1}{5}$  des erbeuteten Geldbetrages in den

gemeinsamen Fonds, der dann an sie zu gleichen Teilen verteilt wird. Das Problem bleibt:

Wieviel hatten sie zuerst erbeutet, wenn nach dieser Verteilung jeder seinen ihm zustehenden Anspruch der gesamten Geldsumme  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$  wirklich erhalten hat?

Quellen: Cantor 1900, Naini 1982, Vogel 1977. Zitate: (1) Naini 1982, S. 107; (2) Cantor 1900, S. 46.

## 26 Das Problem der 100 Vögel

In der Mitte des 12. Jh. verfasste der indische Mathematiker und Astronom Bhaskara (II.) sein Werk "Der Kranz der Wissenschaften".

Diese Schrift nannte der sowjetische Mathematikhistoriker Adolf Pavlovic Juskevic "die Krone der indischen Mathematik" (1) des Mittelalters. Sie umfasst vier Teile: Der erste ist arithmetischen und geometrischen, der zweite algebraischen, und die letzten beiden sind astronomischen Inhalts.

Der "Kranz der Wissenschaften" wurde in Indien sehr populär. Mehr als vier Jahrhunderte lang beschäftigten sich die Gelehrten mit der Kommentierung dieses Werkes; es blieb lange die Grundlage aller mathematischen Untersuchungen in Indien.

Im algebraischen Teil werden unbestimmte Aufgaben ganzzahlig gelöst. Die folgende Aufgabe hat Bhaskara von älteren Autoren übernommen.

"Fünf Tauben sind für 3 Drammas zu haben, sieben Kraniche für 5, neun Gänse für 7 und drei Pfauen für 9. Bring 100 dieser Vögel für 100 Drammas zu des Prinzen Befriedigung." (2)

Das Problem scheint chinesischen Ursprungs zu sein. Schon im 5. Jh. stellte Chang Chiu-Chien die folgende Aufgabe:

Ein Hahn ist 5 Geldstücke wert, eine Henne 3 Geldstücke und drei Küken 1 Geldstück. Mit 100 Geldstücken kaufen wir 100 von ihnen.

Es wurden die drei folgenden ganzzahligen Lösungen gegeben:

4 Hähne, 18 Hennen, 78 Küken bzw. 8 Hähne, 11 Hennen, 81 Küken bzw. 12 Hähne, 4 Hennen, 84 Küken.

Von China aus wanderte das Problem nach Indien. Hier sind vier verschiedene Sorten von Vögeln zu berücksichtigen.

Über die islamischen Länder, wo im 9. Jh. Abu Kamil in seinem "Buch der Seltenheiten der Rechenkunst" das Problem ausführlich behandelte, gelangte es nach Byzanz und ins Abendland. Im "Liber abaci" von Leonardo Fibonacci von Pisa steht folgende Vögelauflage:

"Ein Mann kauft für 30 Geldstücke 30 Vögel verschiedener Gattung. Davon kostet das Rebhuhn 3, die Taube 2 und 2 Sperlinge 1 Geldstück. Wieviel Vögel jeder Gattung bekommt er?" (3)



Als Lösung gab Fibonacci an: 3 Rebhühner, 5 Tauben, 22 Sperlinge.

Quellen: Hermelink 1978; Juskevic 1964; Naini 1982; Tropfke 1980, S. 613-616. Zitate: (1) Juskevic 1964, S. 84; (2) Naini 1982, S. 90; (3) Naini 1982, S. 181.

## 27 Eine orientalische Gewichtsaufgabe

Der allgemeine Stand des mathematischen Wissens und Könnens war im mittelalterlichen Europa bis ins 12. Jh. sehr niedrig. Die Rechenmethoden waren primitiv. Die Kaufleute bedienten sich eines Rechenbrettes, des sogenannten Abakus.

Die "indische" Zahlenschreibung, den Gelehrten in den islamischen Ländern seit langem geläufig, war noch unbekannt. In einem 1202 erschienenen Werk "Liber abaci" (Buch vom Abakus) gab der Italiener Leonardo Fibonacci von Pisa eine systematische Darstellung des Rechnens mit den zehn indisch-arabischen Ziffern.

Dessen Vater lebte einst als Kaufmann in Algier. Dort lernte der Sohn von einem muslimischen Lehrer das neue Verfahren. Er reiste durch den Orient, studierte arabische Werke, lernte die Schriften Euklids, Archimedes' und anderer griechischer Mathematiker kennen. Seine umfangreichen mathematischen Kenntnisse hat er in mehreren Büchern aufgeschrieben. Sie sind für die Entwicklung der Mathematik sämtlich von großer Bedeutung gewesen. Spätere Gelehrte schöpften aus seinen Werken sowohl Aufgaben als auch Lösungsmethoden.

Die folgende Aufgabe aus dem "Liber abaci" findet man in ähnlicher Form beispielsweise in einem byzantinischen Rechenbuch aus dem 15. Jh., bei Michael Stifel (1553), Bachet (1612) und auch bei Leonhard Euler (1748):

Jemand hat vier Gewichte, mit denen er die ganzen Pfunde seiner Waren von einem Pfund an bis 40 Pfund wiegen will; gefragt ist nach dem Gewicht der einzelnen Gewichtssteine. Dabei dürfen - wenn erforderlich - beide Waagschalen mit Gewichtssteinen belastet werden.

Die Geschichte der lange Zeit als "Bachetsches Gewichtsproblem" bezeichneten Aufgabe beginnt also nicht mit Bachet, aber auch nicht mit Fibonacci. Dieses Problem stammt aus dem Orient!

Schon im 11. Jh. stellte der Perser Tabari die Aufgabe, zehn Gewichtssteine anzugeben, mit dem alle Gewichte von 1 bis 10000 Dirhem und mehr gewogen werden können.

Quellen: Hermelink 1978; Knobloch 1973; Tropfke 1980, S. 633-636.

## 28 Die Eierfrau

Der schon seit dem 3. Jh. getrennt verwaltete Ostteil des Römischen Reiches löste sich im Jahre 395 endgültig vom Westteil als Oströmisches Reich. Nach der antiken Bezeichnung der am Bosphorus gelegenen Stadt Konstantinopel (Byzantion), bis zum

Zusammenbruch im Jahre 1453 Hauptstadt dieses Reiches, wurde es später Byzantinisches Reich genannt.

"Die Leistung von Byzanz auf dem Gebiet der Mathematik bestand darin, dass es die klassischen Werke, die zuerst dort allein bewahrt wurden, dem Abendland weitergab, einmal auf dem Weg über Sizilien und Italien und dann in Übersetzungen durch die Muslime" (1), schrieb der Mathematikhistoriker Kurt Vogel.

Wie sich die Einflüsse von Ost und West in Byzanz kreuzten, zeigt sich in einer in Wien aufbewahrten byzantinischen Sammlung arithmetischer Probleme (aus dem 15. Jh.), in der griechisch-hellenistische, indisch-arabische, persisch-türkische und westeuropäische mittelalterliche Texte als Quellen dienten.

Eine der insgesamt 100 Aufgaben dieses byzantinischen Rechenbuches lautet:

"Eine alte Frau verkaufte Eier auf dem Markt, und da kamen zufällig zwei Männer daher und stießen die Frau an und zerbrachen ihre Eier. Sie führte sie vor den Richter, und das Urteil bestimmte, dass sie der Frau ihre Eier ersetzen sollten.

Und sie fragen die Alte, wieviel Eier es waren, um sie zu bezahlen, und die Frau sagt: Ich weiß es nicht; ich weiß nur das, dass ich zu zwei und zwei abgezählt habe, und es blieb eines übrig, dann zu drei und drei und es blieb 1, zu 4 und 4 und es blieb 1, zu 5 und 5, und es blieb 1, zu 6 und 6, und es blieb 1, zu 7 und 7, und es blieb nichts, nicht ein einziges. Und so viele Eier der alten Frau waren es. Ich frage dich, wie viele es waren." (2)

Aufgaben, in denen eine Zahl aus gegebenen Divisionsresten bestimmt werden soll, kommen in vielen Handschriften und Büchern des Mittelalters vor. In der Zahlentheorie spricht man vom "Chinesischen Restproblem".

Eine derartige Aufgabe kommt nämlich wahrscheinlich zuerst im chinesischen "Arithmetischen Handbuch von Meister Sun" von Sun Tzu vor, das zwischen 280 und 473 u. Z. geschrieben wurde:

"Eine Zahl, durch 3 dividiert, gibt den Rest 2; durch 5 dividiert, den Rest 3, und durch 7 dividiert, den Rest 2: welches ist die Zahl?" (3)

Quellen: Biernatzki 1856; Vogel-Hunger 1963; Tropfke 1980, S. 636-642.

Zitate: (1) Vogel 1985, S. 237; (2) Vogel-Hunger 1963, S. 73; (3) Biernatzki 1856, S. 77-78.

## 29 Die Bestimmung eines Dreiecks

Es ist unbestritten, dass die Entwicklung der Mathematik durch kosmologisch- astronomische Fragestellungen stimuliert worden ist, dass die Mathematik bis ins 19. Jh. stets mit der Astronomie verbunden war.

Kosmologische Spekulationen, astronomische Probleme, Aufgaben zu Kalenderberechnungen gaben den Anstoß für zahlreiche mathematische Untersuchungen. Mathematische Erkenntnisse wiederum ermöglichten erst die Bewältigung astronomischer Fragestellungen.

Einer der berühmtesten Astronomen des 15. Jh., Regiomontan, ist zugleich einer der bedeutendsten europäischen Mathematiker jenes Jahrhunderts. Im Jahre 1533, lange nach Regiomontans Tod, wurde seine Schrift zur Dreieckslehre, zur Trigonometrie herausgegeben.

"Die Trigonometrie anders behandeln zu sollen als in Gestalt einer Einleitung zur Astronomie war noch Niemand eingefallen, und diesen großartigen Fortschritt von einem einleitenden Kapitel zum selbständigen Wissenschaftsteil vollzog Regiomontan" (1), schrieb der Mathematikhistoriker Moritz Cantor.

Das ist nicht richtig, denn schon der persische Astronom al-Tusi behandelte im 13. Jh. die Trigonometrie um ihrer selbst willen und nicht nur als Hilfsmittel für die Astronomie. Viele Sätze konnte Regiomontan aus arabischen Quellen übernehmen. Mit seiner Schrift begann in Europa die Entwicklung der Trigonometrie als selbständiger Wissenschaftszweig.

Die beiden ersten Kapitel enthalten zahlreiche Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke: Es wird gezeigt, wie sich aus drei Stücken, die zur Bestimmung des Dreiecks ausreichend sind, die übrigen Stücke berechnen lassen. In der zwölften Aufgabe des zweiten Kapitels ist ein Dreieck aus der Basis 20, der Höhe 5 und dem Verhältnis 3:5 der beiden anderen Seiten zu bestimmen. (Wie?)

Regiomontan irrte sich, als er schrieb, dass dieses Problem noch nicht geometrisch gelöst worden ist (was indes schon den alten Griechen gelungen war); er benutzte die Algebra, wodurch er auf eine quadratische Gleichung geführt wurde (allerdings alles ohne Symbole, ausführlich Worten dargestellt). Gerade dadurch, dass sie algebraisch behandelt sind, haben diese Aufgabe und eine andere "regelmäßig die Aufmerksamkeit der Leser .... gefesselt" (2)

Quellen: Cantor 1900; Chasles 1839, S. 619-620; Folkerts 1977. Zitate: (1) Cantor 1900, S. 264; (2) Cantor 1900, S. 269.

## 30 In einem Wirtshaus

Seit 1522/23 lebte und arbeitete in der Bergstadt Annaberg im Erzgebirge (das wegen der reichen Silberfunde zu den wichtigsten deutschen Bergbauzentren gehörte) ein Mann, dessen Name bis in unsere Tage genannt wird, um die Richtigkeit eines rechnerischen Resultats zu bekräftigen:

"Das macht nach Adam Riese ..." . Eine ältere Fassung dieser Redensart lautete: "Nach Adam Riesens Rechenbuch ...".

Der Rechenmeister Adam Ries hatte während seines Erfurtaufenthalts (von 1518 an), wo er auch mit Universitäts- und Humanistenkreisen in Verbindung getreten war, drei Rechenbücher geschrieben. Das zweite war 1522 in Erfurt gedruckt worden. Mit diesem sind die arabischen Ziffern und das schriftliche Rechnen im deutschen Volk bekannt geworden.

Es wurde lange Zeit hindurch dem Rechenunterricht vieler Schulen zugrunde gelegt.

(107 Nachdrucke sind belegt!) Das Buch war nicht in der damals üblichen lateinischen Fachsprache, sondern in deutscher Sprache und überdies allgemeinverständlich geschrieben.

Ries stellte darin viele elementare Aufgaben und gab Regeln zu deren Lösung an. Darunter befinden sich zwei sogenannte "Zechenaufgaben".

Mehrere Gruppen von Personen geben in einem Wirtshaus insgesamt eine bestimmte Summe von Geld aus, wobei jede Person einer Gruppe jeweils die gleiche Summe, jedoch Personen unterschiedlicher Gruppen verschiedene Summen für ihre Zeche zu zahlen haben. Gefragt wird nach der Anzahl der Personen in jeder Gruppe.

Die erste Aufgabe lautet: "Item 21 Personen, Männer und Frauen, haben vertroncken 81 d. Ein Mann sol geben 5 d und eine Frau 3 d. Nun frag ich wie viel jeglicher in Sonderheit gewesen seind." (1)

Die zweite Aufgabe hat später auch Leonhard Euler (mit anderen Zahlen als Ries) wie folgt gestellt:

"30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, geben in einem Wirtshause 50 Taler aus, und zwar zahlt ein Mann 3 Taler, eine Frau 2 Taler und ein Kind 1 Taler. Wieviel Männer, Frauen und Kinder sind es gewesen?" (2)

Die Zechenaufgaben gehen auf schon im 5. Jh. in China in anderer Einkleidung formulierte Probleme (Problem der 100 Vögel, siehe Aufgabe 26) zurück, die über die Inder und die Mathematiker der arabischen Kalifate später nach Europa gelangten. Euler hat sie in seiner "Vollständigen Anleitung zur Algebra" (1770), 2. Teil, 2. Abschnitt, 2. Kapitel, übersichtlich behandelt.

Quellen: Deubner 1959; Deubner 1961; Euler 1911; Tropfke 1980, S. 614. Zitate: (1) Deubner 1959, S. 103; (2) Euler 1911, S. 339.

## 31 Das „Erraten“ einer natürlichen Zahl

Denke Dir eine zweiziffrige natürliche Zahl. Dividiere die Zahl durch 10 bzw. 11 und nenne mir die beiden Reste  $r_1$  bzw.  $r_2$ . Ich "errate" dann die Zahl.

Das "reizvolle Verfahren"(1) zum "Erraten" der gedachten natürlichen Zahl hat sich Michael Stifel ausgedacht. Michael Stifel, den der Mathematikhistoriker Moritz Cantor als "den ersten großen deutschen Zahlentheoretiker" (2) bezeichnet hat, war ein Mathematiker voll von schöpferischen Ideen.

Er war ursprünglich Augustinermönch, der zeitig ein Anhänger Martin Luthers LUTHERS wurde, 1522 aus dem Kloster floh und Prediger wurde. Mit Luther hatte er auch in enger persönlicher Verbindung gestanden. Seit 1535 bekleidete er die Pfarrstelle in Holzdorf in der Nähe von Wittenberg, wo er die zwölf glücklichsten und wissenschaftlich fruchtbarsten Jahre seines Lebens verbrachte.

Die nahe Universitätsstadt stellte damals das Zentrum der Reformation und des wissenschaftlichen Lebens in Deutschland dar. An der Wittenberger Universität wurde Stifel

zum magister artium promoviert.

In Holzdorf entstand sein erstes mathematisches Werk, "das zugleich das bedeutendste im Deutschland des 16. Jahrhunderts" (3) sein sollte, "Arithmetica integra" (Die gesamte Arithmetik), für das übrigens Philipp Melanchthon, ein Mitstreiter Luthers, das Vorwort schrieb (Melanchthon wird auf Grund seiner Verdienste um die Neuorganisation des Bildungswesens oft als "Praeceptor Germaniae" - Lehrmeister Deutschlands - bezeichnet).

Das Werk erschien 1544 in Nürnberg bei dem Drucker, der ein Jahr zuvor auch das Hauptwerk des Nicolaus Copernicus herausgebracht hatte.

Das folgende Verfahren, um eine gedachte Zahl zu finden, steht im sechsten Kapitel des ersten Buches der "Arithmetica integra".

Man gebe sich eine natürliche Zahl  $a$  vor und lasse eine Zahl  $x < a(a+1)$  denken. (Lässt man eine  $n$ -ziffrige Zahl denken, so wählt man  $a$  so, dass  $a(a+1)$  eine  $(n+1)$ -ziffrige Zahl werde.) Man erfährt die Reste  $r_1, r_2$ , welche die Divisionen  $\frac{x}{a}, \frac{x}{a+1}$  lassen.

Nun hat man  $(a+1)r_1 + a^2r_2 = s$  auszurechnen. Nach Stifels Behauptung ist dann die gedachte Zahl  $x$  der Rest von  $s$  bei der Division durch  $a(a+1)$ . Warum?

Im einleitend genannten Spezialfall ist  $a = 10$ ,  $a+1 = 11$ . Es ist  $s = 11r_1 + 100r_2$  auszurechnen und durch  $a(a+1) = 110$  zu dividieren. Der Rest bei dieser Division ist die gedachte Zahl.

Quellen: Cantor 1900, Hofmann 1968, Jentsch 1986. Zitate: (1) Hofmann 1968, S. 19; (2) Cantor 1900, S. 449; (3) Jentsch 1986, S. 13.

## 32 Wie spät ist es schon?

In einer Zeit, als in den islamischen Ländern bereits ein Niedergang der mathematischen Forschung einsetzte, verfasste der aus Syrien gebürtige, später in Persien lebende und dort der Sekte der Schiiten angehörende al-Amuli eine Abhandlung, die er "Essenz der Rechenkunst" nannte.

Die Rechenkunst wäre eine Wissenschaft, welche die Auffindung unbekannter Zahlen vermöge eigentümlicher Kenntnisse lehre, und ihr Objekt wäre die Zahl. Der Verfasser hatte den Stoff zu seinem Werk aus älteren Büchern gezogen.

Seine Schrift ist "gewissermaßen der letzte Blick, den ein Scheidender auf den Glanz früherer Jahre zurückwirft, um davon dem Gedächtnis noch zu erhalten, was sich retten lässt". (1)

(Dies schrieb der Mathematikhistoriker Georg H. F. Nesselmann, der im Jahre 1843 al-Amulis "Essenz der Rechenkunst" arabisch und in deutscher Übersetzung herausgab.) Das kleine Werk erfreute sich in Vorderasien und Indien einer großen Popularität. Bis ins 19. Jh. wurde es dort als Schulbuch über Algebra verwendet.

Von den zahlreichen darin behandelten Aufgaben sei die folgende ausgewählt.

"Jemand wurde gefragt, wieviel von der [zwölfstündigen] Nacht verflossen sei. Er antwortete: Ein Drittel der verflossenen Zeit ist gleich einem Viertel der noch übrigen.

Wieviel war verflossen und wieviel war noch übrig?" (2)

Quelle: al-Amuli 1843. Zitate: (1) al-Amuli 1843, S. III; (2) ebenda, S. 53.

### 33 Der Zylinder größten Volumens in einer Kugel

"Als ich im November letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, als an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen.

Als einige Fässer eingekellert waren, kam am vierten Tage der Verkäufer mit der Messrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalt nach bestimmte." (1)

Dies schrieb Johannes Kepler, von 1599 bis 1612 Hofastronom und Kaiserlicher Mathematiker in Prag, nun Mathematiker der Landschaft Österreich ob der Ems in Linz, in der Widmung seiner "Fasslehre".

Er war überaus erstaunt, dass der Kaufmann den Inhalt des Fasses von der Visierrute ablesen konnte, nachdem er diese durch das Spundloch in das horizontal liegende Fass bis zur entgegengesetzten Fasswölbung gesteckt hatte, ohne Rücksicht auf die Art der Krümmung der Fässer und ohne sonstige Abmessungen.

Kepler schrieb: "Ich bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Fass mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzumutbar, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen." (1)

Kepler dachte nur wenige Tage darüber nach und fand, dass der Visiermeister mit der Messrute tatsächlich einen guten Näherungswert für den Inhalt der Weinfässer bekommen kann.

In wesentlich erweiterter Form ließ Kepler seine Resultate auf eigene Kosten unter dem Titel "Nova stereometria doliorum vinariorum" (kurz: "Fasslehre") lateinisch drucken (1615, ein Jahr später erschien eine volkstümlichere deutsche Bearbeitung "Auszug aus der uralten Messekunst Archimedis").

Die "Fasslehre" besteht aus drei Teilen. Der erste Teil ist der Inhaltsbestimmung von 92 Körpern gewidmet, zunächst von Körpern, die bereits Archimedes bekannt waren (Zylinder, Kugel, Kegel), und dann von neuen Körpern, von denen einige mit den Namen von Früchten oder anderen Gegenständen des Alltags, denen sie ähneln, versehen wurden (apfelförmiger Körper, zitronenförmiger Körper, Kürbis, Ring, Spindel u. a.).

Im zweiten Teil wird gezeigt, dass die damals in Österreich häufigste Fassgestalt zugleich die zweckmäßigste sei, das heißt diejenige, welche bei Verbrauch der geringsten Menge von Fassholz den größten Inhalt besitzt. Als Beispiel eines der sich dabei erge-

benden Probleme sei genannt: Es ist unter allen Zylindern mit gleichen Diagonalen der Zylinder mit größtem Volumen zu bestimmen. (2)

Dieses Problem lässt sich heutzutage durch Anwendung der Differentialrechnung einfach erledigen. (Wie?)

Kepler, dem dieser Kalkül noch nicht zur Verfügung stand, vermutete die Lösung aus Rechenbeispielen und musste schwierige räumlichgeometrische Überlegungen beim Beweis anstellen.

Im dritten Teil der Schrift wird beschrieben, wie man in der Praxis zu verfahren habe, um den Inhalt von Fässern zu bestimmen.

Die "Fasslehre" zeugt von Keplers großer Erfindungskunst. In ihr sind wichtige Keime neuer Schlussweisen, eine Reihe genialer Ideen und phantasievoller Annahmen enthalten, die später in der Integralrechnung systematisch behandelt wurden.

Quellen: Kepler 1908. Zitate: (1) Kepler 1908, S. 99; (2) ebenda, S. 57.

## 34 Vier-Quadrate-Sätze

Im Jahre 1621 publizierte Claude G. Bachet de Meziriac, Mathematiker und Philosoph in Paris, die sechs griechisch überlieferten Kapitel der Diophantischen "Arithmetischen Probleme". Er bemerkte, dass Diophant in einigen Aufgaben einen Satz (vorausgesetzt und stillschweigend) benutzt hatte, ohne ihn zu beweisen, den Satz nämlich, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen darstellen lässt (Vier-Quadrate-Satz B). So gilt

$$13 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2$$

$$30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 2^2 + 3^2 + \left(\frac{1016}{349}\right)^2 + \left(\frac{1019}{349}\right)^2$$

$$5 = 1^2 + 2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2$$

Bachet sprach die Vermutung aus, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens vier Quadratzahlen (das sind Quadrate natürlicher Zahlen,  $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ ) darstellen lässt (Vier-Quadrate-Satz A). So gilt

$$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$$

$$41 = 5^2 + 4^2 = 6^2 + 2^2 + 1^2$$

$$32 = 4^2 + 4^2$$

$$124 = 11^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 9^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2$$

Aus dem Vier-Quadrate-Satz A folgt der Vier-Quadrate-Satz B (wie?).

Am 17. Juni 1751 trug Leonhard Euler in der Berliner Akademie der Wissenschaften erstmalig einen Beweis des Vier-Quadrate-Satzes B vor. Von Euler waren bis zu diesem

Zeitpunkt schon etwa 175 Arbeiten erschienen, darunter drei Bücher über Mechanik, Variationsrechnung und Funktionentheorie. Von 1730 an hatte ihn die Bachetsche Vermutung immer wieder gefesselt. Er entdeckte die folgende Identität für das Produkt zweier Vier-Quadrate-Summen:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2 \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} x &= ap + bq + cr + ds, & y &= aq - bp - cs + dr, \\ z &= ar + bs - cp - dq, & v &= as - br + cq - dp \end{aligned}$$

Aus (1) folgt leicht (wie?) der

Satz 1: Wenn  $mn = \boxed{4}_B$  und  $m = \boxed{4}_B$ , so  $n = \boxed{4}_B$ .

Wenn  $mn = \boxed{4}$  und  $m = \boxed{4}$ , so  $n = \boxed{4}$ .

(Hierin bedeutet  $\boxed{4}$  bzw.  $\boxed{4}_B$  eine natürliche Zahl, die eine Summe von höchstens vier Quadraten natürlicher bzw. gebrochener Zahlen ist.) Aus Satz 1 folgt wiederum (wie?) der

Satz 2: Wenn  $mn = \boxed{4}_B$  und  $m \neq \boxed{4}_B$ , so  $n \neq \boxed{4}_B$ .

In einem Brief (vom 17. April 1749) an Christian Goldbach hatte Euler bemerkt, dass er aus (1) (also: "Aus  $m = \boxed{4}$  und  $n = \boxed{4}$  folgt  $mn = \boxed{4}_B$ " und der Aussage: "Wenn  $mn = \boxed{4}$  und  $m = \boxed{4}$ , so  $\frac{mn}{m} = n = \boxed{4}$ ") den Vier-Quadrate-Satz A herleiten könnte, allein der Beweis dieser Aussage bereitete ihm Schwierigkeiten.

Es gelang Euler, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 3: Ist  $p$  eine gegebene Primzahl, so gibt es ganze Zahlen  $a, b$  derart, dass  $1 + a^2 + b^2$  durch  $p$  teilbar ist.

Aus den Sätzen 2 und 3 konnte er nun mit einem indirekten Beweis zeigen (wie?), dass sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten gebrochener Zahlen darstellen lässt. Hieraus folgt der Vier-Quadrate-Satz B.

Der Beweis des Vier-Quadrate-Satzes A gelang erst - auf den Ergebnissen Eulers aufbauend - dem französischen Mathematiker Joseph Louis Lagrange im Jahre 1770.

Quellen: Dickson 1952, Euler 1965, Sierpinski 1964.

## 35 Die Tangentenaufgabe

Im Jahre 1637 erschien in den republikanischen Niederlanden ein Buch des französischen Philosophen René Descartes: "Abhandlung von der Methode des richtigen Vernunftgebrauchs". Ein Anhang hat den Titel "Die Geometrie".

Mit diesem Werk begann ein neues mathematisches Zeitalter. Man hat von der kopernikanischen Revolution Descartes' auf mathematischem Gebiet gesprochen und die "Geometrie" das am meisten Epoche machende Werk der gesamten mathematischen Weltliteratur genannt.



Descartes leitete damit die Algebraisierung der Geometrie ein (Anwendung algebraischer Methoden auf die Geometrie). Die Geometrie selbst verlor ihre dominierende Stellung, die in der Folgezeit die Algebra einnahm.

Im zweiten Teil seiner "Geometrie" stellte Descartes Kurven durch eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen dar. Diese Darstellung war ganz neu. Hierbei beschäftigte er sich auch mit der Lösung einer Aufgabe, "welche von nun an Jahrzehnte hindurch nicht aufgehört hat, die Mathematiker zu beschäftigen, der Tangentenaufgabe. Descartes fasste sie etwas anders auf; für ihn war es die Normalenaufgabe". (1)

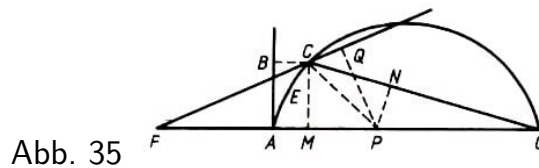


Abb. 35

Descartes stellte sich die Aufgabe, eine Methode zu entwickeln, "in einem beliebigen Punkt einer Kurve eine gerade Linie zu ziehen, die die Kurve unter rechtem Winkel schneidet". Und er fügte hinzu:

"Und ich wage es auszusprechen, dass dies nicht nur das allgemeinste und nützlichste Problem sei, das ich weiß, sondern auch das in der Geometrie zu wissen ich mir je gewünscht habe." (2)

Der Gedanke Descartes' ist folgender. Es sei im Punkt  $C$  der Kurve die Normale zu ziehen (die also mit der Kurve bzw. der Tangente an  $C$  einen rechten Winkel einschließt). Descartes: "Ich denke mir die Aufgabe gelöst und es sei  $\overline{CP}$  die gesuchte Gerade (Abb. 35), die ich mir bis zu jenem Punkte  $P$  hin verlängert denke, in dem sie die gerade Linie  $\overline{GA}$  [die Abszisse] trifft;  $\overline{GA}$  möge diejenige gerade Linie sein, auf deren Punkte alle Punkte der Linie  $\overline{CE}$  bezogen werden [rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung  $A$ ], so dass also, wenn wir setzen:

$$\overline{MA} = \overline{CB} = x, \quad \overline{BA} = \overline{CM} = y$$

eine Gleichung bekannt ist, die den Zusammenhang zwischen  $y$  und  $x$  darstellt. Es sei ferner

$$\overline{PC} = s, \quad \overline{PA} = v$$

dann ist also  $\overline{PM} = v - x$  und in dem rechtwinkligen Dreieck  $PMC$  das Quadrat der Basis gleich der Summe der Quadrate der beiden Seiten" (3), d.h.

$$s^2 = y^2 + (x - v)^2$$

Dieses ist die Gleichung des Kreises um den Punkt  $P$  mit dem Radius  $s$ . Löst man die Kreisgleichung nach  $x$  oder  $y$  auf, so kann man die gefundenen Ausdrücke in die Kurvengleichung einsetzen und erhält eine Gleichung, die nur eine der Größen  $x$  oder  $y$  enthält.

Descartes: "Nachdem eine solche Gleichung gefunden ist, hat man aus ihr statt der Größen  $x$  oder  $y$ , die ja bekannt sind, da der Punkt  $C$  gegeben ist, die Größen  $v$  oder

$s$ , die den Punkt  $P$  bestimmen, zu berechnen. Zu dem Ende beachten wir, dass, wenn der Punkt  $P$  die gewünschte Beschaffenheit haben soll, der um  $P$  als Mittelpunkt durch  $C$  hindurchgelegte Kreis die Kurve  $CE$  in  $C$  berühren muss ohne sie zu schneiden."(4)

Um die Normale zu finden, kann man von einem beliebigen Punkt  $P = (v, 0)$  der Abszisse ausgehen. Man beschreibt um  $P$  einen Kreis mit dem Radius  $r$ , der die Kurve in zwei (oder mehr) Punkten schneidet. Man suche denjenigen Wert von  $r$  bzw.  $v$ , für welchen zwei Durchschnittspunkte zusammenfallen.

Durch dieses  $v$  wird der Kreis ein berührender, und der Radius in dem Berührungspunkt die gesuchte Normale.

Als Beispiel betrachtet Descartes eine Kurve, für welche die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$

$$ax - m^2y^2 = y^2$$

ist. Für  $m = 1$  ist das der Kreis um den Punkt  $(\frac{a}{2}, 0)$  mit dem Durchmesser  $a$ . Für  $m = 0$  hat man die Parabel, an welcher das Quadrat der Ordinate  $y^2$  gleich ist dem Rechteck von der Abszisse  $x$  und einer Konstante  $a$  ( $y^2 = ax$ ). Man wende die Methode von Descartes auf diese Parabel an!

Die Tangente tritt bei Descartes nicht als Grenzlage einer Sekante auf, sondern als Tangente an einen Kreis, der die gegebene Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet.

Vom Standpunkt der heutigen Mathematik urteilte Bourbaki:

Descartes gab "für die Bestimmung der Tangenten eine Methode der algebraischen Geometrie und nicht wie Fermat eine Methode der Differentialrechnung an. Die von der Antike hinterlassenen Resultate über die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kegelschnittes, Descartes' eigene Überlegung über die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte und über Aufgaben, die darauf hinausliefen, mussten ihn ganz natürlich auf den Gedanken bringen, als Kriterium für die Berührung das Zusammenfallen zweier Schnittpunkte zu nehmen". (5)

Quellen: Cantor 1900, Descartes 1923. Zitate: (1) Cantor 1900, S. 851; (2) Descartes 1923, S. 42-43; (3) ebenda, S. 43; (4) ebenda, S. 46; (5) Bourbaki 1971, S. 207.

## 36 Kegel mit größter Oberfläche in einer Kugel

In einem Brief an René Descartes beschrieb im Jahre 1638 Pierre de Fermat, Rat am Obersten Gerichtshof in Toulouse, als Mathematiker Autodidakt, eine Methode zur Bestimmung eines Extremums:

Soll ein Polynom  $f(x)$  für einen Wert von  $x$  maximal oder minimal werden, so ersetze man  $x$  durch  $x + h$  und betrachte die Ausdrücke  $f(x)$  und  $f(x + h)$  als einander gleich. Nun beseitige man auf beiden Seiten die gemeinsamen Glieder, dividiere beide Seiten durch  $h$  und streiche alle Glieder, die nun noch  $h$  enthalten.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Man bildet die Gleichung  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$  und setzt hierin danach  $h = 0$ .

Die Auflösung der übrig bleibenden Gleichung nach  $x$  gibt den gesuchten  $x$ -Wert.

Fermat bewies diese Regel nicht. In einem Brief an Mersenne vom April 1643 schrieb er: "Denn um die Sache ganz klar zu machen und vollständig zu beweisen, müsste man eine ganze Abhandlung schreiben. Ich werde mich dem nicht entziehen, wenn ich nur einmal genug Muße dafür finde." (1)

Fermat selbst wählte als einfaches Beispiel für seine Methode das folgende:

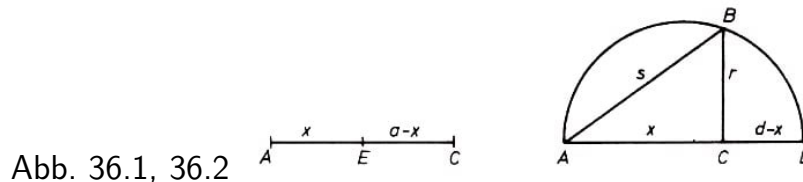


Abb. 36.1, 36.2

"Die Strecke  $\overline{AC}$  (Fig. [Abb. 36.1]) ist im Punkte  $E$  so zu teilen, dass das Rechteck  $\overline{AE} \cdot \overline{EC}$  ein Maximum wird." (2)

Lösung: Setze  $\overline{AC} = a$ ,  $\overline{AE} = x$ , also  $\overline{EC} = a - x$ , und dann  $(x + h)(a - x - h) = x(a - x)$ . Es wird  $ha - 2hx - h^2 = 0$ , also  $a - 2x - h = 0$ .

Setze  $h = 0$ , dann ist  $a^2 - x = 0$ . Es folgt  $x = 5$ .

Fermat: "Also ist zur Lösung der Aufgabe  $a$  zu halbieren. Eine allgemeinere Methode kann man wohl nicht angeben." (2)

Dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt, wird anschaulich erschlossen.

Von zahlreichen Beispielen, auf die Fermat sein Verfahren angewendet hat, sei die folgende Aufgabe genannt: "Den einer Kugel eingeschriebenen Kegel mit möglichst großer Oberfläche zu finden." (3)

Der Durchmesser der gegebenen Kugel sei  $\overline{AD} = d$  (Abb. 36.2). Der gesuchte Kegel habe die Höhe  $\overline{AC} = x$ , die Seitenlinie  $\overline{AB} = s$  und den Grundkreisradius  $\overline{BC} = r$ .

Die Oberfläche des Kegels ist  $\pi(r^2 + rs)$ . Bei gegebenem  $d$  soll also  $r^2 + rs$  maximal werden. Fermat führte dieses Problem auf das folgende Problem zurück: Bei gegebenem  $s$  soll  $\frac{r^2 + rs}{d^2}$  maximal werden.

Quellen: Fermat 1934, Miller 1966, Wieleitner 1929. Zitate: (1) Wieleitner 1929, S. 26; (2) Fermat 1934, S. 2; (3) ebenda, S. 21.

## 37 Das Problem der gerechten Teilung

Im Sommer 1654 schrieb der Mathematiker, Physiker und Religionsphilosoph Blaise Pascal, einst mathematisches Wunderkind und jüngster Teilnehmer an den Sitzungen der "Freien Akademie" (die 1635 als Vereinigung Pariser Naturwissenschaftler gegründet worden war), einen Brief an Pierre de Fermat:

"Mein Herr, eine Unruhe hat mich erfasst, und obwohl ich noch im Bette liege, habe ich die Feder ergriffen, um Ihnen mitzuteilen, dass ich gestern Abend von Herrn Carcavi

Ihren Brief über die gerechte Teilung erhalten habe und keine Worte finde, um zu sagen, wie er mich beeindruckt.

Ich will keine langen Ausführungen machen: Sie haben das Problem des Würfels und das Problem der gerechten Teilung gleichermaßen vollständig gelöst; das ist eine große Freude für mich, denn jetzt zweifle ich nicht mehr daran, dass ich recht habe, nachdem wir auf so wunderbare Weise zu denselben Resultaten gekommen sind.

Ihre Methode, mit der Sie das Problem der gerechten Teilung gelöst haben, bewundere ich noch mehr als die Lösung des Problems des Würfelspiels. Mehreren Leuten, darunter selbst dem Chevalier de Mere und Herrn Roberval, ist es gelungen, die zuletzt genannte Frage zu beantworten; aber de Mere konnte das Problem der gerechten Teilung nicht richtig lösen, ja, er hat sogar nicht einmal gewusst, wie man es anzupacken habe, und so war ich bisher der einzige, der das richtige Verhältnis kannte.

Ihre Methode ist völlig zuverlässig, und als ich über diese Frage nachzudenken begann, bin ich selbst ähnlich vorgegangen, da aber das Abzählen der verschiedenen Kombinationen ziemlich mühsam ist, habe ich später eine ganz andere, kürzere und elegantere Methode gefunden, die ich Ihnen mitteilen will, denn ich möchte fortan alle meine Gedanken mit Ihnen teilen, soweit das möglich ist.

Ich zweifle jetzt nicht mehr an der Richtigkeit meiner Resultate, da ich mich in so bewundernswürdiger Übereinstimmung mit Ihnen befinde. Ich sehe, dass die Wahrheit dieselbe in Toulouse wie in Paris ist." (1)

Auf die hier genannten Probleme über Glücksspiele war Pascal vom Pariser Chevalier de Mere während einer Reise hingewiesen worden. Eines konnte der Chevalier selbst lösen.

Das zweite Problem, das er nicht lösen konnte, das Problem der gerechten Teilung, besteht in folgendem:

Zwei Spieler spielen ein Glücksspiel. In jeder Partie haben beide Spieler dieselben Chancen. Zu Beginn zahlen beide Spieler den gleichen Geldbetrag in die Kasse ein. Diesen Einsatz erhält dann derjenige, der zuerst eine festgelegte Anzahl  $n$  von Partien gewonnen hat (etwa  $n = 3$ ).

Die Spieler müssen jedoch mit dem Spiel aufhören, bevor es entschieden ist. Zu diesem Zeitpunkt habe der eine Spieler  $a$  Partien, der andere  $b$  Partien gewonnen (etwa  $a = 1$ ,  $b = 0$ ). Wie ist bei diesem Spielstand der Einsatz zwischen den Spielern gerecht zu verteilen?

Pascal hatte erkannt, dass es nur auf die Anzahl der Gewinnpartien ankommt, welche jedem Spieler zum Gewinn des Spiels noch fehlen. Fermat wandte die Kombinatorik auf das Problem an.

Beide teilten sich ihre Methoden und Ergebnisse brieflich mit. Aus Gesprächen erfuhr auch Christian Huygens von diesen Untersuchungen. Er behandelte das Problem mit einer anderen Methode in einer 1657 erschienenen Arbeit.

Aus den Untersuchungen von Fermat, Pascal und Huygens über dieses und andere Glücksspielprobleme entwickelte sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Quellen: Bernoulli 1899; Cantor 1900, S. 754-759; Huygens 1941, S. 124 bis 128; Renyi 1972. Zitat: (1) Renyi 1972, S. 73-74.

## 38 Eine überraschende Identität

Gottfried Wilhelm Leibniz, der fast das gesamte Wissen seiner Zeit beherrschte, gilt als der letzte Universalgelehrte: Philosoph, Mathematiker, Physiker, Techniker, Jurist, Geschichts- und Sprachforscher, politischer Schriftsteller.

Zu ernsthafter Vertiefung in die Mathematik kam es während seines vierjährigen Aufenthalts in Paris, wohin er im Auftrage des Mainzer Kurfürsten mit diplomatischen Weisungen im März 1672 gereist war. Paris war damals das Zentrum der Wissenschaften.

Leibniz suchte und fand den Kontakt zu hervorragenden Gelehrten, unter ihnen Cristiaan Huygens, der seine mathematische Fortbildung maßgeblich förderte. Leibniz vertiefte sich in wichtige mathematische Schriften. In kurzer Zeit konnte er sich zum schöpferischen Mathematiker entwickeln.

Seit dem Spätsommer 1674 hat er sich eingehender auch mit Fragen der Gleichungslehre befasst. Zu den von Leibniz studierten algebraischen Büchern gehörte die 1572 in Bologna in italienischer Sprache erschienene Monographie "L'Algebra" von Rafael Bombelli. In den ersten beiden Kapiteln dieses Buches wird die Lösung von bestimmten (algebraischen) Gleichungen (bis zum Grad 4, mit positiven Koeffizienten) durch "Auflösungsformeln" behandelt.

Die kubischen Gleichungen, deren Lösungsformeln Anfang des 16. Jh. gefunden und 1545 von Cardano publiziert worden waren, werden im wesentlichen wie bei Cardano dargestellt, doch konnte Bombelli darüber hinaus kubische Gleichungen der Form  $x^3 = px + q$  ( $p, q$  positiv) mit  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$  lösen.

Eine Gleichung  $x^3 = px + q$  mit  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{3}\right)^3$  hat die positive Lösung

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (*)$$

Im Fall  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$  dagegen erscheinen in dieser Formel Kubikwurzeln  $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}}$  ( $a, b$  positiv). Sind diese Kubikwurzeln von der Art, dass sie durch ein von Bombelli angegebenes praktisches Verfahren gefunden werden können, so erhält man mit der Formel (\*) die positive Lösung der Gleichung  $x^3 = px + q$  auch im Fall  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ . Hier treten Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auf. Bombelli lehrte zum ersten Mal das Rechnen mit diesen für ihn sophistischen Größen (komplexe Zahlen).

In einem Brief an Huygens berichtete Leibniz im September 1675 über seine Bombelli-Studien. Er verwies auf die von Bombelli untersuchte Gleichung  $x^3 = 15x + 4$ , beider die Formel (\*) unter Benutzung komplexer Zahlen die positive Lösung liefert:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Leibniz wies Huygens darauf hin, dass man auch Summen von Wurzeln geraden Grades bilden kann, die komplexe Zahlen enthalten, die aber selbst reell sind. Als Beispiel gab er die Identität

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

an. Diese machte auf Huygens einen überraschenden Eindruck. Man hätte niemals geglaubt, dass diese Summe  $\sqrt{6}$  ergebe, schrieb er in seinem Antwortbrief.

Ein Jahr später formulierte Leibniz diese Gleichheit auch in einem Brief an Heinrich Oldenburg, den ständigen Sekretär der Royal Society in London, der ihn an John Collins, den mathematischen Berater der Royal Society weiterleitete. Ein Auszug aus dem Leibniz-Brief ging auch an John Wallis in Oxford, einen der bedeutendsten Mathematiker der Generation vor Newton.

In seinem Antwortschreiben an Collins (vom 16. September 1676 - julianisch, das ist der 26. September 1676 im gregorianischen Kalender) ging Wallis auf die Leibnizsche Identität ein. Es wäre das Quadrat dieses Ausdrucks allerdings gleich 6, aber die Angelegenheit wäre etwas mysteriös. Es wäre vielleicht richtiger,

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = -\sqrt{-6}$$

zu setzen. Wer ist im Recht?

Quellen: Hofmann 1972, Pieper 1984a.

## 39 Regelmäßiges Fünf- und Zehneck

Im Jahre 1689 erschien in Augsburg ein Buch mit dem Titel: "Ertz-Herzogliche Handgriffe deß Zirckels und Linials/ oder: Außerwählter Anfang zu denen Mathematischen Wissenschaftten". Der Verfasser Anthoni Ernst Burckhard von Birckenstein war Erzieher des Erzherzogs Joseph (seit 1705 deutscher Kaiser), des damals 11jährigen Sohnes des deutschen Kaisers Leopold I.

"Nicht ohne Ursach" gab er, wie er schrieb, seinem Buch den genannten Titel, "denn erstlich ist ein außerwählter allerköstlichster Anfang Euer Ertz-Herzogliche Durchleucht erstgelegten Fundaments und mit eigener Hand so schön als künstlich mit dem Zirckel und Linial verfestigt; anderstens ist diser Euer Ertz-Herzoglichen Durchleucht Mathematischer Anfang ein hellglänzender Exemplarischer Stral Ihres Durchleuchtigsten Verstandes, wodurch Euer Ertz-Herzogliche Durchleucht Dero unzählbaren Land- Adel zu dem wahren, höchst notwendigen und nutzbares Theil der Philosophiae, nemlich zu der Mathematic antreiben, und dadurch ihnen taugliche Subjecta zu Dero künfftig glorwürdigsten Monarchischen Regierung so viler Länder machen werden". (1)

Der Autor wandte sich aber wegen des praktischen Nutzens der von ihm dargelegten Geometrie an einen größeren Leserkreis: Es "würde sehr wohl gehandelt sein, wenn sonderlich in einer Stadt, wo sich viele Künstler und Handwerksleute befinden, die Jugend in öffentlichen Schulen zu dieser Messkunst angehalten würde, wodurch sie dann ein gutes Fundament zu der dermaleins erlernenden Kunst legen, ihre Werke mit besserem

Vorteil angreifen und viel [en] Irregularitäten im Gemeinwesen [zu] vorkommen könnten." (2)

Die bildlichen Darstellungen der beschriebenen mathematischen Konstruktionen werden im Buch- ergänzt durch Ansichten ungarischer Städte, Festungen und Schlösser (dazu auch historische Begleittexte), im Vordergrund meist noch durch irgendeine kleine Szene belebt.

Burckhard von Birckenstein ist kein schöpferischer Geometer. Die angegebenen geometrischen Konstruktionen findet man schon vor ihm in anderen geometrischen Werken. So konstruiert er das regelmäßige Fünfeck (bzw. Zehneck) bei gegebenem Radius (des Umkreises) wie folgt (3):

"Aufgabe. In einem vorgegebenen Zirkel [Kreis] ein reguläres Fünfeck und Zehneck zu zeichnen oder den vorgegebenen Kreis in fünf oder zehn gleiche Teile abzutheilen. Der vorgegebene Zirkel sei  $ADBE$ . [Abb. 39]

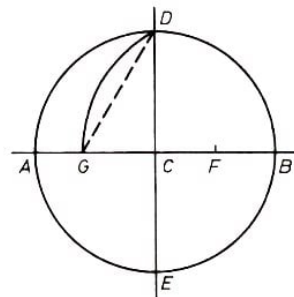


Abb. 39

Handgriff: ziehe den Diameter [Durchmesser]  $AB$ . Zerteile solchen in der Mitte mit der Perpendicular [Senkrechte]  $DE$ . Den halben Diameter [Radius]  $CB$  schneide entzwei [halbiere] im Punkt  $F$ . Setze eine Zirkelspitze in den Punkt  $F$  und die andere öffne bis  $D$  und schreibe damit den Bogen  $GD$ .

Die Weite  $GD$  ist ein fünfter Teil des Kreises  $ADBE$ . Trage diese in die Punkte  $H, M, N, I$  und verbinde die Punkte  $D, H, M, N, I$  durch Geraden; so ist das Fünfeck gezeichnet."

Eine derartige Konstruktion findet sich schon bei Klaudios Ptolemaios, dem bedeutendsten Astronomen der Antike, in dessen Werk "Große Syntaxis" (von den arabischen Gelehrten "Almagest" genannt); später auch bei Albrecht Dürer (1525).

Burckhard von Birckenstein: Wenn man jeden fünften Teil oder Bogen halbiert und die Punkte durch Geraden verbindet, so ist das Decagonum [Zehneck] verfestigt.

Übrigens ist auch  $\overline{GC}$  die Seite  $s_{10}$ , des Zehnecks. Hieraus folgt<sup>7</sup>

$$s_{10}^2 + s_6^2 = s_5^2$$

( $s_5$  Seite des regelmäßigen Fünfecks,  $s_6 = r$  Seite des regelmäßigen Sechsecks), eine Beziehung, die schon Euklid kannte ("Elemente" XII, 10). Die Seitenlänge des Fünfecks ist  $s_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ .

<sup>7</sup>Fehler des Originaltextes korrigiert

Quellen: Euklid 1984, Lietzmann 1909, I. Szabo 1977, Tropfke 1923. Zitate: (1) I. Szabo 1977, S. 109; (2) Lietzmann 1909, S. 57; (3) I. Szabo 1977, S. 112-113.

## 40 Eine Gerade gegebener Länge in einem rechten Winkel

Im Jahre 1663 hatte ein gewisser Henry Lucas dem 1546 gegründeten Trinity-College in Cambridge einen naturwissenschaftlichen Lehrstuhl gestiftet, auf dem als erster der Mathematiker Isaac Barrow berufen wurde.

Der Lehrstuhlinhaber hatte im Wechsel über Astronomie, Mathematik, Physik und Geographie Vorlesungen zu halten. Zu den begabtesten Studenten Barrows zählte Isaac Newton. Sechs Jahre später verzichtete Barrow auf den Lucasischen Lehrstuhl zugunsten seines genialen Schülers Newton, der bereits seit Herbst 1667 zum Lehrkörper der Universität gehörte.

Der Stifter der Professur hatte bestimmt, dass die gehaltenen Vorlesungen entweder gedruckt oder handschriftlich in der Universitätsbibliothek Cambridge hinterlegt werden sollten.

Die von Newton von 1673 bis 1683 gehaltene allgemeine mathematische Einführungsvorlesung, die *Arithmetica universalis*, wurde 1707 von Newtons Nachfolger in der Professur, William Whiston, nach den Vorlesungsheften gedruckt herausgegeben, 1722 aber mit Verbesserungen von Newton selbst ediert.

Die "Arithmetica universalis" ist ein weitgehend algebraisches Werk: Buchstabenrechnung, Auflösung algebraischer Gleichungen einer oder mehrerer Unbekannten, geometrische Aufgaben, welche algebraisch (mittels Gleichungen) gelöst werden.

Das Buch enthält überdies 77 Aufgaben mit Lösungen, darunter 61 geometrische Aufgaben. Die Aufgabe XXIV unter diesen geometrischen Problemen lautet:

In einem rechten Winkel  $DAF$  (Abb. 40) ist eine Gerade  $\overline{FE}$  gegebener Länge so einzuzeichnen, dass die verlängerte Gerade  $\overline{FE}$  durch den gegebenen Punkt  $C$  hindurchgehe, der von den Seiten  $(\overline{FB}, \overline{AD})$  des rechten Winkels gleichweit entfernt ist.

Newton gab mehrere Lösungen. Die beiden ersten führen zunächst auf Gleichungen vierten Grades. Danach diskutierte Newton, welches von den zu der Aufgabe gehörenden Stücken man am vorteilhaftesten als Unbekannte wählen sollte. Das ist das Stück, zu dem es kein anderes gleichberechtigtes gibt!

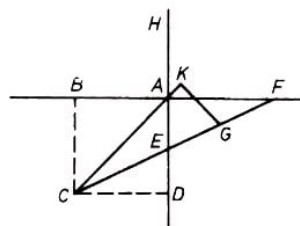


Abb. 40

Zu  $\overline{DE}$  oder  $\overline{AE}$  oder  $\overline{CE}$  gibt es gleichberechtignte, nämlich  $\overline{BF}$  bzw.  $\overline{AF}$  bzw.  $\overline{CF}$ .



Es gibt keinen Grund, von den Paaren  $\overline{DE}$ ,  $\overline{BF}$  oder  $\overline{AE}$ ,  $\overline{AF}$  oder  $\overline{CE}$ ,  $\overline{CF}$  eine Strecke vorzuziehen.

Zum Punkt  $G$  (durch den die Strecke  $\overline{EF}$  halbiert werde) gibt es keinen gleichberechtigten unter den zu der Aufgabe gehörenden Punkten.  $G$  liegt auf dem Kreis um  $A$  mit dem Radius  $\frac{\overline{EF}}{2}$ , braucht also nur auf diesem Kreis gesucht zu werden. Die Gerade  $\overline{CA}$  ist einmalig in der Abbildung.

$K$  sei auf dieser Geraden so gewählt, dass  $\overline{GK}$  senkrecht darauf steht. Newton wählte  $\overline{AK}$  als Unbekannte  $z$  und fand mit  $\overline{AC} = e$ ,  $\overline{EG} = b$  die quadratische Gleichung

$$z^2 = -\frac{1}{2}ez + \frac{1}{2}b^2$$

(Wie?)

Quellen: Cantor 1901, Newton 1761.

## 41 Die sieben Brücken

Leonhard Euler ist unstreitig einer der größten Mathematiker aller Zeiten. Er zeichnete sich nicht nur durch die Genialität seiner Werke, sondern ebenso sehr durch seine erstaunliche, ungeheure Produktivität aus. Die rein mathematischen Arbeiten Eulers umfassen in den seit 1911 herausgegebenen Gesammelten Werken 29 Bände, die Schriften zur Mechanik und Astronomie werden 31 Bände, die übrigen Arbeiten (u. a. zur Philosophie und Physik) werden zwölf Bände füllen.

Der französische Mathematiker Lagrange empfahl: "Studieren Sie Euler, wenn Sie ein Mathematiker werden wollen, und bemühen Sie sich selbst die Fragen aufzulösen, die er sich stellt." (1)

"Es ist wunderbar, dass man noch heute jede seiner Abhandlungen nicht bloß mit Belehrung, sondern mit Vergnügen liest" (2), schrieb der deutsche Mathematiker Jacobi.

Gauß schrieb über Euler: "... wie ein Stern erster Größe leuchtet der unsterbliche Leonhard Euler hervor. Von keinem andern Mathematiker älterer oder neuerer Zeit kann man eine solche fast unbegreifliche Schnelligkeit in den schwierigsten Arbeiten bey einer solchen unerschöpflichen Fruchtbarkeit an neuen Ideen und Hilfsquellen rühmen. Alle Theile der Mathematik bearbeitete er, und die meisten erhielten unter seinen Händen eine ganz neue Gestalt. Unvergesslich werden seine Verdienste um die höhere Arithmetik, die Behandlung der Kreisfunctionen, die Anwendung der Analyse auf die krummen Linien, die Lehre von den Reihen, die Theorie der algebraischen Gleichungen, die Differential- und Integralrechnung, die mechanischen und die optischen Wissenschaften seyn." (3)

Im Herbst 1735 legte Euler der Akademie der Wissenschaften in Petersburg eine Arbeit vor, die dort im Jahre 1741 erschien (in jenem Jahr, als Euler von Petersburg nach Berlin übersiedelte, wo er 25 Jahre blieb; danach kehrte er wieder nach Petersburg zurück).

Zu dieser Arbeit wurde er durch folgendes Problem veranlasst:

"Zu Königsberg in Preußen ist eine Insel A, genannt 'Der Kneiphof', und der Fluss, der sie umfließt, teilt sich in zwei Arme, wie aus der Figur [Abb. 41] ersichtlich ist. Über die Arme dieses Flusses führen sieben Brücken *a, b, c, d, e, f* und *g*.

Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spaziergang so einrichten könne, dass er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreite. Es wurde mir gesagt [so schrieb Euler], dass einige diese Möglichkeit verneinen, andere daran zweifeln. dass aber niemand sie erhärte." (4)

Ist der Spaziergang möglich oder nicht?

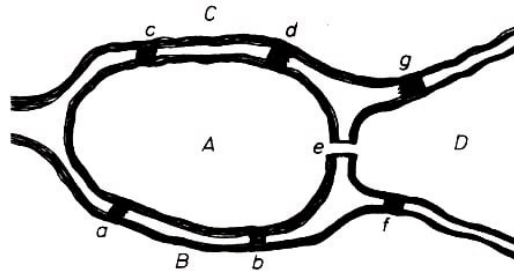


Abb. 41

In seiner Arbeit befasste sich Euler allerdings mit dem allgemeineren Problem: "Wie auch die Gestalt des Flusses und seine Verteilung in Arme, sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht." (4)

Quellen: Speiser 1925. Zitate: (1) Külß 1865, S. 351; (2) Jacobi 1907, S. 209; (3) Biermann 1983b, S. 424-425; (4) Speiser 1925, S. 128.

## 42 Beim Graben eines Brunnens

Wenzelaus Johann Gustav Karsten gehört nach Euler, Lambert und Lagrange, neben Segner, Kaestner, Hindenburg und Pfaff zu den bedeutenden an deutschen Universitäten oder Akademien wirkenden Mathematikern der zweiten Hälfte des 18. Jh.

Von Ostern 1755 an hielt er Vorlesungen; zunächst in Rostock, von 1760 bis 1778 in Bützow und danach in Halle. Gustav Karsten hat sich kritisch und schöpferisch mit der mathematischen Ausbildung, insbesondere an den Universitäten, auseinandergesetzt.

Die Mathematik bildete in jener Zeit beim Magisterexamen eines von vielen Fächern. Sicher war es schwierig, zukünftige Mediziner, Juristen und Theologen vom Nutzen der Mathematik zu überzeugen. Anderen Studenten diente die Mathematik der Vorbereitung zum Erlernen der geodätischen und architektonischen Wissenschaften.

Infolge der teilweise noch ungenügenden Entwicklung der Mathematik konnten vielleicht die in die Mathematik gesetzten zu großen Hoffnungen, selbst in der Mechanik, Hydrostatik, Astronomie, Artillerie, Physik und Physiologie, oft nicht erfüllt werden. Aber darin bestand nicht das Problem.

Als eine Ursache "warum die allermeisten, welche auf Universitäten die Mathematik treiben, entweder gar nichts, oder doch viel zu wenig davon lernen, als dass es einen praktischen Nutzen bringen könnte", nannte KARSTEN die sowohl im Vortrag als auch

in den Schriften oft praktizierte strenge synthetische Methode: Der Vortragende bzw. Verfasser lässt keine Spur des Weges erkennen, auf welchem er zu seinen Resultaten gelangt ist.

Die Mitteilung von Erkenntnissen schreitet "von den Gründen zu den Folgen" fort.

Auch Euler hatte geklagt, dass er durch das Studium synthetisch abgefasster Werke nicht in den Stand gesetzt worden wäre, Aufgaben, welche nur wenig von den in ihnen gelösten verschieden gewesen wären, für sich zu lösen, obwohl er die gegebenen Lösungen sehr wohl verstanden zu haben geglaubt hätte.

Karsten wusste, dass es unter den Studenten "nicht viele recht systematische Köpfe" gab, "und wenn solche, die nicht gleichsam von Natur schon Geometer sind, noch dazu mit einer Menge von Sachen überhäuft werden, die sie in kurzer Zeit lernen sollen, so werden sie bald ganz verwirrt, verdrieslich und lassen alles liegen".

Er forderte, "in den gewöhnlichen halbjährigen Collegiis lieber weniger Sachen, eben diese Sachen aber ausführlicher vorzutragen, damit die Zuhörer von mittelmäßigen Fähigkeiten (und sind deren wohl nicht gewöhnlich die meisten?) Zeit gewinnen nachzukommen".

Es wäre ferner besser, "ebenfalls wegen der Zuhörer von mittelmäßigen Fähigkeiten", "die für die Meister in der Mathematik sonst allerdings angenehme Kürze in den mathematischen Compendien zu vermeiden". (1)

Karsten plante im Jahre 1767 ein zwölf oder mehr Teile umfassendes Buch, das seine Forderungen realisieren und auf diese Weise "zu allgemeiner Verbreitung so nützlicher Kenntnisse, als die Mathematik lehret, das seinige beitragen" sollte.

Nur acht Bände dieses "Lehrbegriffs" der gesamten Mathematik sind zwischen 1767 und 1777 erschienen: Die ersten beiden Teile enthalten die theoretische Elementarmathematik, die weiteren sechs Teile die praktische Mathematik, d. h. Physik, Statik, Mechanik, Hydraulik, Pneumatik, Optik, Perspektive, Photometrie. Astronomie, Dioptrik und Katoptrik fehlen noch.

Es sollten weitere Teile über die höhere sowohl theoretische als auch praktische Mathematik folgen. Die Richtigkeit der Grundsätze, nach denen dieses Werk verfasst worden ist, zeigte sich sicher darin, dass noch nach Karstens Tod verschiedene Neubearbeitungen veröffentlicht werden konnten.

Im zweiten Band (Abschnitt 9 über "Die allgemeine Rechenkunst") behandelte Karsten arithmetische Zahlenfolgen. In einer solchen Folge

$$a_1 = a, \quad a_1 = a_1 + d, \quad a_2 = a_1 + 2d, \quad \dots, \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ist die Differenz zweier benachbarter Glieder konstant ( $= d$ ). Jedes Glied  $a_k$  ( $k \geq 2$ ) ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder. Für die Summe  $S$  der ersten  $n$  Glieder einer arithmetischen Folge gab Karsten

$$S = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

an. Dann schrieb er: "Es haben diese Lehren von den Progressionen [Folgen] nicht allein in der Mathematik ihren Nutzen, sondern es können auch im gemeinen Leben mancherlei Rechnungsfragen vorkommen, deren Auflösung von diesen Lehren abhängt.

Wenn z. B. eine Arbeit desto mehr Schwierigkeit hat, je länger sie fortgesetzt wird: so werden die Arbeitskosten desto größer, und es kann, nach Beschaffenheit der Arbeit diese Vermehrung der Arbeitskosten, in arithmetischer Progression fortgehen.

Bei hohen Gebäuden verursachen die obersten Stockwerke mehr Kosten als die unteren. Bei der Ausgrabung eines Brunnens wird die Arbeit desto beschwerlicher, je tiefer man kommt. Denn die Erde muss desto höher gebracht werden, und es werden immer mehr Neben-Arbeiten, ansteifen, aussetzen und unterfahren erfordert, damit nicht alles nachfalle." (2)

Als Beispiel führte Karsten die folgende Aufgabe an:

Ein Arbeiter soll einen Brunnen von 12 Fuß Tiefe ausheben und wird als Lohn 13 Taler erhalten. Nachdem er nur bis auf 8 Fuß gekommen ist, kann er seine Arbeit nicht fortsetzen, die ein anderer übernimmt.

Nun ist die Frage, wie die als Lohn vereinbarten 13 Taler = 312 Groschen unter beide Arbeiter zu verteilen sind. Dabei "nimmt man an, dass der zweite Fuß zweimal, der dritte dreimal so viel Arbeit erfordere, als der erste, u.s.f." (3).

Quellen: Karsten 1767, Karsten 1768, Karsten 1854. Zitate: (1) Karsten 1767, Vorrede; (2) Karsten 1768, S. 268-269; (3) ebenda, S. 270.

## 43 Ein Maultier und ein Esel

Im Jahre 1770 erschien in St. Petersburg (dem heutigen Leningrad) Leonhard Eulers "Vollständige Anleitung zur Algebra" (in zwei Teilen), ein später in viele Sprachen übersetztes Lehrbuch der Algebra.

Das Buch zeichnet sich durch eine außerordentliche Klarheit aus. Der erblindete Euler hatte es seinem Diener, einem Schneidergesellen, der nur geringe mathematische Kenntnisse besaß, diktiert.

Euler vermochte den Text so einfach vorzutragen, dass sein Diener den teilweise recht schwierigen Stoff verarbeiten und manche Rechnungen selbständig ausführen konnte. Das weit verbreitete Buch ist sogar in Reclams Universalbibliothek erschienen. Jeder mathematisch interessierte Schüler sollte gleich jenem Schneidergesellen selbst einmal Probleme daraus unter Eulers Anleitung durchdenken!

Im ersten Abschnitt des zweiten Teils von Eulers Buch befindet sich unter Nr. 50 die folgende Aufgabe:

"Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud. [Das damals in Russland übliche Gewicht Pud beträgt 40 Pfund.] Der Esel beschwert sich über seine Last, und sagt zum Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel als du. Darauf antwortete der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du. Wie viel Pud hat jeder getragen?" (1)

Eine ähnliche Aufgabe kommt schon in einer Sammlung griechischer Epigramme als sogenanntes Euklidisches Problem vor:

"Esel und Maultier schritten einher beladen mit Säcken. Unter dem Drucke der Last

schwer stöhnt' und seufzte der Esel. Jenes bemerkt es und sprach zu dem kummerbeladenen Gefährten:

'Alterchen, sprich, was weinst du und jammerst schier wie ein Mägdlein? Doppelt soviel als du grad' trüg' ich, gäbst du ein Maß mir; nähmst du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe.' Geometer, du kundiger, sprich, wieviel sie getragen." (2)

Quelle: Euler 1911. Zitate: (1) Euler 1911, S. 230-231; (2) Nesselmann 1842, S. 480.

## 44 **Stiere und Kühe**

Im Frühjahr des Jahres 1770 trat Gotthold Ephraim Lessing sein Amt als Bibliothekar des Herzogs Karl von Braunschweig in Wolfenbüttel an. Drei Jahre später begann er eine Reihe von Veröffentlichungen aus den handschriftlichen Schätzen der Bibliothek.

"Die Herzogliche Bibliothek zu Wolfenbüttel, deren Aufsicht mir anvertraut ist, hat von ihrer ersten Stiftung an, die Augen der Gelehrten ganz besonders auf sich gezogen", schrieb Lessing.

"Und mit Recht. Die meisten Bibliotheken sind entstanden: nur wenige sind angelegt worden." (1)

Zu diesen zählte die Wolfenbüttler Bibliothek. Lessing schätzte ein, dass "in diesem [18.] Jahrhundert schwerlich eine Bibliothek in Europa so viele und so wichtige Beiträge zu so mancherlei Teilen der Gelehrsamkeit geliefert hat, als die Unsrige." (2) Mit seinen Veröffentlichungen "Zur Geschichte und Literatur. Aus den Schätzen der Herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel" wollte er "der Welt einige Proben vorlegen". (2)

Lessing fand in der Bibliothek eine mittelalterliche griechische Handschrift, in welcher sich Auszüge aus der unter dem Namen "Anthologie" bekannten Sammlung griechischer Gedichte, zusammengetragen im 13. Jh. vom namhaftesten Philologen der byzantinischen Spätzeit, Maximos Planudes, befinden. Mehrere dieser sogenannten Epigramme mathematischen Inhalts hatte schon Bachet veröffentlicht. Lessing konnte ihre Anzahl um eines vermehren.

"Ich glaube nicht", so betonte er, "dass mir schon jemand damit [mit der Publikation desselben] zuvor gekommen. Wenigstens habe ich es an keiner Mühe fehlen lassen, mich überall auf das genaueste darnach zu erkundigen: so, dass wenn es dennoch geschehen wäre, es nur an einem Ort könnte geschehen sein, wo es so gut als nicht geschehen wäre." (3)

Das in dem Epigramm in Versen abgefasste Problem soll, so Lessing, "wenn es nicht von dem Archimedes selbst abgefasst worden: doch von ihm für wert erkannt sein, dass er es an den Eratosthenes geschickt hätte, um es den Messkünstlern zu Alexandria zur Auflösung vorzulegen. Dieses besagt die Aufschrift; und nun urteile man von dem Problem selbst" (4):

Sage, Freund, mir genau die Zahl von Helios Rindern.  
Sorgsam rechne mir aus, wenn dir Weisheit nicht fremd,

Wieviel deren es waren, die auf der Insel Sicilien  
Fluren weideten einst, vierfach in Herden geteilt.  
Jede Herde war anders gefärbt; die erste war milchweiß,  
Aber die zweite erglänzt' von ganz dunkeltem Schwarz.  
Braun war die dritte sodann, die vierte scheckig; in jeder  
Hatten die Stiere an Zahl weit das Übergewicht.  
Und in solchem Verhältnis nun standen diese: die weißen  
Glichen den braunen an Zahl und noch dem dritten Teil  
Samt der Hälfte der schwarzen, o Freund, zusammengekommen.  
Weiter der schwarzen Meng' war gleich dem vierten Teil  
Und dem fünften der scheck'gen, vermehrt um sämtliche braune.  
Endlich der scheckigen Stier' Zahl gleichsetzen du musst,  
Freund, dem sechsten und auch dem siebten Teile der weißen,  
Noch gerechnet dazu sämtlicher braunen Meng'.  
Anders verhielt sich's jedoch mit den weiblichen Rindern: es waren  
Die mit weißlichem Haar gleich dem dritten Teil  
Und dem vierten der schwärzlichen Rinder, der Kühe wie Stiere.  
Ferner die schwarzen Küh' waren dem vierten Teil  
Und dem fünften der Herde der scheckigen gleich, wenn gerechnet  
Wurden sowohl die Küh' als auch die Stiere dazu.  
Ebenso waren die scheckigen Küh' ein Fünftel und Sechstel  
Aller mit braunem Haar, wenn zur Weide es ging.  
Endlich die braunen Küh' ein Sechstel waren und Siebtel  
Von der gesamten Herd', welcher weißlich das Haar.  
Kannst du sagen genau, mein Freund, wie viele der Rinder  
Dort nun waren vereint, auch wie viele es gab  
Kühe von jeder Farb' und wohlgenährte Stiere,  
Dann recht tüchtig fürwahr nennet im Rechnen man dich." (5)

Im Epigramm sind noch zwei weitere Bedingungen genannt. Doch dieser Textteil ist nach Nesselmann ein "später hinzugefügter Anhang".

Quellen: Lessing 1793, Nesselmann 1842.

Zitate: (1) Lessing 1773, S. 3; (2) ebenda, S. 5; (3) Lessing 1793, S. 422; (4) ebenda, S. 422-423; (5) Übersetzung von G. Wertheim, in: Diophant 1890, S. 343-344; (6) Nesselmann 1842, S. 489.

## 45 Konzentrische Kreise und quadratische Gleichungen

Im Jahre 1773 siedelte der siebzehnjährige Nicolaus Fuss aus der Schweiz nach Petersburg über. Auf Empfehlung Daniel Bernoullis, Professor für Physik an der Universität Basel, sollte er Assistent Leonhard Eulers werden.

Neben Johann Albrecht Euler (dem ältesten Sohn Eulers), dem Physiker Ludwig Krafft, dem schwedischen Astronomen und Mathematiker Anders Lexell und Michael Golowin

(einem Neffen Lomonossows) war es dann vor allem Nicolaus Fuss, der dem erblindeten, aber weiterhin äußerst schöpferisch tätigen Euler bei der Redigierung seiner Arbeiten half.

Nicolaus Fuss besaß, wie der Euler-Biograph Spiess schrieb, "die rechte Mischung von originalem Talent und Anpassungsfähigkeit, die es ihm ermöglichte, die Rolle eines Eckermann<sup>8</sup> bei dem alten Euler zu übernehmen".

Fuss hielt am 23. Oktober 1783 (a. St.<sup>9</sup>) in der Petersburger Akademie der Wissenschaften auch die Gedächtnisrede auf Euler.

Fuss, natürlich auch ein guter Mathematiker, seit 1793 auswärtiges Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, schrieb einige mathematische Lehrbücher und verfasste zahlreiche Abhandlungen.

In seiner im Leningrader Akademie-Archiv aufbewahrten Schrift "Beweis einiger Eigenschaften des Kreises" konstruierte N. Fuss geometrisch eine Lösung der quadratischen Gleichung  $x^2 + cx = ab$  ( $a, b, c$  positiv).

Er zeichnete einen Kreis um  $C$  mit einem Radius  $r$  (wobei  $r > \frac{c}{2}$ ,  $r > \frac{a-b}{2}$  ist) und darin zwei Sehnen  $\overline{MN} = a - b$ ,  $\overline{ND} = c$  (Abb. 45).

Die Sehne  $\overline{MN}$  wird über  $N$  hinaus bis zum Punkt  $O$  verlängert, wobei  $\overline{NO} = b$  ist. Mit dem Radius  $s = \overline{CO}$  wird um  $C$  ein konzentrischer Kreis gezeichnet, der die Verlängerung von  $\overline{DN}$  über  $N$  hinaus in  $E$  schneidet. Dann gilt für  $\overline{EN} = x$  die Gleichung  $x^2 + cx = ab$ . Warum?

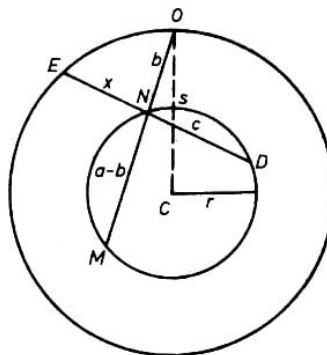


Abb. 45

Quellen: Fuss 1965. Zitat: Spiess 1929, S. 183-184.

## 46 Die Teilung eines Königreiches

Ein rechteckiger Papierstreifen (mit den Ecken  $A, B, C, D$ ) hat zwei Seiten (Abb. 46.1). Die eine Seite des Streifens sei rot, die andere gelb gefärbt. Klebt man die

<sup>8</sup>Der Dichter und Schriftsteller Johann Peter Eckermann war Gehilfe Goethes bei der Redaktion der letzten Ausgabe von dessen Werke. Er wurde bekannt durch sein vertrautes Verhältnis zu Goethe und seine Mitteilungen über ihn.

<sup>9</sup>Stil bedeutet die verschiedene Datierung nach dem julianischen und dem gregorianischen Kalender. Man unterscheidet alten Stil (a. St.), nach dem julianischen Kalender, und neuen Stil (n. St.), nach dem gregorianischen Kalender (z. B. 23. 10. 1783 a. St. = 3. 11. 1783 n. St.). Gegenwärtig ist das gregorianische Datum dem julianischen um 13 Tage voraus.

Ecken zusammen (so dass  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $D$  zusammentreffen), so entsteht ein geschlossenes Papierband mit zwei Rändern.

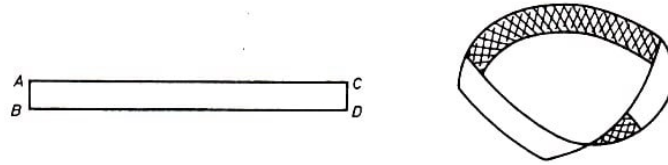


Abb. 46.1, 46.2

Soll eine Ameise über beide Seiten laufen, so muss sie an irgendeiner Stelle einmal den Rand überschreiten. Dreht man dagegen zuerst ein Ende des Streifens um den Winkel  $180^\circ$  (halbe Drehung) und klebt danach beide Enden zusammen (also so, dass die Punkte  $A$  und  $D$  bzw.  $B$  und  $C$  zusammentreffen), so entsteht aus dem Papierstreifen wieder ein geschlossenes Papierband (Abb. 46.2).

Jedoch kann die Ameise nun aus dem roten Bereich ohne Überschreiten der Randlinie in den gelben Bereich gelangen, und umgekehrt. Das Band hat nur eine Seite, und auch nur eine Kante. Diese überraschende Entdeckung machte 1858 August Ferdinand Möbius. Das einseitige Band wird "Möbiussches Band" genannt.<sup>10</sup>

Möbius wirkte seit 1816 in Leipzig. Er war Professor für Astronomie und Observator auf der Sternwarte. An der Universität hat er zunächst vor allem astronomische Vorlesungen gehalten, dann aber auch Vorlesungen mathematischen Inhalts. Seine bedeutendsten wissenschaftlichen Leistungen gehören zur Geometrie.

Im Jahre 1840 hatte er (wie später Richard Baltzer, einer seiner damaligen Studenten, erzählte) in einer geometrischen Vorlesung seinen Zuhörern die folgende Aufgabe in Form eines Märchens vorgelegt:

"Es war einmal ein König in Indien, der hatte ein großes Reich und fünf Söhne. Der letzte Wille des Königs bestimmte, die Söhne sollten nach dem Tode des Königs das Reich unter sich auf solche Weise teilen, dass das Gebiet eines jeden mit den vier übrigen Gebieten eine Grenzlinie (nicht bloß einen Punkt) gemein hätte. Wie war das Reich zu teilen?"

(1) Die Hauptstädte der einzelnen Reiche sollen sich dabei gegenseitig kreuzungsfrei durch Straßen verbinden lassen derart, dass jede Straße nur durch die beiden Länder, deren Hauptstädte sie verbindet, und über deren gemeinsame Grenze führt.

Baltzer berichtete: "Als wir in der nächsten Vorlesung bekannten, wir hätten uns vergeblich bemüht, eine solche Teilung zu finden, lächelte Möbius und bemerkte, es tue ihm leid, dass wir uns abgemüht hätten, denn die geforderte Teilung sei unmöglich."

(1) Warum?

<sup>10</sup>Wohl unabhängig von Möbius kannte um dieselbe Zeit auch schon J. B. Listing dieses Band, und hat 1861 - vor Möbius, 1865 - darüber publiziert. Im Musée Lapidaire d'Art Païen in Arles, Frankreich, gibt es ein römisches Mosaik aus dem 3. Jh., das die Orpheuslegende bildlich darstellt. Das Bild wird von quadratförmigen Mosaiken umrahmt, deren jedes ein anderes geometrisches Gebilde darstellt. Als Modell für eines dieser Gebilde diente wohl ein "Möbiusband", das aus einem gegebenen Papierstreifen durch fünf Halbdrehungen (statt der einen Halbdrehung beim oben beschriebenen Möbiusband) entsteht.



Und: Wie kann eine solche Teilung des Reiches in zwei, drei oder vier - nicht unbedingt gleichgroße - Teile erfolgen?

Stellt man sich den Papierstreifen so vor, dass jeder eingezeichnete Punkt oder jede eingezeichnete Linie, jede Farbe ebensogut auf einer Seite wie auf der anderen existiert, dann kann man das daraus geklebte Möbiussche Band in der geforderten Art in fünf Länder aufteilen. (Wie?)

Heinrich Tietze zeigte am 10. Februar 1905 auf einer Sitzung der mathematischen Gesellschaft in Wien, dass man das Möbiussche Band auf diese Weise sogar in sechs Gebiete, aber nicht in mehr als sechs, aufteilen kann.

Quellen: Baltzer 1885, Heffter 1891, Larison 1973, Tietze 1910, Tietze 1949. Zitate: (1) Baltzer 1885, S. 1.

## 47 Ebene Figuren gleichen Umfangs mit größtem Flächeninhalt

Im Jahre 1841 legte der Geometer Jakob Steiner, Professor an der 1810 gegründeten Berliner Universität, der Pariser Akademie zwei seiner bedeutendsten Abhandlungen vor, in denen er die Ergebnisse seiner langjährigen Untersuchungen "über Maximum und Minimum bei den Figuren der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt" niedergelegt hat.

Darin beschreibt Steiner auch eine einfache geometrische Konstruktion, die es ermöglicht, zu jeder geschlossenen und nicht kreisförmigen ebenen Kurve  $K$  eine neue Kurve  $C$  zu konstruieren, die wieder eben- und geschlossen ist, ferner gleichen Umfang wie  $K$ , aber größeren - Flächeninhalt als  $K$  hat.

Schon der Grieche Zenodoros hatte vermutet, dass es der Kreis ist, der von allen ebenen Figuren gleichen Umfangs den größten Flächeninhalt hat. Er konnte dieses nur für den Spezialfall beweisen, dass er den Kreis mit Polygonen verglich.

Steiner meinte nun, diese Vermutung allgemein bewiesen zu haben. Aus der Konstruktion der Kurve  $C$  aus der Kurve  $K$  folgerte er nämlich:

"Unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfang hat der Kreis den größten Inhalt."

Dirichlet, ebenfalls Professor der Berliner Universität, soll Steiner auf die Lückenhaftigkeit seiner Schlussweise hingewiesen haben. Worin besteht diese?

Quellen: Blaschke 1916, Müller 1953, Steiner 1882.

## 48 Gitterpunkte

Im August 1843 beantragte der zwanzigjährige Gotthold Eisenstein beim Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Berlin die Zulassung zur Reifeprüfung. Aus diesem Anlass legte er der Prüfungskommission einen Lebenslauf vor, in dem er auch sein bisheriges "mathematisches Leben und Treiben" (1) schilderte:

"Ich konnte eher als sechsjähriger Knabe den Beweis eines mathematischen Satzes verstehen, als dass man in der Stube die Mütze von dem Kopf nehmen [...] müsse. [...] In den unteren Klassen erhielt ich meine Elementarbildung.

Aus dieser Zeit entsinne ich mich noch, wie viel Qual mir das Schreiben, und im Rechnen die langen Multiplikationsexempel machten. Hieraus würde man nun mit Unrecht schließen, dass es schlecht mit meinen mathematischen Fähigkeiten gestanden habe, wenn ich am Rechnen keine Neigung fand; denn nur das Mechanische, sich stets Wiederholende der Operation verdross mich, so wie mich noch jetzt verwickelte Rechnungen ohne weiteren Zweck anwidern, während ich keinen Fleiss scheute, wenn es etwas Neues gab, worin ich Geist, Idee bemerkte." (2)

Später besuchte Eisenstein das Gymnasium.

"Meine Neigung zur Mathematik wurde jetzt so vorherrschend, dass ich oft darüber das Andere vernachlässigte, und meine Fortschritte in den übrigen Lehrgegenständen keineswegs glänzend genannt werden konnten. [...] Ich hatte mich schon damals fest entschlossen, mich dem Studium der Mathematik zu widmen, und ohne erst zu fragen, welche Laufbahn mir auf diesem Wege offen stände, folgte ich hierin nur meiner Neigung und einer inneren Stimme. [...]

Was mich an: der Mathematik so gewaltig und ausschließend anzog, war, neben dem Inhalte selbst, besonders die eigentümliche Art der Denktätigkeit, mit welcher die mathematischen Dinge behandelt werden. Diese Art des Schließens und Auffindens neuer Wahrheiten aus den alten, sowie die außerordentliche Klarheit und Evidenz der Sätze, und das Geistreiche der Ideen, welcher ganze Theorien zu Grunde liegen, hatte einen unwiderstehlichen Reiz für mich. Keine andere Wissenschaft schien eine so reiche Ernte und einen so unerschöpflichen Stoff zur Ausübung dieser Geistestätigkeit darzubieten. [...]

Ich gewöhnte mich bald daran, von den einzelnen Sätzen ab schärfer in den Zusammenhang zu dringen und ganze Theorien als eine Einheit aufzufassen. So ging mir die Idee des mathematisch Schönen auf. Es gibt ein solches mathematisch Schöne, ebenso wie ein ästhetisch Schönes, welches man aber nur dann erst begreift, wenn man voll Begeisterung ein ganzes System von Entwicklungen [...] in ihrer Verkettung, Harmonie und Genialität als ein organisches Ganze wie ein Gemälde im Geiste überschaut. [...]

Da ich es mir zum Gesetz machte, jede neue Theorie, sobald ich sie verstanden hatte, gleich schriftlich auszuarbeiten, so prägten sich mir die Dinge tiefer ein, und ich beherrschte sie vollkommen, wozu noch kam, dass ich jede Sache auf mannigfaltige Arten kennen zu lernen suchte. Oft spazierte ich im Garten oder Zimmer auf und ab und demonstrierte mir, gleichsam mich selbst unterrichtend, ganze Reihen von Sätzen vor, deren Beweise mir klar waren. Ich kann diese Methode als sehr praktisch empfehlen. [...]

Als ich in der höheren Analysis schon ziemlich fest war, wurde ich durch andere Betrachtungen auf die Zahlentheorie geführt, die ich bisher merkwürdiger Weise für unfruchtbar gehalten hatte. Ich erkannte meinen Irrtum und legte mich nun mit um so größerem Eifer auf diesen Zweig der Mathematik [...].

Dieser doppelt schwierigen und doppelt interessanten Wissenschaft wandte ich seitdem meinen Hauptfleiß zu, und ich habe mir das Meiste und Wichtigste aus derselben zu eigen gemacht; besonders bin ich auch zu ihren neuesten Entdeckungen vorgedrungen." (3)

Am 21. Oktober 1843 wurde Eisenstein an der Berliner Universität immatrikuliert. Bei einem Besuch in Göttingen (im Sommer 1844) gewann er "Gauß' höchste Wertschätzung und nicht mehr abreißende Anteilnahme" (4).

Mit dem Göttinger Mathematiker Moritz Abraham Stern schloss er Freundschaft. Kurze Zeit später konnte er ihm in einem Brief über seinen Beweis eines zahlentheoretischen Satzes berichten und hinzufügen:

"Wie glücklich würde sich der gute Euler geschätzt haben, diese paar Zeilen vor etwa 70 Jahren zu besitzen." (5)

Euler hatte den von Eisenstein behandelten zahlentheoretischen Satz (der von Legendre "Quadratisches Reziprozitätsgesetz" genannt wurde) entdeckt. Den ersten vollständigen Beweis desselben gab im Jahre 1796 der achtzehnjährige Carl Friedrich Gauß.

"Ein ganzes Jahr quälte mich dieser Satz und entzog sich den angestrengtesten Bemühungen, bis ich endlich den ... Beweis erlangte" (6), berichtete Gauß darüber. Später fand Gauß weitere Beweise (insgesamt acht).

Eisenstein schrieb an Stern: "Ich habe nicht eher geruht, als bis ich meinen geometrischen Beweis des Reziprozitätsgesetzes, der Ihnen so viel Spaß gemacht hat, und der auch, beiläufig gesagt, Jacobi außerordentlich gefällt, von dem Lemma befreit habe, von dem er noch abhängig war, und er ist jetzt so einfach, dass er sich in ein paar Zeilen mitteilen lässt." (7)

Eisenstein zeigt, dass der zahlentheoretische Satz bewiesen wäre, wenn man

$$T + S = \frac{q-1}{2} \frac{p-1}{2} \quad (1)$$

zeigen könnte. Hierin bezeichnen  $S, T$  für ungerade Primzahlen  $p, q$  die Summen

$$S = \left[ \frac{q}{p} \right] + \left[ \frac{2q}{p} \right] + \left[ \frac{3q}{p} \right] + \dots + \left[ \frac{\frac{p-1}{2}q}{p} \right]$$

$$T = \left[ \frac{p}{q} \right] + \left[ \frac{2p}{q} \right] + \left[ \frac{3p}{q} \right] + \dots + \left[ \frac{\frac{q-1}{2}p}{q} \right]$$

(Ist  $r$  eine reelle Zahl, so bezeichne  $[r]$  die größte ganze Zahl, die nicht größer als  $r$  ist.)

Eisenstein konnte die Gleichung (1) geometrisch nachweisen; indem er die Gesamtanzahl der Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) in einem im rechtwinkligen  $x, y$ -Koordinatensystem gelegenen Rechteck mit den vier Ecken  $(0, 0)$ ,  $(\frac{p}{2}, 0)$ ,  $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$ ,  $(0, \frac{q}{2})$  bestimmte und mit der Anzahl der Gitterpunkte oberhalb und unterhalb der Diagonalen (durch  $(0, 0)$ ) verglich. Wie?

Quellen: Biermann 1964, Eisenstein 1975a, Eisenstein 1975b, Pieper 1978.

Zitate: (1) Eisenstein 1975b, S. 895; (2) ebenda, S. 886-887; (3) ebenda, S. 892-894; (4) Biermann 1964, S. 922; (5) Eisenstein 1975a, S. 794; (6) Pieper 1978a, S. 20-21; (7) Eisenstein 1975a, S. 793-794.

## 49 Die Vielfachen der 9

Der berühmte Forschungsreisende und Naturforscher Alexander von Humboldt wurde in seiner Jugend von Ernst Gottfried Fischer, Professor am Berliner Gymnasium zum Grauen Kloster, in die Mathematik eingeführt. Hätte Humboldt "sich mit Mathematik allein oder auch nur hauptsächlich beschäftigen können, so bin ich überzeugt", urteilte Fischer im April 1789, "dass ich einen sehr guten Mathematiker aus ihm hätte bilden können" (1).

Als Student in Göttingen widmete er sich zwar vor allem der Naturgeschichte und den Sprachen, beschäftigte sich nebenbei aber auch mit der Mathematik. Humboldt erwarb die mathematischen Kenntnisse, die er als Forschungsreisender für geographische Ortsbestimmungen auf astronomischer Grundlage, für barometrische Höhenmessungen und für erdmagnetische Messungen brauchte.

In den Jahren 1799-1804 führte ihn eine Reise durch die spanischen Kolonien in Süd- und Mittelamerika, auf der er die Geographie, die Tier- und Pflanzenwelt, aber auch die gesellschaftlichen Verhältnisse, die politische und wirtschaftliche Situation, den Handel, die Verkehrsverbindungen, die soziale Lage der Einwohner, die Geschichte erforschte. Die Auswertung dieser amerikanischen Forschungsreise nahm er während eines fast zwanzigjährigen Aufenthalts in Paris vor.

Die französische Hauptstadt war damals der Mittelpunkt des naturwissenschaftlichen Lebens in Europa. Hier stand Humboldt in ständiger Verbindung mit führenden französischen Mathematikern (mit mehreren - unter ihnen Poisson und Fourier - war Humboldt befreundet), hier entwickelte sich seine hohe Achtung vor den Leistungen der Mathematiker.

Das in Paris erworbene Verständnis für die Bedeutung der Mathematik hat sich positiv auf Humboldts Förderung talentierter deutscher Mathematiker, wie Dirichlet, Eisenstein, Jacobi, Kummer, Steiner, ausgewirkt.

Mathematische Theorien blieben vor allem dem älteren Humboldt weitgehend unverständlich. Und Humboldt verheimlichte dies auch nicht. Oft holte er sich bei zeitgenössischen Gelehrten Rat.

Humboldt hat mit den meisten Naturforschern und mit weiteren hervorragenden Geisteswissenschaftlern seiner Zeit Kontakt gehabt. Neben den persönlichen Begegnungen sind außerordentlich viele briefliche Verbindungen nachweisbar. Humboldt hat fast 50000 Briefe geschrieben. Er korrespondierte auch mit Mathematikern, darunter Dirichlet, Eisenstein, Gauß und Jacobi.

Die Alexander-von-Humboldt-Forschungsstelle der Akademie der Wissenschaften der

DDR hat bisher über 16000 Briefe von und an Humboldt erfasst, darunter die folgende kurze Anfrage, die der Gelehrte wahrscheinlich im Sommer 1848 an den Direktor der Berliner Sternwarte, den Königlichen Astronomen J. F. Encke, richtete.

Humboldt wohnte von 1827 an in seiner Geburtsstadt Berlin. Er war dort Kammerherr des preußischen Königs (seit 1840 Friedrich Wilhelm IV.).

"Für jede Frage des wissbegierigen Monarchen hatte er aus seiner umfassenden Bildung entweder sogleich eine belehrende Antwort bereit, oder kannte doch die Wege, sie bald herbeizuschaffen", berichtete der Humboldt-Biograph A. Dove (2).

"Lachen Sie nicht, mein theurer Freund und College, über meine arithmetische Unwissenheit", schrieb Humboldt (fast achtzigjährig) an einem Sonntag aus Potsdam an Encke. "Ich soll dem König erklären, warum nur in allen Multiplen von 9 die einzelnen Ziffern des Products in der Summe immer 9 geben.  $4 \times 9 = 36$ .  $9 \times 9 = 81$ . Und nur bei 9.

Da Sie mit mir Nachsicht haben, frage ich Sie." (3)

Ein Antwortbrief Enckes auf die Humboldtsche Frage ist nicht bekannt. Vielleicht hat der Sternwartendirektor sie bei einer Begegnung der Gelehrten in der Akademie mündlich beantwortet. Wie muss die Antwort lauten?

Quellen: Biermann 1959, Biermann 1983a, Biermann 1986. Zitate: (1) Löwenberg 1872, S. 76; (2) Dove 1872, S. 281; (3) Zentrales Archiv der AdW der DDR, Nachlass Encke, Band 52, II/70.

## 50 Umfüllen von Wein

Am 16. Dezember 1850 trug der französische Physiker und Astronom Francois Arago in einer Sitzung der Pariser Akademie der Wissenschaften die Biographie seines Landsmannes Simeon-Denis Poisson vor.

Er berichtete auch über die Jugendjahre Poissons:

"Eines Tages versammelte sich die Familie, um den Beruf zu wählen, den man ihn ergreifen lassen wollte. Man dachte anfänglich daran, ihn Notar werden zu lassen, legte diesen Plan aber einstimmig beiseite, weil er zu große geistige Anstrengung erfordere. [...] Die Chirurgie erhielt den Vorzug vor dem Notariat, und Poisson begab sich zu einem Onkel [...], welcher in Fontainebleau [Stadt südöstlich von Paris] diese Kunst ausübte. [...]

Auf einer seiner Reisen nach Fontainebleau erzählte ihm sein Freund Vanneau von mehreren Aufgaben, welche er auf der [dortigen] Zentralschule hatte vorlegen hören, zum Beispiel die folgende:

Es hat jemand ein Gefäß voll Wein, welches zwölf Maß hält. Er will die Hälfte davon, also sechs Maß verschenken, hat aber, um diese sechs Maß abzumessen, nur zwei Gefäße, das eine zu acht, das andere zu fünf Maß. Wie hat er zu verfahren, um in das Gefäß, welches acht Maß hält, sechs Maß zu schütten?

Poisson gab augenblicklich die Lösung dieser Frage, und noch anderer, welche man ihm vorlegte. Er hatte seinen wahrhaften Beruf gefunden." (1)

Mit 17 Jahren bestand Poisson glänzend die Prüfung zur Aufnahme in die Pariser Polytechnische Schule. Später sollte er an dieser 1794 gegründeten Schule, die sich mehr und mehr zum wissenschaftlichen Lehrzentrum Europas entwickelte, seine Wirkungsstätte als hervorragender Mathematiker finden.

Was die genannte Umfüllaufgabe betrifft: Das älteste bekannte Beispiel für eine solche Aufgabe befindet sich in den "Annales Stadenses" aus dem 13. Jh. (gedruckt 1859 in den "Monumenta Germaniae historica"):

Der Inhalt zweier mit Wein gefüllter Krüge von 5 und 3 Maß soll halbiert werden, wobei noch ein leerer Krug von 8 Maß zur Verfügung steht.

Quellen: Arago 1854, Tropfke 1980, S. 659. Zitat: (1) Arago 1854, S. 486-487.

## 51 Die Anzahl aller Primzahlen

Im Jahre 1847 konnte Ernst Eduard Kummer mit neuen von ihm gefundenen zahlentheoretischen Methoden den bis dahin größten Fortschritt beim Ringen um den auch gegenwärtig noch nicht gefundenen allgemeinen Beweis der Fermatschen Vermutung, dass die Gleichung

$$x^p + y^p = z^p$$

für jede ungerade Primzahl keine Lösung mit von 0 verschiedenen ganzen Zahlen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  besitzt, erzielen.

Während bis zu jener Zeit diese Vermutung nur für die Exponenten  $p = 3, 5, 7$  bewiesen worden war, entdeckte Kummer, dass sie für alle sogenannten "regulären" Primzahlen gültig ist. (So sind mit Ausnahme von 37, 59, 67 alle ungeraden Primzahlen bis 100 regulär.)

Dieses aufsehenerregende Resultat und andere zahlentheoretische Ergebnisse begründeten Kummers Ruhm als Zahlentheoretiker. Er wurde 1855 an die Berliner Universität berufen und zum Ordentlichen Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften ernannt.

Nach dem Tode von Jacobi (1851), Eisenstein (1852) in Berlin, Gauß (1855) und Dirichlet (1859) in Göttingen wurde Berlin durch die Tätigkeit von Kummer, Kronecker (auch er kam 1855 nach Berlin) und Weierstraß (er wurde 1856 nach Berlin berufen) ein führendes Zentrum der reinen Mathematik in Deutschland.

In seiner Forschungs- und Vorlesungstätigkeit widmete sich Kummer neben anderen Gebieten immer wieder der Zahlentheorie. Am 25. November 1878 trug er auf der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie einen "neuen elementaren Beweis des Satzes, dass die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist" (1) vor. Er sagte:

"Der erste sehr einfache und sinnreiche Beweis dieses Satzes, welcher von Euklid herührt, stützt sich auf keine anderen Hilfsmittel, als auf die Sätze über die Zerlegbarkeit

aller Zahlen in Primfaktoren, während die späteren Beweise von Euler und Anderen die Hilfsmittel der Analysis namentlich der unendlichen Reihen und Produkte in Anwendung bringen.

Da nun ein zweiter ganz elementarer Beweis, insofern er die vorliegende Frage von einer neuen Seite beleuchtet, einiges Interesse haben möchte, so will ich einen solchen der Akademie mitteilen, welchen ich schon seit einer Reihe von Jahren meinen Zuhörern in der Vorlesung über Zahlentheorie vorgetragen habe, welcher aber noch nicht anderweit veröffentlicht ist.

Gesetzt die Anzahl aller in der unendlichen Zahlenreihe enthaltenen Primzahlen sei eine endliche, so müsste auch das Produkt aller Primzahlen, welche ich mit  $P$  bezeichne, eine endliche bestimmte Zahl sein:

$$P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot p$$

Diese Zahl  $P$  aber müsste die ganz besondere Eigenschaft haben" (1):

Zu dieser Zahl kann keine natürliche Zahl, außer der 1, teilerfremd sein.

Bezeichnet  $\varphi(n)$  für eine natürliche Zahl  $n$  die Anzahl aller natürlichen Zahlen  $a < n$  mit  $(a, n) = 1$ , so müsste  $\varphi(P) = 1$  sein. Aus der elementaren Zahlentheorie ist bekannt, dass  $\varphi(p) = p - 1$  für Primzahlen  $p$  ist und

$$\varphi(n_1, n_2) = \varphi(n_1)\varphi(n_2), \quad \text{falls} \quad (n_1, n_2) = 1$$

ist. Somit wäre einerseits  $\varphi(P) = 1$  und andererseits

$$\varphi(P) = \varphi(2)\varphi(3)\varphi(5)\dots\varphi(p) = (2-1)(3-1)\dots(p-1) \neq 1$$

Kummer: "Die Annahme, dass die Anzahl aller Primzahlen eine endliche sei, welche auf diesen Widerspruch führt, ist darum eine falsche. Also die Anzahl aller Primzahlen ist keine endliche Zahl.

Man kann auch auf eine andere, noch einfachere Weise nachweisen, dass eine Zahl  $P$ , zu welcher keine Zahl außer Eins relative Primzahl [d. h. teilerfremd] wäre, nicht existiert, nämlich daraus, dass je zwei benachbarte Zahlen der Zahlenreihe notwendig relative Primzahlen [teilerfremd] sind." (2) Wie?

Quelle: Kummer 1975. Zitate: (1) Kummer 1975, Band 2, S. 669; (2) ebenda, S. 670.

## 52 Die Färbung einer Landkarte

Will man eine politische Landkarte, z. B. Europas, oder eine Landkarte, die die Sowjetunion in ihre 15 Unionsrepubliken oder die die USA in ihre Einzelstaaten oder die die Schweiz in ihre 25 Kantone zerlegt zeigt, oder eine beliebige andere Landkarte farbig markieren, dann sollte man in allen Fällen wenigstens zwei Gebiete mit einer gemeinsamen Grenzlinie durch verschiedene Farben kennzeichnen.

Wieviel Farben braucht man unbedingt, um eine Landkarte derart zu färben, dass nirgendwo solche Länder<sup>11</sup> dieselbe Farbe aufweisen, die aneinander grenzen, also eine gemeinsame Grenze (und nicht nur einen Punkt, eine Ecke gemeinsam) haben?

Im Jahre 1852 bemerkte der Londoner Student Francis Guthrie, dass man beim Färben der Landkarte wohl stets mit vier Farben auskommen kann. Dessen Bruder Frederick wies seinen Lehrer Augustus de Morgan, Mathematikprofessor der Londoner Universität, darauf hin. De Morgan versuchte, die Vierfarbenvermutung induktiv zu beweisen.

Durch eine Anfrage auf einer Sitzung der Londoner Mathematischen Gesellschaft am 13. Juli 1878 machte der Cambrdiger Mathematikprofessor Arthur Cayley die Vierfarbenvermutung erst richtig bekannt. Bereits ein Jahr später schien der Mathematiker Alfred B. Kempe einen Beweis gefunden zu haben.

Als Baltzer sich 1885 an die Geometrievorlesung von Möbius erinnerte (siehe die Aufgabe 46), insbesondere daran, dass es nicht möglich ist, fünf Länder so zu zeichnen, dass sie einander alle benachbart sind, machte ihn Felix Klein, damals Professor in Leipzig (begründete 1881 das Leipziger "Mathematische Seminar"), auf die Vierfarbenvermutung und die Arbeit von Kempe aufmerksam.

Für Baltzer war die Vierfarbenaussage unmittelbar verständlich:

"Denn es gibt nicht mehr als vier benachbarte Gebiete, deren jedes mit jedem anderen eine gemeinschaftliche Grenze hat; also genügen vier Farben zur Unterscheidung aller Gebiete. Wie würde Möbius sich gefreut haben, wenn..." (1), ja, wenn dieser Schluss richtig gewesen wäre.

Der Beweis wäre sehr kurz und wesentlich einfacher als Kempes Beweis durch vollständige Induktion. Baltzer benutzte den im Möbiusschen Nachlass gefundenen Satz:

Es ist unmöglich, ein (ebenes) Gebiet so in fünf Länder aufzuteilen, dass jedes von ihnen mit den übrigen vier benachbart ist.

Lothar Heffter, ein Mathematiker übrigens, der fast 100 Jahre alt geworden ist, damals noch in Gießen, erkannte Baltzers Irrtum. In einer im November 1890 für die "Mathematischen Annalen" eingereichten Arbeit schrieb er:

"Baltzer identifiziert diesen Satz geradezu mit dem bekannten Vier-Farben-Problem, für dessen Beweis derselbe in der Tat notwendig, aber nicht ohne Weiteres als hinreichend zu erkennen ist." (2)

Es ist nämlich nicht richtig, zu behaupten, dass die Anzahl  $k$  der zur Färbung einer Landkarte ausreichenden Farben die gleiche ist wie die höchste Anzahl  $n$  der gegenseitig benachbarten Länder auf der Landkarte.

So gibt es eine Landkarte mit  $n = 3$ , jedoch  $k > 3$ , also mit folgenden zwei Eigenschaften:

1. Höchstens jeweils drei Länder liegen so, dass jedes von ihnen mit den übrigen zwei benachbart ist.

---

<sup>11</sup>Ein Land soll stets zusammenhängend sein, d. h., irgend zwei Punkte des Landes kann man durch einen Weg verbinden, der ganz innerhalb des Landes verläuft.



2. Beim Färben kommt man mit drei Farben nicht aus. (Beispiel?)

Übrigens galt die Vierfarbenvermutung nur für zehn Jahre als bewiesen.

Im Jahre 1890 wies P. J. Heawood einen entscheidenden Fehler auch in Kempes Beweis nach. Heawood bewies jedoch, dass fünf Farben stets ausreichen, um jede (ebene) Landkarte so zu färben, dass dabei benachbarte Länder niemals die gleiche Farbe haben.

Erst im September 1976 konnten zwei Mathematiker der Universität von Illinois, K. Appel und W. Haken, in einer im Bulletin der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft erschienenen Arbeit verkünden, dass nunmehr der Beweis der Vierfarbenvermutung gelungen wäre.

Quellen: Baltzer 1885, Heffter 1891, Pieper 1978b. Zitate: (1) Baltzer 1885, S. 6; (2) Heffter 1891, S. 477.

## 53 Das Kästchenproblem

In seinem Buch über die Wahrscheinlichkeitsrechnung (erschienen in Paris im Jahre 1888) stellte Joseph Bertrand die folgende Aufgabe:

Von drei sich äußerlich vollkommen gleichenden Kästchen mit je zwei Schubfächern enthalte das erste in jedem Fach eine Goldmünze, das zweite in jedem Fach eine Silbermünze, das dritte in einem Fach eine Goldmünze, im anderen eine Silbermünze. Zufällig werde ein Kästchen ausgewählt.

1. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es das Kästchen ist, in dem sich eine Gold- und eine Silbermünze befinden?
2. Man hat im ausgewählten Kästchen ein Schubfach geöffnet. Darin befinde sich eine Goldmünze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Silbermünze zu finden?

Auf die erste Frage gab Bertrand die Antwort: 3

Von drei gleichwahrscheinlichen Fällen ist in der Tat einer günstig. Bei der zweiten Frage liegt die Antwort nahe: Das geöffnete Fach enthält eine Goldmünze.

Man kann es nur mit dem ersten oder dritten Kästchen zu tun haben (das zweite Kästchen ist durch das erlangte Wissen - "Im geöffneten Schubfach ist eine Goldmünze" - ausgeschlossen), hat wohl die Wahl zwischen zwei gleichwahrscheinlichen Kästchen.

Bertrand gab diese Lösung zunächst auch, verwarf sie aber sogleich als falsch. Wie sollte - so fragte er - das Öffnen eines Schubfachs genügen, um die Wahrscheinlichkeit zu ändern und von  $\frac{1}{3}$  auf  $\frac{1}{2}$  zu erhöhen?

Bertrand beantwortete nun die zweite Frage mit  $\frac{1}{3}$ .

Der Wiener Mathematiker Emanuel Czuber kritisierte im Jahre 1899 in einem Bericht über "Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen", erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, diese Lösung:

Nicht das Öffnen des Schubfaches, wohl aber die Wahrnehmung ihres Inhalts übt Einfluss aus, weil es unser Wissen vermehrt und die Anzahl der gleichberechtigten Fälle vermindert. Die einzige richtige Antwort auf die zweite Frage wäre doch  $\frac{1}{2}$ ; denn jetzt liegen zwei gleichberechtigte Fälle vor, repräsentiert durch das erste und dritte Kästchen, eines davon ist günstig.

In seinem später erschienenen Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung berichtigte Czuber seinen eigenen Fehlschluss: Bertrands Antwort  $\frac{1}{3}$  ist richtig! Warum?

Ist es nicht trotzdem paradox, dass das durch das Öffnen eines Schubfachs erworbene, gegenüber der ersten Fragestellung vermehrte Wissen an der Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses nichts ändert?

Czuber ergänzte die Bertrandsche Aufgabe durch folgendes Beispiel:

Enthielten die Kästchen je drei Schubfächer, und diese drei Schubfächer im ersten Kästchen nur Gold-, im zweiten Kästchen nur Silbermünzen, während im dritten Kästchen zwei Gold- und eine Silbermünze auf die Schubfächer verteilt wären, so verhielte es sich anders.

Wieder wäre  $\frac{1}{3}$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei vollzogener zufälliger Wahl das dritte Kästchen ergreift; findet man aber in einem geöffneten Schubfach eine Goldmünze, so gehört das Schubfach mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  dem dritten Kästchen an. Warum?

Quellen: Bertrand 1888, S. 2-3; Czuber 1899, S. 9; Czuber 1941, S. 30-31.

## 54 Der Streckenübertrager

Vom 2. bis 12. August 1900 fand in Paris der 2. Internationale Mathematikerkongress statt. 226 Wissenschaftler aus vielen Ländern tagten in den Sektionen Zahlentheorie und Algebra, Analysis, Geometrie, Mechanik und mathematische Physik, Geschichte und Bibliographie der Mathematik sowie Unterricht und Methodologie der Mathematik.

Am 8. August hielt David Hilbert aus Göttingen ein grundlegendes Referat mit dem Titel "Mathematische Probleme". Hilbert ging in einer allgemein gehaltenen Einleitung zunächst auf die interessanten Fragen ein, "ob es allgemeine Merkmale gibt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen, ... aus welchen Quellen die Mathematik ihre Probleme schöpft, ... welche berechtigten allgemeinen Forderungen an die Lösung eines mathematischen Problems zu stellen sind." (1)

Am Ende dieses einleitenden Teils formulierte er sein "Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems", seine "Überzeugung, dass ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, dass es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, dass die Unmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Misslingens aller Versuche dargetan wird." (2)

Anschließend formulierte und diskutierte er 23 ungelöste mathematische Probleme (nur

"Proben" (3) von Problemen, wie er betonte); diese Probleme stellten sich in den folgenden Jahrzehnten fast alle als mathematische Kernprobleme heraus und übten auf die Entwicklung der modernen Mathematik einen "außergewöhnlichen Einfluss" (P. S. Alexandrov, (4)) aus.

Eines dieser Probleme, das siebzehnte (es wurde 1927 von Emil Artin gelöst), steht in einer interessanten Beziehung zu einer geometrischen Aufgabe. Es handelt sich um die geometrischen Konstruktionen mittels Lineal und Streckenübertrager.

Diese wurden schon im Kapitel VII der "Grundlagen der Geometrie" von Hilbert (die Monographie war Teil der 1899 erschienenen Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmal in Göttingen) untersucht. Als Streckenübertrager bezeichnete Hilbert ein Instrument, mit dessen Hilfe man auf jeder Geraden von jedem Punkt aus eine gegebene Strecke abtragen kann.

Die folgende Aufgabe beispielsweise lässt sich allein mit Hilfe des Lineals und des Streckenübertragers lösen (wie?): Es ist zu einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu ziehen.

Im 44. Satz der "Grundlagen der Geometrie" gab Hilbert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, dass eine vorgelegte Konstruktionsaufgabe, die mittels des Zirkels ausführbar ist, sich auch allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken ausführen lässt. Der Beweis ist jedoch nicht einfach und erfordert "einige Sätze zahlentheoretischen und algebraischen Charakters" (5).

Hilbert konnte sein Kriterium nicht allgemein beweisen. Er führte jedoch die geometrische Fragestellung auf ein algebraisches Problem zurück, das dann in seinem Pariser Vortrag als siebzehntes Problem genannt wurde.

Quellen: Hilbert 1899, Hilbert 1979, Pieper 1973. Zitate: (1) Hilbert 1979, S. 23, 26, 27; (2) ebenda, S. 33; (3) ebenda, S. 34; (4) ebenda, S. 18; (5) Hilbert 1899, S. 82.

## 55 Die Russellsche Antinomie

Gottlob Frege wird als einer der bedeutendsten Logiker aller Zeiten angesehen. Er sprach wichtige Erkenntnisse erstmals aus, die heute Allgemeingut der mathematischen Logik geworden sind.

In seinem Buch "Grundlagen der Arithmetik" (erschienen 1884) diskutierte er die Fragen, welcher Natur die arithmetischen Sätze sind und ob und wie man die natürlichen Zahlen definieren kann. Diese Monographie stellt den programmatischen Versuch dar, grundlegende mathematische Begriffe, insbesondere den Zahlbegriff, auf rein logische Begriffe zurückzuführen (Logizismus), die Frege für sicherer hält als die bloße Anschauung. Das Buch enthält die erste Begründung des Begriffs der natürlichen Zahl.

Im ersten Band des Werkes "Grundgesetze der Arithmetik" (1893), mit dem er sein logizistisches Programm der Arithmetik realisieren wollte, schrieb er: "Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, [...] wenn jemand mir nachwiese, dass meine

Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird keinem gelingen." (1)

Doch Frege sollte sich irren.

Am 16. Juni 1902 schrieb Bertrand Russell, Mathematiker und Philosoph am Trinity College in Cambridge, einen Brief an Frege:

"Sehr geehrter Herr College! Seit anderthalb Jahren kenne ich Ihre 'Grundgesetze der Arithmetik', aber jetzt erst ist es mir möglich geworden die Zeit zu finden für das gründliche Studium, das ich Ihren Schriften zu widmen beabsichtige. Ich finde mich in allen Hauptsachen mit Ihnen in vollem Einklang. [...]

In vielen einzelnen Fragen finde ich bei Ihnen Discussionen, Unterscheidungen, und Definitionen, die man vergebens bei anderen Logikern sucht. [...] Nur in einem Punkte ist mir eine Schwierigkeit begegnet." (2)

Russell teilt nun Frege mit, wie sich aus diesem "einen Punkte" der "Grundgesetze" ein Widerspruch konstruieren lässt, ebenso wie aus der Menge aller der Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Enthält diese Menge sich selbst als Element? "Aus jeder Antwort folgt das Gegenteil." (2) Warum?

Am 22. Juni 1902 schrieb Frege aus Jena an Russell:

"Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik aufzubauen dachte, in's Wanken geräth. [...] Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint." (3)

In der Nachfolge Freges versuchte Russell, den Antinomien der Mengenlehre zu begegnen und das Programm des Logizismus zu verwirklichen. In unserem Jahrhundert hat sich die Einsicht durchgesetzt, dass sich die Mathematik nicht auf die Logik allein gründen lässt.

Der Logizismus hat jedoch wesentlich zur Entwicklung der mathematischen Logik und zur Klärung des Antinomienproblems beigetragen.

Quellen: Frege 1976. Zitate: (1) Frege 1893, S. XXVI; (2) Frege 1976, S. 211; (3) ebenda, S. 213.

## 56 Lösungen

### 1 Eine Tontafel aus dem alten Babylon

$h$	$b$	$d$	$Nr.$
120	119	169	1
3456	3367	4825	2
4800	4601	6649	3
13500	12709	18541	4
72	65	97	5
360	319	481	6
2700	2291	3541	7
960	799	1249	8
600	481	769	9
6480	4961	8161	10
60	45	75	11
2400	1679	2929	12
240	161	289	13
2700	1771	3229	14
90	56	106	15

### 2 Ähnliche Dreiecke

Die Höhe  $g$  auf  $d$  zerlegt das gegebene rechtwinklige Dreieck in zwei einander ähnliche Dreiecke (Abb. L 2.1) mit den Flächen  $A = \frac{d_1 g}{2}$ ,  $B = \frac{g d_2}{2}$ . Wegen der Ähnlichkeit gilt  $d_1 : g = g : d_2$ , d.h.  $g^2 = d_1 d_2$ .

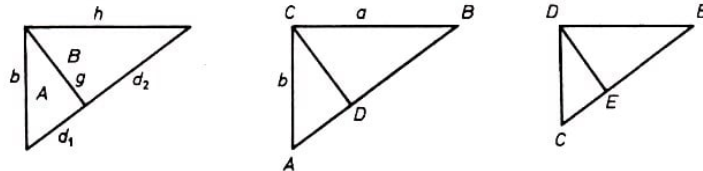


Abb. L 2.1, Abb. L 2.2, Abb. L 2.3

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 h^2 A &= (g^2 + d_2^2) \frac{d_1 g}{2} = \frac{1}{2} (g^2 d_1 g + d_1 d_2 d_2 g) = \frac{1}{2} (d_1^2 d_2 g + g^2 d_2 g) \\
 &= (d_1^2 + g^2) \frac{d_2 g}{2} = b^2 B
 \end{aligned}$$

also (1). Es ist  $A + B = \frac{g}{2} (d_1 + d_2)$ , woraus

$$\begin{aligned}
 d_1^2 (A + B) &= d_1^2 (d_1 + d_2) \frac{g}{2} = (d_1^2 + d_1 d_2) \frac{d_1 g}{2} \quad (\text{beachte } g^2 = d_1 d_2) \\
 &= (d_1^2 + g^2) \frac{d_1 g}{2} = b^2 A
 \end{aligned}$$

also (2) folgt.

Die Vorschrift (3) lässt sich wie folgt gewinnen. Die Formel (2) für das Dreieck  $ABC$ , die Höhe  $\overline{CD}$  und das Dreieck  $ADC$  (Abb. L 2.2) lautet

$$\overline{AD}^2 F_{ABC} = b^2 F_{ADC}$$

Hieraus ergibt sich

$$\overline{AD}^2 \frac{ab}{2} = b^2 F_{ADC} \quad , \quad \overline{AD}^2 = \frac{b}{a} \cdot 2F_{ADC}$$

also (3). Die Formel (2) für das Dreieck  $CBD$ , die Höhe  $\overline{DE}$  und das Dreieck  $CED$  lautet (Abb. L 2.3)

$$\overline{CE}^2 F_{CBD} = \overline{CD}^2 F_{CED}$$

Nun ist  $\overline{CD} = 36$ ,  $F_{CBD} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{DB}}{2} = \frac{36 \cdot 48}{2}$  und  $F_{CDE} = 5, 11; 2, 24 (= 311 + \frac{124}{3600})$ . Daraus folgt

$$\overline{CE}^2 = \frac{36^2 \cdot 2}{36 \cdot 48} F_{CDE} = \frac{72}{48} F_{CED} = 466,55167$$

und  $\overline{CE} = 21,59981 \approx 21,6$  (sexagesimal:  $21; 36 = 21 + \frac{36}{60}$ )

### 3 Der Pyramidenstumpf

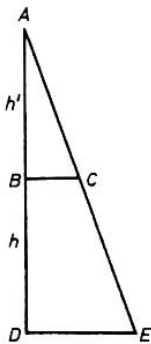


Abb. L 3

Ist  $h'$  die Höhe der abgeschnittenen Pyramidenspitze (Abb. L 3), so gilt für ihr Volumen  $\frac{1}{3}b^2h'$ . Das Volumen der ganzen Pyramide ist  $\frac{1}{3}a^2(h + h')$ .

Die Proportion  $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$  lautet  $\frac{h+h'}{h'} = \frac{a}{b}$ , woraus  $h' = \frac{bh}{a-b}$  folgt. Hieraus ergibt sich für das Volumen des Pyramidenstumpfes

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}a^2(h + h') - \frac{1}{3}b^2h' = \frac{1}{3}\{a^2h + (a^2 - b^2)h'\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{a^2h + (a^2 - b^2)\frac{bh}{a-b}\right\} = \frac{1}{3}\{a^2h + (a+b)bh\} \\ &= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

### 4 Brot und Bier

Es sollen Brote mit dem Pesu 20 gebacken werden. Da aus einem Scheffel Gerste 20 Brote entstehen, benötigt man für 100 Brote fünf Scheffel Gerste.

Aus den übrigen  $16 - 5 = 11$  Scheffeln soll Gerstenbier vom Pesu

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{11}$$

gebraut werden (d. h.  $\frac{12}{11}$  Krüge aus einem Scheffel Gerste). Man erhält aus den elf Scheffeln zwölf Krüge Gerstenbier, denen sechs Dreiviertelkrüge Spelt-Dattelpier entsprechen.

Als Gleichung (mit  $x$  als unbekannter Anzahl dieser Dreiviertelkrüge) lässt sich die Aufgabe wie folgt ausdrücken:

$$16 - \frac{100}{20} = x \cdot 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right)$$

Die Reihenfolge der im Moskauer Papyrus beschriebenen Rechenoperationen lautet in der Tat :

$$100 : 20 = 5, 16 - 5 = 11, 1 : 2 = \frac{1}{2}, 1 : 4 = \frac{1}{4}, 1 : 6 = \frac{1}{6}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}, 2 \cdot \frac{11}{12} = \frac{11}{6}, 11 : \frac{11}{6} = 6.$$

## 5 Der Satz des Thales

Nimmt man 3 für die Kreiszahl  $\pi$ , so ist der Flächeninhalt des Kreises näherungsweise  $3r^2$ . Abb. L 5 zeigt, wie das rechtwinklige Dreieck mit dem Flächeninhalt  $3r^2$  konstruiert werden kann (Krafft 1971, S. 91).

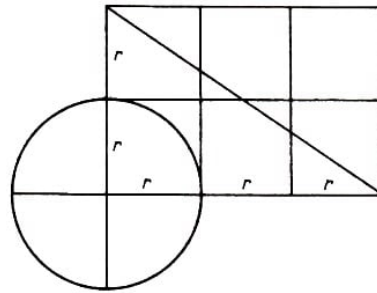


Abb. L 5

## 6 Rechensteine

Es wird jeweils um die gelegte Quadratzahl ein Zahlenwinkel (die Griechen nannten ihn "Gnomon") derart gelegt, dass wieder eine Quadratzahl entsteht (Abb. L 6):

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 1+3, & 1+3+5, & 1+3+5+7, & 1+3+5+7+9, & \dots \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots \end{array}$$

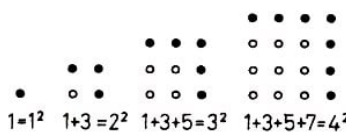


Abb. L 6

Die Folge dieser Gnomone veranschaulicht die Folge der ungeraden Zahlen. Die Summenformel ist

$$1 + 3 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 = 3^2, \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, \dots$$

allgemein  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ . (Nach Becker 1957, S. 40.)

## Gerade und ungerade Zahlen

Beweis von Satz 1 (Euklid 1984, Elemente IX, 30):

Es genügt zu zeigen, dass der Quotient aus einer geraden Zahl  $g$  und einer ungeraden Zahl  $u$  (wenn er eine natürliche Zahl ist) nur gerade sein kann:  $\frac{g}{u} = h$  ( $h$  gerade). Denn

hieraus folgt sofort, dass eine ungerade Zahl, wenn sie eine gerade teilt, auch deren Hälfte teilen muss:  $u \cdot h = g$ ,  $u \cdot \frac{h}{2} = \frac{g}{2}$ .

Wir nehmen das Gegenteil dessen an, was zu beweisen ist. Angenommen also, der Quotient  $h$  ist eine ungerade Zahl. Was folgt aus dieser Annahme? Dann müsste nach einem Multiplikationssatz (ungerade Zahl  $\times$  ungerade Zahl = ungerade Zahl)  $h \cdot u$  eine ungerade Zahl sein.

Es ist aber  $hu = g$  eine gerade Zahl. Die Zahl  $h \cdot u$  wäre gleichzeitig ungerade und gerade, was ein Widerspruch ist.

Beweis von Satz 2 (Euklid 1984, Elemente IX, 31):

Es sei  $u$  eine ungerade Zahl und  $k$  irgendeine natürliche Zahl, zu der  $u$  teilerfremd ist. Angenommen,  $u$  und  $2k$  hätten einen gemeinsamen Teiler  $t$ . Was folgt aus dieser Annahme?

Da  $u$  ungerade ist, muss nach den Multiplikationssätzen auch ihr Teiler ungerade sein. Da diese ungerade Zahl  $t$  die gerade Zahl  $2k$  teilt, teilt sie nach Satz 1 auch deren Hälfte, also  $k$ . Die Zahlen  $u$  und  $k$  hätten den gemeinsamen Teiler  $t$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.

## 8 Ein Möndchen des Hippokrates

Man verbinde die Mitte  $D$  des oberen Halbkreises mit  $A$  und  $B$ . Diese Geraden tangieren den großen Kreis, ohne in ihn einzudringen. Das zu betrachtende Möndchen besteht aus den drei Flächenstücken  $S$ ,  $U$ ,  $S$  (Abb. L 8).

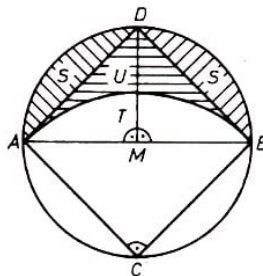


Abb. L 8

$S$  ist ein Segment des gegebenen Kreises (mit dem Mittelpunkt  $M$ ), das zum Winkel  $90^\circ$  gehört.  $T$  ist ein Segment des großen Kreises (mit dem Mittelpunkt  $C$ ), das ebenfalls zum Winkel  $90^\circ$  gehört.

Die Segmente  $S$  und  $T$  sind ähnlich. Sie (d. h. ihre Flächeninhalte) verhalten sich somit wie die Quadrate über ihren Sehnen:

$$S : T = \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck  $ABD$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2\overline{AD}^2$$

Es folgt

$$S : T = \overline{AD}^2 : 2\overline{AD}^2 = 1 : 2, \quad \text{d.h.} \quad T = 2S$$



Hieraus folgt für die Fläche des Mändchens  $2S + U = T + U$ , d.h., das Mändchen ist flächengleich mit dem Dreieck  $ABD$ . Dessen Teildreiecke  $AMD$ ,  $DMB$  ergeben summiert das Quadrat  $MBED$  mit dem Inhalt  $r^2$  (mit  $r = MB$ , Radius des gegebenen Kreises).

## 9 Die Verdoppelung des Quadrats

Angenommen, es gäbe zu der gegebenen natürlichen Zahl  $a$  eine natürliche Zahl  $d$  mit  $d^2 = 2a$ . Ist  $t$  gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $d$ , so setze man  $a = tb$ ,  $d = te$ . Dann sind  $b$  und  $e$  teilerfremd, und es gilt

$$d^2 = (te)^2 = t^2 e^2 = 2a^2 = 2(tb)^2 = t^2 \cdot 2b^2$$

also  $e^2 = 2b^2$ .

Hiernach muss  $e$ , also auch  $e$  gerade sein, also kann  $b$  (da  $b$  und  $e$  teilerfremd sind) nur ungerade sein. Da  $e$  gerade ist, lässt  $e$  sich in der Form  $e = 2f$  schreiben. Dann gilt  $e^2 = (2f)^2 = 4f^2 = 2b^2$  oder  $b^2 = 2f^2$ .

Hiernach muss  $b^2$ , also auch  $b$  gerade sein. Die Folgerungen " $b$  kann nur ungerade sein" und " $b$  muss gerade sein" widersprechen sich. Die Annahme, dass es zu der gegebenen natürlichen Zahl  $a$  eine natürliche Zahl  $d$  mit  $d^2 = 2a^2$  gibt, muss falsch sein.

## 10 Die mittlere Proportionale

a) Gilt  $a = cd$ ,  $b = ef$  mit  $c : e = d : f$ , so ist  $g = de$  die mittlere Proportionale zwischen  $a$  und  $b$ :

$$\frac{a}{g} = \frac{cd}{de} = \frac{c}{e} = \frac{d}{f} = \frac{de}{ef} = \frac{g}{b}$$

Umgekehrt, es gebe zu zwei Zahlen  $a$ ,  $b$  die mittlere Proportionale  $h$ , so dass  $a : h = h : b$  gilt. Dann ist  $\frac{a}{h} = \frac{d}{e}$  mit teilerfremden Zahlen  $d$ ,  $e$  (den Bruch  $\frac{a}{h}$  kürzen!), so dass  $a = fd$ ,  $h = fe$  mit einer natürlichen Zahl  $g$  gilt; dann ist auch  $\frac{h}{b} = \frac{a}{h} = \frac{d}{e}$  und  $h = gd$ ,  $b = ge$  mit einer natürlichen Zahl  $g$ .

Hieraus folgt  $\frac{f}{g} = \frac{fe}{ge} = \frac{h}{b} = \frac{a}{h} = \frac{fd}{fe} = \frac{d}{e}$ . Also ist  $a = fd$ ,  $b = ge$ ; wobei  $f : g = d : e$  ist.

b) Wäre  $a = cd$ ,  $2a = ef$  und  $c : e = d : f$ , so würde  $2 = \frac{2a}{a} = \frac{ef}{cd} = \left(\frac{e}{c}\right)^2$  d.h.  $2c^2 = e$  sein, was nicht in natürlichen Zahlen möglich ist (siehe Aufgabe 9).

c) Euklid 1984, „Elemente“ VI,13:

"Die zwei gegebenen Strecken seien  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ . Man soll zu  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  die Mittlere Proportionale finden.

Man habe die Strecken in gerader Fortsetzung voneinander gelegt. Dann zeichne man über  $\overline{AC}$  den Halbkreis  $ADC$  (Abb. L 10), ziehe  $\overline{BD}$  vom Punkte  $B$  aus rechtwinklig zur geraden Linie  $\overline{AC}$  und ziehe  $\overline{AD}$ ,  $\overline{DC}$ .

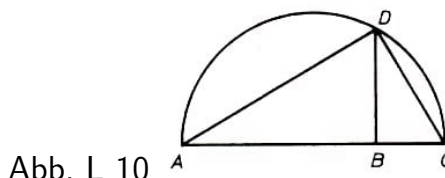


Abb. L 10

Als Winkel im Halbkreis ist  $ADC$  ein Rechter. Und da man im rechtwinkligen Dreieck  $ADC$  aus dem rechten Winkel das Lot  $DB$  gefällt hat [die Dreiecke am Lot sind sowohl zu dem ganzen Dreieck als auch einander ähnlich; VI,8:  $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BD} : \overline{BC}$ ], so ist  $\overline{DB}$  Mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Grundlinie,  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$ .

Also hat man zu zwei gegebenen Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  die Mittlere Proportionale gefunden, nämlich  $\overline{DB}$  - dies hatte man ausführen sollen."

## 11 Die Quadratur des Rechtecks

Man addiere die beiden Seiten  $a$ ,  $b$  des Rechtecks,  $a + b$ , und halbiere die Summe. Die Strecke zwischen dem Halbierungspunkt  $H$  der Strecke  $a + b$  und dem Berührungspunkt  $B$  der Strecken  $a$  und  $b$  (Abb. L 11) ist  $\frac{a+b}{2}$ .

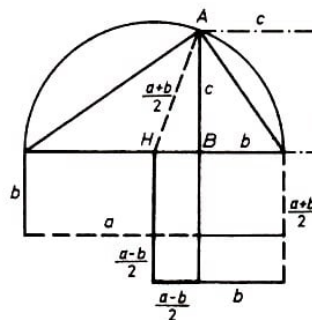


Abb. L 11

Errichtet man in  $B$  die Senkrechte und bezeichnet mit  $A$  den Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Kreis um  $H$  mit dem Radius  $\frac{a+b}{2}$ , so ist das  $\triangle ABH$  ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $\frac{a+b}{2}$  und den Katheten  $\frac{a-b}{2}$  und  $c$ . Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$c^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

(Nach Euklid 1984, II, 14.)

## 12 Der Goldene Schnitt

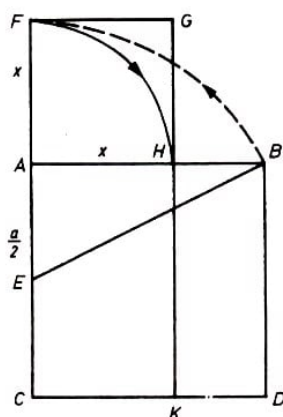


Abb. L 12

Die gegebene Strecke sei  $\overline{AB}$ . Man zeichne über  $\overline{AB}$  das Quadrat  $ABCD$ , halbiere  $\overline{AC}$  in  $E$ , ziehe  $\overline{BE}$ , verlängere  $\overline{CA}$  nach  $F$  und mache  $\overline{EF}$  gleich  $\overline{EB}$ , zeichne über  $\overline{AF}$  das Quadrat  $AHGF$  und ziehe  $\overline{GH}$  nach  $K$  durch

Dann wird  $\overline{AB}$  in  $H$  so geteilt, dass  $\overline{AB} \cdot \overline{BH} = \overline{AH}^2$  ist.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$$\overline{EF}^2 = \overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$$

Nach II,6 (siehe Aufgabe 12) ist

$$\overline{CF} \cdot \overline{FA} + \overline{AE}^2 = \overline{EF}^2$$

Hieraus folgt  $\overline{CF} \cdot \overline{FA} = \overline{AB}^2$ .

Wird nun vom Rechteck  $\overline{CF} \cdot \overline{FA} = \overline{CF} \cdot \overline{FG}$  und vom Quadrat  $\overline{AB}^2$  jeweils das Rechteck  $CKHA$  subtrahiert, so bleibt  $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{AB}$ . (Euklid 1984, II, 11.)

### 13 Dodekaeder und Pentagramm

Durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen wird das Fünfeck in drei Dreiecke zerlegt. (Abb. L 13.1.)

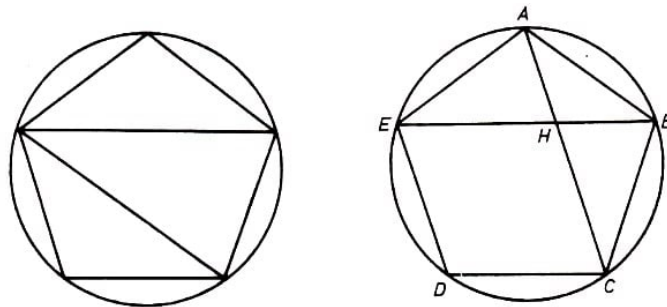


Abb. 13.1, 13.2

Daher ist die Summe der Innenwinkel  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ . Im gleichschenkligen Dreieck  $\triangle ABC$  (Abb. L 13.2) beträgt der größte Winkel bei  $B$  als ein Winkel des regelmäßigen Fünfecks  $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ .

Folglich sind die Basiswinkel dieses Dreiecks  $\triangle ABC$  je  $36^\circ$ .

Die Seiten des Fünfecks sind Sehnen des Kreises von gleicher Länge  $a$ . Daher sind die Peripheriewinkel über den Seiten gleich groß, also jeweils  $\frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$ .

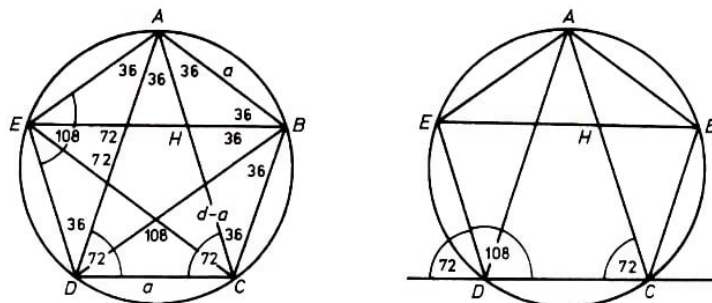


Abb. 13.3, 13.4

Hieraus ergeben sich die Winkel der Abb. L 13.3. Aus der Gleichheit der Winkel der beiden Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle AHB$  folgt ihre Ähnlichkeit, und daher  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}$  (1). Nun ist  $\overline{AC} = d$  die Diagonale des Fünfecks,  $\overline{AB} = a$  die Seite des Fünfecks.

Wegen  $\overline{AC} \parallel \overline{ED}$  (Abb. L 13.4) und  $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$  ist das Viereck  $CDEH$  ein Parallelogramm und somit  $\overline{HC} = \overline{DE} = a$ , also  $\overline{AH} = \overline{AC} - \overline{HC} = d - a$ .

(1) bedeutet:  $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$ ,  $\frac{\overline{AC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HA}}$

d. h.,  $H$  teilt die Diagonale  $\overline{AC}$  nach dem Goldenen Schnitt, wobei der größte Abschnitt ( $\overline{HC}$ ) gleich der Fünfeckseite ist.

### 14 Goldenes Dreieck und regelmäßiges Fünfeck

a) Im gleichschenkligen Dreieck  $AGHF$  der Abb. L 14.1 ist  $\overline{GF} = \overline{HF}$  und  $\overline{GH} = \overline{FI}$ ,

wobei  $I$  die Seite  $\overline{HF}$  stetig teilt. Daher gilt

$$\overline{HI} \cdot \overline{HF} = \overline{FI}^2 = \overline{GH}^2$$

Man zeichne den Umkreis  $U$  des Dreiecks  $\triangle GIF$  (Abb. L 14.2).  $H$  ist ein Punkt außerhalb des Kreises  $U$ ,  $G$  ist ein Punkt auf dem Kreis  $U$ .  $\overline{HF}$  ist eine Sekante des Kreises mit dem zweiten Schnittpunkt  $I$ .

Nach dem Sekanten-Tangentensatz ist  $\overline{HF} \cdot \overline{HI} = \overline{GH}^2$  genau dann, wenn  $\overline{GH}$  Tangente an  $U$  ist.

Nach dem Satz vom Sehnen-Tangentenwinkel ist  $\alpha = \varepsilon$  (Peripheriewinkel über  $\overline{GI}$ ). Als Außenwinkel des Dreiecks  $\triangle GIF$  ist  $\beta = \delta + \varepsilon = \delta + \alpha$ . Im gleichschenkligen Dreieck  $\triangle GHF$  ist aber  $\gamma = \delta + \alpha$ , also  $\gamma = \beta$ . Daher ist  $\triangle HIG$  gleichschenkl.,  $\overline{GI} = \overline{GH}$ , und daher  $\overline{GI} = \overline{FI}$ .

Es folgt  $\delta = \varepsilon$ . Somit sind die Basiswinkel im Dreieck  $\triangle GHF$ ,  $\gamma = \delta + \alpha = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ , doppelt so groß wie der Winkel an der Spitze.

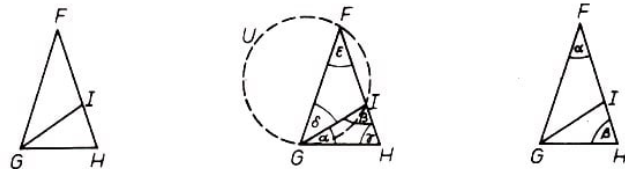


Abb. 14.1, 14.2, 14.3

b) Es sei  $\triangle GHF$  ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basiswinkel doppelt so groß sind wie der Winkel  $\alpha$  an der Spitze. Dann gilt  $180^\circ = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha$ , d.h.  $\alpha = 36^\circ$ ,  $\beta = 2\alpha = 72^\circ$ .

Halbiert man einen der Basiswinkel, etwa bei  $G$ , durch  $\overline{GI}$  (Abb. L 14.3), so wird das Dreieck  $\triangle GHF$  durch diese Gerade in zwei (wegen der Winkel) gleichschenklige Dreiecke  $\triangle HGI$  und  $\triangle GIF$  zerlegt. Daher ist  $\overline{FI} = \overline{GI} = \overline{GH}$ . Aus der Ähnlichkeit von  $\triangle HGI$  und  $\triangle GFH$  (wegen der Gleichheit der Winkel) folgt

$$\overline{FH} : \overline{GH} = \overline{GH} : \overline{HI} \quad \text{bzw. (wegen } \overline{GH} = \overline{FI}) \quad \overline{FH} : \overline{FI} = \overline{FI} : \overline{HI}$$

c) Man teile eine gegebene Strecke  $\overline{FH}$  stetig in  $I$  und zeichne das gleichschenklige Dreieck  $\triangle GHF$  mit den Seiten  $\overline{GF}$  und  $\overline{HF}$ , die gleich der gegebenen Strecke sind, und der Grundlinie  $\overline{GH}$ , die gleich dem größeren Abschnitt  $\overline{FI}$  ist. Das Dreieck ist ein Goldenes Dreieck.

Wie man ein zu diesem Dreieck  $\triangle GHF$  ähnliches in den gegebenen Kreis einbeschriebenes Dreieck  $\triangle CDA$  finden kann, beschreibt Euklid ohne Ähnlichkeitsmethoden im Buch IV,2 der "Elemente" wie folgt (Abb. L 14.4).

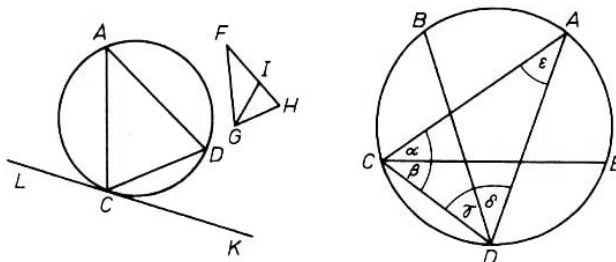


Abb. 14.4, 14.5

Man wähle als  $C$  einen Punkt auf dem Kreis, ziehe in  $C$  die Tangente, trage an die Gerade  $\overline{CK}$  im Punkt  $C$  den Winkel  $\angle KCD = \angle GFH$  sowie an die Gerade  $\overline{CL}$  im Punkt  $C$  den Winkel  $\angle LCA = \angle GHF$  an. Offensichtlich ist  $\angle ACD = \angle FGH$ .

Da die Gerade  $\overline{KC}$  den Kreis berührt und vom Berührungspunkt  $C$  aus die Gerade  $\overline{CD}$  zum Kreis durchgezogen ist, ist  $\angle CAD = \angle KCD$  (Peripheriewinkel = Sehnen-Tangentenwinkel). Da  $\angle KCD = \angle GFH$  ist, folgt  $\angle CAD = \angle GFH$ .

Endlich ist auch  $\angle CDA = \angle GHF$ . - Die Dreiecke  $\triangle CDA$  und  $\triangle GHF$  sind winkeligleich.

d) Nach Konstruktion des Dreiecks  $\triangle CDA$  und der Punkte  $E, B$  sind die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  einander gleich (Abb. L 14.5). Gleiche Winkel stehen über gleichen Bogen, und gleichen Bogen liegen gleiche Sehnen gegenüber. Das Fünfeck ist somit gleichseitig.

Dass dann auch  $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \dots$  usw. gilt, sieht man wie folgt: Es ist Bogen  $CD =$  Bogen  $DE$ . Fügt man den Bogen  $DEA$  beiderseits hinzu, so ist Bogen  $CDEA =$  Bogen  $DEAB$ . Hieraus folgt  $\angle ABC = \angle BCD$ ; analog die übrigen Winkel.

## 15 Die Wechselwegnahme

Man kann den Prozess der Wechselwegnahme, angewendet auf  $b_1 = a_1, b_2 = a_2$ , kürzer so beschreiben:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 q_1 + b_3, & b_3 < b_2 \\ b_2 &= b_3 q_2 + b_4, & b_4 < b_3 \\ &\dots \\ b_{k-2} &= b_{k-1} q_{k-2} + b_k, & b_k < b_{k-1} \\ b_{k-1} &= b_k q_{k-1} + 0 \end{aligned}$$

Dann ist  $b_k$  größtes gemeinsames Maß für alle bei der Wechselwegnahme auftretenden Strecken, insbesondere für  $b_1, b_2$ . (Nach der letzten Gleichung ist  $b_{k-1}$  ein Vielfaches der Strecke  $b_k$ . Daher ist nach der vorletzten Gleichung auch

$$b_{k-2} = b_{k-1} q_{k-2} + b_k = b_k q_{k-1} q_{k-2} + b_k = b_k (q_{k-1} q_{k-2} + 1)$$

ein Vielfaches der Strecke  $b_k$ , usw.)

Sind zwei Strecken  $b_1 > b_2$  kommensurabel, so gibt es ein gemeinsames Maß  $e$  und natürliche Zahlen  $k_1 > k_2$  so, dass

$$b_1 = k_1 e, \quad b_2 = k_2 e$$

ist. Dann führt der Prozess der Wechselwegnahme zu Strecken

$$b_3 = b_1 - b_2 q_1 = k_3 e (k_3 < k_2), \quad b_4 = b_2 - b_3 q_2 = k_4 e (k_4 < k_3)$$

usw. mit natürlichen Zahlen  $k_1 > k_2 > k_3 \leq \dots \leq 1$ . Nach endlich vielen Schritten wird die kleinste natürliche Zahl 1 erreicht. Der Prozess der Wechselwegnahme bricht

ab.

Der Prozess der Wechselwegnahme kann für die Diagonale und die Seite eines regelmäßigen Fünfecks beliebig oft wie folgt fortgesetzt werden. (Es gibt also für die Diagonale und die Seite des regelmäßigen Fünfecks kein gemeinsames Maß!) Vgl. Abb. L 15.1.

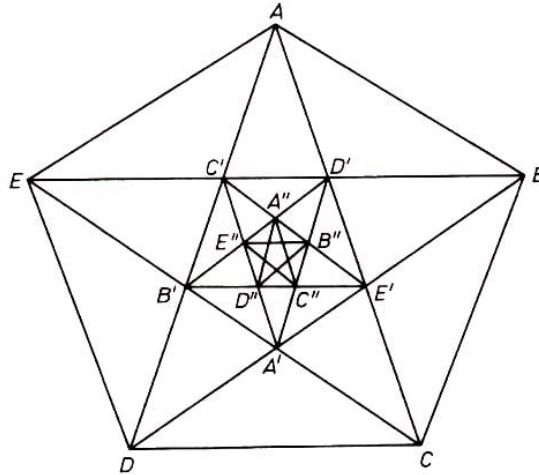


Abb. 15.1

Man zeichne in das regelmäßige Fünfeck  $ABCDE$  die Diagonalen. Diese bilden in der Mitte offenbar ein neues regelmäßiges Fünfeck  $A'B'C'D'E'$ . Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks schneiden einander nach dem Goldenen Schnitt, und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich (siehe Aufgabe 13).

Es gilt also  $\overline{AB'} = \overline{AE}$ .

Der kleinere Abschnitt der in  $B$  stetig geteilten Diagonalen  $AD$  hingegen ist ebenso lang wie die Diagonale des kleineren Fünfecks:  $\overline{B'D} = \overline{B'D'}$ . (Die Dreiecke  $A'B'D$  und  $A'B'D'$  sind kongruent.) Hieraus folgt

$$\overline{AD} - \overline{AE} = \overline{AD} - \overline{AB'} = \overline{B'D} = \overline{B'D'}$$

d. h., die Differenz zwischen der Diagonale und der Seite des größeren Fünfecks ist gleich der Diagonale des kleineren Fünfecks. Ferner folgt (wegen  $\overline{AE} = \overline{ED'} = \overline{EA'}$ ,  $\overline{BD'} = \overline{BD} = \overline{BE}$ )  $\overline{AE} - \overline{B'D'} = \overline{EA'} - \overline{B'E} = \overline{B'A'}$ , d. h., die Differenz zwischen der Seite des größeren Fünfecks und der Diagonale des kleineren Fünfecks ist gleich der Seite des kleineren Fünfecks.

Die Diagonalen des kleineren Fünfecks bilden wieder ein regelmäßiges Fünfeck, und wieder gilt, dass die Differenz zwischen der Diagonale und der Seite des kleineren Fünfecks gleich der Diagonale des nächstkleineren Fünfecks ist. Und so fort - ohne Ende: Durch die Diagonalen entstehen immer neue regelmäßige Fünfecke. Stets gilt:

Diagonale (größeres Fünfeck) - Seite (größeres Fünfeck) = Diagonale (kleineres Fünfeck),

Seite (größeres Fünfeck) - Diagonale (kleineres Fünfeck) = Seite (kleineres Fünfeck),

Diagonale (kleineres Fünfeck) - Seite (kleineres Fünfeck) = Diagonale (nächst kleineres Fünfeck) usw.

Dieser Prozess der Wechselwegnahme bricht nie ab!

Somit sind Diagonale (größeres Fünfeck) und Seite (größeres Fünfeck) inkommensurabel. (Nach Fritz 1945, S. 295 ff.)

Dass die Diagonale und die Seite eines Quadrats ebenfalls inkommensurabel sind, lässt sich durch Anwendung des Prozesses der Wechselwegnahme wie folgt erkennen. (Der dänische Mathematikhistoriker H. G. Zeuthen beschrieb diese Konstruktion 1915, vgl. Becker 1957, S. 73.)

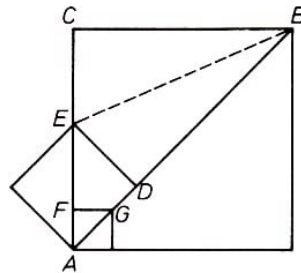


Abb. 15.2

In einem Quadrat zieht man die Diagonale  $BA$  (Abb. L 15.2), trägt auf ihr die Strecke  $\overline{BD} = \overline{BC}$  ab und errichtet in  $D$  das Lot, das die Seite  $\overline{CA}$  in  $E$  schneidet. Dann ist  $\overline{AD} = \overline{DE}$ . (Der Winkel  $\angle AED$  ist gleich  $45^\circ$ !)

Aus dem Quadrat mit der Diagonale  $AB$  (erstes Quadrat) erhält man ein kleines (zweites) Quadrat mit der Diagonale  $AE$ .

Es ist  $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AB} - \overline{BD} = \overline{AD}$ , d.h., die Differenz zwischen der Diagonale des ersten (größeren) Quadrats und der Seite des größeren Quadrats ist gleich der Seite des zweiten (kleineren) Quadrats.

Auf der Diagonale  $\overline{EA}$  des zweiten Quadrats trägt man nun die Strecke  $\overline{EF} = \overline{ED}$  ab und errichtet in  $F$  das Lot, das die Seite  $\overline{AD}$  in  $G$  schneidet. Dann ist  $\overline{AF} = \overline{FG}$ .

Aus dem zweiten Quadrat mit der Diagonale  $AE$  erhält man ein drittes Quadrat mit der Diagonale  $AG$ .

Es ist  $\overline{CA} - 2\overline{ED} = \overline{CA} - 2\overline{CE} = \overline{CA} - \overline{CF} = \overline{FA}$  (die Dreiecke  $\triangle EBD$  und  $\triangle EBC$  sind kongruent, speziell  $\overline{ED} = \overline{CE}$ , ferner  $\overline{CF} = \overline{CE} + \overline{EF} = \overline{CE} + \overline{ED} = 2\overline{CE}$ ), d. h., die Differenz zwischen der Seite des ersten Quadrats und dem Doppelten der Seite des zweiten Quadrats ist gleich der Seite des dritten Quadrats.

Nun konstruiert man wie zu Beginn aus dem dritten Quadrat ein vierten Quadrat ( $\overline{GH} = \overline{GF}$  auf  $\overline{GA}$  abtragen, Lot in  $H$  ergibt  $I$ ).

Es ist  $\overline{DE} - 2\overline{AF} = \overline{AD} - 2\overline{HG} = \overline{AH}$  (natürlich ist  $\overline{DE} = \overline{AD}$ , ferner  $\overline{AF} = \overline{HG} = \overline{FG} = \overline{GD}$ , letzteres folgt aus der Kongruenz der Dreiecke  $\triangle EGF$  und  $\triangle EGD$ ), d. h., die Differenz zwischen der Seite des zweiten Quadrats und dem Doppelten der Seite des dritten Quadrats ist gleich der Seite des vierten Quadrats.

Der Prozess der Wechselwegnahme

Diagonale (erstes Quadrat) - Seite (erstes Quadrat) = Seite (zweites Quadrat)

Seite (erstes Quadrat) -  $2 \times$  Seite (zweites Quadrat) = Seite (drittes Quadrat)

Seite (zweites Quadrat) -  $2 \times$  Seite (drittes Quadrat) = Seite (viertes Quadrat) usw.

bricht nie ab.

## 16 Heureka, ich hab's gefunden

Ein fester Körper, der vollständig in Wasser getaucht wird, verdrängt vom Wasser so viel, wie sein eigenes Volumen beträgt. Bei gleichem Volumen haben verschiedene Stoffe eine unterschiedliche Masse.

(So hat  $1 \text{ cm}^3$  Gold die Masse  $19,3 \text{ g}$  und  $1 \text{ cm}^3$  Silber  $10,5 \text{ g}$ .)

Bei gleicher Masse werden verschiedene Stoffe somit ein unterschiedliches Volumen haben. (So hat  $1 \text{ kg}$  Gold ein Volumen von etwa  $52 \text{ cm}^3$  und  $1 \text{ kg}$  Silber ein Volumen von etwa  $95 \text{ cm}^3$ .) Fertigt man nun etwa zwei Würfel von genau gleicher Masse wie der Weihkranz, den einen aus reinem Gold, den anderen aus reinem Silber, und taucht die drei Gegenstände jeweils in ein bis zum Rand mit Wasser gefülltes Gefäß, so wird beim Würfel aus reinem Silber am meisten Wasser überlaufen, beim Würfel aus reinem Gold am wenigsten.

Ist der Kranz aus Gold und Silber gemischt, so wird die bei ihm überlaufende Wassermenge geringer sein als beim Silberwürfel, aber immer noch größer als beim Goldwürfel. Die vom Silberwürfel, vom Goldwürfel bzw. vom Weihkranz verdrängte Wassermenge betrage  $s$ ,  $g$  bzw.  $k \text{ cm}^3$ . Der Weihkranz habe (wie auch der Silberwürfel und der Goldwürfel) die Masse  $a \text{ kg}$ , davon seien  $b \text{ kg}$  Silber und  $c \text{ kg}$  Gold, also

$$b + c = a \quad (1)$$

Der Silberanteil des Kranzes verdrängt dann  $\frac{b}{a}s \text{ cm}^3$  Wasser. (In unseren Bezeichnungen verdrängen ja  $a \text{ kg}$  Silber  $s \text{ cm}^3$  Wasser. Daher verdrängt  $1 \text{ kg}$  Silber  $\frac{s}{a} \text{ cm}^3$  Wasser, und somit verdrängen  $b \text{ kg}$  Silber  $b\frac{s}{a} \text{ cm}^3$  Wasser.)

Der Goldanteil des Kranzes verdrängt  $\frac{c}{a}g \text{ cm}^3$  Wasser. Der Weihkranz verdrängt somit einerseits  $k \text{ cm}^3$ , andererseits  $\frac{b}{a}s + \frac{c}{a}g \text{ cm}^3$  Wasser, also  $\frac{b}{a}s + \frac{c}{a}g = k$ , d.h.

$$bs + cg = ak \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt  $c = a - b$ ,  $bs + (a - b)g = ak$ , also  $bs - bg = ak - ag$ , d.h.

$$b = \frac{k - g}{s - g}a$$

Dies ergibt auch

$$c = a - b = \left(1 - \frac{k - g}{s - g}a\right) = \frac{s - k}{s - g}a$$

Damit sind die Anteile  $b$  und  $c$  an der Gesamtmasse  $a$  aus den bekannten Größen  $s, g, k, a$  bestimmt, und es ist

$$\frac{c}{b} = \frac{s - k}{k - g}$$

## 17 Die Verdoppelung des Würfels

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $\triangle AEF$  und  $\triangle BFG$  (siehe Abb. L 17) folgt  $\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  (Strahlensatz).





2. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x-4}{2} = x$$

oder

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x - 168 + 336 = 84x \quad \text{also} \quad 9x = 588, \quad x = 65\frac{1}{3}$$

auf die Kindheit fielen  $10\frac{8}{9}$  Jahre. Nach  $5\frac{4}{9}$  Jahren (also mit  $16\frac{1}{3}$  Jahren) bekam er einen Bart, nach  $9\frac{1}{3}$  Jahren (also mit  $25\frac{2}{3}$  Jahren) heiratete er, nach 5 Jahren (also mit  $30\frac{2}{3}$  Jahren) wurde Diophant Vater eines Sohnes. Dieser starb mit  $30\frac{2}{3}$  Jahren, als der Vater  $61\frac{1}{3}$  Jahre alt war. Nach vier Jahren (mit  $65\frac{1}{3}$  Jahren) starb Diophant.

## 19 Die Weinmischung

Es sei  $a$  die Anzahl der Maße zu 8 Drachmen;  $b$  die Anzahl der Maße zu 5 Drachmen. Dann ist

$$a + b = x, \quad 8a + 5b = x^2 - 60 \quad (1,2)$$

Setzt man  $b = x - a$  in (2) ein, so folgt

$$8a + 5b = 8a + 5x - 5a = 5x + 3a = x^2 - 60 \quad \text{also} \quad x + \frac{3}{5}a = \frac{x^2 - 60}{5}$$

d. h., es muss

$$x < \frac{x^2 - 60}{5}$$

sein. Setzt man  $a = x - b$  in (2) ein, so folgt

$$8a + 5b = 8a - 3b = x^2 - 60 \quad \text{also} \quad x + \frac{3}{8}b = \frac{x^2 - 60}{8}$$

d. h., es muss

$$x > \frac{x^2 - 60}{8}$$

sein. Somit gilt  $5x < x^2 - 60 < 8x$ . Es sind die beiden quadratischen Ungleichungen

$$x^2 - 5x > 60 \quad \text{und} \quad x^2 - 8x < 60 \quad (3,4)$$

zu lösen. Aus (3) folgt

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 > 60 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

d.h.  $\left|x - \frac{5}{2}\right| > \frac{\sqrt{265}}{2}$ , d. h. (da  $x$  positiv)  $x > \frac{5 + \sqrt{265}}{2} \approx 10,64$ .  
Aus (4) folgt

$$x^2 - 8x + 4^2 = (x - 4)^2 < 60 + 4^2$$

d.h.  $|x - 4| < \sqrt{76}$ , d. h. (wegen  $x \geq 4$ )  $x < 4 + \sqrt{76} \approx 12,12$ .

Diophant nahm  $11 < x < 12$  (5) an. Nun soll  $x^2 - 60$  eine Quadratzahl sein:  $x^2 - 60 = (x - p)^2$ , also  $x^2 - 2px + p^2 = x^2 - 60$ , d.h.

$$x = \frac{p^2 + 60}{2p} \quad (6)$$

Die Zahl  $p$  muss in (6) so gewählt werden, dass für  $x$  die Ungleichung (5) erfüllt ist.

Aus  $11 < \frac{p^2+60}{2p}$  folgt  $22p < p^2 + 60$  oder  $p^2 - 22p + 11^2 > 11^2 - 60$ ,  $(p - 11)^2 > 61$ ,  $|p - 11| > 7,81$ , d.h.  $p > 18,81$  oder  $p < 3,19$ :

Aus  $\frac{p^2+60}{2p} < 12$  folgt  $p^2 + 60 < 24p$  oder  $p^2 - 24p + 12^2 < 12^2 - 60$ ,  $(p - 12)^2 < 84$ ,  $|p - 12| < 9,17$ , d.h.  $p < 21,17$  oder  $p > 2,83$ :

Diophant setzte  $p = 20$ .

Dann wird nach (6)  $x = \frac{400+60}{40} = \frac{23}{2}$ . (Auch für  $p = 3$  wird  $x = \frac{23}{2}$ .) Der dafür bezahlte Preis ist

$$x^2 - 60 = \frac{529}{4} - 60 = \frac{289}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

Nun werden (1) und (2) zu

$$a + b = \frac{23}{2}, \quad 8a + 5b = \frac{289}{4} \quad (7,8)$$

Wird  $a = \frac{23}{2} - b$  aus (7) in (8) eingesetzt, so ergibt sich

$$8\left(\frac{23}{2} - b\right) + 5b = 92 - 3b = \frac{289}{4}$$

also  $3b = \frac{79}{4}$ ,  $b = \frac{79}{12}$  und  $a = \frac{23}{2} - b = \frac{59}{12}$ . Es sind  $4\frac{11}{12}$  in Maß des Weines von 8 Drachmen und  $6\frac{7}{12}$  Maß des Weines von 5 Drachmen.

Natürlich muss man nicht  $p = 20$  oder  $p = 3$  annehmen. Jeder Bruch innerhalb der angegebenen Werte führt zu einer Lösung der Aufgabe.

## 20 Die Quadratur des Kreises

Aus  $e^2 = 2a^2$  folgt  $e = \sqrt{2}a$ . Somit gilt bei der Zirkulatur des Quadrats nach (\*)

$$2r = a + \frac{1}{3}(e - a) = a + \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)a$$

also  $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{3}$ . Dann wird

$$F = \sigma r^2 = \sigma \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^2 \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

andererseits soll  $F = a^2$  sein. Somit ist  $\sigma \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$ . Legt man den Näherungswert  $\frac{577}{408}$  für  $\sqrt{2}$  zugrunde, so ergibt sich  $\sigma \approx 3,0883$ .

Auch die Vorschrift zur Quadratur des Kreises nach (\*\*) ergibt  $\sigma \approx 3,0883$ .  
(Dieser Wert kann für uns nur den Sinn haben, ein Maß der erzielten Genauigkeit zu geben. Ein solcher Wert hat im alten Indien niemals existiert!)

Aus  $r = \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{e}{2} - \frac{a}{2} \right)$  folgt

$$d = 2r = a + \frac{1}{3}(e - a) = a + \frac{1}{3}(e_1 - 1)a = a \frac{2 + e_1}{3}$$

(beachte  $e = e_1 a$ ). Mit  $a = \frac{e_1 e_2}{2}$  ergibt sich

$$d = \frac{(2 + e_1)e_1}{2 \cdot 3} e = \frac{2e_1 + e_1^2}{2 \cdot 3} e = \frac{2e_1 + 2}{2 \cdot 3} e = \frac{e_1 + 1}{3} e$$

also  $e = \frac{3}{e_1 + 1} d$  und somit

$$a = \frac{e_1 e}{2} = \frac{3e_1}{2(1 + e_1)} d = \frac{e_1}{2} \frac{3}{1 + e_1} d$$

Nun ist

$$e_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{17}{12} - \frac{1}{12 \cdot 34} = \frac{1}{12} \left( 17 - \frac{1}{34} \right)$$

und

$$1 + e_1 = \frac{1}{12} \left( 29 - \frac{1}{34} \right)$$

Es folgt

$$a = \frac{17 - \frac{1}{34}}{2} \frac{3}{29 - \frac{1}{34}} d = \frac{51 - \frac{3}{34}}{58 - \frac{2}{34}} d$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{51 - \frac{3}{34}}{58 - \frac{2}{34}} &= \frac{58 - 7 - \frac{2}{34} - \frac{1}{34}}{58 - \frac{2}{34}} = 1 - \frac{7 + \frac{1}{34}}{58 - \frac{2}{34}} \\ \frac{7 + \frac{1}{34}}{58 - \frac{2}{34}} &= \frac{1}{8} \frac{56 + \frac{8}{34}}{58 - \frac{2}{34}} = \frac{1}{8} \frac{58 - 2 - \frac{2}{34} + \frac{10}{34}}{58 - \frac{2}{34}} = \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{2 - \frac{10}{34}}{58 - \frac{2}{34}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 - \frac{10}{34}}{58 - \frac{2}{34}} &= \frac{1}{29} \frac{2 - \frac{10}{34}}{2 - \frac{2}{34 \cdot 29}} = \frac{1}{29} \frac{2 - \frac{2}{34 \cdot 29} + \frac{2}{34 \cdot 29} - \frac{10}{34}}{2 - \frac{2}{34 \cdot 29}} = \frac{1}{29} \left( 1 - \frac{\frac{10}{34} - \frac{2}{34 \cdot 29}}{2 - \frac{2}{34 \cdot 29}} \right) \\ &= \frac{1}{29} \left( 1 - \frac{\frac{5}{34} - \frac{1}{34 \cdot 29}}{1 - \frac{1}{34 \cdot 29}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{5}{34} - \frac{1}{34 \cdot 29}}{1 - \frac{1}{34 \cdot 29}} = \frac{5 - \frac{1}{29}}{34 - \frac{1}{29}} = \frac{1}{6} \frac{30 - \frac{6}{29}}{34 - \frac{1}{29}} = \frac{1}{6} \frac{34 - 4 - \frac{1}{29} - \frac{5}{29}}{34 - \frac{1}{29}} = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{4 + \frac{5}{29}}{34 - \frac{1}{29}} \right)$$

$$\frac{4 + \frac{5}{29}}{34 - \frac{1}{29}} = \frac{1}{8} \frac{32 + \frac{40}{29}}{34 - \frac{1}{29}} = \frac{1}{8} \frac{34 - 2 - \frac{1}{29} + \frac{41}{29}}{34 - \frac{1}{29}} = \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{2 - \frac{41}{29}}{34 - \frac{1}{29}} \right)$$

Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich in der Tat

$$a = \left\{ 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8} \right) \right\}$$

wenn der letzte Bruch  $\frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} \frac{2 - \frac{41}{29}}{34 - \frac{1}{29}} \approx 0,0000015$  als hinreichend kleiner Wert nicht berücksichtigt wird. (Müller 1930, S. 186-188)

## 21 Hund und Hase

Der Text der Aufgabe VI, 14 mit der Lösung im "Mathematischen Handbuch in 9 Kapiteln" lautet weiter:

"Die Antwort sagt: 1072 Schritt.

Die Regel lautet: Lege hin die 100 Schritt, die der Hase zuerst gelaufen war; vermindere es um die 30 Schritt, auf die der Hund beim Nachlaufen nicht hinkam; der Rest ist der Divisor. Mit den 30 Schritt, um die der Hund den Hasen nicht erreichte, multipliziere die Zahl der Schritte, die der Hund in der Verfolgung lief; das Produkt ist der Dividend. Teile den Dividend durch den Divisor. Du erhältst es in Schritt." (Vogel 1968, S. 63.)

In der Tat: Um  $100 - 30 = 70$  Schritt aufzuholen, lief der Hund 250 Schritt. Um die fehlenden 30 Schritt aufzuholen, braucht der Hund noch  $\frac{250}{70} \cdot 30 = \frac{750}{7} = 107\frac{1}{7}$  Schritt. Der Text im byzantinischen Rechenbuch lautet weiter:

"Die Kunst sagt, dass der Hund den Hasen erreichen sollte in einer Entfernung von 156 Sprüngen des Hasen und  $136\frac{1}{2}$  des Hundes. Und wenn du eine derartige Rechnung machen willst, setze die 8 Sprünge des Hasen oben hin und die 7 Sprünge des Hundes unten hin und multipliziere die 7 mit den 8, es wird 56.

Und setze dazu die 100, die der Hase voraus war, und es gibt 156; und in soviel Sprüngen des Hasen hat ihn der Hund eingeholt.

Jetzt willst du auch die Sprünge des Hundes finden; setze dies in die Regeldetri und sprich: Wenn die 8 zu 7 werden, was sollten dann die 156 werden? Und sie sollten  $136\frac{1}{2}$  werden.

Und so viele Sprünge sollte der Hund machen, um den Hasen zu erreichen. Und beachte es unten!"

(Vogel-Hunger 1963, S. 65.)

Macht der Hase einen Sprung, so macht der Hund (in derselben Zeit)  $\frac{39}{16}$  Sprünge. Macht der Hase acht Sprünge, so legt er einen Weg zurück, für den der Hund nur sieben Sprünge braucht. Macht der Hase einen Sprung, so legt er einen Weg zurück, für den der Hund nur  $\frac{7}{8}$  Sprung braucht.

Es bezeichne  $100 + x$  die Anzahl der Hasensprünge bis zum Einholen durch den Hund. In der Zeit, in der der Hase die  $x$  Sprünge macht (der Hund macht  $\frac{39}{16}x$  Sprünge), legt der Hund einen Weg zurück, für den der Hase  $100 + x$  Sprünge machen musste. Macht der Hase  $100 + x$  Sprünge, so legt er einen Weg zurück, für den der Hund nur  $\frac{7}{8}(100 + x)$  Sprünge braucht. Folglich gilt

$$\frac{39}{16} = \frac{7}{9}(100 + x)$$

d.h.

$$100x = \frac{839}{716}x = \frac{39}{14}x, \quad x = 56$$

$$100 + x = 156, \quad \frac{7}{8} \cdot 156 = 136\frac{1}{2}$$

## 22 Die Höhe einer Meeresinsel

Im "Mathematischen Handbuch in 9 Kapiteln" (Problem IX, 23) heißt es weiter:  
 "Die Antwort sagt: 164 Klafter 9 Fuß 6 $\frac{2}{3}$  Zoll. Die Regel lautet: Lege hin die Höhe des Pfahles, subtrahiere davon die 7 Fuß der Augenhöhe des Mannes; mit dem Rest multipliziere die 53 Meilen; das Produkt ist der Dividend.

Nimm die 3 Meilen der Entfernung des Mannes vom Pfahl als Divisor. Teile den Dividenden durch den Divisor. Was man erhalten hat, addiere zur Höhe des Pfahles; dann ist es die Höhe des Berges." (Vogel 1968, S. 102.)

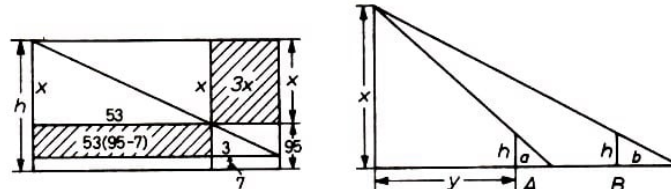


Abb. 22.1, 22.2

In der Tat, aus Abb. L 22.1 erkennt man (mit  $a = 95 - 7 = 88$  Fuß)  $x : a = 53 : 3$ , d.h.  $x = \frac{53}{3}a$  Fuß), und

$$h = x + 95 = \frac{53}{3} \cdot 88 + 95 = \frac{4664}{3} + 95 = 1554 + \frac{2}{3} + 95 = 1649 + \frac{2}{3} \text{ Fuß}$$

d.h.

$$h = 1640 + 9 + \frac{2}{3} \text{ Fuß} = 164 \text{ Klafter } 9 \text{ Fuß } 62 \text{ Zoll}$$

In Abb. L 22.2 sind gegeben:  $h = 30$  Fuß,  $\overline{AB} = 1000$  Schritt = 6000 Fuß,  $a = 123$  Schritt = 738 Fuß,  $b = 127$  Schritt = 762 Fuß. Es gilt

$$\frac{x}{y+a} = \frac{h}{a} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y+\overline{AB}+b} = \frac{h}{b}$$

d.h.

$$\frac{x}{h} = \frac{y+a}{a} = \frac{y+\overline{AB}+b}{b} \quad \text{also} \quad (y+a)b = (y+\overline{AB}+b)a$$

d.h.

$$y = \frac{a \cdot \overline{AB}}{b-a} = \frac{738 \cdot 6000}{762-738} = 184500 \text{ Fuß}$$

Aus  $\frac{x}{h} = \frac{y}{a} + 1$  folgt damit

$$x = \frac{\overline{AB} \cdot h}{b-a} \cdot h = \frac{6000 \cdot 30}{24} + 30 = 7530 \text{ Fuß}$$

Ergebnis:  $x = 7530$  Fuß = 1255 Schritt = 4 Meilen 55 Schritt (1 Meile = 300 Schritt),

$y = 184500 \text{ Fuß} = 30750 \text{ Schritt} = 102 \text{ Meilen } 150 \text{ Schritt.}$

### 23 Weizenkörner auf einem Schachbrett

Bezeichnet  $w_k$  die Anzahl der Weizenkörner auf dem  $k$ -ten Feld, so gilt

$$w_1 = 1; w_2 = 2; w_3 = 4 = 2^2; w_4 = 8 = 2^3; w_5 = 16 = 2^4; \\ w_6 = 32 = 2^5; w_7 = 64 = 2^6; w_8 = 128 = 2^7; \dots; w_{64} = 2^{63}$$

Die gesuchte Anzahl ist

$$s = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

Offenbar ist  $2s = 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$ . Hieraus folgt

$$s = 2s - s = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

### 24 Die Fahrt ans andere Ufer

Der Mann brachte zuerst die Ziege an das andere Ufer. Darauf holte er den Wolf und brachte anschließend die Ziege wieder zurück. Am Ausgangsufer angekommen, nahm er die Kohlköpfe in den Kahn und ließ die Ziege dort. Die Kohlköpfe brachte er zum Wolf an das andere Ufer. Anschließend holte er die Ziege.

### 25 Die Verteilung einer Geldsumme

Eine ganzzahlige "Menge" ( $s$ ) wird an drei Personen A, B, C verteilt. Die erste soll die Hälfte bekommen ( $\frac{s}{2}$ ), die zweite ein Drittel ( $\frac{s}{3}$ ), die dritte ein Sechstel ( $\frac{s}{6}$ ).

Doch zuerst teilen sie sich die Summe  $s$  "auf eine besondere Art": A erhalte  $x$ , B erhalte  $y$ , C erhalte  $z$ , so dass  $s = x + y + z$

Dann gibt A  $\frac{x}{2}$ , B  $\frac{y}{3}$ , C  $\frac{z}{6}$  zurück. Nun wird  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = t$  (ganzzahlig) zu gleichen Teilen unter A, B, C aufgeteilt: Jeder erhält  $\frac{t}{3}$ . Dann hat jeder seinen Anteil:

Die Person A hat  $(x - \frac{x}{2}) + \frac{t}{3} = \frac{s}{2}$  (es gilt  $x = s - \frac{2}{3}t$ ).

Die Person B hat  $(y - \frac{y}{3}) + \frac{t}{3} = \frac{s}{3}$  (es gilt  $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$ ).

Die Person C hat  $(z - \frac{z}{6}) + \frac{t}{3} = \frac{s}{6}$  (es gilt  $z = \frac{1}{5}s - \frac{2}{5}t$ ).

Da  $x + y + z = s$  ist, folgt durch Addition der drei Gleichungen

$$s = s + \frac{s}{2} + \frac{s}{5} - \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) t$$

d.h.

$$21s = 47t \quad \text{oder} \quad \frac{21}{47} = \frac{t}{s} \quad (*)$$

Da 21 und 47 teilerfremd sind, lässt sich der Bruch  $\frac{21}{47}$  nicht mehr kürzen.

Es muss  $t = 21n$ ,  $s = 47n$  (mit einer natürlichen Zahl  $n$ ) sein.

Für  $n = 1$  ist  $s = 47$ ,  $t = 21$ ,  $x = 33$ ,  $y = 13$ ,  $z = 1$  (al-Karacis Lösung). Für  $n = 2$  ist  $s = 94$ ,  $t = 42$ ,  $x = 66$ ,  $y = 22$ ,  $z = 2$ .

Allgemein:

$$x = \left(47 - \frac{2}{3}21\right)n = 33n, \quad y = \left(\frac{47}{2} - \frac{21}{2}\right)n = 13n, \quad z = \left(\frac{47}{5} - \frac{2}{5}21\right)n = n$$

Für  $n = 1$  ist der Anteil des ersten  $\frac{s}{2} = 23\frac{1}{2}$ , des zweiten  $\frac{s}{3} = 15\frac{2}{3}$ , des dritten  $\frac{s}{6} = 7\frac{5}{6}$ .

Cardanos Variante: Jetzt ist  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = t$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x}{3}\right) + \frac{t}{3} &= \frac{2x}{3} + \frac{t}{3} = \frac{s}{2} & \text{oder} & \quad x = \frac{3}{4}s - \frac{1}{2}t \\ \left(y - \frac{y}{4}\right) + \frac{t}{3} &= \frac{3}{4}y + \frac{t}{3} = \frac{s}{3} & \text{oder} & \quad y = \frac{4}{9}s - \frac{4}{9}t \\ \left(z - \frac{z}{5}\right) + \frac{t}{3} &= \frac{4}{5}z + \frac{t}{3} = \frac{s}{6} & \text{oder} & \quad z = \frac{5}{24}s - \frac{5}{12}t \end{aligned}$$

Es folgt  $29s = 98t$ ,  $\frac{29}{98} = \frac{t}{s}$ ,  $t = 29m$ ,  $s = 98n$ .

Cardano wählte  $s = 588$ ,  $t = 174$  ( $n = 6$ ). Die zufällige erste Wegnahme ist dann  $x = 354$ ,  $y = 184$ ,  $z = 50$ . Die Anteile der drei Personen sind  $\frac{s}{2} = 294$ ,  $\frac{s}{3} = 196$ ,  $\frac{s}{6} = 98$ .

## 26 Das Problem der 100 Vögel

Die Zahl der Tauben sei  $p$ , der Kraniche  $q$ , der Gänse  $r$  und der Pfauen  $s$ . Dann gilt

$$p + q + r + s = 100 \quad (1)$$

Eine Taube kostet  $\frac{3}{5}$ , ein Kranich  $\frac{5}{7}$ , eine Gans  $\frac{7}{9}$  und ein Pfau 3 (Dramma). Es muss

$$p\frac{3}{5} + q\frac{5}{7} + r\frac{7}{9} + s3 = 100$$

oder (mit  $5 \cdot 7 \cdot 9$  multipliziert)

$$189p + 225q + 245r + 945s = 31500 \quad (2)$$

sein. Subtrahiert man von (2) die mit 189 multiplizierte Gleichung (1), so erhält man

$$36q + 56r + 756s = 12600$$

oder  $q = 350 - \frac{14}{9}r - 21s$ .

$r$  muss ein Vielfaches von 9 sein:  $r = 9r'$ ; dann wird

$$q = 350 - 14r' - 21s, \quad p = 100 - q - r - s = 5r' + 20s - 250 \quad (3,4)$$

Damit  $q$  bzw.  $p$  eine natürliche Zahl bleibt, muss

$$14r' + 21s < 350 \quad \text{bzw.} \quad 5r' + 20s > 250 \quad (5,6)$$



	$r$	$s$	$q$	$p$		$r$	$s$	$q$	$p$
	9	13	63	15		9	14	42	35
	9	15	21	55		18	13	49	20
	18	14	28	40		18	15	7	60
Tabelle	27	12	56	5		27	13	35	25
	27	14	14	45		36	12	42	10
	36	13	21	30		45	12	28	15
	45	13	7	35		54	12	14	20
	63	11	21	3		72	11	7	10

sein. Für  $r' = 1$  ( $r = 9$ ) bedeutet (5):  $s < 16$ , und (6):  $s > 12$ ; also  $s = 13, 14, 15$ . Aus (3) folgt  $q = 63, 42$  bzw. 21, aus (4) folgt  $p = 15, 35$  bzw. 55.

Man erhält die ersten drei Lösungen der Tabelle. Für  $r' = 2$  ( $r = 18$ ) bedeutet (5):  $s > 12$ , und (6)  $s < 15$ , also  $s = 13, 14, 15$ . Aus (3) und (4) folgen die Werte  $p$  und  $q$ . Man erhält die vierte bis sechste Lösung der Tabelle.

Analog  $r' = 3$  ( $r = 27$ ),  $r' = 4$  ( $r = 36$ ),  $r' = 5$  ( $r = 45$ ),  $r' = 6$  ( $r = 54$ ),  $r' = 7$  ( $r = 63$ ),  $r' = 8$  ( $r = 72$ ). Die sich für  $r' = 9$  ( $r = 81$ ) ergebenden Bedingungen  $s < 10$ ,  $s > 10$  sind nicht erfüllbar (analog  $r' > 10$ ).

## 27 Eine orientalische Gewichtsaufgabe

Es dürfen beide Waagschalen mit Gewichtssteinen belastet werden. Dies bedeutet, dass auch Gewichte subtrahiert werden können.

Die Frage ist somit: Welche vier Zahlen  $a, b, c, d$  sind so beschaffen, dass jede natürliche Zahl bis 40 teils durch Addition, teils durch Subtraktion wenigstens einer und höchstens vier dieser vier Zahlen erhalten werden kann.

Durch systematisches Probieren und Überlegen findet man  $1 = 1$ ,  $2 = 3 - 1$ ,  $3 = 3$ ,  $4 = 3 + 1$  und dann  $5 = 9 - 3 - 1$ ,  $6 = 9 - 3$ ,  $7 = 9 - 3 + 1$ ,  $8 = 9 - 1$ ,  $9 = 9$ ,  $10 = 9 + 1$ ,  $11 = 9 + 3 - 1$ ,  $12 = 9 + 3$ ,  $13 = 9 + 3 + 1$ ; ferner  $14 = 27 - 9 - 3 - 1$ ,  $15 = 27 - 9 - 3$ ,  $16 = 27 - 9 - 3 + 1$ ,  $17 = 27 - 9 - 1$ ,  $18 = 27 - 9$ ,  $19 = 27 - 9 + 1$ ,  $20 = 27 - 9 + 3 - 1$ ,  $21 = 27 - 9 + 3$ ,  $22 = 27 - 9 + 3 + 1$  und weiter

$$\begin{array}{llll}
 23 = 27 - 3 - 1 & 24 = 27 - 3 & 25 = 27 - 3 + 1 & 26 = 27 - 1 \\
 27 = 27 & 28 = 27 + 1 & 29 = 27 + 3 - 1 & 30 = 27 + 3 \\
 31 = 27 + 3 + 1 & 32 = 27 + 9 - 3 - 1 & 33 = 27 + 9 - 3 & 34 = 27 + 9 - 3 + 1 \\
 35 = 27 + 9 - 1 & 36 = 27 + 9 & 37 = 27 + 9 + 1 & 38 = 27 + 9 + 3 - 1 \\
 39 = 27 + 9 + 3 & 40 = 27 + 9 + 3 + 1 & & 
 \end{array}$$

Mit den vier Potenzen von 3: 1, 3, 9, 27 kann man alle Zahlen von 1 bis 40 in der gewünschten Form darstellen.

Allgemeiner gilt übrigens, dass man mit Hilfe der addierten oder subtrahierten Potenzen der 3 ( $1, 3, 9, 27, 81, \dots, 3^n$ ) alle Zahlen von 1 bis  $\frac{3^{n+1}-1}{2}$  darstellen kann:

1, 3, 9, 27 =  $3^3$  alle Zahlen von 1 bis  $40 = \frac{3^4-1}{2}$

mit 1, 3, 9, 27, 81 =  $3^4$  alle Zahlen von 1 bis  $121 = \frac{3^5-1}{2}$

mit 1, 3, 9, 27, 81, 243 =  $3^5$  alle Zahlen von 1 bis  $364 = \frac{3^6-1}{2}$

mit 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561 alle Zahlen von 1 bis 9841,  
mit 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683 alle Zahlen von 1 bis 29524 9841,  
mit 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683 alle Zahlen von 1 bis  $= \frac{3^{10}-1}{2}$

## 28 Die Eierfrau

Die gesuchte Anzahl Eier lässt bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils den Rest 1, hat also die Form  $60k + 1$  (60 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5, 6). Sie ist durch 7 teilbar, was zuerst für  $k = 5$  und dann für  $k = 12, 19, 26, 33, \dots$  der Fall ist. Die kleinstmögliche Anzahl ist somit  $60 \cdot 5 + 1 = 301 = 7 \cdot 43$ .

Die Antwort von Sun Tzu für seine Aufgabe ist: 23.

Das Verfahren, wie die Aufgabe zu lösen ist, beschrieb er durch den folgenden recht geheimnisvollen Text:

"Dividiert durch 3, gibt Rest 2: schreibe 140; dividiert durch 5, gibt Rest 3: schreibe 63; dividiert durch 7, gibt Rest 2: schreibe 30. Diese Zahlen addiert gibt 233; davon subtrahiert 210, gibt den Rest 23, die gesuchte Zahl."

Ergänzt wird die Bemerkung: "Für 1, durch 3 gewonnen, setze 70; für 1, durch 5 gewonnen, setze 21; für 1, durch 7 gewonnen, schreibe 15; ist die Summe 106 oder mehr, so subtrahiere davon 105 und der Rest ist die gesuchte Zahl." (Biernatzki 1856, S. 78.)

Erst durch die Ausführungen des im 13. Jh. lebenden chinesischen Mathematikers Ch'iu Chiu-shao wird klar, was gemeint ist (vgl. Tropicke 1980, S. 637; Biernatzki 1856, 78ff.). Man multipliziert die drei Divisoren 3, 5, 7, wodurch man 105 erhält. Nun werden drei Hilfszahlen  $a, b, c$  wie folgt gefunden:

Dividiere 105 durch 7, so ist der Quotient 15. 15 dividiert durch 7 lässt den Rest 1.  $a = 15$  ist ein Vielfaches von  $3 \cdot 5$ , das bei der Division durch 7 den Rest 1 lässt.  
Dividiere 105 durch 5, so ist der Quotient 21. 21 dividiert durch 5 lässt den Rest 1.  $b = 21$  ist ein Vielfaches von  $3 \cdot 7$ , das bei der Division durch 5 den Rest 1 lässt.  
Dividiere 105 durch 3, so ist der Quotient 35. 35 dividiert durch 3 lässt den Rest 2.  $c = 35 \cdot 2 = 70$  ist ein Vielfaches von  $5 \cdot 7$ , das bei der Division durch 3 den Rest 1 lässt.

Mit den drei Hilfszahlen wird nun die Rechnung fortgesetzt. Die Zahl  $2c + 3b + 2a = 140 + 63 + 30 = 233$  hat die in der Aufgabe verlangten Eigenschaften. Man darf noch 105 ( $= 3 \cdot 5 \cdot 7$ ) so oft wie möglich subtrahieren:  $233 - 105 = 128$ ,  $128 - 105 = 23$ ; das ist die gesuchte Zahl, die man leicht auch durch Probieren gefunden hätte.

Die von Sun Tzu angedeutete und von Ch'iu Chiu-shao beschriebene Regel (genannt: Regula Ta-yen) ist jedoch auch für ähnliche Probleme verwendbar.

Sind  $k, l, m$  gegebene teilerfremde Zahlen (im Beispiel:  $k = 3, l = 5, m = 7$ ) und ist eine Zahl  $n$  aus den Resten  $r, s, t$  (im Beispiel 2, 3, 2) zu bestimmen, die man erhält, wenn man  $n$  durch  $k, l$  bzw.  $m$  dividiert, so hat man "Erweiterungszahlen"  $x, y, z$  und

"Hilfszahlen"  $a, b, c$  so zu bestimmen, dass

$$a = x \cdot kl \equiv 1 \pmod{m}, b = y \cdot km \equiv 1 \pmod{l}, c = z \cdot lm \equiv 1 \pmod{k}$$

ist. (Im Beispiel  $x = 1, y = 1, z = 2, a = 15, b = 21, c = 70$ .) Dann lässt  $rc + sb + ta$  bei der Division durch  $k, l$  bzw.  $m$  offenbar die Reste  $r, s$  bzw.  $t$ .  $n$  ergibt sich aus  $rc + sb + ta = n \pmod{mlk}$ .

## 29 Die Bestimmung eines Dreiecks

Das Dreieck  $\triangle ABC$  habe die Basis  $\overline{BA} = c = 20$ , die Höhe  $\overline{CD} = h = 5$  und die Seiten  $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ , wobei  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$  (Abb. L 29).

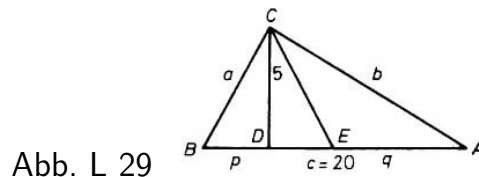


Abb. L 29

Wegen  $a < b$  liegt  $D$  näher bei  $B$  als bei  $A$ . Der Punkt  $E$  zwischen  $D$  und  $A$  werde so gewählt, dass  $\overline{DE} = \overline{BD} = p$  ist.

Regiomontan setzte (nach Cantor 1900, S. 269)  $\overline{AE} = 2x$ . Mit  $\overline{DA} = q$  gilt dann

$$q - p = 2x \quad , \quad q + p = 20$$

Hieraus folgt (Addition der beiden Gleichungen)  $2q = 20 + 2x$  und (Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten)  $2p = 20 - 2x$ , also

$$p = 10 - x \quad , \quad q = 10 + x$$

Unter Benutzung des Satzes von Pythagoras ergibt sich hieraus

$$a^2 = p^2 + h^2 = p^2 + 25 = x^2 - 20x + 125$$

und

$$b^2 = q^2 + h^2 = q^2 + 25 = x^2 + 20 + 125$$

Da  $a^2 : b^2 = 9 : 25$  ist, folgt

$$\frac{x^2 - 20x + 125}{x^2 + 20x + 125} = \frac{9}{25} \quad \text{oder} \quad 16x^2 + 2000 = 680x$$

Hieraus erhält man  $x$ , daraus  $p = 10 - x$  (man wähle das  $x$  mit positiver Differenz  $10 - x$ ),  $q = 10 + x$  und damit  $a$  und  $b$  aus  $a^2 = p^2 + 25, b^2 = q^2 + 25$ .

## 30 In einem Wirtshaus

Erste Aufgabe: Bezeichnet  $m$  die Anzahl der Männer,  $f$  die Anzahl der Frauen, so gilt  $m + f = 21$  und  $5m + 3f = 81$ . Multipliziert man die erste Gleichung mit 3 und subtrahiert danach beide Gleichungen voneinander, so folgt  $2m = 18$ . Somit ist  $m = 9$ , woraus sich  $f = 12$  ergibt.

Zweite Aufgabe (Lösung aus Eulers "Vollständiger Anleitung zur Algebra"):

Es sei die Zahl der Männer =  $p$ , der Frauen =  $q$ , und der Kinder =  $r$ , so erhält man die zwei folgenden Gleichungen:

$$I. \quad p + q + r = 30 \quad , \quad II. \quad 3p + 2q + r = 50$$

aus welchen die drei Buchstaben  $p$ ,  $q$  und  $r$  in ganzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun  $r = 30 - p - q$ , und deswegen muss  $p + q$  kleiner sein als 30.

Dieser Wert in der zweiten für  $r$  geschrieben, gibt  $2p + q + 30 = 50$ , also  $q = 20 - 2p$  und  $p + q = 20 - p$ , welches offenbar kleiner ist als 30. Nun kann man für  $p$  alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entstehen:

$$\begin{array}{ll} \text{Zahl der Männer} & p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ \text{Zahl der Frauen} & q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0 \\ \text{Zahl der Kinder} & r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 \end{array}$$

Lässt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch neun Auflösungen übrig.

### 31 Das "Erraten" einer natürlichen Zahl

Die durchzuführenden Divisionen mit Rest sind

$$x = aq_1 + r_1 \quad , \quad x = (a + 1)q_2 + r_2$$

(worin  $q_1 = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$  die größte ganze Zahl  $\leq \frac{x}{a}$ ,  $0 \leq r_1 < a$ ,  $q_2 = \left\lfloor \frac{x}{a+1} \right\rfloor$  die größte ganze Zahl  $\leq \frac{x}{a+1}$ ,  $0 \leq r_2 < a + 1$  ist, vgl. Pieper 1984c, S. 30).

Multipliziert man die erste Gleichung mit  $a + 1$ , die zweite mit  $a^2$  und addiert beide Gleichungen, so ergibt sich auf der linken Seite

$$(a + 1)x + a^2x = (a^2 + a + 1)x = a(a + 1)x + x$$

auf der rechten Seite

$$(a + 1)aq_1 + a^2(a + 1)q_2 + (a + 1)r_1 + a^2r_2 = a(a + 1)(q_1 + aq_2) + s$$

also

$$a(a + 1)x + x = a(a + 1)(q_1 + aq_2) + s \quad (*)$$

Man überlege sich wie folgt, dass stets  $s \geq x$  ist.

Ist sowohl  $r_1 \geq 1$  als auch  $r_2 \geq 1$ , so wird in der Tat

$$s = (a + 1)r_1 + a^2r_2 \geq a + 1 + a^2 > a^2 + a = a(a + 1) > x$$

Ist  $r_2 = 0$  und  $r_1 \geq 1$ , so ist  $x = q_2(a + 1) = q_2a + q_2$  mit  $0 < q_2 < a$  (wegen  $x < a(a + 1)$ ), also ist  $r_1 = q_2$ . Somit wird  $s = (a + 1)r_1 = (a + 1)q_2 = x$ .

Ist  $r_1 = 0$  und  $r_2 \geq 2$ , so wird  $s = a^2r_2 \geq 2a^2 > a(a + 1) > x$ .

Ist  $r_1 = 0$  und  $r_2 = 1$ , so muss  $x = a^2(a \mid a^2, a + 1 \mid a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$ ,  $x < a(a + 1) = a^2 + a$ , also  $s = x$  sein.

Der Fall  $r_1 = 0, r_2 = 0$  ist unmöglich. (Aus  $a \mid x$  und  $a + 1 \mid x$  folgt  $a(a + 1) \mid x$ , was  $x < a(a + 1)$  widerspricht.)

Aus (\*) folgt  $s - x = a(a + 1)q$  mit einer ganzen Zahl  $q \geq 0$ , d.h.  $s = a(a + 1)q + x$  (worin  $0 < x < a(a + 1)$  ist nach Wahl von  $x$ ).

$x$  ist in der Tat der Rest bei der Division  $\frac{s}{a(a+1)}$ .

### 32 Wie spät ist es schon?

Bezeichnet  $x$  die verflossene Zeit, so ist  $y = 12 - x$  die noch übrige Zeit. Es soll  $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}(12 - x)$  sein. Hieraus folgt  $x = 5\frac{1}{7}$ ,  $y = 6\frac{6}{7}$  Stunden.

### 33 Der Zylinder größten Volumens in einer Kugel

Die Aufgabe - anders formuliert - lautet: Es ist der Zylinder mit größtem Volumen in einer Kugel gegebenen Durchmessers zu finden.

Bezeichnet  $d$  den Kugeldurchmesser,  $h$  die Zylinderhöhe und  $a$  den Durchmesser der Grundfläche (Kreis) (Abb. L 33), so gilt für das Volumen des Kreiszylinders

$$V = \pi \cdot h \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

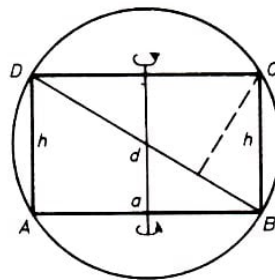


Abb. L 33

wobei  $a^2 + h^2 = d^2$  ( $d$  fest) ist. Es folgt

$$V = V(h) = \frac{\pi}{4}h(d^2 - h^2) = \frac{\pi}{4}hd^2 - \frac{\pi}{4}h^3$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}3h^2; \quad V''(h) = -\frac{\pi}{4}6h$$

Aus  $\frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}3h_{ex}^2 = 0$  folgt

$$h_{ex}^2 = \frac{d^2}{3} \quad \text{d.h.} \quad h_{ex} = \frac{d}{3}\sqrt{3}$$

Wegen  $V''(h_{ex}) = -\frac{\pi}{4}6\frac{d}{3}\sqrt{3} < 0$  ist der Extremwert ein Maximum. Aus  $a^2 = d^2 - h^2$  folgt

$$a_{ex}^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3}d^2 \quad \text{d.h.} \quad a_{ex} = \frac{d}{3}\sqrt{6}$$

Unabhängig vom Durchmesser  $d$  müssen  $a_{ex}, h_{ex}$  im Verhältnis  $a_{ex} : h_{ex} = \sqrt{2} : 1$  stehen.

### 34 Vier-Quadrate-Sätze

1. Es sei  $r = \frac{p}{q}$  eine gebrochene Zahl, worin  $p$  und  $q$  natürliche Zahlen sind (speziell  $r = p$  eine natürliche Zahl,  $q = 1$ ). Nach dem Vier-Quadrate-Satz A ist jede natürliche Zahl Summe von höchstens vier Quadratzahlen.

Fall 1: Es ist  $pq = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  mit natürlichen Zahlen  $a, b, c, d$ . Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2 + \left(\frac{c}{q}\right)^2 + \left(\frac{d}{q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

Fall 2: Es ist  $pq = a^2 + b^2 + c^2$  mit natürlichen Zahlen  $a, b, c$ . Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2 + \left(\frac{3c}{5q}\right)^2 + \left(\frac{4c}{5q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

Fall 3: Es ist  $pq = a^2 + b^2$  mit natürlichen Zahlen  $a, b$ . Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + \left(\frac{b}{3q}\right)^2 + \left(\frac{2b}{3q}\right)^2 + \left(\frac{2b}{3q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

Fall 4: Es ist  $pq = a^2$  mit einer natürlichen Zahl  $a$ . Dann ist

$$r = \frac{p}{q} = 4\left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{a}{2q}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2q}\right)^2$$

Summe von vier Quadraten gebrochener Zahlen.

2. Beweis von Satz 1:

Ist  $k = mn = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  und  $m = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ , dann gibt es nach der Eulerschen Identität (1) Zahlen  $u, v, w, x$  mit  $km = u^2 + v^2 + w^2 + x^2$ , und es wird in der Tat

$$n = \frac{k}{m} = \frac{km}{m^2} = \left(\frac{u}{m}\right)^2 + \left(\frac{v}{m}\right)^2 + \left(\frac{w}{m}\right)^2 + \left(\frac{x}{m}\right)^2$$

(Die Zahlen  $a, b, c, d, p, q, r, s, u, v, w, x$  können gleich 0 oder natürliche Zahlen oder gebrochene Zahlen sein.)

3. Beweis von Satz 2: Wäre  $n = \boxed{4}_B$  so wäre wegen  $mn = \boxed{4}_B$ , nach Satz 1 auch  $\frac{mn}{n} = m = \boxed{4}_B$ .

4. Nach der Eulerschen Identität genügt es zu zeigen, dass sich jede (ungerade) Primzahl als Summe von höchstens vier Quadraten gebrochener Zahlen darstellen lässt. Wäre dies falsch, so gäbe es Primzahlen, die sich nicht als Summe von höchstens vier Quadraten von Brüchen darstellen lassen.

Es sei  $p$  die kleinste unter diesen Primzahlen. Nach Satz 3 gibt es ganze Zahlen  $a, b$  derart, dass  $1 + a^2 + b^2$  durch  $p$  teilbar ist.

Dann gibt es auch ganze Zahlen  $a_0, b_0$  mit  $|a_0| < \frac{p}{2}$ ,  $|b_0| < \frac{p}{2}$  so, dass  $n = 1 + a_0^2 + b_0^2$  durch  $p$  teilbar ist. (Ist nämlich  $r$  der Rest von  $a$  bei der Division durch  $p$ , so setze  $a_0 = r$ , falls  $r < \frac{p}{2}$ , und  $a_0 = r - p$ , falls  $r > \frac{p}{2}$  ist. Ist  $s$  der Rest von  $b$  bei der Division durch  $p$ , so setze  $b_0 = s$ , falls  $s < \frac{p}{2}$ , und  $b_0 = s - p$ , falls  $s > \frac{p}{2}$  ist)

Aus  $1 < \frac{p^2}{4}$ ,  $a_0^2 < \frac{p^2}{4}$ ,  $b_0^2 < \frac{p^2}{4}$  folgt aber  $n < 3\frac{p^2}{4}$ , also  $\frac{n}{p} < \frac{3p}{4} < p$ .

Nach der Wahl von  $p$  als kleinster Primzahl mit  $p \neq \boxed{4}_B$  muss  $\frac{n}{p} = \boxed{4}_B$  sein. Dies ist ein Widerspruch.

Denn aus  $\frac{n}{p} \cdot p = n = 0^2 + 1^2 + a_0^2 + b_0^2 = \boxed{4} = \boxed{4}_B$  und  $p \neq \boxed{4}_B$  müsste nach Satz  $2\frac{n}{p} \neq \boxed{4}_B$  folgen.

### 35 Die Tangentenaufgabe

Der Kreis um  $P = (v, 0)$  mit dem Radius  $r$  ist

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2$$

Die gegebene Kurve ist  $x = \frac{y^2}{a}$  ( $a > 0$ ). Aus diesen Gleichungen folgt (durch Einsetzen)

$$\left(\frac{y^2}{a} - v\right)^2 + y^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad y^4 - 2\left(av - \frac{a^2}{2}\right)y^2 = a^2(r^2 - v^2)$$

oder

$$y^2 = av - \frac{a^2}{2} \pm a\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - av}$$

Es gibt nur ein  $y$ , wenn  $r^2 + \frac{a^2}{4} - av = 0$ , d.h.  $r^2 = av - \frac{a^2}{4}$  ist. Der Berührungskreis hat die Gleichung

$$(x - v)^2 + y^2 = av - \frac{a^2}{4}$$

Der Berührungspunkt  $C = (x, y)$  ist Punkt der Parabel (Abb. L 35), d. h., für ihn gilt  $y^2 = ax$ . Es folgt

$$(x - v)^2 + ax = av - \frac{a^2}{4} \quad \text{oder} \quad (x - v)^2 + a(x - v) + \frac{a^2}{4} = 0$$

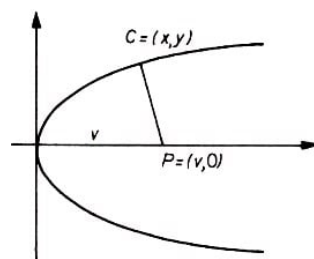


Abb. L 35

oder

$$\left(x - v + \frac{a}{2}\right)^2 = 0$$

Somit ist  $v = x + \frac{a}{2}$ .

### 36 Kegel mit größter Oberfläche in einer Kugel

a) Zum Problem: Bei gegebener Strecke  $\overline{AB} = s$  des Dreiecks  $\triangle ABC$  (vgl. Abb. L 36) den größtmöglichen Wert des Verhältnisses

$$\frac{\overline{CB} \cdot \overline{BA} + \overline{CB}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{rs + r^2}{d^2}$$

zu suchen.

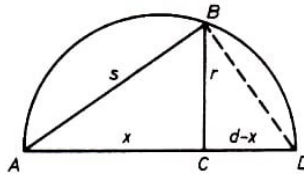


Abb. L 36

Es ist  $\overline{AC} = x = \sqrt{s^2 - r^2}$ ,  $\overline{AD} = d = \frac{s^2}{x}$  (wegen  $\frac{d}{s} = \frac{s}{x}$  in den ähnlichen Dreiecken  $\triangle ABC$  und  $\triangle ADB$ ). Somit ist  $d = \frac{s^2}{\sqrt{s^2 - r^2}}$ ,  $d^2 = \frac{s^4}{s^2 - r^2}$ .

Es soll also  $(rs + r^2) : \frac{s^4}{s^2 - r^2}$  ein Maximum werden. (Dann wird  $\frac{s^4}{s^3r + s^2r^2 - sr^3 - r^4}$  ein Minimum.)

$s^4$  ist gegeben.  $f(r) = s^3r + s^2r^2 - sr^3 - r^4$  muss maximal werden. Es ist

$$f(r+h) = s^3(r+h) + s^2(r+h)^2 - s(r+h)^3 - (r+h)^4$$

Aus  $f(r+h) = f(r)$  folgt (indem auf beiden Seiten die gemeinsamen Glieder beseitigt werden)

$$s^3h + s^2h^2 + 2s^2rh + 3r^2sh + 3srh^2 + sh^3 + 4r^3h + 6r^2h^2 + 4rh^3 + h^3 = 0$$

Nach Division durch  $h$  und Streichung aller Glieder, die nun noch  $h$  enthalten, ergibt sich

$$s^3 + 2s^2r - 3sr^2 - 4r^3 = 0$$

Offenbar ist  $r = -s$  eine Lösung dieser Gleichung. Wegen

$$4r^3 + 3sr^2 - 2s^2r - s^3 = (r+s)(4r^2 - sr - s^2)$$

muss  $4r^2 - sr - s^2 = 0$  sein, eine Gleichung, "aus der dann die Lösung der Aufgabe hervorgeht. Wir verweilen nicht weiter bei dieser selbstverständlichen Sache." (So schrieb Fermat, Fermat 1934, S. 22.)

Die quadratische Gleichung  $4r^2 - sr - s^2 = 0$  hat die Lösungen  $r_{1,2} = \frac{s}{8} \pm \frac{s}{8}\sqrt{17}$ . Da  $r > 0$  ist, folgt  $r = \frac{s}{8}(1 + \sqrt{17})$ .

b) Dann ist

$$\frac{x}{d} = \frac{\sqrt{s^2 - r^2}}{\frac{s^2}{\sqrt{s^2 - r^2}}} = \frac{s^2 - r^2}{s^2}$$



c) Da  $r^2 = x(d - x)$  ist, folgt weiter

$$\left(\frac{r}{d}\right)^2 = \frac{xd - x^2}{d^2} = \frac{x}{d} - \left(\frac{x}{d}\right)^2 = \frac{23 - \sqrt{17}}{32} - \left(\frac{23 - \sqrt{17}}{32}\right)^2 = \frac{190 + 14\sqrt{17}}{32^2}$$

und damit

$$\frac{r}{d} = \frac{\sqrt{190 + 14\sqrt{17}}}{32} \approx 0,49$$

### 37 Das Problem der gerechten Teilung

Lösung von Fermat (nach Cantor 1900, S. 756):

Der erste Spieler A hat eine Partie gewonnen. Nach höchstens vier weiteren Partien wäre das Spiel zu Ende gewesen. Für diese vier Partien gibt es folgende 16 (gleichberechtigte, gleichwahrscheinliche) Möglichkeiten (BBAB bedeute: Sieg von B in der zweiten Partie, Sieg für B in der dritten Partie, Sieg für A in der vierten Partie, Sieg für B in der fünften Partie; analog die anderen Möglichkeiten, die sich dann lexikographisch geordnet wie folgt aufschreiben lassen):

AAAA, AAAB, AABA, AABB, ABAA, ABAB, ABBA, ABBB,  
BAAA, BAAB, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBBA, BBBB

Von diesen 16 sind 11 für A günstig (d. h., A gewinnt das Spiel) und fünf (die unterstrichenen) für B günstig (d. h., B gewinnt das Spiel).

Der Spieler A muss  $\frac{11}{16}$ , der Spieler B muss  $\frac{5}{16}$  des Geldeinsatzes erhalten.

Lösung von Pascal (Cantor 1900, S. 755):

Hätte der erste Spieler A zwei Gewinne, der zweite B einen Gewinn und sie spielen weiter, so kann zweierlei sich ereignen: A gewinnt und erhält den ganzen Einsatz, oder B gewinnt und steht dann mit A gleichauf, so dass jedem die Hälfte des Einsatzes zukommt. Der Spieler A erhält unter allen Umständen die eine Hälfte des Einsatzes, spielt daher nur um die andere Hälfte.

Diese letztere Hälfte ist, wenn das Spiel unterbleibt, zwischen A und B hälftig zu teilen, d. h., wenn der Gesamteinsatz 1 beträgt, hat A  $\frac{3}{4}$  erhalten und B nur  $\frac{1}{4}$ .

Nun stehe zweitens A mit zwei Gewinnen gegen B ohne Gewinn oder mit null Gewinnen. Fällt eine neu zu spielende Partie zu Gunsten von A aus, so hat er gewonnen und zieht den ganzen Einsatz, fällt sie zu Gunsten von B aus, so ist der vorige Fall hergestellt, und A hat  $\frac{3}{4}$  fordern. So viel bekommt er also mindestens und spielt nur um  $\frac{1}{4}$ .

Dieses letzte Viertel ist, wenn das Spiel unterbleibt, zwischen A und B hälftig zu teilen, d. h., A hat  $\frac{7}{8}$  und B hat  $\frac{1}{8}$  zu erhalten.

Endlich stehe das Spiel auf 1 gegen 0, wonach eigentlich gefragt wurde. Gewinnt A in einer weiter angenommenen Partie, so ist der zuletzt erörterte Zustand geschaffen, und A bekommt  $\frac{7}{8}$ . Gewinnt dagegen B, so stehen die beiden Spieler gleichauf, und jeder erhält die Hälfte. A hat also diese Hälfte unter allen Umständen zu fordern und würde eine etwaige Partie nur um  $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$  spielen, wovon ihm bei Unterbleiben des Spieles die Hälfte mit  $\frac{3}{16}$  zukommt. Die Teilung muss deshalb dem Spieler A  $\frac{11}{16}$ , dem Spieler

B  $\frac{5}{16}$  zusprechen.

Jakob Bernoulli schrieb in seinem 1713 postum herausgegebenen, zwischen 1680 und 1685 entstandenem Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung (in dem er auch die Huygenssche Abhandlung von 1657, mit Anmerkungen versehen, aufgenommen hatte):

"Es ist also bei der Berechnung der zu erwartenden Gewinne nur auf die Spiele, welche noch gemacht werden müssen, Rücksicht zu nehmen, nicht auf die bereits gemachten. Denn für jedes einzelne folgende Spiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glück diejenigen Spieler begünstigt, welche es bisher bevorzugt hat, nicht größer als die, dass es diejenigen begünstigt, welche es bisher stiefmütterlich behandelt hat.

Dies glaube ich gegenüber der lächerlichen Ansicht von vielen Leuten bemerken zu müssen, welche das Glück gewissermaßen als einen Besitz betrachten, welcher eine längere Zeit bei einem Menschen bleibt und ihm gleichsam ein Recht einräumt, künftighin ein gleiches Glück zu erhoffen." (Bernoulli 1899, S. 13.)

Bernoulli gab folgende Tabelle an, welche den Teil des Einsatzes angibt, welcher dem Spieler A zukommt, wenn das Spiel in dem Moment abgebrochen wird, wo zum Sieg dem Spieler A noch ein, zwei, ..., neun Partien, dem Spieler B noch ein, zwei, ... , sieben Partien fehlen:

Anzahl der Partien, welche noch fehlen dem Spieler A	dem Spieler B						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1:2	3: 4	7: 8	15: 16	31: 32	63: 64	127: 128
2	1:4	4: 8	11: 16	26: 32	57: 64	120: 128	247: 256
3	1:8	5: 16	16: 32	42: 64	9: 128	219: 256	466: 512
4	1:16	6: 32	22: 64	64: 128	163: 256	382: 512	848: 1024
5	1:32	7: 64	29: 128	93: 256	256: 512	638: 1024	1486: 2048
6	1:64	8: 128	37: 256	130: 512	386:1024	1024: 2048	2510: 4096
7	1:128	9: 256	46: 512	176:1024	562:2048	1586: 4096	4096: 8192
8	1:256	10: 512	56:1024	232:2048	794:4096	2380: 8192	6476:16384
9	1:512	11:1024	67:2048	299:4096	1093:8192	3473:16384	9949:32768

Die Huygensschen Überlegungen zum Problem der gerechten Teilung findet man in Bernoulli 1899, S. 12-20. Die Lösung des Problems durch Jakob Bernoulli steht ebenda, S. 106-111.

Fehlen dem Spieler A noch  $k$  Partien zum Sieg und dem Spieler B noch  $l$  Partien zum Sieg, so gewinnt A das Spiel mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{2^m} \left\{ \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} + \dots + \binom{m}{m} \right\}$$

worin  $m = k + l - 1$  ist, und B mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p$ . Im diskutierten Fall  $k = 2$ ,  $l = 3$ ,  $m = 4$  ist

$$p = \frac{1}{16} \left\{ \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right\} = \frac{1}{16}(6 + 1) = \frac{7}{16}$$

### 38 Eine überraschende Identität

Ist  $a$  eine nichtnegative reelle Zahl, so gibt es immer eine und nur eine nichtnegative reelle Zahl  $b$  mit  $b^2 = a$ . Diese eindeutig bestimmte Zahl  $b$  heißt Quadratwurzel aus  $a$  und wird mit  $b = \sqrt{a}$  bezeichnet.

Ist  $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$  eine beliebige komplexe Zahl, so gibt es genau zwei verschiedene komplexe Zahlen

$$\beta_1 = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad , \quad \beta_2 = -\sqrt{r} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

mit  $\beta_1^2 = \beta_2^2 = \alpha$ . Beide heißen "Quadratwurzeln aus  $\alpha$ ".

Für  $a = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$  sind es die Zahlen

$$\beta_1 = \sqrt{2}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2}) \quad \text{und}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2})$$

Für  $\alpha' = 1 - i\sqrt{3} = \bar{\alpha} = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$  sind es die Zahlen

$$\beta'_1 = \sqrt{2}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = \sqrt{2}(-\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) = \bar{\beta}_2 \quad \text{und}$$

$$\beta'_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) = \bar{\beta}_1$$

Sind  $\beta_1, \beta_2$  die Quadratwurzeln aus  $1 + i\sqrt{3}$ , so sind die zu diesen Quadratwurzeln konjugierten Zahlen  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$  die Quadratwurzeln aus der zur gegebenen Zahl konjugierten Zahl  $1 - i\sqrt{3}$ .

Es gilt  $\beta_1 + \bar{\beta}_1 = \sqrt{6}$ ,  $\beta_2 + \bar{\beta}_2 = -\sqrt{6}$ . Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist reell, was Wallis offenbar nicht erkannt hat.

### 39 Regelmäßiges Fünf- und Zehneck

a) Wird eine Strecke  $a$  nach dem Goldenen Schnitt in die Abschnitte  $x$  und  $a - x$  geteilt, so dass  $a : x = x : (a - x)$  ist (Abb. L 39.1), so gilt  $x = \sigma a$  und  $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (vgl. Aufgabe 12).



Abb. L 39.1

b) Sind  $A$  und  $B$  zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen Zehnecks, also  $\overline{AB} = s_{10}$ , und ist  $C$  der Mittelpunkt des Umkreises mit dem Radius  $r$ , so ist  $\triangle ABC$  offenbar ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln  $72^\circ$  und dem Winkel  $36^\circ$  bei  $C$  (Abb. L 39.2).

Durch die Winkelhalbierende  $\overline{AE}$  entstehen ähnliche Dreiecke  $\triangle ABE$  und  $\triangle ABC$  (sie haben gleiche Winkel). Folglich gilt  $\overline{CA} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{EB}$ .

Da  $\overline{CA} = r$ ,  $\overline{CE} = \overline{EA} = \overline{AB} = s_{10}$ ,  $\overline{EB} = r - s_{10}$  ist, folgt

$$r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$$

d. h.,  $E$  teilt den Radius nach dem Goldenen Schnitt. Somit gilt nach a)  $s_{10} = \sigma r$ .

c) Zieht man die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck  $DHMNI$  (mit der Seitenlänge  $s_5$ ), so entsteht ein dazu ähnliches kleineres Fünfeck  $D'H'M'N'I'$  (mit der Seitenlänge  $s'_5$ ); Abb. L 39.3. Die Radien der Umkreise  $r$  bzw.  $r'$  der beiden Fünfecke verhalten sich wie die Seitenlängen der Fünfecke:  $\frac{r'}{r} = \frac{s'_5}{s_5}$ .

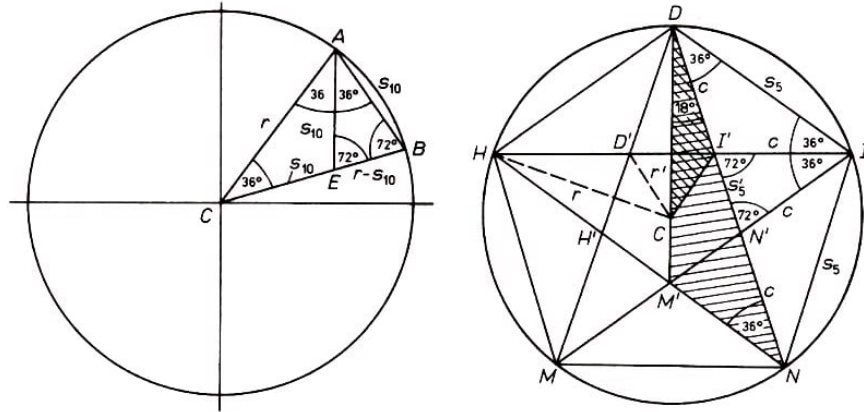


Abb. L 39.2, 39.3

d) Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks teilen einander nach dem Goldenen Schnitt, und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich (vgl. Aufgabe 13 mit Lösung).

Es gilt also  $\overline{DN'} = \overline{NI'} = s_5$ . Hieraus folgt  $\overline{DI'} = \overline{N'N}$ , was mit  $c$  bezeichnet werde. Dann ist  $s_5 = c + s'_5$ . Die gleichschenkligen Dreiecke  $\triangle I'N'I$  bzw.  $\triangle N'ID$  mit der Grundlinie  $s'_5$  bzw.  $c$  sind Goldene Dreiecke (vgl. Aufgabe 14). Ihre Grundlinie ist gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Schenkels.

Mit a) folgt  $s'_5 = \sigma c$ ,  $c = \sigma s_5 = \sigma(c + s'_5)$ , also

$$\frac{s'_5}{c + s'_5} = \frac{s'_5}{c} \frac{c}{c + s'_5} = \sigma^2$$

Andererseits ist

$$\frac{s'_5}{c + s'_5} = \frac{s'_5}{s_5} = \frac{r'}{r}$$

(nach c)). Somit gilt  $r' = \sigma^2 r$ .

e) Die Dreiecke  $\triangle DM'N$  und  $\triangle DI'C$  sind ähnlich (sie haben den gemeinsamen Winkel  $18^\circ$  bei  $D$  und  $\angle DNM' = 36^\circ$ ,  $\angle DCI' = 36^\circ$ ). Daher gilt

$$\frac{\overline{DM'}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{DI'}}{\overline{DC}}$$

Nun ist  $\overline{DM'} = r + r'$ ,  $\overline{DN} = 2c + s'_5$ ,  $\overline{DI'} = c$ ,  $\overline{DC} = r$ , also

$$\frac{r + r'}{2c + s'_5} = \frac{c}{r} \quad \text{oder} \quad r(r + r') = c(2c + s'_5) \quad (*)$$



Nun ist einerseits

$$45^\circ + \angle ECD = \angle BCA + \angle ECD = 90^\circ - \angle ACE = 90^\circ - \angle KCG = \angle KGC$$

(beachte  $\angle CKG = 90^\circ$ ) und andererseits

$$45^\circ + \angle EFA = 45^\circ + \angle GFA = 45^\circ + \angle GAF = \angle KAF + \angle GAF = \angle KAG$$

Somit ist  $\angle KGC = \angle KAG$ . Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle KGC$  und  $\triangle KAG$  ähnlich! Folglich ist

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{GK}} = \frac{\overline{GK}}{\overline{AK}}, \quad \overline{CK} \cdot \overline{AK} = \overline{GK}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AK}^2$$

d.h.

$$(e + z)b = b^2 - z^2 \quad \text{d.h.} \quad z^2 = -\frac{1}{2}ez + \frac{1}{2}b^2$$

#### 41 Die sieben Brücken

Es ist unmöglich, diesen Spaziergang so einzurichten, dass jede der Brücken genau einmal überschritten wird.

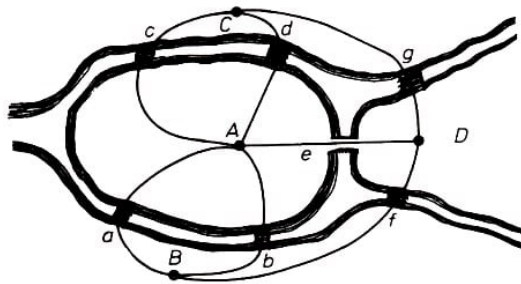


Abb. L 41

Ersetzt man die vier durch Brücken verbundenen Gebiete durch Punkte und zieht Verbindungswege dieser Punkte über die Brücken, so ergibt sich Abb. L 41.

Zu den drei Punkten  $B, C, D$  führen jeweils drei Wege. Wenn jeder Weg genau einmal benutzt wird, gibt es für jeden dieser Punkte nur folgende Möglichkeiten: Der Spaziergang beginnt dort (ein Weg führt weg, von den anderen beiden Wegen führt einer dorthin, der andere fort).

Der Spaziergang endet dort (ein Weg führt dorthin, von den beiden anderen Wegen führt einer dorthin, der andere fort). In jedem der drei Punkte müsste der Spaziergang entweder beginnen oder enden. Es gibt aber nur einen Anfang und ein Ende.

#### 42 Beim Graben eines Brunnens

Erhält der Arbeiter für den ersten Fuß  $a$  Groschen, dann für den zweiten Fuß  $2a$  Groschen usw. Die arithmetische Folge ist (bis zum zwölften Fuß)  $a, 2a, 3a, \dots, 12a$ . Aus

$$312 = a + 2a + 3a + \dots + 12a = a(1 + 2 + 3 + \dots + 12) \quad \text{also} \quad 312 = a \frac{12 \cdot 13}{2}$$

folgt  $a = \frac{624}{12 \cdot 13} = 4$ . Die arithmetische Folge bis zum achten Glied liefert die Summe

$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 = \frac{1}{2} \cdot 8(4 + 32) = 144 \text{ Groschen} = 6 \text{ Thaler}$$

"Diese bekommt der erste Arbeiter, der andere aber 7 Thaler." (Karsten 1768, S. 270.)

### 43 Ein Maultier und ein Esel

a) Der Maulesel habe  $x$  Pud getragen, der Esel aber  $y$  Pud. Gibt nun der Maulesel dem Esel ein Pud, so hat der Esel  $y + 1$ , der Maulesel aber behält noch  $x - 1$ , da nun der Esel zweimal so viel hat als der Maulesel, so wird  $y + 1 = 2x - 2$ .

Wenn aber der Esel dem Maulesel ein Pud gibt, so bekommt der Maulesel  $x + 1$  und der Esel behält noch  $y - 1$ . Da nun jene Last dreimal so groß ist als diese, so wird  $x + 1 = 3y - 3$ . Also sind unsere zwei Gleichungen:

$$I. \quad y + 1 = 2x - 2 \quad , \quad II. \quad x + 1 = 3y - 3$$

Aus der ersten findet man  $x = \frac{y+3}{2}$ , und aus der anderen  $x = 3y - 4$ , woraus diese neue Gleichung entsteht:  $\frac{y+3}{2} = 3y - 4$ , welche mit 2 multipliziert gibt  $y + 3 = 6y - 8$ , und  $y$  subtrahiert, kommt  $5y - 8 = 3$ , dazu 8 addiert, so hat man  $5y = 11$ ,  $y = \frac{11}{5}$ , oder  $2\frac{1}{5}$  und hieraus  $x = 2\frac{3}{5}$ .

Antwort. Also hat der Maulesel  $2\frac{2}{3}$  Pud, der Esel aber  $2\frac{1}{5}$  Pud getragen. (Euler 1911.)

b) Jetzt gilt

$$y + 1 = 2(x - 1) = 2x - 2 \quad , \quad y - 1 = x + 1$$

Durch Subtraktion folgt  $2 = x - 3$ , d.h.  $x = 5$ , und damit  $y = 7$ .

### 44 Stiere und Kühe

Die Anzahl der weißen, braunen, schwarzen und scheckigen Stiere bzw. Kühe werde mit  $A, B, C, D$  bzw.  $a, b, c, d$  bezeichnet. Die im Gedicht genannten sieben Bedingungen lauten:

$$A = B + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)C = \frac{5}{6}C + B \quad (1)$$

$$C = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)D + B = \frac{9}{20}D + B \quad (2)$$

$$D = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)A + B = \frac{13}{42}A + B \quad (3)$$

$$a = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(C + c) = \frac{7}{12}(C + c) \quad (4)$$

$$c = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(D + d) = \frac{9}{20}(D + d) \quad (5)$$

$$d = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(B + b) = \frac{11}{30}(B + b) \quad (6)$$

$$b = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(A + a) = \frac{13}{42}(A + a) \quad (7)$$

Die ersten drei Gleichungen ermöglichen es,  $A, C, D$  durch  $B$  auszudrücken (drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $A, C, D$ ). Die ersten beiden Gleichungen  $6A -$

$5C = 6B$  oder (Multiplikation mit 4)  $24A - 20C = 24B$  und  $20C - 9D = 20B$  liefern (durch Addition)

$$24A - 9D = 44B \quad (8)$$

Diese Gleichung und (3), in der Form  $-13A + 42D = 42B$ , ergeben (Multiplikation von (8) mit 14, von (3) mit 3)

$$336A - 126D = 616B \quad , \quad -394A + 126D = 126B$$

woraus (durch Addition)  $297A = 742B$ , d.h.  $A = \frac{742}{297}B$  folgt. Aus (3) ergibt sich damit

$$D = \frac{13}{42} \cdot \frac{742}{297}B + B = \frac{13}{3 \cdot 14} \frac{53 \cdot 14}{297}B + B = \frac{1580}{891}B$$

Aus (2) somit

$$C = \frac{9}{20}D + B = \frac{1602}{891}B$$

Da es sich um natürliche Zahlen (Anzahlen) handelt und die Zahlen 1580 und 891 teilerfremd sind, muss  $B$  ein Vielfaches von 891 sein:  $B = 891k$ . Dann wird  $A = 2226k$ ,  $D = 1580k$ ,  $C = 1602k$ . Setzt man diese Werte in die Gleichungen (4) bis (7) ein, so folgt

$$12 - 7c = 11214k \quad (4)$$

$$20c - 9d = 14220k \quad (5)$$

$$30d - 11b = 9801k \quad (6)$$

$$42b - 13a = 28938k \quad (7)$$

Multiplikation von (4) mit 20, von (5) mit 7 und nachfolgender Addition von (4) und (5) liefert die Gleichung

$$240a - 63d = 323820k \quad (9)$$

Multiplikation von (6) mit 42, von (7) mit 11 und nachfolgender Addition von (6) und (7) liefert die Gleichung

$$1260d - 143a = 729960k \quad (10)$$

Multiplikation von (9) mit 20 ergibt

$$4800a - 1260d = 6476400k \quad (11)$$

Addition von (10) und (11) liefert

$$a = \frac{7206360}{4657}k$$

Die anderen Werte sind

$$b = \frac{5439213}{4657}k, \quad c = \frac{4893246}{4657}k, \quad d = \frac{3515820}{4657}k$$



Die Zahl  $k$  muss ein Vielfaches der Primzahl 4657 sein:  $k = 4571l$ . Die gesuchten Zahlen sind:

$$A = 10366482l, B = 4149387l, C = 7460514l, D = 7358060l, \\ a = 7206360l, b = 5439213l, c = 4893246l, d = 3515820l$$

Das Problem hat prinzipiell unendlich viele Lösungen. Die kleinste Lösung erhält man für  $l = 1$ .

#### 45 Konzentrische Kreise und quadratische Gleichungen

Die Gerade durch  $O$  und den Mittelpunkt  $C$  der konzentrischen Kreise schneide den kleinen Kreis in  $A$  und  $B$  (Abb. L 45).

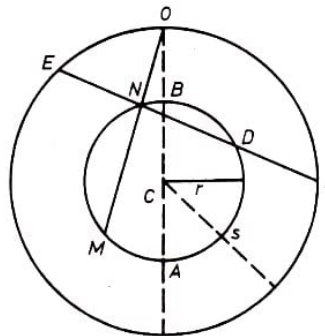


Abb. L 45

Nach dem Sekantensatz ist

$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

Mit  $\overline{OA} = s + r$ ,  $\overline{OB} = s_r$  folgt  $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = s^2 - r^2$ . Analog gilt natürlich  $\overline{ED} \cdot \overline{EN} = s^2 - r^2$ .

Hieraus folgt  $\overline{ED} \cdot \overline{EN} = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$  oder  $(\overline{EN} + \overline{ND})\overline{EN} = (\overline{ON} + \overline{NM})\overline{ON}$ , d.h.

$$(x + c)x = (b + a - b)b \quad \text{also} \quad x^2 + cx = ab$$

wie verlangt. (Fuss 1965.)

#### 46 Die Teilung eines Königreiches

Wie die Teilung des Reiches in zwei, drei oder vier Länder in der geforderten Art erfolgen kann, zeigt Abb. L 46.1.

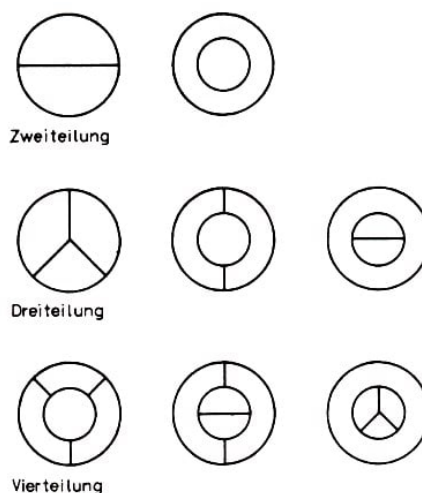


Abb. L 46.1

Nun zur Fünfteilung des Reiches: Es mögen die Hauptstädte der fünf Länder mit  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  bezeichnet werden.

Angenommen, es wäre möglich, das Reich in fünf Länder in der geforderten Art aufzuteilen. Dann muss von jeder Hauptstadt zu jeder anderen eine Verbindungsstraße führen derart, dass die Straßen getrennt verlaufen - ohne Kreuzungen - und ohne das Gebiet eines dritten Landes zu berühren.

Drei Verbindungsstraßen bilden stets eine geschlossene Straße (Ring), z. B. die Verbindungsstraßen  $PQ$ ,  $QR$ ,  $PR$ . Da die Straße  $ST$  die übrigen Straßen nicht kreuzt, liegen  $S$  und  $T$  beide innerhalb oder beide außerhalb der Ringstraße  $PQRP$ .

Nun betrachte man die Straßen von  $S$  nach  $P$ ,  $Q$  und  $R$ . Man erhält die Ringstraßen  $PQSP$ ,  $PRSP$  und  $QRSQ$ . Liegt nun  $T$  beispielsweise innerhalb von  $PQSP$ , so kann es keine Straße geben, die  $T$  mit  $R$  verbindet und keine der übrigen Straßen kreuzt. (Bei anderer Lage von  $T$  gilt Entsprechendes.)

Das ist ein Widerspruch, denn bei der angenommenen Fünfteilung in der geforderten Art sollen sich doch die Hauptstädte durch Straßen verbinden lassen, die sich nicht gegenseitig schneiden (kreuzen). Die Annahme muss somit falsch sein. Die Fünfteilung des Reiches in der geforderten Weise ist unmöglich.

Das folgende Beispiel für fünf Länder in der geforderten Art auf dem Möbiusschen Band gab 1891 L. Heffter an:

Die beiden Seitenflächen eines Papierstreifens werden wie in Abb. L 46.2 in Länder eingeteilt und dann die Seite  $AB$  so an die Seite  $CD$  geklebt, dass  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $D$  zusammentreffen. H. Tietzes Beispiel mit sechs solchen Ländern zeigt Abb. L 46.3.

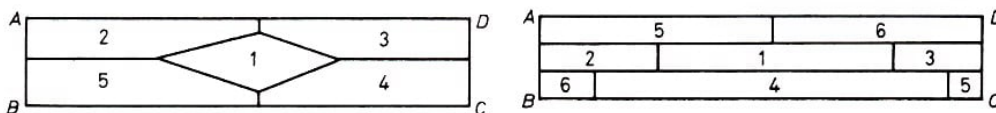


Abb. L 46.2, 46.3

## 47 Ebene Figuren gleichen Umfangs mit größtem Flächeninhalt

Steiners Konstruktion beweist nur: Keine andere geschlossene ebene Kurve als der Kreis kann die geforderte Maximaleigenschaft haben.

Er hat einen Beweis für den Satz "Unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfang hat der Kreis den größten Inhalt" nur unter der Voraussetzung gegeben, dass es überhaupt eine Figur gibt, die unter allen betrachteten den größtmöglichen Inhalt hat. Da diese Voraussetzung aber ihrerseits eines Beweises bedarf (und darin besteht - wie sich zeigte - die Hauptschwierigkeit), muss also Steiners Beweis ergänzt werden.

Steiner bewies nur: Eine geschlossene, nicht kreisförmige Kurve kann nicht von allen ebenen geschlossenen Kurven den größten Flächeninhalt umgrenzen. Gezeigt werden muss überdies: Für den Kreis wird das Maximum des Flächeninhalts solcher Kurven wirklich erreicht. (Der Beweis gelang erst 1882.)

## 48 Gitterpunkte

In einem rechtwinkligen  $x, y$ -Koordinatensystem zeichne man das Rechteck mit den vier Ecken  $(0, 0)$ ,  $(\frac{p}{2}, 0)$ ,  $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$  und  $(0, \frac{q}{2})$  (Abb. L 48) und betrachte die Gerade  $y = \frac{q}{p}x$ .

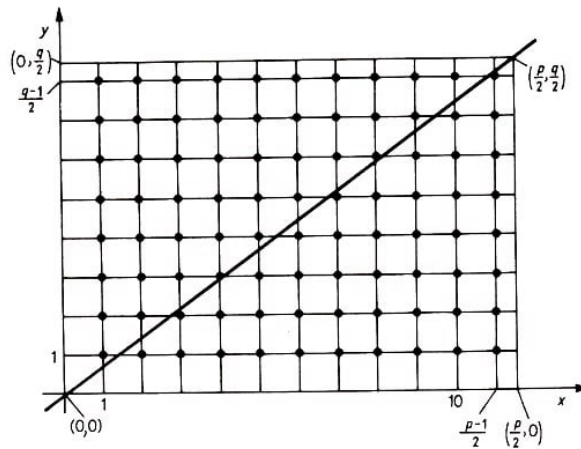


Abb. L 48

Die Punkte  $(x, y) = (0, 0)$  und  $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$  und damit alle Punkte der aus dem Ursprung des Koordinatensystems kommenden Diagonalen des Rechtecks liegen auf dieser Geraden. Das Rechteck wird durch diese Diagonale in zwei Hälften zerlegt.

Auf der Diagonalen liegen keine Gitterpunkte, denn für  $x = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$  ist  $y = \frac{q}{p}x$  keine ganze Zahl. Für einen ganzzahligen Wert  $x = k$  der Abszisse ist  $y = \frac{q}{p}k$  die zugehörige Ordinate auf der Diagonalen.

Die Anzahl der Gitterpunkte auf der Geraden zwischen  $(k, 0)$  und  $(k, \frac{q}{p}k)$  ist offenbar gleich  $\left[\frac{q}{p}k\right]$ . Somit ist die Anzahl der in der unteren Rechteckshälfte liegenden Gitterpunkte gleich  $S$ .

Für einen ganzzahligen Wert  $y = i$  der Ordinate ist  $x = \frac{p}{q}i$  die zugehörige Abszisse auf der Diagonalen. Die Anzahl der Gitterpunkte auf der Geraden zwischen  $(0, i)$  und  $(\frac{p}{q}i, i)$  ist gleich  $\left[\frac{p}{q}i\right]$ .

Somit ist die Anzahl der in der oberen Rechteckshälfte liegenden Gitterpunkte gleich  $T$ .

Es ergibt sich die Anzahl aller Gitterpunkte des Rechtecks zu  $S + T$ . Andererseits ist die Anzahl aller Gitterpunkte des Rechtecks offensichtlich gleich  $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$  (Pieper 1978a, S. 111-113.)

## 49 Die Vielfachen der 9

Jede natürliche Zahl

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^k a_k$$

ist modulo 9 zu ihrer Quersumme

$$Q(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

kongruent. Dies folgt sofort aus  $10 \equiv 1 \pmod{9}$ ,  $10^2 \equiv 1 \pmod{9}$ , ...,  $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ . Insbesondere ist eine Zahl  $n$  durch 9 teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme

$Q(n)$  durch 9 teilbar ist.

Eine zweistellige Zahl  $10 \leq n = a_0 + 10a_1 \leq 99$  ( $0 \leq a_0 \leq 9$ ,  $0 \leq a_1 \leq 9$ ) ist also dann und nur dann durch 9 teilbar, wenn  $a_0 + a_1$  durch 9 teilbar ist. Wegen  $1 < a_0 + a_1 < 18$  ist dies für  $Q(n) = a_0 + a_1 = 9$  und nur dafür der Fall.

## 50 Umfüllen von Wein

1. Es bezeichne A das 12-Maß-Gefäß, B das 8-Maß-Gefäß und C das 5-Maß-Gefäß. Das schrittweise Umfüllen kann wie in den folgenden Tabellen angegeben erfolgen:

A	12	4	4	9	9	1	1	6
B	0	8	3	3	0	8	6	6
C	0	0	5	0	3	3	5	0

A	12	7	7	2	2	10	10	5	5	0	0	8	8	3	3	11	11	6	6
B	0	0	5	5	8	0	2	2	7	7	8	0	4	4	8	0	1	1	6
C	0	5	0	5	2	2	0	5	0	5	4	4	0	5	1	1	0	5	0

2. Jetzt bezeichne überdies D den 3-Maß-Krug,

B	0	3	3	6	6	1	1	4
C	5	5	2	2	0	5	4	4
D	3	0	3	0	2	2	3	0

B	0	5	5	2	2	7	7	4	4
C	5	0	3	3	5	0	1	1	4
D	3	3	0	3	1	1	0	3	0

## 51 Die Anzahl aller Primzahlen

Mit  $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot p$  hätten alle natürlichen Zahlen (außer 1) einen gemeinsamen Teiler  $> 1$ , somit auch  $P + 1$ . Andererseits ist  $(P, P + 1) = 1$ . (Aus  $d \mid P$ ,  $d \mid P + 1$  folgt  $d \mid (P + 1) - P$ , d.h.  $d \mid 1$ ,  $d = 1$ .)

## 52 Die Färbung einer Landkarte

Die Karte in Abb. L 52 hat die verlangte Eigenschaft  $n = 3$ ,  $k > 3$ :

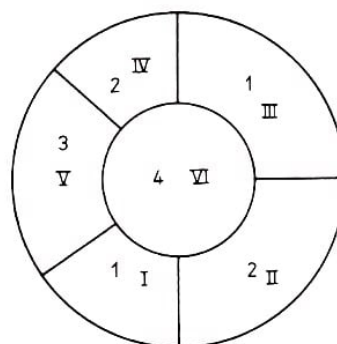


Abb. L 52

Das Land I ist mit II, V, VI benachbart. Das Land II ist mit I, II, VI benachbart. Das Land III ist mit II, IV, VI benachbart. Das Land IV ist mit III, V, VI benachbart. Das

Land V ist mit I, IV, VI benachbart. Das Land VI ist mit I, II, III, IV, V benachbart.

Keine vier Länder liegen so, dass jedes von ihnen mit den übrigen drei benachbart ist. Jedoch liegen beispielsweise die Länder I, II, VI so, dass jedes von ihnen mit den übrigen zwei benachbart ist.

### 53 Das Kästchenproblem

Erste Lösung: Nach Öffnen eines Schubfaches, welches eine Goldmünze enthält, hat man folgende drei gleichwahrscheinliche (gleichberechtigte) Fälle:

1. Man hat das erste Schubfach im ersten Kästchen geöffnet.
2. Man hat das zweite Schubfach im ersten Kästchen geöffnet.
3. Man hat das Fach mit der Goldmünze im dritten Kästchen geöffnet.

Nur in einem dieser drei Fälle (nämlich im Fall 3) ist im zweiten Schubfach des Kästchens eine Silbermünze, also die Wahrscheinlichkeit, dass sich im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Silbermünze befindet, gleich  $\frac{1}{3}$ .

Czuber 1941 argumentierte wie folgt: Das geöffnete Schubfach enthält eine Goldmünze. Man kann es nur mit dem ersten oder dritten Kästchen zu tun haben.

Diese beiden Kästchen enthalten aber drei Schubfächer mit je einer Goldmünze, das erste Kästchen deren zwei, das dritte nur eines. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass man das dritte Kästchen vor sich hat, ist also gleichbedeutend mit der Frage, dass man von den drei Schubfächern mit Goldmünzen dasjenige geöffnet habe, welches sich im dritten Kästchen befindet, und diese Wahrscheinlichkeit ist, weil unter drei Fällen ein günstiger vorkommt,  $\frac{1}{3}$ , dieselbe wie bei der ersten Frage.

Zweite Lösung: Es sei  $G_1$ , das Ereignis, beim Öffnen des ersten Schubfachs eine Goldmünze zu finden, und  $G_2$  das Ereignis, beim Öffnen des zweiten Schubfachs eine Goldmünze zu finden, bzw.  $\overline{S}_2 = \overline{G}_2$  das Ereignis, beim Öffnen des zweiten Schubfachs eine Silbermünze zu finden.

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeiten:  $p(G_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .  $p(G_1 G_2) = p(G_1 \cap G_2) = p$  ("das erste Kästchen wird gewählt") =  $\frac{1}{3}$ , denn  $G_1 G_2 = G_1 \cap G_2$ ; ist das Ereignis, dass sowohl im ersten als auch im zweiten Schubfach eine Goldmünze gefunden wird. Dann ist

$$p(G_2|G_1) = \frac{p(G_1 G_2)}{p(G_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad (\text{bedingte Wahrscheinlichkeit})$$

und daher

$$p(S_2|G_1) = 1 - p(G_2|G_1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Zu Czubers Beispiel: Es sei  $G_1$  das Ereignis, beim Öffnen des ersten Schubfachs eine Goldmünze zu finden,  $G$  das Ereignis, beim Öffnen des zweiten und des dritten Faches nur Goldmünzen zu finden. Dann ist  $p(G_1) = \frac{5}{9}$  und  $p(G_1 G) = p$  ("das erste Kästchen wird gewählt") =  $\frac{1}{3}$ . Hieraus folgt

$$p(G|G_1) = \frac{p(G G_1)}{p(G_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$$

und daher  $p(\overline{G}|G_1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$  ( $\overline{G}$  ist das Ereignis, beim Öffnen der zweiten und dritten Fächer wenigstens eine Silbermünze zu finden).

### 54 Der Streckenübertrager

Es sei  $A$  ein beliebiger Punkt der gegebenen Geraden, dann tragen wir von  $A$  aus auf dieser Geraden nach beiden Seiten hin zwei gleiche Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  ab (Abb. L 54) und bestimmen dann auf zwei beliebigen anderen durch  $A$  gehenden Geraden die Punkte  $E$  und  $D$ , so dass auch die Strecken  $\overline{AD}$  und  $\overline{AE}$  den Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  gleich werden. Die Geraden  $\overline{BD}$  und  $\overline{CE}$  mögen sich in  $F$ , die Geraden  $\overline{BE}$  und  $\overline{CD}$  in  $H$  schneiden; dann ist  $FA$  die gesuchte Senkrechte.

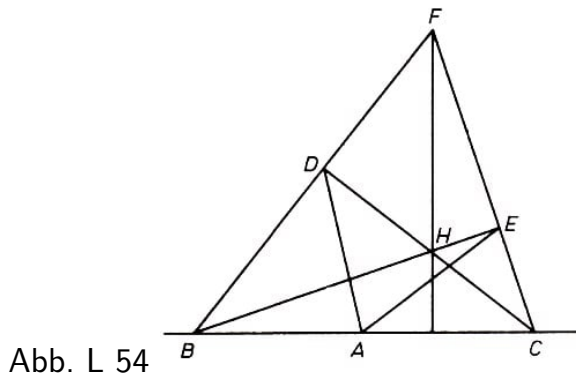


Abb. L 54

In der Tat: die Winkel  $\angle BDC$  und  $\angle BEC$  sind als Winkel im Halbkreis über  $\overline{BC}$  Rechte, und daher steht nach dem Satz vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks (die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt!), auf das Dreieck  $BCF$  angewandt, auch  $\overline{FH}$  auf  $\overline{BC}$  senkrecht. (Nach Hilbert 1899, S. 79-80.)

### 55 Die Russellsche Antinomie

Die meisten Mengen enthalten sich nicht selbst als Element. (Beispiel: Die Menge  $N$  der natürlichen Zahlen. Elemente von  $N$  sind die natürlichen Zahlen.  $N$  ist, da es keine natürliche Zahl ist, nicht als Element in  $N$  enthalten.)

Es sei  $M$  die Menge aller dieser Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Entweder enthält  $M$  sich selbst als Element oder nicht.

Enthält  $M$  sich selbst als Element ( $M \in M$ ), so kann  $M$  nicht zu  $M$  gehören (nach Definition von  $M$ ), d.h.  $M \notin M$ . Enthält  $M$  sich nicht selbst als Element, dann gehört  $M$  aber zu  $M$  (nach Definition von  $M$ ).

Somit:  $M \in M$  genau dann, wenn  $M \notin M$ . Das ist ein Widerspruch!

## Quellenverzeichnis

Die Ziffern in runden Klammern am Ende jeder Quellenangabe verweisen auf die Aufgabennummern. Ein "L" vor der Ziffer bedeutet eine Nennung der Quelle in der Lösung der betreffenden Aufgabe.

AL-AMULI 1843 = Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhossain aus Amul, arabisch und deutsch herausgegeben von G.H.F. Nesselmann. Berlin. (32)

Anthologie 1981 = Die Griechische Anthologie in drei Bänden (Bibliothek der Antike). Berlin-Weimar. (18)

ARACO 1854 = Arago, F.: Poisson. In: Franz Arago's sämtliche Werke. Herausgegeben von W. G. Hankel. Band 2. Leipzig. S. 485-568. (50)

ARCHIMEDES 1914 = Archimedes' Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von Sir Th. L. Heath. Deutsch von F. Kliem. Leipzig. (16)

BALTZER 1885 = Baltzer, R.: Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. In: Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physikalische Classe 37, S 1-6. (46, 52)

BASMAKOVA 1974 = Basmakova, I. G.: Diophant und Diophantische Gleichungen. (Mathematische Schülerbücherei Nr. 80.) Berlin. (19)

BECKER 1936 = Becker, O.: Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung B, Band 3, S. 533-553. (6)

BECKER 1957 = Becker, O.: Das mathematische Denken der Antike. Göttingen. (6, L 6, 7,15, L 15)

BECKER 1964 = Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. München. (9)

BERNOULLI 1899 = Bernoulli, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi, 1713). 1. und 2. Teil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 107.) Leipzig. (37, L 37)

BERTRAND 1888 = Bertrand, J.: Calcul des probabilités. Paris. (53)

BIERMANN 1959 = Biermann, K.-R.: Über die Förderung deutscher Mathematiker durch Alexander von Humboldt. In: Al der von Humboldt Gedenkschrift zur 100. Wiederkehr seines Todestages. Berlin. S. 83-159. (49)

BIERMANN 1964 = Biermann, K.-R.: Gotthold Eisenstein. Die wichtigsten Daten seines Lebens und Wirkens. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 274/215, S. 19-30. Nachdruck in: Mathematische Werke von Gotthold Eisenstein. Band 2. New York. S. 919-929. (48)

BIERMANN 1983a = Biermann, K.-R.: Alexander von Humboldt. 3. Aufl. Leipzig. (49)

BIERMANN 1983 b = Biermann, K.-R.: Gauß als Mathematik- und Astronomiehistoriker. In: Historia mathematica /0 (1983), S. 422-434. (41)

BIERMANN 1986 = Biermann, K.-R.: Alexander-von-Humboldt-Forschung an der Akademie der Wissenschaften der DDR. In: Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der DDR. Abt. Mathematik - Naturwissenschaften - Technik Jahrgang 1985. Nr. 2 N. Berlin. S. 44-49.

(49)

BIERNATZKI 1856 = Biernatzki, K.L.: Die Arithmetik der Chinesen. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 52, S. 59-94. (28, L 28)

BLASCHKE 1916 = Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Leipzig. (47)

BÖKER 1961 = Böker, R.: Würfelverdoppelung. In: Paulys Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft. Zweite Reihe. Halbband 17, Sp. 1193 bis 1223. (17)

BOURBAKI 1971 = Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen. (35)

CANTOR 1900 = Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 2. 2. Aufl. Leipzig. (25, 29, L 29, 31, 35, 37, L 37)

CANTOR 1901 = Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 3. 2. Aufl. Leipzig. (40)

CANTOR 1922 = Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 1.4. Aufl. Leipzig. (16)

CHASLES 1839 = Chasles, M.: Geschichte der Geometrie. Aus dem Französischen übertragen durch L. A. Souncke. Halle (29)

CZUBER 1899 = Czuber, E.: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. In: Jahresbericht der DMV 7, Heft 2. (53)

CZUBER 1941 = Czuber, E.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Band 1. 6. Aufl. Leipzig. (37, 53, L 53)

DESCARTES 1923 = Descartes, R.: Geometrie. Deutsch herausgegeben von L. Schlesinger. 2. Aufl. Leipzig. (35)

DEUBNER 1959 = Deubner, F.: ... nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig- Jena. (30)

DEUBNER 1961 = Deubner, F.: Adam Ries, der Rechenmeister des deutschen Volkes. In: NTM 1, Heft 2, S. 11-44. (30)

DICKSON 1952 = Dickson, L. E.: History of the theory of numbers. Volume II. Diophantine analysis. New York. (34)

DIOPHANT 1890 = Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim. Leipzig. (44)

DIOPHANT 1952 = Arithmetik des Diophantos aus Alexandria. Aus dem Griechischen übertragen und erklärt von A. Czwalińska. Göttingen. (18, 19)

DOVE 1872 = Dove, A.: Alexander von Humboldt auf der Höhe seiner Jahre (Berlin 1827-59). In: Alexander von Humboldt. Eine wissenschaftliche Biographie. Herausgeber: K. Bruhns. Band 2. Leipzig. S. 93-484. (49)

DRENCKHAHN 1936 = Drenckhahn, F.: Zur Zirkulatur des Quadrats und Quadratur des Kreises in den Sulvasutra. In: Jahresbericht der DMV 46, S. 1-13. (20)

EISENSTEIN 1975a = Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern. Herausgegeben von A. Hurwitz und F. Rupio. In: Mathematische Werke von Gotthold Eisenstein. Band 2. New York. S. 789-823. (48)

EISENSTEIN 1975b = Eine Autobiographie von Gotthold Eisenstein. Mit ergänzenden biographischen Notizen. Herausgegeben von F. Rupio. In: Mathematische Werke von Gotthold



Eisenstein. Band 2. New York. S. 879-904. (48)

EUKLID 1984 = Euklid: Die Elemente. Buch I-XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 235, 236, 240, 241, 243 - Reprint.) Leipzig. (L 7, 10, L 10, 11, L11, 12, L12, 13, L 13, 14, L 14, 39)

EULER 1911 = Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur Algebra. Mit den Zusätzen von Joseph Louis Lagrange. Herausgegeben von Heinrich Weber. In: Leonardi Euleri Opera omnia (1) 1. Leipzig-Berlin. (30, L 30, 43, L43)

EULER 1965 = Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729 bis 1764. Herausgegeben und eingeleitet von A. P. Juskeviv und E. Winter. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Klasse für Philosophie, Geschichte usw. Jahrgang 1965, Nr. 1) Berlin. (34)

FERMAT 1934 = Fermat, P. DE: Abhandlungen über Maxima und Minima (1629). Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von M. Miller. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 238.) Leipzig. (36, L 36)

FOLKERTS 1977 = Folkerts, M.: Regiomontanus als Mathematiker. In: Centaurus 21, S. 214-245. (29)

FOLKERTS 1978 = Folkerts, M.: Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache. Die Alkuin zugeschriebenen 'Propositiones ad acuendos iuvenes'. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition. In: Österreichische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften, 116. Band, 6. Abhandlung. Wien. (24)

FREGE 1893 = Frege, G.: Grundgesetze der Arithmetik, begriffsgeschichtlich abgeleitet, Band 1. Jena. (55)

FREGE 1976 = Gottlob Freges Wissenschaftlicher Briefwechsel. Hamburg. (55)

FRITZ 1945 = Fritz, K. von: Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont. (Übersetzung aus: Annals of Mathematics 46.) In: Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Herausgegeben von O. Becker. Darmstadt 1965, S. 271-307. (15, L 15)

FUSS 1965 = Fuss, N.: Beweis einiger Eigenschaften des Kreises (Russisch). In: Matematika v skole 1965, Nr. 3, S. 59-66. Teilübersetzung in: Mathematik in der Schule 4 (1966), S. 887-905. (45, L 45)

GERICKE 1984 = Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin- Heidelberg- New York-Tokyo. (2, 22)

HEFFTER 1891 = Heffter, L.: Über das Problem der Nachbargebiete. In: Mathematische Annalen 38 (1891), S. 477-508. (46, 52)

HELLER 1958 = Heller, S.: Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer. In: Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Klasse für Mathematik, Physik und Technik. Jahrgang 1958, Nr. 6. (a)

HERMELINK 1978 = Hermelink, H.: Arabische Unterhaltungsmathematik als Spiegel jahrtausendealter Kulturbeziehungen zwischen Ost und West. In: Janus 65, S. 105-117. (26, 27)

HILBERT 1899 = Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. Leipzig. (54, L 54)

HILBERT 1979 = Die Hilbertschen Probleme. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Alexandrov. 2. Aufl. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Band

252). Leipzig. (54)

HOFMANN 1926 = Hofmann, J. E.: Ein Beitrag zur Einschiebungslehre. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 57, S. 433-442. (14)

HOFMANN 1968 = Hofmann, J. E.: Michael Stifel. Leben, Wirkung und Bedeutung für die Mathematik seiner Zeit. (Sudhoffs Archiv. Beihefte. Heft 9.) Wiesbaden. (31)

HOFMANN 1972 = Hofmann, J. E.: Bombellis Algebra - eine genialische Einzelleistung und ihre Einwirkung auf Leibniz. In: Studia Leibnitiana 4, H. 3/4, S. 196-252. (38)

JACOBI 1907 = Briefwechsel zwischen C.G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Herausgegeben von W. Ahrens. Leipzig. (41)

JENTSCH 1986 = Jentsch, W.: Michael Stifel - Mathematiker und Mitstreiter Luthers. In: NTM 23, Heft 1, S. 11-34. (31)

JÜRSS 1982 = Geschichte des wissenschaftlichen Denkens im Altertum. Von einem Autorenkollektiv unter Leitung von Fritz Jürss. Berlin. (9)

JUSCHKEWITSCH 1964 = Juschkewitsch, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig. (22, 26)

KARSTEN 1767 = Karsten, W. J. G.: Lehrbegriff der gesamten Mathematik. Der erste Teil. Greifswald. (42)

KARSTEN 1768 = Karsten, W. J. G.: Lehrbegriff der gesamten Mathematik. Der zweite Teil. Greifswald. (42, L 42)

KARSTEN 1854 = Karsten, G.: Umrisse zu C. J. B. Karsten's Leben und Wirken. Karstens Vorfahren. In: Archiv für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde 26, S. 199-204. (42)

Kepler 1908 = Kepler, J.: Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierkunst. Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes. Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von R. Kruc. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 165.) Leipzig. (33)

KLEIN 1936 = Klein, J.: Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik Abt. B, Bd. 3, 18-105, 122-235. (18, 19)

KNOBLOCH 1973 = Knobloch, E.: Zur Überlieferungsgeschichte des Bachetschen Gewichtsproblems. In: Sudhoffs Archiv 57, S. 1422-151. (27)

KRAFFT 1971 = Krafft, F.: Geschichte der Naturwissenschaft I. Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen. Freiburg 1971. (5, L5)

KÜLB 1865 = Külb, Ph. H.: Grange (Joseph Louis la). In: Ersch-Gruber, Encyklopädie der allgemeinen Wissenschaften. Artikel 'Grange'. Leipzig. (41)

KUMMER 1975 = Ernst Eduard Kummer: Collected papers. Volume I, Volume II. Berlin-Heidelberg-New York. (51)

LARISON 1973 = LARISON, L. L.: The Möbius Band in Roman Mosaics. In: American Scientist 6], S. 544-547. (46)

LEFEVRE 1981 = Lefevre, W.: Rechensteine und Sprache. Zur Begründung der wissenschaftlichen Mathematik durch die Pythagoreer. In: Rechensteine, Experiment, Sprache. Historische

Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften. Herausgegeben von P. Damerow und W. Lefevre. Stuttgart.

LESSING 1773 = Lessing, G.E.: Zur Geschichte und Literatur. Aus den Schätzen der Herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Erster Beitrag. Braunschweig. (44)

LESSING 1793 = Lessing, G. E.: Zur Geschichte und Literatur. Aus den Schätzen der Herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Zweiter Beitrag. Neue Auflage. Berlin. (44)

LIETZMANN 1909 = Lietzmann, W.: Eine geometrische Aufgabensammlung aus dem Ende des 17. Jahrhunderts. In: Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter 6, Nr. 4/5, S. 57-61. (39)

LINDEMANN 1897 = Lindemann, F.: Zur Geschichte der Polyeder und Zahlzeichen. In: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München 26, S. 625- 758. (13)

LÖWENBERG 1872 = Löwenberg, J.: Alexander von Humboldt. Seine Jugend und ersten Mannesjahre. In: Alexander von Humboldt. Eine wissenschaftliche Biographie. Herausgeber: K. Brunns. Band 1. Leipzig. S. 1-103. (49)

MICHAELS 1978 = Michaels, A.: Beweisverfahren in der vedischen Sakralgeometrie. Ein Beitrag zur Entstehungsgeschichte von Wissenschaft. (Alt- und Neu-Indische Studien 20). Wiesbaden. (20)

MILLER 1966 = Miller, M.: Zur Geschichte der Extremalaufgaben. In: Mathematik in der Schule 4, H. 6, S. 463-478, H. 10, S. 777-782. (36)

MÜLLER 1930 = Müller, C.: Die Mathematik der Sulvasutra. Eine Studie zur Geschichte indischer Mathematik. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 7, S. 173-204. (20, L 20)

MÜLLER 1953 = Müller, W.: Das isoperimetrische Problem im Altertum. In: Archiv für Geschichte der Medizin 37, S. 39-71. (47)

NAINI 1982 = Naini, A. D.: Geschichte der Zahlentheorie im Orient im Mittelalter und zu Beginn der Neuzeit unter besonderer Berücksichtigung persischer Mathematiker. Braunschweig. (25, 26)

NESSELMANN 1842 = Nesselmann, G. H. F.: Die Algebra der Griechen. Nach den Quellen bearbeitet. Berlin. (19, 43, 44)

NEUENSCHWANDER 1974 = Neuenschwander, E.: Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids. In: Archive for history of exact sciences 14, S. 91-125. (13)

NEWTON 1761 = Newton, I.: Arithmetica universalis; sive de compositione et resolutione arithmetica. Cum commentario Johannis Castillionei. Amstelodami. (40)

PIEPER 1973 = Pieper, H.: Quadratsummandarstellungen. In: Mathematik in der Schule 77, S. 72-78. (54)

PIEPER 1978a = Pieper, H.: Variationen über ein zahlentheoretisches Thema von Carl Friedrich Gauß. Berlin/Basel-Stuttgart. (48, L 48)

PIEPER 1978b = Pieper, H.: Computerlösung des Vierfarbenproblems. In: Wissenschaft und Fortschritt 28, S. 104-108. (52)

PIEPER 1980 = Pieper, H.: Das antike Problem der Quadratur des Kreises. In: G. I. Drinfeld: Quadratur des Kreises und Transzendenz von  $\pi$ . Berlin, S.9-41. (20)

- PIEPER 1982a = Pieper, H.: Ich hab's gefunden. (Die historische Mathematikaufgabe). In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha 76, H. 4, III. U.-Seite, H. 6, S. 140. (16)
- PIEPER 1982 b = Pieper, H.: Die Vielfachen der 9. (Die historische Mathematikaufgabe). In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha 76, H. 5, S. 108, 117. (49)
- PIEPER 1982c = Pieper, H.: Ein Gewichtsproblem des Leonardo Fibonacci (Die historische Mathematikaufgabe). In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha /6, H. 6, S. 134; 17, H. 1, S. 22-23. (27)
- PIEPER 1983 = Pieper, H.: Ein Maultier und ein Esel. In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha /7, H. 2, S. 34, H. 3, S. II. (43)
- PIEPER 1984a = Pieper, H.: Die komplexen Zahlen. Theorie - Praxis - Geschichte. Berlin/Thun-Frankfurt am Main 1985 (2. Aufl. 1988). (1, 38)
- PIEPER 1984b = Pieper, H.: Weizenkörner auf dem Schachbrett. In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha 18, H. 4, S. 81, 93. (23)
- PIEPER 1984c = Pieper, H.: Zahlen aus Primzahlen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. 2. Aufl. Berlin/Basel-Boston-Stuttgart. (L 31)
- PIEPER 1985a = Pieper, H.: Poisson gab augenblicklich die Lösung - Umfüllaufgabe. In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha 79, H. 3, S. 58. (50)
- PIEPER 1985b = Pieper, H.: Wolf, Ziege und Kohlköpfe. In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha 79, H. 6, S. 135, 141. (24)
- PIEPER 1986 = Pieper, H.: Jakob Steiner irrte sich. In: Mathematische Schülerzeitschrift alpha 20, H. 2, S. 32, H. 3, S. 70. (47)
- PLATON 1978 = Platon: Der Staat. Aus dem Griechischen übersetzt von Otto Apelt. Reclam's Universalbibliothek 769. Leipzig. (9)
- PLATON 1985 = Platon: Menon. Phaidon. Parmenides. Sophistes. Aus dem Griechischen übersetzt von Otto Apelt. Herausgegeben von Dieter Lübke. (Reclam's Universalbibliothek 1115.) Leipzig. (9)
- RENYI 1972 = Renyi, A.: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. 2. Aufl. Budapest/ Berlin. (37)
- RUSKA 1906 = Ruska, J.: Zur Geschichte der Schachbrettaufgabe. In: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 47, S. 275-282. (23)
- SIERPINSKI 1964 = Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers. Warszawa. 34
- SPEISER 1925 = Klassische Stücke der Mathematik. Ausgewählt von A. Speiser. Zürich- Leipzig. (41)
- SPIESS 1929 = Spiess, O.: Leonhard Euler. Ein Beitrag zur Geistesgeschichte des XVII. Jahrhunderts. Frauenfeld- Leipzig. (45)
- STAMATIS 1963 = Stamatis, E. S.: Über Euklid, den Mathematiker. In: Das Altertum 9, H. 2, S. 78-84. (10)
- STAMATIS 1971 = Stamatis, E. S.: Euclidia. In: Mathematica Balkanica, S. 239-242. (10)
- STEINER 1882 = Steiner, J.: Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt. In: Jacob Steiner's Gesammelte Werke. Zweiter Band. Herausgegeben von K. Weierstrass. Berlin 1882, S. 177-308. (47)
- STRUVE 1930 = Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Herausgegeben von W. W. Struve. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Abt. A, 1. Band). Berlin. (3, 4)

- SZABO 1956 = Szabo, A.: Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden? In: *Acta Antiqua Academiae scientiarum Hungaricae* 4, S. 109-152. (7)
- SZABO 1958 = Szabo, A.: Deiknymi, als mathematischer Terminus für „beweisen“. In: *Maia. Rivista di letterature classiche*. N.S. 10, S. 106-131. (9)
- SZABO 1969a = Szabo, A.: Wie kamen die Pythagoreer zu dem Satz Eucl., Elem. II, 5? In: *Acta Antiqua Academiae scientiarum Hungaricae* 17, S. 149 bis 169. (9, 10, 11)
- SZABO 1969b = Szabo, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. Budapest. (7,9, 11)
- SZABO 1974 = Szabo, A.: „Die Muse der Pythagoreer“. Zur Frühgeschichte der Geometrie. In: *Historia mathematica* /, S. 291-316. (11, 12, 13)
- SZABO 1977 = Szabo, I.: Ein „Ertz-Herzogliches“ Geometriebuch aus dem 17. Jahrhundert. In: *Humanismus und Technik* 2/, H. 3, S. 107- 127. (39)
- TIETZE 1910 = Tietze, H.: Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen. In: *Jahresbericht der DMV* 19, S. 155-159. (46, 52)
- TIETZE 1949 = Tietze, H.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Erster Band. München. (46)
- TOEPLITZ 1934 = Toeplitz, O.: Der derzeitige Stand der Forschung in der Geschichte der griechischen Mathematik. In: *Semesterberichte Münster*, 6. Semester, S. 4-18. (8)
- TOEPLITZ 1949 = Toeplitz, O.: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band. Herausgegeben von Gottfried Köthe. Berlin-Göttingen- Heidelberg. (8)
- TROPFKE 1923 = Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Vierter Band: Ebene Geometrie. 2. Aufl. Berlin-Leipzig. (39)
- TROPFKE 1980 = Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. 4. Aufl. Band 1. Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. Berlin- New York. (23, 26, 27, 28, L 28, 30, 50)
- VIETE 1973 = Viète, F.: Einführung in die Neue Algebra. Übersetzt und erläutert von K. Reich und H. Gericke. (*Historiae scientiarum elementa* Band 5). München. (19)
- VOGEL 1959a = Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik I. Vorgeschichte und Ägypten. (Mathematische Studienhefte für den mathematischen Unterricht an Höheren Schulen. Heft 1.) Hannover- Paderborn. (3, 4)
- VOGEL 1959b = Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik II. Die Mathematik der Babylonier. (Mathematische Studienhefte für den mathematischen Unterricht an Höheren Schulen. Heft 2.) Hannover- Paderborn. (1, 2)
- VOGEL 1968 = Chiu Chang Suan Shu. Neun Bücher arithmetischer Technik. Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr. bis 9 n. Chr.). Übersetzt und erläutert von Kurt Vogel. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Neue Folge. Band 4.) Braunschweig. (21, L 21, 22, L 22)
- VOGEL 1977 = Vogel, K.: Ein unbestimmtes Problem al-Karagis in Rechenbüchern des Abendlandes. In: *Sudhoffs Archiv. Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte* 61, S. 66-74. (25)
- VOGEL 1985 = Vogel, K.: Neue geometrische Texte aus Byzanz. In: *Mathematical Perspectives. Essays on Mathematics and its Historical Development*. Edited by J. W. Dauben. Presented

to Prof. Dr. K.-R. Biermann on the Occasion of His 60th Birthday. New York-London-Toronto-Sydney-San Francisco. (28)

VOGEL-HUNGER 1963 = Vogel, K., und H. Hunger: Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis Phil. Gr. 65. Text, Übersetzung, Kommentar. In: Österreichische Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse. Denkschriften. 78. Band, 2. Abhandlung. (21, L 21, 28)

WIELEITNER 1929 = Wieleitner, H.: Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten. : In: Jahresbericht der DMV 38, S. 24-35. (36)

WOLFER 1954 = Wolfer, E. P.: Eratosthenes von Kyrene als Mathematiker und Philosoph. Groningen. (17)

WUSSING 1965 = Wussing, H.: Mathematik in der Antike. 2. Aufl. Leipzig. (7)

Andere Sammlungen mit historischen Aufgaben der Mathematik sind:

AHRENS, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Leipzig und Berlin: B. G. Teubner (2. Aufl., Band 1, 1910; Band 2, 1918).

DÖRRIE, H., Triumph der Mathematik. Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur, Breslau: Hirt (3. Aufl., 1940).

KONFOROWITSCH, A. G., Guten Tag, Herr Archimedes, Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1986/Thun-Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 1986.

## Namenverzeichnis

Die Ziffern nach Namen und Lebensdaten verweisen auf die Aufgabennummern bzw. (mit L) auf die Lösung der Aufgaben, in denen der Name vorkommt.

ALEXANDROV, PAVEL SERGEEVIC (1896-1982) 54  
ALKUIN (735-804) 24  
AL-AMULI, MUHAMMED ibn AL-Husaon, BAHA' AD-Din (1547-1622) 32  
ANATOLIOS (3. Jh.) 18  
ANAXIMANDROS (um 611-546 v.u.Z.) 5  
ANAXIMENES (um 585-525v.u.Z.) 5  
Apollon 17  
APPEL, KENNETH (20. Jh.) 52  
ARAGO, FRANCOIS (1786-1853) 50  
ARCHIMEDES (um 287-212 v.u.Z.) 16, 27,44  
ARCHYTAS von Tarent (428-365 v.u.Z.) 7,17  
ARISTOTELES (384-322 v.u.Z.) 8,11  
Artemis 1  
ARTIN, EMIL (1898-1962) 54  
  
BACHET DE MEZIRIAC, CLAUDE-GASPAR (1581-1638) 19, 27, 34, 44  
BALTZER, RICHARD (1818-1887) 46, 52  
BARROW, ISAAC (1630-1677) 40  
BASMAKOVA, ISABELLA GRIGOREVNA (geb. 1921) 19  
BECKER, OSKAR (1889-1964) 6, 7,9, 15, L 15  
BERNOULLI, DANIEL (1700-1782) 45  
BERNOULLI, JAKOB (1654-1705) 37, L 37  
BERTRAND, JOSEPH (1822-1900) 53  
BHASKARA (II.) (1114-1185) 26  
BIERMANN, KURT-REINHARD (geb. 1919) 41, 48, 49  
BIERNATZKI, K.-L. (19. Jh.) 28  
BÖKER, ROBERT (20. Jh.) 17  
BOMBELLI, RAFAEL (1526-1572/3) 19, 38  
BOURBAKI, NICOLAS (gegr. 1935) 35  
BURCKHARD von Birckenstein, ANTHONI ERNST (gest. 1721/23) 39  
  
CANTOR, MORITZ BENEDIKT (1829-1920) 16, 25, 29, L 29, 31, 35, 37, L 37, 4  
CARDANO, GERONIMO (1501-1576) 25, L 25, 38  
CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS (1789-1857) 19  
CAYLEY, ARTHUR (1821-1895) 52  
CHANG CH'IU-CHIEN (5. Jh.) 26  
CHASLES, MICHEL (1793-1880) 29  
CLAVIUS, CHRISTOPH (1573-1612) 23  
COLLINS, JOHN (1625-1683). 38  
COPERNICUS, NICOLAUS (1473-1543) 31  
CZUBER, EMANUEL (1851-1925) 37, 53  
  
DESCARTES, RENE (1596-1650) 35, 36  
DEUBNER, FRITZ (20. Jh.) 30  
DICKSON, LEONHARD EUGENE (1874-1954) 34  
DIOGENES LAERTIOS (3. Jh. u.Z.) 5

Dionysos (2. Jh.) 18  
DIOPHANT (1.Jh.) 18, L 18, 19, L 19, 34  
DIRICHLET, PETER GUSTAV LEJEUNE (1805-1859) 19, 47, 49, 51  
DOVE, ALFRED W. (1844-1916) 49  
DRENCKHAHN, FRIEDRICH (20. Jh.) 20  
DÜRER, ALBRECHT (1471-1528) 39  
  
ECKERMANN, JOHANN PETER (1792-1854) 45  
EISENSTEIN, GOTTHOLD (1823-1852) 48, 49, 51  
ENCKE, JOHANN FRANZ (1791-1865) 49  
EPICARMOS (5. Jh.v.u.Z.) 6  
ERATOSTHENES (3. Jh. v.u.Z.) 17,44  
EUDEMOS von Rhodos (4. Jh. v.u.Z.) 8  
EUDOXOS von Knidos (um 408-um 355 v.u.Z.) 17  
EUKLID (= EUKLEIDES) (4. Jh. v.u.Z.) L7,10,L10, 11,L11,12,L12, 13, L 13, 14, 15, 16, 27, 39, 43, 51  
EULER, JOHANN ALBRECHT (1734-1800) 45  
EULER, LEONHARD (1707-1783) 13, 19, 27, 30, L 30, 34, 41, 42, 43, 45, 48  
EUTOKLOS (6. Jh.) 17  
  
DE FERMAT, PIERRE (1601-1665) 19, 35, 36, L 36, 37, L 37  
FIBONACCI (= LEONARDO von Pisa, 1170(9)-1250(9)) 19, 23, 25, 26, 27  
FISCHER, ERNST GOTTFRIED (1754-1831) 49  
FOLKERTS, MENSIO (20. Jh.) 24, 29  
DE FOURIER, JEAN BAPTISTE-JOSEPH (1768-1830) 49  
FREGE, GOTTLIEB (1848-1925) 55  
FRIEDRICH II. (1194-1250) 25  
FRIEDRICH WILHELM IV. (1795-1861) 49  
VON FRITZ, KURT (geb. 1900) 15, L15  
FUSS, NICOLAUS (1755-1826) 45  
  
GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777-1855) 19, 41, 48, 49, 51, 54  
GELON (3. Jh. v.u.Z.) 16  
GERICKE, HELMUTH (geb. 1909) 2,22  
VON GOETHE, JOHANN WOLFGANG (1749-1832) 45  
GOROWIN, MICHAEL E. (1756-17  
GOSSELIN, GUILLAUME (gest. um 1590) 19  
GROTEFEND, GEORG FRIEDRICH (1775-1853) 1  
GUTHRIE, FRANCIS (19. Jh.) 52  
GUTHRIE, FREDERICK (19. Jh.) 52  
  
HAKEN, WOLFGANG (20. Jh.) 52  
HAMMURABI (18./17.Jh.v.u.Z.) 1  
HEATH, THOMAS LITTLE (1861-1940) 16  
HEAWOOD, PERCY JOHN (19. Jh.) 52  
HEFFTER, LOTHAR (1862-1962) 46, L 46, 52  
HEIBERG, JOHANN LUOVI (1854-1928) 11  
HELLER, SIEGFRIED (1876-1970) 14  
HERMELINK, HEINRICH (1920-1978) 26, 27  
HERON (1.Jh.) 18  
HIERON II. (um 306-214 v.u.Z.) 16



HILBERT, DAVID (1862-1943) 54  
HINDENBURG, KARL FRIEDRICH (1739-1808) 42  
HIPPASOS von Metapont (um 500v.u.Z.) 7  
HIPPOKRATES von Chios (5. Jh.v.u.Z.) 8,17  
HOFMANN, JOSEPH EHRENFRIED (1900-1973) 14, 31  
HOLTZMANN, WILHELM (= XYLANDER, 1532-1576) 19  
VON HUMBOLDT, ALEXANDER (1769-1859) 49  
HUNGER, HERBERT (20. Jh.) 21, L 21, 28  
HUYGENS, CHRISTIAAN (16-216995 ) 37, L 37, 38  
  
JACOBI, CARL GUSTAV JACOB (1804-1851) 19,41, 48, 49, 51  
AL-JA'QUBI (9. Jh.) 23  
JENTSCH, WERNER (20. Jh.) 31  
JOHANN von Palermo (13. Jh.) 25  
JOSEPH (1678-1711) 39  
JÜRRESS, FRITZ (geb. 1932) 9  
JUSKEWITSCH, ADOLF PAVLOVIC (geb. 1906) 22, 26  
  
KAESTNER, ABRAHAM GOTTHELF (1719-1800) 42  
AL-KARAGI (11. Jh.) 19, 25, L 25  
KARL I. (der Große; 742-814) 24  
KARL I. (von Braunschweig; 1713-1780) 44  
KARSTEN, WENZESLAUS JOHANN GUSTAV (1732-1787) 42  
KEMPE, ALFRED BRAY (19. Jh.) 52  
KEPLER, JOHANNES (1571-1630) 12, 33  
KLEIN, FELIX (1849-1925) 52  
KLEIN, JACOB (20. Jh.) 18,19  
KNOBLOCH, EBERHARD (20. Jh.) 27  
KRAFFT, FRITZ (geb. 1935) 5  
KRAFFT, LUDWIG Ju. (1743-1814) 45  
KRONECKER, LEOPOLD (1823-1891) 51  
KUMMER, ERNST EDUARD (1810-1893) 49, 51  
  
LAGRANGE, JOSEPH Louis (1736-1813) 19, 34, 41, 42  
LAMBERT, JOHANN HEINRICH (1728-1777) 42  
LARISON, LORRAINEL (20. Jh.) 46  
LEFEVRE, WOLFGANG (20. Jh.) 7  
LEGENDRE, ADRIEN-MARIE (1752-1833) 19, 48  
LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1646-1716) 38  
LEONARDO DA Vinci (1452-1519) 12  
LEOPOLD I. (1640-1705) 39  
LESSING, GOTTHOLD EPHRAIM (1729-1781) 44  
LEXELL, ANDERS (1740-1784) 45  
LIETZMANN, WALTHER (1880-1959) 39  
VON LINDEMANN, FERDINAND (1852-1939) 13  
LISTING, J. (19. Jh.) 46  
LIU HUI (3. Jh.) 21,22  
LOMONOSSOW, MICHAEL W. (1711-1765) 45  
LÖWENBERG, JULIUS (19. Jh.) 49  
LUCAS, HENRY (gest. 1663) 40

LUTHER, MARTIN (1483-1546) 31  
MALANCHTHON, PHILIPP (1497-1560) 31  
MENAICHMOS (4. Jh. v.u.Z.) 17  
DE MERE, ANTOINE GOMBAULD Chevalier (1610-1685) 37  
MERSENNE, MARIN (1588-1648) 36  
MICHAELS, AXEL (20. Jh.) 20  
MILLER, MAXIMILIAN (1903-1980) 36  
MÖBIUS, AUGUST FERDINAND (1790-1868) 46, L 46, 52  
DE MORGAN, AUGUSTUS (1806-1871) 52  
MÜLLER, CONRAD (20. Jh.) 20  
MÜLLER, WILHELM (20. Jh.) 47  
  
NAINI, ALIREZA DJAFARI (geb. 1944) 25, 26  
NERO, CLAUDIUS DRUSUS GERMANICUS CAESAR (37-68) 18  
NESSELMANN, GEORG HEINRICH FERDINAND (1811-1881) 19, 32, 44  
NEUENSCHWANDER, ERWIN (20. Jh.) 13  
NEUGEBAUER, OTTO (geb. 189) 1  
NEWTON, ISAAC (1642-1727) 40  
NIKOMEDES (um 200 v.u.Z.) 17  
NOAH 1  
  
OLDENBURG, HEINRICH (1618(9)-1677) 38  
  
PACIOLI, LUCA (um 1445-1517) 12  
PAMPHILA von Epidaurus (1. Jh.u.Z.) 5  
PARMENIDES aus Elea (um 540-480v.u.Z.) 7  
PASCAL, BLAISE (1623-1662) 37, L 37  
PFAFF, JOHANN FRIEDRICH (1765-1825) 42  
PIEPER, HERBERT (geb. 1943) 20, 38, 48, 52, 54  
PLANUDES, MAXIMOS (1260-1310) 19,44  
PLATON (427-347 v.u.Z.) 9,17  
PPOISSON, SIMEON DENIS (1781 -1840) 49, 50  
PROKLOS DIADOCHOS (410-485 v. u. Z.) 10  
PSELLOS (11.Jh.) 18  
PTOLEMAIOS I. (367/66-283/82 v.u.Z.) 10  
PTOLEMAIOS II. (um 284-221) 17  
PTOLEMAIOS, KLAUDIOS (2. Jh.) 39  
PYTHAGORAS von Samos (um 580-496 v.u.Z.) 7,11,L11,12  
Pythagoreer (5. Jh.v.u.Z.) 6, 7,9, 11,13  
  
QUSTA ibn LUQA (gest. um 912) 19  
  
REGIOMONTAN (=JOHANNES MÜLLER, 1436-1476) 19, 29, L 29  
RENYI, ALFRED (1921-1970) 37  
RHIND, A. HENRY (19. Jh.) 3  
RIES, ADAM (1492-1559) 30  
RUSKA, JULIUS (20. Jh.) 23  
RUSSELL, BERTRAND (1872-1970) 55  
  
SACHS, A. (20.Jh.) 1  
SALOMO (10. Jh.v.u.Z.) 1

SEGNER, JOHANN ANDREAS (1704-1777) 42  
SEMIRAMIS (= SAMMU-RAMAT, 9./8.Jh.v.u.Z.) 1  
SESIANO, JACQUES (20. Jh.) 19  
SEZGIN, FUAT (20. Jh.) 19  
SIERPINSKI, WACLAW (1882-1969) 34  
SIMPLIKIOS (6. Jh. u.Z.) 8  
SOKRATES (469-399 v.u.Z.) 8,9  
SPEISER, ANDREAS (1885-1970) 41  
SPIESS, OTTO (1878-1966) 45  
STAMATIS, EVANGELOS S. (20. Jh.) 10  
STEINER, JAKOB (1796-1862) 47, L 47, 49  
STERN, MORITZ ABRAHAM (1807-1894) 48  
STEVIN, SIMON (1548-1620) 19  
STIFEL, MICHAEL (1487(9)-1567) 27, 31  
STOBAIOS, IOANNES (5. Jh.u.Z.) 10  
STRUVE, WASSILI W. (geb. 1889) 3,4  
SUN TZU (3.-5. Jh.) 28  
SZABO, ARPAD (20. Jh.) 7,9, 10, 11,13  
SZABO, ISTVAN (20. Jh.) 39  
  
TABARI (2. H. 11.Jh.) 27  
THALES von Milet (um 624-546 v.u.Z.) 5  
THEON von Smyrna (1.H. 2. Jh.) 17  
TIETZE, HEINRICH (1880-1964) 46, L 46  
TOEPLITZ, OTTO (1881-1940) 8  
TROPFKE, JOHANNES (1866-1939) 27, 28, 30, 39:  
TURAJEFF, B. (gest. 1920) 3  
AT-TUSI (1202-1274) 29  
  
VIETE, FRANCOIS (= VIETA, 1540-1603) 19  
VITRUVIUS (1.Jh.v.u.Z.) 16  
VOGEL, KURT (1888-1986) 1,2,3,4,21,L 21, 22, L 22, 25, 28  
  
WALLIS, JOHN (1616-1703) 38, L 38  
WEBER, WILHELM (1804-1891) 54  
WEIERSTRASS, KARL (1815-1897) 51  
WERTHEIM, GUSTAV (1843-1902) 44  
WHISTON, WILLIAM (17./18. Jh.) 40  
WIELEITNER, HEINRICH (1874-1931) 36  
WOLFER, ERNST PAUL (20. Jh.) 17  
WUSSING, Hans (geb. 1927) 7  
  
ZENODOROS (2. Jh. v.u.Z.) 47  
ZENON von Elea (um 490-430 v.u.Z.) 7  
Zeus 17  
ZEUTHEN, HIERONYMUS GEORG (1839-1920) L 15