
W. Engel, U.Pirl

Mathematik in Aufgaben

Eine Auswahl aus den Olympiadeklassen 9/12
der 8. bis 14. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1990 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 139
Abschrift und LaTeX-Satz: 2022

<https://mathematikalpha.de>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Vorbemerkungen	5
1 Arithmetik	9
2 Gleichungen	16
3 Ungleichungen	23
4 Funktionen	25
5 Kombinatorik und Spiele	33
6 Geometrie in der Ebene	43
7 Geometrie im Raum	57
8 Geometrische Konstruktionen	66
9 Verschiedenes	70
10 Lösungen - Arithmetik	81
11 Lösungen - Gleichungen	106
12 Lösungen - Ungleichungen	131
13 Lösungen - Funktionen	139
14 Lösungen - Logik, Kombinatorik und Spiele	163
15 Lösungen - Geometrie in der Ebene	180
16 Lösungen - Geometrie im Raum	230
17 Lösungen - Geometrische Konstruktionen	259
18 Lösungen - Verschiedenes	278

Vorwort

Mathematikolympiaden finden seit Anfang der sechziger Jahre in der DDR eine Beachtung, die über den Bereich der Schule hinausgeht. Auch in vielen (etwa achtzig) anderen Ländern wird in zunehmendem Maße durch Wettbewerbe auf die Bedeutung einer mathematischen Bildung und die Förderung mathematischer Begabungen hingewiesen. Das wird durch die Gründung einer „Weltföderation der nationalen Mathematik-Wettbewerbe“ unterstrichen.

Die Olympiaden Junger Mathematiker in der DDR sollen

- dazu beitragen, dass sich die Schüler inner- und außerhalb des Unterrichts ein solides Wissen und Können auf dem Gebiet der Mathematik aneignen, dass sie ihre Kenntnisse erweitern und zum mathematischen Denken erzogen werden,
- bei der Mehrzahl der Schüler Interesse und sogar Begeisterung für das Fach Mathematik wecken und vertiefen,
- mathematisch interessierte und begabte Schüler ermitteln, damit ihre systematische Förderung erfolgen kann.

Die Olympiaden werden in jedem Schuljahr in vier Stufen durchgeführt:

Schul-Olympiaden (Olympiadeklassen 5 bis 11 / 12, im September)

Kreis-Olympiaden (Olympiadeklassen 5 bis 11/12, im November)

Bezirks-Olympiaden (Olympiadeklassen 7 bis 11/12, im Februar)

DDR-Olympiade (Olympiadeklassen 10 bis 11/12, im Mai)

Die Zulassung zur Bezirks- und DDR-Olympiade setzt die erfolgreiche Teilnahme an der jeweils vorhergehenden Stufe voraus.

Mit den Olympiaden kann die Suche nach mathematischen Begabungen im ganzen Land durchgeführt werden. Entscheidend ist, dass die entdeckten vermutlichen mathematischen Begabungen im Unterricht und außerunterrichtlich weiter gefördert werden.

Schülerarbeitsgemeinschaften, Kreisklubs, Bezirksklubs, Korrespondenzzirkel und Schülergesellschaften sind Formen zur Förderung mathematischer Talente in der DDR. Die schrittweise Steigerung der Anforderungen von Stufe zu Stufe und von Klasse zu Klasse in den Wettbewerben gibt den notwendigen Entwicklungsanreiz. Mit der variablen Gestaltung der Teilnahmeberechtigung, die auch die Beteiligung in einer höheren Olympiadeklasse als der besuchten Schulklasse zulässt, ist gewährleistet, dass eine differenzierte Förderung erfolgt.

Um Schülern, tätigen sowie künftigen Mathematiklehrern und Freunden der Mathematik Gelegenheit zu geben, Aufgaben für die Olympiadeklassen 9 bis 11/12 (14- bis 18jährige) kennenzulernen, sie selbst zu lösen oder sich anhand der Lösungen mit dem Stoff vertraut zu machen, wurde dieses Buch herausgegeben.

Es enthält eine Auswahl von 321 Aufgaben der 8. bis 14. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (1968/69 bis 1974/75).

Diese Auswahl erfolgte im Wesentlichen so, dass von ähnlichen Aufgaben nur ein Vertreter aufgenommen wurde. Die Verteilung auf die Gebiete entspricht etwa derjenigen, die in den Olympiaden der genannten Jahre vorlag. Autoren der Aufgaben und Lösungen lassen sich nicht angeben.

Aufgaben und Lösungen wurden in der Aufgabenkommission des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker unter Verantwortung der Herausgeber erarbeitet und für dieses Buch noch einmal überarbeitet. Die Angabe (x/y/z) hinter jeder Aufgabe bedeutet, dass diese in der x-ten Olympiade, in Olympiadeklasse y und der Stufe z gestellt wurde.

Der Leser möge sich überlegen, welche Aufgaben mit Hilfe eines ihm zur Verfügung stehenden Computers gelöst werden können, und er führe die Lösung aus. Einige Aufgaben erfordern eine intensive Beschäftigung mit dem Gegenstand, der Leser lasse sich nicht entmutigen.

In den Jahren 1972 und 1975 erschienen im Verlag Volk und Wissen (Berlin) unter dem Titel „Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR“ zwei Bände mit 306 Aufgaben der Vorolympiaden 1960, 1961 und der 1. bis 7. Mathematikolympiade in den Schuljahren 1961/62 bis 1967/68 für die Olympiadeklassen 9 bis 12.

Im Band 2 dieses Titels findet sich eine Zusammenstellung von Definitionen und wichtigen Sätzen der Geometrie, die bei den Aufgaben zugrunde gelegt werden. Eine Auswahl von 235 Aufgaben für die Olympiadeklassen 5 bis 8 der Jahre 1961/62 bis 1980/81 wurden 1983 von B. Noack und H. Titze unter dem Titel „Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR in den Klassen 5 bis 8“ im Verlag Volk und Wissen herausgegeben.

Der an Olympiade-Aufgaben interessierte Leser wird darauf hingewiesen, dass in den Schülerzeitschriften „alpha“ und „Wurzel“ die Aufgaben der Mathematikolympiaden der DDR publiziert werden.

Mein Mitherausgeber, Prof. Dr. U. Pirl, der sich um die Erarbeitung der Aufgaben und Lösungen für die Mathematikolympiaden große Verdienste erworben hat, verstarb nach langer Krankheit noch vor der Drucklegung dieses Buches. Ich danke meiner Frau Helga und Herrn Oberstudienrat H. Titze für Hilfe und wertvolle Hinweise bei den Korrekturen, Frau Dr. U. Leitner und Frau Dipl.-Math. B. Mai vom Lektorat Mathematik des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die gute Zusammenarbeit, Frau L. Arendt (Rostock) für die Herstellung der Reinschrift des größten Teils des Manuskripts und den Mitarbeitern des VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza für die sorgfältige Ausführung des Drucks.

Wolfgang Engel

Vorbemerkungen

Im folgenden geben wir Erläuterungen zu den im Text verwendeten Ausdrücken und Symbolen, es sind jedoch keine strengen Definitionen.

Die Redewendungen „heißen“, „bedeuten“, „genannt werden“, „versteht man“ werden stets im Sinne von „genau dann, wenn ...“ verwendet.

Mit der Formulierung „wenn das Gebilde g der Bedingung B genügt, so heißt es ein Element der Menge \mathfrak{M} “ ist gemeint: „ g ist dann und nur dann Element von \mathfrak{M} , wenn es der Bedingung B genügt“.

„O.B.d.A.“ ist die Abkürzung für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

„w.z.b.w.“ oder „q.e.d.“ (= quod erat demonstrandum) sind Abkürzungen für „was zu beweisen war“.

„ n paarweise voneinander verschiedene Objekte“ ist gleichbedeutend mit „ n Objekte, von denen keine zwei einander gleich sind“.

Es bedeutet:

- $a \in \mathfrak{M}$ a ist Element der Menge \mathfrak{M} ,
- $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ \mathfrak{M} ist Teilmenge von \mathfrak{B} bzw. gleich \mathfrak{B} ,
- $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ \mathfrak{A} ist echte Teilmenge von \mathfrak{B} ,
- $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ \mathfrak{A} vereinigt mit \mathfrak{B} (Vereinigungsmenge),
- $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ \mathfrak{A} geschnitten mit \mathfrak{B} (Durchschnittsmenge),
- \emptyset leere Menge.

Die Aussage „ \mathfrak{M} ist der geometrische Ort aller Punkte P , die der Bedingung B genügen“ ist gleichwertig mit den beiden folgenden Sätzen, die Umkehrungen voneinander sind:

„Gehört der Punkt P zur Menge \mathfrak{M} , so genügt P der Bedingung B “

„Genügt der Punkt P der Bedingung B , so gehört P zur Menge \mathfrak{M} .“

$\{a_1, a_2, a_3\}$ bezeichnet die Menge aus den Elementen a_1, a_2, a_3 . Es ist also $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_3, a_1\}$ usw. Ferner ist $\{a_1, a_1\} = \{a_1\}$.

(a_1, a_2) bezeichnet das geordnete Paar, (a_1, a_2, a_3) bezeichnet das geordnete Tripel,

(a_1, a_2, a_3, a_4) bezeichnet das geordnete Quadrupel aus den Elementen a_1, a_2, a_3, a_4 .

Es ist $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ dann und nur dann, wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ ist.

Unter einer Lösung einer gegebenen Gleichung oder einer Ungleichung oder eines Systems von Gleichungen oder eines Systems von Ungleichungen mit zwei Variablen (Unbekannten) x, y versteht man ein geordnetes Zahlenpaar (x_0, y_0) , dessen Elemente beim Einsetzen in jede der Gleichungen bzw. Ungleichungen diese erfüllen. Entsprechend ist jede Lösung einer Gleichung mit drei Variablen ein geordnetes Zahlentripel usw.

Zwei Gleichungen (Ungleichungen) heißen gleichwertig oder äquivalent, wenn bei beiden Gleichungen (Ungleichungen) die Mengen ihrer sämtlichen Lösungen ohne Berücksichtigung ihrer Vielfachheit dieselben Mengen sind.

Alle vorkommenden Zahlen sind, wenn nichts anderes gesagt wird, unter Verwendung

des dekadischen Systems dargestellt bzw. darzustellen.

Der Satz "Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich eindeutig - bis auf die Reihenfolge der Faktoren - als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben" wird häufig benutzt, ohne dass besonders auf ihn verwiesen wird.

Für ganze Zahlen a, b und $n \neq 0$ bedeutet

$a \mid b$	a ist Teiler von b ,
$a \nmid b$	a ist nicht Teiler von b ,
$a \equiv b \pmod{n}$	n ist Teiler von $a - b$ (gelesen: a kongruent b modulo n),
$a \not\equiv b \pmod{n}$	n ist nicht Teiler von $a - b$,
a, b teilerfremd	a und b haben den größten gemeinsamen Teiler 1.

Für beliebige Zahlen m und natürliche Zahlen k bedeuten

$$k! = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 1 \text{ ist} \\ k(k-1)! & \text{falls } k > 1 \text{ ist} \end{cases} \quad (\text{gelesen } k \text{ Fakultät});$$

$$\binom{m}{k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ ist} \\ m & \text{falls } k = 1 \text{ ist} \\ \frac{m!}{k!(m-k)!} & \text{falls } k > 1 \text{ ist} \end{cases} \quad (\text{gelesen } m \text{ über } k);$$

Für reelle Zahlen m bedeutet $[m]$ die größte ganze Zahl k mit $k \leq m$ (gelesen: m in eckigen Klammern, Gauß-Symbol).

Für die Zahlen $a_i, i = 1, 2, \dots$, bedeutet (a_i) die Zahlenfolge a_i .

Es bezeichnet

$A \in g$	der Punkt A liegt auf der Geraden g ,
g_{AB}	die Gerade durch die Punkte A, B , wenn $A \neq B$,
$AB, AB $	die Strecke mit den Endpunkten A, B bzw. die Länge der Strecke AB ,
$\angle(g, h)$	den nicht überstumpfen Winkel mit den Schenkeln g, h , wenn g, h von ein und demselben Punkt ausgehende Strahlen sind,
$\angle ABC$	den nicht überstumpfen Winkel mit den Schenkeln von B durch A und von B durch C ,
$ \angle(g, h) , \angle ABC $	die Größe (Winkelmaß) des Winkels $\angle(g, h)$ bzw. $\angle ABC$. Sie wird durch eine reelle Zahl α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ (Gradmaß) oder $0 \leq \alpha \leq \pi$ (Bogenmaß) gemessen,
$g \parallel h$	Gerade g parallel zur Geraden h ,
$g \nparallel h$	Gerade g nicht parallel zur Geraden h ,
$g \perp h$	Gerade g senkrecht auf (orthogonal zu) der Geraden h ,
ε_{ABC}	Ebene ε durch die Punkte A, B, C , wenn A, B, C nicht auf ein und derselben Geraden liegen,
\widehat{AB}	ein näher festzulegender Bogen mit den Endpunkten A, B auf einer gegebenen Kurve (insbesondere einem Kreis),
$ABC, \triangle ABC$	Dreieck mit den Ecken A, B, C ,
\cong	kongruent,
\sim	ähnlich,
\overrightarrow{PQ}	Vektor, der den Punkt P in den Punkt Q verschiebt. Vektoren werden auch durch Frakturbuchstaben gekennzeichnet (etwa \mathfrak{x}).

Ein n -Eck in der Ebene (Polyeder im Raum) heißt konvex, wenn stets mit zwei Punkten

auch die Verbindungsstrecke ganz in der n -Ecksfläche (im Polyederkörper) liegt.
Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, werden anstelle von

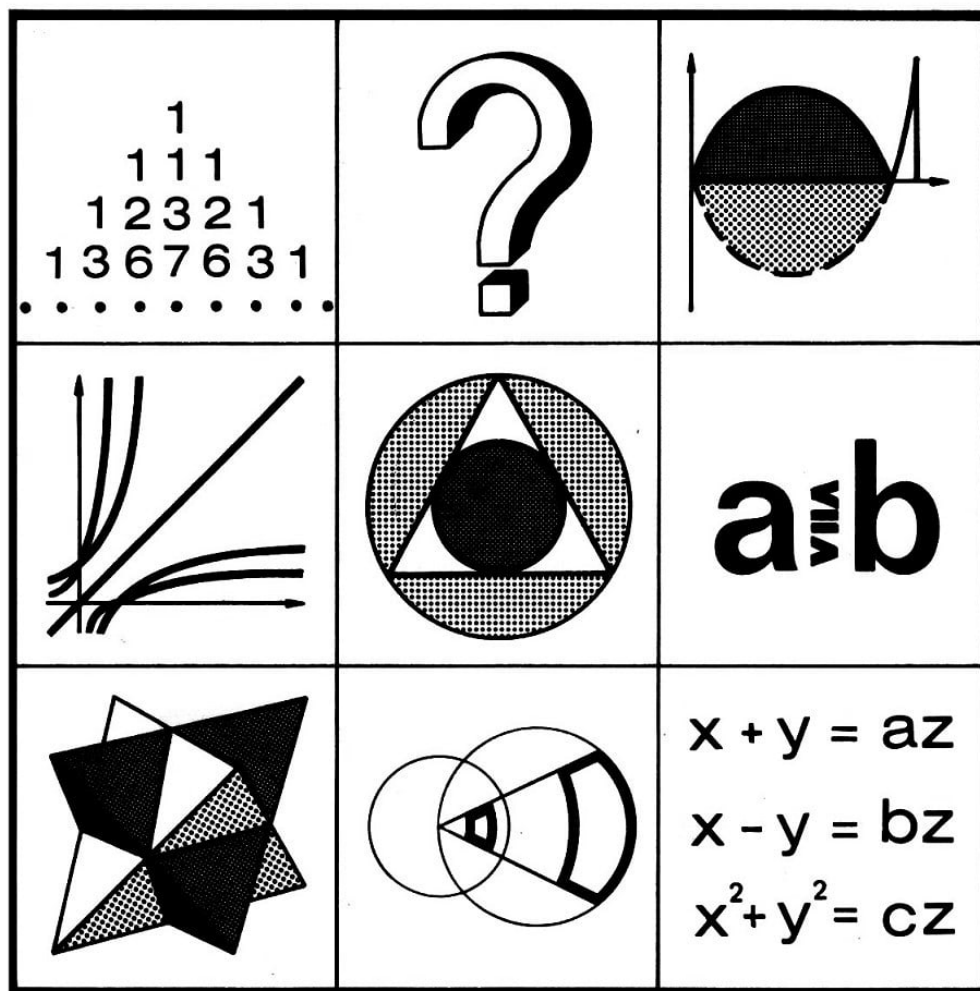
$$a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{M}, a < x < b, a < y < b \text{ und } i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

auch die abgekürzten Bezeichnungen

$$a, b \in \mathfrak{M}, a < x, y < b \text{ und } i, j = 1, 2, \dots, n$$

verwendet.

Aufgaben



1 Arithmetik

Positionsdarstellung - Teilbarkeit - Primzahlen - Folgen ganzer Zahlen

A.1.1

$$\begin{array}{rcccc} & & D & R & E & I \\ + & D & R & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline & N & E & U & N \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden. Man gebe alle Lösungen dafür an. (11/10/1)

A.1.2

Man beweise, dass jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt. (10/10/2)

A.1.3

Man ermittle alle geordneten Paare (x, y) jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:

(*) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y .

(**) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2 . (11/10/3)

A.1.4

Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x , geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:

Fügt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge $x + 1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechststelligen Quadratzahl. (11/11.12/4)

A.1.5

Man gebe alle g -adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermittle für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe:

Welche im g -adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, dass sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g -adisch zweistellige Zahl ergibt und dass man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem in der Gestalt 12 zu schreibende Zahl erhält? (12/10/4)

A.1.6

Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleichlange Teilbögen zerlegt und jeden der Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 bezeichnet. Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46,

..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten „Umläufen“ auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden mussten, die bereits gestrichen sind.

Man ermittle die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden. (13/9/2)

A.1.7

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat: Die Zahl, die das Produkt aus 83 und x ist, hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d. h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine Drei, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine Acht zu setzen). (14/9/3)

A.1.8

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinander geschrieben:

12345678910111213...9989991000

Es ist zu beweisen, dass die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist. (10/9/1)

A.1.9

Man ermittle die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $1000!$ endet. (13/9/1)

A.1.10

Man beweise den folgenden Satz: Bildet man aus einer im dekadischen System geschriebenen natürlichen Zahl z_1 durch beliebiges Vertauschen ihrer Ziffern untereinander eine neue Zahl z_2 dann ist $|z_1 - z_2|$ stets durch 9 teilbar. (12/10/2)

A.11.1

Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist. (12/9/1)

A.1.12

Es ist die kleinste positive ganze Zahl 2 zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist. (14/9/2)

A.1.13

Man gebe alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei Division durch 7 den Rest 3 ergeben. (9/10/3)

A.1.14

Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Es ist zu beweisen, dass mindestens eine der Zahlen

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^1 + n^2$$

durch 5 teilbar ist. (10/10/2)

A.1.15

Man beweise den folgenden Satz: Die Summe der Kuben dreier beliebiger unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar. (12/9/2)

A.1.16

Man beweise: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar. (13/ 10/3)

A.1.17

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist. (12/9/3)

A.1.18

Man zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1$$

durch 512 teilbar ist. (8/9/3)

A.1.19

Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

durch 10 teilbar ist. (13/9/3)

A.1.20

Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ an, für die die Zahl

$$n^2 + 6n - 187$$

ohne Rest durch 19 teilbar ist. (14/10/3)

A.1.21

Man beweise: Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar. (14/11.12/1)

A.1.22

Man beweise: Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, dass die Zahl $11a + 2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a + 5b$ durch 19 teilbar. (9/9/3)

A.1.23

Man ermittle alle Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) natürlicher Zahlen, für die $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ gilt und jede der Zahlen

$$\begin{aligned} d_1 &= a_4 - a_3 & d_2 &= a_3 - a_2 & d_3 &= a_2 - a_1 \\ d_4 &= a_4 - a_2 & d_5 &= a_3 - a_1 & d_6 &= a_4 - a_1 \end{aligned}$$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen. (9/10/2)

A.1.24

Man denke sich alle Primzahlen ≥ 5 der Größe nach fortlaufend nummeriert:

Primzahl	5	7	11	13	17	19
Nummer	1	2	3	4	5	6

Es ist zu beweisen, dass dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist. (12/10/3)

A.1.25

Man beweise den folgenden Satz: Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b , so dass die Gleichungen

$$a + b = p_2 \quad (*) \quad , \quad a - b = p_1 \quad (**)$$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt ab durch 6 teilbar ist. (11/9/2)

A.1.26

a) Man beweise den folgenden Satz: Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zweier dieser Primzahlen durch 6 teilbar.

b) Man beweise, dass die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, dass jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird. (11/10/4)

A.1.27

Es sind alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften zu ermitteln:

a) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.

b) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen je eine zweistellige Primzahl. (13/10/2)

A.1.28

Man beweise den folgenden Satz: Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3$, $q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24. (8/10/3)

A.1.29

Man ermittle alle Primzahlen p mit folgender Eigenschaft: Addiert man zu p die Zahl 50 und subtrahiert man von p die Zahl 50, dann erhält man zwei Primzahlen. (8/10/1)

A.1.30

Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:

a) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82944000000.

- b) Ihr größter gemeinsamer Teiler ist gleich 24.
- c) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist gleich 120000.
- d) Der größte gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.
- e) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30000. (11/10/4)

A.1.31

Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:

Die Summe der dritten Potenzen der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenzen der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels. (14/9/3)

A.1.32

Man beweise, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. (12/11.12/2)

A.1.33

Es ist zu beweisen, dass für keine ganze Zahl n die Zahl $7n + 3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann. (11/11.12/2)

A.1.34

Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

- a) Man gebe ein Zahlenbeispiel an.
- b) Man beweise diesen Satz. (10/9/2)

A.1.35

Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.

- a) Man beweise, daß dann $x = uv$, $y = \frac{u^2 - v^2}{2}$, $z = \frac{u^2 + v^2}{2}$ drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d. h., dass (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel ist.
- b) Man gebe je eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x > y$ bzw. $x < y$ gilt. (12/11.12/2)

A.1.36

a) Es ist zu beweisen: Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.

b) Man nutze eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden.

(Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft, dass $x^2 + y^2 = z^2$ gilt.

Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, dass man x, y und z mit einer

natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder dass man x mit y vertauscht oder dass man beides durchführt.) (10/10/3)

A.1.37

Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten beiden Zahlen ist. Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

- a) Gibt es noch andere fünf unmittelbar aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?
- b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n . Man ermittle alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ dieser Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist. (8/10/3)

A.1.38

Gesucht sind alle natürlichen Zahlen a , für die der Term

$$t = \frac{a + 11}{a - 9}$$

eine natürliche Zahl ist. (11/19/1)

A.1.39

Es sei

$$z = \left(1 - \frac{4}{1^2}\right) \left(1 - \frac{4}{3^2}\right) \left(1 - \frac{4}{5^2}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{199^2}\right)$$

wobei die Nenner der Subtrahenden in den Faktoren die Folge der ungeraden Quadratzahlen von 1^2 bis 199^2 durchlaufen. Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z = \frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q > 0$ ist. (14/11.12/4)

A.1.40

Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichne s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n .

- a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2415$?
- b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_n genau 69 mal so groß wie m ? (10/10/1)

A.1.41

Jemand wählt eine natürliche Zahl n , addiert die natürlichen Zahlen von 1 bis n zueinander und erhält als Summe $1 + 2 + \dots + n$ eine dreistellige Zahl, die (wie z. B. 777) aus lauter gleichen Ziffern besteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, eine Zahl n zu wählen, für die das zutrifft. (14/10/1)

A.1.42

In der Rechenaufgabe, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n - 1$ Zahlen zu addieren, sollen die Zahlen n und x so angegeben werden, dass als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben. (13/1071)

A.1.43

Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an + b$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine Folge natürlicher Zahlen gegeben. Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d .

Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben. (12/11.12/3)

A.1.44

Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten:

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1

Eine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet: Die einzige Zahl in Zeile 0 sei die Zahl 1.

Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind.

Es sei für jede natürliche Zahl n zu beweisen, dass in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat. (10/11.1272)

A.1.45

Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) einander gleich sind.

Es ist zu zeigen, dass es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1, 2, \dots$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt. (8/10/2)

2 Gleichungen

Lineare Gleichungen - Nichtlineare Gleichungen - Gleichungssysteme - Diophantische Gleichungen

A.2.1

Man beweise den folgenden Satz: Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit $abc \neq 0$ und $a + b + c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt. (Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.) (13/9/3)

A.2.2

Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{c + d} = \frac{1}{(a + b)(c + d)} \quad (*)$$

Michael meint, dass sie "falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht "überzeugen" lässt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (*) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Man ermittle alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen $-1, 0, 1$ für a, b, c und d je eine so auszuwählen, dass die Gleichung (*) erfüllt wird. (11/9/1)

A.2.3

Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z. B. $[3,7] = 3$, $[-3,7] = -4$, $[4] = 4$.) Für welche reellen Zahlen x gilt

$$\left[\frac{10 + 3x}{6} \right] = \frac{5x + 3}{7} \quad (*)$$

(10/9/3)

A.2.4

Gesucht sind alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m , einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y , die das folgende Gleichungssystem erfüllen: (11/10/4)

$$-2x + 3y = 2m \quad (*)$$

$$x - 5y = -11 \quad (**)$$

A.2.5

Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:

A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, den Rest mit 5 km/h.

B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, während der übrigen Zeit mit 5 km/h. Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel? (12/9/3)

A.2.6

Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B! Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A. Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer Stelle der Straße begegnen sie einander.

Nach der Begegnung habe der erste noch genau zwei Stunden bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ Stunden bis nach A. Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Kraftwagen? (8/10/2)

A.2.7

Zwei Autos starteten gleichzeitig und fuhren auf derselben Straße von A nach B. Das erste Auto benötigte für diese Strecke vier Stunden, das zweite drei Stunden. Beide fuhren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?

b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B, legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück? (11/10/2)

A.2.8

Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s , dass er eine Verspätung von genau 4 min hatte. Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie' der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.

Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit? (12/10/3)

A.2.9

Man ermittle alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x-2a)(x+a)}$$

erfüllen! Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!) (8/11.12/3)

A.2.10

Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a^2 + bx + c = 0 \quad (*)$$

die Koeffizienten a , b , c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung $(*)$ keine rationale Lösung. (9/10/4)

A.2.11

Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b < a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen einander gleich sind. (9/10/3)

A.2.12

Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \quad (*)$$

$$x - y = bz \quad (**)$$

$$x^2 + y^2 = cz \quad (***)$$

Dabei sind a , b , c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!) (9/11.12/2)

A.2.13

Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z) , welche Lösungen des Gleichungssystems

$$x + y = 2 \quad (*)$$

$$xy - z^2 = 1 \quad (**)$$

sind. (10/9/3)

A.2.14

Man gebe alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen x , y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ an, für die folgendes gilt:

a) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.

b) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6. (11/10/3)

A.2.15

Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x + 1||x - 2||x + 3||x - 4| = |x - 1||x + 2||x - 3||x + 4|$$

erfüllt ist. (8/11.12/2)

A.2.16

a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$$

zu ermitteln.

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a$$

keine, genau eine, genau zwei, genau drei, genau vier bzw. mehr als vier verschiedene reellen Lösungen hat. (9/11.12/1)

A.2.17

a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung

$$x^3z + x^2y + xz + y = x^5 + x^3$$

erfüllen.

b) Man gebe unter den in a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich null ist. (11/11.12/4)

A.2.18

Man beweise folgenden Satz: Wenn s und t von null verschiedene reelle Zahlen und a , b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2(x-1) + t(x+1) = 0$ sind, so gilt

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = -1$$

(9/10/4)

A.2.19

Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6$ so an, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$\begin{aligned} x^{12} + 1 = & (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2)(x^2 + a_3x + b_3) \\ & (x^2 + a_4x + b_4)(x^2 + a_5x + b_5)(x^2 + a_6x + b_6) \end{aligned}$$

gilt. (8/11.12/2)

A.2.20

Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (*)$$

$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \quad (**)$$

erfüllt ist. (10/11.12/2)

A.2.21

Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \quad (*)$$

$$y^2 + x^2 + y + 1 = 0 \quad (**)$$

sind. (13/11.12/2)

A.2.22

Für alle reellen Wertetripel (a, b, c) ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem

$$xy^2z^3 = a \quad (*)$$

$$x^2y^3z = b \quad (**)$$

$$x^3yz^2 = c \quad (***)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei, jedoch endlich viele, e) unendlich viele reelle Lösungen (x, y, z) hat. Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben. (14/11.12/1)

A.2.23

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x + y + z = 0 \quad (*)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (**)$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = a \quad (***)$$

a) keine reellen Lösungen (x, y, z) , b) genau eine reelle Lösung, c) mehr als eine reelle Lösung hat. (14/11.12/2)

A.2.24

Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen x und y , für die die Gleichungen

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \quad (*)$$

und

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \quad (**)$$

gelten. (14/11.12/4)

A.2.25

Man ermittle alle rationalen Zahlen r , die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r = 4$$

(14/10/4)

A.2.26

Gesucht sind alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b ($b \neq 0$) mit folgender Eigenschaft:

Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n ($n \neq 0$) und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n , so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist. (11/9/2)

A.2.27

Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X:

"Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."

Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angaben in vollen Lebensjahren) (10/9/1)

A.2.28

Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:

Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder. Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre. Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Tochter und Sohn alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen. (13/11.12/3)

A.2.29

Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 Watt ergibt. Es entstehen ausreichend viele Glühlampen von 40 Watt, 60 Watt und 75 Watt, aber keine anderen, zur Verfügung. Man gebe alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an. (11/10/1)

A.2.30

Welche (geordneten) Tripel (x, y, z) erfüllen die folgenden Bedingungen?

$$x - y = 96 \quad (*)$$

$$y - z = 96 \quad (**)$$

$$x, y \text{ und } z \text{ sind Quadrate natürlicher Zahlen.} \quad (***)$$

(14/10/2)

A.2.31

Man ermittle alle Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y , die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$

erfüllen. (13/1073)

A.2.32

Gesucht sind alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y , die Lösungen der Gleichung $2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$ sind. (11/9/3)

A.2.33

Es sind alle Paare (x, y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ erfüllt ist. (12/11.12/4)

A.2.34

Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare (x, y) , die die Gleichung $(x+2)^2 - x^4 = y^3$ erfüllen. (13/10/4)

A.2.35

Es sind alle geordneten Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y ($x \leq y$) anzugeben, für die die Gleichung

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$$

erfüllt ist. (12/11.12/1)

A.2.36

Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.

Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung

$$x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma = 0$$

als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. (13/11.12/3)

A.2.37

Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung $a^{a^a} = (a^a)^a$ erfüllt ist (a^{a^a} bedeutet $a^{(a^a)}$). (9/11.12/1)

3 Ungleichungen

A.3.1

Mit welchen der folgenden Bedingungen a), ... , e) ist die Bedingung $3x^2 + 6x > 9$ äquivalent?

a) $-3 < x < 1$; b) $x > -3$; c) $x < 1$; d) $x < 1$ oder $x > -3$; e) $x > 1$ oder $x < -3$.
(9/10/2)

A.3.2

Man beweise, dass für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, dass in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt. (14/9/3)

A.3.3

Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, dass dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

gilt. Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt. (11/9/3)

A.3.4

Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \quad (*)$$

gilt. (14/11.12/4)

A.3.5

Man ermittle alle reellen Zahlen x , für die der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ negativ ist. (12/9/2)

A.3.6

Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$. Man gebe alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{v}{u}$ an, für die

$$\frac{k + kv}{v + ku} < 1 \quad (*)$$

gilt! (11/10/2)

A.3.7

Es sei r eine von null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

erfüllen. Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) $r < -6$, b) $r = -6$, c) $-6 < r < 0$, d) $r > 0$. (10/10/4)

A.3.8

Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \quad (*)$$

existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \quad (**)$$

(11/11.12/4)

A.3.9

Man beweise, dass das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2499}{2500}$$

kleiner als 0,02 ist. (9/11.12/3)

A.3.10

Gegeben seien k reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k (k eine natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \quad \text{und} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1 \quad (1,2)$$

gilt. Man beweise, dass dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0 < n \leq k$ die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \frac{1}{k}$$

erfüllt ist. (13/11.12/1)

A.3.11

Man beweise, dass die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[m]{a^m + b^m}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt. (13/11.12/3)

A.3.12

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so dass $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$$

erfüllt ist. Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a ? (10/11.12/4)

A.3.13

Man beweise $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen. (8/11.12/7)

4 Funktionen

Ganzrationale Funktionen - Trigonometrische Funktionen - Logarithmus-Funktion - Funktionalgleichungen

A.4.1

Es sei f die für alle reellen x durch $f(x) = \frac{(x-1)x}{2}$ definierte Funktion. Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_0 + 1$ und $x_0 + 2$ mit $f(x_0 + 1)$ bzw. $f(x_0 + 2)$ bezeichnet.

Man beweise, dass dann

$$f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2) \cdot f(x_0 + 1)}{x_0}$$

gilt. (9/9/3)

A.4.2

Von einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) denke man sich folgende Tabelle gebildet:

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

Man ermittle alle reellen Koeffizienten a , b , c , für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind. (9/10/3)

A.4.3

Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl. Man beweise, dass dann

$$f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$$

gilt. (9/10/1)

A.4.4

Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser Achse eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0, 8)$. Gesucht sind alle reellen Zahlen p und q , die diese Bedingungen erfüllen. (8/10/3)

A.4.5

Es seien a , b , c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gesetzt.

a) Man beweise, dass folgender Schluss richtig ist:

Voraussetzung: $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.

Behauptung: Für jede ganze Zahl x ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0)$, $f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel (p, q, r) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, dass ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen. (10/11.12/1)

A.4.6

Es sind alle nichtnegativen reellen Zahlen k anzugeben, für die die ganzrationale Funktion

$$f(x) = (x + 1)^4 - (kx)^2$$

a) genau eine, b) genau zwei voneinander verschiedene, c) genau drei paarweise verschiedene, d) genau vier paarweise verschiedene, e) keine reelle(n) Nullstelle(n) hat. (11/11.12/1)

A.4.7

Gegeben seien drei reelle Zahlen a , b und c . Zu der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (*)$$

soll eine Funktion

$$y = x^3 + mx + n \quad (**)$$

ermittelt werden, so dass der Graph von $(**)$ in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von $(*)$ parallel zur x -Achse entsteht. Man zeige, dass dies immer möglich ist und dass die Funktion $(**)$ eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben. (12/11.12/1)

A.4.8

Es sind alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a , b anzugeben, für die das Polynom

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

ein Teiler des Polynoms

$$g(x) = x^4 + ax^2 + b$$

ist.

Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann ein Teiler eines Polynoms $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, für das $f(x)h(x) = g(x)$ gilt. (12/11.12/2)

A.4.9

Es sei x eine Variable, die alle von 1 und von -1 verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann. Man gebe eine Möglichkeit an, den Term

$$\frac{x}{x^2 - 1}$$

so als Summe zweier Brüche darzustellen, dass die Variable x nur in den Nennern dieser beiden Brüche und dort in keiner höheren als der ersten Potenz auftritt. (11/10/1)

A.4.10

a) Man ermittle den Wertevorrat W der für alle reellen Werte x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d. h. alle diejenigen y , zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert).

b) Man zeige, dass es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt: Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$. (9/11.12/3)

A.4.11

Es ist zu beweisen, dass

$$\frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} \geq \frac{2}{1 - \sin(x + y)} \quad (*)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad 0 < y < \frac{\pi}{4} \quad (**)$$

gilt. Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür geben, dass in (*) unter der Nebenbedingung (**) Gleichheit eintritt. (11/11.12/3)

A.4.12

Man beweise den folgenden Satz: Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt

$$\sin^2 \gamma \geq \sin(2\alpha) \sin(2\beta)$$

(10/11.12/3)

A.4.13

Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat. (9/11.12/4)

A.4.14

Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben. (8/11.12/3)

A.4.15

Man ermittle alle reellen Zahlen x , die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung $\tan x + \cot x = 4$ erfüllen. (12/11.12/3)

A.4.16

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ gilt,} \\ 0 & \text{für alle reellen } x, \text{ für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

Man beweise, dass die für alle reellen x durch $F(x) = f(x) + f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist. (11/11.12/4)

A.4.17

Man ermittle den Quotienten

$$\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0,0379]}$$

ohne Verwendung einer Logarithmentafel. (Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.) (9/10/2)

A.4.18

Man beweise, dass die durch

$$f(x) = 4^x + 6^x - 9^x$$

erklärte Funktion keine rationalen Nullstellen besitzt. (11/11.12/3)

A.4.19

Gegeben sei eine positive reelle Zahl a , $a \neq 1$. Man ermittle alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$x^{\log_a x} = a^2 x$$

erfüllen. (14/10/3)

A.4.20

Man beweise, dass

$$\lg \left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \lg \left(1 - \frac{1}{26^2}\right) + \dots + \lg \left(1 - \frac{1}{99^2}\right) + \lg \left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \lg \frac{606}{625}$$

gilt. (12/10/3)

A.4.21

Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

gilt. (10/10/3)

A.4.22

Man beweise, dass die Ungleichung

$$|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$$

für alle Paare positiver reeller Zahlen (a, b) mit $a \neq 1$, $b \neq 1$ gilt. (13/10/3)

A.4.23

Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion

$$y = \log_a(bx + c) \quad \text{mit} \quad a, b, c \text{ reell}, a > 1$$

gibt, deren Graph in einem x, y -Koordinatensystem durch die Punkte $(2, 2)$, $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ verläuft. Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a, b, c) an, für die das zutrifft. (14/11.12/3)

A.4.24

Man ermittle alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$4 \log_4 x + 3 = 2 \log_x 2$$

erfüllen. (8/10/4)

A.4.25

Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ermittle man alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$$

erfüllen. (9/10/4)

A.4.26

Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c , für die

$$[\log_{12} c] \leq [\log_4 c] \quad (*)$$

gilt. Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (10/10/4)

A.4.27

In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f , die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:

(A) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.

Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:

(B) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.

Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.

Hinweise:

1. Genau dann heißt $f(x)$ in J streng $\begin{cases} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{cases}$, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ begrenzten Sehne gelegene Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die $\begin{cases} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{cases}$ als $f(x^*)$ ist.

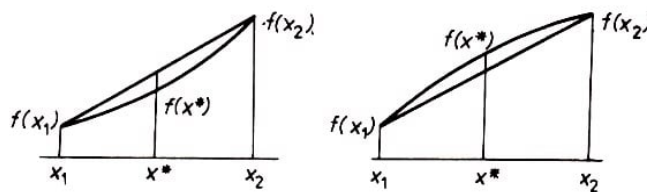


Abb. A.4.27

2. Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet. (14/11.12/4)

A.4.28

In einem Mathematikzirkel gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g , dass beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst und dass die Gleichung $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle x erfüllt ist.

Annemarie folgert nun daraus: "Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion."

Brigitte widerspricht: "Es lässt sich nur schließen, dass g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist."

Christa meint: "Ihr habt beide nicht recht." Wer von diesen Schülerinnen hat nun recht?

Anmerkung:

Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ in einem Intervall genannt, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1 < x_2$ ist, die Ungleichung $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$ gilt. (14/10/4)

A.4.29

Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung

$$f(n) = a^n + b^n + (a + b)^n$$

definierte Funktion. Man beweise, dass dann $(f(2))^2 = 2f(4)$ gilt. (14/10/3)

A.4.30

Es sind alle ganzrationalen Funktionen $f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(tx) = tf(x)$ erfüllen. Dabei sei t eine beliebig gegebene, aber dann festgehalten zu denkende reelle Zahl. (10/11.12/3)

A.4.31

Man gebe für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x

$$f(x) = f(x + 1) - a$$

gilt. (10/10/3)

A.4.32

Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x + 1) = f(-x)$$

erfüllen. (10/10/4)

A.4.33

Man ermittle alle Paare (f, g) von Funktionen, die für alle von $-1, 0$ und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen

$$xf(x) - \frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2g(x) \quad (*, **)$$

erfüllen. (13/11.12/4)

A.4.34

Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaften hat: Für alle x gilt

$$f(x) = xf(x + 1) \quad \text{und es ist} \quad f(1) = 1 \quad (*, **)$$

- Man ermittle alle ganzen Zahlen n , für die $f(n) = 0$ gilt.
- Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x + m)$ gegeben. Man berechne $f(x + n)$.
- Man gebe eine spezielle Funktion f , an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graphen dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$. (12/11.12/3)

A.4.35

Es sei p eine von null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1} \quad (*)$$

für alle reellen x .

a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d. h., dass es zu ihr eine von null verschiedene reelle Zahl q gibt, so dass

$$f(x+q) = f(x) \quad \text{für alle reellen } x \quad (**)$$

gilt.

b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an.

Hinweis: Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b \sin^2 x}{c + d \sin^2 x}$$

bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (*) hat und nicht konstant ist. (14/11.12/3)

A.4.36

Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, sei periodisch mit der Periode P , d. h., für alle reellen x gelte $f(x+P) = f(x)$. Die kleinste positive Zahl, für die das gilt, sei p . Jede weitere Periode P ist dann ein ganzzahliges Vielfaches von p .

Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

a) $F(x) = \frac{1}{2}f(x)$, b) $G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$? (11/10/3)

5 Kombinatorik und Spiele

A.5.1

Vier Personen A, B, C und D machen je drei Aussagen über ein und dieselbe Zahl x . Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Aussage wahr und mindestens eine Aussage falsch sein.

A a) "Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1."

b) " x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6."

c) "Die dritte Potenz von x ist kleiner als 221."

B a) " x ist eine gerade Zahl."

b) " x ist eine Primzahl."

c) " x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5."

C a) " x ist irrational."

b) " x ist kleiner als 6."

c) " x ist Quadrat einer natürlichen Zahl."

D a) " x ist größer als 20."

b) " x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens drei Stellen enthält."

c) " x ist nicht kleiner als 10."

Man ermittle x aus diesen Aussagen. (8/9/2)

A.5.2

Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:

Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, dass sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, dass jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten. Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiss, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen.

Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppen beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?

b) Man gebe eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln. (9/9/2)

A.5.3

In einer alten Aufgabensammlung wird das "Urteil des Paris" folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

- a) Aphrodite: "Ich bin die schönste".
- b) Athene: "Aphrodite ist nicht die schönste".
- c) Hera: "Ich bin die schönste".
- d) Aphrodite: "Hera ist nicht die schönste".
- e) Athene: "Ich bin die schönste".

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, dass alle Aussagen dieser schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung und der, dass nur eine die schönste sein kann, die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese? (10/9/1)

A.5.4

Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die im folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

- A a) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C."
b) "Ich habe den Brief nicht."
c) "Mein Freund hat den Brief."

- B a) "Entweder A oder C hat den Brief."
b) "Alle Aussagen von A sind wahr."
c) "D hat den Brief nicht."

- C a) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B."
b) "Ich habe den Brief."
c) "B macht keine falschen Aussagen."

- D a) "Ich habe den Brief nicht."
b) "Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht."
c) "B hat das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief? (10/9/2)

A.5.5

Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

- A a) "Der Ball ist weder rot noch gelb."

b) "Der Ball ist entweder rot oder grün."

c) "Der Ball ist schwarz."

B a) "Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß."

b) "A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz."

c) "Der Ball ist grün."

C a) "Der Ball ist entweder schwarz oder grün."

b) "Der Ball ist rot."

c) "Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb."

D a) "Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover."

b) "Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz."

c) "Der Ball ist schwarz und grün."

Man ermittle die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuche, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann. Wenn ja, gebe man diese Farbe an.

Fall 1: Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.

Fall 2: Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

(10/10/2)

A.5.6

Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau fünf Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage null Punkte. Nach Abschluss des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt.

Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte. Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt:

A, der sich besser als D platzierte, erreichte wie dieser kein Remis. C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.

Man zeige, dass diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln. (10/10/3)

A.5.7

Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining. Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände - Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller - so bei sich, dass jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: "Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht."

Monika: "Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht."

Peter: "Ich habe den Zirkel, oder Klaus hat das Lineal nicht."

Klaus: "Ich habe das Lineal nicht, oder Uwe hat den Bleistift."

Ilona: "Ich habe den Füller, oder ich habe den Bleistift."

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen. Welches sind, falls dies möglich ist, die Verstecke? (14/10/4)

A.5.8

Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot. Sie einigten sich, dass jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit diesem Boot allein durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

- a) Für den Fall, dass Dieter als erster fahren sollte, wollte Christian als dritter fahren.
- b) Wenn Axel oder Dieter als zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als erster fahren.
- c) Dann und nur dann, wenn Axel als dritter fahren sollte, wollte Bodo als zweiter fahren.
- d) Falls Dieter als dritter fahren sollte, dann wollte Axel als Zweiter fahren.
- e) Wenn Dieter als letzter fahren sollte, dann wollten Christian als dritter und Axel als erster fahren.

Man ermittle alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten so durchgeführt werden können, dass diese Wünsche erfüllt sind. (9/11.12/3)

A.5.9

In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil. Von genau zehn Jungen und genau acht Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau vier Jungen und genau drei Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben. (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.) (10/11.12/1)

A.5.10

Eine "utopische Aufgabe": Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdenbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig.

Zwar waren diese durch die Farben rot, gelb, schwarz und blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt.

Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, dass sie von vier verschiedenen Planeten A , B , C und D zur Erde kamen.

Folgende Informationen konnte man erhalten: Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der

von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt.

Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten. Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, dass der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, dass die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichten.

Immerhin konnte man ermitteln, dass für eine der vier Anzugfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam.

Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, dass der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war zwar auch die Anzugfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugfarbe zu welchem Planeten gehörte.

Erst durch die zusätzliche Information, dass der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzugs des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzugs des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut? (Es sei bekannt, dass sich alle Bedingungen der Aufgabe realisieren lassen.) (12/11.12/1)

A.5.11

Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: "Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"

Zuschauer: "Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."

R.: "Wie wurden die Punkte verteilt?"

Z.: "In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."

R.: "In wie vielen Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"

Z: "Ich weiß es nicht."

R: "Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"

Z: "Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei."

Man ermittle, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und gebe alle Antworten an, die mit diesen Aussagen vereinbar sind.

- a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?
- b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz?

(Es sei bekannt, dass in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wett-kampfteilnehmer ermittelt wurde.) (12/11.12/3)

A.5.12

Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Wie oft bilden insgesamt bei gleichförmiger Zei-gerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten zwölf Stunden einen rechten Winkel miteinander? (13/9/2)

A.5.13

Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf dem-selben Wege über Bund C nach D.

Die erste Karawane marschierte jeweils drei Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils zwei Tage hintereinander und legte dann zwei Ruhetage ein. Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs.

Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede. der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.

Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt so viele und für den Weg von A nach D dreimal so viele Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.

Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein. Man ermittle, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen. Wenn nicht, dann stelle man fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D ankam. (12/10/4)

A.5.14

In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:

- a) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
- b) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
- c) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.

Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes. (12/11.12/2)

A.5.15

Es sollen 21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von drei Zeilen und sieben Spalten angeordnet sind, so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, dass jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt. Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise

voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.

Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden lässt. (11/11.12/3)

A.5.16

a) Es seien $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ zwölf paarweise voneinander verschiedene Punkte, von denen die A_i auf der Seite BC , die B_i auf der Seite CA und die C_i auf der Seite AB des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ liegen. Keiner dieser zwölf Punkte falle mit einer der Ecken A, B, C zusammen.

Man ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren drei Ecken Punkte dieser Menge (einschließlich A, B, C) sind. Zwei Dreiecke gelten dabei genau dann als gleich, wenn jede Ecke des einen Dreiecks auch Ecke des anderen ist.

b) Man löse die entsprechende Aufgabe für k, m, n gegebene Punkte ($k, m, n > 1$) (8/11.12/1)

$$A_\kappa \quad (\kappa = 1, \dots, k), \quad B_\mu \quad (\mu = 1, \dots, m), \quad C_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

A.5.17

Es sei \mathfrak{M} die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000000000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus \mathfrak{M}), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus \mathfrak{M} , bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. (13/11.12/1)

A.5.18

Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in Abb. A.5.18 schraffiert), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen.



Abb. A.5.18

Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein. Man gebe (durch Angabe der Anzahlen der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte. (12/9/3)

A.5.19

Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, dass jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal, getanzt hatte.

Ferner bemerkte man, dass je zwei der Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten. Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln. (9/11.12/1)

A.5.20

Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, dass keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt.

Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z. B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als ein Tanz verstanden werden.)

- a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahlen der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.
- b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt. (14/11.12/1)

A.5.21

Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen. Dabei musste jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten.

Schüler A meint, dass es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimme.

Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, dass es sogar acht solcher Schüler geben müsse. Man überprüfe, ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist. (13/11.12/2)

A.5.22

Jemand schrieb auf die sechs Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl sich unter diesen sechs Zahlen die Zahlen 0 und 1 befanden. Danach er jede dieser sechs Zahlen durch das arithmetische Mittel der vier Zahlen, die zuvor auf den vier benachbarten Flächen gestanden hatten. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden musste.)

Mit den sechs so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzigmal durch. Zum Schluss stellte er fest, dass er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.

Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten? (12/11.12/4)

A.5.23

Dirk und Jens spielen ein Spiel mit den folgenden Regeln:

Es werden genau sieben Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen "Zug". Ein "Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen Zug zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen.

Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am Zug befindliche Spieler aber keinen Zug nach den Spielregeln ausführen kann. Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen? (12/10/4)

A.5.24

Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel:

Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens ein Streichholz, aber höchstens zehn Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann.

Man entscheide, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und gebe an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt. (10/10/1)

A.5.25

Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel: In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + a_1 y &= b_1 & (*) \\ a_2 y + b_2 z &= a_3 & (**) \\ b_3 x + a_4 z &= b_4 & (***) \end{aligned}$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1 , dann B für den Koeffizienten b_1 , dann wieder A für a_2 , dann B für b_2 usw., zum Schluss B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.

A hat genau dann gewonnen, wenn das System (*), (**), (***) genau eine ganzzahlige Lösung (x_0, y_0, z_0) hat.

a) Kann A so spielen, d. h., kann er die Koeffizienten a_1, \dots, a_4 jeweils nach der Wahl von b_1, \dots, b_3 durch B so auswählen, dass er gewinnt?

b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten a_1, \dots, a_4 solche Werte angeben, dass er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Fall) gewinnt? (10/11.12/4)

A.5.26

Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen, d. h. ohne dem anderen Einsicht zu gewähren, genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl

subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, dass dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, dass er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, dass keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig? (14/9/1)

A.5.27

Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so dass ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen nach der folgenden Regel:

Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine Kugel und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel nehmen muss, hat verloren.

Man gebe eine Beziehung zwischen k und n an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass a) der anziehende Spieler, b) der nachziehende Spieler den Gewinn erzwingen kann? (9/11.12/2)

6 Geometrie in der Ebene

A.6.1

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$. Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte von Inkreis und Umkreis dieses Dreiecks. (8/9/3)

A.6.2

Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreiecksseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungsstrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks.

Man beweise die Richtigkeit dieser Aussage. (8/10/2)

A.6.3

In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$, in dem die Winkel $\angle ABC$ und $\angle BAC$ die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels $\angle BAC$ die Gegenseite im Punkt D .

Man beweise, dass D die Seite BC im Verhältnis 1:2 teilt. (13/9/2)

A.6.4

Gegeben sei die Kathetenlänge $|BC| (= a)$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C , für das $|AC| : |BC| = 2 : 1$ gilt. Die Halbierende des rechten Winkels $\angle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D .

Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a .

Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. (11/10/3)

A.6.5

Es sei $\triangle ADC$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitelpunkt des rechten Winkels. Über AC sei nach außen ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit B als Scheitelpunkt des rechten Winkel so errichtet, dass der Fußpunkt E des Lotes von D auf die Gerade durch A, B zwischen A und B liegt.

Man beweise, dass dann $|DE| = |AB| + |BC|$ gilt. (14/10/2)

A.6.6

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C . Auf dem Umkreis k des Dreiecks sei P auf dem Kreisbogen AB , der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt. Die Spiegelbilder von P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.

a) Man beweise, dass C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.

b) Man beweise, dass g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt. (14/9/3)

A.6.7

Man beweise den folgenden Satz:

Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks die Größe 36° , so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem "Goldenen Schnitt" geteilten Schenkel des Dreiecks.

Anmerkung: Eine Strecke heißt nach dem "Goldenen Schnitt" in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist. (12/10/3)

A.6.8

Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ seien die Höhenlänge $|CD|$ mit h und die Basislänge $|AB|$ mit g bezeichnet. Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat $EFGH$ derart einbeschrieben, dass EF auf AB , G auf BC und H auf AC liegen.

Man ermittle alle Verhältnisse $h : g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ wie $9 : 4$ verhalten. (12/10/3)

A.6.9

Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ mit der Basis AB ist bei gegebener Schenkellänge a die Basislänge c derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis $1 : 4$ beträgt. (11/10/2)

A.6.10

Man beweise den folgenden Satz: Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander. (11/9/3)

A.6.11

Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC , in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der Seite AB feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat. Ist Peters Behauptung richtig? (14/9/1)

A.6.12

Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen, und D , E , F seien deren Fußpunkte, wobei D auf BC , E auf CA und F auf AB liegen mögen.

Man beweise, dass dann $|AH||HD| = |BH||HE| = |CH||HF|$ gilt. (14/9/2)

A.6.13

Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt.

Wie groß ist die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht? (8/9/2)

A.6.14

Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ werde durch eine zur Seite AB parallele Strecke in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Gesucht ist das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die parallele Strecke geteilt wird. (9/9/3)

A.6.15

Man beweise den folgenden Satz: Gelten für die Maßzahlen a, b, c der gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen

$$1 < a < \sqrt{2}, \quad 1 < b < \sqrt{2}, \quad 1 < c < \sqrt{2}$$

so ist das Dreieck spitzwinklig. (12/11.12/1)

A.6.16

In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $|AB| > |BC| > |AC|$ sei P ein im Innern des Dreiecks gelegener Punkt.

Man beweise, dass dann stets $|PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC|$ gilt. (11/11.12/1)

A.6.17

Man untersuche, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. (11/9/1)

A.6.18

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b . Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abb. A.6.18).

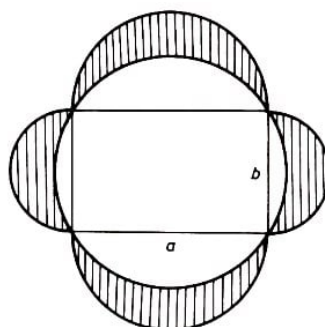


Abb. A.6.18

Man berechne die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen. (8/9/1)

A.6.19

Das Rechteck $ABCD$ habe die Seitenlängen $a (= |AB|)$ und $b (= |BC|)$, $a > b > 0$. Die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ schneide CD in S_1 . Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB .

Man ermittle das Verhältnis $a : b$ für alle diejenigen Rechtecke $ABCD$, bei denen die Halbierende des Winkels $\angle AS_2C$ die Seite CD in S_1 schneidet. (11/9/3)

A.6.20

Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a , vom Punkt B den Abstand b und von C den Abstand c .

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht. (8/9/3)

A.6.21

Es ist zu beweisen: Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD , so teilen die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken mit der Diagonalen BD diese in drei gleich lange Teilstrecken. (9/9/2)

A.6.22

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM . Man beweise, dass dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist. (13/10/1)

A.6.23

Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen das Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$.

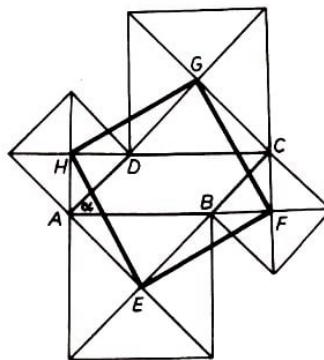


Abb. A.6.23

Man beweise, dass $EFGH$ ein Quadrat ist. (10/10/1)

A.6.24

Man beweise den folgenden Satz: Der Durchschnitt aus der Menge aller Drachenvierecke und der Menge aller Trapeze ist die Menge aller Rhomben. (11/10/1)

A.6.25

- Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat.
- Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $|AB| = |AD| = x$, $|CB| = |CD| = y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat.
- Man beweise: Sind M bzw. U die Mittelpunkte und ρ bzw. r die Radien des In-

bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt

$$|MU|^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}$$

(12/10/4)

A.6.26

Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $|AB| = |AD| > |BC| = |CD|$.

Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $|AB| : |BC| = |BC| : |FB|$ gilt. Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $|EC| = |BC| (= |CD|)$ und $|FE| = |FB|$ gilt.

Man beweise, dass E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt. (11/10/4)

A.6.27

Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $|AD| = |BC|$, $|AB| > |CD|$) besitze folgende Eigenschaften: Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.

Man untersuche, ob es solche Trapeze gibt, und berechne die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes. (13/9/2)

A.6.28

Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a (= |AB|)$, $c (= |CD|)$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand A der diese Parallelseiten enthaltenden Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S .

Man berechne aus den gegebenen Längen a , c , h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS , BCS , CDS bzw. DAS . (14/9/3)

A.6.29

Ein Trapez $ABCD$, dessen Grundseiten die Längen a und b ($a > b$) haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, habe einen Inkreis. Man berechne aus den Größen a , b und α den Durchmesser d dieses Inkreises. (8/11.12/2)

A.6.30

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD . Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC , so dass sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden. Die Gerade g halbiere den Winkel $\angle AEB$ und die Gerade h den Winkel $\angle AFB$.

Man beweise, dass dann $g \parallel h$ ist. (14/11.12/2)

A.6.31

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlängen derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k , auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{BC} + \widehat{DA}$.

Man beweise, dass dann $AC \perp BD$ gilt. (12/9/3)

A.6.32

Man beweise folgende Behauptung: Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck. (8/10/3)

A.6.33

Man beweise folgenden Satz: Ist $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit dem Inkreismittelpunkt M und $|AB| = |AD|$, dann gilt

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AM||BM|}{|CM||DM|}$$

(14/10/3)

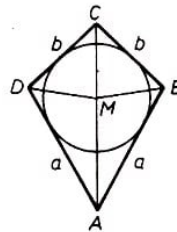


Abb. A.6.33

A.6.34

Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es sei $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, $|AC| = e$, $|BD| = f$ und δ die Größe des Winkels $\angle ASB$. Man beweise, dass dann $ac - bd = ef \cos \delta$ gilt. (10/11.12/2)

A.6.35

Man beweise folgenden Satz: Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen a, b, c, d ($|AB| = a$, $|CD| = c$) und dem Inkreismittelpunkt M , so gilt

$$\frac{a}{c} = \frac{|AM||BM|}{|CM||DM|}$$

(14/10/4)

A.6.36

Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ habe den Umfang u , der Radius seines Inkreises sei r . Man berechne den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks. (12/9/2)

A.6.37

In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ sei E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD . Der Schnittpunkt von AF und DE sei mit G , der von BF und CE mit H bezeichnet.

Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist. (13/11.12/2)

A.6.38

Man beweise, dass für alle konvexen Vierecke $ABCD$

$$\frac{1}{2}u < e + f < u$$

gilt. Dabei sei u der Umfang des Vierecks, und e und f seien die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD . (13/10/3)

A.6.39

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|CD| = 2 \text{ cm}$ habe einen Inkreis mit dem Radius ρ .

Man berechne diesen Inkreisradius ρ . (13/10/2)

A.6.40

Es sei $V = ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht übergeschlagenes ebenes Viereck. Ferner seien A' , B' , C' , D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt: Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A' , B' , C' , D' außerhalb von V . (13/11.12/3)

A.6.41

In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF . Gesucht ist das Verhältnis $I_S : I_D$, wenn I_S der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist. (9/10/1)

A.6.42

Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb g sei so gelegen, dass PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte

$$|PC| = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF|$$

Man beweise, dass dann $|\angle APF| = 135^\circ$ gilt. (13/9/3)

A.6.43

Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leq n \leq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, dass auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt. Man beweise, dass dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen. (11/11.12/4)

A.6.44

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB , BC , CD , DA mit E , F , G , H bezeichnet. In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretende Schnittpunkte seien so mit K , L , M , N , O , P , Q , R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nichtkonvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Abb. A.6.44).

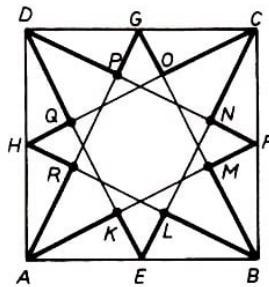


Abb. A.6.44

Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Sechzehnecks? (10/9/3)

A.6.45

In einem konvexen n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ soll der Innenwinkel bei A_1 die Größe 120° haben, und die Innenwinkel an den Ecken A_2, A_3, \dots, A_n sollen in dieser Reihenfolge jeweils um 5° größer sein als der vorhergehende Winkel, also $125^\circ, 130^\circ, \dots$ betragen.

Man zeige, dass für $n \neq 9$ ein solches n -Eck nicht existieren kann. (14/10/1)

A.6.46

In einer Ebene sei $P_1P_2\dots P_n$ ein beliebiges konvexes n -Eck E .

a) Man beweise folgende Aussage: Sind n Punkte Q_1, \dots, Q_n so im Innern oder auf dem Rand von E gelegen, dass $Q_1Q_2\dots Q_n$ ein zu E kongruentes n -Eck ist, so ist jeder Punkt Q_k eine Ecke von E .

b) Gibt es nichtkonvexe n -Ecke E , für die die in a) genannte Aussage falsch ist?

c) Ist für jedes nichtkonvexe n -Eck E die in a) genannte Aussage falsch? (13/11.12/4)

A.6.47

Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h .

a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g , dann an h , lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d. h., sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent); deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.

b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt. (11/11.12/3)

A.6.48

Man untersuche, ob es regelmäßige n -Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n -Ecks ist. Wenn

ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 4$) an, für die das gilt. (12/11.12/3)

A.6.49

In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$, darin ein Halbkreis k , mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1 und ein Kreis k_2 , mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2 so gezeichnet, dass sie den folgenden Bedingungen genügen:

M_1 liegt auf der Strecke AB ,

k_1 berührt jede der Strecken AC und BC ,

k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC .

Man zeige, dass dann $r_1 > r_2$ gilt, und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$. (13/10/4)

A.6.50

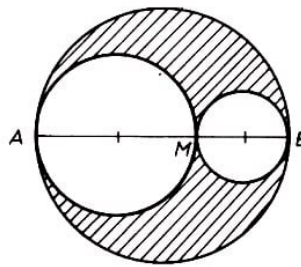


Abb. A.6.50

Gegeben sei ein Kreis k mit einem Durchmesser AB der Länge d . In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, dass sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so dass also $|AM| + |MB| = |AB|$ gilt.

Dabei sei $|AM| > |MB|$. Der Flächeninhalt der in Abb. A.6.50 schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2 .

Man ermittle diejenige Länge von AM , für die der Flächeninhalt dieser schraffierten Fläche am größten ist. (13/10/3)

A.6.51

Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis $2 : 5$ teilt. Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von 30° .

Man ermittle den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist. (12/9/1)

A.6.52

Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B eines Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von $\triangle ABC$ liegen. Es ist zu beweisen, dass der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$ dann entweder auf k' oder auf k'' liegt. (9/10/4)

A.6.53

Es sei g die Gerade durch die voneinander verschiedenen gegebenen Punkte P_1, P_2 sowie ε eine Ebene durch g . Von einem Punkt Q auf g , der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle diejenigen in ε gelegenen Kreise, die P_1P_2 als Sehne haben, die Tangenten gelegt. Man beweise:

- Die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen auf ein und demselben Kreis k_Q , um Q .
- Sind Q_1 und Q_2 zwei voneinander verschiedene Punkte auf g , von denen keiner auf P_1P_2 liegt, so sind k_{Q_1} und k_{Q_2} punktfremd. (8/11.12/3)

A.6.54

Der Flächeninhalt F der in Abb. A.6.54 dargestellten Figur soll berechnet werden. Jeder der Abstände $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ sei a . Die Verbindungslinien seien Kreisbögen mit dem Radius a , wobei der Mittelpunkt jeweils der gegenüberliegende Punkt ist. (8/10/10)

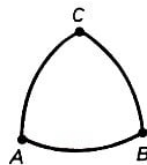


Abb. A.6.54

A.6.55

In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r ; ferner sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$ gegeben. Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien R_1, \dots, R_{n-1} , so dass $|PR_1| = |R_1R_2| = \dots = |R_{n-2}R_{n-1}| = |R_{n-1}Q|$ gilt.

Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} , zerlegt wird, sei mit H bezeichnet, die andere mit H' . Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i , ferner c'_i der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ sowie schließlich b_i die aus c_i und c'_i zusammengesetzte Kurve ($i = 1, \dots, n-1$).

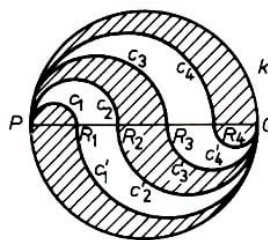


Abb. A.6.55

Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven b_1, \dots, b_{n-1} bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis (siehe Abb. A.6.55) zerlegt wird. (8/10/4)

A.6.56

Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).

- Man führe folgende Konstruktionen aus:

Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 , sei A genannt, der andere E . Von A aus werde die Strecke AB mit $|AB| = n$ so auf g abgetragen, dass B zwischen A und Y liegt, (was wegen $n < m$ möglich ist).

Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $|BC| = m$ so abgetragen, dass A zwischen B und C liegt. Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius $|BC|$ geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei mit D bezeichnet.

b) Man ermittle die Länge x der Strecke AD . (9/10/2)

A.6.57

Zwei Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand auf derselben Seite einer ebenflächigen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$ s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand des Punktes A von der Wand, wobei angenommen sei, dass der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt. (13/9/1)

A.6.58

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört. (10/11.12/4)

A.6.59

Es seien n_1, n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge \mathfrak{M}_1 aus $2n_1$ paarweise voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge \mathfrak{M}_2 aus $2n_2$ paarweise voneinander und von jedem der Punkte aus \mathfrak{M}_1 verschiedenen Punkten so gelegen, dass es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.

Man beweise, dass dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert: Zerlegt g die Ebene in die Halbebenen H und K , wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde, so liegen sowohl in H als auch in K jeweils n_1 Punkte aus \mathfrak{M}_1 und n_2 Punkte aus \mathfrak{M}_2 . (13/11.12/4)

A.6.60

Gegeben sei in der Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M .

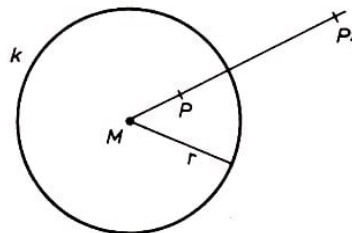


Abb. A.6.60

Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punktes P ($P \neq M$) bezüglich k , wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und

$|MP||MP_1| = r^2$ ist.

Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε , der k orthogonal schneidet, d. h., die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.

Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte bezüglich k der auf k_1 gelegenen Punkte P ? (9/11.12/3)

A.6.61

In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Unter einer Spiegelung am Kreis k versteht man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ε ein Punkt P' aus ε zugeordnet wird:

P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl. Es ist $|MP||MP'| = r^2$.

a) Man konstruiere zu einem beliebigen im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P' !

b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, dass M außerhalb von k_1 liegt. Man konstruiere k'_1 , d. h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1 . (8/11.12/4)

A.6.62

a) Es soll bewiesen werden, dass man zu gegebenem reellem x_0 die Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann:

Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten $(1, 1)$ hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x -Achse liegen. Auf q zeichnet man einen Punkt X so, dass die gerichtete Strecke \overrightarrow{EX} die Länge x_0 hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_0 .

Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y -Achse in einem Punkt Y . Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ als Ordinate.

b) Man beweise mit diesem grafischen Verfahren, dass die durch $f(x) = x^2 + x + 1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat. (13/11.12/4)

A.6.63

In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x, y) sei p der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$. Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x .

Man beweise, dass p die Menge aller derjenigen Punkte der x, y -Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0, 1)$. (12/10/4)

A.6.64

In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch die Gleichung $y = x^2$ gegeben. Man gebe eine Gleichung derjenigen Geraden an, die nicht parallel zur y -Achse verläuft und mit der Parabel genau einen Punkt P mit der Abszisse

3 gemeinsam hat. (12/10/1)

A.6.65

In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sind zwei Parabeln gezeichnet. Die eine ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Die zweite liegt ebenfalls symmetrisch zur y -Achse; ihr Scheitelpunkt ist $S(0, 6)$.

Sie hat ferner folgende Eigenschaft: Fällt man von den Schnittpunkten A und B beider Parabeln die Lote auf die x -Achse und bezeichnet die Fußpunkte mit A_1 bzw. B_1 , so ist das Viereck A_1B_1BA ein Quadrat. Wie lauten die Koordinaten der Punkte, in denen die zweite Parabel die x -Achse schneidet? (12/10/2)

A.6.66

Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Es ist zu beweisen, dass keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt enthält, dessen Koordinaten x, y beide rationale Zahlen sind. (11/11.12/2)

A.6.67

In der Ebene sei der "Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert: Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2) haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr "Abstand"

$$d(P_1, P_2) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A(0, 2)$ und $B(1, 4)$ gleichweit entfernt sind. (14/11.12/4)

A.6.68

In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-\frac{1}{2}, 0)$ und $B(\frac{1}{2}, 0)$ gegeben.

a) Man beweise, dass es vier Punkte P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gibt, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

I. Die Längen aller Strecken AP_i und BP_i sind ganzzahlig.

II. Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.

b) Man beweise, dass es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften I und II gibt. (14/10/1)

A.6.69

In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem soll die Menge aller Zahlenpaare (x, y) veranschaulicht werden, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$||x| + |y| - 3| - 3| = 1$$

. (13/10/4)

A.6.70

Es sei \mathfrak{M}_1 die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$y \geq 0; \quad y - 2x \leq 1; \quad y + 2x \leq 1 \quad (x, y \text{ reell}) \quad (*)$$

Ist ferner n eine positive Zahl, so sei \mathfrak{B}_n die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n}, \quad -\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \quad (**, ***)$$

- Man stelle $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ graphisch dar.
- Es ist zu beweisen, dass es einen Punkt $P \in \mathfrak{M}_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen \mathfrak{B}_n enthalten ist.
- Es sei \mathfrak{M}_2 die Punktmenge, für die (*) und

$$y \leq 1 - \frac{1}{1000} \quad (****)$$

gilt. Es ist zu beweisen, dass es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, dass jedes Element von \mathfrak{M}_2 auch Element der Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \mathfrak{B}_3 \cup \mathfrak{B}_4$ ist. Welche Zahl ist die kleinste Zahl n_1 , die diese Bedingung erfüllt? (10/11.12/3)

A.6.71

Die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit P_1, P_2, \dots, P_n bezeichnet.

- Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k ($k = 1, 2, \dots, n$) können parallel so verschoben werden, dass sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n -Ecks bilden.
- Es ist zu beweisen (z. B. mit Hilfe des Satzes in a)), dass folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ gültig sind:

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2\pi n}{n} = 0 \quad (*)$$

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2\pi n}{n} = 0 \quad (**)$$

(9/11.12/4)

A.6.72

Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren x und y gegeben. Dann wird durch

$$c_n = |x - ny| \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (*)$$

eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass die Folge (*)

- streng monoton steigend,
- streng monoton fallend ist.
- Für den Fall, dass die Folge (*) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass die Folge (*) die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n > n_0$ besitzt. (13/11.12/4)

7 Geometrie im Raum

A.7.1

Es sei $ABCD$ ein Rechteck und S ein Punkt auf der Senkrechten zu der Rechtecksebene in A . Man ermittle $|\angle CDS|$. (11/9/1)

A.7.2

Gegeben seien eine Gerade g und eine Strecke AB , die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ möglichst klein ist. (9/11.12/4)

A.7.3

Es seien zwei nicht in ein und derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P , zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, dass P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben gegebenen positiven Verhältnis innen teilt. (10/11.12/3)

A.7.4

Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(3, 4, 0)$ bzw. $(10, 8, 4)$. Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzzahligen Koordinaten gibt, so dass das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben. (12/11.12/4)

A.7.5

Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes gibt, so dass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist. (10/10/3)

A.7.6

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und der Kantenlänge a (siehe Abb. A.7.6).

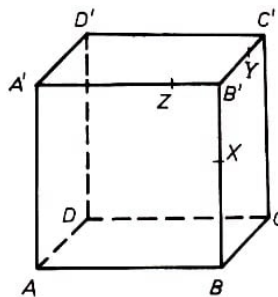


Abb. A.7.6

Auf BB' liege ein Punkt X , auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z , wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen. Für jede solche Wahl von X, Y, Z werde dann der geschlossene Streckenzug $XYZX$ betrachtet. Die

Länge dieses Streckenzuges wird durch die Summe der Längen $|XY|$, $|YZ|$ und $|ZX|$ definiert.

- Gibt es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge?
- Gibt es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge?
- Falls es bei a) bzw. b) einen solchen Streckenzug gibt: Wie groß ist seine Länge?
(14/9/1)

A.7.7

Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H ; D, C, F, E ; A, D, G, F ; B, C, H, E ; A, E, G, C und B, H, F, D gehen.

Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an. (12/9/13)

A.7.8

Ein Würfelkörper $ABCDEFGH$ (siehe Abb. A.7.10) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H ; B, G, E ; C, H, F ; D, E, G ; E, D, B ; F, A, C ; G, B, D und H, C, A in Teilkörper zerlegt.

- Man ermittle die Anzahl dieser Teilkörper.
- Man gebe das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an. (12/10/4)

A.7.9

Es ist zu beweisen, dass die Ebene durch drei Ecken eines Würfels, welche Endpunkte dreier von ein und derselben Ecke F des Würfels ausgehender Kanten sind, auf der Raumdiagonalen durch F senkrecht steht und diese im Verhältnis $1 : 2$ teilt. (9/11.12/2)

A.7.10

A, B, C, D, E, F, G, H seien die Ecken eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH , wobei die Bezeichnungen wie in Abb. A.7.10 gewählt seien.

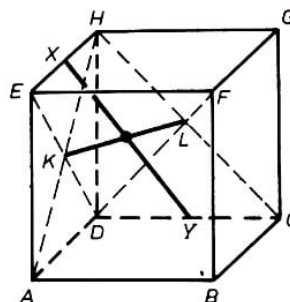


Abb. A.7.10

K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED , und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG . Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $|DY| = |EX|$ ist.

Man beweise, dass der Mittelpunkt von XY auf KL liegt. (9/10/4)

A.7.11

Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und den Kantenlängen $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$ seien mit Hilfe von vier ebenen Schnitten, und zwar durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. B', C, D' bzw. A', D, C' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten. Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R , das des ursprünglichen Quaders V_Q .

a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild ($\alpha = 60^\circ, q = \frac{1}{3}$) dar. Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5$ cm, $b = 4,5$ cm, $c = 2$ cm zu zeichnen. Ein Nachweis, dass die zu nennenden Punkte auch wirklich sämtliche Eckpunkte des Restkörpers sind, wird nicht gefordert.

b) Man berechne $V_R : V_Q$. (10/10/4)

A.7.12

Ein Parallelepipiped, d. h. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma, dessen Ecken so wie in Abb. A.7.12 bezeichnet sind, mit einem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche sei gegeben.

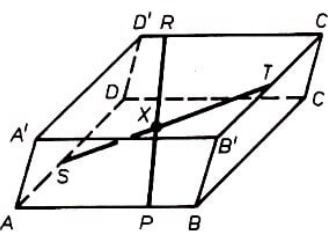


Abb. A.7.12

Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken PR und ST auftreten können, wobei P ein Punkt auf AB , R ein Punkt auf $C'D'$, S ein Punkt auf AD und T ein Punkt auf $B'C'$ ist. (12/10/3)

A.7.13

Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 3$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|BD| = 12$ cm, $|CD| = 13$ cm, und $\angle ABD$ sei ein rechter Winkel.

Man berechne das Volumen V dieser Pyramide. (10/9/3)

A.7.14

In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den $|AB| : |SMI| = 3 : \sqrt{6}$ gilt.

Es ist zu beweisen, dass das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d. h., dass alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind. (10/10/2)

A.7.15

Man berechne die Größe $|\angle ASB|$, wobei AB Kante eines regelmäßigen Tetraeders mit

dem Höhenschnittpunkt S ist. Außerdem soll mit Hilfe eines Tafelwerkes ein Näherungswert für die (im II. Quadranten gelegene) Größe $|\angle ASB|$ gefunden werden, der sich vom wahren Wert um höchstens $0,1^\circ$ unterscheidet. (8/11.12/1)

A.7.16

Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt, A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$.

Man beweise, dass dann

$$\frac{|SA'|}{|AA'|} + \frac{|SB'|}{|BB'|} + \frac{|SC'|}{|CC'|} + \frac{|SD'|}{|DD'|} = 1$$

gilt. (11/10/4)

A.7.17

Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a . Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:

- a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
- b) $|BD'| = |CD'| = a$,
- c) $|AD'| \neq a$.

Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD' . (13/9/3)

A.7.18

Ein regulärer Tetraederkörper werde von den sechs Ebenen durch je eine seiner Kanten und den Mittelpunkt der Gegenkante geschnitten.

- a) Man ermittle die Anzahl der dabei entstehenden Teilkörper, wenn alle diese Schnitte ausgeführt sind.
- b) Man berechne die Volumina der einzelnen Teilkörper in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Tetraeders. (13/10/4)

A.7.19

P_1, P_2, P_3, P_4 seien vier nicht in ein und derselben Ebene gelegene Punkte. Man ermittle die Anzahl aller Ebenen ε mit der Eigenschaft: Die Abstände der vier Punkte P_k ($k = 1, 2, 3, 4$) von ε sind paarweise gleich. (12/11.12/3)

A.7.20

Die Abstände eines beliebigen Punktes im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ von den Seitenflächen seien mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet, und h sei der Abstand zwischen A_4 und der Ebene durch A_1, A_2 und A_3 .

- a) Man zeige, dass es im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ genau einen Punkt S gibt, für den $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{h}{4}$ ist.

b) Man zeige, dass für alle Punkte $P \neq S$ im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1 x_2 x_3 x_4$ einen kleineren Wert hat als für S . (14/11.12/4)

A.7.21

Gegeben seien positive Zahlen h, r, x mit $x < 2r$. Es bezeichne ε eine Ebene und k einen in ε gelegenen Kreis mit einem Durchmesser AB der Länge $2r$. Auf der Senkrechten zu ε durch A sei C ein Punkt mit $|AC| = h$. Auf k sei D ein Punkt mit $|BD| = x$.

a) Man berechne das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten C, D, A, B .

b) Man beweise, dass $BD \perp CD$ gilt. (14/10/2)

A.7.22

Man zeige: Ist Q die Spitze einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche die Ecken P_i ($i = 1, 2, 3$) hat, dann gilt

$$|\angle P_1 Q P_2| < |\angle P_1 Q P_3| + |\angle P_3 Q P_2|$$

(11/11.12/4)

A.7.23

Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche: eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.

In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche 60° groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a .

Man berechne das Volumen V dieser Pyramide. (10/9/2)

A.7.24

Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D . Die Spitze der Pyramide sei S . Alle acht Kanten haben die gleiche Länge a . Mit E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC bezeichnet. Die Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.

Es ist das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper zu berechnen. (13/10/3)

A.7.25

In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abb. A.7.25) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG . Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M . (14/9/3)

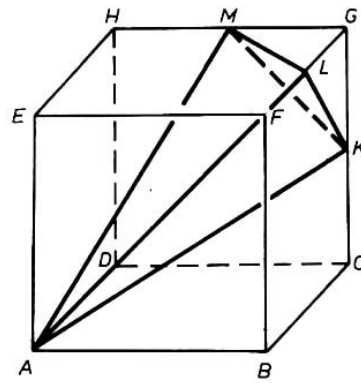


Abb. A.7.25

A.7.26

Auf einer gegebenen geraden Pyramide Π mit quadratischer Grundfläche, deren Ecken mit A, B, C und D bezeichnet seien, und der Spitze S werden alle geschlossenen Polygonzüge $PQRTTP$ betrachtet, die einen gegebenen inneren Punkt P der Kante AS , je einen (beliebigen) inneren Punkt Q der Kante BS sowie R bzw. T der Kanten CS bzw. DS enthalten.

Bei fester Grundfläche hängt Π nur von der mit φ bezeichneten Winkelgröße $\varphi = |\angle ASB|$ ab.

Es soll nun aus dem Intervall $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ die Menge \mathfrak{M} aller derjenigen φ ermittelt werden, für die es unter den Polygonzügen $PQRTTP$ einen kürzesten gibt.

Anmerkung: Wie bereits durch die Aufgabenstellung angedeutet wird, hängt M nicht von der gegebenen speziellen Lage von P auf AS ab. (14/10/4)

A.7.27

Man zeige, dass es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt. Es genügt die Angabe je eines Beispiels. (12/9/1)

A.7.28

Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|AB| = a, |BC| = b$. Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $|AS| = c$ gelte.

Man beweise, dass es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel. (10/9/1)

A.7.29

Man zeige, dass es genau dann vier sich paarweise von außen berührende Kugeln K_i mit den Mittelpunkten M_i ($i = 1, \dots, 4$) gibt, wenn

$$|P_1P_2| + |P_3P_4| = |P_1P_3| + |P_2P_4| = |P_1P_4| + |P_2P_3| \quad (*)$$

gilt und die P_i paarweise voneinander verschieden sind. (13/11.12/3)

A.7.30

Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, dass die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren. Man ermittle die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks. (9/11.12/3)

A.7.31

Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und die Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

- a) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.
- b) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4.
- c) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3 .
- d) Alle Kanten der Pyramide sind paarweise gleich lang.
- e) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.
- f) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, dass von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.

Wie lang sind die Kanten der Pyramide? (8/11.12/3)

A.7.32

In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien vier Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, dass jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Wie groß ist der Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a ?

Anmerkung: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht. (10/11.12/1)

A.7.33

Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) einander gleich sein.

Es sind der Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders zu ermitteln. (11/9/2)

A.7.34

Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R = 6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, dass die Achse des Kegels mit der des Bohrlochs zusammenfällt. Wie groß muss der Radius r des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers? (11/10/3)

A.7.35

Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden,

dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.

Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers. (13/11.12/1)

A.7.36

Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a , dessen Ecken so bezeichnet sind wie in Abb. A.7.36, befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:

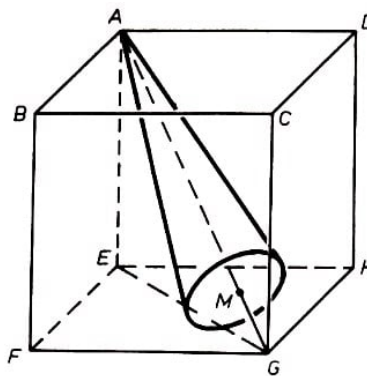


Abb. A.7.36

- a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.
- b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.
- c) Seine Grundfläche hat mit einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.

Man beweise: Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Mantellinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot \alpha + \sqrt{2}}$$

(14/11.12/3)

A.7.37

Es sei $A_0A_1\dots A_n$ ($n \geq 2$) ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte A_0, \dots, A_{n-1} mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen. (Ein ebener Polygonzug $A_0A_1\dots A_n$ heißt konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.)

Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi \frac{s^2}{2}$ ist, dass also $F \leq \pi \frac{s^2}{2}$ gilt. (10/11.12/4)

A.7.38

Man zeichne in schräger Parallelprojektion vier ebenflächig begrenzte Körper mit jeweils genau sechs Ecken, von denen der erste genau fünf, der zweite genau sechs, der dritte genau sieben und der vierte genau acht Flächen besitzt. Man ermittle jeweils für diese Körper die Anzahl aller Kanten. (12/10/1)

A.7.39

Abb. A.7.39 zeigt einen konvexen, durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriss. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a .

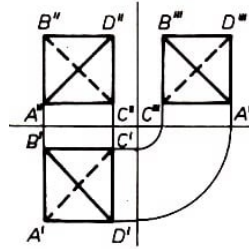


Abb. A.7.39

- Man zeichne einen Schrägriss eines derartigen Körpers ($\alpha = 60^\circ$, $q = 1 : 3$).
- Man berechne sein Volumen. (10/10/1)

A.7.40

In Abb. A.7.40 ist ein durch ebene Flächen begrenzter Körper in Grund-, Auf- und Kreuzriss dargestellt. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in allen drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a .

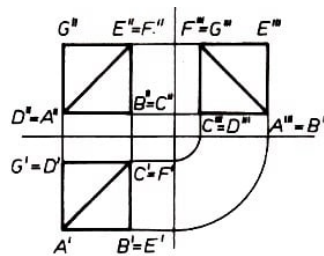


Abb. A.7.40

- Man zeichne den Körper in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60^\circ$, $q = 1 : 2$).
- Man berechne das Volumen V des in a) dargestellten Körpers. (12/10/2)

8 Geometrische Konstruktionen

A.8.1

Gegeben seien zwei Strecken mit den Längen a und b . Man konstruiere eine Strecke der Länge $\frac{ab}{a+b}$. (12/10/1)

A.8.2

Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b . Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.

a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.

b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an. (11/11.12/2)

A.8.3

Ein Dreieck $\triangle ABC$ soll aus $a - b = 3$ cm, $\alpha = 70^\circ$ und $\beta = 50^\circ$ konstruiert werden. Dabei sei a die Länge der Seite BC , b die der Seite AC , α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.

Man beschreibe, begründe und diskutiere die Konstruktion. (11/10/3)

A.8.4

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C aus $s_a = 6$ cm, $s_b = 8$ cm. Dabei sei s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die der Seitenhalbierenden von AC .

Man beschreibe und begründe die Konstruktion und untersuche, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist. (13/10/4)

A.8.5

Man konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a, b + c$ und α . Dabei sind a, b, c die Längen der Dreieckseiten und α die Größe des Winkels $\angle BAC$. (8/9/3)

A.8.6

Es ist ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a + b + c, \alpha, \gamma$ zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\angle CAB, \angle ACB$.

Die Konstruktion ist zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren. (10/9/3)

A.8.7

Man konstruiere ein Trapez aus a, b, c und d . Dabei sei a die Länge der Seite AB , b die Länge der Seite BC , c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA . Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten. (8/9/1)

A.8.8

Ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ soll aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70^\circ$ konstruiert werden. Dabei sei a die Länge der Seite AB , b die der Seite BC , c die der Seite CD und α die Größe des Winkels $\angle BAD$. (13/10/2)

A.8.9

Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben: Schneidet die Parallele zu XR durch Q die Verlängerung von OR über R hinaus in Y , so gilt $PY \parallel XQ$. Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren. Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt. (14/10/3)

A.8.10

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$. Man konstruiere die Parallele zu AB , die die Dreiecksfläche in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt, und beschreibe, begründe und diskutiere die Konstruktion. (10/10/3)

A.8.11

Die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden: Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, dass E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt. Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks $\triangle EFD$ sollen dann einander inhaltsgleich sein.

Man konstruiere die Punkte E , F , D , für die diese Forderung erfüllt ist, und beschreibe und begründe die Konstruktion. (10/10/4)

A.8.12

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ und auf AB ein Punkt D . Man konstruiere einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, dass DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. (9/10/3)

A.8.13

Es seien in der Ebene fünf Punkte F , G , H , I , K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.

Man begründe und beschreibe eine Konstruktion eines solchen Fünfecks $ABCDE$, dass F , G , H , I , K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB , BC , CD , DE , EA des Fünfecks sind.

Man untersuche ferner, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F , G , H , I , K eindeutig bestimmt ist.

Dabei wird nicht vorgeschrieben, dass das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, dass Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten auf ein und derselben Geraden liegen. (14/11.12/3)

A.8.14

In einer Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreise k_1 und k_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ so, dass B auf k_1 und C auf k_2 liegt.

a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.

b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solche Dreiecke gibt. (12/11.12/4)

A.8.15

In einer Ebene ε liegt ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ε der folgendermaßen definierte Punkt P' in ε zugeordnet wird:

P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl; (*)

$|MP| \cdot |MP'| = r^2$ (**)

Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_5$ der folgenden Gestalt:

P_1, P_2 seien auf ein und demselben von M ausgehenden Strahl gelegen, P_3, P_4 auf ein und demselben anderen von M ausgehenden Strahl. Es gelte

$$|MP_1| = |MP_4| < |MP_2| = |MP_3|$$

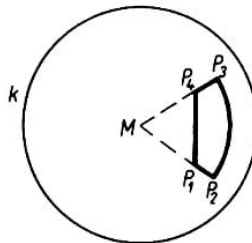


Abb. A.8.15

Der Winkel $\angle P_2MP_3$ sei kleiner als 180° .

Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2 , P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\angle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\widehat{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2 .

Man spiegle diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_5$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion). (10/11.12/3)

A.8.16

In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r über einer Sehne AB der Länge $|AB| = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere der beiden von A und B begrenzten Bögen eines Kreises vom Radius r) nach folgender Näherungsmethode ausgeführt werden:

In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge $|TP'| = z' = \frac{ab}{2r}$ abgetragen ($|AT| = a$, $|TB| = b$). Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $|TP| = z$.

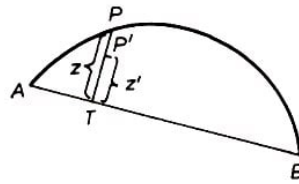


Abb. A.8.16

Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leq \frac{1}{5}r$. Es ist zu beweisen, dass dann der relative Fehler

$$\delta = \frac{|z - z'|}{z}$$

stets kleiner als 0,0051, d. h. 5,1 ‰ von z ist. (9/11.12/1)

9 Verschiedenes

Folgen - Differentialrechnung - Extremalaufgaben - Näherungsrechnung - Wahrscheinlichkeitsrechnung - Algebraische Strukturen

A.9.1

Es seien a_1 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0$, $q \neq 0$, $q \neq 1$. Ferner sei (a_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 q^i$ gilt.

a) Man beweise, dass die Folgen (b_i) mit $b_i = a_{i+1} - a_i$ und (c_i) mit $c_i = b_{i+1} - b_i$ ebenfalls geometrische Folgen sind.

b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0$, $q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen (a_i) und (c_i) die Eigenschaft haben, dass $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt. (13/11.12/2)

A.9.2

Es sei (x_n) , $n = 0, 1, \dots$, diejenige Zahlenfolge, für die $x_0 = 1$ und $x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, gilt. Man gebe die Glieder x_1 , x_2 und x_3 dieser Zahlenfolge und einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft

$$f(n) = x_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (*)$$

an. (14/11.12/2)

A.9.3

Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ durch die Darstellung

$$a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0 \quad (*)$$

wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind. Unter der ersten Differenzenfolge sei die Folge $D_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ und unter der zweiten Differenzenfolge $D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)}$ verstanden ($n = 1, 2, 3, \dots$).

a) Es sei $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind a_n , $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 zu berechnen.

b) Es ist allgemein zu beweisen, dass für (*) die Folge $D_n^{(2)}$ konstant ist. (9/11.12/2)

A.9.4

a) Man untersuche, ob die Zahlenfolge

$$a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

streng monoton fallend ist.

b) Man beweise, dass alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind. (8/11.12/3)

A.9.5

a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge (a_n) . Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n > 2$ das arithmetische Mittel der beiden

vorhergehenden Glieder. Man zeige, dass die so definierte Folge (a_n) eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge (a_n) . Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder. Man gebe in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass (a_n) eine geometrische Folge ist. (11/11.12/3)

A.9.6

Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

a) Man zeige, dass es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, dass die Zahlen

$$c_n = an + b - [an + b], \quad n = 1, 2, \dots$$

eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und dass dabei alle $c_n \neq 0$ sind.

b) Man beweise, dass für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt. (13/11.12/4)

A.9.7

Es sei n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ eine ganzrationale Funktion n -ten Grades mit reellen Koeffizienten, die keine reellen Nullstellen besitzt.

Man beweise, dass dann auch die ganzrationale Funktion F mit

$$F(x) = f(x) + hf'(x) + h^2f''(x) + \dots + h^n f^{(n)}(x)$$

keine reellen Nullstellen hat. (8/11.12/4)

A.9.8

a) Man beweise folgende Behauptung: Es gibt keine ganzrationale Funktion f , bei der für jedes x die beiden Ungleichungen gelten:

$$f(x) > f''(x) \quad (*)$$

$$f'(x) > f''(x) \quad (**)$$

b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung $(**)$ durch

$$f(x) > f'(x) \quad (***)$$

ersetzt? (13/11.12/4)

A.9.9

Es ist zu beweisen, dass für jedes ganzzahlige $n \geq 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

höchstens eine reelle Nullstelle haben kann. (9/11.12/4)

A.9.10

Es sei eine rationale Zahl c gegeben. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Paare (a, b) aus rationalen Zahlen a, b , für die $a + b = c$ gilt.

Man beweise, dass unter allen Produkten ab mit $(a, b) \in M$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a, b) mit $a = b$ gebildet wird. (14/11.12/3)

A.9.11

a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m , für die $kn^2(2m + 1) = 3808$ gilt.

b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt kmn am kleinsten ist. (12/9/3)

A.9.12

Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen erhaltenen Messwerte u, v, w sei $180^\circ + \delta$ mit $\delta \neq 0^\circ$. Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Messwerte so verändert werden, dass die Summe der dann entstehenden Werte $u + x, v + y, w + z$ gleich 180° ist.

Es ist zu beweisen, dass für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn

$$x = y = z = -\frac{\delta}{3}$$

gilt. (14/11.12/4)

A.9.13

Es ist zu beweisen, dass für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt. (9/11.12/4)

A.9.14

Man untersuche, ob unter allen Paaren (a, b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a, b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben. (12/11.12/4)

A.9.15

Man beweise: Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$ gilt

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

(10/11.12/1)

A.9.16

Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x) = \frac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln. (10/11.12/3)

A.9.17

Unter dem "Abstand" zweier Funktionen f und g , die im gleichen Intervall definiert sind, verstehe man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.

Es seien die im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben.

Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der "Abstand" von f und g möglichst klein ist. Gibt es ein solches a , so gebe man alle derartigen Werte a an. (11/11.12/4)

A.9.18

Zu Dekorationszwecken sollen gleichgroße Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
2. Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
3. Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
4. Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
5. Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
6. Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

Man ermittle die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen 1. bis 6. gleichzeitig zu erfüllen. (12/9/2)

A.9.19

- a) Man zeige, dass es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist: Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind.
- b) Man gebe diese größte Zahl m an.
- c) Man untersuche, ob es mit dieser Zahl m für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n -Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind. (12/10/4)

A.9.20

Abb. A.9.20 zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $2r$ und b , $|AB| = |CD| = 2r$ und $|BC| = |AD| = b$, $b > r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser CD entstanden ist.

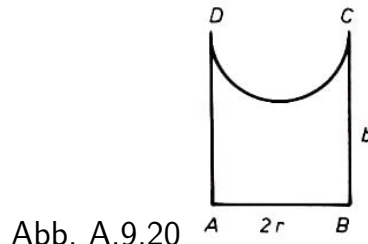


Abb. A.9.20

Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r < b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat. (10/10/4)

A.9.21

Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung anhand der Lösung der folgenden Aufgabe: Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, dass A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.

Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert. Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a : b$, wobei $|AB| = a$ und $|BC| = b$ bedeutet.

Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, daß er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden hat. Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte. (11/10/4)

A.9.22

Man ermittle die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann. (12/11.12/4)

A.9.23

a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren, die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedesmal $ABCD$ ein Rechteck mit $|AB| = |CD| = 2r$ und $|AD| = |BC| = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:

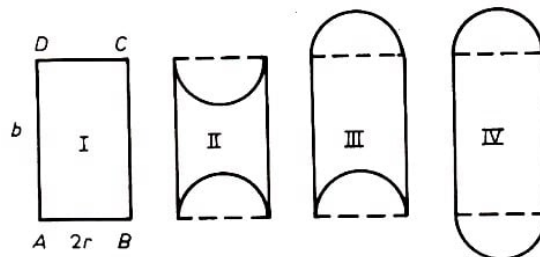


Abb. A.9.23

Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt F am kleinsten ist?

Wenn ja, so sind sämtliche derartige Streckenverhältnisse anzugeben. Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.

b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b = 0$ zugelassen, wenn in diesem Fall der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird. (11/11.12/1)

A.9.24

Man kann Quadratwurzeln dadurch näherungsweise berechnen, dass man $\sqrt{x^2 + y}$ durch $x + \frac{y}{2x}$ ersetzt.

a) Es ist zu zeigen, dass für den dabei entstehenden Fehler

$$\delta = x + \frac{y}{2x} - \sqrt{x^2 + y}$$

die Ungleichung (Eingabelung) $0 < \delta < \frac{y^2}{8x^3}$ besteht.

b) Für $\sqrt[3]{x^3 + y}$ soll eine analoge Näherung gefunden und der dabei begangene Fehler abgeschätzt werden. In den beiden Fällen a) und b) bedeuten x, y positive Zahlen.

c) Man berechne auf diese Weise je einen Näherungswert für $\sqrt{56}$ und $\sqrt[3]{80}$ und eine Eingabelung des dabei begangenen Fehlers. (8/11.12/1)

A.9.25

Man zeige, dass der Term x im Interval $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term

$$\frac{(14 + \cos x) \sin x}{9 + 6 \cos x}$$

darstellt, indem bewiesen wird, dass für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenz beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.

Anmerkung: Es gilt $\pi = 3,14159 + \delta$ mit $0 < \delta < 10^{-5}$ und $\sqrt{2} = 1,41421 + \delta$ mit $0 < \delta < 10^{-5}$. (12/11.12/4)

A.9.26

In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r , falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, dass in beliebigen Punkten P' von t (mit $|AP| = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der Seite von t , auf der der Kreisbogen liegt) Strecken $P'P$ so abgetragen werden, dass die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $|P'P| = y < r$.

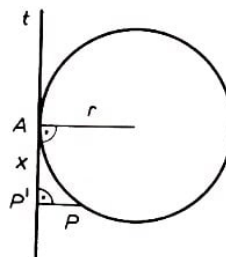


Abb. A.9.26

a) Man beweise, dass dann $y = \frac{x^2}{2r-y}$ gilt.

b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise:

Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung

$$y_1 = \frac{x^2}{2r}$$

Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung

$$y_2 = \frac{x^2}{2r - y_1 - 1}$$

ermittelt. Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

Man untersuche, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, dass für alle positiven reellen Zahlen $x \leq \frac{1}{n}r$ der relative Fehler

$$\delta = \frac{|y - y_1|}{y}$$

des Näherungswertes $y_1 = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, dass also $\delta < 0,001$ gilt. (10/11.12/4)

A.9.27

Es sind 50 weiße und 50 schwarze Kugeln so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.

Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise:

1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis "günstigen" Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.

2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ anzusetzen.

3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis "Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne" zu

$$p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$$

(11/11.12/3)

A.9.28

\mathfrak{M} sei die Menge aller Punkte $P(x, y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leq x \leq 4$ und $0 \leq y \leq 4$ gilt.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus \mathfrak{M} der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).

Hinweise: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind. (13/11.12/3)

A.9.29

Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke AB Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, dass sie die Strecke AB in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.

a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zwei aus den Punkten P_1, \dots, P_{2n-1} ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke AB derart zerlegen, dass sich aus den drei Teilstrecken AP_k, P_kP_m, P_mB ein Dreieck konstruieren lässt.

b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $\rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Hinweis: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert:

Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei ein "Fall" genannt. Ein "Fall" heiße ein "günstiger Fall", wenn P_k und P_m so gewählt sind, dass sich aus den Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB ein Dreieck bilden lässt. Ist dann z die Anzahl aller möglichen "Fälle" und z_1 die Anzahl aller "günstigen Fälle", so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert. (12/11.12/3)

A.9.30

Ein in einem industriellen Prozess eingebauter Messkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eins der beiden Signale S_1 oder S_2 , das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2 , von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Rechner R übermittelt wird.

Jede Übertragungseinheit A_i ($i = 1, 2, 3$) kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01.

Es sei nun bekannt, dass am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?

Hinweis: Wenn sich unter den Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p = \frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eintretensein) von E unter den Voraussetzungen V . Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden.

Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe $p_1 + p_2$ der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2 .

Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt pq der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, dass unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt. (14/11.12/3)

A.9.31

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben.

Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).

Man beweise: Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, dass bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Hinweis: Man nenne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) einen "möglichen Fall". Unter diesen heiße jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, ein "günstiger Fall".

Die Anzahl aller "möglichen Fälle" sei mit a_n bezeichnet, die Anzahl aller "günstigen Fälle" mit g_n . Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n durch $q_n = \frac{g_n}{a_n}$ definiert. (14/11.12/4)

A.9.32

Eine Menge \mathfrak{G} von Elementen u, v, w, \dots heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- In \mathfrak{G} ist eine Operation definiert, d. h., jedem Paar (u, v) von Elementen u und v aus \mathfrak{G} ist eindeutig ein Element w aus \mathfrak{G} zugeordnet, wofür man $u \circ v = w$ schreibt.
- Diese Operation ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus \mathfrak{G} gilt

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$$

c) Zu jedem Paar von Elementen u und v aus \mathfrak{G} existiert mindestens ein Element x aus \mathfrak{G} , so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus \mathfrak{G} , so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei \mathbb{R} die Menge aller reellen Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus \mathbb{R} ist eine Operation durch

$$a \circ b = a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1}$$

definiert. Man beweise, dass die Menge \mathbb{R} mit dieser Operation eine Gruppe ist. (13/11.12/3)

A.9.33

Hinweis: Wegen der Definition einer Gruppe vgl. A.9.32.

Es sei nun \mathfrak{K} die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b , für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in \mathfrak{K} eine Operation wie folgt definiert:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Man beweise, dass \mathfrak{K} eine Gruppe bezüglich der Operation ist. (11/11.12/3)

A.9.34

Hinweis: Wegen der Definition einer Gruppe vgl. A.9.32.

Es sei nun \mathfrak{P} die Menge aller Polynome ersten Grades $f(x) = a_0 + a_1x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_0 \neq a_1$ gilt.

Ferner sei in \mathfrak{P} eine algebraische Operation \circ wie folgt definiert: Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus \mathfrak{P} , so ist

$$f(x) \circ g(x) = g(f(x))$$

Es ist zu entscheiden, ob \mathfrak{P} eine Gruppe bezüglich der definierten Operation ist. (10/11.12/4)

A.9.35

Hinweis: Eine Menge \mathfrak{M} von Elementen u, v, w heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus \mathfrak{M} eindeutig ein Element w aus \mathfrak{M} zuordnet (man schreibt $u \circ v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d. h., wenn für alle Elemente u, v, w aus \mathfrak{M}

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$$

gilt.

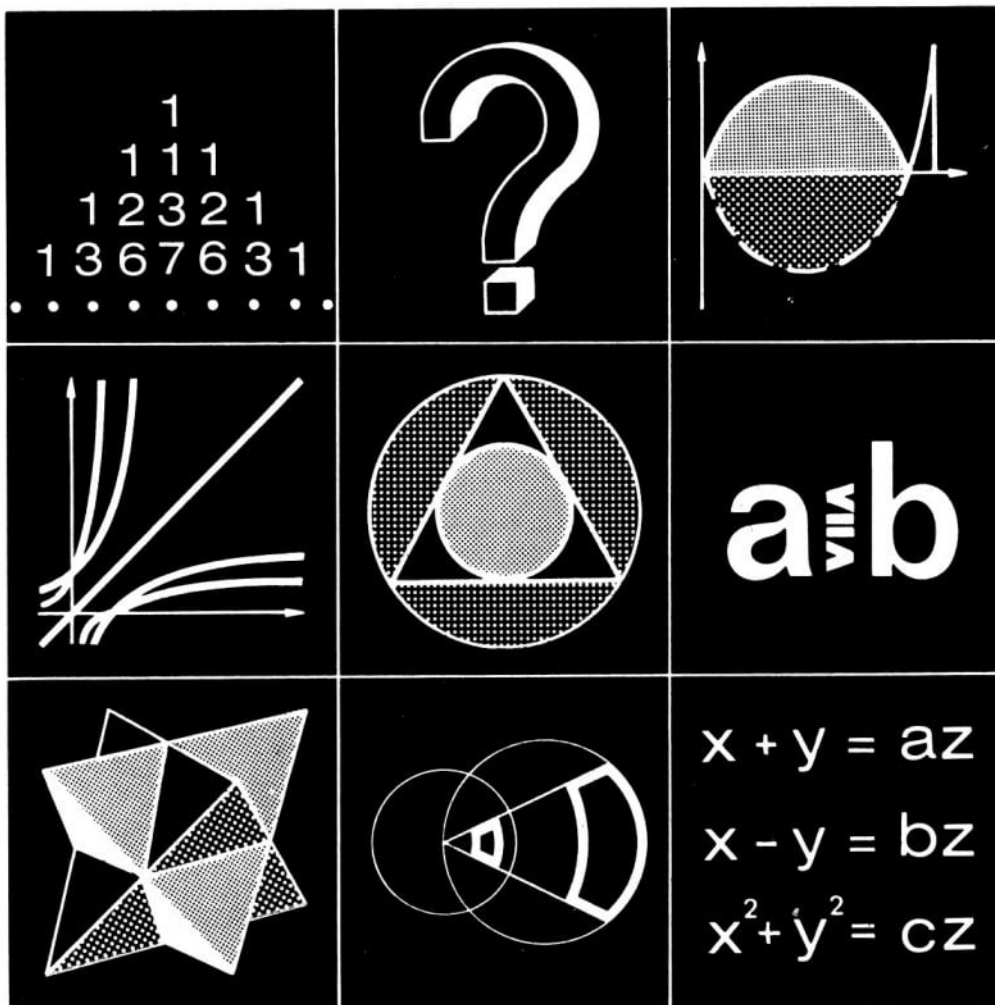
Es sei nun c eine positive reelle Zahl, und \mathfrak{A} sei die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus \mathfrak{A} werde definiert:

$$u \circ v = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

a) Man untersuche, ob \mathfrak{A} eine Halbgruppe ist.

b) Man untersuche, ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h., ob aus $u \circ v_1 = u \circ v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \circ u = v_2 \circ u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt. (8/11.12/4)

Lösungen



10 Lösungen - Arithmetik

Positionsdarstellung - Teilbarkeit - Primzahlen Folgen ganzer Zahlen

L.1.1

Es seien die Überträge aus der Einerspalte mit e , aus der Zehnerspalte mit z und aus der Hunderterspalte mit h bezeichnet. Dann gilt $e, z, h \in \{0, 1, 2\}$, da die Summe dreier einstelliger Zahlen nicht größer als 27 sein kann und auch mit einem eventuellen Übertrag aus der nächstniederen Stelle 29 nicht überschreitet.

Angenommen, es gäbe eine Lösung, dann müsste

$$3I = 10e + N \quad \text{und} \quad 3D + h = N$$

gelten. Durch Substitution von N erhält man $3I = 10e + h + 3D$, also $3(I - D) = 10e + h$. Daraus folgt wegen $10e + h \geq 0$ zunächst $I \geq D$, wegen $I \neq D$ also

$$I > 0 \quad \text{und daher} \quad 10e + h > 0 \quad (1)$$

Ferner folgt

$$I - D = \frac{10e + h}{3} \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung der für e und h geltenden Einschränkungen kommen nur folgende beiden Möglichkeiten in Frage:

$$e = 1, \quad h = 2, \quad I - D = 4 \quad (3a)$$

$$e = 2, \quad h = 1, \quad I - D = 1 \quad (3b)$$

Aus $3D = N - h$, $N < 10$ und $h \in \{1, 2\}$ folgt $3D < 9$, wegen $D > 0$, also

$$D \in \{1, 2\} \quad (4)$$

und damit wegen (3)

$$I \in \{5, 6, 8, 9\} \quad (5)$$

Aus $3I = 10e + N$ und $I \neq N$ folgt $I \neq 5$ und daher

$$I \in \{6, 8, 9\} \quad , \quad N \in \{8, 4, 7\} \quad (6, 7)$$

Ferner ist $3E + e = U + 10z$ und $3R + z = 10h + E$, d.h.

$$E = 3R + z - 10h$$

Durch Substitution von E erhält man $9R + 3z - 30h + e = U + 10z$, also

$$R = \frac{30h + 7z - e + U}{9} \quad (8)$$

Nach (6) kommen für I höchstens drei Zahlen in Frage. Diese drei Möglichkeiten müssen der Reihe nach untersucht werden.

Fall 1: Es sei $I = 6$. Dann ist $N = 8$, $e = 1$ und daher wegen (3a) $h = 2$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{59 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 4$, $R = 7$, $E = 1$;

$z = 1$, dann $U = 6$, $R = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;

$z = 2$, dann $U = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq U$ steht.

$$\begin{array}{r} 2716 \\ + 2716 \\ + 2716 \\ \hline 8148 \end{array}$$

Fall 2: Es sei $I = 8$. Dann ist $N = 4$, $e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 1$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 8 = I$, was im Widerspruch zu $I \neq U$ steht;

$z = 1$, dann $U =$ und $R = 4 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;

$z = 2$, dann $U = 3$ und $R = 5$.

$$\begin{array}{r} 1578 \\ + 1578 \\ + 1578 \\ \hline 4734 \end{array}$$

Fall 3: Es sei $I = 9$. Dann ist $N = 7$, $e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 8$, $R = 4$ und $E = 2 = D$, was im Widerspruch zu $D \neq E$ steht;

$z = 1$, dann $U = 1$, $R = 4$ und $E = 3$;

$z = 2$, dann $U = 3$, $R = 5$ und $E = 7 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq E$ steht.

$$\begin{array}{r} 2439 \\ + 2439 \\ + 2439 \\ \hline 7317 \end{array}$$

Da andere Fälle nicht existieren, hat die Aufgabe genau die angegebenen drei Lösungen.

L.1.2

Jede n -stellige natürliche Zahl z mit den Ziffern $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ ($n > 1$) lässt sich im dekadischen System folgendermaßen schreiben:

$$z = a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \dots + a_210^2 + a_110^1 + a_010^0$$

Dabei gilt

$$0 < a_{n-1} \leq 9 \quad \text{und} \quad 0 \leq a_i \leq 9 \quad (i = 0, \dots, n-2)$$

Daraus folgt $z \geq a_{n-1}10^{n-1}$. Das aus den sämtlichen Ziffern von z gebildete Produkt P lautet:

$$P = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$$

Wegen $0 \leq a_i \leq 9$ ($i = 0, \dots, n-2$) und $a_{n-1} > 0$ sowie $n > 1$ (die Voraussetzung $n > 1$ verwendet man, um $9^{n-1} < 10^{n-1}$ zu erhalten, die Voraussetzung $a_{n-1} > 0$, um daraus $a_{n-1}9^{n-1} < a_{n-1}10^{n-1}$ zu schließen) gilt

$$P \leq a_{n-1}9^{n-1} < a_{n-1}10^{n-1} \leq z$$

also $P < z$, w.z.b.w.

L.1.3

Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x, y) , das den Bedingungen (*), (**) genügt. Setzt man $x = 10a + b$ (a, b natürliche Zahlen und $1 \leq a \leq 9, 1 \leq b \leq 9$) dann folgt $y = 10b + a$ und wegen $x > y$ auch $a > b$.

Wegen $a \neq 0, b \neq 0$ und $a > b$ ist $2 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 8$.

Das Quadrat der zweistelligen Zahl x ist entweder dreistellig oder vierstellig. Es werden zunächst die Fälle betrachtet, in denen x^2 dreistellig ist.

Wegen $40^2 > 1000$ ist dann $a \leq 3$. Da auch $32^2 = 1024$ bereits vierstellig ist, können höchstens die Zahlen 21 bzw. 31 die Bedingungen (*), (**) erfüllen. Tatsächlich gilt

$$21^2 = 441 \quad \text{und} \quad 12^2 = 144 \quad \text{sowie} \quad 31^2 = 961 \quad \text{und} \quad 13^2 = 169$$

Also erfüllen die Paare (21, 12) und (31, 13) die Bedingungen (*), (**).

Angenommen nun, die Bedingungen der Aufgabe seien mit einer Zahl x erfüllbar, deren Quadrat x^2 vierstellig ist. Dann gilt für die Ziffern a, b dieser Zahl

$$(10a + b)^2 = 1000c + 100d + 10e + f \tag{1}$$

sowie

$$(10b + a)^2 = 1000f + 100e + 10d + c \tag{2}$$

(mit natürlichen Zahlen c, d, e, f und $0 \leq c, d, e, f \leq 9; c, f \neq 0$). Aus (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned} 100a^2 + 20ab + b^2 &= 1000c + 100d + 10e + f \\ a^2 + 20ab + 100b^2 &= c + 10d + 100e + 1000f \end{aligned}$$

Durch Subtraktion erhält man

$$99a^2 - 99b^2 = 999c + 90d - 90e - 999f$$

also

$$11a^2 - 11b^2 = 111c + 10d - 10e - 111f \quad (3)$$

Da die linke Seite von (3) durch 11 teilbar ist, muss es auch die rechte Seite sein.

Addiert man zu $111c + 10d - 10e - 111f$ die durch 11 teilbare Zahl $1111f + 110e - 110c$, dann erhält man $1000f + 100e + 10d + c = (10b + a)^2$, und auch diese Zahl muss durch 11 teilbar sein.

Daher muss schließlich $11 \mid (10b + a)$ gelten, was wegen $a \neq b$ nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch beweist, dass es für vierstellige Zahlen x^2 kein derartiges Zahlenpaar (x, y) gibt. Daher erfüllen genau die Paare (21, 12) und (31, 13) die Bedingungen (*), (**).

L.1.4

Die Ermittlung aller dreistelligen natürlichen Zahlen x , die der angegebenen Bedingung genügen, ist gleichbedeutend mit der Lösung der diophantischen Gleichung

$$y^2 = 1000x + x + 1 \quad \text{wobei} \quad 100 \leq x < 999 \quad (1,2)$$

und folglich

$$316 < y < 1000 \quad (3)$$

ist. Die Gleichung (1) ist äquivalent mit $y^2 - 1 = 1001x$ bzw. mit

$$(y - 1)(y + 1) = 1001x \quad (4)$$

Es gilt daher: 1001 ist ein Teiler von $(y - 1)(y + 1)$. Wegen $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ und wegen (3) muss y einer der folgenden Bedingungen genügen:

$$y = 11 \cdot 13a \pm 1, \quad \text{d.h. } y = 143a \pm 1 \quad (2 < a < 7) \quad (5)$$

$$y = 7 \cdot 13b \pm 1, \quad \text{d.h. } y = 91b \pm 1 \quad (2 < b < 11) \quad (6)$$

$$y = 7 \cdot 11c \pm 1, \quad \text{d.h. } y = 77c \pm 1 \quad (4 < c < 13) \quad (7)$$

Diese Fälle sind nun nacheinander zu untersuchen:

Fall (5): Setzt man anstelle von y in Gleichung (4) den Term $143a + 1$, so erhält man

$$143a(143a \pm 2) = 1001x$$

$$143a^2 \pm 2a = 7x$$

$$140a^2 + 30a^2 \pm 2a = 7x$$

$$140a^2 + a(3a \pm 2) = 7x$$

Hieraus folgt $7 \mid a(3a + 2)$. Da $2 < a < 7$ ist, brauchen im weiteren nur noch die Zahlen

$$y = 143 \cdot 3 - 1 = 428 \quad \text{und} \quad y = 143 \cdot 4 + 1 = 573$$

untersucht zu werden.

Wegen $428^2 = 183184$, $573^2 = 328329$ sind 183 und 328 zwei der gesuchten Zahlen.

Fall (6): Setzt man anstelle von y in Gleichung (4) den Term $91b \pm 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} 91b(91b \pm 2) &= 1001x \\ 91b^2 \pm 2b &= 11x \\ 88b^2 + b(3b \pm 2) &= 11x \end{aligned}$$

Hieraus folgt $11 \mid b(3b \pm 2)$. Da $3 < b < 11$ ist, braucht im weiteren nur noch die Zahl $y = 91 \cdot 8 - 1 = 727$ untersucht zu werden.

Wegen $727^2 = 528529$ ist auch 528 eine der gesuchten Zahlen.

Fall (7): Setzt man anstelle von y in Gleichung (4) den Term $77c \pm 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} 77c(77c \pm 2) &= 1001x \\ 77c^2 \pm 2c &= 13x \\ 65c^2 + c(12c \pm 2) &= 13x \end{aligned}$$

Hieraus folgt $13 \mid c(12c \pm 2)$. Da $4 < c < 13$ ist, braucht im weiteren nur noch die Zahl $y = 77 \cdot 11 - 1 = 846$ untersucht zu werden.

Wegen $846^2 = 715716$ ist auch 715 eine der gesuchten Zahlen.

Weitere solcher Zahlen kann es nicht geben; alle gesuchten Zahlen sind also 183, 328, 528, 715.

L.1.5

Angenommen, in einem g -adischen System gäbe es eine Lösung der genannten Aufgabe. Ihre Ziffern seien in dieser Reihenfolge mit a, b bezeichnet. Dann gilt

$$0 < a, \quad b < g, \quad ag + b - bg - a = g + 2 \quad (1,2)$$

Hiernach ist $(a - b)(g - 1) = g + 2 > 0$,

$$a > b \quad (3)$$

Aus (2) und (3) erhält man $a - b - 1)g = a - b + 2 > 0$, also

$$a - b - 1 > 0 \quad (4)$$

Aus (1) folgt ferner $a \leq g - 1$ und $b \geq 1$, also $a - b \leq g - 2$ und somit

$$a - b - 1 = \frac{a - b + 2}{g} \leq 1 \quad (5)$$

Wegen (4) und (5) muss $a - b - 1 = 1$, d.h.

$$a - b = 2 \quad \text{und damit} \quad g = 4 \quad (6,7)$$

gelten.

Zusammen mit $0 < a, b < 4$ sind (3) und (6) nur durch $a = 3, b = 1$ erfüllbar. Somit kann es nur im 4-adisch Lösungen der angegebenen Aufgabe geben und dort nur die Lösung $3 \cdot 4 + 1$.

Tatsächlich ist das die Lösung, da erstens auch $1 \cdot 4 + 3$ eine 4-adisch zweistellige Zahl ist und diese zweitens, von $3 \cdot 4 + 1$ subtrahiert, $1 \cdot 4 + 2$ ergibt, wie es verlangt war.

L.1.6

Beim ersten Umlauf werden alle Zahlen durchgestrichen, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte derartige Zahl ist 991.

Beim zweiten Umlauf werden wegen $991 + 15 - 1000 = 6$ die Zahl 6 als erste gestrichen und weiter alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen, also 6, 21, 36, 51, ... Die letzte derartige Zahl ist 996.

Beim dritten Umlauf streicht man wegen $996 + 15 - 1000 = 11$ als erste Zahl die 11 und anschließend alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, also 11, 26, 41, 45, ... Die letzte derartige Zahl ist 986.

Beim vierten Umlauf müsste man wegen $986 + 15 - 1000 = 1$ als erste Zahl die 1 streichen, die aber bereits gestrichen ist. Beim Fortsetzen des Verfahrens trifft man deshalb nur auf Zahlen, die bereits beim ersten Umlauf gestrichen worden sind.

Bei allen Umläufen wurden somit insgesamt die Zahlen 1, 6, 11, 21, 26, ..., 986, 991, 996 gestrichen, also alle Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, mithin in der Form $5n + 1$ geschrieben werden können.

Da hierbei alle natürlichen Zahlen von 0 bis 199 durchläuft, gibt es genau 200 Zahlen, die bei dem angegebenen Verfahren durchgestrichen, also genau 800 Zahlen, die nicht durchgestrichen werden.

L.1.7

Genau dann ist x die gesuchte Zahl, wenn x die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl $n \geq 2$ mit $83x = 3 \cdot 10^n + 10x + 8$ oder, äquivalent hierzu, mit $73x = 3 \cdot 10^n + 8$ existiert.

Untersucht man die Zahlen 308, 3008, 30008, 300008, 3000008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, dass von ihnen nur die Zahl $3000008 = 73 \cdot 41096$ durch 73 teilbar ist. Daher ist $x = 41096$ die gesuchte Zahl, und es gilt

$$83 \cdot 41096 = 3410968$$

L.1.8

Es gilt $9 \mid 1971$. Wenn die angegebene Zahl durch 1971 teilbar wäre, dann wäre sie mithin auch durch 9 teilbar. Ihre Quersumme lässt sich folgendermaßen ermitteln:

Jede der Zahlen 2 bis 9 tritt in dieser Quersumme genau 300 mal als Summand auf, da jede dieser Zahlen in den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 als Ziffer genau 100 mal an der Einerstelle, 100 mal an der Zehnerstelle und 100 mal an der Hunderterstelle auftritt.

Die Eins tritt 301 mal auf, da sie außerdem noch einmal in der Tausenderstelle vor-

kommt. Die Nullen bleiben unberücksichtigt, da sie für die Berechnung der Quersumme keine Bedeutung haben. Also erhält man

$$300 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 = 30 \cdot 45 + 1$$

Diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Daher ist auch die angegebene Zahl nicht durch 9 und damit auch nicht durch 1971 teilbar.

L.1.9

Es sei x die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl $1000!$. Dann gilt $1000! = z \cdot 10^x$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen $10^x = 2^x \cdot 5^x$ ist die Anzahl der Endnullen von $1000!$ gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl $1000!$ enthalten sind.

Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl $1000!$ mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die $1000!$ enthält.

Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch $625 = 5^4$ teilbare Zahl, unter den restlichen 999 Zahlen genau $8 - 1$ durch $125 = 5^3$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 125$ mit $1 \leq n \leq 8$ und $n \neq 5$; unter den übrigen 992 Zahlen genau $40 - 8$ durch $25 = 5^2$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 25$ mit $1 \leq n \leq 40$ und $n \neq 5, 10, 15, \dots, 40$, d.h. $n \neq k \cdot 5$ ($k = 1, \dots, 8$); schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau $200 - 40$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 200$ und $n \neq k \cdot 5$ ($k = 1, \dots, 40$).

Daher enthält die Zahl $1000!$ wegen

$$4 + 3(8 - 1) + 2(40 - 8) + (200 - 40) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen.

L.1.10

Da z_1 und z_2 aus den gleichen Ziffern bestehen, haben sie auch die gleiche Quersumme q . Daher lassen beide Zahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest r ($0 \leq r < 9$). Somit gilt $z_1 = 9n + r$ sowie $z_2 = 9m + r$ (n, m natürliche Zahlen).

Daraus folgt $|z_1 - z_2| = 9|n - m|$, d. h., $|z_1 - z_2|$ ist durch 9 teilbar.

L.1.11

Es gilt:

- a) Jede mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl ist größer als jede nicht mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern. Denn eine solche beginnt entweder nicht mit 9
oder zwar mit 9, aber nicht mit 98 und nicht mit 99,
oder zwar mit 98, aber nicht mit 987, nicht mit 988 und nicht mit 989,
oder zwar mit 987, aber nicht mit 9877, nicht mit 9878 und nicht mit 9879

- b) Da 8 und 9 teilerfremd sind, ist eine Zahl genau dann durch 72 teilbar, wenn sie

durch 8 und 9 teilbar ist.

c) Eine siebenstellige Zahl aus paarweise verschiedenen Ziffern ist genau dann durch 9 teilbar, wenn von den zehn verschiedenen Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, deren Summe 45 beträgt, drei Ziffern weggelassen werden, deren Summe 9 beträgt.

d) Eine siebenstellige Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer in dieser Reihenfolge gebildete Zahl durch 8 teilbar ist (wobei im Zusammenhang mit dieser Regel auch Anfangsziffern 0 zulässig sind).

Daher ist die gesuchte Zahl die größte unter denjenigen mit 9876 beginnenden Zahlen (falls es solche gibt), deren restliche Ziffern drei derart gewählte verschiedene der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind, dass d) gilt und

e) die weggelassenen Ziffern die Summe 9 haben oder, äquivalent hiermit, die restlichen Ziffern die Summe 6 haben.

Nun wird e) genau von den Tripeln (0, 1, 5), (0, 2, 4) und (1, 2, 3) erfüllt. Sämtliche geraden dreistelligen Zahlen, mit zugelassener Anfangsziffer 0, die sich aus diesen Tripeln bilden lassen, sind, der Größe nach geordnet, 510, 420, 402, 312, 240, 204, 150, 132, 042, 024. Unter ihnen ist 312 die größte durch 8 teilbare Zahl. Daher ist 9876312 die gesuchte Zahl.

Anderer Lösungsweg:

Die größte siebenstellige Zahl mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern ist 9876543. Denn jede solche siebenstellige Zahl (usw. wie oben in a)).

Wegen $\frac{9876543}{72} = 137174\frac{15}{72}$ ist die größte durch 72 teilbare Zahl, die höchstens ebenso groß wie 9876543 ist, die Zahl

$$9876543 - 15 = 9876528$$

Bildet man schrittweise zu jeder erhaltenen Zahl die größte darunter gelegene durch 72 teilbare Zahl, so erhält man der Reihe nach

$$9876528 - 72 = 9876456, \quad 9876456 - 72 = 9876384, \quad 9876384 - 72 = 9876312, \dots$$

Von den erhaltenen Zahlen ist 9876312 die größte, die aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern besteht. Daher ist sie die gesuchte Zahl.

L.1.12

Hat eine ganze Zahl z ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, so gibt es eine ganze Zahl a mit $z^3 = 588a = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 a$. Daraus folgt, dass z^3 und folglich auch z durch jede der Primzahlen 2, 3, 7 teilbar ist; hiernach gibt es eine ganze Zahl x , mit der z von der Form $z = 2 \cdot 3 \cdot 7x$ ist.

Hat umgekehrt z diese Form, so ist

$$z^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7x^3$$

ein ganzzahliges Vielfaches von 588. Daher hat eine ganze Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von

$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ ist. Unter allen positiven ganzzahligen Vielfachen von 42 ist 42 die kleinste und somit die gesuchte Zahl.

L.1.13

Erster Lösungsweg:

Angenommen, z sei eine natürliche Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Da z dreistellig ist, gilt

$$z = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \quad (1)$$

mit natürlichen Zahlen a_i und

$$1 \leq a_2 \leq 9, \quad 0 \leq a_1 \leq 9, \quad 0 \leq a_0 \leq 9 \quad (2)$$

Ferner gilt: a_0 kann nur 1 oder 6 sein, da z bei Division durch 5 den Rest 1 lässt. (3)

Nach dem Satz über die Teilbarkeit durch 11 folgt aus (1):

$$a_2 + a_0 - a_1 = 11n \quad (n \text{ eine natürliche Zahl}) \quad (4)$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (2): n kann nur 0 oder 1 sein. (5)

Nach (1) lässt sich z auch folgendermaßen darstellen:

$$z = a_2 \cdot 98 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 7 + a_1 \cdot 3 + a_0 \quad (6)$$

Da z bei Division durch 7 den Rest 3 lässt, folgt aus (6)

$$2a_2 + 3a_1 + a_0 = 7m + 3 \quad (m \text{ eine natürliche Zahl}) \quad (7)$$

Nach (4) gilt

$$3a_2 - 3a_1 + 3a_0 = 33n \quad (8)$$

Aus den letzten beiden Aussagen folgt $5a_2 + 4a_0 = 33n + 7m + 3$ und damit

$$33n - 4a_0 + 3 = 5a_2 - 7m \quad (9)$$

Fallunterscheidung: Nach (3) und (5) kommen nur folgende Fälle in Betracht:

a_0	n	$33n - 4a_0 + 3$	Damit gilt nach (9)	Hieraus und aus (2) folgen als Möglichkeiten für a_2	Hieraus und aus (4), (2) folgen als einzige Möglichkeit für a_1
1	0	-1	$7m = 5a_2 + 1$	4	5
6	0	-21	$7m = 5a_2 + 21$	7	keine
1	1	32	$7m = 5a_2 - 32$	3	keine
6	1	12	$7m = 5a_2 + 12$	1	keine
				8	3

Hieraus folgt, dass nur 451 und 836 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen können. Wie die Probe zeigt, ist dies der Fall.

Zweiter Lösungsweg

Angenommen, z sei eine Zahl der gesuchten Art. Dann gilt $z = 5a + 1 = 7b + 3 = 11c$ mit ganzen Zahlen a, b, c . Daraus folgt

$$15a + 3 = 21b + 9 \quad \text{also} \quad a = 7(3b - 2a) + 6$$

d.h. $a = 7k + 6$ mit einer ganzen Zahl k . Dies führt auf $z = 35k + 31$, also folgt weiter

$$210k + 186 = 66c \quad \text{also} \quad k = 11(6c - 19k - 17) + 1$$

d.h. $k = 11l + 1$ mit einer ganzen Zahl l .

Somit ergibt sich $z = 385l + 66$. Die einzigen dreistelligen Zahlen dieser Form erhält man für $l = 1, 2$, nämlich $z = 451$ bzw. $z = 836$. Eine Probe zeigt, dass sie den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Dritter Lösungsweg:

Angenommen, z sei eine Zahl der gesuchten Art, und es sei $z' = z + 11$. Dann folgt für z'

$$11 \mid z', \quad 7 \mid z' \quad (1,2)$$

Wegen $z = 7k + 3$ (k natürliche Zahl) gilt $z' = 7k + 14 = 7(k + 2)$. Ferner gilt: z' lässt bei Division durch 5 den Rest 2, endet also auf 2 oder 7. (3)

Aus (1) und (2) folgt, da 7 und 11 teilerfremd sind, $77 \mid z'$. (4)

Also ist z' ein Vielfaches von 77, das wegen (3) auf 2 oder 7 endet. Das sind im angegebenen Bereich die Zahlen $6 \cdot 77 = 462$ und $11 \cdot 7 = 847$ und nur diese. Daraus erhält man als Lösungen genau die Zahlen 451 und 836.

L.1.14

Ist m oder n durch 5 teilbar, so auch $x = 2mn$. Ist eine ganze Zahl g nicht durch 5 teilbar, so ist sie in der Form $g = 5k + r$ mit ganzzahligen k, r und $0 < |r| \leq 2$ darstellbar. Folglich lässt g^4 bei Division durch 5 den Rest 1; denn es gilt

$$(5k + r)^4 = 5(125k^4 + 100k^3r + 30k^2r^2 + 4kr^3) + r^4$$

und r^4 ist 1 oder 16. Also ist $g^4 = 5k' + 1$. Damit lässt sich

$$(m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = m^4 - n^4$$

durch 5 teilen, und es folgt, dass mindestens einer der beiden Faktoren $m^2 + n^2$ oder $m^2 - n^2$ durch 5 teilbar ist.

L.1.15

Ist n die mittlere der drei natürlichen Zahlen, so lauten sie $n - 1, n, n + 1$. Die Summe ihrer Kuben ist die Zahl

$$\begin{aligned} (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= 3n^3 + 6n = 3(n^3 + 2n) \end{aligned}$$

und diese Zahl ist durch 3 teilbar, w. z. b. w.

L.1.16

Es sei a eine natürliche Zahl und

$a \equiv 0 \pmod{7}$, dann ist $a^3 \equiv 0 \pmod{7}$,
 $a \equiv 1 \pmod{7}$, dann ist $a^3 \equiv 1 \pmod{7}$,
 $a \equiv 2 \pmod{7}$, dann ist $a^3 \equiv 1 \pmod{7}$,
 $a \equiv 3 \pmod{7}$, dann ist $a^3 \equiv -1 \pmod{7}$,
 $a \equiv 4 \pmod{7}$, dann ist $a^3 \equiv 1 \pmod{7}$,
 $a \equiv 5 \pmod{7}$, dann ist $a^3 \equiv -1 \pmod{7}$,
 $a \equiv 6 \pmod{7}$, dann ist $a^3 \equiv -1 \pmod{7}$

Eine Kubikzahl a^3 kann bei Division durch 7 also nur einen der Reste 0, 1, -1 haben. Angenommen, keine der drei Kubikzahlen wäre durch 7 teilbar. Dann könnte die Summe der drei Kubikzahlen nur einen der folgenden Reste bei Division durch 7 haben und keinen anderen:

$$1 + 1 + 1 = 3, \quad 1 + 1 - 1 = 1, \quad 1 - 1 - 1 = -1, \quad -1 - 1 - 1 = -3$$

In keinem dieser Fälle wäre aber die Summe der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss wenigstens eine der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar sein, w. z. b. w.

L.1.17

Es gilt

$$n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 + 1)(n^2 - 1)$$

Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $n^2 - 1, n^2, n^2 + 1$ ist mindestens eine durch 2 teilbar.

Ist n durch 5 teilbar, so ist n^2 durch 5 teilbar. Ist n nicht durch 5 teilbar, so lässt n bei Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3, 4. Dann lässt n^2 bei Division durch 5 bzw. den Rest 1, 4, 4, 1.

Lässt n^2 bei Division durch 5 den Rest 1, so ist $n^2 - 1$ durch 5 teilbar. Lässt n^2 bei Division durch 5 den Rest 4, so ist $n^2 + 1$ durch 5 teilbar.

In jedem Fall ist daher $n^6 - n^2 = (n^2 - 1)n^2(n^2 + 1)$ durch 2 und durch 5 und folglich, da 2 und 5 teilerfremd sind, auch durch 10 teilbar.

Bemerkung: $n^6 - n^2$ ist für jedes ganze n sogar durch 60 teilbar.

L.1.18

Die zu untersuchende Zahl ist

$$\begin{aligned}
 n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1) = (n^8 - 1)(n^4 - 1) \\
 &= (n + 1)^2(n - 1)^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1) \\
 &= ((n + 1)(n - 1))^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1)
 \end{aligned}$$

Da n ungerade ist, sind die zu n benachbarten Zahlen $n + 1$ und $n - 1$ beide gerade, und eine von ihnen ist durch 4 teilbar. Demnach ist $(n + 1)(n - 1)$ durch 8 und das Quadrat dieser Zahl durch 64 teilbar.

Die Zahlen n^2 und n^4 sind als Potenzen einer ungeraden Zahl ebenfalls ungerade, also ist $n^2 + 1$ durch 2, $(n^2 + 1)^2$ durch 4 und $n^4 + 1$ durch 2 teilbar. Damit ist die gegebene Zahl teilbar durch

$$2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

L.1.19

Genau dann ist

$$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$

durch 10 teilbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $10 \mid n$ (1)
- $10 \mid (n^2 + 2)$ (2)
- $5 \mid n$ und $2 \mid (n^2 + 2)$ (3)
- $2 \mid n$ und $5 \mid (n^2 + 2)$ (4)

Die Bedingung (1) wird von allen durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n erfüllt. Die Bedingung (2) könnte nur von solchen natürlichen Zahlen n erfüllt werden, deren Quadrat auf 8 endet. Derartige Zahlen gibt es nicht, da für eine Zahl $10k + r$ mit $0 \leq r < 10$ das Quadrat $(10k + r)^2$ gleich $10l' + r'$ mit $r' \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ ist.

Angenommen, es gäbe natürliche Zahlen n , die (3) oder (4), aber nicht (1) erfüllen. Eine solche Zahl müsste entweder wegen (3) auf 5 oder ihr Quadrat wegen (4) auf 3 oder 8 enden. Natürliche Zahlen, deren Quadrat auf 3 oder 8 endet, gibt es nicht.

Endet n auf 5, so ist n^2 und damit auch $n^2 + 2$ ungerade, also nicht durch 2 teilbar. Folglich erfüllen genau alle durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

L.1.20

Erster Lösungsweg:

Angenommen, n sei eine Zahl mit den verlangten Eigenschaften. Dann muss wegen $n^2 + 6n - 187 = (n - 11)(n + 17)$ mindestens einer dieser beiden Faktoren durch 19 teilbar sein, da 19 eine Primzahl ist.

Fall 1: Es gelte $n - 11 = m \cdot 19$ mit ganzzahligem m . Daraus folgt

$$n = 19m + 11$$

Für $m < 0$ ist n keine natürliche Zahl. Aus $m = 0$ folgt $n = 11$. Aus $m = 1$ folgt $n = 30$. Für $m \geq 2$ ist $n > 40$.

Fall 2: Es gelte $n + 17 = r \cdot 19$ mit ganzzahligem r . Daraus folgt

$$n = 19r - 17$$

Für $r \leq 0$ ist n keine natürliche Zahl. Aus $r = 1$ folgt $n = 2$. Aus $r = 2$ folgt $n = 21$. Für $r \geq 3$ ist $n \geq 40$.

Also können höchstens die Zahlen 11, 30, 2, 21 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} 11^2 + 6 \cdot 11 - 187 &= 11(11 + 6 - 17) = 0 \cdot 19 \\ 30^2 + 6 \cdot 30 - 187 &= 30 \cdot 36 - 187 = 893 = 47 \cdot 19 \\ 2^2 + 6 \cdot 2 - 187 &= 16 - 187 = -9 \cdot 19 \\ 21^2 + 6 \cdot 21 - 187 &= 21 \cdot 27 - 187 = 380 = 20 \cdot 19 \end{aligned}$$

Genau die Zahlen 11, 30, 2, 21 genügen daher den Bedingungen der Aufgabe.

Zweiter Lösungsweg:

Genau dann ist $(n^2 + 6n - 187) = (n + 3)^2 - 196$ durch 19 teilbar, wenn $(n + 3)^2$ bei Division durch 19 den Rest 6 lässt. (Es ist also die Kongruenz $(n + 3)^2 \equiv 6 \pmod{19}$ zu lösen.)

Lässt nun $n + 3$ bei Division durch 19 den Rest r , so lässt $(n + 3)^2$ jeweils den in der folgenden Tabelle unter r^2 genannten Rest:

r	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9
r^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5

Daher ist genau dann $n^2 + 6n - 187$ durch 19 teilbar, wenn $n + 3$ einen der Reste 5, -5 oder, gleichwertig hiermit, n einen der Reste 2, 11 lässt. Unter den natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ trifft dies genau für die Zahlen 2, 11, 21, 30 zu.

Daher genügen genau diese Zahlen den Bedingungen der Aufgabe.

L.1.21

Nach Voraussetzung existiert eine ganze Zahl g mit $m + n = 7g$, also $m = 7g - n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m^7 + n^7 &= (7g - n)^7 + n^7 = (7g)^7 - 7(7g)^6n + 21(7g)^5n^2 - 35(7g)^4n^3 \\ &\quad + 35(7g)^3n^4 - 21(7g)^2n^5 + 7(7g)n^6 \end{aligned}$$

ist durch 49 teilbar, w. z. b. w.

L.1.22

Erste Lösung:

Ist $11a + 25$ durch 19 teilbar, so ist $2b = 19k - 11a$ mit einer ganzen Zahl k ; also ist

$$2(18a + 5b) = 36a + 5(19k - 11a) = 19(5k - a) \quad (1)$$

Daher ist einerseits $5k - a$ gerade, d.h. $5k - a = 2n$ mit einer ganzen Zahl n , andererseits folgt dann aus (1) weiter $18a + 5b = 19n$, w. z. b. w.

Zweite Lösung:

Ist $11a + 2b$ durch 19 teilbar, so auch

$$12(11a + 2b) - 19(6a + b) = 18a + 5b$$

w.z.b.w.

L.1.23

Angenommen, a_1, \dots, a_4 seien vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen d_1, \dots, d_6 die Gleichungen

$$d_4 = d_1 + d_2, \quad d_5 = d_2 + d_3, \quad d_6 = d_1 + d_2 + d_3$$

Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:

a) d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet dieser Fall aus.

b) d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2). Dann ergibt sich derselbe Widerspruch.

c) Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_6 gerade und größer als 2 ist.

d) Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).

d1) Unter diesen befindet sich d_2 . Dann ergibt sich, dass entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.

d2) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl. Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d_6 = d_2 + 4$. Nun ist von drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen der Form $d_2, d_2 + 1, d_2 + 2$ stets eine durch 3 teilbar, also auch von $d_2, d_2 + 2, d_2 + 1 + 3 = d_2 + 4$.

Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber ($d_2 > 1$ ist, also) $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$. Hiernach folgt weiter

$$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2, \quad a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5, \quad a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7$$

Daher können a_1, \dots, a_4 nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form

$$a_1 = n, \quad a_2 = n + 2, \quad a_3 = n + 5, \quad a_4 = n + 7 \quad (1)$$

mit einer natürlichen Zahl n sind.

Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (1) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen

$$\begin{aligned} d_1 &= a_4 - a_3 = 2, & d_2 &= a_3 - a_2 = 3, & d_3 &= a_2 - a_1 = 2 \\ d_4 &= a_4 - a_2 = 5, & d_5 &= a_3 - a_1 = 5, & d_6 &= a_4 - a_1 = 7 \end{aligned}$$

Primzahl.

L.1.24

Jede natürliche Zahl $z \geq 5$ ist von einer der Formen $6m - 1, 6m, 6m + 1, 6m + 2,$

$6m + 3, 6m + 4$ mit natürlichem $m \geq 1$. Da $6m, 6m + 2, 6m + 4$ durch 2 teilbar und (wegen $z \geq 5$) größer als 2 sind und da $6m + 3$ durch 3 teilbar und größer als 3 ist, folgt: Jede Primzahl $p \geq 5$ ist von einer der Formen $6m - 1, 6m + 1$ ($m \geq 1$).

Nummeriert man alle diese Zahlen auf dieselbe Weise wie die Primzahlen $p \geq 5$ der Größe nach und bezeichnet dabei die mit der Nummer n versehene Zahl mit f_n , dagegen die Primzahl mit der Nummer n mit p_n , so gilt also

$$p_n \geq f_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Die Zahlen f_n ergeben sich nun, indem man der Reihe nach für jedes $m = 1, 2, 3, \dots$ erst $6m - 1$ und dann $6m + 1$ bildet. Die Nummern n kann man ebenso dadurch erhalten, dass man der Reihe nach für jedes $m = 1, 2, 3, \dots$ erst $2m - 1$ und dann $2m$ bildet. Da aber für $m = 1, 2, 3, \dots$ stets $6m - 1 > 3(2m - 1)$ und $6m + 1 > 3 \cdot 2m$ gilt, ergibt sich

$$f_n > 3n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $p_n > 3n$ für alle $n = 1, 2, 3, \dots$, w. z. b. w.

L.1.25

Zu p_1 und p_2 kann man zunächst stets rationale Zahlen a und b eindeutig so bestimmen, dass (*) und (**) erfüllt sind, nämlich

$$a = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad b = \frac{p_2 - p_1}{2}$$

Der verlangte Beweis ist geführt, wenn noch gezeigt wird, dass a, b natürliche Zahlen sind, deren Produkt durch 6 teilbar ist.

Da p_1, p_2 nach Voraussetzung zwei von der Primzahl 2 verschiedene Primzahlen sind, sind sie beide ungerade. Folglich sind $p_1 + p_2$ und $p_2 - p_1$ gerade, also a und b ganze Zahlen. Ferner ist $p_1 + p_2 \geq$ und wegen $p_1 < p_2$ auch $p_2 - p_1 > 0$, also sind a und b natürliche Zahlen.

Da ihre Summe $a + b = p_2$ ungerade ist, ist eine der Zahlen a, b gerade. Also ist ab gerade.

Nach Voraussetzung sind p_1 und p_2 von der Primzahl 3 verschiedene Primzahlen. Daher sind sie nicht durch 3 teilbar, d. h., jede von ihnen lässt bei Division durch 3 einen der Reste 1 oder 2. Lassen beide den gleichen Rest, dann ist $2b = p_2 - p_1$ durch 3 teilbar, also auch b .

Lassen beide verschiedene Reste, so ist $2a = p_1 + p_2$ durch 3 teilbar. Daher ist ab in jedem Fall durch 3 teilbar. Aus $2 \mid ab$ und $3 \mid ab$ folgt, da 2 und 3 teilerfremd sind, schließlich $6 \mid ab$, w.z.b.w.

L.1.26

a) Wenn die Summe dreier Primzahlen durch 3 teilbar ist, so gilt dasselbe für die Summe ihrer bei Division durch 3 auftretenden Reste.

Jede Primzahl, die größer als 3 ist, lässt bei der Division durch 3 einen der Reste 1, 2. Die einzigen durch 3 teilbaren Summen aus 3 Zahlen, die 1 oder 2 lauten, sind aber 3

und 6, und zwar können diese Summen nur so auftreten, dass alle drei Reste 1 bzw. alle drei Reste 2 lauten.

In beiden Fällen lässt die Differenz je zweier der betrachteten Primzahlen bei Division durch 3 den Rest 0, ist also durch 3 teilbar. Da ferner jede Primzahl größer als 3 eine ungerade Zahl ist, sind alle betrachteten Differenzen gerade Zahlen, also durch 2 teilbar.

Daraus folgt wegen der Teilerfremdheit von 2 und 3, dass alle Differenzen durch 6 teilbar sind.

b) Es genügt die Angabe eines Gegenbeispiels: Die Summe der drei Primzahlen 3, 5, 7 ist durch 3 teilbar, aber die Differenz $5 - 3$ ist nicht durch 6 teilbar.

L.1.27

Wegen a) können nur drei der Ziffern 2, 3, 5, 7 vorkommen. Aus diesen vier Ziffern kann man genau die zweistelligen Primzahlen 23, 37, 53, 73 bilden. Aus ihnen lassen sich auf die in der Aufgabe angegebene Weise b) genau folgende dreistellige Zahlen bilden: 237, 373, 537, 737.

Nun sind 237 und 537 durch 3 teilbar, und 737 ist durch 11 teilbar. Die Zahl 373 dagegen ist weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 oder 19 teilbar. Wegen $373 < 20^2$ ist sie (dann auch durch keine größere Primzahl teilbar und) somit selbst Primzahl.

Folglich ist 373 die einzige dreistellige Primzahl, die a) und b) erfüllt.

L.1.28

Erster Lösungsweg:

Es gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen r und s

$$p = 2r + 1, \quad q = 2s + 1$$

Daraus folgt

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 4(r - s)(r + s + 1)$$

Von den Zahlen $r - s$ und $r + s + 1$ ist genau eine durch 2 teilbar, da ihre Summe ungerade ist. Daher ist $p^2 - q^2$ durch 8 teilbar.

Andererseits gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen x und y

$$p = 3x + 1 \quad \text{oder} \quad p = 3x - 1 \quad \text{und} \quad q = 3y + 1 \quad \text{oder} \quad q = 3y - 1$$

Es gibt daher genau die folgenden Möglichkeiten:

$$p = 3x + 1 \quad \text{und} \quad q = 3y + 1 \quad (1)$$

$$p = 3x - 1 \quad \text{und} \quad q = 3y - 1 \quad (2)$$

$$p = 3x + 1 \quad \text{und} \quad q = 3y - 1 \quad (3)$$

$$p = 3x - 1 \quad \text{und} \quad q = 3y + 1 \quad (4)$$

Für (1) und (2) gilt $p - q = 3(x - y)$.

Für (3) und (4) gilt $p + q = 3(x + y)$.

Wegen $p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$ ist somit in jedem Fall $p^2 - q^2$ durch 3 teilbar. Da 8 und 3 teilerfremd sind, ist folglich $p^2 - q^2$ auch stets durch 24 teilbar.

Zweiter Lösungsweg:

Eine Primzahl größer als 3 kann bei Division durch 6 nur die Reste 1 oder -1 lassen. Mit geeigneten natürlichen Zahlen m, n ist folglich $p = 6m \pm 1$ und $q = 6n \pm 1$ (wobei für p und q voneinander unabhängig je eines der Vorzeichen gilt), also

$$p^2 - q^2 = 12(m(3m \pm 1) - n(3n \pm 1)) \quad (5)$$

In den Produkten $m(3m \pm 1)$, $n(3n \pm 1)$ ist für gerades (ungerades) m bzw. n der erste (zweite) Faktor gerade; daher sind diese Produkte stets gerade, also auch ihre Differenz. Hiernach folgt aus (5) die Behauptung.

L.1.29

Angenommen, eine Primzahl p habe die genannte Eigenschaft. Dann sind die Zahlen $p - 50$ und $p + 50$ ebenfalls Primzahlen.

Nun lässt $p + 50 = p + 48 + 2$ bei Division durch 3 den gleichen Rest wie $p + 2$, und es lässt $p - 50 = p - 51 + 1$ bei Division durch 3 den gleichen Rest wie $p + 1$.

Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p, p + 1, p + 2$ muss jedoch eine durch 3 teilbar sein, also auch eine von den Zahlen $p, p - 50$ und $p + 50$. Da es genau eine durch 3 teilbare Primzahl gibt, nämlich die 3 selbst, muss sie unter diesen drei Zahlen vorkommen, und sie muss die kleinste von ihnen sein, da sonst $p - 50$ keine natürliche Zahl, also keine Primzahl, wäre.

Daher folgt $p - 50 = 3$; also kann nur $p = 53$ die in der Aufgabe genannte Eigenschaft haben.

Umgekehrt ist dies in der Tat der Fall; denn sowohl $p = 53$ als auch $p + 50 = 103$ als auch $p - 50 = 3$ sind Primzahlen.

L.1.30

Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei ein Quadrupel mit den Eigenschaften a) bis e). Wegen a) und $8294400000 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^6$ gilt dann

$$x_1 = 2^{u_1} \cdot 3^{v_1} \cdot 5^{w_1}, \quad x_2 = 2^{u_2} \cdot 3^{v_2} \cdot 5^{w_2}, \quad x_3 = 2^{u_3} \cdot 3^{v_3} \cdot 5^{w_3}, \quad x_4 = 2^{u_4} \cdot 3^{v_4} \cdot 5^{w_4}$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Wegen b) und $24 = 2^3 \cdot 3$ ist $v_i \geq 1$, wegen c) und $120000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^4$ aber $v_i \leq 1$, also

$$v_i = 1 \quad (1)$$

Aus a) folgt $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 6$, aus d) und $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ aber $w_1, w_2 \geq 2$. Also gilt

$$w_3 = 2 \quad (2)$$

Nach e) und $30000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$ ist w_2 oder w_3 gleich 4, hiernach und nach (2) muss

$$w_2 = 4 \quad (3)$$

sein. Aus $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 6$ folgt wegen (3) $w_1 + w_3 + w_4 = 2$. Wegen d), also $w_1 \geq 2$, ist dies nur für $w_1 = 2, w_3 = w_4 = 0$ möglich.

Wegen d) ist $u_2 \geq 4$, wegen c) aber $u_2 \leq 4$, also

$$u_2 = 4 \quad (4)$$

Aus a) folgt $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16$, aus d) und b) aber $u_1, u_2 \geq 4$ und $u_3 \geq 3$. Also gilt

$$u_4 \leq 5 \quad (5)$$

Nach c) ist eins der u_i gleich 6, nach e) gilt aber $u_2, u_3 \leq 4$; hiernach und nach (5) muss

$$u_1 = 6 \quad (6)$$

sein. Aus $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16$ folgt wegen (4), (6) $u_3 + u_4 = 6$. Wegen b), also $u_3, u_4 \geq 3$, ist dies nur für $u_3 = u_4 = 3$ möglich. Daher kann höchstens das Quadrupel aus den Werten

$$x_1 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4800, \quad x_2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 = 30000, \quad x_3 = 2^3 \cdot 3 = 24, \quad x_4 = 2^3 \cdot 3 = 24$$

die Eigenschaften a) bis e) besitzen. Eine Probe zeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist.

L.1.31

Genau dann ist (a_1, a_2, a_3, a_4) ein derartiges Quadrupel, wenn es eine ganze Zahl n mit $a_1 = n, a_2 = n + 1, a_3 = n + 2, a_4 = n + 3$ gibt, für die

$$n^3 + (n + 1)^3 = (n + 3)^2 - (n + 2)^3 \quad (1)$$

gilt. Gleichung (1) ist äquivalent mit

$$n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$

und dies mit $n^3 - 6n = 9$, d. h. mit

$$n(n^2 - 6) = 9 \quad (2)$$

Da für ganzzahliges n die beiden Faktoren des linken Terms der Gleichung (2) ganze Zahlen sind, kann (2) nur erfüllt sein, wenn n eine der Zahlen $1, -1, 3, -3, 9, -9$ ist. Wie die folgende Tabelle zeigt, erfüllt von diesen Zahlen genau die Zahl $n = 3$ die Gleichung (2) und damit die Gleichung (1):

n	n^2	$n^2 - 6$	$n(n^2 - 6)$
1	1	-5	-5
-1	1	-5	5
3	9	3	9
-3	9	3	-9
9	81	75	675
-9	81	75	-675

Damit erfüllt das Quadrupel (3, 4, 5, 6) als einziges alle Bedingungen der Aufgabe.

L.1.32

Jede natürliche Zahl m ist von einer der Formen $3g$, $3g + 1$, $3g + 2$ mit ganzzahligem g . Deren Quadrat g^2 , $9g^2 + 6g + 1$, $9g^2 + 12g + 4$ lässt daher bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1.

Dagegen lässt für jede natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ bei Division durch 3 den Rest 2 und kann somit für kein natürliches m mit m^2 übereinstimmen, w. z. b. w.

L.1.33

Jede ganze Zahl lässt sich in genau einer der Formen $7m$, $7m \pm 1$, $7m \pm 2$ oder $7m \pm 3$ (m eine ganze Zahl) darstellen. Die Quadrate davon sind:

$$\begin{aligned}(7m)^2 &= 7(7m^2) + 0 \\ (7m \pm 1)^2 &= 7(7m^2 \pm 2m) + 1 \\ (7m \pm 2)^2 &= 7(7m^2 \pm 4m) + 4 \\ (7m \pm 3)^2 &= 7(7m^2 \pm 6m + 1) + 2\end{aligned}$$

Die Quadrate ganzer Zahlen lassen sich demnach nur in einer der Formen $7n$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$ (n eine ganze Zahl) darstellen. Daher kann eine Zahl der Form $7n + 3$ nicht das Quadrat einer ganzen Zahl sein.

Ein anderer Lösungsweg:

Für jede ganze Zahl z gilt genau eine der Kongruenzen:

$$z \equiv 0 \pmod{7}, \quad z \equiv \pm 1 \pmod{7}, \quad z \equiv \pm 2 \pmod{7}, \quad z \equiv \pm 3 \pmod{7}$$

Daher gilt für z^2 genau eine der folgenden Kongruenzen:

$$z^2 \equiv 0 \pmod{7}, \quad z^2 \equiv 1 \pmod{7}, \quad z^2 \equiv 4 \pmod{7}, \quad z^2 \equiv 2 \pmod{7}$$

Also gilt für z^2 niemals $z^2 \equiv 3 \pmod{7}$. Folglich kann eine Zahl der Form $7n + 3$ niemals Quadrat einer ganzen Zahl sein.

L.1.34

a) Es gilt z.B. für $a = 5$ und $b = 13$

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2, \quad 5 \cdot 13 = 65 = 1^2 + 8^2$$

b) Angenommen, a und b seien zwei derartige natürliche Zahlen. Dann gilt mit natürlichen Zahlen u, v, x, y

$$a = u^2 + v^2, \quad b = x^2 + y^2$$

also

$$\begin{aligned} ab &= (u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = u^2x^2 + u^2y^2 + v^2x^2 + v^2y^2 \\ &= (u^2x^2 + v^2y^2) + (u^2y^2 + v^2x^2) \\ &= (u^2x^2 + 2uvxy + v^2y^2) + (u^2y^2 - 2uvxy + v^2x^2) = (ux + vy)^2 + (uy - vx)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$= (ux + vy)^2 + (vx - uy)^2 \quad (2)$$

Da entweder $(uy - vx)$ oder $(vx - uy)$ und sämtliche der Zahlen u, v, x, y natürliche Zahlen sind, stehen auch in den Klammern von (1) bzw. (2) natürliche Zahlen, d. h., ab ist als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar.

L.1.35

a) Da u und v ungerade natürliche Zahlen, also $u^2 - v^2$ und $u^2 + v^2$ gerade Zahlen sind und wegen $u > v$ auch $y > 0$ gilt, sind x, y, z natürliche Zahlen, und es gilt

$$x^2 + y^2 = u^2v^2 + \frac{u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4} = \frac{u^4 + 2u^2v^2 + v^4}{4} = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2 = z^2$$

w.z.b.w.

b) Es sei $D = x - y$. Dann gilt $D \neq 0$; denn aus $D = 0$ würde $x = y$ folgen, d.h. $2x^2 = z^2$, im Widerspruch zu der Feststellung, dass x und z natürliche Zahlen sind. Nun gilt

$$D = uv - \frac{u^2 - v^2}{2} = \frac{v^2 + 2uv + u^2 - 2u^2}{2} = \frac{(u + v)^2 - 2u^2}{2}$$

Aus $D > 0$, d.h. $x > y$, folgt $u + v > u\sqrt{2}$, also $u < (1 + \sqrt{2})v$ und umgekehrt.

Aus $D < 0$, d.h. $x < y$, folgt $u > (1 + \sqrt{2})v$ und umgekehrt. Daher ist im Fall $(v < u < (1 + \sqrt{2})v)$ die Zahl x , im Fall $u > (1 + \sqrt{2})v$ die Zahl y die größere der beiden Zahlen x, y .

L.1.36

a) Für jede Zahl k gilt

$$k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + k^2 - 2k + 1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Ist k ganz, so erhält man das Quadrat der rationalen Zahl $\frac{k+1}{2}$, womit der Satz bewiesen ist.

b) Die erhaltene Gleichung (1) führt auf ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn k eine Quadratzahl ist und $\frac{k-1}{2}$ sowie $\frac{k+1}{2}$ natürliche Zahlen sind.

Letzteres ist für alle ungeraden Quadratzahlen $k > 1$ der Fall. Man erhält so z. B. die folgenden pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z) :

k	$x = \sqrt{k}$	$y = \frac{k-1}{2}$	$z = \frac{k+1}{2}$	Tatsächlich ist
9	3	4	5	$9 + 16 = 24$
25	5	12	13	$25 + 144 = 169$
49	7	24	25	$49 + 576 = 625$
81	9	40	41	$81 + 1600 = 1681$

Für jedes dieser vier Tripel gilt: In je dreien dieser vier Tripel kommt mindestens eine Zahl vor, die durch keine Zahl des vierten Tripels teilbar ist. Daher sind die vier Tripel (in dem angegebenen Sinne) voneinander verschieden.

L.1.37

b) Angenommen, es gäbe $2n+1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n+1)$ -te dieser Zahlen mit x , so lauten sie $x-n, x-n+1, \dots, x, \dots, x+n$ und erfüllen die Gleichung

$$(x-n)^2 + \dots + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + \dots + (x+n)^2 \quad (1)$$

Wegen $(x+k)^2 - (x-k)^2 = 4kx$ ($k = 1, \dots, n$) folgt aus Gleichung (1)

$$x^2 = 4(1 + \dots + n)x = 4 \frac{n(n+1)}{2} x \quad \text{also} \quad x(x - 2n(n+1)) = 0 \quad (2)$$

Daher muss $x = 0$ oder $x = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n$ sein, d.h., es kommen nur die Zusammenstellungen

$$-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n \quad (3)$$

$$2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, \dots, 2n^2 + 2n, \dots, 2n^2 + 3n \quad (4)$$

als Lösungen in Frage.

In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n+1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie oben auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$, so entsteht a). Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen 10, ..., 14, aus (3) die somit einzige weitere Lösung $-2, \dots, 2$.

L.1.38

Für natürliche Zahlen $a < 9$ ist $t < 0$. Für $a = 9$ ist t nicht definiert. Ist $a > 9$ und setzt man $h = a - 9$, so ist h stets eine natürliche Zahl, ferner $a = h + 9$ und

$$t = \frac{h+20}{h} = 1 + \frac{20}{h}$$

Somit ist t genau dann eine natürliche Zahl, wenn h Teiler von 20 ist. Mithin ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

h	$a = h + 9$	t
1	10	21
1	11	11
4	13	6
5	14	5
10	19	3
20	29	2

Damit erfüllen genau die Zahlen 10, 11, 13, 14, 19 und 29 alle gestellten Bedingungen.

L.1.39

Laut Aufgabe gilt

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1-4}{1^2} \cdot \frac{3^2-2^2}{3^2} \cdot \frac{5^2-2^2}{5^2} \cdots \frac{197^2-2^2}{197^2} \cdot \frac{199^2-2^2}{199^2} \\
 &= -3 \cdot \frac{(3-2)(3+2)}{3^2} \cdot \frac{(5-2)(5+2)}{5^2} \cdots \frac{(197-2)(197+2)}{197^2} \cdot \frac{(199-2)(199+2)}{199^2} \\
 &= -3 \cdot \frac{1 \cdot 5}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 7}{5^2} \cdots \frac{195 \cdot 199}{197^2} \cdot \frac{197 \cdot 201}{199^2}
 \end{aligned}$$

Dabei durchlaufen in den Zählern die ersten Faktoren die Folge der ungeraden Zahlen von 1 bis 197, die zweiten Faktoren die Folge der ungeraden Zahlen von 5 bis 201. Also ist

$$z = \frac{-1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot 197^2 \cdot 199 \cdot 201}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot 195^2 \cdot 197^2 \cdot 199^2}$$

und damit $z = -\frac{201}{199}$.

L.1.40

a) Es gilt $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl, für die $\frac{n(n+1)}{2} = 2415$ gilt. Dann folgt

$$n^2 + n - 4830 = 0$$

und hieraus entweder $n = 69$ oder $n = -70$. Da aber $-70 < 0$ ist, kann nur $n = 69$ die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 69

$$s_{69} = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415$$

b) Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl m , für die $\frac{m(m+1)}{2} = 69m$ gilt. Wegen $m \neq 0$ folgt daraus $\frac{m(m+1)}{2} = 69$, also $m = 137$. Daher kann nur diese Zahl die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 137

$$s_{137} = \frac{137 \cdot 138}{2} = 137 \cdot 69$$

L.1.41

Angenommen, n sei eine natürliche Zahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt einerseits

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

andererseits lässt sich die laut Aufgabe entstehende Summe in der Form $111x$ schreiben, wobei x eine natürliche Zahl ist, für die $1 \leq x \leq 9$ gilt. Daher ist

$$n(n + 1) = 2 \cdot 111x = 2 \cdot 3 \cdot 37x$$

Da 37 Primzahl ist, folgt, dass entweder n oder $n + 1$ durch 37 teilbar ist. Ferner gilt, da die Summe $1 + 2 + \dots + n$ dreistellig sein soll, $n(n + 1) < 2000$, also erst recht $n^2 < 2000$ und daher $n < 45$. Folglich kann n nur eine der Zahlen 36, 37 sein.

Wegen $\frac{36 \cdot 37}{2} = 666$ und $u = 703$ erhält man somit genau dann eine dreistellige Zahl mit drei gleichen Ziffern als Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n , wenn $n = 36$ ist.

L.1.42

Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{n(n+1)}{2}$. Daher sind für natürliche Zahlen n, x genau dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wenn

$$\frac{n(n + 1)}{2} = 448 + x \quad \text{und} \quad 0 < x \leq n \quad (1,2)$$

ist. Gelten (1), (2), so folgt $448 < \frac{n^2+n}{2} \leq 448 + n$, also

$$896 < n^2 + n \leq 896 + 2n$$

Aus $896 < n^2 + n$ ergibt sich $n > 29$; denn wäre $0 < n \leq 29$, so wäre $n(n + 1) \leq 29 \cdot 30 = 870 < 896$. Aus $n^2 + n < 896 + 2n$ ergibt sich $n(n - 1) \leq 896$ und hieraus $n < 31$; denn wäre $n \geq 31$, so wäre

$$n(n - 1) \geq 31 \cdot 30 = 930 > 896$$

Aus beiden Bedingungen für n folgt $n = 30$, hieraus und aus (1)

$$x = \frac{30 \cdot 31}{2} - 448 = 17$$

Daher können nur $n = 30$, $x = 17$ den Forderungen der Aufgabe genügen.

Wegen $\frac{30 \cdot 31}{2} = 448 + 17$ und $0 < 17 \leq 30$ erfüllen sie sie tatsächlich.

L.1.43

Für jedes Element z_ν der Folge (ν eine der Zahlen 0, 1, 2, ...) gilt:

a) d ist (als ein gemeinsamer Teiler von a und z_n auch) ein gemeinsamer Teiler von a und $z_n + (\nu - n)a = z_\nu$.

b) Ist rein gemeinsamer Teiler von a und z_ν , so ist t auch ein gemeinsamer Teiler von a und $z_n + (\nu - v)a = z_n$, folglich auch ein Teiler ihres größten gemeinsamen Teilers d .

c) Aus a) und b) folgt: Der größte gemeinsame Teiler von a und z_ν ist d . Also haben alle Elemente der Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d .

L.1.44

Offenbar gilt $s_0 = 3^0$, d. h., die Behauptung ist richtig für $n = 0$. Ferner steht nach Definition in Zeile 0 genau eine Zahl.

Wir zeigen nun, daß aus der Richtigkeit der Behauptung sowie der weiteren Aussage, dass in Zeile n genau $2n + 1$ positive Zahlen stehen, für die ganze Zahl $n = k \geq 0$ auch die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt:

Bezeichnet man die von null verschiedenen Zahlen der Zeile k der Reihe nach mit a_0, a_1, \dots, a_{2k} , so gilt laut Induktionsvoraussetzung

$$s_k = a_0 + a_1 + \dots + a_{2k} = 3^k \quad a_i > 0, i = 0, 1, \dots, 2k$$

Nach dem angegebenen Bildungsgesetz des Zahlenschemas sind dann in Zeile $k + 1$ genau die folgenden Zahlen von null verschieden:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 + 0 + a_0 \\ b_1 &= 0 + a_0 + a_1 \\ b_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ b_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots \\ b_{2k} &= a_{2k-2} + a_{2k-1} + a_{2k} \\ b_{2k+1} &= a_{2k-1} + a_{2k} + 0 \\ b_{2k+2} &= a_{2k} + 0 + 0 \end{aligned}$$

Jede von ihnen ist somit positiv, und ihre Anzahl beträgt $2k + 3 = 2(k + 1) + 1$. In ihrer Summe $s_{k+1} = b_0 + b_1 + \dots + b_{2k+2}$ tritt jeder der Summanden a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2k$) genau dreimal auf. Daher gilt

$$s_{k+1} = 3(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}) = 3s_k = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$$

Somit sind die Aussage über die Anzahl der von null verschiedenen a_i , ($a_i > 0$) und die zu beweisende Behauptung, die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n des gegebenen Zahlenschemas betrage 3^n , für alle ganzen Zahlen $n > 0$ bewiesen.

L.1.45

Angenommen, a_1, a_2, \dots sei eine Folge der gesuchten Art. Dann ergibt sich aus der Forderung an S_n für $n = 1$ und $n = 2$

$$S_1 = a_1 = 1 + 5 = 6 \quad , \quad S_2 = a_1 + a_2 = 4 + 10 = 14$$

also

$$a_2 = 14 - 6 = 8$$

Daher muss das Anfangsglied $a_1 = 6$ und die (für alle $n = 1, 2, \dots$ gleichlautende) Differenz $d = a_{n+1} - a_n = 2$ sein.

Umgekehrt gilt für die arithmetische Folge mit $a_1 = 6$ und $d = 2$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$$

also in der Tat

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(6 + 2n + 4) = \frac{n}{2}(2n + 10) = n^2 + 5n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

11 Lösungen - Gleichungen

Lineare Gleichungen - Nichtlineare Gleichungen - Gleichungssysteme - Diophantische Gleichungen

L.2.1

Aus der Voraussetzung folgt durch Multiplikation mit $abc(a+b+c)$ die Beziehung

$$(a+b+c)(bc+ac+ab) = abc$$

also

$$(a+b)(bc+ac+ab) + bc^2 + ac^2 + abc = abc$$

$$(a+b)(bc+ac+ab) + (a+b)c^2 = 0$$

$$(a+b)(bc+ac+ab+c^2) = 0$$

$$(a+b)(b(c+a) + c(c+a)) = 0$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

Hieraus folgt, dass mindestens eine der Gleichungen $a = -b$, $a = -c$, $b = -c$ gilt.

L.2.2

Addiert man die Quotienten auf der linken Seite von (*), so folgt, dass (*) gleichbedeutend ist mit

$$\frac{c+d+a+b}{(a+b)(c+d)} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}$$

Diese Gleichung ist genau dann eine wahre Aussage, $a+b+c+d = 1$ und $a \neq -b$ sowie $c \neq -d$ gelten. Wählt man für a eine der Zahlen -1, 0 oder 1, so verbleiben für b wegen $a \neq -b$ je genau zwei Zahlen, nämlich die in der untenstehenden Tabelle genannten.

Von den erhaltenen Zahlen sind die mit $a+b = -2$ und die mit $a+b = 1$ auszuschließen, da sich aus $a+b+c+d = 1$ für sie $c+d = 3$ bzw. $c+d = 0$ ergibt, was durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 nicht zu erreichen ist bzw. im Widerspruch zu $c \neq -d$ steht.

In jeder der nun verbliebenen Möglichkeiten ergibt sich genau eine Zahl für $c+d$, die durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 durch genau die folgenden Zahlen erreicht werden kann:

a	-1	-1	0	0	1	1	1
b	-1	0	-1	1	0	1	1
$a+b$	-2	-1	-1	1	1	2	1
$c+d$	3	2	2	0	0	-1	-1
c	-	1	1	-	-	-1	0
d	-	1	1	-	-	0	-1

Die 2., 3., 6. und 7. Spalte genügen als einzige allen Bedingungen der Aufgabe, wie man durch Einsetzen erkennt.

L.2.3

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x , die die gegebene Gleichung erfüllt. Dann ist $\frac{5x+3}{7}$ ganzzahlig, und es gibt eine reelle Zahl a mit $0 \leq a < 1$, für die

$$\frac{10+3x}{6} = \frac{5x+3}{7} + a$$

gilt. Daraus folgt $70 + 21x = 30x + 18 + 42a$, woraus man

$$x = \frac{52 - 42a}{9}$$

erhält. Wegen $0 \leq a < 1$ ergibt sich daraus

$$\frac{10}{9} < x \leq \frac{52}{9}$$

und weiter

$$\frac{\frac{50}{9} + 3}{7} < \frac{5x+3}{7} \leq \frac{\frac{260}{9} + 3}{7} \quad \text{bzw.} \quad \frac{11}{9} < \frac{5x+3}{7} \leq \frac{41}{9}$$

also kann der Ausdruck $\frac{5x+3}{7}$ (da er ganzzahlig ist) nur gleich einer der Zahlen 2, 3, 4 sein.

Aus $\frac{5x+3}{7} = 2$ folgt $x = \frac{11}{5}$,

aus $\frac{5x+3}{7} = 3$ folgt $x = \frac{18}{5}$,

Aus $\frac{5x+3}{7} = 4$ folgt $x = 5$.

Also können höchstens $x = \frac{11}{5}$, $x = \frac{18}{5}$, $x = 5$ Lösungen von (*) sein. Tatsächlich sind dies Lösungen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \left[\frac{10 + \frac{33}{5}}{6} \right] &= 2 & , & & \frac{\frac{55}{5} + 3}{7} &= 2 \\ \left[\frac{10 + \frac{54}{5}}{6} \right] &= 3 & , & & \frac{\frac{90}{5} + 3}{7} &= 3 \\ \left[\frac{10 + 15}{6} \right] &= 4 & , & & \frac{25 + 3}{7} &= 4 \end{aligned}$$

L.2.4

Angenommen, es gibt ein Tripel (m, x, y) mit den geforderten Eigenschaften. Dann ist

$$x = 5y - 11 < 0 \tag{1}$$

also $y < \frac{11}{5}$. Daher ist y einer der Werte 1, 2. Hierzu gehören nach (1) für x die Werte -6 bzw. -1 und nach (*) für m die Werte $\frac{15}{2}$ bzw. 4. Also können höchstens die Tripel $(\frac{15}{2}, -6, 1)$ und $(4, -1, 2)$ Lösung der Aufgabe sein.

Eine Probe zeigt, dass diese beiden Tripel das Gleichungssystem erfüllen und die übrigen geforderten Eigenschaften haben.

L.2.5

Mit den üblichen Bezeichnungen s für die Weglänge, v für die Geschwindigkeit und t für die aufgewandte Zeit gilt $s = vt$ bzw. $t = \frac{s}{v}$. Wird nun die von A aufgewandte Zeit mit t_A und die von B aufgewandte Zeit mit t_B bezeichnet, dann gilt einerseits für A:

$$t_A = t_1 + t_2 \quad \text{mit} \quad t_1 = \frac{s}{2 \cdot 4} = \frac{s}{8} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{s}{2 \cdot 5} = \frac{s}{10}$$

also $t_A = \frac{9}{40}s$; andererseits für B:

$$s_B = s_1 + s_2 \quad \text{mit} \quad s_1 = \frac{t_B}{2} \cdot 4 \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{t_B}{2} \cdot 5$$

also $s = \frac{t_B}{2} \cdot 9$ bzw. $t_B = \frac{2}{9}s$.

Wegen $9 \cdot 9 > 2 \cdot 40$ gilt nun $t_A > t_B$, d. h., B war eher am Ziel als A.

Ein anderer Lösungsweg:

Man kann sich die Gesamtstrecke in neun gleichlange Teilstrecken geteilt denken. Dann ging A genau $4\frac{1}{2}$ dieser Teilstrecken mit 4 km/h, den Rest mit 5 km/h. B dagegen ging genau vier dieser Teilstrecken mit 4 km/h, die restlichen fünf Teilstrecken mit 5 km/h; denn bei dieser Aufteilung sind die aufgewandten Zeiten für die beiden Geschwindigkeiten gleich (und, da sie bei jeder anderen Aufteilung anders ausfallen, auch nur bei dieser). Daher kam B zuerst am Ziel an.

Oder:

Wäre die Teilstrecke s , die B mit 5 km/h durchläuft, eine Hälfte der Gesamtstrecke oder weniger, so benötigte B für s weniger Zeit als für die andere langsamer durchlaufene und mindestens ebenso lange Teilstrecke. Dies widerspricht der Aufgabenstellung. Also war die mit 5 km/h durchlaufene Teilstrecke für B länger als die für A. Folglich kam B zuerst am Ziel an.

L.2.6

Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten (in km/h) der beiden Kraftwagen K_1, K_2 , seien v_1, v_2 , die Maßzahlen der Zeiten (in h), in denen sie die Strecke AB durchfahren, seien t_1, t_2 . Dann gilt

$$210 = v_1 t_1 = v_2 t_2 \tag{1}$$

Ferner ist sowohl $(t_1 - 2)$ h als auch $(t_2 - \frac{9}{8})$ h die Zeit vom Fahrtbeginn bis zur Begegnung, so dass

$$t_1 = t_2 + \frac{7}{8} \tag{2}$$

gelten muss. Danach ergibt sich die Entfernung vom Treffpunkt T nach B als $(v_1 \cdot 2)$ km und von T nach A als $(v_2 \cdot \frac{9}{8})$ km, woraus

$$v_1 \cdot 2 + v_2 \cdot \frac{9}{8} = 210 \tag{3}$$

folgt. Zur Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) multipliziere man etwa (3) mit $t_1 t_2$ und berücksichtige anschließend (1) und (2). Es ergibt sich

$$210t_2 \cdot 2 + 210 \left(t_2 + \frac{7}{8} \right) \cdot \frac{9}{8} = 210 \left(t_2 + \frac{7}{8} \right) \cdot t_2$$

also

$$t_2^2 - \frac{9}{4}t_2 - \frac{63}{64} = 0$$

woraus man

$$t_2 = \frac{9}{8} \pm \frac{1}{8} \sqrt{81 + 63} = \frac{9}{8} \pm \frac{12}{8}$$

erhält. Davon ist allein $t_2 = \frac{21}{8}$ brauchbar, da $t_2 > 0$ gilt. Nach (2) und (1) folgt hieraus weiter $t_1 = \frac{21}{8} + \frac{7}{8} = \frac{7}{2}$,

$$v_1 = \frac{210 \cdot 2}{7} = 60 \quad , \quad v_2 = \frac{210 \cdot 8}{21} = 80$$

In der Tat erfüllen diese Werte die Bedingungen der Aufgabe: Nach der Zeit

$$(t_1 - 2) \text{ h} = \left(t_2 - \frac{9}{8} \right) \text{ h} = \frac{3}{2} \text{ h}$$

hat K_1 eine Strecke von $60 \cdot \frac{3}{2} \text{ km} = 90 \text{ km}$ zurückgelegt, K_2 eine von $80 \cdot \frac{3}{2} \text{ km} = 120 \text{ km}$; wegen $(90 + 120) \text{ km} = 210 \text{ km}$ begegnen sich K_1 und K_2 also zu diesem Zeitpunkt. Danach braucht K_1 für die restlichen 120 km eine Zeit von $\frac{120}{60} \text{ h} = 2 \text{ h}$ sowie K_2 für die restlichen 90 km eine Zeit von $\frac{90}{80} \text{ h} = \frac{9}{8} \text{ h}$. Die Geschwindigkeiten der Kraftwagen betragen somit $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

L.2.7

a) Die Entfernung von A nach B betrage $s \text{ km}$. Dann fuhr das erste Auto mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{4} \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und das zweite mit $\frac{s}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Das erste Auto ist nach t Stunden genau dann doppelt so weit von B entfernt wie das zweite, wenn

$$s - \frac{s}{4}t = 2\left(s - \frac{s}{3}t\right)$$

gilt. Wegen $s \neq 0$ ist dies äquivalent mit

$$1 - \frac{t}{4} = 2\left(1 - \frac{t}{3}\right)$$

also mit $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)t = 1$ und daher schließlich mit

$$t = \frac{12}{5} = 2,4$$

Nach genau $2,4 \text{ h}$ war daher das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite Auto.

b) Das erste Auto legte bis zu diesem Zeitpunkt wegen $\frac{s}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3}{4}s$ genau $\frac{3}{5}$ des Weges, das zweite wegen $\frac{s}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5}s$ genau $\frac{4}{5}$ des Weges zurück.

L.2.8

Es seien t bzw. t' die Maßzahlen der in Stunden gemessenen Zeiten für das fahrplanmäßige bzw. für das tatsächliche Durchfahren der Strecke s , ferner seien v bzw. v' die Maßzahlen der in km/h gemessenen fahrplanmäßigen bzw. tatsächlichen Durchschnittsgeschwindigkeit. Dann gilt

$$tv = 20 \quad , \quad t'v' = 20 \quad (1,2)$$

ferner

$$t' = t - \frac{1}{15} \quad , \quad v' = v + 10 \quad (3,4)$$

Aus (3) und (1) folgt $t' = \frac{20}{v} - \frac{1}{15}$; setzt man dies und (4) in (2) ein, so ergibt sich $\left(\frac{20}{v} - \frac{1}{15}\right)(v + 10) = 20$, also $(300 - v)(v + 10) = 300v$, d.h.

$$v^2 + 10v - 3000 = 0 \quad (5)$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen $v_{1,2} = -5 \pm \sqrt{3025}$, d.h. $v_1 = 50$, $v_2 = -60$. Wegen $v > 0$ betrug daher die fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit 50 km/h. Da die Erfüllbarkeit der Bedingungen aus der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist eine "Probe" nicht erforderlich.

L.2.9

a) Die Gültigkeit der gegebenen Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Bestehen der Bedingungen $a \neq 0$, $x \neq -a$, $x \neq 2a$ und der Gleichung

$$2x^2 - (3a + 4)x + a^2 + a - 6 = 0$$

b) Diese Gleichung hat, ohne Beachtung der vorgenannten Bedingungen betrachtet, genau die Lösungen $x_1 = a + 3$, $x_2 = \frac{a-2}{2}$.

c) Mit Hilfe der nachfolgenden Fallunterscheidung kann man aus den in b) erhaltenen reellen Zahlen x_1 und x_2 alle die aussondern, die den in a) genannten Bedingungen für x nicht genügen.

c1) Es gilt $x_1 = a + 3 = -a$ genau für $a = -7$ und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_2 = \frac{a-2}{2} = -\frac{7}{4}$.

c2) Es gilt $x_1 = a + 3 = 2a$ genau für $a = 3$, und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_2 = \frac{a-2}{2} = \frac{1}{2}$.

c3) Es gilt $x_2 = \frac{a-2}{2} = -a$ genau für $a = \frac{2}{3}$ und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_1 = a + 3 = \frac{11}{3}$,

c4) Es gilt $x_2 = \frac{a-2}{a} = 2a$ genau für $a = -\frac{2}{3}$ und ist dies der Fall, so ergibt $x_1 = a + 3 = \frac{7}{3}$.

d) Aus a), b) und c) ergibt sich die folgende Lösungsübersicht: Die gegebene Gleichung hat für $a \neq 0$, $a \neq -\frac{3}{2}$, $a \neq 3$, $a \neq \frac{2}{3}$, $a = -\frac{2}{3}$ die Lösungen $x_1 = a + 3$, $x_2 = \frac{a-2}{2}$ (diese sind voneinander verschieden, wenn außerdem noch $a \neq -8$ gilt; ist $a = -8$, so fallen x_1 und x_2 zu der einzigen Lösung $x_1 = -5$ zusammen);

für $a = -\frac{3}{2}$ die Lösung $x_2 = -\frac{7}{4}$

für $a = 3$ die Lösung $x_2 = \frac{1}{2}$

für $a = \frac{2}{3}$ die Lösung $x_1 = \frac{11}{3}$

für $a = -\frac{2}{3}$ die Lösung $x_1 = \frac{7}{3}$

für $a = 0$ keine Lösung.

L.2.10

Angenommen, eine Gleichung (*) mit ungeraden a , b , c besitzt eine rationale Lösung x_1 . Dann lässt sich x_1 in der Form $x_1 = \frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q ganze teilerfremde Zahlen sind und $q \neq 0$ ist. Damit gilt

$$a \left(\frac{p}{q} \right)^2 + b \left(\frac{p}{q} \right) + c = 0 \quad \text{also} \quad ap^2 + bpq + cq^2 = 0 \quad (1,2)$$

Fall 1: p und q sind ungerade.

Da die Quadrate ungerader Zahlen ungerade, die Produkte ungerader Zahlen ebenfalls ungerade sind und auch die Summe dreier ungerader Zahlen ungerade ist, steht auf der linken Seite von (2) eine ungerade Zahl, also eine Zahl, die ungleich 0 ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: Eine der beiden Zahlen p , q ist gerade, die andere ungerade.

Dann ist bpq eine gerade Zahl, und von den Zahlen ap^2 und cq^2 ist die eine gerade, die andere ungerade. Die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl ist aber ungerade, woraus wie im Fall 1 ein Widerspruch folgt.

Fall 3: p und q sind gerade.

Dann sind sie im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd.. Da es keine weiteren Möglichkeiten gibt, ist die Behauptung bewiesen.

L.2.11

Angenommen, a und b seien Zahlen der verlangten Art. Dann folgt $a \neq b$; denn wäre $a = -b$, so erhielte man nach Aufgabenstellung $0 = a + b = ab = -b^2$, also $b = 0$, $a = 0$, im Widerspruch dazu, dass nach Aufgabenstellung $b < a$ sein müsste.

Nach Aufgabenstellung ist ferner $a + b = a^2 - b^2$ oder $a + b = b^2 - a^2$. Die letzte Gleichung würde wegen $a + b \neq 0$ auf $1 = b - a$ und somit ebenfalls auf einen Widerspruch zu $b < a$ führen.

Daher bleibt nur die Möglichkeit $a + b = a^2 - b^2$, woraus wegen $a + b \neq 0$ weiter $1 = a - b$, also $a = b + 1$ folgt. Setzt man dies in $a + b = ab$ ein, so erhält man die Gleichung $2b + 1 = b^2 + b$, d.h. $b^2 - b - 1 = 0$, die die Lösungen

$$b_\nu = \frac{1}{2} - (-1)^\nu \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 - (-1)^\nu \sqrt{5}}{2} \quad (\nu = 1, 2)$$

und nur diese hat. Wegen $a = b + 1$ erhält man als zu b_1 bzw. b_2 gehörige Werte für a

$$a_\nu = \frac{3 - (-1)^\nu \sqrt{5}}{2}$$

Somit können höchstens die Paare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) Lösung der Aufgabe sein. Die folgende Probe zeigt, dass sie dies tatsächlich sind: Erstens gilt $b_\nu < a_\nu$. Zweitens ist

$$\begin{aligned} a_\nu + b_\nu &= \frac{4 - (-1)^\nu \sqrt{5}}{2} = 2 - (-1)^\nu \sqrt{5} \\ a_\nu b_\nu &= 2 - (-1)^\nu \sqrt{5} \\ a_\nu^2 - b_\nu^2 &= 2 - (-1)^\nu \sqrt{5} \end{aligned}$$

L.2.12

Angenommen, es sei (x_0, y_0, z_0) eine reelle Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann folgt aus (*) und (**) durch Addition $2x_0 = (a + b)z_0$, d.h.

$$x_0 = \frac{a + b}{2} z_0 \quad (1)$$

durch Subtraktion $2y_0 = (a - b)z_0$, d.h.

$$y_0 = \frac{a - b}{2} z_0 \quad (2)$$

Man erhält daher aus (1) und (2) gemäß (***)

$$z_0^2 \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{4} c z_0 = 0 \quad , \quad z_0 \left(\frac{a^2 + b^2}{2} z_0 - c \right) = 0 \quad (3)$$

Daraus folgt, dass $z_0 = 0$ und wegen (1) und (2) auch $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ oder

$$\frac{a^2 + b^2}{2} z_0 = c \quad (4)$$

gilt. Da für $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ die Gleichungen (*), (**) und (***) erfüllt sind, erhalten wir $(0, 0, 0)$ als eine Lösung.

Nun mehr sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: a und b sind nicht gleichzeitig null, d.h., es ist $a^2 + b^2 \neq 0$. Dann erhält man aus (4)

$$z_0 = \frac{2c}{a^2 + b^2}$$

und aus (1) und (2)

$$x_0 = \frac{(a + b)c}{a^2 + b^2} \quad , \quad y_0 = \frac{(a - b)c}{a^2 + b^2}$$

Da für diese Werte von x_0, y_0 und z_0 die Gleichungen (*), (**) und (***) erfüllt sind, erhält man in diesem Fall die Lösung

$$\left(\frac{(a+b)c}{a^2+b^2}, \frac{(a-b)c}{a^2+b^2}, \frac{2c}{a^2+b^2} \right)$$

sowie die Aussage, dass außer den beiden angegebenen Lösungen (die im Fall $c \neq 0$ voneinander verschieden sind, im Fall $c = 0$ übereinstimmen) keine weiteren existieren können.

Fall 2: $a = b = 0$ und $c \neq 0$.

Dann erhält man aus (*), (**) und (***) unmittelbar $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, also $(0, 0, 0)$ als einzige Lösung.

Fall 3: $a = b = 0$ und $c = 0$.

Dann führen (*) und (**) auf $x_0 = y_0 = 0$, also können höchstens die Tripel $(0, 0, t)$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist, Lösungen sein. Für alle diese Tripel sind (im vorliegenden Fall 3) in der Tat (*), (**), (***) erfüllt.

L.2.13

Angenommen, ein Tripel (x_0, y_0, z_0) sei Lösung von (*), (**). Dann ergibt sich, indem man z.B. $x_0 = 2 - y_0$ in (**) einsetzt, $y_0^2 - 2y_0 + z_0^2 + 1 = 0$, also

$$(y_0 - 1)^2 + z_0^2 = 0 \quad (1)$$

Wäre nun $y_0 \neq 1$ oder $z_0 \neq 0$, so folgte $(y_0 - 1)^2 > 0$ bzw. $z_0^2 > 0$, also, da stets $(y_0 - 1)^2 \geq 0$ und $z_0^2 \geq 0$ ist, in jedem Fall $(y_0 - 1)^2 + z_0^2 > 0$, im Widerspruch zu (1). Daher ergibt sich aus (1), dass $y_0 = 1$ und $z_0 = 0$ sein muss.

Aus (*) folgt dann $x_0 = 1$. Also kann höchstens das Tripel $(1, 1, 0)$ Lösung des Gleichungssystems (*), (**) sein.

Tatsächlich ist dies Lösung, denn für $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 0$ wird

$$x_0 + y_0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{oder} \quad x_0 y_0 - z_0^2 = 1 - 0 = 1$$

L.2.14

Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x, y) , das die Bedingungen a), b) erfüllt. Dann gilt

$$x + y = 6, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6 \quad (1,2)$$

Aus (1) folgt $y = 6 - x$ und $x \neq 6$ wegen $y \neq 0$; hieraus und aus (2) ergibt sich

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{6-x} = 6$$

Nach Multiplikation mit $x(6-x)$, Subtraktion von $6x(6-x)$ und Division durch 6 gelangt man zu $x^2 - 6x + 1 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Als zugehörige Werte erhält man aus (1)

$$y_{1,2} = 3 \mp 2\sqrt{2}$$

Also können höchstens die Paare

$$(3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}) \quad \text{und} \quad (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$$

Lösung sein. Tatsächlich gelten für sie die Gleichungen

$$3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 6$$

sowie diejenige Gleichungen, die durch Vertauschung von $+2\sqrt{2}$ mit $-2\sqrt{2}$ entstehen.

L.2.15

Wir setzen

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \quad (1)$$

$$g(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 \quad (2)$$

Die gegebene Gleichung ist genau für alle diejenigen x erfüllt, für die $|f(x)| = |g(x)|$, also $f(x) = g(x)$ oder $f(x) = -g(x)$ ist.

a) Es sei $f(x) = g(x)$.

Nach (1) und (2) ist dies äquivalent mit

$$2 \cdot 2x^3 - 2 \cdot 14x = 0, \quad x(x^2 - 7) = 0$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{7}, \quad x_3 = -\sqrt{7}$$

b) Es sei $f(x) = -g(x)$.

Nach (1) und (2) ist dies äquivalent mit

$$2x^4 - 2 \cdot 13x^2 + 2 \cdot 24 = 0, \quad \left(x^2 - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{73}{4} = 0,$$

$$\left(x^2 - \frac{13 + \sqrt{73}}{2}\right) \left(x^2 - \frac{13 - \sqrt{73}}{2}\right) = 0$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{26 + 2\sqrt{73}} \quad , \quad x_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{26 + 2\sqrt{73}}$$

$$x_6 = \frac{1}{2}\sqrt{26 - 2\sqrt{73}} \quad , \quad x_7 = -\frac{1}{2}\sqrt{26 - 2\sqrt{73}}$$

Da wir nur äquivalente Umformungen durchgeführt haben, hat die gegebene Gleichung genau sieben reelle Lösungen, nämlich die oben angegebenen Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$.

L.2.16

Es wird sogleich der allgemeine Fall b) gelöst: Setzt man $x = z - \frac{3}{2}$, so ist x eine Lösung der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a \quad (1)$$

genau dann, wenn z eine Lösung der Gleichung

$$\left(z - \frac{3}{2}\right) \left(z + \frac{3}{2}\right) \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right) = a \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left(z^2 - \frac{9}{4}\right) \left(z^2 - \frac{1}{4}\right) &= a \\ z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} - a &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ist. Die Gleichung (3) ist genau dann erfüllt, wenn

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16} + a} = \frac{5}{4} + \sqrt{1+a} \quad (4)$$

oder

$$z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1+a} \quad (5)$$

gilt. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1 (zugleich Antwort zu Aufgabe a)): Für $a = \frac{9}{16}$ folgt aus (4)

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{10}{4}$$

und aus (5)

$$z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = 0$$

Daher hat (3) in diesem Fall genau drei Lösungen, nämlich

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}, \quad z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Die Gleichung (1) hat somit in diesem Fall ebenfalls genau drei Lösungen, nämlich:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}, \quad x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Fall 2: Für $a < -1$ hat die Gleichung (3) und daher auch die Gleichung (1) keine Lösung, weil dann $1+a < 0$ ist.

Fall 3: Für $a = -1$ hat (3) genau zwei Lösungen, nämlich

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Fall 4: Für $a > -1$ und $\sqrt{1+a} < \frac{5}{4}$ ($1+a < \frac{25}{16}$ oder $a < \frac{9}{16}$), d.h. für $-1 < a < \frac{9}{16}$ hat (3) genau vier Lösungen, nämlich

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}} & , & & z_2 &= -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}} \\ z_3 &= \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}} & , & & z_4 &= -\sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}} \end{aligned}$$

Fall 5: Für $a > \frac{9}{16}$ wird $\frac{5}{4} - \sqrt{1+a} < \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 0$; die Gleichung (3) hat also genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}} \quad , \quad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}$$

Zusammenfassung:

Die Gleichung (1) hat, wenn man nur reelle Lösungen zulässt,
keine Lösung, falls $a < -1$ ist,
genau eine Lösung in keinem Fall,
genau zwei Lösungen, falls $a = -1$ oder $a > \frac{9}{16}$,
genau drei Lösungen, falls $a = \frac{9}{16}$,
genau vier Lösungen, falls $-1 < a < \frac{9}{16}$,
mehr als vier Lösungen in keinem Fall.

L.2.17

a) Aus der in der Aufgabe genannten Gleichung folgt

$$(x^2 + 1)(xz + y - x^3) = 0$$

wegen $x^2 + 1 \neq 0$ also

$$xz + y - x^3 = 0$$

Somit können höchstens Tripel $(x, x^3 - xz, z)$ mit beliebigen reellen Zahlen x, z die genannte Gleichung erfüllen. Eine Probe zeigt, dass jedes solche Tripel dies auch tut.

b) Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel der in a) genannten Art, das zusätzlich die in b) aufgeführten Bedingungen erfüllt.

Wäre in diesem Tripel $x = 0$, so folgte aus a) auch $y = 0$, und (x, y, z) wäre keine Lösung der Aufgabe b). Wäre $z = 0$, so folgte $y = x^3$ und daraus, dass $xy = x^4 \geq 0$ wäre, also x und y nicht verschiedenes Vorzeichen hätten: (x, y, z) wäre also keine Lösung der Aufgabe b).

Falls es also ein unter b) gesuchtes Tripel gibt, muss $y = 0$ und somit $x \neq 0$ sein, so dass aus $y = x^3 - xz$ weiter $z = x > 0$ und damit $x < 0$ folgt.

Somit können höchstens Tripel $(x, 0, x^2)$ mit $x < 0$ die in a) und b) geforderten Eigenschaften haben.

Eine Probe zeigt, dass jedes solche Tripel diese Eigenschaften besitzt.

L.2.18

Wegen $t \neq 0$ ist jede der drei Lösungen a, b, c der Gleichung

$$sx^2(x-1) + t(x+1) = 0 \quad (1)$$

von Null verschieden, und wegen $s \neq 0$ ist (1) zu

$$x^3 - x^2 + \frac{t}{s}x + \frac{t}{s} = 0$$

äquivalent. Durch Koeffizientenvergleich erhält man aus

$$x^3 - x^2 + \frac{t}{s}x + \frac{t}{s} = (x-a)(x-b)(x-c)$$

die Beziehungen

$$a+b+c=1, \quad ab+bc+ac=\frac{t}{s}, \quad abc=-\frac{t}{s} \quad (2,3,4)$$

Aus (3) und (4) folgt durch Division $\frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1$ und daher

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = -1$$

L.2.19

Für alle reellen Zahlen x gilt

$$\begin{aligned} x^{12} &= (x^4+1)(x^8-x^4+1) = (x^4+2x^2+1-2x^2)(x^8+2x^4+1-3x^4) \\ &= ((x^2+1)^2-2x^2)((x^4+1)^2-3x^4) \\ &= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^4+1+\sqrt{3}x^2)(x^4+1-\sqrt{3}x^2) \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} x^4+1+\sqrt{3}x &= x^4+2x^2+1-(2-\sqrt{3})x^2 = (x^2+1)^2-(2-\sqrt{3})x^2 \\ &= (x^2+1+\sqrt{2-\sqrt{3}}x)(x^2+1-\sqrt{2-\sqrt{3}}x) \end{aligned}$$

und analog

$$x^4+1-\sqrt{3}x = (x^2+1+\sqrt{2+\sqrt{3}}x)(x^2+1-\sqrt{2+\sqrt{3}}x)$$

Man erhält daher

$$\begin{aligned} x^{12}+1 &= (x^2+2\sqrt{2}+1)(x^2-2\sqrt{2}+1)(x^2+\sqrt{2-\sqrt{3}}+1)(x^2-\sqrt{2-\sqrt{3}}+1) \\ &\quad (x^2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+1)(x^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}+1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = \sqrt{2}; & b_1 = 1, \\
 a_2 = -\sqrt{2}; & b_2 = 1, \\
 a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}; & b_3 = 1, \\
 a_4 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}; & b_4 = 1, \\
 a_5 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}; & b_5 = 1, \\
 a_6 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}}; & b_6 = 1
 \end{array}$$

L.2.20

Angenommen, es sei (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems (*), (**). Dann gilt

$$y^2 = 1 - x^2 \quad \text{sowie} \quad x^6 + 1 - 3x^3 + 3x^4 - x^6 = \frac{7}{16}$$

also

$$3x^4 - 3x^2 + \frac{9}{16} = 0 \quad \text{oder} \quad x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = 0$$

Daher sind $(x_1^2, y_1^2), (x_2^2, y_2^2)$ mit

$$x_1^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad y_1^2 = \frac{1}{4}$$

sowie

$$x_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad y_2^2 = \frac{3}{4}$$

die einzigen Paare, deren Komponenten durch Quadrieren aus den Komponenten einer Lösung (x, y) von (*), (**) in der entsprechenden Weise entstehen können. Also können nur die geordneten Paare

$$\begin{array}{llll}
 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), & \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right), & \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), & \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right), \\
 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), & \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), & \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)
 \end{array}$$

Lösungen des Gleichungssystems (*), (**) sein.

Tatsächlich sind für diese acht geordneten Paare die Gleichungen (*) und (**) erfüllt. Das gegebene Gleichungssystem hat also genau acht reelle Lösungen.

L.2.21

Angenommen, das reelle Zahlenpaar (x, y) sei eine Lösung des Gleichungssystems (*), (**). Dann folgt durch Subtraktion aus den Gleichungen (*) und (**)

$$x^3 - y^3 - x^3 + y^2 + x - y = 0 \quad \text{also} \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0 \quad (1)$$

Die Gleichung (1) ist nur dann erfüllt, wenn

$$x - y = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = 0 \quad (2,3)$$

ist. Im Fall (2) gilt $x = y$, also wegen (*)

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad (x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

Da für alle reellen Zahlen x stets $x^2 + 1 > 0$ gilt, folgt hieraus $x = -1$ und wegen (2) daraus $y = -1$.

Im Fall (3) erhält man

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 - x + y + 1 &= 0 \\ \frac{1}{2}((x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2y + 1)) &= 0 \\ \frac{1}{2}((x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wäre aber nur dann erfüllt, wenn $(x - 1)^2 = 0$, also $x = 1$, und $(y - 1)^2 = 0$, also $y = 1$, und $(x + y)^2 = 0$, also $x = -y$ wäre. Das ist aber wegen $1 \neq -1$ nicht möglich. Daher gibt es im Fall (3) keine Lösung.

Das Gleichungssystem (*), (**) hat somit höchstens die reelle Lösung $(-1, -1)$. Tatsächlich ist

$$(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$$

d.h. für $x = y = -1$ sind (*) und (**) erfüllt. Im Bereich der reellen Zahlen hat das Gleichungssystem (*), (**) somit genau die Lösung $(-1, -1)$.

L.2.22

Ist (x, y, z) eine (reelle) Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*), (**), (***) durch Multiplikation, dass

$$x^6 y^6 z^6 = abc \quad (1)$$

gelten muss. Daher hat das gegebene Gleichungssystem im Fall $abc < 0$ keine (reelle) Lösung. Im Fall $abc = 0$ kann es nur dann eine Lösung haben, wenn $a = b = c = 0$ ist; denn aus (1) ergibt sich, dass wenigstens eine der Zahlen x, y, z gleich null sein muss. Tatsächlich sind im Fall $a = b = c = 0$ die Tripel $(0, y, z)$, $(x, 0, z)$, $(x, y, 0)$ für alle reellen x, y, z Lösungen.

Im Fall $abc > 0$ setzen wir

$$g = \sqrt[6]{abc} \quad (2)$$

Dann ergibt sich aus (*), (**) bzw. (***)

$$yz^2 = \frac{a}{g}, \quad xy^2 = \frac{b}{g}, \quad x^2z = \frac{c}{g} \quad (3,4,5)$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation von (3) und (4) bzw. von (3) und (5) bzw. von (4) und (5)

$$xy^3z^2 = \frac{ab}{g^2}, \quad x^2yz^3 = \frac{ac}{g^2}, \quad x^3y^2z = \frac{bc}{g^2} \quad (6,7,8)$$

Aus (7) und (***) bzw. (8) und (**) ergibt sich

$$\frac{z}{x} = \frac{a}{g^2} \quad \text{also} \quad z = \frac{a}{g^2}x \quad (9)$$

bzw.

$$\frac{y}{x} = \frac{g^2}{c} \quad \text{also} \quad y = \frac{g^2}{c}x \quad (10)$$

Aus (*), (9) und (10) folgt schließlich

$$x^6 \frac{g^4}{c^2} \frac{a^3}{g^6} = a \quad \text{also} \quad x^6 = \frac{c^2}{a^2} g^2$$

so dass als Lösungen nur die beiden Tripel

$$\left(\pm \sqrt[3]{\left| \frac{c}{a} \right|} g, \pm \frac{g^2}{c} \sqrt[3]{\left| \frac{c}{a} \right|} g, \pm \frac{a}{g^2} \sqrt[3]{\left| \frac{c}{a} \right|} g \right)$$

in Betracht kommen, die wegen $abc \neq 0$ voneinander verschieden sind. Wie man durch Einsetzen in (*), (**), (***) leicht nachprüft, sind beide Tripel auch wirklich Lösungen. Damit ergibt sich folgende Übersicht:

- a) Im Fall $abc < 0$ und im Fall $abc = 0$, $|a| + |b| + |c| > 0$ hat das gegebene System keine (reelle) Lösung.
- b) Dieser Fall kommt nicht vor.
- c) Im Fall $abc > 0$ hat das gegebene System genau zwei Lösungen.
- d) Dieser Fall kommt nicht vor.
- e) Im Fall $a = b = c = 0$ hat das System unendlich viele Lösungen.

Im Fall c) kann man die Lösungen noch anders darstellen, wobei von der Relation (2) Gebrauch gemacht wird: Mit

$$x_1 = \sqrt[18]{\frac{bc^7}{a^5}}, \quad y_1 = \sqrt[18]{\frac{ab^7}{c^5}}, \quad z_1 = \sqrt[18]{\frac{a^7c}{b^5}}$$

(alle drei Radikanden sind wegen $abc > 0$ positiv, denn jeder von ihnen hat offenbar die Form $abca^{2k}b^{2m}c^{2n} = abc(a^k b^m c^n)^2$ mit ganzzahligen k, m, n) erhält man

- im Fall $a > 0, b > 0, c > 0$: $(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$,
- im Fall $a > 0, b < 0, c < 0$: $(\pm x_1, \mp y_1, \pm z_1)$,
- im Fall $a < 0, b > 0, c < 0$: $(\pm x_1, \mp y_1, \mp z_1)$,
- im Fall $a < 0, b < 0, c > 0$: $(\pm x_1, \pm y_1, \mp z_1)$

L.2.23

Angenommen, (x, y, z) sei eine reelle Lösung des Gleichungssystems (*), (**), (***). Dann gilt wegen (*)

$$z = -x - y \quad (1)$$

und daher wegen (**)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + y^2 = 1 \quad \text{also} \quad x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}$$

und mithin

$$(x^2 + y^2 + xy)^2 = x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Andererseits folgt aus (***) und (1)

$$a = x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + (x^2 + y^2 + 2xy)^2 = 2(x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2))$$

also

$$x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) = \frac{a}{2} \quad (3)$$

Fall 1: Ist $a \neq 3$, so widersprechen die Gleichungen (2) und (3) einander. Daher hat in diesem Fall das Gleichungssystem (*), (**), (***), keine Lösung.

Fall 2: Ist $a = 3$, so folgt aus (2) - das ist nun dasselbe wie (3) - und (1), dass höchstens diejenigen Tripel $(x, y, -x - y)$ Lösungen von (*), (**), (***) sein können, bei denen x und y die Gleichung

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2} \quad (4)$$

erfüllen. Umgekehrt gilt im Fall $a = \frac{1}{2}$ für jedes Tripel $(x, y, -x - y)$ mit der Eigenschaft (4)

$$\begin{aligned} x + y + z &= x + y + (-x - y) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 2(x^2 + y^2 + xy) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 &= x^4 + y^4 + (-x - y)^4 = 2(x^2 + y^2 + xy)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = a \end{aligned}$$

Daher hat im Fall $a = \frac{1}{2}$ das gegebene Gleichungssystem genau diese Tripel als Lösung. Wie das Beispiel

$$\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

zeigt, gibt es mehrere solche Tripel. (Es gibt sogar unendlich viele derartige Tripel, da die Gleichung (4) unendlich viele reelle Lösungen (x, y) hat.)

Das Gleichungssystem (*), (**), (***) hat also

a) keine reelle Lösung, wenn $a \neq \frac{1}{2}$ ist,

- b) in keinem Fall genau eine reelle Lösung,
c) mehr als eine reelle Lösung, wenn $a = \frac{1}{2}$ ist.

L.2.24

Angenommen, für ein Paar (x, y) gelten (*) und (**). Dann ist

$$24(x-1)^2 + 25(x-1)(y+1) = 24x^2 - 48x + 24 - 25xy - 25x + 25y + 25 = 84$$

wegen (*) und

$$(x-1)^2 - (y+1)^2 = x^2 - 2x + 1 - y^2 - 2y - 1 = 7$$

wegen (**), d. h.: für das Paar $(u, v) = (x-1, y+1)$ gelten die Gleichungen

$$24u^2 - 25uv - 84 = 0 \quad , \quad u^2 - v^2 - 7 = 0 \quad (1,2)$$

Aus (1) folgt

$$625u^2v^2 = (24u^2 - 84)^2 = 576u^4 - 4032u^2 + 7056 \quad (3)$$

und aus (2) folgt durch Multiplikation mit $625u^2$

$$625u^4 - 625u^2v^2 - 4375u^2 = 0 \quad (4)$$

Setzt man (3) in (4) ein, so ergibt sich

$$625u^4 - 576u^4 + 4032u^2 - 7056 - 4375u^2 = 0$$

also

$$49u^4 - 343u^2 - 7056 = 0 \quad , \quad u^4 - 7u^2 - 144 = 0$$

$$u^2 = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{576}{4}} = 16 \quad \text{oder} \quad u^2 = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{576}{4}} = -9$$

Da die letzte Gleichung für die reelle Zahl u auf den Widerspruch $u^2 < 0$ führen würde, verbleibt nur $u^2 = 16$, also $u = 4$ oder $u = -4$.

Aus $u = 4$ und (1) folgt $384 - 100v - 84 = 0$, also $v = 3$;

aus $u = -4$ und (1) folgt $384 + 100v - 84 = 0$, also $v = -3$.

Aus $u = 4$ und $v = 3$ folgt $x = u + 1 = 5$ und $y = v - 1 = 2$;

aus $u = -4$ und $v = -3$ folgt $x = u + 1 = -3$ und $y = v - 1 = -4$.

Daher können nur die Paare $(5, 2)$ und $(-3, -4)$ die Gleichungen (*) und (**) erfüllen. Umgekehrt gilt in der Tat

$$24 \cdot 25 - 25 \cdot 5 \cdot 2 - 73 \cdot 5 + 25 \cdot 2 - 35 = 0$$

$$25 - 4 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 7 = 0$$

also erfüllt $(5, 2)$ die Gleichungen (*) und (**), und es gilt

$$24 \cdot 9 - 25 \cdot 3 \cdot 4 + 73 \cdot 3 - 25 \cdot 4 - 35 = 0$$

$$9 - 16 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 7 = 0$$

also erfüllt auch $(-3, -4)$ die Gleichungen (*) und (**). Daher sind genau die Paare $(5, 2)$ und $(-3, -4)$ die gesuchten.

L.2.25

Nach einem der Wurzelgesetze gilt

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1, \quad \text{also } \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Angenommen nun, eine rationale Zahl r erfülle die in der Aufgabe genannte Gleichung. Für die Zahl $z = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^r$ ist dann $\frac{1}{z} = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^r$, und folglich erfüllt z die Gleichung $z + \frac{1}{z} = 4$, woraus folgt, dass entweder $z = 2 + \sqrt{3}$ oder $z = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ gilt.

Aus $z = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^r$ folgt nun $r = 2$; denn wäre $r < 2$, so wäre $z < 2 + \sqrt{3}$, und wäre $r > 2$, so wäre $z > 2 + \sqrt{3}$.

Aus $z = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^r = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ folgt entsprechend $r = -2$.

Daher können nur die Zahlen $r = 2$ und $r = -2$ die genannte Gleichung erfüllen. Tatsächlich gilt

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

sowie

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{-2} + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^{-2} = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

Die gegebene Gleichung hat daher genau die Lösungen $r = 2$ und $r = -2$.

L.2.26

Angenommen, (a, b) sei ein Zahlenpaar, das zusammen mit einer geeigneten Zahl n der gestellten Bedingung genügt, dann gilt

$$\frac{a + n}{bn} = \frac{a}{b}$$

Daraus erhält man $ab + bn = abn$. Wegen $b \neq 0$ folgt $a + n = an$, also

$$a = n(a - 1) \tag{1}$$

Aus (1) folgt $a \neq 1$ und daher

$$n = \frac{a}{a - 1} = 1 + \frac{1}{a - 1}$$

Da n ganzzahlig ist, ergibt sich weiter

$$a - 1 = \pm 1, \quad \text{also } a = 2 \quad \text{oder} \quad a = 0$$

und wegen $n > 0$ schließlich $a = 2$. Daher können nur Zahlenpaare der Form $(2, b)$ und zu jedem dieser Paare nur $n = 2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Tatsächlich ist $\frac{2+2}{b \cdot 2} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$.

Die Lösungsmenge besteht also aus allen Zahlenpaaren der Form $(2, b)$ ($b \neq 0$, ganz).

L.2.27

a) Wenn die Angaben von Herrn X zutreffen, ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum genau dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst.

Daraus folgt, dass 9 die Quersumme und somit 27 Jahre das Alter von Herrn X ist.

b) Ist 27 Jahre das Alter von Herrn X, so ist 9 die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn X. Daher treffen die Angaben von Herrn X zu.

Aus b) folgt, dass die Angaben von Herrn X zutreffen können. Hieraus und aus a) folgt: Herr X ist 27 Jahre alt.

L.2.28

Angenommen, die Angabe eines Alters des Vaters von x Jahren, der Tochter von y Jahren und des Sohnes von z Jahren entspräche den Voraussetzungen der Aufgabe. Die Aussage über den 10 Jahre zurückliegenden Zeitpunkt führt dann auf die Gleichung

$$x - 10 = (y - 10) + (z - 10) \quad \text{also} \quad x + 10 = y + z \quad (1)$$

Die Aussagen über den Zeitpunkt vor einigen Jahrzehnten, also vor $10n$ Jahren (n natürliche Zahl, $n > 1$) führen auf die Gleichungen

$$x - 10n = 8(z - 10n) \quad , \quad y - 10n = 3(z - 10n) \quad (2,3)$$

Ferner gilt

$$x - y > 20 \quad , \quad x - z < 40 \quad (4,5)$$

Aus (1), (2), (3) ergibt sich

$$x = 30n - 20, \quad y = \frac{35}{2}n - \frac{15}{2}, \quad z = \frac{25}{2}n - \frac{5}{2}$$

Hieraus und aus (4) folgt $\frac{25}{2}n - \frac{25}{2} > 20$, also $n > \frac{65}{25} > 2$; aus (5) folgt $\frac{35}{2}n - \frac{35}{2} < 40$, also $n < \frac{115}{25} < 4$.

Daher ergibt sich $n = 3$ und somit $x = 70$, $y = 45$, $z = 35$.

Also können nur die Angaben, der Vater sei 70 Jahre, die Tochter 45 Jahre und der Sohn 35 Jahre alt, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

In der Tat ist das der Fall; denn nach ihnen war der Vater vor zehn Jahren 60 Jahre, die Kinder 35 bzw. 25 Jahre alt, der Vater also so alt wie die Kinder zusammen. Ferner

war vor drei Jahrzehnten der Sohn 5 Jahre und der Vater 40 Jahre alt, also achtmal so alt wie sein Sohn.

Gleichzeitig war damals die Tochter 15 Jahre, also dreimal so alt wie ihr Bruder. Schließlich beträgt der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter 25 Jahre, also mehr als 20 Jahre, und zwischen Vater und Sohn 35 Jahre, also weniger als 40 Jahre. Daher sind alle Bedingungen erfüllt.

L.2.29

Bezeichnet man die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt der Reihe nach mit x, y, z , so erfüllt eine Ausstattung genau dann die Voraussetzungen der Aufgabe, wenn x, y, z natürliche Zahlen mit

$$x + y + z = 32 \quad , \quad 40x + 60y + 75z = 1800 \quad (1,2)$$

sind. Angenommen, x, y, z seien drei solche natürliche Zahlen. Aus (1) und (2) folgt dann $4y + 7z = 104$ (3), also

$$z = \frac{104 - 4y}{7} = \frac{104}{7} \leq \frac{104}{7} = 14 + \frac{6}{7}$$

woraus sich $0 \leq z \leq 14$ (4) ergibt. Nach (3) ist ferner

$$y = 26 - \frac{7z}{4} \quad (5)$$

Da y eine natürliche Zahl ist, muss also $7z$ und somit auch z durch 4 teilbar sein. Hiernach ergibt sich aus (4), dass für z nur die Werte 0, 4, 8, 12 möglich sind. Aus (5) erhält man als zugehörige Werte für y der Reihe nach die Zahlen 26, 19, 12, 5 und aus (1) als zugehörige Werte für x die Zahlen 6, 9, 12, 15. Daher können höchstens die Ausstattungen mit folgenden Anzahlen der drei Glühlampensorten die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

x	y	z
6	26	0
9	19	4
12	12	8
15	3	12

Durch Einsetzen zeigt man, dass in allen vier Fällen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

L.2.30

Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel mit den verlangten Eigenschaften. Aus (*) und (**) folgt dann

$$x > y > z \quad (1)$$

Nach (***) gilt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$, wobei a, b, c natürliche Zahlen sind. Aus (1) folgt dann

$$a > b > c \quad (2)$$

Wegen (*) und (**) gilt weiter $a^2 - b^2 = 96$ sowie $b^2 - c^2 = 96$ und damit

$$(a+b)(a-b) = (b+c)(b-c) = 96$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (1), dass höchstens die folgenden Möglichkeiten bestehen:

$a+b$ bzw. $b+c$	96	48	32	24	16	12
$a-b$ bzw. $b-c$	1	2	3	4	6	8

Hiervon scheiden die Fälle mit ungeraden $(a+b) + (a-b) = 2a$ aus, und in den übrigen Fällen folgt:

$$(a, b) \text{ bzw. } (a, c) \mid (25, 23) \quad (14, 10) \quad (11, 5) \quad (10, 2)$$

Die einzige Zahl, die sowohl erste als auch zweite Zahl in je einem dieser Paare ist, lautet 10. Damit verbleibt nur die Möglichkeit $a = 14$, $b = 10$, $c = 2$. Das führt auf $x = 196$, $y = 100$, $z = 4$.

Umgekehrt hat das Tripel (x, y, z) aus diesen Zahlen die verlangten Eigenschaften; denn es ist $196 - 100 = 100 - 4 = 96$.

Das Tripel $(196, 100, 4)$ ist daher die einzige Lösung der Aufgabe.

L.2.31

Angenommen, (x, y) sei eine Lösung der gegebenen Gleichung mit ganzen Zahlen x , y . Dann gilt

$$x(2x^2 + y) = 9$$

Da 7 Primzahl ist, folgt, dass nur einer der folgenden Fälle vorliegen kann:

$$x = 1, 2x^2 = 7 \text{ und damit } y = 5;$$

$$x = 7, 2x^2 = 1 \text{ und damit } y = -97;$$

$$x = -1, 2x^2 = -7 \text{ und damit } y = -9;$$

$$x = -7, 2x^2 = -1 \text{ und damit } y = -99;$$

Also können höchstens die Zahlenpaare $(1, 5)$, $(7, -97)$, $(-1, -9)$, $(-7, -99)$ Lösungen sein. Tatsächlich gilt $2+5-7=0$, $686-679-7=0$, $-2+9-7=0$, $-686+693-7=0$. Jedes der genannten Zahlenpaare ist also Lösung.

L.2.32

Angenommen, die Gleichung hätte eine Lösung (x, y) . Dann gilt

$$y(2x+1) = 2x^2 - 5x + 19 \quad \text{also}$$

$$y = x - 3 + \frac{22}{2x+1} \quad \text{mit} \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

Da x , y ganzzahlig sein sollen, muss auch $\frac{22}{2x+1}$ eine ganze Zahl sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $2x+1$ ein Teiler von 22, d.h. eine der Zahlen -22, -11, -1, 1, 11, 22 ist.

Für $2x + 1 = +22$ ist x nicht ganzzahlig. In den übrigen Fällen erhält man für x der Reihe nach die Werte -6, -1, 0, 5 und daraus für y die Werte -11, -26, 19, 4.

Also können höchstens die Zahlenpaare $(-6, -11)$, $(-1, -26)$, $(0, 19)$, $(5, 4)$ Lösung sein.

Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung findet man, dass sie es tatsächlich sind.

L.2.33

Angenommen, (x, y) sei ein Paar der geforderten Art. Dann ist $u = x + 4$ eine ganze Zahl, die die Gleichung

$$(u - 4)(u - 3)(u + 3)(u + 4) = y^2 \quad \text{also} \quad (u^2 - 9)(u^2 - 16) = y^2 \quad (1)$$

erfüllt. Für $t = u^2 - \frac{25}{2}$ ist dann $2t$ ganz, und es gilt

$$\left(t + \frac{7}{2}\right)\left(t - \frac{7}{2}\right) = y^2$$

also $(2t)^2 - (2y)^2 = 49$ bzw.

$$(2t + 2y)(2t - 2y) = 49 \quad (2)$$

Also kann $2t + 2y$ nur eine der Zahlen 49, 7, 1, -1, -7, -49 sein.

Die Werte, die sich daraus für die zuvor genannten Größen ergeben, zeigt die folgende Tabelle, aus der zugleich ersichtlich ist, dass durch die gefundenen Werte für x und y auch die vorgegebene Gleichung erfüllt wird:

$2t + 2y$	$2t - 2y$	t	y	u^2	u	x	$x(x+1)(x+7)(x+8)$	y^2
4	1	12,5	12	25	5	1	$1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9$	144
					-5	-2	$(-9) \cdot (-8) \cdot (-2) \cdot (-1)$	144
7	7	3,5	0	16	4	0	$0 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 8$	0
					-4	-8	$(-8) \cdot (-7) \cdot (-1) \cdot 0$	0
-1	49	12,5	-12	25	5	1	$1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9$	144
					-5	-9	$(-9)(-8)(-2)(-1)$	144
-1	49	-12,5	12	0	0	-4	$(-4)(-3) \cdot 3 \cdot 4$	144
7	-7	3,5	0	9	3	-1	$(-1) \cdot 0 \cdot 6 \cdot 7$	0
					-3	-7	$(-7)(-6) \cdot 0 \cdot 1$	0
-49	-1	-12,5	-12	0	0	-4	$(-4)(-3) \cdot 3 \cdot 4$	144

Die gegebene Gleichung ist somit genau für die folgenden geordneten Paare ganzer Zahlen (x, y) erfüllt:

$(1, 12)$, $(-9, 12)$, $(0, 0)$, $(-8, 0)$, $(1, -12)$, $(-9, -12)$, $(-4, 12)$, $(-1, 0)$, $(-7, 0)$, $(-4, -12)$.

L.2.34

Angenommen, (x, y) sei ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^3 &= (x + 2)^4 - x^4 = ((x + 2)^2 + x^2)((x + 2)^2 - x^2) \\ &= (2x^2 + 4x + 4)(4x + 4) = 8(x + 1)((x + 1)^2 + 1) \end{aligned}$$

Daher ist y gerade, also $y = 2v$ mit ganzzahligem v . Hierfür und für die ganze Zahl $u = x + 1$ gilt somit $8v^3 = 8u(u^2 + 1)$, also

$$v^3 = u^3 + u \quad (1)$$

Wäre $u > 0$, so folgte aus (1) zunächst $v^3 > u^3$, also $v > u$, wegen der Ganzzahligkeit von v und u mithin $v \geq u + 1$ und damit

$$v^3 \geq (u+1)^3 = u^3 + 3u^2 + 3u + 1 > u^3 + u$$

im Widerspruch zu (1).

Wäre $u < 0$, so folgte $v^3 < u^3$, also $v < u$, wegen der Ganzzahligkeit von u und v mithin $v \leq u - 1$ und damit

$$v^3 \leq (u-1)^3 = u^3 - 3u^2 + 3u - 1 < u^3 + u$$

im Widerspruch zu (1).

Daher kann nur für $v = 0$, d.h. $x = -1$, ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften existieren. Aus (1) folgt hierfür $v = 0$, also $y = 0$.

Da umgekehrt $(-1, 0)$ die Gleichung $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllt, hat genau dieses Zahlenpaar die verlangten Eigenschaften.

L.2.35

Angenommen, es seien x und y zwei derartige positive ganze Zahlen, so dass

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} = 6\sqrt{5 \cdot 11} \quad (1)$$

gilt. Dann folgt

$$x + y + 2\sqrt{xy} = 36 \cdot 5 \cdot 11 \quad (2)$$

Nun sei t der größte gemeinsame Teiler von x und y ; dann gilt $x = tu$ und $y = tv$, wobei u und v positive ganze Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler 1 sind, für die $u < v$ gilt.

Ferner ist wegen (2) $\sqrt{xy} = t\sqrt{uv}$ eine positive ganze Zahl, woraus wegen der Teilerfremdheit von u , v weiter $u = u_1^2$, $v = v_1^2$ folgt, wobei u_1 und v_1 teilerfremde positive ganze Zahlen sind, für die $u_1 \leq v_1$ gilt. Daraus folgt wegen (2)

$$t(u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1) = t(u_1 + v_1)^2 = 36 \cdot 5 \cdot 11$$

also kann nur einer der folgenden vier Fälle vorliegen:

- a) $t = 36 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 1$
- b) $t = 9 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 2$
- c) $t = 4 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 3$
- d) $t = 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 6$

Fall a) ist durch u_1, v_1 mit den oben angegebenen Eigenschaften nicht erfüllbar,

Fall b) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 1$ und damit $x = 495, y = 495$,

Fall c) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 2$ und damit $x = 220, y = 880$,

Fall d) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 5$ und damit $x = 55, y = 1375$ erfüllbar.

Daher können nur diese Werte die geforderten Eigenschaften haben. Eine Probe zeigt, dass sie diese tatsächlich besitzen.

Also sind genau die folgenden geordneten Paare positiver ganzer Zahlen Lösungen der gegebenen Gleichung:

$$(55, 1375), (220, 880), (495, 495).$$

Anderer Lösungsweg:

Angenommen, (x, y) sei eine Lösung der Aufgabe. Dann gilt

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \quad \text{bzw.} \quad x + y + 2\sqrt{xy} = 1980$$

also

$$2\sqrt{xy} = 1980 - (x + y) \quad \text{bzw.} \quad 4xy = (1980 - (x + y))^2$$

also

$$0 = (1980 - (x + y))^2 - 4xy = (1980 - (x - y))^2 - 4 \cdot 1980y$$

woraus man

$$4 \cdot 1980y = (1980 - (x - y))^2 \tag{2}$$

erhält. Wegen $4 \cdot 1980y = 12^2 \cdot 5 \cdot 11$ folgt aus (2)

$$y = 55n^2$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Wegen (1) folgt daraus

$$\sqrt{x} = 6\sqrt{55} - n\sqrt{55} = m \cdot \sqrt{55}$$

wobei m eine natürliche Zahl ist. Also hat die Lösung die Form $(55m^2, 55n^2)$ mit $m + n = 6$ und (wegen $0 < x \leq y$) $0 < m \leq n$. Daraus folgt $1 \leq m \leq 3$.

Mithin können höchstens die Paare $(55, 1375), (220, 880), (495, 495)$ Lösung sein. Wie man durch Einsetzen bestätigt, sind sie es auch alle drei.

L.2.36

O.B.d. A. kann die Bezeichnung so gewählt werden, dass $|BC| = \sqrt{2}$, $|CA| = \sqrt{3}$, $|AB| = \sqrt{4}$, $\alpha = |\angle CAB|$, $\beta = |\angle ABC|$ und $\gamma = |\angle BCA|$ gilt. Ist d der Durchmesser des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt auf Grund des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{d}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{d}, \quad \sin \gamma = \frac{2}{d}$$

Folglich ist die gegebene Gleichung äquivalent mit

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + 2z = 0 \tag{1}$$

Angenommen, es seien x , y und z ganze Zahlen derart, dass das Tripel (x, y, z) eine Lösung der Gleichung (1) darstellt. Dann gilt

$$2xy\sqrt{6} + 2x^2 + 3y^2 = 4z^2 \quad \text{also} \quad 2xy\sqrt{6} = 4z^2 - 2x^2 - 3y^2$$

Da x , y und z ganze Zahlen sind, muss x oder y gleich null sein, weil $\sqrt{6}$ irrational ist. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so folgt wegen der Irrationalität von $\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2}$ und auf Grund von (1) $x = y = z = 0$.

Offensichtlich erfüllt das Zahlentripel $(0, 0, 0)$ die Gleichung (1). Daher ist es die einzige derartige Lösung dieser Gleichung und damit auch der gegebenen Gleichung.

L.2.37

Da für alle positiven ganzen Zahlen

$$(a^a)^a = a^{a \cdot a} = a^{a^2}$$

gilt, kann die gegebene Gleichung auch in die Form $a^{a^a} = a^{a^2}$ geschrieben werden.

a) Für $a \neq 1$ folgt hieraus die Bedingung, dass die Exponenten übereinstimmen müssen, so dass $a^a = a^2$ gelten muss. Wegen $a \neq 1$ folgt daraus weiter die Bedingung $a = 2$. Also kann für $a \neq 1$ nur die natürliche Zahl 2 Lösung sein.

Tatsächlich gilt $2^{2^2} = 2^4 = 16$ und $(2^2)^2 = 4^2 = 16$.

b) Prüft man den bisher ausgeschlossenen Fall $a = 1$ unmittelbar durch Einsetzen in die gegebene Gleichung, so zeigt sich, dass auch die natürliche Zahl 1 die gegebene Gleichung löst.

Es gilt nämlich $1^{1^1} = 1^2 = 1$ und $(1^1)^1 = 1$.

Weitere Lösungswerte gibt es nicht.

12 Lösungen - Ungleichungen

L.3.1

Folgende Ungleichung ist der gegebenen äquivalent:

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \quad \text{also} \quad (x - 1)(x + 3) > 0$$

Äquivalent zu dieser Ungleichung ist $x > 1$ oder $x < -3$.

Damit ist gezeigt, dass von den Bedingungen a) bis e) nur die Bedingung e) der gegebenen äquivalent ist.

L.3.2

Wegen $(x - y)^2 \geq 0$ gilt $x^2 + y^2 \geq 2xy$, wobei Gleichheit genau für $x = y$ eintritt, und entsprechend

$x^2 + z^2 \geq 2xz$, wobei Gleichheit genau für $x = z$ eintritt, sowie

$y^2 + z^2 \geq 2yz$, wobei Gleichheit genau für $y = z$ eintritt. Nach Addition und Division durch 2 folgt: Es gilt stets

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

und darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x = y = z$ ist.

L.3.3

Es gilt $(a + b - c)^2 \geq 0$, und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a + b = c$. Daraus folgt

$$(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 \geq 0$$

also

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(bc + ac - ab)$$

Nach Division durch die positive reelle Zahl abc ergibt dies

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a + b = c$.

L.3.4

a) Wegen $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt $c - a \geq 0$, $d - b \geq 0$, $bd - ac \geq 0$. Daraus folgt

$$(c - a)(d - b)(bd - ac) \geq 0$$

$$as(d - b)(a - c) + bd(d - b)(c - a) \geq 0$$

$$a^2c(d - b) + b^2d(a - c) + c^2a(b - d) + d^2b(c - a) \geq 0$$

$$a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc \geq a^2bc + b^2cd + c^2ad + d^2ab$$

woraus man nach Division durch die positive Zahl $abcd$ die Ungleichung (*) der Aufgabe erhält.

b) Das Gleichheitszeichen gilt in (*) genau dann, wenn $a - c = 0$, d.h. $a = c$, oder $d - b = 0$, d.h. $d = b$, oder $bd - ac = 0$, d.h. $ac = bd$, ist.

Wegen $a \leq b \leq c$ ist $a = c$ gleichbedeutend mit $a = b = c$.

Wegen $b \leq c \leq d$ ist $b = d$ gleichbedeutend mit $b = c = d$.

Aus $ac = bd$ folgt $a = b$; denn wäre $a < b$, so wäre wegen $c \leq d > 0$ auch $ac < bd$. Ebenso folgt aus $ac = bd$, dass $c = d$ gelten muss. Also ist $ac = bd$ gleichbedeutend mit $a = b$ und $c = d$.

Damit ist gezeigt: Notwendig und hinreichend dafür, dass in (*) das Gleichheitszeichen gilt, ist die Bedingung, dass in mindestens zwei der drei Ungleichungen $a \leq b \leq c \leq d$ das Gleichheitszeichen gilt.

Andere Lösungsmöglichkeit:

Es liegt nahe, folgende Substitutionen vorzunehmen:

$$\frac{a}{b} = u, \quad \frac{b}{c} = v, \quad \frac{c}{d} = w$$

Dann gilt

$$0 < u \leq 1, \quad 0 < v \leq 1, \quad 0 < w \leq 1 \quad (1)$$

sowie $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \frac{b}{c} \frac{c}{d} = uvw$, und die zu beweisende Aussage ist äquivalent damit, dass unter der Bedingung (1)

$$u + v + w + \frac{1}{uvw} \geq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + uvw$$

gilt, also dass

$$(uvw)^2 - uvw(u + v + w) + vw + wu + uv - 1 \leq 0$$

und dass weiter

$$(vw - 1)(wu - 1)(uv - 1) \leq 0 \quad (2)$$

ist, was wegen (1) richtig ist. Das Gleichheitszeichen gilt dabei in (*) genau dann, wenn es in (2) steht, also wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

a) $v = w = 1$, d.h. $b = c = d$;

b) $w = u = 1$, d.h. $a = b$ und $c = d$;

c) $u = v = 1$, d.h. $a = b = c$,

oder, anders ausgedrückt, wenn unter den Zahlen a, b, c, d höchstens zwei verschiedene vorkommen.

L.3.5

Der genannte Quotient ist genau dann negativ, wenn entweder

$$8 - 3x > 0 \quad \text{und} \quad 7x - 2 < 0 \quad (\text{Fall 1})$$

oder

$$8 - 3x < 0 \quad \text{und} \quad 7x - 2 > 0 \quad (\text{Fall 2})$$

ist. Trifft Fall 1 für ein x zu, so folgt aus $8 - 3x > 0$: $3x < 8$, also $x < \frac{8}{3}$, sowie aus $7x - 2 < 0$, $7x < 2$, also $x < \frac{2}{7}$.

Wegen $\frac{2}{7} < \frac{8}{3}$ ergibt sich somit $x < \frac{2}{7}$.

Trifft Fall 2 für ein x zu, so folgt entsprechend aus $8 - 3x < 0$: $3x > 8$, also $x > \frac{8}{3}$, sowie aus $7x - 2 > 0$, $7x > 2$, also $x > \frac{2}{7}$.

Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ ergibt sich somit $x > \frac{8}{3}$.

Tatsächlich ist für $x < \frac{2}{7}$ erst recht $x < \frac{8}{3}$ und daher $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$, so dass Fall 1 zutrifft, und tatsächlich ist für $x > \frac{8}{3}$ erst recht $x > \frac{2}{7}$ und daher $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$, so dass Fall 2 zutrifft. Somit ist der genannte Quotient genau für diejenigen reellen Zahlen x negativ, für die $x < \frac{2}{7}$ oder $x > \frac{8}{3}$ gilt.

L.3.6

Angenommen, für eine reelle Zahl k gelte (*). Dann ist $v + ku > 0$, und aus (*) ergibt sich

$$u + kv < v + ku \quad \text{also} \quad (u - v)(1 - k) < 0 \quad (1,2)$$

Wegen $u > v$ folgt daraus $k > 1$. Also können höchstens alle $k > 1$ Lösungen von (*) sein.

Tatsächlich ist für $k > 1$ die Ungleichung (2) und damit auch (1) sowie (*) erfüllt.

Oder:

Tatsächlich gilt für $k = 1 + m$ ($m > 0$ reell)

$$\frac{u + (1 + m)v}{v + (1 + m)u} = \frac{u + v + mv}{u + v + mu}$$

Nun ist aber wegen $v < u$ und $m > 0$ sicher $mv < mu$, also

$$0 < u + v + mv < u + v + mu$$

und daher

$$\frac{u + v + mv}{u + v + mu} < 1 \quad \text{also} \quad \frac{u + kv}{v + ku} < 1$$

L.3.7

a) Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung, d. h., es sei

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

Wegen $r < -6$ gilt $0 < -\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$. Daher ist

$$\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} > 0$$

also $x > 0$ und damit $2 > x \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{r} \right)$ bzw. $4 > x \left(\frac{6+r}{r} \right)$ bzw. wegen $\frac{6+r}{r} > 0$

$$0 < x < \frac{4r}{6+r}$$

Also können höchstens solche x , für die diese Ungleichung gilt, Lösung der gegebenen Ungleichung sein. Tatsächlich ist für alle diese Werte

$$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4r}{6+r}} = \frac{3}{r} + \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

b) In diesem Fall geht die gegebene Ungleichung in

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

über. Diese Ungleichung ist für alle $x > 0$ und nur für diese erfüllt, da genau für sie $\frac{2}{x} > 0$ gilt.

c) In diesem Fall ist

$$-\frac{3}{r} > \frac{1}{2} \quad (2)$$

Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

Wegen (2) ist diese Ungleichung für alle $x > 0$ erfüllt.

Es sei nun $x < 0$. Dann gilt $rx > 0$, und man erhält durch Multiplikation von (1) mit rx

$$2r - 3x > \frac{rx}{2}$$

und weiter $4r - 6x > rx$, woraus sich wegen $r + 6 > 0$

$$x < \frac{4r}{6+r}$$

ergibt. Also können im Fall c) höchstens solche x , für die $x > 0$ oder $x < \frac{4r}{6+r}$ gilt, die gegebene Ungleichung erfüllen. Tatsächlich ist für $x > 0$ wegen (2)

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

und für $x < \frac{4r}{6+r}$

$$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4r}{6+r}} = \frac{3}{r} + \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

d) In diesem Fall gilt $-\frac{3}{r} < 0$. Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann ist

$$\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} > 0 \quad \text{und daher} \quad x > 0$$

Daraus folgt

$$0 < x < \frac{4r}{6+r}$$

Also können höchstens solche x , für die diese Ungleichung gilt, Lösungen der gegebenen Ungleichung sein. Tatsächlich ist in diesem Fall

$$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4r}{6+r}} = \frac{3}{r} + \frac{r}{2} \quad \text{also} \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

L.3.8

a) Für $x \leq 3$ ist $|x - 3| = 3 - x$, der Ausdruck (*) also bezüglich Existenz und Wert gleichbedeutend mit $\frac{-2x+1}{x+2}$.

a1) Für $x < -2$ existiert (*). Ferner ist $x + 2 < 0$, also (**) genau dann erfüllt, wenn $-2x + 1 \leq x + 2$ gilt. Da dies äquivalent mit $x \geq -\frac{1}{3}$ ist, was zu $x < -2$ im Widerspruch steht, gibt es kein $x < -2$, das (**) erfüllt.

a2) Für $x = -2$ existiert (*) nicht.

a3) Für $-2 < x \leq 3$ existiert (*). Ferner ist $x + 2 > 0$, also (**) genau dann erfüllt, wenn $-2x + 1 \geq x + 2$ gilt. Da dies äquivalent mit $x \leq \frac{1}{3}$ ist, erfüllen von den x mit $-2 < x \leq 3$ genau die x mit $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$ die Ungleichung (**).

b) Für $x > 3$ ist $|x - 3| = x - 3$, der Ausdruck (*) also bezüglich Existenz und Wert gleichbedeutend mit $\frac{2x}{x-8} + \frac{1}{x+2}$.

b1) Für $3 < x < 8$ existiert (*). Ferner ist $(x - 8)(x + 2) < 0$, also (**) genau dann erfüllt, wenn

$$2x(x + 2) + x - 8 \leq (x - 8)(x + 2)$$

gilt. Da dies äquivalent mit

$$x^2 + 11x + 8 \leq 0$$

ist, was zu $x^2 + 11x + 8 > 3^2 + 11 \cdot 3 + 8$ im Widerspruch steht, gibt es kein x mit $3 < x < 8$, das (**) erfüllt.

b2) Für $x = 8$ existiert (*) nicht.

b3) Für $x > 8$ existiert (*). Ferner ist $(x - 8)(x + 2) > 0$, also (**) genau dann erfüllt, wenn

$$2x(x + 2) + x - 8 \geq (x - 8)(x + 2)$$

gilt. Da dies äquivalent mit

$$x^2 + 11x + 8 \geq 0$$

ist, was für $x > 8$ stets richtig ist, erfüllen alle x mit $x > 8$ die Ungleichung (**).

Ergebnis: (*) existiert, wenn $x \neq -2$ und $x \neq 8$ gilt; (**) wird genau dann erfüllt, wenn entweder $-2 < x \leq -\frac{1}{3}$ oder $x > 8$ gilt.

L.3.9

Erster Lösungsweg:

Neben dem Produkt p betrachten wir noch das Produkt

$$q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2498}{2499}$$

Da $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$ und allgemein für alle von null verschiedenen natürlichen Zahlen n wegen $4n^2 - 1 < 4n^2$

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$$

gilt, ist $p < q$. Hieraus erhält man $p^2 < pq$. Da $pq = \frac{1}{2500}$ ist, gilt $p^2 < \frac{1}{2500}$, woraus wegen $\frac{1}{50} > 0$ die Behauptung $p < \frac{1}{50} = 0,02$ folgt.

Zweiter Lösungsweg:

Es ist

$$p^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} \cdot \dots \cdot \frac{2499^2}{2500^2}$$

Daraus folgt

$$p^2 < \frac{1^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1} \dots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2 - 1} \dots \frac{2499^2}{2500^2 - 1^2}$$

also wegen $(2n)^2 - 1^2 = (2n-1)(2n+1)$

$$p^2 = \frac{1^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \dots \cdot \frac{2499^2}{2499 \cdot 2500} = \frac{1}{2501}$$

folglich gilt erst recht $p^2 < \frac{1}{2500}$. Weiter wie oben.

L.3.10

Wir setzen $x_1 = a_1$ und $a_m = a_m - a_{m-1}$ für $m = 2, 3, \dots, k$. Dann gilt $x_m \geq 0$ für $m = 1, 2, \dots, k$ sowie

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 \\ a_2 &= x_1 + x_2 \\ a_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &\dots \\ a_n &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ &\dots \\ a_k &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \dots + x_k \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen $-\frac{k}{n} \leq -1$ und (2)

$$\begin{aligned} k \left(x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) x_3 + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) x_n \right) \\ \leq kx_1 + (k-1)x_2 + (k-2)x_3 + \dots + (k-(n-1))x_n + \dots + x_k = a_1 + \dots + a_k = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) = \frac{1}{n}(nx_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + \dots + x_n) \leq \frac{1}{k}$$

w.z.b.w.

L.3.11

O.B.d.A. sei $a \leq b$. Ferner sei $x = \frac{a}{b}$ gesetzt. Dann gilt $0 < x \leq 1$ und somit wegen $n > m > 0$ sicher $x^n \leq x^m$, also

$$(x^n + 1)^m \leq (x^m + 1)^m < (x^m + 1)^n$$

d.h. $\left(\frac{a^n+b^n}{b^n}\right)^m < \left(\frac{a^m+b^m}{b^m}\right)^n$, also $(a^n + b^n)^m < (a^m + b^m)^n$ und daher wegen $\frac{1}{mn} > 0$

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < (a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \quad \text{w.z.b.w.}$$

L.3.12

Angenommen, die Ungleichung besitzt für eine reelle Zahl a eine reelle Lösung x . Da beide Wurzeln reell sein sollen, müssen die beiden Bedingungen $a + x \geq 0$, $a - x \geq 0$ oder, umgeformt, $-a \leq x$, $x \leq a$ gleichzeitig erfüllt sein.

Sie sind mit der Ungleichung

$$|x| \leq a \quad (1)$$

äquivalent, die also neben der gegebenen Ungleichung stets erfüllt sein muss.

a) Für $a < 0$ kann (1) wegen $|x| > 0$ nicht erfüllt werden, so dass es keine reelle Lösung x gibt.

b) Für $a = 0$ muss wegen (1) $x = 0$ gelten. Für $x = 0$ ist aber die gegebene Ungleichung nicht erfüllt. Somit kann auch in diesem Fall keine reelle Lösung für x existieren.

c) Es bleibt nur noch der Fall $a > 0$ zu untersuchen. Es sei $a > 0$.

Wegen (1) ergibt sich daraus $a^2 - x^2 \geq 0$, und aus der gegebenen Ungleichung folgt durch Quadrieren die dann zu ihr äquivalente Ungleichung $2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$ oder

$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a(a - 2) \quad (2)$$

Hier wechselt die rechte Seite bei $a = 2$ das Vorzeichen, so dass eine Fallunterscheidung notwendig wird:

c1) Es sei $0 < a < 2$. Dann gilt $a(a - 2) < 0$. Also ist (2) erfüllt, sobald $a^2 - x^2 \geq 0$ gilt.

Das trifft für alle x mit (1), d.h. mit $-a \leq x \leq a$ zu.

c2) Es sei $a = 2$. Dann gilt $a(a - 2) = 0$, so dass (2) für $\sqrt{4 - x^2} > 0$, also für $-2 < x < 2$ und nur für diese erfüllt ist.

c3) Es sei $a > 2$. Dann gilt $a(a - 2) > 0$. Aus (2) folgt

$$4(a^2 - x^2) > a^2(a - 2)^2 \quad \text{oder} \quad x^2 < \frac{1}{4}a^3(4 - a) \quad (3)$$

Anmerkung: Ist (3) erfüllt, so ist $4(a^2 - x^2) > a^2(a - 2)^2 \geq 0$, also die Bedingung (1), ja sogar

$$|x| < a \quad (4)$$

von selbst mit erfüllt. Da die rechte Seite von (3) positiv sein muss, kann (3) für $a \geq 4$ nie erfüllt sein. Somit bleibt nur noch der Fall $2 < a < 4$ zu untersuchen. Tatsächlich sind unter dieser Voraussetzung alle x mit

$$x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} \quad (5)$$

und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichung, da dann (5) mit (3) äquivalent ist. So ergibt sich folgende Übersicht:

Parameterwerte	Zugehörige Lösungen
$a \leq 0$	keine
$0 < a < 2$	$-a \leq x \leq a$
$a = 2$	$-2 < x < 2$
$2 < a < 4$	$-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$
$4 \leq a$	keine

L.3.13

Angenommen, es würde

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \quad (1)$$

gelten. Dann wäre

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})^3 &\leq (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 \\ 4 - 3\sqrt[3]{48} + 3\sqrt[3]{36} - 3 &\geq 3 - 3\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12} - 2 \\ \sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{36} &\leq \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12} \end{aligned}$$

und nach Division durch $\sqrt[3]{12}$:

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \leq (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) : \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$$

im Widerspruch zu (1).

13 Lösungen - Funktionen

Ganzrationale Funktionen : Trigonometrische Funktionen : Logarithmus-Funktion : Funktionalgleichungen

L.4.1

Aus den Voraussetzungen folgt

$$\frac{(x_0 + 2)f(x_0 + 1)}{x_0} = \frac{(x_0 + 2)x_0(x_0 + 1)}{2x_0} = \frac{(x_0 + 1)(x_0 + 2)}{2} = f(x_0 + 2)$$

w.z.b.w.

L.4.2

Aus den gegebenen Wertepaaren erhält man die Gleichungen

$$a + b + c = 1 \quad (1)$$

$$4a + 2b + c = 2 \quad (2)$$

$$9a + 3b + c = n_1 \quad (3)$$

$$16a + 4b + c = n_2 \quad (4)$$

Durch Subtraktion ergibt sich aus (2) und (1), (3) und (2) bzw. (4) und (3)

$$3a + b = 1, \quad 5a + b = n_1 - 2, \quad 7a + b = n_2 - n_1$$

Daraus folgt

$$2a = n_1 - 3, \quad 2a = n_2 - 2n_1 + 2$$

und schließlich $3n_1 - 5 = n_2$. Da n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sein sollen, kann n_1 nur die Werte 2, 3 und 4 annehmen.

Es sei $n_1 = 2$. Dann ist $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}, c = -1$

Es sei $n_1 = 3$. Dann ist $a = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es sei $n_1 = 4$. Dann ist $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 1$. Daher können nur die quadratischen Funktionen

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \quad (5,6)$$

die gestellten Bedingungen erfüllen.

Durch Aufstellen der vorgeschriebenen Tabelle stellt man fest, dass sie dies auch tun:

$$\text{zu (5): } \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \quad \text{zu (6): } \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}$$

L.4.3

Wegen

$$f(x_0 - 1) = 2(x_0 - 1)^2 - 3(x_0 - 1) + 4 = 2x_0^2 - 7x_0 + 9$$

und

$$f(x_0 + 1) = 2(x_0 + 1)^2 - 3(x_0 + 1) + 4 = 2x_0^2 + x_0 + 3$$

gilt

$$f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6 \quad \text{w.z.b.w}$$

L.4.4

S_y ist genau dann ein Punkt der entstehenden Parabel, wenn seine Koordinaten deren Gleichung erfüllen. Hierfür ist $q = 8$ notwendig und hinreichend.

Nun sei $q = 8$ vorausgesetzt. Die Abszissen der Schnittpunkte mit der x -Achse sind die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + 8 = 0$$

Für sie erhält man

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32} \end{aligned}$$

(vorausgesetzt, dass $|p| \geq 4\sqrt{2}$ ist; anderenfalls hat die Parabel keinen Punkt auf der x -Achse).

Die Bedingung $x_1 - x_2 = 7$ ist somit gleichbedeutend mit $\sqrt{p^2 - 32} = 7$ oder $p^2 - 32 = 49$ oder $p^2 = 81$, und dies damit, dass entweder $p = 9$ oder $p = -9$ gilt.

Hat man statt der bisher genannten logischen Äquivalenzen nur in einer Richtung (zu $q = 8$ und zu $p = 9$ oder $p = -9$ hin) führende Schlüsse gezogen, so eignet sich zum dann erforderlichen Nachweis der Umkehrung auch folgende Probe:

Das Bild der quadratischen Funktion

$$y = x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x + 8)$$

schneidet die x -Achse in den Punkten $S_1(8, 0)$ und $S_2(1, 0)$, die y -Achse im Punkt $S_y(0, 8)$. Das Bild der quadratischen Funktion

$$y = x^2 + 9x + 8 = (x + 1)(x + 8)$$

schneidet die x -Achse in den Punkten $S_3(-1, 0)$ und $S_4(-8, 0)$, die y -Achse im Punkt $S_y(0, 8)$.

L.4.5

a) Auf Grund der Voraussetzung sind

$$f(0) = c, \quad f(1) = a + b + c \quad \text{und} \quad f(-1) = a - b + c$$

ganzzahlig, also auch

$$f(1) + f(-1) - 2f(0) = 2a \quad \text{und} \quad f(1) - f(-1) = 2b$$

Daher gilt

$$a = \frac{m}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{n}{2}$$

mit ganzen Zahlen m und n . Ferner ist $f(1) - f(0) = a + b = \frac{m+n}{2}$ ganzzahlig, also sind m und n entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade. Nun gilt

$$f(x) = \frac{mx^2 + nx}{2} + c$$

Daraus folgt, dass $f(x)$ für alle geraden x ganzzahlig ist.

Sind nun x sowie m und n ungerade, so sind auch mx^2 und nx ungerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig.

Ist x ungerade und sind m und n gerade, so sind auch mx^2 und nx gerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig.

Damit ist bewiesen, dass $f(x)$ für alle ganzen Zahlen x ganzzahlig ist.

b) Unter der nun zugrunde gelegten Voraussetzung kann nicht auf die angegebene Behauptung geschlossen werden; denn z. B. für $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 0$ ist zwar

$$f(0) = 0, f(2) = 2, f(-1) = 0 \quad \text{aber} \quad f(1) = \frac{2}{3}$$

c) Weitere Tripel ganzer Zahlen, die die geforderte Eigenschaft haben, bestehen z.B. aus

$$p = n - 1, \quad q = n, \quad r = n + 1$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Sind nämlich

$$f(n - 1) = (n - 1)^2 a + (n - 1)b + c$$

$$f(n) = n^2 a + nb + c$$

$$f(n + 1) = (n + 1)^2 a + (n + 1)b + c$$

ganzzahlig, so sind auch die paarweise gebildeten Differenzen $(2n - 1)a + b$ und $(2n + 1)a + b$ sowie $4na + 2b$ ganzzahlig. Daraus folgt, dass auch $2a$, also auch $4na$ und mithin $2b$ ganzzahlig sind, woraus wiederum wie unter a) die Ganzzahligkeit von $a + b$ abgeleitet werden kann.

Da von den Zahlen $n - 1, n, n + 1$ mindestens eine gerade ist, folgt unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von $2a$ und $2b$, dass c ebenfalls ganzzahlig ist. Wie unter a) lässt sich dann zeigen, dass $f(x)$ für alle ganzzahligen x ganzzahlig ist.

L.4.6

Es sei $k = 0$. Dann gilt $f(x) = (x + 1)^4$; die Funktion $f(x)$ hat also genau eine reelle Nullstelle, nämlich $x = -1$.

Es sei $k > 0$. Dann können wir die folgende Umformung vornehmen: $f(x) = g(x)h(x)$

mit $g(x) = (x+1)^2 + kx$,

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+1)^2 + kx = \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{4} + k\right) \\ &= \left(x+1+\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + k}\right) \left(x+1+\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + k}\right) \\ h(x) &= (x+1)^2 - kx = \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{4} - k\right) \end{aligned}$$

Zur weiteren Untersuchung von $h(x)$ unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: $\frac{k^2}{4} - k > 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k > 4$. Dann gilt

$$h(x) = \left(x+1+\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - k}\right) \left(x+1+\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - k}\right)$$

und $h(x)$ hat daher genau zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen.

Fall 2: $\frac{k^2}{4} - k = 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k = 4$. Dann gilt

$$h(x) = \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2$$

und $h(x)$ hat daher genau eine Nullstelle.

Fall 3: $\frac{k^2}{4} - k < 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k < 4$. Dann gilt

$$h(x) > \left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2 \geq 0$$

und $h(x)$ hat daher keine Nullstelle.

In allen drei Fällen hat $g(x)$ wegen $k > 0$ genau zwei voneinander verschiedene Nullstellen.

Weiterhin ist keine der Nullstellen von $g(x)$ gleich einer der Nullstellen von $h(x)$ (falls solche existieren); denn wäre eine Zahl x_0 , sowohl Nullstelle von $g(x)$ als auch Nullstelle von $h(x)$, so wäre für sie

$$(x_0+1)^2 + kx_0 = (x_0+1)^2 - kx_0 \quad (1)$$

$$(x_0+1)^2 + kx_0 = 0 \quad (2)$$

Aus (1) folgte dann wegen $k > 0$ aber $x_0 = 0$, und dies steht im Widerspruch zu (2). Also erhalten wir für $k = 0$ die Antwort a), für $k > 0$ im Fall 1 die Antwort d), im Fall 2 die Antwort c), im Fall 3 die Antwort b) und niemals die Antwort e).

L.4.7

Die Verschiebung werde durch die Transformation $x \rightarrow x - h$ charakterisiert. Da

$$(x - h)^3 = x^3 - 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \quad \text{und} \quad a(x - h)^2 = ax^2 - 2axh + ah^2$$

ist und $b(x - h) + c$ kein quadratisches Glied mehr enthält, hat die aus der Funktion (*) entstehende Funktion (**) genau die gewünschte Gestalt, wenn $h = \frac{a}{3}$ gilt. Für die Funktion (**) erhält man in diesem Fall

$$y = x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

also

$$m = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{und} \quad n = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

L.4.8

Angenommen, es gäbe ein geordnetes Paar (a, b) reeller Zahlen, so dass $f(x)$ ein Teiler von $g(x)$ ist. Dann gibt es ein Polynom $h(x)$, für das $f(x)h(x) = g(x)$ gilt. Der Grad von $f(x)h(x)$ ist um 2 größer als der Grad von $h(x)$; dieser beträgt daher 2.

Das Produkt des höchsten Koeffizienten 1 von $f(x)$ mit dem höchsten Koeffizienten von $h(x)$ ist gleich 1; der letztere ist daher ebenfalls 1. Das Glied mit x^2 in $f(x)$ hat nämlich ebenso wie das Glied mit x^4 in $g(x)$ den Koeffizienten 1.

Daher hat auch das Glied mit x^2 in $h(x)$ den Koeffizienten 1. Somit gibt es zwei reelle Zahlen u und v mit $h(x) = x^2 + ux + v$, und für diese gilt

$$\begin{aligned} x^4 + ax^2 + b &= (x^2 + ax + b)(x^2 + ux + v) \\ &= x^4 + (a + u)x^3 + (v + b + au)x^2 + (av + bu)x + bv \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus

$$a + u = 0 \tag{1}$$

$$au + b + v = a \tag{2}$$

$$ab + bu = 0 \tag{3}$$

$$bv = b \tag{4}$$

Aus (1) folgt $u = -a$; aus (4) folgt

$$b = 0 \quad \text{oder} \quad b = 1 \tag{5,6}$$

Im Fall $b = 0$ folgt aus (3) $av = 0$, also

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad v = 0 \tag{7,8}$$

Für $v = 0$ führt (2) auf $-a^2 = a$, also

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad a = -1$$

Für $v = 1$ führt (3) auf $a - ba = 0$, also

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 1 \quad (9,10)$$

Für $a = 0$ führt (2) auf $b + 1 = 0$, also $b = -1$.

Für $b = 1$ führt (2) auf $-a^2 + 2 = a$, also

$$a = 1 \quad \text{oder} \quad a = -2$$

Daher können höchstens die geordneten Paare $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,1)$, $(-2,1)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

x^2 ein Teiler von x^4 ;

$x^2 - x$ ein Teiler $x^4 - x^2$;

$x^2 - 1$ ein Teiler $x^4 - 1$;

$x^2 + x + 1$ ein Teiler von $x^4 + x^2 + 1$;

$x^2 - 2x + 1$ ein Teiler von $x^4 - 2x^2 + 1$.

Anderer Lösungsweg:

Die Division $(x^4 + ax^2 + b) : (x^2 + ax + b)$ ergibt

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + a^2 + a - b) + (a^3 + a^2 - 2ab)x + a^2b + ab - b^2 - b$$

Daher ist $x^2 + ax + b$ genau dann Teiler von $x^4 - ax^2 + b$, wenn sich

$$a(a^2 + a - 2b) = 0 \quad \text{und} \quad b(a^2 + a - b - 1) = 0 \quad (11,12)$$

ergibt. Dieses Gleichungssystem besitzt genau die folgenden geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen als Lösung: $(0,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$.

Es ist nämlich (11) äquivalent mit $a = 0$ oder $a^2 + a = 2b$ und (12) äquivalent mit $b = 0$ oder $a^2 + a = b + 1$.

L.4.9

Es liegt nahe, für die gesuchten Quotienten die Nenner $x + 1$ und $x - 1$ zu wählen, weil deren Hauptnenner gleich dem Nenner des vorgegebenen Terms ist. Wir wählen also den Ansatz

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$$

daraus folgt

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{ax - a + bx + b}{x^2 - 1}$$

also nach Multiplikation mit $x^2 - 1$

$$x = ax - a + bx + b = x(a + b) - a + b \quad (1)$$

Für $x = 0$ folgt daraus, dass notwendig

$$-a + b = 0 \quad (2)$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt weiterhin $x = x(a + b)$ und somit, da dies auch für (mindestens) ein $x \neq 0$ gelten soll,

$$a + b = 1 \quad (3)$$

Das Gleichungssystem (2), (3) hat nur die Lösung $a = b = \frac{1}{2}$.

Existiert also eine Lösung der im Ansatz genannten Art, dann hat sie die Form

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{1}{2(x - 1)}$$

Die Probe

$$\frac{1}{2(x + 1)} + \frac{1}{2(x - 1)} = \frac{x - 1 + x + 1}{2(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

bestätigt die Existenz dieser Zerlegung.

L.4.10

a) Für jedes reelle x gilt

$$y^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

d.h.

$$y^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \quad \text{also} \quad y^2 = 1 + \sin 2x \quad (1)$$

Daher hat y^2 das Intervall $[0, 2]$ als Wertevorrat. Da mit jedem $y = \sin x + \cos x$ auch der Wert

$$\sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) = -y$$

im Wertevorrat der Funktion $y = \sin x + \cos x$ auftritt, folgt nun, dass der Wertevorrat W das Intervall $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ist.

b) Für jedes reelle x gilt

$$y^7 = \sin^7 x + \cos^7 x + 7 \sin x \cos x (\sin^5 x + \cos^5 x) + 21 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^3 x + \cos^3 x) + 35 \sin^3 x \cos^3 x (\sin x + \cos x) \quad (2)$$

$$y^5 = \sin^5 x + \cos^5 x + 5 \sin x \cos x (\sin^3 x + \cos^3 x) + 10 \sin^2 x \cos^2 x (\sin x + \cos x) \quad (3)$$

$$y^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) \quad (4)$$

Aus (4) und (1) folgt

$$\sin^3 x + \cos^3 x = y^3 - \frac{3}{2}(y^2 - 1)y = \frac{1}{2}(-y^3 + 3y) \quad (5)$$

Aus (3), (5) und (1) ergibt sich

$$\sin^5 x + \cos^5 x = y^5 - \frac{5}{2}(y^2 - 1)\frac{1}{2}(-y^3 + 3y) - \frac{10}{4}(y^2 - 1)^2 y = \frac{1}{4}(-y^5 + 5y) \quad (6)$$

und aus (2), (5), (6) und (1) schließlich

$$\begin{aligned}\sin^7 x + \cos^7 x &= y^7 - \frac{7}{2}(y^2 - 1)\frac{1}{4}(-y^5 + 5y) - \frac{21}{4}(y^2 - 1)^2\frac{1}{2}(-y^3 + 3y) \\ &\quad - \frac{35}{8}(y^2 - 1)^3y = \frac{1}{8}(y^7 - 7y^5 + 7y^3 + 7y)\end{aligned}$$

Es sind noch andere, z. T. elegantere, z. T. auch nicht so systematisch aufgebaute Lösungswege möglich. Man kann den "Abbau" von $\sin^7 x + \cos^7 x$ auch damit beginnen, dass man die Teilbarkeit von $\sin^7 x + \cos^7 x$ durch $\sin x + \cos x$ ausnutzt und den Quotienten $\sin^6 x - \sin^5 x \cos x + \dots + \cos^6 x$ weiter betrachtet, wobei man außer (1) statt (2), (3), (4) entsprechend

$$\begin{aligned}1 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x \\ 1 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x\end{aligned}$$

heranzieht.

L.4.11

Für alle reellen Zahlenpaare (x, y) gilt

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2 \quad (1)$$

sowie

$$1 - \sin 2y = \sin^2 y + \cos^2 y - 2\sin y \cos y = (\cos y - \sin y)^2 \quad (2)$$

wegen (***) ist dabei

$$\cos x - \sin x > 0 \quad \text{und} \quad \cos y - \sin y > 0$$

Ferner gilt für alle positiven reellen Zahlenpaare (a, b)

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Setzt man hierin $a = \frac{1}{\cos x - \sin x}$, $b = \frac{1}{\cos y - \sin y}$, so folgt für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit (***) wegen (1) und (2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} &\geq \frac{2}{(\cos x - \sin x)(\cos y - \sin y)} \\ \frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} &\geq \frac{2}{\cos x \cos y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \sin x \sin y} \\ \frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} &\geq \frac{2}{(\cos(x - y) - \sin(x + y))} \geq \frac{2}{1 - \sin(x + y)}\end{aligned}$$

weil wegen (***)

$$0 < (\cos x - \sin x)(\cos y - \sin y) = \cos(x - y) - \sin(x + y) \leq 1 - \sin(x + y) \quad (3)$$

gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Notwendig dafür, dass Gleichheit in (*) eintritt, ist, dass auch in (3) u eintritt, also muss $\cos(x - y) = 1$ gelten. Das gilt wegen (**) nur für $x = y$.

Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie man durch Einsetzen von $x = y$ in beide Seiten von (*) erkennt.

L.4.12

Für beliebige α und β gilt

$$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta))$$

Auf Grund der Voraussetzungen über α, β, γ ist

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta &= \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\pi - 2\gamma)) = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos 2\gamma) \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma) = \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

L.4.13

Die reelle Zahl x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist genau dann Lösung der gegebenen Gleichung, wenn sie Lösung einer der folgenden drei Gleichungen ist:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x) \quad (1)$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{\sin^4 x \cos^4 x} \quad (2)$$

$$(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x \cos^4 x - \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x)) = 0 \quad (3)$$

Hieraus folgt, dass $x = \frac{\pi}{4}$ für jedes λ Lösung von (1) ist und dass eine Zahl $x \neq \frac{\pi}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ genau dann Lösung von (1) ist, wenn sie Lösung einer der folgenden vier Gleichungen ist:

$$\sin^4 x \cos^4 x = \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x) \quad (4)$$

$$\frac{1}{16} \sin^4 2x = \lambda((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) \quad (5)$$

$$\frac{1}{16} \sin^4 2x = \lambda(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x) \quad (6)$$

$$\sin^2 3x + 8\lambda \sin^2 2x - 16\lambda = 0 \quad (7)$$

Die Zahl $x \neq \frac{\pi}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ist genau dann Lösung von (7), wenn die Zahl $z = \sin^2 2x$ eine Lösung von

$$z^2 + 8\lambda z - 16\lambda = 0 \quad (8)$$

ist, für die $0 < z < 1$ gilt. Dabei gehören zu jeder derartigen Lösung von (8) genau zwei Lösungen von (7) mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$. Die Gleichung (8) hat genau dann eine reelle Lösung, wenn für die Diskriminante

$$D = 16\lambda^2 + 16\lambda = 16\lambda(\lambda + 1) \geq 0$$

gilt. Die beiden Lösungen lauten in diesem Fall

$$z_1 = 4(\sqrt{\lambda(\lambda+1)} - \lambda) \quad \text{und} \quad z_2 = -4(\sqrt{\lambda(\lambda+1)} + \lambda)$$

Für die Lösung z_2 gilt sicher nicht $0 < z_2 < 1$; denn anderenfalls müsste $0 > \sqrt{\lambda(\lambda+1)} + \lambda > -\frac{1}{4}$, also

$$-\lambda > \sqrt{\lambda(\lambda+1)} > -\left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \quad (9)$$

sein. Folglich wäre $\lambda < 0$ und wegen $D \geq 0$, $\lambda + 1 < 0$ also auch $\lambda + \frac{1}{4} < \lambda + 1 < 0$. Daher ergäbe sich aus (9)

$$\lambda(\lambda+1) > \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 \quad \text{also} \quad \lambda^2 + \lambda > \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}$$

und weiter $\lambda > \frac{1}{8}$, was mit $\lambda < 0$ unvereinbar ist.

Aus $D \geq 0$ folgt, dass entweder $\lambda \geq 0$ oder $\lambda \leq -1$ ist, und aus $0 < z_1 < 1$ ergibt sich

$$\lambda < \sqrt{\lambda(\lambda+1)} < \lambda + \frac{1}{4} \quad (10)$$

insbesondere also $\lambda > -\frac{1}{4}$, also $\lambda \geq 0$ wegen $D \geq 0$ und, da $\lambda = 0$ mit (10) unvereinbar ist, sogar $\lambda > 0$. Im Fall $\lambda > 0$ ist (10) äquivalent mit

$$\begin{aligned} \lambda^2 < \lambda^2 + \lambda < \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} \\ 0 < \lambda < \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \lambda < \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Daher hat (8) im Fall $0 < \lambda < \frac{1}{8}$ und nur dann eine Lösung z_1 mit $0 < z_1 < 1$, und zwar jeweils genau eine solche Lösung.

Daher gilt für die Gleichung (1) folgendes:

Der Fall a) tritt niemals ein,

der Fall b) tritt genau dann ein, wenn $\lambda \leq 0$ oder $\lambda \geq \frac{1}{8}$ ist,

der Fall c) tritt niemals ein,

der Fall d) tritt genau dann ein, wenn $0 < \lambda < \frac{1}{8}$ ist. (1) hat dann stets genau drei Lösungen.

Bemerkung: Im Fall $\lambda = \frac{1}{8}$ ist die einzige in $(0, \frac{\pi}{2})$ gelegene Lösung $\frac{\pi}{4}$ von (1) eine dreifache Wurzel der Gleichung (1).

L.4.14

Es gilt für alle reellen x

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

also

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

ferner ist

$$\begin{aligned} 1 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x \\ &= \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

also

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

Die gegebene Gleichung ist daher äquivalent mit jeder der folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x &= a - 2a \sin^2 x \cos^2 x \\ (2a - 3) \sin^2 x \cos^2 x &= a - 1 \end{aligned}$$

und weiter mit

$$4 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{4(a-1)}{2a-3}, \quad \sin^2 2x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$$

da die vorhergehenden Gleichungen für $2a - 3 = 0$ sicher keine Lösungen haben. Die gegebene Gleichung hat also genau dann mindestens eine reelle Lösung, wenn

$$0 \leq \frac{4(a-1)}{2a-3} \leq 1 \quad (1)$$

gilt.

Angenommen, für ein a gelte (1). Dann ist $a \neq \frac{3}{2}$. Wäre nun $a > \frac{3}{2}$, so folgte $a \leq \frac{1}{2}$, also ein Widerspruch. Daher ergibt sich $a < \frac{3}{2}$ und wegen $2a - 3 < 0$

$$0 \geq 4(a-1) \geq 2a-3 \quad (2)$$

also $a \leq 1$ und $a \geq \frac{1}{2}$. Mithin kann (1) höchstens für alle a mit

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \quad (3)$$

gelten.

Trifft umgekehrt (3) zu, so gilt (2) und zugleich $a < \frac{3}{2}$, woraus in der Tat folgt, dass (1) erfüllt ist. Die obige Gleichung hat also genau für alle $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ mindestens eine reelle Lösung.

Für $a = \frac{5}{6}$ erhält man

$$|\sin 2x| = 2 \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{6}}{3 - \frac{10}{6}}} = 2 \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

mit $2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, d.h. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ (k eine ganze Zahl), also sämtliche Lösungen.

L.4.15

Eine reelle Zahl x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ erfüllt genau dann die Gleichung

$$\tan x + \cot x = 4 \quad (1)$$

wenn sie jede der folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4, \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4, \quad \frac{2}{\sin 2x} = 4, \quad \sin 2x = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Eine reelle Zahl $2x$ mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (oder gleichbedeutend hiermit $0 < 2x < \pi$) erfüllt (2) genau dann, wenn $2x = \frac{\pi}{6}$ oder $2x = \frac{5\pi}{6}$ ist.

Daher sind alle reellen Zahlen x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, die (1) erfüllen, $x = \frac{\pi}{12}$ und $x = \frac{5\pi}{12}$.

L.4.16

a) Angenommen, F sei periodisch. Dann gibt es eine von null verschiedene reelle Zahl t mit der Eigenschaft, dass $F(x) = F(x+t)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Insbesondere gilt

$$1 = F(0) = F(t) \quad (1)$$

Aus (1) folgt zunächst, dass t und at von allen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) verschieden sind, weil sonst $F(t) < 1$ wäre. Hiernach ergibt sich aus (1) weiter

$$1 = \frac{1}{2 + \tan^2 t} + \frac{1}{2 + \tan^2 at} \quad (2)$$

Aus (2) folgt, da jeder der beiden Summanden auf der rechten Seite kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{1}{2 + \tan^2 t} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad t = m\pi \quad (3)$$

und

$$\frac{1}{2 + \tan^2 at} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad at = n\pi \quad (4)$$

wobei m und n ganze Zahlen sind und wegen $t \neq 0$ auch $m \neq 0$ gilt. Aus (3) und (4) erhält man durch Division

$$a = \frac{m}{n}$$

d. h., a ist eine rationale Zahl. Mithin ist F höchstens dann periodisch, wenn a rational ist.

b) Angenommen, a sei eine rationale Zahl, d. h., es gelte $a = \frac{n}{m}$, wobei n und m ganze Zahlen sind und $m \neq 0$ gilt. Auf Grund der Definition von f hat f die Periode π , also gilt für alle reellen x

$$f(x) = f(x + m\pi) \quad \text{sowie} \quad f(ax) = f(ax + n\pi) = f(a(x + m\pi))$$

und daher

$$F(x) = F(x + m\pi)$$

Wegen $m \neq 0$ ist somit F periodisch.

Aus a) und b) folgt daher, dass F genau dann periodisch ist, wenn a eine rationale Zahl ist.

L.4.17

Wegen $10^3 < 3790 < 10^4$ ist $3 < \lg 3790 < 4$, also $[\lg 3790] = 3$.

Wegen $10^{-2} < 0,0379 < 10^{-1}$ ist $-2 < \lg 0,0379 < -1$, also $[\lg 0,0379] = -2$.

Daher beträgt der gesuchte Quotient $\frac{3}{-2} = -1,5$.

L.4.18

Angenommen, es gäbe eine rationale Nullstelle x_0 von (*). Dann folgt

$$(2 \cdot 2)^{x_0} + (2 \cdot 3)^{x_0} - (3 \cdot 3)^{x_0} = 0$$

also nach Division durch $(2 \cdot 2)^{x_0} (\neq 0)$

$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x_0} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x_0} \quad (1)$$

Setzt man nun $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_0} = z$, so ergibt sich aus (1)

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad (2)$$

Die Gleichung (2) hat genau die reellen Lösungen

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Von diesen ist nur z_1 positiv. Somit folgt weiter

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_0} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

Es sei nun $x_0 = \frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q . Wegen $z_1 > 1$, also $x_0 > 0$, kann dann $p > 0$ und $q > 0$ angenommen werden. Aus (3) folgt weiter

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{also} \quad 3^p = 2^{p-q}(1 + \sqrt{5})^q \quad (4)$$

Unter Benutzung des binomischen Satzes ergibt sich $(1 + \sqrt{5})^q = a + b\sqrt{5}$ mit positiven ganzen Zahlen a und b . Aus (4) folgt schließlich

$$\sqrt{5} = \frac{3^p \cdot 2^{q-p} - a}{b}$$

Diese Gleichung enthält den Widerspruch, dass $\sqrt{5}$ als eine rationale Zahl dargestellt wird. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, es gäbe eine rationale Nullstelle von (*), falsch war.

L.4.19

Angenommen, es gibt eine reelle Zahl x , die die gegebene Gleichung erfüllt. Dann ist $x > 0$, da $\log_a x$ existiert, und es folgt, wenn man die Gleichung logarithmiert,

$$\log_a x \cdot \log_a x = \log_a a^2 x$$

und somit

$$(\log_a x)^2 = \log_a a^2 + \log_a x$$

Setzt man $\log_a x = z$, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$z^2 - z - 2 = 0$$

die genau die beiden Lösungen $z = 2$ und $z = -1$ hat. Aus $\log_a x = z = 2$ erhält man $x = a^2$, und aus $\log_a x = z = -1$ erhält man $x = \frac{1}{a}$.

Also kann nur $x = a^2$ oder $x = \frac{1}{a}$ Lösung der gegebenen Gleichung sein. Die Proben

$$(a^2)^{\log_a a^2} = (a^2)^2 = a^4 = a^2 a^2 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^{\log_a \frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a = a^2 \frac{1}{a}$$

bestätigen, dass diese beiden Zahlen tatsächlich Lösungen sind.

L.4.20

Nach den Logarithmengesetzen lässt sich die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen:

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \dots + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \lg\left(\left(1 - \frac{1}{25^2}\right)\left(1 - \frac{1}{26^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{100^2}\right)\right)$$

Nach Verwendung einer binomischen Formel ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung also gleich

$$\begin{aligned} & \lg\left(\frac{(25-1)(25+1)}{25^2} \cdot \frac{(26-1)(26+1)}{26^2} \dots \frac{(100-1)(100+1)}{100^2}\right) \\ &= \lg \frac{24 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 97 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 101}{25^2 \cdot 26^2 \cdot 27^2 \cdot \dots \cdot 98^2 \cdot 99^2 \cdot 100^2} \\ &= \lg \frac{24 \cdot 25 \cdot 26^2 \cdot 27^2 \cdot \dots \cdot 98^2 \cdot 99^2 \cdot 100 \cdot 101}{25^2 \cdot 26^2 \cdot 27^2 \cdot \dots \cdot 98^2 \cdot 99^2 \cdot 100^2} = \lg \frac{24 \cdot 101}{25 \cdot 100} = \lg \frac{606}{625} \end{aligned}$$

L.4.21

Es ist $\log_x(2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n) = \log_x n!$. Daraus folgt

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + \dots + \log_x n = \log_x n! \quad (1)$$

Nun gilt für alle reellen Zahlen $a > 0$, $b > 0$ und $ab \neq 1$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

L.4.22

Es gilt $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ und folglich auch

$$|\log_a b| = \frac{1}{|\log_b a|} \quad (1)$$

Weiter ist $(x-1)^2 \geq 0$ für jedes reelle x , also $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, woraus man für $x > 0$ die Ungleichung $x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$, also

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (2)$$

erhält. Ferner gilt für $x = |\log_a b|$ wegen (1)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{|\log_a b|} = |\log_b a|$$

Daraus und aus (2) folgt $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$.

L.4.23

Angenommen, es gäbe ein solches Zahlentripel, für das die angegebene Funktion die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt

$$\log_a(2b + c) = 2 \quad (1)$$

$$\log_a(-b + c) = 0 \quad (2)$$

$$\log_a c = 1 \quad (3)$$

Aus (3) folgt $c = a$, aus (2) entsprechend $b = c - 1$. Daraus und aus (1) erhält man $\log_c(3c - 2) = 2$, also $3c - 2 = c^2$.

Diese Gleichung hat genau die Lösungen $c = 1$ und $c = 2$. Wegen $c = a > 1$ können somit höchstens für $c = 2$ und damit $a = 2$ sowie $b = 1$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.

Tatsächlich gilt für die Funktion $y = \log_2(x + 2)$

$$\log_2(2 + 2) = 2, \quad \log_2(-1 + 2) = 0, \quad \log_2 2 = 1$$

Folglich ist $(2, 1, 2)$ das einzige reelle Zahlentripel, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

L.4.24

Angenommen, es existiert eine Lösung. Für diese muss $x > 0$ sein, da für sie $\log_4 x$

existiert. Ferner folgt wegen $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ mit $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ aus der gegebenen Gleichung

$$\frac{4}{\log_x 4} + 3 = 2 \log_x 2$$

und wegen $\log_x 4 = 2 \log_x 2$

$$\frac{2}{\log_x 2} + 3 = 2 \log_x 2$$

Setzt man $u = \log_2 2$, so erfüllt u folglich die quadratische Gleichung $u^2 - \frac{3}{2}u - 1 = 0$ mit genau den beiden Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = -\frac{1}{2}$.

Aus $u = \log_x 2$ folgt $x^u = 2$. Die Gleichung $x^{u_1} = 2$ hat nur die Lösungen $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, die Gleichung $x^{u_2} = 2$ nur die Lösung $x_3 = \frac{1}{4}$. Wegen $x > 0$ ist x_2 keine Lösung der gegebenen Gleichung.

Die Proben mit x_1 und x_3 zeigen, dass x_1 und x_3 die gegebene Gleichung erfüllen.

L.4.25

Angenommen, eine reelle Zahl x erfüllt die Gleichung. Wegen $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ gilt dann

$$\log_a x \frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a b \quad \text{also} \quad (\log_a x)^2 = (\log_a b)^2$$

und daher entweder

$$\log_a x = \log_a b \quad \text{oder} \quad \log_a x = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b} \quad (1,2)$$

Aus (1) folgt $x = b$, aus (2) $x = \frac{1}{b}$. Daher können nur die Zahlen b und $\frac{1}{b}$ die vorgegebene Gleichung erfüllen.

Tatsächlich sind diese beiden Zahlen Lösungen der Gleichung; denn es gilt

$$\log_a b \log_b b = \log_a b \cdot 1 = \log_a b \quad , \quad \log_a \frac{1}{b} \log_b \frac{1}{b} = (-\log_a b) \cdot (-1) = \log_a b$$

L.4.26

Es gilt $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$ für alle $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Für $c > 1$ ist $\log_c 4 < \log_c 12$, d.h.

$$\frac{1}{\log_4 c} < \frac{1}{\log_{12} c}$$

woraus sich nach Multiplikation mit der positiven Zahl $\log_{12} c \log_4 c$

$$\log_{12} c < \log_4 c$$

ergibt. Also ist (*) erfüllt.

Für $c = 1$ ist (*) erfüllt.

Für $\frac{1}{4} \leq c < 1$ gilt $[\log_{12} c] = [\log_4 c] = -1$, also ist (*) erfüllt.

Für $\frac{1}{12} \leq c < \frac{1}{4}$ gilt $[\log_{12} c] = -1$, $[\log_4 c] = -2$, also ist (*) nicht erfüllt.

Für $\frac{1}{16} \leq c < \frac{1}{12}$ gilt $[\log_{12} c] = [\log_4 c] = -2$, also ist (*) erfüllt.

Angenommen, (*) wäre für einen Wert c mit $0 < c < \frac{1}{16}$ erfüllt. Setzt man dann $[\log_{12} c] = u$ und $[\log_4 c] = v$, so gilt $12^u \leq c < 12^{u+1}$, $4^v \leq c < 4^{v+1}$ und weiter $4^v \leq c < \frac{1}{16}$, also $v < -2$ und $v \leq -3$ und schließlich

$$12^{u+1} > c \geq 4^v = 12^v \left(\frac{1}{3}\right)^v \geq 12^v \cdot 27 > 12^{v+1}$$

was wegen $u < v$ nicht sein kann, so dass (+) in diesen Fällen nicht erfüllt ist. Daher ist (*) genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{16} \leq c < \frac{1}{12} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4} \leq c$$

ist.

L.4.27

(A) ist richtig.

Beweis: Es sei f in J streng konkav; x_1, x^*, x_2 seien Zahlen aus J , und es gelte $x_1 < x^* < x_2$. Wir setzen $y_1 = f(x_1)$, $y^* = f(x^*)$, $y_2 = f(x_2)$ und bezeichnen mit p bzw. q die Ordinate des auf der Sehne mit den Endpunkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ bzw. der mit den Endpunkten $(x_1, \frac{1}{y_1}), (x_2, \frac{1}{y_2})$ gelegenen Punktes, dessen Abszisse x^* ist.

Ferner setzen wir $d_1 = x^* - x_1, d_2 = x_2 - x^*$. Dann gilt

$$p - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \quad (1)$$

und

$$q - \frac{1}{y_1} = \frac{\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$p = \frac{y_2 - y_1}{d_1 + d_2}d_1 + y_1 = \frac{d_1 y_2 + d_2 y_1}{d_1 + d_2}$$

aus (2)

$$q = \frac{d_1 \frac{1}{y_2} + d_2 \frac{1}{y_1}}{d_1 + d_2} + \frac{1}{y_1} = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2)y_1 y_2}$$

Nach Voraussetzung ist $d_1 > 0, d_2 > 0, y - 1 > 0, y_2 > 0$ (3)

also

$$p > 0 \quad \text{sowie} \quad p < y^* \quad (4,5)$$

Ferner gilt $d_1 d_2 (y_1 - y_2)^2 \geq 0$, also

$$\begin{aligned} d_1^2 y_1 y_2 + d_1 d_2 y_1^2 + d_1 d_2 y_2^2 + d_2^2 y_1 y_2 &\geq d_1^2 y_1 y_2 + 2d_1 d_2 y_1 y_2 + d_2^2 y_1 y_2 \\ (d_1 y_2 + d_2 y_1)(d_1 y_1 + d_2 y_2) &\geq (d_1 + d_2)^2 y_1 y_2 \end{aligned}$$

also wegen (3), (4) sowie (5)

$$q = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2) y_1 y_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 y_2 + d_2 y_1} = \frac{1}{p} > \frac{1}{y^*} \quad \text{w.z.b.w.}$$

(B) ist falsch, d. h., es gibt eine in einem Intervall J definierte Funktion f , die nur positive Funktionswerte hat, für welche f in J streng konvex, aber $\frac{1}{f}$ in J nicht streng konkav ist.

Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels, etwa die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ in $J = (0, +\infty)$ definierte Funktion f :

a) Für alle $x > 0$ ist $f(x) = \frac{1}{x} > 0$.

b) In J ist die durch $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ gegebene Funktion g nicht streng konkav, d. h., es gibt drei Zahlen x_1, x^*, x_2 mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ so, dass der auf der Strecke $(x_1, x_1), (x_2, x_2)$ gelegene Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die nicht kleiner als x^* ist.

In der Tat hat sogar für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ die Gerade durch die Punkte $(x_1, x_1), (x_2, x_2)$ die Gleichung $y = x$; also hat der auf ihr gelegene Punkt, dessen Abszisse x^* ist, auch x^* als Ordinate.

c) Für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ gilt

$$(x^* - x_1)(x_2 - x^*) > 0 \quad \text{also} \quad -(x^*)^2 + x_1 x^* + x_2 x^* > x_1 x_2$$

Daher ist für den auf $(x_1, \frac{1}{x_1}) (x_2, \frac{1}{x_2})$ gelegenen Punkt mit der Abszisse x^* die Ordinate gleich

$$\frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1} (x^* - x_1) + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1 + x_2}{x_1 x_2} > \frac{1}{x^*}$$

folglich ist $f(x) = \frac{1}{x}$ in J streng konvex.

Anmerkung: Andere Beispiele für b) sind etwa $f(x) = e^x$ bzw. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

L.4.28

Christa hat recht. Um dies zu beweisen, genügt ein Beispiel für zwei Funktionen f und g , die alle eingangs genannten Voraussetzungen erfüllen und für die g weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich ist.

Ein solches Beispiel bilden etwa die durch $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ für alle reellen x definierten Funktionen f und g ; denn f wächst im gesamten Definitionsbereich streng monoton, und für alle x gilt

$$g(x^2) - f(x)^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$$

Ferner ist z. B. $g(-1) = g(1)$. Daher ist g weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich.

L.4.29

Laut Definition von f gilt

$$\begin{aligned}(f(2))^2 &= (a^2 - b^2 + (a + b)^2)^2 = (2a^2 + 2ab + 2b^2)^2 \\ &= 4(a^4 + a^2b^2 + b^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 2a^2b^2) \\ &= 2(a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) = 2(a^4 + b^4 + (a + b)^4) = 2f(4)\end{aligned}$$

L.4.30

Es sei $t = 0$. Dann ist die gegebene Gleichung gleichbedeutend mit $f(0) = 0$, d.h., sie wird genau von all denjenigen ganzrationalen Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

erfüllt, in denen $a_0 = 0$ ist.

Es sei $t = 1$. Dann ist die gegebene Gleichung gleichbedeutend mit $f(x) = f(x)$. Diese Gleichung wird von allen Funktionen erfüllt.

Es sei $t = -1$. Dann ist die gegebene Gleichung mit $f(-x) = -f(x)$ gleichbedeutend. Diese Gleichung wird von allen ungeraden Funktionen erfüllt, d. h. im Fall der ganzrationalen Funktionen genau von allen ungeraden ganzrationalen Funktionen.

Es sei t eine von 0, 1 und -1 verschiedene reelle Zahl. Dann kann man für ganzrationale Funktionen die gegebene Gleichung in folgender Form schreiben

$$a_n t^n x^n + a_{n-1} t^{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 t^0 x^0 = a_n t x^n + a_{n-1} t x^{n-1} + \dots + a_0 t x^0$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle reellen x erfüllt, wenn einander entsprechende Koeffizienten übereinstimmen, d. h., wenn

$$\begin{aligned}a_n t^n &= a_n t \\ a_{n-1} t^{n-1} &= a_{n-1} t \\ &\dots \\ a_1 t^1 &= a_1 t \\ a_0 t^0 &= a_0 t\end{aligned}$$

gilt. Da unter den gegebenen Voraussetzungen aus $a_0 t^0 = a_0 t$ stets $a_0 = 0$ folgt und weiter von den Gleichungen $t = t^k$ ($k = 1, \dots, n$) nur die für $k = 1$ erfüllt ist, sind die Gleichungen nur erfüllt, wenn alle a_k außer a_1 gleich 0 sind; a_1 kann eine beliebige reelle Zahl sein.

Daher sind für $t \neq 0, t \neq 1, t \neq -1$ alle linearen Funktionen der Form $y = a_1 x$ und nur diese ganzrationalen Funktionen Lösungen der Aufgabe.

L.4.31

Angenommen, $f(x)$ sei eine lineare Funktion mit der geforderten Eigenschaft. Dann

lässt sich diese Funktion in der Form $f(x) = mx + n$ (m, n reelle Zahlen) schreiben, und es gilt für jedes reelle x die Gleichung

$$mx + n = m(x + 1) + n - a \quad \text{also} \quad m = a$$

Daher können nur Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = ax + n$ (n eine reelle Zahl) die geforderte Eigenschaft haben.

Tatsächlich gilt für jede solche Funktion und für jedes reelle x

$$f(x) = ax + n = a(x + 1) + n - a = f(x + 1) - a$$

L.4.32

Angenommen, es gibt eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit der geforderten Eigenschaft. Dann gilt für jedes reelle x

$$a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = a(-x)^2 + b(-x) + c$$

also

$$ax^2 + 2ax + a + bx + b + c = ax^2 - bx + c$$

woraus man

$$(a + b)(2x + 1) = 0$$

erhält. Da diese Gleichung insbesondere für $x = 0$ erfüllt sein muss, folgt $a = b$. Somit können höchstens die quadratischen Funktionen der Form

$$f(x) = ax^2 - ax + c \quad (a \neq 0; a, c \text{ beliebig reell})$$

die geforderte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für jede von diesen

$$\begin{aligned} f(x + 1) &= a(x + 1)^2 - a(x + 1) + c = ax^2 + ax + c \\ f(-x) &= a(-x)^2 - a(-x) + c = ax^2 + ax + c \end{aligned}$$

also $f(x + 1) = f(-x)$.

L.4.33

Angenommen, (f, g) sei ein Paar von Funktionen mit den verlangten Eigenschaften. Für jedes $t \neq 0, 1, -1$ gilt dann wegen (**)

$$tg(t) = \frac{1}{t^3} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Da für jedes $x \neq 0, 1, -1$ auch $t = \frac{1}{x} \neq 0, 1, -1$ ist, gilt für alle diese x somit

$$\frac{1}{x} g(x) = x^3 f(x)$$

Hieraus und aus (*) folgt $(x - x^3)f(x) = 1$. Wegen $x \neq 0, 1, -1$ ist

$$x - x^3 = x(x - 1)(x + 1) \neq 0$$

Somit ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{x - x^3} \quad (1)$$

Hieraus und aus (**) folgt

$$g(x) = \frac{1}{x^4} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3 - x} \quad (2)$$

Mithin kann nur dasjenige Paar (f, g) die verlangten Eigenschaften haben, in dem f, g die durch (1), (2) für alle $x \neq 0, 1, -1$ definierten Funktionen sind. Tatsächlich gilt

$$xf(x) - \frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right) = x \frac{1}{x - x^3} - \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - x^2} - \frac{x^2}{1 - x^2} = 1$$

sowie

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{x^2}{x^3 - x} = x^2g(x)$$

Daher hat genau das Paar (f, g) mit

$$f(x) = \frac{1}{x - x^3}, \quad g(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

die geforderten Eigenschaften.

L.4.34

a) Wegen $f(1) = 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \cdot f(1) = 0 \\ f(-1) &= (-1) \cdot f(0) = 0 \\ f(-2) &= (-1) \cdot f(-1) = 0 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Allgemein ist $f(-n) = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot f(2), \quad \text{also } f(2) = f(1) = 1 \\ f(2) &= 2 \cdot f(3), \quad \text{also } f(3) = \frac{1}{2}f(2) = \frac{1}{2} \\ f(3) &= 3 \cdot f(4), \quad \text{also } f(4) = \frac{1}{3}f(3) = \frac{1}{3!} \end{aligned}$$

allgemein

$$f(n) = \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

wie sich mit Hilfe der vollständigen Induktion leicht nachweisen lässt; denn für $n = 1$ ist diese Behauptung richtig, und aus $f(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ folgt $f(n+1) = \frac{1}{n}f(n) = \frac{1}{n!}$.

b) Es sei nun $m > n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x+n) &= (x+n)f(x+n+1) = (x+n)(x+n+1)f(x+n+2) \\ &= (x+n)(x+n+1)\dots(x+m-1)f(x+m) \end{aligned}$$

Es sei $m = n$. Dann gilt

$$f(x+n) = f(x+m)$$

Es sei $m < n$. Dann gilt, falls x eine der ganzen Zahlen $-n+1, \dots, -m$ ist,

$$f(x+n) = \frac{1}{(x+n-1)!}$$

für jedes andere reelle x aber

$$f(x+m) = (x-m)(x+m+1)\dots(x+n-1)f(x+n)$$

also wegen $x+m \neq 0, \dots, x+n-1 \neq 0$

$$f(x+n) = \frac{f(x+m)}{(x-m)(x+m+1)\dots(x+n-1)}$$

c) Es sei beispielsweise f_0 die folgendermaßen für alle reellen x definierte Funktion:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0 && \text{für alle reellen } x \neq 1, 2, 3, \dots \\ f_0(x) &= \frac{1}{(x-1)!} && \text{für } x = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

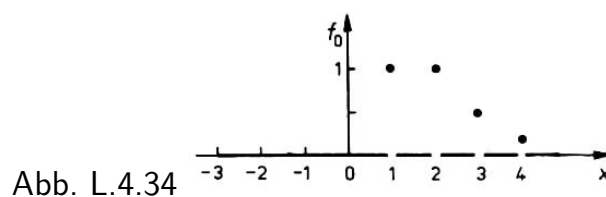
Dann gilt $f_0(1) = 1$, und für alle reellen x mit $x \neq 1, 2, 3, \dots$ ist entweder $x = 0$, also $f_0(0) = 0 \cdot f_0(0+1)$, oder außer $x \neq 0, 1, 2, \dots$ auch $x+1 \neq 1, 2, 3, \dots$, also ebenfalls

$$f_0(x) = 0 = x f_0(x+1) = x \cdot 0$$

Für alle $x = 1, 2, 3, \dots$ gilt aber

$$f_0(x) = \frac{1}{(x-1)!} = x \frac{1}{x!} = x f_0(x+1)$$

Die Funktion f_0 erfüllt also die gestellten Bedingungen. Den Graphen dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$ zeigt Abb. L.4.34.



L.4.35

Angenommen, es sei p eine von null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen x definierte Funktion mit

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1} \quad (1)$$

a) Dann gilt für alle reellen x : $3f(x)-1 \neq 0$ und

$$f(x) = f(x+p+p) = \frac{f(x+p)}{3f(x+p)-1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)}{3f(x)-1}-1} = \frac{f(x)}{3f(x)-3f(x)+1} = f(x)$$

d. h., f ist periodisch: Es gilt mit $q = 2p \neq 0$

$$f(x+q) = f(x) \quad \text{für alle reellen } x \quad (2)$$

b) Da jede Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b \sin^2 x}{c + d \sin^2 x} \quad (3)$$

sofern sie für alle reellen x definiert ist, die Periode π hat, kann man (unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus a) versuchen, ob sich die Eigenschaft (*) mit $p = \frac{\pi}{2}$ erreichen lässt.

Nun ist für solche Funktionen einerseits

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a + b \cos^2 x}{c + d \cos^2 x} = \frac{a + b - b \sin^2 x}{c + d - d \sin^2 x} \quad (4)$$

andererseits

$$\frac{f(x)}{3f(x) - 1} = \frac{a + b \sin^2 x}{c + d \sin^2 x} : \frac{3a + 3b \sin^2 x - c - d \sin^2 x}{c + d \sin^2 x} = \frac{a + b \sin^2 x}{(3a - c) + (3b - d) \sin^2 x} \quad (5)$$

wobei für die Wahl von a, b, c, d zunächst vorauszusetzen ist, dass

$$c + d \sin^2 x \neq 0 \quad \text{und} \quad (3a - c) + (3b - d) \sin^2 x \neq 0$$

für alle x gilt. Übereinstimmung der Zähler in den rechten Seiten von (4), (5) erreicht man z. B. für $b = 0$ und hiernach Übereinstimmung der Nenner vermittelt $c + d = 3a - c$ etwa für $a = c = d = 1$.

Die somit betrachtete Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$$

hat in der Tat alle verlangten Eigenschaften. Sie ist nicht konstant; sie ist wegen $1 + \sin^2 x \neq 0$ für alle x definiert und erfüllt wegen $2 - \sin^2 x \neq 0$ für alle x nach (4), (5) auch die Beziehung (1).

L.4.36

a) Für jedes reelle x gilt $f(x+p) = f(x)$; hieraus folgt

$$\frac{1}{2}f(x+p) = \frac{1}{2}f(x), \quad \text{d.h.} \quad F(x+p) = F(x)$$

Daher hat die Funktion $F(x)$ die Zahl p als eine Periode. Ist q die kleinste positive Periode von $F(x)$, so ist p ein ganzzahliges Vielfaches von q . Für alle reellen x gilt die Gleichung $F(x+q) = F(x)$, d. h.

$$\frac{1}{2}f(x+q) = \frac{1}{2}f(x), \quad \text{d.h.} \quad f(x+q) = f(x)$$

so dass q dann auch eine Periode von $f(x)$ ist; nach Voraussetzung über p und $f(x)$ folgt hieraus, dass q ein ganzzahliges Vielfaches von p ist, also $p = q$. Daher ist p auch die kleinste positive Periode von $F(x)$.

b) Für jedes reelle x ist auch $\frac{x}{2}$ reell; daher gilt

$$f\left(\frac{x}{2} + p\right) = f\left(\frac{x}{2}\right), \quad f\left(\frac{x+2p}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right), \quad G(x+2p) = G(x)$$

Daher hat die Funktion $G(x)$ die Zahl $2p$ (die ebenfalls positiv ist) als eine Periode. Ist umgekehrt r die kleinste positive Periode von $G(x)$, so gilt für alle reellen x die Gleichung $G(x+r) = G(x)$, d.h.

$$f\left(\frac{x+r}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Da hierbei auch $\frac{x}{2}$ alle reellen Zahlen durchläuft, ist also $\frac{r}{2}$ eine (ebenfalls positive) Periode von $f(x)$; wie unter a) folgt hieraus $\frac{r}{2} = p$, d.h. $r = 2p$. Daher ist $2p$ die kleinste positive Periode von $G(x)$.

14 Lösungen - Logik, Kombinatorik und Spiele

L.5.1

Wäre die Aussage Db) wahr, würde also $100 < x$ gelten, dann wären auch Da) und Dc) wahr. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass D mindestens eine falsche Aussage macht. Also gilt

$$x < 100 \quad (1)$$

Wäre die Aussage Dc) falsch, also $x < 10$, dann wären auch Da) und Db) falsch. Das widerspräche der Voraussetzung, nach der D mindestens eine wahre Aussage zu machen hat. Also gilt

$$x \geq 10 \quad (2)$$

Alle drei Aussagen von B enthalten die Aussage, dass x eine ganze Zahl ist. Da mindestens eine dieser Aussagen richtig sein muss, gilt x ist eine ganze Zahl. (3)

Wegen (2) ist Cb) falsch, und wegen (3) ist Ca) falsch. Also muss Cc) richtig sein, und es folgt:

$$x \text{ ist Quadrat einer natürlichen Zahl} \quad (4)$$

Wegen (2) ist Aa) falsch, und wegen (2) ist auch Ac) falsch. Also ist Ab) wahr, und es gilt:

Die gesuchte Zahl x enthält in der dekadischen Darstellung keine Sechs.

Danach kommen nun noch höchstens alle diejenigen Quadratzahlen x mit $10 \leq x < 100$ in Frage, in deren dekadischer Darstellung keine Sechs auftritt. Das sind die Zahlen 25, 49 und 81 und nur diese.

Da damit Ba) und Bb) falsch sind, muss Bc) richtig sein. Die gesuchte Zahl kann also höchstens die Zahl 25 sein.

Um umgekehrt zu zeigen, dass 25 tatsächlich die gesuchte Zahl ist, werden für $x = 25$ die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen überprüft. Man erhält in der angegebenen Reihenfolge:

bei A: FWF, bei B: FFW, bei C: FFW, bei D: WFW.

Daher sind in jedem Fall mindestens eine wahre und eine falsche Aussage vorhanden, wie zu zeigen war. Die gesuchte Zahl x ist die Zahl 25.

L.5.2

Eine Frage reicht nicht aus, da der Lehrer wegen der Aufteilung der Schüler in drei Gruppen und wegen des Vorhandenseins nur zweier Antwortmöglichkeiten (ja, nein) auf jede beliebige (nach den Regeln zulässige) Frage von Angehörigen mindestens zweier Gruppen die gleiche Antwort erhalten würde ("Schubfachprinzip").

Mit der Angabe des folgenden Beispiels zeigen wir gleichzeitig, dass zwei Fragen ausreichen. Der Lehrer kann z. B. die Frage "Bist du ein 'Unbeständiger'?" zweimal stellen; denn dann erhält er von einem "Wahren" die Antworten nein, nein, von einem "Unwahren" die Antworten ja, ja und von einem "Unbeständigen" die Antworten ja, nein oder

nein, ja. Damit ist eine Identifizierung möglich.

L.5.3

Ja, Aphrodite ist die schönste ('Urteil des Paris').

Nach Voraussetzung ist nämlich genau eine der drei die schönste unter ihnen. Wäre es nicht Aphrodite, dann wäre die Aussage b) wahr und die Aussage d) falsch, und es wären Athene und Hera beide schönste.

L.5.4

Angenommen, C hätte den Brief nicht. Dann wäre Cb) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die C gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, dass Cc) wahr sein müsste. Daher wären alle Aussagen von B und wegen Bb) auch alle Aussagen von A wahr. Wegen Ba) und Ab) müsste mithin doch C den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, C hätte den Brief nicht, falsch war. Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme: C hat den Brief.

L.5.5

Fall 1.

Angenommen, Cc) wäre falsch. Dann wäre auch Ca) falsch, und es gäbe im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe höchstens eine wahre Aussage von C. Also kann Cc) nur wahr, der Ball also nur grün oder schwarz oder gelb sein.

Daher muss Cb) falsch, also laut Aufgabenstellung Ca) wahr sein. Der Ball kann mithin nur schwarz oder grün sein.

Dann ist Ba) falsch, demnach muss Bc) wahr sein. Der Ball kann also nur grün sein. Die Aussage Dec) ist falsch, da der Ball einfarbig ist. Also ist Da) wahr. Der Pullover von D kann daher ebenfalls nur grün sein.

Fall 2. Angenommen, Ca) wäre wahr. Dann wäre auch Cc) wahr, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann Ca) nur falsch sein. Angenommen, Cc) wäre wahr. Dann wäre der Ball gelb, also wären alle Aussagen von A falsch, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann auch Cc) nur falsch und folglich Cb) nur wahr sein. Der Ball kann somit nur rot sein. Daher müssen Ba), c) falsch sein.

Andererseits gilt:

Db) ist unabhängig von allen Bedingungen stets wahr, also ist laut Aufgabenstellung Da) falsch.

Die Farbe des Pullovers von D lässt sich allein mit Hilfe der gemachten Aussagen nicht ermitteln. Es steht nur fest, dass der Pullover nicht rot ist.

L.5.6

Wir bezeichnen die Spieler nach ihrer Platzierung mit I, II, III usw. Auf Grund der gemachten Angaben gelten folgende Aussagen:

- a) Es wurden genau 15 Partien gespielt.
- b) Genau fünf Partien endeten remis.
- c) Die Gesamtpunktzahlen waren paarweise voneinander verschieden.

d) II erreichte genau zwei Punkte mehr als der Letzte.

e) A schnitt besser ab als D.

f) A spielte nicht remis.

g) D spielte nicht remis.

h) $C = III$.

i) C schlug IV.

Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer mit n , so gilt $\frac{n(n-1)}{2} = 15$, woraus $n = 6$ folgt.

j) An dem Turnier nahmen genau sechs Spieler teil. Bezeichnet man die von VI erreichte Punktzahl mit z , so hat wegen d) der Spieler II genau $z + 2$ Punkte erreicht. Daraus folgt wegen c) als einzige Möglichkeit für II, IV, V:

	Spieler	Erreichte Gesamtpunktzahl
k)	V	$z + 0,5$
	IV	$z + 1$
	III	$z + 1,5$

Die Summe der von II, III, IV, V, VI erreichten Gesamtpunktzahlen ist somit $5z + 5$. Bezeichnet man nun die von I erreichte Punktzahl mit t , so gilt also $5z + 5 + t = 15$, woraus $t = 5(2 - z)$ folgt.

Nun ist $2 - z$ ein ganzzahliges Vielfaches von 0,5 und daher t ein ganzzahliges Vielfaches von $5 \cdot 0,5$. Andererseits gilt nach c), und da I höchstens fünf Partien gewonnen haben kann, $2,5 \leq t \leq 5$.

Daher kann t nur 2,5 oder 5 sein. Für $t = 2,5$ ergäbe c), weil I die höchste Punktzahl hat, im Widerspruch zu $t = 10 - 5z$ für z den Wert $z = 0$. Daher folgt $t = 5$ und $z = 1$.

l) I gewann also seine sämtlichen Spiele. Damit erhält man unter Berücksichtigung von h), i), j), k) und l) folgende Punkttabelle:

	I	II	III	IV	V	VI	Ges.Punktzahl
I	<input type="checkbox"/>	1	1	1	1	1	5
II	0	<input type="checkbox"/>		•			3
C=III	0		<input type="checkbox"/>	1			2,5
IV	0	•	0	<input type="checkbox"/>	•	•	2
V	0			•	<input type="checkbox"/>		1,5
VI	0			•		<input type="checkbox"/>	1

Nun lässt sich die Platzierung von D ermitteln. Es gilt:

$D \neq III$ wegen h);

$D \neq V$, da die Gesamtpunktzahl von D wegen g) eine ganze Zahl sein muss;

$D \neq I$ wegen e);

$D \neq II$ und $D \neq VI$ aus folgendem Grund: Wäre $D = II$ oder $D = VI$, so wäre nach g) in Zeile und Spalte II bzw. in Zeile und Spalte VI überall 1 oder 0 einzusetzen. Danach verblieben noch genau zehn freie Felder, in die wegen b) überall 0,5 einzusetzen wäre, und hierbei könnte die Gesamtpunktzahl 2,5 von C nicht auftreten.

m) Also ist $D = IV$.

Die Tabelle enthält noch 18 Felder ohne Punktangabe. In genau zehn von ihnen ist wegen b) die Zahl 0,5 einzusetzen. In genau acht von ihnen ist demnach 1 oder 0 einzusetzen. Sechs dieser acht Felder sind wegen g) schon bestimmt und in der Tabelle durch einen Punkt markiert.

Die restlichen beiden Zahlen 1 und 0 müssen bei II und VI auftreten, da diese wegen ihrer ganzzahligen Gesamtpunktzahlen nicht sämtliche noch offene Partien remis gespielt haben können. C hat also außer gegen I und IV sämtliche Partien remis gespielt. Wegen f) und m) ist somit $A = I$ und hiernach B einer der (von C und) von I und IV verschiedenen Spieler.

Daher folgt als einzige Möglichkeit für den gesuchten Spielausgang:

n) Das Spiel B gegen C endete unentschieden.

L.5.7

Angenommen, Peters Aussage wäre falsch. Dann gelte: Peter hat den Zirkel nicht, und Klaus hat das Lineal. Hiernach wäre Uwes Aussage falsch, und folglich auch Monikas Aussage, im Widerspruch zu der Mitteilung, dass genau zwei der Aussagen falsch sind. Also ist Peters Aussage wahr. Wenn nun Peter den Zirkel nicht hat, so hat hiernach (wegen der Wahrheit von Peters Aussage) Klaus das Lineal nicht. Also ist Uwes Aussage wahr und folglich auch Monikas Aussage. Somit sind die Aussagen von Klaus und Ilona falsch. Daraus folgt:

- a) Klaus hat das Lineal.
- b) Uwe hat den Bleistift nicht.
- c) Ilona hat den Füller nicht.
- d) Ilona hat den Bleistift nicht.

Aus Peters wahrer Aussage folgt wegen a):

- e) Peter hat den Zirkel.

Daraus und aus d), b) und d) folgt:

- f) Monika hat den Bleistift.

Aus den ermittelten Verstecken und aus c) folgt:

- g) Ilona hat den Radiergummi.
- h) Uwe hat den Füller.

Die Verstecke konnten also eindeutig ermittelt werden. Sie sind in a), e), f), g) und h) angegeben.

L.5.8

Zur Abkürzung kann man z. B. folgende Symbolik vereinbaren: (x, n) bedeute " x fährt als n -ter", Axel = A, Bodo = B, usw. Dann lassen sich die fünf geäußerten Wünsche in die folgenden Implikationen umschreiben:

- a) Wenn (D, 1), dann (C, 3).
- b1) Wenn (A, 2), dann (C, 1). b2) Wenn (D, 2), dann (C, 1).
- c1) Wenn (A, 3), dann (B, 2). c2) Wenn (B, 2), dann (A, 3).

d) Wenn (D, 3), dann (A, 2).

e1) Wenn (D, 4), dann (C, 3). e2) Wenn (D, 4), dann (A, 1).

Man wird nun eine geeignete Fallunterscheidung treffen. Je nach ihrer Wahl sind verschiedene Lösungswege möglich.

Die im folgenden Lösungsweg durchgeführte Fallunterscheidung ist vielleicht relativ naheliegend, weil in den Voraussetzungen der Implikationen a) bis e2) das Symbol D unter den Symbolen A, ..., D, 1, ..., 4 am häufigsten auftritt.

Fall 1: (D, 1).

Nach a) folgt (C, 3). Von den beiden Möglichkeiten (A, 2), (A, 4) würde (A, 2) nach b1) auf (C, 1) führen, scheidet also aus; somit folgt (A, 4). Für B verbleibt (B, 2); dies ergibt nach c2) den Widerspruch (A, 3). Der Fall 1 ist also unmöglich.

Fall 2: (D, 2).

Nach b2) folgt (C, 1). Von den beiden Möglichkeiten (A, 3), (A, 4) würde (A, 3) nach c1) auf (B, 2) führen, scheidet also aus; somit folgt (A, 4). Für B verbleibt (B, 3).

Fall 3: (D, 3). Nach d) folgt (A, 2), nach b1) weiter (C, 1). Für B verbleibt (B, 4).

Fall 4: (D, 4). Nach e1) und e2) folgt (C, 3) und (A, 1). Für B verbleibt (B, 2); dies zieht wegen c2) den Widerspruch (A, 3) nach sich. Der Fall 4 ist also unmöglich.

Daher verbleiben für die Reihenfolge der ersten vier Fahrten nur die beiden Möglichkeiten

Christian, Dieter, Bodo, Axel (Fall 2),

Christian, Axel, Dieter, Bodo (Fall 3).

Jede dieser beiden Möglichkeiten ist tatsächlich Lösung der Aufgabe, da für jeden der genannten Wünsche stets entweder die Voraussetzung, unter der der betreffende Wunsch geäußert wurde, gar nicht eintritt oder aber der Wunsch berücksichtigt wird.

L.5.9

Bezeichnet man die 18 Schüler, von denen beide Eltern anwesend waren, mit Teilklasse I, die sieben Schüler, von denen nur die Mutter anwesend war, mit Teilklasse II, und beide Schüler, von denen nur der Vater anwesend war, mit Teilklasse III, so lassen sich folgende Überlegungen anstellen:

Da zu III mindestens ein Vater gehört, können zu I höchstens 17 Väter gehören, d. h., es muss in I mindestens ein Geschwisterpaar geben.

Gäbe es in I mehr als ein Geschwisterpaar oder mindestens eine Gruppe von drei oder mehr Geschwistern, dann würden zu I höchstens 16 Mütter gehören. Es müssten also zu II mindestens acht Mütter gehören, was nicht möglich ist. Daher gibt es in I genau ein Geschwisterpaar.

Dann müssen zu I genau 17 Mütter und folglich zu II genau sieben Mütter gehören, d. h., es gibt in II kein Geschwisterpaar.

Schließlich müssen zu I genau 17 Väter und daher zu III genau ein Vater gehören, d. h., III besteht aus einem Geschwisterpaar.

Die auf diese Weise ermittelten einzig möglichen Anzahlen (in I genau ein, in II kein, in III genau ein Geschwisterpaar) erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe, wie man leicht durch eine Probe nachweisen kann.

Somit gibt es in der Klasse genau zwei Geschwisterpaare, d. h. genau vier Kinder, die in derselben Klasse Geschwister haben.

L.5.10

Bezeichnet man die Kosmonauten nach der Farbe ihrer Raumanzüge - rot, gelb, schwarz und blau - in dieser Reihenfolge mit I, II, III und IV, so sind am Anfang, wenn nur die Information vorliegt, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D gekommen sind, folgende $4! = 24$ Möglichkeiten ihrer Herkunft vorhanden:

	I	II	III	IV		I	II	III	IV		I	II	III	IV
1.	A	B	C	D	9.	B	C	A	D	17.	C	D	A	B
2.	A	B	D	C	10.	B	C	D	A	18.	C	D	B	A
3.	A	C	B	D	11.	B	D	A	C	19.	D	A	B	C
4.	A	C	D	B	12.	B	D	C	A	20.	D	A	C	B
5.	A	D	B	C	13.	C	A	B	D	21.	D	B	A	C
6.	A	D	C	B	14.	C	A	D	B	22.	D	B	C	A
7.	B	A	C	D	15.	C	B	A	D	23.	D	C	A	B
8.	B	A	D	C	16.	c	B	D	A	24.	D	C	B	A

Nach der ersten Angabe sind I und III miteinander bekannt, aber sowohl die Bewohner von A und B als auch die von C und D kannten sich nicht. Dies bedeutet, dass keines der nicht geordneten Paare (A, B) und (C, D) mit dem nicht geordneten Paar (I, III) übereinstimmt.

Somit ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 3, 5, 9, 11 sowie die Fälle 14, 16, 20 und 22 ausscheiden.

Nach der zweiten Information konnten sich die nicht geordneten Paare (I, III) und (II, IV) gut verständigen, während dies für das nicht geordnete Paar (A, D) nicht zutraf.

Hiernach kann das Paar (A, D) mit keinem der Paare (I, III), (II, IV) übereinstimmen. Deshalb ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 2, 4, 21 und 23 sowie die Fälle 7, 12, 13 und 18 ausscheiden.

Die dritte Bedingung besagt, dass keines der beiden geordneten Paare (B, D) und (C, A) mit dem Paar (II, IV) übereinstimmen kann. Gleichbedeutend hiermit ist das Ausscheiden der Fälle 1, 15, 10, 24.

Die Berücksichtigung aller drei Angaben ist somit gleichwertig mit der Möglichkeit genau der nachstehenden Fälle:

	I	II	III	IV
6.	A	D	C	B
8.	B	A	D	C
17.	C	D	A	B
19.	D	A	B	C

Diese Zusammenstellung zeigt, dass der Kosmonaut II derjenige ist, der nur noch vom Planeten A oder vom Planeten D stammen kann. Indem dann festgestellt wird, dass er von D gekommen ist, sind genau die Fälle 8 und 19 zu streichen. Aus den verbleibenden Fällen 6 und 17 geht hervor, dass IV vom Planeten B gekommen ist.

Die beiden Kosmonauten von A und C haben demnach die Raumanzugfarben rot und schwarz. Die Aussage über die Anfangsbuchstaben der Farbe ist somit äquivalent damit, dass genau der Fall 17 zutrifft, d. h., man erhält folgendes Ergebnis:

Farbe	rot	gelb	schwarz	blau
Planet	C	D	A	B

L.5.11

Es sei

n die Anzahl der Leichtathletikdisziplinen dieses Wettkampf,

e die Punktzahl für den jeweiligen Ersten,

z die Punktzahl für den jeweiligen Zweiten,

d die Punktzahl für den jeweiligen Dritten in jeder der Einzeldisziplinen.

Da mindestens Weitsprung und Kugelstoßen zum Wettkampf gehörten, ist $n \geq 2$. Wegen $e > z > d \geq 1$ gilt $e + z + d \geq 6$. Da insgesamt $9 + 22 + 9 = 40$ Punkte verteilt wurden und die Punktverteilung für den Ersten, Zweiten bzw. Dritten in jeder Disziplin dieselbe war, gilt $n(e + z + d) = 40$.

Da $n \geq 2$ und $e + z + d \geq 6$ ist und $40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$ die einzigen ganzzahligen Faktorenerlegungen von 40 sind, in denen ein Faktor mindestens 2 und der andere mindestens 6 ist, kann n nur eine der Zahlen 2, 4, 5 sein.

Angenommen, es wäre $n = 2$. Dann wäre $e + z + d = 20$. Da Adorf den Weitsprung gewann sowie in der zweiten Disziplin mindestens einen Punkt, insgesamt aber nur 9 Punkte erreichte, wäre $e \leq 8$. Für $e = 8$ wäre wegen der Gesamtpunktzahl 9 von Adorf $d = 1$, also $z = 20 - 8 - 1 = 11$, im Widerspruch zu $e > z$. Für $e \leq 7$ wäre $z \leq 6$, $d \leq 5$, im Widerspruch zu $e + z + d = 20$. Also gilt $n \neq 2$.

Angenommen, es wäre $n = 4$. Dann wäre $e + z + d = 10$. Da Adorf den Weitsprung gewann sowie in den übrigen drei Disziplinen mindestens je einen Punkt, insgesamt aber nur 9 Punkte erreichte, wäre $e \leq 6$. Aus $e = 6$ folgte $z + d = 4$, was wegen $z > d \geq 1$ auf $z = 3$ und $d = 1$ führt.

Wäre Bedford in höchstens zwei Disziplinen erfolgreich gewesen, so hätte es dadurch höchstens $2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 18$ Punkte erreichen können. Bedford müsste also in genau drei Disziplinen den Sieger gestellt haben. In diesen Disziplinen hätte es 18 Punkte und im Weitsprung 4 Punkte gewonnen haben müssen.

Das ist aber wegen $z = 3$ und $d = 1$ nicht möglich. Für $e \leq 5$ wäre $z \leq 4$, also hätte die Punktzahl von Bedford $3 \cdot 5 + 4 = 19$ nicht überschreiten können. Also gilt $n \neq 4$.

Daher kann nur $n = 5$ sein. Dann ist $e + z + d = 8$. Da Adorf den Weitsprung gewann sowie in den vier übrigen Disziplinen mindestens je einen Punkt und insgesamt 9 Punkte erreichte, ist $e \leq 5$. Für $e \leq 4$ wäre $z \leq 3$, also hätte die Punktzahl von

Bedorf $4 \cdot 4 + 3 = 19$ nicht überschreiten können. Somit gilt $e = 5$, also $z + d = 3$, was wegen $z > d \geq 1$ auf $z = 2$ und $d = 1$ führt.

Wäre Bedorf in höchstens drei Disziplinen erfolgreich gewesen, so hätte es dadurch $3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$ Punkte erreichen können. Bedorf hat also in genau vier Disziplinen den Sieger gestellt. In diesen Disziplinen hat es somit 20 Punkte und daher im Weitsprung 2 Punkte gewonnen.

Folglich gewann Bedorf das Kugelstoßen und belegte im Weitsprung den zweiten Platz. Diese Antworten sind zugleich die einzigen, die mit den in der Aufgabe genannten Aussagen vereinbar sind, d. h., die beiden Fragen können eindeutig beantwortet werden.

Anmerkung: Da die Existenz einer Punktverteilung, mit der alle Aussagen vereinbar sind, der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist eine "Probe" nicht erforderlich.

L.5.12

In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet. Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

L.5.13

Laut Aufgabe sind für die erste Karawane genau die Tage Marschtage, die sich mit ganzzahligen $n \geq 0$ in der Form $(4n + 1)$, $(4n + 2)$, $(4n + 3)$ schreiben lassen. Für die zweite Karawane sind das die Tage $(4n + 1)$, $(4n + 2)$. Also sind gemeinsame Marschtage genau die Tage $(4n + 1)$, $(4n + 2)$. Innerhalb von $4n$ Tagen hat die erste Karawane genau $3n$ Marschtage, die zweite genau $2n$ Marschtage.

Da beide Karawanen gleichzeitig in B eintreffen, kann das nur an einem der Tage $(4n + 1)$, $(4n + 2)$ geschehen sein. Wäre es an einem Tag $(4n + 2)$ gewesen, so hätte die erste Karawane C laut Aufgabenstellung am Ende des $(8n + 4)$ ten Tages erreicht, im Widerspruch dazu, dass dieser Tag kein Marschtag für sie war.

Also haben beide Karawanen B am Ende eines $(4n + 1)$ ten Tages erreicht. Von diesen $(4n + 1)$ Tagen waren $(3n + 1)$ Marschtage der ersten und $(2n + 1)$ Marschtage der zweiten Karawane.

Die erste Karawane erreichte D am Ende des $(12n + 3)$ ten Tages. Von diesen $(12n + 3)$ Tagen marschierte sie $(9n + 3)$ Tage. Hiernach und wegen $9n + 3 = 3(3n + 1)$ ist der Weg von A nach D genau dreimal so weit wie der von A nach B.

In den gleichen $(12n + 3)$ Tagen marschierte die zweite Karawane $(6n + 2)$ Tage. Wegen $6n + 2 < 3(3n + 1)$ bewältigte sie in diesen Tagen weniger als den Weg von A nach D. Also traf die erste Karawane zuerst in D ein.

L.5.14

Angenommen, ein Netz erfülle die genannten Bedingungen. Dann gibt es eine Linie mit genau drei Haltestellen; diese Linie sei L_1 , ihre Haltestellen seien mit B, C, D

bezeichnet. Ferner gibt es eine andere Linie; diese hat mit L_1 genau eine Haltestelle gemeinsam, also nicht alle ihre Haltestellen; d. h., es gibt eine von B, C, D verschiedene Haltestelle, mit A bezeichnet.

Laut Aufgabe muss von A je eine Linie nach B, C, D führen; diese drei Linien müssen von L_1 verschieden sein, da diese nicht über A führt. Sie müssen aber auch paarweise voneinander verschieden sein; denn führte eine der Linien von A zu zweien der Punkte B, C, D, so hätte sie diese beiden mit L_1 gemeinsam.

Die drei neuen Linien seien in der genannten Reihenfolge L_2, L_3, L_4 . Auf jeder von ihnen liegt genau eine bisher nicht bezeichnete Haltestelle; diese drei neuen Haltestellen sind auch paarweise voneinander verschieden, da sonst wieder mehr als eine gemeinsame Haltestelle zweier der Linien 2, 3, 4 zustande käme.

Die drei neuen Haltestellen seien in der genannten Reihenfolge E, F, G (siehe Tabelle, Teil 1).

Gäbe es nun eine von A, B, C, D, E, F, G verschiedene Haltestelle H, so gäbe es laut Aufgabe eine Linie von A nach H. Sie wäre von den Linien 1, 2, 3, 4 verschieden, da diese Linien nicht durch H führen. Sie müsste aber mit L_1 eine Haltestelle gemeinsam haben, also durch einen der Punkte B, C, D gehen, und hätte daher mit einer der Linien 2, 3, 4 mehr als eine gemeinsame Haltestelle. Wegen dieses Widerspruchs sind A, B, C, D, E, F, G die einzigen Haltestellen des Netzes.

Zu jedem der Haltestellenpaare (B, F), (C, G), (D, E) muss es eine Linie geben, die die Haltestellen dieses Paares miteinander verbindet. Diese drei neuen Linien verbinden Haltestellen, die von keiner der bisher bezeichneten Linien miteinander verbunden werden; sie sind daher von den bisher bezeichneten Linien verschieden. Andererseits sind sie auch untereinander verschieden, da je zwei von ihnen schon vier paarweise verschiedene Punkte berühren.

Die drei neuen Linien seien in der genannten Reihenfolge L_5, L_6, L_7 .

Zu jeder von ihnen gibt es genau eine Möglichkeit, unter den für sie noch nicht aufgezählten Haltestellen eine dritte so zu wählen, dass b) eingehalten wird, nämlich G für L_5 , E für L_6 und F für L_7 .

In dem so erhaltenen Netz (siehe Tabelle, Teil 1 und 2) ist jede Haltestelle mit jeder anderen durch genau eine Linie verbunden. Gäbe es noch eine weitere Linie, so müsste diese ebenfalls zwei der Haltestellen miteinander verbinden, und es käme zu einem Widerspruch gegen b). Daher kann nur das hier beschriebene Netz die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Man bestätigt, dass in der Tat diese Bedingungen erfüllt sind.

Die Anzahl der Linien je eines derartigen Netzes beträgt daher 7.

	Linie	Haltestellen					
Teil 1	1	B	C	D			
	2	A	B		E		
	3	A		C		F	
	4	A			D		G
Teil 2	5		B			F	G
	6			C		E	G
	7				D	E	F

L.5.15

Offenbar lautet eine Lösung:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

Man kann sie z.B. auf folgende Weise finden: Unter Berücksichtigung der in der Aufgabenstellung genannten Bedingungen muss insbesondere die Zahl 1 in drei verschiedenen Spalten stehen, kann also in die ersten drei eingetragen werden:

1	1	1				

Weiterhin müssen lauter verschiedene Zahlen in den ersten drei Spalten vorkommen, weil je zwei von ihnen bereits die gemeinsame Zahl 1 besitzen. Dafür können der Reihe nach die Zahlenpaare 2 und 3, 4 und 5, 6 und 7 gewählt werden:

1	1	1				
2	4	6				
3	5	7				

Die bereits in der ersten Spalte auftretende Zahl 2 muss noch in zwei weiteren Spalten stehen, kann also in die vierte und fünfte Spalte gesetzt werden.

Ähnlich muss die Zahl 3, die auch schon in der ersten Spalte vorkommt, noch in zwei weiteren Spalten stehen, kann aber weder in die vierte noch in die fünfte eingesetzt werden, weil das mit dem Vorhandensein von 2 und 3 in der ersten Spalte unverträglich wäre, so dass sich für 3 zwangsläufig die sechste und siebente Spalte ergeben:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6				
3	5	7				

Weiterhin kann die Zahl 4, die schon in der zweiten Spalte steht, in die vierte und sechste Spalte aufgenommen werden, während ihr gleichzeitiges Auftreten in der vierten und fünften bzw. sechsten und siebenten Spalte unmöglich ist, weil sonst in diesen beiden Spaltenpaaren mehr als eine Zahl übereinstimmen würde.

Die Zahl 5 kann dann weder in der vierten noch in der sechsten Spalte stehen, beide mal weil sie bereits in der zweiten Spalte zusammen mit der Zahl 4 steht.

Sie muss also in die fünfte und die siebente Spalte eingetragen werden:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7				

Danach kann die Zahl 6 in der vierten Spalte und muss dann in der siebenten Spalte Platz finden. Die beiden für die Zahl 7 verbleibenden Plätze in der fünften und der sechsten Spalte ergeben keinen Widerspruch, so dass damit eine Lösung gefunden ist.

L.5.16

Aus den gegebenen 15 Punkten lassen sich genau $\binom{15}{3}$ voneinander verschiedene Punktripel bilden. Die Punkte eines jeden solchen Tripels sind genau dann die Ecken eines Dreiecks, wenn sie nicht auf ein und derselben Geraden liegen.

a) Im gegebenen Fall befinden sich jedoch genau 5 der Punkte auf BC , 6 auf CA und 7 auf AB . Aus diesen sind dabei jeweils $\binom{5}{3}$, $\binom{6}{3}$ bzw. $\binom{7}{3}$ der $\binom{15}{3}$ Tripel gebildet.

Daher ist die gesuchte Anzahl Z der Dreiecke

$$Z = \binom{15}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3} = 390$$

b) Auf Grund der gleichen Überlegungen erhält man jetzt

$$Z = \binom{k+m+n+3}{3} - \binom{k+2}{3} - \binom{m+2}{3} - \binom{n+2}{3}$$

L.5.17

Die Anzahl aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} , bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt, ist gleich der Anzahl aller natürlicher Zahlen von 0 bis $10^{10} - 1$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Die Menge der letztgenannten Zahlen ist die Menge aller Zahlen $a_9 10^9 + \dots + a_1 10^1 + a_0$, wobei jedes a_i eine der neun Ziffern $\neq 5$ ist. Die Anzahl dieser Zahlen ist folglich 9^{10} . Die Anzahl der übrigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} ist somit

$$\begin{aligned} 10^{10} - 9^{10} &= (10 - 9)(10^9 + 10^8 \cdot 9^1 + \dots + 10^1 \cdot 9^8 + 9^9) \\ &> 9^9 + 9^8 \cdot 9^1 + \dots + 9^1 \cdot 9^8 + 9^9 = 10 \cdot 9^9 > 9^{10} \end{aligned}$$

Daher ist die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} , in deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer als die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen dieses Bereichs, in deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

L.5.18

Angenommen, eine Rechteckfläche, in der jede Zeile aus a und jede Spalte aus b Quadratflächen besteht, erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a \geq 3$ und $b \geq 3$, da sonst keine weißen Quadratflächen aufträten, und die Anzahl der roten Quadratflächen beträgt $2a + 2b - 4$, die Anzahl der weißen Quadratflächen beträgt $(a - 2)(b - 2) = ab - 2a - 2b + 4$. Somit gilt

$$2a + 2b - 4 = ab - 2a - 2b + 4 \quad \text{also} \quad a(b - 4) = 4b - 8 \quad (1)$$

Wäre $b = 3$, so folgte $-a = 4$; wäre $b = 4$, so folgte $0 = 8$, was beides einen Widerspruch darstellt. Also gilt $b > 4$, d.h.,

$$b - 4 > 0 \quad (2)$$

Wegen (1) und $4b - 8 = 4(b - 4) + 8$ ist daher 8 durch $b - 4$ teilbar. (3)
 Nach (2), (3) kann $b - 4$ nur eine der Zahlen 1, 2, 4, 8 sein. Hieraus und aus (1) ergibt sich, dass für das Paar (a, b) nur die Möglichkeiten

a	12	8	6	5
b	5	6	8	12

bestehen. Wie Abb. L.5.18 zeigt, erfüllen in der Tat diese Paare die Bedingungen der Aufgabe (Fall 1 und 4 bzw. Fall 2 und 3 gehen durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten auseinander hervor).

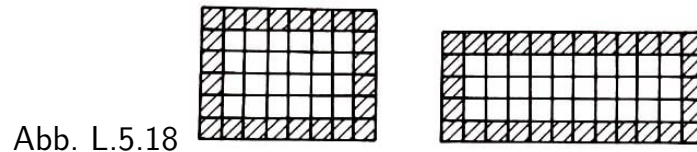


Abb. L.5.18

Der vorstehende Lösungsweg untersucht, wann sich aus (1) eine natürliche Zahl a ergibt. Einfacher wird die Darstellung bei folgendem zweitem Lösungsweg:
 Die (durch positive ganze a, b zu erfüllende) Bedingung ist äquivalent mit $ab - 4a - 4b + 8 = 0$ und dies mit

$$(a - 4)(b - 4) = 8 \quad (4)$$

Also hat man für alle ganzzahligen Faktorenzerlegungen von 8 zu prüfen, ob für sie a und b positiv (ganzzahlig) sind. Ist nun eine der Zahlen $a - 4, b - 4$ ein solcher Faktor -8 oder -4 (dann ist der andere -1 oder -2), so hat die betreffende Zahl a bzw. b den Wert -4 oder 0.

Daher lösen genau die Zerlegungen $8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8$ und somit die oben angegebenen Paare (a, b) die Aufgabe.

L.5.19

Bezeichnet man die Anzahl der anwesenden Herren mit h , die der Damen mit d , so beträgt die Anzahl der an diesem Abend ausgeführten Tänze sowohl $3h$ als auch $2d$, so dass zwischen h und d die Beziehung

$$3h = 2d \quad (1)$$

besteht. Eine weitere folgt daraus, dass die Anzahl der Paare von Herren, nämlich $\frac{1}{2}(h - 1)h$, mit der Anzahl der Damen übereinstimmt, dass also

$$\frac{1}{2}(h - 1)h = d \quad (2)$$

gilt. Aus (1) und (2) zusammen folgt $h = 4, d = 6$, so dass nur diese Anzahlen für die Lösung in Frage kommen.

Dass mit diesen Anzahlen tatsächlich eine (und bis auf die willkürliche Nummerierung der Teilnehmer auch genau eine) Lösung existiert, die allen drei gestellten Bedingungen genügt, zeigt nachstehende Tabelle der 12 Tanzpaare, in welcher die Herren von 1 bis 4, die Damen von 1' bis 6' nummeriert sind:

$$\begin{array}{cccccc} 11' & 22' & 33' & 14' & 25' & 36' \\ 21' & 32' & 13' & 44' & 45' & 46' \end{array}$$

Hier treten wie gefordert 1, 2, 3 und 4 je genau dreimal und 1', 2', ..., 6' je genau zweimal auf.

L.5.20

a) Bezeichnet man die Anzahl der Herren mit h , die der Damen mit d , so ist

$$hd = 480 \quad (1)$$

Werden weiter die Anzahlen derjenigen Herren, die mit 10 bzw. 11 bzw. 12 Damen getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit h_1, h_2, h_3 , und entsprechend die Anzahlen der Damen, die mit 12, 13 bzw. 14 Herren getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet, so ist

$$h_1 + h_2 + h_3 = h, \quad d_1 + d_2 + d_3 = d$$

während die Anzahl T der an dem Abend ausgeführten Tänze auf zwei Arten angegeben werden kann:

$$T = 10h_1 + 11h_2 + 12h_3, \quad T = 12d_1 + 13d_2 + 14d_3$$

Aus den Umformungen

$$T = 10(h_1 + h_2 + h_3) + h_2 + 2h_3, \quad T = 12(d_1 + d_2 + d_3) + d_2 + 2d_3$$

$$T = 12(h_1 + h_2 + h_3) - 2h_1 - h_2, \quad T = 14(d_1 + d_2 + d_3) - 2d_1 - d_2$$

ergibt sich

$$10h < T, \quad 12d < T, \quad 12h > T, \quad 14d > T$$

und daraus $12d < T < 12h$ und $10h < T < 14d$, also $d < h, h < \frac{7}{5}d$, zusammengefasst

$$d < h < \frac{7}{5}d \quad (2)$$

Weiter ergibt sich auf Grund der Voraussetzungen $h > 12, d \geq 10$. Die Faktorzerlegungen von 480, bei denen beide Faktoren diesen Bedingungen genügen, sind

$$10 \cdot 48, \quad 12 \cdot 40, \quad 15 \cdot 32, \quad 16 \cdot 30, \quad 20 \cdot 24$$

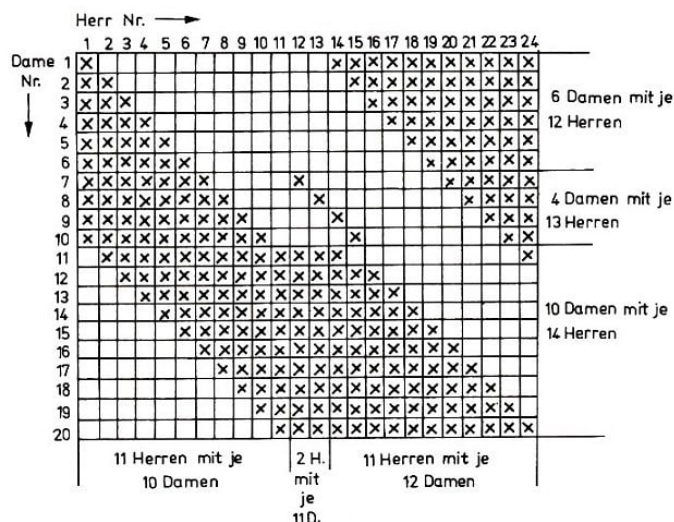


Abb. L.5.22

Daraus ergibt sich wegen (1), dass $h = 24$, $d = 20$ sein muss, weil nur in diesem Fall auch (2) erfüllt ist.

Damit sind diese Angaben als einzige Möglichkeit für die Anzahlen der Herren und Damen ermittelt.

b) Bei diesen Anzahlen sind in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllbar, wie folgendes Beispiel einer Übersicht der Tanzpaarungen zeigt (siehe Abb. L.5.22, siehe oben).

L.5.21

Man teile die Klasse entsprechend den möglichen Bahn-Ziffer-Kombinationen 1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, 2-3-1, 3-1-2, 3-2-1 in sechs Gruppen auf.

Wären in jeder dieser Gruppen nicht mehr als sechs Schüler, so könnten in der Klasse nicht mehr als 36 Schüler sein, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Folglich sind in einer dieser Gruppen mindestens sieben Schüler. Die Meinung des Schülers A ist also richtig.

Es kann aber sein, dass in keiner dieser Gruppen mehr als sieben Schüler sind (Beispiel: In einer Gruppe sind 6, in allen übrigen je 7 Schüler). Folglich ist die Meinung des Schülers B nicht richtig.

L.5.22

Angenommen, die durch die beschriebene Operation neu entstandenen Zahlen wurden jeweils auf einen neuen Würfel geschrieben. Dann hätte man auf diese Weise 26 Würfel mit Zahlen beschrieben. Es sei nun m_i die größte der Zahlen des i -ten Würfels ($i = 1, 2, \dots, 26$). Da das arithmetische Mittel reeller Zahlen bekanntlich nicht größer als die größte dieser Zahlen ist, gilt nun

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{26}$$

Angenommen, das Ergebnis wäre bei richtiger Rechnung zu erhalten. Dann hätten sich auf dem 26. Würfel die gleichen Zahlen wie auf dem ersten Würfel ergeben. Folglich müsste $m_{26} = m_1$ und damit $m_1 = m_2 = \dots = m_{26}$ gelten. Also hätte u.a. auf einer der sechs Flächen des dritten Würfels m_1 gestanden.

Mithin wäre m_1 das arithmetische Mittel der Zahlen b_1, b_2, b_3, b_4 auf den benachbarten Flächen des zweiten Würfels, also müsste gelten:

$$m_1 = \frac{1}{4}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$$

Hieraus folgt

$$4m_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \quad \text{bzw.} \quad (m_1 - b_1) + (m_1 - b_2) + (m_1 - b_3) + (m_1 - b_4) = 0.$$

Wegen $b_i < m_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) folgt hieraus $m_1 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4$, d. h., auf vier der Flächen des zweiten Würfels hätte die gleiche Zahl m_1 gestanden. Analog hätte dann aber auf allen sechs Flächen des ersten Würfels die Zahl m_1 gestanden, was laut Aufgabe nicht der Fall war.

Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme falsch war. Das genannte Ergebnis konnte somit nicht durch richtige Rechnung erhalten werden.

L.5.23

Wenn der Anziehende A im ersten Zug ein Hölzchen nimmt, so kann der andere Spieler den Gewinn erzwingen, nämlich indem er ebenfalls ein Hölzchen nimmt, so dass beim zweiten Zug von A noch fünf Hölzchen vorhanden sind. Von ihnen muss er laut Spielregel zwei oder drei Hölzchen nehmen, und dann bleiben drei bzw. zwei Hölzchen übrig, die der zweite Spieler nun nehmen kann.

Wenn A im ersten Zug zwei Hölzchen nimmt, so kann der zweite Spieler ebenfalls den Gewinn erzwingen, nämlich indem er drei Hölzchen nimmt, so dass genau zwei Hölzchen übrigbleiben. Von ihnen darf der erste Spieler laut Spielregel nur ein Hölzchen nehmen, und das restliche Hölzchen kann dann wieder der zweite Spieler nehmen.

Nimmt aber der erste Spieler im ersten Zug drei Hölzchen, so kann er den Gewinn erzwingen, falls der Nachziehende nun zwei oder drei Hölzchen nimmt; denn dann bleiben zwei bzw. ein Hölzchen übrig, die A fortnehmen kann. Falls jedoch der zweite Spieler nun ein Hölzchen nimmt, so verbleiben drei Hölzchen. Von ihnen kann der erste Spieler in seinem zweiten Zug laut Spielregeln nur ein oder zwei Hölzchen nehmen.

Nimmt er ein Hölzchen, so verliert er. Nimmt er dagegen zwei Hölzchen, so kann der zweite Spieler das verbleibende Hölzchen nach den Spielregeln nicht nehmen; das Spiel endet also unentschieden.

Damit ist gezeigt, dass es keinen Spieler gibt, der bei jeder Spielmöglichkeit des anderen den Gewinn erzwingen kann.

L.5.24

Der Sieg kann in einem Spiel genau dann erzwungen werden, wenn es eine Spielweise (Strategie) gibt, die zum Siege führt. Das ist bei dem vorliegenden Spiel der Fall.

Gelingt es nämlich einem der Spieler, etwa A, so viele Hölzchen zu entnehmen, dass der Gegenspieler B eine durch 11 teilbare Anzahl Streichhölzer vorfindet, dann kann A die von B entnommene Anzahl (1 bis 10 Hölzchen) jeweils zu 11 ergänzen, indem er seinerseits eine entsprechende Anzahl entnimmt, was nach den Spielregeln immer möglich ist.

Auf diese Weise findet B stets, wenn er am Zuge ist, eine durch 11 teilbare Anzahl, nach einiger Zeit schließlich elf Hölzchen, vor, von denen er mindestens ein Hölzchen nehmen muss, aber höchstens zehn Hölzchen nehmen darf. Daher bleibt zuletzt für A ein Rest von ein bis zehn Hölzchen, den er auf Grund der Spielregeln fortnehmen kann.

Im vorliegenden Fall (Spielbeginn mit 150 Hölzchen) ergibt sich daraus: A kann stets den Sieg erzwingen, nämlich indem er beim erstenmal durch Wegnahme von genau sieben Hölzchen die durch 11 teilbare Anzahl 143 herstellt und dann die genannte Strategie einhält.

B kann übrigens den Sieg genau dann erzwingen, wenn A wenigstens einmal nicht die

genannte Strategie einhält.

L.5.25

Angenommen, (x_5, y_5, z_5) sei eine Lösung des Gleichungssystems (*), (**), (***). Dann erhält man durch Multiplikation mit a_2 bzw. a_1 und durch Subtraktion aus den Gleichungen (*) und (**)

$$a_2x_0 - a_1b_2z_0 = a_2b_1 - a_1a_3$$

Hieraus und aus (***) erhält man durch Multiplikation mit a_4 bzw. a_1b_2

$$x_0(a_2a_4 + a_1b_2b_3) = a_2a_4b_1 - a_1a_3a_4 + a_1b_2b_4 \quad (*)$$

Analog erhält man

$$y_0(a_2a_4 + a_1b_2b_3) = a_3a_4 - b_2b_4 + b_1b_2b_3 \quad (2)$$

$$z_0(a_1a_4 + a_1b_2b_3) = a_1a_3b_3 - a_2b_1b_2 + a_2b_4 \quad (3)$$

Daraus folgt, dass das gegebene Gleichungssystem sicher dann genau eine ganzzahlige Lösung hat, wenn

$$a_2a_4 + a_1b_2b_3 = D \quad \text{gleich} \quad 1 \text{ oder} \quad -1$$

ist; denn die Terme auf den rechten Seiten von (1), (2), (3) sind ganzzahlig, und daher ist es für $|D| = 1$ auch die Lösung (x_0, y_0, z_0) des gegebenen Gleichungssystems. A kann also sein Ziel erreichen, wenn er so spielt, dass $|D| = 1$ wird.

a) Das lässt sich erreichen, wenn A zum Beispiel zunächst $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ und a_3 beliebig ganzzahlig wählt. Denn dann wird

$$D = a_4 - b_2b_3$$

Wählt A nun noch $a_4 = b_2b_3 + 1$, so wird $D = 1$.

b) A kann aber auch von vornherein die Koeffizienten a_1, \dots, a_4 so festlegen, dass $D = 1$ wird (unabhängig von der Wahl der Koeffizienten b_1, \dots, b_4 durch B), dass er also sicher gewinnt. Er erreicht dies z. B., wenn er $a_1 = 0$, $|a_2| = 1$; $|a_4| = 1$ und a_3 beliebig ganzzahlig wählt; denn dann wird

$$|D| = |a_2a_4 + a_1b_2b_3| = 1$$

L.5.26

Bettina hat recht. Wenn nämlich Axel auf seinen Zettel 1 schreibt, so ist seine Zahl in keinem Fall größer als die Bettinas, es ist also die Differenz zu bilden. Diese ist kleiner als 3, daher darf sich Bettina keine Marke von Axel nehmen.

Wenn Bettina ebenfalls 1 notiert, sind folgende drei Fälle möglich: Axel schreibt 1, 2 oder 3. Im ersten Fall ist die Differenz zu bilden. Sie ist 0, also darf sich Axel keine Marke von Bettina nehmen. Wenn mithin Axel und Bettina beide 1 schreiben, geht jeder von beiden sicher, keine Marke zu verlieren.

L.5.27

Es gelten folgende Feststellungen:

I. Verbleibt nach einem Zug eines Spielers genau eine Kugel in der Schachtel, so hat dieser Spieler gewonnen.

II. Es sei z eine Zahl mit der Eigenschaft, dass ein Spieler den Gewinn erzwingen kann, wenn der Gegner am Zug ist und genau z Kugeln in der Schachtel liegen. Dann ist auch $k + 1 + z$ eine Zahl mit dieser Eigenschaft; denn befinden sich genau $k + 1 + z$ Kugeln in der Schachtel und ist der Gegner am Zug, so muss dieser eine Anzahl a Kugeln mit

$$1 \leq a \leq k \quad (1)$$

entnehmen, und entnimmt der erstgenannte Spieler hierauf genau $k + 1 - a$ Kugeln (was zulässig ist, da wegen (1) auch $1 \leq k + 1 - a \leq k$ gilt), so verbleiben nach diesem Zug genau z Kugeln in der Schachtel.

III. Aus I und II folgt: Jede Zahl z der Form

$$m(k + 1) + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

hat die genannte Eigenschaft. Insbesondere folgt hiermit als eine Lösung zu b): Ist n eine Zahl der Form (2), d. h., lässt n bei Division durch $k + 1$ den Rest 1, so kann der nachziehende Spieler den Gewinn erzwingen.

IV. Ferner folgt als eine Lösung zu a): Ist n von der Form

$$m(k + 1) + r, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad 1 < r \leq k + 1$$

d. h., lässt n bei Division durch $k + 1$ einen von 1 verschiedenen Rest, so kann der anziehende Spieler den Gewinn erzwingen.

Er kann nämlich im ersten Zug $r - 1$ Kugeln entnehmen (was wegen $0 < r - 1 \leq k$ zulässig ist), und hiernach ist die Anzahl z der verbliebenen Kugeln von der Form (2).

V. Da die unter III und IV angegebenen Lösungen der Aufgaben a) und b) alle überhaupt vorhandenen Möglichkeiten erschöpfen, sind sie auch jeweils die einzigen Lösungen der betreffenden Aufgabe.

15 Lösungen - Geometrie in der Ebene

L.6.1

In jedem gleichseitigen Dreieck fallen die Mittelpunkte von Inkreis (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) und Umkreis (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) zusammen. Dieser Mittelpunkt M ist zugleich auch der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Deshalb gilt

$$|MC| : |MD| = 2 : 1 \quad (1)$$

$|MC|$ ist der Radius des Umkreises, $|MD|$ der des Inkreises.

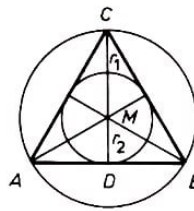


Abb. L.6.1

Für die Flächeninhalte F_1 des Umkreises und F_2 des Inkreises gilt

$$F_1 = \pi |MC|^2 \quad \text{bzw.} \quad F_2 = \pi^2 |MD|^2$$

Wegen (1) folgt daraus

$$F_1 = 4F_2$$

Die Flächeninhalte von In- und Umkreis verhalten sich also beim gleichseitigen Dreieck wie 1:4.

L.6.2

P sei ein innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$, und V_1, V_2, V_3 seien drei Punkte, in dieser Reihenfolge auf den Dreiecksseiten AB, BC, CA gelegen. Ferner sei $|PV_n| = v_n$ ($n = 1, 2, 3$).

Fällt man von P die Lote auf die drei Dreiecksseiten und bezeichnet man die Längen dieser Lote mit l_1, l_2, l_3 , so gilt $v_n \geq l_n$ ($n = 1, 2, 3$), also

$$v_1 + v_2 + v_3 \geq l_1 + l_2 + l_3 \quad (1)$$

Sind ferner F, F_1, F_2, F_3 die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABC, \triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPA$, so gilt $F = F_1 + F_2 + F_3$, d. h., wenn s die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks und h die Höhenlänge sind,

$$\frac{1}{2}sh = \frac{1}{2}sl_1 + \frac{1}{2}sl_2 + \frac{1}{2}sl_3$$

Hieraus folgt

$$h = l_1 + l_2 + l_3 \quad (2)$$

Durch (1) und (2) ist die Aussage $h \leq v_1 + v_2 + v_3$ bewiesen.

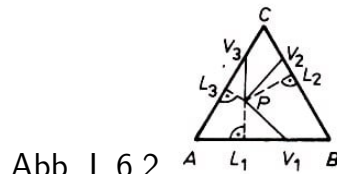


Abb. L.6.2

L.6.3

Spiegelt man das Dreieck $\triangle ABC$ an BC , wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck $AA'C$. Darin ist BC Halbierende der Seite AA' . Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite $A'C'$, dann ist AS Seitenhalbierende von $A'C'$, da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt. Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2 schneiden, ist die Behauptung bewiesen.

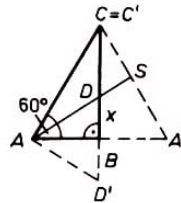


Abb. L.6.3

Oder:

Spiegelt man D an AB und wird der Bildpunkt mit D' bezeichnet, so ist das Dreieck $D'AD$ gleichseitig. Ist nun $|BD| = x$, so gilt $|AD| = 2x$. Ferner ist das Dreieck $\triangle ADC$ wegen der Kongruenz der Winkel bei A bzw. C (je 30°) gleichschenkelig, also gilt $|AD| = |CD|$ und somit $|CD| = 2x$, womit die Behauptung bewiesen ist.

L.6.4

Nach Aufgabenstellung ist $|AC| = 2a$ und nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$|AB| = a\sqrt{5} \quad (1)$$

Es sei E der Schnittpunkt von AB und CD . Dann gilt nach dem im Hinweis angegebenen Satz

$$|AE| : |EB| = |AC| : |BC| = 2 : 1$$

Daraus folgt wegen (1)

$$|AE| = \frac{2}{3}a\sqrt{5} \quad \text{und} \quad |EB| = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$$

Die Parallele zu BC durch E schneide AC in F . Dann ist nach einem der Strahlensätze

$$|EF| : |BC| = |AE| : |AB| = 2 : 3 \quad \text{woraus} \quad |EF| = \frac{2}{3}a$$

folgt.

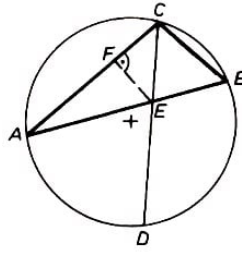


Abb. L.6.4

Das Dreieck $\triangle EFC$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F und, da $\angle ACE$ eine Größe von 45° hat, auch gleichschenkelig. Also gilt $|EF| = |FC|$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$|CE| = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$$

Weiter ist $\triangle ADE \sim \triangle BCE$ wegen $\angle BEC \cong \angle AED$ (Scheitelwinkel) und $\angle CBA \cong \angle CDA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen). Daher gilt (hier kann auch der Sehnensatz $|AE||EB| = |CE||ED|$ benutzt werden)

$$|CE| : |EB| = |AE| : |ED|$$

woraus man

$$|ED| = \frac{|AE||EB|}{|CE|} = \frac{\frac{2}{3}a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{5}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}} = \frac{5}{6}a\sqrt{2}$$

erhält. Somit ergibt sich

$$|CD| = |CE| + |ED| = \frac{2}{3}a\sqrt{2} + \frac{5}{6}a\sqrt{2} = \frac{3}{2}a\sqrt{2}$$

L.6.5

Wegen $|\angle AED| = 90^\circ$ und $|\angle ACD| = 90^\circ$ liegen E und C nach der Umkehrung des Lehrsatzes von Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AD . Daher ist nach dem Peripheriewinkelsatz $|\angle CDE|$ entweder gleich $|\angle CAE|$ ($< 90^\circ$) oder gleich $180^\circ - |\angle CAE|$ ($< 90^\circ$). Der zweite Fall kann nicht eintreten, weil mit B auch AB und insbesondere E als Punkt von AB auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie D und daher $|\angle ECD| > 90^\circ$, also $|\angle CDE| < 90^\circ$ ist.

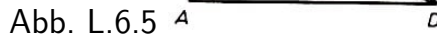
Es sei jetzt R der Punkt auf DE , für den

$$|DR| = |AB| \quad (1)$$

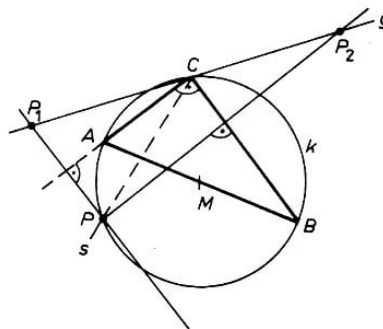
gilt (wegen $|AB| < |AC| = |DC| < |DE|$ existiert tatsächlich genau ein solcher Punkt R). Dann ist $\triangle DRC \cong \triangle ABC$ (nach sws). Folglich ist $|\angle DRC| = 90^\circ$ und somit $|\angle ERC| = 90^\circ$. Daher ist $BERC$ ein Rechteck, so dass

$$|RE| = |BC| \quad (2)$$

ist. Aus (1) und (2) folgt (da R auf DE liegt) durch Addition die zu beweisende Behauptung.



a) Es gilt $\angle ACP_1 = \angle ACP$ und $\angle BCP_2 = \angle BCP$, da der jeweils zuerst genannte Winkel Bild des anderen Winkels bei einer Spiegelung an der Geraden durch A und C bzw. an der durch B und C ist. Da die Winkel $\angle ACP$ und $\angle BCP$ zusammen einen rechten Winkel ergeben, bilden alle vier genannten Winkel zusammen einen gestreckten. Also gilt: $|\angle P_1CP_2| = 180^\circ$, d. h., C liegt auf der Geraden g durch P_1 und P_2 .



Der Winkel, den t mit AC bildet, ergänzt den Winkel $\angle BAC$ zu 90° (denn ist M der Mittelpunkt von AB , also von k , so ergänzt der Winkel zwischen t und AC den Winkel $\angle ACM$ zu 90° , und da $\triangle ACM$ gleichschenkelig ist, gilt $|\angle ACM| = |\angle BAC|$). Also ergänzt auch der Winkel, den s mit AC bildet, $\angle BAC$ zu 90° .
Daher gilt $s \perp AB$.

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und $|\angle ACB| = 36^\circ$. Dann gilt $|\angle BAC| = |\angle ABC|$ und nach dem Winkelsummensatz $|\angle BAC| + |\angle ABC| = 144^\circ$, also $|\angle BAC| = |\angle ABC| = 72^\circ$. Die Halbierende des Winkels $\angle ABC$ schneide AC in D . Dann gilt $|\angle ABD| = 36^\circ$ und nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf $\triangle ABD$, $|\angle ADB| = 72^\circ$. Folglich sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle BCD$ gleichschenklilig, und es gilt

Ferner gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ und daher

183

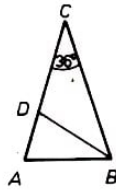


Abb. L.6.7

L.6.8

Sind D und M die Mittelpunkte von AB bzw. HG (vgl. Abb. L.6.8a), dann gilt mit $|EF| = a$ nach dem Strahlensatz $|AB| : |HG| = |CD| : |CM|$, also ist $g : a = h : (h - a)$, $ah = gh - ag$

$$a = \frac{gh}{g + h} \quad (1)$$

Angenommen, $h : g$ sei ein solches Verhältnis, wie es in der Aufgabe verlangt wird. Dann ist $\frac{1}{2}gh$ der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und a^2 der des Quadrates $EFGH$, also gilt $\frac{1}{2}gh : a^2 = 9 : 4$ und daher

$$2gh - 9a^2 = 0 \quad (2)$$

Setzt man in (2) a gemäß (1) ein, so erhält man

$$2gh - \frac{9g^2h^2}{(g + h)^2} = 0, \quad 2(g^2 + 2gh + h^2) - 9gh = 0$$

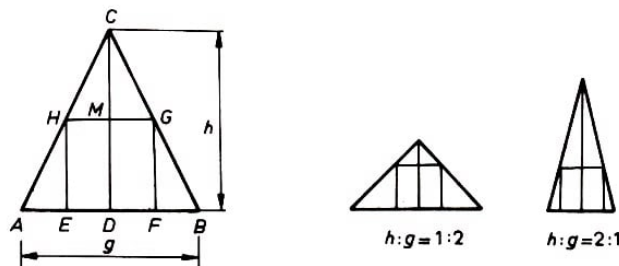


Abb. L.6.8 a,b

also die Gleichung

$$h^2 - \frac{5}{2}gh + g^2 = 0 \quad (3)$$

die genau die Lösungen

$$h_{1,2} = \frac{5}{4}g \pm \sqrt{\frac{25}{16}g^2 - g^2}$$

d.h. $h_1 = 2g$ und $h_2 = 0$ hat. Also können höchstens die Verhältnisse $h : g = 2 : 1$ und $h : g = 1 : 2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Umgekehrt gilt: Aus $h_2 = \frac{1}{2}g$ folgt wegen (1) $a_1 = \frac{2}{3}g$. Ebenso folgt aus $h_1 = 2g$ wegen (1) $a_2 = \frac{1}{3}g$. Daher ergibt sich in den genannten Fällen

$$\frac{1}{2}gh : a^2 = \frac{1}{2}g \cdot 2g : \left(\frac{2}{3}g\right)^2 = g^2 : \frac{4}{9}g^2 = 9 : 4$$

bzw.

$$\frac{1}{2}gh : a^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{1}{2}g : \left(\frac{1}{3}g\right)^2 = \frac{1}{4}g^2 : \frac{1}{9}g^2 = 9 : 4$$

wie es gefordert war. Es gibt mithin genau zwei Verhältnisse $h : g$, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich $h : g = 1 : 2$ und $h : g = 2 : 1$.

Abb. L.6.8b zeigt zwei derartige Dreiecke.

L.6.9

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC| = a$. Seine Basislänge sei $|AB| = c$. Ferner sei CD eine Strecke auf der Mittelsenkrechten der Seite AB , wobei D auf AB liegen möge. Dann ist CD gleichzeitig Halbierende des Winkels $\angle ACB$. Daher liegen die Mittelpunkte M_i und M_u von In- und Umkreis auf der Geraden durch C und D .

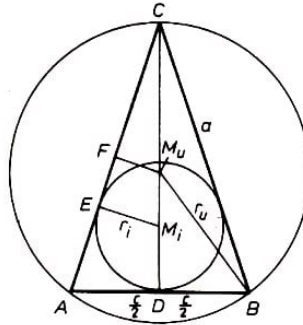


Abb. L.6.9

Die Radien der beiden Kreise seien r_i bzw. r_u . Das Lot von M_i auf AC habe den Fußpunkt E , das Lot von M_u auf die Gerade durch A und C habe den Fußpunkt F . Dann ist

$$|AF| = |CF| = \frac{a}{2} \quad , \quad |AD| = |BD| = |AE| = \frac{c}{2}$$

$$|DM_u| = \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{4}} \quad , \quad |CM_i| = \sqrt{\left(a - \frac{c}{2}\right)^2 + r_i^2}$$

Daher erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle ACD$ einerseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_u \pm \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{4}}\right)^2 = a^2$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt (je nachdem, ob M_u auf der Strecke CD liegt oder nicht), also

$$\pm r_u \sqrt{4r_u^2 - c^2} = a^2 - 2r_u^2 \quad , \quad 4r_u^4 - c^2 r_u^2 = a^4 - 4a^2 r_u^2 + 4r_u^4$$

$$r_u = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \quad (1)$$

andererseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_i + \sqrt{a^2 - ac + \frac{c^2}{4} + r_i^2}\right)^2 = a^2$$

also

$$\begin{aligned}
 r_i \sqrt{4a^2 - 4ac + c^2 + 4r_i^2} &= ac - \frac{c^2}{2} - 2r_i^2 \\
 4a^2 r_i^2 - 4ac r_i^2 + c^2 r_i^2 + 4r_i^4 &= a^2 c^2 - ac^3 + 4ac r_i^2 + \frac{c^4}{4} + 2c^2 r_i^2 + 4r_i^4 \\
 r_i &= \frac{c \left(a - \frac{c}{2} \right)}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Nun hat ein Dreieck genau dann die geforderten Eigenschaften, wenn $\pi r_i^2 : \pi r_u^2 = 1 : 4$ oder, äquivalent hiermit, $r_u = 2r_i$ gilt. Nach (1), (2) ist dies gleichwertig mit $a^2 = c(2a - c)$, dies mit $(a - c)^2 = 0$ und daher mit $a = c$.

L.6.10

Das Dreieck $\triangle ABC$ ist wegen $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$ nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras rechtwinklig. Es sei o. B. d. A. $|AC| = m$, $|BC| = m\sqrt{2}$ und $|AB| = m\sqrt{3}$ (m eine positive reelle Zahl) gesetzt. Dann ist AB Hypotenuse, der rechte Winkel liegt also bei C (der größten Seite liegt der größte Winkel gegenüber).

Es sei D der Mittelpunkt von AB , E der Mittelpunkt von BC und S der Schnittpunkt von CD und AE .

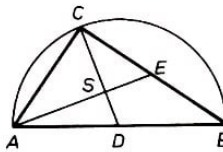


Abb. L.6.10

Nach der Umkehrung des Satzes des Thales gilt nun

$$|CD| = |AD| = |DB| = \frac{1}{3}m\sqrt{3}$$

Daraus und aus dem Satz über das Teilverhältnis zweier sich schneidender Seitenhalbierenden eines Dreiecks folgt

$$|CS| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{1}{3}m\sqrt{3} \quad (1)$$

Es gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle AEC$,

$$|AE| = \sqrt{m^2 + \frac{m^2}{2}} = \frac{1}{2}m\sqrt{6}$$

Folglich ist

$$|AS| = \frac{2}{3}|AE| = \frac{1}{3}m\sqrt{6} \quad (2)$$

Wegen (1) und (2) gilt

$$|CS|^2 + |AS|^2 = \frac{m^2}{3} + \frac{2m^2}{3} = m^2 = |CA|^2$$

Daher ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras $\triangle ASC$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei S ; die Seitenhalbierenden CD und AE stehen also senkrecht aufeinander.

L.6.11

Die Größen der Innenwinkel von $\triangle ABC$ bei A, B, C seien α, β, γ . Ist $|AD| = |DB| < |CD|$, so gilt, da im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, $|\angle ACD| < |\angle CAD|$ und $|\angle DCB| < |\angle CBD|$ also

$$\gamma = |\angle ACD| + |\angle DCB| < \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

und daher $2\gamma < 180^\circ$, woraus $\gamma < 90^\circ$ folgt. Steht in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen bzw. das Größerzeichen statt des Kleinerzeichens, so gilt dasselbe auch für die folgenden Ungleichungen.

Daher ist Peters Behauptung richtig: Das Dreieck ABC hat bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel, je nachdem, ob $|AB|$ kleiner, gleich oder größer als $2|CD|$ ist.

L.6.12

Da das Dreieck $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, liegen D, E und F auf den Dreiecksseiten, und liegt im Innern des Dreiecks. Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke AEH und BHD ähnlich, da sie in den Scheitelwinkeln bei H und in den rechten Winkeln bei E bzw. D übereinstimmen. Folglich gilt

$$|AH| : |HE| = |BH| : |HD| \quad \text{und damit} \quad |AH||HD| = |BH||HE|$$

Analog ergibt sich auch

$$|BH||HE| = |CH||HF|$$

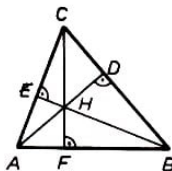


Abb. L.6.12

L.6.13

Es seien a, b die Längen der Seiten BC und AC des Dreiecks $\triangle ABC$, w_γ die Länge der Winkelhalbierenden CW und s die gesuchte Länge der Sehne CS . Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt dann

$$|\angle CAW| = |\angle CSB|$$

Nach Definition der Winkelhalbierenden gilt weiter

$$|\angle ACW| = |\angle SCB|$$

Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle ACW \sim \triangle SCB$ und damit $b : w_\gamma = s : a$, $w_\gamma s = ab$, also

$$s = \frac{ab}{w_\gamma}$$

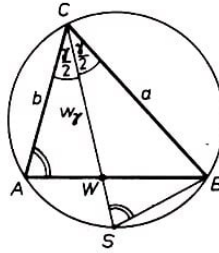


Abb. L.6.13

L.6.14

Es bezeichne h_1 die Länge der Höhe des Teildreiecks, das die zu AB parallele Strecke vom gesamten Dreieck abschneidet, und zwar die zu dieser Parallelen senkrechte Höhe. Die Länge des anderen Abschnitts auf der zur Seite AB gehörenden Höhe sei mit h_2 bezeichnet. Dann sind $h_1 + h_2$ und h_1 die Längen entsprechender Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken vom Flächenverhältnis $2 : 1$.

Daher gilt

$$(h_1 + h_2)^2 : h_1^2 = 2 : 1 \quad \text{also} \quad \frac{h_1 + h_2}{h_1} = \sqrt{2}$$

woraus sich durch Subtrahieren von 1 das gesuchte Verhältnis

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{h_1}{h_2} = \sqrt{2} + 1$$

ergibt.

L.6.15

Aus $1 < c < \sqrt{2}$, $1 < a$, $1 < b$ folgt $c^2 < 2 = 1 + 1 < a^2 + b^2$. Also ist

$$a^2 + b^2 - c^2 > 0 \quad (1)$$

Auf Grund des Kosinussatzes gilt nun

$$\cos \angle(a, b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (2)$$

Wegen (1) und $2ab > 0$ folgt daraus $\cos \angle(a, b) > 0$; also ist $\angle(a, b) < 90^\circ$. Entsprechend folgt auch $\angle(a, c) < 90^\circ$ und $\angle(b, c) < 90^\circ$. Daher ist das betrachtete Dreieck spitzwinklig.

L.6.16

Die Parallele zu AC durch P schneide die Seite AB in V und die Seite CB in W . Dann ist nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle VBW \sim \triangle ABC$, also $|VB| \geq |BW| \geq |VW|$. Weiter gilt nach dem Außenwinkelsatz für Dreieck $\triangle BPW$ die Ungleichung $|\angle VPB| > |\angle VWB|$. Weil in jedem Dreieck, also auch im $\triangle VBW$, dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, ist zunächst $|\angle VWB| > |\angle BVW|$ und damit auch $|PB| < |VB|$. Daraus folgt

$$|VW| + |PB| < |VB| + |BW| \quad (1)$$

Aus den Dreiecken $\triangle AVP$ und $\triangle CPW$ erhält man

$$|PA| < |AV| + |VP| \quad \text{bzw.} \quad |PC| < |CW| + |WP| \quad (2,3)$$

Durch Addition folgt schließlich aus (1), (2) und (3)

$$|PA| + |PB| + |PC| + |VW| < (|AV| + |VB|) + (|CW| + |BW|) + (|VP| + |WP|)$$

also $|PA| + |PB| + |PC| < |AB| + |BC|$.

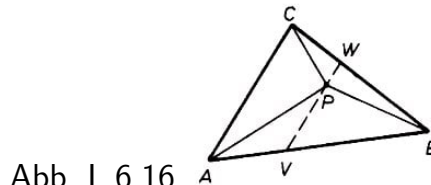


Abb. L.6.16

L.6.17

Im Dreieck $\triangle ABC$ sei CM die Seitenhalbierende der Seite AB und S der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden

$$|SM| : |SC| = 1 : 2 \quad (1)$$

Wir zeigen nun, dass nicht jede Gerade durch S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

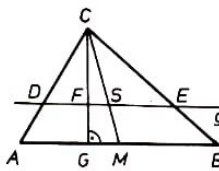


Abb. L.6.17

Die Parallele g zu AB durch S schneide AC und BC in D bzw. E . Diese Punkte existieren stets, da AC und BC nicht parallel zu AB und damit auch nicht parallel zu g sind.

Das Lot CG von C auf die Gerade durch A und B schneide g in F . Dieser Punkt existiert stets, da $CG \perp AB$ und damit $CG \perp g$ gilt. Nach den Strahlensätzen und wegen (1) ist dann

$$|DE| : |AB| = 2 : 3 \quad \text{d.h.} \quad |DE| = \frac{2}{3}|AB|$$

und

$$|CF| : |CG| = 2 : 3 \quad \text{d.h.} \quad |CF| = \frac{2}{3}|CG|$$

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDE$ nur $\frac{4}{9}$ von dem des Dreiecks $\triangle ABC$.

Damit ist gezeigt, dass nicht alle Geraden durch S die Dreiecksfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

L.6.18

Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right)$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 = \pi \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right)^2 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right)$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt

$$A_3 = ab$$

Der gesuchte Flächeninhalt A ist also

$$A = A_1 + A_3 - A_2 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) + ab - \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) = ab$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

L.6.19

Ein derartiges Rechteck $ABCD$ genügt genau dann allen Voraussetzungen der Aufgabe, wenn $\angle AS_2S_1 \cong \angle S_1S_2C$.

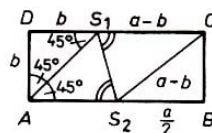


Abb. L.6.19

ist. Als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind $\angle AS_2S_1$ und $\angle S_2S_1C$ zueinander kongruent. Mithin genügt $ABCD$ genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Dreieck $\triangle S_1S_2C$ gleichschenkelig mit $|S_1C| = |S_2C|$ ist. Wegen

$$|\angle DAS_1| = 45^\circ = |\angle AS_1D|$$

ist das rechtwinklige Dreieck $\triangle ADS_1$ gleichschenkelig, so dass $|DS_1| = |DA| = b$ gilt. Folglich genügt $ABCD$ genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn

$$|S_2C| = |S_1C| = a - b$$

ist. Dies ist nach dem Lehrsatz des Pythagoras mit jedem der folgenden drei Relationspaare äquivalent (alle $a > b > 0$):

$$(a - b)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}, \quad a^2 - 2ab = \frac{a^2}{4}, \quad 3a^2 = 8ab$$

Nach Voraussetzung ist $a > b > 0$, also auch $a \neq 0$, und das Rechteck $ABCD$ genügt daher genau dann allen Bedingungen der Aufgabe, wenn $a : b = 8 : 3$ wird.

Bemerkung: Die Angabe $a > b > 0$ ist notwendig, um z. B. von $3a^2 = 8ab$ auf $|S_2D| = |S_1C| = a - b$ zurückschließen zu können. Im Fall $a < b$ könnte man nur auf $|S_1C| = a - b$ zurückschließen; die Aufgabe hätte dann keine Lösung.

L.6.20

Der Abstand des Punktes P von D sei d . Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks. Die Parallele durch Q zu AD bzw. AB schneide die Gerade durch AB bzw. AD in X bzw. V , die Gerade durch DC bzw. BC in U bzw. W . Es sei

$$|PQ| = h, \quad |QX| = x, \quad |QU| = u, \quad |QV| = v, \quad |QW| = w$$

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras die Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2 &= v^2 + x^2 + h^2 & , & & b^2 &= w^2 + x^2 + h^2 \\ c^2 &= u^2 + w^2 + h^2 & , & & d^2 &= u^2 + v^2 + h^2 \end{aligned}$$

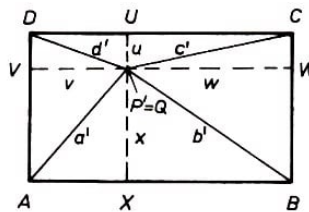


Abb. L.6.20

Daraus folgt (nach Addition)

$$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2 \quad \text{und} \quad b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$$

Somit gilt $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 > b^2$). Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich

$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$$

L.6.21

Es sei E der Mittelpunkt der Seite AD , F der Mittelpunkt der Seite AB , G der Schnittpunkt der Strecken EC und BD und H der Schnittpunkt der Strecken FC und BD . Ferner gelte

$$|HB| = a, \quad |HG| = b, \quad |GD| = c, \quad |BD| = d$$

Nach dem Hauptähnlichkeitssatz ergibt sich $\triangle FBH \sim \triangle CHD$. (Übereinstimmung in Scheitelwinkeln und Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen).

Wegen $|FB| : |DC| = 1 : 2$ gilt $a : (b + c) = 1 : 2$. Hieraus und aus $a + (b + c) = d$ folgt

$$a = \frac{d}{3}$$

Nach dem Hauptähnlichkeitssatz ergibt sich ferner $\triangle EGD \sim \triangle CGB$ (wie oben). Wegen $|ED| : |BC| = 1 : 2$ gilt $c : (a + b) = 1 : 2$, also

$$c = \frac{d}{3}$$

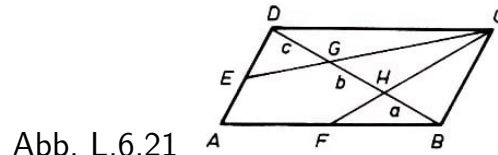


Abb. L.6.21

Daraus folgt

$$b = d - a - c = \frac{d}{3}$$

Also gilt $a = b = c$, was zu beweisen war.

L.6.22

Es seien M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA . Da S_1, S_2, S_3, S_4 die Seitenhalbierenden MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 im Verhältnis 2:1 teilen, folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes

$$S_1S_2 \parallel M_1M_2 \parallel AC \parallel M_4M_3 \parallel S_4S_3, \quad S_2S_3 \parallel M_2M_3 \parallel BC \parallel M_1M_4 \parallel S_1S_4$$

Also ist $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm.

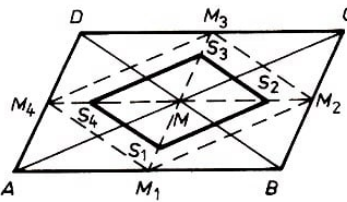


Abb. L.6.22

L.6.23

Es sei $|\angle DAB| = \alpha$, wobei wir o. B. d. A. annehmen, dass $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ gilt. Dann ist

$$|\angle EAH| = |\angle GCF| = \alpha + 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ + \alpha$$

und

$$|\angle EBF| = |\angle GDH| = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ + \alpha$$

also

$$|\angle EAH| = |\angle EBF| = |\angle GCF| = |\angle GDH| \quad (1)$$

Ferner ist (als halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten)

$$|AE| = |DG| = |BE| = |CG| \quad \text{und} \quad |AH| = |BF| = |CF| = |DH| \quad (2,3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle AEH \cong \triangle BEF \cong \triangle CGF \cong \triangle DGH$, also

$$|EH| = |EF| = |GF| = |GH| \quad (4)$$

und $|\angle AEH| = |\angle BEF|$, also $|\angle HEF| = |\angle AEB|$, d. h.

$$|\angle HEF| = 90^\circ \quad (5)$$

Wegen (4), (5) ist $EFGH$ ein Quadrat.

Bemerkung: Im Fall $\alpha = 90^\circ$ entarten die Dreiecke $\triangle AEH$ usw., (4) und (5) bleiben aber trotzdem richtig.

L.6.24

Der zu beweisende Satz ist äquivalent damit, dass die beiden folgenden Aussagen richtig sind:

- a) Jeder Rhombus ist sowohl ein Drachenviereck als auch ein Trapez.
- b) Jedes Viereck, das sowohl ein Drachenviereck als auch ein Trapez ist, ist ein Rhombus.

Beweis zu a):

Ist $ABCD$ ein Rhombus, so gilt $|AB| = |BC|$ und $|CD| = |DA|$, also ist $ABCD$ auch ein Drachenviereck. Ferner gilt dann $AB \parallel CD$, und die Strecken BC und DA haben keinen Punkt gemeinsam, also ist $ABCD$ auch ein Trapez.

Beweis zu b):

Ist $ABCD$ ein Drachenviereck, so können seine aufeinanderfolgenden Ecken derart mit A, B, C, D bezeichnet werden, dass

$$|AB| = |BC| \quad \text{und} \quad |CD| = |DA| \quad (1)$$

gilt. Ist $ABCD$ zugleich ein Trapez, so kann die Bezeichnung außerdem noch so gewählt werden, dass

$$AB \parallel CD \quad (2)$$

gilt.

Als Trapez ist $ABCD$ konvex. Daher wird es durch AC in zwei Dreiecke zerlegt. Dabei sind sowohl $\angle BAC, \angle DCA$ bezüglich AB, CD als auch $\angle DAC, \angle BCA$ bezüglich AD, BC Wechselwinkel. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ sind wegen (1) gleichschenkelig. Daher gilt

$$\angle BAC \cong \angle BCA \quad \text{und} \quad \angle DAC \cong \angle DCA$$

(als Basiswinkel). Ferner ist wegen (2)

$$\angle BAC \cong \angle DCA$$

(als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Folglich gilt auch

$$\angle DAC \cong \angle BCA$$

Da diese Winkel Wechselwinkel sind, gilt mithin $AD \parallel BC$. Also ist $ABCD$ ein Parallelogramm und, da es außerdem ein Paar gleich langer Nachbarseiten besitzt, sogar ein Rhombus.

L.6.25

a) Ist $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $|AB| = |AD|$, $|CB| = |CD|$, so ist AC Halbierende der Innenwinkel bei A und C ; ferner schneiden sich die Halbierenden der Innenwinkel bei B und D auf der Symmetrieachse AC . Daher enthalten die Halbierenden aller vier Innenwinkel einen gemeinsamen Punkt M auf AC . Infolgedessen hat M von den Seiten AB , BC , CD , DA gleichen Abstand, ist also der Mittelpunkt des Inkreises von $ABCD$.

b) Der Kreis über AC als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes des Thales durch B und D , ist folglich Umkreis. Sein Mittelpunkt U ist auch Mittelpunkt der Strecke AC .

c) Die Lote von M auf AB bzw. BC mögen die Fußpunkte P bzw. Q haben. Dann ist $MPBQ$ ein Rechteck und wegen $|MP| = |MQ| = \rho$ sogar ein Quadrat. Nun gilt (vgl. Abb. L.6.25)

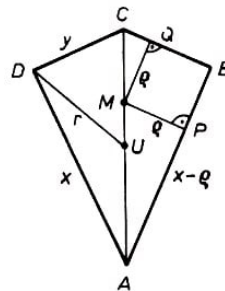


Abb. L.6.25

$$r = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

sowie nach dem Strahlensatz

$$\frac{x - \rho}{x} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|MP|}{|CB|} = \frac{\rho}{y} \quad \text{also} \quad \rho = \frac{xy}{x + y}$$

Ferner gilt

$$\frac{|AM|}{2r} = \frac{\rho}{y} \quad \text{also} \quad |AM| = \frac{2rx}{x + y}$$

Wegen $|MU| = ||AM| - r|$ erhält man nun

$$\begin{aligned} |MU|^2 &= ||AM| - r|^2 = \left(\frac{r}{x + y} (2x - (x + y)) \right)^2 = r^2 \frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \\ &= r^2 \frac{(x + y)^2 - 4xy}{(x + y)^2} = r^2 - \frac{4r^2 xy}{(x + y)^2} = r^2 - \frac{xy(x^2 + y^2)}{(x + y)(x + y)} \\ &= r^2 - \rho \frac{x^2 + y^2}{x + y} = r^2 - \rho \left((x + y) - \frac{2xy}{x + y} \right) = r^2 + \rho^2 - \rho(-\rho + (y + y)) \end{aligned}$$

und wegen $x + y - \rho > 0$

$$|MU|^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 - 2\rho(x+y) + (x-y)^2} = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}$$

L.6.26

Es ist $\triangle ABC \sim \triangle CBF$ (w, s:s). Daher gilt

$$|\angle BAC| = |\angle BCM| = \alpha \quad , \quad |\angle ACB| = |\angle CFB| = \gamma \quad (1,2)$$

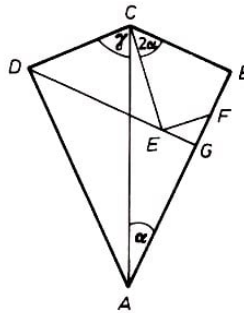


Abb. L.6.26

Aus (1) und (2) folgt

$$|\angle CBF| = 180^\circ - \alpha - \gamma \quad (3)$$

Da $ABCD$ und $CEFB$ Drachenvierecke mit den Symmetrieachsen AC bzw. CF sind, folgt weiter

$$|\angle BCE| = 2\alpha \quad , \quad |\angle DCB| = 2\gamma \quad (4)$$

also

$$|\angle DCE| = 2\gamma - 2\alpha$$

Somit gilt in dem gleichschenkligen Dreieck $\triangle DEC$ für den Basiswinkel

$$|\angle EDC| = 90^\circ + \alpha - \gamma \quad (5)$$

Der Strahl aus D durch den im Innern von $\triangle ABD$ gelegenen Punkt E schneidet die Gerade durch A und B in G so, dass G zwischen A und B liegt. Dann haben in dem Viereck $BCDG$ die Größen der Innenwinkel bei B, C, D nach (3), (4), (5) die Summe 270° , also gilt $|\angle DGB| = 90^\circ$, w.z.b.w.

L.6.27

a) Angenommen, ein Trapez $ABCD$ habe die geforderten Eigenschaften. Es seien E, F, G, H die (in dieser Reihenfolge) auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA gelegenen Berührungspunkte der Seiten des Trapezes mit dem Inkreis, also die Fußpunkte der vom Inkreismittelpunkt M auf die Seiten gefällten Lote (Abb. L.6.27).

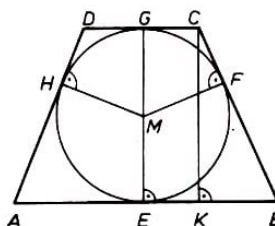


Abb. L.6.27

Ferner sei $|DG| = x$ und $|AE| = y$. Da GE Symmetrieachse des Trapezes ist, gilt $|CG| = |DG| = x$ und $|AE| = |BE| = y$. Da die Abschnitte der Tangenten, die von einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkt an den Kreis gezogen werden, gleichlang sind, gilt $|CF| = |DH| = x$ und $|AH| = |BF| = y$. Somit folgt $u = 4x + 4y$, also

$$x + y = 25 \text{ cm} \quad (1)$$

Fällt man das Lot von C auf AB , so liegt sein Fußpunkt X wegen $|GC| < |EB|$ zwischen A und B . Nach dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck KBC , folgt

$$y - x = |KB| = \sqrt{|BC|^2 - |KC|^2} = \sqrt{(x + y)^2 - (2r)^2} = 7 \text{ cm} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich $x = 9 \text{ cm}$, $y = 16 \text{ cm}$.

Daher kann ein Trapez nur dann den gestellten Forderungen genügen, wenn seine Seitenlängen $|AB| = 2y = 32 \text{ cm}$, $|CD| = 2x = 18 \text{ cm}$, $|BC| = |AD| = x + y = 25 \text{ cm}$ betragen.

b) Hat ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ diese Seitenlängen, so hat es die Eigenschaften

$$|AD| = |BC|, \quad |AB| > |CD|, \quad |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 100 \text{ cm}$$

Ferner ist es wegen $|AB| + |CD| = 50 \text{ cm} = |BC| + |AD|$ ein Tangentenviereck, es besitzt also einen Inkreis; dieser hat die Strecke EG als Durchmesser, wobei E, G die Mittelpunkte von AB, CD sind. Ist X der Fußpunkt des Lotes von C auf AB , so gilt

$$|BK| = |BE| - |CG| = 7 \text{ cm} \quad \text{also} \quad |GE| = |CK| = \sqrt{|BC|^2 - |BK|^2} = 24 \text{ cm}$$

Daher hat der Inkreis den geforderten Radius 12 cm.

Es gibt somit Trapeze der verlangten Art; jedes solche Trapez hat die Seitenlängen $|AB| = 32 \text{ cm}$, $|CD| = 18 \text{ cm}$, $|BC| = |AD| = 25 \text{ cm}$.

L.6.28

Es sei E der Fußpunkt des Lotes von S auf die Gerade durch A und B sowie F der des Lotes von S auf die Gerade durch C und D . Dann gilt $|EF| = h$. Setzt man $|ES| = x$, so folgt $|FS| = h - x$.

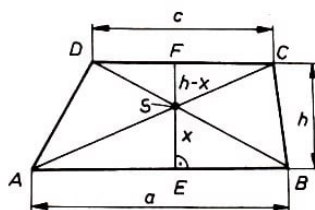


Abb. L.6.28

Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes

$$x : (h - x) = |SA| : |SC| = a : c$$

also $cx = ah - ax$, woraus man

$$x = \frac{ah}{a+c} \quad \text{sowie} \quad h-x = \frac{ch}{a+c} \quad (1,2)$$

erhält. Folglich erhält man

$$F_1 = \frac{1}{2}ax = \frac{a^2h}{2(a+c)}, \quad F_3 = \frac{1}{2}c(h-x) = \frac{c^2h}{2(a+c)}$$

Die Dreiecke ABC und ABD haben den gleichen Flächeninhalt, da sie in einer Seite und der zugehörigen Höhenlänge übereinstimmen. Für ihren Flächeninhalt F_0 gilt $F_0 = \frac{1}{2}ah$. Hiernach ergibt sich für die Flächeninhalte F_2 bzw. F_4

$$F_2 = F_4 = F_0 - F_1 = \frac{1}{2}ah - \frac{a^2h}{2(a+c)} = \frac{a^2h + ahc - a^2h}{2(a+c)} = \frac{ahc}{2(a+c)}$$

L.6.29

Die parallelen Seiten des Trapezes $ABCD$ (siehe Abb. L.6.29) seien die Seiten AB und CD mit $|AB| = a$ und $|CD| = b$. Ferner sei S der Schnittpunkt der Geraden durch BC und durch AD ; X und Y seien die Berührungspunkte des Inkreises des Trapezes mit den Seiten BC und DA ; d sei die Länge des Inkreisdurchmessers; u_1 sei der Umfang des Dreiecks $\triangle ABS$; u_2 sei der Umfang des Dreiecks $\triangle DCS$.

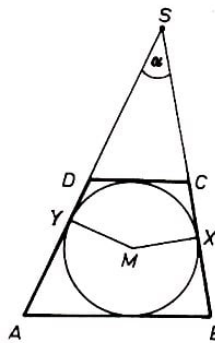


Abb. L.6.29

Dann gilt

$$u_1 = a + (|SY| + |SX|) + (|YA| + |XB|) \quad , \quad u_2 = b + (|IS| + |SX|) - (|YD| + |XC|)$$

Da

$$|SY| = |SX| = \frac{d}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$|YA| + |XB| = |AB| = a \quad \text{und} \quad |YD| + |XC| = |DC| = b$$

gilt, ist

$$u_1 = d \cot \frac{\alpha}{2} + 2a \quad \text{und} \quad u_2 = d \cot \frac{\alpha}{2}$$

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle DCS$ ist $\frac{u_1}{u_2} = \frac{a}{b}$; daraus folgt

$$\frac{d \cot \frac{\alpha}{2} + 2a}{d \cot \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{b}$$

Hieraus ergibt sich

$$d = \frac{ab}{a-b} \tan \frac{\alpha}{2}$$

L.6.30

O.B.d.A. sei F auf der Verlängerung von DA über A hinaus, also auch auf der Verlängerung von CB über B hinaus gelegen. Ferner lassen sich die Bezeichnungen so wählen, dass g die Strecke BF in einem Punkt G schneidet. Die Gerade h verläuft in das Innere des Dreiecks FCD hinein, schneidet also die Strecke AC in einem Punkt H . Dann gilt

$$|\angle DAC| = |\angle DBC| \quad (1)$$

als Peripheriewinkel über demselben Bogen \widehat{CD} . Daraus folgt

$$|\angle EAF| = |\angle EBG| \quad (2)$$

als Nebenwinkel zweier gleichgroßer Winkel.

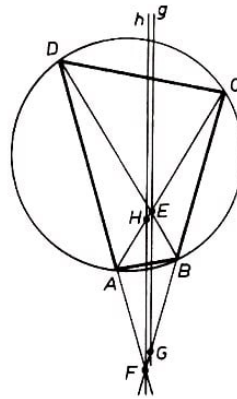


Abb. L.6.30

Wir ziehen nun die Parallele h' zu g durch F . Sie schneidet AC in einem Punkt H' . Die Gerade h' verläuft nämlich ebenfalls in das Innere des Dreiecks FCD hinein. Das wäre nur dann nicht der Fall, wenn der Winkel $\angle AEG$ größer oder gleich $180^\circ - |\angle EAF|$ wäre. Dann wäre aber

$$|\angle AEG| + |\angle EAF| \geq 180^\circ \quad \text{und wegen (2)} \quad |\angle EBG| + |\angle BEG| \geq 180^\circ$$

also

$$|\angle AEG| + |\angle EAF| + |\angle EBG| + |\angle BEG| \geq 360^\circ$$

was nicht möglich ist. Folglich gibt es stets einen solchen Punkt H' auf AC . Nun gilt $|\angle BEG| = |\angle AEG|$ laut Voraussetzung sowie $|\angle AH'F| = |\angle AEG|$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus ergibt sich

$$|\angle AH'F| = |\angle BEG| \quad (3)$$

Wegen (2) und (3) gilt daher unter Benutzung des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck

$$|\angle AFH'| = |\angle EGB| \quad (4)$$

Weiterhin gilt

$$|\angle EGB| = |\angle H'FB| \quad (5)$$

als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus (4) und (5) folgt nun $|\angle AFH'| = |\angle H'FB|$, d. h., h' halbiert den Winkel $\angle AFB$. Mithin gilt $h' = h$, woraus $h \parallel g$ folgt.

L.6.31

Der Mittelpunkt von k sei M , der Schnittpunkt der Diagonalen sei S . Nach Voraussetzung gilt

$$|\angle AMB| + |\angle CMD| = |\angle BMC| + |\angle DMA|$$

also, da die Summe beider Seiten dieser Gleichung 360° beträgt,

$$|\angle AMB| + |\angle CMD| = 180^\circ$$

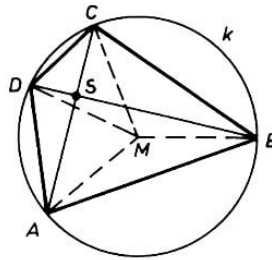


Abb. L.6.31

Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel ist daher

$$|\angle SCB| + |\angle CBS| = |\angle ACB| + |\angle CBD| = \frac{1}{2}|\angle AMB| + \frac{1}{2}|\angle CMD| = 90^\circ$$

Mithin gilt nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck $\triangle BSC$,

$$|\angle BSC| = 180^\circ - (|\angle SCB| + |\angle CBS|) = 90^\circ$$

also $AC \perp BD$.

L.6.32

Es gilt der Satz: Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180° , so ist das Viereck ein Sehnenviereck.

Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen dieses Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so dass G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen. Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist

$$|\angle KGH| + |\angle GHL| = 90^\circ$$

Durch Übergang zu den Zentriwinkeln folgt

$$|\angle KMH| + |\angle GML| = 180^\circ$$

Ersetzt man hierin links jeden Summanden durch seine Ergänzung zu 180° , so ergibt sich (da die Summe eben 180° betrug) wieder $|\angle KCH| + |\angle GAL| = 180^\circ$. Nach dem eingangs erwähnten Satz folgt hieraus die Behauptung.

L.6.33

Wegen $|AB| = |AD|$ ist die Gerade durch A und C Symmetrielinie von $ABCD$, woraus $|BM| = |DM|$ folgt. Daher ist die zu beweisende Behauptung mit

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|MC|} \quad (1)$$

äquivalent.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass MB Winkelhalbierende von $\triangle ABC$ ist. Dies folgt nun daraus, dass die beiden Dreiecke $\triangle MC'B$ und $\triangle MA'B$ kongruent sind, wobei A' bzw. C' die Berührungspunkte des Inkreises mit AB bzw. CB sind und der Kongruenzsatz (ssw) benutzt wird.

Man kann (1) auch so beweisen: Bezeichnet r den Inkreisradius und h die Länge der Höhe auf die Gerade durch A und C im Dreieck $\triangle ABC$ sowie $I(\triangle XYZ)$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$, so gilt

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}|AB|r}{\frac{1}{2}|BC|r} = \frac{I(\triangle AMB)}{I(\triangle CMB)} = \frac{\frac{1}{2}h|AM|}{\frac{1}{2}h|CM|} = \frac{|AM|}{|MC|}$$

L.6.34

Da $ABCD$ ein Tangentenviereck ist, gilt $a + c = b + d$. Folglich gilt auch

$$a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 2bd + d^2 \quad , \quad ac - bd = \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \quad (1)$$

Es sei $|AS| = m$, $|BS| = n$, $|CS| = p$, $|DS| = q$. Da das Tangentenviereck konvex ist, gilt

$$m + p = e \quad , \quad n + q = f \quad (2)$$

Mit Hilfe des Kosinussatzes erhält man

$$a^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \delta \quad (3)$$

$$c^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \delta \quad (4)$$

$$b^2 = n^2 + p^2 + 2np \cos \delta \quad (5)$$

$$d^2 = m^2 + q^2 + 2mq \cos \delta \quad (6)$$

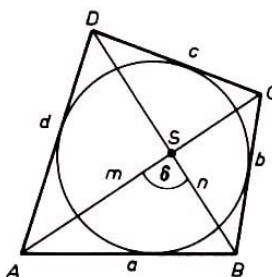


Abb. L.6.34

Aus (1), (3), (4), (5) und (6) folgt

$$ac - bd = \frac{1}{2} \cdot 2(np + mq + mn + pq) \cos \delta = (n + q)(m + p) \cos \delta$$

woraus man wegen (2)

$$ac - bd = ef \cos \delta$$

erhält.

L.6.35

Es seien P, Q, R, S in dieser Reihenfolge die auf AB, BC, CD, DA gelegenen Berührungspunkte des Inkreises mit dem Tangentenviereck. Ferner seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in dieser Reihenfolge die Größen der Winkel $\angle AMP, \angle BMQ, \angle CMR, \angle DMS$.

Dann hat wegen $\triangle AMP \cong \triangle AMS$ (ssw; die gleichgroßen (rechten) Winkel $\angle APM, \angle MSA$ liegen den Hypotenusen, also den längsten Seiten in den Dreiecken AMP bzw. AMS , gegenüber) auch $\angle AMS$ die Größe α ; ebenso haben $\angle BMP, \angle CMQ, \angle DMR$ in dieser Reihenfolge die Größen β, γ, δ .

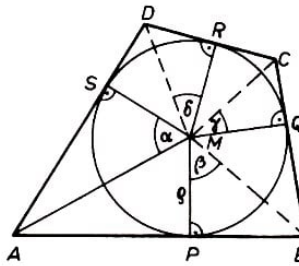


Abb. L.6.35

Daraus folgt:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$$

Die Winkel $\angle AMB$ und $\angle CMD$, die die Größen $\alpha + \beta$ bzw. $\gamma + \delta$ haben, sind folglich Supplementwinkel, und es ist

$$\gamma + \delta = 180^\circ - \alpha - \beta \quad (1)$$

Wegen $|MP| = |MR| = \rho$ gilt nun für die Flächeninhalte F_1 bzw. F_2 der Dreiecke ABM bzw. CDM

$$F_1 = \frac{1}{2}a\rho = \frac{1}{2}|AM||BM| \sin(\alpha + \beta)$$

$$F_2 = \frac{1}{2}c\rho = \frac{1}{2}|CM||DM| \sin(\gamma + \delta)$$

Wegen (1) und $\sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ folgt daraus

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{c} = \frac{|AM||BM|}{|CM||DM|}$$

L.6.36

Der Mittelpunkt des Inkreises sei M , die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Seiten AB, BC, CD, DA seien der Reihe nach G, H, K, L . Nun gilt

$$|MG| = |MH| = |MK| = |ML| = r \quad \text{und}$$

$$MG \perp AB, MH \perp BC, MK \perp CD, ML \perp DA$$

Der gesuchte Flächeninhalt F ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM, \triangle DAM$. Da diese Dreiecke sämtlich die Höhenlänge r haben und die Summe der Längen der zugehörigen Grundseiten AB, BC, CD, DA gleich dem Umfang u ist, gilt mithin

$$F = \frac{1}{2}ur$$

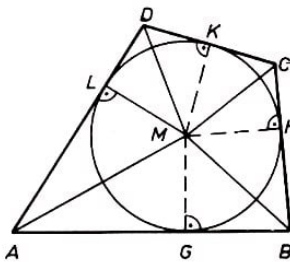


Abb. L.6.36

L.6.37

Die Fußpunkte der Lote von C, D und F auf die Gerade durch A und B seien K, L bzw. M . Dann ist entweder $K = L = M$ (Abb. L.6.37b), oder $KCDL$ ist ein Trapez und FM seine Mittellinie (Abb. L.6.37a, c).

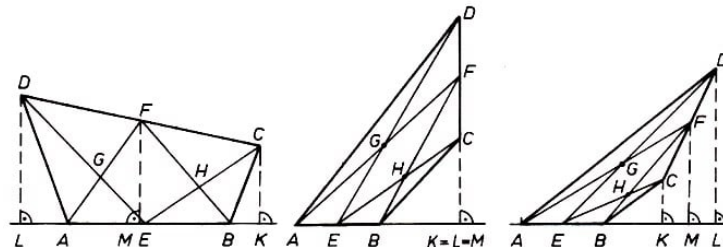


Abb. L.6.37

In jedem dieser Fälle gilt $|FM| = \frac{1}{2}(|CK| + |DL|)$. Für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 der Dreiecke ABF, AED bzw. BEC erhalten wir daher und wegen $\frac{1}{2}|AB| = |AE| = |BE|$

$$A_1 = \frac{1}{2}|AB||FM| = \frac{1}{4}|AB|(|CK| + |DL|) = \frac{1}{2}|BE||CK| + \frac{1}{2}|AE||DL| = A_3 + A_2 \quad (1)$$

Sind ferner $A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, A_V$ die Flächeninhalte der Dreiecke AEG, AGD, BEH, BHC bzw. des Vierecks $EHFG$, so gilt

$$A_1 = A_V + A_{21} + A_{31}, \quad A_2 = A_{21} + A_{22}, \quad A_3 = A_{31} + A_{32}$$

Aus (1) folgt daher $A_V + A_{21} + A_{31} = A_{21} + A_{22} + A_{31} + A_{32}$, also

$$A_V = A_{22} + A_{32}$$

L.6.38

Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD . Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABS , BCS , CDS , DAS ,

$$\begin{aligned} |AS| + |BS| &> |AB|, & |BS| + |CS| &> |BC|, \\ |CS| + |DS| &> |CD|, & |AS| + |DS| &> |DA| \end{aligned}$$

also

$$2(|AS| + |BS| + |CS| + |DS|) > |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = u$$

Da wegen der Konvexität von $ABCD$ der Punkt S sowohl auf AC als auch auf BD liegt, gilt $|AS| + |CS| = e$ und $|BS| + |DS| = f$, so dass sich

$$e + f > \frac{1}{2}u \quad (2)$$

ergibt. Analog erhält man für die Dreiecke ABC , DAC , ABD , BCD

$$\begin{aligned} |AB| + |BC| &> |AC|, & |CD| + |DA| &> |AC|, \\ |AB| + |DA| &> |BD|, & |BC| + |CD| &> |BD| \end{aligned}$$

also

$$2(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) > 2(|AC| + |BD|)$$

und daraus

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DA| > |AC| + |BD|$$

sowie

$$u > e + f \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung.



Abb. L.6.38

L.6.39

Da das Trapez gleichschenkelig ist, liegt der Inkreis Mittelpunkt M auf der Symmetrieachse des Trapezes. Diese Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten AB bzw. CD (Abb. L.6.39).

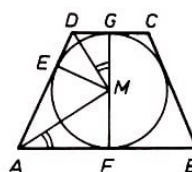


Abb. L.6.39

Ferner liegt M auf den Winkelhalbierenden der Winkel $\angle GDE$ und $\angle EAF$. Wegen $|\angle GDE| + |\angle EAF| = 180^\circ$ gilt daher

$$|\angle MDG| + |\angle MAF| = 90^\circ \quad (1)$$

Da die Dreiecke MDG und MAF rechtwinklig sind, ist

$$|\angle MDG| + |\angle DMG| = 90^\circ \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $|\angle MAF| = |\angle DMG|$. Folglich sind die Dreiecke MDG und MAF ähnlich. Wegen $|DG| = 1 \text{ cm}$, $|AF| = 4 \text{ cm}$ und $|MG| = |MF| = \rho$ folgt daraus

$$|DG| : |MG| = |MF| : |AF| \quad \text{bzw.} \quad 1 \text{ cm} : \rho = \rho : 4 \text{ cm}$$

woraus man $\rho^2 = 4 \text{ cm}^2$ und wegen $\rho > 0$ schließlich $\rho = 2 \text{ cm}$ erhält. Der Inkreisradius hat die Länge $\rho = 2 \text{ cm}$.

L.6.40

a) Zunächst sei V nichtkonvex, o. B. d. A. an der Ecke C einspringend; g sei die Gerade durch B, D ; mit H sei diejenige durch g begrenzte Halbebene bezeichnet, in der A und C liegen. Dann liegt V ganz in H , nicht aber A' und C' , da die Parallelogramme $ABA'D$, $C'BCD$ die Strecke BD als Diagonale haben. Somit liegen A' , C' außerhalb von V . Da ferner der Innenwinkel von V bei C größer

$$|\angle BAD| + |\angle ABC| < 180^\circ \quad \text{also} \quad |\angle BAB'| = 180^\circ - |\angle ABC| > |\angle BAD|$$

Somit liegt B' außerhalb von $\triangle ABD$ und daher erst recht außerhalb von V .

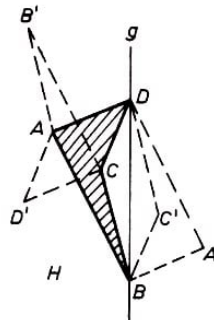


Abb. L.6.40

b) Nun sei V konvex. Die Größen der Innenwinkel von V bei A, B, C, D seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Indem man nötigenfalls A, B, C, D der Reihe nach in C, D, A, B umbenennt, kann man

$$\alpha + \delta \geq \beta + \gamma \quad (1)$$

erreichen. Indem man die nun mit A, B, C, D bezeichneten Punkte nötigenfalls der Reihe nach in D, C, B, A umbenennt (wobei (1) erhalten bleibt), kann man zusätzlich

$$\alpha + \beta \leq \gamma + \delta \quad (2)$$

erreichen. Aus (1) folgt

$$\alpha + \delta \geq 180^\circ = \alpha + |\angle ADA'| \quad \text{d.h.} \quad |\angle ADC| \geq |\angle ADA'|$$

Ebenso folgt aus (2) unter Vertauschung von B, B' mit D, D'

$$|\angle ABC| \geq |\angle ABA'|$$

Die Strahlen aus D und B durch A' verlaufen daher in das Innere oder längs eines Schenkels von $\angle ADC$ bzw. von $\angle ABC$. Ihr Schnittpunkt A' liegt somit im Innern oder auf dem Rand von V .

Unter a) wurde nachgewiesen, dass im Fall eines nichtkonvexen V alle Punkte A', B', C', D' außerhalb V liegen.

Unter b) wurde nachgewiesen, dass im Fall eines konvexen V mindestens einer der Punkte A', B', C', D' im Innern oder auf dem Rand von V liegt.

Daraus folgt, dass genau dann alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb V liegen, wenn V nichtkonvex ist.

L.6.41

Der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks sei M , seine Seitenlänge a . Dann zerlegen die Strecken MA, MB, \dots, MF die Sechsecksfläche in sechs gleichseitige Dreiecksflächen mit der Seitenlänge a . Der Flächeninhalt eines Teildreiecks sei I_T . Wegen

$$I_S = 6I_T, \quad I_T = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \quad \text{folgt} \quad I_S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

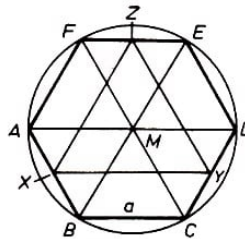


Abb. L.6.41

Das Dreieck $\triangle XYZ$ ist gleichseitig, denn XY, YZ und XZ sind Mittellinien in den paarweise zueinander kongruenten Trapezen $ABCD, CDEF$ und $ABEF$. Dabei gilt $|XY| = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$ und somit

$$I_D = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}a \right)^2 \sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

Daher ist

$$I_S : I_D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} : \frac{9}{16}a^2\sqrt{3} \quad \text{d.h.} \quad I_S : I_D = 8 : 3$$

L.6.42

Die in P auf der Geraden durch A und P errichtete Senkrechte schneide g in M ; die in F auf g errichtete Senkrechte schneide die Gerade durch A und P in Q . Nach dem Höhensatz für das bei P rechtwinklige Dreieck $\triangle AMP$ ist

$$|CM| = \frac{|CP|^2}{|AC|} = \frac{1}{2}|CP| \quad \text{also} \quad |MF| = \frac{5}{2}|CP|$$

Nach dem Strahlensatz gilt

$$|FQ| = \frac{|CP||AF|}{|AC|} = \frac{5}{2}|CP|$$

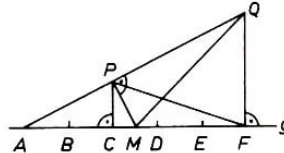


Abb. L.6.42

Daher ist das bei F rechtwinklige Dreieck MFQ gleichschenkelig mit $|\angle FMQ| = 45^\circ$. Das Viereck $FMPQ$ hat bei F und P rechte Winkel, ist also ein Sehnenviereck; folglich gilt nach dem Peripheriewinkelsatz

$$|\angle FPQ| = |\angle FMQ| = 45^\circ$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

L.6.43

Beweis (indirekt): Angenommen, es lägen nicht alle $P_k, k = 1, \dots, n$ ($n \leq 8$), auf derselben Geraden. Dann bezeichne P_{ij} einen von P_i und P_j verschiedenen der Punkte P_k , der auf der Geraden g_{ij} durch P_i und P_j liegt. Ein solcher Punkt P_{ij} existiert nach Voraussetzung für alle $i, j = 1, \dots, n$ ($n \leq 8$).

Nun kann o. B. d. A. angenommen werden:

$P_{12} = P_3$; P_4 liegt nicht auf der Geraden g_{12} durch P_1 und P_2 ;

$P_{14} = P_5$; $P_{24} = P_6$; $P_{34} = P_7$

Es liegt also keiner der Punkte P_5, P_6, P_7 auf g_{12} . Daraus folgt, dass die obige Annahme höchstens für $n \geq 7$ gelten kann.

Lägen nun P_1, P_6, P_7 nicht auf derselben Geraden, so wäre $P_{16} \neq P_7$ und wegen $n \leq 8$ folglich $P_{16} = P_8$; denn $P_{16} = P_2$ oder $= P_3$ ist nicht möglich, weil P_6 nicht auf g_{12} liegt, $P_{16} = P_4$ oder $= P_5$ ist ebenfalls nicht möglich, weil sonst $g_{14} = g_{24}$ wäre. Aus demselben Grunde wäre $P_{17} = P_8$, d.h., P_6 und P_7 lägen auf g_{18} und mithin doch auf ein und derselben Geraden durch P_1 . Also liegen P_1, P_6, P_7 auf derselben Geraden, und es ist o.B.d.A. $P_{16} = P_7$.

Entsprechend folgt $P_{25} = P_7$ und $P_{35} = P_6$ (1)

Nun kann weiter die Bezeichnung der Punkte so gewählt werden, dass P_2 auf der Strecke P_1P_3 und P_5 auf der Strecke P_1P_4 liegen. Mithin liegt P_6 als Schnittpunkt von P_2P_4 mit P_3P_5 auf P_2P_4 und weiter P_7 als Schnittpunkt von g_{16} mit g_{34} auf P_3P_4 . Daher schneiden sich die Strecken P_5P_7 und P_2P_4 in einem inneren Punkt, und es kann P_2 als Endpunkt von P_2P_4 nicht auf der Geraden g_{57} liegen, d.h., es wäre $P_{25} \neq P_7$ im Widerspruch zu (1).

Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Anmerkung: Im Gegensatz zur folgenden Lösung wurden bei dem oben angeführten

Beweis die Begriffe "Länge" bzw. "Abstand" nicht verwendet.

Anderer Lösungsweg:

Angenommen, es existierten in der Menge \mathfrak{M} der genannten n Punkte drei Punkte A , B und C , die nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Für jedes geordnete Tripel (A, B, C) aus drei solchen Punkten aus \mathfrak{M} bezeichne $a(A, B, C)$ den Abstand von A zu der Geraden g durch B und C . Da es nur endlich viele solcher Tripel gibt, existieren unter diesen eines mit kleinstem $a(A, B, C)$.

Auf g liegt nach Voraussetzung ein von B und C verschiedener Punkt D aus \mathfrak{M} . Bei geeigneter Bezeichnung liegt B zwischen C und D , so dass von den Dreiecken $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ eines, etwa $\triangle ABC$, bei B stumpf- oder rechtwinklig ist. Dann ist $|AC| > |BC|$, also, da sich die Längen der Dreieckshöhen umgekehrt wie die Längen der zugehörigen Seiten verhalten, $a(B, A, C) < a(A, B, C)$, im Widerspruch zur Auswahl des Tripels (A, B, C) .

Bemerkung: Wie der obenstehende Lösungsweg zeigt, ist die zu beweisende Behauptung sogar für jede natürliche Zahl n gültig. Die Gültigkeit dieser so verallgemeinerten Aussage wurde bereits 1893 von James Joseph Sylvester vermutet.

Ein noch verhältnismäßig komplizierter Beweis wurde erst 1933 durch T. Gallai gegeben. Man spricht daher auch vom Sylvester-Gallai-Theorem. Erst später gelang ein elementarer Beweis der oben angegebenen Art.

L.6.44

Den gesuchten Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächeninhalt a^2 des Quadrats $ABCD$ die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke

$$\triangle AKE, \triangle BLE, \triangle BMF, \triangle CNF, \triangle COG, \triangle DPG, \triangle DOH, \triangle ARH$$

subtrahiert.

Nun gilt $\triangle ABF \cong \triangle ABH \cong \triangle BCG \cong \triangle BCE \cong \triangle CDH \cong \triangle CDF \cong \triangle DAE \cong \triangle DAG$, denn diese Dreiecke stimmen sämtlich in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel überein. Daher sind die anfangs genannten acht Dreiecke sämtlich einander kongruent; denn sie stimmen in den Winkeln und in einander entsprechenden Seiten überein.

Es gilt ferner $\triangle AKE \sim \triangle ABF$ (nach dem Hauptähnlichkeitssatz). Folglich ist $\triangle AKE$ rechtwinklig bei K , entsprechend $\triangle BFM$ bei M . Deshalb gilt $KE \parallel BM$. Aus einem der Strahlensätze folgt

$$|KE| : |MB| = |AE| : |AB| = 1 : 2$$

d.h. wegen $|AK| = |MB|$: $|AK| = 2|KE|$.

Aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle AKE$, ergibt sich

$$|KE|^2 + (2|KE|)^2 = |AE|^2 \quad \text{d.h.} \quad 5|KE|^2 = \frac{a^2}{4} \quad \text{bzw.} \quad |KE|^2 = \frac{a^2}{20}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AKE$ beträgt

$$\frac{|KE| \cdot 2|KE|}{2} = |KE|^2 = \frac{a^2}{20}$$

Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt

$$a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3}{5}a^2$$

L.6.45

Angenommen, $A_1A_2\dots A_n$ sei ein konvexes n -Eck mit den verlangten Innenwinkelgrößen. Ihre Summe beträgt nach einer bekannten Formel $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Andererseits haben die Innenwinkel bei A_1, A_2, \dots, A_n der Reihe nach Größen, die mit 120° beginnen und immer um 5° größer sind als die vorhergehende. Dies sind folglich die Größen

$$120^\circ, 120^\circ + 1 \cdot 5^\circ, \dots, 120^\circ + (n-1) \cdot 5^\circ$$

Ihre Summe ist

$$n \cdot 120^\circ + (1 + \dots + (n-1)) \cdot 5^\circ = n \cdot 120^\circ + \frac{(n-1)n}{2} \cdot 5^\circ$$

Somit folgt

$$(n-2) \cdot 180^\circ = n \cdot 120^\circ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^\circ$$

also (unter Weglassung des Zeichens $^\circ$)

$$360n - 720 = 240n + 5n^2 - 5n, \quad n^2 - 25n + 144 = 0$$

d. h. entweder $n = 9$ oder $n = 16$. Da das n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ konvex ist, gilt $120^\circ + (n-1) \cdot 5^\circ < 1801^\circ$, so dass $n = 16$ ausscheidet. Daher kann höchstens für $n = 9$ ein solches n -Eck existieren.

L.6.46

a) Angenommen, es gäbe ein Q_k , etwa Q_1 , das nicht Ecke von E ist. Da E konvex ist und alle Q_k im Innern oder auf dem Rand von E liegen, liegen auch alle Punkte aller Seiten von $Q_1Q_2\dots Q_n$ im Innern oder auf dem Rand von E . Dasselbe gilt folglich für alle Punkte des Innern von $Q_1Q_2\dots Q_n$. Nun zeigen wir, dass mindestens eine Seite s von $Q_1Q_2\dots Q_n$ innere Punkte von E enthält.

Liegt Q_1 im Innern von E , so ist diese Behauptung richtig. Liegt Q_1 auf dem Rand von E , also nach Annahme im Innern einer Seite r von E , so liegt mindestens einer der Punkte Q_n, Q_2 nicht auf r , da sonst $Q_1Q_2\dots Q_n$ kein n -Eck wäre.

Liegt etwa Q_2 nicht auf r , liegt Q_2 im Innern von E . Also ist die Behauptung richtig. Liegt aber Q_2 auf einer von r verschiedenen Seite von E , so ist Q_1Q_2 die Verbindungsstrecke zweier Randpunkte von E , die längs des Randes von E nicht geradlinig miteinander verbunden sind. Daher gehört jeder im Innern von Q_1Q_2 gelegene Punkt

zum Innern von E .

Aus der somit gezeigten Behauptung über s folgt:

Die Gerade g , auf der s liegt, zerlegt E in zwei Vielecke V_1, V_2 mit positiven Flächeninhalten F_1, F_2 .

Das n -Eck $Q_1Q_2\dots Q_n$ liegt nun einerseits wegen der Konvexität ganz auf einer Seite von g ; andererseits aber liegen alle Punkte von $Q_1Q_2\dots Q_n$ im Innern oder auf dem Rand von E , also liegen sie bei geeigneter Bezeichnung alle im Innern oder auf dem Rand von V_1 . Der Flächeninhalt von $Q_1Q_2\dots Q_n$ ist daher mindestens um F_2 kleiner als der von E . Dies widerspricht der Kongruenz von E und $Q_1Q_2\dots Q_n$; die eingangs gemachte Annahme muss daher falsch sein.

b) Ja, zum Beweis genügt ein Beispiel, etwa folgendes: Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ ein gleichseitiges Dreieck D ; ferner sei M sein Mittelpunkt, und P_4 liege auf der Verlängerung der Strecke P_2M über M hinaus, aber noch im Innern von D . Bei derjenigen Drehung um M , die P_1 in den Punkt $Q_1 = P_2$ überführt, gehen P_2, P_3 in $Q_2 = P_3$ bzw. $Q_3 = P_1$ über, ferner P_4 in einen auf der Verlängerung der Strecke P_3M über M hinaus gelegenen Punkt Q_4 im Innern von D , der daher ebenfalls im Innern von $E = P_1P_2P_3P_4$ liegt, aber keine Ecke von E ist.

c) Nein, zum Beispiel genügt ein Gegenbeispiel, etwa folgendes:

Es sei $\triangle P_1P_2P_3$ ein gleichseitiges Dreieck D , es sei P_4 sein Mittelpunkt. Liegen nun alle Ecken $Q_1\dots Q_4$ eines zu $E = P_1P_2P_3P_4$ kongruenten Vierecks im Innern oder auf dem Rand von E , so folgt: Bei geeigneter Bezeichnung ist $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ein zu D kongruentes Dreieck und Q_4 sein Mittelpunkt.

Da Q_1, Q_2, Q_3 erst recht im Innern oder auf dem Rand von D liegen, folgt nach a): Jedes Q_k ($k = 1, 2, 3$) ist eines der P_k ($k = 1, 2, 3$).

Das Dreieck $\triangle Q_1Q_2Q_3$ ist also dasselbe Dreieck wie D , und daher stimmt sein Mittelpunkt Q_4 mit dem Mittelpunkt P_4 von D überein. Mithin ist die in a) gemachte Aussage für E richtig.

L.6.47

a) Es sei O der Schnittpunkt von g und h ; ferner sei s eine durch O begrenzte Halbgerade von g sowie t eine von O begrenzte Halbgerade von h derart, dass s und t die Schenkel eines Winkels der Größe α sind.

In der Ebene sei eine Orientierung der Winkel zwischen je zwei von O ausgehenden Strecken bzw. Strahlen so gegeben, dass t mit s auch bei dieser Orientierung einen Winkel der (positiven) Größe α , $\alpha \leq 90^\circ$ bildet.

Es sei nun P ein Punkt der Ebene. Die Strecke OP habe die Länge r und bilde mit s einen Winkel der Größe φ .

Wird P an g gespiegelt, so ergibt sich als Bildpunkt derjenige Punkt Q der Ebene, für den die Strecke OQ die Länge r hat und mit s einen Winkel der Größe $-\varphi$ bildet. Die Strecke OQ bildet dann mit t einen Winkel der Größe $-\varphi - \alpha$. Wird Q an h gespiegelt, so ergibt sich folglich als Bildpunkt derjenige Punkt R der Ebene, für den die Strecke

OR die Länge

$$|OR| = r \quad (1)$$

hat und mit t einen Winkel der Größe $-(-\varphi - \alpha) = \varphi + \alpha$ bildet. Die Strecke OR bildet daher mit s einen Winkel der Größe

$$(\varphi + \alpha) + \alpha = \varphi + 2\alpha \quad (2)$$

In den durch (1), (2) charakterisierten Punkt R geht P aber auch bei der Drehung um den Drehpunkt O mit dem Drehwinkel der Größe 2α über.

b) Die Strecke OP bildet mit t einen Winkel der Größe $\varphi - \alpha$. Wird P an h gespiegelt, so ergibt sich daher als Bildpunkt derjenige Punkt S , für den die Strecke OS die Länge r hat und mit t einen Winkel der Größe $-(\varphi - \alpha) = -\varphi + \alpha$ bildet. Die Strecke OS bildet dann mit s einen Winkel der Größe

$$(-\varphi + \alpha) = -\varphi + 2\alpha$$

Wird S an g gespiegelt, so ergibt sich folglich als Bildpunkt derjenige Punkt T , für den die Strecke OT die Länge

$$|OT| = r \quad (3)$$

hat und mit s einen Winkel der Größe

$$-(-\varphi + 2\alpha) = \varphi - 2\alpha \quad (4)$$

bildet.

In den durch (3), (4) charakterisierten Punkt T geht P auch bei der Drehung um den Drehpunkt O mit dem Drehwinkel der Größe (-2α) über. Diese Drehung stimmt für $\alpha = 90^\circ$ mit der in a) gefundenen Drehung überein, für $\alpha < 90^\circ$ dagegen nicht.

Bemerkung: Führt man keine orientierten Winkel ein, so müssen mehrere Fallunterscheidungen durchgeführt werden.

L.6.48

Der Umkreis je eines regelmäßigen n -Ecks, das hier untersucht werden soll, habe O. B. d. A. den Radius 1; es sei s_n die Seitenlänge, d_n die Länge einer kürzesten und D_n die Länge einer längsten Diagonale dieses n -Ecks $P_1P_2P_3\dots P_n$. Da im regelmäßigen Viereck und im regelmäßigen Fünfeck sämtliche Diagonalen gleichlang sind, haben diese n -Ecke nicht die verlangte Eigenschaft.

Beim regelmäßigen Sechseck und beim regelmäßigen Siebeneck bilden jeweils eine längste Diagonale, eine geeignete kürzeste Diagonale und eine geeignete Vieleckseite ein Dreieck, so dass wegen der Dreiecksungleichung auch in diesen Fällen die verlangte Eigenschaft nicht auftreten kann (siehe Abb. L.6.48).

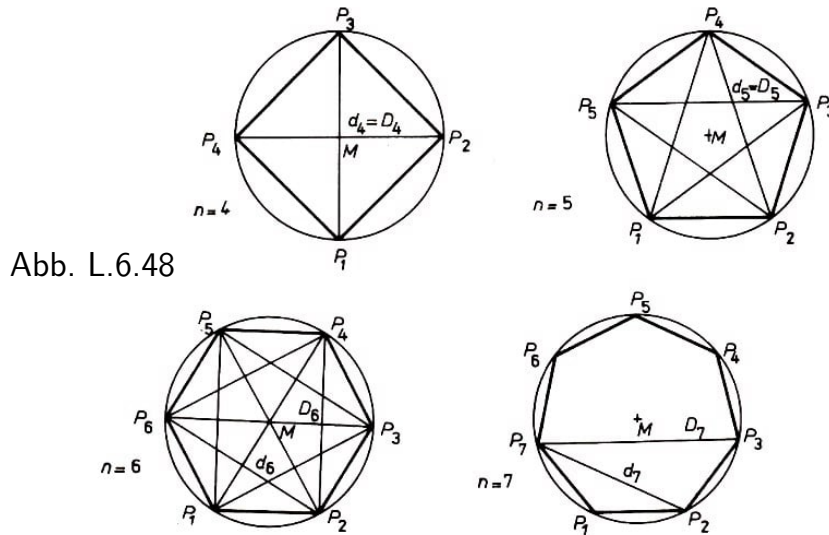


Abb. L.6.48

Es sei nun $n = 8$. Dann gilt $|P_8P_4| = D_8$ und $|P_1P_3| = d_8$. Außerdem gilt $P_8P_4 \parallel P_1P_3$, da $P_8P_1P_3P_4$ ein gleichschenkliges Trapez ist. Die Parallele zu P_8P_1 durch P_3 schneide P_8P_4 in einem Punkt, der mit P bezeichnet sei. Dann gilt

$$|\angle P_4PP_3| = |\angle P_8P_4P_3| = \frac{1}{2}|\angle P_8MP_3| = \frac{3}{2} \cdot 45^\circ > 60^\circ$$

also $|\angle PP_3P_4| < 60^\circ$ und daher $s_8 = |P_4P_3| > |PP_4| = D_8 - d_8$. Somit hat auch das regelmäßige Achteck nicht die verlangte Eigenschaft.

Es sei nun $n = 9$. Dann ist $P_9P_1P_2P_3$, ein gleichschenkliges Trapez, für das $_9P_4 \parallel P_1P_3$ und $|P_9P_4| = D_9$ sowie $|P_1P_3| = d_9$ gilt. Die Parallele zu P_9P_1 durch P_3 schneide P_9P_4 in einem Punkt, der mit P bezeichnet sei. Dann gilt

$$|\angle P_4PP_3| = |\angle P_9P_4P_3| = \frac{1}{2}|\angle P_9MP_3| = \frac{3}{2} \cdot 40^\circ = 60^\circ$$

und daher $s_9 = |P_4P_3| = |PP_4| = D_9 - d_9$. Somit hat das regelmäßige Neuneck die verlangte Eigenschaft.

Nun gilt $s_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}$, $d_n = 2 \sin \frac{2\pi}{n}$ sowie, wenn n gerade ist, $D_n = 2$, wenn n ungerade ist, $D_n = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right)$. Somit ist für alle $n > 9$ stets

$$s_n + d_n < s_9 + d_9 = D_9 < D_n$$

d. h., die verlangte Eigenschaft ist nicht vorhanden. Daher hat genau das regelmäßige Neuneck die verlangte Eigenschaft.

L.6.49

Die Punkte M_1 und M_2 liegen auf der Halbierenden des Winkels $\angle ACB$. Da $\triangle ABC$ gleichseitig ist, liegt CM_1 auf der Mittelsenkrechten von AB . Es seien D und E die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit AC , ferner sei F der Fußpunkt des Lotes von M_2 auf M_1D . Dann sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz die Dreiecke AM_1C , M_1FM_2 und M_2EC ähnlich, und es gilt wegen $|AM_1| = \frac{1}{2}|AC|$

$$|FM_1| = \frac{1}{2}|M_1M_2| \quad (1)$$

Nun ist

$$|M_1 M_2| = r_1 + r_2 \quad (2)$$

da k_1 und k_2 sich von außen berühren. Nach dem Strahlensatz gilt

$$r_1 : r_2 = |M_1 D| : |M_2 E| = |CM_1| : |CM_2|$$

Da M_2 auf DM_1 liegt, ist $|CM_1| > |CM_2|$ und mithin $r_1 > r_2$. Daraus folgt

$$|FM_1| = r_1 - r_2 \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) ergibt sich $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, also $r_1 = 3r_2$ und damit $r_1 : r_2 = 3 : 1$.

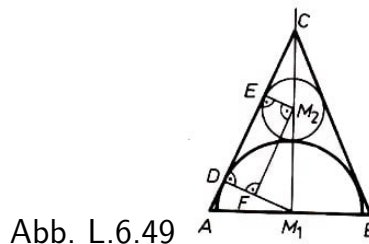


Abb. L.6.49

L.6.50

Offensichtlich ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche genau dann am größten, wenn die Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2 am kleinsten ist. Bezeichnet x den Abstand zwischen M und dem Mittelpunkt von k , so gilt, da dieser Mittelpunkt auf AM liegt, $|AM| = \frac{d}{2} + x$ und $|MB| = \frac{d}{2} - x$ sowie $0 \leq x < \frac{d}{2}$.

Für die Summe F_S der Flächeninhalte der Kreise k_1 und k_2 ergibt sich nun

$$F_S = \frac{\pi}{4} \left(\left(\frac{d}{2} + x \right)^2 + \left(\frac{d}{2} - x \right)^2 \right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d^2}{4} + 2x^2 \right)$$

F_S wird also genau dann am kleinsten, wenn $2x^2 = 0$, also $x = 0$ gilt, d.h. genau für $|AM| = \frac{d}{2}$.

L.6.51

Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen A, B gilt nach Voraussetzung

$$|AE| = \frac{2}{7}d \quad \text{und} \quad |EB| = \frac{5}{7}d \quad (1,2)$$

also

$$|EM| = \frac{1}{2}d - \frac{2}{7}d = \frac{13}{14}d \quad (3)$$

F sei der Fußpunkt des Lotes von M auf CD . Dann ist $\triangle EMF$ rechtwinklig mit $|\angle MEF| = 30^\circ$ (nach Voraussetzung), also

$$|\angle FME| = 60^\circ \quad (4)$$

Man spiegele nun $\triangle MEF$ an CD . Für das dadurch erhaltene rechtwinklige Dreieck $\triangle EFM'$ gilt dann

$$|\angle FEM'| = 30^\circ \quad \text{und} \quad |\angle EM'F| = 60^\circ \quad (5)$$

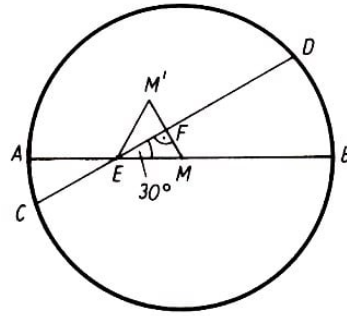


Abb. L.6.51

Nach (4) und (5) ist das Dreieck $\triangle EMM'$ gleichseitig und daher der Höhenfußpunkt F auch der Mittelpunkt von MM' . Unter Berücksichtigung von (3) folgt daraus $|MF| = \frac{3}{28}d$. Der Abstand der Sehne CD vom Mittelpunkt des Kreises beträgt also $\frac{3}{28}d$, wenn d die Durchmesserlänge des Kreises ist.

L.6.52

AB ist Sehne jedes der drei Kreise k , k' und k'' . Die Mittelpunkte M' und M'' sind daher die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AB mit dem Kreis k . Dabei liege M'' auf derselben Seite der Geraden g_{AB} wie C , und M'' liegt demzufolge auf der anderen Seite von g_{AB} :

Wegen $|AM'| = |BM'|$ und $|MA| = |MM'| = |MB|$ gilt zunächst $\triangle AMM' \cong \triangle BMM'$ und daher $\angle AMM' = \angle BMM'$, mithin nach einem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel

$$|\angle ACM'| = \frac{1}{2}|\angle AMM'| = \frac{1}{2}|\angle BMM'| = |\angle BCM'|$$

Folglich enthält die Gerade $g_{CM'}$, die Winkelhalbierende des Dreiecks $\triangle ABC$ durch C . Die Punkte A und B liegen daher auf verschiedenen Seiten von $g_{CM'}$, so dass die Strecke AB die Gerade $g_{CM'}$ in einem Punkt schneidet, der mit Q bezeichnet werde.

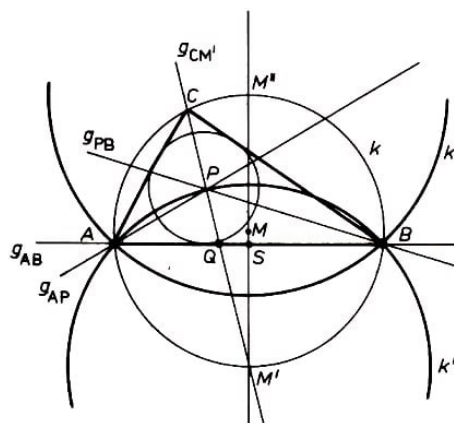


Abb. L.6.52

Da M' und C auf Grund unserer Festlegung auf verschiedenen Seiten von g_{AB} liegen, schneidet CM' die Gerade g_{AB} , und zwar in Q . Daher liegt Q auf AB und auf CM' . Der Schnittpunkt des von M' ausgehenden Strahles durch C mit dem Kreis k' werde mit P bezeichnet. Da AB als Sehne von k' in der von k' begrenzten Kreisfläche liegt, muss Q auf der Strecke $M'P$ liegen. Hieraus folgt, dass A und M' auf derselben Seite

von g_{PB} liegen.

Andernfalls lägen die Strecken PM' und AB nicht auf derselben Seite der Geraden g_{PB} und hätten folglich keinen Schnittpunkt. Daher ist $\angle PM'B$ in Bezug auf k' zum Peripheriewinkel $\angle PAB$ gehöriger Zentriwinkel und folglich doppelt so groß wie dieser. Andererseits ist $\angle CM'B (= \angle PM'B)$ als Peripheriewinkel im Kreis k ebenso groß wie der Peripheriewinkel $\angle CAB$. Folglich enthält g_{AP} die Winkelhalbierende von $\triangle ABC$ durch A . Also ist P als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$.

L.6.53

a) Ist B Berührungspunkt eines der Kreise durch P_1 und P_2 mit einer Tangente durch Q , so gilt nach dem Sehnen-Tangenten-Satz (siehe Abb, L.6.53)

$$|QP|^2 = |QP_1||QP_2| \quad (1)$$

Daher liegt B auf dem Kreis k_Q , um Q mit dem Radius $\sqrt{|QP_1||QP_2|}$.

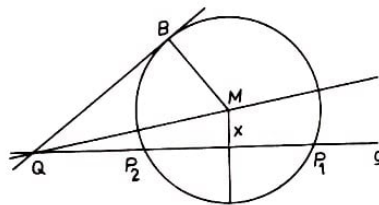


Abb. L.6.53

b) Umgekehrt gilt auch:

Liegt ein Punkt P auf k_Q , aber nicht auf g , so ist die Gerade durch P Tangente und Q an den Kreis durch P_1, P_2 und P . Jeder gemeinsame Punkt P zweier Kreise k_{Q_1} und k_{Q_2} liegt daher, wenn $Q_1 \neq Q_2$ und $Q_1 \in g, Q_2 \in g$ ist, auf g .

Wir zeigen nun:

Der Kreis k_Q liegt ganz auf derselben Seite der Mittelsenkrechten m von P_1P_2 wie Q . Wegen der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel gilt nämlich

$$\sqrt{|QP_1||QP_2|} < \frac{1}{2}(|QP_1| + |QP_2|)$$

d. h., der Abstand jedes Punktes von k_Q von Q ist kleiner als der Abstand von Q von m .

Daher könnten k_{Q_1} und k_{Q_2} nur dann einen Punkt P gemeinsam haben, wenn Q_1 auf derselben Seite von m liegt wie Q_2 und P ein Punkt von g ist. Dann wäre mit $d = |Q_1Q_2|$, $a = |Q_1P_1|$, $b = |Q_1P_2|$ o. B. d. A. $|Q_2P_1| = a + d$, $|Q_2P_2| = b + d$ und $|Q_2P| = |Q_1P| + d$. Hieraus ergäbe sich

$$\sqrt{(a+d)(b+d)} = \sqrt{ab} + d, \quad d(a+b) = 2\sqrt{abd}, \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$$

was der Voraussetzung $P_1 \neq P_2$ widerspricht. Folglich haben k_{Q_1} und k_{Q_2} keinen gemeinsamen Punkt.

L.6.54

Die Fläche kann durch Übereinanderdecken von drei Kreissektoren mit dem Radius a und einem Zentriwinkel der Größe 60° erzeugt werden. Das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ wird dabei dreifach bedeckt. Der gesuchte Flächeninhalt ist daher gleich der Differenz aus der Summe der Flächeninhalte der drei Kreissektoren und dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Da der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a bekanntlich $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ beträgt, erhält man

$$F = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$$

L.6.55

Für jedes $i = 1, \dots, n-1$ gilt: c_i und c'_{n-1} haben beide den Durchmesser $d_i = i \cdot \frac{2r}{n}$; der Inhalt der von je einem dieser Halbkreise und dem zugehörigen Durchmesserabschnitt begrenzten Fläche ist daher

$$A_i = \frac{\pi}{2}i^2 \frac{r^2}{n^2}$$

Setzt man noch $A_0 = 0$ und $A_n = \frac{\pi}{2}r^2$, so haben die gesuchten Flächeninhalte F_i die Werte

$$\begin{aligned} F_i &= A_i - A_{i-1} + A_{n-(i-1)} - A_{n-i} = \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{n^2} (i^2 - (i-1)^2 + (n-(i-1))^2 - (n-i)^2) \\ &= \frac{\pi r^2}{2n^2} (2i - 1 + 2(n-i) + 1) = \frac{\pi r^2}{2n^2} 2n = \frac{1}{n} \pi r^2 \end{aligned}$$

Die n Flächenstücke sind also insbesondere paarweise inhaltsgleich.

L.6.56

a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht Abb. L.6.56.

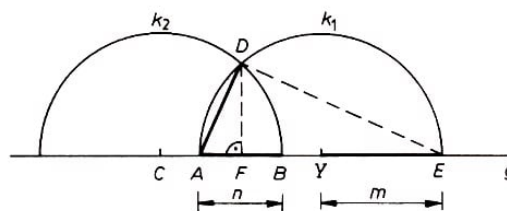


Abb. L.6.56

b) Aus der Konstruktion folgt

$$|AB| = n \quad , \quad |AY| = |DY| = |EY| = m$$

Ferner ist $|AD| = x$. Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB . Sein Fußpunkt sei F . Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. Daher gilt nach dem Satz des Euklid

$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = mn \quad \text{also} \quad x = \sqrt{mn}$$

L.6.57

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

Es sei C der Punkt an der Wand, in dem der von A kommende Schall nach B reflektiert wird. Dann ist wegen der erwähnten Winkelgleichheit und wegen der Gleichheit der Abstände der Punkte A und B von der Wand das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenkelig mit $|AC| = |CB|$.

Da der Schall auf dem Wege von A über C nach B genau 4 länger braucht als auf direktem Wege und da laut Aufgabe der Schall in jeder Zehntelsekunde 34 m zurücklegt, gilt

$$|AC| + |CB| = |AB| + 34 \text{ m} = 51 \text{ m} + 34 \text{ m} = 85 \text{ m} \quad \text{also} \quad |AC| = |CB| = 42,5 \text{ m}$$

Der Abstand des Punktes A von der Wand beträgt somit nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{42,5^2 - 25,5^2} \text{ m} = 34 \text{ m}$$

L.6.58

Wir bezeichnen die konvexen Vielecksflächen mit V_1, V_2, V_3, V_4 . Nach Voraussetzung existieren Punkte P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mit

$$P_1 \in V_2 \cap V_3 \cap V_4, \quad P_2 \in V_3 \cap V_4 \cap V_1, \quad P_3 \in V_4 \cap V_1 \cap V_2, \quad P_4 \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$$

Wir beweisen zunächst den

Satz: Liegen drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte A, B, C in einer konvexen Vielecksfläche, dann liegt auch die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ vollständig in dieser Vielecksfläche.

Beweis: Da die Vielecke konvex sind, verläuft die Verbindungsstrecke je zweier in der gleichen Vielecksfläche gelegener Punkte ganz in dieser Vielecksfläche. Daher liegen die Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ und damit auch die Verbindungsstrecke je zweier auf den Seiten gelegener Punkte ganz in dieser Vielecksfläche.

Es sei nun

F_1 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_1 P_2 P_3$,

F_2 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_2 P_3 P_4$,

F_3 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_3 P_4 P_1$,

F_4 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_4 P_1 P_2$,

Dann gilt

$$F_i \subseteq V_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

Für die gegenseitige Lage der Punkte P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) muss einer der folgenden Fälle eintreten:

a) Entweder gehört einer der vier Punkte der durch die anderen drei Punkte bestimmten Dreiecksfläche an oder

b) die vier Punkte sind die Eckpunkte eines konvexen Vierecks.

Im Fall a) sei o. B. d. A. der Punkt P_1 ein Punkt der Fläche F_1 . Wegen $F_1 \subseteq V_1$ gilt dann $P_1 \in V_1$, d.h., P_1 ist Element aller vier Vielecksflächen.

Im Fall b) sei Q der Schnittpunkt der Diagonalen des konvexen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$. Dann liegt Q auf je einer Seite der durch jeweils drei der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gebildeten Dreiecke, gehört mithin allen Dreiecksflächen F_i ($i = 1, 2, 3, 4$) und damit wegen (I) auch allen konvexen Vielecksflächen V_i ($i = 1, 2, 3, 4$) an.

Damit ist der Satz bewiesen.

L.6.59

In der Ebene werde ein Strahl s gewählt, sein Ausgangspunkt sei O . Für jedes α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ gehe s durch die Drehung der Größe α mit dem Drehpunkt O und positivem Drehsinn in den Strahl $s(\alpha)$ über.

Mit $g(\alpha)$ sei diejenige orientierte Gerade bezeichnet, in der $s(\alpha)$ liegt und für die $s(\alpha)$ die positive Richtung angibt.

Von jedem Punkt $P \in \mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2$) werde das Lot $PP(\alpha)$ auf $g(\alpha)$ gefällt. Die (vorzeichenbehaftete) Länge der gerichteten Strecke $OP(\alpha)$ in der orientierten Geraden $g(\alpha)$ sei mit $d_P(\alpha)$ bezeichnet.

Für jedes $i = 1, 2$ und jedes α ordne man den Längen $d_P(\alpha)$ ($P \in \mathfrak{M}_i$) in ansteigender Reihenfolge die Zahlen $1, \dots, 2n_i$, zu; dabei sind im Fall $P \in \mathfrak{M}_i$, $P' \in \mathfrak{M}_i$, $P \neq P'$, mit

$$d_P(\alpha) = d_{P'}(\alpha) \quad (1)$$

der Länge $d_P(\alpha)$ genau zwei (aufeinanderfolgende) Zahlen zuzuordnen. Da auf der Senkrechten zu $g(\alpha)$ durch $P(\alpha)$ nicht mehr als zwei Punkte aus \mathfrak{M}_i liegen, ist diese Zuordnung stets möglich. Diejenigen Abstände unter den $d_P(\alpha)$, denen die Zahlen n_i und $n_i + 1$ zugeordnet sind, seien mit $h_i(\alpha)$ bzw. $k_i(\alpha)$, das offene Intervall $(h_i(\alpha), k_i(\alpha))$ mit $J_i(\alpha)$ bezeichnet.

Für jedes $P \in \mathfrak{M}_i$ hängt $P(\alpha)$ wegen

$$d_P(\alpha) = |OP| \cos(\angle(s, \overrightarrow{OP} - \alpha)$$

stetig von α ab. Ferner gibt es nur endlich viele α , zu denen $P, P' \in \mathfrak{M}_i$ mit (1) existieren, nämlich genau diejenigen, für die $g(\alpha)$ senkrecht auf der durch (mindestens) ein Punktpaar aus \mathfrak{M}_i gehenden Geraden steht. Zu jedem Intervall, das kein solches α enthält, gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $P \in \mathfrak{M}_i$ mit

$$h_i(\alpha) = d_P(\alpha) \quad (2)$$

treffen zwei dieser Intervalle bei einem α zusammen, so kann dort das in (2) auftretende P nur im Fall (1) in ein anderes $P \in \mathfrak{M}_i$, überwechseln. Daher variiert insgesamt auch $h_i(\alpha)$ kontinuierlich (stetig). Dasselbe gilt für $k_i(\alpha)$.

Nun zeigen wir, dass ein $\hat{\alpha}$ existiert, für das die Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ einen Wert gemeinsam haben, der im Innern eines dieser beiden Intervalle liegt. Hat nämlich $\hat{\alpha} = 0^\circ$ diese Eigenschaft nicht, so liegt $J_1(0^\circ)$ bis auf einen eventuell auftretenden gemeinsamen Randwert ganz unterhalb oder ganz oberhalb von $J_2(0^\circ)$. Für $J_1(180^\circ)$ und

$J_2(180^\circ)$ gilt die umgekehrte Anordnung; denn für jeden Punkt P gilt $d_P(180^\circ) = -d_P(0^\circ)$, woraus

$$h_i(180^\circ) = -k_i(180^\circ) \quad , \quad k_i(180^\circ) = -h_i(0^\circ) \quad (i = 1, 2)$$

folgt.

Wegen der stetigen Abhängigkeit müssen also, wenn α das Intervall von 0° bis 180° durchläuft, bei wenigstens einem $\hat{\alpha}$ die Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, und für ein solches $\hat{\alpha}$ können nicht beide $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ zum Punkt entarten, da sonst vier verschiedene Punkte (zwei aus \mathfrak{M}_1 , zwei aus \mathfrak{M}_2) auf derselben Senkrechten zu $g(\hat{\alpha})$ lägen.

Sind für $\hat{\alpha}$ beide Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ nicht entartet, so setzen wir $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Ist für $\hat{\alpha}$ eins der Intervalle $J_1(\hat{\alpha})$, $J_2(\hat{\alpha})$ zum Punkt (im Innern des anderen) entartet, so kann man $\hat{\alpha}$ um einen so kleinen Betrag in ein $\tilde{\alpha}$ abändern, dass beide Intervalle $J_1(\tilde{\alpha})$, $J_2(\tilde{\alpha})$ nicht entartet sind, aber immer noch einen Wert gemeinsam haben, der im Innern eines dieser beiden Intervalle liegt.

Nach diesen Definitionen haben $J_1(\tilde{\alpha})$, $J_2(\tilde{\alpha})$ dann auch einen Wert w gemeinsam, der im Innern dieser beiden Intervalle liegt.

Es sei W derjenige Punkt auf $g(\tilde{\alpha})$, für den die gerichtete Strecke OW in der orientierten Geraden $g(\tilde{\alpha})$ die Länge w hat; ferner sei g die auf $g(\tilde{\alpha})$ senkrechte Gerade durch W . Dann hat g die verlangte Eigenschaft; denn die Halbebenen, in die g die Ebene zerlegt, lassen sich so mit H , K bezeichnen, dass für $i = 1, 2$ in H diejenigen $P \in \mathfrak{M}_i$, liegen, für die den Längen $d_P(\alpha)$ die Zahlen $1, \dots, n$, zugeordnet sind, dagegen in K die $P \in \mathfrak{M}_i$, mit den zugeordneten Zahlen $n_i + 1, \dots, 2n_i$.

L.6.60

Der Mittelpunkt von k_1 sei N , die Schnittpunkte von k und k_1 seien S und T .

Dann sind die Geraden durch M und S bzw. durch M und T wegen der Orthogonalität von k und k_1 Tangenten von M an k_1 , also liegt M außerhalb von k_1 .

Ist P ein beliebiger Punkt auf k_1 , so sei P_1 der zweite Schnittpunkt der Geraden durch M und P mit k_1 (im Fall $P = S$ oder $P = T$ sei $P_1 = P$). Dann ist die Gerade durch M und S Tangente an k_1 , und daraus folgt

$$|MP| \cdot |MP_1| = |MS|^2$$

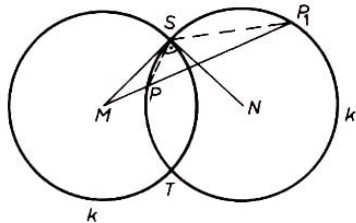


Abb. L.6.60

Beweis: Für $P = S$ ist die Behauptung wegen $P_1 = S$ richtig; für $P \neq S$ ist nach dem Sehnentangentensatz $\angle MSP \cong \angle MP_1S$, $\angle MSP_1 \cong \angle MPS$ und $\angle SMP \cong \angle P_1MS$, also $\triangle MSP \sim \triangle MP_1S$ und mithin

$$|MP| : |MS| = |MS| : |MP_1|$$

Da M außerhalb von k_1 liegt, liegen P und P_1 auf demselben von M ausgehenden Strahl, und es gilt $|MP||MP_1| = |MS|^2$, so dass nach Definition P_1 Spiegelpunkt von P bezüglich k ist.

Ist P_1 Spiegelpunkt von P , so ist P Spiegelpunkt von P_1 . Daher gibt es zu jedem Punkt P_1 auf k_1 einen Punkt P auf k_1 , zu dem P_1 Spiegelpunkt ist. Der gesuchte geometrische Ort ist somit der Kreis k_1 .

L.6.61

a) Man zeichne durch P die Sehne, die auf PM senkrecht steht. Die Tangenten an k in den Endpunkten A, B dieser Sehne schneiden sich im Punkt P' . Da $P \neq M$ ist, ist AB nicht Durchmesser von k , die Tangenten in den Punkten A und B sind daher nicht parallel, schneiden einander also in einem Punkt P' .

Dieser liegt aus Symmetriegründen auf dem Strahl MP . Da nach dem Lehrsatz des Euklid $|MP||MP'| = r^2$ gilt, ist P' der Spiegelpunkt von P bezüglich k .

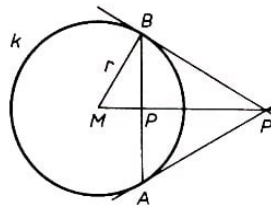


Abb. L.6.61

b) Es sei ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem (x, y) so gewählt, dass sein Ursprung in M liegt und dass der Mittelpunkt des Kreises k_1 ein Punkt $M_1(x_0, 0)$ der positiven x -Achse wird. Der Radius von k_1 sei a . Dann gilt $0 < a < x_0$. Nach Definition der Spiegelung bestehen zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes $P \neq M$ und den Koordinaten x', y' seines Spiegelpunktes P' die Beziehungen

$$x^2 + y^2 = \frac{r^4}{x'^2 + y'^2} \quad \text{und} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

also

$$x = \frac{x' \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}$$

Nun ist für alle Punkte $P(x, y)$ von k_1 und nur für diese

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2 \quad , \quad x^2 + y^2 - 2xx_0 + x_0^2 - a^2 = 0$$

Daher gilt für alle Punkte $P'(x', y')$ von k_1 und nur für diese

$$\frac{r^4}{x'^2 + y'^2} - \frac{2r^2 x_0 x'}{x'^2 + y'^2} + x_0^2 - a^2 = 0$$

Wegen $x_0^2 - a^2 \neq 0$ und $x'^2 + y'^2 \neq 0$ für alle P' auf k'_1 ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{r^4}{x_0^2 - a^2} - \frac{2r^2 x_0 x'}{x_0^2 - a^2} + x'^2 + y'^2 = 0$$

d.h. mit

$$\left(x' - \frac{r^2 x_0}{x_0^2 - a^2}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{r^2 a}{x_0^2 - a^2}\right)^2$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M_1 \left(\frac{r^2 x_0}{x_0^2 - a^2}, 0\right)$ und dem Radius $\frac{r^2 a}{x_0^2 - a^2}$. Dieser Kreis ist somit die gesuchte Bildkurve k'_1 . Man kann M_1 (und damit k'_1) als Mittelpunkt der Bildpunkte $\left(\frac{r^2}{x_0 - a}, 0\right)$, $\left(\frac{r^2}{x_0 + a}, 0\right)$ der beiden Punkte $(x_0 - a, 0)$, $(x_0 + a, 0)$ nach a) konstruieren.

L.6.62

a) Siehe Abb. L.6.62.

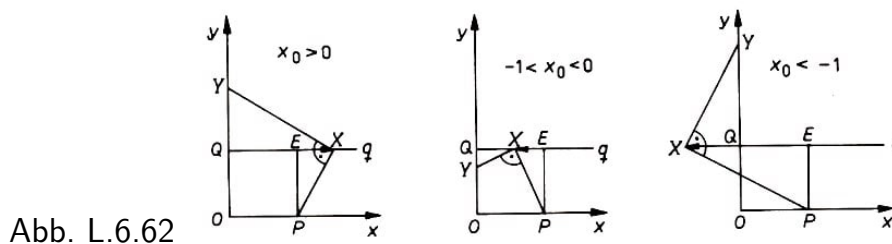


Abb. L.6.62

Nach Konstruktion haben die gerichteten Strecken $|QE|$, $|EX|$ die Längen 1 bzw. x_0 ; also hat die gerichtete Strecke $|QX|$ die Länge $1 + x_0$.

Für $x_0 \neq 0, -1$ zeigen wir, dass $\triangle EPX$ gleichsinnig ähnlich zu $\triangle QXY$ ist. Ist nämlich $x_0 > 0$ bzw. $x_0 < -1$, so liegt E zwischen Q und X bzw. Q zwischen X und E , also liegt in beiden Fällen Q zwischen O und Y . Es gilt

$$|\angle EPX| = 90^\circ - |\angle EXP| = |\angle QXY|$$

die Dreiecke stimmen also in den rechten Winkeln bei E bzw. Q und in den spitzen Winkeln bei P bzw. X überein. Beim Umlaufen von $\triangle EPX$ und $\triangle QXY$ in der angegebenen Reihenfolge der Ecken wird der gemeinsame Teil der Strecken XE und QX in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf verschiedenen Seiten von q , woraus die gleichsinnige Ähnlichkeit folgt.

Ist aber $-1 < x_0 < 0$, so liegt X zwischen Q und E und daher Y auf dem Strahl aus Q durch O . Es gilt

$$|\angle EPX| = 90^\circ - |\angle EXP| = 180^\circ - 90^\circ - |\angle EXP| = |\angle OXY|$$

die Dreiecke stimmen also wieder in den oben erwähnten Winkeln überein. Bei dem angegebenen Umlaufsinn wird der gemeinsame Teil von XE und QX in gleicher Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf derselben Seite von q . Somit gilt, wenn $x_0 \neq 0, -1$ ist, für die Länge q_0 , der gerichteten Strecke QY , die Proportion

$$1 : x_0 = (1 + x_0) : q_0 \quad \text{also} \quad q_0 = (x_0 + 1)x_0 \quad (1)$$

Für $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = -1$ gilt $X = E$ bzw. $X = Q$ und daher in beiden Fällen $Y = Q$, also $q_0 = 0$, d.h. ebenfalls (1). Daher hat Y in jedem Fall die Ordinate

$$1 + q_0 = x_0^2 + x_0 + 1$$

b) Angenommen, x_0 wäre eine reelle Nullstelle von f . Dann führte das mit dem entsprechenden Punkt X ausgeführte Verfahren auf $Y = O$, also $|\angle PXO| = 90^\circ$. Daher läge nach der Umkehrung des Satzes von Thales X auf dem Kreis mit OP als Durchmesser. Das ist aber ein Widerspruch, da dieser Kreis keinen Punkt mit q gemeinsam hat.

L.6.63

Der Abstand eines Punktes $P(x, y)$ von der Geraden g ist gleich dem Abstand zwischen P und dem auf g liegenden Punkt mit gleicher Abszisse wie P , d.h. dem Punkt $Q(x, -1)$, da g parallel zur Abszissenachse verläuft. Dieser Abstand beträgt

$$\sqrt{(y+1)^2} = |y+1|$$

Der Abstand zwischen P und F beträgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Nun gilt: Hat ein Punkt $P(x, y)$ von g denselben Abstand wie von F , so folgt $|y+1| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, d.h.

$$(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

also liegt P auf p .

Die genannten Schlüsse lassen sich umkehren (oder auch sogleich als Äquivalenz formulieren). Damit ist die Behauptung bewiesen.

L.6.64

Die Bedingung, nicht parallel zur y -Achse zu verlaufen, wird genau dann von einer Geraden erfüllt, wenn sie eine Gleichung der Form $y = mx + b$ hat. Jede Gerade mit einer solchen Gleichung hat genau dann gemeinsame Punkte mit der Parabel $y = x^2$, wenn die Gleichung

$$x^2 - mx - b = 0 \tag{1}$$

reelle Lösungen besitzt, und zwar sind die Lösungen dann die Abszissen der gemeinsamen Punkte. Daher erfüllen m, b genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die Gleichung (1) genau die Lösung $x = 3$ besitzt, also genau dann, wenn (1) die Form $(x-3)^2 = 0$ hat, d.h. $m = 6$ und $b = -9$ ist. Demnach erfüllt genau die Gerade $y = 6x - 9$ die Bedingungen der Aufgabe.

L.6.65

Da A und B auf der ersten Parabel liegen, müssen ihre Koordinaten die Gleichung $y = x^2$ erfüllen. Da beide Parabeln symmetrisch zur y -Achse liegen, müssen A und B symmetrisch zu dieser Achse liegen; B sei der im ersten Quadranten gelegene unter diesen beiden Punkten. Weiter müssen auch A_1 und B_1 symmetrisch zur y -Achse liegen, d. h., der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Strecke A_1B_1 .

Da ferner nach Voraussetzung $|A_1B_1| = |BB_1|$ ist, gilt für die Koordinaten (x_1, y_1) des Punktes B die Beziehung $y_1 = 2x_1$. Aus dem Gleichungssystem

$$y_1 = x_1^2, \quad y_1 = 2x_1 \tag{1,2}$$

erhält man $x_1 = 2$ und $y_1 = 4$.

Die zweite Lösung des Gleichungssystems, $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$, entfällt, da auf der Symmetrieachse der zweiten Parabel kein Punkt außer dem Scheitelpunkt liegen kann. Also gilt $B = (2, 4)$ und damit $A = (-2, 4)$.

Da die zweite Parabel den Scheitelpunkt $S = (0, 6)$ hat, lautet ihre Funktionsgleichung $y = ax^2 + 6$, mit einer geeigneten reellen Zahl a . Diese Gleichung muss durch die Koordinaten von B erfüllt werden. Daher erhält man $4 = 4a + 6$ und daraus $a = -\frac{1}{2}$. Die zweite Parabel ist mithin der Graph der Funktion, deren Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ lautet.

Ihre Nullstellen erhält man daher aus der Beziehung $-\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0$. Sie lauten $x_{01} = \sqrt{12}$ und $x_{02} = -\sqrt{12}$. Die gesuchten Schnittpunkte der zweiten Parabel mit der x -Achse haben demnach die Koordinaten $(\sqrt{12}, 0)$ und $(-\sqrt{12}, 0)$.

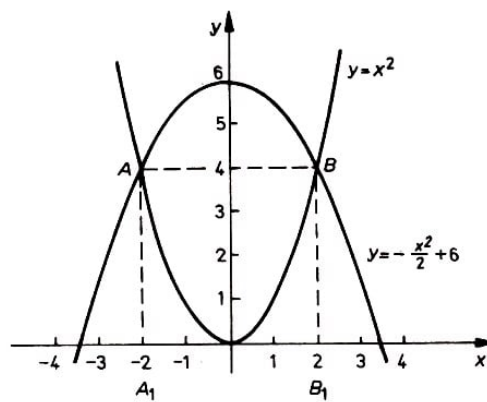


Abb. L.6.65

L.6.66

Es seien x, y, u, v rationale Zahlen so, dass der Punkt $P(x, y)$ und der Punkt $O(u, v)$ auf derselben Kreislinie der Schar liegen. Zu zeigen ist dann $P = Q$, d.h. $x = u$ und $y = v$.

Hierzu sei der Radius des genannten Kreises mit r bezeichnet. Dann gelten die Gleichungen

$$r^2 = (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2, \quad r^2 = (u - \sqrt{2})^2 + (v - \sqrt{3})^2$$

und damit auch die Gleichung

$$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = (u - \sqrt{2})^2 + (v - \sqrt{3})^2$$

Nach einer einfachen Umformung erhält man dann

$$x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 2(x - u)\sqrt{2} + 2(y - v)\sqrt{3}$$

Nach Voraussetzung ist die linke Seite dieser Gleichung eine rationale Zahl ρ . Ebenso sind $c = 2(x - u)$ und $d = 2(y - v)$ rational. Aus $c\sqrt{2} + d\sqrt{3} = \rho$ folgt

$$2c^2 + 3d^2 + 2cd\sqrt{6} = \rho^2 \quad (1)$$

Da $\sqrt{6}$ keine rationale Zahl ist, kann (1) nur für $cd = 0$ erfüllt sein. Somit ist entweder $c = 0$ und damit $3d^2 = \rho^2$ bzw. $d\sqrt{3} = \rho$, woraus $d = 0$ folgt, oder $d = 0$ und damit $2c^2 = \rho^2$ bzw. $c\sqrt{2} = \rho$, woraus $c = 0$ folgt.

Damit hat sich in beiden Fällen $c = d = 0$ ergeben. Das besagt aber $x = u$ und $y = v$.

L.6.67

Ein Punkt $Z(x, y)$ gehört genau dann der Menge \mathfrak{M} an, wenn für ihn $d(Z, A) = d(Z, B)$ oder, hiermit gleichwertig,

$$\max(|x|, |y - 2|) = \max(|x - 1|, |y - 4|) \quad (1)$$

gilt.

Fallunterscheidung:

a) Es sei $|x| \geq |y - 2|$, $|x - 1| \geq |y - 4|$. Aus (1) folgt dann $|x| = |x - 1|$, d.h. $x = \frac{1}{2}$. Mithin erhält man das Ungleichungssystem $|y - 2| \leq \frac{1}{2}$, $|y - 4| \leq \frac{1}{2}$ also

$$1,5 \leq y \leq 2,5 \quad , \quad 3,5 \leq y \leq 4,5$$

Diese Ungleichungen widersprechen aber einander.

b) Es sei $|x| \geq |y - 2|$, $|x - 1| < |y - 4|$. Dann ist (1) gleichbedeutend mit $|x| = |y - 4|$, also mit $y = x + 4$ oder $y = -x + 4$.

Für $y = x + 4$ ergibt sich das Ungleichungssystem $|x| \geq |x + 2|$, $|x - 1| < |x|$, also

$$x \leq -1 \quad , \quad x > 0,5$$

Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander.

Für $y = -x + 4$ sind die Bedingungen des Falles b) gleichbedeutend mit dem Ungleichungssystem $|x| \geq |-x + 2|$, $|x - 1| < |x|$, also mit

$$x \geq 1 \quad , \quad x > 0,5$$

und folglich mit $x \geq 1$.

Zur Menge \mathfrak{M} gehören daher unter den Bedingungen des Falles b) genau diejenigen Punkte, die auf dem Teil der Geraden $y = -x + 4$ liegen, für den $x \geq 1$ gilt.

c) Es sei $|x| < |y - 2|$, $|x - 1| \geq |y - 4|$. Dann ist (1) gleichbedeutend mit $|x - 1| = |y - 2|$, also $y = x + 1$ oder $y = -x + 3$.

Für $y = x + 1$ ergibt sich das Ungleichungssystem $|x| < |x - 1|$, $|x - 1| \geq |x - 3|$, also

$$x < 0,5 \quad , \quad x \geq 2$$

Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander.

Für $y = -x + 3$ sind die Bedingungen des Falles c) gleichbedeutend mit dem Ungleichungssystem $|x| < |-x + 1|$, $|x - 1| \geq |-x - 1|$, also mit

$$x < 0,5 \quad , \quad x \leq 0$$

d.h. mit $x \leq 0$.

Zur Menge \mathfrak{M} gehören daher unter den Bedingungen des Falles c) genau diejenigen Punkte, die auf dem Teil der Geraden $y = -x + 3$ liegen, für den $x \leq 0$ gilt.

4) Es sei $|x| < |y-2|$, $|x-1| < |y-4|$. Dann ist (1) gleichbedeutend mit $|y-2| = |y-4|$, also mit $y = 3$. Hierfür sind die Bedingungen des Falles d) gleichbedeutend mit dem Ungleichungssystem $|x| < 1$, $|x-1| < 1$, also mit $1 < x < 1$, $0 < x < 2$ und folglich mit $0 < x < 1$. Zur Menge \mathfrak{M} gehören daher unter den Bedingungen des Falles d) genau diejenigen Punkte, die auf dem Teil der Geraden $y = 3$ liegen, für den $0 < x < 1$ gilt.

Zusammenfassung: Zur Menge \mathfrak{M} gehören genau alle Punkte $Z(x, y)$ mit $x \leq 0$, $y = -x + 3$ oder $0 < x < 1$, $y = 3$ oder $x \geq 1$, $y = -x + 4$

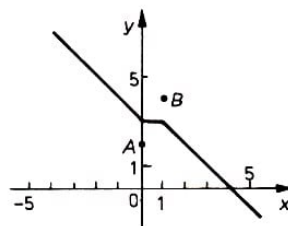


Abb. L.6.67

L.6.68

Angenommen, für einen Punkt P seien $|AP| = a$ und $|BP| = b$ ganzzahlig. Wegen $|AB| = 1$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung $a - 1 \leq b \leq a + 1$.

Ist $a - 1 = b$ oder $b = a + 1$, so bilden A, B, P kein Dreieck, sondern es gibt eine Gerade, die A, B und P enthält; dann liegt also P auf der x -Achse.

Ist $a - 1 < b < a + 1$, so folgt, da a, b ganzzahlig sind, $a = b$. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von AP , d. h. auf der y -Achse. Hieraus folgt bereits die Behauptung b), da unter den Punkten P_i , einer Menge mit den Eigenschaften I und II höchstens zwei Punkte auf der x -Achse und höchstens zwei Punkte auf der y -Achse auftreten können.

Um a) nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel anzugeben. Dies kann man folgendermaßen finden:

Für einen Punkt $(x, 0)$ auf der x -Achse sind

$$|AP| = \left| x + \frac{1}{2} \right| \quad \text{und} \quad |BP| = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

genau dann ganzzahlig, wenn $x - \frac{1}{2} = m$ ganzzahlig ist, also

$$x = m + \frac{1}{2} \tag{1}$$

mit ganzem m gilt. Für einen Punkt $(0, y)$ auf der y -Achse ist

$$|AP| = |BP| = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = n$$

genau dann ganzzahlig, wenn

$$y = \pm \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} \quad (2)$$

mit ganzem n gilt.

Daher erhält man z. B. dadurch vier derartige Punkte, dass man $(x, 0)$ mit x aus (1) für $m = -1$ und $m = 0$ sowie $(0, y)$ mit y aus (2) für $n = 1$ wählt. In diesem Fall ergeben sich die Punkte

$$P_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = A, \quad P_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) = B, \quad P_3\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \quad P_4\left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

Diese erfüllen nach dem eben Gezeigten die Bedingung I. Sie erfüllen aber auch die Bedingung II; denn unter je dreien von ihnen gibt es zwei, deren Verbindungsgerade eine Koordinatenachse ist, die nicht durch den dritten geht.

L.6.69

Wegen $|x| = |-x|$ und $|y| = |-y|$ ist die zur Veranschaulichung gesuchte Punktmenge zu beiden Koordinatenachsen symmetrisch. Wir ermitteln zunächst diejenigen unter den gesuchten Punkten, für die $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt. Für diese Punkte ist die verlangte Gleichung äquivalent mit $|x + |y - 3| - 3| = 1$. Dies gilt genau dann, wenn

$$x + |y - 3| - 3 = 1 \quad \text{oder} \quad -(x + |y - 3| - 3) = 1 \quad (1,2)$$

gilt. Gleichung (1) ist äquivalent mit $|y - 3| = 4 - x$. Dies gilt genau dann, wenn

$$y - 3 = 4 - x \geq 0 \quad \text{oder} \quad -(y - 3) = 4 - x \geq 0 \quad (3,4)$$

gilt. Gleichung (2) ist äquivalent mit $|y - 3| = 2 - x$. Dies gilt genau dann, wenn

$$y - 3 = 2 - x \geq 0 \quad \text{oder} \quad -(y - 3) = 2 - x \geq 0 \quad (5,6)$$

gilt.

Unter den Punkten mit $x, y \geq 0$ erfüllen genau diejenigen die Bedingung (3), für die

$$0 \leq x \leq 4, \quad y = 7 - x \quad (7)$$

gilt, genau diejenigen die Bedingung (4), für die $0 \leq y \leq 3$, $x = y + 1$ oder, gleichbedeutend hiermit,

$$1 \leq x \leq 4, \quad y = x - 1 \quad (8)$$

gilt; genau diejenigen die Bedingung (5), für die

$$0 \leq x \leq 2, \quad y = 5 - x \quad (9)$$

gilt; genau diejenigen die Bedingung (6), für die

$$0 \leq x \leq 2, \quad y = x + 1 \quad (10)$$

gilt.

Die Abb. L.6.69 stellt für jede der bei (7) bis (10) in den angegebenen Intervallen definierten Funktionen den Graphen dar sowie die aus der Vereinigungsmenge \mathfrak{M} der Graphen durch Spiegelung an der x -Achse entstehende Menge \mathfrak{M}' sowie die aus $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'$ durch Spiegelung an der y -Achse entstehende Menge \mathfrak{M}'' .

Mit der graphischen Darstellung der Menge $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}''$ ist die gesuchte Veranschaulichung gefunden.

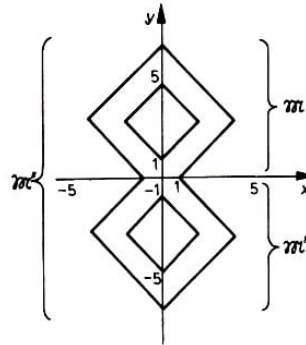


Abb. L.6.69

L.6.70

a) Die Menge \mathfrak{M}_1 M, besteht aus allen Punkten der in Abb. L.6.70 schraffierten Dreiecksfläche einschließlich der Randpunkte. Die Mengen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ bestehen jeweils aus allen im Innern der gezeichneten Rechtecke gelegenen Punkten (also ohne die jeweiligen Randpunkte).

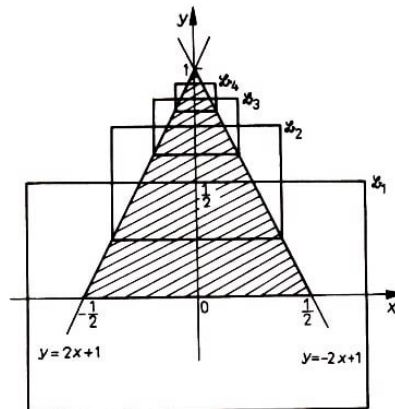


Abb. L.6.70

b) Wegen (*) gilt $P_1(0,1) \in \mathfrak{M}_1$. Die Abstände der oberen Seiten der die \mathfrak{B}_n enthaltenden Rechtecke von der x -Achse sind:

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Für alle $n = 1, 2, \dots$ gilt $a_n < 1$, also $P_1 \notin \mathfrak{B}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Der Punkt $(0, 1)$ gehört zu \mathfrak{M}_1 , da er die Ungleichungen (*) erfüllt, wie man aus $0 \leq 1$, $1 - 2 \cdot 0 \leq 1$, $1 + 2 \cdot 0 \leq 1$ ersieht.

Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1, 2, \dots$ in \mathfrak{B}_n enthalten, da für jedes $n = 1, 2, \dots$ die Beziehung $1 > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (**) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

c1) Wir zeigen: Ist $n_0 \leq 9$ eine positive ganze Zahl, so hat sie nicht die Eigenschaft, dass jedes Element von \mathfrak{M}_2 auch Element von $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{n_0}$ ist.

Beweis: Zu \mathfrak{M}_2 gehört auch der Punkt $(0, \frac{999}{1000})$, da er die Ungleichungen (*), (****) erfüllt, wie man aus

$$1 - \frac{1}{1000} \geq 0, 1 - \frac{1}{1000} - 2 \cdot 0 \leq 1, 1 - \frac{1}{1000} + 2 \cdot 0 \leq 1, 1 - \frac{1}{1000} \leq 1 - \frac{1}{1000}$$

ersieht.

Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1, \dots, n_0$ in \mathfrak{B}_n enthalten, da für jedes $n = 1, \dots, n_0$ die Beziehung $1 - \frac{1}{1000} > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (**) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

c2) Wir zeigen: Ist n_1 eine ganze Zahl ≥ 10 , so hat sie die Eigenschaft, dass jedes Element von \mathfrak{M}_2 auch Element von $\mathfrak{B}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{n_1}$ ist.

Beweis: Ist (x, y) ein Punkt aus \mathfrak{M}_2 , so erfüllt er die Ungleichungen (*), (****). Daraus folgt

$$\frac{1}{1000} \leq 1 - y \leq 1 \quad \text{also erst recht} \quad \frac{1}{2^{n_1}} < 1 - y \leq 1$$

Wegen $1 > \frac{1}{2^1} > \frac{1}{2^2} > \dots > \frac{1}{2^{n_1}}$ gibt es somit unter den Zahlen $n = 1, \dots, n_1$ eine, für die

$$\frac{1}{2^n} < 1 - y \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

gilt. Für diese ist dann erst recht

$$\frac{1}{2^n} < 1 - y < \frac{3}{2^n} \quad \text{also} \quad 1 - \frac{3}{2^n} < y < 1 - \frac{1}{2^n}$$

ferner wegen der letzten beiden Ungleichungen aus (*) auch

$$y - 1 \leq 2x \leq 1 - y \quad \text{also} \quad -\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}}$$

und somit insgesamt $(x, y) \in \mathfrak{B}_n$, womit die Behauptung

$$(x, y) \in \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{n_1}$$

gezeigt ist.

c3) Aus c2) folgt die zu beweisende Existenz einer Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft; aus c1) und c2) folgt, dass die gesuchte kleinste Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft die Zahl $n_1 = 10$ ist.

L.6.71

a) Wir definieren $n + 1$ Punkte Q_0, Q_1, \dots, Q_n : Erstens sei Q_0 ein beliebiger Punkt. Ist zweitens für ein $k = 1, \dots, n$ schon Q_{k-1} definiert, so sei Q_n das Bild von P_k , das sich ergibt, wenn man die Strecke MP_k parallel verschiebt, so dass M auf Q_{k-1} fällt. Dann gilt:

Behauptung:

$$|\angle Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}| = 180^\circ - |\angle P_kMP_{k+1}| \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

Beweis: Es sei R_{k+1} das Bild von P_{k+1} , das sich ergibt, wenn man die Strecke MP_{k+1} parallel verschiebt, so dass M auf P_k fällt. Dann ist einerseits das Dreieck $\triangle Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}$ aus dem Dreieck $\triangle MP_kP_{k+1}$ durch Parallelverschiebung hervorgegangen, also $|\angle Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}| = |\angle MP_kR_{k+1}|$; $P_{k+1}MP_kR_{k+1}$ ist andererseits ein Parallelogramm, also $|\angle MP_kR_{k+1}| = 180^\circ - |\angle P_kMP_{k+1}|$.

Behauptung 2: Jeder der Winkel $|\angle Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}|$ ($k = 1, \dots, n-1$) ist einem Innenwinkel eines regelmäßigen n -Ecks kongruent; jede der Strecken $Q_{k-1}Q_k$ ($k = 1, \dots, n$) hat die gleiche Länge.

Beweis: Der zweite Teil der Behauptung 2 folgt aus der Definition der Parallelverschiebung und der Längengleichheit der MP_k ; der erste folgt so:

Im regelmäßigen n -Eck $P_1P_2\dots P_n$ gilt

$$\begin{aligned} |\angle P_{k-1}P_kP_{k+1}| &= 2|\angle MP_kP_{k+1}| = |\angle MP_kP_{k+1}| + |\angle MP_{k+1}P_k| \\ &= 180^\circ - |\angle P_kMP_{k+1}| = |\angle Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}| \end{aligned}$$

(siehe Behauptung 1).

Satz: Konstruiert man dasjenige regelmäßige n -Eck $S_1S_2\dots S_n$, dessen erste drei Ecken $S_0 = Q_0$, $S_1 = Q_1$, $S_2 = Q_2$ sind, so gilt $S_k = Q_k$ ($k = 0, \dots, n-1$) und $(Q_0 =)S_0 = Q_n$.

Beweis: Aus der Behauptung 2 über Q_0 , Q_1 , Q_2 folgt zunächst, dass das genannte regelmäßige n -Eck mit dem Beginn $Q_0Q_1Q_2\dots$ konstruiert werden kann.

Aus der Richtigkeit von $S_0 = Q_0, \dots, S_{k-1} = Q_{k-1}$ folgt aus der Behauptung 2 über Q_{k-2}, Q_{k-1}, Q_k , dass $S_k = Q_k$ ist, wobei man sich für k jede der Zahlen $3, \dots, n-1$ eingesetzt denken darf. Damit ist gezeigt, dass $S_k = Q_k$ ($k = 0, \dots, n-1$) gilt.

Hiernach schließlich ist $Q_0Q_1\dots Q_{n-1}$ ein regelmäßiges n -Eck, weshalb aus der Behauptung 2 über Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n auch $S_0 = Q_n$ folgt.

Mit dem Beweis des Satzes ist der in a) geforderte Nachweis erbracht.

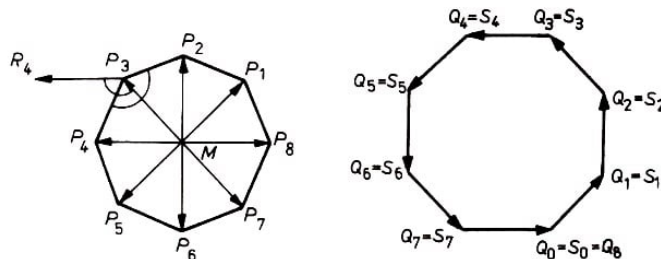


Abb. L.6.71

b) Führt man ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem ein, in dem M der Ursprung und durch $\overrightarrow{MP_n}$ die positive x -Achsenrichtung festgelegt ist, so folgt aus der Aussage a) die Aussage

$$\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} + \dots + \overrightarrow{MP_n} = \vec{0} \quad (\text{vektorielle Gleichung, 1})$$

Für den Vektor $\overrightarrow{MP_k}$ gilt

$$\overrightarrow{MP_k} = r \left(\cos \frac{2\pi k}{n} \mathbf{i} + \sin \frac{2\pi k}{n} \mathbf{j} \right)$$

(r Radius des Umkreises, \mathbf{i} und \mathbf{j} Achseneinheitsvektoren). Setzt man diese Beziehung in (1) ein und setzt man die Koordinaten der beiden Seiten einzeln gleich, so erhält man die Behauptung.

Ergänzung zu b): Die Behauptung folgt (bei Voraussetzung der entsprechenden Kenntnisse über algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen) aus der Betrachtung der n -ten Einheitswurzeln, d.h. der n Lösungen der Gleichung $x^n - 1 = 0$. Ihre Summe ist gleich null, da der Koeffizient von x^{n-1} gleich null ist (Satz von Vieta). Die Summen ihrer Real- und Imaginärteile ist daher ebenfalls null, womit (*) und (**) bewiesen sind.

L.6.72

In der Beziehung $c_n \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} c_2$ gilt genau dann das obere, mittlere bzw. untere Zeichen, wenn dies in den folgenden Beziehungen der Fall ist:

$$\begin{aligned} (x - ny)^2 &\begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} (x - (n+1)y)^2 \\ x^2 - 2nxy + n^2y^2 &\begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} x^2 - 2nxy + 2xy + n^2y^2 + 2ny^2 + y^2 \\ 2xy - y^2 &\begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} 2ny^2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

Ist $\frac{2xy-y^2}{2y^2} < 1$, so ist für alle $n = 1, 2, \dots$ auch $\frac{2xy-y^2}{2y^2} < n$, also $c_n < c_{n-1}$. Die Folge ist streng monoton steigend.

Ist $\frac{2xy-y^2}{2y^2} \geq 1$, so gibt es eine ganze Zahl $n_0 \geq 1$ mit

$$n_0 \leq \frac{2xy - y^2}{2y^2} < n_0 + 1$$

Für $n = 1, \dots, n_0$ gilt dann $\frac{xy-y^2}{2y^2} \geq n$, also $c_n \geq c_{n+1}$; für $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ gilt dagegen $\frac{2xy-y^2}{2y^2} < n$, also $c_n < c_{n+1}$. Die Folge ist nicht streng monoton; sie hat die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n > n_0$.

Schließlich gilt in der Beziehung $\frac{2xy-y^2}{2y^2} \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} 1$ dasselbe Zeichen wie in $2xy \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} 3y^2$. Daher ergibt sich insgesamt:

- Die Folge ist genau dann streng monoton steigend, wenn $2xy < 3y^2$ gilt.
- Die Folge ist für keine Vorgabe von x, y streng monoton fallend.
- Die Folge ist genau dann nicht monoton, wenn $2xy \geq 3y^2$ gilt, und dann hat sie mit der durch (1) gekennzeichneten natürlichen Zahl n_0 die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n > n_0$.

Zusatzbemerkung: Übrigens lässt sich die Fallunterscheidung geometrisch interpretieren. Fall a) liegt genau dann vor, wenn für $x = \overrightarrow{OX}$ und $y = \overrightarrow{OY}$ der Punkt X auf derselben Seite der mittelsenkrechten Ebene der Strecke OY wie O liegt.

16 Lösungen - Geometrie im Raum

L.7.1

Die Punkte A, D, S liegen in einer Ebene ε' , die auf der Ebene ε durch A, B, C und D senkrecht steht; denn nach Voraussetzung ist $AD \perp AB$ und, falls $S \neq A$ ist, auch $SA \perp AB$. Im Fall $S = A$ sei ε' die zu ε senkrechte Ebene durch A und D . Daher ist in jedem Fall $CD \perp \varepsilon'$ und somit $|\angle CDS| = 90^\circ$.

L.7.2

Man betrachte die Ebene ε , in der die Gerade g und der Punkt A liegen. Man drehe die Ebene, die g und B enthält, so um g , dass das Bild B' von B nach dieser Drehung in der Ebene ε liegt, und zwar so, dass B' nicht auf derselben Seite von g wie A liegt.

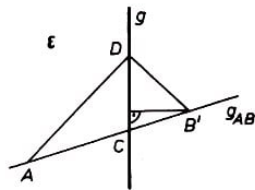


Abb. L.7.2

Der gemeinsame Punkt C der Strecke AB' und der Geraden g ist ein Punkt der geforderten Art, und zwar der einzige.

Beweis: D sei ein beliebiger Punkt der Geraden g . Dann ist $|DB| = |DB'|$. Daher gilt auch

$$|AD| + |DB| = |AD| + |DB'|$$

Nun ist $|AD| + |DB'| \geq |AC| + |CB'|$ (Dreiecksungleichung), und hierin gilt das Gleichheitszeichen genau für $D = C$. Wegen $|CB'| = |CB|$ erhält man hieraus

$$|AD| + |DB| + |BA| \geq |AC| + |CB| + |BA|$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für $D = C$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

L.7.3

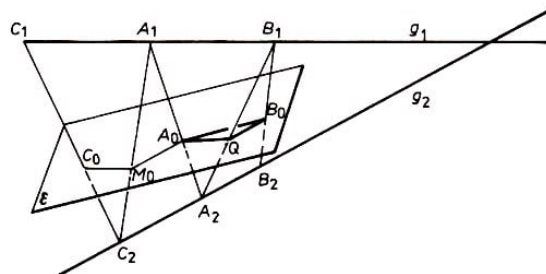


Abb. L.7.3

Auf g_1 bzw. g_2 seien je zwei Punkte $A_1 \neq B_1$ bzw. $A_2 \neq B_2$ beliebig gewählt. Die Punkte, die die Strecken A_1A_2, B_1B_2 bzw. A_1B_2 im erwähnten Verhältnis innen teilen, seien mit A_0, B_0 bzw. Q bezeichnet, woraus $Q \neq A_0$ und $Q \neq B_0$ folgt. Nach der Umkehrung eines der Strahlensätze folgt aus der Gleichheit der Teilverhältnisse

$$A_0Q \parallel g_1 \quad \text{und} \quad QB_0 \parallel g_2 \quad (1)$$

Aus $g_1 \nparallel g_2$ folgt jetzt $A_0Q \nparallel QB_0$ und damit $A_0 \neq B_0$. Daher liegt Q nicht auf der Geraden durch A_0 und B_0 ; denn anderenfalls wäre $g_1 \parallel g_2$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Also bestimmen A_0 , B_0 und Q eine Ebene ε , die zu g_1 und g_2 parallel liegt.

Nun seien C_1 auf g_1 und C_2 auf g_2 beliebig liegende Punkte. Der innere Teilpunkt von C_1C_2 mit dem erwähnten Teilverhältnis sei C_0 , der von A_1C_2 sei M_0 . Analog zum ersten Teil des Beweises folgt $M_0A_0 \parallel g_2$ und $C_0M_0 \parallel g_1$. Daher ergibt sich

$$M_0A_0 \parallel B_0Q \quad \text{sowie} \quad C_0M_0 \parallel QA_0$$

Also gehören mit A_0 auch M_0 und mit M_0 auch C_0 zu ε . Daraus folgt: Alle Punkte, die die Verbindungsstrecke eines Punktes auf g_1 mit einem Punkt auf g_2 in ein und demselben Verhältnis innen teilen, gehören zu ε .

C_0 sei beliebiger Punkt auf ε . Die Parallele h_1 durch C_0 zu g_1 und die Parallele h_2 durch A_0 zu g_2 sind in ε gelegen und einander nicht parallel. Sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der mit M_0 bezeichnet sei. Die durch A_1, A_2 und g_2 bestimmte Ebene enthält A_2 und damit A_0 , also h_2 und folglich M_0 . Damit schneiden sich die Geraden durch A_1 und M_0 , und die Gerade g_2 in genau einem Punkt, der mit C_2 bezeichnet sei.

Ebenso (mit $C_2, A_1, M_0, C_0, g_1, h_1$ statt $A_1, A_2, A_0, M_0, g_2, h_2$) folgt, dass sich die Gerade durch C_2 und C_0 und die Gerade g_1 in genau einem Punkt schneiden, der mit C_1 bezeichnet sei. Dann folgt der Reihe nach, dass auch A_1C_2 durch M_0 und C_1C_2 durch C_0 innen im erwähnten Verhältnis geteilt werden.

Damit gehört jeder Punkt von ε zum geometrischen Ort. Also ist der gesuchte geometrische Ort die zu g_1 und g_2 parallele Ebene ε .

L.7.4

Zur Vereinfachung der Darstellung wird die Schreibweise: Punkt + Vektor = Punkt benutzt. Für den Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ gilt

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(10-3)^2 + (8-4)^2 + 4^2} = 9$$

Zwei Punkte P_3 und P_4 , die der Aufgabenstellung genügen, existieren genau dann, wenn ein Vektor $\overrightarrow{P_1P_4}$ mit ganzrationalen Koordinaten existiert, für den

$$|\overrightarrow{P_1P_4}| = 9 \quad , \quad \overrightarrow{P_1P_4} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0 \quad (1,2)$$

ist. Denn existieren P_3, P_4 , so hat $\overrightarrow{P_1P_4}$ die genannten Eigenschaften, und existiert umgekehrt $\overrightarrow{P_1P_4}$, so erhält man mit

$$P_4 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_4} \quad \text{und} \quad P_3 = P_2 + \overrightarrow{P_1P_4} \quad (3)$$

zwei Punkte, die offensichtlich der Aufgabenstellung genügen. Angenommen, der Vektor

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit ganzrationalen } x, y, z \text{ erfülle die Bedingungen (1) und (2): dann}$$

erhält man das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 \quad , \quad 7x + 4y + 4z = 0 \quad (4)$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt

$$z = -\left(y + \frac{7}{4}x\right) \quad , \quad x^2 + y^2 + \left(y + \frac{7}{4}x\right)^2 = 81 \quad (5)$$

also

$$y^2 = \frac{7}{4}xy + \frac{65}{32}x^2 - \frac{81}{2} = 0$$

woraus man

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= -\frac{7}{8}x \pm \sqrt{\frac{49}{64}x^2 - \frac{65}{32}x + \frac{81}{2}} = \frac{1}{8}(-7x \pm \sqrt{81 \cdot 32 - 81x^2}) \\ &= \frac{1}{8}(-7x \pm 9\sqrt{32 - x^2}) \end{aligned}$$

erhält. Da x und y ganzrationale Zahlen sind, folgt aus (6), dass auch $\sqrt{32 - x^2}$ rational und daher $32 - x^2$ eine Quadratzahl ist. Das ist nur für $x_{1,2} = \pm 4$ der Fall. Man erhält daraus für y :

$$y_{11} = 1, \quad y_{21} = -8, \quad y_{12} = 8, \quad y_{22} = -1$$

Aus (5) ergeben sich die zugehörigen Werte für z :

$$z_{11} = -8, \quad z_{21} = 1, \quad z_{12} = -1, \quad z_{22} = 8$$

Durch Einsetzen in das Gleichungssystem (4) bestätigt man, dass diese Werte Lösungen sind. Da sie außerdem ganzrational sind, gibt es mithin genau vier Quadrate, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Aus (3) erhält man ihre Eckpunkte:

$$\begin{aligned} P_{31}(4, 9, -4), \quad P_{32}(14, 0, 5), \quad P_{33}(6, 16, 3), \quad P_{34}(6, 7, 12), \\ P_{41}(0, 5, -8), \quad P_{42}(7, -4, 1), \quad P_{43}(-1, 12, -1), \quad P_{44}(-1, 3, 8) \end{aligned}$$

L.7.5

Die Lösung kann nach dem "Schubfachprinzip" erfolgen. Man denke sich den Würfelkörper durch ebene, zu den Seitenflächen parallele Schnitte in 27 zueinander kongruente Teilwürfelkörper zerlegt. Die Länge der Raumdiagonale jedes dieser Teilwürfel beträgt $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Da wenigstens einer der Teilwürfel zwei verschiedene der 28 Punkte in seinem Innern oder auf seinem Rand enthält, kann der Abstand dieser beiden Punkte mithin nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ sein.

L.7.6

I. Für alle der Aufgabenstellung entsprechenden Punkte X, Y, Z gilt:

Setzt man $|B'X| = x$, $|B'Y| = y$, $|B'Z| = z$, so ist $0 < x, y, z \leq a$. Ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |YZ| = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad |ZX| = \sqrt{z^2 + x^2}$$

Daraus folgt .

$$0 < |XY| + |YZ| + |ZX| \leq 3\sqrt{2}a^2$$

II. Bei der laut Aufgabenstellung zulässigen Wahl $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ ergibt sich $x = y = z = a$, also

$$0 < |XY| + |YZ| + |ZX| = 3\sqrt{2}a^2$$

III. Wählt man zu beliebigen der Aufgabenstellung entsprechenden Punkten X , Y , Z einen ebenfalls der Aufgabenstellung entsprechenden Punkt X^* zwischen B' und X und setzt man $|B'X^*| = x^*$, so ist $0 < x^* < x$, also

$$|X^*Y| + |YZ| + |ZX^*| = \sqrt{x^{*2} + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^{*2}} < |XY| + |YZ| + |ZX|$$

Aus I und II folgt:

- a) Es gibt unter den in der Aufgabe genannten Streckenzügen einen mit größter Länge, nämlich den für $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ entstehenden.
- c) Seine Länge beträgt $3a\sqrt{2}$.

Aus III folgt:

- b) Zu jedem der genannten Streckenzüge gibt es einen mit einer kleineren Länge, d. h., es gibt keinen mit kleinster Länge.

L.7.7

Die vier Raumdiagonalen eines Würfels schneiden sich in einem Punkt. Er sei mit M bezeichnet. Mit M als Spitze und je einer Würfelfläche als Grundfläche gibt es genau sechs vierseitige Pyramiden, die den Würfelkörper vollständig ausfüllen. Diese Pyramiden sind einander kongruent.

Jede der vier Seitenflächen jeder dieser Pyramiden ist in genau einer der sechs in der Aufgabe genannten Schnittebenen enthalten, d. h., jede Pyramide kann nur noch von zwei der gegebenen Ebenen geschnitten werden. Dies wird sie in der Tat, nämlich von denjenigen beiden Schnitten die auf der Grundfläche der Pyramide senkrecht stehen und deren (Flächen-)Diagonalen enthalten.

Sie zerlegen den Pyramidenkörper in vier zueinander volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper. Der Würfelkörper wird daher in 24 Teilkörper zerlegt.

Alle diese Teilkörper sind untereinander volumengleich. Das Volumen jedes einzelnen dieser Teilkörper beträgt daher $\frac{a^3}{24}$.

L.7.8

- a) Die Mittelpunkte der Quadrate $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $ABCD$, $EFGH$ seien in dieser Reihenfolge mit M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 bezeichnet (Abb. L.7.8).

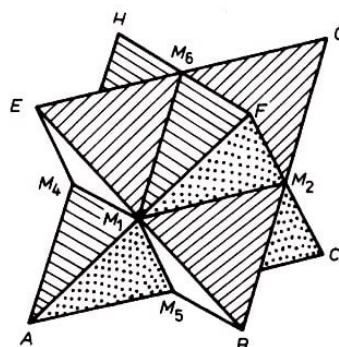


Abb. L.7.8

Jede der acht Schnittebenen geht durch genau drei dieser Mittelpunkte, nämlich von denjenigen Quadraten, die an der Würfecke E bzw. F bzw. G bzw. H bzw. A bzw. B bzw. C bzw. D zusammenstoßen.

Diese drei Mittelpunkte bestimmen je genau eine Seitenfläche des Oktaeders mit den Eckpunkten $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.

Umgekehrt liegt jeder der acht Seitenflächen des Oktaeders in genau einer Schnittebene. Daher ist dieses Oktaeder einer der gesuchten Teilkörper.

Je drei der eben genannten zusammengehörigen Mittelpunkte und die zugehörige Würfecke (etwa M_1, M_6, M_4 und E), sind die Ecken eines Tetraeders. Eine seiner Seitenflächen liegt in der erwähnten Schnittebene; die drei anderen liegen in denjenigen drei Schnittebenen, die durch die betrachtete Würfecke hindurchgehen.

Die verbleibenden vier der acht Schnittebenen verlaufen jeweils außerhalb des betreffenden Tetraeders (jeweils parallel zu einer seiner Seitenflächen; sie bilden ein analog entstandenes Tetraeder an der gegenüberliegenden Würfecke).

Daher sind die Tetraederkörper $AM_1M_4M_5$, $BM_1M_2M_5$, $CM_2M_3M_5$, $DM_3M_4M_5$, $EM_1M_4M_6$, $FM_1M_2M_6$, $GM_2M_3M_6$, $HM_3M_4M_6$ weitere gesuchte Teilkörper.

Mit den bisher gefundenen neun Teilkörpern sind alle diejenigen aufgezählt, die nur von Schnittflächen begrenzt werden (Abb. L.7.8).

Sie entstehen bei gegenseitiger Durchdringung der Tetraeder $ACFH$ und $BDEG$. Der sternförmige Körper, der sich aus ihnen zusammensetzt, wird zum Würfelfkörper ergänzt, indem man für jede Seitenkante des Würfels genau einen weiteren Tetraederkörper hinzufügt, nämlich denjenigen, der die Endpunkte dieser Seitenkante und die Mittelpunkte der an die Seitenkante angrenzenden Quadrate als Eckpunkte hat.

Mit den zwölf Tetraederkörpern ABM_1M_5 , ADM_4M_4 , AEM_1M_4 , BCM_2M_5 , BFM_1M_2 , CDM_3M_5 , CGM_2M_3 , DHM_3M_4 , EFM_1M_6 , EHM_4M_6 , FGM_2M_6 , GHM_3M_6 sind folglich die restlichen aller gesuchten Teilkörper gefunden. Es gibt daher insgesamt 21 Teilkörper.

b) Die zuletzt genannten zwölf Tetraeder sind sämtlich zueinander kongruent. Jedes dieser Tetraeder lässt sich als dreiseitige Pyramide auffassen, deren Grundfläche einen Inhalt von einem Viertel des Flächeninhalts einer Würfelseitenfläche hat. Die jeweils zugehörige Höhe hat dann die Länge $\frac{a}{2}$. Mithin beträgt das Volumen jedes dieser zwölf Tetraederkörper

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{24} a^3$$

Der Oktaederkörper kann aus zwei kongruenten Pyramidenkörpern Grundfläche $M_1M_2M_3M_4$ mit der zusammengesetzt werden. Diese hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$; die Summe der Höhen ist gleich der Strecke M_5M_6 , deren Länge a beträgt. Somit hat der Oktaederkörper das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$$

Die übrigen acht Tetraederkörper sind zueinander kongruent. Daher hat jeder von ihnen das Volumen

$$\frac{1}{8} \left(1 - \frac{12}{24} - \frac{1}{6} \right) a^3 = \frac{1}{24}a^3$$

L.7.9

Es seien FB , FE und FG Würfelkanten und S der Schnittpunkt der Raumdiagonalen FD mit ε ($= \varepsilon_{BEG}$). Dann schneidet die Ebene ε_{FBD} die Strecke EG in deren Mittelpunkt, denn die Ebene ε_{BFD} enthält die in ε_{EFG} gelegene Flächendiagonale durch F , so dass M Mittelpunkt der beiden in ε_{EFG} gelegenen Diagonalen ist. Aus den Strahlensätzen folgt nun

$$|SD| : |SF| = |MS| : |SB| = |BD| : |MF| = 1 : 2 \quad (1)$$

womit schon ein Teil des Beweises erbracht ist. Unter Benutzung der Beziehungen

$$|MF| : |FB| : |BD| = 1 : \sqrt{2} : 2 \quad \text{und} \quad |\angle MFB| = |\angle EBD| = 90^\circ$$

folgt nun weiter unter Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras auf die Dreiecke $\triangle MFB$ und $\triangle FDB$ (vgl. Abb. L.7.9)

$$9|MS|^2 = 3|MF|^2 \quad , \quad 9|SF|^2 = 4|MF|^2 + 2|MF|^2$$

also

$$|MS|^2 + |SF|^2 = \frac{1}{3}|MF|^2 + \frac{2}{3}|MF|^2 = |MF|^2$$

Daher ist nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras

$$|\angle MSF| = 90^\circ$$

also wegen der willkürlichen Auswahl bei der Bezeichnung der Punkte B , E, G auch $|\angle FSE|$ (und auch $|\angle FSG|$) $= 90^\circ$.

Folglich steht FD senkrecht auf ε_{BEG} : $FD \perp \varepsilon_{BEG}$.

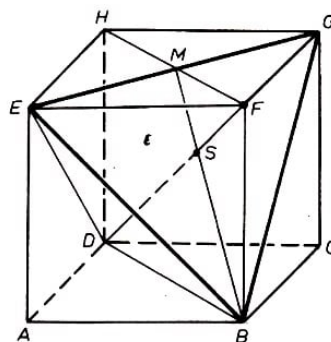


Abb. L.7.9

L.7.10

Da jede Seitenfläche des Würfels Quadratfläche ist, gilt

$$|DK| : |DE| = 1 : 2 = |DL| : |DG|$$

und daher nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes

$$EG \parallel KL \quad (1)$$

Bezeichnet Z denjenigen Punkt von GH , für den $|HZ| = |HX|$ ist, so gilt

$$|HX| : |HE| = |HZ| : |AG| \quad \text{und daher} \quad XZ \parallel EG \quad (2)$$

wenn man jede zu einem Punkt ausgeartete Strecke als zu jeder anderen Strecke parallel ansieht. Aus (1) und (2) folgt

$$XZ \parallel KL \quad (3)$$

da EG nicht zu einem Punkt ausgeartet ist. Folglich liegen K, L, X und Z in ein und derselben Ebene ε . Die Ecken G und H liegen nicht auf derselben Seite von ε , desgleichen D und G sowie C und H , weil jede der Strecken GH, DG und CH mit ε einen Punkt (Z bzw. L) gemeinsam hat. Daher liegt C nicht auf derselben Seite von ε wie D , so dass CD mit der Ebene ε einen Punkt Y' gemeinsam hat.

Wegen $CD \parallel GH$ gilt nach dem zweiten Strahlensatz bzw. im Fall $Z = G$ trivialerweise $|GZ| : |GL| = |DY'| : |DL|$, woraus wegen $|GL| = |DL|$ die Beziehung $|DY'| = |GZ|$ folgt. Daher fallen auf Grund der Definition von Y die Punkte Y und Y' zusammen. Mithin liegt Y in ε . Nach dem ersten Strahlensatz gilt wegen $CD \parallel GH$

$$|YL| : |YZ| = |DL| : |DG| = 1 : 2 \quad (4)$$

und, wenn S den Mittelpunkt von XY bezeichnet,

$$|YS| : |SX| = 1 \quad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt entweder $L = S$ oder nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes $LS \parallel XZ$, woraus sich wegen (3)

$$S \in g_{KL} \quad (6)$$

ergibt. Da jeder Würfel konvex ist, liegt XY und damit S im Würfelkörper. Da von g_{KL} nur die Strecke KL im Würfelkörper liegt, folgt in Verbindung mit (6) $S \in KL$.

L.7.11

a) Die Mittelpunkte der Rechtecke $A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$ seien in dieser Reihenfolge mit M_1 bis M_5 bezeichnet.

Die durch B', A, D' verlaufende Schnittebene und die durch A', B, C' verlaufende Schnittebene gehen beide durch M_1 und M_2 . Daher hat ihre Schnittgerade mit dem Körper des Quaders wegen dessen Konvexität genau die Strecke M_1M_2 gemeinsam.

Auf analoge Weise erhält man entsprechende Aussagen für die Strecken M_1M_3, M_1M_4, M_1M_5 . Daher sind $A, B, C, D, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ Eckpunkte des Restkörpers (s. Abb. L.7.11), und zwar sind dies auch sämtliche Eckpunkte.

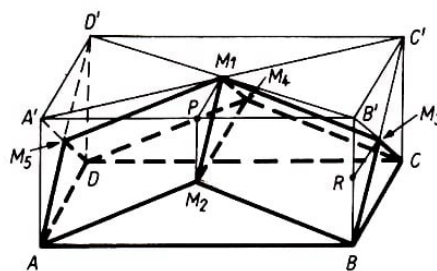


Abb. L.7.11

b) Die Mittelpunkte der Strecken $A'B'$ und BB' seien P bzw. R . Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle PM_1M_2$ und $\triangle RM_3B$ kongruent; denn sie stimmen in den Längen zweier Seiten und der Größe des von diesen eingeschlossenen Winkels überein. Daher gilt

$$|M_1M_2| = |M_3B|$$

Wegen $|A'B| = 2|M_1M_2|$, $|A'C'| = 2|M_1M_2|$ und $|BC'| = 2|M_1M_2|$ gilt

$$|A'B| : |A'M_2| = |A'C'| : |A'M_1| = |BC'| : |M_1M_2| = 2 : 1$$

und daher nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes $M_1M_2 \parallel BC'$ und folglich auch $M_1M_2 \parallel M_3B$. Da entsprechende Aussagen auch für die Strecken M_1M_3 , M_1M_4 , M_1M_5 gelten, kann der Restkörper aus den drei Prismen mit den Eckpunkten

B, C, M_3, M_2, M_4, M_1 ;

A, D, M_5, M_2, M_4, M_1 ;

A, B, M_2, D, C, M_4

zusammengesetzt werden.

Im ersten Prisma hat die Fläche des Dreiecks $\triangle BCM$, den Inhalt $\frac{1}{2}|BC||RB| = \frac{1}{4}bc$; die zugehörige Höhe PB' hat die Länge $\frac{1}{2}a$; also hat das Prisma das Volumen $\frac{1}{8}abc$.

Das zweite Prisma hat eine gleichgroße Grundfläche, nämlich die des Dreiecks $\triangle ADM_5$, und die Höhe PA' , für die $|PB'| = |PA'|$ gilt. Mithin beträgt sein Volumen ebenfalls $\frac{1}{8}abc$.

Beim dritten Prisma hat die Fläche des Dreiecks $\triangle ABM_2$ den Inhalt $\frac{1}{4}ac$, die zugehörige Höhe DA hat die Länge b . Daher hat das dritte Prisma das Volumen $\frac{1}{4}abc$.

Somit ergibt sich

$$V_R = 2\frac{1}{8}abc + \frac{1}{4}abc = \frac{1}{2}abc \quad \text{und daher} \quad V_R : V_Q = 1 : 2$$

L.7.12

Die Ebene ε durch A, B, C' geht auch durch D' , denn $ABC'D'$ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke PR mit P auf AB und R auf $C'D'$ liegt in ε . Die Ebene η durch D, A, B' geht auch durch C' , denn $DAB'C'$ ist ein Parallelogramm. Jede Strecke ST mit S auf AD und T auf $B'C'$ liegt in η . Die Punkte A und C' gehören ε und η an, B dagegen ε , aber nicht η , also haben ε und η genau die Gerade durch A und C' gemeinsam.

Ist nun ein Punkt X Schnittpunkt von PR und ST , so liegt X im Parallelepipet, in ε und in η , also im Durchschnitt dieser drei Mengen, d. h. auf der Strecke AC' .

Liegt umgekehrt ein Punkt X auf AC' , d. h. auf der gemeinsamen Diagonalen der Parallelelogramme $ABC'D'$ und $DAB'C'$, so schneiden z. B. die Parallelen durch X zu AD' bzw. AB' die Strecken AB und $C'D'$ bzw. AD und $B'C'$ in Punkten P, R bzw. S, T , so dass X als Schnittpunkt von PR und ST auftritt.

Daher ist die gesuchte Menge die Strecke AC' .

L.7.13

Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei G den Inhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe bedeutet.

Da $(3, 4, 5)$ und $(5, 12, 13)$ pythagoreische Zahlentripel sind, müssen nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ rechtwinklig mit den rechten Winkeln $\angle BAC$ bzw. $\angle CBD$ sein.

Da laut Aufgabe auch $\angle ABD$ ein rechter Winkel ist, steht BD senkrecht auf der Ebene, in der das Dreieck $\triangle ABC$ liegt. Wählt man nun die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ als Grundfläche der Pyramide, dann ist BD die zugehörige Höhe, und man erhält A

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 12 \text{ cm}^3 = 24 \text{ cm}^3$$

L.7.14

In jedem gleichseitigen Dreieck ist der Umkreismittelpunkt gleichzeitig der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, und jede von diesen ist mit einer Höhe des Dreiecks identisch. Im vorliegenden Fall hat jede von ihnen die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Die Seitenhalbierenden eines jeden Dreiecks teilen einander so im Verhältnis $2 : 1$, dass

$$|AM| = |BM| = |CM| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

ist. Ferner ist nach Aufgabenstellung

$$|SM| = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, dass die Länge jeder der Strecken AS, BS, CS gleich

$$\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3}} = a$$

ist.

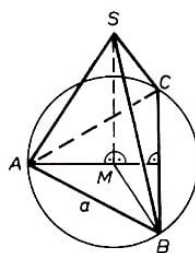


Abb. L.7.14

L.7.15

Man fällt das Lot AM von A auf die Tetraederkante CD . Dann ist $AM \cong BM$, da beide Strecken Höhen einer Seitenfläche ein und desselben regelmäßigen Tetraeders sind. Weiter ist mit $\alpha = |\angle ASB|$, wenn BQ Tetraederhöhe ist,

$$\alpha = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - |\angle QMB|$$

also

$$\cos \alpha = \cos(180^\circ - |\angle QMB|) = -\cos |\angle QMB| = -\frac{|QM|}{|MB|} = -\frac{1}{3}$$

woraus $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ folgt. Zur Ermittlung eines Näherungswertes mit Hilfe einer Tafel benutze man die Relation $\alpha = 180^\circ - \arccos \frac{1}{3}$.

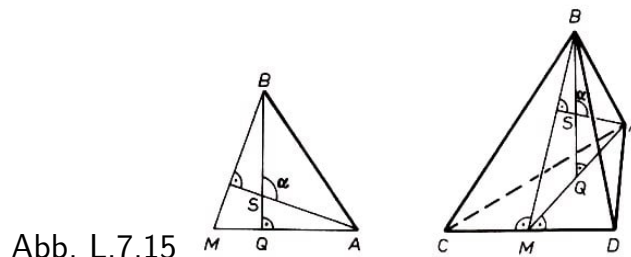


Abb. L.7.15

Man findet dann

$$\cos(70,6^\circ) < \frac{1}{3} < \cos(70,5^\circ)$$

so dass $180^\circ - 70,5^\circ = 109,5^\circ$ ein Näherungswert der geforderten Art ist.

L.7.16

Es seien H, K die Fußpunkte der Lote von D bzw. S auf die Ebene durch A, B, C . Ferner seien V_{ABCD} das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten A, B, C, D und V_{ABCS} das des Tetraeders mit den Eckpunkten A, B, C, S (siehe Abb. L.7.16).

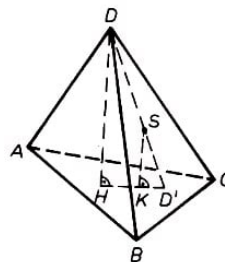


Abb. L.7.16

Nun gilt entweder

$$D' = H = K \quad \text{so dass} \quad \frac{|SK|}{|DH|} = \frac{|SD'|}{|DD'|}$$

trivialerweise richtig ist, oder $D'D \neq HD$; in diesem Fall ist $DH \parallel SK$, die Punkte D, H, K, D' und S liegen mithin in ein und derselben Ebene. Ferner gilt nach einem der Strahlensätze

$$\frac{|SK|}{|DH|} = \frac{|SD'|}{|DD'|}$$

Da DH bzw. SK die Höhen der beiden betrachteten Tetraeder bezüglich der gleichen Grundfläche (der des Dreiecks $\triangle ABC$) sind, folgt auch

$$\frac{|SD'|}{|DD'|} = \frac{V_{ABCS}}{V_{ABCD}}$$

Analog erhält man

$$\frac{|SA'|}{|AA'|} = \frac{V_{BCDS}}{V_{ABCD}}, \quad \frac{|SB'|}{|BB'|} = \frac{V_{ACDS}}{V_{ABCD}}, \quad \frac{|SC'|}{|CC'|} = \frac{V_{ABDS}}{V_{ABCD}}$$

Nun gilt

$$V_{BCDS} + V_{ACDS} + V_{ABDS} + V_{ABCS} = V_{ABCD}$$

Mithin ergibt sich

$$\frac{|SA'|}{|AA'|} + \frac{|SB'|}{|BB'|} + \frac{|SC'|}{|CC'|} + \frac{|SD'|}{|DD'|} = \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = 1$$

L.7.17

Wenn ein Punkt D' die Eigenschaften a), b), c) hat, so liegt er nach b) in der zu BC mittelsenkrechten Ebene η . Diese geht durch A , D und den Mittelpunkt F von BC . In η liegen auch die Lote DE und $D'E'$ von D bzw. D' auf die Ebene durch A , B , C . Ihre Fußpunkte E und E' liegen also auf der Geraden durch A und F .

Nach a) gilt außerdem

$$|DE| = |D'E'| \quad (1)$$

und nach b) ist $\triangle BCD' = \triangle BCD$, also

$$|DF| = |D'F| \quad (2)$$

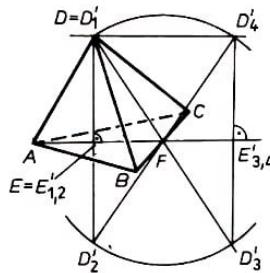


Abb. L.7.17

Wegen (1), (2) sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle DEF$ und $\triangle D'E'F$ kongruent, was in η für genau vier Lagen von D' gilt, nämlich erstens für $D'_1 = D$, zweitens für das Spiegelbild D'_2 von D ; bei Spiegelung an der Geraden durch A und F , drittens für das Spiegelbild D'_3 von D'_1 bei Spiegelung an F , viertens für das Spiegelbild D'_4 von D'_2 bei Spiegelung an F . Von diesen Punkten erfüllen genau D'_3 und D'_4 die Bedingung c). Da sie auch b) und wegen (1) auch a) erfüllen, sind sie alle Punkte der gesuchten Art.

Nun gilt $|AF| = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; ferner liegt E ebenso wie auf AF auch auf den anderen Seitenhalbierenden des Dreiecks $\triangle ABC$, also ist

$$|AE| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{1}{3}a\sqrt{3}, \quad |EF| = |E'F| = \frac{1}{3}|AF|, \quad |AE'_{3,4}| = \frac{4}{3}|AF| = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

Somit ergibt sich für $i = 3, 4$

$$|DE| = |D'_i E'_{3,4}| = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$$

$$|AD'_i| = \sqrt{\frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2} = a\sqrt{2}$$

L.7.18

Die Ecken des Tetraeders seien mit A, B, C, D bezeichnet. Dann gilt nach Voraussetzung $|AC| = |BD|$, so dass sowohl A als auch B auf der zu CD mittelsenkrechten Ebene ε von CD liegen. Daher ist ε diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit mittelsenkrechten Ebenen von Tetraederkanten überein.

Als regelmäßiges Tetraeder hat $ABCD$ einen Umkugelmittelpunkt S mit $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$; dieser liegt somit auf jeder der genannten mittelsenkrechten Ebenen, d. h. auf allen Schnittebenen. Folglich ist die Ebene durch A, B, S diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit den Ebenen durch je eine Tetraederkante und S überein.

Jede der S enthaltenden Seitenflächen des Tetraeders $ABCS$ liegt somit in einer der Schnittebenen; Entsprechendes gilt für die Tetraeder $ABDS, ACDS, BCDS$.

Die gesuchte Zerlegung von $ABCD$ kann daher durch weiteres Zerlegen der vier Tetraederkörper $ABCS, ABDS, ACDS, BCDS$ (in die man $ABCD$ zunächst zerlegen kann) erhalten werden.

Zum weiteren Zerlegen von $ABCS$ geben genau diejenigen Schnittkanten Anlass, die außer durch S durch innere Punkte von $ABCS$ gehen. Das sind genau diejenigen, die durch innere Punkte des Dreiecks ABC gehen, also diejenigen, die durch D , eine der Ecken A, B, C und eine Kantenmitte gehen.

Sie zerlegen die Fläche des Dreiecks ABC durch dessen Seitenhalbierende in sechs flächeninhaltsgleiche (sogar kongruente) Teilflächen. Demnach wird der Tetraederkörper $ABCS$ in genau sechs volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper zerlegt.

Entsprechendes gilt für die zu $ABCS$ kongruenten Tetraeder $ABDS, ACDS, BCDS$. Daher entstehen insgesamt 24 volumengleiche Teilkörper. Jeder von ihnen hat somit das Volumen $V_K = \frac{1}{24}V_T$, wobei V_T das Volumen des Tetraeders $ABCD$ ist.

Wegen $V_T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ gilt also $V_K = \frac{a^3}{288}\sqrt{2}$.

L.7.19

Angenommen, ε sei eine Ebene mit der genannten Eigenschaft. Lagen P_1, P_2, P_3, P_4 auf ein und derselben Seite von ε oder läge einer (und daher nach Annahme alle) der Punkte in ε , so lägen alle diese Punkte in ein und derselben zu ε parallelen Ebene, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es genau die folgenden beiden Möglichkeiten:

a) Einer der Punkte, es sei o. B. d. A. der Punkt P_1 , liegt auf einer Seite von ε , die anderen drei auf der anderen Seite. Die Lote von P_2, P_3, P_4 auf ε sind dann zueinander

gleichsinnig parallel und gleichlang, das Lot von P_1 auf ε ist zu ihnen gegenseitig parallel und gleichlang.

Da P_2, P_3, P_4 nicht auf ein und derselben Geraden liegen (sonst lägen sie ja mit P_1 in derselben Ebene), gibt es genau eine Ebene δ durch P_2, P_3, P_4 . Diese ist folglich parallel zu ε , und ihr Abstand von P_1 ist doppelt so groß wie die genannten Lote. Somit ist ε (im vorliegenden Fall) eindeutig charakterisiert als die zu δ parallele Ebene durch den Mittelpunkt des Lotes von P_1 auf δ .

b) Zwei der Punkte, es seien o. B. d. A. die Punkte P_1 und P_2 liegen auf ein und derselben Seite von ε , die beiden anderen auf der anderen Seite.

Da $P_1 \neq P_2$ und $P_3 \neq P_4$ ist, gibt es je genau eine Gerade g durch P_1 und P_2 bzw. h durch P_3 und P_4 .

Die Lote von P_1 und P_2 auf ε sind zueinander gleichsinnig parallel und gleichlang; die Lote von P_3 und P_4 auf ε sind zu den vorgenannten Loten gegenseitig (also zueinander gleichsinnig) parallel und mit ihnen (also untereinander) gleichlang.

Daher ist sowohl g als auch h parallel zu ε , und die zu ε parallelen Ebenen η durch P_1, P_2 , sowie θ durch P_3, P_4 haben einen Abstand voneinander, der doppelt so groß ist wie die Länge der genannten Lote.

Schließlich liegen g und h nicht in ein und derselben Ebene, sind also nicht parallel zueinander. Somit kann η eindeutig charakterisiert werden als die durch g gehende und zu h parallele Ebene und θ als die durch h gehende und zu g parallele Ebene.

Hiernach ist ε (im vorliegenden Fall) eindeutig charakterisiert als die zu den Ebenen η, θ parallele Ebene durch den Mittelpunkt eines gemeinsamen Lotes der Ebenen η und θ .

Umgekehrt hat auch jede der am Ende von a) und b) charakterisierten Ebenen ε die verlangte Eigenschaft. Daher sind die in a) und b) beschriebenen Ebenen sämtliche Ebenen mit der verlangten Eigenschaft.

Nun gibt es genau vier Möglichkeiten, die in a) genannte Lage zu erreichen, und genau drei Möglichkeiten, die in b) genannte Lage zu erreichen. Die somit auf sieben verschiedenen Wegen gefundenen Ebenen ε sind auch voneinander verschieden, da sich je zwei von ihnen bereits darin unterscheiden, welche der Punkte P_1, \dots, P_4 zusammen auf ein und derselben Seite von ε liegen.

L.7.20

a) Von den Kanten A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 sind keine zwei parallel zueinander. Das gleiche gilt daher auch für die zu ihnen mittelsenkrechten Ebenen. Diese haben folglich einen Schnittpunkt S , und es gilt demzufolge

$$|A_1S| = |A_2S| = |A_3S| = |A_4S|$$

Weil das gegebene Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ regelmäßig ist, gilt weiter

$$\triangle A_2A_3A_4 \cong \triangle A_3A_4A_1 \cong \triangle A_4A_1A_2 \cong \triangle A_1A_2A_3$$

so dass auch die vier Tetraeder

$$SA_2A_3A_4, \quad SA_3A_4A_1, \quad SA_4A_1A_2, \quad SA_1A_2A_3$$

paarweise zueinander kongruent sind, und zwar so, dass die Abstände von S zur gegenüberliegenden Seitenfläche paarweise gleichlang sind, also

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

ist. Bezeichnet man diesen Wert noch mit x , mit F den Inhalt der zueinander kongruenten Seitenflächen von $A_1A_2A_3A_4$, mit V das Volumen dieses Tetraeders und mit V' das der kleineren Tetraeder (1), so gilt

$$hF = 3V = 4 \cdot 3V' = \sum_{i=1}^k Fx_i = 4Fx$$

Also erhält man $h = 4x$.

Dass es keinen weiteren derartigen Punkt P als S gibt, kann man folgendermaßen einsehen:

Sind die Abstände eines Punktes P von den vier Seitenflächen des gegebenen Tetraeders paarweise gleichlang, so liegt P in jeder der zu einer dieser Seitenflächen parallelen Ebene durch S . Da keine zwei dieser Ebenen zueinander parallel sind, muss $P = S$ sein.

b) Die zu beweisende Extremaleigenschaft ist äquivalent mit der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von vier positiven Zahlen x_i , $i = 1, \dots, 4$:

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (2)$$

hier steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ist.

Sieht man diese Ungleichung nicht als bekannt an, so kann sie durch mehrmalige Anwendung der entsprechenden Ungleichung für zwei Zahlen gewonnen werden.

Für beliebige nichtnegative reelle Zahlen a, b gilt

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \geq 0$$

also

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$$

und Gleichheit tritt genau für $a = b$ ein. Wendet man dies dreimal an, nämlich $a = x_1$, $b = x_2$, $a = x_3$, $b = x_4$ sowie $a = x_1 + x_2$, $b = x_3 + x_4$, so ergibt sich

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} \leq \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2}} \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

L.7.21

a) Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle ABD$ rechtwinklig mit D als Scheitel des rechten Winkels. Daher gilt $|AD| = \sqrt{4r^2 - x^2}$ und somit für das Volumen der Pyramide

$$V = \frac{1}{6}xh\sqrt{4r^2 - x^2}$$

b) Wegen $AC \perp \varepsilon$ ist $AC \perp BD$, ferner gilt $AD \perp BD$. Daher steht die Ebene durch A, C, D senkrecht auf BD , woraus die Behauptung $CD \perp BD$ folgt.

Anderer Beweis für b):

Nach Voraussetzung ist $AC \perp AD$. Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$|CD|^2 = 4r^2 - x^2 + h^2$$

und wegen $AC \perp AB$

$$|BC|^2 = 4r^2 + h^2 = |CD|^2 + |BD|^2$$

Also ist nach der Umkehrung des Lehrsatzes von Pythagoras $\angle CDB$ ein rechter Winkel, w.z.b.w.

L.7.22

Auf den Strahlen aus Q durch P_1, P_2 bzw. P_3 seien Punkte $X, Y, Z \neq Q$ mit $|QX| = |QY| = |QZ|$ gewählt (siehe Abb. L.7.22).

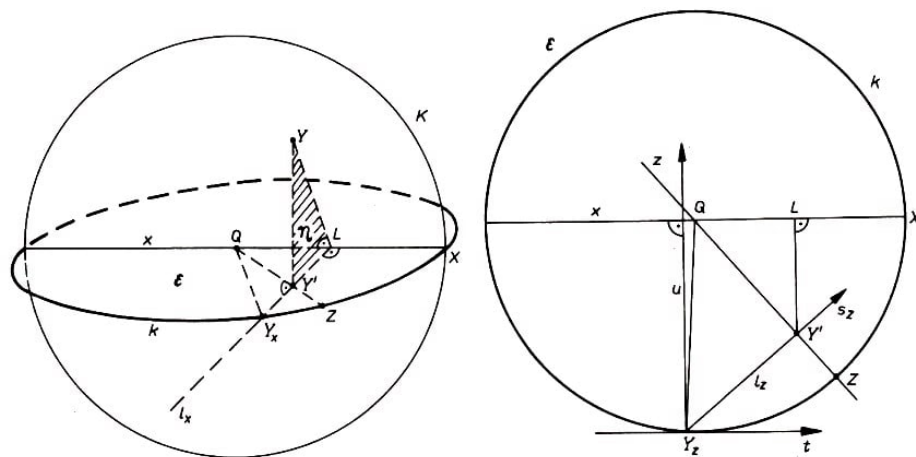


Abb. L.7.22

Dann gilt:

a) Der Fußpunkt Y' des Lotes von Y auf die Ebene ε durch Q , X, Z liegt im Innern des Kreises k in ε um Q durch X .

Beweis: Y liegt auf der Kugel K um Q durch X , aber nicht in der Ebene ε ; diese schneidet aus X den Großkreis k aus. Daraus folgt $|YY'| > 0$, also die Behauptung $|QY'| < |QX|$.

b) Klappt man $\triangle QXY$ um die Gerade x durch Q, X in die Ebene ε , so geht das von dem Bild Y_x , des Punktes Y auf x gefällte Lot l_x durch Y' .

Beweis: Der Fußpunkt L von l_x , ist wegen $\triangle QXY \cong \triangle QXY_x$ auch der Fußpunkt des von Y auf x gefällten Lotes. Also liegt L in der auf x senkrechten Ebene η durch Y, Y_x . Das Lot von Y auf ε ist senkrecht zu allen Geraden in ε , also auch zu x , folglich verläuft es in η . Sein Fußpunkt Y' liegt daher in der Schnittgeraden l_x von η mit ε .

c) Analog gilt: Klappt man $\triangle QZY$ um die Gerade z durch Q, Z in die Ebene ε , so

geht das von dem Bild Y_z , des Punktes Y auf z gefällte Lot l_z durch Y' .

d) Angenommen nun, im Gegensatz zur Behauptung wäre

$$|\angle YQZ| + |\angle ZQX| \leq |\angle XQY|$$

Wir klappen $\triangle OXY$ um die Gerade x in die Ebene ε so, dass Y_x auf derselben Seite von x wie Z liegt. Ferner klappen wir $\triangle QZY$ um z in ε so, dass Y_z und X auf verschiedenen Seiten von z liegen.

Aus der Annahme folgte dann $|\angle Y_zQZ| + |\angle ZQX| \leq |\angle XQY_x|$, also lägen X, Z, Y_z, Y_x in dieser Reihenfolge auf ein und demselben Halbkreisbogen von k , wobei $X \neq Z, Z \neq Y_z$ gilt, jedoch $Y_z = Y_x$ sein kann.

e) Die Lote l_x und l_z schneiden sich nicht im Innern von k .

Beweis: Es sei s_x der Strahl aus Y_x senkrecht zu x hin, s_z der Strahl aus Y_z senkrecht zu z hin, u der Strahl aus Y_z senkrecht zu x hin, t derjenige k berührende Strahl aus Y_z , der mit X auf derselben Seite der u enthaltenden Geraden liegt. Dann verläuft s_z in das Innere des von u, t gebildeten Winkelraumes hinein und hat daher mit s_x keinen Punkt außer eventuell $Y_z = Y_x$ gemeinsam. Die Aussagen a), b), c), e) bilden einen Widerspruch, der die Annahme d) widerlegt.

L.7.23

Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$. Für den Flächeninhalt G dieses Dreiecks gilt $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Es sei F der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da F nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt, schneidet der von C ausgehende Strahl durch F die Seite AB in deren Mittelpunkt, der mit E bezeichnet sei. Damit ist CE Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$ auch Höhe dieses Dreiecks. Folglich gilt

$$|AE| = |EB| \quad \text{sowie} \quad |FE| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} \quad (1)$$

Da $\triangle DFA \cong \triangle DFB$ (sws) ist, gilt

$$|AD| = |BD|$$

also ist $\triangle ABD$ gleichschenkelig. Wegen (1) ist folglich DE Höhe in diesem Dreieck. Der Winkel $\angle FED$ ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe 60° .

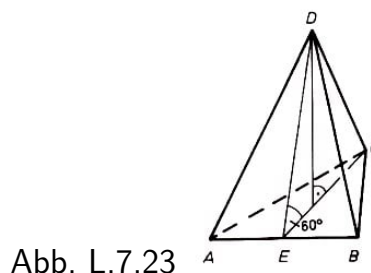


Abb. L.7.23

Da $\angle EFD$ ein rechter Winkel ist, lässt sich die Fläche des Dreiecks $\triangle EFD$ als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen. Also gilt

$$|DE| = 2|EF| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun

$$h = |DF| = \sqrt{|DE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide der Wert

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}$$

L.7.24

Die Höhenlänge h der Pyramide lässt sich aus dem Dreieck $\triangle ACS$ errechnen.

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Jeder der Punkte E und F hat dann nach dem Strahlensatz von der Ebene durch A, B, C, D den Abstand $h_1 = \frac{1}{4}a\sqrt{3}$. Der Teilkörper T_1 habe die Punkte A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.

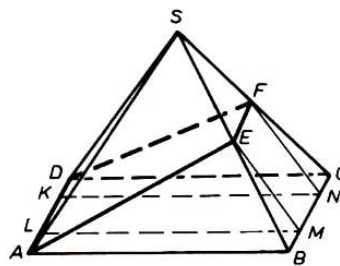


Abb. L.7.24

Zwei ebene, senkrecht auf der Grundfläche stehende Schnitte, die durch E und F gehen und parallel zu CD bzw. AB verlaufen, zerlegen $T-1$, in ein Prisma $KLMNFE$ (Abb. L.7.24) mit dem Volumen P_1 und zwei volumengleiche vierseitige Pyramiden $ABMLE$ und $KNCDF$. Deren Volumina seien P_2 und P_3 . Wegen

$$|LM| = a, \quad h_1 = \frac{1}{4}a\sqrt{2}, \quad |EF| = |MN| = \frac{a}{2}$$

gilt

$$P_1 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{16}a^3\sqrt{2}$$

und aus $|CN| = 2a$ folgt

$$P_2 = P_3 = \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}a\sqrt{2} = \frac{1}{48}a^3\sqrt{2}$$

Das Volumen V_1 von T_1 ergibt sich aus

$$V_1 = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{16}a^3\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1}{48}a^3\sqrt{2} = \frac{5}{48}a^3\sqrt{2}$$

Das Gesamtvolumen V der gegebenen Pyramide erhält man aus

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$$

Für den Teilkörper T_2 mit dem Volumen V_2 gilt

$$V_2 = V - V_1 = \frac{3}{48}a^3\sqrt{2}$$

Damit ergibt sich $V_1 : V_2 = 5 : 3$.

L.7.25

Die Grundfläche der betrachteten Pyramide ist die des gleichseitigen Dreiecks KLM . Es hat nach dem Lehrsatz des Pythagoras die Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Folglich beträgt ihr Flächeninhalt $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$.

Es sei N der Mittelpunkt von LM . Dann liegen die Punkte K, N so auf dem Rechteck $ACGE$, wie es Abb. L.7.25 zeigt; und zwar ist $|GK| = \frac{a}{2}$ und $|GN| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ als halbe Länge der Hypotenuse des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks MGL mit $|GM| = |GL| = \frac{a}{2}$. Daraus folgt

$$|NK| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

und weiter, da $\triangle GPK \sim \triangle NGK$ ist, $|GP| : |GK| = |NG| : |NK|$, also

$$|GP| = \frac{a}{2} \frac{a}{4} \sqrt{2} : \frac{a}{4} \sqrt{6} = \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

also

$$|AP| = |AG| - |GP| = \frac{5}{6}a\sqrt{3}$$

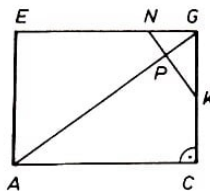


Abb. L.7.25

Weiter gilt wegen $|GN| : |GK| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = |GC| : |CA|$

$$\triangle ACG \sim \triangle KGN \quad \text{und daher} \quad \triangle ACG \text{ sin } \triangle GPK$$

so dass für den Schnittpunkt P von AG mit NK

$$|\angle GPK| = |\angle ACG| = 90^\circ$$

ist. Aus Symmetriegründen gilt auch $|\angle GPL| = 90^\circ$.

Daher steht GP auf der Ebene durch L, M, P senkrecht, so dass AP Höhe der Pyramide $AKLM$ ist. Mithin erhält man für das Volumen V des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M den Wert

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} a \sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{8} \sqrt{3} = \frac{5}{48} a^3$$

L.7.26

Wir denken uns den Pyramidenmantel längs der Kante AS aufgeschnitten und in eine Ebene so "abgewickelt", dass eine Figur wie in Abb. L.7.26 entsteht, also ein Sechseck $S'A'B'C'D'A''$, bei dem

$$\triangle S'A'B' \cong \triangle SAB, \quad \triangle S'B'C' \cong \triangle SBC, \quad \triangle S'C'D' \cong \triangle SCD, \quad \triangle S'D'A'' \cong \triangle SDA$$

ist und für den bei S' gelegenen Innenwinkel $\angle A'S'A''$ des Sechsecks $|\angle A'S'A''| = 4\varphi$ gilt. Dabei gilt ferner:

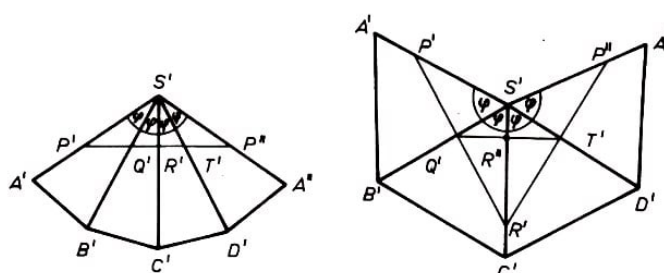


Abb. L.7.26 $0^\circ < \varphi < 45^\circ$

$45^\circ < \varphi < 90^\circ$

a) Jeder der betrachteten geschlossenen Streckenzüge $PQRT P$ geht dabei in einen gleichlangen, nicht geschlossenen Streckenzug $P'Q'R'T'P''$ über, wobei P', Q', P'' jeweils innere Punkte von $S'A', S'B', S'A''$, ferner R', T' jeweils Punkte von $S'C', S'D'$ sind und $|S'P'| = |S'P''|$ ist.

Umgekehrt entspricht jedem der eben genannten Streckenzüge $P'Q'R'T'P''$ ein gleichlanger Streckenzug $PQRT P$ auf dem Pyramidenmantel.

Damit ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, alle φ mit $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ zu ermitteln, für die unter allen eben genannten Streckenzügen $P'Q'R'T'P''$ ein kürzester existiert.

Wir unterscheiden dazu zwei Fälle:

b) $0^\circ < 4\varphi < 180^\circ$, d. h., das Sechseck $S'A'B'C'D'A''$ ist konvex.

c) $180^\circ < 4\varphi < 360^\circ$, d. h., das Sechseck hat bei S' eine einspringende Ecke oder ist zu einem Fünfeck ausgeartet.

Fall b): Wegen der Konvexität des Sechsecks schneidet die Strecke $P'P''$ jede der Strecken $S'B', S'C', S'D'$ in genau einem (inneren) Punkt, die in dieser Reihenfolge mit Q', R', T' bezeichnet seien.

Beweis: Da der Innenwinkel des Sechsecks bei S' die Größe 4φ hat, liegen P' und P'' auf verschiedenen Seiten jeder der Geraden durch S' und B' , durch S' und C' sowie

durch S' und D' . Folglich schneidet $P'P''$ jede dieser Geraden, und zwar im Innern des Sechsecks, also im Innern der Strecken $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$, da das Sechseck konvex ist. Daher ist $P'Q'R'T'P''$ in diesem Fall einer der Streckenzüge a) und hat die Länge $|P'P''|$, ist also der kürzeste.

Fall c): In diesem Fall enthält entweder $P'P''$ den Punkt S' (wenn $4\varphi = 180^\circ$ ist), oder $P'P''$ enthält keinen Punkt einer der Strecken $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$. Ist daher $P'Q'R'T'P''$ einer der zulässigen Streckenzüge a), so liegen bei wenigstens einem der drei Streckenzüge $P'Q'R'$, $Q'R'T'$, $R'T'P''$ nicht alle drei angegebenen Punkte auf derselben Geraden.

Ersetzt man daher einen solchen Streckenzug durch die Verbindungsstrecke seiner Endpunkte bzw. im Fall $C' = S'$ den Streckenzug $P'Q'C'$ durch $P'Q''C'$ mit einem inneren Punkt Q'' von $Q'S'$, so hat diese eine kleinere Länge als der Streckenzug und liegt wegen $2\varphi < 180^\circ$ in der Sechsecksfläche und bildet mit den restlichen beiden Strecken von $P'Q'R'T'P''$ zusammen einen anderen gemäß a) zulässigen Streckenzug kleinerer Länge.

Daher gibt es in diesem Fall keinen kürzesten unter den Streckenzügen a).

Die gesuchte Menge M der Winkelgrößen φ ist die Menge aller mit $0^\circ < \varphi < 45^\circ$.

L.7.27

Jede Pyramide, deren Grundfläche ein $(n-1)$ -Eck ist, hat genau n Ecken (nämlich die $n-1$ Ecken der Grundfläche und die Spitze) und genau n Flächen (nämlich die $n-1$ Mantelflächen und die Grundfläche).

L.7.28

a) Angenommen, k sei eine Kugel der verlangten Art, und M sei ihr Mittelpunkt. Dann haben die Strecken MA , BM , MC , MD , MS alle die gleiche Länge, die mit r bezeichnet sei. Ist P der Fußpunkt und h die Länge des Lotes von M auf ε , so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|PA|^2 = |PB|^2 = |PC|^2 = |PD|^2 = r^2 - h^2$$

also $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$. Daher ist P der Diagonalschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$.

Der Punkt M , der somit auf der in P auf ε errichteten Senkrechten s liegt, muss demnach in der Ebene ε_1 liegen, die durch die Punkte A , C und S geht; denn diese Ebene enthält die auf ε senkrechte Strecke AS , steht also auf ε senkrecht und geht durch P , sie enthält also die Gerade s .

Daher und wegen $|MA| = |MC| = |MS|$ ist M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ACS$. Da dieses wegen $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$, also $AS \perp AC$ bei A rechtwinklig ist, ist M der Mittelpunkt seiner Hypotenuse CS .

b) Umgekehrt hat in der Tat diejenige Kugel k , deren Mittelpunkt der Mittelpunkt M der Strecke CS ist und die durch C geht, die verlangte Eigenschaft.

Zunächst geht k nämlich außer durch C wegen $|MC| = |MS|$ auch durch S . Ist ferner

P der Diagonalschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$, so ist

$$\triangle MPA \cong \triangle MPB \cong \triangle MPC \cong \triangle MPD$$

Also ist $|MA| = |MB| = |MD|$, und daher geht die Kugel k auch durch A , B und D .

c) Die Länge des Durchmessers der Kugel k beträgt nach dem Satz des Pythagoras

$$|CS| = \sqrt{|AC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

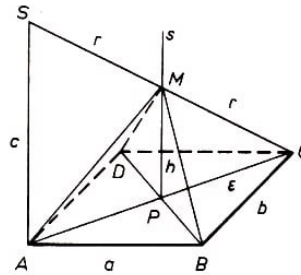


Abb. L.7.28

L.7.29

a) Angenommen, es gibt vier derartige Kugeln. Dann sind die P_i paarweise voneinander verschieden, und der Berührungspunkt von K_i und K_j liegt auf P_iP_j .

Ist r_i der Radius von K_i , so gilt dabei

$$r_i + r_j = |P_iP_j|, \quad i, j = 1, \dots, 4, \quad i \neq j \quad (1)$$

Aus diesen sechs Gleichungen erhält man durch Addition, dass die Beziehungen

$$\sum_{k=1}^4 r_k = |P_1P_2| + |P_3P_4| = |P_1P_3| + |P_2P_4| = |P_1P_4| + |P_2P_3|$$

erfüllt sein müssen, woraus (*) folgt.

b) Sind die r_i , $i = 1, \dots, 4$, positive Zahlen, die (1) genügen, so berühren die K_i einander paarweise von außen. Daher genügt es zur Vollendung eines Beweises zu zeigen, dass unter der Voraussetzung (*) bei paarweise voneinander verschiedenen P_i das Gleichungssystem (1) für die r_i eine positive Lösung (d. h., alle r_i sind größer als 0) hat.

Ist nun k eine der Zahlen $1, \dots, 4$, so erhält man durch Addition aus den drei Gleichungen von (1), die r_k nicht enthalten,

$$2 \sum_{i=1, i \neq k}^4 r_i = \sum_{i,j=1, i \neq k, i \neq j}^4 |P_iP_j| = S_k$$

und aus allen sechs Gleichungen von (1)

$$3 \sum_{i=1}^4 r_i = \sum_{i,j=1, i \neq j}^4 |P_iP_j| = S$$

also

$$r_k = \frac{1}{3}S - \frac{1}{2}S_k \quad (2)$$

Bezeichnet nun $(1', 2', 3', 4')$ irgendeine Anordnung von $(1, 2, 3, 4)$, so folgt aus (2)

$$\begin{aligned} r_{1'} &= |P_{1'}P_{2'}| + |P_{3'}P_{4'}| - \frac{1}{2}(|P_{2'}P_{3'}| + |P_{2'}P_{4'}| + |P_{3'}P_{4'}|) \\ r_{2'} &= |P_{1'}P_{2'}| + |P_{3'}P_{4'}| - \frac{1}{2}(|P_{1'}P_{3'}| + |P_{1'}P_{4'}| + |P_{3'}P_{4'}|) \end{aligned} \quad (3)$$

und hieraus durch Addition

$$r_{1'} + r_{2'} = 2|P_{1'}P_{2'}| + 2|P_{3'}P_{4'}| - \frac{1}{2}(|P_{1'}P_{3'}| + |P_{2'}P_{3'}| + |P_{1'}P_{4'}| + |P_{2'}P_{4'}|) - |P_{3'}P_{4'}| = |P_{1'}P_{2'}|$$

Die r_k aus (2) genügen also (1). Sie sind auch alle positiv, denn aus (3) folgt

$$\begin{aligned} r_{1'} &= |P_{1'}P_{2'}| + \frac{1}{2}|P_{3'}P_{4'}| - \frac{1}{2}(|P_{2'}P_{3'}| + |P_{2'}P_{4'}|) \\ &= |P_{1'}P_{2'}| + \frac{1}{2}((|P_{1'}P_{3'}| + |P_{2'}P_{4'}|) + (|P_{2'}P_{3'}| + |P_{2'}P_{4'}|)) \\ &= |P_{1'}P_{2'}| + \frac{1}{2}(|P_{1'}P_{3'}| - |P_{2'}P_{3'}|) \geq |P_{1'}P_{2'}| - \frac{1}{2}|P_{1'}P_{2'}| = \frac{1}{2}|P_{1'}P_{2'}| > 0 \end{aligned}$$

wobei zum Schluss die Dreiecksungleichung und die paarweise Ungleichheit der P_i benutzt wurde.

L.7.30

Es seien $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ die Seitenlängen des gegebenen Dreiecks, r_a, r_b und r_c die Radien der auf den Punkten A bzw. B bzw. C liegenden Kugeln, schließlich M_a, M_b und M_c in gleicher Reihenfolge die Mittelpunkte der Kugeln.

Führt man drei zur Dreiecksebene senkrechte Schnittebenen durch die Mittelpunkte von je zwei Kugeln, so hat die Schnittfigur der Kugeln und der gegebenen Ebene mit je einer dieser drei Schnittebenen die in Abb. L.7.30 angegebene Gestalt.

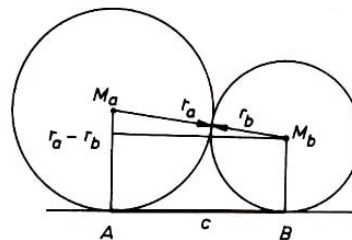


Abb. L.7.30

In Abb. L.7.30 ist als Beispiel die durch A, B, M_a und M_b gehende Ebene dargestellt. Man entnimmt daraus mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Beziehung

$$c^2 + (r_a - r_b)^2 = (r_a + r_b)^2 \quad \text{oder, umgeformt} \quad c^2 = 4r_a r_b \quad (1)$$

Durch Betrachtung der entsprechenden Figuren in den beiden anderen zur Dreiecksebene senkrechten Ebenen, oder einfacher durch zyklische Vertauschung, folgen die Beziehungen

$$a^2 = 4r_b r_c, \quad b^2 = 4r_c r_a \quad (2,3)$$

Aus (1) ergibt sich $r_a = \frac{c^2}{4r_b}$, aus (3) ebenso $r_a = \frac{b^2}{4r_c}$, also $r_a^2 = \frac{b^2 c^2}{16r_b r_c}$ oder wegen (2) $r_a^2 = \frac{b^2 c^2}{4a^2}$, also

$$r_a = \frac{bc}{2a} \quad (4)$$

Analog findet man

$$r_b = \frac{ca}{2b}, \quad r_c = \frac{ab}{2c} \quad (5,6)$$

Da nur (4), (5) und (6) den Bedingungen der Aufgabe genügen, sind sie die Lösungen der gestellten Aufgabe.

L.7.31

Wäre die Aussage d) wahr, so wäre die Grundfläche der Pyramide ein gleichseitiges Dreieck, und jede der beiden Aussagen a) und e) wäre falsch. Das ist aber nach Voraussetzung nicht möglich. Daher ist die Aussage d) falsch, und die anderen Aussagen sind wahr.

Wegen a) und b) ist die Grundfläche der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen $3x$ und $4x$ haben und dessen Hypotenuse die Länge $5x$ hat. $5x$ ist gleichzeitig die Länge des Durchmessers der Kugel. Wegen f) hat daher die Höhe der Pyramide die Länge $\frac{5}{2}x$. Wegen c) erhält man

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x \cdot \frac{5}{2}x = 5x^3 = 40 \text{ cm}^3$$

also $x = 2 \text{ cm}$.

Die Grundkanten der Pyramide haben daher die Längen 6 cm, 8 cm, 10 cm. Jede der drei übrigen Seitenkanten hat die Länge $5\sqrt{2} \text{ cm}$.

L.7.32

Da laut Aufgabe jede der Kugeln die drei anderen von außen berührt, bilden die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte aller vier Kugeln die Kanten eines regulären Tetraeders T_1 mit der Kantenlänge $2r$.

Zu je drei der Kugeln existiert ferner genau eine Seitenfläche F des gegebenen Tetraeders T , die von diesen drei Kugeln berührt wird. Deren Mittelpunkte haben daher von F den Abstand r . Somit ist diejenige Seitenfläche F_1 des Tetraeders T_1 , auf der die genannten drei Mittelpunkte liegen, parallel zu F im Abstand r .

Dreht man nun die gesamte Figur so um eine Höhe von T , dass eine andere Seitenfläche F' von T in die Lage F kommt, so kommt eine andere Seitenfläche F'_1 von T_1 in die Lage F_1 . Daher liegen entsprechende Höhen der beiden Tetraeder jeweils auf der gleichen Geraden. Infolgedessen fallen die Höhenschnittpunkte beider Tetraeder zusammen.

Bezeichnet man die Länge der Höhe des gegebenen Tetraeders mit h , die des in ihm liegenden Tetraeders mit h_1 , so ist

$$d = \frac{h_1}{4} + r = \frac{h}{4} \quad (1)$$

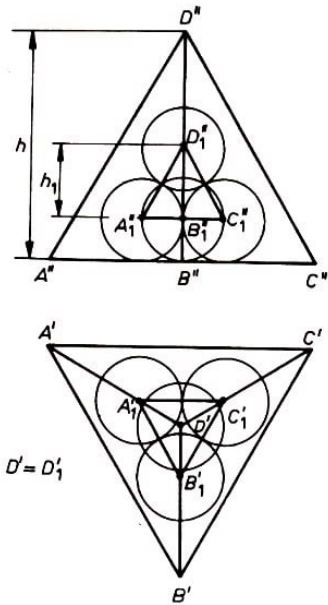


Abb. L.7.32

der Abstand d des gemeinsamen Höhenschnittpunktes zu jeder Fläche des gegebenen Tetraeders. Nun gilt für die Länge h der Höhe eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge a die Beziehung $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

Analog erhält man

$$h_1 = \frac{2r}{3}\sqrt{6} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{r}{6}\sqrt{6} + r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

also

$$r \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \right) = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

woraus man

$$r = \frac{a \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{12(6 + \sqrt{6})} \quad \text{also} \quad r = \frac{a(\sqrt{6} - 1)}{10}$$

erhält.

L.7.33

Angenommen, ein gerader Kreiszylinder entspräche den Bedingungen der Aufgabe. Mit r sei die Maßzahl des (in cm gemessenen) Radius seiner Grundfläche und mit h die Maßzahl seiner Höhenlänge (ebenfalls in cm) bezeichnet. Dann beträgt

die Maßzahl des Umfangs seiner Grundfläche: $2\pi r$,

die Maßzahl des Inhalts seiner Mantelfläche: $2\pi r h$,

die Maßzahl seines Volumens: $\pi r^2 h$,

und es gilt $2\pi r = 2\pi r h$, woraus wegen $r \neq 0$ $h = 1$ folgt. Ferner gilt $2\pi r h = \pi r^2 h$, woraus wegen $r \neq 0$, $h \neq 0$ $r = 2$ folgt.

Also kann höchstens ein gerader Kreiszylinder mit einem Radius von 2 cm und einer Höhenlänge von 1 cm den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Tatsächlich ist in diesem Fall der Umfang der Grundfläche: 4π cm, der Mantelflächeninhalt: 4π cm², das Volumen: 4π cm³.

L.7.34

Für die Höhenlänge h_1 des Restkörpers gilt nach einem der Strahlensätze $R : r = h : (h - h_1)$ und damit

$$h_1 = h - \frac{hr}{R} \quad (1)$$

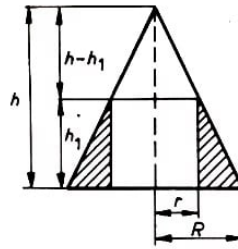


Abb. L.7.34

Es sei V das Volumen des Kegelkörpers und V_1 das Volumen des aus dem Kegel herausgebohrten Körpers. Dann gilt

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

so dass die Forderung $V_1 = \frac{1}{2}V$ mit

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi R^2 h$$

gleichbedeutend ist.

Das Volumen V_1 setzt sich zusammen aus dem eines geraden Kreiskegelkörpers mit dem Radius r und der Höhenlänge $h - h_1$ und aus dem eines geraden Kreiszylinderkörpers mit dem Radius r und der Höhenlänge h_1 (Abb. L.7.34). Daher gilt

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2(h - h_1) + r^2\pi h_1 \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt, dass r genau dann allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn

$$\frac{\pi}{6}R^2 h = \pi r^2 h_1 + \frac{\pi}{3}r^2 h - \frac{\pi}{3}r^2 h_1 \quad (4)$$

und $0 < r < R$ gilt.

Unter Berücksichtigung von (1) und wegen $\pi h \neq 0$ folgt, dass (4) gleichwertig ist mit jeder der Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}R^2 &= \frac{2}{3}r^2 - \frac{2}{3}\frac{r^3}{R} + \frac{1}{3}r^2 = r^2 - \frac{2}{3}\frac{r^3}{R} \\ \frac{2}{3}\frac{r^3}{R} - r^2 + \frac{1}{6}R^2 &= 0 \\ r^3 - \frac{3}{2}Rr^2 + \frac{1}{4}R^3 &= 0 \end{aligned}$$

und wegen $R = 6$ schließlich mit

$$r^3 - 9r^2 + 54 = 0$$

Das ist eine kubische Gleichung für r . Durch sinnvolles Probieren ermittelt man $r = 3$ als eine Lösung dieser Gleichung. Da $r = 3$ zwischen 0 und R liegt, ist $r = 3$ auch Lösung der Aufgabe.

Weil für $0 < r < R$ mit wachsendem r das Volumen des herausgebohrten Körpers monoton wächst und das Volumen des Restkörpers monoton abnimmt, kann es höchstens eine Lösung geben. Daher ist $r = \frac{R}{2} = 3$ zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

L.7.35

Es seien r_1 bzw. r_2 die Radien der Grund- bzw. Deckfläche eines Kreiskegelstumpfes ($r_1 \geq r_2 > 0$) und h die Höhenlänge dieses Körpers. Dann gilt für das Volumen V_1 des betrachteten Körpers

$$V_1 = \frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

Ferner gilt für das Volumen V_2 des ausgeschnittenen Kegelkörpers

$$V_2 = \frac{\pi}{3}hr_2^2 \quad (1)$$

und daher für das Volumen V des Restkörpers

$$V = \frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1r_2) \quad (2)$$

Wegen (1) und (2) entspricht $r_1 : r_2$ genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $6r_2^2 = r_1^2 + r_1r_2$ und $r_1 \geq r_2 > 0$ oder, gleichbedeutend hiermit,

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{r_1}{r_2} - 6 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{r_2} \geq 1$$

ist. Daher kann nur

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 2 \quad (3)$$

den Bedingungen der Aufgaben genügen. Durch Einsetzen in (3) und Rückwärtsschließen ergibt sich, dass für $\frac{r_1}{r_2} = 2$ tatsächlich $V = 6V_2$ ist.

L.7.36

Nach Voraussetzung b) liegt M auf AG . Die Grundkreisfläche des geraden Kreiskegels steht daher senkrecht auf jeder AG enthaltenden Ebene, insbesondere auf der Ebene ε durch A, E, G . Daher gehört mit jedem Punkt W der Grundkreisfläche auch jeder bezüglich ε spiegelbildlich zu W gelegene Punkt W' zur Grundkreisfläche.

Folglich muss der nach c) einzige vorhandene gemeinsame Punkt der Grundkreisfläche mit der Seitenfläche σ durch E, F, G in der Ebene ε , also auf EG liegen, da sonst sein Spiegelpunkt $W' \neq W$ bezüglich ε auch gemeinsamer Punkt dieser Seitenfläche und der Grundkreisfläche wäre; denn mit W liegt W' ebenfalls in σ , weil σ bezüglich ε spiegelbildlich zu sich selbst ist.

Der Schnitt von ε mit dem Würfel- und dem Kegelkörper ist in Abb. L.7.36 dargestellt.

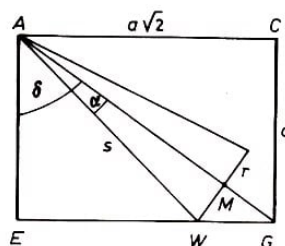


Abb. L.7.36

Er ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $a\sqrt{2}$, in dem zugleich eine Achsenschnittfigur des Kegels enthalten ist.

Es sei $|\angle GAE| = \delta$. Dann ist $\cot \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ist s die Länge der Seitenlinie des Kreiskegelskörpers, dann gilt

$$\cos(\delta - \alpha) = \frac{a}{s} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{a}{\cos(\delta - \alpha)}$$

Ferner ist $r = s \sin \alpha$ der Grundkreisradius r des Kegelskörpers. Hieraus ergibt sich

$$r = \frac{a \sin \alpha}{\cos(\delta - \alpha)} = \frac{a \sin \alpha}{\cos \delta \cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha}$$

Da

$$\cos \delta = \frac{\cot \delta}{\sqrt{1 + \cot^2 \delta}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \sin \delta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ist, folgt

$$r = \frac{a \sin \alpha}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} a \sin \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha}$$

also

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot \alpha + \sqrt{2}}$$

L.7.37

Es sei $A_0 A_1 \dots A_n$ ein konvexer Polygonzug mit $A_0 \neq A_n$ und g die durch A_0 und A_n verlaufende Gerade. Laut Voraussetzung liegen alle Eckpunkte A_i ($i = 1, \dots, n-1$) des Polygonzuges auf derselben Seite von g .

Der Punkt B des Polygonzuges halbiere diesen Polygonzug der Länge nach.

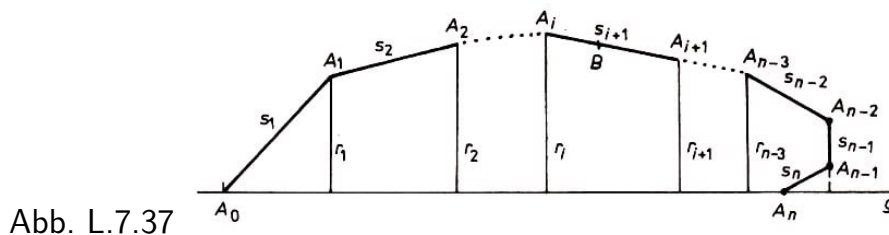


Abb. L.7.37

Die Rotationsfläche ist aus Mänteln von Kegelstümpfen bzw. deren Entartungen (Mäntel von Kegeln, Zylindern bzw. Kreisflächen, Kreisringflächen) zusammengesetzt.

Damit lässt sich der Flächeninhalt F des durch Rotation von $A_{j-1}A_j$ um g entstehenden Mantels des Kegelstumpfes nach der Formel

$$F_j = \pi s_j (r_j + r_{j-1}), \quad j = 0, \dots, n \quad (1)$$

berechnen, wobei s_j die Länge der Mantellinie $A_{j-1}A_j$ und r_j den Abstand des Punktes A_j von g angibt.

Es sei t_j die Länge des Polygonzuges $A_0A_1\dots A_j$. Da r_j der Abstand des Punktes A_j von g ist, gilt

$$t_j \geq r_j \quad \text{für alle } j, 0 \leq j \leq n \quad (2)$$

Wegen $s_j = t_j - t_{j-1}$ erhält man aus (1) und (2)

$$F_j = \pi s_j(r_j + r_{j-1}) \leq \pi s_j(t_j + t_{j-1}) = \pi(t_j^2 - t_{j-1}^2) \quad (3)$$

Dabei stellt der Term $\pi(t_j^2 - t_{j-1}^2)$ den Flächeninhalt eines konzentrischen Kreises mit den Radien t_j und t_{j-1} dar.

Wir betrachten den Flächeninhalt G der durch Rotation des Polygonzuges $A_0A_1\dots B$ um g erzeugten Fläche. G ist gleich der Summe von F_1, \dots, F_i und dem Flächeninhalt F_B der von A_iB erzeugten Rotationsfläche.

Aus der Bemerkung zu (3) folgt, dass dann G nicht größer als die Summe der Flächeninhalte der Kreise mit den Radien t_j, t_{j-1} ($1 \leq j \leq i$) bzw. t_i, t_B mit $t_B = \frac{s}{2}$, d. h. nicht größer als die Fläche des Kreises mit dem Radius $\frac{s}{2}$ ist, dass also

$$G \leq \pi \frac{s^2}{4} \quad (4)$$

gilt. Für den Flächeninhalt G' der durch den Polygonzug $BA_{i+1}\dots A_n$ erzeugten Rotationsfläche erhalten wir analog

$$G' \leq \pi \frac{s^2}{4} \quad (5)$$

Damit ist

$$F = G + G' \leq \pi \frac{s^2}{2} \quad (6)$$

L.7.38

Es könnten zum Beispiel die in Abb. L.7.38 gezeigten Körper mit 9, 10, 11 bzw. 12 Kanten gezeichnet werden.

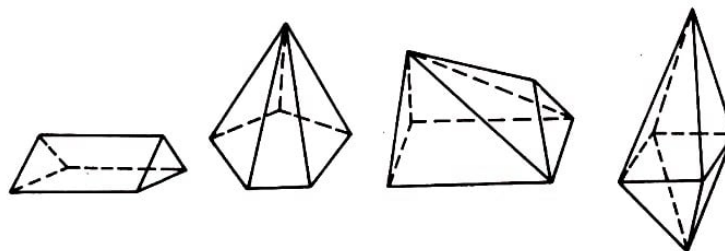
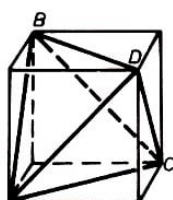


Abb. L.7.38

L.7.39



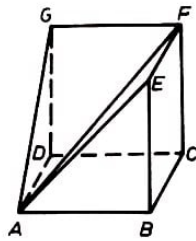
a) Abb. L.7.39

b) Der dargestellte Körper kann aus einem Würfelkörper mit der Kantenlänge a hervorgehen, indem man von diesem mit ebenen Schnitten durch die Punkte A, B, C ; A, B, D ; A, C, D und B, C, D vier kongruente Pyramiden abtrennt.

Das Volumen V des dargestellten Körpers ist also gleich der Differenz aus dem Volumen des Würfelkörpers mit der Kantenlänge a und der Summe der Volumina der vier abgetrennten Pyramidenkörper. Da jede von diesen das Volumen $V_p = \frac{1}{6}a^3$ hat, erhält man

$$V = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{a^3}{3}$$

L.7.40



a) Abb. L.7.40

b) Den Körper kann man sich entstanden denken, indem man aus einem Würfel mit der Kantenlänge a einen Tetraederkörper mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) und der zugehörigen Höhe der Länge a herauschneidet. Daher gilt für das Volumen V dieses Körpers

$$V = a^3 - \frac{1}{3}a^2a = \frac{2}{3}a^3$$

17 Lösungen - Geometrische Konstruktionen

L.8.1

Man zeichne zwei von einem Punkt S ausgehende, nicht auf derselben Geraden liegende Strahlen s , t .

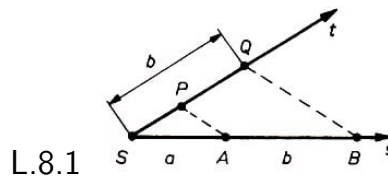
Auf s trage man die Strecke SA der Länge a und auf deren Verlängerung über A hinaus die Strecke AB der Länge b ab. Auf t trage man die Strecke SQ der Länge b ab.

Die Parallele durch A zu BQ schneidet t in einem Punkt P . Dann hat die Strecke SP die Länge $\frac{ab}{a+b}$.

Beweis: Nach Konstruktion ist $|SQ| = b$, $|SA| = a$, $|SB| = a+b$. Ferner ist $AP \parallel BQ$. Daher folgt aus dem Strahlensatz

$$|SP| : |SQ| = |SA| : |SB|$$

d.h. $\frac{|SP|}{b} = \frac{a}{a+b}$ und somit $|SP| = \frac{ab}{a+b}$



L.8.1

L.8.2

Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge c ist, hat genau dann die geforderte Höhenlänge, wenn diese $a+b$ beträgt. Ist dies der Fall, so hat sein Volumen $(a+b)c^2$ genau dann den geforderten Wert, wenn

$$(a+b)c^2 = a^3 + b^3$$

gilt. Wegen $a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} > 0$ ist dies genau für

$$c^2 = a^2 - ab + b^2$$

der Fall.

b) Eine Strecke der Länge c erhält man z.B. als Seite AB eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit

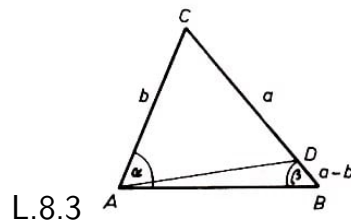
$$|AC| = b, \quad |BC| = a \quad \text{und} \quad |\angle ACB| = 60^\circ$$

Nach dem Kosinussatz gilt nämlich für dieses Dreieck, das sich nach (sws) stets eindeutig konstruieren lässt,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab$$

L.8.3

a) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Kreis um C mit dem Radius b schneide BC in D . Dann ist $|BD| = a - b$.



Das Dreieck $\triangle ADC$ ist gleichschenkelig mit $|AC| = |DC|$, also

$$|\angle CDA| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\angle ACD|) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 60^\circ$$

Dann ist $|\angle ADB| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Das Dreieck $\triangle ADB$ lässt sich aus $a - b$, β und $|\angle ADB| = 120^\circ$ konstruieren.

Punkt C liegt nun erstens auf dem von B ausgehenden Strahl durch D und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AB angetragenen Winkels der Größe α .

b) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktionen erhalten werden kann:

- Wir zeichnen eine Strecke BD der Länge $a - b$.
- Wir tragen an BD in B einen Winkel der Größe β und in D nach derselben Seite einen Winkel von 120° an. Schneiden sich die freien Schenkel dieser Winkel, so sei der Schnittpunkt mit A bezeichnet.
- Wir zeichnen die Gerade durch B und D .
- Wir tragen in A an AB nach derselben Seite, auf der D liegt, einen Winkel der Größe α an. Schneidet sein freier Schenkel die Gerade durch B und D , so sei dieser Schnittpunkt mit C bezeichnet.

c) Beweis, dass jedes so konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Laut Konstruktion ist

$$|\angle ABC| = \beta \quad \text{und} \quad |\angle BAC| = \alpha$$

Ferner ist nach Konstruktion

$$|\angle CDA| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(180^\circ - |\angle ACD|)$$

also ist $\triangle ADC$ gleichschenkelig mit $|AC| = |DC|$. Somit gilt

$$|BC| - |AC| = |BC| - |DC| = |BD| = a - b$$

d) Die ersten beiden Konstruktionsschritte sind stets eindeutig ausführbar. Sie ergeben nach (wsw) mit den gegebenen Größen eindeutig ein Dreieck $\triangle ABD$. Die letzten beiden Konstruktionsschritte sind ebenfalls stets eindeutig ausführbar.

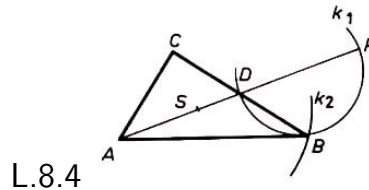
Wegen $\alpha + \beta < 180^\circ$ ist der Punkt C stets vorhanden und eindeutig bestimmt.

L.8.4

a) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Dann gibt es genau einen Punkt P , für den $ABPC$ ein Parallelogramm ist, und es werden AP und BC durch ihren Schnittpunkt D halbiert; ferner sind $\angle DBP$ und $\angle DCA$ rechte Winkel, also liegt nach der Umkehrung des Satzes des Thales B auf einem Halbkreis über DP .

Ist weiter S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$, so gilt $|AS| = \frac{2}{3}s_a$ und $|BS| = \frac{2}{3}s_b$.



b) Daher genügt ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- Man konstruiert auf einer Geraden die Punkte A, S, D, P in dieser Anordnung so, dass $|AD| = |DP| = s_a$ und $|AS| = \frac{2}{3}s_a$ gilt.
- Man schlägt einen Halbkreis k , über DP .
- Man schlägt den Kreis k , um S mit $\frac{2}{3}s_b$. Schneidet er k , in einem Punkt, so sei dieser mit B bezeichnet.
- Man verlängert BD über D hinaus um seine eigene Länge und erhält damit den Punkt C .

c) Beweis, dass jedes so konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist AD Seitenhalbierende in $\triangle ABC$. Diese hat nach Konstruktion die Länge s_a . Wegen $|AS| = \frac{2}{3}s_a$ ist S der Schwerpunkt von $\triangle ABC$, also enthält die Verlängerung von BS die Seitenhalbierende durch B . Wegen $|BS| = \frac{2}{3}s_b$ hat sie die Länge s_b . Schließlich ist nach dem Satz des Thales $|\angle PBD| = 90^\circ$ und wegen $\triangle ADC \cong \triangle PDB$ daher auch $|\angle ACB| = 90^\circ$.

d) Die ersten drei Konstruktionsschritte ergeben bis auf Kongruenz eindeutig A, S, D, P, k_1, k_2 . Dabei haben k_1, k_2 die Radien

$$r_1 = \frac{1}{2}s_a = 3 \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad r_2 = \frac{2}{3}s_b = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

und den Mittelpunktabstand

$$d = \frac{1}{3}s + \frac{1}{2}s = 5 \text{ cm}$$

Diese Längen erfüllen die Bedingung

$$r_2 - r_1 = \frac{7}{3} \text{ cm} < d < \frac{25}{3} \text{ cm} = r_2 + r_1$$

Daher existiert genau ein Schnittpunkt B von k_1 mit k_2 , und hiernach ist auch C durch den letzten Konstruktionsschritt bestimmt.

Somit existiert $\triangle ABC$ mit den geforderten Eigenschaften und ist durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

L.8.5

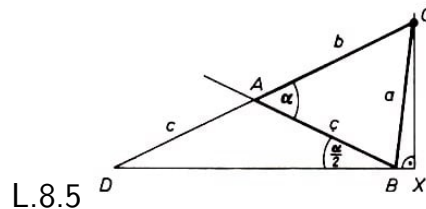
a) Angenommen, es gäbe ein Dreieck $\triangle ABC$, das den genannten Bedingungen entspricht.

Der Punkt D liege (siehe Abb. L.8.5)

- auf der Verlängerung von CA über A hinaus,
- auf dem Kreis mit dem Radius c um A .

Dann ist $\triangle DBA$ gleichschenkelig. Hiernach und nach dem Satz über die Außenwinkel eines Dreiecks (angewandt auf Dreieck $\triangle DBA$) gilt

$$|\angle BDA| = |\angle ABD| = \frac{\alpha}{2}$$



b) Ein Dreieck $\triangle ABC$ entspricht daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man konstruiert ein Dreieck $\triangle CDB$ aus $|CD| = b + c$, $|BC| = a$ und $|\angle CDB| = \frac{\alpha}{2}$. Im Punkt B trägt man an DB nach der Seite hin, auf der C liegt, einen Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ an, dessen freier Schenkel die Seite CD im Punkt A schneide.

c) Das Dreieck $\triangle ABC$ entspricht den Bedingungen.

Beweis: Laut Konstruktion ist $|BC| = a$. Ferner ist laut Konstruktion $|\angle ADB| = |\angle CDB| = \frac{\alpha}{2}$, also nach dem Außenwinkelsatz $|\angle BAC| = \alpha$.

Schließlich folgt, dass $\triangle ADB$ gleichschenkelig mit $|AD| = |AB|$ ist und dass somit, da nach Konstruktion $|CD| = b + c$ gilt, auch die Summe $|AC| + |AB|$ den vorgeschriebenen Wert $|AC| + |AB| = |AC| + |AD| = |CD| = a + c$ hat.

d) Die Konstruktion ist nicht möglich, wenn eine der Bedingungen $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ oder $b + c > a$ verletzt ist.

Nun seien beide Bedingungen erfüllt. Da dann das Dreieck $\triangle CDB$ aus zwei Seiten und dem Winkel, der der kleineren Seite gegenüberliegt, konstruiert wird, enthält man entweder überhaupt kein Dreieck oder genau ein Dreieck oder genau zwei verschiedene Dreiecke.

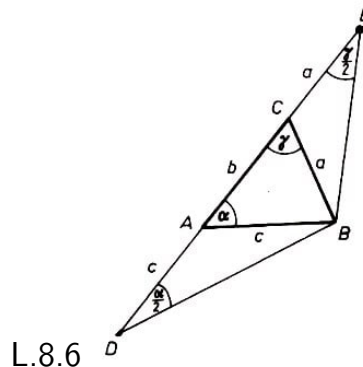
Man konstruiere das (bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte) Dreieck $\triangle CDX$ mit $|CD| = b + c$, $|\angle CDX| = \frac{\alpha}{2}$, $|\angle CXD| = 90^\circ$. Dann ist die Konstruktion des gesuchten Dreiecks $\triangle ABC$

- nicht durchführbar, wenn $a < |CX|$ ist,

- bis auf Kongruenz eindeutig durchführbar, wenn $a = |CX|$ ist,
- bis auf Kongruenz auf genau zwei Arten durchführbar, wenn $a > |CX|$ ist.

L.8.6

a) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abb. L.8.6). Der Punkt D sei derjenige auf dem Strahl aus C durch A gelegene Punkt, für den $|AD| = |AB|$ mit A zwischen C und D gilt, und Punkt E derjenige auf dem Strahl AC gelegene Punkt, für den $|CE| = |CB|$ mit C zwischen A und E gilt. Dann ist $|DE| = a + b + c$.



Ferner sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ gleichschenkelig. Daher und unter Berücksichtigung des Außenwinkelsatzes folgt $|\angle ADB| = \frac{\alpha}{2}$ und $|\angle CEB| = \frac{\gamma}{2}$. Mithin enthält das Dreieck $\triangle EDB$ als bekannte Stücke die Seite $a + b + c$ und Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$. Ferner gilt auch $|\angle DBA| = \frac{\alpha}{2}$ und $|\angle ECB| = \frac{\gamma}{2}$.

b) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- Man konstruiert ein Dreieck $\triangle EDB$ aus $|DE| = a + b + c$, $|\angle BDE| = \frac{\alpha}{2}$, $|\angle BED| = \frac{\gamma}{2}$.
- Man trägt in B an den Strahl BD einen Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und D an, auf der E liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE , so sei der Schnittpunkt mit A bezeichnet.
- Man trägt in B an den Strahl aus B durch E einen Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und E an, auf der D liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE und liegt der Schnittpunkt zwischen A und E , so sei er mit C bezeichnet.

c) Beweis, dass ein so entstandenes Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion gilt $|ED| = a + b + c$. Die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ sind gleichschenkelig mit $|AD| = |AB|$ bzw. $|CE| = |CB|$. Ihre Basiswinkel haben die Größe $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\gamma}{2}$.

Dann haben die Winkel $\angle CAB$ bzw. $\angle BCA$ als Außenwinkel in den Dreiecken $\triangle ADB$ bzw. $\triangle CBE$ die Größen α bzw. γ . Schließlich hat auch, da A zwischen D und E sowie C zwischen A und E liegen, $|BC| + |AC| + |AB|$ die verlangte Größe

$$|EC| + |CA| + |AD| = |DE| = a + b + c$$

d) Da in jedem Dreieck mit Innenwinkeln der Größen α, γ die Beziehung $\alpha + \gamma < 180^\circ$ gilt, kann die Konstruktion nur möglich sein, wenn diese Beziehung erfüllt ist. Ist dies der Fall, so gilt:

Der erste Konstruktionsschritt ist eindeutig (bis auf Kongruenz) durchführbar, weil ja erst recht

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} (< 90^\circ) < 180^\circ$$

gilt. Dabei ergibt sich

$$|\angle DBE| = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) > 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ > \frac{\alpha}{2}$$

so dass die Konstruktion von A (zweiter Konstruktionsschritt) ebenfalls eindeutig möglich ist. Schließlich folgt $|\angle EBA| = |\angle DBE| - \frac{\alpha}{2} > 90^\circ - \frac{\alpha}{2} > \frac{\gamma}{2}$, so dass auch C (zwischen A und E) eindeutig bestimmt ist (dritter Konstruktionsschritt).

Daher ist die gesamte Konstruktion (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar, wenn $\alpha + \gamma < 180^\circ$ und $a + b + c > 0$ ist. Andernfalls gibt es kein solches Dreieck.

L.8.7

a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch C die Parallele zu DA , dann schneidet diese AB , da $a > c$ ist. Der Schnittpunkt sei E .

Es entstehen das Dreieck $\triangle EBC$ mit $|EB| = a - c$ und das Parallelogramm $AECD$ mit $|CE| = d$.

$\triangle EBC$ ist konstruierbar aus $a - c, b, d$ nach Kongruenzsatz (sss).

$\triangle ABC$ ist dann konstruierbar aus $|CB|, \angle CBE, a$ nach Kongruenzsatz (sws).

$\triangle ACD$ ist nun konstruierbar aus $|AC|, c, d$ nach Kongruenzsatz (sss).

b) Daraus ergibt sich, dass ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- Man zeichne die Strecke EB der Länge $a - c$.
- Punkt C liegt dann auf dem Kreis um B mit dem Radius b und auf dem Kreis um E mit dem Radius d .
- Punkt A liegt auf der Verlängerung von BE über E hinaus und auf dem Kreis um B mit dem Radius a .
- Punkt D liegt auf dem Kreis um C mit dem Radius c und auf dem Kreis um A mit dem Radius d , und zwar ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden AC wie E liegt.

c) Beweis, dass ein so konstruiertes Trapez $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

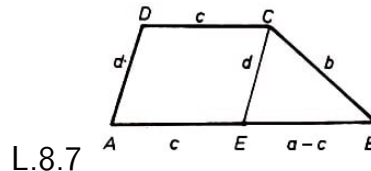
Nach Konstruktion gilt $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = |AE| = c, |DA| = |CE| = d$. Also ist $AECD$ ein Parallelogramm, und es gilt $AE \parallel CD$ und damit auch $AB \parallel CD$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a > c$.

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\triangle EBC$ konstruierbar ist, und zwar dann auf genau eine Weise.

Zur Konstruierbarkeit von $\triangle EBC$ ist notwendig und hinreichend, dass die sogenannten Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

$$a - c < b + d, \quad b < a - c + d, \quad d < a - c + b$$

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.



L.8.8

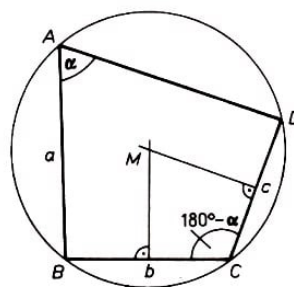
a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Nach dem Satz über die Summe der Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt

$$|\angle DCB| = 180^\circ - \alpha$$

Das Dreieck BCD lässt sich damit aus b , c und einem Winkel von der Größe $180^\circ - \alpha$ konstruieren.

Der Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvierecks liegt auf den Mittelsenkrechten der Seiten BC und CD . Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit dem Radius $|MB|$ und zweitens auf dem Kreis um B mit dem Radius a .

b) Daraus ergibt sich, dass ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann (siehe Abb. L.8.8):



- Wir zeichnen eine Strecke BC der Länge b .
- Wir tragen in C an BC einen Winkel von $180^\circ - \alpha = 110^\circ$ an.
- Wir schlagen um C einen Kreis mit dem Radius c . Schneidet dieser Kreis den freien Schenkel des angetragenen Winkels in einem Punkt, so sei dieser mit D bezeichnet.
- Auf BC und CD errichten wir die Mittelsenkrechten; schneiden sie sich, so sei ihr Schnittpunkt mit M bezeichnet.
- Wir schlagen den Kreis k um M mit dem Radius $|MB|$.

- Wir schlagen den Kreis um B mit dem Radius a . Schneiden sich die beiden Kreise auf derjenigen Seite der Geraden durch BD , auf der C nicht liegt, so sei dieser Schnittpunkt mit A bezeichnet.

c) Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach den letzten drei Konstruktionsschritten geht der konstruierte Kreis k durch A, B, C, D , also ist $ABCD$ ein Sehnenviereck. Ferner folgt aus der getroffenen Auswahl von A , dass $ABCD$ konvex ist. Nach dem ersten, dritten und sechsten Konstruktionsschritt gilt $|AC| = a$, $|BC| = b$ und $|CD| = c$.

Weiterhin gilt nach Konstruktion $|\angle DCB| = 110^\circ = 180^\circ - \alpha$; damit ist nach einem Satz über Sehnenvierecke

$$|\angle BAD| = 180^\circ - |\angle DCB| = \alpha$$

d) Die ersten beiden Konstruktionsschritte sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar; der folgende ist dann eindeutig ausführbar. Auch der vierte Konstruktionsschritt ist eindeutig ausführbar, da BC und CD nicht parallel zueinander sind.

Damit ist auch der vorletzte Schritt eindeutig ausführbar. Da mit den gegebenen Größen, wie man der Abb. L.8.8 entnehmen kann, $|BD| > a$ wird, ist auch der letzte Schritt eindeutig ausführbar.

Das konvexe Sehnenviereck $ABCD$ ist also bis auf Kongruenz durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt.

L.8.9

a) Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann gilt, wenn $|OP| = a$, $|OR| = b$, $|PX| = x$, $|RY| = y$ gesetzt wird,

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{a+x} \quad (1)$$

denn wegen $\angle ROP \cong \angle YRQ$ und $\angle ORX \cong \angle RYQ$ ist $\triangle ORX \sim \triangle RYQ$. Außerdem gilt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b+y} \quad (2)$$

weil wegen $\angle OPY \cong \angle OXQ$ und $\angle OYP \cong \angle PQX$ auch $\triangle OYP \sim \triangle PQX$ ist. Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b + \frac{ab}{a+x}}, \quad x^2 + ax - a^2 = 0 \quad (3,4)$$

und hieraus wegen $x > 0$

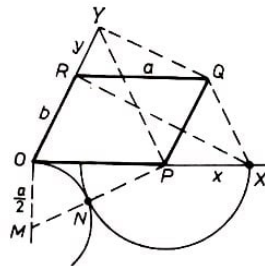
$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Ist nun $\triangle OMP$ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten OP und OM , wobei $|OM| = \frac{a}{2}$, N der Schnittpunkt von MP mit dem Kreis um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, X der nicht auf OP gelegene Schnittpunkt des Kreises um P mit dem Radius $|PN|$ ist,

so gilt $|PX| = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

b) Daher genügt der Punkt X nur dann allen Forderungen der Aufgabe, wenn er auf folgende Weise konstruiert werden kann:

- Man errichtet auf OP in O die Senkrechte s .
- Man trägt von O aus auf s eine Strecke OM der Länge $\frac{a}{2}$ ab.
- Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius $|MO|$. Der Schnittpunkt von k mit PM sei N .
- Man schlägt den Kreis k' um P mit dem Radius $|PN|$. Der nicht auf OP liegende Schnittpunkt von k' mit der Geraden durch O und ist der Punkt X .



L.8.9

c) Jeder so konstruierte Punkt X genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt

$$|MP| = \sqrt{|OM|^2 + |OP|^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Daher ist nach Konstruktion

$$|PX| = |PN| = |PM| - |MN| = |PM| - |MO| = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Folglich gilt $x = |PX| = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und damit (4) und (3). Ist nun Y außerhalb von OP auf der OR enthaltenden Geraden so gelegen, dass $YQ \parallel RX$ ist, so gilt $\triangle OYP \sim \triangle APQX$, und hieraus ergibt sich $\angle OPY \cong \angle PXQ$. Folglich ist

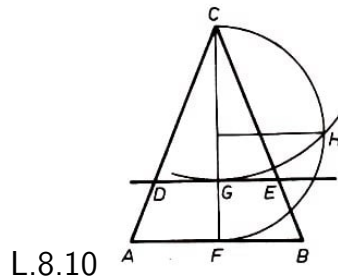
$$|\angle PXQ| + |\angle YPX| = 180^\circ$$

Daher können die PY bzw. XQ enthaltenden Geraden nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke keinen Schnittpunkt haben, sind also parallel.

d) Die angegebene Konstruktion ist stets auf genau zwei Arten ausführbar, die beide auf denselben Punkt X führen.

L.8.10

a) Angenommen, die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ sei durch eine Parallele zur Basis AB in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt, und es seien D, E die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC . Ferner sei F der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ und G der Schnittpunkt dieser Höhe mit der genannten Parallelen (Abb. L.8.10).



L.8.10

Dann gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC$$

Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate einander entsprechender Seiten bzw. Höhen verhalten, ist

$$|CG|^2 : |CF|^2 = 1 : 2 \quad \text{woraus man} \quad |CG| = \frac{|CF|}{2} \sqrt{2}$$

erhält, d.h., CG ist so lang wie eine (also jede) Kathete in einem gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse CF .

b) Daraus ergibt sich, dass eine Parallele zu AB nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann (siehe Abb. L.8.10):

- Man fällt das Lot CF von C auf AB .
- Man schlägt einen Halbkreis über CF .
- Man errichtet auf CF die Mittelsenkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis sei mit H bezeichnet.
- Man schlägt den Kreis um C mit dem Radius $|CH|$. Schneidet er CF in einem Punkt, so sei dieser mit G bezeichnet.
- Man zieht die Parallele durch G zu AB .

c) Beweis, dass eine so konstruierte Parallele den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Laut Konstruktion ist $\triangle CHF$ rechtwinklig-gleichschenkligh, wobei CF seine Hypotenuse ist. Daher gilt $|CF|^2 = 2|CH|^2$, also $|CH| = \frac{|CF|}{2} \sqrt{2}$. N. Ferner gilt nach Konstruktion $|CH| = |CG|$.

Sind nun D und E die Schnittpunkte der konstruierten Parallelen mit AC bzw. BC , so gilt $DE \parallel AB$ und daher einerseits $CG \perp DE$, andererseits

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC$$

Die Flächeninhalte I bzw. I_1 dieser Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Längen einander entsprechender Höhen CF , CG , d. h.,

$$I : I_1 = |CF|^2 : |CG|^2 = |CF|^2 : \left(\frac{|CF|}{2} \sqrt{2} \right)^2 = 2 : 1$$

d) Im zweiten Konstruktionsschritt gibt es zwei Möglichkeiten, einen Halbkreis zu wählen, und daher führen der zweite und der dritte Schritt auf verschiedene Punkte H_1

bzw. H_2 . Für diese ist jedoch $|CH_1| = |CH_2|$, so dass (4) in beiden Fällen zum gleichen Punkt G führt.

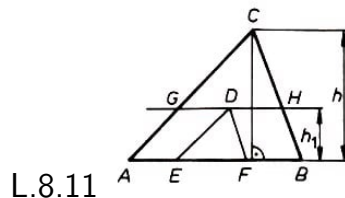
Da alle übrigen Konstruktionsschritte eindeutig durchführbar sind (der vierte wegen $|CH| < |CF|$), trifft dies somit auch für die gesamte Konstruktion zu.

L.8.11

a) Angenommen, die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ sei auf die angegebene Weise in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Flächeninhalte der Trapeze $AEDC$ bzw. $FBCD$ und der der Dreiecke $\triangle EFD$ bzw. $\triangle ABC$ seien der Reihe nach mit S_1, S_2, S_3, S bezeichnet. Dann gilt

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{6}|AB|h = \frac{1}{3}S$$

wobei h die Länge der auf der Geraden durch A und B senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ bedeutet.



Wegen EF auf AB , $ED \parallel AC$, $FD \parallel BC$ sind in den Dreiecken $\triangle EFD$ und $\triangle ABC$ entsprechende Winkel gleich-groß. Aus den Strahlensätzen folgt $h_1 : h = |EF| : |AB|$ und daher $S_3 : S = h_1^2 : h^2$, also nach Voraussetzung

$$1 : 3 = h_1^2 : h^2$$

wobei h_1 die Länge der auf der Geraden durch E und F senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle EFD$ bedeutet. Daraus folgt wegen $h_1 > 0$

$$h_1 = \frac{h}{3}\sqrt{3}$$

Die Parallele durch D zu AB schneide AC in G und BC in H . Dann verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle GDC$ und $\triangle DHC$ zueinander wie $|GD| : |DH|$. Dasselbe Verhältnis haben auch die Flächeninhalte der Parallelogramme $AEDG$ und $FBDH$ zueinander. Daraus folgt

$$S_1 : S_2 = |GD| : |DH|$$

Wegen $S_1 = S_2$ ist Punkt D mithin Mittelpunkt von GH .

b) Daraus ergibt sich, falls eine Lösung existiert, folgende Konstruktionsmöglichkeit:

- Man konstruiert $h_1 = \frac{h}{3}\sqrt{3}$. Das kann z. B. dadurch geschehen, dass man ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe h konstruiert. Es sei $2x$ die Seitenlänge dieses Dreiecks. Dann gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras $h^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$, also

$$x = \frac{h}{3}\sqrt{3} = h_1$$

- Man konstruiert die auf derselben Seite von AB wie C gelegene Parallele zu AB im Abstand h_1 . Sie schneidet wegen $h_1 < h$ die Strecken AC und BC in G bzw. H .
- Man konstruiert den Mittelpunkt D von GH und zieht die Parallelen durch D zu AC bzw. BC , die AB in E bzw. F schneiden.

c) Beweis, dass die Punkte E, F, D falls sie auf diese Weise konstruierbar sind, den Bedingungen der Aufgabe genügen:

Nach Konstruktion gilt

$$S_3 : S = h_1^2 : h^2 = 1 : 3 \quad \text{d.h.} \quad S_3 = \frac{S}{3}, \quad \text{also} \quad S_1 + S_2 = \frac{2}{3}S$$

Die Fläche des Trapezes $AEDC$ setzt sich zusammen aus der des Parallelogramms $AEDG$ und der des Dreiecks $\triangle GDC$, und die Fläche des Trapezes $FBCD$ setzt sich zusammen aus der des Parallelogramms $FBHD$ und der des Dreiecks $\triangle DHC$.

Da D Mittelpunkt von GH ist, sind die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle GDC$ und $\triangle DHC$ gleich groß. Aus demselben Grunde und wegen der beiden gemeinsamen Höhenlänge h_1 sind auch die Flächeninhalte der Parallelogramme $AEDG$ und $FBHD$ gleich groß. Daher gilt $S_1 = S_2$ und damit

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$$

d) Auf Grund der Ausführungen ergibt sich unmittelbar, dass die genannte Konstruktion stets auf genau eine Weise ausführbar ist.

L.8.12

Es sei o. B. d. A. $|AD| \leq |DB|$ vorausgesetzt. Der Mittelpunkt von BC sei M . Dann hat $\triangle ABM$ einen halb so großen Flächeninhalt wie $\triangle ABC$.

Beweis: Beide Dreiecke stimmen in der Seite AB überein. Die zu dieser Seite gehörende Höhe des Dreiecks $\triangle ABM$ ist nach einem der Strahlensätze halb so groß wie die entsprechende Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$.

a) Kein von C verschiedener Punkt E' auf AC kann der Aufgabenstellung genügen; denn für jeden solchen Punkt ist der Flächeninhalt von $\triangle ADE'$ kleiner als der von $\triangle ADC$ und somit kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts von $\triangle ABC$.

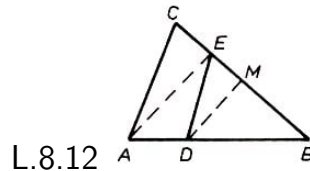
Also kann es höchstens auf BC einen Punkt der gesuchten Art geben.

Angenommen, ein Punkt E auf BC habe die verlangte Eigenschaft. Dann sind $\triangle ABM$ und $\triangle DBE$ flächengleich, also liegt M zwischen E und B , und es sind auch $\triangle ADM$ und $\triangle DME$ flächengleich. Hieraus folgt $AE \parallel DM$.

b) Daher kann ein Punkt E nur dann der Aufgabenstellung genügen, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man konstruiere den Mittelpunkt M von BC . Schneidet die Parallele zu DM durch A die Strecke BC , so sei E der Schnittpunkt.

c) Ein Beweis, dass diese Konstruktion zu einem Punkt E der gesuchten Art führt, besteht in der Umkehrung der in a) genannten Schlüsse.



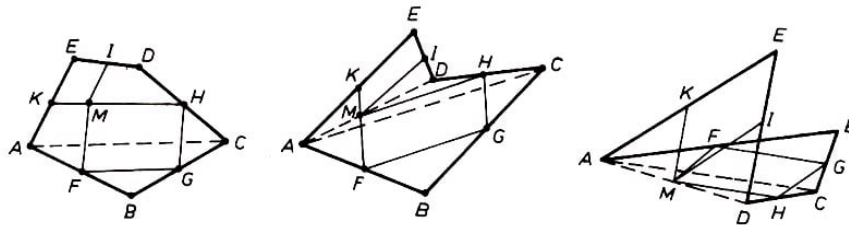
L.8.12

d) Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Ist nämlich E zunächst als der (stets existierende) Schnittpunkt der Parallelen zu DM durch A mit dem von B durch C gehenden Strahl definiert, so gilt

$$|EM| : |MB| = |AD| : |DB| \leq 1 : 1$$

also liegt E auf der Strecke BC (übrigens im Fall $|AD| = |DB|$ und nur in diesem so, dass E mit C zusammenfällt).

L.8.13



L.8.13

a) Angenommen, ein Fünfeck $ABCDE$ habe die geforderte Eigenschaft. Dann gilt $A \neq C$, da aus $A = C$ im Widerspruch zu $F \neq G$ folgen würde, dass die Strecken AB und BC denselben Mittelpunkt hätten. Entsprechend folgt $B \neq D$.

Der Mittelpunkt von AD sei M . Dann gilt wegen $A \neq C$ auch $M \neq H$ und wegen $B \neq D$ auch $M \neq F$. Nun folgt aus der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes:

$$FG \parallel AC \quad \text{sowie} \quad AC \parallel MH \quad \text{und folglich} \quad FG \parallel MH$$

Analog ergibt sich

$$HG \parallel DB \quad \text{sowie} \quad DB \parallel MF \quad \text{und folglich} \quad HG \parallel MF$$

Also ist $FGHM$ ein Parallelogramm.

Liegen nun A, D, E nicht auf ein und derselben Geraden, so liegen auch K, I, M nicht auf ein und derselben Geraden, und es gilt nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes $MX \parallel IE$ sowie $MI \parallel KE$, also ist auch $KMIE$ ein Parallelogramm. Liegen aber A, D, E auf ein und derselben Geraden, so auch K, I, M ; es gilt eine der Gleichungen

$$|AE| + |ED| = |AD|, \quad |AD| + |DE| = |AE|, \quad |EA| + |AD| = |ED|$$

und damit jeweils

$$\begin{aligned} |KE| &= \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{2}(|AD| - |ED|) = |MD| - |ID| = |MI| \\ \frac{1}{2}(|AD| + |DE|) &= |MD| + |DI| \\ \frac{1}{2}(|ED| - |AD|) &= |ID| - |MD| \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} |EI| = \frac{1}{2}|ED| &= \frac{1}{2}(|AD| - |ED|) = |AM| - |AK| = |KM| \\ \frac{1}{2}(|AE| - |AD|) &= |AK| - |AM| \\ \frac{1}{2}(|EA| + |AD|) &= |KA| + |AM| \end{aligned}$$

b) Daraus folgt, dass ein Fünfeck $ABCDE$ nur dann die geforderten Eigenschaften hat, wenn es sich auf folgende Weise konstruieren lässt:

- Man konstruiert zu den Punkten F, G, H den Punkt M , für den $FGHM$ ein Parallelogramm ist.
- Liegen die Punkte K, I, M nicht auf ein und derselben Geraden, so konstruiert man zu ihnen den Punkt E , für den $KMIE$ ein Parallelogramm ist.
Liegen aber K, I, M auf ein und derselben Geraden, so konstruiert man den (dann eindeutig bestimmten) Berührungspunkt E des Kreises um K mit $|MI|$ und des Kreises um I mit $|KM|$ (hier sind auch für $M = I$ oder $K = M$ zu einem Punkt entartete Kreise zugelassen).
- Man konstruiert im Fall $E \neq K$ auf dem Strahl aus E durch K den Punkt $A \neq E$, für den $|EK| = |KA|$ gilt, im Fall $E = K$ den Punkt $A = E = K$.
- Man konstruiert im Fall $A \neq F$ auf dem Strahl aus A durch F den Punkt $B \neq A$, für den $|AF| = |FB|$ gilt, im Fall $A = F$ den Punkt $B = A = F$.
- Man konstruiert im Fall $B \neq G$ auf dem Strahl aus B durch G den Punkt $C \neq B$, für den $|BG| = |GC|$ gilt, im Fall $B = G$ den Punkt $C = B = G$.
- Man konstruiert im Fall $C \neq H$ auf dem Strahl aus C durch H den Punkt $D \neq C$, für den $|CH| = |HD|$ gilt, im Fall $C = H$ den Punkt $D = C = H$.

c) Jedes so konstruierte Fünfeck $ABCDE$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion sind die Punkte K, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten EA, AB, BC, CD .

Ist M' der Mittelpunkt von AD , so folgt daher, wie zu Beginn von a), dass $FGHM'$ ein Parallelogramm ist. Hieraus ergibt sich $M' = M$, d.h., M ist der Mittelpunkt von AD . Daraus folgt, wenn $K \neq M$, also $E \neq D$ ist, $KM \parallel ED$; mithin liegt wegen $KM \parallel EI$ der Punkt I auf der Geraden durch E, D und ist wegen $|KM| = |EI| = \frac{1}{2}|ED|$ sowie $\triangle AKM \cong \triangle MID$ (sws), also $|KM| = |ID|$, Mittelpunkt der Seite DE .

Für $K = M$ folgt $E = D$ sowie nach Konstruktion $I = E$, also ist ebenfalls I Mittelpunkt von DE .

d) Sämtliche Konstruktionsschritte sind stets eindeutig ausführbar. Folglich gibt es in allen zugelassenen Fällen genau ein derartiges Fünfeck $ABCDE$.

Anmerkung: Die Konstruktion ist auch durchführbar, wenn man lediglich fordert, dass nicht sämtliche fünf Punkte F, G, H, I, K auf derselben Geraden liegen.

L.8.14

a1) Angenommen, ein Dreieck $\triangle ABC$ habe die verlangten Eigenschaften, dann geht B durch eine Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60° in C über. Ist k'_1 das Bild von k_1 bei dieser Drehung, so ist folglich C ein gemeinsamer Punkt von k_1 und k'_1 .

a2) Daher hat ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann die verlangten Eigenschaften, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

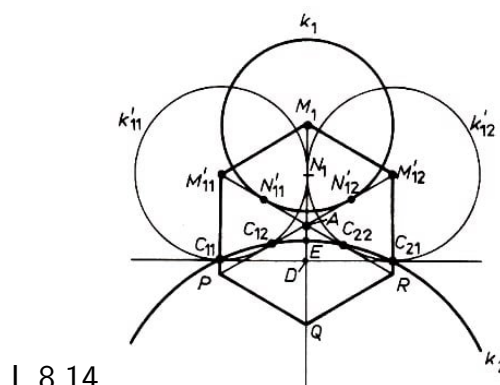
- Man konstruiere den Strahl s aus A durch den Mittelpunkt M_1 von k_1 .
- Dann trage man in A an s einen Winkel der Größe 60° an.
- Sein freier Schenkel schneidet den Kreis um A durch M_1 in einem Punkt M'_1 .
- Hat der Kreis k'_1 um M'_1 mit dem Radius von k_1 einen gemeinsamen Punkt C mit dem Kreis k_2 , so errichte man über AC dasjenige gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$, für das die Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60° , die B in C überführt, gleichsinnig ist zu der Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60° , die M_1 in M'_1 überführt.

a3) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ die verlangten Eigenschaften hat:

Nach dem fünften Konstruktionsschritt ist $\triangle ABC$ gleichseitig, ferner liegt C nach dem vierten Schritt auf k_2 . Außerdem liegt C noch auf k'_1 , und diejenige Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60° , die zu den im fünften Schritt genannten Drehungen gegensinnig ist, führt C in B sowie k'_1 in k_1 über. Folglich liegt B auf k_1 .

b) Der erste Konstruktionsschritt ist stets eindeutig ausführbar, der zweite Konstruktionsschritt stets auf genau zwei verschiedene Arten. Da der dritte Konstruktionsschritt wieder eindeutig ausführbar ist, erhält man durch die ersten drei Schritte somit genau zwei verschiedene Punkte M_{11} und M_{12} .

Jeder der beiden beim vierten Schritt entstehenden Kreise k'_{11} , k'_{12} kann nun, wenn er nicht unendlich viele gemeinsame Punkte mit k_2 hat, höchstens zwei Punkte mit k_1 gemeinsam haben.



L.8.14

Die gesuchte größte Anzahl kann daher höchstens 4 betragen. Dass sie genau 4 beträgt, ist bewiesen, wenn man eine spezielle Lage von A , k_1 , k_2 angeben kann, die alle

Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt und zu genau vier gemeinsamen Punkten führt. Dies ist z. B. folgendermaßen möglich (siehe Abb. L.8.14):

Es sei $M_1M'_{11}PQRM'_{12}$, ein regelmäßiges Sechseck mit dem Mittelpunkt A , und N_1, N'_{11}, N'_{12} seien die Mittelpunkte der Strecken AM_1 bzw. AM'_{11} bzw. AM'_{12} .

Ferner seien k_1, k'_{11}, k'_{12} , die Kreise um M_1 bzw. M'_{11} bzw. M'_{12} durch N'_{11} (und N'_{12}) bzw. N_1 bzw. N_1 . Der Punkt A liegt außerhalb dieser drei Kreise, da AM_1 gemeinsame Tangente von k'_{11} und k'_{12} und AM'_{11} Tangente an k_1 ist.

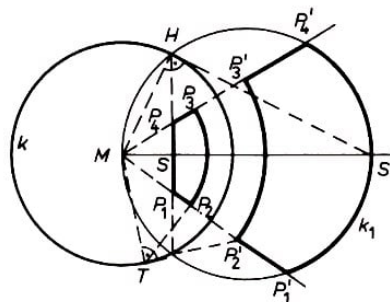
Schneiden ferner k'_{11} bzw. k'_{12} die Strecke $M'_{11}P$ bzw. $M'_{12}R$ in C_{11} bzw. C_{12} , so liegen A und Q auf verschiedenen Seiten der Gerade durch C_{11} und C_{12} . Diese schneide AQ in D .

Wählt man nun einen Punkt E zwischen A und D , so liegt der Mittelpunkt des Kreises k_2 durch E, C_{11}, C_{12} auf dem Strahl aus E durch Q , und folglich liegt A außerhalb k_2 . Ferner schneidet k_2 den Kreis k'_{11} außer in C_{11} noch in einem Punkt C_{12} . Würde er ihn nämlich nur in C_{11} berühren, so müsste die Gerade durch C_{11} und C_{21} gemeinsame Tangente von k_2 und k'_{11} sein, könnte also mit k_2 keinen zweiten Punkt gemeinsam haben.

Entsprechendes gilt für k'_{12} , so dass in der Tat genau vier verschiedene Punkte C_{ik} ($i, k = 1, 2$) entstanden sind.

L.8.15

a) Die Konstruktion von P'_2 kann so erfolgen (siehe Abb. L.8.15):



L.8.15

Man errichtet in P_2 auf MP_2 die Senkrechte. Einer ihrer Schnittpunkte mit k sei T . Nun errichtet man in T auf MT die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem Strahl MP_2 sei P'_2 .

Beweis: Für den so konstruierten Punkt P'_2 gilt nach dem Satz des Euklid

$$|MP_2||MP'_2| = |MT|^2 = r^2$$

wie es verlangt war.

b) Analog konstruiert man P'_1, P'_3 und P'_4 . Dabei wird

$$|MP'_1| = |MP'_4| > |MP'_2| = |MP'_3|$$

ferner enthalten die Strahlen MP_2 bzw. MP_3 die Strecken $P'_1P'_2$ bzw. $P'_3P'_4$ und diese Strecken sind die Bilder der Strecken P_1P_2 bzw. P_3P_4 .

Beweis, z.B. für $P_1'P_2'$: Durchläuft P alle Punkte zwischen P_1 und P_2 , d.h. $|MP|$ alle Werte zwischen $|MP_1|$ und $|MP_2|$, so durchläuft $|MP'|$ nach (**) alle und nur die Werte zwischen $|MP_1'|$ und $|MP_2'|$.

c) Aus (**) folgt weiter: Der im Innern des Winkels $\angle P_2MP_3$ gelegene Bogen $\widehat{P_2'P_3'}$ des Kreise um M durch P_2' ist das Bild des Bogens $\widehat{P_2P_3}$ des gegebenen Kurvenzuges.

d) Der Schnittpunkt von P_1P_4 mit der Winkelhalbierenden von $\angle P_2MP_3$ sei S . Wie in a) werde das Bild S' von S konstruiert: Einer der Schnittpunkte der die Strecke P_1P_4 enthaltenden Geraden mit k sei H . Man errichtet in H auf MH die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem von M ausgehenden Strahl MS ist dann S' .

Aus dieser Konstruktion folgt, dass H auf dem über MS' als Durchmesser konstruierten Kreis k_1 liegt. Ist nun X irgendein Punkt der Sehne durch H und S , dann ist der Schnittpunkt des von M ausgehenden Strahles MX mit k_1 der Spiegelpunkt X' von X .

Beweis: Es gilt $\angle MHX \cong \angle MS'H$ (da beide den Winkel $\angle HMS$ zu 90° ergänzen); $\angle MS'H \cong \angle MX'H$ (als Peripheriewinkel über dem Bogen \widehat{MH}). Also ist $\triangle MHX \sim \triangle MX'H$ und damit $|MX| : |MH| = |MH| : |MX'|$, woraus wegen $|MH| = r$ die Behauptung folgt.

e) Aus d) ergibt sich: P_1' und P_4' liegen auf k_1 , und der im Innern des Winkels $\angle P_2MP_3$ gelegene Bogen $\widehat{P_1'P_4'}$ von k_1 ist das Bild der Strecke P_1P_4 .

Bemerkung: Die angegebenen Beweise dafür, dass die Teilkurven $P_1'P_2'$ usw. die Bilder der Teilkurven P_1P_2 usw. sind, können auch mit Hilfe der analytischen Geometrie geführt werden. Besonders vorteilhaft ist dies zur Ermittlung des Bildes von P_1P_4 :

Man wähle etwa M als Koordinatenursprung, als positive x -Achse die Winkelhalbierende von $\angle P_2MP_3$; und die positive y -Achse so, dass P_3 im I. Quadranten liegt. Die Koordinaten von P_i , den Spiegelpunkten P_i' ($i = 1, 2, 3, 4$), allgemein von irgendeinem Punkt $P \neq M$ und seinem Spiegelpunkt P' seien mit x_i, y_i bzw. x'_i, y'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) bzw. mit x, y bzw. x', y' bezeichnet. Dann gilt

$$x = \frac{x'r^2}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'r^2}{x'^2 + y'^2}$$

denn es ist auch $P' \neq M$, also $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Ist (zu gegebenen x', y') P derjenige Punkt, für den die genannten Gleichungen gelten, so liegen P, P' wegen

$$x : x' = y : y' \left(= \frac{r^2}{x'^2 + y'^2} \right) > 0$$

auf ein und denselben Strahl durch M , und es gilt auch

$$|MP||MP'| = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\frac{(x'^2 + y'^2)r^4}{(x'^2 + y'^2)^2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} = r^2$$

Die Gerade durch P_1 und P_4 hat nun die Gleichung

$$x = x_1$$

und daher hat ihr Spiegelbild die Gleichung

$$\frac{x'r^2}{x'^2 + y'^2} = x_1$$

Diese Gleichung ist äquivalent damit, dass

$$x'^2 + y'^2 \neq 0 \quad \text{und} \quad x'^2 - \frac{r^2}{x_1}x' + y'^2 = 0$$

d.h.

$$\left(x' - \frac{1}{2} \frac{r^2}{x_1}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{x_1}\right)^2$$

gilt. Daher ist das Spiegelbild der Geraden der Kreis über dem Durchmesser MP' mit $M = (0,0)$ und $P' = \left(\frac{r^2}{x_1}, 0\right)$ mit Ausnahme des Punktes $(0,0)$.

L.8.16

Es sei M der Mittelpunkt des Kreises, Q der Mittelpunkt der Sehne AB und ferner PR das Lot von P auf die Gerade durch M und Q . Dann kann o. B. d. A. $0 < a \leq b$ vorausgesetzt werden, da dies gegebenenfalls durch entsprechende Wahl der Bezeichnungen stets erreicht werden kann. Dabei gilt

$$|PR| = \frac{1}{2}(b - a) \quad \text{und} \quad |BQ| = \frac{1}{2}(b + a)$$

Setzt man nun $|PR| = p$, $|BQ| = q$, so erhält man

$$z = \sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2} \quad \text{und} \quad z' = \frac{(q - p)(q + p)}{2r}$$

also

$$\frac{z'}{z} = \frac{q^2 - p^2}{2r(\sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2})} = \frac{\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{r^2 - q^2}}{2r}$$

Aus $0 < a \leq b$ und $a + b \leq \frac{1}{5}r$ folgt $0 \leq p < q \leq \frac{1}{10}r$, also

$$r\sqrt{0,99} \leq \sqrt{r^2 - q^2} < \sqrt{r^2 - p^2} \leq r$$

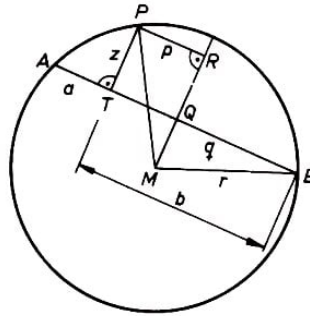
und hieraus $\sqrt{0,99} < \frac{z'}{z} < 1$, also

$$\delta = \left|1 - \frac{z'}{z}\right| = 1 - \frac{z'}{z} < 1 - \sqrt{0,99}$$

Nun ist $(1 - 0,0051)^2 = 1 - 0,0102 + 0,00002601 < 0,99$, also $1 - 0,0051 < \sqrt{0,99}$.
Daher gilt

$$\delta < 1 - \sqrt{0,99} < 0,0051$$

Der relative Fehler ist kleiner als 0,0051, d. h. 5,1 ‰.



L.8.16

Anmerkung: Man kann auch $|\angle PMQ| = \varphi$ und $|\angle QMB| = \alpha$ einführen und dieselbe Rechnung, in anderer Schreibweise, mit

$$\sin \alpha = \frac{q}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - q^2}}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{p}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{r}$$

durchführen.

18 Lösungen - Verschiedenes

Folgen - Differentialrechnung - Extremalaufgaben - Näherungsrechnung - Wahrscheinlichkeitsrechnung - Algebraische Strukturen

L.9.1

a) Es gilt $b_i = a_0 q^{i+1} - a_0 q^i$, also

$$b_i = a_0(q - 1)q^i$$

Daher ist (b_i) offensichtlich eine geometrische Folge.

Weiter gilt $c_i = a_0(q - 1)q^{i+1} - a_0(q - 1)q^i$, also

$$c_i = a_0(q - 1)^2 q^i \quad (1)$$

Daher ist (c_i) ebenfalls eine geometrische Folge.

b) Die Bedingung, dass $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt, wird wegen (1) und $a_0 \neq 0$, $q \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn $(q - 1)^2 = 1$ ist. Wegen $q \neq 0$ ist das genau für $q = 2$ der Fall.

Die gesuchten Werte sind also: $q = 2$, a_0 beliebig von 0 verschieden.

L.9.2

Es ist $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{4}$.

Behauptung: Der Term $f(n) = \frac{1}{n+1}$ hat die Eigenschaft (*).

Beweis (durch vollständige Induktion): Die Behauptung ist richtig für $n = 0$, denn es gilt

$$f(0) = \frac{1}{0+1} = 1 = x_0$$

Nun zeigen wir, dass für jede natürliche Zahl $k > 0$ aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = k$ deren Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt:

Aus $f(k) = \frac{1}{k+1} = x_k$ ergibt sich

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{x_k + 1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k+1} + 1} = \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)+1} = f(k+1)$$

Ein anderer Beweis: Die Zahlenfolge (z_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, die durch $z_n = \frac{1}{n+1}$ definiert ist, hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{0+1} = 1 \\ z_n &= \frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{z_{n-1}}{1 + z_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Da diese Eigenschaften die gegebene Folge (x_n) eindeutig festlegen, gilt $x_n = z_n = \frac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

L.9.3

a) Durch Einsetzen von $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ in (*) erhält man

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 13, a_5 = 21, a_6 = 31, a_7 = 43, \\ D_1^{(1)} &= 2, D_2^{(1)} = 4, D_3^{(1)} = 5, D_4^{(1)} = 8, D_5^{(1)} = 10, D_6^{(1)} = 12, \\ D_1^{(2)} &= D_2^{(2)} = D_3^{(2)} = D_4^{(2)} D_5^{(2)} = 2 \end{aligned}$$

b) Allgemein gilt für alle positiven ganzen n wegen (*)

$$D_n^{(1)} = c_2(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_0 - c_2n^2 - c_1n - c_0 = 2c_2n + c_2 + c_1$$

und daher

$$D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)} = 2c_2(n+1) + c_2 + c_1 - 2c_2n - c_2 - c_1 = 2c_2$$

Also ist $D_n(2)$ für alle positiven ganzen n konstant.

L.9.4

a) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{25(n+1)^2 + 7(n+1) + 1} - 5(n+1) - \sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5n \\ &= \sqrt{25(n+1)^2 + 7(n+1) + 1} - (\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5) \end{aligned}$$

und wegen $\sqrt{25n^2 + 7n} + 1 + 5 > 0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + (50n + 7)} - \sqrt{(\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5)^2} \\ &= \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + (50n + 7)} - \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + 10\sqrt{25n^2 + 7n + 1}} \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$100(25n^2 + 7n + 1) > 2500n^2 + 700n + 49 = (50n + 7)^2 \quad (1)$$

und daher

$$10\sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 50n + 7 \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich $a_{n+1} - a_n < 0$ für alle n , d. h., die Folge ist streng monoton fallend.

b) Aus (2) folgt $\sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 5n + \frac{7}{10}$, also

$$a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n > \frac{7}{10} = 0,7$$

Oder: Die Bedingung $a_n > 0,7$ ist äquivalent mit

$$\sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 5n + \frac{7}{10}$$

und diese mit der offensichtlich richtigen Ungleichung

$$25n^2 + 7n + 1 > 25n^2 + 7n + \left(\frac{7}{10}\right)^2$$

L.9.5

a) Für jede geometrische Folge $a_n = a_0 q^n$ mit dem Quotienten $q = -\frac{1}{2}$ gilt

$$a_{n+2} = a_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} = a_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left(a_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + a_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$$

Darüber hinaus reicht sogar die ($a_1 = a_0 q$ mit $q = -\frac{1}{2}$ erfüllende) Vorgabe der Anfangsglieder a_0, a_1 und die Forderung von $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ aus, um alle Glieder der Folge eindeutig festzulegen. Für die in der Aufgabenstellung gegebene Folge (a_n) sind nun alle diese Bedingungen erfüllt, also stimmt sie mit einer geometrischen Folge vom Quotienten $q = -\frac{1}{2}$ überein.

Damit ist (a_n) als geometrische Folge mit dem Anfangsglied -4 und dem Quotienten $-\frac{1}{2}$ nachgewiesen. Die Summe der zugehörigen unendlichen Reihe beträgt somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{-4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{8}{3}$$

b) Angenommen, a_0 und a_1 seien so beschaffen, dass das in der Aufgabenstellung genannte Bildungsgesetz auf eine geometrische Folge (a_n) führt, d. h., dass mit einer geeigneten Zahl q für $n = 1, 2, 3, \dots$ die Gleichung $a_n = a_0 q^n$ gilt.

Ist $a_0 = 0$, so folgt $a_1 = 0$, $q = 0$.

Ist $a_0 \neq 0$, so folgt $a_0 q^2 = a_2 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1) = \frac{1}{2}(a_0 + a_0 q)$ und hieraus $q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0$, d.h. entweder $q = 1$, wegen $a_1 = a_0 q$ also

$$a_1 = a_0 \tag{1}$$

oder $q = -\frac{1}{2}$, wegen $a_1 = a_0 q$ also

$$2a_1 + a_0 = 0 \tag{2}$$

Da man nachträglich bestätigt, dass im Fall $a_0 = a_1 = 0$ sowohl (1) als auch (2) gelten, ergibt sich:

Es kann nur dann eine geometrische Folge entstehen, wenn a_0 und a_1 (mindestens) eine der Bedingungen (1), (2) erfüllen.

Beweis, dass jede dieser Bedingungen auch hinreichend ist: Gilt (1) oder (2), so ist $a_1 = a_0 q$ mit $q = 1$ oder mit $q = -\frac{1}{2}$, also jedenfalls mit $q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0$, und somit ist

$$a_0 q^{n+2} = \frac{1}{2}(a_0 q^n + a_0 q^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wie bei a) folgt daraus, dass (a_n) eine geometrische Folge ist.

Als eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (a_n) eine geometrische Folge ist, erhält man also, dass eine der beiden Gleichungen (1) oder (2) erfüllt ist.

L.9.6

a) Es genügt, ein Beispiel anzugeben. Ein solches ist etwa $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$, denn für alle geraden n wird

$$c_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}$$

und für alle ungeraden n wird

$$c_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

b) Für jedes rationale a gibt es eine ganze Zahl p und eine positive Zahl q mit $a = \frac{p}{q}$. Für jedes $n = 1, 2, \dots$ gilt dann

$$\begin{aligned} c_{n+q} &= \frac{p}{q}(n+q) + b - \left[\frac{p}{q}(n+q) + b \right] = \frac{p}{q}n + p + b - \left[\frac{p}{q}n + p + b \right] \\ &= \frac{p}{q}n + p + b - \left(\left[\frac{p}{q}n + b \right] + p \right) = \frac{p}{q}n + b - \left[\frac{p}{q}n + b \right] = c_n \end{aligned}$$

Somit besteht der Wertevorrat einer derartigen Folge nur aus den endlich vielen (verschiedenen unter den) Zahlen c_1, \dots, c_q ; die Folge besitzt daher ein Minimum.

L.9.7

Für $h = 0$ ist $F(x) = f(x)$, die Behauptung also richtig. Sei nun $h \neq 0$. Es ist

$$F'(x) = f'(x) + hf''(x) + h^2f'''(x) + \dots + h^n f^{(n+1)}(x)$$

und $f^{(n+1)}(x) = 0$, also

$$hF'(x) = hf'(x) + h^2f''(x) + \dots + h^n f^{(n)}(x) \quad \text{d.h.} \quad hF'(x) = F(x) - f(x)$$

Da $f(x)$ keine reellen Nullstellen hat, muss der Grad n von $f(x)$ gerade sein. Der Grad von $F(x)$ stimmt mit dem Grad von $f(x)$ überein, da der Koeffizient von x^n bei beiden ganzen rationalen Funktionen übereinstimmt.

Man schließt nun indirekt:

Angenommen, $F(x)$ habe eine reelle Nullstelle x_1 . Dann hat $\frac{F(x)}{x-x_1}$ als ganzrationale Funktion ungeraden Grades ebenfalls mindestens eine reelle Nullstelle, also hat $F(x)$ entweder zwei verschiedene Nullstellen x_1, x_2 , oder x_1 ist eine mehrfache Nullstelle.

Der zweite Fall führt auf den Widerspruch $F(x_1) = F'(x_1) = 0$, also $f(x_1) = 0$.

Im ersten Fall seien zwei verschiedene Nullstellen $a < b$ von $F(x)$ so gewählt, dass zwischen ihnen keine weitere liegt. (Das ist möglich, da $F(x)$ nur endlich viele Nullstellen haben kann.) Dann gilt

$$hF'(a) = -f(a) \quad , \quad hF'(b) = -f(b) \quad (1)$$

und da $f(x)$ keine Nullstellen hat, stimmen die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ miteinander überein, also stimmen wegen $h \neq 0$ auch die Vorzeichen von $F'(a)$ und $F'(b)$ miteinander überein. Da andererseits zwischen a und b keine Nullstelle von $F(x)$ liegt, hat $F(x)$ für alle x mit $a < x < b$ einheitliches Vorzeichen.

Ist etwa $F(x) > 0$ für alle diese x , so gilt für sie

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{F(x)}{x - a} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = \frac{F(x)}{x - b} < 0$$

also

$$F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{und} \quad F'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} \leq 0$$

Demnach haben $F'(a)$ und $F'(b)$, die wegen (1) auch beide von 0 verschieden sind, entgegengesetzte Vorzeichen. (Entsprechend schließt man dies, wenn $F(x) < 0$ für alle $a < x < b$ gilt.)

Der erhaltene Widerspruch zeigt, dass die Annahme, $F(x)$ habe eine reelle Nullstelle, falsch war.

L.9.8

a) Zu beweisen ist, dass für jede ganzrationale Funktion f ein reelles x mit $f(x) \leq f''(x)$ oder $f'(x) \leq f''(x)$ existiert.

Zu jeder ganzrationalen Funktion f gibt es eine natürliche Zahl n und reelle Zahlen a_0, \dots, a_n mit $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ sowie, wenn $n > 0$ ist, $a_n \neq 0$. Daraus folgt

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right), \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

$$f'(x) = x^{n-1} \left(n a_n + \frac{((n-1)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{1 \cdot a_1}{x^{n-1}} \right), \quad (n \geq 2) \quad (2)$$

$$f''(x) = x^{n-2} \left(n(n-1)a_n + \frac{((n-1)(n-2)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{2 \cdot 1 \cdot a_2}{x^{n-2}} \right), \quad (n \geq 3) \quad (3)$$

...

$$\frac{f(x)}{f''(x)} = x^2 \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{n(n-1)a_n + \frac{(n-1)(n-2)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{2 \cdot 1 \cdot a_2}{x^{n-2}}} \quad (n \geq 3) \quad (4)$$

Dabei sind die Werte $x = 0$ sowie bei (4) die höchstens endlich vielen Nullstellen von $f''(x)$ auszuschließen.

Nun sind genau die folgenden Fälle möglich:

Fall 1: $n = 0$. Dann gilt $f'(x) = f''(x) = 0$ für alle x .

Fall 2: $n = 1$. Dann gilt die Beziehung $f(x) \leq 0 = f''(x)$, wenn $a_1 > 0$ ist, für alle $x \leq -\frac{a_0}{a_1}$, wenn aber $a_1 < 0$ ist, für alle $x \geq -\frac{a_0}{a_1}$.

Fall 3: $n > 2$ gerade, $a_n > 0$. Nach (2) gilt dann $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = -\infty$. Ferner gilt, falls

$n = 2$ ist, $f''(x) > 0$ für alle x ; falls aber $n > 2$ ist, gilt nach (3) dann $\lim_{x \rightarrow -\infty} f''(x) = +\infty$. Daher existiert ein x mit $f'(x) \leq f''(x)$.

Fall 4: $n \geq 2$ gerade, $a_n < 0$. Nach (1) gilt dann $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, nach (4) ferner $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f''(x)} = +\infty$.

Daher existiert ein x mit $f(x) < 0$, $\frac{f(x)}{f''(x)} \geq 1$. Aus beiden Ungleichungen folgt zunächst $f''(x) < 0$ und daher nach Multiplikation der zweiten mit $f''(x)$ dann $f(x) \leq f''(x)$.

Fall 5: $n \geq 3$ ungerade, $a_n > 0$. Dann gelten dieselben Aussagen wie in Fall 4.

Fall 6: $n \geq 3$ ungerade, $a_n < 0$. Dann gelten dieselben Aussagen wie in Fall 3.

Damit ist die Behauptung in jedem Fall bewiesen.

b) Bei der genannten Ersetzung entsteht eine falsche Behauptung, wie etwa folgendes Gegenbeispiel beweist:

Ist $f(x) = x^2 + 3$, so gilt $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Für alle x gilt wegen $x^2 + 3 > 2$ daher

$$f(x) > f''(x)$$

sowie wegen $(x - 1)^2 + 2 > 0$, also $x^2 + 3 > 2x$, auch

$$f(x) > f'(x)$$

Bemerkung: Übrigens gibt es, wie das Beispiel, $f(x) = 2 - e^x + e^{-x}$ zeigt, Funktionen, bei denen für jedes x die Ungleichungen (*) und (**) gelten.

L.9.9

a) Für $x \geq 0$ ist $f(x) \geq 1 > 0$. Wenn also überhaupt eine reelle Nullstelle ξ existiert, kann sie nur negativ sein, und es gilt

$$f'(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \dots + \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} = f(\xi) - \frac{\xi^n}{n!} = -\frac{\xi^n}{n!} \begin{cases} < 0 & \text{für ungerades } n \\ > 0 & \text{für gerades } n \end{cases}$$

b) Angenommen, $f(x)$ habe mehr als eine Nullstelle. Da $f(x)$ als Polynom positiven Grades nur endlich viele Nullstellen haben kann, gibt es dann zwei benachbarte Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$, so dass wegen der Stetigkeit die Funktion $f(x)$ auf Grund des Zwischenwertsatzes für alle x mit $\xi_1 < x < \xi_2$ dasselbe Vorzeichen haben muss.

c) Für alle genügend nahe rechts von ξ_1 gelegenen x gilt nach a) und einem bekannten Satz über den Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der ersten Ableitung und dem lokalen Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen, angewandt auf ξ_1 ,

bei geradem n die Ungleichung $f(x) < f(\xi_1) = 0$,

bei ungeradem n die Ungleichung $f(x) > f(\xi_1) = 0$.

d) Für alle genügend nahe links von ξ_2 gelegenen x gilt nach a) und dem unter c) erwähnten Satz, angewandt auf ξ_2 ,

bei geradem n die Ungleichung $f(x) > f(\xi_2) = 0$,

bei ungeradem n die Ungleichung $f(x) < f(\xi_2) = 0$.

Die Aussagen b), c), d) bilden in jedem Fall einen Widerspruch, womit der verlangte Beweis geführt ist.

L.9.10

Das Paar $(a, b) \in \mathfrak{M}$ mit $a = b$ besteht aus den Zahlen

$$a = \frac{c}{2}, \quad b = \frac{c}{2}$$

Für jedes Paar $(a, b) \in \mathfrak{M}$ sei t diejenige rationale Zahl, für die $a = \frac{c}{2} + t$ ist. Dann ist

$$b = c - a = c - \left(\frac{c}{2} + t\right) = \frac{c}{2} - t$$

Somit gilt

$$ab = \left(\frac{c}{2} + t\right) \left(\frac{c}{2} - t\right) = \frac{c^2}{4} - t^2 \leq \frac{c^2}{4}$$

da stets $t^2 \geq 0$ ist.

Also liefert das aus dem Paar $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$ gebildete Produkt den größten Wert $\frac{c^2}{4}$ unter allen Produkten ab mit $(a, b) \in \mathfrak{M}$.

L.9.11

a) Wegen $3808 = 2^5 \cdot 7 \cdot 17$ sind alle Quadratzahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 4 und 16. Ferner sind alle ungeraden natürlichen Zahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 7, 17 und $7 \cdot 17 = 119$. Daraus folgt:

Eine natürliche Zahl n kommt genau dann als zweite Zahl in einem der zu betrachtenden Tripel (k, n, m) vor, wenn sie eine der Zahlen

$$1, 2, 4 \tag{1}$$

ist.

Eine natürliche Zahl m kommt genau dann als dritte Zahl in einem Tripel (k, n, m) vor, wenn $2m + 1$ eine der Zahlen 1, 7, 17, 119 ist, d.h. genau dann, wenn m eine der Zahlen

$$0, 3, 8, 59 \tag{2}$$

ist.

Für jedes Paar (n, m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt es genau eine natürliche Zahl k , so dass (k, n, m) eines der zu betrachtenden Tripel ist, nämlich

$$k = \frac{3808}{n^2(2m+1)} \tag{3}$$

Da es genau zwölf verschiedene Paare (n, m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt:

$$(1,0), (2,0), (4,0), (1,3), (2,3), (4,3), (1,8), (2,8), (4,8), (1,59), (2,59), (4,59)$$

und da die hiermit entstehenden Tripel (k, n, m) erst recht voneinander verschieden sind, beträgt deren Anzahl somit ebenfalls 12.

b) Es gilt stets $k, n, m \geq 0$. Der Wert $kmn = 0$ wird nach (1), (2), (3) genau dann angenommen, wenn $m = 0$ ist. Er ist somit für alle betrachteten Tripel der kleinste Wert und wird genau für die Tripel mit $m = 0$, n aus (1) und k aus (3), d. h. genau für

$$(3808, 1, 0), \quad (952, 2, 0), \quad (238, 4, 0)$$

angenommen.

L.9.12

Wegen $x + y + z = -\delta$ muss $z = -(x + y + \delta)$ gelten. Damit erhält man für S :

$$S = 2(x^2 + xy + y^2 + \delta x + \delta y) + \delta^2 \quad (1)$$

Für die Werte $h = x + \frac{\delta}{3}$, $k = y + \frac{\delta}{3}$ gilt

$$x = -\frac{\delta}{3} + h, \quad y = -\frac{\delta}{3} + k$$

und aus (1) folgt

$$S = \frac{\delta^2}{3} + 2(h^2 + hk + k^2) = \frac{\delta^2}{3} + 2\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right) \quad (2)$$

Nach (2) ist $S \geq \frac{\delta^2}{3}$, wobei die Gleichheit genau dann eintritt, wenn

$$h + \frac{k}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}k = 0$$

gilt, d. h. genau für $h = k = 0$. Daher ist $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten, wenn gilt

$$x = y = z = \frac{\delta}{3}$$

L.9.13

Es sei

$$\begin{aligned} s_1 &= a + b + c + d \\ s_2 &= ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ s_3 &= abc + abd + acd + bcd \end{aligned}$$

Dann ist die zu beweisende Relation mit

$$27s_3^2 \leq 2s_2^3 \quad (1)$$

äquivalent. Zum Beweis von (1) genügt es, die beiden Ungleichungen

$$3s_1^2 \geq 8s_2, \quad 4s_2^2 \geq 9s_1s_3 \quad (2,3)$$

zu beweisen, in deren jeder Gleichheit genau für $a = b = c = d$ eintritt. Aus (3) und (2) folgt nämlich

$$16s_4^2 \geq 81s_1^2s_3^2 \geq 8 \cdot 27s_3^2s_2$$

und hieraus (1) wegen $s_2 > 0$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn sie in (2) und (3) gilt, also wenn $a = b = c = d$ ist.

Die Beziehungen (2) und (3) einschließlich der Gleichheitsaussage ergeben sich auf folgende Weise.

Elementarer Weg: Es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} 3s_1^2 - 8s_2 &= 3(a+b+c+d)^2 - 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} 4s_2^2 - 9s_1s_3 &= 4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 - 9(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd) \\ &= (a^2+ab+b^2)(c-d)^2 + (a^2+ac+c^2)(b-d)^2 + (a^2+ad+d^2)(b-c)^2 \\ &\quad + (b^2+bc+c^2)(a-d)^2 + (b^2+bd+d^2)(a-c)^2 + (c^2+cd+d^2)(a-b)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

aus denen (2) bzw. (3) einschließlich der Gleichheitsaussage unmittelbar folgen.

Benutzung der Differentialrechnung:

Das Polynom

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x + s_4$$

mit $s_4 = abcd$ hat die vier positiven Nullstellen a, b, c, d , wobei jede ihrer Vielfachheit entsprechend oft hingeschrieben worden ist. Nach dem Satz von Rolle liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden von ihnen eine Nullstelle von

$$P'(x) = 4x^3 - 3s_1x^2 + 2s_2x - s_3$$

und wenn k der Nullstellen von $P(x)$ zusammenfallen, ist diese Nullstelle eine $(k-1)$ -fache Nullstelle von $P'(x)$. Infolgedessen hat auch

$$x^3P'\left(\frac{1}{x}\right) = 4 - 3s_1x + 2s_2x^2 - s_3x^3$$

drei positive reelle Nullstellen, wenn jede ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählt wird. Daher hat sowohl

$$P''(x) = 12x^2 - 6s_1x + 2s_2 \quad \text{als auch} \quad \left(x^3P'\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -3s_1 + 4s_2 - 3s_2x^2$$

je zwei positive Nullstellen, die jeweils genau dann zusammenfallen, wenn $a = b = c = d$ ist. Folglich ist die Diskriminante jedes der beiden quadratischen Polynome nicht kleiner als null und gleich null genau dann, wenn $a = b = c = d$ ist, d. h., es gilt

$$\begin{aligned} D(P''(x)) &= 9s_1^2 - 24s_2 = 3(3s_1^2 - 8s_2) = 0 \\ D\left(\left(x^3P'\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\right) &= 4s_2^2 - 9s_1s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

mit der entsprechenden Aussage über das Gleichheitszeichen, woraus unmittelbar (2) bzw. (3) mit der zugehörigen Gleichheitsaussage folgen.

L.9.14

Für alle positiven reellen Zahlen a, b gilt

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \\ &= \left(\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2 \geq \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 2 \end{aligned}$$

Dabei kann das Gleichheitszeichen nur gelten, wenn $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0$ ist, woraus (wegen $a, b > 0$) $a = b$ folgt.

Umgekehrt gilt für $a = b > 0$ sowohl $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0$ als auch $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$, also das ebengenannte Gleichheitszeichen. Somit nimmt $f(a,b)$ den Wert 2 als kleinsten Wert an.

L.9.15

Es gilt

$$\begin{aligned} 2\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 2\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + 8 \\ &= (a+b)^2 + (a-b)^2 + \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(ab)^2} + 8 \end{aligned}$$

Wegen $a + b = 1$ ist also

$$2\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 2\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = (a-b)^2 + \frac{(a-b)^2 + 1}{(ab)^2} + 9$$

Der Term (2) erreicht für positive a, b mit $a + b = 1$ sein Minimum genau dann, wenn $a = b$ ist.

Beweis: Es gilt $(a-b)^2 \geq 0$ für alle positiven reellen Zahlen a und b , und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b$ ist. In diesem Fall wird der erste Summand von (2) gleich 0, und beim zweiten Summanden erreicht der Zähler sein Minimum. Nun gilt

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

und das Gleichheitszeichen tritt wieder genau ein, wenn $a = b$ ist. In diesem Fall erhält man daher für den Nenner des zweiten Summanden ein Maximum. Deshalb erreicht auch der zweite Summand und somit die Summe für $a = b$, d.h. wegen $a + b = 1$ für $a = b = \frac{1}{2}$, ihr Minimum.

Folglich ist der kleinste Wert, den der Term (1) unter Berücksichtigung von $a + b = 1$ annimmt,

$$2\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 = 25$$

Daher gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung:

Setzt man $a = x$, so wird wegen $a + b = 1$

$$b = 1 - x$$

Man hat nun zu zeigen, dass die für alle x mit $0 < x < 1$ definierte Funktion

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(1 - x + \frac{1}{1 - x}\right)^2 \quad (1)$$

die Zahl $\frac{25}{2}$ als kleinsten Funktionswert im Definitionsintervall $(0, 1)$ hat. Man erhält

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x^2}\right) + 2 \left(1 - x + \frac{1}{1 - x}\right) \left(-1 + \frac{1}{(1 - x)^2}\right) \\ &= 2 \left(\frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^3} - \frac{((1 - x)^2 + 1)((1 - x)^2 - 1)}{(1 - x)^3}\right) \\ &= \frac{2}{(x(1 - x))^3} (x^4 - 1)(1 - x)^3 - x^3((1 - x)^4 - 1) \end{aligned} \quad (2,3)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} (x^4 - 1)(1 - x)^3 - x^3((1 - x)^4 - 1) &= \\ &= (x(1 - x))^3 x - (x(1 - x))^3 (1 - x) - 1 + 3x - 3x^2 + x^3 + x^3 \\ &= (x(1 - x))^3 (2x - 1) + 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1 \\ &= (x(1 - x))^3 (2x - 1) + (x^2 - x + 1)(2x - 1) \\ &= (2x - 1)(x(1 - x))^3 - x(1 - x) + 1 \end{aligned}$$

also

$$f'(x) = \frac{2(2x - 1)(x(1 - x))^3 - x(1 - x) + 1}{(x(1 - x))^3} \quad (4)$$

Für $0 < x < 1$ ist $f'(x) = 0$ nur dann, wenn $2x - 1 = 0$, d. h. $x = \frac{1}{2}$ gilt; denn es ist wegen $0 < x(1 - x) < 1$

$$(x(1 - x))^3 - x(1 - x) + 1 > 0 - 1 + 1 = 0$$

Nun gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$$

Daher gibt es eine positive Zahl $\delta < \frac{1}{2}$ so, dass für alle x mit $0 < x \leq \delta$ und für alle x mit $1 - \delta < x < 1$ die Ungleichung $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ erfüllt ist. In dem abgeschlossenen Intervall $[\delta, 1 - \delta]$ hat die dort stetige Funktion $f(x)$ einen kleinsten Funktionswert.

Nach Definition von δ kann dieser nicht an den Randstellen δ , $1 - \delta$ angenommen werden. Da er somit an einer inneren Stelle angenommen wird, gilt für jede Stelle ξ , an der dies der Fall ist, $f'(\xi) = 0$, also $\xi = \frac{1}{2}$.

Damit ist gezeigt, dass $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}$ der kleinste Funktionswert von $f(x)$ im Intervall $[\delta, 1 - \delta]$ ist. Nach Definition von δ ist dies zugleich auch der kleinste Funktionswert von $f(x)$ im Intervall $(0, 1)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

L.9.16

a) Es gilt $f(0) = \frac{1}{3}$ und für alle x wegen $1 - x^2 \leq 1$, $x^6 + 4 \geq 4$

$$f(x) \leq \frac{1}{4}$$

d.h., die Funktion f nimmt $\frac{1}{4}$ als ihren größten Wert an.

b) Es gilt weiter

$f(x) \geq 0$ für alle x mit $x^2 \leq 1$,

$f(x) < 0$ für alle x mit $x^2 > 1$

d.h., der kleinste Wert wird, falls er überhaupt existiert, für ein x mit $x^2 > 1$ angenommen.

Für je ein x mit $x^2 > 1$ setzen wir $x^2 - 1 = t$; dann wird $t > 0$ und $x^6 + 4 = (t + 1)^3 + 4 = t^3 + 3t^2 + 3t + 5$, also

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-t}{t^3 + 3t^2 + 3t + 5} = \frac{-t}{t(t^2 - 2t + 1) + 5t^2 + 2t + 5} \\ &= \frac{-t}{(t + 5)(t^2 - 2t + 1) + 12t} = \frac{-1}{\left(1 + \frac{5}{t}\right)(t - 1)^2 + 12} \end{aligned}$$

Wegen $1 + \frac{5}{t} > 0$ und $(t - 1)^2 \geq 0$ für alle $t > 0$ folgt hieraus $f(x) \geq -\frac{1}{12}$ für alle x mit $x^2 > 1$ (und daher nach dem oben Bemerkten für alle x). Das Gleichheitszeichen gilt genau für $t = 1$, d.h. für alle x mit $x^2 = 2$. Somit nimmt f als kleinsten Wert $-\frac{1}{12}$ an.

Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung:

Man erhält

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x^6 - 3x^4 - 4)}{(x^6 + 4)^2} \\ f''(x) &= \frac{2(-10x^{12} + 21x^{10} + 100x^6 - 60x^4 - 16)}{(x^6 + 4)^3} \end{aligned}$$

und $f'(x) = 0$ genau für

$$x_1 = 0 \tag{1}$$

oder

$$x_\nu^6 - \frac{3x_\nu^4}{2} - 2 = 0 \tag{2}$$

Als eine Lösung der kubischen Gleichung (2) für die Variable x_ν^2 kann man z. B. durch Probieren $x_\nu^2 = 2$ finden, und dann führt die Division durch $x_\nu^2 - 2$ auf die Gleichung

$$x_\nu^6 - \frac{3}{2}x_\nu^4 - 2 = (x_\nu^2 - 2) \left(x_\nu^4 + \frac{1}{2}x_\nu^2 + 1 \right) = 0$$

Wegen

$$x_\nu^4 + \frac{1}{2}x_\nu^2 + 1 = \left(x_\nu^2 + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} > 0$$

für alle reellen x_ν hat die Gleichung (2) also genau die reellen Lösungen $x_2 = \sqrt{2}$ und $x_3 = -\sqrt{2}$. $f(x)$ hat also genau die Nullstellen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}$$

und nur an diesen Stellen können - wenn überhaupt - Extremwerte vorliegen.

Die Vorzeichenbestimmung von $f''(x_\nu)$ ($\nu = 1, 2, 3$) würde zunächst nur die Aussagen über das lokale Verhalten von $f(x)$ an diesen Stellen ergeben (bei x_1 lokales Maximum, bei x_2 und x_3 lokale Minima). Die gesuchten globalen Aussagen kann man z. B. folgendermaßen erhalten:

1. Zurückführung auf ein endliches abgeschlossenes Intervall: Es ist

$$f(x_1) = \frac{1}{4}, \quad f(x_2) = f(x_3) = -\frac{1}{12}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ gibt es eine Zahl $z > \sqrt{2}$, so dass

$$-\frac{1}{12} < f(x) < \frac{1}{4} \quad (3)$$

für alle $x \leq -z$ und für alle $x \geq z$ gilt.

Durchläuft x nun das Intervall $[-z, z]$, so gibt es wegen der Stetigkeit unter den dann auftretenden Funktionswerten $f(x)$ einen größten und einen kleinsten, und diese können nur an den Stellen $x_1, x_2, x_3, z, -z$ angenommen werden.

Ein Vergleich der Funktionswerte an diesen Stellen zeigt, dass $\frac{1}{4}$ bzw. $-\frac{1}{12}$ der größte bzw. kleinste Funktionswert von $f(x)$ im Intervall $[-z, z]$ ist, und aus (3) folgt, dass sie es auch im Intervall $(-\infty, +\infty)$ sind.

2. Die globale Aussage über die Minima kann auch durch Monotonieuntersuchung gewonnen werden: Im Intervall

$$\left. \begin{array}{l} (-\infty, -\sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}, 0) \\ (0, \sqrt{2}) \\ (\sqrt{2}, \infty) \end{array} \right\} \text{ ist } f'(x) \left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ > 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{array} \right.$$

also $f(x)$ im Intervall

$$\left. \begin{array}{l} (-\infty, -\sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}, 0) \\ (0, \sqrt{2}) \\ (\sqrt{2}, \infty) \end{array} \right\} \text{streng monoton} \left\{ \begin{array}{l} \text{fallend} \\ \text{steigend} \\ \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{array} \right.$$

Daher ist $f(x) > f(-\sqrt{2})$ für alle $x \neq -\sqrt{2}$ aus $(-\infty, 0]$ und $f(x) > f(\sqrt{2})$ für alle $x \neq \sqrt{2}$ aus $[0, +\infty)$.

Somit ist $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2})$ der kleinste Funktionswert.

3. Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ gilt auf Grund der Monotonie in $(-\infty, -\sqrt{2})$ und in $(\sqrt{2}, +\infty)$

$$f(x) < 0$$

und in $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$f(x) < f(x_1) = \frac{1}{4}$$

L.9.17

Zur Abkürzung sei

$$D(x) = f(x) - g(x) \quad \text{und} \quad B(x) = |D(x)|$$

gesetzt. Da f , g und folglich auch D , B gerade Funktionen sind, genügt es, das Intervall $0 \leq x \leq 2$ zu untersuchen. In diesem Intervall ist

$$D(x) = ax^2 - x$$

Die Funktion D hat in diesem Intervall folgende Eigenschaften, die man entweder aus der Zerlegung

$$D(x) = x(ax - 1) \quad \text{sowie der Ableitung} \quad D'(x) = 2ax - 1$$

oder aber aus der geometrischen Deutung von

$$D(x) = a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 - \frac{1}{4a}$$

(Parabel $y = x^2$, mit dem Faktor a gedehnt oder gestaucht und dann so verschoben, dass der Scheitel die Koordinaten $\frac{1}{2a}, -\frac{1}{4a}$ hat) ablesen kann:

Für $x = 0$ ist $D(x) = 0$.

Für $0 < x < \frac{1}{a}$ ist $D(x) < 0$.

Für $x = \frac{1}{a}$ ist $D(x) = 0$.

Für $x > \frac{1}{a}$ ist $D(x) > 0$.

Im Intervall $0 \leq x \leq \frac{1}{2a}$ ist $D(x)$ streng monoton fallend, im Intervall $x > \frac{1}{2a}$ streng

monoton steigend. Daraus ergeben sich für die Funktion B , auch zunächst im Intervall $x \geq 0$ betrachtet, folgende Eigenschaften:

Im Intervall $0 \leq x \leq \frac{1}{2a}$ ist $B(x) = -D(x)$ streng monoton steigend.

Im Intervall $\frac{1}{2a} < x \leq \frac{1}{a}$ ist $B(x) = -D(x)$ streng monoton fallend.

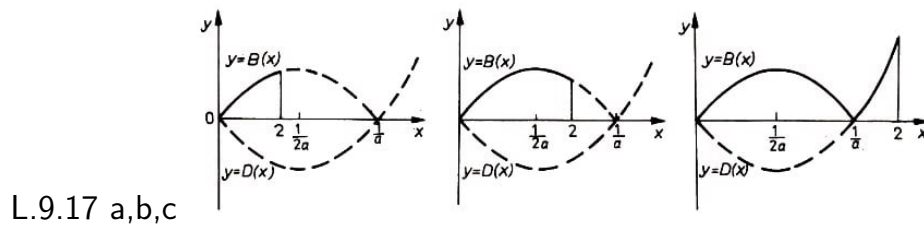
Im Intervall $x \geq \frac{1}{a}$ ist $B(x) = D(x)$ streng monoton steigend.

Hieraus folgt weiter:

a) Ist $2 < \frac{1}{2a}$ so ist $B(2)$ der größte Funktionswert von B im Intervall $0 \leq x \leq 2$ (Abb. L.9.17a).

b) Ist $\frac{1}{2a} \leq 2 \leq \frac{1}{a}$, so ist $B\left(\frac{1}{2a}\right)$ der größte Funktionswert von B im Intervall $0 \leq x \leq 2$ (Abb. L.9.17b).

c) Ist $2 \geq \frac{1}{a}$, so ist die größere der Zahlen $B\left(\frac{1}{2a}\right)$, $B(2)$ der größte Funktionswert von B im Intervall $0 \leq x \leq 2$ (Abb. L.9.17c).



Im Fall $2 \leq \frac{1}{a}$ ist nun $B(2) = -D(2) = -4a + 2$, im Fall $2 \geq \frac{1}{a}$ aber $B(2) = D(2) = 4a - 2$, ferner ist in jedem Fall $B\left(\frac{1}{2a}\right) = -D\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a}$. Im Fall $2 \geq \frac{1}{a}$ gilt daher je eine der Beziehungen

$$B\left(\frac{1}{2a}\right) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} B(2) \quad (1)$$

genau dann, wenn (außer $2 \geq \frac{1}{a}$) je entsprechende unter den Beziehungen

$$\frac{1}{4a} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 4a - 2$$

oder, der Reihe nach hiermit äquivalent,

$$0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} a^2 - \frac{a}{2} - \frac{1}{16}, \quad 0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \left(a - \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})\right) \left(a - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{2})\right)$$

gültig ist. Beachtet man nun noch, dass wegen $\sqrt{2} > 1$

$$\frac{1}{4}(1 + \sqrt{2}) > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{2}) > 0$$

ist, so ergibt sich aus a), b), c) und der Untersuchung von (1) insgesamt:

Ist $a \leq \frac{1}{4}$, so hat der "Abstand" von f und g den Wert $-4a + 2$.

Ist $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$, so hat der "Abstand" von f und g den Wert $\frac{1}{4a}$.

Ist $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})$, so ist $B\left(\frac{1}{2a}\right) > B(2a)$, also hat der "Abstand" von f und g den Wert $\frac{1}{4}$.

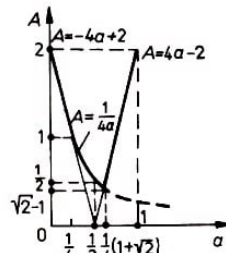
Ist $a \geq \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})$, so ist $B\left(\frac{1}{2a}\right) \leq B(2a)$, also hat der "Abstand" von f und g den Wert $4a - 2$.

Damit ist der Abstand von f und g als Funktion A der Variablen a im Intervall $a \geq \frac{1}{4}$ dargestellt, und diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

Im Intervall $0 < a \leq \frac{1}{4}$ ist $A(a) = -4a + 2$ streng monoton fallend.

Im Intervall $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})$ ist $A(a) = \frac{1}{4a}$ streng monoton fallend.

Im Intervall $a \geq \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})$ ist $A(a) = 4a - 2$ streng monoton steigend. (Abb. L.9.17d).



L.9.17 d

Daher gibt es einen und nur einen Wert a , für den der Abstand zwischen f und g möglichst klein ist, nämlich den Wert

$$a = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})$$

L.9.18

Es sei n die Anzahl der Reihen. Dann ist die Anzahl s aller verwendeten Büchsen wegen Bedingung 1 und 2 gleich der Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n , also gilt

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n$$

Wegen Bedingung 3 und 4 muss diese Summe durch 3 teilbar sein. Wegen Bedingung 3, 5 und 6 gilt weiter $n > 3$.

Für $n = 3$ ist $s = 6$. Da es in diesem Fall genau drei Reihen gibt, ist wegen Bedingung 5, 6 und 3 die Bedingung 4 nicht erfüllbar.

Für $n = 4$ ist $s = 10$, also nicht durch 3 teilbar.

Für $n = 5$ ist $s = 15$. Wegen Bedingung 4 müssten also von jeder Sorte genau fünf Büchsen verwendet werden. Da wegen Bedingung 1 und 2 in diesem Fall die unterste Reihe fünf Büchsen enthält, müssten die übrigen beiden Sorten so auf die restlichen vier Reihen verteilt werden, dass jeweils fünf Büchsen der beiden Sorten verwendet werden. Andererseits müssten wegen Bedingung 6 die Sorten von Reihe zu Reihe wechseln. Nun enthalten die Reihen aber nacheinander die Anzahlen 4, 3, 2, 1, und es ist $4 + 2 \neq 3 + 1$. Daher lassen sich auch für $n = 5$ die Bedingungen 1 bis 6 nicht gleichzeitig erfüllen.

Für $n = 6$ ist $s = 21$. Wegen Bedingung 4 müssten mithin von jeder Sorte genau sieben Büchsen verwendet werden. Da wegen Bedingung 1 und 2 in diesem Fall die unterste Reihe sechs Büchsen enthält, müsste die siebente Büchse der für die unterste Reihe verwendeten Sorte in der obersten Reihe stehen.

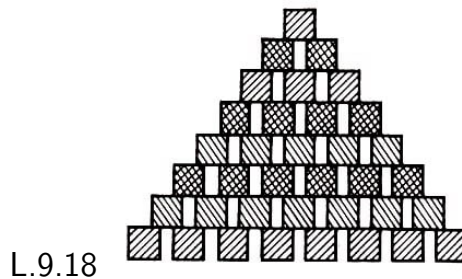
Die restlichen Reihen mit zwei, drei, vier bzw. fünf Büchsen wären dann mit den restlichen beiden Büchsenarten zu besetzen, und zwar wegen Bedingung 6 abwechselnd. Wegen $2 + 4 \neq 3 + 5$ ist dann aber Bedingung 4 nicht erfüllt.

Für $n = 7$ ist $s = 28$, also nicht durch 3 teilbar.

Für $n = 8$ ist $s = 36$. Stellt man die erste Sorte Büchsen in die Reihen mit einer, drei bzw. acht Büchsen, die zweite Sorte in die Reihen mit zwei, vier bzw. sechs Büchsen und die dritte Sorte in die Reihen mit fünf bzw. sieben Büchsen, dann wurden wegen

$$1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7 = 12$$

von jeder Sorte gleich viel verwendet, und auch die Bedingungen 1, 2, 3, 5 und 6 wurden eingehalten. Daher ist $n = 8$ die kleinste Anzahl von Reihen, mit der die Bedingungen 1 bis 6 erfüllbar sind, und somit $s = 36$ die gesuchte kleinste Anzahl von Büchsen.



L.9.18

L.9.19

Es gibt Vielecke (z. B. Dreiecke) mit genau drei spitzen Innenwinkeln.

Für jedes konvexe n -Eck $A_1 A_2 \dots A_n$ gilt:

Durch die Diagonalen $A_{n-1} A_1, A_{n-1} A_2, \dots, A_{n-1} A_{n-3}$ wird das n -Eck in die $n - 2$ Dreiecke $\triangle A_{n-1} A_n A_1, \triangle A_{n-1} A_1 A_2, \dots, \triangle A_{n-1} A_{n-3} A_{n-2}$ zerlegt. Die Summe seiner Innenwinkelgrößen ist folglich gleich der Summe $(n - 2)180^\circ$ der Innenwinkelgrößen dieser Dreiecke.

Sind x der Innenwinkel des n -Ecks spitz, so haben deren Größen eine Summe, die kleiner als $x \cdot 90^\circ$ ist. Die Summe der übrigen $n - x$ Innenwinkelgrößen ist wegen der Konvexität kleiner als $(n - x)180^\circ$. Somit folgt

$$(n - 2)180^\circ < n \cdot 180^\circ - x \cdot 90^\circ$$

und daraus

$$x \cdot 90^\circ < 2 \cdot 180^\circ \quad \text{also} \quad x < 4$$

Damit folgt a), dass es eine größte Zahl m der behaupteten Art gibt und dass sie höchstens 3 beträgt. Hieraus und aus dem ersten Satz folgt b), dass sie $m = 3$ ist.

Die Frage c) ist zu bejahen, wie etwa folgendes Beispiel zeigt:

Auf den Schenkeln eines spitzen Winkels mit dem Scheitel A_2 seien je ein Punkt A_1, A_3 ($\neq A_2$) in gleichem Abstand von A_2 gelegen. Auf dem durch das Innere dieses Winkels gehenden Bogen $\widehat{A_3 A_1}$ des Kreises um den Mittelpunkt A_2 seien Punkte A_4, \dots, A_n gelegen, die in dieser Reihenfolge auf A_3 folgen.

Dann ist $A_1A_2\dots A_n$ ein konvexes n -Eck (Beweis: Die Innenwinkel bei A_1A_2, A_3 sind (s. 0.) spitz; jeder der Innenwinkel bei A_4, \dots, A_n ist jeweils die Summe zweier Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken, also zweier spitzer Winkel und daher kleiner als 180°), und darin ist $\angle A_1A_2A_3$ spitz, aber auch $\angle A_nA_1A_2$ und $\angle A_2A_3A_4$, als Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken.

L.9.20

Ist $b > r > 0$, so gibt es ein Flächenstück, wie Abb. A 9.20 zeigt. Ist F sein Inhalt und u sein Umfang, so gilt

$$F = 2br - \frac{1}{2}\pi r^2 \quad (1)$$

und die wegen $r \neq 0$ mit (1) äquivalente Beziehung

$$2b = \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r \quad \text{sowie} \quad u = 2r + 2b + \pi r \quad (1', 2)$$

Aus (1') und (2) folgt der Reihe nach, dass die folgenden Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} u &= 2r + \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r + \pi r \\ ur &= 2r^2 + F + \frac{3}{2}\pi r^2 \\ r^2 \left(\frac{3}{2}\pi + 2 \right) - ur &= -F \\ r^2 - \frac{2u}{3\pi + 4}r &= -\frac{2F}{3\pi + 4} \\ \left(r - \frac{u}{3\pi + 4} \right)^2 &= \frac{u^2}{(3\pi + 4)^2} - \frac{2F}{3\pi + 4} \end{aligned} \quad (3)$$

Aus (3) folgt wegen $\left(r - \frac{u}{3\pi + 4} \right)^2 > 0$, dass zwischen Umfang und Flächeninhalt eines solchen Flächenstücks stets die Abschätzung

$$\frac{u^2}{(3\pi + 4)^2} \geq \frac{2F}{3\pi + 4}$$

besteht, d. h. also, dass

$$u \geq \sqrt{2F(3\pi + 4)} \quad (4)$$

ist. Soll in (4) das Gleichheitszeichen gelten, so muss wegen (3)

$$r = \frac{u}{3\pi + 4}$$

sein, woraus sich unter Beachtung von (4) mit dem Gleichheitszeichen

$$r = \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}} \quad (5)$$

und hieraus in Verbindung mit (1')

$$b = \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}(\pi + 1) = r(\pi + 1) \quad (> r) \quad (6)$$

ergibt.

Wählt man zu gegebenem $F > 0$ die Zahlen r und b gemäß (5) bzw. (6), so gibt es wegen $b > r$ zu dem Paar (r, b) ein Flächenstück, wie es in der Aufgabe beschrieben ist. Zwischen dessen Inhalt F und dessen Umfang u besteht die Relation

$$u = \sqrt{2F(3\pi + 4)}$$

Daher genügt das Paar

$$(r, b) = \left(\sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}, \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}(\pi + 1) \right)$$

den Bedingungen der Aufgaben und ist das einzige dieser Art.

L.9.21

a) Jürgen könnte etwa folgende Lösung gefunden haben: Angenommen, $ABCDE$ sei ein Fünfeck der genannten Art mit vorgeschriebenem Flächeninhalt F . Dann gilt

$$u = 3a + 2b \quad \text{und} \quad F = ab + \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \quad (1)$$

also $6a^2 + 4ab - 2au = 0$ und $4F - 4ab - a^2\sqrt{3} = 0$, also

$$a^2(6 - \sqrt{3}) - 2au + 2F = 0 \quad \text{d.h.} \quad a^2 - \frac{2u}{6 - \sqrt{3}}a + \frac{4F}{6 - \sqrt{3}} = 0 \quad (2)$$

Diese quadratische Gleichung hat nur dann Lösungen, wenn

$$\left(\frac{u}{6 - \sqrt{3}} \right)^2 - \frac{4F}{6 - \sqrt{3}} \geq 0 \quad (3)$$

d.h. $u^2 \geq 4F(6 - \sqrt{3})$, also

$$u \geq 2\sqrt{F(6 - \sqrt{3})} \quad (4)$$

ist. Wenn es Fünfecke der verlangten Art gibt, gilt also für jedes von ihnen die Ungleichung (4).

b) Angenommen, es gäbe auch ein Fünfeck (der genannten Art mit vorgeschriebenem Flächeninhalt), für das sogar

$$u = 2\sqrt{F(6 - \sqrt{3})} \quad (5)$$

gilt. Dann kann man wie in a) auf die Gleichung (2) schließen; ferner ist statt (3) wegen (5) sogar

$$\left(\frac{u}{6 - \sqrt{3}} \right)^2 - \frac{4F}{6 - \sqrt{3}} = 0$$

Also hat (2) nunmehr die einzige Lösung

$$a = \frac{u}{6 - \sqrt{3}}$$

d.h. wegen (5)

$$a = 2\sqrt{\frac{F}{6 - \sqrt{3}}} \quad (6)$$

Aus (1), (5), (6) folgt

$$\begin{aligned} b &= \frac{u}{2} - \frac{3a}{2} = \sqrt{F(6 - \sqrt{3})} - 3\sqrt{\frac{F}{6 - \sqrt{3}}} = (6 - \sqrt{3} - 3)\sqrt{\frac{F}{6 - \sqrt{3}}} \\ &= (3 - \sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6 - \sqrt{3}}} \end{aligned} \quad (7)$$

c) Nun zeigen wir, dass ein Fünfeck mit den in (6), (7) angegebenen Werten für a und b die vorgeschriebenen Eigenschaften hat und kleinstmöglichen Umfang besitzt:

Ein Fünfeck mit (6), (7) hat den Flächeninhalt

$$ab + \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{2(3 - \sqrt{3})F}{6 - \sqrt{3}} + \frac{F\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}} = (2(3 - \sqrt{3}) + \sqrt{3})\frac{F}{6 - \sqrt{3}} = F$$

also den vorgeschriebenen Wert. Es gibt mithin Fünfecke der verlangten Art; nach a) gilt für sie stets die Ungleichung (4). Insbesondere ergibt sich für ein Fünfeck mit (6), (7) der Umfang $u = 3a + 2b$ zu

$$6\sqrt{\frac{F}{6 - \sqrt{3}}} + 2(3 - \sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6 - \sqrt{3}}} = (3 + 3 - \sqrt{3})2\sqrt{\frac{F}{6 - \sqrt{3}}} = 2\sqrt{F(6 - \sqrt{3})}$$

d.h., dies ist der kleinstmögliche Umfang.

d) Somit wird der Umfang eines Fünfecks der verlangten Art genau dann möglichst klein, wenn (6), (7) und damit

$$a : b = 2 : (3 - \sqrt{3})$$

gilt.

L.9.22

Es seien k_1, \dots, k_n paarweise verschiedene Kreise auf der Kugeloberfläche. Die Anzahl der Gebiete, in die die Oberfläche durch k_1, \dots, k_n zerlegt wird, sei a_i ($i = 1, \dots, n$). Der Kreis k_{i+1} schneide m_i der Kreise k_1, \dots, k_i ($i = 1, \dots, n-1$).

Dann gilt $a_{i+1} \leq a_i + 2m_i$.

Das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn k_{i+1} jeden der m_i Kreise, die er schneidet, in zwei voneinander und von allen Schnittpunkten der Kreise k_1, \dots, k_i verschiedenen Punkten schneidet. Denn gelten diese Bedingungen, so liegen auf k_{i+1} genau

$2n$, verschiedene Schnittpunkte mit je einem der k_1, \dots, k_i , und der Bogen von jedem dieser Schnittpunkte bis zum nächsten (bezüglich der Anordnung, die sich mit einer Durchlaufung von k_{i+1} ergibt) zerlegt je genau ein vorher vorhandenes Gebiet in genau zwei neue, gibt also Anlass dazu, a_i um genau 1 zu vergrößern.

Sind jedoch nicht alle diese Bedingungen erfüllt, so liegen auf k_{i+1} weniger als $2m_i$ Schnittpunkte, und es entstehen weniger neue Gebiete.

Also wird, wenn es Kreise k_1, \dots, k_n gibt, von denen jeder jeden anderen in zwei Punkten derart schneidet, dass durch jeden dieser Schnittpunkte genau zwei der Kreise gehen, der größtmögliche Wert von a_n als diejenige Zahl angenommen, die sich rekursiv aus

$$a_{i+1} = a_i + 2i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

ergibt. Diese Rekursion führt auf

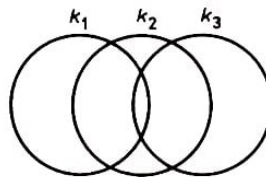
$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1$$

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

...

$$a_n = a_1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot (n-1)$$

als größtmöglichen Wert von a_n , falls es Kreise k_1, \dots, k_n in der geschilderten Lage gibt. Das ist nun tatsächlich der Fall, wie z.B. aus Abb. L.9.22 für $n = 3$ ersichtlich ist (k_1, k_2, k_3 sind Kreise mit genügend kleinem Radius gegenüber dem Kugelradius).



L.9.22

Nun ist $a_1 = 2$, und damit erhält man als die gesuchte größte Gebietszahl

$$a_n = 2 + 2(1 + 2 + \dots + (n-1)) = 2 + (n-1)n$$

L.9.23

a) Der Flächeninhalt der Figur I ist gleich $F = 2br$. Daraus folgt $b = \frac{F}{2r}$. Ferner ist der Umfang dieser Figur gleich

$$u = 2b + 4r = \frac{F}{r} + 4r = \frac{F}{r} - 4\sqrt{F} + 4r + 4\sqrt{F} = \left(\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r} \right)^2 + 4\sqrt{F} \geq 4\sqrt{F}$$

Der Umfang wird also, wenn die Bedingung,

$$\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r} = 0$$

erfüllbar ist, genau dann am kleinsten, wenn (1), d. h. $F = 4r^2$, gilt. Das trifft dann zu, wenn

$$\frac{b}{r} = \frac{F}{2r^2} = \frac{4r^2}{2r^2} = 2$$

ist. Somit beträgt der Minimalumfang

$$u = 2b + 4r = 4r + 4r = 8r$$

Ferner gilt für ihn

$$\frac{u}{\sqrt{F}} = \frac{8r}{2r} = 4$$

Im Fall der Figuren II, III und IV erhalten wir für F , b und u die jeweils in Spalte 2, 3 bzw. 4 der Tabelle angegebenen Werte. Daher gilt in allen Fällen

$$u = \frac{F}{r} + kr$$

wobei k eine positive reelle Zahl ist, die im Fall I gleich 4, im Fall II gleich 3π , im Fall III gleich 2π und im Fall IV gleich π ist.

Figur	F	b	u	Falls u ein Minimum wird, gilt			
				F	$\frac{b}{r}$	u	$\frac{u}{\sqrt{F}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
I	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + 4r$	$4r^2$	2	$8r$	4
II	$2br - \pi r^2$	$\frac{F}{2r} + \frac{\pi}{2}r$	$2b + 2\pi r = \frac{F}{r} + 3\pi r$	$3\pi r^2$	2π	$6\pi r$	$2\sqrt{3\pi}$
III	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b + 2\pi r = \frac{F}{r} + 2\pi r$	$2\pi r^2$	π	$4\pi r$	$2\sqrt{2\pi}$
IV	$2br + \pi r^2$	$\frac{F}{2r} - \frac{\pi}{2}r$	$2b + 2\pi r = \frac{F}{r} + \pi r$	πr^2	0	$2\pi r$	$2\sqrt{\pi}$

Mithin gilt in allen Fällen analog wie im Fall I

$$u = \frac{F}{r} + kr = \frac{F}{r} - 2\sqrt{Fk} + kr + 2\sqrt{Fk} = \left(\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{kr}\right)^2 + 2\sqrt{Fk} \geq 2\sqrt{Fk}$$

Der Umfang der Figur wird also, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{F}{r}} = \sqrt{kr} \quad (2)$$

erfüllbar ist, genau dann am kleinsten, wenn (2), d.h. $F = kr^2$, gilt.

Setzen wir nun für k die obigen Werte ein, so erhalten wir, dass u genau dann ein Minimum wird, wenn die Werte für F so lauten, wie sie in Spalte 5 angegeben sind. Ferner erhalten wir unter Benutzung der Werte der Spalten 3 und 4, dass dies genau für die in den Spalten 6, 7 und 8 angegebenen Werte von $\frac{b}{r}$, u bzw. $\frac{u}{\sqrt{F}}$ zutrifft.

b) Aus den Zahlen der Spalte 8 ergibt sich nun die folgende Ordnung der Figuren nach abnehmend Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt: II, III, I, IV.

Nachweis dieser Reihenfolge ohne dezimale Berechnung der Wurzeln:

Aus $2 < \pi < 4$ folgt

$$12\pi < 8\pi > 16 < 4\pi \quad \text{also} \quad 2\sqrt{3\pi} > 2\sqrt{2\pi} > 4 > 2\sqrt{\pi}$$

Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung:

In allen Fällen gilt für den Umfang

$$u = \frac{F}{r} + kr \quad (r > 0)$$

wobei nach Voraussetzung F und k konstant sind. Differentiation nach r liefert

$$\frac{du}{dr} = -\frac{F}{r^2} + k$$

Nun gilt $\frac{du}{dr} = 0$ genau dann, wenn $F = kr^2$, also $r = \sqrt{\frac{F}{k}}$ ist. Ferner gilt

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{F}{r^3} > 0 \quad \text{für } r > 0$$

die durch $u(r) = \frac{F}{r} + kr$ für alle positiven reellen r definierte und in diesem Definitionsbereich überall differenzierbare Funktion ist also konvex und hat an der Stelle $r = \sqrt{\frac{F}{k}}$ und nur dort ein globales Minimum.

Oder:

Wegen $\frac{d^2u}{dr^2} > 0$ für $r > 0$ ist $\frac{du}{dr}$ in $r > 0$ streng monoton steigend, also links von $r = \sqrt{\frac{F}{k}}$ negativ und rechts davon positiv, so dass u links fallend und rechts steigend ist.

L.9.24

a) Es gilt

$$\delta = \frac{\left(x + \frac{y}{2x}\right)^2 - (\sqrt{x^2 + y})^2}{x + \frac{y}{2x} + \sqrt{x^2 + y}} = \frac{y^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{y}{2x} + x\sqrt{1 + \frac{y}{x^2}}}$$

also $0 < \delta < \frac{y^2}{8x^3}$.

b) Entsprechend ergibt sich, wenn man $\sqrt[3]{x^3 + y}$ durch $x + \frac{y}{3x^2}$ ersetzt, für den Fehler

$$\delta = x + \frac{y}{3x^2} - \sqrt[3]{x^3 + y}$$

die Eingabelung

$$0 < \delta < \frac{x^2(9x^3 + y)}{81x^8}$$

denn es gilt

$$\delta = \frac{\left(x + \frac{y}{3x^2}\right)^3 - (x^3 + y)}{\left(x + \frac{y}{3x^2}\right)^2 + \left(x + \frac{y}{3x^2}\right)\sqrt[3]{x^3 + y} + (\sqrt[3]{x^3 + y})^2} < \frac{(9x^3 + y)y^2}{3x^2(3x^2)^3}$$

c) $\sqrt{56} = \sqrt{49 + 7} = 7 + \frac{7}{2 \cdot 7} - \delta = 7,5 - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{49}{8 \cdot 7^3} = \frac{1}{56}$, also $0 < \delta < 0,0179$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $0 < \delta < 0,0167$ ist.)

c) $\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{64 + 16} = 4 + \frac{16}{3 \cdot 16} - \delta = \frac{13}{3} - \delta$ mit $0 < \delta < 0,029$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $\delta < 0,025$ ist.)

L.9.25

Es sei $f(x) = x - \frac{(14+\cos x)\sin x}{9+6\cos x}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{(14\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(9+6\cos x)}{(9+6\cos x)^2} + \frac{(14\sin x + \sin x \cos x)(-6\sin x)}{(9+6\cos x)^2} \\ &= \frac{81 + 108\cos x + 36\cos^2 x - 126\cos x - 84\cos^2 x - 9\cos^2 x - 6\cos^3 x}{(9+6\cos x)^2} \\ &\quad + \frac{9(1 - \cos^2 x) + 6\sin^2 x \cos x - 84\sin^2 x - 6\sin^2 x \cos x}{(9+6\cos x)^2} \\ &= \frac{6 - 18\cos x + 18\cos^2 x - 6\cos^3 x}{(9+6\cos x)^2} = \frac{2(1 - \cos x)^3}{3(3+2\cos x)^2} \end{aligned}$$

Für $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ gilt $1 - \cos x < 0$, also $f'(x) > 0$. Folglich ist $f(x)$ in dem Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ streng monoton wachsend. Daher und wegen $f(0) = 0$ gilt in diesem Intervall

$$0 \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Man erhält

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{14+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{9+3\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{41\sqrt{2}-25}{42}$$

Nun gilt wegen $\pi < 3,1416$ und $\sqrt{2} > 1,41421$

$$\frac{41\sqrt{2}-25}{42} > \frac{41 \cdot 1,41421 - 25}{42} > 0,7853$$

also

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0,7854 - 0,7853 = 0,0001 = 10^{-4}$$

Der Betrag der Differenz von x und $\frac{(14+\cos x)\sin x}{9+6\sin x}$ ist somit für alle x in dem Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ kleiner als 10^{-4} .

L.9.26

a) Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt

$$(r-y)^2 + x^2 = r^2 \tag{1}$$

Daraus erhält man

$$r^2 - 2ry + y^2 + x^2 = r^2$$

wegen $y(< r) < 2r$ also

$$y = \frac{x^2}{2r-y}$$

b) Unter Beachtung von $y < r$ erhält man aus (1), d.h. aus der Gleichung $(r-y)^2 = r^2 - x^2$ die Gleichung $r-y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und weiter

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Für alle x mit $0 < x < r$ gilt somit

$$\frac{y_1}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{r^2 - r\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Mit der Abkürzung $\frac{x}{r} = u$ ($r \neq 0, u \neq 0$) ergibt sich

$$\frac{y_1}{y} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{1 - \sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - u^2})$$

also

$$\frac{y - y_1}{y} = 1 - \frac{y_1}{y} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - u^2}) > 0$$

Wegen $y > 0$ und $1 - u^2 < 1$ folgt daraus $y - y_1 > 0$, also

$$\delta = \frac{|y - y_1|}{y} = \frac{y - y_1}{y} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - u^2})$$

Demnach ist die Forderung $\delta \leq \frac{1}{1000}$ gleichbedeutend mit

$$1 - \sqrt{1 - u^2} \leq \frac{1}{500}, \quad \frac{499}{500} \leq \sqrt{1 - u^2}, \quad u^2 \leq \frac{500^2 - 499^2}{500^2} = \frac{999}{500^2}$$

Bestimmt man daher n als die kleinste natürliche Zahl mit

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{999}{500^2} \quad (2)$$

so ist folglich dieses n die gesuchte kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass für alle $0 < x \leq \frac{r}{n}$ die Bedingung $\delta \leq \frac{1}{1000}$ erfüllt ist. Die Berechnung von n kann z. B. so erfolgen:

Erste Möglichkeit: Man schätzt die Wurzel

$$\sqrt{\frac{500^2}{999}} = \frac{500}{333} \sqrt{111}$$

auf Grund von $10,5 < \sqrt{111} < 10,6$ ab und erhält

$$15 < \frac{5250}{333} < \frac{500}{333} \sqrt{111} < \frac{5300}{333} < 16$$

Zweite Möglichkeit (Vermeidung des Wurzelzeichens durch Quadrieren):

Aus (2) folgt

$$n^2 > \frac{500^2}{1000} = 250 > 15^2$$

also kann eine natürliche Zahl höchstens dann (2) erfüllen, wenn sie größer als 15 ist. Da man andererseits tatsächlich

$$999 \cdot 16^2 = 256000 - 256 > 500^2$$

findet, also die Richtigkeit von (2) für $n = 16$ bestätigt, ist $n = 16$ die gesuchte kleinste natürliche Zahl mit (2).

L.9.27

Legt man in die erste Urne insgesamt u Kugeln und darunter w weiße, so sind in der zweiten Urne insgesamt $100 - u$ Kugeln und darunter $50 - w$ weiße unterzubringen, weil alle Kugeln verwendet werden müssen.

Für u und w gelten die Bedingungen $0 \leq w \leq u$ und $0 \leq 50 - w \leq 100 - u$ sowie die Bedingung $1 \leq u \leq 99$, die zum Ausdruck bringt, dass keine Urne leer bleiben darf.

Diese Bedingungen lassen sich gleichwertig in der Form

$$1 \leq u \leq 99, \quad 0 \leq w \leq 50, \quad u - 50 \leq w \leq u$$

schreiben.

Aus den Hinweisen folgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit p für das Ziehen einer weißen Kugel aus einer der beiden Urnen zu

$$p = p(w, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{u} + \frac{50 - w}{100 - u} \right) \quad (1)$$

und es sind diejenigen unter den zugelassenen Werten von w und u zu ermitteln, für die p den größten Wert p_{\max} annimmt. Die Form des Ausdrucks (1) legt es nahe, in zwei Schritten vorzugehen:

- a) Zunächst wird für festes u dasjenige w ermittelt, das für dieses u den größten Wert von p liefert;
- b) danach wird aus den 99 so erhaltenen Werten von p der größte herausgesucht.

- a) Bei festem u ändert sich $p(w, u)$ beim Übergang von w zu $w + 1$ in

$$p(w + 1, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{w + 1}{u} + \frac{50 - w - 1}{100 - u} \right)$$

und es gilt

$$p(w + 1, u) - p(w, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{100 - u} \right) = \frac{50 - u}{u(100 - u)}$$

somit wird $p(w, u)$ beim Übergang von w zu $w + 1$ größer für $u < 50$, kleiner für $u > 50$ und bleibt konstant für $u = 50$. Mit $u = 50$ ergibt sich aus (1) der Wert

$$p(w, 50) = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{50} - \frac{50 - w}{50} \right) = \frac{1}{2}$$

(in Übereinstimmung mit der auch ohne Rechnung einleuchtenden Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit stets gleich $\frac{1}{2}$ ist, wenn man in jede Urne 50 Kugeln legt, wobei es auf die Verteilung der in Kugeln gar nicht ankommt).

Für $51 \leq u \leq 99$ ist obiger Überlegung gemäß für w der kleinste zulässige Wert, also

$w = u - 50$, einzusetzen. Für alle diese u erhält man somit den jeweils größten Wert von p in der Form

$$p(u - 50, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{u - 50}{u} - 1 \right) = 1 - \frac{25}{u} \quad (2)$$

Im Fall $1 \leq u \leq 49$ ist es umgekehrt erforderlich, für w den größten zulässigen Wert, also $w = u$, einzusetzen. Für jedes u erhält man hier den jeweils größten Wert von p in der Form

$$p(u, u) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{50 - u}{100 - u} \right) = 1 - \frac{25}{100 - u} \quad (3)$$

b) Nun ist p_{\max} aus den größten Werten von $p(u, u)$, ($1 \leq u \leq 49$) in (3), $p(w, 50) = \frac{1}{2}$ sowie $p(u - 50, u)$, ($51 \leq u \leq 99$) in (2) herauszusuchen.

Man braucht übrigens nur den Ausdruck für p in (2) heranzuziehen und darin, anders als bisher, $u = 50$ zuzulassen; denn bei Ersetzung von u durch $100 - u$ (was der Vertauschung der Urnen entspricht) geht er in den p -Ausdruck in (3) über, und für $u = 50$ nimmt er den Wert $\frac{1}{2}$ an.

Wie (2) zeigt, nimmt $p(u - 50, u)$ bei wachsendem u ständig zu, hat also den größten Wert für $u = 99$, und dieser beträgt $p(49, 99) = p_{\max} = \frac{74}{99}$.

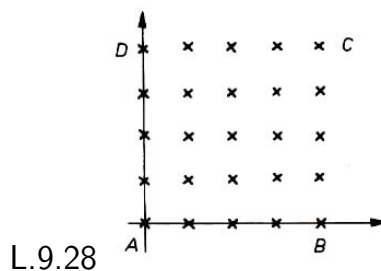
(Man kann noch bemerken, dass entsprechend aus (3) $p(1, 1) = p_{\max} = \frac{74}{99}$ gefunden werden kann, wodurch noch einmal die Urnenvertauschung verdeutlicht wird.)

Damit ist die Aufgabe gelöst:

Es ist $p_{\max} = \frac{74}{99}$; fast $\frac{3}{4}$; wenn man in eine der beiden Urnen nur eine weiße Kugel und in die andere alle übrigen 99 Kugeln legt.

L.9.28

Die Punkte von \mathfrak{M} sind die "ganzzahligen Gitterpunkte", die im Innern oder auf dem Rand des Quadrats $ABCD$ liegen (Abb. L.9.28). Ihre Anzahl beträgt 25.



Daher gibt es genau $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ verschiedene Auswahlmöglichkeiten für Punktepaaire. Der Abstand zweier Punkte der Menge \mathfrak{M} hat sicher dann eine ganzzahlige Maßzahl, wenn beide Punkte auf ein und derselben Parallelen zu einer der beiden Koordinatenachsen liegen. Da auf jeder dieser zehn Parallelen je fünf verschiedene Punkte liegen, erhält man

$$10 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 100 \quad \text{derartige Auswahlmöglichkeiten}$$

Es seien nun $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zwei Punkte von \mathfrak{M} , die nicht auf ein und derselben Parallelen zu einer der beiden Koordinatenachsen liegen. Die Maßzahl d ihres

Abstands ist dann nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Nun sind $(x_2 - x_1)^2$ bzw. $(y_2 - y_1)^2$ je eine der Zahlen 1, 4, 9 bzw. 16. Daher wird d genau dann ganzzahlig, wenn entweder

$$|x_2 - x_1| = 3 \quad \text{und} \quad |y_2 - y_1| = 4 \quad \text{oder} \quad |x_2 - x_1| = 4 \quad \text{und} \quad |y_2 - y_1| = 3$$

ist. Das trifft nur für solche Punkte P_1, P_2 zu, die auf verschiedenen Seiten des Quadrats $ABCD$ liegen, wobei genau einer von ihnen Eckpunkt und keiner von ihnen Mittelpunkt einer Quadratseite ist. Die Punkte können also nur die Koordinaten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(4,3)$, $(3,0)$, $(4,0)$, $(4,1)$ haben.

Von ihnen genügen jeweils die Punktpaare mit den Koordinaten $(0,0)$, $(3,4)$ bzw. $(0,0)$, $(4,3)$ bzw. $(4,4)$, $(0,1)$ bzw. $(4,4)$, $(1,0)$ bzw. $(0,4)$, $(3,0)$ bzw. $(0,4)$, $(4,1)$ bzw. $(4,0)$, $(0,3)$ bzw. $(4,0)$, $(1,4)$ und keine anderen den oben angegebenen Bedingungen. Das sind genau acht weitere Auswahlmöglichkeiten mit ganzzahligen Maßzahlen. Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{100 + 8}{300} = 0,36$$

L.9.29

a) Ermittlung der Anzahl z aller möglichen "Fälle":

Für k bestehen genau die Möglichkeiten $1, \dots, 2n - 2$. Nach der Auswahl einer dieser Möglichkeiten von k bestehen für m genau die Möglichkeiten $k + 1, \dots, 2n - 1$; ihre Anzahl ist $2n - k - 1$. Alle so erhaltenen Fälle sind voneinander verschieden. Daher ist

$$z = (2n - 2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}(2n - 2)(2n - 1) = (n - 1)(2n - 1)$$

Ermittlung der Anzahl z_1 aller "günstigen Fälle":

Ein "Fall" ist genau dann "günstig", wenn für ihn

$$|AP_k| < |P_k P_m| + |P_m B|, \quad \text{d.h.} \quad k < (m - k) + (2n - m); k < n$$

und

$$|P_k P_m| < |AP_k| + |P_m B|, \quad \text{d.h.} \quad (m - k) < k + (2n - m); m < k + n$$

und

$$|P_m B| < |AP_k| + |P_k P_m|, \quad \text{d.h.} \quad (2n - m) < k + (m - k); n < m$$

gilt. Hiernach bestehen für k genau die Möglichkeiten $1, \dots, n - 1$ und nach der Auswahl einer dieser Möglichkeiten von k für m genau die Möglichkeiten $n + 1, \dots, k + n - 1$; ihre Anzahl ist $k - 1$. (Im Fall $k = 1$ bedeute diese Aufzählung $(n + 1, \dots, n)$, dass keine Möglichkeit besteht.)

Alle so erhaltenen "günstigen Fälle" sind voneinander verschieden. Daher ist

$$z_1 = 0 + \dots + (n-2) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist hiernach

$$\frac{z_1}{z} = \frac{n-2}{2(2n-1)}$$

b) Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $\frac{z_1}{z}$ in 0, also

$$\frac{z_1}{z} = \frac{1 - \frac{2}{n}}{4 - \frac{2}{n}} \quad \text{gegen} \quad \frac{1}{4}$$

L.9.30

Erste Lösung (durch möglichst weitgehenden Rückgriff auf die angegebene Wahrscheinlichkeitsdefinition):

Es sei S eins der Signale S_1, S_2 ; das andere dieser beiden Signale sei mit S' bezeichnet. Dann gilt:

Übermittelt M in einer großen Anzahl n von Fällen das Signal S , so übermittelt A_1 in $0,01n$ Fällen das Signal S' , (1)

in $0,99n$ Fällen das Signal S . (2)

Dann übermittelt A_2 von den in (1) genannten Fällen

in $0,01 \cdot 0,01n = 0,0001n$ Fällen S ,

in $0,99 \cdot 0,01n = 0,0099n$ Fällen S' .

von den in (2) genannten Fällen

in $0,01 \cdot 0,99 = 0,0099n$ Fällen S' ,

in $0,99 \cdot 0,99n = 0,9801n$ Fällen S ;

somit übermittelt insgesamt A_2

in $0,0099n + 0,0099n = 0,0198n$ Fällen S' . (3)

in $0,0001n + 0,9801n = 0,9802n$ Fällen S . (4)

Hiernach übermittelt A_3 von den in (3) genannten Fällen

in $0,01 \cdot 0,0198n = 0,000198n$ Fällen S ,

in $0,99 \cdot 0,0198n = 0,019602n$ Fällen S' ,

von den in (4) genannten Fällen

in $0,01 \cdot 0,9802n = 0,009802n$ Fällen S' ,

in $0,99 \cdot 0,9802n = 0,970398n$ Fällen S ;

somit übermittelt insgesamt A_3

in $0,019602n + 0,009802n = 0,029404n$ Fällen S' (6)

in $0,000198n + 0,970398n = 0,970596n$ Fällen S . (7)

Wendet man diese Überlegung einmal mit $S = S_1$ und einmal mit $S = S_2$ an, so erhält man folgende Aussagen:

- Übermittelt M in einer großen Anzahl n von Fällen S_1 , so übermittelt A_3 in $0,970596n$ Fällen S_1 .

- Übermittelt M aber in n Fällen S_2 , so übermittelt A_3 in $0,029404n$ Fällen S_1 .
Unter den insgesamt $0,970596n + 0,029404n = n$ Fällen, in denen hiernach A_3 das Signal S_1 übermittelt, befinden sich also $0,970596n$ solche, in denen bereits M ebenfalls S_1 übermittelt hatte.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt daher

$$\frac{0,970596n}{n} = 0,970596$$

Zweite Lösung (durch stärkere Anwendung der bereitgestellten Sätze):

Nach Voraussetzung übermittelte A_3 das Signal S_1 . Es wird nun schrittweise die Wahrscheinlichkeit $P_i(S_j)$ berechnet, mit der das Signal S_j als Eingangssignal von A_i auftrat ($i = 3, 2, 1$ und $j = 1, 2$). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ergibt sich dann als $p = p_1(S_1)$.

$i = 3$: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei vorausgesetztem Ausgangssignal S_1 auch S_1 als Eingangssignal von A_3 auftritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der A_3 ein Signal richtig überträgt, also gilt

$$p_3(S_1) = 0,99$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_3(S_2)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der A_3 ein Signal falsch überträgt, also

$$p_3(S_2) = 0,01$$

$i = 2$: Für das Auftreten von S_1 als Eingangssignal von A_2 gibt es genau zwei Möglichkeiten:

- a) S_1 ist Eingangssignal von A_3 und von A_2 ,
- b) S_2 ist Eingangssignal von A_3 , und S_1 ist Eingangssignal von A_2 .

Die Wahrscheinlichkeit $p(a)$ für das Eintreten der Möglichkeit a) kann nun nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelt werden. Danach ist $p(a)$ gleich dem Produkt von $p_3(S_1)$ mit der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von S_1 als Eingangssignal von A_2 unter der Voraussetzung, dass S_1 Eingangssignal von A_3 ist.

Diese letzte Wahrscheinlichkeit ist nun gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der A_2 ein Signal richtig überträgt. Also ergibt sich

$$p(a) = p_3(S_1) \cdot 0,99 = 0,9801$$

Analog findet man für $p(b)$

$$p(b) = p_3(S_2) \cdot 0,01 = 0,0001$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_2(S_1)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Möglichkeit a) oder b). Da beide Möglichkeiten unabhängig voneinander eintreten können, gilt nach dem Additionssatz:

$$p_2(S_1) = p(a) + p(b) = 0,9801 + 0,0001 = 0,9802 \quad (7)$$

Für $p_2(S_2)$ erhält man nach analogen Schlüssen

$$p_2(S_2) = 0,01 \cdot p_3(S_1) + 0,99 \cdot p_3(S_2) = 0,0099 + 0,0099 = 0,0198$$

$i = 1$: Wir schließen analog zum Fall $i = 2$, dass es für das Auftreten von S_1 als Eingangssignal von A_1 genau zwei Möglichkeiten gibt:

c) S_1 ist Eingangssignal von A_2 und von A_1 ,

d) S_2 ist Eingangssignal von A_2 , und S_1 ist Eingangssignal von A_1 .

Es sei $p(c)$ bzw. $p(d)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Möglichkeit c) bzw. d). Dann gilt analog zu (7):

$$p_1(S_1) = p(c) + p(d) = 0,99 \cdot p_2(S_1) + 0,01 \cdot p_2(S_2) = 0,970398 + 0,000198 = 0,970596$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ist damit ermittelt: $p = 0,970596$.

L.9.31

Die Anzahl a_n aller Möglichkeiten, n Briefe an n Adressaten zu verteilen, ist $n!$. Durch vollständige Induktion beweisen wir: Die Anzahl g_n aller "günstigen Fälle" ist

$$g_n = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + (-1)^3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n + \dots + (-1)^n \cdot n + (-1)^n \quad (1)$$

a) Für $n = 2$ ist unter allen Möglichkeiten genau eine "günstig", also ist

$$g_2 = 1 = (-1)^2$$

Für $n = 3$ sind unter allen Möglichkeiten

$$(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3), (1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2), (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3), \\ (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1), (1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2), (1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1)$$

genau zwei (die vierte und die fünfte) "günstig", also ist

$$g_3 = 2 = (-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3$$

b) Für ein $n > 4$ sei die Richtigkeit von (1) für alle ν mit $2 \leq \nu < n$ statt n vorausgesetzt, dann folgt:

Dafür, dass Brief 1 nicht an Adressat 1 gelangt, gibt es genau $n - 1$ Möglichkeiten. In jeder von ihnen lässt sich die Nummerierung der Paare aus Adressat und zugehörigem Brief so wählen, dass Brief 1 an Adressat 2 gelangt. Nun gibt es genau folgende Möglichkeiten:

b1) Brief 2 gelangt an Adressat 1, und die Briefe $3, 4, \dots, n$ werden so an die Adressaten $3, 4, \dots, n$ verteilt, dass kein Brief an den gleichnummerierten Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-2} Möglichkeiten.

b2) Brief 2 gelangt an einen der Adressaten $3, 4, \dots, n$, der etwa mit k bezeichnet sei, und die Briefe $3, 4, \dots, n$ werden so an die von k verschiedenen unter den Adressaten $1, 3, 4, \dots, n$ verteilt, dass kein Brief an den gleichnummerierten Adressaten gelangt.

Das ist gleichbedeutend mit der folgenden Forderung:

Man stelle eine neue Zuordnung zwischen den Briefen $2, 3, 4, \dots, n$ und den Adressaten $1, 3, 4, \dots, n$ her, nämlich $2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4, \dots, n \rightarrow n$, und fordere nun eine Zustellung der Briefe $2, 3, 4, \dots, n$ an je genau einen der Adressaten $1, 3, 4, \dots, n$, bei der kein Brief an den ihm gemäß der neuen Zuordnung zugehörigen Adressaten gelangt.

Hierfür gibt es genau g_{n-1} Möglichkeiten.

Damit ergibt sich

$$g_n = (n-1)(g_{n-2} + g_{n-1})$$

nach Induktionsannahme also

$$\begin{aligned} g_n &= (n-1)((-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2) + \dots + (-1)^{n-3}(n-2) + (n-1)^{n-2} \\ &\quad + (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)(n-1) + \dots + (-1)^{n-3}(n-2)(n-1) \\ &\quad + (-1)^{n-2}(n-1) + (-1)^{n-1}) \\ &= (n-1)((-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)n + \dots + (-1)^{n-3}(n-2)n + (-1)^{n-2}n + (-1)^{n-1}) \\ &= (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-2)(n-1)n + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-3}(n-2)(n-1)n + (-1)^{n-2}(n-1)n + (-1)^{n-1}n + (-1)^n \end{aligned}$$

also die Richtigkeit von (1) für n .

Damit ist (1) durch vollständige Induktion bewiesen, und es ergibt sich

$$q_n = \frac{g_n}{n!} = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

L.9.32

Es ist zu zeigen, dass die gegebene Operation jeder der Bedingungen a), b), c) genügt.

a) ist erfüllt, da mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ stets $a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine (eindeutig bestimmte) reelle Zahl ist.

Zu b): Wegen

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1})\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1})^2+1} \\ a \circ (b \circ c) &= (a\sqrt{(b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{b^2+1})^2+1} + (b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{b^2+1})\sqrt{a^2+1} \end{aligned}$$

gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ genau dann, wenn jede der folgenden Relationen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} a\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} - a\sqrt{(b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{b^2+1})^2+1} &= \\ &= c\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - c\sqrt{(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1})^2+1} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} - a\sqrt{(\sqrt{((b^2+1)(c^2+1) + bc)})^2} &= \\ &= c\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - c\sqrt{(\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} + ab)^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 a\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} &= a^2(b^2+1) + b^2(a^2+1) + 1 + 2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \\
 &= (a^2+1)(b^2+1) + 2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} + a^2b^2 \\
 &= (\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} + ab)^2 \\
 a\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} - a|\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} + bc| &= \\
 &= c\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - c|\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} + ab| \quad (3)
 \end{aligned}$$

Die Relation (3) ist für alle reellen a, b, c erfüllt, weil für beliebige reelle Zahlen x, y stets $(x^2+1)(y^2+1) > x^2y^2$, also $\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} > |xy|$ und folglich

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \pm xy > 0 \quad (4)$$

ausfällt. Also ist auch b) erfüllt.

Zu c): Wegen $a \circ x = x \cdot a$ für alle $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ genügt es zu zeigen, dass für alle reellen a, b die Gleichung

$$a \circ x = b \quad (5)$$

stets eine Lösung hat.

Die Relation (5) ist äquivalent mit

$$a\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{a^2+1} = b \quad (6)$$

Die Zahl x kann nur dann Lösung von (6) sein, wenn

$$a^2(x^2+1) = (b - x\sqrt{a^2+1})^2 \quad (7)$$

gilt. Genügt x der Gleichung (7), so muss x eine der beiden Zahlen x_1 oder x_2 mit

$$x_{1,2} = b\sqrt{a^2+1} \pm a\sqrt{b^2+1}$$

sein. Für $x_2 = b\sqrt{a^2+1} - a\sqrt{b^2+1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 a \circ x_2 &= a\sqrt{(b\sqrt{a^2+1} - a\sqrt{b^2+1})^2 + 1} + \sqrt{a^2+1}(b\sqrt{a^2+1} - a\sqrt{b^2+1}) \\
 &= a\sqrt{(\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} - ab)^2 + a(ab - \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)})} + b = b
 \end{aligned}$$

letzteres wegen (4).

($x = x_1 = b\sqrt{a^2+1} + a\sqrt{b^2+1}$ ist übrigens genau dann Lösung von (6), d.h. von (5), wenn $a = 0$, also $x_1 = x_2$ ist.)

Bemerkung: Die Menge \mathbb{R} mit der in der Aufgabe gegebenen Operation ist das isomorphe Bild von \mathbb{R} mit der Addition als Gruppenoperation bei der Abbildung durch

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

($\sinh x$ ist der Hyperbelsinus, sinus hyperbolicus), denn es gilt

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \sinh \beta \cosh \alpha = \sinh \alpha \sqrt{\sinh^2 \beta + 1} + \sinh \beta \sqrt{\sinh^2 \alpha + 1}$$

mit

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

($\cosh x$ ist der Hyperbelcosinus, cosinus hyperbolicus).

L.9.33

a) Es seien $u = (a, b)$ und $v = (c, d)$ mit

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{und} \quad c^2 + d^2 = 1 \quad (1)$$

zwei Elemente aus \mathfrak{K} . Dann ist ihnen vermöge der definierten Operation das geordnete Paar

$$w = (ac - bd, ad + bc) = u \circ v \quad (2)$$

zugeordnet. Ferner gilt wegen (1)

$$\begin{aligned} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

d. h., w ist ebenfalls Element der Menge. Die Bedingung a) ist also erfüllt.

b) Für drei beliebige Elemente (a, b) , (c, d) , (f, g) aus \mathfrak{K} gilt

$$\begin{aligned} ((a, b) \circ (c, d)) \circ (f, g) &= (ac - bd, ad + bc) \circ (f, g) \\ &= ((ac - bd)f - (ad + bc)g, (ac - bd)g + (ad + bc)f) \\ &= (acf - baf - adg - bcg, acg - bdg + adf + bcf) \end{aligned} \quad (4)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} (a, b) \circ ((c, d) \circ (f, g)) &= (a, b) \circ (cf - dg, cg + df) \\ &= (a(cf - dg) - b(cg + df), a(cg + df) + b(cf - dg)) \\ &= (acf - adg - bcg - bdf, acg + adf + bcf - bdg) \end{aligned} \quad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt

$$((a, b) \circ (c, d)) \circ (f, g) = (a, b) \circ ((c, d) \circ (f, g))$$

d. h., die definierte Operation ist assoziativ, die Bedingung b) ist erfüllt.

c) Es seien (a, b) und (c, d) zwei beliebige Elemente aus \mathfrak{K} . Wir nehmen zunächst an, dass ein Element (x, y) in \mathfrak{K} existiert, für das

$$(a, b) \circ (x, y) = (c, d) \quad (6)$$

gilt. Dann folgt $(ax - by, ay + bx) = (c, d)$, also

$$ax - by = c \quad \text{und} \quad ay + bx = d \quad (7,8)$$

Hieraus folgt weiter $a^2x - aby = ac$, $b^2x + aby = bd$, also

$$x(a^2 + b^2) = ac + bd$$

und hieraus wegen $a^2 + b^2 = 1$

$$x = ac + bd \quad (9)$$

Analog erhält man

$$y = ad - bc \quad (10)$$

und wegen (1) $x^2 + y^2 = 1$.

Setzt man nun die für x und y ermittelten Werte aus (9) und (10) in (6) ein, so erkennt man, dass die Gleichung (6) erfüllt ist, d. h., diese Gleichung ist stets lösbar. Nun gilt für beliebige Elemente (a, b) , (c, d) aus \mathfrak{K}

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = (c, d) \circ (a, b)$$

d.h., die definierte Operation ist kommutativ, und die Gleichung $(x, y)(a, b) = (c, d)$ ist ebenfalls lösbar, sie hat nämlich dieselbe Lösung wie die Gleichung (6). Daher ist auch die Bedingung c) erfüllt.

Weil die Bedingungen a), b) und c) erfüllt sind, ist also die Menge \mathfrak{K} eine Gruppe bezüglich der definierten Operation.

Bemerkung: In der obigen Aufgabe wurden die komplexen Zahlen $a+bi$ mit dem Betrag 1 als Paare reeller Zahlen a, b mit $a^2 + b^2 = 1$ eingeführt, und es war nachzuweisen, dass die Menge \mathfrak{K} dieser komplexen Zahlen mit der Multiplikation als Operation eine Gruppe darstellt.

L.9.34

Es ist zu untersuchen, ob die Operation A den Bedingungen a) bis c) aus A.9.32 genügt.

a) Es seien $f(x) = a_0 + a_1x$ mit $a_1 \neq 0$ und $g(x) = b_0 + b_1x$ mit $b_1 \neq 0$ zwei Elemente aus \mathfrak{P} . Dann gilt

$$f(x) \circ g(x) = g(f(x)) = g(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1(a_0 + a_1x) = b_0 + a_0b_1 + a_1b_1x$$

$f(x) \circ g(x)$ ist also wegen $a_1b_1 \neq 0$ ein Polynom ersten Grades mit rationalen Koeffizienten und daher Element von \mathfrak{P} . Da ferner $f(x) \circ g(x)$ eindeutig bestimmt ist, ist die Bedingung a) erfüllt.

b) Für drei beliebige Elemente aus \mathfrak{P}

$$f(x) = a_0 + a_1x, \quad g(x) = b_0 + b_1x, \quad h(x) = c_0 + c_1x$$

mit $a_1, b_1, c_1 \neq 0$ gilt

$$f(x) \circ g(x) = b_0 + a_0b_1 + a_1b_1x \quad \text{und} \quad g(x) \circ h(x) = c_0 + b_0c_1 + b_1c_1x$$

Weiter gilt

$$(f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = c_0 + c_1(b_0 + a_0b_1 + a_1b_1x) = c_0 + b_0c_1 + a_0b_1c_1 + a_1b_1c_1x \quad (1)$$

sowie

$$f(x) \circ (g(x) \circ h(x)) = c_0 + c_1(b_0 + b_1(a_0 + a_1x)) = c_0 + b_0c_1 + a_0b_1c_1 + a_1b_1c_1x \quad (2)$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten von (1) und (2) folgt nun unmittelbar, dass die Operation A assoziativ ist.

Der hier gegebene Beweis stellt eine Zurückführung der Behauptung auf einfache Rechengesetze für rationale Zahlen dar. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Operation nicht kommutativ ist, denn es gilt nicht immer

$$f(x) \circ g(x) = g(x) \circ f(x) \quad (9)$$

c) Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei beliebige Elemente aus \mathfrak{P} . Wir nehmen zunächst an, dass ein Element $\varphi(x) = u_0 + u_1x$ in \mathfrak{P} existiert, für das

$$f(x) \circ \varphi(x) = g(x) \quad (3)$$

gilt. Dann ist $u_0 + u_1(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1x$, also

$$u_0 + u_1a_0 = b_0 \quad \text{und} \quad u_1a_1 = b_1 \quad (4)$$

mithin wegen $a_1 \neq 0$

$$u_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{und} \quad u_0 = \frac{a_1b_0 + a_0b_1}{a_1}$$

Setzt man umgekehrt diese Werte in die Gleichungen (4) ein, so erkennt man, dass diese Gleichungen und somit auch die Gleichung (3) erfüllt sind, d. h., (3) ist stets lösbar, und zwar durch

$$\varphi(x) = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$$

Analog stellt man fest, dass auch die Gleichung $\psi(x) \circ f(x) = g(x)$ stets lösbar ist; sie hat die Lösung

$$\psi(x) = \frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$$

Daher ist auch die Bedingung c) erfüllt.

Weil die Bedingungen a), b) und c) erfüllt sind, ist also \mathfrak{P} eine Gruppe bezüglich der Operation A.

L.9.35

a) Es seien u, v Elemente aus \mathfrak{M} . Wegen $c > 0, u \geq 0, v \geq 0$ ist

$$\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \geq 0$$

Wegen $u < c$, $v < c$ gilt $0 < (c - u)(c - v)$, also $cu + vw < c^2 + uv$,

$$c(u + v) < c^2 \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)$$

woraus nach Division durch die positive Zahl $c \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)$

$$\frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} < c$$

folgt. Ferner ist $u \circ v \geq 0$, $u \circ v$ ist also ein Element aus \mathfrak{M} . Man erhält für alle u, v, w aus \mathfrak{M}

$$(u \circ v) \circ w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \circ w = \frac{c^2(u + v + w) + uvw}{c^2 + uv + vw + wu} = u \circ (v \circ w)$$

Die Menge \mathfrak{M} ist eine Halbgruppe.

b) Aus $u \circ v_1 = u \circ v_2$ für alle Elemente u aus \mathfrak{M} folgt

$$\frac{u + v_1}{1 + \frac{uv_1}{c^2}} = \frac{u + v_2}{1 + \frac{uv_2}{c^2}}$$

$$(u + v_1)(c^2 + uv_2) = (u + v_2)(c^2 + uv_1) \quad , \quad v_1(c^2 - u^2) = v_2(c^2 - u^2)$$

und hieraus, da $0 \leq u < c$, also $c^2 - u^2 > 0$ gilt, $v_1 = v_2$. Analog beweist man, dass aus $v_1 \circ u = v_2 \circ u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt. Die Halbgruppe \mathfrak{M} ist also regulär.