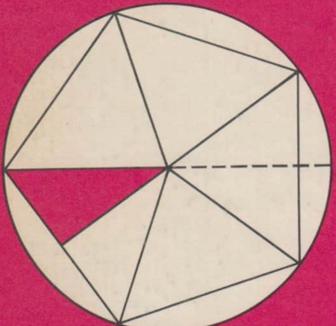
MATHEMATIK

BERUFSAUSBILDUNG 9./10. KLASSE



MATHEMATIK

Lehr- und Übungsbuch
für den Mathematikunterricht in der Berufsausbildung
9./10. Klasse

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1969

Autor: Hans Simon

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage des Lehrplans Mathematik für Lehrlinge, die die 8. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule erfolgreich abgeschlossen haben, entwickelt.

Dabei wurden für die Manuskriptentwicklung die Lehrbücher für die Vorbereitungsklassen

Mathematik, Klasse 9, 00 09 51

und

Mathematik, Klasse 10, 00 10 51

verwendet.

1. Auflage · Ausgabe 1969
Lizenz Nr. 203 · 1000/69 (E) · ES 11 G
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)
Gesetzt aus der Bodoni
Redaktionsschluß: 17. Februar 1969
Bestell-Nr. 00 13 05-1 · Preis 3,60

Erläuterungen zum Arbeiten mit diesem Buch

Lehrteil wie Aufgabenteil dieses Buches sind in die Kapitel 1 bis 8 untergliedert und diese weiter in einzelne Abschnitte, die mit 1.1., 1.2., 1.3. usw. bezeichnet sind. Innerhalb jedes dieser Abschnitte sind durch Zwischenüberschriften und Numerierung nach 1.1.1., 1.1.2. usw. einzelne Stoffeinheiten zusammengefaßt.
Innerhalb der Stoffeinheiten werden die Beispiele, Übungen sowie wichtige Definitionen und Sätze durch folgende Marken gekennzeichnet:

■ Beispiele,
● Übungen,
▶ Definitionen und Sätze.

Durch die Ziffern in den Marken werden die Beispiele, Übungen, Definitionen und Sätze numeriert.
Sämtliche Numerierungen werden jeweils durch ein Kapitel fortlaufend geführt. Zu Beginn eines jeden Kapitels beginnen dann alle Numerierungen von neuem. Hinweise auf Beispiele, Übungen, Sätze usw. werden im laufenden Text wie folgt bezeichnet.
Zum Beispiel:

Satz 3/11 ist der Satz 11 des Kapitels 3,
Beispiel 4/5 ist das Beispiel 5 im Kapitel 4,
Übung 1/13 ist die Übung 13 im Kapitel 1.

Die Aufgaben wurden folgendermaßen untergliedert: Nebeneinanderstehende Aufgaben behandeln jeweils das gleiche mathematische Problem und sind im allgemeinen vom gleichen Schwierigkeitsgrad. Die Aufgabenstellungen, die sich unmittelbar über den einzelnen Aufgaben über die ganze Breite der jeweiligen Seite erstrecken, beziehen sich dann auf beide Aufgabengruppen.
Mit kursiver Numerierung wurden zusätzliche Aufgaben gekennzeichnet, die sich auf manchen Seiten des Aufgabenteils jeweils unten befinden. Bei diesen Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad im allgemeinen höher als bei den halbfett numerierten Aufgaben.

1. Arbeiten mit Variablen

1.1. Wiederholung der Zahlenbereiche

Bis zum Abschluß der Klasse 8 haben wir drei Zahlenbereiche kennen und in ihnen rechnen gelernt, nämlich

a) den Bereich der natürlichen Zahlen (0, 1, 2, 3, 4, ...),

b) den Bereich der gebrochenen Zahlen $\left(\text{z. B. } \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{5}\right)$,

c) den Bereich der rationalen Zahlen $\left(\text{z. B. } +3, -5, -\frac{3}{4}, +\frac{11}{7}\right)$.

Die Kenntnisse über diese Zahlenbereiche wollen wir wiederholen und vertiefen. Dabei verwenden wir zwei mathematische Begriffe, die zunächst wiederholt werden sollen: den Mengenbegriff und den Variablenbegriff.

1.1.1. Der Mengenbegriff

Der mathematische Begriff **Menge** unterscheidet sich von der Bedeutung des Wortes „Menge" in der Umgangssprache. Man spricht im täglichen Leben z. B. von einer Menge Menschen, die auf einer Kundgebung waren, und meint, daß sehr viele Menschen dort gewesen seien. Man spricht davon, daß sich mit einer bestimmten Menge Wasser nur eine bestimmte Menge Zement und Sand zu Mörtel anrühren läßt, und meint damit, wieviel Kilogramm dieser Stoffe miteinander vermischt werden können. In der Mathematik erhält der Begriff „Menge" einen wesentlich anderen Inhalt.

1 In der Mathematik versteht man unter einer **Menge** die gedankliche Zusammenfassung wohlbestimmter und wohlunterschiedener Objekte der Realität oder des Denkens. Diese Objekte werden **Elemente** der Menge genannt.

1
a) C sei die Menge der sechs Mitglieder einer Brigade in einem Betrieb.
b) E sei die Menge der natürlichen Zahlen, die größer als 7 und kleiner als 9 sind.
c) R sei die Menge der Lehrlinge einer Klasse, die über keine russischen Sprachkenntnisse verfügen.
d) N sei die Menge der natürlichen Zahlen.
e) P sei die Menge der Primzahlen.
f) Z sei die Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner sind als 10.
g) K sei die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem gegebenen Punkt P dieser Ebene gleichen Abstand haben.
h) L sei die Menge aller möglichen Kombinationen, die man erhält, wenn man aus den Zahlen 1 bis 90 je fünf Zahlen auswählt.

Die Menge P im Beispiel 1e) enthält die Zahl 2. Wir sagen: „2 ist (ein) **Element** von P" und schreiben: $2 \in P$. Die Menge P enthält nicht die Zahl 4. Wir sagen: „4 ist nicht Element von P" und schreiben: $4 \notin P$.
Die Menge Z im Beispiel 1f) besteht aus den Zahlen 0, 2, 4, 6, 8. Wir schreiben dafür auch $Z = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Die Menge E im Beispiel 1b) enthält nur ein Element, die Zahl 8. Wir nennen solche Mengen **Einermengen.** Wir schreiben: $E = \{8\}$.
Wenn die Menge R im Beispiel 1c) kein Element enthält, sagen wir: „Die Menge ist leer" bzw. „Es handelt sich um die **leere Menge**". Wir schreiben dafür $\{\ \}$ oder $\emptyset$.

Die Menge P im Beispiel 1e) ist in der Menge N im Beispiel 1d) enthalten, denn jede Primzahl ist eine natürliche Zahl. Man sagt: „P ist eine **Teilmenge** von N" und schreibt: $P \subset N$.

2 Bilden Sie alle Teilmengen von $M = \{2, 4, 6\}$!

Als Teilmengen ergeben sich drei Zweiermengen $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$, drei Einermengen $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ und die leere Menge $\emptyset$.

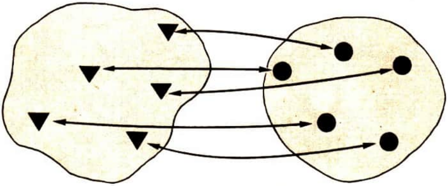
(1) Bilden Sie alle Teilmengen von $M = \{g, e, r, t\}$!

Gelegentlich wird die Menge M selbst als eine der Teilmengen von M aufgefaßt. Sie wird dann als **unechte Teilmenge** von M, jede andere Teilmenge von M aber als **echte Teilmenge** von M bezeichnet. Soll X grundsätzlich nur eine echte Teilmenge, also nicht die unechte Teilmenge M bedeuten, so schreibt man $X \subset M$, soll für X aber auch die unechte Teilmenge zugelassen sein, so wird $X \subseteqq M$ geschrieben.

Zwei Mengen M_1 und M_2, die genau dieselben Elemente enthalten, nennt man **gleich** und schreibt: $M_1 = M_2$.

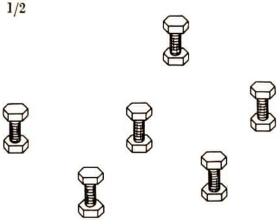
(2) Weisen Sie die Gleichheit der folgenden Mengen M_1 und M_2 nach!

M_1 sei die Menge aller durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen. M_2 sei die Menge aller natürlichen Zahlen, die sowohl durch 2 als auch durch 5 teilbar sind.

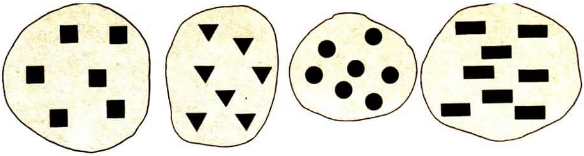


1/1

1/2



Zwei Mengen X_1 und X_2, die „gleich viele" Elemente enthalten, nennt man **gleichmächtig** oder **äquivalent** und schreibt $X_1 \sim X_2$. Ob zwei Mengen gleichmächtig sind, kann man, ohne die Elemente abzuzählen, dadurch feststellen, daß man versucht, jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zuzuordnen und umgekehrt. Gelingt das (Bild 1/1), so sind die Mengen gleichmächtig.



1/3

3 Was können Sie aus Bild 1/2 folgern?

Finden sich in Bild 1/3 gleichmächtige Mengen?

Aufgaben 1/1 bis 1/8

1.1.2. Der Variablenbegriff

2 **DEFINITION: Eine Variable ist ein Zeichen für ein beliebiges Element einer vorgegebenen Menge. Diese Menge wird als Variabilitätsbereich dieser Variablen bezeichnet.**

3 Mit der Variablen n soll irgendeine natürliche Zahl bezeichnet sein: $n \in N$.

Dann kann n z. B. 0 oder 3 oder 726 oder 12400 usw. bedeuten. Der Variabilitätsbereich für n ist dann die Menge N der natürlichen Zahlen.

Variablen sind ein sehr wichtiges Mittel zur rationellen Darstellung vor allem mathematischer Probleme und Sachverhalte. Als Variablen werden meist Buchstaben benutzt.

Variablen dienen vor allem folgenden Zwecken:

(1) Unter Anwendung von Variablen lassen sich in einfacher Weise Mengen darstellen. Dabei muß aber der Variabilitätsbereich mit angegeben werden.

4 **a)** Gerade natürliche Zahlen haben die Form $2 \cdot n$, $n \in N$.
b) Ungerade natürliche Zahlen haben die Form $2n + 1$, $n \in N$.
c) Natürliche Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen, haben die Form $3n + 2$, $n \in N$.

(2) Unter Verwendung von Variablen lassen sich Zahlengesetzmäßigkeiten und Naturgesetze übersichtlich darstellen.

5 **a)** Für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

b) Wenn ein Kraftwagen mit gleichbleibender Geschwindigkeit von $v \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ fährt, so gilt für die nach t h zurückgelegte Strecke von s km:

$$s = v \cdot t$$

(3) Unter Verwendung von Variablen lassen sich Probleme verschiedenster Art, denen gleichartige Beziehungen zwischen Zahlen zugrunde liegen, übersichtlich fixieren und rationell lösen.

6 Durch $a \cdot b$ kann man sehr verschiedenartige Begriffsbildungen erfassen.

a	b	$a \cdot b$
Länge der einen Seite eines Rechtecks	Länge der anderen Seite dieses Rechtecks	Flächeninhalt des Rechtecks
durchschnittlicher Lohn für einen Arbeitstag	Anzahl der Arbeitstage	Gesamtlohn
durchschnittliche Geschwindigkeit eines Autos	Fahrzeit	in der Fahrzeit zurückgelegter Weg
elektrische Stromstärke in einem Gleichstromkreis	elektrischer Widerstand in diesem Kreis	elektrische Spannung
Leistung	Zeitspanne, während der diese Leistung besteht	Arbeit

An diesem Beispiel wird eine wesentliche Seite der Mathematik deutlich. Durch Beiseitelassen von sachlichen Einzelheiten und Begriffen (wie Lohn, Widerstand, Arbeit usw.) gelangt man zum mathematisch Wesentlichen, das den verschiedensten praktischen Sachverhalten gemeinsam ist (im Beispiel: Bildung eines Produkts). Dieses mathematisch Wesentliche wird mit Hilfe mathematischer Zeichen schriftlich fixiert (im Beispiel: $a \cdot b$).

Zur Bezeichnung von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten usw. werden Variablen, Ziffern, Zeichen für Rechenoperationen und Klammern aneinandergereiht. Das geschieht wie bei der Schriftsprache, bei der aus Buchstaben und Satzzeichen Wörter und Sätze gebildet werden:

$$3; \quad 5 + 7; \quad \frac{5}{6}; \quad (6 - 2) \cdot 8; \quad m; \quad a + b; \quad b \cdot c; \quad (x + y) \cdot z; \quad a[2x(c - d)]$$

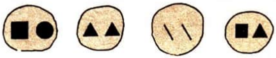
Die Ziffern, die Variablen und solche Aneinanderreihungen von Zeichen wie die oben angegebenen heißen **Terme**.

Aufgaben 1/9 bis 1/12

1.1.3. Der Zahlenbereich der natürlichen Zahlen

Wir fassen alle untereinander gleichmächtigen Mengen zu einer **Klasse** zusammen. Jede solche Klasse heißt eine **natürliche Zahl**.

1/4



7 Eine dieser Klassen, nämlich die natürliche Zahl 2, enthält u. a. folgende Mengen:

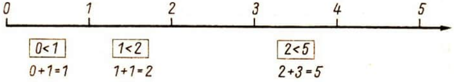
Die Menge der Messer einer Schere,
die Menge der Pole einer elektrischen Batterie,
die Menge der Räder eines Fahrrades.
In dieser Klasse befinden sich auch die im Bild 1/4 dargestellten Mengen.

Bei dieser Klassenbildung interessiert an jeder Menge nur die Anzahl ihrer Elemente. Die Bezeichnung solcher Klassen, also der natürlichen Zahlen, erfolgt durch **Zahlwörter** und **Zahlzeichen (Ziffern)**. Es ist demnach zwischen Bezeichnung (Zahlwort, Ziffer) und Bezeichnetem (natürliche Zahl) zu unterscheiden.

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen. Sie werden mit „0", „1", „2", „3", ... bezeichnet.

Natürliche Zahlen lassen sich **ordnen.** So läßt sich z. B. nach der folgenden Definition eindeutig angeben, welche von zwei natürlichen Zahlen a und b ($a \neq b$) die kleinere ist.

DEFINITION: Von zwei natürlichen Zahlen a, b ist a kleiner als b (in Zeichen $a < b$) genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x mit $x \neq 0$ gibt, für die $a + x = b$ gilt (Bild 1/5).



1/5

Wird $x = 0$ nicht ausgeschlossen, so läßt sich die Gleichheit von a und b mit einbeziehen und folgende Definition angeben:

Für zwei natürliche Zahlen a und b gilt $a \leqq b$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, für die $a + x = b$ gilt.

8 **a)** $3 < 5$, denn $3 + 2 = 5$
b) da $5 + 1 = 6$, gilt $5 < 6$
c) $4 \leqq 4$, denn $4 + 0 = 4$
d) $4 \leqq 7$, denn $4 + 3 = 7$

Für natürliche Zahlen sind folgende **Rechenoperationen** erklärt:

	Rechenoperationen	Umkehroperationen
1. Stufe	Addition $12 + 2 = 14$ Summand plus Summand gleich Summe	Subtraktion $14 - 2 = 12$ Minuend minus Subtrahend gleich Differenz
2. Stufe	Multiplikation $12 \cdot 2 = 24$ Faktor mal Faktor gleich Produkt	Division $24 : 2 = 12$ Dividend durch Divisor gleich Quotient
3. Stufe	Potenzieren $5^3 = 125$ Basis hoch Exponent gleich Potenz	(vgl. Abschnitte 5.5. und 6.1.)

Im Bereich der natürlichen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation uneingeschränkt ausführbar, d. h., die Summe und das Produkt zweier beliebiger natürlicher Zahlen sind jeweils wieder natürliche Zahlen.
Die Multiplikation natürlicher Zahlen läßt sich auf die Addition zurückführen:

$3 \cdot 5 = \underbrace{5 + 5 + 5}_{\text{3 Summanden 5}}$ Ergebnis: $3 \cdot 5 = 15$

Für alle natürlichen Zahlen a gilt:

a) $a + 0 = a$; b) $a \cdot 1 = a$

Die Zahl 0 heißt **neutrales Element bezüglich der Addition,** die Zahl 1 heißt **neutrales Element bezüglich der Multiplikation.**

DEFINITION: Die Zahl x, welche die Gleichung $a + x = b$ erfüllt, heißt Differenz aus b und a und wird durch $b - a$ bezeichnet. Die Subtraktion $b - a$ ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur dann ausführbar, wenn $a \leqq b$ ist.

DEFINITION: Die Zahl x, welche die Gleichung $a \cdot x = b$ erfüllt, heißt Quotient aus b und a und wird mit $b : a$ bezeichnet. Die Division $b : a$ ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur dann ausführbar, wenn b ein Vielfaches von a und $a \neq 0$ ist.

4 **a)** Warum ist es notwendig, in dieser Definition die Einschränkung zu machen, daß der Divisor ungleich Null sein muß?
b) Weisen Sie nach, daß $30 : 7$ im Bereich der natürlichen Zahlen nicht ausführbar ist!

Die Subtraktion ist die **Umkehroperation** der Addition, die Division die der Multiplikation, d. h., für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:

$(a + b) - b = a$ und $(a \cdot b) : b = a \quad (b \neq 0)$

Unter der Voraussetzung, daß die Subtraktion bzw. Division im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar ist, gilt auch

$(a - b) + b = a$ und $(a : b) \cdot b = a \quad (b \neq 0)$.

SATZ: Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

	Addition	Multiplikation
Kommutativität	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivität	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Aufgaben 1/13 bis 1/22

1.1.4. Der Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen

5 Welche der Gleichungen haben im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösungen?
a) $5 \cdot x = 50$ **b)** $7 \cdot x = 18$ **c)** $25 + x = 30$ **d)** $17 + x = 15$

Um die Aufgabe **b)** in Übung 1/5 lösbar zu machen, d. h. um Divisionen unbeschränkt ausführen zu können, sind andere Zahlen als nur die natürlichen Zahlen erforderlich. Deshalb wird ein neuer Zahlenbereich, der **Bereich der gebrochenen Zahlen,** eingeführt. Das geschieht folgendermaßen:

Zunächst setzen wir fest, was unter einem **Bruch** verstanden werden soll.

3 **DEFINITION: Ein Bruch ist ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen a, b ($b \neq 0$), das in der Form $\frac{a}{b}$ geschrieben wird $\left(\text{z. B. } \frac{3}{4}, \frac{10}{7}, \frac{6}{3}, \frac{2}{1}\right)$. Dabei heißt a Zähler und b Nenner des Bruches.**

Die Brüche stellen, bezogen auf praktische Probleme, gewisse Quantitäten dar: Teile und Vielfache der Teile einer bestimmten Einheit $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{m},\ \frac{3}{4}\,\mathrm{kg}\right)$.

Brüche, die durch **Erweitern** oder **Kürzen** auseinander hervorgehen, stellen jeweils gleiche Quantitäten dar, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots, \frac{n}{2n}, \ldots$

Es ist deshalb sinnvoll, diese als gleichwertig (äquivalent) anzusehen.

DEFINITION: Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ heißen **äquivalent** genau dann, wenn sie durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.

SATZ: Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind äquivalent genau dann, wenn gilt: $a \cdot d = b \cdot c$.

9 $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{15}$ sind äquivalent, weil $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$ gilt.

4 **DEFINITION: Eine gebrochene Zahl ist die Klasse aller Brüche $\frac{a}{b}$, die untereinander äquivalent sind.**

Zur Bezeichnung der gebrochenen Zahl kann man irgendeinen Bruch der Klasse (einen **Repräsentanten**) benutzen. Es ist oft zweckmäßig, denjenigen Bruch der Klasse zu wählen, der sich nicht mehr kürzen läßt.

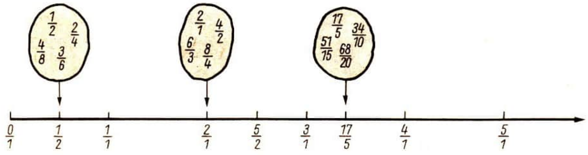
Gebrochene Zahlen lassen sich **ordnen.** So läßt sich z. B. nach der folgenden Definition von zwei gebrochenen Zahlen eindeutig angeben, welche die kleinere ist.

DEFINITION: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < c \cdot b$.

10 a) $\frac{1}{4} < \frac{3}{5}$, weil $1 \cdot 5 < 3 \cdot 4$ gilt.

b) $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$, weil $2 \cdot 8 < 3 \cdot 7$ gilt.

Trägt man auf einem Zahlenstrahl entsprechende Bruchteile seiner Einheitsstrecke ab, so läßt sich jeder gebrochenen Zahl genau ein Punkt des Zahlenstrahls zuordnen (Bild 1/6). Dagegen ist aber nicht jedem Punkt des Zahlenstrahls eine gebrochene Zahl zugeordnet (vgl. Abschnitt 5.5.1.).



1/6

Für die gebrochenen Zahlen müssen die **Rechenoperationen** neu definiert werden. Dabei wird berücksichtigt, daß

1. die Gesetzmäßigkeiten für die Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen auch für die Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen Gültigkeit behalten sollen (Subtraktion und Division als Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation; Kommutativität usw. bei Addition und Multiplikation);

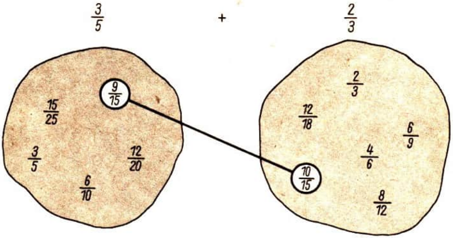
2. die Division unbeschränkt (mit Ausnahme der Division durch Null) ausführbar sein soll.

Das wird durch folgende **Definitionen** erreicht:

Addition	$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$	$n \neq 0$
Subtraktion	$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$	$\frac{b}{n} \leq \frac{a}{n}$; $n \neq 0$
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$b \neq 0$; $d \neq 0$
Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$b \neq 0$; $c \neq 0$; $d \neq 0$

Die Addition und Subtraktion ist hier nur für solche gebrochenen Zahlen erklärt, die durch Brüche mit gleichen Nennern **(gleichnamige Brüche)** dargestellt sind. Wenn gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit verschiedenen Nennern dargestellt sind, addiert bzw. subtrahiert werden sollen, so muß man deshalb zunächst in den jeweiligen Klassen Brüche mit gleichen Nennern suchen und mit diesen nach der obigen Vorschrift verfahren. Das Ergebnis ist dann die Klasse, in der dieser neue Bruch liegt.

11 Um z. B. die Summe $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$ zu bilden (Bild 1/7), gehen wir folgendermaßen vor: Wir suchen in den Klassen der beiden gebrochenen Zahlen Brüche mit gleichen Nennern und addieren diese Brüche: $\frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{19}{15}$. Dann gehen wir zur Klasse über, in der der neue Bruch liegt.



1/7

6 Weisen Sie nach, daß die Klasse $\left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\right\}$ das neutrale Element bezüglich der Addition im Bereich der gebrochenen Zahlen ist!

Durch diese Definitionen sind tatsächlich die oben genannten Bedingungen erfüllt. Das ergibt sich daraus, daß die Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen auf solche mit natürlichen Zahlen und die Division auf die Multiplikation zurückgeführt wurden. Letztere ist aber unbeschränkt ausführbar.

Der Bereich der natürlichen Zahlen und der neu konstruierte Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen stehen nicht isoliert nebeneinander, sondern in engem Zusammenhang.

5 **SATZ: Der Bereich der natürlichen Zahlen ist ein Teilbereich des Bereichs der gebrochenen Zahlen.**

Unter Benutzung des Zeichens „R^*" für die Menge der gebrochenen Zahlen gilt: $N \subset R^*$.
Ohne einen Beweis zu führen, machen wir uns den Satz 1/5 an Beispielen klar.

12 Die natürliche Zahl 3 wird der gebrochenen Zahl $\frac{3}{1}$ zugeordnet.

Die natürliche Zahl 25 wird der gebrochenen Zahl $\frac{25}{1}$ zugeordnet.

Jede natürliche Zahl a wird der entsprechenden gebrochenen Zahl $\frac{a}{1}$ zugeordnet.

Beim Vergleichen und beim Rechnen verhalten sich die Zahlen in dem einen Bereich wie die ihnen zugeordneten in dem anderen.

13 a)
$$\begin{array}{ccc} 7 & < & 9 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{7}{1} & < & \frac{9}{1} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 5 & = & 8 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{3}{1} & + & \frac{5}{1} & = & \frac{8}{1} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ccccc} 9 & - & 4 & = & 5 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{9}{1} & - & \frac{4}{1} & = & \frac{5}{1} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & 7 & = & 21 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \frac{3}{1} & \cdot & \frac{7}{1} & = & \frac{21}{1} \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{ccccccccccc} 15 & : & 5 & = & 3 & & & & & & \\ \updownarrow & & \updownarrow & & & & & & & & \\ \frac{15}{1} & : & \frac{5}{1} & = & \frac{15}{1} & \cdot & \frac{1}{5} & = & \frac{3}{1} & & \end{array}$$

Wenn wir in Zukunft von natürlichen Zahlen sprechen, so betrachten wir sie stets als Teilbereich der gebrochenen Zahlen. Aus dieser Zuordnung $a \longleftrightarrow \frac{a}{1}$ ergibt sich, daß wir sie nach Belieben mit Hilfe der alten Bezeichnungen oder mit Hilfe der neuen darstellen können.
Für manche Rechnungen ist es vorteilhaft, die natürlichen Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 darzustellen.

14 a) $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$

b) $\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7} : \frac{3}{1} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{7 \cdot 3} = \frac{4}{21}$

Im Bereich der gebrochenen Zahlen ist jetzt auch die Division natürlicher Zahlen, mit Ausnahme der Division durch Null, uneingeschränkt ausführbar:

$$3 : 4 = \frac{3}{1} : \frac{4}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Elemente aus der Menge der gebrochenen Zahlen (R^*) werden nachfolgend ebenso wie Elemente aus der Menge der natürlichen Zahlen (N) durch Variable wie „a", „b", „x", „y", ... bezeichnet. Um Mißverständnissen vorzubeugen, ist es also notwendig, bei Verwendung von Variablen für natürliche bzw. für gebrochene Zahlen den jeweiligen Variabilitätsbereich anzugeben.

15

a	b	c	$a+b+c$	$a+b-c$	$a \cdot b \cdot c$	$(a \cdot b) : c$	$a \cdot (b : c)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{23}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{7}{4}$	nicht lösbar	$\frac{27}{200}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{5}$	3	$\frac{11}{10}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{23}{10}$	$\frac{33}{25}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{12}{11}$

Zusammenfassung:

Im Bereich der gebrochenen Zahlen sind Addition, Multiplikation und Division (außer durch Null) uneingeschränkt ausführbar. Die Subtraktion $a - b$ $(a, b \in R^*)$ ist ausführbar genau dann, wenn $b \leqq a$ ist.
Die natürlichen Zahlen bilden einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen.
Die für den Bereich der natürlichen Zahlen angeführten Gesetze der Rechenoperationen gelten auch im Bereich der gebrochenen Zahlen.

Aufgaben 1/23 bis 1/43

1.1.5. Der Zahlenbereich der rationalen Zahlen

Um die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar zu machen, wird ein Zahlenbereich konstruiert, der den Bereich der gebrochenen Zahlen als Teilbereich umfaßt.
Für den Aufbau werden Differenzen gebrochener Zahlen benutzt.

6 **DEFINITION: Eine Differenz ist ein geordnetes Paar gebrochener Zahlen a, b, das in der Form $[a - b]$ geschrieben wird.**
Hinweis: Beachten Sie den Unterschied zur Definition der Subtraktion gebrochener Zahlen! Dort war $a - b$ $(a, b \in R^*)$ nur erklärt für $b \leqq a$. Diese Einschränkung ist bei der obigen Definition nicht mehr vorhanden.

16 Bei einer Stahlwelle sei als Nennmaß für den Durchmesser $d_0 = 40{,}0$ mm vorgesehen. Die tatsächlichen Werte der Durchmesser zweier Werkstücke seien $d_1 = 40{,}1$ mm und $d_2 = 39{,}8$ mm. Definieren wir die **Abweichung** des Istmaßes vom Nennmaß als $[d - d_0]$, so erhalten wir für die beiden genannten Fälle die Abweichungen $[40{,}1 - 40{,}0]$ und $[39{,}8 - 40{,}0]$.
Durch diese Differenzen wird einerseits der absolute Wert der Abweichung (0,1 mm und 0,2 mm) zum Ausdruck gebracht, andererseits geht aus ihnen hervor, ob die Abweichung entweder auf einem zu kleinen Maß oder auf einem zu großen Maß beruht. Im ersten Fall steht die größere Zahl an zweiter, im zweiten an erster Stelle des Zahlenpaares.

DEFINITION: Zwei Differenzen $[a - b]$ und $[c - d]$ heißen **äquivalent** genau dann, wenn gilt: $a + d = b + c$.

17 Es sei $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{7}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, $d = \frac{4}{3}$. Dann gilt $\left[\frac{5}{3} - \frac{7}{3}\right]$ äquivalent $\left[\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right]$, denn $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}$.

(7) **a)** Wählen Sie zwei andere gebrochene Zahlen, deren Differenz äquivalent $\left[\frac{5}{3} - \frac{7}{3}\right]$ ist!

b) Sind die Differenzen $[5 - 8]$ und $[8 - 5]$ äquivalent?

c) Sind die Differenzen $\left[\frac{1}{4} - 4\right]$ und $\left[\frac{5}{4} - 5\right]$ äquivalent?

7 **DEFINITION: Eine rationale Zahl ist die Klasse aller Differenzen $[a - b]$ (a, b sind gebrochene Zahlen), die untereinander äquivalent sind.**

18 **a)** $\left\{[3 - 7], \left[\frac{3}{2} - \frac{11}{2}\right], [0 - 4], \ldots\right\}$

b) $\left\{[5 - 5], \left[\frac{6}{7} - \frac{6}{7}\right], [1{,}5 - 1{,}5], [0 - 0], \ldots\right\}$

c) $\left\{[6 - 2], [8 - 4], \left[\frac{38}{5} - \frac{18}{5}\right], [4 - 0], \ldots\right\}$

Es gibt genau eine Klasse, die die Differenz $[0 - 0]$ enthält. Diese Klasse entspricht der gebrochenen Zahl Null. Deshalb erhält diese Klasse auch das Zeichen 0.
In jeder anderen Klasse gibt es genau eine Differenz, die die Zahl 0 entweder an erster oder zweiter Stelle enthält. Diese Differenz wird zur Bezeichnung der ganzen Klasse ausgewählt und ihrerseits noch kürzer bezeichnet:

$[0 - g] = -g$; $[g - 0] = +g$

Die Variable g bezeichnet hierbei eine beliebige von Null verschiedene gebrochene Zahl.
Die im Beispiel 1/18 dargestellten rationalen Zahlen werden also folgendermaßen bezeichnet:

a) -4;   **b)** 0;   **c)** $+4$

Die Zeichen „$-$“ und „$+$“ bei den Bezeichnungen für die rationalen Zahlen „$-g$“ und „$+g$“ werden **Vorzeichen** der rationalen Zahlen genannt. Sie sind zu unterscheiden von den **Operationszeichen** für die Subtraktion und die Addition. Um keine Verwechslungen eintreten zu lassen, werden die rationalen Zahlen mitunter in Klammer gesetzt: $(-g)$; $(+g)$.
Rationale Zahlen mit dem Vorzeichen „$+$“ nennen wir **positive,** solche mit dem Vorzeichen „$-$“ **negative rationale Zahlen.**
Legt man fest, daß für Variablen $a, b, c, \ldots$ beliebige rationale Zahlen eingesetzt werden können, so kann z. B. die Variable a entweder eine positive rationale Zahl oder eine negative rationale Zahl oder die rationale Zahl 0 bedeuten.

Rationale Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißen **zueinander entgegengesetzt.** Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt. Ist r irgendeine rationale Zahl, so wird die entgegengesetzte Zahl von r durch $-r$ bezeichnet.

19 **a)** $-(+3) = -3$ **b)** $-\left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{3}{4}$ **c)** $-(-4{,}3) = +4{,}3$

SATZ: Für alle rationalen Zahlen r gilt: $-(-r) = r$

DEFINITION: Der **absolute Betrag** einer rationalen Zahl a (in Zeichen $|a|$) ist eine nichtnegative rationale Zahl, die nach folgender Vorschrift gebildet wird:

Ist a eine positive rationale Zahl, so ist $|a| = a$.

Ist $a = 0$, so ist $|a| = 0$.

Ist a eine negative rationale Zahl, so ist $|a| = -a$.

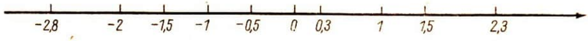
20 a) $|+2| = +2$ b) $|-3{,}2| = -(-3{,}2) = +3{,}2$ c) $|0| = 0$

SATZ: Einander entgegengesetzte Zahlen haben den gleichen Betrag.

Die rationalen Zahlen werden durch folgende DEFINITION **geordnet:**

1. Die Zahl 0 ist kleiner als jede positive und größer als jede negative rationale Zahl.
2. Jede negative rationale Zahl ist kleiner als jede positive rationale Zahl.
3. Von zwei positiven rationalen Zahlen ist diejenige größer, deren Betrag größer ist.
4. Von zwei negativen rationalen Zahlen ist diejenige größer, deren Betrag kleiner ist.

Die Ordnung der rationalen Zahlen läßt sich auf der Zahlengeraden veranschaulichen (Bild 1/8).

1/8


Die Forderung, daß der Bereich der rationalen Zahlen den Bereich der gebrochenen Zahlen als Teilbereich umfaßt, läßt sich in folgender Weise erfüllen:
Wir ordnen jeder gebrochenen Zahl die entsprechende positive rationale Zahl zu, z. B. der gebrochenen Zahl 3,5 die rationale Zahl $(+3{,}5)$. Der gebrochenen Zahl 0 wird die rationale Zahl 0 zugeordnet. Wir ordnen also dem Bereich der gebrochenen Zahlen den Teilbereich der nichtnegativen rationalen Zahlen zu. Das ist eindeutig möglich.
Für die Gesamtheit aller rationalen Zahlen werden die **Rechenoperationen** so definiert, daß

1. die Gesetzmäßigkeiten für die Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen auch für die Rechenoperationen mit rationalen Zahlen Gültigkeit behalten sollen (Subtraktion und Division als Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation; Kommutativität und Assoziativität bei Addition und Multiplikation; Distributivität);
2. die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar sein soll.

Dazu werden alle Rechenoperationen mit nichtnegativen rationalen Zahlen auf die entsprechenden Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen zurückgeführt, soweit sie dort ausführbar sind.

21 a)
$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{3} & + & \frac{5}{1} & = & \frac{17}{3} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \left(+\frac{2}{3}\right) & + & \left(+\frac{5}{1}\right) & = & \left(+\frac{17}{3}\right) \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{4} & \cdot & \frac{5}{7} & = & \frac{15}{28} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \left(+\frac{3}{4}\right) & \cdot & \left(+\frac{5}{7}\right) & = & \left(+\frac{15}{28}\right) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} \frac{5}{2} & - & \frac{4}{3} & = & \frac{7}{6} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \left(+\frac{5}{2}\right) & - & \left(+\frac{4}{3}\right) & = & \left(+\frac{7}{6}\right) \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{5} & : & \frac{3}{10} & = & \frac{1}{5} & \cdot & \frac{10}{3} & = & \frac{2}{3} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \left(+\frac{1}{5}\right) & : & \left(+\frac{3}{10}\right) & = & \left(+\frac{1}{5}\right) & \cdot & \left(+\frac{10}{3}\right) & = & \left(+\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

Für die einzelnen Rechenoperationen gelten folgende Definitionen:

(1) für die Addition:

Zwei nichtnegative rationale Zahlen werden wie die zugeordneten gebrochenen Zahlen addiert, zwei negative rationale Zahlen, indem man ihre Beträge addiert und dann zur entgegengesetzten Zahl übergeht.

22 **a)** $(+6) + \left(+\frac{3}{4}\right)$

Die $(+6)$ und $\left(+\frac{3}{4}\right)$ zugeordneten gebrochenen Zahlen sind 6 und $\frac{3}{4}$. Mit ihnen rechnen wir weiter:

$6 + \frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}$; also

$(+6) + \left(+\frac{3}{4}\right) = +\left[6 + \frac{3}{4}\right] = +6\frac{3}{4}$

Hinweis: Das Vorzeichen einer positiven rationalen Zahl wird häufig weggelassen.

b) $-5 + (-3{,}2)$

Die zugehörigen Beträge sind

$|-5| = +5$ und $|-3{,}2| = +3{,}2$.

Deren Summe wird nach Beispiel 22 a) bestimmt:

$|-5| + |-3{,}2| = (+5) + (+3{,}2) = 5 + 3{,}2 = 8{,}2$

Die hierzu gehörende entgegengesetzte Zahl ist $-8{,}2$.
Also ergibt sich:

$(-5) + (-3{,}2) = -[|-5| + |-3{,}2|] = -[(+5) + (+3{,}2)] = -(5 + 3{,}2) = -8{,}2$

In der Praxis spart man meist die Zwischenschritte und rechnet abgekürzt wie folgt:

$(-5) + (-3{,}2) = -(5 + 3{,}2) = -8{,}2$

Das bedeutet, daß statt mit den Beträgen der negativen Zahlen mit den gebrochenen Zahlen gearbeitet wird, die den entgegengesetzten Zahlen zugeordnet sind.

Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden addiert, indem man den kleineren Betrag vom größeren subtrahiert. Falls der Summand mit dem größeren Betrag negativ ist, geht man von der erhaltenen Differenz der Beträge zur entgegengesetzten Zahl über.

Auch hier wird in der Praxis statt mit den Beträgen nichtnegativer rationaler Zahlen mit den zugeordneten gebrochenen Zahlen und statt mit den Beträgen negativer rationaler Zahlen mit den gebrochenen Zahlen gearbeitet, die den entgegengesetzten rationalen Zahlen zugeordnet sind.

23 **a)** $(-2) + (+5)$

(Die Zahl mit dem größeren Betrag ist nicht negativ.)

ausführliche Form: $(-2) + (+5) = +[|+5| - |-2|]$

$= +[(+5) - (+2)] = +(5 - 2) = +3$

Kurzform: $(-2) + (+5) = +(5 - 2) = +3$

b) $(-7) + (+5)$ (Die Zahl mit dem größeren Betrag ist negativ.)

ausführliche Form: $(-7) + (+5) = -[|-7| - |+5|]$
$= -[(+7) - (+5)] = -(7 - 5) = -2$

Kurzform: $(-7) + (+5) = -(7 - 5) = -2$

c) $(-5) + (+5)$ (Sonderfall: Entgegengesetzte Zahlen.)

ausführliche Form: $(-5) + (+5) = [|+5| - |-5|]$
$= [(+5) - (+5)] = (5 - 5) = 0$

Kurzform: $(-5) + (+5) = (5 - 5) = 0$

SATZ: Die Addition ist im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.

(2) für die Subtraktion:

Für alle rationalen Zahlen a, b gilt:

$a - b = a + (-b)$

Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man die entgegengesetzte Zahl addiert.

Da damit die Subtraktion auf die unbeschränkt ausführbare Addition zurückgeführt ist, gilt:

SATZ: Die Subtraktion ist im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.

24 (Alle Beispiele werden nur in der Kurzform dargestellt.)

a) $7 - 3 = 4$

b) $(-7) - 3 = (-7) + (-3) = -(7 + 3) = -10$

c) $7 - (-3) = 7 + (+3) = 7 + 3 = 10$

d) $(-7) - (-3) = (-7) + (+3) = -(7 - 3) = -4$

(3) für die Multiplikation:

Zwei nichtnegative rationale Zahlen werden wie die zugeordneten gebrochenen Zahlen multipliziert, zwei negative rationale Zahlen, indem man die Beträge multipliziert.

Auch hierbei und im folgenden ist es in der Praxis üblich, statt mit den Beträgen der negativen rationalen Zahlen mit den gebrochenen Zahlen zu arbeiten, die den zu ihnen entgegengesetzten rationalen Zahlen zugeordnet sind.

25 $(-3) \cdot (-5) = 3 \cdot 5 = 15$

Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und dann zur entgegengesetzten Zahl übergeht.

26 $(-3) \cdot 5 = -(3 \cdot 5) = -15$

(4) für die Division:

DEFINITION: Zwei rationale Zahlen a und b heißen zueinander **reziprok** genau dann, wenn ihr Produkt gleich 1 ist: $a \cdot b = 1$.

27 Zueinander reziproke Zahlen sind:

a) 3 und $\frac{1}{3}$, denn $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

b) $-\frac{7}{5}$ und $-\frac{5}{7}$, denn $\left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = +\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}\right) = +\frac{35}{35} = 1$

Für alle rationalen Zahlen a, b $(b \neq 0)$ gilt:

$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.

In Worten:

Durch eine von Null verschiedene rationale Zahl wird dividiert, indem man mit der entsprechenden reziproken Zahl multipliziert.

28 **a)** $3 : 5 = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

b) $(-3) : (-5) = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = +\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$

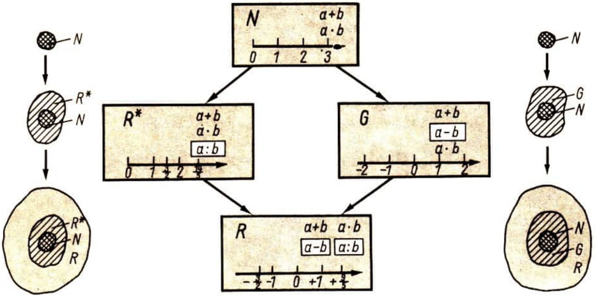
c) $3 : (-5) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

d) $(-3) : 5 = (-3) \cdot \frac{1}{5} = -\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

Aufgaben 1/44 bis 1/59

1.1.6. Der Zahlenbereich der ganzen Zahlen

Der Teilbereich der rationalen Zahlen, deren Beträge natürlichen Zahlen zugeordnet sind, heißt der Bereich der **ganzen Zahlen.** In diesem Bereich sind die Addition, die Multiplikation und die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar, nicht aber die Division. Der Bereich der natürlichen Zahlen ist auch im Bereich der ganzen Zahlen als Teilbereich enthalten. Es ist möglich, den Bereich der rationalen Zahlen R aus dem Bereich der natürlichen Zahlen N sowohl auf dem Weg über den Bereich der gebrochenen Zahlen R^* als auch über den Bereich der ganzen Zahlen G aufzubauen (Bild 1/9).



1/9

1.1.7. Zusammenfassen von Summen, deren Glieder Variablen enthalten

Enthalten Glieder einer Summe neben rationalen Faktoren nur die gleichen Variablen, so ist unter Anwendung des Distributivgesetzes eine Zusammenfassung dieser Glieder zu einem einzigen möglich. Das Distributivgesetz für rationale Zahlen

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

wird dabei so benutzt, daß man von der rechten Seite der Gleichung zur linken übergeht.
Auch für Summen mit mehr als zwei Summanden kann man dieses Verfahren anwenden.

29 **a)** $3a + 7a = (3 + 7) \cdot a = 10a$

b) $4{,}5pq - 1{,}5pq + 6{,}5pq - 10pq = (4{,}5 - 1{,}5 + 6{,}5 - 10) \cdot pq = -0{,}5pq$

c) $4x - 3{,}2y + \frac{1}{2}ab - 4\frac{3}{4}ab + 2y - \frac{3}{8}x + 1{,}2y$

$= 4x - \frac{3}{8}x - 3{,}2y + 2y + 1{,}2y + \frac{1}{2}ab - 4\frac{3}{4}ab$

$= 3\frac{5}{8}x \qquad + 0y \qquad - 4\frac{1}{4}ab = -4\frac{1}{4}ab + 3\frac{5}{8}x$

Es ist zweckmäßig und üblich, die Glieder von Summen, die Variablen enthalten, im Ergebnis so zu ordnen, daß die Variablen **in lexikographischer Ordnung** stehen, d. h. sowohl in jedem Glied als Faktoren als auch in der Summe als Glieder die alphabetische Reihenfolge aufweisen.

8 **In einer Summe können Glieder, die dieselben Variablen enthalten, zusammengefaßt werden. Das geschieht, indem die rationalen Zahlenfaktoren dieser Glieder (die sog. Koeffizienten) nach den Regeln über die Addition und Subtraktion rationaler Zahlen zusammengefaßt und dem Ergebnis die betreffenden Variablen beigefügt werden.**

Aufgaben 1/60 bis 1/62

1.1.8. Multiplizieren und Dividieren mit dem Rechenstab

Der **Rechenstab** besteht aus einem System von Skalen, die auf dem **Stabkörper** bzw. der **Zunge** mit großer Genauigkeit aufgetragen sind. Die Skalen A (auf dem Stabkörper oben) und B (auf der Zunge oben) bzw. C (auf der Zunge unten) und D (auf dem Stabkörper unten) sind jeweils kongruent. Weitere auf dem Rechenstab befindliche Skalen betrachten wir zunächst nicht.
Jede Skale enthält zwischen den Marken 1 und 10 ihre **Einheitsstrecke**, deren Länge willkürlich festgelegt ist. Für die Skalen C und D wird meist eine Strecke mit der Länge 25 cm gewählt. Die Einheitsstrecke für die Skalen A und B hat dann eine Länge von 12,5 cm.
Zum Multiplizieren und Dividieren benutzen wir ausschließlich die Skalen C und D.
Auf dem Rechenstab können die Ziffern nur ohne Berücksichtigung des Stellenwertes (der Kommastelle) eingestellt bzw. abgelesen werden. Die Größenordnung des Ergebnisses, d. h. die Stellung des Kommas, muß durch einen **Überschlag** bestimmt werden.
Das geschieht in der Weise, daß man die gegebenen Zahlen so verändert (nicht „rundet"!), daß die Rechnung rasch und sicher im Kopf bewältigt werden kann, z. B.

$873 \cdot 56{,}8 \approx 900 \cdot 50 = 45000; \qquad 27{,}53 : 4{,}33 \approx 30 : 5 = 6.$

Dabei wird möglichst beim Multiplizieren der eine Faktor vergrößert, wenn der andere verkleinert wird, beim Dividieren aber Dividend und Divisor zugleich vergrößert oder verkleinert.

8 a) Studieren Sie genau die Unterteilungen der Skalen A und B in den Intervallen 1 bis 2, 2 bis 5, 5 bis 10 sowie der Skalen C und D in den Intervallen 1 bis 2, 2 bis 4, 4 bis 10!
Stellen Sie in einer Übersicht zusammen, welche letzten Ziffern der Ziffernfolgen jeweils noch abgelesen und jeweils noch geschätzt werden können!

Beispiel: C, D: 1 ... 2: ablesen 100 – 101 – 102 – ...
schätzen 1000 – 1002 – 1004 – ...

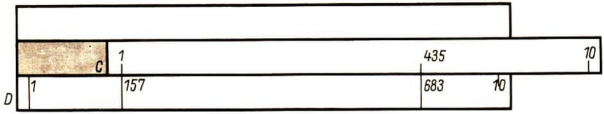
b) Stellen Sie den Läuferstrich auf folgende Ziffern der A-Skale ein, und lesen Sie jeweils auf der D-Skale die Ziffernfolge ab!

1,1; 1,5; 2; 3; 8; 15; 27; 36; 60; 85; 95; 97

Multiplizieren und Dividieren mit Hilfe der Skalen C und D veranschaulichen die Beispiele 1/30, 1/31 und 1/32.

30 Aufgabe: $x = 1{,}57 \cdot 4{,}35$ (Bild 1/10)

a) *einstellen:* C 1 über D 157
b) *ablesen:* unter C 435 das Ergebnis D 683
c) *Überschlag:* $1{,}5 \cdot 4 = 6$
d) *Endergebnis:* $x \approx 6{,}83$



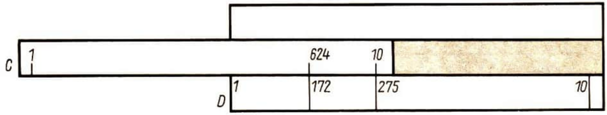
1/10

31 Dieselbe Einstellung ermöglicht die Lösung der Aufgabe $y = 6{,}83 : 4{,}35$

a) *einstellen:* C 435 über D 683
b) *ablesen:* unter C 1 das Ergebnis 157
c) *Überschlag:* $6 : 4 = 1{,}5$
d) *Endergebnis:* $y \approx 1{,}57$

32 Aufgabe: $x = 2{,}75 \cdot 6{,}24$

Da bei der Einstellung C 1 über D 275 die Zunge so weit nach rechts herausragt, daß unter C 624 keine Ablesung möglich ist, wird die Zunge nach links zurückgeschoben (**Rückschlag**), so daß C 10 über D 275 zu stehen kommt (Bild 1/11). Dann wird weiter



1/11

wie bei Beispiel 1/30 verfahren: $x \approx 17{,}2$. Entsprechend wird bei der Division $y = 17{,}2 : 6{,}24$ das Ergebnis nicht unter C 1, sondern unter C 10 abgelesen: $y \approx 2{,}75$. In bezug auf die Grundziffernfolgen der Ergebnisse ist es also gleichgültig, ob mit C 1 oder C 10 gearbeitet wird.
Der Rückschlag ist zeitaufwendig. Er kommt aber nur beim Multiplizieren, niemals beim Dividieren vor.

9 **Beim Multiplizieren ($a \cdot b$) und beim Dividieren ($a : b$) mit dem Rechenstab wird mit den Skalen C und D wie folgt gearbeitet:**

Rechenoperation	Einstellen	Ablesen
Multiplizieren	C 1 oder C 10 über D a	auf D unter C b
Dividieren	C b über D a	auf D unter C 1 oder C 10

Aufgaben 1/63 bis 1/68

1.2. Rechnen mit mehrgliedrigen Summen

1.2.1. Addition und Subtraktion von Summen

Klammern dürfen weggelassen werden, wenn sie eine Summe einschließen, die selbst als Summand auftritt, weil auf Grund der Assoziativität der Addition das Ergebnis von der Reihenfolge der Additionen unabhängig ist:

$$\boxed{(a + b) + c = a + b + c \qquad a + (b + c) = a + b + c}$$

Dasselbe trifft zu, wenn die Klammern eine Differenz einschließen, da diese durch Anwenden der Regel für die Subtraktion rationaler Zahlen $a - b = a + (-b)$ auf Summen zurückgeführt werden können:

$$(a - b) + c = (a + (-b)) + c = a + (-b) + c = a - b + c$$

$$a + (b - c) = a + (b + (-c)) = a + b + (-c) = a + b - c$$

$$\boxed{(a - b) + c = a - b + c \qquad a + (b - c) = a + b - c}$$

Dasselbe gilt auch, wenn die Klammern den Minuenden einer Differenz einschließen:

$$\boxed{(a + b) - c = a + b - c \qquad (a - b) - c = a - b - c}$$

Schließen die Klammern den Subtrahenden einer Differenz ein, so muß man beim Weglassen der Klammern die Zeichen vor den Gliedern in der Klammer wechseln. Hierbei wird noch die Vereinbarung getroffen, daß man vor ein Glied ohne Zeichen ein Pluszeichen setzt:

$$a - (b + c) = a - (+b + c)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a - (b + c) = a - b - c & a - (b - c) = a - b + c \\ a - (-b + c) = a + b - c & a - (-b - c) = a + b + c \end{array}}$$

Wir begründen hier nur die Gleichung $a - (b + c) = a - b - c$.
Entsprechend der Definition der Subtraktion als Umkehroperation der Addition genügt die Differenz $a - (b + c)$ der Gleichung

$(b + c) + x = a$.

Es ist zu zeigen, daß auch $x = a - b - c$ dieser Gleichung genügt. Auf Grund der bisher gemachten Feststellung gilt tatsächlich:

$(b + c) + (a - b - c) = b + c + a - b - c = a$

Zusammenfassend können wir für die Zeichen + und − vor einer Klammer folgendes feststellen:

10 **Wenn vor einer Klammer ein Pluszeichen steht, so kann die Klammer weggelassen werden.**
Wenn vor einer Klammer ein Minuszeichen steht, so muß man beim Auflösen der Klammer die Plus- und Minuszeichen in der Klammer in die entgegengesetzten verändern.

Aufgaben 1/69 bis 1/71

1.2.2. Ausmultiplizieren und Ausklammern

Es wird vereinbart, daß die Operationszeichen zweiter Stufe stärker binden als die der ersten Stufe, d. h., daß z. B. in $a + b \cdot c$ die Multiplikation zuerst auszuführen ist. Soll von dieser Vereinbarung abgewichen werden, so bedient man sich wieder der Klammer. Die in der Klammer stehenden Rechenoperationen sind dann zuerst auszuführen, ehe die außerhalb der Klammer stehenden in Angriff genommen werden.

33 **a)** $7 + 12 \cdot 3 = 7 + 36 = 43$, aber $(7 + 12) \cdot 3 = 19 \cdot 3 = 57$
b) $28 - 12 : 4 = 28 - 3 = 25$, aber $(28 - 12) : 4 = 16 : 4 = 4$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes können Klammern beseitigt werden:

$a \cdot (b + c) = ab + ac$

Der Vorgang heißt **Ausmultiplizieren** der Klammer. Dadurch wird ein Produkt in eine Summe verwandelt.

Wird dieser Rechengang in umgekehrter Richtung durchgeführt, so wird eine Summe in ein Produkt verwandelt:

$ab + ac = a \cdot (b + c)$.

Diese Umformung heißt **Ausklammern** (gemeinsamer Faktoren aller Glieder der Summe; vgl. dazu Abschnitt 1.1.7.).

11 **Für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt:**

Ausmultiplizieren

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

Ausklammern

Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliziert.

34 a) $-2a(3b - 5c) = (-2a) \cdot 3b - (-2a) \cdot 5c$
$$= -6ab - (-10ac)$$
$$= -6ab + 10ac$$

b) $(7x - 8y + 2z) \cdot \frac{1}{2}mn = \frac{7}{2}mnx - 4mny + mnz$

35 In den folgenden Summen werden jeweils gemeinsame Faktoren ausgeklammert.

a) $3 \cdot a + x \cdot a = (3 + x) \cdot a$

b) $-3x - 3 = (-3) \cdot x + (-3) \cdot 1 = (-3) \cdot (x + 1)$

c) $4y + \frac{1}{3}xy + ay = \left(4 + \frac{1}{3}x + a\right) \cdot y$

Aufgaben 1/72 bis 1/78

1.2.3. Produkte von zwei und mehr Summen

12 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d gilt:**

Ausmultiplizieren →

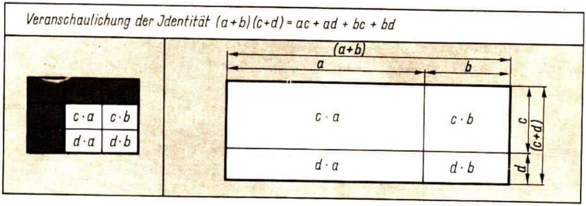
$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

← **Ausklammern**

Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jeden Summand der einen Klammer mit jedem Summand der anderen Klammer multipliziert.

Beweis: $(a + b) \cdot (c + d) = a(c + d) + b(c + d)$
$= ac + ad + bc + bd$ (zweimalige Anwendung des Distributivgesetzes)

9 Geben Sie Erläuterungen zu den Veranschaulichungen im Bild 1/12!



1/12

Satz 1/12 läßt sich entsprechend auf Faktoren mit mehr als zwei Gliedern und Produkte mit mehr als zwei Faktoren ausdehnen.

36 Folgende Produkte sind durch Ausmultiplizieren in Summen zu verwandeln. In den Ergebnissen sind die Variablen lexikographisch zu ordnen.

a) $(-4 + 3y - a)(2a + 4 - 2y) = -8a - 16 + 8y + 6ay + 12y - 6y^2$
$$\; - 2a^2 - 4a + 2ay$$
$$= -12a - 16 + 20y + 8ay - 6y^2 - 2a^2$$
$$= -2a^2 - 12a + 8ay - 6y^2 + 20y - 16$$

b) $(A + B)(a + b)(\alpha + \beta) = (Aa + Ab + Ba + Bb)(\alpha + \beta)$
$$= Aa\alpha + Ab\alpha + Ba\alpha + Bb\alpha + Aa\beta + Ab\beta + Ba\beta + Bb\beta$$
$$= Aa\alpha + Aa\beta + Ab\alpha + Ab\beta + Ba\alpha + Ba\beta + Bb\alpha + Bb\beta$$

37 Folgende Summen sind durch Ausklammern in Produkte zu verwandeln:

a) $3a - 6am + 8bmn - 4bn = 3a(1 - 2m) - 4bn(1 - 2m)$
$$= (1 - 2m) \cdot (3a - 4bn)$$

Probe: $(1 - 2m) \cdot (3a - 4bn) = 3a - 4bn - 6am + 8bmn$

b) $45r^3s^2 - 39r^2s^3 - 75r^2s + 65rs^2 + 33rs - 55$
$$= 45r^3s^2 - 39r^2s^3 + 33rs - 75r^2s + 65rs^2 - 55$$
$$= 3rs(15r^2s - 13rs^2 + 11) - 5(15r^2s - 13rs^2 + 11)$$
$$= (3rs - 5)(15r^2s - 13rs^2 + 11)$$

Aufgaben 1/79 bis 1/83

1.2.4. Die binomischen Formeln

13 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b gilt:**

$$\boxed{\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a + b)\cdot(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}}$$

Diese beiden Gleichungen heißen die **binomischen Formeln.** Die erste binomische Formel schließt dabei auch die Beziehung für das Quadrat einer Differenz mit ein:

$(x - y)^2 = x + (-y)^2 = x^2 + 2x \cdot (-y) + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

10 **a)** Beweisen Sie diese Formeln mit Hilfe von Satz 1/12!

b) Im allgemeinen gilt: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Zeigen Sie das für drei Zahlenpaare $[a; b]$!

c) Es gibt allerdings gewisse Zahlenpaare $[a; b]$, für die $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ gilt. Welche Zahlenpaare sind das?

d) Veranschaulichen Sie beide binomische Formeln, ähnlich Bild 1/12, geometrisch!

38 **a)** $\left(\frac{1}{3}x + 5y\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot 5y + (5y)^2 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{10}{3}xy + 25y^2$

$(a \quad + \quad b)^2 = \quad a^2 \quad + 2 \cdot \quad a \quad \cdot b \quad + \quad b^2$

b) $(3m - 2{,}5n)^2 = (3m)^2 + 2 \cdot 3m \cdot (-2{,}5n) + (-2{,}5n)^2 = 9m^2 - 15mn + 6{,}25n^2$

$(a \quad + \quad b)^2 \quad = \quad a^2 \quad + 2 \cdot \quad a \quad \cdot \quad b \quad + \quad b^2$

c) $(5x + 3p)(5x - 3p) = (5x)^2 - (3p)^2 = 25x^2 - 9p^2$

$(a \quad + b) \quad (a \quad - b) \quad = a^2 \quad - b^2$

Die binomischen Formeln lassen sich auch verwenden, um Summen in Produkte zu verwandeln.

(11) Formen Sie folgende Summen in Produkte aus zwei Summen um, indem Sie die binomischen Formeln anwenden!

a) $p^2 - 2pq + q^2$ **b)** $\frac{1}{4}r^2 - 16$ **c)** $25 - a^2$

d) $\frac{9}{25} - \frac{6}{5}x + x^2$ **e)** $9x^2 + 6ax + a^2$ **f)** $64x^2 + 16bx + b^2$

Diese Umformung ist besonders einfach, wenn die Summen bestimmte Strukturen (wie in Übung 1/11) aufweisen.

Terme, die sich in die Form $(a + b)^2$ bzw. $(a - b)^2$ bringen lassen, bezeichnen wir als **vollständige Quadrate.**
Manchmal ist es notwendig, Terme zu vollständigen Quadraten zu ergänzen. Man sagt: Man bildet die **quadratische Ergänzung.**

[39] Der Term $a^2 + 6a$ soll so ergänzt werden, daß ein vollständiges Quadrat entsteht. Wir vergleichen den vorliegenden Term mit der Struktur eines vollständigen Quadrats:

$$a^2 + 6a$$

$$a^2 + \overbrace{2 \cdot a \cdot b} + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = (a + 3)^2 .$$

Die quadratische Ergänzung ist also $b^2 = 3^2 = 9$, allgemein gleich dem Quadrat vom halben Koeffizienten des linearen Gliedes $[(6 : 2)^2 = 9]$. Mit ihrer Hilfe kann man $a^2 + 6a$ umformen zu $(a + 3)^2 - 3^2$, denn $(a + 3)^2 - 3^2 = a^2 + 6a + 9 - 9 = a^2 + 6a$.

Aufgaben 1/84 bis 1/96

1.2.5. Quotienten aus zwei Summen

Die **Division einer Summe durch eine Zahl** ist die Umkehrung der Multiplikation einer Summe mit einer Zahl (Satz 1/11).

14 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, x ($x \neq 0$) gilt:**

$$\boxed{(a + b + c) : x = a : x + b : x + c : x}$$

Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem jeder Summand durch diese Zahl dividiert wird.

[40] **a)** $(3ab + 12a + 15a^2) : 3a = \frac{3ab}{3a} + \frac{12a}{3a} + \frac{15a^2}{3a}$

$$= b + 4 + 5a = 5a + b + 4$$

b) $(24xy - 21y^2) : (-6y) = -\frac{24xy}{6y} + \frac{21y^2}{6y} = -4x + \frac{7}{2}y$

(12) Führen Sie die Proben zu den Beispielen 1/40 aus!

Die **Division zweier Summen** geht nach einem Rechengang vor sich, der an einem Beispiel erläutert werden soll.

41

$$\begin{array}{l}
(6x^2 + 7x + 2) : (3x + 2) = 2x + 1 \\
\underline{-(6x^2 + 4x)} \\
\qquad\quad 3x + 2 \\
\qquad \underline{-(3x + 2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Probe: $(3x + 2) \cdot (2x + 1)$
$= 6x^2 + 3x + 4x + 2$
$= 6x^2 + 7x + 2$

Der Rechengang besteht aus 3 Schritten, die sich im allgemeinen wiederholen. Sie sollen hier an Hand des Beispiels 1/41 (siehe die folgenden Angaben in eckigen Klammern) erläutert werden.

a) Wir suchen ein Glied [$6x^2$] des Dividenden, das durch ein Glied [$3x$] des Divisors „teilbar" ist. Das bedeutet, daß die Variable [x] nach Ausführung der Division nicht im Nenner des Quotienten vorkommen soll. Diese Division wird durchgeführt:

$$(6x^2) : (3x) = \frac{3x \cdot 2x}{3x \cdot 1} = 2x$$

b) Wir bilden das Produkt aus dem unter a) erhaltenen Quotienten [$2x$] und dem Divisor [$3x + 2$]:

$$(3x + 2) \cdot (2x) = 6x^2 + 4x$$

c) Wir subtrahieren dieses Produkt vom Dividenden:

$$(6x^2 + 7x + 2) - (6x^2 + 4x) = 3x + 2$$

Das Ergebnis [$3x + 2$] wird jetzt als neuer Dividend betrachtet und auf ihn wieder der Zyklus a) bis c) angewendet. So wird fortgefahren, bis sich beim Schritt c) die Differenz 0 ergibt und damit die Division beendet ist. (Im Beispiel 1/41 ist das bereits nach dem 2. Zyklus der Fall.)
Die Auswahl der Glieder, die beim Schritt a) dividiert werden, ist an sich nicht eindeutig festgelegt, so daß es oft mehrere Lösungswege gibt. Sie führen aber stets zum gleichen Ergebnis. Zweckmäßig ist es, vor dem Dividieren Dividend und Divisor lexikographisch zu ordnen und dann zur ersten Division (Schritt a) die ersten Glieder von Dividend und Divisor zu verwenden.

42 **a)** $(4 + 3ab - 4b - 3a) : (3a - 4)$

Wir ordnen im Dividenden lexikographisch:

$$(-3a + 3ab - 4b + 4) : (3a - 4)$$

Dann ergibt der oben erörterte Rechengang:

$$\begin{array}{l}
\;(-3a + 3ab - 4b + 4) : (3a - 4) = -1 + b \\
\underline{-(-3a \qquad\qquad\qquad + 4)} \\
\qquad 0 \;+ 3ab - 4b + 0 \\
\qquad \underline{-(+3ab - 4b)} \\
\qquad\qquad 0 \quad + 0
\end{array}$$

Die Probe sollte nie unterlassen werden:

$$(3a - 4) \cdot (b - 1) = 3ab - 3a - 4b + 4$$

b) $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$

$$\begin{array}{l} -(a^3 - a^2b) \\ \hline \quad a^2b - b^3 \\ \quad -(a^2b - ab^2) \\ \hline \qquad ab^2 - b^3 \\ \qquad -(ab^2 - b^3) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{aligned} &(a^2 + ab + b^2)(a - b) \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 \\ &\quad - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

Ergibt sich bei einer Aufgabe niemals die Differenz 0 („die Aufgabe geht nicht auf"), dann bricht man das Verfahren ab, sobald die Differenz nicht mehr durch das erste Glied des Divisors „teilbar" ist. Diese letzte Differenz heißt dann der „Rest".

43 $(3x^2 + 8x + 6) : (3x + 2) = x + 2 + \dfrac{2}{3x + 2}$

$$\begin{array}{l} -(3x^2 + 2x) \\ \hline \quad 6x + 6 \\ \quad -(6x + 4) \\ \hline \qquad 2 \longleftrightarrow \text{Rest} \end{array}$$

Probe: $(3x + 2)(x + 2) + 2 = 3x^2 + 6x + 2x + 4 + 2 = 3x^2 + 8x + 6$

Aufgaben 1/97 bis 1/105

1.3. Quotienten, in denen Variablen vorkommen

1.3.1. Zerlegen von natürlichen Zahlen in Primfaktoren

Für das Rechnen mit Brüchen sind das Zerlegen von natürlichen Zahlen in Primfaktoren und die Kenntnis gewisser Teilbarkeitssätze eine wertvolle Hilfe.

DEFINITION: Eine natürliche Zahl a heißt durch eine natürliche Zahl b **teilbar** (Symbol: $b|a$), wenn es eine natürliche Zahl c gibt, so daß gilt: $a : b = c$ oder $b \cdot c = a$.

15 **SATZ: Jede natürliche Zahl a ist durch 1 und jede natürliche Zahl außer Null ist durch sich selbst teilbar.**

$$\boxed{a : 1 = a; \qquad a : a = 1, \quad (a \neq 0)}$$

Viele natürliche Zahlen sind auch noch durch andere Zahlen teilbar.

44

$12 : 1 = 12$	$12 : 6 = 2$	$12 : 2 = 6$
$12 : 12 = 1$	$12 : 4 = 3$	$12 : 3 = 4$

12 ist teilbar durch 1, 2, 3, 4, 6, 12

16 **DEFINITION: Natürliche Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, heißen Primzahlen. Davon ausgenommen ist die Zahl 1 selbst.**

(13) Bestimmen Sie alle Primzahlen zwischen 2 und 100!

Anleitung: Dazu kann das „Sieb des Eratosthenes“ dienen. Nach diesem Verfahren streicht man aus der Folge der natürlichen Zahlen von 2 bis 100 zunächst alle Zahlen, die durch 2 teilbar sind, dann alle, die durch 3 teilbar sind, dann alle, die durch 5 teilbar sind usw. (Warum ist die Untersuchung der Teilbarkeit durch 4 unnötig?) Die am Ende nicht gestrichenen Zahlen sind die gesuchten Primzahlen.

Beim Zerlegen von natürlichen Zahlen in Faktoren ist es zweckmäßig, die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch eine andere rasch zu erkennen. Dazu gibt es gewisse **Teilbarkeitssätze.**

14 Wiederholen und formulieren Sie die Teilbarkeitssätze für

a) 2, 4, 8
b) 5, 25
c) 10, 100
d) 3, 9
e) 6, 50!

DEFINITION: Eine Zahl in **Primfaktoren** zerlegen heißt, sie als Produkt darstellen, dessen sämtliche Faktoren Primzahlen sind.
Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß das stets eindeutig möglich ist. Ein Verfahren dazu ist die schrittweise Zerlegung in Produkte, deren einer Faktor jeweils eine Primzahl ist.

45
$$\begin{aligned} 3960 &= 2 \cdot 1980 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 990 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 495 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 165 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 55 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \\ &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

Aufgaben 1/106 bis 1/109

1.3.2. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

Wir suchen **gemeinsame Teiler** der Zahlen 56 und 84.

Es sind dies die Zahlen: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Es gibt auch Zahlen, die keine gemeinsamen Teiler (außer 1) haben, z. B. 18 und 25. Solche Zahlen heißen **teilerfremd.**
Unter allen gemeinsamen Teilern der Zahlen 56 und 84 ist die Zahl 28 **der größte gemeinsame Teiler,** der g. g. T.
Schneller läßt sich der größte gemeinsame Teiler nach folgendem Rechenverfahren ermitteln:

$$\begin{array}{ll} 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 & \quad 7 \\ 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 & \\ \hline \text{g. g. T.:} \qquad\qquad 2^2 \cdot & \quad 7 = 28 \end{array}$$

Wir zerlegen die Zahlen in Primfaktoren und suchen von den Potenzen mit gleicher Basis, die in jeder Zerlegung auftreten, jeweils diejenige mit dem kleinsten Exponenten heraus. Dabei betrachten wir die Primfaktoren 3 und 7 als Potenzen 3^1 bzw. 7^1. Potenzen mit Basen, die nicht in allen Zerlegungen vorkommen, bleiben dabei unberücksichtigt (im Beispiel die Potenz 3^1).

Wir übertragen das Verfahren sinngemäß auf beliebige Terme.

a) Es soll der g. g. T. von $12a^2bc$ und $4ab^2c$ ermittelt werden. (a, b, c seien von Null verschiedene natürliche und paarweise teilerfremde Zahlen.)

$$\begin{array}{rl} 12a^2bc = & 2^2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \\ 4ab^2c = & 2^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot c \\ \hline \text{g. g. T.:} & 2^2 \cdot a \cdot b \cdot c = 4abc \end{array}$$

b) Es ist der g. g. T. von $9a^2 - 12ab + 4b^2$, $9a^2 - 4b^2$ und $3a - 2b$ gesucht. ($3a + 2b$ und $3a - 2b$ seien teilerfremd und von Null verschieden.)

$$\begin{array}{ll} 9a^2 - 12ab + 4b^2 & = (3a - 2b)^2 \\ 9a^2 - 4b^2 & = (3a - 2b)(3a + 2b) \\ 3a - 2b & = 3a - 2b \\ \hline \text{g. g. T.:} & 3a - 2b \end{array}$$

46 Wir suchen **gemeinsame Vielfache** der Zahlen 6, 8 und 12. Es sind dies die Zahlen:

24; 48; 72; ...; $24n$; ... mit $n > 0$ und n natürlich.

Unter allen gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 6, 8 und 12 ist die Zahl 24 **das kleinste gemeinsame Vielfache,** das k. g. V.
Schneller läßt sich das k. g. V. von 6, 8 und 12 nach folgendem Algorithmus ermitteln:

$$\begin{array}{rl} 6 = 2 \cdot 3 & = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 & = 2^3 \\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 & = 2^2 \cdot 3 \\ \hline \text{k. g. V.:} & 2^3 \cdot 3 = 24 \end{array}$$

Wir zerlegen die Zahlen in Produkte von Primfaktorpotenzen und wählen bei Potenzen mit gleicher Basis jeweils diejenige mit dem größten Exponenten aus. Dann bilden wir das Produkt dieser ausgewählten Potenzen und aller der Primfaktorpotenzen, die nur in einer Zerlegung vorkommen.

Wir übertragen das Verfahren sinngemäß auf beliebige Terme.

47 **a)** Es soll das k. g. V. von $3a^2b$, $12ab^2$ und $8abc$ ermittelt werden. (a, b, c seien von Null verschiedene natürliche, paarweise teilerfremde Zahlen.)

$$\begin{array}{rl} 3a^2b = & 3 \cdot a^2 \cdot b \\ 12ab^2 = & 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \\ 8abc = & 2^3 \cdot a \cdot b \cdot c \\ \hline \text{k. g. V.:} & 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c = 24a^2b^2c \end{array}$$

b) Es soll das k. g. V. von $a^2 - b^2$ und $a^2 + 2ab + b^2$ ermittelt werden. ($a + b$ und $a - b$ seien von Null verschieden als teilerfremd vorausgesetzt.)

$$\begin{array}{rl} a^2 - b^2 = & (a + b)(a - b) \\ a^2 + 2ab + b^2 = & (a + b)^2 \\ \hline \text{k. g. V.:} & (a + b)^2 (a - b) \end{array}$$

Aufgaben 1/110 bis 1/118

1.3.3. Erweitern und Kürzen von Quotienten

17 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, e ($b \neq 0$, $e \neq 0$) gilt:**

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot e}{b \cdot e}} \quad \xrightarrow{\text{Erweitern}} \quad \xleftarrow{\text{Kürzen}}$$

Erweitern heißt also, Zähler und Nenner des Quotienten mit derselben Zahl **multiplizieren, kürzen,** Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl **dividieren. Mit der Zahl 0 darf weder erweitert noch gekürzt werden.**
Auch mit von Null verschiedenen Produkten, Summen, Differenzen und Potenzen können Quotienten erweitert werden.
Sind im Zähler und Nenner eines Quotienten gleiche Faktoren vorhanden, so können diese wie gemeinsame Faktoren in Brüchen gekürzt werden. Dadurch wird der Quotient vereinfacht. Deshalb ist es üblich, stets so weit wie möglich zu kürzen. Das kann man in mehreren Schritten erreichen, aber auch durch ein einziges Kürzen, wenn man als Kürzungszahl den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner benutzt.

48 *Erweitern*

a) $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 15}{9 \cdot 15} = \frac{105}{135}$ (Erweitert mit der Zahl 15)

b) $\frac{3x}{5y} = \frac{3x \cdot 7a}{5y \cdot 7a} = \frac{21ax}{35ay}$ (Erweitert mit dem Produkt $7a$)

c) $\frac{3a}{16b} = \frac{3a(a-b)}{16b(a-b)} = \frac{3a^2 - 3ab}{16ab - 16b^2}$ (Erweitert mit der Differenz $a - b$)

49 *Kürzen*

a) $\frac{36}{54} = \frac{2 \cdot 18}{2 \cdot 27} = \frac{18}{27}$ (Gekürzt durch die Zahl 2)

$= \frac{3 \cdot 12}{3 \cdot 18} = \frac{12}{18}$ (Gekürzt durch die Zahl 3)

$= \frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 9} = \frac{6}{9}$ (Gekürzt durch die Zahl 6)

$= \frac{18 \cdot 2}{18 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ (Gekürzt durch die Zahl 18)

b) $\frac{20ax}{40bx} = \frac{20x \cdot a}{20x \cdot 2b} = \frac{a}{2b}$ (Gekürzt durch das Produkt $20x$)

c) $\frac{5(a+3x)}{25b(a+3x)} = \frac{5(a+3x) \cdot 1}{5(a+3x) \cdot 5b} = \frac{1}{5b}$ (Gekürzt durch die Zahl 5 und die Summe $a + 3x$)

Aufgaben 1/119 bis 1/125

1.3.4. Addition und Subtraktion von Quotienten

18 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c $(c \neq 0)$ gilt:**

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

Quotienten werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man sie gleichnamig macht, die Zähler addiert (bzw. subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beim Gleichnamigmachen müssen die Quotienten so erweitert werden, daß sie alle den gleichen Nenner erhalten. Das ist auf viele verschiedene Weisen möglich. Es bringt Rechenvorteile, wenn man als gemeinsamen Nenner das **kleinste gemeinsame Vielfache aller Einzelnenner** benutzt. Dieser Nenner heißt der **Hauptnenner** der gegebenen einzelnen Quotienten. (Sind die Quotienten bereits gleichnamig, erübrigt sich diese Vorbereitung.)

50 **a)** $\frac{b}{2a} + \frac{3}{2a} = \frac{b+3}{2a}$

b) $\frac{-3}{a} + \frac{5b}{ac} = \frac{-3 \cdot c}{a \cdot c} + \frac{5b}{ac} = \frac{-3c + 5b}{ac}$

c) $\frac{8a}{15b} - \frac{3}{20b^2}$

Ermittlung des Hauptnenners:

$$\begin{array}{l} 15b = 3 \cdot 5 \cdot b \\ 20b^2 = 2^2 \cdot 5 \cdot b^2 \\ \hline \text{HN:}\quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b^2 = 60b^2 \end{array}$$

$$\frac{8a}{15b} - \frac{3}{20b^2} = \frac{8a \cdot 4b}{60b^2} - \frac{3 \cdot 3}{60b^2} = \frac{32ab - 9}{60b^2}$$

Aufgaben 1/126 bis 1/136

1.3.5. Multiplikationen und Division von Quotienten

19 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d $(b \neq 0, d \neq 0)$ gilt:**

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Quotienten werden multipliziert, indem man die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert.
Vor dem Ausmultiplizieren wird nach Möglichkeit gekürzt.

51 **a)** $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{6xy}{z} = \frac{2x \cdot 6xy}{3y \cdot z} = \frac{2x \cdot 2x}{z} = \frac{4x^2}{z}$

b) $x \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x \cdot y}{1 \cdot z} = \frac{xy}{z}$

c) $\dfrac{n^3}{5m} \cdot 15mn = \dfrac{n^3}{5m} \cdot \dfrac{15mn}{1} = \dfrac{n^3 \cdot 15mn}{5m \cdot 1} = \dfrac{n^3 \cdot 3n}{1} = 3n^4$

20 **SATZ: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d ($b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) gilt:**

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$$

Durch einen Quotienten wird dividiert, indem man mit dem Reziproken dieses Quotienten multipliziert.

52 a) $\dfrac{a}{5} : \dfrac{a^2x}{20} = \dfrac{a}{5} \cdot \dfrac{20}{a^2x} = \dfrac{a \cdot 20}{5 \cdot a^2x} = \dfrac{4}{ax}$ b) $x : \dfrac{p}{q} = \dfrac{x}{1} : \dfrac{p}{q} = \dfrac{x}{1} \cdot \dfrac{q}{p} = \dfrac{qx}{p}$

c) $\dfrac{x}{y} : a = \dfrac{x}{y} : \dfrac{a}{1} = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{x \cdot 1}{y \cdot a} = \dfrac{x}{ay}$

Wird statt des Divisionszeichens ein Bruchstrich geschrieben, so ergeben sich die Divisionsaufgaben in Form sogenannter **Doppelbrüche.** Sie lassen sich als Divisionsaufgaben schreiben und entsprechend berechnen.

53 a) $\dfrac{\dfrac{a^2b}{20x}}{\dfrac{35ab}{75x}} = \dfrac{a^2b}{20x} : \dfrac{35ab}{75x} = \dfrac{a^2b}{20x} \cdot \dfrac{75x}{35ab} = \dfrac{a^2b \cdot 75x}{20x \cdot 35ab} = \dfrac{a \cdot 3}{4 \cdot 7} = \dfrac{3a}{28}$

b) $\dfrac{1 + \dfrac{a}{2}}{1 + \dfrac{a}{4}} = \dfrac{\dfrac{2}{2} + \dfrac{a}{2}}{\dfrac{4}{4} + \dfrac{a}{4}} = \dfrac{a+2}{2} : \dfrac{a+4}{4} = \dfrac{a+2}{2} \cdot \dfrac{4}{a+4} = \dfrac{2(a+2)}{a+4}$

Aufgaben 1/137 bis 1/150

1.3.6. Vergleichen rationaler Zahlen

Für die rationalen Zahlen a und b gilt, wie hier nicht bewiesen werden soll:

$a < b$ genau dann, wenn $a - b < 0$.

Deshalb können zum Vergleichen rationaler Zahlen ihre Differenzen benutzt werden.

54 a) Die Zahlen $\dfrac{2}{3}$ und $\dfrac{4}{5}$ sind zu vergleichen.

$\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} = -\dfrac{2}{15}$

Die Differenz $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5}$ ist negativ, also ist $\dfrac{2}{3} < \dfrac{4}{5}$.

b) Die Zahlen $-\dfrac{2}{3}$ und $-\dfrac{4}{5}$ sind zu vergleichen.

$\left(-\dfrac{2}{3}\right) - \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{2}{15}$

Die Differenz $-\dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{4}{5}\right)$ ist positiv, also ist $-\dfrac{2}{3} > -\dfrac{4}{5}$.

c) $-\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ sind zu vergleichen.

$\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{5} = -\frac{22}{15}$. Die Differenz ist negativ, also ist $-\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.
Diese Feststellung wäre auch ohne diese Rechnung möglich gewesen, weil grundsätzlich laut Definition der Ordnung rationaler Zahlen jede negative Zahl kleiner ist als jede positive.

d) Die Quotienten $\frac{x}{3xy}$ und $\frac{4y}{5y^2}$ sind zu vergleichen, wobei x und y natürliche Zahlen verschieden von Null sein mögen. Kürzt man den ersten Quotienten durch x und den zweiten durch y, so erhält man $\frac{1}{3y}$ bzw. $\frac{4}{5y}$. Die Differenz $\frac{1}{3y} - \frac{4}{5y} = \frac{-7}{15y}$ ist negativ, also gilt für beliebige natürliche Zahlen $x \neq 0$ und $y \neq 0$ die Ungleichung $\frac{x}{3xy} < \frac{4y}{5y^2}$.

Aufgaben 1/151 bis 1/153

2. Lineare Funktionen, lineare Gleichungen

2.1. Lineare Funktionen

2.1.1. Der Funktionsbegriff

In der Praxis gibt es viele Sachverhalte, denen gemeinsam ist, daß man aus den Elementen einer Menge X die Elemente einer anderen Menge Y bestimmen oder zumindest sie einander zuordnen kann. Folgende vier Beispiele mögen das zeigen.

1 **a)** Aus folgender Tabelle können die Fahrpreise für Rückfahrkarten bei $33\frac{1}{3}$ % Ermäßigung für die 2. Klasse der Deutschen Reichsbahn bei gewissen Entfernungen entnommen werden.

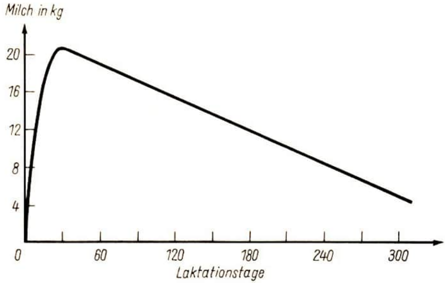
Entfernung in km	1 … 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Preis in M	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30

Entfernung in km	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Preis in M	1,40	1,50	1,60	1,80	1,90	2,00	2,20	2,20	2,40	2,40

Menge X: Entfernungen von 1 km bis 22 km (ganze Kilometer).
Menge Y: Fahrpreis in M.
Hier gibt eine **Tabelle** die Zuordnung der Elemente von X zu denen von Y an.

b) Mit Hilfe der Gleichung $s = \frac{g}{2} t^2 \left(g \approx 9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{s^2}\right)$ kann beim freien Fall eines Körpers im Vakuum die in einer beliebigen Zeit t (gemessen in Sekunden) durchfallene Strecke s (gemessen in Metern) berechnet werden.
Menge X: Fallzeiten t in einem bestimmten Beobachtungszeitraum in Sekunden.
Menge Y: Durchfallene Strecken s in Metern.
Hier gibt eine **Gleichung** die Zuordnung der Elemente von X zu denen von Y an.

c) Manchmal werden in der Praxis Kurven zur grafischen Veranschaulichung gewisser Zusammenhänge verwendet. So wurden z. B. durch Messungen Durchschnittswerte ermittelt, die die Beschreibung der von einer Kuh an den einzelnen Tagen nach dem Kalben abgesonderten Milchmengen ermöglichen. (Man spricht vom Laktationsverlauf; er erstreckt sich durchschnittlich über 300 Tage.) Die grafische Darstellung dieser Durchschnittsmengen (gemessen in Kilogramm) zeigt Bild 2/1. Mit seiner Hilfe kann ein Viehzüchter die Leistungen seiner Kühe einschätzen.



2/1

Menge X: 300 Ablesetage.
Menge Y: täglich abgesonderte Milchmengen in Kilogramm.
Hier gibt eine **grafische Darstellung** die Zuordnung der Elemente von X zu denen von Y an.

d) Die berechneten Kosten für 1 kWh Elektroenergie beim normalen Haushaltstarif betragen 0,08 M. Darüberhinaus hat jeder Haushalt einen Festbetrag je Monat oder Jahr zu zahlen.
Menge X: Verbrauchte Elektroenergie in kWh.
Menge Y: Entstehende Kosten in M.
Hier gibt eine **Wortvorschrift** die Zuordnung der Elemente von X zu denen von Y an.

Gemeinsam und mathematisch wesentlich ist an diesen Sachverhalten folgendes:

1. Den Elementen der Menge X werden die Elemente der Menge Y **zugeordnet.**
2. Die Zuordnung ist **eindeutig,** d. h. jedem Element x der Menge X ist genau ein Element y der Menge Y zugeordnet.
3. Es ergeben sich **geordnete Paare** von Elementen aus X und Y, die folgendermaßen geschrieben werden: $x_1 \rightarrow y_1$ oder $[x_1; y_1]$

Durch den Pfeil bzw. die Reihenfolge in der Klammer wird die Richtung der Zuordnung gekennzeichnet.

4. **Jedes Element der Menge X tritt** wenn man alle in der Zuordnung auftretenden Paare bildet, **genau einmal** auf. (Bei endlichen Mengen gibt es also genau soviele Paare, wie es Elemente der Menge X gibt.)
5. **Elemente der Menge** Y können hingegen in der Menge der geordneten Paare **mehrfach** auftreten (vgl. Beispiel 2/1c; Milchmenge 12 kg).

Diese wesentlichen Eigenschaften werden im Funktionsbegriff erfaßt.

1 **DEFINITION: Eine Funktion f ist eine Menge geordneter Paare $[x; y]$, die man erhält, wenn jedem Element einer Menge X ($x \in X$) genau ein Element einer Menge $Y (y \in Y)$ zugeordnet wird.**
Die Menge X heißt Definitionsbereich der Funktion. Die Elemente von X heißen Argumente.
Die Menge Y heißt Wertevorrat der Funktion. Die Elemente von Y heißen Funktionswerte.

Es gibt mehrere Möglichkeiten der **Darstellung von Funktionen.** Hierzu gehören Wertetabellen (Beispiel 2/1a), grafische Darstellungen (Beispiel 2/1c), Gleichungen (Beispiel 2/1b) und Wortvorschriften (Beispiel 2/1d). Die einzelnen Möglichkeiten weisen Vorteile und Nachteile auf. Deshalb benutzt man für eine Funktion oft mehrere Darstellungsformen.

Es muß streng unterschieden werden zwischen Funktion, Funktionswert und Gleichung der Funktion:
Die **Funktion** f ist eine Menge geordneter Paare $[x; y]$. Der zu x_0 gehörende **Funktionswert** ist das Element aus der Menge Y, das dem Element x_0 zugeordnet ist. Es wird mit y_0 oder $f(x_0)$ bezeichnet.
Eine **Gleichung** $y = f(x)$ der Funktion ist eine Zuordnungsvorschrift, mit deren Hilfe man zu jedem Element x des Definitionsbereiches das zugeordnete Element y des Wertevorrates ermitteln kann.

Eine Funktion wird durch eine Gleichung und durch Angabe ihres Definitionsbereichs eindeutig beschrieben. Man spricht dann von der „Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ und dem Definitionsbereich X“ oder meist kürzer von der „Funktion $y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich X“.

Aufgaben 2/1 bis 2/6

2.1.2. Die linearen Funktionen $y = mx$

Das mathematisch Wesentliche der folgenden Sachverhalte liegt darin, daß die Veränderung des Funktionswertes **proportional** zur Veränderung des Arguments erfolgt.

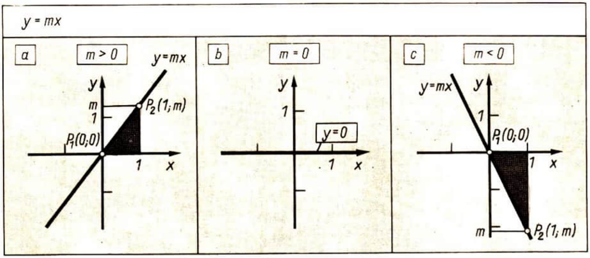
2 **a)** $s = v \cdot t;\ v = \text{const.}$ — Der zurückgelegte Weg s ist proportional der Zeit t.

b) $I = \left(\frac{1}{R}\right) \cdot U;\ R = \text{const.}$ — Die Stromstärke I ist proportional der Spannung U an den Enden des Leiters.

c) $R = \left(\frac{\varrho}{A}\right) \cdot l;\ A = \text{const.},\ \varrho = \text{const.}$ — Der elektrische Widerstand R eines Drahtes ist proportional seiner Länge l.

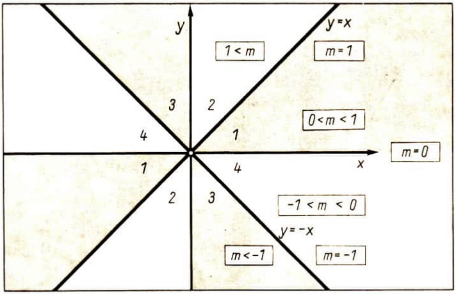
A: Flächeninhalt des Drahtquerschnittes,
ϱ: spezifischer Widerstand.

Es handelt sich um drei Funktionen, die sämtlich durch Gleichungen der Form $\boldsymbol{y = m \cdot x}$ **($\boldsymbol{m}$ = const.)** dargestellt werden können.
Die grafische Darstellung jeder Funktion $y = mx$ ist eine **Gerade,** wenn der Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen (vgl. 3.1.3.) ist (Bild 2/2). Bei jedem anderen Definitionsbereich liegt das Bild von $y = mx$ auf einer Geraden.
Funktionen, deren Bilder Geraden sind oder auf einer Geraden liegen, heißen **lineare Funktionen.**
Die Funktionen $y = mx$ gehören also zu den linearen Funktionen; doch gehört nicht zu jeder linearen Funktion eine Gleichung von der Form $y = mx$ (vgl. u.a. 2.1.3.).
Die zu einer Funktion $y = mx$ gehörende Gerade geht durch die Punkte $P(0; 0)$ und $P(1; m)$, denn die Koordinaten dieser Punkte genügen der Funktionsgleichung: $0 = m \cdot 0$; $m = m \cdot 1$. Für den Fall $m = 0$ fällt die Gerade mit der x-Achse zusammen (Bild 2/2b).



2/2

Durch das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten der Länge m und 1 ist der Winkel festgelegt, den die Gerade mit der x-Achse bildet. Dabei ist zu beachten, daß die Gerade im Fall $m > 0$ in Richtung wachsender x-Werte steigt und im Fall $m < 0$ fällt. Das genannte rechtwinklige Dreieck nennt man **Steigungsdreieck** der Geraden, der Faktor m heißt **Anstieg** der Geraden.
Auch m ist eine Variable. Sie unterscheidet sich aber von den Variablen x und y dadurch, daß sie für eine bestimmte Gerade einen festen Wert hat, der vorher frei gewählt werden konnte. Die Variable m heißt der **Parameter** der betreffenden linearen Funktion.



2/3

Die Menge aller Punkte der Ebene wird durch die Koordinatenachsen und die Geraden, die zu den Funktionen $y = x$ und $y = -x$ gehören, in vier Teilmengen, die Gebiete 1, 2, 3, 4, zerlegt (Bild 2/3).

1 Untersuchen Sie, in welchen Gebieten die Bilder der Funktionen mit folgenden Gleichungen liegen!

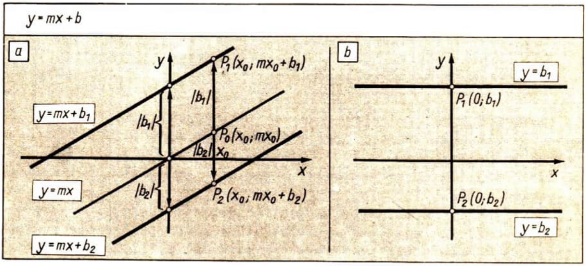
a) $y = \frac{1}{2}$ **b)** $y = \frac{1}{3}$ **c)** $x = -2x$ **d)** $y = 3x$

e) $y = -3x$ **f)** $y = 0{,}5x$

Aufgaben 2/7 bis 2/8

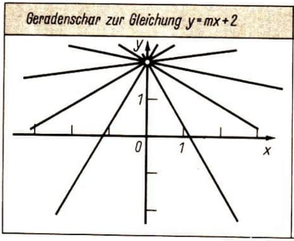
2.1.3. Die linearen Funktionen $y = mx + b$

In der Gleichung $y = mx + b$ kommt außer dem Parameter m (vgl. 2.1.2; $y = mx$) noch ein zweiter Parameter, nämlich b, vor. Setzen wir in der Gleichung $y = mx + b$ den Parameter b gleich 0, so erhalten wir die linearen Funktionen $y = mx$. Umgekehrt erhalten wir den Funktionswert $y_0 = mx_0 + b$ $(b \neq 0)$ zu irgendeinem Argument x_0, indem wir zu mx_0 die Zahl b addieren. Grafisch bedeutet das (Bild 2/4) eine Verschiebung des Punktes $P_0(x_0; mx_0)$ um $|b|$ Einheiten in der positiven Richtung der y-Achse, wenn $b > 0$ ist, und um $|b|$ Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse, wenn $b < 0$ ist.

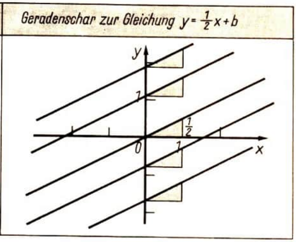


2/4

2/5



2/6



② **Beweisen Sie, daß die Funktion $y = mx + b$ die y-Achse im Punkt $P(0; b)$ schneidet!**

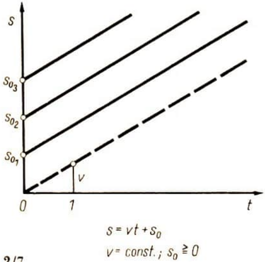
Wählen wir beispielsweise $b = 2$, so erhalten wir $y = mx + 2$ mit nur einem, noch frei wählbarem Parameter, nämlich m. Lassen wir nun m variieren, so erhalten wir die Schar aller Geraden durch den Punkt $P(0; 2)$ (Bild 2/5).

Wählen wir $m = \frac{1}{2}$ und lassen b variieren, so erhalten wir eine Schar paralleler Geraden mit dem Anstieg $m = \frac{1}{2}$ (Bild 2/6).

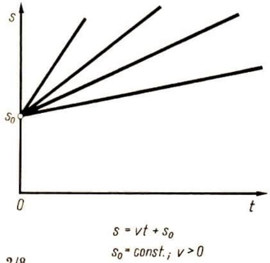
3 Die Gleichung $s = v \cdot t + s_0$ kann zur Bestimmung der Entfernung benutzt werden, die ein mit konstanter Geschwindigkeit v bewegter Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt t von einem bestimmten Punkt P_0 besitzt. s_0 ist dabei die Entfernung, die er zum Zeitpunkt $t = 0$ von P_0 bereits besaß. In diesem Beispiel sind v und s_0 Parameter.

Ist v = const. und wird s_0 verändert, so bedeutet das, daß sich Körper mit gleicher Geschwindigkeit, aber verschiedenen Ausgangspunkten auf einer geradlinigen Bahn bewegen. Grafisch wird dieser Sachverhalt durch eine Schar paralleler Halbgeraden dargestellt (Bild 2/7). Daß die Geraden einander nicht schneiden, drückt folgenden Sachverhalt aus:

Alle beteiligten Körper haben die gleiche konstante Geschwindigkeit v und bewegen sich auf derselben geradlinigen Bahn. Da sie aber zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Punkt P_0 unterschiedliche Entfernungen s_0 hatten, werden sie sich in gleichbleibenden Abständen zueinander bewegen, d. h., kein Körper wird einen anderen einholen.



2/7



2/8

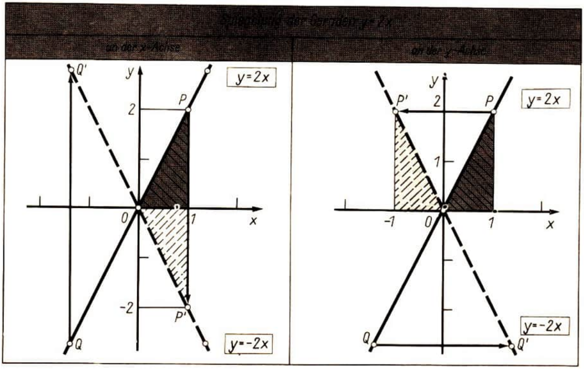
Ist dagegen s_0 konstant und wird der Parameter v verändert, so liegt folgender Sachverhalt vor:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben alle beteiligten Körper denselben Abstand s_0 vom Punkt P_0. Jeder Körper hat jedoch eine andere feste Geschwindigkeit v, mit der er sich auf einer geradlinigen Bahn weiter von P_0 entfernt. Da dies für jeden Körper mit einer anderen Geschwindigkeit geschieht, werden sich die Körper im Laufe dieser Bewegung immer mehr voneinander entfernen. Grafisch wird dieser Sachverhalt durch die Schar von Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt $P_0(0; s_0)$ dargestellt (Bild 2/8), die immer weiter auseinanderstreben.

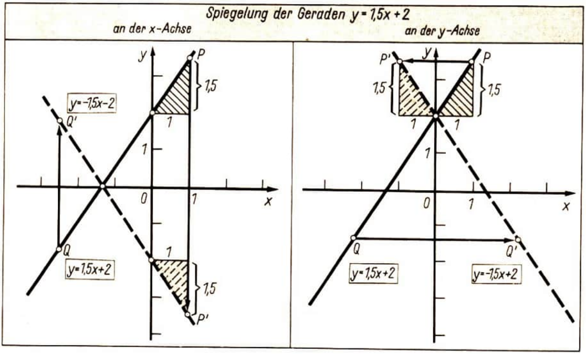
Aufgaben 2/9 bis 2/21

2.1.4. Spiegelungen der Bilder linearer Funktionen an den Koordinatenachsen

Bei Spiegelungen an einer Geraden liegen das Urbild und das Bild symmetrisch zu dieser Geraden, der Symmetrieachse. Die Bilder 2/9 und 2/10 zeigen die Spiegelung der Bilder von Funktionen $y = mx$ und $y = mx + b$ an der x-Achse bzw. an der y-Achse.



2/9



2/10

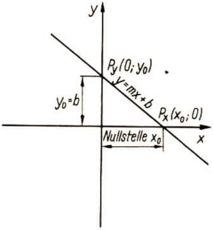
2 SATZ: Wird eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht, an einer Koordinatenachse gespiegelt, so ändert sich in der zugehörigen Funktionsgleichung das Vorzeichen von m.

③ Beweisen Sie diesen Satz an Hand des Bildes 2/9!

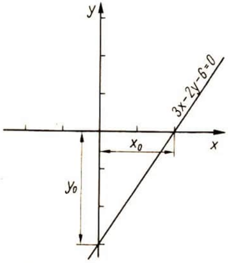
Aufgaben 2/22 bis 2/24

2.1.5. Die Nullstellen bei linearen Funktionen

Für alle Punkte der x-Achse eines x-y-Koordinatensystems ist die y-Koordinate gleich Null. Wir finden alle Argumente x_0 einer Funktion, denen der Funktionswert $y = 0$ zugeordnet ist, indem wir in der Funktionsgleichung für y die Zahl 0 einsetzen und alle Argumente x_0 bestimmen, die diese Gleichung erfüllen. Diese Argumente x_0 heißen **Nullstellen der Funktion.** In der grafischen Darstellung sind sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Funktionsbildes mit der x-Achse.
Die lineare Funktion $y = mx + b$ hat höchstens eine Nullstelle, denn das Funktionsbild, eine Gerade, schneidet die x-Achse höchstens in einem Punkt. Gibt es einen solchen Schnittpunkt, so ist dessen x-Koordinate die Nullstelle der linearen Funktion $y = mx + b$. Man erhält sie rechnerisch, indem man die Lösung der Gleichung $0 = mx_0 + b$ bestimmt.
Für alle Punkte der y-Achse ist die x-Koordinate gleich Null. Gibt es im Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$ das Argument $x = 0$, so erhält man den zugeordneten Funktionswert y_0, indem man in der Funktionsgleichung für x die Zahl 0 einsetzt. Für die lineare Funktion $y = mx + b$ gilt also $y_0 = m \cdot 0 + b = b$. In der grafischen Darstellung ist dieser Funktionswert die y-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse.



2/11



2/12

Dieser Koordinate $y_0 = b$ ist im Koordinatensystem der Abschnitt auf der y-Achse zugeordnet, der vom Koordinatenursprung bis zum Schnittpunkt des Bildes der Funktion $y = mx + b$ mit der y-Achse reicht. Diese Strecke wird **Achsenabschnitt** (auf der y-Achse) genannt. Sie hat die Länge $|b| \cdot e$, wenn e die Länge der auf der y-Achse zur Maßeinteilung verwendeten Einheitsstrecke ist (Bild 2/11).
Die der Koordinate x_0 entsprechende Strecke auf der x-Achse wird ebenfalls Achsenabschnitt (auf der x-Achse) genannt.

Mit Hilfe der Koordinaten x_0 und y_0 bzw. der zugeordneten Achsenabschnitte läßt sich das Bild einer linearen Funktion $y = mx + b$ $(b \neq 0)$ rasch in ein Koordinatensystem einzeichnen.

4 Das Bild der Funktion $3x - 2y - 6 = 0$ ist mit Hilfe der Achsenabschnitte zu zeichnen.

Nullstelle: $3x_0 - 2 \cdot 0 - 6 = 0; \quad x_0 = 2$

y-Koordinate vom Endpunkt des y-Achsenabschnitts: $3 \cdot 0 - 2y_0 - 6 = 0; \quad y_0 = -3$

(Bild 2/12)

(4) Warum versagt das in Beispiel 2/4 gezeigte Verfahren bei linearen Funktionen $y = mx$?

Aufgaben 2/25 bis 2/26

2.2. Lineare Gleichungen; Gleichungssysteme

2.2.1. Äquivalente Gleichungen und Ungleichungen

Die Zeichen „$<$", „$=$", „$>$" heißen **Relationszeichen.**
Verbinden wir zwei Terme durch das Relationszeichen „$=$", so erhalten wir eine **Gleichung,** verbinden wir zwei Terme durch eins der Relationszeichen „$<$" oder „$>$", so erhalten wir eine **Ungleichung.**
Durch Gleichungen bzw. Ungleichungen, in denen keine Variablen auftreten, werden **Aussagen** dargestellt, die entweder **wahr** oder **falsch** sind. Enthalten Gleichungen bzw. Ungleichungen Variablen, so werden durch sie allein keine Aussagen dargestellt. Erst wenn man statt der Variablen Zahlzeichen (aus dem jeweiligen Variabilitätsbereich) einsetzt, ergeben sich durch die Gleichungen bzw. Ungleichungen wahre oder falsche Aussagen. (Diese Feststellung bedeutet nicht, daß es unmöglich ist, unter Verwendung von Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Variablen Aussagen zu formulieren. So ist beispielsweise der Satz „Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a + b = b + a$" eine wahre Aussage und der Satz „Es gibt eine natürliche Zahl x, für die gilt $x < 0$" eine falsche Aussage. Diese Aussagen enthalten jedoch außer den Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Variablen noch besondere Redeweisen, wie „Für alle ... gilt" bzw. „Es gibt ein ..., so daß gilt", die man als **Quantifikatoren** bezeichnet. Ohne einen solchen Quantifikator kann eine Gleichung bzw. Ungleichung keine Aussage sein, sobald sie auch nur eine einzige Variable enthält.)

(5) a) Setzen Sie in den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen für das Zeichen „x" die Ziffer „3" und für das Zeichen „y" die Ziffer „0" ein!

Entscheiden Sie, ob dann eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

α) $x \cdot y = 0$ β) $3 \cdot x + y < 5$ γ) $y : x < 4 + x$

b) Jede Zahl, die eine **wahre Aussage** ergibt, heißt **eine Lösung** der Gleichung bzw. Ungleichung. Ermitteln Sie mindestens eine Lösung, der in Übung 2/5a gegebenen Gleichungen bzw. Ungleichungen, wenn die Variablen x und y Zeichen für natürliche Zahlen sind!

c) Gibt es noch weitere Lösungen für die Gleichungen bzw. Ungleichungen in Übung 2/5a für den Variabilitätsbereich natürliche Zahlen?

Die **Menge aller Lösungen** einer Variablen enthaltenden Gleichung bzw. Ungleichung heißt **Lösungsmenge** dieser Gleichung bzw. Ungleichung bezüglich des jeweiligen Variabilitätsbereiches.

Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mindestens einer Variablen, deren Lösungsmengen für den jeweiligen Variabilitätsbereich gleich sind, heißen **äquivalent.**
Wird eine Gleichung bzw. Ungleichung mit mindestens einer Variablen so umgeformt, daß die **Lösungsmenge** der umgeformten Gleichung bzw. Ungleichung gleich der Lösungsmenge der Ausgangsgleichung bzw. Ausgangsungleichung ist, so spricht man von einer **äquivalenten** Umformung.

$\boxed{5}$ **a)** Wir betrachten die **Gleichung** $\mathbf{2x = 4}$ $(x \in R)$
Die Zahl 2 ist Lösung, denn $2 \cdot 2 = 4$ ist wahr. Sie ist auch die einzige Lösung, wie man beweisen kann.
Mit der Gleichung $2x = 4$ nehmen wir nun verschiedene Umformungen vor.

α) $2x \boxed{+ 3} = 4 \boxed{+ 3}$

Die Addition von 3 auf beiden Seiten führt auf eine zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung, denn auch hier ist 2 die einzige Lösung.
Es gilt $2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3$.
Hier liegt also eine äquivalente Umformung vor.

β) $2x + \boxed{\frac{1}{x-2}} = 4 + \boxed{\frac{1}{x-2}}$

Die Addition von $\frac{1}{x-2}$ auf beiden Seiten führt auf eine zur Ausgangsgleichung nicht äquivalente Gleichung. Da $\frac{1}{x-2}$ für $x = 2$ nicht definiert ist, ist $x = 2$ auch nicht Lösung dieser Gleichung. Die Lösungsmenge hat sich verändert. Hier liegt also keine äquivalente Umformung vor.

b) Wir betrachten jetzt die **Ungleichung** $\mathbf{2x < 5}$ $(x \in R)$.
Ihre Lösungsmenge besteht aus allen rationalen Zahlen, die kleiner sind als $\frac{5}{2}$.
Wir nehmen nun wieder verschiedene Umformungen vor.

α) $2x \boxed{\cdot 4} < 5$

Die Multiplikation von 4 auf nur einer Seite führt auf eine zur Ausgangsgleichung nicht äquivalente Ungleichung. Die Lösungsmenge besteht hier aus allen rationalen Zahlen, die kleiner als $\frac{5}{8}$ sind. $x = 2$ gehört z. B. nicht mehr dazu. Hier liegt also keine äquivalente Umformung vor.

β) $2x \boxed{\cdot 4} < 5 \boxed{\cdot 4}$

Die Lösungsmenge besteht aus allen rationalen Zahlen, die kleiner als $\frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ sind.
Die Multiplikation mit 4 auf beiden Seiten führt also auf eine zur Ausgangsgleichung äquivalente Ungleichung. Es liegt eine äquivalente Umformung vor.

γ) $2x \boxed{\cdot (-4)} < 5 \boxed{\cdot (-4)}$

Die Multiplikation von (-4) auf beiden Seiten ergibt eine zur Ausgangsgleichung nicht äquivalente Ungleichung, denn die Lösungsmenge besteht jetzt aus allen rationalen Zahlen, die größer sind als $\frac{5}{2}$. Es liegt also keine äquivalente Umformung vor.

δ) Wohl aber stellt die Multiplikation von (-4) auf beiden Seiten der Ungleichung $2x < 5$ unter gleichzeitiger Umkehrung des Relationszeichens eine äquivalente Umformung dar, denn die Ungleichung $2x \cdot (-4) > 5 \cdot (-4)$ hat genau wie die Ausgangsgleichung als Lösungsmenge alle rationalen Zahlen, die kleiner als $\frac{5}{2}$ sind.

Äquivalente Umformungen von Gleichungen und Ungleichungen sind u. a. durch folgende Operationen möglich:

Gleichungen	Ungleichungen
Addition bzw. Subtraktion ein und derselben rationalen Zahl auf beiden Seiten	
Multiplikation oder Division beider Seiten mit ein und derselben von Null verschiedenen rationalen Zahl	Multiplikation oder Division beider Seiten mit ein und derselben positiven rationalen Zahl Bei Multiplikation oder Division beider Seiten mit ein und derselben negativen rationalen Zahl ist das Relationszeichen der Ungleichung umzukehren.

Bei **Umformungen** auf beiden Seiten **mit beliebigen Termen** statt mit Zahlen müssen zusätzliche Überlegungen angestellt werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

6 Auf beiden Seiten der Gleichung (I) $x^2 = 4$ wird einmal derselbe Term $(x + 3)$ addiert, zum anderen werden beide Seiten mit diesem Term multipliziert.

(II) $x^2 + x + 3 = 4 + x + 3$ (III) $x^2(x + 3) = 4(x + 3)$

Die Lösungsmengen sind bei Gleichung

(I) $\{2; -2\}$ (II) $\{2; -2\}$ (III) $\{2; -2; -3\}$

Also sind die Gleichungen (I) und (II) äquivalent, (I) und (III) bzw. (II) und (III) aber nicht.

Aufgaben 2/27 bis 2/28

2.2.2. Das Lösen linearer Gleichungen

Die Aufgabe, die Nullstelle x_0 einer linearen Funktion $y = mx + b$ zu bestimmen, führt auf die Gleichung $mx_0 + b = 0$, deren Lösungsmenge ermittelt werden muß. Solche Gleichungen heißen **lineare Gleichungen.** Um die Lösungsmenge einer linearen Gleichung zu bestimmen (kurz: um die lineare Gleichung zu lösen), werden mit der Gleichung äquivalente Umformungen vorgenommen mit dem Ziel, die Variable zu **isolieren.**

Das bedeutet, daß eine Gleichungsform hergestellt werden soll, bei der die Variable nur noch auf einer Seite, und zwar allein, vorkommt. Dann zeigt diese Gleichung nämlich unmittelbar die gesuchte Lösungsmenge. Sie hat prinzipiell die Form $x = z$, wobei z eine Zahl darstellt.

7

In der Gleichung

$5(x + 3) = 4$	$c(x + b) = a, \quad (c \neq 0)$

ist die Variable x durch die Addition

mit 3	mit b

verknüpft. Das Ergebnis dieser Verknüpfung

$(x + 3)$	$(x + b)$

ist durch die Multiplikation

mit 5	mit c

verknüpft.

Die Zurückführung auf die Form $x = z$ kann in der Weise erfolgen, daß man in umgekehrter Reihenfolge durch Anwenden der jeweiligen Umkehroperationen Schritt für Schritt zu einfacheren Formen übergeht.

1. Die multiplikative Verknüpfung von x wird durch Division gelöst. Folglich werden beide Seiten der Gleichung

durch 5	durch $c \quad (c \neq 0)$

dividiert.

$\frac{5 \cdot (x + 3)}{5} = \frac{4}{5}$	$\frac{c \cdot (x + b)}{c} = \frac{a}{c}$
$x + 3 = \frac{4}{5}$	$x + b = \frac{a}{c}$

2. Die additive Verknüpfung wird durch Subtraktion gelöst, indem auf beiden Seiten

3	b

subtrahiert wird.

$(x + 3) - 3 = \frac{4}{5} - 3$	$(x + b) - b = \frac{a}{c} - b$
$x = -\frac{11}{5}$	$x = \frac{a - bc}{c}$

Da wir nur äquivalente Umformungen vorgenommen haben, ist die sofort erkennbare Lösungsmenge der letzten Gleichung auch Lösungsmenge der Ausgangsgleichung. Wir nennen daher mitunter die Gleichungen

$x = -\frac{11}{5}$	$x = \frac{a - bc}{c}$

bereits die Lösungen der gegebenen Gleichungen.

6 Formen Sie nach dem gleichen Prinzip die folgenden Gleichungen bis zur Form $x = z$ äquivalent um, indem Sie jeweils das Zahlenbeispiel und den allgemeinen Fall parallel behandeln!

a) $x + b = a; \quad x + 6 = -3$ **b)** $\frac{x}{b} = a; \quad \frac{x}{-3} = 5$

c) $\frac{x}{b} - c = a;\quad \frac{x}{3} - 0{,}5 = -1{,}5$ d) $\frac{x+b}{c} = a;\quad \frac{x+2}{5} = 6$

Rechenfehler, die bei den äquivalenten Umformungen gemacht wurden, lassen sich mit Hilfe der **Probe** aufdecken. Diese sollte deshalb stets durchgeführt werden. Sie besteht darin, daß die ermittelte Lösung in der Ausgangsgleichung für die Variable eingesetzt und überprüft wird, ob sich eine wahre Aussage ergibt.

8 Die Gleichung $1 - 5x = 15 + 11x$ möge durch äquivalente Umformungen auf die Lösung $x = -\frac{7}{8}$ geführt haben. In der Probe ist zu überprüfen, ob

$$1 - 5 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = 15 + 11 - \left(-\frac{7}{8}\right)$$

eine wahre Aussage ist.
Da man das nicht sofort erkennen kann, werden beide Seiten getrennt für sich ausgerechnet, bis man die Gleichheit der rechten und der linken Seite bestätigt findet. Anderenfalls stellt die Gleichung eine falsche Aussage dar.

Linke Seite:

$$\begin{aligned} 1 - 5 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) &= 1 + \frac{35}{8} \\ &= \frac{8 + 35}{8} \\ &= \frac{43}{8} \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} 15 + 11 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) &= 15 - \frac{77}{8} \\ &= \frac{120 - 77}{8} \\ &= \frac{43}{8} \end{aligned}$$

Die linke Seite ist gleich der rechten Seite $\left(\frac{43}{8} = \frac{43}{8}\right)$, also ist

$$1 - 5 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = 15 + 11 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)$$

eine wahre Aussage, d. h., die Zahl $-\frac{7}{8}$ ist Lösung der gegebenen Gleichung.
Es ist nicht unbedingt erforderlich, beide Seiten getrennt zu schreiben. Es kann auch folgende Form für die Probe gewählt werden:

$$\begin{aligned} 1 - 5 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) &= 15 + 11 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) \\ 1 + \frac{35}{8} &= 15 - \frac{77}{8} \\ \frac{43}{8} &= \frac{43}{8} \end{aligned}$$

Dann muß am Ende der Probe aber festgestellt werden, ob sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergeben hat. Nur bei einer wahren Aussage ist die ermittelte Zahl Lösung der gegebenen Gleichung.

Aufgaben 2/29 bis 2/36

2.2.3. Sachaufgaben

Viele Probleme der Praxis, deren Lösungen mit Rechnungen verbunden sind, lassen sich mit Hilfe von linearen Gleichungen lösen. Der wichtigste erste Schritt dabei ist, aus dem Sachverhalt der Aufgabe das mathematisch Wesentliche zu erkennen und dieses als Gleichung mit wenigstens einer Variablen zu formulieren. Dazu muß stets irgendeine der mit der Sache verbundenen Größen auf zweierlei Weise ausgedrückt werden, so daß man diese beiden Terme dann gleichsetzen kann. Es ist wichtig, dabei stets auf eine genaue Definition der verwendeten Größen und auf eine eindeutige Festlegung der dabei verwendeten Maßeinheiten zu achten.

9 Lutz fuhr mit seinem Motorrad nach einer 45 km entfernten Ortschaft. Um dort pünktlich nach $\frac{3}{4}$ h Fahrzeit einzutreffen, hätte er seine Geschwindigkeit um $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ steigern müssen. Da er das nicht tat, kam er zu spät. Mit welcher Geschwindigkeit ist er gefahren?

Vorüberlegung: Wir nehmen an, er ist mit einer Geschwindigkeit von $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren. Bei einer Geschwindigkeit von $(x + 10)\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er in $\frac{3}{4}$ h eine Strecke von $(x + 10)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{3}{4}\,\text{h}$ zurückgelegt. Das wäre aber gerade die Gesamtstrecke von 45 km gewesen. Also ergibt sich die Gleichung

$$(x + 10)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{3}{4}\,\text{h} = 45\,\text{km} \quad \text{oder}$$

$$\boxed{(x + 10) \cdot \frac{3}{4} = 45}$$

In dieser Gleichung ist das Problem mathematisch gefaßt.

Lösungsweg:
$$\begin{aligned} x + 10 &= 45 \cdot \frac{4}{3} \\ x + 10 &= 60 \\ x &= 60 - 10 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat die Lösung $x = 50$.

Ergebnis: Lutz fuhr mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und kam dadurch zu spät.

10 Wird zu einem Widerstand von $300\,\Omega$ ein zweiter parallel geschaltet, so steigt die Stromstärke bei gleicher angelegter Spannung von 0,2 A auf 0,5 A an. Wie groß ist der zweite Widerstand?

Vorüberlegung: Der Anstieg der Stromstärke von 0,2 A auf 0,5 A, also auf das $\frac{5}{2}$-fache, bedeutet, daß der Gesamtwiderstand bei der Parallelschaltung $\frac{2}{5}$ vom Ausgangswiderstand, also $\frac{2}{5} \cdot 300\,\Omega = 120\,\Omega$ ausmacht.

Andererseits läßt sich der Gesamtwiderstand nach $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ berechnen. Wenn der zweite, zugeschaltete Widerstand die Größe $x\,\Omega$ besitzt, heißt das:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{300\,\Omega} + \frac{1}{x\,\Omega}, \quad \text{also} \quad R_{ges} = \frac{300x\,\Omega}{300 + x}$$

Die beiden Gesamtwiderstände sind gleich, also:

$$120\,\Omega = \frac{300x\,\Omega}{300 + x}, \quad \text{oder} \quad \boxed{120 = \frac{300x}{300 + x}}$$

Das ist das Problem als Gleichung formuliert, für die wie üblich die Lösungsmenge bestimmt wird:

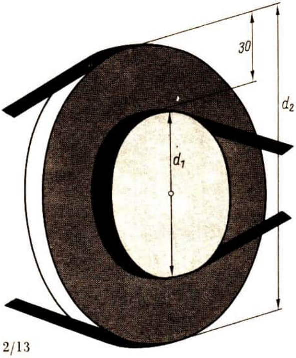
$$\begin{aligned} 120 \cdot (300 + x) &= 300x \\ 36\,000 + 120x &= 300x \\ 36\,000 &= 180x \\ 200 &= x \end{aligned}$$

Der zugeschaltete Widerstand betrug 200 Ω.

Aufgaben 2/37 bis 2/47

2.2.4. Systeme linearer Gleichungen mit 2 Variablen und ihre rechnerischen Lösungsverfahren

11 Es sollen die Durchmesser einer zweistufigen Riemenscheibe bestimmt werden. Der Durchmesser der größeren Scheibe (Länge d_2) soll 6 cm größer sein als der kleinere (Länge d_1), und die Längen der Durchmesser sollen das Verhältnis 4 : 5 besitzen (Bild 2/13).



2/13

Lösungsansatz:

1. Bedingung: $d_2 - d_1 = 6$ (I)
2. Bedingung: $d_2 : d_1 = 5 : 4$ (II)

Forderung: Es ist ein Zahlenpaar $[d_1; d_2]$ zu bestimmen, das beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.

Lösung des mathematischen Problems:

Man kann durch systematisches Probieren ein solches Zahlenpaar zu bestimmen suchen, indem man für beide Bedingungen Wertetabellen aufstellt:

$d_2 - d_1 = 6$

d_2	7	8,5	10	…	18	…	**30**	…	61	62,1	…
d_1	1	2,5	4	…	12	…	**24**	…	55	56,1	…

$d_2 : d_1 = 5 : 4$

d_2	5	10	15	...	**30**	...	70	...
d_1	4	8	12	...	**24**	...	56	...

Das Zahlenpaar, das sowohl der ersten als auch der zweiten Bedingung genügt, ist [24; 30]. Es gibt kein weiteres Zahlenpaar, das beiden Bedingungen genügt.
Damit ist die Lösung gefunden. Der beschrittene Weg ist aber sehr zeitaufwendig. Wir suchen deshalb nach rationelleren rechnerischen Lösungsverfahren für solche Probleme.
Ein System von als Gleichungen formulierten Bedingungen wie (I) und (II) wird als **Gleichungssystem** bezeichnet. Die allgemeine Form eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen x, y ist:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Hierbei sind a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 Variable für beliebige, aber für ein bestimmtes Gleichungssystem fest gewählte Zahlen, also Parameter.

7 Bilden Sie Gleichungssysteme, indem Sie in der allgemeinen Form die Parameter folgendermaßen wählen!

	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
a)	3	1	3	−1	2	−8
b)	−6	4	8	−3	2	−8
c)	5	2	2	15	6	6

Rationellere Verfahren zur rechnerischen Lösung von Gleichungssystemen zielen darauf ab, das System auf eine Gleichung mit nur **einer** Variablen zu reduzieren.

12 Gegeben sei das Gleichungssystem aus Beispiel 2/11 mit den Variablen x statt d_1 und y statt d_2:

(I) $y - x = 6$
(II) $y : x = 5 : 4$

Nach einer äquivalenten Umformung von (II) über

$$4y = 5x \quad \text{und}$$
$$y = \frac{5}{4}x \quad \text{folgt schließlich}$$

(I) $y - x = 6$
(II) $y = 1{,}25x$

Angenommen, wir hätten schon eine Lösung $[x_1; y_1]$ gefunden. Dann sind die Gleichungen

(I′) $y_1 - x_1 = 6$ und (II′) $y_1 = 1{,}25x_1$

wahre Aussagen. Wir dürfen folglich in der Gleichung (I′) y_1 durch $1{,}25x_1$ ersetzen.

Also ergibt sich

$$1{,}25x_1 - x_1 = 6$$
$$0{,}25x_1 = 6$$
$$x_1 = 24$$

Aus Gleichung (II') folgt dann

$$y_1 = 1{,}25 \cdot 24 = 30$$

Ob das Zahlenpaar [24; 30] tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems ist, wird durch die **Probe** an beiden Ausgangsgleichungen nachgeprüft.

Probe: (I) $30 - 24 = 6$ Das ist eine wahre Aussage.
(II) $30 = 1{,}25 \cdot 24$ Das ist eine wahre Aussage.

Also ist [24; 30] tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems. Es ist aber auch die einzige Lösung, wie hier nicht bewiesen werden soll.

Dieses Lösungsverfahren für ein Gleichungssystem heißt **Einsetzungsverfahren** oder **Substitutionsverfahren.** Dabei muß man eine der Variablen in einer der beiden Gleichungen durch äquivalente Umformungen isolieren, um den erhaltenen Term dann in der anderen Gleichung an Stelle dieser Variablen einzusetzen.

13 Das folgende Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 4x + 6y &= -1 \\ &\text{(II)} & 10x + 2y &= -9 \end{aligned}$$

Wir isolieren x durch äquivalente Umformung in der zweiten Gleichung.

$$\begin{aligned} &\text{(II')} & 10x + 2y &= -9 && |-2y \\ && 10x &= -9 - 2y && |:10 \\ && x &= -0{,}2y - 0{,}9 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das zum obigen System äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 4x + 6y &= -1 \\ &\text{(II')} & x &= -0{,}2y - 0{,}9 \end{aligned}$$

Dieses System wird nach dem Einsetzungsverfahren gelöst, indem für x in der ersten Gleichung der entsprechende Term der zweiten Gleichung eingesetzt wird.

Man braucht nicht immer die Variable selbst zu isolieren, sondern kann auch gewisse „Vielfache einer Variablen" isolieren, falls gleiche Vielfache in beiden Gleichungen auftreten.

14

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 6x + 9y &= 123 \\ &\text{(II)} & 6x + 4y &= 78 \longleftrightarrow \text{(II')}\ 6x = 78 - 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(II') in (I)} & (78 - 4y) + 9y &= 123 \\ && 78 + 5y &= 123 \\ && 5y &= 45 \\ && y &= 9 \end{aligned}$$

Bestimmen von x:

[$y = 9$ einsetzen in (II'):]

$$6x = 78 - 4 \cdot 9$$
$$x = 7$$

Probe: *Gleichung* (I) $\qquad$ *Gleichung* (II)

$$6 \cdot 7 + 9 \cdot 9 = 123 \qquad 6 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 78$$
$$123 = 123 \qquad 78 = 78$$

Ein anderes Verfahren ist das **Additions- und Subtraktionsverfahren** (auch **Koeffizientenverfahren** genannt). Es wird in den Beispielen 2/15 und 2/16 erläutert.

15 Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden.

$$\begin{aligned} 7x + 3y &= 127 \\ 4x + 3y &= 97 \end{aligned}$$

Die linke Seite der zweiten Gleichung wird von der linken Seite der ersten Gleichung subtrahiert und die rechte Seite der zweiten Gleichung von der rechten Seite der ersten. Dabei wird der Koeffizient von y gleich Null, und wir erhalten eine Gleichung mit nur einer Variablen, nämlich x.

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 7x + 3y & = & 127 \\ \text{(II)} & 4x + 3y & = & 97 \\ \hline \text{(I)} - \text{(II)} & 3x & = & 30 \\ & x & = & 10 \end{array}$$

Bestimmen von y:

[$x = 10$ einsetzen in (I):]

$$\begin{aligned} 7 \cdot 10 + 3y &= 127 \\ 3y &= 57 \\ y &= 19 \end{aligned}$$

Das Verfahren setzt voraus, daß die absoluten Beträge der Koeffizienten einer Variablen gleich sind. Wenn das nicht von vornherein der Fall ist, kann man es dadurch erreichen, daß man die rechte und die linke Seite beider Gleichungen mit je einer geeigneten von Null verschiedenen Zahl multipliziert. Mitunter genügt es, diese äquivalente Umformung nur auf eine der beiden Gleichungen anzuwenden.

16 **a)** Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden.

$$\begin{aligned} 2r - 3s &= 45 \\ 3r + 2s &= 35 \end{aligned}$$

Um die Variable s zu eliminieren, wird folgendermaßen gerechnet.

$$\begin{array}{lrcll} \text{(I)} & 2r - 3s & = & 45 & | \cdot 2 \\ \text{(II)} & 3r + 2s & = & 35 & | \cdot 3 \\ \hline \text{(I')} & 4r - 6s & = & 90 & \\ \text{(II')} & 9r + 6s & = & 105 & \\ \hline \text{(I')} + \text{(II')} & 13r + 0 & = & 195 & \\ & r & = & 15 & \end{array}$$

Bestimmen von s:

[$r = 15$ einsetzen in (I):]

$$\begin{aligned} 2r - 3s &= 45 : \\ 2 \cdot 15 - 3s &= 45 \\ -3s &= 15 \\ s &= -5 \end{aligned}$$

Probe: *Gleichung* (I) $\quad 2 \cdot 15 - 3 \cdot (-5) = 45$

Gleichung (II) $\quad 3 \cdot 15 + 2 \cdot (-5) = 35$

b) Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden.

$$\begin{array}{llrcl}
 & \text{(I)} & 7x - 3y & = & 5 \quad | \cdot 3 \\
 & \text{(II)} & 21x + 10y & = & 205 \quad | \\
\hline
 & \text{(I')} & 21x - 9y & = & 15 \\
 & \text{(II)} & 21x + 10y & = & 205 \\
\hline
\text{(II)} - \text{(I')} & & 0 + 19y & = & 190 \\
 & & y & = & 10 \\
\hline
\text{in (I)} & & 7x - 3 \cdot 10 & = & 5 \\
 & & 7x & = & 35 \\
 & & x & = & 5
\end{array}$$

Probe: *Gleichung* (I) $\quad 7 \cdot 5 - 3 \cdot 10 = 5$

Gleichung (II) $\quad 21 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 205$

Sachaufgaben führen oft auf Gleichungssysteme mit 2 Variablen. Ihr Lösungsweg entspricht dem in Abschnitt 2.2.3. dargelegten.

Aufgaben 2/48 bis 2/70

2.2.5. Zeichnerische Lösungsverfahren für Systeme linearer Gleichungen mit 2 Variablen und Lösbarkeitsbedingungen

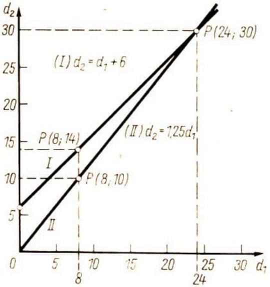
Die beiden Gleichungen eines linearen Gleichungssystems mit 2 Variablen können als Gleichungen von Funktionen angesehen werden, wenn man die eine Variable als Argument, die andere als Funktionswert betrachtet.

17 Für die Gleichungen im Beispiel 2/11 ergibt sich dann:

(I) $d_2 = d_1 + 6$

(II) $d_2 = 1{,}25\, d_1$

Jedem Punkt der Ebene entspricht ein Zahlenpaar $[d_1; d_2]$, wobei d_1 und d_2 reelle Zahlen sind. Wir beschränken uns auf positive Zahlen (Bild 2/14).



2/14

Den Punkten, die auf der Geraden I liegen, entsprechen die Zahlenpaare $[d_1; d_2]$, für die gilt: $d_2 - d_1 = 6$. Den Punkten, die auf der Geraden II liegen, entsprechen die Zahlenpaare $[d_1; d_2]$, für die gilt: $d_2 : d_1 = 5 : 4$. Also entspricht dem **Schnittpunkt** beider Geraden, da er sowohl ein Punkt der Geraden I als auch ein Punkt der Geraden II ist, das Zahlenpaar, das beiden Bedingungen genügt. Wir entnehmen der Zeichnung das Zahlenpaar [24; 30] als Lösung.

Aus der zeichnerischen Lösung erkennt man, ob zwei lineare Gleichungen eines Gleichungssystems eine eindeutige Lösung besitzen. Das ist nicht bei jedem Gleichungssystem der Fall. Eine eindeutige Lösung existiert offenbar nur dann, wenn die Bilder der entsprechenden Funktionen einander schneiden (Fall I). Es gibt aber tatsächlich drei Möglichkeiten:

Fall I: Die Geraden schneiden einander in einem Punkt.
Fall II: Die Geraden fallen zusammen.
Fall III: Die Geraden liegen parallel zueinander, fallen aber nicht zusammen.

Im Fall II besteht das Gleichungssystem aus zwei zueinander **äquivalenten** Gleichungen. Im Fall III besteht das Gleichungssystem aus zwei einander **widersprechenden** Gleichungen.

18 *Fall I:*
$$3x + 4y = 6$$
$$6x + y = -2$$

Fall II:
$$3x + 4y = 6$$
$$\frac{3}{2}x + 2y = 3$$

Fall III:
$$3x + 4y = 6$$
$$3x + 4y = 3$$

8 Stellen Sie die zusammengehörenden Gleichungen aus Übung 2/7 und aus Beispiel 2/18 jeweils gemeinsam in einem Koordinatensystem grafisch dar! Entscheiden Sie, welcher der drei Fälle von Gleichungssystemen jeweils vorliegt! Entnehmen Sie, soweit möglich, den Zeichnungen jeweils die Lösung des Gleichungssystems, und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Lösung durch Einsetzen in beide Gleichungen!

Aufgaben 2/71 bis 2/75

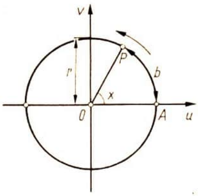
3. Winkelfunktionen; Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks

3.1. Die Winkelfunktionen

3.1.1. Winkelmaße

Wird in einem rechtwinkligen $u-v$-Koordinatensystem um den Koordinatenursprung mit beliebigem Radius (seine Maßzahl sei r) ein Kreis geschlagen und irgendein Punkt P der Peripherie mit dem Mittelpunkt O verbunden, so bilden $\overline{PO}$ und $\overline{AO}$ (Bild 3/1) einen Winkel x miteinander. Wandert P von A aus auf dem Kreis gegen den positiven Teil der v-Achse hin in gleicher Richtung weiter, so wird der Winkel x immer größer. Das gleiche geschieht mit dem Kreisbogen $\widehat{PA}$ (Maßzahl: b). Ist P nach einem vollen Umlauf wieder bei A angelangt, so ist der zugehörige Winkel ein **Vollwinkel**, der zugehörige Kreisbogen die **Kreislinie** mit der Länge $2r\pi$.

3/1



Wird vereinbart, daß die Drehung von $\overline{OP}$ um O nicht über $\overline{OA}$ hinaus und auch nur in der angegebenen Richtung, die als **mathematisch positiver Drehsinn** festgelegt ist, erfolgen soll, so gilt:

1 **Jedem Winkel x in dem Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ ist auf dem Kreis mit dem Radius r genau ein Peripheriepunkt P und genau ein Kreisbogen b zugeordnet und umgekehrt.**

Auf dieser Tatsache beruhen die üblichen **Winkelmaßeinheiten** und die Definitionen der **Winkelfunktionen** (Abschnitt 3.1.2.).

a) Gradmaße

Der vierte Teil des Vollwinkels heißt **rechter Winkel** ($1^{\llcorner}$).
DEFINITION: Das Maß des Winkels, der den neunzigsten Teil eines rechten Winkels ausmacht, heißt 1 **Grad** (1°).

[Darüber hinaus wird gelegentlich das Maß des Winkels, der den hundertsten Teil eines rechten Winkels ausmacht, als Maßeinheit benutzt und 1 **Neugrad** oder 1 **Gon** genannt (1^g). Im Gegensatz dazu bekommt dann das oben definierte Grad die Bezeichnung **Altgrad.** Wir arbeiten künftig nur mit dem Gradmaß „Altgrad".]

Die weitere Unterteilung erfolgt dezimal oder durch folgende Festlegungen:

$1° = 60'$ (60 Minuten) $\qquad$ $1' = 60''$ (60 Sekunden)
[$1^g = 100^c$ (100 Neuminuten) $\qquad$ $1^c = 100^{cc}$ (100 Neusekunden)]

b) Bogenmaß

Auf Grund der Proportionalität zwischen dem Maß des Zentriwinkels und der Länge des zugehörigen Kreisbogens gilt

$b : x = 2r\pi : 360°$ mit $x = \alpha°$. Daraus folgt:

$$\boldsymbol{\frac{b}{r} = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°}$$

DEFINITION: $\frac{b}{r}$ wird das **Bogenmaß** des Winkels $\alpha°$ genannt (Symbol: $\widehat{\alpha}$ oder arc α); seine Maßeinheit ist 1 Radiant (1 rad, kurz meist: 1).

Also ergibt sich: $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180°}\alpha°$ bzw. $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot \widehat{\alpha}$.
1 rad entspricht dem Winkel von $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}27°$.

Zur Umrechnung der Winkelmaße ineinander dienen Tabellen oder bei Benutzung obiger Beziehung zweckmäßig der Rechenstab.

1 Welches Bogenmaß entspricht **a)** dem Gradmaß 50°, **b)** dem Gradmaß 110° 15′ 36″, jeweils genau als Vielfaches von π und angenähert als Dezimalbruch?

a) $\alpha° = 50°; \quad \text{arc}\,\alpha = \frac{50°}{180°}\pi = \frac{5}{18}\pi \approx 0{,}87$

b) $\beta° = 110°\,15'\,36'' = 110° + \frac{15°}{60} + \frac{36°}{3600} = 110{,}26°$

$\text{arc}\,\beta = \frac{110{,}26°}{180°}\pi = \frac{5513}{9000}\pi \approx 1{,}92$

(1) Berechnen Sie **a)** genau, **b)** angenähert die Bogenmaße, die den Winkeln 45°, 60°, 90°, 180°, 360° entsprechen!

(2) Definieren Sie durch Maßangaben **a)** im Gradmaß, **b)** im Bogenmaß die folgenden Begriffe:
spitzer Winkel, rechter Winkel, stumpfer Winkel, gestreckter Winkel, überstumpfer Winkel, Vollwinkel!

Aufgaben 3/1 bis 3/2

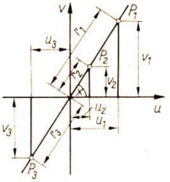
3.1.2. Definition der Winkelfunktionen

Alle Punkte auf einer Geraden durch den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems haben Koordinaten, deren Verhältnis konstant ist, und zwar gleich dem Anstieg dieser Geraden. Ebenso ist das Verhältnis je einer dieser Koordinaten zum Abstand des betreffenden Punktes vom Koordinatenursprung konstant (Bild 3/2):

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} = \cdots = c_1$$

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_3}{r_3} = \cdots = c_2$$

$$\frac{u_1}{r_1} = \frac{u_2}{r_2} = \frac{u_3}{r_3} = \cdots = c_3$$



3/2

(3) Begründen Sie diesen Tatbestand **a)** mit Hilfe der linearen Funktionen, **b)** mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze!

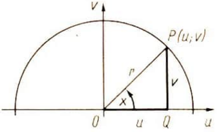
In Verbindung mit Satz 3/1 folgt daraus (Bild 3/1):

2 ▷ Jedem Winkel x in dem Bereich $0° \leq x \leq 360°$ sind eindeutig gewisse Zahlen zugeordnet, die als bestimmte Verhältnisse zwischen der u-Koordinate (Abszisse), der v-Koordinate (Ordinate) und dem Abstand des den Winkel bestimmenden Punktes P vom Koordinatenursprung (Maßzahl des Radius) gedeutet werden können.

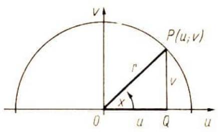
Es gibt 6 Möglichkeiten, um aus u, v und r Verhältnisse zu bilden, die nach Satz 3/2 Funktionen des Winkels x sind. Sie heißen kurz die **Winkelfunktionen.** Vier von ihnen sind für die Praxis besonders wichtig.
Für sie gelten folgende **Definitionen:**

3 ▷ Das Verhältnis der Ordinate v zur Maßzahl r des Radius nennt man den Sinus des Winkels x (Bild 3/3). **Die entsprechende Funktion $f(x) = \frac{v}{r}$ heißt die Sinusfunktion:**

$$y = \sin x = \frac{v}{r}.$$



3/3



3/4

4 **Das Verhältnis der Abszisse u zur Maßzahl r des Radius nennt man den Kosinus des Winkels x** (Bild 3/4). **Die entsprechende Funktion $f(x) = \frac{u}{r}$ heißt die Kosinusfunktion:**

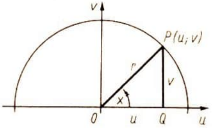
$$y = \cos x = \frac{u}{r}.$$

5 **Das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u nennt man den Tangens des Winkels x** (Bild 3/5). **Die entsprechende Funktion $f(x) = \frac{v}{u}$ heißt die Tangensfunktion:**

$$y = \tan x = \frac{v}{u}.$$

6 **Das reziproke Verhältnis vom Tangens, also das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v wird der Kotangens des Winkels x genannt** (Bild 3/5). **Die entsprechende Funktion $f(x) = \frac{u}{v} = \frac{1}{\frac{v}{u}}$ heißt die Kotangensfunktion:**

$$y = \cot x = \frac{u}{v} = \frac{1}{\tan x}$$



3/5

3.1.3. Ermittlung von Winkelfunktionswerten

Nach Bild 3/3, 3/4 oder 3/5 können zu vorgegebenen Winkeln die Winkelfunktionswerte durch Abmessen bestimmter Strecken und deren Verhältnisbildung ermittelt werden. Für $90° < x < 360°$ müssen dazu bei Abszisse und Ordinate die Vorzeichen berücksichtigt werden; die Radiusmaßzahl ist immer positiv (vgl. dazu Kapitel 7). Für 0°, 90°, 180°, 270°, 360° sind bei der Tangens- und Kotangensfunktion teilweise besondere Überlegungen erforderlich.
In diesem Abschnitt 3.1.3. soll der Definitionsbereich der Winkelfunktionen auf $0° \leqq x \leqq 90°$ beschränkt werden.

2 Es sind mit Hilfe einer Zeichnung die Funktionswerte sin 30° und cot 30° zu bestimmen (Bild 3/6).

$r = 3$

$u \approx 2{,}6$

$v = 1{,}5$

$$\sin 30° = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

$$\cot 30° \approx \frac{2{,}6}{1{,}5} \approx 1{,}7$$

(4) Bestimmen Sie, wie in Beispiel 3/2 die Funktionswerte cos 30° und tan 30°, benutzen Sie dazu aber einen Kreis, dessen Radius die Maßzahl 1 hat (z. B. 1 dm)! Welchen Vorteil bietet die Benutzung eines solchen **„Einheitskreises“**?

Die Ergebnisse sind bei diesem Verfahren stets mehr oder minder ungenau. Mit rechnerischen Methoden, auf die hier nicht eingegangen werden kann, lassen sich Winkelfunktionswerte mit jeder beliebigen Genauigkeit ermitteln. Dabei zeigt es sich, daß die meisten keine rationalen Zahlen sind.
2 Beispiele dafür:

3 **Mit Hilfe einer Zeichnung sind die Funktionswerte**

a) $\sin 45°$, **b)** $\tan 60°$

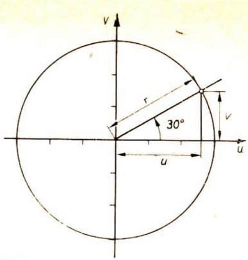
zu bestimmen.

a) Bild 3/7a. Offenbar entspricht v der halben Diagonale eines Quadrates mit der Seite r, also $\frac{r}{2}\sqrt{2}$. Folglich gilt:

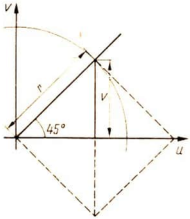
$$\sin 45° = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{2}}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707$$

b) Bild 3/7b. Offensichtlich entspricht hierbei v der Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite r, also $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, und u der halben Dreiecksseite, also $\frac{r}{2}$. Deshalb gilt

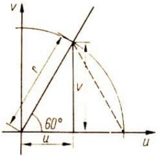
$$\tan 60° = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{3}}{\frac{r}{2}} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$$



3/6

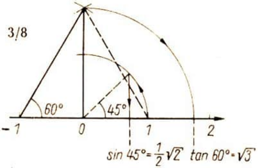


3/7a



3/7b

3/8



Sowohl $\sqrt{2}$ als auch $\sqrt{3}$ sind aber, wie aus Klasse 8 bekannt ist, keine rationalen, sondern **irrationale Zahlen**, die man in Dezimalschreibweise als unendliche unperiodische Dezimalbrüche darstellen kann. Sie lassen sich mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen annähern, indem man statt der unendlichen unperiodischen Dezimalbrüche endliche Dezimalbrüche verwendet. Beispielsweise kann für den unendlichen unperiodischen Dezimalbruch $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ der **rationale Näherungswert** 1,414 oder der rationale Näherungswert 1,4142 (ermittelt aus 1,414213 ... durch Anwendung der üblichen Rundungsregeln) benutzt werden, je nachdem, welche Genauigkeit bei einer Berechnung erforderlich ist.

Jeder irrationalen Zahl läßt sich auf der Zahlengeraden eindeutig ein Punkt zuordnen. Wie das geschieht, ist für die Beispiele $\sin 45°$ und $\tan 60°$ im Bild 3.8 dargestellt worden.

Diese Aussage ist nicht umkehrbar: Nicht jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht eine irrationale Zahl, sondern vielen Punkten entsprechen bekanntlich rationale Zahlen.

Die Menge aller rationalen Zahlen und die Menge aller irrationalen Zahlen werden zur **Menge der reellen Zahlen** zusammengefaßt. Für die reellen Zahlen gilt:
Jeder reellen Zahl läßt sich auf der Zahlengeraden **eindeutig ein Punkt zuordnen,** und umgekehrt, läßt sich **jedem Punkt** der Zahlengeraden **eine reelle Zahl zuordnen** (vgl. 5.5.1.).

Beispiel 3/3 darf nicht zu der Annahme verleiten, daß alle irrationalen Winkelfunktionswerte durch Quadratwurzeln darstellbar sind. Das ist keineswegs der Fall.

Aus allen diesen Gründen ist es zweckmäßig, Winkelfunktionswerte ein für allemal rechnerisch zu bestimmen, einheitlich auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen zu runden (meist 4, manchmal 5 Stellen) und in dieser Form in einer Tabelle übersichtlich zusammenzustellen. Aus diesen Tabellen entnimmt man bei Bedarf die meist näherungsweise angegebenen Winkelfunktionswerte durch Ablesen.

Gewöhnlich werden die Werte der vier Winkelfunktionen in zwei Tabellen mit doppelten Eingängen im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ erfaßt, einer **Sinus-Kosinus-Tafel** und einer **Tangens-Kotangens-Tafel.**

(5) Studieren Sie genau die beiden Tafeln und ihren Aufbau! Achten Sie dabei besonders auf folgende Punkte:

a) Wo liegt der Eingang für Sinus- und Tangenswerte, wo der Eingang für Kosinus- und Kotangenswerte?

b) In welchen Intervallen schreiten die tabellierten Winkelmaße fort?

c) Warum spricht man von „vierstelligen“ Tafeln? (Es gibt auch fünf- und mehrstellige!) Sind Ihre vierstelligen Tafeln durchgängig vierstellig?

d) Die Funktionswerte sind meist Dezimalbrüche. Wo kommen ganze Zahlen in den Tafeln vor?

e) Was bedeutet das Sternchen, das beispielsweise bei tan 63,5° ... tan 63,9° zu finden ist?

f) Warum spricht man bei Sinus und Tangens von einer steigenden, bei Kosinus und Kotangens von einer fallenden Funktion im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$?

g) Wo stehen in der Tangenstabelle die Funktionswerte $\geqq 1$, wo finden sich solche Werte in der Sinustabelle?

$\boxed{4}$ **a)** Die folgenden Gleichungen sind durch Ablesen aus der Tafel zu überprüfen:

$\sin 73{,}9° = 0{,}9608$ $\qquad$ $\cos 0{,}9° = 0{,}9999$
$\tan 12°18' = \tan 12{,}3° = 0{,}2180$ $\qquad$ $\cot 18°12' = \cot 18{,}2° = 3{,}042$

Obwohl es sich bei den tabellierten Funktionswerten fast durchweg um Näherungswerte handelt, verwendet man stets das Gleichheitszeichen (=).

b) Die den folgenden Funktionswerten zugeordneten Winkel x im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ sind durch Ablesen aus der Tafel zu überprüfen:

$\sin x = 0{,}0122;\quad x = 0{,}7°$ $\qquad$ $\cos x = 0{,}5000;\quad x = 60°$
$\tan x = 10{,}02;\quad x = 84{,}3°$ $\qquad$ $\cot x = 5{,}005;\quad x = 11{,}3°$

Im allgemeinen genügt die in den Tabellen notierte Stellenzahl für die Genauigkeit der meisten Anwendungsaufgaben. Sollte einmal eine größere Genauigkeit erforderlich sein, kann man das **lineare Interpolieren** verwenden. Dabei ist zu beachten, ob es sich um steigende oder fallende Funktionswerte handelt.

5 **a)** $y = \sin 13{,}27^\circ$ ist zu bestimmen.

Aus der Tafel entnimmt man die Funktionswerte für $\sin 13{,}20^\circ$ und $\sin 13{,}30^\circ$, zwischen denen der gesuchte Funktionswert liegt.

$$\frac{10^\circ}{100}\left[\begin{array}{l} \dfrac{n^\circ}{100}\left[\begin{array}{l}\sin 13{,}20^\circ = 0{,}2284\\ \sin 13{,}27^\circ = 0{,}22\,.\,.\end{array}\right] d \\ \qquad\quad \sin 13{,}30^\circ = 0{,}2300 \end{array}\right] D$$

Im vorliegenden Fall ist $D = (0{,}2300 - 0{,}2284) \cdot 10\,000 = 16$
und $n^\circ = (13{,}27^\circ - 13{,}20^\circ) \cdot 100 = 7^\circ$, also $n = 7$.
Nach dem Einsetzen in die Interpolationsformel $d = \dfrac{D \cdot n}{10}$ ergibt sich:

$$d = \frac{16 \cdot 7}{10} = 11{,}2 \approx 11$$

Man addiert 11 Zehntausendstel zu 0,2284 und erhält

$$y = \sin 13{,}27^\circ = 0{,}2295$$

b) $y = \cos 52{,}14^\circ$ ist zu bestimmen.

$$\begin{array}{l}\cos 52{,}10^\circ = 0{,}6143\\ \cos 52{,}14^\circ = 0{,}61\,.\,.\\ \cos 52{,}20^\circ = 0{,}6129\end{array}$$

Wächst der Winkel um 10 Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um $D = 14$ Zehntausendstel.
Wächst der Winkel um $n = 4$ Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um d Zehntausendstel.
Die gesuchte Differenz d berechnet man zu $d = \dfrac{14 \cdot 4}{10} = 5{,}6$, gerundet 6.
Man subtrahiert 6 Zehntausendstel von 0,6143 und erhält

$$y = \cos 52{,}14^\circ = 0{,}6137$$

c) Zu $\tan x = 0{,}3652$ ist x im Bereich $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ zu bestimmen.
Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den in der Tafel verzeichneten Werten 0,3640 und 0,3659, zu denen die Winkel $20{,}00^\circ$ und $20{,}10^\circ$ gehören:

$$\frac{10^\circ}{100}\left[\begin{array}{l} \dfrac{n^\circ}{100}\left[\begin{array}{l}\tan 20{,}00^\circ = 0{,}3640\\ \tan 20{,}0.\,^\circ = 0{,}3652\end{array}\right] d \\ \qquad\quad \tan 20{,}10^\circ = 0{,}3659 \end{array}\right] D$$

Nach dem Einsetzen in die umgeformte Interpolationsformel $n = \dfrac{d \cdot 10}{D}$ ergibt sich:

$$n = \frac{12 \cdot 10}{19} = 6{,}3\ldots \approx 6$$

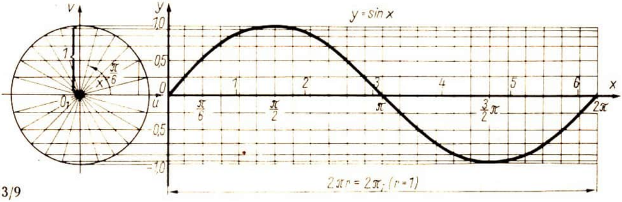
Man addiert 6 Hundertstelgrad zu $20{,}00^\circ$ und erhält $x = 20{,}06^\circ$.

Aufgaben 3/3 bis 3/14

3.1.4. Die Bilder der Winkelfunktionen

Bei den Bildern der Winkelfunktionen ist es zweckmäßig, die Winkel im Bogenmaß zu messen, da dann auf beiden Koordinatenachsen kongruente Maßskalen (gleiche Maßeinheiten) abgetragen werden können.

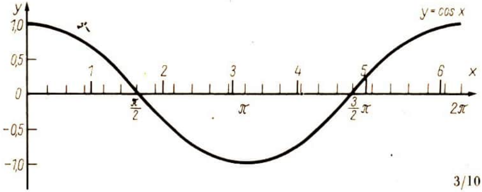
Die Bilder von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ lassen sich leicht aus Bild 3/3 und 3/4 entwickeln, wenn dabei ein voller Einheitskreis verwendet wird. Dann gilt im gesamten Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ nämlich $\sin x = \frac{v}{r} = \frac{v}{1} = v$ und $\cos x = \frac{u}{r} = \frac{u}{1} = u$, d. h., die Koordinaten v und u des wandernden Peripheriepunktes P sind unmittelbar gleich dem jeweiligen Sinus bzw. Kosinusfunktionswert. Die entsprechenden Strecken in Bild 3/3 bzw. 3/4 können also unmittelbar zum Zeichnen des Funktionsbildes verwendet werden (Bild 3/9).



3/9

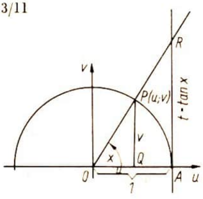
(6) Erläutern Sie das Zustandekommen der „Sinuskurve“ in Bild 3/9!

(7) Entwerfen Sie entsprechend die „Kosinuskurve“, die in Bild 3/10 dargestellt ist!



3/10

3/11



Um in ähnlicher Weise die Bilder von $y = \tan x$ und $y = \cot x$ aus Bild 3/5 herzuleiten, ist es nötig, durch Ähnlichkeitskonstruktionen zunächst folgendes zu erreichen:

Für $\tan x = \frac{v}{u}$ muß für jeden Peripheriepunkt P eine Strecke t konstruiert werden, so daß gilt: $\tan x = \frac{v}{u} = \frac{t}{1} = t$. Das ist mit Hilfe der Tangente an den Einheitskreis im Punkte A (1; 0), der sog. **Haupttangente**, möglich, wie es Bild 3/11 zeigt.

Für $\cot x = \frac{u}{v}$ muß entsprechend eine Strecke c gefunden werden, so daß gilt:

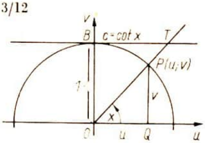
$\cot x = \frac{u}{v} = \frac{c}{1} = c$. Das kann mit Hilfe der Tangente an den Einheitskreis im Punkte $B\,(0;\,1)$, der sog. **Nebentangente,** geschehen (Bild 3/12).

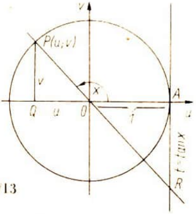
(8) Beweisen Sie die Richtigkeit der Beziehungen

$$\frac{v}{u} = \frac{t}{1} \quad \text{und} \quad \frac{u}{v} = \frac{c}{1}$$

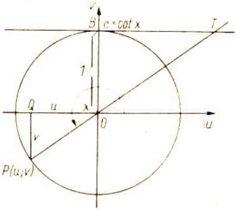
mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze, und begründen Sie, daß für diese Konstruktion stets dieselben Tangenten verwendet werden müssen, auch wenn der Winkel POA größer als $\frac{\pi}{2}$ ist (Beispiele: Bild 3/13 und 3/14)!

3/12





3/13



3/14

Nunmehr können die Bilder von $y = \tan x$ und $y = \cot x$ in ähnlicher Weise wie die von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ konstruiert werden (Bild 3/15 und 3/16).

Aus den Bildern lassen sich eine Anzahl von wichtigen **Eigenschaften der vier Winkelfunktionen im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$** ablesen:

a) Bild 3/11 und 3/13 lassen erkennen, daß die Gerade durch O und P für $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ parallel zur Haupttangente verläuft, daß sich also für diese Winkel keine Funktionswerte $\tan x$ bestimmen lassen. Bild 3/12 und 3/14 zeigen dasselbe für $\cot x$ und die Winkel $x = 0$ und $x = \pi$.

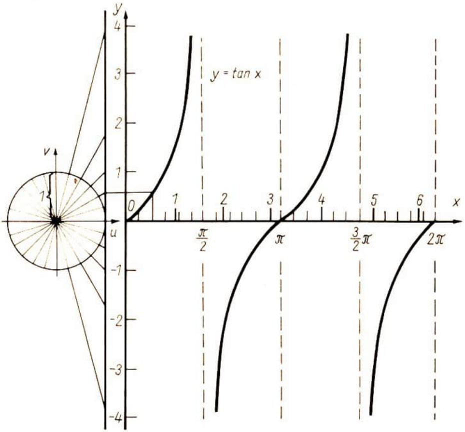
7 **Im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ ist die Funktion $y = \tan x$ für $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ und die Funktion $y = \cot x$ für $x = 0$ und $x = \pi$ nicht definiert.**

(9) **b)** Lesen Sie die **Nullstellen der vier Winkelfunktionen** im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ ab!

8 **c) Der Wertevorrat ist**

für $y = \sin x$: $\;-1 \leqq y \leqq +1$ (Bild 3/9)
für $y = \cos x$: $\;-1 \leqq y \leqq +1$ (Bild 3/10)
für $y = \tan x$: $\;-\infty < y < +\infty$ (Bild 3/15)
für $x = \cot y$: $\;-\infty < y < +\infty$ (Bild 3/16)

$-\infty < y < +\infty$ **bedeutet dabei: Die Funktionswerte können kleiner als jede noch so kleine Zahl und größer als jede noch so große Zahl sein; sie umfassen also den gesamten Bereich der reellen Zahlen.**



3/15

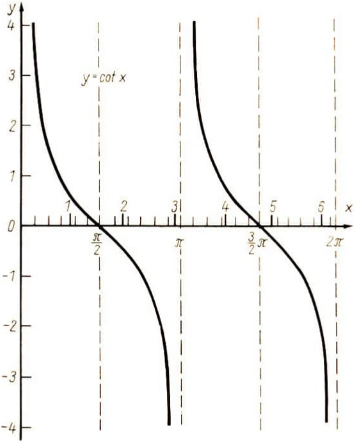
(10) **d)** Stellen Sie eine Tabelle der Funktionswerte der vier Winkelfunktionen für die Argumente $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ zusammen!

e) Die Winkelbereiche

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$;

$\pi \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi$

heißen die **vier Quadranten** (Symbole: I, II, III, IV). In verschiedenen Quadranten haben die Funktionswerte mitunter verschiedene Vorzeichen (Bild 3/9; 3/10; 3/15; 3/16), während in ein und demselben Quadranten jeweils nur ein Vorzeichen vorkommt.



3/16

9 **Die Vorzeichen der Winkelfunktionswerte in den vier Quadranten sind:**

	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+
$\tan x$	+	−	+	−
$\cot x$	+	−	+	−

(11) **f)** Stellen Sie eine entsprechende Tabelle für das **„Steigen und Fallen der Winkelfunktionen in den vier Quadranten“** auf!

Aufgaben 3/15 bis 3/16

3.1.5. Die Komplementwinkelbeziehungen

(12) Stellen Sie folgende Funktionswerte einander gegenüber!

a) $\sin 15°$ und $\cos 75°$
$\sin 83°$ und $\cos 7°$
$\sin 13°$ und $\cos (90° - 13°)$
$\sin 29{,}3°$ und $\cos 60{,}7°$
$\sin (45° + 12°)$ und $\cos (45° - 12°)$
$\sin (90° - 13°)$ und $\cos 13°$

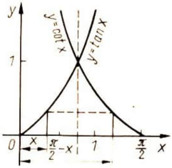
b) $\tan 70°$ und $\cot 20°$
$\tan 1°$ und $\cot 89°$
$\tan 25°$ und $\cot (90° - 25°)$
$\tan 16{,}5°$ und $\cot 73{,}5°$
$\tan (45° + 38°)$ und $\cot (45° - 38°)$
$\tan (90° - 25°)$ und $\cot 25°$

Winkel, die sich zu 90° ergänzen, heißen **Komplementwinkel.**

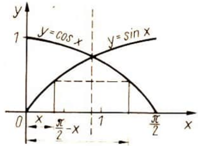
DEFINITION: Die Sinus- und die Kosinusfunktion, ebenso die Tangens- und die Kotangensfunktion, heißen wechselseitig **Kofunktionen** voneinander.

10 **Der Funktionswert eines Winkels x und der Kofunktionswert seines Komplementwinkels $(90° - x)$ sind gleich.**

$\sin x = \cos (90° - x)$	$\tan x = \cot (90° - x)$
$\cos x = \sin (90° - x)$	$\cot x = \tan (90° - x)$
für $0° \leqq x \leqq 90°$	für $0° < x < 90°$



3/17



3/18

Bild 3/17 und 3/18 veranschaulichen Satz 3/10 durch die in den Funktionsbildern vorhandenen Achsensymmetrien.
Satz 3/10 ist die Grundlage dafür, daß die Funktionswerte für die Sinus- und die Kosinusfunktion einerseits und für die Tangens- und die Kotangensfunktion andererseits

im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ jeweils in einer Tabelle mit doppelten Eingang und gegenläufiger Ableserichtung zusammengefaßt werden können.

(13) Betrachten und untersuchen Sie die Einrichtung dieser beiden Tafeln unter diesem Gesichtspunkt!

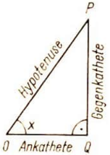
Aufgaben 3/17 bis 3/19

3.2. Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks

3.2.1. Definition der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Die drei zur Definition der Winkelfunktionen benutzten Größen u, v, r bilden in der grafischen Darstellung im Quadranten I stets ein rechtwinkliges Dreieck (Bild 3/3, 3/4, 3/5). Dabei ist der Radius r **Hypotenuse**, v die dem betrachteten Winkel x gegenüberliegende Kathete (kurz: **Gegenkathete**) und u die **Ankathete.** Bei Beschränkung des Definitionsbereichs auf $0° \leqq x \leqq 90°$ kann auf den Kreis als Grundlage der Definition verzichtet und dafür das rechtwinklige Dreieck OQP zur Definition benutzt werden.

11 **Am rechtwinkligen Dreieck OQP gelten** (Bild 3/19) **die folgenden Beziehungen:**



3/19

$$\sin x = \frac{\text{Länge der Gegenkathete (von } x)}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\cos x = \frac{\text{Länge der Ankathete (von } x)}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\tan x = \frac{\text{Länge der Gegenkathete (von } x)}{\text{Länge der Ankathete (von } x)}$$

$$\cot x = \frac{\text{Länge der Ankathete (von } x)}{\text{Länge der Gegenkathete (von } x)}$$

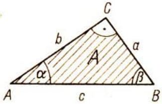
(14) Am rechtwinkligen Dreieck von Bild 3/20 gelten folgende Beziehungen:

$a : c = \sin\alpha = \cos\beta$ $\qquad b : c = \cos\alpha = \sin\beta$

$a : b = \tan\alpha = \cot\beta$ $\qquad b : a = \cot\alpha = \tan\beta$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \sin\beta$

$$= \frac{1}{2} c^2 \sin\beta \cos\beta = \frac{1}{2} c^2 \cos\alpha \cos\beta$$



Begründen Sie die Richtigkeit dieser Gleichungen!

3/20

3.2.2. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Bekanntlich ist ein Dreieck im allgemeinen durch drei voneinander unabhängige Stücke (Seiten bzw. Winkel) eindeutig bestimmt (vgl. die Konstruktionen und die Kongruenzsätze für Dreiecke). Da im rechtwinkligen Dreieck immer der rechte Winkel gegeben

ist, sind zur Bestimmung dieses Dreiecks nur noch zwei unabhängige Stücke (Seiten bzw. Winkel) nötig. Unter unabhängigen Stücken im rechtwinkligen Dreieck sind solche zu verstehen, die nicht mit Hilfe von für alle rechtwinkligen Dreiecke gültigen Beziehungen gegenseitig bestimmt werden können. Beispielsweise sind die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks nicht unabhängig, weil für sie die Komplementwinkelbeziehung (der eine Winkel ist der Komplementwinkel des anderen) gilt.
Für zwei unabhängige Stücke (Seiten bzw. Winkel) sind im rechtwinkligen Dreieck vier Fälle zu unterscheiden (Bild 3/19). Gegeben können sein:

1. die Hypotenuse und ein spitzer Winkel;
2. eine Kathete und ein spitzer Winkel;
3. eine Kathete und die Hypotenuse;
4. die beiden Katheten.

Alle anderen Seiten und Winkel sowie weitere Größen wie Umfang und Flächeninhalt des betreffenden rechtwinkligen Dreiecks können dann berechnet werden.
Die Berechnungen werden in zwei Schritten durchgeführt:

1. Die Aufgabe wird unter Verwendung der Variablen ($a, b, c; \alpha, \beta; A$ usw.) gelöst (*Allgemeine Lösung*). Dabei müssen oft Winkelfunktionen hinzugezogen werden.
2. Die Variablen werden mit den gegebenen Zahlen belegt (*Zahlenmäßige Lösung*). Dabei werden meist die Maßeinheiten weggelassen und nur die Maßzahlen (Zahlenwerte) benutzt. Doch muß dabei zweierlei beachtet werden:
   a) Die Maßeinheiten aller verwendeten Größen müssen übereinstimmen bzw. „zueinander passen".
   b) Im Antwortsatz müssen die in Frage kommenden Maßeinheiten wieder beigefügt werden.

6 Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Hypotenuse c und ein spitzer Winkel α gegeben. Alle anderen Seiten und Winkel des Dreiecks sowie sein Flächeninhalt A sind zu berechnen (1. Fall der obigen Zusammenstellung).

Gegeben: $c = 51{,}90$ m; $\alpha = 52{,}55°$.

Gesucht: 1) a (in m); 2) b (in m); 3) β (in Grad); 4) A (in m²).

Allgemeine Lösung:

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
$a = c \cdot \sin\alpha$

2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$b = c \cdot \cos\alpha$

3) $\beta = 90° - \alpha$

4) $A = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Zahlenmäßige Lösung (unter Verwendung der Tafel der Winkelfunktionswerte und des Rechenstabs):

1) $a = 51{,}90 \cdot \sin 52{,}55° = 51{,}90 \cdot 0{,}7939$
Für den Rechenstab: $a \approx 51{,}9 \cdot 0{,}794 \approx 41{,}2$

2) $b = 51{,}90 \cdot \cos 52{,}55° = 51{,}90 \cdot 0{,}6081$
$\approx 51{,}9 \cdot 0{,}608 \approx 31{,}6$

3) $\beta = 90° - 52{,}55° = 37{,}45°$

4) $A = \frac{1}{2} \cdot 51{,}90^2 \cdot \sin 52{,}55° \cdot \cos 52{,}55°$

$= \frac{1}{2} \cdot 51{,}90^2 \cdot 0{,}7939 \cdot 0{,}6081$

$\approx 26{,}0 \cdot 51{,}9 \cdot 0{,}794 \cdot 0{,}608 \approx 650$

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = 41{,}2$ m	$\alpha = 52{,}55°$	$A = 650$ m²
$b = 31{,}6$ m	$\beta = 37{,}45°$	
$c = 51{,}9$ m	$\gamma = 90°$	

Die Dreieckfläche hätte, nachdem a und b berechnet worden sind, auch kürzer durch $A = \frac{1}{2}ab$ bestimmt werden können. Darauf wurde hier verzichtet, weil dadurch etwaige bei a und b aufgetretene Ungenauigkeiten oder Fehler in die Berechnung von A eingehen würden. Um das zu vermeiden, geht man bei jeder Teilberechnung möglichst immer wieder auf die gegebenen Stücke zurück.

7 Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die beiden Katheten a und b gegeben. Die Hypotenuse, die spitzen Winkel und der Flächeninhalt dieses Dreiecks sind zu berechnen (4. Fall der obigen Zusammenstellung).

Gegeben: $a = 12$ dm; $b = 5$ cm

Gesucht: c, α, β, A (in den entsprechenden Maßeinheiten)

Allgemeine Lösung:

1) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Satz des PYTHAGORAS)

2) $\tan\alpha = \cot\beta = \frac{a}{b}$ (Komplementbeziehung)

3) $A = \frac{1}{2} a \cdot b$ [Zu 2) und 3) vgl. Bemerkung am Ende von Beispiel 3/6.]

Zahlenmäßige Lösung:

1) $c = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

2) $\tan\alpha = \cot\beta = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$\alpha \approx 67{,}38°; \quad \beta \approx 22{,}62°$

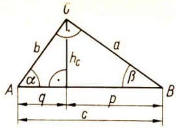
3) $A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = 12$ dm	$\alpha = 67{,}38°$	
$b = 5$ dm	$\beta = 22{,}62°$	$A = 30$ dm²
$c = 13$ dm	$\gamma = 90°$	

Das rechtwinklige Dreieck wird durch die Höhe zur Hypotenuse in zwei Teildreiecke zerlegt, die wieder rechtwinklig sind. Infolgedessen können auch Berechnungen durchgeführt werden, wenn die diese Teildreiecke bestimmenden Stücke (Höhe h_c; Hypotenusenabschnitte p und q; Bild 3/21) gegeben sind. Dabei müssen mitunter auch Höhen- und Kathetensatz des rechtwinkligen Dreiecks verwendet werden.

(15) Berechnen Sie die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem gegeben sind: $p = 4$ cm; $q = 5$ cm!



3/21

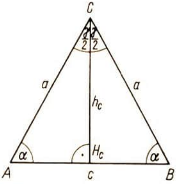
Rechtwinklige Dreiecke entstehen auch noch durch Zerlegungen mancher anderer Figuren, z. B. Rechtecke, Rhomben. Diese werden dadurch auch der Berechnung durch Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken zugänglich.

Aufgaben 3/20 bis 3/21

3.2.3. Berechnungen am gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieck

Das gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse, die zugleich die Höhe h_c auf der Grundseite c ist, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt (Bild 3/22). Da man dadurch die Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks auf die eines rechtwinkligen Dreiecks zurückführen kann, genügen zwei Stücke, um die fehlenden Stücke und den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen. Beschränken wir uns auf Basis, Schenkel und einen der Winkel als gegebene Stücke, so können diese in folgender Zusammenstellung auftreten:

1. Die Basis und ein Winkel,
2. der Schenkel und ein Winkel,
3. die Basis und der Schenkel.



3/22

8 Von einem gleichschenkligen Dreieck ist der Schenkel a und der Winkel γ an der Spitze gegeben. Seine anderen Seiten und Winkel sowie der Flächeninhalt A sind zu berechnen (2. Fall der obigen Zusammenstellung).

Gegeben: $a = 15{,}2$ cm; $\gamma = 76{,}8°$

Gesucht: **1)** α (in Grad); **2)** c (in cm); **3)** A (in cm²).

Allgemeine Lösung:

1) $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$

2) $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} : a = \frac{c}{2a}$

$$c = 2a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

3) $A = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$ (Zusammensetzung der Fläche aus den Flächen der beiden Teildreiecke)

$$A = a^2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$

Zahlenmäßige Lösung:

1) $\alpha = 90° - 38{,}4° = 51{,}6°$

2) $c = 2 \cdot 15{,}2 \cdot \sin 38{,}4° = 2 \cdot 15{,}2 \cdot 0{,}6211$
$\approx 30{,}4 \cdot 0{,}621 \approx 18{,}9$

3) $A = 15{,}2^2 \cdot \sin 38{,}4° \cdot \cos 38{,}4°$
$= 15{,}2^2 \cdot 0{,}6211 \cdot 0{,}7837$
$\approx 15{,}2 \cdot 15{,}2 \cdot 0{,}621 \cdot 0{,}784 \approx 112$

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = b = 15{,}2$ cm $\qquad \alpha = \beta = 51{,}6°$ $\qquad A = 112\ \text{cm}^2$
$c = 18{,}9$ cm $\qquad \gamma = 76{,}8°$

Gleichschenklige Dreiecke kommen bei Zerlegungen auch an vielen anderen Figuren vor, z. B. bei Quadraten, Rhomben, Rechtecken, so daß auch an diesen Figuren Berechnungen möglich werden.

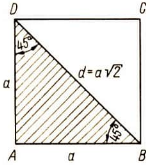
9 Eine Diagonale zerlegt das Quadrat in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke (Bild 3/23). In jedem dieser Dreiecke kann man die Winkelfunktionswerte zum Argument 45° leicht bestimmen.
Es ergibt sich:

$$\sin 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7071$$

$$\cos 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7071$$

$$\tan 45° = a : a = 1$$

$$\cot 45° = a : a = 1$$



3/23

Auch gleichseitige Dreiecke gehören zu den gleichschenkligen Dreiecken und werden durch jede Höhe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt (Bild 3/24).

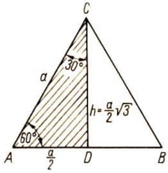
10 Durch Überlegungen am gleichseitigen Dreieck lassen sich die Winkelfunktionswerte für die Argumente 30° und 60° leicht bestimmen. Es ergibt sich (Bild 3/24) unter Anwendung der Komplementbeziehung:

$$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2} = \cos 60°$$

$$\cos 30° = h : a = \frac{a}{2}\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°$$

$$\tan 30° = \frac{a}{2} : h = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \cot 60°$$

$$\cot 30° = h : \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \frac{a}{2} = \sqrt{3} = \tan 60°$$



3/24

(16) Stellen Sie in einer Tabelle die Werte der vier Winkelfunktionen für die Argumente 0°, 30°, 45°, 60°, 90° zusammen!

Aufgaben 3/22 bis 3/25

3.2.4. Sachaufgaben

Bei vielen Anwendungsaufgaben in Geometrie, Physik und Technik ergeben sich Berechnungen unter Einbeziehung auftretender Winkel. Sehr häufig lassen sich dabei rechtwinklige oder gleichschenklige Dreiecke finden, an denen dann die Berechnungen wie in Abschnitt 3.2.2. und 3.2.3. durchgeführt werden können. Das Erkennen des mathematisch Wesentlichen ist, wie bei allen Sachaufgaben (vgl. Abschnitt 2.2.3.), der erste und wichtigste Schritt beim Lösen des Problems.

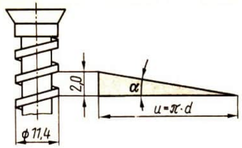
11 Welchen Anstiegswinkel hat eine Schraube mit metrischem Gewinde, deren Gewindedurchmesser $d = 11{,}4$ mm und deren Ganghöhe $h = 2{,}0$ mm beträgt?

Lösung: Aus Bild 3/25 ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\pi d}$$

$$\tan\alpha = \frac{2{,}0\ \text{mm}}{\pi \cdot 11{,}4\ \text{mm}}$$

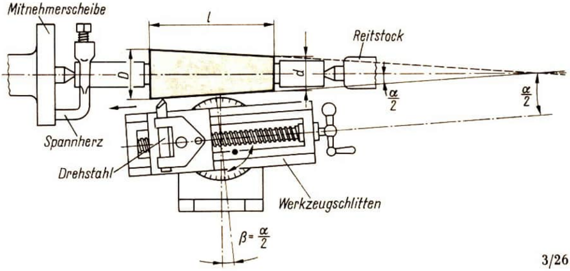
Mit Hilfe des Rechenstabs berechnet man $\tan\alpha = 0{,}0559$. Aus der Tafel ergibt sich $\alpha = 3{,}2°$.



3/25

Ergebnis: Die Schraube hat einen Anstiegswinkel von 3,2°.

12 Konische Zapfen (auch Kegelzapfen oder kurz „Kegel" genannt) können auf der Drehmaschine durch Schrägstellen des Oberteils am verschiebbaren Werkzeugschlitten, des sog. Längssupports, gedreht werden. Der Einstellwinkel β des Längssupports hängt vom Kegelwinkel α ab; es ist $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (Bild 3/26).



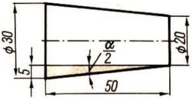
3/26

Aufgabe: Der in Bild 3/27 dargestellte Bolzen soll gedreht werden. Wie groß sind Supporteinstellwinkel und Kegelwinkel?

Lösung: Aus Bild 3/27 ergibt sich:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2} : l = \frac{D-d}{2l}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{30-20}{2\cdot 50} = \frac{1}{10} = 0{,}1000$$



3/27

Aus der Tafel ergibt sich $\frac{\alpha}{2} = 5{,}71°$ und damit $\alpha = 11{,}42°$.

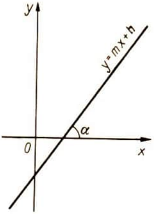
Ergebnis: Der Supporteinstellwinkel beträgt rund 5,7° und der Kegelwinkel etwa 11,4°.

13 Das Bild der Funktion $y = mx + b$ $(m \neq 0)$ ist eine Gerade, die die x-Achse unter einem Winkel α schneidet. Dieser hängt vom Anstieg m ab.

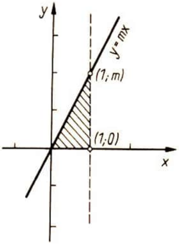
a) Welche Beziehung besteht zwischen m und α (Bild 3/28)?
Es wird festgelegt, daß α vom positiven Teil der x-Achse aus im mathematisch positiven Drehsinn gemessen werden soll $(0° \leq \alpha < 180°)$. Da die Bilder aller Funktionen $y = mx + b$ mit festem Anstieg m, aber variablem b untereinander parallele

Geraden, also solche mit demselben Neigungswinkel α sind, kann die Lösung mit Hilfe der Funktion $y = mx$ ($b = 0$) erfolgen, deren Bild durch den Koordinatenursprung verläuft (Bild 3/29). Aus dem schraffierten Steigungsdreieck ergibt sich sofort:

$$\tan \alpha = \frac{m}{1} = m$$



3/28



3/29

b) Unter welchem Winkel schneidet das Bild der Funktion $y = 3x - 2$ die x-Achse?
Lösung: $\tan \alpha = 3$; $\alpha \approx 71{,}6°$

c) Begründen Sie mit Hilfe der Trigonometrie, warum das Bild von $y = mx$ für $m > 0$ durch die Quadranten I und III, für $m < 0$ durch II und IV verläuft!

Aufgaben 3/26 bis 3/48

4. Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen

4.1. Quadratische Funktionen

4.1.1. Die quadratische Funktion $y = x^2$

1 **DEFINITION: Eine Funktion f heißt eine Funktion zweiten Grades, wenn es reelle Zahlen a, b c mit $a \neq 0$ gibt, so daß für alle Argumente x aus dem Definitionsbereich gilt:**

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Es heißen:

$y = ax^2 + bx + c$	die allgemeine Form der Gleichung einer quadratischen Funktion,
ax^2; bx; c	(in dieser Reihenfolge) das quadratische, das lineare, das absolute Glied der Gleichung.

a, b und c sind Parameter, die beliebige Werte (reelle Zahlen) annehmen können mit der Ausnahme, daß a nicht Null sein darf.

Außer der Funktionsgleichung ist noch der Definitionsbereich der Funktion anzugeben, weil erst dadurch die Funktion eindeutig charakterisiert ist. Meint man den größtmöglichen Definitionsbereich (bei der hier behandelten quadratischen Funktion

$y = ax^2 + bx + c$ ist das die Menge aller reellen Zahlen), so verzichtet man häufig auf diese Angabe. Im vorliegenden Falle und auch bei den nachfolgenden Beispielen ist also die Angabe

Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$; x reelle Zahl

weggelassen worden.

Ist der Definitionsbereich einer Funktion aber eine echte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen, so ist dieser Definitionsbereich zusammen mit der Funktionsgleichung anzugeben (vgl. Übungen 4/1 und 4/2).

Beispiele für quadratische Funktionen:

$y = 3x^2$ $\qquad y = -\frac{1}{10}x^2$ $\qquad y = x^2 - 3$

$y = 2x^2 + 5$ $\qquad y = 3x^2 + 4x - 7$ $\qquad y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \sqrt{2}$

Die **einfachste quadratische Funktion** ergibt sich für $a = 1$; $b = c = 0$:

$y = x^2$

1 **a)** Bilden Sie alle geordneten Paare $[x; y]$, die durch folgende Vorschrift festgelegt sind:

$y = x^2$; $\quad x \in \{-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 1{,}5; 2\}$!

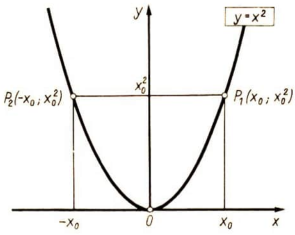
Stellen Sie die durch diese Menge geordneter Paare festgelegte Funktion grafisch dar, indem Sie für die Einheiten auf den Koordinatenachsen jeweils 2 cm wählen!

b) Verbinden Sie die gezeichneten Punkte mit Hilfe des Lineals. Weisen Sie nach, daß der so entstandene Streckenzug nicht das Bild der Funktion $y = x^2$ für beliebige Argumente x im Definitionsbereich $-2 \leqq x \leqq 2$ ist, indem Sie dazu weitere Zahlenpaare $\left(\text{z. B. für } x = -\frac{1}{4} \text{ und } x = +\frac{1}{4}\right)$ bestimmen und diese in der gleichen Zeichnung grafisch darstellen!

Durch Vergrößerung der Anzahl der gezeichneten Punkte nähert sich der Streckenzug mehr und mehr einer gekrümmten Kurve, die das endgültige Bild der Funktion $y = x^2$ ist (Bild 4/1). Diese Kurve trägt den Namen **quadratische Parabel** (kurz: **Parabel**).

2 Zeichnen Sie in vergrößertem Maßstab das Bild einer quadratischen Parabel $y = x^2$ für den Definitionsbereich $-1 \leqq x \leqq +1$ unter Bestimmung möglichst vieler Kurvenpunkte, um den Verlauf der Kurve in unmittelbarer Umgebung des Koordinatenursprungs festzustellen!

4/1



Aus Bild 4/1 entnehmen wir:

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß zu einander entgegengesetzten Argumenten x_0 und $-x_0$ die gleichen Funktionswerte gehören.

Die Funktionswerte erhalten wir entsprechend der Gleichung $y = x^2$, indem wir die x-Werte jeweils quadrieren, also

$x_0 \to x_0^2; \qquad -x_0 \to (-x_0)^2 = x_0^2.$

Funktionen, für die gilt $f(-x) = f(x)$ für jedes x, heißen **gerade Funktionen.** Die quadratische Funktion $y = x^2$ ist also eine gerade Funktion.

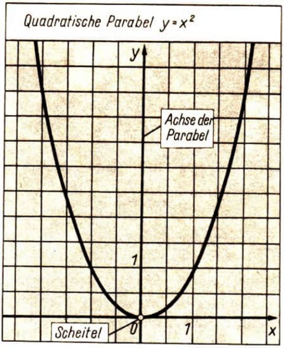
Der auf der Symmetrieachse gelegene Punkt der Parabel, der also im vorliegenden Fall mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, heißt der **Scheitelpunkt** (kurz: **Scheitel**). Die Symmetrieachse wird auch kurz **Achse der Parabel** genannt.

Der zum größtmöglichen Definitionsbereich $-\infty < x < +\infty$; x reell, der Funktion $y = x^2$ gehörende Wertevorrat ist auf nichtnegative reelle Zahlen beschränkt:

$0 \leqq y < +\infty$; y reell.

(3) Beweisen Sie, daß im Wertevorrat von $y = x^2$ $(-\infty < x < +\infty$; x reell) keine negativen Zahlen vorkommen können!

(4) Fertigen Sie sich entsprechend Bild 4/2 unter Angabe von Scheitel und Achse eine Schablone für das Bild der Funktion $y = x^2$ mit der Maßeinheit 1 cm an!



4/2

Aufgaben 4/1 bis 4/6

4.1.2. Die quadratischen Funktionen $y = x^2 + e$

(5) Die Funktionen $y = f_1(x) = x^2 + 3$ und $y = f_2(x) = x^2 - 2$ sind zu untersuchen.

a) Stellen Sie je eine Wertetafel im Bereich $-2 \leqq x \leqq +2$ nach folgenden Mustern auf!

x	-2	$-\frac{3}{2}$	...
$y = x^2$	4	$\frac{9}{4}$	...
$y = x^2 + 3$	7	$\frac{21}{4}$	...

x	-2	$-\frac{3}{2}$	...
$y = x^2$	4	$\frac{9}{4}$	...
$y = x^2 - 2$	2	$\frac{1}{4}$	...

b) Zeichnen Sie in ein und dasselbe Koordinatensystem unter Verwendung der Schablone für den angegebenen Bereich zunächst das Bild von $y = x^2$ und dann die Bilder von $y = x^2 + 3$ und $y = x^2 - 2$ mit Hilfe der Wertetafel!

c) Welche Koordinaten haben die Scheitelpunkte?

d) Wird die x-Achse von einem der Bilder geschnitten, d. h., hat eine der Funktionen Nullstellen?

Allgemein gilt:

Die Bilder der Funktionen $y = x^2 + e$ mit beliebigem e sind dem Bild der Funktion $y = x^2$ kongruent, also auch quadratische Parabeln. Sie sind gegenüber jenem in Richtung der y-Achse verschoben, so daß die y-Achse nach wie vor Symmetrieachse ist. Der Scheitel hat die Koordinaten $(0; e)$. Für $e > 0$ besitzt die Funktion keine Nullstellen, für $e < 0$ aber zwei Nullstellen, nämlich $x_0 = \pm\sqrt{-e}$. Die Funktion $y = x^2$ besitzt genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = 0$.

(6) Beweisen Sie die Richtigkeit der obigen Behauptung bezüglich der Nullstellen!

Der größtmögliche Definitionsbereich der Funktionen $y = x^2 + e$ ist unbeschränkt: $-\infty < x < +\infty$; x reell.

Ihr Wertevorrat aber ist beschränkt: $e \leqq y < +\infty$; y reell.

Aufgaben 4/7 bis 4/14

4.1.3. Die quadratischen Funktionen $y = (x + d)^2$

(7) Die Funktionen $y = f_1(x) = (x - 3)^2$ und $y = f_2(x) = (x + 4)^2$ sind zu untersuchen.

a) Stellen Sie je eine Wertetafel nach folgenden Mustern auf!

$0 \leqq x \leqq 6$

x	0	...
$x - 3$	-3	...
$y = (x - 3)^2$	9	...

$-7 \leqq x \leqq -1$

x	-7	...
$x + 4$	-3	...
$y = (x + 4)^2$	9	...

b) Zeichnen Sie für die angegebenen Bereiche die Bilder dieser beiden Funktionen mit Hilfe der Wertetafel und zusätzlich das Bild der Funktion $y = x^2$ unter Verwendung der Schablone in ein und dasselbe Koordinatensystem!

c) Welche Koordinaten haben die Scheitelpunkte?

d) Haben die Funktionen Nullstellen?

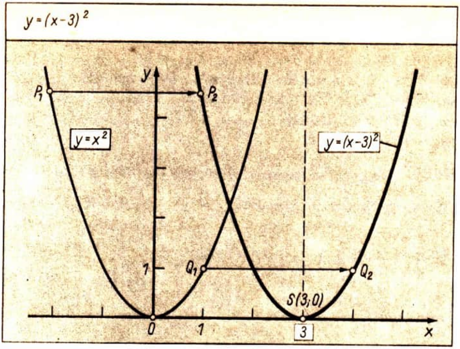
e) Welchen Argumenten wird der Funktionswert 4 zugeordnet
α) durch $y = x^2$, **β)** durch $y = (x - 3)^2$, **γ)** durch $y = (x + 4)^2$?

Es sei x_1 ein beliebiges Argument. Der Funktionswert der Funktion $f(x) = x^2$ an dieser Stelle ist $f(x_1) = x_1^2$. Den gleichen Funktionswert x_1^2 erhalten wir bei der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ für das Argument $x_1 + 3$, denn es gilt

$f_1(x_1 + 3) = (x_1 + 3 - 3)^2 = x_1^2$.

Für die Bilder dieser Funktionen bedeutet das: Das Bild der Funktion $f_1(x) = (x - 3)^2$ ist der Parabel $y = x^2$ kongruent. Man erhält dieses Bild, indem man die Parabel $y = x^2$ um drei Einheiten in der positiven Richtung der x-Achse verschiebt. Im Bild 4/3 sind für zwei Punkte der Parabel $y = x^2$ die Pfeile eingezeichnet, die zu dieser Verschiebung gehören.
Der Scheitel der Parabel $y = (x - 3)^2$ ist der Punkt S mit den Koordinaten $(3; 0)$, die Achse ist eine Parallele zur y-Achse durch diesen Scheitel.

Für Funktionen $f(x) = (x + d)^2$ mit beliebigem d gilt allgemein:



4/3

Für ein beliebiges Argument x_1 hat die Funktion $y = x^2$ den Funktionswert $y_1 = x_1^2$. Den gleichen Funktionswert haben alle Funktionen $f(x) = (x + d)^2$ für das Argument $x_1 - d$; denn es gilt $(x_1 - d + d)^2 = x_1^2$.

Daraus folgt:

Die Bilder der Funktionen $f(x) = (x + d)^2$ sind Parabeln, die der Parabel $y = x^2$ kongruent sind. Die Scheitelkoordinaten sind $(-d;\ 0)$. Die Achsen sind Parallelen zur y-Achse im Abstand $|d|$. Man erhält die Parabeln $y = (x + d)^2$ durch Verschiebung der Parabel $y = x^2$ um $|d|$ Einheiten parallel zur x-Achse. Die Verschiebung erfolgt in der positiven (negativen) Richtung der x-Achse, wenn $d < 0$ $(d > 0)$ ist. Die Funktionen besitzen alle genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = -d$.
Der größtmögliche Definitionsbereich der Funktionen ist unbeschränkt:
$-\infty < x < +\infty$; x reell.
Der Wertevorrat ist beschränkt: $0 \leqq y < +\infty$; y reell.

Aufgaben 4/15 bis 4/19

4.1.4. Die quadratischen Funktionen $y = x^2 + px + q$

8 Die Funktion $y = (x - 3)^2 - 2$ ist zu untersuchen.

a) Stellen Sie eine Wertetafel auf im Bereich $0 \leqq x \leqq 6$!

b) Zeichnen Sie mit Hilfe dieser Wertetafel das Bild der Funktion und in dasselbe Koordinatensystem die Bilder der Funktionen $y = x^2$, $y = x^2 - 2$ (vgl. Übung 4/5) und $y = (x - 3)^2$ (vgl. Übung 4/7)!

c) Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt?

d) Hat die Funktion Nullstellen?

Offenbar ergibt sich das Bild der Funktion $y = (x - 3)^2 - 2$, wenn das Bild der Funktion $y = x^2$ zwei Verschiebungen unterworfen wird: einmal um 3 Einheiten in der positiven Richtung der x-Achse wie beim Bild der Funktion $y = (x - 3)^2$ und zweitens um 2 Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse wie beim Bild der Funktion $y = x^2 - 2$. Der Scheitel hat dann die Koordinaten $(3;\ -2)$.

Allgemein gilt:

Die Bilder der Funktionen $y = (x + d)^2 + e$ sind dem Bild der Funktion $y = x^2$ kongruent, also auch quadratische Parabeln. Sie sind gegenüber jenem sowohl in Richtung der y-Achse als auch in Richtung der x-Achse verschoben. Der Scheitel hat die Koordinaten $(-d; e)$. Die Achsen sind Parallelen zur y-Achse im Abstand $|d|$. Sie liegen für $d < 0$ $(d > 0)$ nach der positiven (negativen) Seite der x-Achse verschoben. Die Funktionen besitzen für $e < 0$ zwei Nullstellen, für $e = 0$ nur eine Nullstelle, für $e > 0$ keine Nullstellen.
Der größtmögliche Definitionsbereich ist unbeschränkt: $-\infty < x < +\infty$, x reell, der Wertevorrat aber beschränkt: $e \leqq y < +\infty$, y reell.

Die Funktion

(1) $y = (x - 3)^2 - 2$

ist mit der Funktion

(2) $y = x^2 - 6x + 7$

identisch, denn es gilt $(x - 3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7$.

Die Gleichung (2) entspricht der Form

$\boldsymbol{y = x^2 + px + q}$ (mit $p = -6$; $q = +7$).

Diese Form heißt die **Normalform der Gleichung der quadratischen Funktion.**

Während man aber aus (1) sofort die Lage des Bildes der Funktion im Koordinatensystem erkennen kann [Koordinaten des Scheitels: $(3; -2)$], ist das bei der Normalform (2) nicht möglich. Deshalb ist es nötig, aus der Normalform $y = x^2 + px + q$ die Form $y = (x + d)^2 + e$ herzustellen. Das geschieht dadurch, daß man zu $x^2 + px$ die quadratische Ergänzung bildet (vgl. Abschnitt 1.2.4.) und diese auf der rechten Seite der Normalform einmal addiert und einmal subtrahiert:

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} + q$$

bzw. unter Zusammenfassung zum vollständigen Quadrat:

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$$

Das entspricht der Form

$$y = (x + d)^2 + e \quad \text{mit} \quad d = \frac{p}{2}; \quad e = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Die Koordinaten des Scheitels der Parabel $y = x^2 + px + q$ sind also

$$\left(-\frac{p}{2}; \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right]\right).$$

Infolgedessen gelten alle oben für die Funktion $y = (x + d)^2 + e$ gemachten Feststellungen sinngemäß auch für die Funktion $y = x^2 + px + q$. Insbesondere gilt:

2 **SATZ: Eine Funktion $y = x^2 + px + q$ hat**

2 Nullstellen, wenn $\left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] < 0$ oder $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$,

1 Nullstelle, wenn $\left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = 0$ oder $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$,

keine Nullstelle, wenn $\left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] > 0$ oder $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$.

1 Wie lauten die Koordinaten des Scheitels der Parabel $y = x^2 + 5x + 4$? Hat die Funktion Nullstellen?
Es ist $p = 5$; $q = 4$.
Also ergibt sich

$$x_s = -\frac{p}{2} = -\frac{5}{2}; \quad y_s = \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = 4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$S\left(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

Die Funktion besitzt 2 Nullstellen.

9 Zeichnen Sie das Bild der in Beispiel 4/1 untersuchten Funktion mit Hilfe einer Wertetafel, und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der vorstehend ermittelten Ergebnisse!

Aufgaben 4/20 bis 4/27

4.1.5. Die quadratischen Funktionen $y = ax^2 + bx + c$

Der wesentliche Unterschied gegenüber den bisher besprochenen quadratischen Funktionen liegt darin, daß das quadratische Glied einen Koeffizienten $a \neq 1$ (und $a \neq 0$) enthält. Sein Einfluß auf die Gestalt des Bildes der Funktion wird zunächst am einfachsten Fall $y = ax^2$ untersucht.

10 Im Bild 4/4 sind die Funktionen $y = ax^2$ für die Werte -2; -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2 des Parameters a grafisch dargestellt.
Überzeugen Sie sich an Hand dieser Darstellungen von folgenden Tatsachen:
Das Bild der Funktion $y = ax^2$ geht aus dem Bild der Funktion $y = x^2$ durch **Streckung** (wenn $|a| > 1$) oder **Stauchung** (wenn $|a| < 1$) hervor, da die Ordinate jedes Punktes der Parabel $y = x^2$ im gleichen Maße vervielfacht bzw. geteilt wird.

Ist $a < 0$, so muß außerdem eine **Spiegelung** an der x-Achse vorgenommen werden, da die Ordinaten aller Punkte der Parabel $y = x^2$ durch die Multiplikation mit $a < 0$ das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten.

Die Bilder der Funktionen $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ heißen auch für $a \neq 1$ **quadratische Parabeln.**

Jede quadratische Funktion

(1) $y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

läßt sich auch durch

$$y = f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

bzw. durch

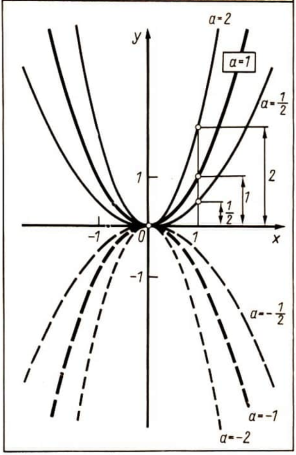
(2) $y = f(x) = a(x^2 + px + q)$

mit $p = \dfrac{b}{a}$ und $q = \dfrac{c}{a}$

darstellen.

Wird $x^2 + px + q = g(x)$ gesetzt, so ist $f(x) = a \cdot g(x)$. Das besagt aber, daß mit den Ordinaten aller Punkte der Parabel $y = x^2 + px + q = g(x)$ das gleiche geschieht, was für $y = ax^2$ mit den Ordinaten aller Punkte der Parabel $y = x^2$ geschah und dabei zu einer Stauchung, Streckung oder Spiegelung führte. Da aber die Bilder von $y = x^2$ und $y = x^2 + px + q = g(x)$ kongruente Parabeln sind, ist auch das Ergebnis der Multiplikation mit dem Faktor a das gleiche.

Die Schar $y = ax^2$



4/4

Ist in

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot g(x)$$

$$= a(x^2 + px + q) \quad \text{mit} \quad p = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{a}$$

$|a| > 1$, so werden die Ordinaten aller Punkte der zur Funktion g gehörenden Parabel im Verhältnis $a:1$ vergrößert (**Streckung** in Richtung der y-Achse). Man erhält eine Parabel, die steiler verläuft als die Parabel $y = g(x)$, d. h. als die Parabel $y = x^2$.
Ist $0 < |a| < 1$, so werden die Ordinaten aller Punkte der zur Funktion g gehörenden Parabel im Verhältnis $a:1$ verkleinert (**Stauchung** in Richtung der y-Achse). Man erhält eine Parabel, die flacher verläuft als die Parabel $y = x^2$.
Ist $a < 0$, so wird nach der Streckung bzw. Stauchung der zur Funktion g gehörenden Parabel noch eine **Spiegelung** an der x-Achse erforderlich.
Eine Verschiebung bewirkt der Faktor a nicht, so daß die Bilder der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleiche Achsen haben.

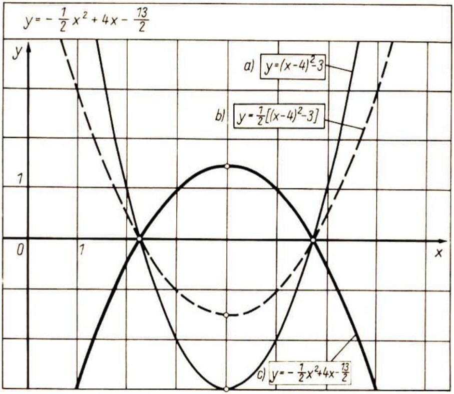
2 Das Bild der Funktion $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - \dfrac{13}{2}$ ist zu zeichnen.

1. Wir formen die Gleichung wie folgt um:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 13) = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 16 + 13)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}[(x-4)^2 - 3]$$

2. a) Wir zeichnen das Bild der Funktion $g(x) = (x - 4)^2 - 3$ mit Hilfe der Schablone; der Scheitel ist $S\ (4; -3)$.
   b) Die Ordinaten aller Punkte der Parabel $y = (x - 4)^2 - 3$ werden im Verhältnis $1:2$ verkleinert (d. h.: sie werden halbiert).
   c) Die so erhaltene Parabel wird an der x-Achse gespiegelt (Bild 4/5).



4/5

> **Zusammenfassung:**
> Jede quadratische Funktion mit der allgemeinen Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ hat als Bild eine quadratische Parabel, die gegebenenfalls durch Stauchung, Streckung, Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung in Richtung der x- und y-Achse aus dem Bild der Funktion $y = x^2$ entwickelt werden kann. Die Achse verläuft in jedem Fall parallel zur y-Achse. Der größtmögliche Definitionsbereich ist stets unbegrenzt: $-\infty < x < +\infty$. Auf welchen Bereich der Wertevorrat beschränkt ist und ob die Funktion Nullstellen hat, richtet sich jeweils nach den Parametern a, b, c. Auch die Lage des Scheitels ist von den Parametern abhängig.

Aufgaben 4/28 bis 4/35

4.2. Quadratische Gleichungen

4.2.1. Bestimmen der Nullstellen quadratischer Funktionen

In Abschnitt 2.1.5. wurden die Nullstellen einer Funktion als die Argumente x_0 definiert, denen der Funktionswert $y_0 = f(x_0) = 0$ zugeordnet ist. In der grafischen Darstellung der Funktion zeigen sich die Nullstellen als Abszisse der Schnittpunkte des Funktionsbildes mit der x-Achse.

Um die Nullstellen der quadratischen Funktion

$y = ax^2 + bx + c$

zu bestimmen, ist $y_0 = 0$ zu setzen, und es ergibt sich

$0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

Solche Gleichungen heißen **quadratische Gleichungen.**

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0}$ heißt **allgemeine Form der quadratischen Gleichung.**

Nach Division beider Seiten durch a ($a \neq 0$) ergibt sich

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, oder, falls $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ gesetzt wird, $x^2 + px + q = 0$.

$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ heißt **Normalform der quadratischen Gleichung.**

Hieraus ergeben sich **Sonderfälle** für

$p = 0$: $\boldsymbol{x^2 + q = 0}$ heißt **reinquadratische Gleichung**

$q = 0$: $\boldsymbol{x^2 + px = 0}$ heißt **quadratische Gleichung ohne Absolutglied**

Zur Unterscheidung von diesen Sonderfällen werden die allgemeine Form und die Normalform mitunter auch **gemischt-quadratische Gleichungen** genannt.

4.2.2. Die reinquadratische Gleichung

Die reinquadratische Gleichung $x^2 - 9 = 0$ können wir äquivalent umformen in

$(x - 3)(x + 3) = 0$.

Durch diese Umformung ist die Summe $x^2 - 9$ in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren zerlegt worden.
Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann gleich Null ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich Null ist, können wir sagen:

Es gilt $(x - 3)(x + 3) = 0$ genau dann, wenn $x - 3 = 0$ oder $x + 3 = 0$.
Statt dessen können wir auch sagen:

Es gilt $(x - 3)(x + 3) = 0$ genau dann, wenn $x = 3$ oder $x = -3$.

Die Gleichung $(x - 3)(x + 3) = 0$, die selbst äquivalent mit $x^2 - 9 = 0$ ist, ist also äquivalent mit $x = 3$ und $x = -3$.
Man sagt dafür: Die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ hat die beiden **Lösungen** $x = 3$ und $x = -3$.
Man bezeichnet die Lösungen mit „x_1" und „x_2" (die Reihenfolge ist willkürlich) und schreibt:

$x_1 = 3;\ x_2 = -3$ oder kürzer:

$x_{1/2} = \pm 3$ (gelesen: x eins, zwei gleich plus bzw. minus drei).

11 Welche Lösung hat die Gleichung $x^2 = 0$?

12 Warum hat die Gleichung $x^2 + 9 = 0$ keine reellen Lösungen?

Die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ kann man auch folgendermaßen lösen:

Es ist $x^2 - 9 = 0$ äquivalent mit $\quad x^2 = 9.$

Diese Gleichung ist äquivalent mit $\quad \sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

bzw. mit $\quad |x| = 3.$

Demnach hat die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ die Lösungen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.

3 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + q = 0$ hat für $q < 0$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = \sqrt{-q}$ und $x_2 = -\sqrt{-q}$.**
Ist $q = 0$, hat die Gleichung die Lösung $x = 0$.
Für $q > 0$ existieren keine Lösungen im Bereich der reellen Zahlen.

Beweis: Es sei $q \leqq 0$. Wir setzen $q = -r$ $(r \geqq 0)$ und erhalten $x^2 - r = 0$.

Wegen $r = \sqrt{r} \cdot \sqrt{r}$ ist diese Gleichung äquivalent mit $(x - \sqrt{r})(x + \sqrt{r}) = 0$.
Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1 = \sqrt{r}$ und $x_2 = -\sqrt{r}$. Mit $r = -q$ $(-q \geqq 0)$ folgt: $x_1 = \sqrt{-q}$ und $x_2 = -\sqrt{-q}$.
Für $q = 0$ folgt sofort: $x_1 = \sqrt{-0} = 0$; $x_2 = -\sqrt{-0} = 0$.
Ist hingegen $q > 0$, so ist $-q < 0$. Die Quadratwurzel aus negativen Zahlen ist aber keine reelle Zahl z, da für jedes reelle z gilt: $z^2 > 0$, also $z^2 \neq -q$.

Dieses Ergebnis stimmt überein mit den Untersuchungen der Funktion $y = x^2 + e$ in 4.1.2. in bezug auf die Nullstellen, die ja die Lösungen der entsprechenden Gleichung $x_0^2 + e = 0$ sind. Dort wurde festgestellt, daß es

2 Nullstellen, also 2 Lösungen, für $e < 0$,
1 Nullstelle, also 1 Lösung, für $e = 0$,
keine Nullstellen, also keine Lösungen, für $e > 0$ gibt.
In der jetzt untersuchten reinquadratischen Gleichung $x^2 + q = 0$ ist das gleiche Ergebnis für q (statt für e) erhalten worden.

3 a)
$$\begin{aligned}
(2x + 6)^2 + (4x - 3)^2 &= 125\\
4x^2 + 24x + 36 + 16x^2 - 24x + 9 - 125 &= 0\\
x^2 - 4 &= 0\\
(x + 2)(x - 2) &= 0\\
x_1 = 2 \qquad x_2 &= -2
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{x + a}{x - a} + \dfrac{x - a}{x + a} = \dfrac{34}{15} \qquad (x \neq a;\ x \neq -a;\ a \neq 0)$

Durch äquivalente Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned}
15(x + a)^2 + 15(x - a)^2 &= 34(x^2 - a^2)\\
15(x^2 + 2ax + a^2) + 15(x^2 - 2ax + a^2) &= 34x^2 - 34a^2\\
-4x^2 &= -64a^2\\
x^2 &= 16a^2\\
|x| &= 4|a|\\
x_1 = 4a \qquad x_2 &= -4a
\end{aligned}$$

Wir kontrollieren die Richtigkeit der Rechnung mit Hilfe der Probe, die stets für beide Lösungen an der Ausgangsgleichung durchgeführt werden muß.

$$x_1 = 4a \quad (a \neq 0): \quad \frac{4a + a}{4a - a} + \frac{4a - a}{4a + a} = \frac{5a}{3a} + \frac{3a}{5a} = \frac{5}{3} + \frac{3}{5} = \frac{34}{15}$$

$$x_2 = -4a \ (a \neq 0): \quad \frac{-4a + a}{-4a - a} + \frac{-4a - a}{-4a + a} = \frac{-3a}{-5a} + \frac{-5a}{-3a} = \frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{34}{15}$$

Aufgaben 4/36 bis 4/45

4.2.3. Die quadratische Gleichung ohne Absolutglied

Die Gleichung

$x^2 + px = 0$

formen wir durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors x äquivalent um in das Produkt

$x(x + p) = 0$

und erhalten die Lösungen

$x_1 = 0; \quad x_2 = -p$

4 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + px = 0$ (p reell) hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.**

4 In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Hypotenuse 2 cm länger als die größere Kathete, diese wiederum sei 2 cm länger als die kleinere Kathete. Wie lang sind die Dreieckseiten?
Die Maßzahl der Länge der größeren Kathete werde mit x bezeichnet. Dann erhalten wir für die Maßzahl der Länge

der Hypotenuse $\quad x + 2$,

der kleineren Kathete $\quad x - 2$.

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt

$x^2 + (x - 2)^2 = (x + 2)^2$.

Diese Gleichung formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 4x + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\ x^2 - 8x &= 0 \\ x(x - 8) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$.

Die Lösung $x_1 = 0$ scheidet aus, da die Maßzahl der Länge einer Dreieckseite nicht Null sein kann. Demnach ist $x_2 = 8$ die Maßzahl der Länge der größeren Kathete.

Ergebnis:
Länge der Hypotenuse: 10 cm
Länge der größeren Kathete: 8 cm
Länge der kleineren Kathete: 6 cm

Probe: $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

Aufgaben 4/46 bis 4/47

4.2.4. Die gemischtquadratische Gleichung

Es ist zweckmäßig, zur Ermittlung der Lösungen grundsätzlich die Normalform

$x^2 + px + q = 0$

zu benutzen und deshalb stets die allgemeine Form

$ax^2 + bx + c = 0$

erst durch Division durch a (a ist ja stets $\neq 0$) in die Normalform überzuführen.

5 Es ist die Lösungsmenge von

a) $\frac{1}{3}x^2 - 4x - 8 = 0$ **b)** $-x^2 + 2x + 9 = 0$

zu bestimmen. Dazu wird in die Normalform umgewandelt:

a) $\frac{1}{3}x^2 - 4x - 8 = 0 \;\Big|\; : \frac{1}{3}$

$x^2 - 12x - 24 = 0$

b) $-x^2 + 2x + 9 = 0 \;|: (-1)$

$x^2 - 2x - 9 = 0$

Die Ermittlung der Lösungen der quadratischen Gleichung in der Normalform geschieht mit Hilfe der **quadratischen Ergänzung** nach dem gleichen Prinzip, nach dem in Abschnitt 4.1.4. bei der quadratischen Funktion $y = x^2 + px + q$ zur Ermittlung der Koordinaten des Parabelscheitels verfahren wurde.

6 Die Lösungsmenge von

(1) $x^2 - 2x - 3 = 0$

ist zu bestimmen.

a) Die quadratische Ergänzung zu $x^2 - 2x$ ist 1, und es ergibt sich die zu (1) äquivalente Gleichung

$x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0$ oder

(2) $(x - 1)^2 - 4 = 0.$

Unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ läßt sich (2) äquivalent umformen in

$[(x - 1) - 2] \cdot [(x - 1) + 2] = 0$ bzw. in

(3) $(x - 3)(x + 1) = 0.$

Hieraus können wir sofort die Lösungen ablesen:

$x_1 - 3 = 0$ $x_2 + 1 = 0$

$x_1 = 3$ $x_2 = -1$

b) Von Gleichung (2) an kann auch ein anderer Weg eingeschlagen werden. Diese Gleichung ist auch äquivalent mit

(4) $(x - 1)^2 = 4.$

Die Gleichung (4) ist äquivalent mit

(5) $|x - 1| = 2.$

Nun gilt

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{wenn } x \geqq 1 \\ -(x-1), & \text{wenn } x < 1 \end{cases}$$

Es sei

α) $|x-1| = x-1$

Nach (5) ist dann

$$x - 1 = 2$$

und somit $x_1 = 3$.

Es sei

β) $|x-1| = -(x-1)$

Nach (5) ist dann

$$-(x-1) = 2$$

und somit $x_2 = -1$.

Entsprechend Beispiel 4/6 kann bei jeder quadratischen Gleichung in der Normalform verfahren werden. Um

(1) $x^2 + px + q = 0$

zu lösen, gehen wir folgendermaßen vor:

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + px$ ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Dann ergibt sich die zu (1) äquivalente Gleichung

(2) $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$ oder

(3) $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = 0$.

Wir setzen $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = D$ und erhalten

(4) $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - D = 0$.

Ist $D \geqq 0$, so gilt $D = \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}$,

so daß wir unter Verwendung von $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ die Gleichung (4) äquivalent umformen können in

(5) $\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}\right]\left[\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{D}\right] = 0 \quad (D \geqq 0)$.

Schreibt man (5) noch in der Form

(6) $\left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\right] = 0 \quad (D \geqq 0)$,

so kann man die Lösungen der Gleichung aus (6) sofort ablesen:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \quad (D \geqq 0).$$

Setzt man für D wieder $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ein $\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right]$, so erhält man

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Dafür schreibt man oft kürzer:

$$(7)\quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(7) heißt die **allgemeine Lösungsformel der quadratischen Gleichung**

$$x^2 + px + q = 0, \quad \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right].$$

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, so gilt $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.
Die Gleichung hat dann zwei gleiche Lösungen (Doppellösung).

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, so kann Gleichung (3) für keine reelle Zahl eine wahre Aussage ergeben. Denn dann gilt $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$ und da Gleichung (3) auch als

$$(3^*)\quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = 0$$

geschrieben werden kann, ist ersichtlich, daß hierbei die Summe aus einer nichtnegativen Zahl (1. Summand) und einer positiven Zahl (2. Summand) vorliegt, die stets größer als Null und damit nie gleich Null ist. Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ gibt es also im Bereich der reellen Zahlen keine Lösungen. Damit erhalten wir:

5 **SATZ: Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat genau dann zwei verschiedene reelle Lösungen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ ist. Diese Lösungen sind dann**

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, so hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, so hat die Gleichung im Bereich der reellen Zahlen keine Lösungen.

Der Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = D$ entscheidet also über Art und Anzahl der Lösungen der Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Er heißt die **Diskriminante** der Gleichung.

7 Die Nullstellen der Funktion $y = x^2 - 2x - 3$ sind zu berechnen.
Diese Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Es ist $p = -2 \; \frac{p}{2} = -1$ und $q = -3$.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= 1 + \sqrt{1 + 3}$$
$$x_1 = 3$$

Probe für $x_1 = 3$:

$$3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$$
$$9 - 6 \quad - 3 = 0$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= 1 - \sqrt{1 + 3}$$
$$x_2 = -1$$

Probe für $x_2 = -1$:

$$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$$
$$1 + 2 \quad - 3 = 0$$

Ergebnis: Die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ hat die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

8 $3x^2 - 6\sqrt{2} \cdot x - 3 = 0$ ist zu lösen.

Um die Normalform zu erhalten, dividieren wir die Gleichung durch 3:

$x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - 1 = 0$

Es ist $p = -2\sqrt{2}$, $\frac{p}{2} = -\sqrt{2}$ und $q = -1$.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2+1}$$
$$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}146$$

Probe für $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$:

$$3(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 6\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 3 = 0$$
$$6 + 6\sqrt{6} + 9 - 12 - 6\sqrt{6} - 3 = 0$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= \sqrt{2} - \sqrt{2+1}$$
$$x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \approx -0{,}318$$

Probe für $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$:

$$3(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 6\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 3 = 0$$
$$6 - 6\sqrt{6} + 9 - 12 + 6\sqrt{6} - 3 = 0$$

9 $\frac{a}{x} + \frac{a-b}{x-b} = 2 \quad (x \neq 0,\ x \neq b,\ a \neq 0,\ a \neq b,\ b \neq 0)$

Multiplikation mit $x(x-b)$:

$a(x-b) + x(a-b) = 2x(x-b)$

Auflösen der Klammern und Zusammenfassen:

$$ax - ab + ax - bx = 2x^2 - 2bx$$
$$0 = 2x^2 - 2bx - 2ax + ab + bx$$
$$2x^2 - (2a+b)\,x + ab = 0$$

Normalform: $x^2 - \frac{2a+b}{2}x + \frac{ab}{2} = 0$

Es ist $p = -\frac{2a+b}{2}$, $\frac{p}{2} = -\frac{2a+b}{4}$ und $q = \frac{ab}{2}$.

Lösungen: $$x_{1/2} = \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{4a^2+4ab+b^2}{16} - \frac{8ab}{16}}$$
$$= \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{4a^2-4ab+b^2}{16}}$$
$$= \frac{2a+b}{4} \pm \sqrt{\frac{(2a-b)^2}{16}}$$

$$x_1 = \frac{2a+b}{4} + \frac{|2a-b|}{4}$$

1. *Fall:* $|2a-b| = 2a-b$

$$x_{11} = \frac{2a+b}{4} + \frac{2a-b}{4} = a$$

$$x_2 = \frac{2a+b}{4} - \frac{|2a-b|}{4}$$

1. *Fall:* $|2a-b| = 2a-b$

$$x_{21} = \frac{2a+b}{4} - \frac{2a-b}{4} = \frac{b}{2}$$

2. Fall: $|2a - b| = -(2a - b)$

$$x_{12} = \frac{2a + b}{4} - \frac{2a - b}{4} = \frac{b}{2}$$

2. Fall: $|2a - b| = -(2a - b)$

$$x_{22} = \frac{2a + b}{4} - \frac{-(2a - b)}{4} = a$$

Ist $2a - b \neq 0$, hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = \frac{b}{2}$.

Ist $2a - b = 0$, hat die Gleichung die Lösungen $x_1 = x_2 = \frac{2a + b}{4} = a = \frac{b}{2}$.

Das Lösen von Sachaufgaben führt oft auf quadratische Gleichungen.

10 Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 60\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ senkrecht nach oben geschleudert. In welcher Zeit erreicht er die Höhe **a)** $s_1 = 100\ \mathrm{m}$, **b)** $s_2 = 180\ \mathrm{m}$? (Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt; $g = 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$.)

Lösung: Für den senkrechten Wurf nach oben mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gilt

(1) $s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \quad (t \geqq 0)$.

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Erdbeschleunigung g sind gegebene Konstanten. Wir sollen zu einem vorgegebenen Weg s die zugehörige Zeit t berechnen. Wir bringen die Gleichung (1) zunächst auf die Normalform:

$$\frac{g}{2} t^2 - v_0 t + s = 0$$

$$t^2 - \frac{2v_0}{g} t + \frac{2s}{g} = 0.$$

Es ist $p = -\frac{2v_0}{g}$, $\frac{p}{2} = -\frac{v_0}{g}$ und $q = \frac{2s}{g}$.

Dann ist

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2gs}{g^2}} = \frac{v_0}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gs}.$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

a) für $s_1 = 100$: $t_{1/2} = \frac{60}{10} \pm \frac{1}{10} \sqrt{60^2 - 2 \cdot 10 \cdot 100}$

$$t_{1/2} = 6 \pm \frac{1}{10} \sqrt{1600}$$

$$= 6 \pm \frac{1}{10} \cdot 40$$

$$= 6 \pm 4$$

$$t_1 = 10; \quad t_2 = 2$$

b) für $s_2 = 180$: $t_{1/2} = \frac{60}{10} \pm \frac{1}{10} \sqrt{60^2 - 2 \cdot 10 \cdot 180}$

$$= 6 \pm \frac{1}{10} \cdot 0$$

$$t_1 = t_2 = 6$$

Ergebnis: Der Körper erreicht die Höhe von 100 m erstmalig nach 2 s. Nach 6 s befindet er sich in einer Höhe von 180 m. Dies ist offenbar die größte Höhe, die er erreicht. Er fällt dann zur Erde zurück und befindet sich nach 10 s wieder in der Höhe von 100 m.

Aufgaben 4/48 bis 4/80

4.2.5. Linearfaktoren und Wurzelsatz von VIETA

Im Abschnitt 4.2.4. wurde folgendes gezeigt:

Der Lösungsweg der gemischtquadratischen Gleichung

$x^2 - 2x - 3 = 0$ | $x^2 + px + q = 0$

führt nach Beifügung der quadratischen Ergänzung über die äquivalente Gleichung

$(x - 3)(x + 1) = 0$ | $\left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\right] \cdot \left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\right] = 0$

zu den Lösungen

$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$ | $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$

Folglich kann die gemischtquadratische Gleichung auch geschrieben werden in der Form $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Die Terme $x - x_1$ und $x - x_2$, also

$[x - 3]; \quad [x - (-1)]$ | $\left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\right]; \left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\right]$

heißen die **Linearfaktoren der quadratischen Gleichung.** In ihnen treten die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung als Subtrahenden auf.

(13) Zeigen Sie, daß die Schreibweise der linken Seite der quadratischen Gleichung als Produkt zweier Linearfaktoren $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ auch auf die linken Seiten der
a) reinquadratischen Gleichungen ($x^2 + q = 0$),
b) quadratischen Gleichungen ohne Absolutglied ($x^2 + px = 0$),
c) gemischtquadratischen Gleichungen mit einer Doppellösung
angewendet werden kann!

Aus den vorstehenden Überlegungen ergibt sich folgender Satz:

6 **SATZ: Zu jeder quadratischen Gleichung mit den Lösungen x_1 und x_2 läßt sich eine äquivalente Gleichung mit Hilfe zweier Linearfaktoren in der Form $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ angeben.**

11 Die Summe $x^2 + 6x - 7$ ist in Linearfaktoren zu zerlegen.

1. Weg: Wir ermitteln die Zerlegung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

$$\begin{aligned} x_2 + 6x - 7 &= x^2 + 6x + 9 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16 \\ &= [(x + 3) - 4] \cdot [(x + 3) + 4] \\ &= (x - 1)(x + 7) \end{aligned}$$

2. Weg: Wir lösen die Gleichung $x^2 + 6x - 7 = 0$;

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 + 7}$$
$$x_1 = 1; \quad x_2 = -7$$

Dann folgt aus Satz 4/6 ebenfalls $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$.

Wird in $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0$ das Produkt der Linearfaktoren ausmultipliziert, so ergibt sich, gültig für jede reelle Zahl x,

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 x_2.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Vergleichen der Koeffizienten der linearen Glieder und durch Vergleichen der absoluten Glieder auf der linken und der rechten Seite

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Wenn also x_1 und x_2 die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ sind, so ist ihre Summe gleich $-p$, ihr Produkt gleich q.

Auch die Umkehrung ist richtig: Sind x_1 und x_2 zwei reelle Zahlen, die den Bedingungen $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ genügen, so sind sie die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Beweis:
Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat, da $-p = x_1 + x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$ sein soll, die Form $x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 x_2 = 0$. Sowohl x_1 als auch x_2 „erfüllen diese Gleichung“, d. h. machen sie zu einer wahren Aussage, wovon man sich durch Einsetzen und Zusammenfassen überzeugen kann.

Infolgedessen gilt der

7 **Wurzelsatz von VIETA: Die Zahlen x_1 und x_2 sind dann und nur dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ $\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right]$, wenn gilt**

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Der Name „Wurzelsatz“ rührt daher, daß man früher die Lösungen einer Gleichung auch „Wurzeln dieser Gleichung“ nannte. Der Satz wurde zuerst von dem französischen Mathematiker FRANCOIS VIÈTE (1540–1603) erkannt.

Mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes läßt sich

a) nachprüfen, ob zwei errechnete Lösungen einer quadratischen Gleichung in der Normalform tatsächlich die Lösungen dieser Gleichung sind (Probe);

b) zu vorgegebenen Lösungen einer quadratischen Gleichung die quadratische Gleichung in der Normalform aufstellen.

12 **a)** Können $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = -\frac{6}{7}$ die Lösungen der Gleichung $x^2 + \frac{4}{21}x - \frac{4}{7} = 0$ sein?

Überprüfung: $x_1 + x_2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{7} = -\frac{4}{21} = -p;$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{4}{7} = q.$$

$\frac{2}{3}$ und $-\frac{6}{7}$ sind tatsächlich die Lösungen dieser Gleichung.

b) Es ist die quadratische Gleichung in der Normalform aufzustellen, deren Lösungen $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ sind.

Ermittlung von p und q für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$:

$x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6 = -p$, also $p = -6$

$x_1 \cdot x_2 = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 = q$

Die Gleichung lautet $x^2 - 6x + 7 = 0$.

Aufgaben 4/81 bis 4/83

4.2.6. Zeichnerische Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

I. Die Nullstellen einer quadratischen Funktion

(1) $y = x^2 + px + q$, $\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right]$

sind die Lösungen der Gleichung (2) $x^2 + px + q = 0$

Umgekehrt sind die Lösungen der Gleichung (2) $\left(\text{im Falle } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right)$ die Nullstellen der entsprechenden Funktion (1).

Wir erhalten Näherungswerte für die Lösungen einer quadratischen Gleichung, indem wir das Bild der entsprechenden quadratischen Funktion zeichnen und aus der Zeichnung die Abszissen der gemeinsamen Punkte von Parabel und x-Achse ablesen.

Die Zeichnung der Parabel gelingt am sichersten und schnellsten mit der Parabelschablone, nachdem nach den in Abschnitt 4.1.4. erarbeiteten Methoden die Koordinaten des Scheitels bestimmt worden sind.

13 Die Gleichungen

(1) $x^2 - 5x + \frac{13}{4} = 0$

(2) $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$

(3) $x^2 - 5x + \frac{33}{4} = 0$

sind zeichnerisch zu lösen.

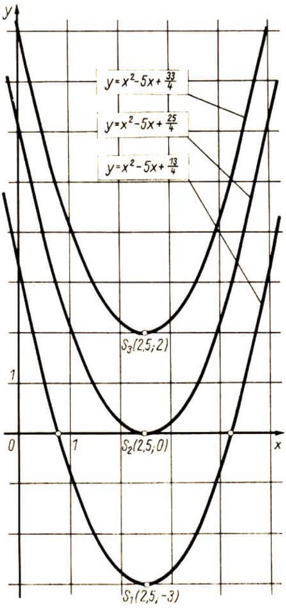
Wir zeichnen die Bilder der Funktionen

$f_1(x) = x^2 - 5x + \frac{13}{4}$

$f_2(x) = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$

$f_3(x) = x^2 - 5x + \frac{33}{4}$ (Bild 4/6)

4/6



mit Hilfe der Schablone und der errechneten Scheitelkoordinaten

$S_1\left(\frac{5}{2}; -3\right)$; $S_2\left(\frac{5}{2}; 0\right)$; $S_3\left(\frac{5}{2}; +2\right)$.

Nun können angenähert die Abszissen der Schnittpunkte von Parabel und x-Achse abgelesen werden.

Ergebnis: Die Gleichung (1) hat die Lösungen $x_1 \approx 0{,}8$ und $x_2 \approx 4{,}2$.

Die Gleichung (2) hat die zweifache Lösung $x = \frac{5}{2}$.

Die Gleichung (3) hat keine reellen Lösungen.

(14) Prüfen Sie diese Ergebnisse mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes nach!

Ob die Parabel die x-Achse schneidet, berührt oder meidet, hängt offenbar von der Ordinate des Scheitels ab:

$y_S = -\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$ [vgl. Abschnitt 4.1.4.]

Anders ausgedrückt: Es hängt davon ab, wie viele Nullstellen die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$ besitzt.

Andererseits ist aber $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ die Diskriminante D, von der die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ abhängt [vgl. Abschnitt 4.2.4.].
Diesen Zusammenhang verdeutlicht folgende Zusammenstellung:

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	$y_s = -\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$	Parabel $y = x^2 + px + q$	Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$	$y_s < 0$	schneidet die x-Achse in zwei verschiedenen Punkten	zwei verschiedene reelle Lösungen
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$	$y_s = 0$	berührt die x-Achse	eine zweifache reelle Lösung
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$	$y_s > 0$	schneidet die x-Achse nicht	keine reellen Lösungen

II. Das in Beispiel 4/13 gezeigte zeichnerische Verfahren zur Bestimmung der Lösungen quadratischer Gleichungen ist zeitaufwendig und mit Ungenauigkeiten behaftet, da für jede Aufgabe eine neue Parabel gezeichnet werden muß. Diese Nachteile vermeidet ein anderes Verfahren, das mit einer fest vorgegebenen Parabel und von Aufgabe zu Aufgabe besonders einzuzeichnenden Geraden arbeitet.

14 Die Gleichung (1) $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$ ist zeichnerisch zu lösen.

Wir stellen um zu der äquivalenten Gleichung (2) $x^2 = -\frac{1}{2}x + 3$.

Jede Seite dieser Gleichung stellt eine Funktion dar,

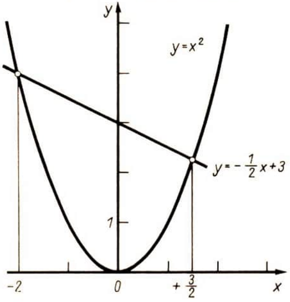
links eine quadratische:

$y = f_1(x) = x^2$

rechts eine lineare:

$y = f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

Da (1) und (2) äquivalent sind, haben sie dieselbe Lösungsmenge.
Eine Lösung x_1, die in (1) eine wahre Aussage ergibt, muß das auch bei (2) ergeben, d. h., es gilt dann $f_1(x_1) = f_2(x_1)$.



4/7

Das bedeutet, daß zu demselben Argument x_1 bei beiden Funktionen auch gleiche Funktionswerte gehören. Das trifft aber genau für jeden Schnittpunkt der Bilder beider Funktionen zu.
Wir zeichnen also die Bilder zu $y = x^2$ und $y = -\frac{1}{2}x + 3$ (Bild 4/7) und lesen die Abszissen der Schnittpunkte ab:

$x_1 = -2$; $x_2 = +\frac{3}{2}$ sind die Lösungen der Gleichung (1).

Allgemein ergibt sich zu jeder quadratischen Gleichung in der Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0\right]$$

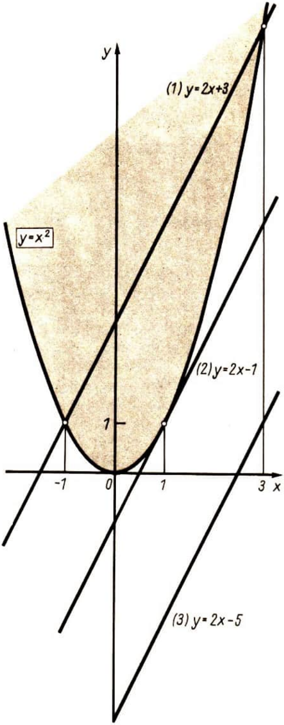
die äquivalente

$$x^2 = -px - q \quad \text{mit} \quad y = f_1(x) = x^2$$

und $y = f_2(x) = -px - q$.

Wir erkennen, daß die quadratische Funktion $f_1(x)$ bei allen Gleichungen die gleiche ist, nur die lineare Funktion $f_2(x)$ ist von Fall zu Fall eine andere. Man braucht also die Parabel $y = x^2$ nur einmal zu zeichnen und muß dann mit einem Lineal von Fall zu Fall lediglich die entsprechende Gerade in dasselbe Koordinatensystem einzeichnen.

4/8



15 Das Bild 4/8 zeigt die zeichnerische Lösung der Gleichungen

(1) $x^2 - 2x - 3 = 0$,

(2) $x^2 - 2x + 1 = 0$ und

(3) $x^2 - 2x + 5 = 0$

nach dem beschriebenen Verfahren.

Als Lösungen lesen wir ab:

zu (1): $x_1 = -1; \quad x_2 = 3$

zu (2): $x_1 = x_2 = 1$ (Doppellösung)

zu (3): keine reellen Lösungen.

Den Zusammenhang zwischen der Lage der Geraden und der Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung zeigt folgende Übersicht:

Die Gerade $y = -px - q$	Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat
schneidet die Parabel $y = x^2$ in zwei Punkten	zwei verschiedene reelle Lösungen
berührt die Parabel $y = x^2$	eine zweifache reelle Lösung
hat keinen Punkt mit der Parabel $y = x^2$ gemeinsam	keine reellen Lösungen

Aufgaben 4/84 bis 4/88

5. Potenzfunktionen; Rechnen mit Potenzen

5.1. Potenzfunktionen (Exponenten natürliche Zahlen $\geqq 2$)

Im Kapitel 4 wurden quadratische Gleichungen behandelt. Es zeigte sich, daß bei praktischen Aufgaben häufig quadratische Gleichungen auftreten. Wegen des Zusammenhangs zwischen ihren Lösungen und den Nullstellen der entsprechenden quadratischen Funktion erwies es sich als zweckmäßig, quadratische Funktionen zu studieren. Unter ihnen war $y = x^2$ die einfachste.
Rechnerische Probleme aus der Praxis, z. B. schon die Berechnung von Masse und Volumen irgendeines Werkstückes, führen aber vielfach auch auf Gleichungen, in denen die zu bestimmende Variable x in einer noch höheren Potenz als nur im Quadrat auftritt. Deshalb ist es nötig, daß wir uns auch mit Potenzfunktionen $y = x^n$ vertraut machen, deren natürlicher Exponent n größer als 2 ist. Zu diesem Zweck muß aber vorerst der Begriff der Potenz allgemeiner und exakter als bisher gefaßt werden.

5.1.1. Der Potenzbegriff

1 **DEFINITION: Für $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}$ ($n \geqq 2$, natürlich; a beliebig reell) wird geschrieben: a^n.**

a^n heißt **Potenz**, a heißt **Basis**, n heißt **Exponent**.
Eine Potenz ist also ein Produkt aus mindestens zwei gleichen beliebigen reellen Faktoren.

1 $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x \quad (x \text{ reell})$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$$

$$\left(-\frac{1}{c}\right)^5 = \left(-\frac{1}{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{c}\right) \quad (c \neq 0,\ \text{reell})$$

$$(-0{,}2)^8 = (-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot(-0{,}2)$$

$$(2\pi)^2 = (2\pi)\cdot(2\pi) = 4(\pi\cdot\pi) = 4\pi^2$$

(1) **Warum muß in der obigen Definition der Potenz die Einschränkung $n \geqq 2$ gemacht werden?**

(2) **a) Berechnen Sie $(-1)^n$ für $n \in \{2, 3, \ldots, 10\}$, und überlegen Sie, welche Gesetzmäßigkeit vorliegt!**

b) Untersuchen Sie, ob folgende Potenzen positiv oder negativ sind, indem Sie zunächst jeweils die Zahlenbeispiele berechnen und dann eine allgemeine Gesetzmäßigkeit zu finden suchen!

α) a^n ($a > 0$; n gerade) Beispiele: $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; 5^4; $\left(\frac{2}{3}\right)^6$

β) y^x ($y < 0$; x gerade) Beispiele: $(-3)^4$; $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

γ) m^z ($m > 0$; $z > 1$, ungerade) Beispiele: 2^3; $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

δ) x^a ($x < 0$; $a > 1$, ungerade) Beispiele: $(-3)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$

▷2 **SATZ: Eine Potenz mit ganzzahligem g e r a d e n Exponenten $n \geqq 2$ ist stets eine positive Zahl, unabhängig davon, ob die von Null verschiedene Basis positiv oder negativ ist** (vgl. Beispiele in Übung 5/2α und β).
Eine Potenz mit ganzzahligem u n g e r a d e n Exponenten $n \geqq 3$ ist eine positive Zahl, wenn die Basis positiv ist, aber eine negative Zahl, wenn die Basis negativ ist (vgl. Beispiele in Übung 5/2γ und δ).

Für $a \neq 0$, reell, und $n \geqq 1$, natürlich, gilt also

$\boldsymbol{a^{2n} > 0}$,

$\boldsymbol{a^{2n-1} > 0}$, **falls** $\boldsymbol{a > 0}$,

$\boldsymbol{a^{2n-1} < 0}$, **falls** $\boldsymbol{a < 0}$.

(3) **Entscheiden Sie, welches der Zeichen < und > zwischen den folgenden Potenzen stehen muß!**

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^8,\ \left(\frac{5}{2}\right)^{13}$ **b)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^6,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^7$ **c)** $(-12)^{10},\ (-12)^{14}$

d) $(-3)^5,\ (-3)^7$ **e)** $\left(-\frac{4}{9}\right)^6,\ \left(-\frac{4}{9}\right)^{10}$ **f)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^5,\ \left(-\frac{1}{3}\right)^7$

Aufgaben 5/1 bis 5/6

5.1.2. Die Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$; natürlich)

(4) **Wiederholen Sie die Eigenschaften der Funktion $y = x^2$ und ihres Bildes (vgl. Abschnitt 4.1.1.)!**

5 **a)** Bilden Sie alle geordneten Paare $[x; y]$, die durch folgende Vorschrift festgelegt sind:

$y = x^3; \quad x \in \{-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0, 0{,}5; 1; 1{,}5; 2\}$!

Stellen Sie die durch diese Menge geordneter Paare festgelegte Funktion grafisch dar, indem Sie für die Einheiten auf den Koordinatenachsen jeweils 1 cm wählen!

b) Verbinden Sie die gezeichneten Punkte mit Hilfe des Lineals! Weisen Sie nach, daß der so entstandene Streckenzug nicht das Bild der Funktion $y = x^3$ für alle reellen x mit $-2 \leqq x \leqq +2$ ist, indem Sie weitere Zahlenpaare $\left(\text{z. B. für } x = -\frac{1}{4}\right.$ und $\left.x = +\frac{1}{4}\right)$ bestimmen und diese in der gleichen Zeichnung grafisch darstellen!

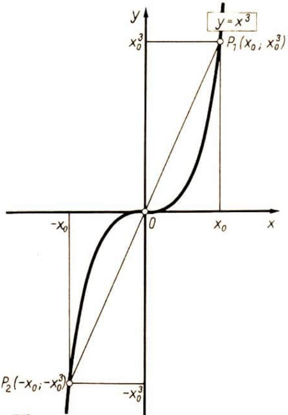
Durch weitere Vergrößerung der Anzahl der gezeichneten Punkte nähert sich der Streckenzug mehr und mehr einer gekrümmten Kurve, die das tatsächliche Bild der Funktion $y = x^3$ ist. Das entstehende Bild der Funktion $y = x^3$ heißt **kubische Parabel.** Es ist in Bild 5/1 wiedergegeben.

6 Zeichnen Sie in vergrößertem Maßstab eine kubische Parabel im Bereich $-1 \leqq x \leqq +1$! Benutzen Sie dazu möglichst viele Zwischenpunkte vor allem in der Umgebung des Koordinatenursprungs!

Wir erkennen aus Bild 5/1 folgende **Eigenschaft der kubischen Parabel:**
Das Bild der Funktion $y = x^3$ ist zentralsymmetrisch bezüglich des Koordinatenanfangspunktes.
Zum Beweis müssen wir zeigen, daß zu einander entgegengesetzten Argumenten x_0 und $-x_0$ auch einander entgegengesetzte Funktionswerte gehören. Wir erhalten diese Funktionswerte, indem wir einmal x_0, und einmal $-x_0$ als Argument in der Funktionsgleichung $y = x^3$ einsetzen:

$f(x_0) = x_0^3$ bzw. $f(-x_0) = (-x_0)^3 = -x_0^3$

x_0^3 und $-x_0^3$ sind aber tatsächlich einander entgegengesetzte Zahlen.



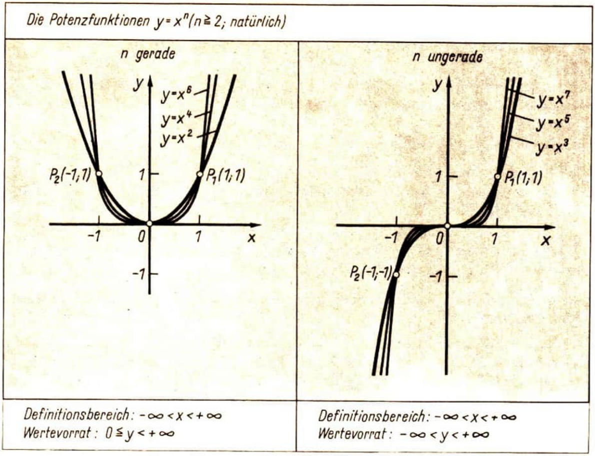
5/1

Der größtmögliche Definitionsbereich der Funktion $y = x^3$ ist $-\infty < x < +\infty$. Auch für den Wertevorrat gilt $-\infty < y < +\infty$.

In Bild 5/2 ist eine Auswahl aus der Schar der Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$, natürlich) graphisch dargestellt. Wegen der unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften sind dabei die Bilder der Funktionen mit geraden Exponenten und derjenigen mit ungeraden Exponenten in je einem Koordinatensystem vereinigt worden.

7 **a)** Formulieren und begründen Sie die Symmetrieeigenschaften für die Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$; natürlich) an Hand von Bild 5/2!

b) Erörtern Sie Definitionsbereich und Wertevorrat!



5/2 a 5/2 b

Symmetrie bezüglich der y-Achse liegt vor, wenn zu einander entgegengesetzten Argumenten x und $-x$ gleiche Funktionswerte $f(x)$ bzw. $f(-x)$ gehören:

$f(x) = f(-x)$ für alle x

Solche Funktionen heißen **gerade** Funktionen.

Alle Potenzfunktionen mit geradem Exponenten sind gerade Funktionen.

Zentralsymmetrie bezüglich des Koordinatenanfangspunktes liegt vor, wenn die Funktionswerte $f(x)$ und $f(-x)$ von einander entgegengesetzten Argumenten x und $-x$ ebenfalls einander entgegengesetzt sind:

$f(x) = -f(-x)$ für alle x.

Solche Funktionen heißen **ungerade** Funktionen.
Alle Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten sind ungerade Funktionen, was für die Funktion $y = x^3$ oben schon bewiesen wurde.

Die Tatsache, daß jede Potenzfunktion $y = x^n$ ($n \geqq 2$, natürlich) entweder gerade oder ungerade ist, darf nicht zu der Annahme verleiten, daß überhaupt jede Funktion gerade oder ungerade sei. Es gibt vielmehr Funktionen, die weder gerade noch ungerade sind, so z. B. $y = f(x) = x + 2$.

Beweis: Für zwei beliebige entgegengesetzte Argumente x_0 und $-x_0$ sind die Funktionswerte $f(x_0) = x_0 + 2$ und $f(-x_0) = -x_0 + 2$. Es ist aber

a) $x_0 + 2 \neq -x_0 + 2$ (mit der alleinigen Ausnahme $x_0 = 0$). Also gilt die Beziehung $f(x_0) = f(-x_0)$ nicht für *jedes* x_0, d. h., $y = f(x) = x + 2$ ist keine gerade Funktion.

b) $x_0 + 2 \neq -(-x_0 + 2)$ für alle x_0, also $f(x_0) \neq -f(-x_0)$, d. h., $y = f(x) = x + 2$ ist auch keine ungerade Funktion.

In den Punkten $P_1(1; 1)$ und $P_2(-1; 1)$ schneiden einander offenbar (Bild 5/2a) die Bilder aller geraden Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$; geradzahlig), in den Punkten $P_1(1; 1)$ und $P_2(-1; -1)$ schneiden einander (Bild 5/2b) die Bilder aller ungeraden Potenzfunktionen $y = x^n (n > 2$; ungeradzahlig). Außerdem haben sie alle den Punkt $O(0; 0)$ gemeinsam.

8 Beweisen Sie dieses Schnittverhalten der Kurven!

Wir wollen jetzt untersuchen, ob die Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$; natürlich) mit wachsenden Argumenten steigen oder fallen. Dazu benötigen wir den Begriff des **Intervalls.**

3 **DEFINITION: Die Menge der reellen Zahlen, die zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b liegen ($a < b$), heißt Intervall.**

Dabei werden je nach der Zugehörigkeit der Zahlen a und b zum Intervall folgende **Bezeichnungen** benutzt:

1. a und b gehören zur Menge	abgeschlossenes Intervall	$a \leqq x \leqq b$ oder $\langle a, b \rangle$
2. Entweder a gehört zur Menge, b nicht; oder b gehört zur Menge, a nicht	halboffenes Intervall	$a \leqq x < b$ oder $\langle a, b)$ $a < x \leqq b$ oder $(a, b\rangle$
3. weder a noch b gehört zur Menge	offenes Intervall	$a < x < b$ oder (a, b)

Auch die Menge *aller* reellen Zahlen selbst kann als Intervall aufgefaßt werden; ebenso solche Teilmengen der reellen Zahlen, zu denen alle reellen Zahlen gehören, die entweder kleiner oder nicht größer oder größer oder nicht kleiner als eine feste reelle Zahl sind.

Man schreibt für	entweder	oder
die Menge aller reellen Zahlen	x beliebig reell	$-\infty < x +\infty$
—, die kleiner sind als b	$x < b$	$-\infty < x < b$
—, die kleiner oder gleich (nicht größer als) b sind	$x \leqq b$	$-\infty < x \leqq b$
—, die größer sind als a	$x > a$	$a < x < +\infty$
—, die größer oder gleich (nicht kleiner als) a sind	$x \geqq a$	$a \leqq x < +\infty$

Unter Verwendung dieser Begriffe und dieser Symbolik notieren wir jetzt die Ergebnisse unserer Untersuchungen.
Der Anschauung entnehmen wir (Bild 5/2):

4 **Die Bilder der geraden Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \geqq 2$; geradzahlig)**
fallen im Intervall $-\infty < x \leqq 0$,
steigen im Intervall $0 \leqq x < +\infty$.

Die Bilder der ungeraden Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n > 2$, ungeradzahlig)
steigen im gesamten Definitionsbereich ($-\infty < x < +\infty$).

Aufgaben 5/7 bis 5/14

5.1.3. Die Potenzfunktionen $y = x^n + e$ ($n \geqq 2$; natürlich)

(9) **a)** In welchem Zusammenhang stehen die Bilder der Funktionen $y = x^2$ und $y = x^2 + e$ (vgl. Abschnitt 4.1.2.)?

b) Zeichnen Sie in ein gemeinsames Koordinatensystem die Bilder der Funktionen $y = x^3$; $y = x^3 - 1{,}5$; $y = x^3 + 2{,}7$!

x	-2	-1	...
$y = x^3$	-8	-1	...
$y = x^3 - 1{,}5$	$-9{,}5$	$-2{,}5$	...

x	-2	-1	...
$y = x^3$	-8	-1	...
$y = x^3 + 2{,}7$	$-5{,}3$	$+1{,}7$	...

c) Erläutern Sie, wie man die Bilder der Funktionen $y = x^n + e$ aus den Bildern der Funktionen $y = x^n$ gewinnen kann! Verwenden Sie dabei den Begriff „Verschiebung in Richtung der y-Achse"!

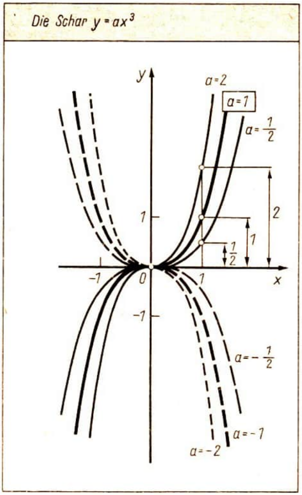
Aufgaben 5/15 bis 5/16

5.1.4. Die Potenzfunktionen $y = ax^n$ ($n \geqq 2$; natürlich; a rational)

(10) In welchem Zusammenhang stehen die Bilder der Funktion $y = x^2$ mit denen der Funktionen $y = ax^2$ für $|a| > 1$; $|a| < 1$; $a < 0$ (vgl. Abschnitt 4.1.5.; Übung 4/10)?

(11) Im Bild 5/3 sind die Funktionen $y = ax^3$ für die Werte $-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2$ des Parameters a graphisch dargestellt.
Überzeugen Sie sich an Hand dieser Darstellungen, daß genau dieselben Feststellungen zutreffen, die in Übung 4/10 im Abschnitt 4.1.5. für die Funktionen $y = ax^2$ getroffen wurden:

Das Bild der Funktion $y = ax^3$ geht aus dem Bild der Funktion $y = x^3$ durch **Streckung** (wenn $|a| > 1$) oder **Stauchung** (wenn $|a| < 1$) hervor. Ist $a < 0$, erfährt es außerdem eine **Spiegelung** an der x-Achse.



5/3

Man kann zeigen, daß allgemein gilt:
Das Bild der Funktion $y = ax^n$ ($n \geqq 2$; natürlich) entsteht aus dem Bild der Funktion $y = x^n$ durch

a) Streckung, falls $|a| > 1$,
b) Stauchung, falls $|a| < 1$,
c) zusätzliche Spiegelung an der x-Achse, falls $a < 0$ ist.

Aufgaben 5/17 bis 5/19

5.2. Rechnen mit Potenzen (Exponenten natürliche Zahlen)

5.2.1. Die Potenzen a^0 und a^1

Die Definition 5/1 erfaßt nur Potenzen mit natürlichen Zahlen $\geqq 2$ als Exponenten. Für andere Exponenten sind neue bzw. erweiterte Definitionen für die Potenzen erforderlich. Sie werden zweckmäßig so gewählt, daß die Rechengesetze, die auf Grund der Definition 5/1 für Potenzen mit natürlichen Zahlen $\geqq 2$ als Exponenten hergeleitet bzw. festgesetzt werden, auch für Potenzen mit den Exponenten 0 und 1 Gültigkeit behalten.
Das ist der Fall, wenn festgesetzt wird:

5 **DEFINITION:** $a^0 = 1$ für alle reellen Zahlen $a \neq 0$
$a^1 = a$ für alle reellen Zahlen a

2 **a)** $(x + y)^1 = x + y$ (x, y reell) **b)** $7354927^0 = 1$

c) $\dfrac{1}{b^1} = \dfrac{1}{b}$ ($b \neq 0$; reell) **d)** $\dfrac{1}{b^0} = \dfrac{1}{1} = 1$ ($b \neq 0$; reell)

Die Einschränkung bei der Definition von a^0, daß a nicht gleich Null sein darf, bedeutet, daß 0^0 nicht definiert wird. Diese Ausnahme bei der Definition von a^0 ist notwendig, da sich sonst Widersprüche zu anderen Gesetzmäßigkeiten ergeben würden.
Durch die Definition 5/5 erfährt der ursprünglich durch die Definition 5/1 nur für natürliche Zahlen $\geqq 2$ als Exponenten erklärte Potenzbegriff eine erste Erweiterung und damit auch eine qualitative Veränderung.

5.2.2. Die Potenzfunktionen $y = x^1$ und $y = x^0$

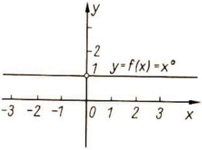
Das Bild der Funktion $y = x^1$ ist uns als Spezialfall der linearen Funktionen $y = mx$ mit $m = 1$ bekannt (vgl. Abschnitt 2.1.2.).

12 Wie verläuft das Bild der Funktion $y = x^1$ im gesamten Definitionsbereich dieser Funktion? Welchen Verlauf hat das Bild der Funktion für $-\infty < x \leqq 0$ und für $0 \leqq x < \infty$? Welche besonderen Eigenschaften hat diese Kurve?

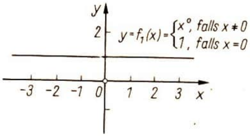
Das Bild der Funktion $y = x^0$, d. h. $f(x) = 1$ ($x \neq 0$), ist die Parallele zur x-Achse im Abstand 1, die allerdings an der Stelle $x = 0$ eine Lücke hat, da 0^0 nicht definiert ist (Bild 5/4). Um diese Lücke zu schließen, wird eine neue Funktion folgendermaßen definiert:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^0, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Das Bild dieser Funktion weist keine Lücke mehr auf; es ist die Parallele zur x-Achse im Abstand 1 (Bild 5/5).



5/4



5/5

5.2.3. Die Potenzgesetze (Exponenten natürliche Zahlen)

Das Potenzieren bezeichnet man als Rechenoperation dritter Stufe.
Im Unterschied zur Addition und zur Multiplikation ist das Potenzieren weder kommutativ noch assoziativ.
Es gilt also im allgemeinen

$a^b \neq b^a$ (falls $a \neq b$),

$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$

(13) Es gibt Ausnahmen, für die gilt: $a^b = b^a$ $(a \neq b)$ und $(a^b)^c = a^{(b^c)}$. Geben Sie dafür Beispiele an!

Die Schreibweise a^{b^c} ist also zunächst nicht eindeutig. Sie würde nämlich die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes voraussetzen [vgl. $(a + b) + c = a + (b + c)$]. Das trifft aber für das Potenzieren nicht zu. Um Mißverständnissen vorzubeugen, wird **festgesetzt:**

$a^{b^c} = a^{(b^c)}$

Außerdem wird in Erweiterung der Vereinbarung über die Stärke der Bindung von Operationszeichen der 1. und 2. Stufe (vgl. Abschnitt 1.2.2.) festgesetzt:

Die Operationszeichen der 3. Stufe (hier: Hochstellen des Exponenten) **binden stärker als die der 1. und 2. Stufe.**

3 **a)** $5a^4 = 5 \cdot (a^4)$ Das ist im allgemeinen verschieden von $(5a)^4$.

b) $a + b^3 = a + (b^3)$ Das ist im allgemeinen verschieden von $(a + b)^3$.

Es soll jetzt untersucht werden, ob sich Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Potenzen von Potenzen zusammenfassen oder anderweit vereinfachen lassen. Das Ergebnis dieser Überlegungen sind sechs **Potenzgesetze.**

Summen und Differenzen von Potenzen können nur vereinfacht werden, wenn in ihnen Glieder enthalten sind, die sowohl in den Basen als auch in den Exponenten übereinstimmen. Solche Glieder können unter Verwendung des Distributivgesetzes zusammengefaßt werden:

4 **a)** $x^5 + x^5 + 6x^5 - 3x^5 = (1 + 1 + 6 - 3)\,x^5 = 5x^5$

b) $7a^6 - 4a^6 + 2z^3 - 2a^6 - 4z^3 = 7a^6 - 4a^6 - 2a^6 + 2z^3 - 4z^3 = a^6 - 2z^3$

c) $5x^a - 2y^b - 3x^a = (5 - 3)\,x^a + 2y^b = 2x^a + 2y^b$

Glieder, die hingegen Potenzen enthalten, die zwar in den Basen, aber nicht in den Exponenten oder in den Exponenten, aber nicht in den Basen übereinstimmen, können ebensowenig zusammengefaßt werden wie Glieder mit Potenzen, die weder in den Basen noch in den Exponenten übereinstimmen.
Beispielsweise können folgende Summen nicht durch Zusammenfassen der Glieder vereinfacht werden:

5 a) $x^5 + x^4 - x^3$ (Übereinstimmung nur in den Basen)

b) $x^3 - 2y^3 + z^3$ (Übereinstimmung nur in den Exponenten)

c) $a^3 - b^2 + c$ (Übereinstimmung weder in den Basen noch in den Exponenten)

Produkte und Quotienten von Potenzen können vereinfacht werden, sobald sie wenigstens in den Basen oder in den Exponenten übereinstimmen.

Potenzen von Potenzen können stets vereinfacht werden.

Die Vereinfachungen sind auf Grund folgender **Potenzgesetze** möglich:

6 **Für alle rationalen Zahlen a, b ($a \neq 0$, $b \neq 0$) und alle natürlichen Zahlen m, n gilt:**

für die Multiplikation

bei gleichen Basen: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

bei gleichen Exponenten: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

für die Division

bei gleichen Basen: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m \geqq n)$

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (m < n)$

bei gleichen Exponenten: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

für das Potenzieren: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

14 Formulieren Sie die sechs Potenzgesetze in Worte!

Die Richtigkeit dieser Gesetze soll an einigen Beispielen, zunächst für natürliche Zahlen $\geqq 2$ als Exponenten, in der Weise gezeigt werden, daß dabei nur die Definition 5/1 zugrunde gelegt wird:

6 a) $(a^4) \cdot (a^3) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{\text{4 Faktoren } a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{\text{3 Faktoren } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{7 Faktoren } a} = a^7$

b) $(a^5) \cdot (b^5) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{\text{5 Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b)}_{\text{5 Faktoren } b} = \underbrace{(ab)\,(ab)\,(ab)\,(ab)\,(ab)}_{\text{5 Faktoren } (ab)} = (ab)^5$

c) $\frac{a^6}{a^4} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{\text{6 Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{4 Faktoren } a}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a \cdot a}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \underbrace{a \cdot a}_{\text{2 Faktoren } a} = a^2$

d) $\dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a}^{2 \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ Faktoren } a}} = \dfrac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ Faktoren } a}} = \dfrac{1}{\underline{a^3}}$

e) $\dfrac{a^4}{b^4} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}^{4 \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{4 \text{ Faktoren } b}} = \underbrace{\left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)}_{4 \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^4$

f) $(a^4)^3 = \underbrace{(a^4)\,(a^4)\,(a^4)}_{3 \text{ Faktoren } a^4} = \underbrace{(aaaa)\,(aaaa)\,(aaaa)}_{3 \cdot 4 \text{ Faktoren } a} = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$

(15) Lösen Sie die verschiedenen Aufgaben mit Hilfe der Potenzgesetze, und vergleichen Sie die so erhaltenen Ergebnisse mit den obigen!

Entsprechende Untersuchungen mußten für alle Gesetze und alle Möglichkeiten unter Einbeziehung der Exponenten 0 und 1 angestellt werden, um zu zeigen, daß die formale Anwendung der Potenzgesetze mit den Exponenten 0 und 1 zu Ergebnissen führt, die zu den Definitionen 5/1 und 5/5 nicht im Widerspruch stehen. Wir zeigen das für das Gesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für a reell; $m \geqq 2$, natürlich, und $n = 0$ bzw. $n = 1$.

a) Nach dem **Potenzgesetz** würde man erhalten

für $n = 0$:	für $n = 1$:
$a^m \cdot a^n = a^{m+0} = \underline{a^m}$	$a^m \cdot a^1 = \underline{a^{m+1}}$

b) Unter Verwendung der Definitionen $a^0 = 1$ und $a^1 = a$ würde man erhalten:

$a^m \cdot 1 = \underline{a^m}$	$a^m \cdot a = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot a$ $= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{m+1 \text{ Faktoren}} = \underline{a^{m+1}}$

c) Die einerseits unter Verwendung des Potenzgesetzes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ und andererseits unter Verwendung der Beziehung $a^0 = 1$ bzw. $a^1 = a$ erhaltenen Ergebnisse werden verglichen:

$a^m = a^m$	$a^{m+1} = a^{m+1}$

Damit ist gezeigt, daß die Anwendung dieses Gesetzes auf die Exponenten $n = 0$ bzw. $n = 1$ zu keinen Widersprüchen mit den Potenzdefinitionen führt.

(16) Weisen Sie nach, daß die Festsetzungen $a^0 = 0$ und $a^1 = 1$ nicht zweckmäßig wären und zu Widersprüchen mit den Ergebnissen des obigen Potenzgesetzes führen würden!

Potenzen mit den Exponenten 1 und 0 erweisen sich besonders bei Divisionsaufgaben als zweckmäßig:

7 $\dfrac{c^5}{c^4} = c^{5-4} = c^1 = c \qquad \dfrac{x^7}{x^8} = \dfrac{1}{x^{8-7}} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x} \qquad \dfrac{15^6}{15^6} = 15^{6-6} = 15^0 = 1$

Durch die Potenzgesetze wird bei gleichen Basen das Rechnen mit den Potenzen auf das Rechnen mit den Exponenten in der nächstniederen Rechenstufe zurückgeführt.

Rechenstufen		
III	II	I
	Potenzen $a^m \cdot a^n$ →	Exponenten $m + n$
	Potenzen $a^m : a^n$ →	Exponenten $m - n$ bzw. $n - m$
Potenz $(a^m)^n$ →	Exponenten $m \cdot n$	

Aufgaben 5/20 bis 5/46

5.3. Potenzfunktionen (Exponenten ganze Zahlen)

5.3.1. Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Durch die Definitionen 5/1 und 5/5 sind alle Potenzen erklärt, deren Basen reelle Zahlen und deren Exponenten natürliche Zahlen sind. Um Potenzen mit ganzzahligen Exponenten zu erfassen, ist es nötig, eine Ergänzung der Definition um Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten vorzunehmen. Dadurch erfährt der bislang nur für natürliche Zahlen als Exponenten erklärte Potenzbegriff eine erneute Erweiterung und gegenüber den Definitionen 5/1 und 5/5 eine qualitative Änderung.

Folgende Überlegung zeigt einen möglichen Weg:

Es gilt einerseits: $\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3 \cdot 1}{a^3 \cdot a^2} = \frac{1}{a^2}$.

Andererseits würde die formale Anwendung des ersten Potenzgesetzes für die Division von Potenzen mit gleicher Basis auf $\frac{a^3}{a^5}$ ergeben: $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$.

Es ist demnach naheliegend, festzusetzen: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Allgemein:

7 **DEFINITION:** $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ **($k \geqq 1$, ganzzahlig; $a \neq 0$, reell)**

8 **a)** $2^{-9} = \frac{1}{2^9}$ **b)** $\frac{1}{2^{-9}} = 2^9$ **c)** $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $a^3 \cdot b^{-5} = \frac{a^3}{b^5}$ **e)** $\frac{x^3}{x^{-5}} = x^3 \cdot x^5 = x^8$

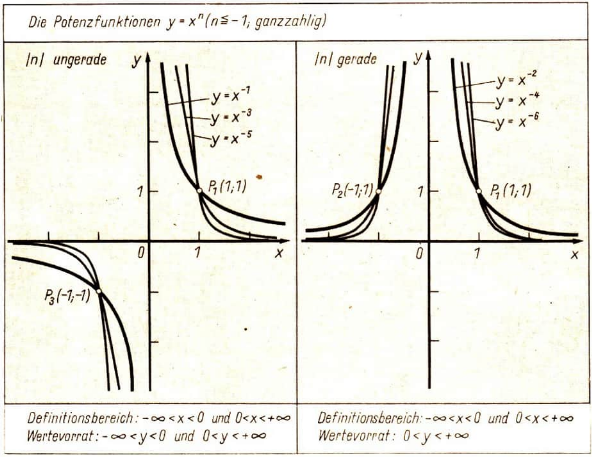
Ob diese naheliegende Definition auch zweckmäßig ist, d. h., ob die Potenzgesetze (Satz 5/6) zu keinen Widersprüchen führen, wenn unter Beachtung dieser Definition Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten in die Rechnung einbezogen werden, bedarf einer besonderen Untersuchung. Das wird in Abschnitt 5.4.1. durchgeführt. Zunächst sollen unter Verwendung der Definition 5/7 die Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \leqq -1$; ganzzahlig) untersucht werden.

5.3.2. Die Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n \leqq -1$; ganzzahlig)

Wir betrachten die Besonderheiten der Bilder der Funktionen $y = x^n$ ($n \leqq -1$; ganzzahlig) im Bild 5/6. Diese Kurven heißen **Hyperbeln**. Wir stellen dabei folgendes fest:

1. Hyperbeln bestehen aus zwei Teilen, den **Hyperbelästen**.
2. Die Funktionen $y = x^{-m}$ (m gerade; $m > 0$) sind gerade Funktionen, die Funktionen $y = x^{-m}$ (m ungerade, $m > 0$) sind ungerade Funktionen.
3. Die Hyperbeln gehen nicht durch den Koordinatensprung, aber alle durch den Punkt $P_1(1; 1)$.
4. Die Hyperbeln $y = x^{-m}$ (m gerade; $m > 0$) gehen außerdem durch den Punkt $P_2(-1; 1)$, die Hyperbeln $y = x^{m}$ (m ungerade; $m > 0$) durch den Punkt $P_3(-1; -1)$.

17 Begründen Sie die Feststellungen in den Punkten 2, 3 und 4!



5/6

5.3.3. Die Annäherung der Hyperbeln an die Koordinatenachsen

18 **a)** Untersuchen Sie für die Funktionen $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$ sowie $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$ das Verhalten bei Annäherung an das Argument 0, indem Sie Wertetafeln mit den Argumenten

$$x \in \left\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, -1, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{1000}\right\}$$

aufstellen!

b) Untersuchen Sie für dieselben Funktionen das Verhalten für Argumente mit sehr großem Betrag, indem Sie Wertetafeln mit den Argumenten
$x = 1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ -1;\ -10;\ -100;\ -1000$
aufstellen!

Bei der Untersuchung 18 a stellen wir fest, daß die Funktionswerte immer größere absolute Beträge annehmen, je mehr sich das Argument der Null nähert. Die Bilder schmiegen sich also immer enger an die y-Achse an, ohne sie jemals zu erreichen (Bild 5/6). Denn nach Definition 5/7 ist $y = x^n$ mit $n \leqq -1$, ganzzahlig, für $x = 0$ nicht definiert.

Bei der Untersuchung 18 b stellen wir fest, daß die Funktionswerte sich immer mehr der Null nähern, je größer die Beträge der Argumente werden. Die Bilder schmiegen sich immer enger an die x-Achse an, ohne sie aber jemals zu erreichen (Bild 5/6). Denn zu einem Argument mit einem beliebig großen Betrag $|x_1|$ gibt es sicher ein weiteres Argument mit einem noch größeren Betrag $|x_2|$, also $|x_2| > |x_1|$. Dann sind aber die Funktionswerte $f(|x_1|)$ und $f(|x_2|)$ bei beispielsweise $y = x^n$ mit $n = -1$, also $|x_1|^{-1} = \frac{1}{|x_1|}$ und $|x_2|^{-1} = \frac{1}{|x_2|}$ durch $\frac{1}{|x_2|} < \frac{1}{|x_1|}$ verknüpft, d. h., es gibt auch bei beliebig groß gewähltem Argumentbetrag $|x_1|$ immer einen noch größeren $|x_2|$, dessen Funktionswert kleiner ist als der des erstgewählten Argumentbetrags, der aber stets größer als Null bleibt. Es kann also keinen Funktionswert $f(x) = 0$ geben.

8 **DEFINITION: Eine Gerade, der das Bild einer Funktion beliebig nahekommt, ohne sie zu berühren oder zu schneiden, heißt eine Asymptote dieser Kurve.**

9 **SATZ: Die Hyperbeln $y = x^n$ ($n \leqq -1$; ganzzahlig) haben die x-Achse und die y-Achse zu Asymptoten.**

(Auf einen exakten Beweis dieses Satzes, der der Anschauung entnommen wurde, muß hier verzichtet werden.)

5.3.4. Die Schar der Potenzfunktionen $y = ax^n$ (n ganzzahlig, a rational)

Um zu erkennen, welchen Einfluß der ganzzahlige Parameter n auf die Funktionsbilder hat, betrachten wir zunächst für $a = 1$ die zu den Exponenten $n \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ gehörenden Bilder der Funktionen $y = x^n$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem (Bild 5/7).

19 Erläutern Sie, welchen Einfluß der Exponent auf die Bilder hat, die zu den Funktionen $y = x^n$ gehören!

Der Einfluß des Parameters a auf die Bilder der Funktionen $y = ax^n$ wurde in Abschnitt 5.1.4. für $n \geqq 2$, ganzzahlig, untersucht. Die dort festgestellten **Streckungen,**

Stauchungen und **Spiegelungen** der Bilder der Funktionen $y = x^n$ je nach dem gewählten a gelten genau so, wenn jetzt in $y = ax^n$ der Exponent n ganzzahlig zugelassen wird.

Besondere Bedeutung haben die Funktionen $y = ax^n$ für $n = 1$ und für $n = -1$.
$y = ax$, also $n = 1$, ergibt **direkte Proportionalität** zwischen beliebigen Argumenten und zugehörigen Funktionswerten, $y = ax^{-1} = \frac{a}{x}$, also $n = -1$, aber **indirekte Proportionalität**.

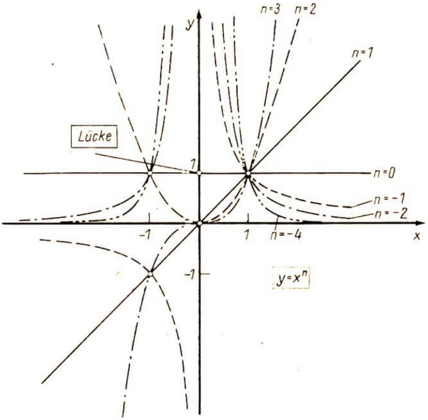
Es gilt dann für

$n = 1$: $\quad y_1 : y_2 : \ldots = x_1 : x_2 : \ldots$

$n = -1$: $\quad y_1 : y_2 : \ldots = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \ldots$

oder

$y_1 : y_2 = x_2 : x_1$



5/7

(20) Liegt bei folgenden Sachverhalten direkte oder indirekte Proportionalität vor? Begründen Sie Ihre Antworten!

a) Masse und Volumen desselben Stoffes
b) Masse und Dichte bei konstantem Volumen
c) Volumen und Dichte bei konstanter Masse
d) Stromstärke und Gleichspannung bei konstantem Widerstand
e) Stromstärke und Widerstand bei konstanter Gleichspannung
f) Gleichspannung und Widerstand bei konstanter Stromstärke

Aufgaben 5/47 bis 5/50

5.4. Rechnen mit Potenzen (Exponenten ganze Zahlen)

5.4.1. Gültigkeit der Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten

Wenn die Definition 5/7

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad (k \geqq 1, \text{ ganzzahlig}; \ a \neq 0, \text{ reell})$$

zweckmäßig sein soll, muß sich zeigen lassen, daß die Potenzgesetze (Satz 5/6) zu keinen Widersprüchen führen, wenn mit Potenzen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten gerechnet wird. Das muß für jedes Potenzgesetz in jeder denkbaren Kombination der Exponenten untersucht werden, ähnlich, wie es in Abschnitt 5.2.3. für die Exponenten 0 und 1 an Hand des Gesetzes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ erläutert wurde. Auf eine solche vollständige Untersuchung wird aber hier verzichtet und lediglich folgendes Beispiel betrachtet:

Wir nehmen an, $(a^m)^n = \underline{a^{m \cdot n}}$ gilt auch für $m < 0$, ganzzahlig $n \geqq 0$, ganzzahlig.

Als Zahlenbeispiel: $(a^{-2})^3 = a^{-2 \cdot 3} = \underline{a^{-6}}$

Zur Untersuchung der Widerspruchsfreiheit zur Definition 5/7 setzen wir $m = -k$ ($k > 0$; ganzzahlig).

Im Zahlenbeispiel: $m = -2$, also $k = +2$

Die linke Seite des Potenzgesetzes lautet dann $(a^{-k})^n$,

im Zahlenbeispiel also $(a^{-(+2)})^3$.

Diese Seite formen wir schrittweise unter Zugrundelegung der Definition 5/7 folgendermaßen um:

allgemein: $(a^{-k})^n = \left(\frac{1}{a^k}\right)^n = \frac{1^n}{(a^k)^n} = \frac{1}{a^{k \cdot n}} = a^{-(k \cdot n)} = a^{(-k) \cdot n} = \underline{a^{m \cdot n}}$

im Zahlenbeispiel: $(a^{-(+2)})^3 = \left(\frac{1}{a^{+2}}\right)^3 = \frac{1^3}{(a^{+2})^3} = \frac{1}{a^{+2 \cdot 3}} = a^{-(2 \cdot 3)} = a^{(-2) \cdot 3} = a^{-2 \cdot 3} = \underline{a^{-6}}$

Der letzte Term stimmt jeweils mit der rechten Seite der Ausgangsgleichung überein, womit die Widerspruchsfreiheit für $m < 0$; $n \geqq 0$, ganzzahlig, gezeigt ist.

(21) Begründen Sie jeden der im Beweis durchgeführten Schritte der Umformung mit Hilfe der für natürliche Zahlen gültigen Potenzgesetze und mit Hilfe der Definition 5/7!

Durch diese Erweiterung der Definition für Potenzen wird die in Satz 5/6 notwendige Unterteilung des Gesetzes für die Division von Potenzen mit gleichen Basen in 2 Fälle hinfällig. Das Gesetz nimmt die Form an:

6 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ **($a \neq 0$, rational; m, n ganzzahlig).**

9 $\dfrac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2} \quad (a \neq 0)$; $\quad \dfrac{b^2}{b^8} = b^{2-8} = b^{-6} \quad (b \neq 0)$; $\quad \dfrac{3^5}{3^8} = 3^{5-8} = 3^{-3}$

$\dfrac{7^5}{7^6} = 7^{5-6} = 7^{-1}$; $\quad \dfrac{x^{16}}{x^{16}} = x^{16-16} = x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$

Aufgaben 5/51 bis 5/65

5.4.2. Das dekadische Positionssystem

Das bei uns meist benutzte System zur Darstellung rationaler Zahlen als Ziffern heißt **dekadisches Positionssystem** aus folgenden Gründen:

1. Zur Darstellung der Zahlen durch ihre Ziffern dienen **10 Grundziffern** (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) [deka (griech.), zehn].
2. Jede Grundziffer hat außer ihrem Grundwert noch einen Stellenwert je nach ihrer **Stellung (Position)** in der Ziffer.

$$532{,}403 = 500 + 30 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{3}{1000}$$

$$= 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$

Jeder endliche Dezimalbruch ist also einer Summe von Vielfachen von Potenzen der Zahl 10 mit ganzzahligen Exponenten gleichwertig.

Das dekadische Positionssystem ist nicht das einzige, das bei uns verwendet wird. Jahreszahlen z. B. werden gelegentlich im römischen Ziffernsystem angegeben (MDCCLXXXIX $\triangleq$ 1789).
In elektronischen Rechenautomaten wird oft das Dualsystem verwendet, in dem alle Zahlensymbole durch nur zwei Grundziffern (0 und L $\triangleq$ 1) dargestellt werden (L0LL0L0 $\triangleq$ 90).

Aufgaben 5/66 bis 5/67

5.4.3. Schreibweise von großen und kleinen Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen

Man kann jede rationale Zahl a ($a > 0$) in der Form $a = a_0 \cdot 10^q$ [a_0 rational ($1 \leqq a_0 < 10$), q ganzzahlig] darstellen. Die folgende Tabelle zeigt einige Beispiele:

11

	a	$a_0 \cdot 10^q$	a_0	q
a)	253	$2{,}53 \cdot 10^2$	2,53	2
b)	0,023	$2{,}3 \cdot 10^{-2}$	2,3	-2
c)	10000	$1 \cdot 10^4$	1	4
d)	0,001	$1 \cdot 10^{-3}$	1	-3

Diese Schreibweise dient vor allem in Naturwissenschaft und Technik zur Darstellung von sehr großen oder sehr kleinen Zahlen.

12

a) Masse der Erde: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

b) Durchmesser eines Wasserstoffatoms: $1{,}07 \cdot 10^{-8}$ cm

c) Lichtgeschwindigkeit: $2{,}99792 \cdot 10^{10}$ cm s^{-1}

d) Ruhmasse eines Elektrons: $9{,}108 \cdot 10^{-28}$ g

Zahlenangaben werden durch Anwendung dieser Schreibweise übersichtlicher. Dadurch werden auch Berechnungen erleichtert.

13 **Es ist die mittlere Dichte der Erde zu bestimmen.**

Das Volumen der Erde beträgt $1{,}08 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$, die Masse beträgt $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{1{,}08 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3} \qquad 1\ \text{km}^3 = (10^5\ \text{cm})^3 = 10^{15}\ \text{cm}^3$$

$$= \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10^3\ \text{g}}{1{,}08 \cdot 10^{12} \cdot 10^{15}\ \text{cm}^3}$$

$$= \frac{5{,}98 \cdot 10^{27}}{1{,}08 \cdot 10^{27}} \cdot 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \qquad \text{Überschlag: } \frac{5{,}98}{1{,}08} \approx \frac{6}{1} = 6$$

$$\varrho \approx 5{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Ergebnis: Die mittlere Dichte der Erde beträgt rund $5{,}5\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Auch für das Rechnen mit Hilfe des Rechenstabs ist diese Schreibweise eine wesentliche Hilfe.

14

$$\frac{0{,}0312}{15\,300} \cdot 0{,}000\,36 = \frac{3{,}12 \cdot 10^{-2}}{1{,}53 \cdot 10^4} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-4}$$

$$= \frac{3{,}12 \cdot 3{,}6}{1{,}53} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4}$$

$$= 7{,}34 \cdot 10^{-10}$$

Überschlag:

$$\frac{3{,}12 \cdot 3{,}6}{1{,}53} \approx \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

(22) Wiederholen Sie die gesetzlichen „Vorsätze für Maßeinheiten", die aus gewissen Einheiten größere oder kleinere herzuleiten erlauben! Sie finden sie u. a. in Ihrer Zahlentafel!

Für das Rechnen mit solchen großen oder kleinen Einheiten ist die Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen erforderlich.

15 Der Durchmesser der Sonne beträgt rund 1,4 Gm, der der Erde etwa 12,7 Mm. In welchem Verhältnis stehen beide?

$d_S = 1{,}4\ \text{Gm} = 1{,}4 \cdot 10^9\ \text{m}; \quad d_E = 12{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}$

$$d_S : d_E = \frac{1{,}4 \cdot 10^9\ \text{m}}{12{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^3}{12{,}7} \approx 110 : 1$$

Aufgaben 5/68 bis 5/76

5.5. Potenzfunktionen (Exponenten rationale Zahlen)

5.5.1. Der Wurzelbegriff

Die Gleichung $x^2 = 2$ ist im Bereich der rationalen Zahlen nicht lösbar.
Wir führen den Beweis für diese Behauptung indirekt, d. h., wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl x, die die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Die Zahl x kann als rationale Zahl in folgender Weise dargestellt werden:

(1) $x = \frac{p}{q}$ (p, q ganzzahlig, teilerfremd und $q \neq 0$)

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung folgt

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

bzw.

(2) $p^2 = 2q^2$.

Da q ganzzahlig vorausgesetzt wurde, ist $2q^2 = p^2$ eine gerade Zahl. Da aber eine Quadratzahl nur gerade ist, wenn ihre Basis gerade ist, ist auch p eine gerade Zahl, etwa gleich $2n$.
Dann folgt aus (2):

$$(2n)^2 = 2q^2$$

$$4n^2 = 2q^2$$

(3) $2n^2 = q^2$

Da n als ganzzahlig vorausgesetzt war, ist $2n^2$ und somit auch q^2 eine gerade Zahl. Dann ist aber auch q eine gerade Zahl, beispielsweise $q = 2m$. Dann würde aber gelten

(1′) $x = \frac{p}{q} = \frac{2n}{2m}$ (n, m ganzzahlig; $m \neq 0$)

(1′) bedeutet, daß p und q nicht teilerfremd sind. Das steht jedoch in Widerspruch zur Ausgangsannahme (1). Daraus kann nur folgen, daß diese Ausgangsannahme falsch war, d. h., daß es keine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ als Lösung der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ geben kann.
Andererseits gibt es viele konkrete Sachaufgaben, die auf Gleichungen wie $x^2 - 2 = 0$ führen und deren Lösungen interessieren. Folgendes Beispiel mag das zeigen:

16 Die Länge der Diagonale des Quadrats mit der Seitenlänge 1 ist zu berechnen.

Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS ergibt sich für die Länge x_1 der Diagonalen: $x_1^2 = 1^2 + 1^2$, also $x_1^2 - 2 = 0$.
Das heißt aber im Zusammenhang mit dem eben Dargelegten, daß die Diagonale eine Länge hat, deren Maßzahl keine rationale Zahl ist. Deshalb ist es notwendig, einen neuen Zahlenbereich einzuführen, den **Bereich der irrationalen Zahlen** (vgl. Abschnitt 3.1.3.). In diesem Bereich hat die Gleichung $x^2 = 2$ nach Satz 4/3 zwei Lösungen, nämlich $x_1 = +\sqrt{2}$ bzw. $x_2 = -\sqrt{2}$. Da die Maßzahl der Länge einer Diagonalen keine negative Zahl sein kann, ist $\sqrt{2}$ die Maßzahl der Länge der Diagonalen des Quadrats mit der Seitenlänge 1.

Es entsteht die Frage, ob die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ nicht mit Hilfe der rationalen Zahlen beschrieben werden kann. Das ist tatsächlich näherungsweise durch zwei rationale Zahlen a_1 und a_2 möglich, für die gilt $a_1 < \sqrt{2} < a_2$. Man sagt, die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ wird zwischen zwei rationale Zahlen **eingeschachtelt**. Diese Einschachtelung läßt sich immer weiter einengen, und je enger die Grenzen dieser Einschachtelung liegen, desto genauer wird ein rationaler Näherungswert für die irrationale Zahl bestimmt. Den praktischen Rechenweg zeigt folgendes Beispiel:

17 $x = \sqrt{2}$ ist durch Einschachteln angenähert anzugeben.

$\sqrt{2}$ ist nach Definition die Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Offenbar ist diese Zahl größer als 1, denn $1^2 = 1$ und 1 ist kleiner als 2. Andererseits ist sie jedoch kleiner als 2, denn $2^2 = 4$ und 4 ist größer als 2.
Demnach gilt für $x = \sqrt{2}$ bzw. $x^2 = 2$:

$x^2 = 2$	$x = \sqrt{2}$
$1 < x^2 < 4$	$1 < x < 2$

Wir suchen jetzt mit Hilfe der Quadratzahltafel zwei Quadratzahlen, die näher bei 2 liegen als 1 und 4. Zum Beispiel trifft das zu für $1{,}96 = 1{,}4^2$ und $2{,}25 = 1{,}5^2$.

$1{,}96 < x^2 < 2{,}25$	$1{,}4 < x < 1{,}5$

Jetzt suchen wir durch Probieren zwei zwischen 1,4 und 1,5 gelegene Dezimalbrüche, die eine Dezimalstelle mehr (also 2 Dezimalstellen) enthalten, und deren Quadrate wieder beim einen knapp unter, beim anderen knapp über 2 liegen.
Da $1{,}41^2 = 1{,}9981 < 2$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$, ergibt sich:

$1{,}9981 < x^2 < 2{,}0164$	$1{,}41 < x < 1{,}42$

So kann beliebig fortgefahren werden, indem das Intervall, in dem x liegt, immer wieder dadurch weiter eingeengt wird, daß als Intervallgrenzen Dezimalbrüche gesucht werden, die je eine Dezimalstelle mehr enthalten:

$1{,}999396 < x^2 < 2{,}002225$	$1{,}414 < x < 1{,}415$

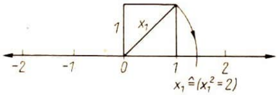
Wird die Einschachtelung etwa an dieser Stelle abgebrochen, so können die in beiden Intervallgrenzen gemeinsamen Dezimalstellen als rationaler Näherungswert für x angegeben werden:

$x \approx 1{,}41$

Da $1{,}4143^2 = 2{,}00024443$ größer als 2 ist, ist die Grundziffer 4 in der dritten Stelle nach dem Komma ebenfalls gesichert:

$x \approx 1{,}414$

5/8

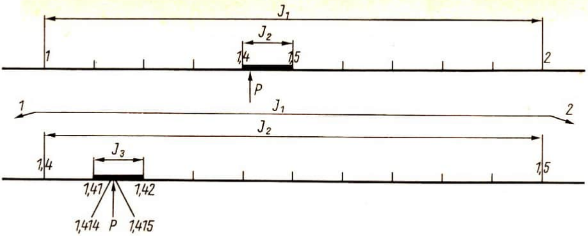


Wie schon in Abschnitt 3.1.3. erläutert wurde, werden der Bereich der rationalen Zahlen und der Bereich der irrationalen Zahlen zum **Bereich der reellen Zahlen** zusammengefaßt.

Auf der Zahlengeraden lassen sich allen reellen Zahlen eindeutig Punkte zuordnen. Bild 5/8 zeigt, wie es auf Grund des Beispiels 5/17 möglich ist, den zur irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ gehörenden Punkt der Zahlengeraden zu konstruieren. Da bewiesen wurde, daß $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, kann auch der zugeordnete Punkt nicht mit einem Punkt zusammenfallen, der einer rationalen Zahl entspricht.

An der Zahlengeraden läßt sich auch der Prozeß der Einschachtelung einer irrationalen Zahl zwischen immer engeren Grenzen rationaler Zahlen geometrisch veranschaulichen: Zu jedem einer nichtrationalen Zahl entsprechenden Punkt lassen sich beliebig viele Paare von Punkten angeben, die rationalen Zahlen entsprechen und zwischen denen er liegt. Bild 5/9 zeigt das in Anlehnung an Beispiel 5/17 für $\sqrt{2}$.

$x = \sqrt{2}$ bedeutet diejenige Zahl, für die $x^2 = 2$ gilt. Dieser Quadratwurzelbegriff wird durch folgende Definition erweitert:



5/9

10 **DEFINITION:** $\sqrt[n]{a}$ **($a \geqq 0$, reell; n positiv ganzzahlig) ist diejenige nichtnegative reelle Zahl b, für die $b^n = a$ gilt.**

$\sqrt[n]{a}$ nennt man die „n-te Wurzel aus a", $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ die „Quadratwurzel aus a", $\sqrt[3]{a}$ die „Kubikwurzel aus a".

18 a) $x = \sqrt[3]{5}$, falls $x^3 = 5$, also $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

b) Aus $x^7 = a$ folgt $x = \sqrt[7]{a}$, also $\left(\sqrt[7]{a}\right)^7 = a$ (a nichtnegativ, reell)

Allgemein gilt also:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad (a \geqq 0, \text{ reell; } n \text{ positiv ganzzahlig})$$

Daß die Definition 5/10 sinnvoll ist, folgt aus folgendem Satz:

11 **SATZ: Ist a eine nichtnegative reelle Zahl und n eine positive ganze Zahl, so existiert stets genau eine nichtnegative reelle Zahl b, für die $b^n = a$ gilt.**

Auf einen Beweis von Satz 5/11 wird hier verzichtet.

23 Begründen Sie, warum das Radizieren eine Umkehrung des Potenzierens ist! Für welche Exponenten n und für welche Basen a ist diese Formulierung nur erlaubt?

19 a) $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, denn $0{,}5^3 = 0{,}125$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, denn $3^4 = 81$

c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

d) $\sqrt[n]{1} = 1$, denn $1^n = 1$ (n positiv ganzzahlig)

e) $\sqrt[n]{0} = 0$, denn $0^n = 0$ (n positiv ganzzahlig)

f) $\sqrt[1]{a} = a$, denn $a^1 = a$ ($a \geqq 0$, reell)

Bei Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten ist folgende Überlegung wichtig:
Nach der Definition 5/10 gilt für die Quadratwurzel: $\sqrt{9} = 3$, denn $3^2 = 9$.

Dagegen hat die quadratische Gleichung $x^2 - 9 = 0$ die Lösungsmenge $\{3; (-3)\}$. Für die Lösungen gilt also $x_1 = \sqrt{9}$; $x_2 = -\sqrt{9}$. Das läßt sich durch $|x| = \sqrt{9}$ darstellen, denn daraus folgt gerade (1) $x_1 = +\sqrt{9}$, (2) $x_2 = -\sqrt{9}$.

20 $\sqrt[4]{16} = 2$, denn $2^4 = 16$. Andererseits hat die Gleichung $b^4 = 16$ die beiden reellen Lösungen

$b_1 = 2$, denn $2^4 = 16$, und

$b_2 = -2$, denn $(-2)^4 = 16$

Die Gleichung $b^4 = 16$ läßt sich äquivalent umformen zu $|b| = \sqrt[4]{16}$ und weiter zu $|b| = 2$, woraus $b_1 = +2$ und $b_2 = -2$ folgen.
Entsprechend gilt:

$\sqrt{a^2} = |a|$; $\sqrt[4]{x^4} = |x|$; $\sqrt[6]{(x-y)^6} = |x-y|$

Aufgaben 5/77 bis 5/83

5.5.2. Näherungswerte für irrationale Quadrat- und Kubikwurzeln; Tafeln

Das Bestimmen von Näherungswerten für irrationale Wurzelwerte ist mühsam und zeitraubend. Für Quadrat- und Kubikwurzeln, die in der Praxis am meisten auftreten, benutzt man deshalb dazu Tabellen oder den Rechenstab. In beiden Fällen wird die Tatsache ausgenutzt, daß Quadratwurzel und Quadratzahl bzw. Kubikwurzel und Kubikzahl jeweils einander eineindeutig zugeordnet sind.
Mit Hilfe einer **Quadratzahltafel** können deshalb auch Näherungswerte von **Quadratwurzeln** und mit Hilfe einer **Kubikzahltafel** Näherungswerte von **Kubikwurzeln** bestimmt werden. Dabei ist die Größenordnung des Ergebnisses stets vorher durch einen Überschlag zu ermitteln. Dazu ist die Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen sehr wertvoll.
Bei **Quadratwurzeln** müssen die im Radikanden abgespaltenen Zehnerpotenzen stets gerade Exponenten haben, da die Quadratwurzeln nur solcher Potenzen von 10 rationale Zahlen sind:

$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$	$\sqrt{10^1}$ sind
$\sqrt{10\,000} = \sqrt{10^4} = 10^2$	$\sqrt{10^3}$ irrationale
$\sqrt{1\,000\,000} = \sqrt{10^6} = 10^3$	$\sqrt{10^5}$ Zahlen

Bei **Kubikwurzeln** müssen die im Radikanden abgespaltenen Zehnerpotenzen stets durch 3 teilbare Exponenten haben, da die Kubikwurzeln nur solcher Potenzen von 10 rationale Zahlen sind:

$\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$,	$\sqrt[3]{10^1}$ sind
$\sqrt[3]{1\,000\,000} = \sqrt[3]{10^6} = 10^2$	$\sqrt[3]{10^2}$ hingegen
$\sqrt[3]{1\,000\,000\,000} = \sqrt[3]{10^9} = 10^3$	$\sqrt[3]{10^4}$ irrationale
	$\sqrt[3]{10^8}$ Zahlen

21 $\sqrt{0{,}68} = \sqrt{68 \cdot 10^{-2}} \approx 8{,}25 \cdot 10^{-1} = 0{,}825$ (ohne Interpolation)

$\sqrt{155} = \sqrt{1{,}55 \cdot 10^2} \approx 1{,}245 \cdot 10 = 12{,}45$ (mit Interpolation)

$\sqrt[3]{7655} \quad = \sqrt[3]{7{,}655 \cdot 10^3} = 1{,}98 \cdot 10^1 \quad = 19{,}8$ (ohne Interpolation)

$\sqrt[3]{0{,}0283} = \sqrt[3]{28{,}3 \cdot 10^{-3}} = 3{,}048 \cdot 10^{-1} = 0{,}3048$ (mit Interpolation)

(Eine Erläuterung des hierbei benötigten Wurzelgesetzes erfolgt im Abschnitt 5.6.)

Beim **Rechenstab** (vgl. Abschnitt 1.1.8.) sind die A-Skale und die D-Skale so eingerichtet, daß unter einer Ziffernfolge der A-Skale auf der D-Skale die Ziffernfolge der **Quadratwurzel** steht. Zur Zuordnung beider Punkte dient der Läuferstrich. Die Zunge wird dabei nicht benötigt. Dabei ist zu beachten, daß bei Radikanden $1 < a < 10$ die linke Hälfte der A-Skale, bei $10 < a < 100$ die rechte Hälfte benutzt wird. Vorher sind die Zehnerpotenzen wie bei der Tabellenbenutzung abzutrennen.

22 Aufgabe: $x = \sqrt{315}$ (Bild 5/10)

a) umformen: $x = \sqrt{3{,}15 \cdot 10^2} = \sqrt{3{,}15} \cdot 10$

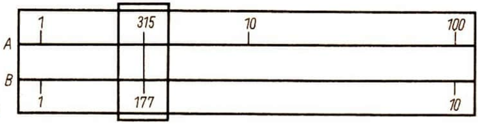
b) einstellen: Läuferstrich auf A 315 – linke Hälfte

c) ablesen: Ergebnis D 177

d) Überschlag: $\sqrt{324} = 18$

e) Endergebnis: $x \approx 17{,}7$

Dieselbe Einstellung kann dazu dienen, einen Näherungswert zu 177^2 zu bestimmen: $177^2 \approx 31\,500$.



5/10

Bei den meisten Rechenstäben befindet sich am oberen Rand noch eine K-Skale, die zusammen mit der D-Skale erlaubt, Kubikwurzeln und (umgekehrt) Kubikzahlen zu bestimmen. Beim Einstellen des Radikanden ist darauf zu achten, daß bei Radikanden $1 < a < 10$ das linke Drittel, bei $10 < a < 100$ das mittlere Drittel, bei $100 < a < 1000$ das rechte Drittel der K-Skale benutzt wird.

24 Bestimmen Sie mit Hilfe des Rechenstabs Näherungswerte für

$\sqrt[3]{2{,}75}, \quad \sqrt[3]{27{,}5}, \quad \sqrt[3]{275};$

$\sqrt{2{,}75}, \quad \sqrt{27{,}5}, \quad \sqrt{275}!$

Aufgaben 5/84 und 5/85

5.5.3. Wurzeln in Potenzschreibweise

Für $\sqrt[n]{a}$ führen wir eine andere Schreibweise, nämlich als Potenz ein, die sich für das Rechnen mit Wurzeln als sehr praktisch erweisen wird.

12 **DEFINITION:**

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ **($a \geqq 0$, reell; $n > 0$, natürlich).**

23 $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$; $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$

Damit wird der Potenzbegriff abermals erweitert, und zwar auf Potenzen mit positiven rationalen Zahlen als Exponenten. Er erfährt dadurch erneut eine qualitative Veränderung. Vorerst liegt noch eine Beschränkung insofern vor, als laut Definition 5/12 nur solche rationale Zahlen in Frage kommen, in deren Klasse ein Stammbruch vorkommt.
Daß die Definition 5/12 zweckmäßig ist und eine Verallgemeinerung auf beliebige rationale Exponenten zuläßt, bedarf eines Beweises. Dieser wird in Abschnitt 5.6.1. erbracht.

Aufgaben 5/86 bis 5/89

5.5.4. Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($n \geqq 2$, natürlich)

Da nach Definition 5/12 geschrieben werden kann

$$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},$$

heißen diese Funktionen auch **Wurzelfunktionen.** (Einfache Beispiele: $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$.) Auf Grund der Definition 5/10 ist unabhängig von n stets

der größtmögliche Definitionsbereich $0 \leqq x < \infty$ und

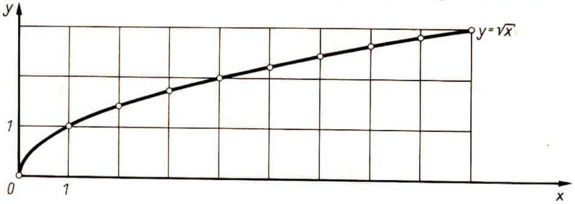
der Wertevorrat $0 \leqq y < \infty$.

Daß tatsächlich Funktionen vorliegen, folgt daraus, daß für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ jeder nichtnegativen reellen Zahl x genau eine nichtnegative reelle Zahl $\sqrt[n]{x}$ zugeordnet und damit die Menge aller geordneten Paare $[x; \sqrt[n]{x}]$ gebildet werden kann. Diese Menge ist aber unter den genannten Bedingungen für jedes der genannten n eine Funktion.

(25) Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion $y = \sqrt{x}$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 9$ bei ganzzahligem x auf!

Bild 5/11 zeigt das Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$ in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 9$. Die Kurve verläuft nur im ersten Quadranten und steigt ständig.

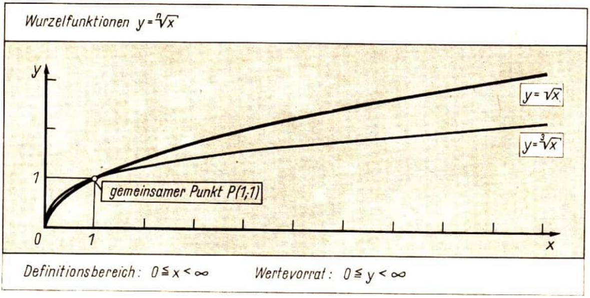
(26) Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = -\sqrt{x}$ ($x \geqq 0$) im Intervall $0 \leqq x \leqq 9$, und vergleichen Sie es mit dem Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$ im gleichen Intervall!



5/11

(27) Stellen Sie eine Wertetafel für die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqq 0)$ für den Teilbereich $0 \leqq x \leqq 9$ auf, und zeichnen Sie das Bild der Funktion in diesem Intervall!

Um die Bilder der Wurzelfunktionen vergleichen zu können, müßten entsprechende Wertetafeln für $y = \sqrt[n]{x}$ noch mit $n = 4, 5, 6, \ldots$ aufgestellt und mit ihrer Hilfe die Bilder alle in ein und dasselbe Koordinatensystem gezeichnet werden. Bild 5/12 zeigt das für $n = 2$ und $n = 3$.



5/2

(28) Beweisen Sie, daß die Bilder aller Wurzelfunktionen $y = \sqrt[n]{x}$ durch denselben Punkt $P(1; 1)$ verlaufen!

(29) Für $x > 1$ gilt: $\sqrt[2]{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \sqrt[5]{x} \ldots$

Für $0 < x < 1$ gilt: $\sqrt[2]{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[5]{x} \ldots$

Begründen Sie diese Behauptungen!

Daraus folgt, daß die Bilder der Wurzelfunktionen für $x > 1$ um so flacher und für $0 < x < 1$ um so näher an der y-Achse verlaufen, je größer der Wurzelexponent ist. Der Punkt $P(1; 1)$ ist allen Bildern gemeinsam.

Das Ergebnis der Übung 5/26 erlaubt folgende verallgemeinerte Feststellung:
Die Bilder der Funktionen $y = \sqrt[n]{x}$ und $y = -\sqrt[n]{x}$ liegen spiegelbildlich zur x-Achse.

Aufgaben 5/90 und 5/91

5.6. Rechnen mit Potenzen (Exponenten rationale Zahlen)

5.6.1. Die Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten

Daß die Definition 5/12 zweckmäßig ist, zeigen wir folgendermaßen an Hand der Feststellungen (I), (II) und (III):

(I) Die Definition erlaubt eine Erweiterung auf beliebige rationale Exponenten.

$\sqrt[n]{a} = b$ bedeutet $a = b^n$ ($a \geqq 0$, reell; $n \geqq 2$, natürlich; $b \geqq 0$, reell)

Wir potenzieren beide Seiten dieser zweiten Gleichung mit m und erhalten:

$a^m = (b^n)^m = b^{n \cdot m} = (b^m)^n$, also $b^m = \sqrt[n]{a^m}$

Daraus ergibt sich, da aus $\sqrt[n]{a} = b$ andererseits

$(\sqrt[n]{a})^m = b^m$ folgt:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Dieses „Wurzelgesetz" läßt sich mit Hilfe der Definition 5/12 wie folgt formulieren:

$$\underset{\displaystyle\sqrt[n]{a^m}}{\underset{\updownarrow}{(a^m)^{\frac{1}{n}}}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \underset{\displaystyle(\sqrt[n]{a})^m}{\underset{\updownarrow}{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Daraus wird die erweiterte Definition 5/13 verständlich:

13 **DEFINITION: Ist $a > 0$ und sind m und n ganze Zahlen ($n > 0$), so wird festgesetzt:**

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Nach dieser Definition ist $a^{\frac{m}{n}}$ diejenige positive Zahl b, für die $b^n = a^m$ gilt.

Wir nennen $a^{\frac{m}{n}}$ eine Potenz mit (beliebigem) rationalem Exponenten.
„Beliebig" ist dadurch gerechtfertigt, daß nur $n > 0$ vorausgesetzt wurde, m aber ganzzahlig. Dadurch kann der Quotient $\frac{m}{n}$ positiv oder negativ sein.

Die Definition 5/12 stellt dann den Spezialfall von 5/13 für $m = 1$ dar.

Ist der Exponent $\frac{m}{n}$ positiv, also neben $n > 0$ auch $m > 0$, so kann die Basis a auch gleich Null sein:

$0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = \sqrt[n]{0} = 0 \quad (m > 0)$

24 a) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^{-3}}} = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$

c) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[7]{\frac{1}{8}}$

(II) Die Definitionen 5/12 und 5/13 erlauben, folgendes wichtige Wurzelgesetz 5/14 herzuleiten und in Potenzschreibweise darzustellen:

$\sqrt[n]{a^m} = b$ ist äquivalent mit $a^m = b^n$.

Die beiden Seiten dieser zweiten Gleichung potenzieren wir mit c und erhalten:

$(a^m)^c = (b^n)^c$ oder $a^{mc} = b^{nc}$

Dafür kann aber geschrieben werden:

$\sqrt[nc]{a^{mc}} = b$

Durch Vergleich mit der Ausgangsgleichung folgt daraus

14 **SATZ: Ist $a > 0$ und sind m, n und c ganze Zahlen mit $n > 0$ und $c > 0$, so gilt:**
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nc]{a^{mc}}$.

In der Schreibweise mit rationalen Exponenten ergibt sich:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mc}{nc}}$$

Man kann also in $a^{\frac{m}{n}}$ den Exponenten $\frac{m}{n}$ wie jeden Quotienten **erweitern.**

25 $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{6}{9}} = a^{\frac{8}{12}} = \ldots$ bzw.

$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[12]{a^8} = \ldots$

$a^{\frac{m}{n}}$ hängt also nicht von dem speziellen Bruch ab, der als Repräsentant des rationalen Exponenten gewählt wird.

Ebenso wie das Erweitern ist das **Kürzen** des Exponenten möglich.

26 a) $\sqrt[6]{2^4} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

b) $\sqrt[8]{\left(\frac{1}{7}\right)^4} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{8}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{7}}$

c) $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

(III) Die Potenzgesetze (Satz 5/6 und Satz 5/6a*) führen nicht zu Widersprüchen, wenn Potenzen mit rationalen Exponenten gemäß Definition 5/13 in die Rechnung einbezogen werden. Die Gesetze können dabei sowohl in der Potenzschreibweise als auch in der Wurzelschreibweise dargestellt werden. Deshalb heißen sie auch **Wurzelgesetze.**

15 **SATZ: Sind a und b positive reelle Zahlen, m, n, p und q ganze Zahlen und n und q positiv, so gilt:**

	in Potenzschreibweise	in Wurzelschreibweise
(1)	$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$	$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$
(2)	$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m}$
(3)	$\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}$
(4)	$\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m}$

(5) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$ $\qquad$ $\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

(6) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Zur Bestätigung der Widerspruchsfreiheit ist es nötig, alle Gesetze einzeln zu betrachten. Als Beispiel soll das Gesetz (5) erörtert werden:

Wir setzen: (1*) $a^{\frac{m}{n}} = u \; (u > 0)$ **und** (2*) $u^{\frac{p}{q}} = v \; (v > 0)$.

Aus (1*) folgt durch Potenzieren mit np**:**

(*) $\quad a^{\frac{m}{n} \cdot np} = \underline{a^{mp} = u^{np}}$

Aus (2*) folgt durch Potenzieren mit nq**:**

(**) $\quad u^{\frac{p}{q} \cdot nq} = \underline{u^{np} = v^{nq}}$

Aus (*) und (**) ergibt sich:

$v^{nq} = a^{mp}$

Wegen (2*) folgt daraus: $\left(u^{\frac{p}{q}}\right)^{nq} = a^{mp}$

und wegen (1*) schließlich:

$\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{nq} = a^{mp}$

Dann gilt aber

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{nq}}$ **oder**

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$, **was zu zeigen war.**

27

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{6}{6}} = 3$

b) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 12)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6$

c) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{1}{6}} \quad (a \geqq 0)$

d) $\frac{a^2}{a^{\frac{2}{3}}} = a^2 \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{2+\left(-\frac{2}{3}\right)} = a^{\frac{4}{3}} \quad (a > 0)$

e) $\left(p^{-\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}} = p^{\frac{1}{6}} \cdot q^{-\frac{2}{5}} \quad (p > 0;\; q > 0)$

Aufgaben 5/92 bis 5/101

5.6.2. Vereinfachen von Wurzeltermen

Besonders häufig werden die Wurzelgesetze (2), (4) und (5), und zwar für $m = p = 1$, gebraucht (vgl. Satz 5/15):

(2*) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad (a \geqq 0;\; b \geqq 0;\; n > 0$, ganzzahlig$)$

(4*) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\qquad$ $(a \geqq 0;\ b > 0;\ n > 0$, ganzzahlig)

(5*) $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[nq]{a}$ $\qquad$ $(a \geqq 0;\ n > 0;\ q > 0$, ganzzahlig)

Außerdem wird oft das Wurzelgesetz (5) für $m = q = 1$ benötigt:

(5**) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ $\quad$ $(a > 0,\ n > 0$, ganzzahlig; p ganzzahlig)

Schließlich können vielfach zur Vereinfachung der Terme angewendet werden:

a) Satz 5/14: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nc]{a^{mc}}$ $\quad$ ($a > 0$, reell; $n > 0$, $c > 0$; n, c, m ganzzahlig),

b) die Wurzeldefinition (Satz 5/10) in der Form $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $(a \geqq 0;\ n > 0$, ganzzahlig).

Durch **Addition und Subtraktion** lassen sich Wurzeln nur bei gleichen Wurzelexponenten und gleichen Radikanden zusammenfassen. Mitunter ist es möglich, diese Gleichheit durch vorheriges Umformen unter Anwendung von Gesetz (2*) und der Wurzeldefinition herzustellen (Zerlegen des Radikanden in geeignete Faktoren).

28 a) $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$$= -6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$$

b) $3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$ $\quad (x \geqq 0)$

c) $\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3 \cdot 8} + 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 27}$

$$= \sqrt[3]{3} - 2 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$= \sqrt[3]{3} - 2 \cdot 2\sqrt[3]{3} + 3 \cdot 3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$$

Bei der **Multiplikation oder Division** von Wurzeln ist die Zusammenfassung zu einer einzigen Wurzel ohne weiteres möglich, wenn alle Wurzeln gleiche Wurzelexponenten haben [Gesetze (2*) und (4*)].

29 a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ $\quad (a \geqq 0;\ b > 0)$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{2a^2b}{9c^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4ab^2}{3c}} = \sqrt[3]{\dfrac{2a^2b}{9c^2} \cdot \dfrac{4ab^2}{3c}} = \sqrt[3]{\dfrac{8a^3b^3}{27c^3}} = \dfrac{2ab}{3c}$ $\quad (a \geqq 0;\ b \geqq 0;\ c > 0)$

Stimmen die Wurzelexponenten nicht überein, muß man versuchen, das mit Hilfe von Satz 5/14 zunächst zu erreichen.

30 a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^3}$ $\quad (a \geqq 0)$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^4}{2^3}} = \sqrt[12]{2}$

Oft ergibt sich die Möglichkeit einer Termvereinfachung durch Zusammenfassen von Wurzeln erst im Verlaufe einer längeren Rechnung (vgl. dazu auch Beispiel 5/28 c).

$\boxed{31}$ **a)** $(6\sqrt{3} - 3\sqrt{6})(3\sqrt{3} + 6\sqrt{6}) = 18(\sqrt{3})^2 + 36\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} - 9\sqrt{6}\cdot\sqrt{3} - 18(\sqrt{6})^2$

$= 18\cdot 3 + 36\sqrt{18} - 9\sqrt{18} - 18\cdot 6 = 54 + 27\sqrt{18} - 108$

$= -54 + 27\sqrt{9\cdot 2} = -54 + 27\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = -54 + 27\cdot 3\cdot\sqrt{2} = -54 + 81\sqrt{2}$

b) $(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^2 = (\sqrt{2x})^2 - 2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{3y} + (\sqrt{3y})^2$

$= 2x + 3y - 2\sqrt{6xy} \quad (x \geqq 0;\ y \geqq 0)$

Das **Potenzieren** von Wurzeln ist ohne Schwierigkeiten in der Wurzelschreibweise möglich. Umgekehrt können Wurzeln und Potenzen als Radikanden mit Vorteil gelegentlich als Potenzen von Wurzeln geschrieben werden.

$\boxed{32}$ **a)** $(\sqrt[4]{3^6})^2 = \sqrt[4]{(3^6)^2} = \sqrt[4]{3^{6\cdot 2}} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3$

b) $(\sqrt[3]{a^2})^4 = \sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6\cdot a^2} = a^2\sqrt[3]{a^2} \quad (a \geqq 0)$

c) $\sqrt[3]{a^2} = (\sqrt[3]{|a|})^2$

d) $\sqrt[n]{a^{2k}} = (\sqrt[n]{|a|})^{2k} \qquad (k \text{ natürlich})$

e) $\sqrt[n]{a^{2k+1}} = (\sqrt[n]{a})^{2k+1} \quad (a \geqq 0;\ k \text{ natürlich})$

(30) Begründen Sie, warum

a) bei Beispiel 5/32 e) eine Bedingung für a angegeben werden muß, bei Beispiel 5/32 c) und d) aber nicht, und

b) bei Beispiel 5/32 c) und d) unter dem Wurzelzeichen auf der rechten Seite $|a|$ stehen muß, bei Beispiel 5/32 e) aber nur a (ohne Betragsstriche)!

Beim **Radizieren** von Wurzeln ist es besser, zur Potenzschreibweise überzugehen und die Aufgaben in dieser Form zu rechnen.

$\boxed{33}$ **a)** $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$, besser: $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{8^{\frac{1}{2}}} = \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{6}}$

$= (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2}$, besser: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[5]{(a^2)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{2}{3}}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{a^2}$

c) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \left[2\cdot\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\cdot\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2^{\frac{7}{4}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{2^7}$

Aufgaben 5/102 bis 5/120

5.6.3. Rationalmachen des Nenners

Die Berechnung von Näherungswerten für den Term $\frac{5}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{z. B. } \frac{5}{\sqrt{2}} \approx \frac{5}{1{,}4142}\right)$ läßt sich vereinfachen, wenn man den Bruch $\frac{5}{\sqrt{2}}$ mit $\sqrt{2}$ erweitert:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} = 2{,}5\cdot 1{,}4142$$

Durch das Erweitern haben wir einen Bruch erhalten, dessen Nenner rational ist. Wir sagen deshalb: Wir haben den Nenner des Bruches $\frac{5}{\sqrt{2}}$ rational gemacht.

34 Der Quotient $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ ist so zu erweitern, daß im Nenner des erweiterten Bruches kein Wurzelzeichen auftritt. Das ist durch Erweitern mit $\sqrt{a}$ möglich:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Die Beseitigung des Wurzelzeichens im Nenner eines Quotienten durch Erweitern wird auch dann als **Rationalmachen des Nenners** bezeichnet, wenn der Nenner vorher schon eine rationale Zahl war (im Beispiel 5/34 für $a = 9$) oder nach Beseitigung des Wurzelzeichens noch eine irrationale Zahl ist (im Beispiel 5/34 etwa für $a = \pi$).

Den Nenner eines Quotienten von Wurzeln zu befreien, ist ohne Schwierigkeiten stets möglich, wenn im Nenner des Quotienten nur einzelne Wurzeln (wie in Beispiel 5/34) oder Produkte von Wurzeln vorkommen.

35 a) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt[6]{3^4\cdot 3^3}}{3} = \frac{\sqrt[6]{3^7}}{3} = \frac{\sqrt[6]{3^6}\cdot\sqrt[6]{3}}{3} = \frac{3\sqrt[6]{3}}{3} = \sqrt[6]{3}$

b) $\frac{5}{\sqrt[5]{2}}$. Diesen Bruch erweitern wir mit $\sqrt[5]{2^4}$:

$$\frac{5}{\sqrt[5]{2}} = \frac{5\cdot\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{2^4}} = \frac{5\cdot\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{5}{2}\sqrt[5]{2^4}$$

c) $\frac{8}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{8\cdot(\sqrt[3]{2})^2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}\cdot(\sqrt[3]{2})^2\cdot\sqrt{5}} = \frac{8\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \frac{4}{5}\sqrt[6]{4^2\cdot 5^3} = \frac{4}{5}\sqrt[6]{2000}$

Stehen im Nenner aber Summen von Wurzeln, so können unter besonderen einfachen Bedingungen die Nenner durch Anwendung der binomischen Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ rational gemacht werden.

36 a) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$. Durch Erweitern mit $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ erhält man:

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{7+2\sqrt{35}+5}{7-5} = \frac{12+2\sqrt{35}}{2} = 6+\sqrt{35}$$

b) $\dfrac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ ($b \geqq 0$; $c \geqq 0$; b nicht zugleich mit c gleich Null)

Durch Erweitern mit $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ erhält man:

$$\frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

Aufgaben 5/121 bis 5/123

6. Rechnen mit Logarithmen

6.1. Definition des Logarithmus und des Logarithmierens

6.1.1. Potenzen mit reellen Exponenten

Gleichungen, die die Variable x im Exponenten einer Potenz enthalten, lassen sich leicht lösen, wenn auf jeder Seite der Gleichung nur eine einzige Potenz mit derselben Basis steht, z. B. $5^x = 5^3$. Die Gleichheit der Potenzen ist in solchen Fällen nur gewährleistet, wenn auch die Exponenten gleich sind: $x = 3$. Das ist aber die gesuchte Lösung der Gleichung $5^x = 5^3$.

1 Mitunter ist es möglich, die Gleichungsseiten so umzuschreiben, daß diese Bedingung erfüllt ist. So kann statt

a) $2^x = 32$ | **b)** $3^x = \sqrt{3}$

geschrieben werden

$2^x = 2^5$ | $3^x = 3^{\frac{1}{2}}$

und daraus ergibt sich die Lösung

$x = 5$ | $x = \dfrac{1}{2}$

(Ob das die einzigen Lösungen solcher Gleichungen sind oder ob sie noch weitere haben, soll hier zunächst nicht erörtert werden.)

1 Lösen Sie folgende Gleichungen!

a) $3^x = 81$ **b)** $10^x = 1\,000\,000$ **c)** $10^x = 0{,}001$

d) $2^x = \sqrt[3]{4}$ **e)** $2^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Es gibt Gleichungen mit der Variablen x im Exponenten, die keine rationalen Zahlen als Lösungen haben, z. B. $2^x = 5$.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ (p, q ganzzahlig; $q > 0$), für die gilt

(1) $2^{\frac{p}{q}} = 5.$

Durch Potenzieren beider Seiten dieser Gleichung mit q erhalten wir

(2) $2^p = 5^q.$

Für jedes ganzzahlige $p > 0$ ist 2^p eine gerade Zahl, denn alle positiven ganzzahligen Potenzen mit der Basis 2 sind durch 2 teilbar. Andererseits ist für jedes ganzzahlige $q > 0$ die Potenz 5^q eine ungerade Zahl, denn alle positiven ganzzahligen Potenzen einer ungeraden Zahl sind wieder ungerade Zahlen. Es gibt aber keine gerade Zahl, die gleich einer ungeraden Zahl ist. Für $p \leqq 0$ ist $2^p \leqq 1$ und wegen $q > 0$ ist $5^q \geqq 5$.

Infolgedessen ist die Annahme, daß $2^x = 5$ durch eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ lösbar sei, falsch. Der Exponent x ist also keine rationale Zahl.

Um solche Gleichungen ohne Einschränkung lösen zu können, erweitern wir den Potenzbegriff abermals, indem wir reelle, also auch irrationale Exponenten zulassen. Daß das zweckmäßig ist, zeigt folgende Überlegung:
Jede irrationale Zahl läßt sich (vgl. Abschnitt 5.5.1.) zwischen zwei beliebig nahe beieinander gelegene rationale Zahlen einschachteln und auf diese Weise beliebig genau durch rationale Zahlen annähern. Dieses Verfahren erlaubt auch, eine Potenz mit irrationalem Exponenten durch eine Potenz mit rationalen Exponenten beliebig anzunähern, wenn der irrationale Exponent einer solchen Intervallschachtelung unterworfen wird und damit selbst durch eine rationale Zahl angenähert wird.
Auf eine Darstellung dieser Einschachtelung wollen wir hier verzichten und als Ergebnis lediglich zusammenfassend feststellen:

1 **Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten lassen sich mit Hilfe einer Intervallschachtelung definieren.**

Für die so definierten Potenzen gelten die folgenden Potenzgesetze, die bisher nur für rationale Exponenten hergeleitet wurden. (Auf Beweise wird hier verzichtet.)

2 **SATZ: Sind a und b beliebige positive reelle Zahlen und r und s beliebige reelle Zahlen, so gilt:**

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ **(2)** $a^r \cdot b^r = (ab)^r$

(3) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ **(4)** $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

(5) $(a^r)^s = a^{rs}$ **(6)** $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

2 **a)** $3^{\sqrt{18}} \cdot 3^{\sqrt{32}} = 3^{\sqrt{18}+\sqrt{32}} = 3^{3\sqrt{2}+4\sqrt{2}} = 3^{7\sqrt{2}}$

b) $\frac{5^3}{5^{\sqrt{3}}} = 5^3 \cdot 5^{-\sqrt{3}} = 5^{3-\sqrt{3}}$

c) $(\sqrt{5}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = \sqrt{5}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \sqrt{5}^{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{5^4} = 25$

Aufgaben 6/1 und 6/2

6.1.2. Der Logarithmusbegriff

Die Beispiele in Übung 6/1 lassen sich beliebig vermehren:

3 a) $4^x = 2^{\sqrt{2}}$

$(2^2)^x = 2^{\sqrt{2}}$

$2^{2x} = 2^{\sqrt{2}}$

$2x = \sqrt{2}$

$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $5^\pi = (\sqrt{5})^x$

$5^\pi = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x$

$5^\pi = 5^{\frac{1}{2}x}$

$\frac{1}{2}x = \pi$

$x = 2\pi$

Übung 6/1 und Beispiele 6/1 und 6/3 machen folgenden Satz verständlich:

3 **SATZ: Jede Gleichung $a^x = b$ ($a > 0$; $a \neq 1$, $b > 0$) hat genau eine reelle Lösung.**

Der Beweis dieses Satzes soll hier nicht geführt werden. Danach hat aber auch jede Gleichung mit der Variablen x im Exponenten, für die es nicht möglich ist, die beiden Seiten zu Potenzen mit gleicher Basis umzuformen, z. B. $5^x = 2$; $10^x = 18$ usw., eine Lösung.
Um die sicher nicht rationalen Lösungen solcher Gleichungen angeben zu können, werden einige neue Begriffe und Fachbezeichnungen erforderlich.

Die nach Satz 6/3 **eindeutig bestimmte Zahl x** in $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$) nennt man den **Logarithmus von b zur Basis a** und bezeichnet sie mit „$\log_a b$".

Die Lösung x von $5^x = 2$ ist also $x = \log_5 2$, die von $10^x = 18$ infolgedessen $x = \log_{10} 18$ (gelesen: Logarithmus von 2 zur Basis 5 bzw. Logarithmus von 18 zur Basis 10). Diese beiden Lösungen sind sicher nichtrationale Zahlen.

Es ergibt sich die Notwendigkeit, die oben als Logarithmus eingeführten Zahlen näher zu untersuchen.

4 **DEFINITION: $\log_a b$ ($b > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$) ist diejenige reelle Zahl c, für die $a^c = b$ gilt.**

Mit anderen Worten:

$a^c = b$ und $c = \log_a b$ $(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$ sind äquivalent,

d. h., es gilt $c = \log_a b$ genau dann, wenn $a^c = b$.

Die positive Zahl b heißt der zum **Logarithmus** c und zur **Basis** a gehörende **Numerus.** Die Operation, die den Zahlen a und b die Zahl $c = \log_a b$ zuordnet, heißt **Logarithmieren.**
Nach Definition 6/4 gilt

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$$

4 a) $\log_2 128 = 7$, denn $2^7 = 128$

b) $\log_3 4{,}72880\ldots = \sqrt{2}$, denn $3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880\ldots$

c) $\log_{10} 100 = 2$, denn $10^2 = 100$

d) $\log_{10} 3 = 0{,}47712\ldots$, denn $10^{0{,}47712\ldots} = 3$

(2) Schreiben Sie die Gleichungen a) $2^5 = 32$, b) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ in der Form $c = \log_a b$!

(3) Schreiben Sie die Gleichungen a) $\log_3 81 = 4$, b) $\log_{10} 1 = 0$ in der Form $a^c = b$!

Zwischen Potenzieren und Logarithmieren, zwischen Potenzieren und Radizieren und zwischen Radizieren und Logarithmieren besteht ein Zusammenhang:
Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren heißen die **Rechenoperationen der Stufe III** (sie gehören nicht zu den Grundrechenarten, die die Operationen der Stufen I und II umfassen). Radizieren und Logarithmieren sind die beiden Umkehroperationen des Potenzierens:

$$\text{Potenzieren}\quad a^c = b \begin{array}{l} \nearrow a = \sqrt[c]{b} \qquad \text{Radizieren} \\ \searrow c = \log_a b \quad \text{Logarithmieren} \end{array}$$

(4) Warum gibt es zum Addieren und Multiplizieren je nur eine umgekehrte Rechenoperation, zum Potenzieren aber deren zwei?

Laut Definition 5/5 gilt

$a^0 = 1$ für alle reellen Zahlen $a \neq 0$,

$a^1 = a$ für alle reellen Zahlen a.

Schreiben wir diese beiden Gleichungen mit Hilfe des Logarithmussymbols, so ergibt sich

$0 = \log_a 1$ bzw. $1 = \log_a a$.

Das heißt: Zum Numerus 1 gehört in jedem Fall (unabhängig von der gewählten Basis a) der Logarithmus 0 und zum Numerus, der gleich der Basis ist, in jedem Fall der Logarithmus 1.

5 a) $\log_7 1 = 0$; $\quad \log_{10} 1 = 0$; $\quad \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$;

b) $\log_4 4 = 1$; $\quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$; $\quad \log_{10} 10 = 1$

5 ▷ SATZ: Ist $a > 0$; $a \neq 1$, so gilt stets

$\log_a a = 1$ und $\log_a 1 = 0$.

Ohne Begründung sei noch folgender Satz mitgeteilt:

6 ▷ SATZ: Ist $a > 1$, so gilt:

Für $0 < b < 1$ ist $\log_a b < 0$,

für $b > 1$ ist $\log_a b > 0$.

6

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a) } \log_2 \frac{1}{8} = -3, & \text{denn} & 2^{-3} = \frac{1}{8} \\ \text{b) } \log_5 0{,}04 = -2, & \text{denn} & 5^{-2} = \frac{1}{25} = 0{,}04 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 < b < 1 \\ \log_a b < 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{c) } \log_{10} 100 = 2, & \text{denn} & 10^2 = 100 \\ \text{d) } \log_3 81 = 4, & \text{denn} & 3^4 = 81 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b < 1 \\ \log_a b > 0 \end{array}$$

Die Logarithmen aller positiven reellen Zahlen zu einer vorgegebenen Basis a ($a > 0$; $a \neq 1$) bilden ein **Logarithmensystem.**

Die Logarithmen des Logarithmensystems zur Basis 10 heißen **dekadische oder Briggssche[1] Logarithmen.** Statt „$\log_{10} b$" schreibt man hier kürzer „$\lg b$". Dieses Logarithmensystem ist das in der Praxis fast ausschließlich benutzte. Das hat seinen Grund darin, daß der Aufbau der Logarithmentafeln und das Arbeiten mit diesen besonders einfach und übersichtlich ist, wie im Abschnitt 6.1.3. verständlich werden wird.

Die dekadischen Logarithmen bilden auch die Grundlage für die Skalen auf dem Rechenstab und sind wie dieser ein wichtiges Rechenhilfsmittel für die Praxis, ohne die im Zeitalter der Technik eine rationelle Erledigung anfallender Berechnungen nicht denkbar ist.

Aufgaben 6/3 bis 6/10

6.1.3. Die dekadischen Logarithmen

Nach Definition 6/4 sind äquivalent

$\log_a b = c$ und $b = a^c$.

7 Äquivalente Gleichungen sind also:

a) $\log_5 625 = 4$ und $625 = 5^4$

b) $\log_7 \dfrac{1}{243} = -3$ und $\dfrac{1}{243} = 7^{-3}$

c) $\lg 100\,000 = 5$ und $10\,000 = 10^5$

Wird in der ersten Gleichung b aus der zweiten substituiert, so ergibt sich

$\boldsymbol{\log_a a^c = c}$

In Worten heißt das:

Ist der Numerus eine Potenz der Basis, so ist der Logarithmus gleich dem Exponenten dieser Potenz.

Ist insbesondere dieser Exponent eine ganze Zahl, so ist auch der Logarithmus ganzzahlig.

8 $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$; $\log_5 0{,}04 = \log_5 \dfrac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

Für die **dekadischen Logarithmen** gilt:

a) Ganzzahlige Logarithmen haben nur diejenigen Numeri, die Potenzen von 10 mit ganzzahligen Exponenten sind.
b) Die Logarithmen aller anderen rationalen positiven Numeri sind irrational.
c) Für gewisse irrationale Numeri erhalten wir hingegen rationale Logarithmen.

9 **a)** $\lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4$; $\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2$;

b) $\lg 3 = \lg 10^{\lg 3} = 0{,}4771\ldots$;

c) $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

Für die weitere Untersuchung der dekadischen Logarithmen ist es zweckmäßig, alle Zahlen, von denen die Logarithmen bestimmt werden sollen, mit abgetrennten Zehner-

[1]) HENRY BRIGGS (1561–1630), ein englischer Mathematiker, veröffentlichte 1620 eine Tafel mit dekadischen Logarithmen.

potenzen zu schreiben, z. B. $3754{,}79 = 3{,}75479 \cdot 10^3$; $0{,}0375479 = 3{,}75479 \cdot 10^{-2}$ (vgl. Abschnitt 5.4.3.).

10 Es sollen nun die Logarithmen von allen Zahlen bestimmt werden, die aus 6,85 durch Multiplikation mit einer Potenz 10^k mit ganzzahligem Exponenten k entstehen, also von allen Zahlen der Form $6{,}85 \cdot 10^k$ (k ganzzahlig).
Wir nehmen an, daß uns der Logarithmus von $6{,}85 \cdot 10^0 = 6{,}85$ bekannt ist: $\lg 6{,}85 = 0{,}8357$, d. h. $6{,}85 = 10^{0,8357}$.
Dann können wir folgende Übersicht aufstellen, wobei wir das Potenzgesetz $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$ anwenden:

$k = 0$	6,85	$= 6{,}85 \cdot 10^0$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^0$	$= 10^{0,8357}$
1	68,5	$= 6{,}85 \cdot 10^1$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^1$	$= 10^{1,8357}$
2	685	$= 6{,}85 \cdot 10^2$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^2$	$= 10^{2,8357}$
3	6850	$= 6{,}85 \cdot 10^3$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^3$	$= 10^{3,8357}$
4	68500	$= 6{,}85 \cdot 10^4$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^4$	$= 10^{4,8357}$
-1	0,685	$= 6{,}85 \cdot 10^{-1}$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^{-1}$	$= 10^{0,8357-1}$
-2	0,0685	$= 6{,}85 \cdot 10^{-2}$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^{-2}$	$= 10^{0,8357-2}$
-3	0,00685	$= 6{,}85 \cdot 10^{-3}$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^{-3}$	$= 10^{0,8357-3}$
-4	0,000685	$= 6{,}85 \cdot 10^{-4}$	$= 10^{0,8357} \cdot 10^{-4}$	$= 10^{0,8357-4}$

In der Logarithmenschreibweise ergibt sich folgendes:

$$\lg 6{,}85 = 0{,}8357$$

$\lg 68{,}5 = 1{,}8357$	$\lg 0{,}685 = 0{,}8357 - 1 \; (= -0{,}1643)$
$\lg 685 = 2{,}8357$	$\lg 0{,}0685 = 0{,}8357 - 2 \; (= -1{,}1643)$
$\lg 6850 = 3{,}8357$	$\lg 0{,}00685 = 0{,}8357 - 3 \; (= -2{,}1643)$
$\lg 68500 = 4{,}8357$	$\lg 0{,}000685 = 0{,}8357 - 4 \; (= -3{,}1643)$

Das Beispiel 6/10 zeigt folgendes:
Der Logarithmus der Zahl 6,85 ist die Grundlage für alle Logarithmen der Zahlen $6{,}85 \cdot 10^k$ (k ganzzahlig). Diese unterscheiden sich vom Logarithmus der Zahl 6,85 nur um die additive ganzzahlige Konstante k. Um das für alle k deutlich zu machen, empfiehlt es sich, die für $k < 0$ entstehenden Differenzen (z. B. $0{,}8357 - 3$) nicht auszurechnen, sondern in Form der nicht ausgerechneten Differenz anzugeben.

7 **SATZ: Es sei r eine positive Zahl mit $1 \leqq r < 10$ und $\lg r = m$. Ist k eine beliebige ganze Zahl, so gilt $\lg (r \cdot 10^k) = m + k$.**

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\lg r = m$, d. h., es gilt $r = 10^m$. Dann ist $r \cdot 10^k = 10^m \cdot 10^k = 10^{m+k}$, d. h.: $\lg (r \cdot 10^k) = m + k$.

11 **a)** Im Beispiel 6/10 war

$r = 6{,}85$; $\lg r = m = 0{,}8357$ und z. B. für $k = 4$

$r \cdot 10^k = 6{,}85 \cdot 10^4 = 68500$ und

$$\lg (r \cdot 10^k) = \lg 68500 = m + k = 0{,}8357 + 4 = 4{,}8357$$

b) Ein weiteres Beispiel:

$r = 5{,}2$; $m = \lg r = 0{,}7160$; $k = -3$. Dann folgt:

$r \cdot 10^k = 5{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}0052$ und

$$\lg (r \cdot 10^k) = \lg 0{,}0052 = m + k = 0{,}7160 + (-3) = 0{,}7160 - 3$$

Man nennt die ganze Zahl k die **Kennzahl** und die Zahl m die **Mantisse des Logarithmus** von $r \cdot 10^k$.

Für Beispiel 6/10 ergibt sich also

x	$\lg x$	Kennzahl k	Mantisse m
685	2,8357	2	0,8357
6,85	0,8357	0	0,8357
0,00685	0,8357 − 3	−3	0,8357

Da die Mantisse $m = \lg r$ als Logarithmus einer zwischen 1 und 10 gelegenen Zahl ($1 \leqq r < 10$) zwischen $\lg 1 = 0$ und $\lg 10 = 1$ (ausschließlich) liegt, muß sie ein positiver Dezimalbruch kleiner als 1 sein (0, ...).

8 **SATZ: Für die Mantisse m gilt stets $0 \leqq m < 1$.**

5 Wie lauten die Mantissen folgender Logarithmen?

2,4285; 0,4771 − 3; 0,9888;

lg 50; lg 0,0007; lg 6

9 **SATZ: Für die Kennzahl k gilt folgende Abhängigkeit vom Numerus $x = r \cdot 10^k$ mit $1 \leqq r < 10$:**

a) Falls $x \geqq 1$, ist die Kennzahl k positiv und um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen, die in der Dezimalschreibweise von x vor dem Komma stehen.

b) Falls $0 < x < 1$, ist die Kennzahl k negativ und ihr Betrag um 1 größer als die Anzahl der Nullen, die in der Dezimalschreibweise von x unmittelbar hinter dem Komma vor der ersten von Null verschiedenen Grundziffer stehen.

12 **a)** Beispiele zu Satz 6/9a:

$\lg 25{,}5 = 1{,}4065$

$x = 25{,}5 > 1$; Stellen vor dem Komma von x: 25,...
Anzahl der Stellen vor dem Komma: 2
Kennzahl k des Logarithmus: 1, denn $k = 2 - 1 = 1$

$\lg 37\,500 = 4{,}5740$

$x = 37\,500 > 1$; Stellen vor dem Komma: 37500,...
Anzahl der Stellen vor dem Komma: 5
Kennzahl k des Logarithmus: 4, denn $k = 5 - 1 = 4$

b) Beispiele zu Satz 6/9b:

$\lg 0{,}008 = 0{,}9031 - 3$

$x = 0{,}008 < 1$; Nullen hinter dem Komma .,00...
Anzahl der Nullen hinter dem Komma: 2
Kennzahl k des Logarithmus: −3, denn $|k| = 2 + 1 = 3$, also $k = -3$

$\lg 0{,}219 = 0{,}3404 - 1$
$x = 0{,}219 < 1$; Nullen hinter dem Komma fehlen, ihre Anzahl ist also: 0
Kennzahl k des Logarithmus: -1, denn $|k| = 0 + 1 = 1$, also $k = -1$

6 Begründen Sie Satz 6/9!

7 Wie heißen die Kennzahlen der Logarithmen von folgenden Zahlen x?

a) $10 \leqq x < 100$ **b)** $100 \leqq \; < x\,1000$ **c)** $0{,}1 \leqq x < 1$ **d)** $0{,}01 \leqq x < 0{,}1$

In unserer Logarithmentafel sind die Mantissen der dekadischen Logarithmen der Zahlen von 100 bis 999 mit vier Dezimalstellen ohne Angabe der Null vor dem Komma aufgeführt.

13 **a)** Aufsuchen des Logarithmus zu einem vorgegebenen Numerus:
$\lg 60{,}4 = 1{,}7810$; $\lg 6040 = 3{,}7810$; $\lg 0{,}00924 = 0{,}9657 - 3$

b) Aufsuchen des Numerus zu einem vorgegebenen Logarithmus:
$\lg x = 1{,}7896$, dann ist $x = 61{,}6$
$\lg x = 0{,}7896 - 2$, dann ist $x = 0{,}0616$

8 Vervollständigen Sie die folgenden Tabellen!

a)

x	33,9	4750	8,71	15	0,346	0,00054	99100
$\lg x$							

b)

$\lg x$	3,9330	0,8993	1,5911	2,1367	0,3729 − 4	0,8156 − 2	0,7243
x							

Die in der Tafel tabellierten Mantissen (mit Ausnahme der zu 100 gehörenden) sind Näherungswerte irrationaler Zahlen. Der Betrag des Fehlers eines solchen Näherungswertes ist aber nicht größer als eine halbe Einheit der letzten Dezimalstelle. So bedeutet $\lg 8{,}02 = 0{,}9042$:

$$0{,}90415 < \lg 8{,}02 < 0{,}90425$$

Man verzichtet deshalb auch auf die exakte Schreibweise $\lg 8{,}02 \approx 0{,}9042$ und schreibt stets das Gleichheitszeichen.
Auf die Technik der Berechnung der in der Tafel tabellierten Näherungswerte von Logarithmen kann hier nicht eingegangen werden.

Wie bei der Benutzung der Tafeln der Winkelfunktionen (vgl. Abschnitt 3.1.3.) kann man die Genauigkeit der Ablesung durch eine **lineare Interpolation** vergrößern.

14 Es ist $\lg 473{,}8$ unter Anwendung einer Interpolation zu bestimmen.
Aus der Tafel entnehmen wir die Logarithmen für 473,0 und für 474,0, zwischen denen der gesuchte Logarithmus liegen muß.

$$\frac{10}{10}\left[\begin{array}{l} \frac{n}{10}\left[\begin{array}{l}\lg 473{,}0 = 2{,}6749 \\ \lg 473{,}8 = 2{,}67\,.\,.\end{array}\right] d \\ \qquad \lg 474{,}0 = 2{,}6758 \end{array}\right] D$$

$$D = (2{,}6758 - 2{,}6749) \cdot 10000 = 9$$
$$n = \frac{8}{10} \cdot 10 = 8$$

Wird als Annäherung eine lineare Funktion angenommen, so besteht die Proportionalität

$d : n = D : 10$

(d: Eigendifferenz; n: vierte zählende Grundziffer; D: Tafeldifferenz).
Im vorliegenden Beispiel erhält man:

$$d = \frac{D \cdot n}{10} = \frac{9 \cdot 8}{10} = 7{,}2 \approx 7$$

$\lg 473{,}8 = 2{,}6749 + 0{,}0007 = 2{,}6756$

15 Zu $\lg x = 0{,}8827$ ist x unter Anwendung des Interpolierens zu bestimmen.

Der gegebene Logarithmus liegt zwischen den in der Tafel vermerkten Werten $0{,}8825 = \lg 7{,}630$ und $0{,}8831 = \lg 7{,}640$

$$\frac{10}{1000}\left[\frac{n}{1000}\left[\begin{matrix}\lg 7{,}630 = 0{,}8825 \\ \lg 7{,}63. = 0{,}8827\end{matrix}\right] d \atop \lg 7{,}640 = 0{,}8831\right] D \qquad \begin{aligned} d &= (0{,}8827 - 0{,}8825) \cdot 10\,000 = 2 \\ D &= (0{,}8831 - 0{,}8825) \cdot 10\,000 = 6 \end{aligned}$$

$$n = \frac{10 \cdot d}{D} = \frac{10 \cdot 2}{6} = \frac{20}{6} = 3{,}\bar{3} \approx 3$$

$x = 7{,}633$; also $0{,}8827 = \lg 7{,}633$

Der Fehler eines durch lineare Interpolation berechneten Logarithmus bzw. Numerus ist größer als der Fehler eines Logarithmus bzw. Numerus, den wir der Tafel unmittelbar entnehmen können, denn

1. D ist fehlerhaft, da die in der Tafel angegebenen Mantissen nur Näherungswerte sind,
2. die Annahme des linearen Anwachsens der Logarithmen trifft nur annähernd zu,
3. durch das Runden von d bzw. n auf eine ganze Zahl entsteht eine weitere Ungenauigkeit.

Deshalb ist es auch nicht zweckmäßig und auch nicht zulässig, ein und denselben Wert mehrmals hintereinander zu interpolieren. Das gilt auch für das Interpolieren bei anderen Tafeln (Winkelfunktionswerte, Quadratzahlen, Kubikzahlen, Kreisumfänge, Kreisinhalte usw.).

Aufgaben 6/11 bis 6/32

6.2. Logarithmengesetze; Rechnen mit Logarithmen

6.2.1. Die Logarithmengesetze

Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln von positiven reellen Zahlen lassen sich, oft allerdings nur näherungsweise, dafür aber mit weniger Arbeitsaufwand, mit Hilfe der Logarithmentafel (kurz: logarithmisch) berechnen. Die Grundlage dafür sind die **Logarithmengesetze.**

16 In der Logarithmentafel finden wir

$\lg 2 = 0{,}3010$; $\lg 3{,}8 = 0{,}5798$; $\lg 9 = 0{,}9542$

Wir bilden

a) $\lg 2 + \lg 3{,}8 = 0{,}3010 + 0{,}5798 = 0{,}8808$ und finden in der Tafel $0{,}8808 = \lg 7{,}6 = \lg (2 \cdot 3{,}8)$;

b) $\lg 3{,}8 - \lg 2 = 0{,}5798 - 0{,}3010 = 0{,}2788$ und finden in der Tafel $0{,}2788 = \lg 1{,}9 = \lg (3{,}8 : 2)$;

c) $3 \cdot \lg 2 = 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}9030$ und finden in der Tafel $0{,}9030 \approx 0{,}9031 = \lg 8 = \lg 2^3$;

d) $\frac{1}{2} \cdot \lg 9 = 0{,}9542 : 2 = 0{,}4771$ und finden in der Tafel $0{,}4771 = \lg 3 = \lg \sqrt[2]{9}$.

Diese Zahlenbeispiele führen uns zu den folgenden Logarithmengesetzen.

10 **SATZ: Sind x_1 und x_2 positive reelle Zahlen und ist a eine positive von 1 verschiedene reelle Zahl sowie r eine beliebige reelle Zahl, so gilt:**

(1) $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(2) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

(3) $\log_a x_1^r = r \log_a x_1$

Das Gesetz (3) enthält für $r = \frac{1}{n}$ ($n > 1$, ganzzahlig) auch das Gesetz für das Radizieren mit:

(3*) $\log_a \sqrt[n]{x_1} = \frac{1}{n} \log_a x_1$

Beweise zu (1),(2) und (3):
Es sei

$\log_a x_1 = b_1$ und $\log_a x_2 = b_2$, d. h. $x_1 = a^{b_1}$ und $x_2 = a^{b_2}$

zu (1): (1′) $x_1 \cdot x_2 = a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1 + b_2}$,

also $\log_a (x_1 \cdot x_2) = b_1 + b_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$

zu (2): (2′) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1} \cdot a^{-b^2} = a^{b_1 - b_2}$,

also $\log_a \frac{x_1}{x_2} = b_1 - b_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$

zu (3): (3′) $x_1^r = (a^{b_1})^r = a^{rb_1}$,

also $\log_a x_1^r = rb_1 = r \cdot \log_a x_1$

Mit Hilfe der Logarithmengesetze lassen sich oft Ausdrücke, die Logarithmen enthalten, zusammenfassen und übersichtlicher gestalten.

17 a) $\lg \left(7^3 \cdot \sqrt[3]{7}\right) = 3 \lg 7 + \frac{1}{3} \lg 7 = \frac{10}{3} \lg 7$

b) $2 - \lg 25 = \lg 100 - \lg 25 = \lg \frac{100}{25} = \lg 4$

Umgekehrt ist es mit Hilfe dieser Gesetze auch möglich, Logarithmen aus komplizierteren Ausdrücken (z. B. Produkten und Quotienten) als Summen oder Differenzen einfacherer Logarithmen zu schreiben und dadurch die Berechnung zu erleichtern.

18 a) $\lg \frac{17}{2{,}7 \cdot 8{,}5} = \lg 17 - (\lg 2{,}7 + \lg 8{,}5) = \lg 17 - \lg 2{,}7 - \lg 8{,}5$

b) $\lg \frac{5^2 \cdot 13}{7 \cdot \sqrt[3]{11}} = 2 \lg 5 + \lg 13 - \lg 7 - \frac{1}{3} \lg 11$

Aufgaben 6/33 bis 6/38

6.2.2. Logarithmische Berechnungen

19 Die Logarithmengesetze erlauben Berechnungen, wie sie das folgende Beispiel zeigt.

Es ist $x = 325 \cdot 749$ zu berechnen. Äquivalent zu dieser Gleichung ist

$\lg x = \lg (325 \cdot 479)$.

Nach Satz 6/10 (1) gilt weiter

$\lg x = \lg 325 + \lg 479$.

Aus der Tafel entnehmen wir:

$\lg 325 = 2{,}5119$; $\quad \lg 479 = 2{,}6803$

Daraus folgt:

$\lg x = 2{,}5119 + 2{,}6803 = 5{,}1922$

Die Tafel liefert dazu: $\quad x = 155\,700$

Also ergibt sich: $\quad x = 325 \cdot 479 \approx 155\,700$

Die exakte Multiplikation ergibt $x = 155\,675$; der Fehler der logarithmischen Rechnung beträgt also knapp 0,02%.

Ein wesentlicher Vorteil logarithmischer Berechnungen ist die Zeitersparnis, die dadurch erreicht wird, daß

die Multiplikation zweier Zahlen auf die Addition,
die Division zweier Zahlen auf die Subtraktion,
das Potenzieren einer Zahl auf das Multiplizieren,
das Radizieren einer Zahl auf das Dividieren
im Bereich der entsprechenden Logarithmen zurückgeführt wird.

Es erfolgt also jeweils eine Erniedrigung der Rechenoperation um eine Stufe.

Ein weiterer Nutzen logarithmischer Berechnungen besteht darin, daß mit ihnen Berechnungen verhältnismäßig einfach durchführbar sind, die bisher praktisch undurchführbar waren, z. B. das Ermitteln von Näherungswerten für Wurzeln mit größeren Wurzelexponenten (z. B. $\sqrt[7]{455}$).

Für jede logarithmische Berechnung ist es zweckmäßig, ein einfaches und übersichtliches Rechenschema zu benutzen.

20 **Multiplizieren**

$x = 5{,}73 \cdot 0{,}28 \cdot 15{,}84$

$\lg x = \lg 5{,}73 + \lg 0{,}28 + \lg 15{,}84$

$x = 25{,}42$

N	lg N	
5,73	0,7582	+
0,28	0,4472 − 1	+
15,84	1,1998	+
x	2,4052 − 1	
x	1,4052	

21 **Dividieren**

a) $x = \dfrac{7{,}26}{0{,}49}$

$\lg x = \lg 7{,}26 - \lg 0{,}49$

$x = 14{,}81$

N	lg N	
7,26	0,8609	+
0,49	0,6902 − 1	−
x	0,1707 + 1	
x	1,1707	

b) $x = \dfrac{2{,}424}{9{,}148}$

$x = 0{,}265$

Anmerkung: Im Rechenschema ist nachzutragen 0,3845 = 1,3845 − 1; deshalb über dem Dividenden zunächst eine Zeile frei lassen!

N	lg N	
	1,3845 − 1	+
2,424	(0,3845)	
9,148	0,9613	−
x	0,4232 − 1	

22 **Potenzieren**

$x = 0{,}877^4$

$\lg x = 4 \lg 0{,}877$

$x = 0{,}5916$

N	lg N	
0,877	0,9430 − 1	· 4
x	3,7720 − 4	
x	0,7720 − 1	

23 **Radizieren**

a) $x = \sqrt[5]{632}$

$\lg x = \dfrac{1}{5} \lg 632$

$x = 3{,}632$

N	lg N	
632	2,8007	: 5
x	0,5601	

b) $x = \sqrt[3]{0{,}798}$

$x = 0{,}9275$

Anmerkung: Im Rechenschema ist nachzutragen 0,9020 − 1 = 2,9020 − **3** (wegen der Division durch **3**); deshalb über dem Radikanden zunächst eine Zeile frei lassen!

N	lg N	
	2,9020 − 3	: 3
0,798	(0,9020 − 1)	
x	0,9673 − 1	

24 **Zusammengesetzte Aufgaben**

$$x = \frac{25{,}7^2 \cdot 119}{\sqrt[3]{2870}}$$

Wir setzen: $25{,}7^2 \cdot 119 = p_1$

$$\sqrt[3]{2870} = p_2$$

Dann ist: $\lg p_1 = 2 \lg 25{,}7 + \lg 119$

$$\lg p_2 = \frac{1}{3} \lg 2870$$

$$\lg x = \lg p_1 - \lg p_2$$

Ergebnis: $x = 5530$

N	lg N		
25,7	1,4099	$\cdot 2$	
$25{,}7^2$	2,8198	+	
119	2,0755	+	
p_1	4,8953		+
2870	3,4579	: 3	
p_2	1,1526		−
x	3,7427		

Beim numerischen Rechnen mit Hilfe von Logarithmen erhält man für die gesuchten Ergebnisse stets nur Näherungswerte. Die Genauigkeit dieser Näherungswerte ist um so größer, je mehr Dezimalstellen die tabellierten Mantissen in der benutzten Logarithmentafel haben. So erhält man beispielsweise für das Produkt
$50{,}21 \cdot 42{,}54 = 2135{,}9334$ mit Hilfe einer

vierstelligen Tafel: 2136

fünfstelligen Tafel: 2135,9

siebenstelligen Tafel: 2135,933

In der Praxis hat man hauptsächlich Rechnungen auszuführen, bei denen die Eingabewerte Näherungswerte sind, d. h., es handelt sich um gerundete Zahlen (z. B. $\sqrt{2} \approx 1{,}414$) oder um Maßzahlen gemessener Größen [z. B. $l = (4{,}7 \pm 0{,}05)$ cm].
Bei solchen Rechnungen erhält man sowieso – auch wenn nicht logarithmisch gerechnet wird – nur Näherungswerte für die Resultate, so daß die Benutzung logarithmischer Berechnungen gerechtfertigt ist.
Führt man eine Rechnung mit Näherungswerten verschiedener Genauigkeitsstufen durch, so ist für die Genauigkeit des Resultates stets der Näherungswert mit der geringsten Genauigkeit maßgebend. Hat ein Näherungswert n zuverlässige Ziffern, so ist es nicht richtig, im Resultat einer Rechnung mit diesem Näherungswert mehr als n zählende Ziffern anzugeben. Vor der Rechnung kann man die genaueren Eingabewerte so runden, daß sie nur eine zählende Ziffer mehr haben als der Näherungswert mit der geringsten Anzahl zählender Ziffern.

25 **a)** $2{,}000 \cdot 4{,}000 = 8{,}000$ **c)** $3{,}723 \cdot 1{,}80 = 6{,}70$ **e)** $1{,}80^2 = 3{,}24$
b) $3{,}723 \cdot 1{,}8 = 6{,}7$ **d)** $3{,}723 \cdot 1{,}800 = 6{,}701$ **f)** $\sqrt{3{,}24} = 1{,}8$

Aufgaben 6/39 bis 6/59

6.2.3. Der Rechenstab

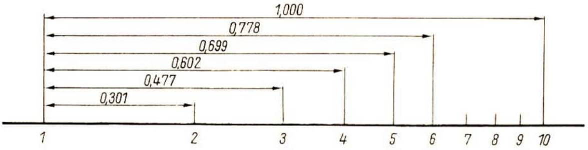
(Vgl. auch die Abschnitte 1.1.8. und 5.5.2.)

6.2.3.1. Die Lösung einfacher Aufgaben mit Hilfe des Rechenstabes

Statt logarithmisch wird heute meist mit Hilfe mechanischer, elektrischer oder elektronischer Geräte (Rechenmaschinen, Rechenautomaten) gerechnet. Eins der einfachsten

Geräte dieser Art ist der **Rechenstab.** Die auf ihm angebrachten Skalen sind logarithmisch unterteilt.

Eine **logarithmische Skale** entsteht, wenn man den Mantissen der dekadischen Logarithmen (in geeigneter Auswahl) auf dem Zahlenstrahl Punkte zuordnet, diese aber nicht mit der Mantisse $\lg x$, sondern mit der Zahl x beschriftet. Der zur ersten Mantisse (0,0000) gehörende Punkt erhält dann die Beschriftung 1 (denn $0{,}0000 = \lg 1$), der zur letzten Mantisse (1,000) gehörende Punkt die Beschriftung 10 (denn $1{,}0000 = \lg 10$). In Bild 6/1 ist das für $1 \leqq x \leqq 10$, x ganzzahlig, eingezeichnet.



6/1

(9) Erläutern Sie, warum man den im Bild 6/1 dargestellten Abschnitt der logarithmischen Skale auch als Abschnitt für die Argumente x mit $10^k \leqq x \leqq 10^{k+1}$ (k ganzzahlig) ansehen kann!

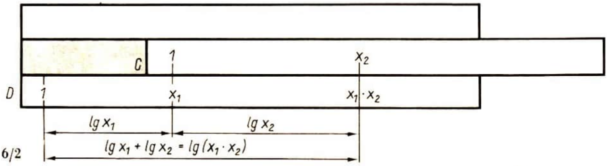
(10) Warum sind die Strecken von 2 bis 4 bzw. von 4 bis 8 genauso lang wie die Strecke von 1 bis 2?

(11) Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe des Rechenstabes!

a) $1{,}37 \cdot 4{,}62$	**b)** $\pi \cdot 40{,}8$	**c)** $725 : 441$
d) $3{,}34 : 5{,}07$	**e)** 84^2	**f)** $\sqrt{0{,}655}$

Das **Multiplizieren bzw. Dividieren mit Hilfe des Rechenstabes** beruht auf den Logarithmengesetzen $\lg (x_1 \cdot x_2) = \lg x_1 + \lg x_2$ bzw. $\lg \frac{x_1}{x_2} = \lg x_1 - \lg x_2$.

Das Addieren bzw. Subtrahieren der Logarithmen wird dabei mit dem Rechenstab mechanisch ausgeführt, indem $\lg x_1$ auf der D-Skale, $\lg x_2$ auf der C-Skale abgelesen wird und dann die beiden dadurch festgelegten Skalenabschnitte durch geeignetes Verschieben der Zunge aneinander- bzw. aufeinandergelegt werden (Bild 6/2). Es handelt sich dabei letztlich um die Addition zweier Strecken durch Aneinanderlegen oder die Subtraktion zweier Strecken durch Aufeinanderlegen.



6/2

(12) Entwerfen Sie ein dem Bild 6/2 entsprechendes für $\lg x_1 - \lg x_2 = \lg \frac{x_1}{x_2}$ unter Verwendung der Skalen D und C!

Das **Potenzieren bzw. Radizieren mit Hilfe des Rechenstabes** beschränkt sich zunächst auf Quadrieren und Quadratwurzelziehen mit Hilfe der Skalen D und A. Bei manchen Rechenstäben ist auch noch die Bestimmung der 3. Potenz und der Kubikwurzel mit Hilfe der Skalen D und K möglich.
Die Rechenoperationen beruhen auf den Logarithmengesetzen

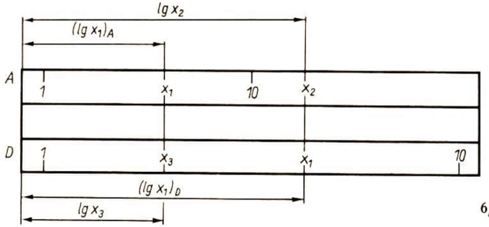
(1) $\lg x^2 = 2 \lg x; \quad \lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x$

(2) $\lg x^3 = 3 \lg x; \quad \lg \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \lg x$

Die Aufgaben (1) werden mechanisch dadurch gelöst, daß der Rechenstab eine A- (und B-) Skale mit einer Einheitsstrecke enthält, die gleich der Hälfte der Einheitsstrecke der D-Skale ist. Dadurch ist die Strecke, die vom Punkt 1 bis zu einem Punkt x_1 führt (also $\lg x_1$) auf der D-Skale doppelt so lang wie auf der A-Skale (Bild 6/3). Es gilt also

$(\lg x_1)_D = 2 \cdot (\lg x_1)_A$.

Wird jetzt mit Hilfe des Läuferstrichs dem Punkt D x_1 der Punkt A x_2 zugeordnet (Bild 6/3), so ist offensichtlich auf der A-Skale $\lg x_2 = 2 \cdot \lg x_1 = \lg x_1^2$, also $x_2 = x_1^2$.
Umgekehrt gilt bei der Zuordnung des Punktes D x_3 zum Punkt A x_1 auf der D-Skale $\lg x_3 = \frac{1}{2} \lg x_1 = \lg x_1^{\frac{1}{2}} = \lg \sqrt{x_1}$, also $x_3 = \sqrt{x_1}$.



6/3

(13) Erläutern Sie entsprechend den Zusammenhang zwischen D- und K-Skale!

Die Genauigkeit eines mit dem Rechenstab gewonnenen Ergebnisses entspricht der Genauigkeit einer dreistelligen Logarithmentafel. Bei allen Rechnungen, die mit dem Stab ausgeführt werden, erhält man die Ergebnisse mit drei zählenden Grundziffern. So wird beispielsweise statt der Aufgabe $1{,}2 \cdot 4{,}012$ mit dem Rechenstab gerechnet: $1{,}20 \cdot 4{,}01 = 4{,}81$. Die ersten beiden Grundziffern lassen sich stets genau einstellen bzw. ablesen. Die dritte Grundziffer muß in den meisten Fällen geschätzt werden. Das Schätzen der letzten Grundziffer entspricht der linearen Interpolation.

6.2.3.2. Die Lösung komplizierterer Aufgaben mit Hilfe des Rechenstabes

Bei Komplexaufgaben, die mehrere Multiplikationen und Divisionen erfordern, wechselt man zweckmäßig in diesen Rechenoperationen ab.

26 Aufgabe: $x = \dfrac{\sqrt{31{,}5} \cdot 404}{0{,}296 \cdot 123}$

Überschlag: $\dfrac{6 \cdot 4 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = \dfrac{6 \cdot 4}{3} \cdot 10 = 80$

Wir berechnen x mit Hilfe des Rechenstabes, indem wir abwechselnd dividieren und multiplizieren (Skalen D und C). Wir beginnen mit dem Radizieren und schließen sogleich eine Division an.

1. Schritt: Läuferstrich über A 315 (rechte Hälfte!) und unter ihn C 296
2. Schritt: Läuferstrich über C 404 und unter ihn C 123
3. Schritt: Unter C 1 ablesen D 622
   Ergebnis $x \approx 62{,}2$

Für Anwendungsaufgaben aus der Praxis genügt meist die Genauigkeit des Rechenstabs oder der vierstelligen Logarithmentafel, da die dabei vorgegebenen Meßwerte infolge unvermeidbarer Meßfehler eine größere Rechengenauigkeit nicht zulassen.

27 Mit einem Lastwagen werden 1700 Ziegel transportiert. Die Maße eines Ziegels sind 24 cm × 11,5 cm × 7,1 cm. Die Dichte der Ziegelmasse ist 1,55 g cm^{-3}. Wieviel Tonnen beträgt die Ladung?

Die Masse der Ladung sei M t (1 t = 10^6 g). Die Dichte ist 1,55 t · m^{-3}. Die Maße der Ziegel müssen in m eingesetzt werden.

$M = 1700 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}115 \cdot 0{,}071 \cdot 1{,}55$

Überschlag: $2000 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} \cdot 1 = 5$

Die Berechnung mit dem Rechenstab ergibt 5,16 t,
mit der vierstelligen Logarithmentafel 5,163 t als Masse der Ladung.

28 Ein elektrisches Heizbad verbraucht bei fünfstündigem Betrieb 6,5 kWh. Der Widerstand beträgt 35 Ω. Wie groß ist die Stromstärke?
Zwischen dem Energieverbrauch A kWh, dem Widerstand R Ω, der Zeit t h und der Stromstärke I A besteht die Beziehung

$A = I^2 \cdot R \cdot t,$

also $I = \sqrt{\dfrac{A}{R \cdot t}}$

Im vorliegenden Falle ergibt sich also $I = \sqrt{\dfrac{6{,}5}{35 \cdot 5}}$.

Beim Rechenstab berechnet man den Radikanden zweckmäßig auf der A-B-Skale, um am Ende durch Übergang zur D-Skale den Wurzelwert ablesen zu können.

Überschlag: $\sqrt{\dfrac{10}{200}} = \sqrt{\dfrac{5}{100}} = \dfrac{1}{10}\sqrt{5} \approx 0{,}2$

Berechnung mit dem Rechenstab ergibt 0,193A, mit der Logarithmentafel 0,1928A. Als Ergebnis genügt mit Rücksicht auf die gegebenen Werte 0,2A.

29 Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kreissektors, dessen Radius r eine Länge von 5,7 cm und dessen Bogen eine Länge von 0,83 dm hat?

Ist x der Zentriwinkel (in°), d der Kreisdurchmesser und b der Bogen, (in cm) so gilt:

$x : 360 = b : d\pi$

Mit $b = 8{,}3$ cm und $d = 11{,}4$ cm ergibt sich

$$x = \frac{360 \cdot 8{,}3}{11{,}4\pi}.$$

Überschlag: $x \approx \dfrac{300 \cdot 8}{10 \cdot 3} = 80$

Stabrechnung: $x \approx 83{,}4$

Der Zentriwinkel beträgt also etwa 83°.

Aufgaben 6/60 bis 6/71

7. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

7.1. Winkelfunktionen beliebiger Winkel

7.1.1. Die Winkelfunktionswerte im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$

(1) a) Wiederholen Sie die Definitionen der Winkelfunktionen am Kreis im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$!
b) Welche Winkelmaße kennen Sie? Wie sind sie definiert?
c) Was versteht man unter den Quadranten I, II, III, IV?

(2) Betrachten Sie nochmals die Bilder der vier Winkelfunktionen im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ (Bilder 3/9, 3/10, 3/15, 3/16), und beachten Sie die unterschiedliche Lage der Funktionsbilder und die verschiedenen Vorzeichen der Funktionswerte in den vier Quadranten I, II, III, IV (Satz 3/9)!

Wir entnehmen der Betrachtung dieser Funktionsbilder folgende Tatsachen:
In den vier Quadranten tritt bei jeder Winkelfunktion jeder Funktionswert (bis auf wenige Ausnahmen) zweimal auf, so daß zwar jedem Winkel jeweils ein Funktionswert eindeutig zugeordnet ist, zu einem Funktionswert aber im allgemeinen stets zwei Winkel gehören.

1 Aus den Funktionsbildern ist abzulesen, welche Winkel im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ zu folgenden Funktionswerten gehören:

$\sin x = 0{,}5;\quad x_1 = \dfrac{\pi}{6};\quad x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ (Bild 3/9)

$\cot x = -1;\quad x_1 = \dfrac{3\pi}{4};\quad x_2 = \dfrac{7\pi}{4}$ (Bild 3/16)

Aus den Bildern der vier Winkelfunktionen entnehmen wir:

1 **SATZ: Bei jeder Winkelfunktion umfassen die Funktionswerte im Quadranten I die absoluten Beträge aller Funktionswerte der betreffenden Funktion im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$.**

Das ist der Grund dafür, daß in den Tafeln der Winkelfunktionen die Funktionswerte nur für den Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ tabelliert sind.

Daraus ergibt sich schließlich folgende **praktische Anweisung für die Ermittlung von Funktionswerten der Winkelfunktionen** mit Hilfe der Zahlentafel auch für Winkel, die in dem **Quadranten II, III oder IV** liegen.

a) Um für einen Winkel in dem Quadranten II, III oder IV den Funktionswert zu ermitteln, wird der absolute Betrag aus der Tafel entnommen und mit Hilfe von Satz 3/9 das Vorzeichen bestimmt.

b) Für die Tafelbenutzung ist es dabei erforderlich, zu einem Winkel x_{II}, x_{III} bzw. x_{IV} in dem Quadranten II, III bzw. IV denjenigen Winkel x_I im Quadranten I zu bestimmen, dessen Funktionswert $f(x_I)$ gleich ist dem absoluten Betrag des Funktionswertes von x_{II}, x_{III} bzw. x_{IV}, für den also gilt:

$$f(x_I) = |f(x_{II})|; \quad f(x_I) = |f(x_{III})|; \quad f(x_I) = |f(x_{IV})|$$

c) Dieser Winkel x_I steht mit den Winkeln x_{II}, x_{III} bzw. x_{IV} in folgendem Zusammenhang:

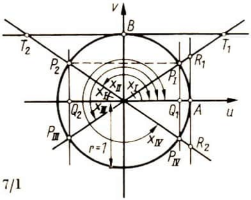
2 **SATZ: Wählt man**

$$\boldsymbol{x_I = 180° - x_{II}} \textbf{ für Quadrant II, so ist } \boldsymbol{f(x_I) = |f(x_{II})|,}$$

$$\boldsymbol{x_I = x_{III} - 180°} \textbf{ für Quadrant III, so ist } \boldsymbol{f(x_I) = |f(x_{III})|,}$$

$$\boldsymbol{x_I = 360° - x_{IV}} \textbf{ für Quadrant IV, so ist } \boldsymbol{f(x_I) = |f(x_{IV})|.}$$

(3) Zeigen Sie an Hand von Bild 7/1 die Gleichheit der Beträge entsprechender Winkelfunktionswerte, falls Winkel nach der in Satz 7/2 gegebenen Beziehung gewählt werden!



7/1

Nunmehr können zu beliebigen Winkeln im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die Winkelfunktionswerte mit Hilfe der Funktionswertetafel für den Bereich $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ bestimmt werden und umgekehrt.

2 Folgende Funktionswerte sind zu bestimmen:

a) cos 127,5° (Quadrant II)

$x_{II} = 127{,}5°$; $\quad x_1 = 180° - 127{,}5° = 52{,}5°$

$|\cos 127{,}5°| = \cos 52{,}5° = 0{,}6088$ (aus der Tafel)

$\cos 127{,}5° = -0{,}6088$ (Vorzeichen nach Satz 3/9)

b) tan 250,6° (Quadrant III)

$x_{III} = 250{,}6°$; $\quad x_I = 250{,}6° - 180° = 70{,}6°$

$\tan 250{,}6° = \tan 70{,}6° = 2{,}840$

3 Zu folgenden Funktionswerten sind die Winkel im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ zu bestimmen.

a) $\sin x = -0{,}5505$

Als Grundwinkel wird x_1 bestimmt aus $\sin x_{\mathrm{I}} = |-0{,}5505| = 0{,}5505$ mit Hilfe der Tafel: $x_{\mathrm{I}} = 33{,}4°$.
Wegen des negativen Funktionswertes kommen nach Satz 3/9 Winkel in den Quadranten III und IV in Frage, also:

$$x_{\mathrm{I}} = 33{,}4° = x_{\mathrm{III}} - 180°, \quad \text{daraus} \quad x_{\mathrm{III}} = 180° + 33{,}4° = 213{,}4°$$

$$x_{\mathrm{I}} = 33{,}4° = 360° - x_{\mathrm{IV}}, \quad \text{daraus} \quad x_{\mathrm{IV}} = 360° - 33{,}4° = 326{,}6°$$

b) $\cot x = 0{,}5008; \quad x_{\mathrm{I}} = 63{,}4°$

In Frage kommen Winkel in den Quadranten I und III; x_{I} wurde bereits bestimmt.

$$x_{\mathrm{I}} = 63{,}4° = x_{\mathrm{III}} - 180°; \quad \text{daraus} \quad x_{\mathrm{III}} = 180° + 63{,}4° = 243{,}4°$$

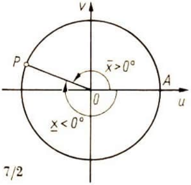
Aufgaben 7/1 bis 7/7

7.1.2. Winkel mit negativen Maßzahlen

(4) Was versteht man unter dem mathematisch positiven Drehsinn bei der Winkelmessung am Kreis?

Wandert P (Bild 3/1, Seite 53) auf dem Kreis gegen den negativen Teil der v-Achse und darüber hinaus bis zu einem vollen Umlauf, so wird vereinbart, daß die so entstehenden, ebenfalls von $\overline{OA}$ aus gemessenen Winkel $\sphericalangle\, AOP$ negative Maßzahlen erhalten **(mathematisch negativer Drehsinn).** Jedem Peripheriepunkt P sind dann zwei Winkel zugeordnet: $\bar{x} > 0°$ und $\underline{x} < 0°$ (Bild 7/2).

3 **SATZ: Die Summe der Beträge der zu demselben Peripheriepunkt gehörenden Winkel $\bar{x}$ und $\underline{x}$ beträgt 360° (bzw. 2π).**



7/2

Infolgedessen läßt sich jedem Winkel $0 \geqq \underline{\hat{x}} > -2\pi$ eindeutig ein Winkel $2\pi \geqq \hat{\bar{x}} \geqq 0$ zuordnen.
$\bar{x}$ soll der zum Winkel $\underline{x}$ gehörende **Hauptwert** heißen.
Es gilt stets

$$\bar{x} = 360° + \underline{x} \quad (\text{bzw. } \hat{\bar{x}} = 2\pi + \underline{\hat{x}})$$

(5) Vervollständigen Sie folgende Tabelle!

$\underline{x}$	$-0°$	$-30°$	$-45°$		$-90°$	$-135°$	$-180°$				$-360°$
$\underline{\hat{x}}$	-0	$-\frac{\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{3}{2}\pi$		
$\bar{x}$	$360°$	$330°$			$270°$		$180°$	$135°$			
$\hat{\bar{x}}$	2π	$\frac{11}{6}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$		π			$\frac{\pi}{4}$	

7.1.3. Winkel beliebiger Größe und ihre Hauptwerte

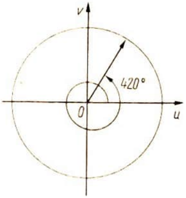
Wird die Bewegung des Punktes P auf der Peripherie des Kreises (Bild 3/1) nicht nach einem vollen Umlauf abgebrochen, sondern mit positivem oder negativem Drehsinn unbegrenzt fortgeführt, so werden dadurch eindeutig auch Winkel festgelegt, die größer als 360° bzw. kleiner als −360° sind.

4 Bild 7/3 zeigt als Beispiele $x_1 = 420°$ und $x_2 = -855°$.

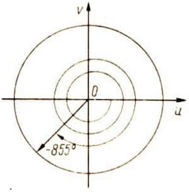
$$x_1 = 60° + 1 \cdot 360°$$

$$x_2 = 225° + (-3) \cdot 360°$$

Den zwischen 0° und 360° gelegenen, also stets positiven Winkelteil nennt man auch in diesen Fällen den **Hauptwert $\bar{x}$ des Winkels x.**



7/3a



7/3b

4 **SATZ: Jeder Winkel x im Bereich $-\infty < x < \infty$ läßt sich mit Hilfe seines Hauptwertes $\bar{x}$ darstellen in der Form**

$$x = \bar{x} \pm k \cdot 360° \quad \text{bzw.} \quad \hat{x} = \bar{\hat{x}} + 2k\pi \qquad (k \text{ ganzzahlig}).$$

5 **DEFINITION: Alle Winkel, die den gleichen Hauptwert haben, heißen äquivalente Winkel.**

6 Zeigen Sie, daß der in Abschnitt 7.1.2. eingeführte Begriff des Hauptwerts eines Winkels in dem in Satz 7/4 verwendeten Begriff des Hauptwertes eines Winkels enthalten ist!

7 Bestätigen Sie den Satz: Äquivalente Winkel unterscheiden sich stets additiv um Vielfache von 360°.

Aufgaben 7/8 bis 7/9

7.1.4. Die Winkelfunktionswerte bei unbeschränktem Definitionsbereich

Nach Satz 7/4 läßt sich jedem Winkel x im Bereich $-\infty < \hat{x} < +\infty$ ein Hauptwert $\bar{\hat{x}}$ im Bereich $0 \leqq \bar{\hat{x}} \leqq 2\pi$ zuordnen. Zu beiden Winkeln $\hat{x}$ und $\bar{\hat{x}}$ gehören Peripheriepunkte, die zusammenfallen, also gleiche Koordinaten haben. Da die Winkelfunktionen für Winkel $\hat{x}$ im Bereich $0 \leqq \hat{x} \leqq 2\pi$ unter Verwendung der Koordinaten des Peripheriepunktes definiert werden, ist folgende Festsetzung sinnvoll:

6 **DEFINITION: Die für den Argumentbereich $0 \leqq \hat{x} \leqq 2\pi$ festgesetzten Definitionen 3/3 bis 3/6 für die Winkelfunktionen sollen für den gesamten Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$ gelten.**

Dann ist sofort der folgende Satz verständlich:

7 **SATZ: Ist $\hat{x}$ ein beliebiger Winkel ($-\infty < \hat{x} < +\infty$) und $\hat{\bar{x}}$ sein Hauptwert ($0 \leqq \hat{\bar{x}} \leqq 2\pi$), so gilt**

$$\left.\begin{aligned}
\sin \hat{x} &= \sin(\hat{\bar{x}} + 2k\pi) = \sin \hat{\bar{x}}\\
\cos \hat{x} &= \cos(\hat{\bar{x}} + 2k\pi) = \cos \hat{\bar{x}}\\
\tan \hat{x} &= \tan(\hat{\bar{x}} + 2k\pi) = \tan \hat{\bar{x}}\\
\cot \hat{x} &= \cot(\hat{\bar{x}} + 2k\pi) = \cot \hat{\bar{x}}
\end{aligned}\right\} \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

Um Winkelfunktionswerte für beliebige Argumente ($-\infty < \hat{x} < +\infty$) mit Hilfe der Tafel der Winkelfunktionen zu bestimmen, sind zwei Schritte erforderlich:

1. Übergang vom Argument $\hat{x}$ zum entsprechenden Hauptwert $\hat{\bar{x}}$ nach Beispiel 7/4 bzw. Satz 7/4.
2. Übergang zum Argument im Bereich $0 \leqq \hat{x} \leqq \frac{\pi}{2}$ nach Beispiel 7/2.

5 **a)** Wie groß ist $\sin 3520°$?

1) Bestimmen des Hauptwertes: $3520° = \bar{x} + 9 \cdot 360°$
$\bar{x} = 3520° - 9 \cdot 360° = 280°$
$\sin 3520° = \sin 280°$

2) Übergang zum Quadranten I: $x_{IV} = 280°$; $x_I = 360° - 280° = 80°$
$|\sin 280°| = \sin 80° = 0{,}9848$
$\sin 280° = -0{,}9848$

Ergebnis: $\sin 3520° = -0{,}9848$

b) Wie groß ist $\cot(-212{,}7°)$?

1) $-212{,}7° = \bar{x} + (-1) \cdot 360°$; $\quad \bar{x} = 360° - 212{,}7° = 147{,}3°$
$\cot(-212{,}7°) = \cot 147{,}3°$

2) $x_{II} = 147{,}3°$; $\quad x_I = 180° - 147{,}3° = 32{,}7°$
$|\cot 147{,}3°| = \cot 32{,}7° = 1{,}558$
$\cot 147{,}3° = -1{,}558$

Ergebnis: $\cot(-212{,}7°) = -1{,}558$

c) Wie groß ist $\cos(-825°)$?

1) $-825° = \bar{x} + (-3) \cdot 360°$
$\bar{x} = 1080° - 825° = 255°$
$\cos(-825°) = \cos 255°$

2) $\cos 255° = -\cos(180° + 75°) = -\cos 75° = -0{,}2588$

Ergebnis: $\cos(-825°) = -0{,}2588$

Andererseits sind im Bereich $-\infty < x < +\infty$ einem Funktionswert nicht mehr nur zwei oder ein Winkel zugeordnet, wie das im Bereich $0 \leqq \hat{x} \leqq 2\pi$ der Fall war. Auch **alle** zu diesen zwei Winkeln bzw. zu diesem einen Winkel **äquivalenten Winkel** müssen berücksichtigt werden (vgl. Satz 7/7). Das zeigen die folgenden Beispiele:

6 Für welche Winkel x im Bereich $-\infty < x < \infty$ gilt

a) $\tan x = 2{,}565$?

1) Grundwert x_{I} aus $\tan x_{\mathrm{I}} = 2{,}565$ im Quadranten I ergibt $x_{\mathrm{I}} = 68{,}7°$.

2) Wegen des positiven Vorzeichens kommen Winkel in den Quadranten I und III in Frage:

$$x_{\mathrm{I}} = 68{,}7°$$
$$x_{\mathrm{III}} = 180° + 68{,}7° = 248{,}7°$$

3) Jeder Winkel, der um ein Vielfaches von 360° größer oder kleiner als x_{I} bzw. x_{III} ist, ist aber auch eine Lösung der Aufgabe.

Endergebnis: $$\left.\begin{aligned} x_1 &= 68{,}7° + k \cdot 360° \\ x_2 &= 248{,}7° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

Die beiden Lösungsmengen lassen sich noch zusammenfassen zu: $x = 68{,}7° + k \cdot 180°$ (k ganzzahlig). (Näheres dazu siehe Abschnitt 7.1.5.)

b) $\cos x = -0{,}4147$?

1) Als Grundwert x_{I} aus $\cos x_{\mathrm{I}} = |-0{,}4147|$ im Quadranten I ergibt sich $x_{\mathrm{I}} = 65{,}5°$.

2) Wegen des negativen Funktionswertes kommen Winkel in den Quadranten II und III in Frage, also:

$$x_{\mathrm{I}} = 65{,}5° = 180° - x_{\mathrm{II}}, \quad \text{daraus} \quad x_{\mathrm{II}} = 114{,}5°$$
$$x_{\mathrm{I}} = 65{,}5° = x_{\mathrm{III}} - 180°, \quad \text{daraus} \quad x_{\mathrm{III}} = 245{,}5°$$

3) Im Bereich $-\infty < x < +\infty$ erhält man dann folgende Winkel:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 114{,}5° + k \cdot 360° \\ x_2 &= 245{,}5° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

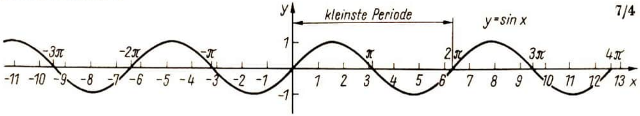
Diese beiden Lösungsmengen lassen sich nicht wie bei Beispiel 7/6a zu einer einzigen zusammenfassen.

Aufgaben 7/10 bis 7/13

7.1.5. Die Bilder der Winkelfunktionen im Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$

Da sich bei den Winkelfunktionen die Funktionswerte nach jeweils 2π (in den Intervallen $2\pi \leqq x < 4\pi$; $4\pi \leqq x < 6\pi$; ... und in den Intervallen $-2\pi \leqq x < 0$; $-4\pi \leqq x < -2\pi$; ...) wiederholen, muß das zum gesamten Definitionsbereich $-\infty < x < +\infty$ gehörende Funktionsbild aus untereinander kongruenten Teilen bestehen, die mit dem Bild im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ übereinstimmen. Für die **Sinusfunktion** ergibt sich so das Bild 7/4. Das Bild der Funktion $y = \sin x$ nennt man kurz **Sinuskurve.**

7/4



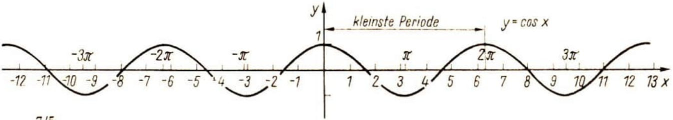
Man erkennt, daß sich das zwischen 0 und 2π gelegene Kurvenstück immer wiederholt. Ebenso könnte man das beispielsweise auch von dem zwischen $\frac{3}{4}\pi$ und $\frac{11}{4}\pi$, ja sogar von dem zwischen 0 und 6π gelegenen Kurvenstück sagen. Eine derartige Funktion nennt man eine **periodische Funktion.**

Die Abschnitte auf der x-Achse, innerhalb deren ein sich wiederholendes Kurvenstück liegt, nennt man **Perioden** der betreffenden Funktion. Perioden der Sinusfunktion sind beispielsweise: $0 \ldots 2\pi$; $0 \ldots 4\pi$; $4\pi \ldots 10\pi$; ... und $0 \ldots -2\pi$; $-2\pi \ldots -6\pi$; $-2\pi \ldots -8\pi$; $-2\pi \ldots 4\pi$; ...
Am wichtigsten ist die **kleinste Periode;** sie beträgt bei der Sinusfunktion 2π. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Gleichung der Sinusfunktion $y = \sin x$ mit dem Definitionsbereich $(-\infty < x < +\infty)$ auch in anderer Form schreiben:

$$\boldsymbol{y = \sin(x + 2k\pi) \quad (0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig})}$$

Die **Kosinusfunktion** ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der kleinsten Periode 2π. Man kann also schreiben:

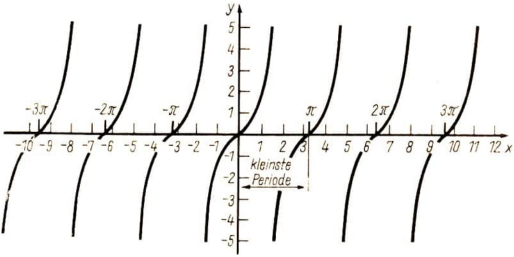
$$\boldsymbol{y = \cos(x + 2k\pi) \quad (0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig})} \quad \text{(Bild 7/5)}$$



7/5

Wir stellen an Hand der Funktionsbilder fest:

(1) Kosinus- und Sinuskurve sind kongruent, sie sind lediglich um $\frac{\pi}{2}$ in Richtung der x-Achse gegeneinander verschoben.
(2) Die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ sind für jedes beliebige x erklärt.

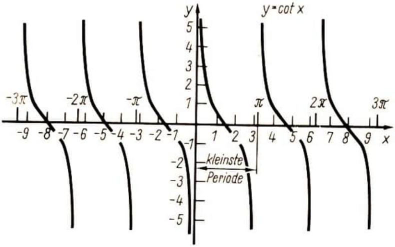


7/6

(8) Bestätigen Sie mit Hilfe einiger speziell gewählter Winkel die aus dem Funktionsbild entnommene Feststellung (1)!

Auch die **Tangens- und die Kotangensfunktion** sind periodische Funktionen. Doch ist bei ihnen die kleinste Periode nicht 2π, sondern π (Bild 7/6 und 7/7).

7/7



Man kann also schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} y = \tan(x + k\pi) \\ y = \cot(x + k\pi) \end{array}\right\} \ (0 \leqq x \leqq \pi;\ k \text{ ganzzahlig})$$

Deshalb war im Beispiel 7/6a eigentlich die besondere Bestimmung von x_2 überflüssig, weil x_2 bei Verwendung der Periode 180° aus x_1 folgt.

(9) Für jede der vier Winkelfunktionen gilt

$f(x) = |f(\pi + x)|$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$,

so daß stets eine Periode von π zu erwarten sein sollte. Warum trifft das für die Tangens- und die Kotangensfunktion zu, für die Sinus- und die Kosinusfunktion aber nicht?

Im Satz 3/7 wurde festgestellt, daß die Tangensfunktion im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ für die Argumente $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ und die Kotangensfunktion für 0 und π nicht definiert sind.

Da im Bereich $-\infty < x < \infty$ auch diese Stellen periodisch wiederkehren, ergibt sich folgendes:

Die Funktion $y = \tan x$ ist für beliebige x mit Ausnahme von $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ganzzahlig),
die Funktion $y = \cot x$ für beliebige x mit Ausnahme von $x = k\pi$ (k ganzzahlig) definiert.

(10) Wie zeigen sich diese „Lücken" im Definitionsbereich an den Funktionsbildern? Was für Funktionswerte finden sich in unmittelbarer Umgebung dieser Stellen?

Aufgaben 7/14 bis 7/15

7.1.6. Beziehungen zwischen den Werten verschiedener Winkelfunktionen in der Umgebung von $x = 0$ bzw. $x = \frac{\pi}{2}$

11 **a)** Stellen Sie eine Tabelle nach folgendem Muster zusammen!

x^0	0,5°	1°	1,5°	…	…	4,5°	5°	
$\sin x$	0,00873							$\cos x$
$\tan x$	0,00873							$\cot x$
$\operatorname{arc} x$	0,00873							$\operatorname{arc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
	89,5°	89°	88,5°	…	…	85,5°	85°	x^0

b) Stellen Sie $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{arc} x$ an Hand der Tabelle im Bereich $0° \leqq x \leqq 5°$ in ein und demselben Koordinatensystem mit einer sehr großen Maßeinheit auf der y-Achse dar, und bemühen Sie sich, die Bilder der drei Funktionen recht genau zu zeichnen!

c) Verfahren Sie genau so mit $y = \cos x$, $y = \cot x$ und $y = \operatorname{arc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ im Bereich $85° \leqq x \leqq 90°$!

Der Übung 7/11 entnehmen wir nach der Anschauung

8 **SATZ: Im Bereich $0° \leqq x \leqq 5°$ gilt mit guter Genauigkeit $\sin x \approx \tan x \approx \operatorname{arc} x$, und im Bereich $85° \leqq x \leqq 90°$ $\cos x \approx \cot x = \operatorname{arc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.**

Satz 7/8 gestattet, in den angegebenen Bereichen statt der Tafel der Sinus- und Kosinuswerte bzw. der Tangens- und Kotangenswerte die Tafel für die Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß zu benutzen. Das erlaubt ein besseres Arbeiten bei Winkeln in unmittelbarer Nähe von 0° bzw. von 90°.

7 Wie groß ist $\sin 0{,}0035°$?

$\sin 0{,}0035° \approx \operatorname{arc} 0{,}0035° = \operatorname{arc}(3° : 1000 + 5° : 10000)$

$= 0{,}0000524 + 0{,}00000873 \approx 0{,}000061$

Aufgaben 7/16 bis 7/17

7.1.7. Beziehungen zwischen den Werten verschiedener Winkelfunktionen bei gleichem Argument

(1) Definition 3/6 sagte unter anderem aus:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \text{mit} \quad \cot x \neq 0 \quad \text{und} \quad \tan x \neq 0$$

Daraus ergibt sich:

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \quad \text{oder}$$

$$\mathbf{\tan x \cdot \cot x = 1} \quad \text{mit} \quad \cot x \neq 0 \quad \text{und} \quad \tan x \neq 0.$$

(2) Die Definitionen 3/3 und 3/4 ergeben in Verbindung mit den Definitionen 3/5 und 3/6:

$$\sin x = \frac{v}{r}$$

$$\cos x = \frac{u}{r}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v}{u} = \mathbf{\tan x} \quad \text{mit} \quad u \neq 0; \qquad \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u}{v} = \mathbf{\cot x} \quad \text{mit} \quad v \neq 0$$

(3) Aus den Definitionen 3/3 und 3/4 folgt in Verbindung mit Bild 3/3 schließlich

$$\sin^2 x = \frac{v^2}{r^2}$$

[Statt $(\sin x)^2$ schreibt man auch $\sin^2 x$ usw.]

$$\cos^2 x = \frac{u^2}{r^2}$$

$$\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r} = \frac{v^2 + u^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = \mathbf{1}$$

Da die verwendeten Definitionen, die ursprünglich im Bereich $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ eingeführt wurden, inzwischen auf den Bereich $-\infty < x < \infty$ übertragen wurden, gelten auch die hergeleiteten Beziehungen im ganzen Definitionsbereich.

8 Durch $f(x) = \sin x$ sind die übrigen drei Winkelfunktionen auszudrücken. Allerdings muß man dabei das Vorzeichen des jeweiligen Funktionswerts mit Hilfe der Vorzeichenregel für die einzelnen Quadranten (vgl. Satz 3/9) jeweils nach dem gegebenen x bestimmen.

Aus (3): $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Aus (2) und (3): $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$|\tan x| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \quad \text{mit} \quad \sin x \neq 1$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$|\cot x| = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{|\sin x|} \quad \text{mit} \quad \sin x \neq 0$$

(12) Drücken Sie entsprechend Beispiel 7/8 die jeweils anderen drei Winkelfunktionen durch **a)** $\cos x$, **b)** $\tan x$, **c)** $\cot x$ aus, und stellen Sie die gefundenen Beziehungen in einer Tabelle zusammen!

(13) Wie lassen sich die Beziehungen (1) bis (3) unmittelbar aus der Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis ablesen? Zeigen Sie auf diese Weise, daß sie für alle vier Quadranten richtig sind!

Aufgaben 7/18 bis 7/20

7.1.8. Die Logarithmen der Winkelfunktionswerte

Zur Erleichterung der Rechnung löst man Aufgaben, in denen Winkelfunktionswerte vorkommen, häufig logarithmisch. Um ein doppeltes Aufschlagen von Werten zu vermeiden (zunächst Aufschlagen des Funktionswertes, dann Aufschlagen des Logarithmus des Funktionswertes), wurden die Logarithmen der Winkelfunktionswerte in unmittelbarer Zuordnung zu den Winkeln gesondert tabelliert. Dabei ist zu beachten, daß die Werte der Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ mit Ausnahme der größten Werte kleiner als 1 sind und somit Logarithmen mit negativen Kennzahlen haben. Das trifft auch für bestimmte Intervalle der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ zu.

9 $\sin 23{,}3° = 0{,}3955$

$\lg \sin 23{,}3° = \lg 0{,}3955 = 0{,}5972 - 1$

Zur Vereinfachung des Tabellenaufbaus sind dabei alle Logarithmen mit negativer Kennzahl auf die Kennzahl 9, ... -10; 8, ... -10; 7, ... -10 gebracht worden, wobei aus drucktechnischen Gründen der Subtrahend -10 stets fehlt. Es muß also in der Tafel jeweils -10 ergänzt werden, sobald vor dem Komma der tabellierten Zahl 9, 8 oder 7 steht.

10 Für $\lg \sin 23{,}3°$ ist 9,5972 in der Tafel zu finden.

Das bedeutet: $\lg \sin 23{,}3° = 9{,}5972 - 10$

Das ist derselbe Wert, der in Beispiel 7/9 durch doppeltes Aufschlagen als $0{,}5972 - 1$ bestimmt wurde.

Die Winkelfunktionen von Winkeln in den Quadranten II, III und IV sind teilweise negativ. Da Logarithmen von negativen Zahlen im Bereich der reellen Zahlen nicht erklärt sind, müssen diese Vorzeichen beim logarithmischen Rechnen außer Betracht bleiben, d. h., es muß logarithmisch mit den absoluten Beträgen der Funktionswerte gearbeitet werden.

11 Es ist $\lg \cos 152°$ zu bestimmen.

Der Funktionswert $\cos 152°$ ist negativ. Deshalb wird der Logarithmus des Betrages des Winkelfunktionswertes angegeben:

$\lg |\cos 152°| = \lg \cos 28° = 9{,}9459 - 10 = 0{,}9459 - 1$

Sind die Winkel zu bestimmen, die einem gegebenen Winkelfunktionswert zugeordnet sind, so ist eine besondere Angabe über das Vorzeichen des gegebenen Winkelfunktionswertes erforderlich, wie das folgende Beispiel zeigt.

12 Man bestimme x im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ zu

$\lg |\tan x| = 0{,}4389 \quad (\tan x < 0).$

In diesem Fall soll der Wert der Winkelfunktion, zu dem der Logarithmus gegeben ist, negativ sein. Die gesuchten Winkel liegen also in den Quadranten II und IV. Zunächst wird der Grundwert im Quadranten I bestimmt. Man erhält $x_{\mathrm{I}} = 70°$.

Daraus folgt: $x_{\mathrm{I}} = 180° - x_{\mathrm{II}}$; $x_{\mathrm{II}} = 110°$

$x_{\mathrm{I}} = 360° - x_{\mathrm{IV}}$; $x_{\mathrm{IV}} = 290°$

Aufgaben 7/21 bis 7/28

7.2. Trigonometrie beliebiger Dreiecke

7.2.1. Das Grundprinzip der Trigonometrie

Im Abschnitt 3.2. wurde die Berechnung verschiedener Stücke im rechtwinkligen Dreieck aus zwei gegebenen besprochen, wobei Winkelfunktionen zur Anwendung kamen. Dort wurde gezeigt, daß, wenn x einen spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ gleich den Quotienten der Längen von je zwei der drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind. Bei anderen geometrischen Figuren treten solche einfache Beziehungen zwischen einer Winkelfunktion und den Seiten der Figur nicht auf. Um auch in solchen Figuren Berechnungen mit Hilfe von Winkelfunktionen durchführen zu können, werden sie von Fall zu Fall so in Teilfiguren zerlegt, daß rechtwinklige Dreiecke auftreten. Dazu werden Hilfslinien, insbesondere Höhen auf den Seiten der Figur, eingezeichnet. Auch mit beliebigen Dreiecken wird so verfahren. Dieses Verfahren läßt sich aber vereinfachen, wenn für beliebige Dreiecke allgemeine Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln mit Hilfe der Winkelfunktionen hergeleitet werden, so daß sich im Einzelfall eine Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke erübrigt. Solche allgemeinen Beziehungen sind der **Sinussatz** und der **Kosinussatz.** Das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Berechnung unbekannter Stücke an beliebigen ebenen Figuren (z. B. beliebigen Dreiecken) unter Verwendung der Winkelfunktionen befaßt, heißt „Ebene Trigonometrie“ oder kurz „Trigonometrie“ (Dreiecksberechnung; wörtlich: Drei-Winkel-Messung).

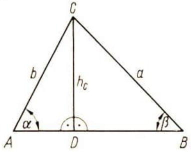
7.2.2. Der Sinussatz

Jedes beliebige Dreieck läßt sich durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Diese sind im allgemeinen nicht kongruent. Die Höhe h_c des Dreiecks ABC läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken (Bild 7/8):

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}; \quad h_c = a \sin\beta$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}; \quad h_c = b \sin\alpha$$

7/8



Aus den beiden rechts stehenden Gleichungen folgt

$$a \sin\beta = b \sin\alpha$$

oder, als Proportion geschrieben,

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Entsprechend findet man, wenn man das Dreieck durch die Höhe h_a bzw. h_b zerlegt,

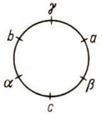
$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ und

$c : a = \sin\gamma : \sin\alpha.$

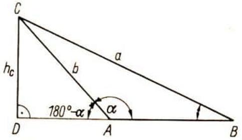
Die letzten beiden Gleichungen ergeben sich aus der ersten auch durch **zyklische Vertauschung.** Man ordnet dazu die Seiten und Winkel des Dreiecks auf einem Kreis so an, wie sie beim Umlaufen des Dreiecks aufeinander folgen, und rückt beim Ablesen immer um eine Seiten- bzw. Winkelbezeichnung weiter (Bild 7/9).

(14) Zeigen Sie an Hand des Bildes 7/10, daß der Sinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke gilt!

Allgemein ergibt sich, für alle Dreiecke gültig, der **Sinussatz der ebenen Trigonometrie** in folgender Form:



7/9



7/10

9 **SATZ: In jedem Dreieck verhalten sich die Längen der Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel oder kurz:**

$$\boldsymbol{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,}$$

wenn a, b und c die Längen der Seiten, α, β und γ die Maßzahlen der Winkel bezeichnen.

Dafür kann auch geschrieben werden: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

(15) Zeigen Sie, daß der Sinussatz auch im rechtwinkligen Dreieck gilt! Welche Form nimmt er dort an?

Der Sinussatz findet Anwendung, wenn im Dreieck

a) 2 Seiten und einer der den Seiten gegenüberliegenden Winkel oder

b) 2 Winkel und eine Seite

gegeben sind.

Bei Berechnungen mit Hilfe des Sinussatzes lassen sich Logarithmen sehr zweckmäßig verwenden.

13 Von einem Dreieck ABC sind folgende Stücke gegeben:

$a = 20$ cm; $b = 8$ cm; $\alpha = 117°$

Gesucht: c; β; γ

Allgemeine Lösung:

1) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$$

2) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

3) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Zahlenmäßige Lösung:

(unter Verwendung logarithmischer Berechnungen)

1) $\sin\beta = \dfrac{8 \cdot \sin 117°}{20}$

$\sin\beta = \dfrac{8 \cdot \sin 63°}{20}$

$\beta_1 = 20{,}88°$

$\beta_2 = 180° - 20{,}88° = 159{,}12°$

N	lg N		
8	0,9031	+	
sin 63°	0,9499 − 1	+	
Zähler	0,8530		+
20	1,3010		−
sin β	0,5520 − 1		

Da der Sinus in den Quadranten I und II positiv ist, erhält man bei der Berechnung eines Dreieckwinkels unter Verwendung des Sinussatzes im allgemeinen zwei Lösungen. Zu einem von 1 verschiedenen Sinuswert gehören stets ein Winkel im Quadranten I und ein Winkel im Quadranten II. Beide Winkel sind zunächst als Rechenergebnisse möglich, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, ob sie auch beide als Lösungen der betreffenden Aufgabe in Frage kommen.

Für dieses Beispiel gilt:

Da ein Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel haben kann ($\alpha = 117°$ ist gegeben!), entfällt β_2.

2) $\gamma = 180° - 137{,}88° = 42{,}12°$

3) $c = \dfrac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 117°}$

$c = \dfrac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 63°}$

$c = 15{,}06$

N	lg N		
20	1,3010	+	
sin 42,12°	0,8266 − 1	+	
Zähler	1,1276		+
sin 63°	0,9499 − 1		−
c	1,1777		

Ergebnisse:

$a = 20$ cm $\qquad \alpha = 117°$
$b = 8$ cm $\qquad \beta = 20{,}88°$
$c = 15{,}06$ cm $\approx 15{,}1$ cm $\qquad \gamma = 42{,}12°$

Zur Entscheidung, welcher der beiden Winkel, die sich mit Hilfe des Sinussatzes rechnerisch ergeben, für das betreffende Dreieck der „richtige“ ist bzw. ob tatsächlich beide „richtig“ sind, können folgende Überlegungen bzw. planimetrische Lehrsätze Verwendung finden:

1. Ein Dreieck kann höchstens einen stumpfen Winkel haben.
2. Die Winkelsumme beträgt 180°.
3. Der größeren von zwei Seiten liegt der größere der beiden Winkel gegenüber.
4. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

16 Konstruieren Sie ein Dreieck aus den im Beispiel 7/13 gegebenen Stücken! Messen Sie die gesuchten Stücke in dieser Konstruktionsfigur, und vergleichen Sie mit den errechneten Ergebnissen!

Aufgaben 7/29 bis 7/31

7.2.3. Der Kosinussatz

Sind in einem nichtrechtwinkligen Dreieck drei Seiten oder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so kann der Sinussatz nicht zur Berechnung der fehlenden Stücke herangezogen werden. In diesem Fall führt der **Kosinussatz** zum Ziel (Bild 7/11).

Das Dreieck ABC wird durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

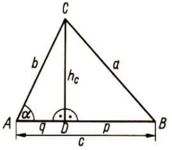
$h_c^2 = b^2 - q^2$ und $h_c^2 = a^2 - p^2$.

Gleichsetzen und Umordnen ergibt

$$b^2 - q^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2.$$

7/11



Wegen $p = c - q$ wird

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq.$$

Im Dreieck ABC gilt $\cos\alpha = \frac{q}{b}$ oder $q = b \cdot \cos\alpha$.

Damit erhält man für das Dreieck ABC:

10 $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.}$

Entsprechend gewinnt man zwei weitere Gleichungen, wenn man das Dreieck statt durch die Höhe h_c durch die Höhen h_a bzw. h_b in rechtwinklige Dreiecke zerlegt:

10 $\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta}$ und $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

Diese drei Gleichungen werden als **Kosinussatz der ebenen Trigonometrie** bezeichnet.

17 Weisen Sie die Richtigkeit des Kosinussatzes an Hand von Bild 7/12 auch für stumpfwinklige Dreiecke nach!

Da der Kosinus in den Quadranten I und II verschiedene Vorzeichen hat, ist die Berechnung eines Dreieckwinkels nach dem Kosinussatz eindeutig.
Will man bei Berechnungen mit Hilfe des Kosinussatzes logarithmische Verfahren anwenden, ergeben sich gewisse Schwierigkeiten, da die logarithmische Berechnung wegen der auftretenden Summen bzw. Differenzen unterbrochen werden muß.

14 Gegeben: Die Seiten eines Dreiecks $a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm.

Gesucht: Dessen Winkel α, β, γ.

Allgemeine Lösung:

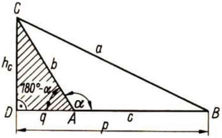
1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

2) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ 3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

7/12



Um nicht auf (evtl. fehlerhafte) Zwischenergebnisse zurückzugreifen, müßte eigentlich angesetzt werden:

2) $\cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ 3) $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Die Schwierigkeit der logarithmischen Berechnung bei Anwendung des Kosinussatzes rechtfertigt aber den zuerst angegebenen Weg, zumal die Konstruktion des Dreiecks aus den drei gegebenen Seiten (evtl. im Maßstab 1 : 2,5) eine einfache Kontrollmöglichkeit für die Richtigkeit der gefundenen Lösung darstellt.

Zahlenmäßige Lösung:

1) $\cos\alpha = \dfrac{169 + 225 - 576}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\dfrac{182}{390} = -\dfrac{7}{15} = -0{,}4667$

$\alpha = 180° - 62{,}18°$

$\alpha = 117{,}82°$

2) $\sin\beta = \dfrac{13 \cdot \sin 117{,}82°}{24}$

$\sin\beta = \dfrac{13 \cdot \sin 62{,}18°}{24}$

$\beta_1 = 28{,}62°$

$\beta_2 = 180° - 28{,}62° = 151{,}38°$

Der Winkel β_2 entfällt als Lösung, da bereits Winkel α stumpf ist.

N	lg N		
13	1,1139	+	
sin 62,18°	0,9466 − 1	+	
Zähler	1,0605		+
24	1,3802		−
sin β	0,6803 − 1		

3) $\gamma = 180° - 146{,}44° = 33{,}56°$

Ergebnisse:

$a = 24$ cm $\alpha = 117{,}8°$
$b = 13$ cm $\beta = 28{,}6°$
$c = 15$ cm $\gamma = 33{,}6°$

Aufgaben 7/32 bis 7/33

7.2.4. Der Flächeninhalt des Dreiecks

(18) Wie heißt die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus einer Seite und der zugehörigen Höhe?

Aus der Formel $A = \frac{1}{2} c h_c$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks erhält man mit Hilfe von $h_c = b \cdot \sin\alpha$ durch Substitution

$$A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha.$$

Entsprechend erhält man

$$A = \frac{1}{2} ca \sin\beta \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

11 **SATZ: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus den Längen zweier Seiten und dem Sinuswert des eingeschlossenen Winkels.**

Ersetzt man in diesen Formeln a, b bzw. c nach dem Sinussatz durch

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}, \qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}, \qquad a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta},$$

so ergeben sich als neue Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken:

12 $$A = \frac{c^2}{2} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}; \qquad A = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}; \qquad A = \frac{b^2}{2} \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin \beta}$$

Aufgabe 7/34

7.2.5. Anwendungen trigonometrischer Berechnungen

Trigonometrische Berechnungen kommen in Sachaufgaben in mannigfacher Form vor.

15 Um die Höhe eines Berges zu messen, wird in der Ebene eine Standlinie $AB = s = 113\,\text{m}$ abgesteckt, deren Richtung genau auf die Bergspitze hinweist (Bild 7/13). An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel $\alpha_1 = 24{,}29°$ und $\alpha_2 = 19{,}80°$ gemessen. Wie hoch erhebt sich der Berg über die Ebene?

Lösung: Es ist $\tan \alpha_1 = \dfrac{h}{e_1}$ und $\tan \alpha_2 = \dfrac{h}{e_1 + s}$.

Die zweite Gleichung wird nach h aufgelöst, die erste nach e_1:

$$h = e_1 \cdot \tan \alpha_2 + s \cdot \tan \alpha_2$$

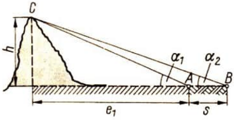
$$e_1 = \frac{h}{\tan \alpha_1}$$

Setzt man den Ausdruck für e_1 in den für h ein und formt um, so erhält man:

$$h = \frac{h \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} + s \cdot \tan \alpha_2$$

$$h\left(1 - \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}\right) = s \cdot \tan \alpha_2$$

$$h = \frac{s \cdot \tan \alpha_2}{\dfrac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}} = \frac{s \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$$



7/13

Die Zahlenwerte werden eingesetzt:

$$h = \frac{113 \cdot \tan 24{,}29° \cdot \tan 19{,}80°}{\tan 24{,}29° - \tan 19{,}80°}$$

$$\begin{aligned} \tan 24{,}29° &= 0{,}4513 \\ \tan 19{,}80° &= 0{,}3600 \\ \hline \text{Nenner} &= 0{,}0913 \end{aligned}$$

$h = 201{,}1$

N	lg N		
113	2,0531	+	
tan 24,29°	0,6545 − 1	+	
tan 19,80°	0,5563 − 1	+	
Zähler	1,2639		+
Nenner	0,9605 − 2		−
h	2,3034		

Ergebnis: Der Berg erhebt sich rund 200 m über die Ebene.

16 In einem Bergwerk sind von demselben „Stoß“ (Wand) eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende „Strecken“ (Gänge) vorgetrieben worden, deren Eingänge um 4 m voneinander entfernt liegen (Grundriß der Schachtanlage: Bild 7/14). Die erste Strecke ist 350 m lang und verläuft senkrecht zur Schachtwand. Die zweite Strecke ist 420 m lang und verläuft unter einem Winkel von 125° gegen die Schachtwand. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden.

a) Wie lang wird die Verbindungsstrecke?

b) In welchen Richtungen ist die Verbindungsstrecke von den beiden Streckenenden vorzutreiben, wenn sie von den Endpunkten aus gleichzeitig in Angriff genommen werden soll?

Das mathematisch Wesentliche ist die Berechnung des Vierecks $ABCD$, in dem drei Seiten und zwei Winkel gegeben sind (Bild 7/15).

Gegeben: $b = 420$ m; $c = 4$ m; $d = 350$ m; $\gamma = 125°$; $\delta = 90°$.

Gesucht: a, α, β.

Durch die Diagonale f wird das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt.

Allgemeine Lösung:

1) $f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$

$$f = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma}$$

2) $\sin\delta_1 = \dfrac{b}{f}\sin\gamma$

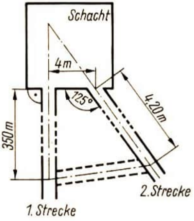
3) $\delta_2 = \delta - \delta_1$

4) $a^2 = d^2 + f^2 - 2df\cos\delta_2$

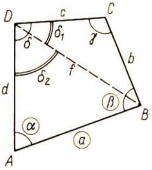
$$a = \sqrt{d^2 + f^2 - 2df\cos\delta_2}$$

5) $\sin\alpha = \dfrac{f}{a}\sin\delta_2$

6) $\beta = 360° - (\delta + \gamma + \alpha)$



7/14



7/15

Zahlenmäßige Lösung:

1) $f^2 = 420^2 + 4^2 + 2 \cdot 420 \cdot 4 \cdot \cos 55°$

$f^2 = 176400 + 16 + 1972$

$= 178388$

$f \approx 422{,}4$

N	lg N		
420	2,6332	+	
8	0,9031	+	
cos 55°	0,7586 − 1	+	
1972	3,2949		

2) $\sin\delta_1 = \dfrac{420}{422{,}4} \cdot \sin 55°$

$\delta_1 = 54{,}54°$

3) $\delta_2 = 90° - 54{,}54°$

$\delta_2 = 35{,}46°$

N	lg N		
420	2,6232	+	
sin 55°	0,9134 − 1	+	
Zähler	2,5366		+
422,4	2,6257		−
sin δ_1	0,9109 − 1		

4) $a^2 = 350^2 + 178388 - 2 \cdot 350 \cdot 422{,}4 \cdot \cos 35{,}46°$

$a^2 = 122500 + 178388 -$
$- 240800$
$= 60088$
$a \approx 245{,}1$

N	lg N		
700	2,8451	+	
422,4	2,6257	+	
cos 35,46°	0,9109 − 1	+	
240800	5,3817		

5) $\sin \alpha = \dfrac{422{,}4}{245{,}1} \cdot \sin 35{,}46°$

$\alpha \approx 90°$

N	lg N		
422,4	2,6257	+	
sin 35,46°	0,7636 − 1	+	
Zähler	2,3893		+
245,1	2,3893		−
sin α	0,0000		

6) $\beta = 360° - (90° + 125° + 90°)$

$\beta = 55°$

Ergebnis: Die Verbindungsstrecke wird rund 245 m lang. Sie ist von den beiden Streckenenden unter einem Winkel von 90° bzw. 55° vorzutreiben.

Aufgaben 7/35 bis 7/56

8. Körperberechnung und Körperdarstellung

8.1. Ebenflächig begrenzte Körper

8.1.1. Prismen

Zu den wichtigsten ebenflächig begrenzten Körpern gehören die **Prismen** und die **Pyramiden.**

1 **DEFINITION: Ein *n*-seitiges Prisma ist ein Körper, der von zwei kongruenten, zueinander parallel liegenden *n*-Ecken und *n* Parallelogrammen (bzw. Rechtecken oder Quadraten) begrenzt wird.**

Die $(n + 2)$ Begrenzungsflächen treffen in den **Kanten** und den **Ecken** des Prismas aneinander. Die n-Ecke heißen **Grundfläche** und **Deckfläche**, die Parallelogramme **Seitenflächen.** Die gemeinsamen Kanten der Seitenflächen sind die **Seitenkanten,** die alle untereinander parallel verlaufen. Stehen die Seitenkanten und damit auch die

Seitenflächen senkrecht auf der Grund- und der Deckfläche, so heißt das Prisma **gerade,** andernfalls **schief.**

(1) Welche Gestalt haben die Seitenflächen beim geraden, welche beim schiefen Prisma?

Der Abstand von Grund- und Deckfläche ist die **Höhe** des Prismas; beim geraden Prisma hat sie die gleiche Länge wie jede Seitenkante.

(2) Auch ein Blatt Schreibpapier hat etwa die Form eines Prismas. Was ist in diesem Fall die „Höhe"?

Sind Grund- und Deckfläche regelmäßige n-Ecke und ist das Prisma gerade, so heißt es selbst **regelmäßiges Prisma.**

(3) Vergleichen Sie die Seitenflächen eines regelmäßigen Prismas miteinander! Was können Sie darüber aussagen?

Auch **Würfel, quadratische Säule** und **Quader** sind Prismen.

(4) Welche Besonderheiten weisen Würfel, quadratische Säule und Quader auf? Untersuchen Sie dazu:

a) die Eckenzahl und die Gestalt der Grundfläche;
b) die Längen der Grund- und der Seitenkanten (vergleichen!);
c) die Gestalt der Seitenflächen!

Die Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte eines Prismas heißt **Diagonale.** Verläuft diese in einer Begrenzungsfläche, so heißt sie **Flächendiagonale,** andernfalls **Raumdiagonale.**

(5) Bestimmen Sie von einem Würfel, einer quadratischen Säule, einem Quader, einem regelmäßigen dreiseitigen Prisma, einem geraden fünfseitigen Prisma, einem schiefen sechsseitigen Prisma die Anzahl der Ecken (E), Flächen (F), Kanten (K), Flächendiagonalen (d), Raumdiagonalen (D), und stellen Sie die ermittelten Zahlen in einer Tabelle nach folgender Art zusammen!

	E	F	K	d	D	$E+F$	$K+2$
Würfel							

2 **SATZ: Für jedes Prisma gilt $E + F = K + 2$ (Eulerscher Polyedersatz), wenn E, F und K in dieser Reihenfolge die Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten sind.**

Beweis: Angenommen, es handelt sich um ein n-seitiges Prisma. Dann ist:

$$E = 2n; \quad F = n + 2; \quad K = \frac{3E}{2} = \frac{3 \cdot 2n}{2},$$

(denn von jeder Ecke gehen 3 Kanten aus, die aber jeweils doppelt gezählt wurden).

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} E + F &= 2n + n + 2 = 3n + 2 \\ K + 2 &= \ 3n + 2 \end{aligned}$$

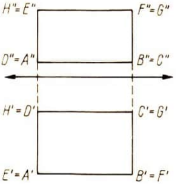
also: $E + F = K + 2$

8.1.2. Zeichnerische Darstellung von Prismen

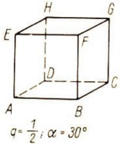
Zur Unterstützung der Vorstellung stellt man mathematische Körper und reale Gebilde unserer Umwelt nach bestimmten mathematischen Gesetzen häufig zeichnerisch dar. Aus der Vielzahl der Methoden soll hier die Darstellung im **Grundriß-Aufriß-Verfahren** (Zweitafelverfahren) und in der **schrägen Parallelprojektion** besprochen werden.

(1) In dem bei Werkzeichnungen gern benutzten **Zweitafelverfahren** wird der Körper einmal lotrecht von oben auf eine waagerecht liegende **Grundrißtafel,** und zum zweiten von vorn auf eine senkrecht dazu stehende **Aufrißtafel** so projiziert, daß die untereinander parallelen Projektionsstrahlen jeweils senkrecht zur Projektionstafel verlaufen. Beide entstehenden Projektionsbilder (**Grundriß** bzw. **Aufriß**) werden, durch eine waagerecht gelegte **Achse** getrennt, in einer Ebene (auf demselben Zeichenblatt) so übereinander gezeichnet, daß die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte (die sog. **Ordnungslinien**) senkrecht zur Achse liegen. Im Grundriß und im Aufriß werden dann alle parallel zur jeweiligen Projektionstafel liegenden Strecken in **wahrer Größe** dargestellt. Das erlaubt für diese Strecken eine einfache Maßentnahme und macht diese Darstellungsart für Werkzeichnungen besonders wertvoll. Dem Bild fehlt allerdings die unmittelbare Anschaulichkeit.

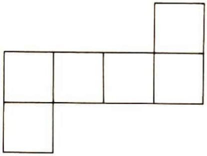
1 Im Bild 8/1 ist ein Quader mit den Kantenlängen 50 cm, 60 cm, 95 cm im Maßstab 1 : 50 im Zweitafelverfahren dargestellt.



8/1



8/2



8/3

(2) Ein anschauliches Bild liefert die **schräge Parallelprojektion.** Dazu denkt man sich den Gegenstand auf einer waagerecht verlaufenden Ebene vor einer lotrechten Ebene aufgestellt und durch parallele Projektionsstrahlen so auf letztere projiziert, daß die Projektionsstrahlen unter irgendeinem Winkel auf der Projektionstafel auftreffen. Je nach diesem Einfallswinkel entstehen ganz verschiedene Bilder. Allen ist aber gemeinsam, daß jede parallel zur Projektionstafel liegende Strecke in wahrer Größe, und jede senkrecht zur Projektionstafel verlaufende Strecke im Bild nach einem bestimmten **Verkürzungsverhältnis** q verkürzt und unter einem bestimmten **Verzerrungswinkel** α gegen die Waagerechte geneigt erscheint.

2 Im Bild 8/2 ist ein Würfel von 3 cm Kantenlänge im Maßstab 1 : 2,5 in schräger Parallelprojektion mit $\alpha = 30°$; $q = \frac{1}{2}$ dargestellt.

Zu diesem Zwecke denkt man sich den Körper so vor die lotrecht angenommene **Projektionstafel** (Zeichenebene) gestellt, daß seine Vorderfläche dazu parallel liegt. Diese erscheint dann im Bild in wahrer Größe und Gestalt [Quadrat mit (3 : 2,5) cm = 1,2 cm

Seitenlänge, 2 Kanten liegen waagerecht, 2 lotrecht]. Von den 4 Eckpunkten des Quadrats aus werden (in diesem Fall nach rechts oben zu) unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ gegen die Waagerechte (von rechts her im mathematisch positiven Drehsinn gemessen) Strecken gezeichnet, die jeweils eine Länge von $\left(1{,}2 \cdot \frac{1}{2}\right)$ cm = 0,6 cm haben. Die Verbindungsstrecken ihrer Endpunkte ergeben die rückwärtige Quadratfläche des Würfels.

Diese Bilder sind zwar anschaulich, doch ist eine unmittelbare Maßentnahme nur für diejenigen Strecken möglich, die parallel zur Projektionstafel liegen.

Aufgaben 8/1 bis 8/2

8.1.3. Netz und Oberflächeninhalt des Prismas

Um das Modell eines Prismas aus Zeichenkarton herzustellen, muß man Grund- und Deckfläche sowie alle Seitenflächen aufzeichnen und ausschneiden. Dabei läßt man möglichst viele Flächen von vornherein zusammenstoßen, um möglichst wenig Klebränder zu haben. Eine solche Aufzeichnung der Oberfläche nennt man ein **Netz** des Prismas.

3 Es gibt eine ganze Anzahl von Möglichkeiten, das Netz eines Würfels zu zeichnen. Eine Möglichkeit zeigt Bild 8/3.

6 Wieviel Möglichkeiten verschiedener Anordnung von Würfelnetzen gibt es insgesamt?

7 Fertigen Sie das Modell eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas aus Zeichenkarton mit möglichst wenig Klebrändern an! Maße: Grundkantenlängen je 5 cm; Länge der Höhe: 10 cm.

Die **Oberfläche** eines Prismas besteht aus Grund- und Deckfläche und n Seitenflächen. Letztere bilden den sog. **Mantel.** Für die Berechnung des **Inhalts der Oberfläche** müssen im allgemeinen die Inhalte der einzelnen Flächenteile getrennt ermittelt und am Ende addiert werden. Für einige besondere Prismen läßt sich die Berechnung vereinfachen.

3 **a) Für den Inhalt A_0 der Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a gilt:**

$$A_0 = 6a^2$$

b) Für den Inhalt A_0 der Oberfläche einer quadratischen Säule mit der Grundkantenlänge a und der Länge h der Höhe gilt:

$$A_0 = a(2a + 4h)$$

c) Für den Inhalt A_0 der Oberfläche eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c gilt:

$$A_0 = 2(ab + bc + ca)$$

8 Begründen Sie die Richtigkeit der Sätze 8/3!

Aufgaben 8/3 bis 8/7

8.1.4. Volumen des Prismas

Für **gerade Prismen,** deren Kantenlängen durch rationale Maßzahlen gegeben sind, gilt:

Besitzt die Grundfläche einen Flächeninhalt von A_G Einheitsquadraten (Einheiten des

Flächeninhalts), so kann man sich dorthinein eine Schicht von A_G Einheitswürfeln (Volumeneinheiten) gelegt denken, deren Kantenlängen gleich der Seitenlänge der Einheitsquadrate sind. Beträgt die Höhe des Prismas h Längeneinheiten, so lassen sich h solcher Schichten übereinander legen, und der Prismenraum wird durch $A_G \cdot h$ Volumeneinheiten gerade ausgefüllt.

Sind bei geraden Prismen die Maßzahlen der Kantenlängen oder des Inhalts der Grundfläche nicht sämtlich rationale Zahlen, so läßt sich das eben dargestellte Verfahren nicht ohne weiteres durchführen. Für hier interessierende praktische Berechnungen ist das aber bedeutungslos.

Für rationale Maßzahlen gilt:

4 **Das Volumen V jedes geraden Prismas mit dem Inhalt A_G der Grundfläche und der Länge h der Höhe beträgt**

$V = A_G \cdot h.$

Bei zahlenmäßiger Berechnung ist darauf zu achten, daß h, A_G und V in einander entsprechenden Maßeinheiten angegeben werden.

Aus Satz 8/4 folgt:

5 **a) Für das Volumen V eines Würfels mit der Kantenlänge a gilt:**

$V = a^3$

b) Für das Volumen V einer quadratischen Säule mit der Grundkantenlänge a und der Länge h der Höhe gilt:

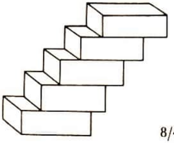
$V = a^2h$

c) Für das Volumen V eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c gilt:

$V = abc$

Die Berechnung des **schiefen Prismas** läßt sich durch folgende Überlegung auf die des geraden zurückführen:

Denkt man sich die eben erwähnten Schichten aus Einheitswürfeln nicht lotrecht übereinandergestapelt, wie es beim geraden Prisma erforderlich ist, sondern Schicht für Schicht seitlich verschoben, so ergibt sich ein Gebilde, das gewisse Ähnlichkeit mit einem schiefen Prisma hat. Allerdings besteht sein Mantel nicht aus lauter ebenen Seitenflächen, sondern ist teilweise treppenförmig gestaltet (Bild 8/4 für einen Quader.) Höhe und Volumen dieses Treppenkörpers sind aber offenbar dieselben wie die des Quaders, der als Ausgang für die Verschiebung diente.



8/4

Vergrößert man die Anzahl der Schichten, d. h., werden sie immer dünner gewählt, so werden die Unterschiede zwischen dem Treppenkörper und einem schiefen Prisma immer geringer, während sich am Volumen und an der Höhe nichts ändert. Indem man die entsprechenden Berechnungen durchführt, kann man zeigen, daß die Formel für das Volumen eines geraden Prismas $V = A_G \cdot h$ auch für jedes schiefe Prisma mit dem Inhalt A_G seiner Grundfläche und der Länge h seiner Höhe gilt.

9 Verfahren Sie wie beschrieben mit einem Stapel dicker Bücher, einem Stapel dünner Hefte und einem Stapel von Papierblättern!

In Gedanken kann man die Schichten beliebig dünn werden lassen. Das berechtigt zu der folgenden (mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht beweisbaren) Behauptung, die nicht nur für Prismen, sondern für beliebige Körper aufgestellt ist und Gültigkeit hat.

6 **SATZ: Haben Körper gleich lange Höhen und Grundflächen von gleichem Inhalt und ergeben zur Grundfläche parallele Schnitte in gleichen Entfernungen von der Grundfläche Schnittfiguren von gleichem Inhalt, so sind die Körper volumengleich.**

Diese Erkenntnis wurde erstmals von dem italienischen Mathematiker CAVALIERI (1598 – 1647) geäußert, nach dem dieser Satz auch heute noch genannt wird. Er ermöglicht die Bestimmung der Volumina einiger Körper, deren Volumen mit elementaren Mitteln nicht zu berechnen wäre. Für Prismen folgt aus dem Satz des CAVALIERI:

4 **Das Volumen V jedes Prismas mit dem Inhalt A_G seiner Grundfläche und die Länge h seiner Höhe beträgt**

$$V = A_G \cdot h,$$

unabhängig davon, ob es gerade oder schief ist.

Aufgaben 8/8 bis 8/15

8.1.5. Pyramide und Pyramidenstumpf

7 **DEFINITION: Eine n-seitige Pyramide ist ein Körper, der von einem n-Eck und n Dreiecken begrenzt wird.**

Das n-Eck heißt die **Grundfläche,** die n Dreiecke heißen die **Seitenflächen.** Letztere bilden zusammen den **Mantel.** Die **Seitenkanten,** in denen jeweils zwei Seitenflächen zusammentreffen, gehen alle durch einen gemeinsamen Punkt, die **Spitze** der Pyramide. Das Lot von der Spitze auf die Grundfläche heißt die **Höhe** der Pyramide.

Ist die Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck, heißt auch die Pyramide **regelmäßig.** Trifft die Pyramidenhöhe auf diese regelmäßige Grundfläche genau in deren Mittelpunkt, so nennt man die Pyramide **gerade,** in allen anderen Fällen **schief.** In diesen Fällen ist es auch möglich, daß der Fußpunkt der Höhe außerhalb der Grundfläche in deren Ebene liegt.
Wird parallel zur Grundfläche ein ebener Schnitt durch die Pyramide gelegt, so entsteht als Schnittfigur eine zur Grundfläche ähnliche Schnittfigur. Auf diese Weise wird von der ursprünglichen Pyramide eine kleinere Pyramide abgeschnitten. Der Restkörper heißt **Pyramidenstumpf.**

8 **DEFINITION: Ein Pyramidenstumpf ist ein Körper, der von zwei ähnlichen und zueinander parallel liegenden n-Ecken und n Trapezen als Seitenflächen begrenzt wird.**

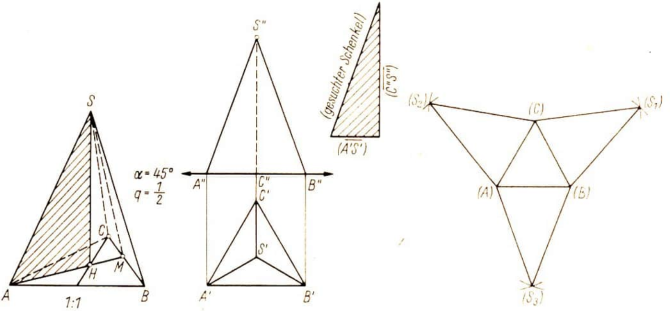
Geht man vom Pyramidenstumpf aus, so müssen die den Körper begrenzenden Flächen so gestaltet sein, daß sich alle Verlängerungen der den Trapezen gemeinsamen Seitenkanten in einem gemeinsamen Punkt (außerhalb des Pyramidenstumpfes) schneiden. In diesem Falle entsteht nachträglich wieder die kleine Pyramide, die den Stumpf zur großen Pyramide vervollständigt. Sie heißt deshalb **Ergänzungspyramide.**
Als **Höhe** des Pyramidenstumpfes bezeichnet man, wie beim Prisma, den Abstand von Grund- und Deckfläche.

10 Inwiefern ist sowohl das Prisma als auch die Pyramide ein Grenzfall des Pyramidenstumpfes?

8.1.6. Zeichnerische Darstellung, Netz und Oberflächeninhalt von Pyramide und Pyramidenstumpf

4 In Bild 8/5 sind von einer geraden dreiseitigen Pyramide **a)** das Schrägbild (Bild 8/5a), **b)** das Zweitafelbild (Bild 8/5b), **c)** ein Netz (Bild 8/5c) gezeichnet.
(Die Bilder sind hier in verschiedenen Maßstäben wiedergegeben, wie man an den unterschiedlichen Längen der Strecke $\overline{AB}$ erkennt.)

Zur Konstruktion der Schenkel der Dreiecke des Netzes wird ein rechtwinkliges Hilfsdreieck erforderlich, das in Bild 8/5a schraffiert ist. Seine Katheten können aus Grundriß bzw. Aufriß des Zweitafelbildes entnommen werden.



8/5a 8/5b 8/5c

11 Von der in Bild 8/5 dargestellten Pyramide soll eine kleine Pyramide so abgeschnitten werden, daß ein Pyramidenstumpf von der Höhe 1,5 cm übrig bleibt. Welche Strecken und Eckpunkte bleiben erhalten? Welche müssen Sie ändern? Zeichnen Sie im Maßstab 1:1 das Schrägbild mit $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$, das Zweitafelbild und ein Netz von diesem Stumpf für folgende Maße der Pyramide! Länge aller Grundkanten 3 cm, Höhe 4 cm!

Um den **Inhalt der Oberfläche** für eine Pyramide oder einen Pyramidenstumpf zu bestimmen, müssen im allgemeinen die Inhalte der einzelnen Flächenteile (Grund-, Deck- und Mantelfläche) getrennt ermittelt und am Ende addiert werden. Dabei ist zu beachten, daß man meistens die Höhen der Seitenflächen (Dreiecke oder Trapeze) benötigt, die nicht mit der Höhe des Körpers verwechselt werden dürfen. Man muß also streng zwischen Körperhöhe h_K und Flächenhöhe h_F unterscheiden.

5 Die Oberfläche A_O der im Beispiel 8/4 zeichnerisch dargestellten Pyramide besteht aus der Grundfläche (gleichseitiges Dreieck) und drei kongruenten (gleichschenkligen) Dreiecken. Für deren Flächeninhalt benötigen wir die Flächenhöhen h_F. Ist die Grundkante a, so gilt:

$$A_O = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{a}{2} h_F$$

Zur Bestimmung von h_F dient das in (Bild 8/5a) bereits mitgezeichnete zweite Hilfsdreieck SHM (Bild 8/6).
In ihm ist die gesuchte Flächenhöhe h_F die Hypotenuse, die Körperhöhe h_K die eine Kathete. Die Länge der anderen Kathete $\overline{HM}$ beträgt ein Drittel von der der Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seite a, also $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Folglich gilt:

$$h_F = \sqrt{h_K^2 + \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{h_K^2 + \frac{a^2}{12}}$$

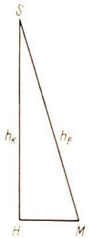
und

$$A_O = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2}a\sqrt{h_K^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

Nach Einsetzen der Maße für a und h_K erhält man:

$$A_O = \frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{2}\sqrt{16 + \frac{9}{12}} = \frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{67} \approx 22{,}3.$$

Ergebnis: Der Inhalt der Oberfläche ist ungefähr 22 cm².



8/6

(12) Bestimmen Sie entsprechend den Inhalt der Oberfläche des in Übung 8/11 untersuchten Pyramidenstumpfes!

Aufgaben 8/16 bis 8/19

8.1.7. Volumen der Pyramide

Da Satz 8/6 auch für Pyramiden gilt, folgt:

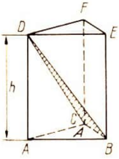
9 **SATZ: Alle Pyramiden mit gleichem Inhalt der Grundflächen und gleich langen Höhen sind volumengleich.**

Wir betrachten zunächst ein gerades dreiseitiges Prisma (Bild 8/7) mit der Grundfläche vom Inhalt A_G und der Höhe von der Länge h.
Ein ebener Schnitt durch B, C und D trennt davon eine schiefe dreiseitige Pyramide mit derselben Grundfläche und derselben Höhe ab. Übrig bleibt eine schiefe vierseitige Pyramide mit der Grundfläche $BEFC$ und der Spitze D. Diese Pyramide läßt sich durch einen ebenen Schnitt durch B, F und D in zwei volumengleiche dreiseitige Pyramiden $BEFD$ und $BFCD$ zerlegen (Bild 8/8). Diese beiden Pyramiden haben dasselbe Volumen, weil sie (durch Halbierung des Parallelogramms $BEFC$ entstandene) Grundflächen von gleichem Inhalt und gleich lange Höhen besitzen (vgl. Satz 8/9).
Nun hat aber andererseits die Pyramide $EFDB$ (jetzt mit der Grundfläche EFD betrachtet) eine Grundfläche vom gleichen Inhalt bzw. eine Höhe von gleicher Länge wie die anfangs abgetrennte Pyramide $ABCD$. Infolgedessen gilt:
Die Pyramiden $ABCD$, $BEFD$ und $BFCD$ sind volumengleich, und jede hat (da sie das Prisma $ABCDEF$ völlig aufteilen) den dritten Teil des Volumens dieses Prismas. Von diesen Pyramiden hat die zuerst genannte dieselbe Grundfläche und Höhe wie das Prisma, dessen Volumen nach Satz 8/4 $V = A_G \cdot h$ ist. Folglich ergibt sich für das Volumen der Pyramide $ABCD$, die den Inhalt A_G der Grundfläche und die Länge h der Höhe hat, $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$. •

Da nach Satz 8/9 jede beliebige Pyramide mit einer Grundfläche vom Inhalt A_G und einer Höhe von der Länge h volumengleich einer Pyramide von der Form der Pyramide $ABCD$ ist, die sich, wie gezeigt wurde, zu einem Prisma ergänzen läßt, gilt allgemein:

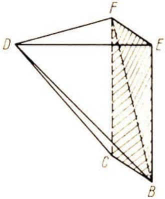
10 **Das Volumen V jeder Pyramide mit dem Inhalt A_G seiner Grundfläche und der Länge h seiner Höhe ist**

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h.$$



8/7

8/8



Aufgaben 8/20 bis 8/25

8.1.8. Volumen des Pyramidenstumpfes

Das Volumen V des Pyramidenstumpfes mit der Höhe von der Länge h, der Grundfläche vom Inhalt A_1 und der Deckfläche vom Inhalt A_2 wird als Differenz zwischen dem Volumen der Ausgangspyramide mit der Höhe von der Länge H und dem der abgeschnittenen Ergänzungspyramide bestimmt (Bild 8/9).

$$V = \frac{1}{3} A_1 H - \frac{1}{3} A_2 (H - h)$$

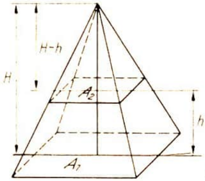
$$= \frac{1}{3} (A_1 - A_2) H + \frac{1}{3} A_2 h.$$

13 Wiederholen Sie die Ähnlichkeitsgesetze und den Strahlensatz!
Welche Beziehung besteht zwischen A_1, A_2, H und h bzw. $H - h$?

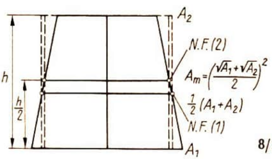
Die Herleitung der Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfes erfordert nicht ganz einfache Umformungen. Deshalb wird hier sofort das Ergebnis mitgeteilt:

$$V = \frac{h}{3} (A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2).$$

Diese Berechnungsformel für das Volumen von Pyramidenstümpfen ist sehr umständlich. Deshalb wird in der Praxis oft mit den **Näherungsformeln** gearbeitet, die alle darauf beruhen, daß man den Pyramidenstumpf als Prisma betrachtet. Es liegt auf



8/9



8/10

der Hand, daß solche Näherungen nur dann geringe Abweichungen vom wahren Wert aufweisen, wenn der Pyramidenstumpf prismenähnlich ist, d. h. wenn sich die Grundfläche und die Deckfläche nur wenig in ihrem Flächeninhalt unterscheiden. Oft benutzt werden dann zwei Näherungsformeln, die sich nur darin unterscheiden, was als Flächeninhalt der Grundfläche des Näherungsprismas benutzt wird (Bild 8/10).
Die eine benutzte dazu das arithmetische Mittel zwischen den Flächeninhalten von Grund- und Deckfläche $\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right)$, die andere den Flächeninhalt der genau in der Mitte zwischen Grund- und Deckfläche $\left(\text{also in der Höhe } \frac{h}{2}\right)$ liegenden parallelen Schnittfigur $A_m = \frac{1}{4}\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)^2$

Die Höhe des Prismas ist in beiden Fällen genau so lang wie die Höhe h des Pyramidenstumpfes.

Näherungsformeln:

(1) $V \approx \frac{h}{2}(A_1 + A_2)$, (liefert zu große Werte)

(2) $V \approx h \cdot A_m = \frac{h}{4}\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)^2$. (liefert zu kleine Werte)

(14) Zeigen Sie mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze bzw. des Strahlensatzes, daß tatsächlich gilt:

$$A_m = \left(\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{2}\right)^2 !$$

11 **Das Volumen eines Pyramidenstumpfes mit der Grundfläche vom Flächeninhalt A_1, der Deckfläche vom Flächeninhalt A_2 und der Höhe von der Länge h läßt sich genau mit der Formel**

$$V = \frac{h}{3}\left(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2\right),$$

angenähert mit den Formeln

a) $V \approx \frac{h}{2}(A_1 + A_2)$ **oder** **b)** $V \approx \frac{h}{4}\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)^2$

berechnen.

6 Das Volumen des geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit den Längen der Grundkanten $a_1 = 6$ cm, der Deckkanten $a_2 = 5$ cm und der Höhe $h = 9$ cm ergibt sich wie folgt:

genau: $V = \frac{9}{3}\left(36 + \sqrt{36 \cdot 25} + 25\right)\,\text{cm}^3 = 273\,\text{cm}^3$,

angenähert: $V \approx \frac{9}{2}(36 + 25)\,\text{cm}^3 = 274{,}5\,\text{cm}^3$,

oder $V \approx \frac{9}{4}\left(\sqrt{36} + \sqrt{25}\right)^2\,\text{cm}^3 = 272{,}25\,\text{cm}^3$.

Die Abweichungen betragen maximal etwa $\frac{1}{2}$ %.

(15) Führen Sie Untersuchungen des Beispiels 8/6 für einen gleichartigen Pyramidenstumpf mit den Abmessungen $a_1 = 10$ cm; $a_2 = 4$ cm; $h = 8$ cm durch. Was für Abweichungen stellen Sie diesmal bei den mit den Näherungsformeln berechneten Maßzahlen für das Volumen fest?

Aufgaben 8/26 bis 8/30

8.2. Krummflächig begrenzte Körper

8.2.1. Gerader Kreiszylinder

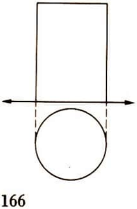
(16) Wie werden die Länge des Umfangs und der Flächeninhalt eines Kreises berechnet? Welche Rolle spielt dabei die Zahl π?

Wird die Eckenzahl eines regelmäßigen n-Ecks bei festgehaltenem Radius immer mehr vergrößert, so nähert sich der Streckenzug des Vieleckumfangs immer mehr einer Kreislinie. Entsprechend nähert sich das regelmäßige Prisma, wenn sich die Grundfläche einem Kreis nähert, mehr und mehr einem Körper, dessen Mantel statt aus einer Vielzahl von Parallelogrammen aus einer gleichmäßig gekrümmten Fläche besteht. Dieser Körper heißt **Kreiszylinder**, die Seitenkanten des Prismas werden hier **Mantellinien** genannt. Die Mantellinien sind alle untereinander parallel. Stehen sie senkrecht auf Grund- und Deckfläche, handelt es sich um den **geraden Kreiszylinder.** Er ist ein Grenzfall des geraden Prismas.

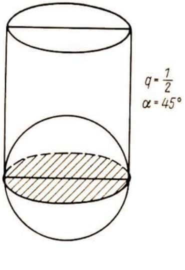
Die **zeichnerische Darstellung im Zweitafelverfahren** ist einfach (Bild 8/11). Im **Schrägbild** bereitet sie Schwierigkeiten, weil hier Grund- und Deckfläche zu Ellipsen verzerrt werden (Bild 8/12).

Deshalb wird gern zur Darstellung ein Verfahren verwendet, das sonst wenig anschauliche Schrägbilder liefert, aber bei der Darstellung von Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel sehr zweckmäßig ist (Bild 8/13). Es handelt sich dabei um eine besondere **schräge Parallelprojektion mit $\alpha = 90°$ und beliebigem q.** Die senkrecht zur Zeichenebene verlaufenden Strecken des Originals werden hierbei unter 90° zur Waagerechten angetragen und dann im Verhältnis q verkürzt. Dabei geht der Eindruck einer „schrägen" Betrachtung verloren, obwohl es sich nach der Konstruktion um ein Schrägbild handelt.

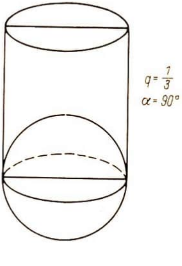
8/11



8/12



8/13



Die Deutung des **Kreiszylinders** als Grenzfall des regelmäßigen Prismas ergibt die Möglichkeit, zur Berechnung des **Volumens** des Kreiszylinders den Satz 8/4 mit $A_G = \frac{\pi}{4} d^2$ anzuwenden.

12 **Das Volumen V eines Kreiszylinder mit dem Durchmesser von der Länge d und der Höhe von der Länge h ist**

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 h.$$

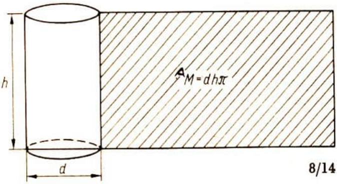
Die **Oberfläche** besteht aus Grundkreisfläche, Deckkreisfläche und Mantel. Beim **geraden Kreiszylinder** läßt sich der Inhalt der Mantelfläche leicht bestimmen, denn er ist (wie auch beim schiefen Kreiszylinder) **abwickelbar** (Bild 8/14). Darunter versteht man die Tatsache, daß sich der Mantel nach „Aufschneiden" längs einer Mantellinie in einer Ebene ausbreiten läßt. Beim geraden Kreiszylinder ergibt sich dabei ein **Rechteck.**

13 **Der Flächeninhalt A_M des Mantels eines geraden Kreiszylinders mit dem Durchmesser von der Länge d und der Höhe von der Länge h ist**

$$A_M = \pi d h,$$

der Inhalt A_O der Oberfläche ist

$$A_O = A_M + 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = \pi \left(d h + \frac{d^2}{2}\right).$$



8/14

17 Leiten Sie je eine Formel für das Volumen und den Oberflächeninhalt eines **Hohlzylinders** her (Länge des äußeren Durchmessers d_1, des inneren Durchmessers d_2, der Höhe h)!

Aufgaben 8/31 bis 8/36

8.2.2. Gerader Kreiskegel und Kreiskegelstumpf

So wie der Kreiszylinder ein Grenzfall des regelmäßigen Prismas ist, ist der gerade Kreiskegel ein Grenzfall der regelmäßigen Pyramide (Bild 8/15).

Entsprechend gilt $\left(\text{wegen } A_G = \frac{\pi}{4} d^2\right)$ hier folgender Satz:

14 **Das Volumen V eines Kreiskegels mit dem Grundkreisdurchmesser von der Länge d und der Höhe von der Länge h ist**

$$V = \frac{1}{12} \pi d^2 h.$$

Für den dem Pyramidenstumpf entsprechenden Kreiskegelstumpf ergibt sich mit $A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2$ (Inhalt des Grundkreises) und $A_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2$ (Inhalt des Deckkreises):

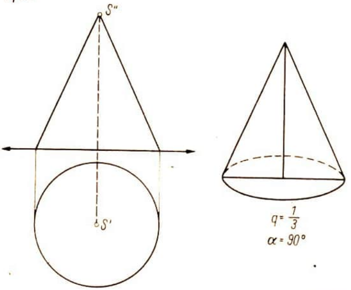
15 **Das Volumen V eines geraden Kreiskegelstumpfes mit dem Grundkreisdurchmesser von der Länge d_1, dem Deckkreisdurchmesser von der Länge d_2 und der Höhe von der Länge h ist**

$$V = \frac{\pi}{12} h \left(d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2\right).$$

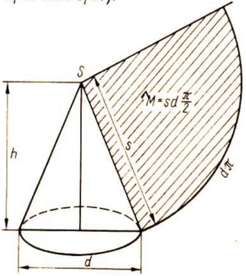
(18) **Leiten Sie die Formel in Satz 8/15 aus der Formel in Satz 8/11 her!**

(19) **Entwickeln Sie aus den beiden Näherungsformeln für den Pyramidenstumpf in Satz 8/11 zwei Näherungsformeln für den Kreiskegelstumpf!**

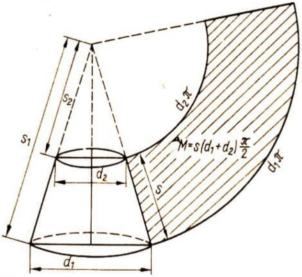
Auch der **Mantel** jedes **Kreiskegels** und jedes **Kreiskegelstumpfes** ist **abwickelbar.** Für die geraden Körper ergeben sich einfache Möglichkeiten der Berechnung des Mantelflächeninhalts, denn der abgewickelte Mantel des **Kreiskegels** ergibt einen **Kreissektor** (Kreisausschnitt), der Mantel des **Kreiskegelstumpfes,** dessen Flächeninhalt gleich der Differenz der Flächeninhalte von Kreiskegel- und Ergänzungskegelmantel ist, einen **Ausschnitt aus einem Kreisring** (Bild 8/16 und 8/17).



8/15



8/16



8/17

(20) **Wiederholen Sie aus der Kreislehre die Berechnung der Länge des Kreisbogens $b = \frac{\alpha}{180}\pi r$ und des Flächeninhalts des Kreissektors $A = \frac{\alpha}{360}\pi \cdot r^2 = \frac{b \cdot r}{2}$, wobei r die Länge des Kreisradius und α das Gradmaß des zum Bogen bzw. Sektor gehörigen Zentriwinkels ist!**

Erarbeiten Sie nochmals die grundlegende Proportion $\alpha : 360 = b : 2\pi r$!

Für den **Flächeninhalt A_M des Mantels des geraden Kreiskegels** ergibt sich somit, wenn s die Länge des Radius des Sektors und πd die Länge des Bogens ist,

$$A_M = \frac{\pi}{2} ds.$$

16 **Für jeden geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisdurchmesser von der Länge d und der Mantellinie von der Länge s ist der Inhalt A_M der Mantelfläche bzw. der Inhalt A_O der Oberfläche**

$$A_M = \frac{\pi}{2} ds \quad \text{bzw.} \quad A_O = \frac{\pi}{4} d(d + 2s).$$

(21) Leiten Sie die Formel für den Inhalt A_O der Oberfläche des Kreiskegels durch Zusammensetzen aus den Flächeninhalten von Grundkreis und Mantel selbst her ($A_O = A_M + A_G$)!

Für den **Flächeninhalt A_M des Mantels des Kreiskegelstumpfes** erhalten wir durch Differenzbildung

$$A_M = \frac{\pi}{2} d_1 s_1 - \frac{\pi}{2} d_2 s_2.$$

Wegen $d_1 : d_2 = s_1 : s_2$ und $s_1 - s_2 = s$ ergibt sich schließlich

$$A_M = \frac{\pi}{2} s (d_1 + d_2) = \pi s (r_1 + r_2).$$

(22) Leiten Sie diese Beziehung durch Eliminieren von s_1 und s_2 und Einführen von s selbst her!

17 **Für jeden geraden Kreiskegelstumpf mit den Längen d_1 bzw. d_2 von Grund- bzw. Deckkreisdurchmesser und der Länge s der Seitenkante ist der Flächeninhalt A_M des Mantels bzw. der Inhalt A_O der Oberfläche**

$$A_M = \frac{\pi}{2} s(d_1 + d_2) \quad \text{bzw.} \quad A_O = \frac{\pi}{2}\left[s(d_1 + d_2) + \frac{d_1^2}{2} + \frac{d_2^2}{2}\right].$$

(23) Leiten Sie die Formel für den Inhalt A_O der Oberfläche des Kreiskegelstumpfes durch Zusammensetzen aus den Flächeninhalten von Grundkreis, Deckkreis und Mantel selbst her ($A_O = A_1 + A_2 + A_M$)!

Aufgaben 8/37 bis 8/50

8.2.3. Die Kugel und ihre zeichnerische Darstellung

18 **DEFINITION: Die Kugelfläche ist der geometrische Ort aller Raumpunkte, die von einem festen Punkt gleichen Abstand haben.**

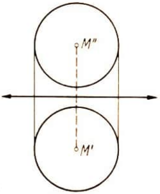
Eine Kugel wird auch erzeugt, wenn eine Kreisfläche um einen Durchmesser dieses Kreises rotiert.

Wird die Kugel von Ebenen geschnitten, so entstehen als Schnittfiguren Kreise unterschiedlicher Größe. Die größten (sog. **Hauptkreise** oder **Großkreise**) ergeben sich, wenn die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Ist das nicht der Fall, entstehen **Klein-** oder **Nebenkreise**, sofern die Kugel überhaupt geschnitten wird. Im Grenzfall berührt die Ebene die Kugelfläche in einem Punkt, sie ist dann **Tangentialebene** an die Kugel.

Die **zeichnerische Darstellung** der Kugel im **Zweitafelverfahren** ist einfach, aber wenig anschaulich (Bild 8/18).
Bei der Darstellung in **schräger Parallelprojektion** ergeben sich die gleichen Schwierigkeiten wie bei Kreiszylinder und Kreiskegel, nur ist überdies bei der Kugeldarstellung

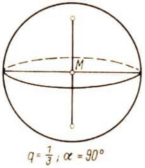
die Anschaulichkeit mangelhaft. Abhilfe kann man schaffen, wenn man wenigstens den waagerecht liegenden Großkreis der Kugel mit einzeichnet sowie die Punkte, in denen der auf diesem Großkreis senkrecht stehende Kugeldurchmesser die Kugeloberfläche trifft (Bild 8/19).

(24) Warum liegen die Durchstoßpunkte des Durchmessers, der senkrecht auf dem in Bild 8/19 dargestellten Großkreis steht, durch die Kugelfläche im Bild nicht auf dem Umriß?



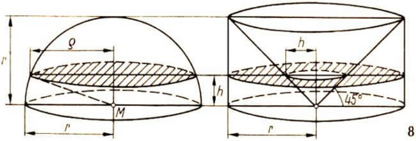
8/18

8/19



8.2.4. Volumen der Kugel

Das Volumen läßt sich unter Anwendung des Satzes von Cavalieri bestimmen. Die beiden volumengleichen Körper, die den Bedingungen von Satz 8/6 genügen, sind einerseits eine Halbkugel und andererseits ein Restkörper, der sich ergibt, wenn aus einem Kreiszylinder ein Kreiskegel ausgebohrt wird (Bild 8/20).



8/20

Um zu zeigen, daß Halbkugel und Restkörper volumengleich sind, ist in einer beliebigen Höhe h $(0 < h < r)$ parallel zu den Grundkreisen beider Körper eine Schnittebene gelegt worden. Diese ergibt als Schnittfigur

bei der Halbkugel einen Kreis mit dem Radius ϱ, wobei $\varrho^2 = r^2 - h^2$ gilt.	beim Restkörper einen Kreisring mit den Radien r und h.

Der Flächeninhalt dieser Schnittfiguren ist

$\pi\varrho^2 = \pi(r^2 - h^2)$.	$\pi r^2 - \pi h^2$.

Diese beiden Flächeninhalte sind gleich, womit die Bedingungen von Satz 8/6 erfüllt sind. Dann gilt:

$$V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Restkörper}}$$
$$= V_{\text{Kreiszylinder}} - V_{\text{Kreiskegel}},$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = r^2 \cdot r \cdot \pi - r^2 \cdot r \cdot \frac{\pi}{3}$$
$$= r^3 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{d}{8} \cdot \frac{2}{3}\pi.$$

19 **Eine Kugel mit dem Durchmesser von der Länge d hat das Volumen**

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3.$$

(25) Leiten Sie eine Formel für das Volumen einer Hohlkugel mit den Längen d_1 bzw. d_2 des äußeren bzw. inneren Durchmessers her!

Aufgaben 8/51 bis 8/59

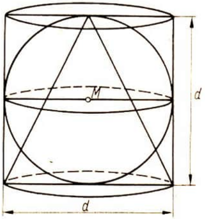
8.2.5. Oberflächeninhalt der Kugel

Eine Herleitung der Formel für den Inhalt der Kugeloberfläche ist mit elementaren Mitteln nicht möglich. Sie wird daher hier ohne Beweis mitgeteilt.

20 **Für eine Kugel mit dem Durchmesser von der Länge d ist der Inhalt A_0 der Oberfläche**

$$A_0 = \pi d^2.$$

8/21



7 In einen geraden Kreiszylinder (Länge des Durchmessers d; Länge der Höhe $h = d$) werden eine Kugel und ein gerader Kreiskegel einbeschrieben (Bild 8/21). Zu vergleichen sind

a) die Volumina der 3 Körper,
b) die Inhalte der Oberflächen der 3 Körper,
c) die Inhalte der Mantelflächen der 3 Körper (wobei bei der Kugel $A_O = A_M$ gelten soll).

Zu **a)** $V_Z : V_{Ku} : V_{Ke} = \frac{1}{4}\pi d^3 : \frac{1}{6}\pi d^3 : \frac{1}{12}\pi d^3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 3 : 2 : 1$

(Diese Aussage heißt der **Satz von Archimedes**.)

Zu **b)** $A_{OZ} : A_{OKu} : A_{OKe} = \frac{3}{2}\pi d^2 : \pi d^2 : \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{5})\, d^2 = 6 : 4 : (1 + \sqrt{5})$

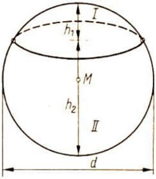
Zu **c)** $A_{MZ} : A_{MKu} : A_{MKe} = \pi d^2 : \pi d^2 : \frac{1}{4}\sqrt{5}\,\pi d^2 = 4 : 4 : \sqrt{5}$

(Der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders ist gleich dem Inhalt der Oberfläche der einbeschriebenen Kugel.)

Aufgaben 8/60 bis 8/68

8.2.6. Kugelteile

8/22



Wird eine Kugel durch **eine** Ebene in zwei Teile zerlegt, so heißen die beiden dadurch entstehenden Teile des **Kugelvolumens** die beiden **Kugelsegmente** oder **Kugelabschnitte,** die beiden Teile der **Kugeloberfläche** die beiden **Kugelkalotten** oder **Kugelkappen** (Bild 8/22).
Die Berechnungsformeln werden hier ohne Beweis mitgeteilt. Mit den Bezeichnungen im Bild 8/22 gilt für

das **Volumen** V **des Kugelabschnitts:**

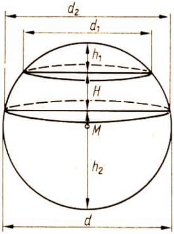
$$V = \frac{\pi}{3} h^2 \left(\frac{3}{2} d - h \right),$$

den **Flächeninhalt** A_M **der Kugelkappe:**

$$A_M = \pi d h.$$

Wird die Kugel von **zwei** zueinander parallelen Ebenen geschnitten, so entstehen drei Teile des Kugelvolumens. Zwei der **Volumenteile** sind Kugelabschnitte, der dritte, zwischen den Ebenen gelegene, heißt **Kugelschicht.** Auch die Kugeloberfläche wird durch die beiden Ebenen in drei Teile zerlegt, von denen zwei Kugelkappen sind. Der dritte, zwischen den Ebenen gelegene Teil der Kugeloberfläche heißt **Kugelzone** (Bild 8/23). Die Berechnungsformeln werden wieder ohne Beweis mitgeteilt.
Mit den Bezeichnungen von Bild 8/23 gilt für

8/23



das **Volumen** V **der Kugelschicht:**

$$V = \frac{\pi H}{6} \left(\frac{3}{4} d_1^2 + \frac{3}{4} d_2^2 + H^2 \right),$$

den **Flächeninhalt** A_M **der Kugelzone:**

$$A_M = \pi d H.$$

Im Gegensatz zu Bild 8/23 können die beiden Schnittebenen auch vom Kugelmittelpunkt aus betrachtet auf verschiedenen Seiten verlaufen; an den Berechnungsformeln ändert sich dadurch nichts.

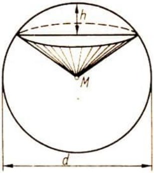
(26) Wird d_1 oder d_2 gleich Null, so geht aus der Kugelschicht der Kugelabschnitt, aus der Kugelzone die Kugelkappe hervor. Bestätigen Sie das an Hand der Formeln!

(27) Wird $h = \frac{d}{2}$, so entsteht aus dem Kugelabschnitt die Halbkugel, aus der Kugelkappe die halbe Kugeloberfläche. Bestätigen Sie auch das an Hand der Formeln!

Gelegentlich wird als Teil des Kugelvolumens der **Kugelsektor** oder **Kugelausschnitt** benötigt. Er besteht aus einem Kugelabschnitt und dem Kegel, der den Schnittkreis des Abschnitts als Grundkreis hat und dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt (Bild 8/24). Die Formel für die Berechnung des Volumens wird ebenfalls ohne Beweis mitgeteilt.
Mit den Beziehungen von Bild 8/24 lautet sie für
das **Volumen** V **des Kugelausschnitts:**

$$V = \frac{\pi}{6} d^2 h$$

8/24



(28) Wird $h = \frac{d}{2}$, so entsteht aus dem Kugelausschnitt die Halbkugel. Bestätigen Sie das an Hand der Formeln!

Aufgaben 8/69 bis 8/80

Aufgaben

1. Arbeiten mit Variablen

1. Geben Sie die Menge der natürlichen Zahlen an, die

a) kleiner als 3 sind,
b) durch 3 teilbar und kleiner als 10 sind!

2. Geben Sie die Menge der natürlichen Zahlen an, die

a) größer als 10 und kleiner als 11 sind,
b) nicht durch 3 teilbar und kleiner als 10 sind!

3. Geben Sie alle echten Teilmengen von folgenden Mengen an!

a) $M_1 = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
b) $M_2 = \{7; 77; 777; 7777\}$
c) $M_3 = \{A; B; C\}$
d) $M_4 = \{\bigcirc; \triangle; \square; \diamond\}$

4. Welche von folgenden Mengen sind gleich und welche sind gleichmächtig?

$M_1 = \{1; 2; 3\}$; $M_2 = \{a; b; c; d\}$; $M_3 = \{3; 1; 2\}$; $M_4 = \{10; 100; 1000; 10000\}$; $M_5 = \{5\}$

Welche geometrischen Gebilde werden durch die folgenden Definitionen beschrieben?

5. a) Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene gleich weit entfernt sind.

b) die Menge aller Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben.

6. a) Die Menge aller Punkte einer Ebene die von einer Geraden in dieser Ebene gleichen Abstand haben.

b) Die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt gleich weit entfernt sind.

7. Definieren Sie die Mittelsenkrechte auf einer gegebenen Strecke mit Hilfe des Mengenbegriffs!

8. Definieren Sie die Winkelhalbierende eines gegebenen Winkels mit Hilfe des Mengenbegriffs!

---

1. In einer Klasse haben 11 Schüler ein Fahrrad und 12 Schüler eine Luftmatratze. Was kann man über die Anzahl der Schüler dieser Klasse aussagen?

2. In einer Klasse sind 11 Rettungsschwimmer und zwei Nichtschwimmer. Was kann man über die Anzahl der Schüler dieser Klasse aussagen?

3. Geben Sie die Menge aller Primzahlen an, die auch gerade Zahlen sind!

4. Begründen Sie folgende Sätze!

a) Eine Menge und ihre unechte Teilmenge sind gleich.
b) Eine Menge von n Elementen enthält genau n Einermengen als echte Teilmengen.

---

9. a) Deuten Sie $\frac{a}{b}$ als Geschwindigkeit, als Durchschnittsertrag einer landwirtschaftlichen Kultur, als Arbeitsproduktivität, indem Sie die Variablen entsprechend konkretisieren!

b) Geben Sie entsprechende konkrete Deutungen für $\frac{a \cdot b}{c}$ an!

Mit Hilfe von Variablen und durch Angabe ihres Variabilitätsbereiches sind nachstehend Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen gegeben. Beschreiben Sie diese Mengen durch Angabe ihrer Elemente!

Beispiel: $n^2 + n - 1$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$.
Lösung: $M = \{1; 5; 11; 19; 29; 41; 55; 71; 89; 109\}$.

10. a) $n^2 - n$ mit $n \in \{1; 3; 5; 7\}$
b) $(n + 2)(n - 2)$ mit $n \in \{2; 3; \ldots; 10\}$
c) $n^3 - 1$ mit $n \in \{1; 10; 100; 1000\}$
d) $n^3 - n^2 - n$ mit $n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
e) $5x - 2y$ mit $x \in \{1; 5; 10\}$ und $y \in \{0; 1; 2\}$

11. a) $n \cdot (n + 1)$ mit $n \in \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$
b) $n^2 - 8$ mit $n \in \{3; 4; 5; 6; \ldots; 9\}$
c) $2(2n - 1)$ mit $n \in \{11; 13; 17; 19\}$
d) $(x + 2)^2$ mit $x \in \{2; 3; 4; \ldots; 7\}$
e) $2(x - y)$ mit $x \in \{10; 9; 8\}$ und $y \in \{8; 7\}$

Beschreiben Sie die folgenden Mengen natürlicher Zahlen mit Hilfe von Variablen!

Beispiel: $M = \{2; 7; 12; 17; 22\}$. Lösung: $5n + 2$ mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

12. a) $M_1 = \{0; 3; 6; \ldots; 15\}$
b) $M_2 = \{0; 2; 4; 6; 8\}$
c) $M_5 = \{0; 1; 4; 9; 16\}$
d) $M_1 = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
e) $M_4 = \{0; 1; 8; 27; 64; 125\}$
f) $M_6 = \{0; 1; 16; 81; 625\}$

13. Welche natürliche Zahl ist um

a) 2, b) x, c) $2b - 1$ kleiner als 100; 0; a; $2b + 1$; $2b$; $1 - 2b$; $100 - x$?

14. Welche natürliche Zahl ist um

a) 3, b) a, c) $2b - 1$ größer als 100; 0; a; $2b - 1$; $7b$; $a - 10$; $1 - 2b$?

Berechnen Sie!

15. a) $37 + 485 + 11231 + 7201 + 84$
b) $234607 + 567 + 7826 + 9548 + 13265 + 10723$
c) $845700 - 497321$
d) $218133 - 217528$
e) $98213 - 12008 - 25134$
f) $500000 - 65248 - 72823$
g) $34239 - 491 - 5863 - 10713 - 2639$
h) $339427 - 85004 - 47641 - 113928 - 5369$
i) $87951 - 23870 - 17614 - 2687 + 14918$
k) $637897 - 84795 + 87495 + 61243 - 6410$

16. a) $9845 \cdot 64$ b) $963 \cdot 674$ c) $58 \cdot 6715$ d) $268 \cdot 975$
e) $91025 \cdot 816$ g) $57906 \cdot 752$ f) $20683 \cdot 3617$ h) $45678 \cdot 7650$

17. a) $23184 : 63$ b) $37858 : 46$ c) $42120 : 216$ d) $93627 : 309$
e) $4204160 : 128$ f) $3127080 : 824$ g) $553432 : 7282$ h) $2538880 : 3967$

18. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen x bzw. Zahlenpaare $[x, y]$, für die folgende Gleichungen und Ungleichungen in wahre Aussagen übergehen!

a) $4 \cdot x < 12$ b) $(x + 1)(x - 2) = 0$ c) $(x + y)(x - y) = 0$

Für welche natürlichen Zahlen x gilt folgendes?

19. a) $9 < x < 21$
b) $5 < x < 6$
c) $2x < 11$
d) $x < 3x$
e) $x - 12 \leqq 2x - 21$
f) $5 \leqq 2x + 3 \leqq 3x - 2$
g) $90 < x^2 < 100$

20. a) $5 < x < 7$
b) $2x + 1 \leqq 9$
c) $98 \leqq 3x - 2 \leqq 113$
d) $x + 7 > 7 + x$
e) $x \leqq 3x - 10 \leqq 2x$
f) $x^2 \leqq x$
g) $x^2 = x$

Für welche $x \in N$ werden die folgenden Gleichungen zu wahren Aussagen?

21. a) $x + 5 = 5 + x$
b) $x + 5 = 2x$
c) $x + 5 = x - 5$
d) $x + x = x - x$

22. a) $3x = 111$
b) $3x = 5$
c) $7x - 5 = 2x + 5$
d) $7x = 1$

e) $x + x = 5 + 5$
f) $7x + 5 = 2x - 5$
g) $7x = 2x + 5x$
h) $x : 5 = 26 : 65$
i) $x + 0 = x$
k) $x : 1 = x$

e) $7x = 7$
f) $7(x - 2) = 2(x - 7)$
g) $(x - 2) : (x + 2) = 1 : 2$
h) $(x - 2) : (x + 4) = x : (x + 10)$
i) $x - 0 = x$
k) $x \cdot 1 = x$

23. Prüfen Sie nach, welche der folgenden vier Brüche äquivalent sind!

$\frac{27}{21}$; $\frac{54}{42}$; $\frac{15}{32}$; $\frac{18}{14}$

Welche der drei Beziehungen $>$, $<$, $=$ gilt jeweils zwischen den nachfolgend angegebenen Paaren gebrochener Zahlen?

24. a) $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$ b) $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$ c) $\frac{35}{49}$; $\frac{15}{21}$
d) $\frac{2^2}{2^3}$; $\frac{3^2}{3^3}$ e) $\frac{3^2}{2^3}$; $\frac{2^3}{3^2}$

25. a) $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{9}$ b) $\frac{14}{26}$; $\frac{13}{15}$ c) $\frac{14}{26}$; $\frac{15}{27}$
d) $\frac{3}{5}$; $\frac{9}{25}$ e) $\frac{5}{3}$; $\frac{25}{9}$

Ordnen Sie die folgenden gebrochenen Zahlen nach der Größe!

26. Beginnen Sie jeweils mit der kleinsten Zahl!

a) $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{14}$; $\frac{10}{32}$; $\frac{33}{100}$; $\frac{33}{99}$; $\frac{3}{8}$
b) $\frac{44}{55}$; $\frac{33}{44}$; $\frac{22}{33}$; $\frac{99}{100}$; $\frac{66}{77}$; $\frac{77}{88}$
c) $\frac{3}{5}$; $\frac{63}{105}$; $\frac{99}{150}$; $\frac{63}{110}$; $\frac{54}{90}$; $\frac{60}{100}$

27. Beginnen Sie jeweils mit der größten Zahl!

a) $\frac{4}{7}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{5}{9}$
b) $\frac{6}{65}$; $\frac{5}{60}$; $\frac{5}{50}$; $\frac{5}{55}$; $\frac{5}{70}$
c) $\frac{9}{51}$; $\frac{14}{85}$; $\frac{20}{102}$; $\frac{12}{68}$; $\frac{5}{34}$

Nennen Sie eine gebrochene Zahl, die zwischen den nachfolgend angegebenen Paaren gebrochener Zahlen liegt!

28. a) $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{10}$ b) $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{9}$
c) $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{1}$ d) $\frac{125}{625}$; $\frac{625}{125}$

29. a) $\frac{3}{10}$; $\frac{3}{11}$ b) $\frac{99}{10\,000}$; $\frac{1}{100}$
c) $\frac{17}{18}$; $\frac{171}{180}$ d) $\frac{17}{51}$; $\frac{435}{870}$

30. Nennen Sie jeweils drei gebrochene Zahlen, die zwischen den in den Aufgaben 1/28 und 1/29 angegebenen Paaren von gebrochenen Zahlen liegen!

Für welche natürlichen Zahlen n werden die folgenden Ungleichungen zu wahren Aussagen?

31. a) $\frac{3}{7} < \frac{n}{56}$ b) $\frac{3}{7} = \frac{n}{56}$
c) $\frac{3}{7} > \frac{n}{56}$

32. a) $\frac{5}{8} < \frac{n}{18}$ b) $\frac{5}{8} = \frac{n}{18}$
c) $\frac{5}{8} > \frac{n}{18}$

Welche der folgenden Aufgaben haben im Bereich der gebrochenen Zahlen keine Lösung? Bestimmen Sie die Lösungen für alle anderen Aufgaben! (In diesen Aufgaben gilt: $a \neq 0$; $a, b, c \in N$.)

33. a) $\frac{5}{7} + \frac{9}{7}$ b) $\frac{5}{7} - \frac{9}{7}$ c) $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$
d) $\frac{b}{5} + \frac{c}{5}$ e) $\frac{b}{5} - \frac{e}{5}$ f) $\frac{b}{5} \cdot \frac{c}{5}$

34. a) $\frac{9}{7} - \frac{5}{7}$ b) $\frac{9}{7} \cdot \frac{5}{7}$ c) $\frac{9}{7} : \frac{5}{7}$
d) $\frac{3}{a} - \frac{2}{a}$ e) $\frac{2}{a} - \frac{3}{a}$ f) $\frac{3}{a} : \frac{2}{a}$

Lösen Sie die folgenden Aufgaben 1/35 bis 1/42, und schreiben Sie das Ergebnis als gemeinen Bruch und als Dezimalbruch!

35. a) $\frac{5}{7}+\frac{3}{9}$ **b)** $\frac{5}{7}-\frac{3}{9}$ **c)** $\frac{3}{9}-\frac{5}{7}$
d) $\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{3}$ **e)** $\frac{7}{5}:\frac{9}{3}$ **f)** $\frac{9}{3}:\frac{7}{5}$

36. a) $\frac{7}{5}+\frac{9}{3}$ **b)** $\frac{7}{5}-\frac{9}{3}$ **c)** $\frac{9}{3}-\frac{7}{5}$
d) $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{9}$ **e)** $\frac{5}{7}:\frac{3}{9}$ **f)** $\frac{3}{9}:\frac{5}{7}$

37. a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{8}{5}$
c) $\frac{15}{8}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$
d) $\frac{11}{14}+\frac{12}{13}-\frac{19}{21}-\frac{1}{2}$
e) $\frac{5}{11}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)$
f) $2-\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\right)$

38. a) $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{7}{8}+\frac{4}{12}-\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{12}+\frac{15}{16}-\frac{7}{24}$
d) $2\frac{3}{4}-\frac{7}{9}+\frac{6}{5}$
e) $\frac{6}{7}-\frac{15}{14}+\frac{27}{28}$
f) $\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}$

39. a) $\frac{3}{8}\cdot 2$ **b)** $6\cdot\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{3}{5}\cdot 8$
d) $\frac{17}{9}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}$ **e)** $\frac{5}{6}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{12}{13}$

40. a) $15\cdot\frac{4}{5}$ **b)** $4\frac{1}{2}\cdot 5$ **c)** $\frac{10}{11}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}$
d) $\frac{11}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{11}{5}$ **e)** $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{10}{24}$

41. a) $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$
c) $\frac{4}{5}:\frac{14}{15}$ **d)** $\frac{4}{5}:1\frac{1}{4}$
e) $\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\right):\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right)$

42. a) $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ **b)** $1\frac{1}{2}:\frac{3}{2}$
c) $\frac{19}{10}:\frac{19}{5}$ **d)** $\frac{11}{13}:\frac{12}{14}$
e) $\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{25}{24}$ **f)** $\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{3}{7}:\frac{25}{24}\right)$

43. Geben Sie für die folgenden Gleichungen alle Lösungen im Bereich der gebrochenen Zahlen an!

a) $3x-2=11$ **b)** $5y-3=2\left(\frac{5}{2}y+7\right)$ **c)** $3+x=2$ **d)** $7(x-5)=5(x-7)$
e) $\frac{x+3}{5}=\frac{x-3}{3}$ **f)** $x:8=2x:16$ **g)** $6(x-2)=\frac{1}{2}x-1$
h) $3+2y=15$ **i)** $3-2y=15$ **k)** $x\cdot x=\frac{16}{25}$ **l)** $x(x-1)=\frac{1}{81}-x$

44. Welche Eigenschaften haben zwei rationale Zahlen, **a)** deren Produkt, **b)** deren Quotient 1 ist?

45. Stellen Sie fest, welche der nachstehend angegebenen Terme dieselbe rationale Zahl darstellen!

$+\frac{7}{13}$; $+0{,}275$; $-\frac{35}{65}$; $-\frac{77}{143}$; $+\frac{21}{39}$; $\frac{49}{91}$

46. Ordnen Sie die folgenden Zahlen der Größe nach! Beginnen Sie mit der größten!

a) $+\frac{7}{13}$; $+\frac{8}{14}$; $+\frac{9}{15}$ **b)** $-\frac{7}{13}$; $-\frac{8}{14}$; $-\frac{9}{15}$
c) $-\frac{5}{12}$; $+\frac{2}{7}$; $+0{,}3$; $-\frac{1}{3}$ **d)** $+0{,}8$; $+0{,}9$; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{4}$; $+\frac{3}{5}$; $+\frac{1}{3}$
e) -32; $+\frac{110}{7}$; $+22{,}8$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}33$

47. **Ordnen Sie die Beträge der in Aufgabe 1/46 angegebenen rationalen Zahlen! Beginnen Sie mit dem kleinsten Betrag!**

Berechnen Sie die Aufgaben 1/48 bis 1/58!

48. **a)** $(+4{,}2) - (+3)$ **b)** $0 - (+3)$ **c)** $(-6{,}2) - (+2)$ **d)** $\left(-\frac{5}{2}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right)$ **e)** $(-12) : (-3)$ **f)** $\left(-\frac{1}{3}\right) : (+2)$

49. **a)** $\left(-\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$ **b)** $(+5) - (-7)$ **c)** $(+1) - (-1)$ **d)** $\left(+\frac{2}{6}\right) : \left(-\frac{1}{9}\right)$ **e)** $(-3) : (-4)$ **f)** $\left(+\frac{8}{7}\right) : \left(+\frac{4}{6}\right)$

50.

$a+b+c$	$-(a+b+c)$	$a+b-c$	$a-b+c$	$a-b-c$

a) $a = -2;\ b = +3;\ c = -4$ **b)** $a = -12;\ b = 0;\ c = -8$

c) $a = -\frac{3}{5};\ b = -\frac{1}{3};\ c = +\frac{3}{10}$ **d)** $a = +2{,}81;\ b = +1;\ c = 0$

e) $a = +0{,}2;\ b = -0{,}5;\ c = -0{,}04$

51.

$(a+b)\cdot c$	$(a-b)\cdot c$	$(a+b):c$	$(a-b):c$	$a\cdot b\cdot c$

Setzen Sie für die Variablen a, b, c die in Aufgabe 1/50 genannten Zahlen ein!

52.

$-a$	$-b$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$a+b$	$a-b$	$b-a$

a) $a = +\frac{5}{8};\ b = -\frac{11}{4}$ **b)** $a = -0{,}02;\ b = -0{,}04$ **c)** $a = +210;\ b = +55$

d) $a = -\frac{12}{5};\ b = +\frac{5}{12}$ **e)** $a = -13{,}2;\ b = -2{,}5$ **f)** $a = -\frac{77}{88};\ b = 0$

g) $a = +1;\ b = -\frac{11}{3}$ **h)** $a = 0{,}33;\ b = -1$ **i)** $a = -1;\ b = +1$

53.

$a\cdot b$	$a:b$	$b:a$	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a-b\rvert$	$\lvert a\cdot b\rvert$

Setzen Sie für die Variablen a und b die in Aufgabe 1/52 genannten Zahlen ein!

54. **a)** $(+5) + (-7) + 9 + (-11)$

b) $\frac{1}{300} - \left(+\frac{1}{3}\right) - (-0{,}33) - \left(-\frac{1}{6}\right)$

c) $\left(+\frac{23}{2}\right) - \frac{52}{3} + \left(-\frac{13}{6}\right) - (-0{,}3)$

55. **a)** $(-52) - (+752) - (-700) + (+102)$

b) $\left(+\frac{12}{7}\right) - \left(+\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{10}{7}\right)$

c) $\left(-\frac{25}{625}\right) - \left(+\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$

56. a) $(-2)\cdot(+3)\cdot(+5)\cdot(-7)$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{18}{11}\right)\cdot\left(-\frac{33}{54}\right)\cdot\left(-\frac{8}{6}\right)$

57. a) $(+0{,}2)\cdot 8\cdot(-1{,}7)\cdot(-12{,}5)$

b) $(-8{,}53)\cdot(+1000{,}2)\cdot 0\cdot(-7777{,}7)$

58. a) $\left[\left(+\frac{55}{12}\right)-\left(-\frac{45}{12}\right)\right]\cdot\left(-\frac{3}{25}\right)-\left(-\frac{3}{17}\right)\left[5-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

b) $\left[\left(-\frac{50}{7}\right)+\left(-\frac{20}{7}\right)\right]:\left[(-1)-\left(+\frac{3}{7}\right)\right]$

59. Die Summe zweier von Null verschiedener rationaler Zahlen sei 0. Um was für Zahlen handelt es sich? Bestimmen Sie den Quotienten dieser beiden rationalen Zahlen!

Fassen Sie zusammen!

60. a) $2a + 3b - 4c + 4a - 3b + 2c$

b) $3a^2b - 2ab^2 + b^3 - a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - b^3$

c) $\frac{1}{2}r - \frac{1}{3}s + \frac{1}{4}t - \frac{1}{6}r + \frac{1}{3}s - \frac{1}{12}t + \frac{1}{4}s - \frac{1}{3}r + \frac{1}{2}t$

d) $\frac{x}{4} + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} - \frac{x}{20} - \frac{y}{16} - 4\frac{1}{2}$

61. a) $212{,}9x + 184{,}3y + 16{,}7x - 15{,}7z - 54{,}8x + 112{,}4y + 181{,}3z$

b) $0{,}16a + 1{,}05b + 3{,}14c - 0{,}36a + 0{,}09b + 0{,}87c - 1{,}81a + 0{,}12b + 0{,}45c$

c) $2{,}5a + 6{,}9b - 0{,}3b - 3{,}7a - 5{,}3a + 0{,}9b$

d) $7\frac{1}{2}a - 1{,}2a + 0{,}8b - \frac{3}{5}b + 0{,}4a - \frac{7}{10}b + \frac{1}{10}a$

62. a) $2{,}6x - 4{,}7xy + 8{,}9yz - 3x - 1{,}5yz + 17{,}2xy + 6xz$

b) $16m^2n - 2\frac{1}{2}mn^2 + 3{,}6mn^2 - 44{,}5mn^2 + mn - 3\frac{3}{8}mn$

Bestimmen Sie mit dem Rechenstab die folgenden Produkte!

63. a) $3{,}81\cdot 17{,}8$ **b)** $0{,}51\cdot 23$
c) $0{,}0257\cdot 3410$ **d)** $0{,}702\cdot 0{,}0578$
e) $631\cdot 70\,800$ **f)** $0{,}1304\cdot 5{,}288$

64. a) $25{,}3\cdot 4{,}27$ **b)** $0{,}66\cdot 29$
c) $35\,200\cdot 0{,}0622$ **d)** $0{,}683\cdot 0{,}0405$
e) $283\cdot 90\,300$ **f)** $0{,}1176\cdot 7{,}827$

65. a) $5{,}28\cdot 7{,}41\cdot 9{,}99$ **b)** $755\cdot 602\cdot 830$
c) $0{,}002\,65\cdot 0{,}341\cdot 0{,}0827$
d) $39{,}42\cdot 5{,}783\cdot 210{,}8$
e) $0{,}8311\cdot 0{,}010\,74\cdot 0{,}087\,18$

66. a) $3{,}64\cdot 2{,}55\cdot 8{,}62$ **b)** $583\cdot 456\cdot 850$
c) $0{,}004\,35\cdot 0{,}0131\cdot 0{,}878$
d) $85{,}32\cdot 6{,}100\cdot 346{,}3$
e) $0{,}020\,91\cdot 0{,}066\,27\cdot 0{,}3492$

Bestimmen Sie mit dem Rechenstab die folgenden Quotienten!

67. a) $53\,100 : 72{,}3$ **b)** $2{,}37 : 0{,}476$
c) $0{,}854 : 0{,}703$ **d)** $\frac{72{,}4}{0{,}005\,03}$
e) $\frac{82\,200}{0{,}0242}$ **f)** $\frac{0{,}0572}{0{,}000\,0504}$
g) $0{,}0719 : 821$ **h)** $21{,}86 : 0{,}000\,3544$

68. a) $72{,}3 : 501$ **b)** $0{,}575 : 0{,}233$
c) $0{,}608 : 87\,900$ **d)** $\frac{5{,}81}{29{,}3}$
e) $\frac{0{,}007\,08}{9770}$ **f)** $\frac{0{,}488}{5{,}23}$
g) $0{,}2718 : 44{,}44$ **h)** $0{,}005\,072 : 1{,}099$

---

5. Der Quotient zweier rationaler Zahlen a und b sei **a)** $+1$, **b)** -1. Bestimmen Sie für jeden der beiden Fälle **α)** die Summe $a + b$, **β)** die Differenz $a - b$, **γ)** das Produkt $a \cdot b$!

6. Das Produkt zweier rationaler Zahlen a und b sei **a)** $+1$, **b)** -1, **c)** 0. Bestimmen Sie für jeden der 3 Fälle **α)** die Summe $a + b$, **β)** die Differenz $a - b$, **γ)** den Quotienten $\frac{a}{b}$! Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit **c γ)** immer lösbar ist?

Fassen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich zusammen!

69. **a)** $75a - (12a - 8b) - (6b - 4a)$ **b)** $15b^2 - (12c^2 - 3b^2) + (80c^2 + 70d^2 - 40d)$

c) $90m + (82m - 78n) - (16n + 104m)$ **d)** $\frac{x}{4} + \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{8}\right) - \left(\frac{x}{20} - \frac{y}{16} + 4\frac{1}{2}\right)$

70. Gegeben sind die Summen

$S_1 = 3p - 4q + 5r,$

$S_2 = -2p + 3q - 4r - 1,$

$S_3 = \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}q + \frac{1}{3}r + \frac{2}{3}.$

71. Gegeben sind die Summen

$S_1 = p^3 - q^2 - r^3 - 7,$

$S_2 = -3p^3 + 4q^2 - 5r^4,$

$S_3 = \frac{3}{2}p - \frac{5}{7}q + \frac{5}{4}r - \frac{3}{7}.$

Bilden Sie die folgenden Terme, und fassen Sie jeweils soweit wie möglich zusammen!

a) $S_1 + S_2$ **b)** $S_1 - S_2$ **c)** $S_2 - S_1$ **d)** $S_1 + S_2 + S_3$
e) $S_1 - S_2 + S_3$ **f)** $S_1 + S_2 - S_3$ **g)** $S_1 - S_2 - S_3$

72. Zeigen Sie, daß für alle rationalen Zahlen x, y, z gilt:

a) $(x - y - z) - (y - z - x) - (z - x - y) = 3x - y - z$
b) $x^2 - y^3 - z - x(x - y) + y^2(y - z) + z = y(x - yz)$
c) $(a - b) - (b - c) + (c - a) - (-a - 2b + 2c) = a$
d) $ab^2c^3 - (a^2b^3c - a^3bc^2) - abc(a^2c - ab^2 + bc^2) = 0$

73. Bilden Sie mit den Summen der Aufgabe 1/70 folgende Terme, multiplizieren Sie die Produkte aus und fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

a) $3S_1$ **b)** $\frac{1}{3}S_2$ **c)** $\frac{3}{4}S_3$ **d)** $S_1 - 2S_2$ **e)** $3S_1 - 4S_2$

f) $\frac{3}{8}S_1 - \frac{4}{5}S_2$ **g)** $2S_1 + 4S_3$ **h)** $\frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{4}S_2 - \frac{1}{8}S_3$

Vereinfachen Sie soweit wie möglich die folgenden Terme!

74. **a)** $2(3a - 4b) - 4(5a - 6b) - 7(-2a + 3b)$

b) $15x(-3y - 2z) - 30y(1{,}5x - 4z) - 10z(-3x + 12y)$

c) $8{,}5x^2(3{,}6y - 4{,}7z + 7{,}1)$

d) $14\frac{1}{2}pq\left(7p - 3\frac{1}{4}q + 7\frac{4}{5}pq\right)$

e) $413(x + 8y + 12z) - 712(x + 5y - 7z) + 114(5x - 2y + 3z)$

f) $54(o + 4p + 6q + 1) + 116(3o - 4q - 4p + 1) - 64(o + p - 4q - 1)$

g) $4\frac{1}{2}(4b + 3c + 2a) - 5\frac{1}{3}(7a + 9c + 5b) - 12\frac{5}{6}(4c - 3a - 2b)$

h) $\frac{7}{8}x\left(\frac{1}{7}x + \frac{4}{14}y - \frac{8}{28}z\right) - \frac{4}{3}y\left(12x + \frac{3}{4}y + \frac{9}{8}z\right) - \frac{6}{10}z\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right)$

i) $42(3x - 4y) - 8[6x - 3(2y - x) - 2(6x - 2y)] - 3(x - 5y)$

k) $4[2x - 5(4x - 2y) - 3(x + y)] - 8[x + 5(3x - 2y)]$

l) $\frac{1}{2}[4a - 6(3a - 2b + 5c) + 16(a - b + c)] - \frac{3}{8}\left[8a - \frac{1}{3}(16b - 12c)\right]$

m) $0{,}5[4x - 3(x - 2y)] - 0{,}25[8x - 12(x - 5y)]$

n) $\frac{1}{4}\left[\frac{4}{5}a - \frac{6}{7}\left(\frac{7a}{3} + \frac{14b}{5}\right)\right] - \frac{12}{25}\left[\frac{5a}{6} - \frac{5}{8}\left(\frac{5}{3}a - \frac{15}{9}b\right)\right]$

Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um!

75. **a)** $p_0V_0[1+\gamma(t_2-t_1)]$ **b)** $5(c-2d)\cdot 2ab$
c) $c(0{,}4ac-0{,}6bc)\,5ab$ **d)** $3[4-(2a+3)]$
e) $3x^2[8y-4(6x-2y)]$ **f)** $8r^2(-2s-3r)\cdot 12{,}5s$

Klammern Sie in den Aufgaben 1/76 bis 1/78 gemeinsame Faktoren aus, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem sie wieder ausmultiplizieren!

76. **a)** $-4x+xy$ **b)** $\frac{2}{3}a+2a$
c) $2ab+3abx-aby$ **d)** $9a^2b^2-6a^2b-3ab^2+12ab$
e) $(-1)\cdot y+3yx$ **f)** $x+a\cdot x$
g) $-x-xy$ **h)** $25pq^2-35p^2q-25pq+35p$

77. **a)** $15r^2st^2-18rs^2t^2+33rst^3-27r^2s^2t^2$ **b)** $\frac{4}{5}a^2b^2c-\frac{2}{5}a^2b^2c^2+\frac{6}{5}a^2bc^2-\frac{8}{5}a^2bc$

78. **a)** $0{,}2m^2n^2-0{,}6m^2n+0{,}8mn^2-1{,}2mn$ **b)** $54x^2yz-108xy^2z-36xyz^2$

79. Gegeben sind die folgenden Summen:

$$S_1=2u+1;\quad S_2=m^2n-30m;\quad S_3=-0{,}04z-\frac{1}{20};\quad S_4=2u-1;\quad S_5=\frac{1}{2n}-\frac{1}{15m}$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte, und fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

a) $S_1\cdot S_2$ **b)** $S_1\cdot S_3$ **c)** $S_3\cdot S_4$
d) $S_2\cdot S_3$ **e)** $S_1\cdot S_4$ **f)** $S_2\cdot S_5$

Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um, und fassen Sie dabei soweit wie möglich zusammen!

80. **a)** $(a-b)\cdot\left(3x-\frac{2}{3}y\right)$ **b)** $\left(-a+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-7x+\frac{5}{2}y\right)$
c) $(3+x)\cdot(a-2b-c)$ **d)** $[u-(2b+c)]\cdot[b+(a-c)]$
e) $(1-y)\cdot\left(\frac{4}{5}+a\right)$ **f)** $(4x+y-3)\cdot\left(\frac{1}{3}z+x-4\right)$
g) $(3a^2-2ab+a)\cdot\left(\frac{1}{3a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a}\right)\quad[a\neq 0;\ b\neq 0]$
h) $(5r^2s-5rs^2)\cdot(5rs^2-5r^2s)$

81. **a)** $[2x-4(y+3z)]\cdot[7y-3(x-4z)]$ **b)** $[m^2-5n(n-2m)]\cdot[2n^2+3m(4n-3m)]$

Formen Sie folgende Summen durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren in Produkte um!

82. **a)** $12a-3b$ **b)** $-26ab-65bc$
c) $54x^2yz-108xy^2z-36xyz^2$ **d)** $-28rs-77rt-84ru-91rv$
e) $45mn^2-15mn+135m^2n^2-105m^2n$ **f)** $\frac{1}{12}\pi hd_1^2+\frac{1}{12}\pi hd_1d_2+\frac{1}{12}\pi hd_2^2$
g) $\frac{1}{8}\pi hd_1^2+\frac{1}{16}\pi hd_2^2+\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{16}\pi hd_2^2$ **h)** $V_0+V_0\gamma\Delta t$
i) $p_0V_0+p_0V_0\gamma t_2-p_0V_0\gamma t_1$ **k)** aq^2-a
l) aq^2-q **m)** aq^2-q^2

83. **a)** $ad+bd-ac-ae-bc-be$ **b)** $4m^2-14ml+49nl-14mn$
c) $3ux-\frac{9}{8}uy-4vx+\frac{3}{2}vy$ **d)** $ax+bx-a-b$
e) $2ab-10a+3b-15$ **f)** $8ax+25by+12az-10bx-20ay-15bz$

g) $3(2x-5)-5u(4y-3)+2u(2x-5)+(4y-3)+3u(2x-5)-4(4y-3)$

h) $(a-b)(3x-2y)-(b-a)(4x-3y)-(-a+b)(-7x+5y)$

Wenden Sie auf folgende Terme die binomischen Formeln an!

84. **a)** $(4+a)^2$ **b)** $(b-3)^2$ **c)** $(b+x)\cdot b-x)$ **d)** $(1-y)^2$

e) $(x+1)(x-1)$ **f)** $(3x-4y)^2$ **g)** $(-3-z)^2$ **h)** $\left(\frac{6}{5}a-\frac{3}{2}\right)^2$

i) $\left(\frac{2}{5}a+0{,}3\right)^2$ **k)** $\left(\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}b\right)^2$

85. **a)** $(x+3y)^2$ **b)** $(r-2)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$ **d)** $\left(-\frac{3}{5}x+2y\right)^2$

e) $(1{,}2mn-1{,}1nm)^2$ **f)** $(3I_1-I_2)^2$ **g)** $(14ab-13a)(14ab+13a)$

h) $(x-2y)^2$ **i)** $(3+s)^2$ **k)** $(-5a+0{,}3)^2$ **l)** $\left(0{,}05+\frac{6}{10}\right)^2$

m) $(2+30)^2$ **n)** $(-25ab-0{,}2c)^2$ **o)** $\left(0{,}2z+\frac{1}{2}\right)\left(0{,}2z-\frac{1}{2}\right)$

86. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

a) $(3x-4y)^2+(4y+3x)^2-2(3x-4y)(3x-4y)$

b) $\left(0{,}3a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{5}a-0{,}3\right)^2+\left(\frac{6}{5}a-\frac{3}{2}\right)^2-(1{,}3a-1{,}7)^2$

c) $(25+35b^2)-(35-25b)^2+(25+35b)(35b-25)$

Bestimmen Sie die quadratische Ergänzung zu folgenden Summen:

87. **a)** x^2+2cx **b)** y^2+3y

c) b^2-5b **d)** $c^2+\frac{2}{3}c$

e) x^2+2x **f)** a^2x^2-2ax

88. **a)** $x^2-\frac{1}{3}x$ **b)** z^2-z

c) $r^2-\frac{14}{3}r$ **d)** $25x^2+10x$

e) x^2-4x **f)** $6x^2-12x$

89. **a)** x^2-6x **b)** x^2-x

c) $x^2+\frac{x}{10}$ **d)** x^2-15x

e) $4a^2+a$ **f)** $a^2+144ab$

g) $0{,}0225p^2-3p$ **h)** $81x^2+9x$

i) x^2-5

90. **a)** x^2-5x **b)** $x^2-\frac{1}{2}x$

c) x^2-2x **d)** $x^2+1000x$

e) $144a^2-ab$ **f)** $\frac{r^2}{16}+x$

g) $0{,}7^2r^2-4{,}2r$ **h)** $9x^2-81x$

i) $25y^2-25x$

Korrigieren Sie die folgenden Summen durch Hinzunahme eines weiteren Summanden so, daß ein vollständiges Quadrat entsteht!

91. **a)** $169+25z^2$ **b)** $x^2y^2+z^2$

c) $\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{256}$ **d)** $0{,}0225a^2+b^2$

92. **a)** $-169-25z^2$ **b)** r^2+16s^2

c) $0{,}81+0{,}04c^2$

Formen Sie folgende Terme soweit wie möglich in Produkte um!

93. **a)** $a^2-2ab-b^2$

b) $a^2-3a^2b+3ab^2-b^2$

c) $m^4-2m^2n^2+n^4$

d) $x^3+6x^2+12x+8$

94. **a)** x^2-y^2

b) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

c) $x^2-12x+36$

d) $x^2+px+\frac{p^2}{4}$

95. Beweisen Sie: $(a+b+c)^2=(-a-b-c)^2$!

96. Formen Sie folgende Quadrate in Summen um!

a) $(a + b + c)^2$ b) $(2x - 3y + 4z)^2$ c) $(-2x + 3y - 4z)^2$

97. Der Term $24xy - 21y^2 - 3y$ ist durch

a) 3 b) -3 c) $3y$ d) $-3y$
e) $10y$ zu dividieren.

98. Der Term $-a^2 + 20ab - 6a^2b^2 + 3ab^2$ ist durch

a) 2 b) a c) a^2 d) $4a^2$
e) a^2b f) $4a^2b^2$ g) $100a^2b^2$
zu dividieren.

Berechnen Sie!

99. a) $(ab^2c + a^2bc - abc^2 + 4abc) : abc$
b) $(a^2b^2 + ab^2 - ab) : ab$
c) $(rst + 2rs^2 - 4st^2 + s) : 2s$
d) $(10p^2q + 12pq - 4pq^2) : 4pq$

100. a) $(ax^2 - a^2xy + ax^2 + axy) : ax$
b) $(m^2n + 2mn + mn^2) : mn$
c) $(182r^2s^2 - 104rs) : 13rs$
d) $(55x^2y^2 - 121x^2y^2 + 132x^2y) : 11x^2y$

101. a) $(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$
b) $(a^5 - b^5) : (a - b)$

102. a) $(ab + b^2 + ac + bc - a - b) : (a + b)$
b) $(a^4 - b^4) : (a - b)$

Nachstehend sind jeweils zwei Summen gegeben. Die erste ist durch die zweite zu dividieren.

103. a) $c^3 - 8cd^2 + 8d^3;\quad c - 2d$
b) $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 11x + 20;\quad x - 5$
c) $\frac{81}{256}a^4 - \frac{16}{625}b^4;\quad a - \frac{2}{5}b$

104. a) $27r^3s^3 - 15rs - 2;\quad 3rs + 2$
b) $m^2 + 2{,}1mn - n^2;\quad 5n + 2m$
c) $\frac{u^4}{16} - \frac{v^4}{256};\quad \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{16}$

105. Schreiben Sie folgende Brüche als Divisionsaufgaben und dividieren Sie aus!

a) $\dfrac{21a^3 - 34a^2b + 25b^3}{7a + 5b}$ b) $\dfrac{x^2 + 11x + 24}{x + 8}$ c) $\dfrac{5x^2 - \frac{22}{15}x - 4 - x^2}{6x + 5}$

d) $\dfrac{2x^2 + 13x + 15}{x + 5}$ e) $\dfrac{625p^4 - 50p^2 + 1}{5p + 1}$ f) $\dfrac{9x^3 + 2y^3 - 7xy^2}{3x - 2y}$

---

7. Zeigen Sie, daß für alle rationalen Zahlen x und y gilt:

a) $x^2 - 6x + 9 \geqq 0$ b) $x^2 + 8x + 17 > 0$ c) $-x^2 + 20x - 101 < 0$

d) $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geqq 0$ e) $\dfrac{x^2}{16} - 4x + 65 > 0$ f) $\dfrac{9x^2}{25} - x + \dfrac{25}{35} > 0$

---

106. Untersuchen Sie die Teilbarkeit folgender Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 25, 50 und 100!

a) 3678 b) 7690 c) 14586 d) 33872 e) 67924 f) 7683500
g) 23456100 h) 7653300 i) 8896500 k) 377648 l) 7653000 m) 54897225

107. Zerlegen Sie folgende Zahlen in Primfaktoren!

a) 36 b) 56 c) 91 d) 90 e) 105 f) 126
g) 152 h) 168 i) 198 k) 225 l) 240 m) 306
n) 440 o) 504 p) 625 q) 720 r) 840 s) 900
t) 960 u) 1000

108. Welche von folgenden Zahlen sind Primzahlen?

181; 373; 1437; 2001; 129

109. Warum kann außer der Zahl 2 keine weitere gerade Zahl Primzahl sein?

Bestimmen Sie jeweils den g. g. T. und das k. g. V.!

110. a) 24; 28 b) 42; 70 c) 45; 54 d) 78; 13

111. a) 6; 8; 10; 12; 16 b) 6; 10; 15; 21; 25 c) 5; 16; 15; 8; 10 d) 9; 12; 15; 20; 28

112. a) 20; 35; 15 b) 25; 30; 40 c) 260; 390; 65 d) 195; 130; 110 e) 165; 440; 495

113. a) 21; 42; 210 b) 210; 126; 420 c) 105; 35; 175 d) 210; 315; 36 e) 60; 24; 48

114. a) abc; ab^2c; a^2bc^2
b) abc^2; $a^2b^2c^2$; ac^2
(a, b, c sind untereinander teilerfremde von Null verschiedene natürliche Zahlen)

115. a) x^2yz; xy^2z; xyz^2
b) xyz; xy; xz
(x, y, z sind untereinander teilerfremde von Null verschiedene natürliche Zahlen)

116. a) r^3s^2t; r^2st^3 b) rs^3t^2; $r^2s^2t^2$ c) $63m^2n$; $21mn^2$ d) $42m^2n^2$; $84mn$

117. a) $a + b$; $a^2 - b^2$; $a^2 + 2ab + b^2$
b) $4p^2 - 9q^2$; $4p^2 - 12pq + 9q^2$; $9q^2 + 12pq + 4p^2$
c) $x - y$; $y^2 - x^2$; $x^2 - 2xy + y^2$; $x^2 + 2xy + y^2$

Ermitteln Sie das k. g. V. der Nenner!

118. a) $\frac{x^2}{a^2}$; $\frac{y^2}{b^2}$; 1 b) $\frac{1}{15x}$; $\frac{1}{x^2y^2}$; $\frac{1}{12y}$; $\frac{1}{30xy}$

c) $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a+1}$; $\frac{1}{a+2}$; $\frac{1}{a+3}$ d) $\frac{1}{15a^2}$; $\frac{1}{20b^2}$; 30

e) $\frac{a}{x-y}$; $\frac{b}{x+y}$; $\frac{c}{x-z}$; $\frac{d}{x+z}$ f) $\frac{a-b}{2}$; $\frac{3}{5y-2z}$; $\frac{2a-3b}{5y-2z}$; $\frac{4}{2y-5z}$

Jeder der folgenden Brüche ist so zu erweitern, daß sich die danebenstehende Zahl als erweiterter Nenner ergibt. Geben Sie die erweiterten Brüche an!

119. a) $\frac{3}{8}$; 96 b) $\frac{11}{12}$; 540 c) $\frac{5}{6}$; 1206 d) $\frac{2}{3}$; 60 e) $\frac{4}{5}$; 70

f) $\frac{27}{31}$; 217 g) $\frac{37}{51}$; 1173 h) $\frac{7}{11}$; 143 i) $\frac{16}{23}$; 2070

120. a) $\frac{15ab}{14bc}$; $112bc$ b) $\frac{a+b}{17r}$; $85rst$ c) $\frac{3m}{5n}$; $10m^2n^2$ d) $\frac{13}{x+y}$; $x^2 - y^2$

e) $\frac{\frac{1}{2}}{p^2 - \frac{q}{4}}$; $16p^2 - 4q$ f) $\frac{7}{3x + 0{,}5}$; $(3x + 0{,}5)^2$

Kürzen Sie soweit wie möglich!

121. a) $\frac{48}{72}$ b) $\frac{81}{90}$ c) $\frac{84}{96}$ d) $\frac{450}{480}$ e) $\frac{327}{351}$ f) $\frac{840}{960}$

g) $\frac{264}{312}$ h) $\frac{128}{192}$ i) $\frac{501}{1002}$ k) $\frac{1680}{2640}$ l) $\frac{1250}{1625}$ m) $\frac{27}{999}$

122. a) $\frac{242p^2}{33pq}$ b) $\frac{x^3}{x^5}$ c) $\frac{7a - 14b}{a - 2b}$

123. a) $\frac{x^5}{x^3}$ b) $\frac{60a^2 - 30b^2}{12a - 6b}$ c) $\frac{81x^2 - 162x + 81}{27x - 27}$

Schreiben Sie die folgenden Quotienten als Brüche, und kürzen Sie soweit wie möglich!

124. a) $(-r^2 - 2rs - s^2) : (r + s)$

b) $(a - b)^2 : (b - a)$

c) $(25 - 4x^2)^2 : (10x + 25)$

125. a) $(x - 1) : (2 - 2x)$

b) $4x^2 - 25) : (2x + 5)$

c) $(5p - 3q)^3 : (3p - 5q)$

Berechnen Sie die Aufgaben 1/126 bis 1/134!

126. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{7}{15} + \frac{9}{20} + \frac{5}{8} + \frac{9}{10}$ **b)** $\frac{11}{45} + \frac{7}{12} + \frac{19}{30} + \frac{3}{10} + \frac{5}{6} + \frac{13}{15}$

c) $\frac{5}{16} + \frac{5}{8} + \frac{31}{48} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{11}{12} + \frac{11}{24}$ **d)** $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12} + \frac{19}{30} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

127. a) $4\frac{5}{16} + 2\frac{1}{2} + \frac{23}{15} + \frac{3}{16} + 5\frac{7}{15}$ **b)** $\frac{3}{4} + \frac{7}{9} + 2\frac{1}{4} + 5\frac{2}{9} + \frac{7}{12} + \frac{13}{4}$

c) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{6} + 7\frac{5}{12}$

128. a) $3 - \frac{5}{6} + 1\frac{7}{12} + 3 - \frac{4}{5}$ **b)** $4\frac{2}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{15} - \frac{7}{60}$

c) $18\frac{3}{4} + 16\frac{3}{5} - 25\frac{5}{8} + 17\frac{7}{10}$

129. a) $\frac{3}{4x} - \frac{5}{2x} + \frac{9}{16x} - \frac{8}{24x} + \frac{12}{x}$ **b)** $\frac{3a}{bc} + \frac{4c}{ab} - \frac{9b}{ac} + \frac{16}{abc}$

c) $\frac{2n}{m} - \frac{3m}{n} + 4 - \frac{13}{2mn}$ **d)** $\frac{12x}{a} - \frac{5}{a^2} + 3 - \frac{8x}{a^2}$

130. a) $\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}$

b) $\frac{2}{c} + \frac{c}{2}$

c) $\frac{2x}{4y + 5} - \frac{5x - 1}{10y} - \frac{y - 1}{8}$

d) $\frac{2u}{u - v} - \frac{3v}{u + v} + \frac{5}{u}$

131. a) $\frac{1}{g} + \frac{1}{b}$

b) $\frac{1}{x^2} + x^2$

c) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

d) $\frac{9}{m + n} - \frac{5}{m} + \frac{4}{n}$

132. a) $\frac{20c}{c - 3} - \frac{19c}{c - 4} + \frac{c}{c - 5}$

b) $\frac{7s - 1}{15r - 30t} + \frac{4s - 11}{5r - 10t} - \frac{18s + 1}{r - 2t}$

c) $\frac{7y}{x^2 + xy} - \frac{5x}{xy + y^2} + \frac{3}{xy}$

133. a) $\frac{5}{4m} - \frac{7}{6n} - \frac{9}{8mn} + \frac{m^2 - 11mn}{12mn(m - n)}$

b) $13 - \frac{17m}{3m + 1} - \frac{5}{1,5m + 0,5}$

c) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$

134. a) $\frac{4m + n}{(m - n)^2} + \frac{21}{m + n} - \frac{2m - 5n}{(m - n)^2} - \frac{22m^3 + 29n^3}{m^2 - n^2}$

b) $\frac{5y - 7z}{2y^3 + 2y^2z} - \frac{14y + 9z}{3yz^2 - 3z^3} + \frac{2y^2 - z^2}{4y^2z + 4yz^2} - \frac{13z^2 - 11y^2}{6y^2z - 6yz^2}$

Zeigen Sie, daß folgende Gleichungen gelten!

135. a) $\frac{6s - 3rs}{5s} - \frac{12 + 4r}{10} = -r$

b) $\frac{4m^2 - 9}{4m^2 - 12m + 9} = \frac{4m^2 + 12m + 9}{4m^2 - 9}$

c) $\frac{p^2 + p}{p} - p = 1$

136. a) $\frac{a - bx}{b} + x = \frac{a}{b}$

b) $\frac{x}{y} - \frac{xy + y^2z}{y^2} = -z$

c) $p\left(1 - \frac{1}{p}\right) + 1 = p$

Berechnen Sie die Aufgaben 1/137 bis 1/150!

137. a) $\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{1}$ b) $2\frac{3}{5} \cdot \frac{a}{b}$

c) $15m \cdot \frac{3n}{5n}$

138. a) $\frac{r^2s}{uv^2} \cdot \frac{u^2v}{rs^2}$ b) $\frac{4}{p} \cdot q$

c) $\frac{15m}{5n} \cdot 3n$

139. a) $\frac{9x^2}{bxy} \cdot \frac{4x}{18mz}$ b) $\frac{2xy}{3yz} \cdot \frac{4xy}{5x^2}$

c) $\frac{13xy}{12ab} \cdot \frac{15ac}{26xz} \cdot \frac{48bz}{30cy}$

140. a) $\frac{13m^3}{14n^2} \cdot \frac{21mn^2p}{39m^2n}$ b) $\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z}$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3rs}{5m^2n^2} \cdot \frac{15m^2n}{6r^2s}$

141. a) $\frac{1}{a + b} \cdot \frac{1}{a + b}$

b) $\frac{1}{x + y} \cdot (x + y)$

c) $\frac{1}{x + y} \cdot x + y$

d) $\frac{a - 7}{a^2 - 49} \cdot (a + 7)$

e) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$

142. a) $\frac{1}{a - b} \cdot \frac{1}{a + b}$

b) $\frac{3x - 2}{10y + 4} \cdot \frac{5y + 2}{6x - 4}$

c) $\frac{5a - 2b}{6r - 4s} \cdot \frac{5{,}4r - 3{,}6s}{5{,}5a - 2{,}2b}$

d) $\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2$

143. a) $\frac{a}{5} : \frac{a^2x}{20}$ b) $\frac{ax}{b^2y^2} : \frac{a^2x^2}{by}$

c) $\frac{1}{3a} : \frac{1}{5a}$

144. a) $\frac{1}{10a} : \frac{1}{5a^2}$ b) $\frac{7}{5x} : \frac{35x}{b}$

c) $\frac{1{,}2p^2}{4{,}6q^2} : \frac{6p^2}{11{,}5q}$

145. a) $\frac{27x^2}{16y^2} : \frac{81x^2y}{8y^3}$

b) $\frac{-36m^2p}{1{,}3d} : \frac{-0{,}18m}{-52df}$

c) $\frac{15a^2b}{81ab^2} : 25ab$ d) $15x : \frac{4{,}5x}{2y}$

146. a) $\frac{8}{9abc} : \frac{9abc}{8}$

b) $\frac{-0{,}39}{0{,}25r} : \frac{2{,}6rs}{-7{,}5x^2}$

c) $\frac{26abc}{3{,}9axy} : (-10bc)$ d) $(-27rs) : \frac{8{,}1s}{1{,}8r}$

147. a) $(-65ab) : \frac{1{,}3a^2}{-50b}$

b) $5\frac{1}{5} : 1{,}3a$

c) $11\frac{1}{5}a : (-7a)$

d) $143x^2y^2 : 6\frac{3}{11}xy$

e) $(-25rs) : 4\frac{1}{6}r$

148. a) $(-145m) : \frac{29mn}{5n}$

b) $\left(-5\frac{1}{7}\right) : 1\frac{3}{21}x$

c) $\left(-3\frac{3}{8}a\right) : \left(-5\frac{1}{3}b\right)$

d) $\left(-6\frac{3}{11}xy\right) : (-143x^2y^2)$

e) $(-357mn) : \left(-11\frac{9}{10}m^2\right)$

149. a) $\dfrac{\dfrac{4p-3q}{8p+9q}}{\dfrac{-12pq+9q^2}{16p^2+18pq}}$

b) $\dfrac{a+b}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2a+b^2}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{-am+an}}{m^2-n^2}$

150. a) $\dfrac{\dfrac{21a^2b}{20xy^2}}{\dfrac{35ab^2}{75x^2y}}$

b) $\dfrac{\dfrac{4xy^2}{a-b}}{\dfrac{16x^2y}{(a^2+b^2)}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}}{\dfrac{a^2-b^2}{a+b}}$

Vergleichen Sie folgende Paare von Brüchen miteinander! (Alle vorkommenden Variablen bedeuten natürliche Zahlen, verschieden von Null.)

151. a) $\frac{5}{7}; \frac{9}{7}$ b) $\frac{8}{27}; \frac{23}{27}$ c) $\frac{5}{9}; \frac{5}{11}$ d) $\frac{15}{901}; \frac{15}{900}$ e) $\frac{39}{102}; \frac{2}{5}$

f) $\frac{215}{105}; -\frac{351}{189}$ g) $-\frac{209}{113}; -\frac{95}{63}$ h) $\frac{50}{71}; \frac{118}{121}$ i) $\frac{15}{18}; \frac{70}{84}$ k) $\frac{13}{12}; \frac{143}{132}$

l) $-\frac{151}{201}; -\frac{3}{4}$ m) $\frac{7}{8}; \frac{8}{9}$

152. a) $\frac{a}{b}$ und $\frac{2a}{3b}$ b) $\frac{a}{5ab}$ und $\frac{3b}{7b^2}$

c) $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a-b}{a+b}$

153. a) $\frac{x}{2y}$ und $\frac{11x}{22y}$ b) $\frac{rs}{3st}$ und $\frac{rst}{4st^2}$

c) $\frac{2x-y}{2x+y}$ und $\frac{x-2y}{x+2y}$

2. Lineare Funktionen, lineare Gleichungen

1. Ordnen Sie jedem Element der Menge $X = \{1; 2; 4\}$ genau ein Element der Menge $Y = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$ nach der Vorschrift

a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{1}{4}x$ zu!

Bestimmen Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare!

2. Ordnen Sie jedem Element der Menge $X = \{1; 3; 9\}$ genau ein Element der Menge $Y = \left\{\frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1\right\}$ nach der Vorschrift

a) $y = \frac{x}{9}$ b) $y = \frac{1}{x}$ zu!

Bestimmen Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare!

3. Der Definitionsbereich einer Funktion sei

$$X = \left\{-\frac{1}{2}; 0; +\frac{1}{2}; +1; +\frac{3}{2}; +2\right\}$$

Man erhält die Funktionswerte, indem man die Argumente **a)** quadriert und dann durch 3 dividiert, **b)** durch 3 dividiert und dann quadriert.
Stellen Sie die so gegebene Funktion als Menge geordneter Zahlenpaare, durch eine Gleichung und grafisch dar!

4. Gegeben sei die Funktion **a)** $4y + x = 20$, **b)** $x + 3y = 30$. Bestimmen Sie die Menge der geordneten Zahlenpaare $[x; y]$, in denen x und y natürliche Zahlen sind mit $0 \leqq x \leqq 20$!

5. Eine Drahtspirale von 100 mm Länge dehnt sich bei Belastung so aus, daß das Verhältnis der ausgeübten Kraft zu der dadurch hervorgerufenen Längenausdehnung stets $\frac{2}{3}\,\frac{\text{p}}{\text{mm}}$ beträgt. Bestimmen Sie die Gesamtlänge l der Spirale, wenn eine Belastung $\mathfrak{P}$ von 10 p (20 p, 30 p, 50 p, 60 p) erfolgt! Geben Sie die Funktion

a) durch die Menge der geordneten Paare $[\mathfrak{P}; l]$,

b) durch die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung an!

6. Nachdem ein Auto 8 km vom Abfahrtsort entfernt ist, fährt es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = 60$ km/h. Wie groß ist die Entfernung s vom Abfahrtsort, nachdem es $t = 10$ (20, 30, 40, 50) Minuten mit gleichbleibender Geschwindigkeit gefahren ist? Geben Sie die Funktion an

a) durch die Menge der geordneten Paare $[t; s]$,

b) durch die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung!

7. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden linearen Funktionen in einem xy-Koordinatensystem!

a) $y = 0{,}2x$ **b)** $\frac{1}{2}x = y$ **c)** $y - 0{,}8x = 0$ **d)** $y - x = 0$

e) $y = 1{,}2x$ **f)** $\frac{y}{2} - x = 0$ **g)** $5x = y$ **h)** $0 = 20x - y$

i) $y = -30x$ **k)** $y + 8x = 0$ **l)** $-2x = y$ **m)** $0 = y + x$

n) $y = -\frac{1}{2}x$ **o)** $y + \frac{1}{5}x = 0$ **p)** $-x = 10y$

8. Geben Sie für jedes Bild der Aufgaben 2/7a bis 2/7p

a) den Anstieg;

b) die Koordinaten der Eckpunkte des Steigungsdreiecks;

c) die Größe des Steigungswinkels (Winkel schätzen und messen) an!

9. Stellen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Funktionen mit den folgenden Gleichungen grafisch dar!

a) $y = \frac{1}{2}x + 5$ **b)** $2y = x - 3$ **c)** $y - \frac{1}{2}x = 0$ **d)** $2y + 8 = x$

e) $\frac{1}{3}y = -x - 1$ **f)** $y + 3x = 0$ **g)** $y + 3x = 5$ **h)** $2y = -(6x + 3)$

Vergleichen Sie die Bilder der Funktionen! Welche gleichen Eigenschaften und welche unterschiedlichen haben sie? Wie ist das aus den Gleichungen der Funktionen erkennbar?

Welche Geradenschar wird durch die Bilder der folgenden Funktionen dargestellt?

10. $y = -2x + k$ **11.** $y = ax - 2{,}4$

---

1. Suchen Sie zwei Vorschriften, die jedem Element der Menge $M_1 = \left\{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$ genau ein Element aus der Menge $M_2 = \left\{0; \frac{1}{16}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 4\right\}$ zuordnen!

a) Geben Sie die beiden Zuordnungsvorschriften und die Mengen geordneter Zahlenpaare an!

b) Sind die von Ihnen gebildeten Funktionen lineare Funktionen?

---

12. Welche Gleichungen haben die linearen Funktionen, deren Bilder Geraden mit dem Anstieg **a)** $+\frac{3}{5}$, **b)** -5 sind, die die y-Achse jeweils in den Punkten schneiden, deren y-Koordinaten $3, \frac{1}{2}, -5$ sind?

Stellen Sie die folgenden linearen Funktionen grafisch dar!

13. **a)** $y = 3x - 2$ **b)** $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$ **c)** $y = -\frac{3}{2}x$ **d)** $y = -1{,}4$

14. **a)** $y = x - 1{,}6$ **b)** $y = -5x + 2$ **c)** $y + = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$ **d)** $y = 2{,}6$

15. Bestimmen Sie den Wertevorrat der in den Aufgaben **13** und **14** angegebenen Funktionen für folgende Definitionsbereiche: **a)** $0 \leqq n \leqq 5$, n natürliche Zahl, **b)** $-2 \leqq g < 4$, g ganze Zahl!

Von einer linearen Funktion ist die folgende Wertetabelle gegeben. Zeichnen Sie das Bild der Funktion! Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die durch die Wertetabelle bestimmt ist!

16.

x	-4	$+4$	$+16$
y	-9	-3	$+6$

17.

x	-1	$+2$	$+5$
y	$+5$	-4	-13

Verschieben Sie die Geraden, die zu den nachstehenden Funktionsgleichungen gehören, um 3; -2; $\frac{1}{4}$; $0{,}8$ Einheiten in Richtung der positiven y-Achse! Wie heißen die Gleichungen der Funktionen, die durch diese Geraden dargestellt werden? Wo schneiden diese Geraden die beiden Koordinatenachsen?

18. **a)** $y = -\frac{3}{2}x + 2$ **b)** $-7y = 3x + 14$

19. **a)** $11x - 11y = 0$ **b)** $y = 2x + 1$

20. Wie können Sie ohne Aufstellen einer Wertetabelle die Funktionen mit den Gleichungen **a)** $x = 3y + \frac{1}{2}$, **b)** $x = ay + b$ grafisch darstellen?

21. Gegeben sind die Bilder der Funktionen

a) $y = 3x - 11$ **b)** $-x - \frac{3}{5}y = 1{,}5$ **c)** $x : y = 4 : 7$

und die Punkte

$P_1(-8; -14)$, $P_2\left(2; \frac{7}{2}\right)$, $P_3\left(\frac{44}{5}; 15{,}4\right)$

$P_4(-1{,}5; 0)$, $P_5(0{,}7; -9)$, $P_6\left(-2; -3\frac{1}{2}\right)$

Welche der sechs Punkte liegen auf einer der gegebenen Geraden?

22. Die Bilder der Funktionen

a) $y = -2x$ **b)** $y - \frac{5}{3}x = 0$ **c)** $6y - x = 0$ **d)** $10y + 3x = 0$

sind jeweils an der x-Achse und an der y-Achse zu spiegeln. Wie lauten die Gleichungen der durch Spiegelung gewonnenen Geraden?

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Paare von Funktionsgleichungen zu Geraden gehören, die symmetrisch zu den Koordinatenachsen liegen! Geben Sie jeweils die Symmetrieachse an!

23. **a)** $y = 4x$; $y = \frac{1}{4}x$

b) $y = 8x$; $y = -\frac{1}{8}x$

c) $y = -2x + 3$; $y = +2x + 3$

d) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{5}$; $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{5}$

24. **a)** $y = 3x$; $y = -3x$

b) $y = 5x$; $y = -4x$

c) $y = 3x + 1$; $y = -3x + 1$

d) $y = x - 2$; $y = -x + 2$

25. **Ermitteln Sie die Nullstellen folgender Funktionen!**

a) $y = 2x + 4$ **b)** $y = \frac{1}{2}x - 3$ **c)** $y = x$

d) $x + y = 4$ **e)** $2x - y = 1$ **f)** $\frac{1}{3}x + 2y - 2 = 0$

26. **Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen mit Hilfe der Achsenabschnitte!**

a) $y = -\frac{2}{3}x + 7$ **b)** $y = 7x - \frac{2}{3}$ **c)** $x = 5y - 10$

d) $x + y = 1$ **e)** $3x - 22y = 33$ **f)** $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} - 7 = 0$

Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Zahlen bzw. Zahlenpaare jeweils Lösung der danebenstehenden Gleichung bzw. Ungleichung sind!

27. **a)** $x = 7;\ 5x - 40 = -5$ **b)** $x = \frac{1}{3};\ (5x + 8) \cdot 3 > 20$

c) $[x; y] = [-2; 5];\ 5y + 10x = 5$ **d)** $a = -\frac{1}{2};\ 5a + 1 = a - 1$

e) $y = -4;\ 15y < 3y$ **f)** $[u; v] = [1; -0{,}5];\ (u + 3) \cdot (4v + 2) = 0$

Untersuchen Sie, ob bei folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen die beiden nebeneinanderstehenden äquivalent sind, und begründen Sie Ihre Aussage!

28. **a)** $7x + 1 = 2x + 5;\ 5x + 1 = 5$ **b)** $\frac{x}{9} + 1 = 4;\ x + 1 = 36$

c) $7x - 5 < 17;\ 7x < 22$ **d)** $-6x < 12;\ x < -2$

e) $\frac{x}{5} - \frac{3x}{5} > 1;\ 2x > 5$ **f)** $8x - 27 + 2x = 2 - x;\ 8x + 3x = 25$

g) $6x + 27 = 9;\ 2x + 9 = 3$ **h)** $6x > 9;\ 2x > 3$

i) $8 - 2x < 36;\ -4 + x < -18$ **k)** $\frac{1 - x}{3} < 4;\ 1 - x < 12$

Lösen Sie folgende Gleichungen!

29. **a)** $3 - (5x + 8) = 6x - (15 + x)$ **b)** $4(17x + 8) + 3(9 - 6x) = 5x - 4(6x - 9)$

c) $12\left(1 + \frac{x}{6}\right) - 4\left(\frac{x}{6} - 2\right) = 5\left(\frac{x}{10} - 7\right)$ **d)** $\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2$

e) $2x - (3 + 4x) = 9 - (10x - 1)$ **f)** $7(x + 1) - 5(3x - 7) = 50$

30. **a)** $\frac{x + 3}{x - 3} = 3 \quad (x \neq 3)$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{5}{2x + 2}$
$(x \neq 0;\ x \neq -1)$

c) $\frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x + 6}{x + 4} \quad (x \neq 3;\ x \neq -4)$

31. **a)** $\frac{7}{4x} - \frac{1}{12x} = \frac{3}{x} - 2 \quad (x \neq 0)$

b) $\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{3x + 12}$
$(x \neq 0;\ x \neq -4)$

c) $\frac{x + 1}{x + 5} + \frac{x + 3}{x - 1} = 2$
$(x \neq -5;\ x \neq 1)$

Ermitteln Sie die jeweiligen Lösungen x der folgenden Gleichungen!

32. **a)** $b + x = a$ **b)** $ax + b = c$

c) $\frac{x}{r} + s = 0$ **d)** $a - \frac{b}{c}x = 0$

e) $m(x - n) = p(x + q)$

33. **a)** $m - x = n$ **b)** $\frac{x}{a} - b = c$

c) $ax = bx$ **d)** $p : x = q : r$

e) $\frac{x + a}{x - a} = a$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach jeder der vorkommenden Variablen auf!

34. **a)** $a = \frac{b}{2}(c + d)$ **b)** $a = b \cdot \frac{c - d}{2c}$ **c)** $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

35. **a)** $a = b \cdot c(d - e)$ **b)** $a = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{d \cdot c}{2}$ **c)** $a = b(1 + c \cdot d)$

36. Die Lösungen für x sind zu bestimmen!

a) $\frac{3x}{2b(x - b)} - 2 = 1$ **b)** $\frac{n - x}{n} = \frac{m - x}{m}$

c) $\frac{a - b}{x - b} - \frac{a^2 - b^2}{x^2 - b^2} = \frac{-2b}{x + b}$ **d)** $\frac{r}{x + 2} + \frac{s}{5} = \frac{2s}{2x + 4} + \frac{r}{5}$

e) $\frac{8}{x + 2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{15} - \frac{5}{12}$ **f)** $\frac{7}{x - 1} - \frac{9}{2x - 2} = \frac{10x}{2x - 3}$

g) $\frac{6}{2x - 3} - \frac{5}{2x + 3} = \frac{61}{4x^2 - 9}$ **h)** $\frac{x - 9}{x - 12} + \frac{x - 4}{x - 7} = 2$

i) $2 - \frac{x + b}{x + 2b} = \frac{x + 3b}{x + 4b}$ **k)** $\frac{17 + 7x}{x + 6} + \frac{7{,}5 + 5x}{x + 5} = 12$

l) $\frac{c}{4x + b} - \frac{2a}{4x - b} = \frac{-c(4a + 3b)}{16x^2 - b^2}$ **m)** $\frac{x}{x - b} - \frac{x}{x + b} = \frac{4a^2 + 2b^2}{x^2 - b^2}$

Ermitteln Sie die durch folgende Bedingungen festgelegten Zahlen!

37. **a)** Das Fünffache einer Zahl ist gleich der um 3 vermehrten Hälfte dieser Zahl.
b) Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist gleich 30.
c) Die Differenz aus dem Fünffachen und dem Doppelten einer Zahl ist gleich der um $\frac{1}{2}$ verminderten Zahl.

38. **a)** Die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist um 7 größer als 14.
b) Die Hälfte einer Zahl, vergrößert um 2, ist doppelt so groß wie die um 1 verminderte Zahl.
c) Eine um $\frac{2}{3}$ verkleinerte Zahl ist dreimal so groß wie ihr Doppeltes.

39. Der Gesamtwiderstand zweier parallelgeschalteter Widerstände beträgt 20 000 Ω. Der eine Widerstand beträgt 100 kΩ, wie groß ist der andere?

40. Von drei parallelgeschalteten Widerständen ist der zweite doppelt so groß wie der erste, der dritte doppelt so groß wie der zweite. Wie groß sind die drei Widerstände zu wählen, damit der Gesamtwiderstand 14 Ω beträgt?

41. Für die Rodung eines 23,5 ha großen Kartoffelschlages einer LPG mit einer Vollerntemaschine wären bei rationellstem Einsatz der Maschine 14 Arbeitsstunden zu planen. Wie lange dauert die Rodung der Kartoffeln, wenn gleichzeitig noch eine zweite Vollerntemaschine eingesetzt wird, deren Leistung aber um 25 % geringer als die der anderen ist?

42. Eine drei Mitglieder zählende Melkerbrigade hat für die im sozialistischen Wettbewerb erzielte Mehrproduktion eine Prämie von 185 M erhalten. Die Prämie soll nach dem Leistungsprinzip verteilt werden, indem die von den einzelnen Melkern im Wettbewerb erzielten Punktzahlen zugrunde gelegt werden, nämlich 300 bzw. 450 bzw. 360 Punkte. Wieviel Mark erhalten die einzelnen Melker?

43. Auf der Autobahn fährt ein PKW mit gleichbleibender Geschwindigkeit von $v_1 = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. In welcher Zeit hat ihn ein anderer eingeholt, der 10 Minuten später abgefahren ist und mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_2 = 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ fährt?

44. Ein Autobus hat vor einem später abgefahrenen PKW einen Vorsprung von 3,5 km. Der PKW holt den Bus 5 km vom Abfahrtsort entfernt ein. Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge?

---

2. Welche Lösungen für x haben die folgenden Gleichungen?

a) $x + a = a - x$ **b)** $x - a = a - x$ **c)** $x + a = a + x$
d) $mx + n = nx + m$ **e)** $mx - n = nx - m$ **f)** $mx + n = mx - n$

3. Geben Sie die Lösungen für x im Bereich der natürlichen Zahlen für nachstehende Gleichungen an, wenn a eine natürliche Zahl ist!

a) $a + x = 5$ **b)** $x + 3a = 10$ **c)** $3x + a = 6$ **d)** $3x + 3a = a$

---

45. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks ist 67,6 cm lang. Ein Schenkel ist 4 cm kleiner als die Grundlinie. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

46. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete 5 cm lang. Die Hypotenuse ist 3 cm länger als die andere Kathete. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

47. Elektromagnetische Wellen breiten sich mit einer Geschwindigkeit von rund 300000 km/s aus. Der Höhenfunkmesser eines Flugzeugs sendet Wellen aus, die an der Erdoberfläche reflektiert werden. Von der Aussendung bis zum Empfang der an der Erdoberfläche reflektierten elektromagnetischen Wellen vergehe eine Zeit von 0,000004 s. In welcher Höhe fliegt das Flugzeug?

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens!

48. a) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 253 \\ y &= 5x \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x &= 3y - 2 \\ x &= 5y - 12 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 7y &= 2x \\ 14y - 4x &= 0 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} x + y &= 54 \\ \frac{x}{y} &= 2 \end{aligned}$

49. a) $\begin{aligned} 8x + 7y &= 85 \\ x &= 3y \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 6x - 4y &= 24 \\ x &= y + 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y &= 3x - 17 \\ y &= 2x - 12 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} y : x &= 1 : 4 \\ y + x &= 100 \end{aligned}$

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Additions- und Subtraktionsverfahrens!

50. a) $\begin{aligned} 3x + y &= 9 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 6x + 5y &= 8 \\ 3x - 2y &= 1{,}3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 0{,}4x + 0{,}3y &= 6 \\ 1{,}2x - 2y &= 760 \end{aligned}$

51. a) $\begin{aligned} 6x + 4y &= 4 \\ -6x - 2y &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x + \frac{1}{2}y &= \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2}x + 2y &= -6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5y + 2x &= 11 \\ 7y - 3x &= 27 \end{aligned}$

Wählen Sie zur Lösung der folgenden Gleichungssysteme das rationellste Verfahren!

52. a) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 8x - 15y &= -3 \\ 2x + 3y &= \frac{3}{2} \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} u &= v + \frac{7}{2} \\ 14u &= 112v \end{aligned}$

53. a) $\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 8y - 5x &= 0 \\ -8y - 5x &= 80 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x &= 15 - 2y \\ 9x - 10y &= 21 \end{aligned}$

d) $x + 3y = 1$
$3y = 11 - 2x$

e) $18a - 7b = 2$
$a = b + \frac{1}{42}$

d) $a + 1 = -2b$
$-5a = 38 + b$

e) $22y - 4 = z$
$33y + 3 = 2z$

54. a) $3x - 10 = 5y$
$6x - 20 = 5y$

b) $\frac{3}{x} + 2y = -\frac{7}{2}$
$\frac{15}{x} - \frac{5}{4}y = 5$

c) $5(x - 3) - 24y = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)$
$5x + 7 = 0$

d) $15(x + 2) - 20y = 50$
$20(x - 3) - 40(y - x) = -20$

e) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y + 1) = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{2}y = \frac{9}{2}$

55. a) $\frac{38}{7} - x = y + \frac{2}{7}$
$38 - 7x = 10(y - 1)$

b) $2r = \frac{10}{s} = 1$
$\frac{r}{4} + \frac{1}{2s} = \frac{1}{2}$

c) $11(x - y) + 12(y - x) = 1$
$(x - 2) : y = 1 : 4$

d) $5(x + 2) - 3(y + 1) = 23$
$3(x - 2) + 5(y - 1) = 19$

e) $\frac{1}{x + y} = \frac{2}{3x + 1}$
$\frac{1}{2x + 1} = \frac{2}{7y}$

---

4. Es sind 910 dt Düngemittel aus Güterwagen der Reichsbahn zu entladen. Dazu stehen entweder 5 LKW mit je 36,4 dt Ladefähigkeit oder 7 Traktorenzüge mit je 65 dt Ladefähigkeit zur Verfügung. Ein LKW benötigt für Hin- und Rückfahrt, Be- und Entladung zusammen 50 Minuten, ein Traktorenzug 120 Minuten. Mit welchen Fahrzeugen läßt sich

a) am schnellsten entladen,

b) am billigsten entladen, wenn einmal gleicher Stundenlohn für LKW- und Traktorenfahrer, ein andermal gleicher Lohn für jeden Tonnenkilometer gezahlt wird?

5. 4 l 96 %ige Schwefelsäure werden in ein Gefäß mit 2 l Wasser gegeben. Wievielprozentig ist die entstandene Säure?

6. Wieviel Liter 42 %ige Säure sind 2 l 10 %iger Säure zuzusetzen, damit 30 %ige Säure entsteht?

Ermitteln Sie die Lösungen $[x; y]$ der folgenden Gleichungssysteme!

56. a) $x + y = a$
$x - y = b$

b) $ax + by = 0$
$x + y = 5$

c) $ax + by = 1$
$bx + ay = 1$

57. a) $x + y = a - b$
$x - y = b$

b) $ax + by = c$
$x + y = 0$

c) $ax + ay = m$
$x - y = n$

58. Die Summe zweier Zahlen ist 52. Die Differenz aus dem Dreifachen der einen und dem Fünffachen der anderen ist 100. Welche Zahlen erfüllen die Bedingungen?

59. Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und dem Achtfachen einer anderen ist 310. Die Summe aus dem dritten Teil der ersten und dem achten Teil der zweiten ist 10. Für welche beiden Zahlen gilt dies?

60. Eine zweistellige Zahl hat als Quersumme 10. Schreibt man die beiden Grundziffern dieser Zahl in umgekehrter Reihenfolge, so wird die Zahl dadurch weder größer noch kleiner. Für welche zweistellige Zahl gilt dies?

61. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 10. Schreibt man die beiden Grundziffern dieser Zahl in umgekehrter Reihenfolge, so entsteht eine um 36 kleinere Zahl als die ursprüngliche. Für welche zweistellige Zahl trifft dies zu?

62. Auf einer Großbaustelle werden täglich 62 Wagenladungen mit insgesamt 480 t Beton angeliefert. Einige Fahrzeuge werden mit 6 t, die anderen mit 10 t Beton beladen. Wieviel Ladungen von jeder Art sind es täglich?

63. Ein Güterzug transportiert mit insgesamt 38 Wagen 730 t Braunkohlenbriketts. Einige Wagen sind mit 15 t, die anderen mit 20 t Briketts beladen. Wieviel Wagen von jeder Art sind es?

64. Ein Panzer der Nationalen Volksarmee hat einen Weg von 230 km zurückgelegt. Im ursprünglich vollen Kraftstofftank befinden sich noch 40 l. Könnte der Kraftstoffverbrauch je 100 km um 15 l eingeschränkt werden, so würde dieser Panzer einen Aktionsradius von 270 km haben. Wieviel Liter faßt der Tank? Wieviel Kraftstoff wird für 100 km verbraucht?

65. Ein Kraftwagen fährt auf der Strecke $\overline{AB}$ mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_1 = 50\,\mathrm{km/h}$. Gleichzeitig fährt ihm ein anderer PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_2 = 70\,\mathrm{km/h}$ entgegen von B nach A. Die Entfernung $\overline{AB}$ beträgt **a)** 90 km, **b)** 108 km. Nach wieviel Minuten Fahrzeit treffen sie sich? Wieviel Kilometer ist der Treffpunkt von A entfernt?

66. Ein Feuerlöschteich enthält 135 m^3 Wasser. Bei einem Einsatz entnimmt eine Motorspritze $750\,l \cdot min^{-1}$. Nach welcher Zeit ist der Teich leergepumpt, wenn 30 min nach der ersten Motorspritze noch eine zweite mit einer Leistung von $500\,l \cdot min^{-1}$ eingesetzt wird und die erste Pumpe zwischendurch einmal 10 min ausfällt?

67. In der gleichen Zeit umrunden zwei Freunde die 400 m lange Aschenbahn eines Sportplatzes zwei- bzw. dreimal. Laufen sie von einem Punkt dieser Aschenbahn gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung los, so begegnen sie sich alle 40 s. Mit welcher Geschwindigkeit laufen die beiden Freunde?

68. In einem Stromkreis, in dem zwei Widerstände parallelgeschaltet sind, sei die Gesamtstromstärke 3 A. Welche Stromstärke wird in den Verzweigungen gemessen, wenn sich die Widerstände wie 2 : 3 verhalten?

69. Eine Messinggußlegierung von 35 kg enthält 12 kg mehr Kupfer als Zink und außerdem 1 kg Blei. Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zink enthält die Legierung?

Ermitteln Sie grafisch die Lösungen folgender Gleichungssysteme! Überprüfen Sie stets die Richtigkeit der ermittelten Lösungen!

70. **a)** $\begin{array}{l} y = x - 1 \\ \underline{y = 3 - x} \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} y = 2x + 2 \\ \underline{y = \frac{1}{2}x - 1} \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \underline{3x + y = 1} \end{array}$ **d)** $\begin{array}{l} y + x = 3 \\ \underline{x - y = 1} \end{array}$

e) $\begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ \underline{6y - 10x - 3 = 0} \end{array}$ **f)** $\begin{array}{l} \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \\ \underline{\frac{y}{2} + \frac{x}{3} = 0} \end{array}$

71. **a)** $\begin{array}{l} y = 2x + 4 \\ \underline{y = 4x - 2} \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} x = 2y + 1 \\ \underline{x = 4y - 5} \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 2y - x = 0 \\ \underline{4y + 3 = x} \end{array}$ **d)** $\begin{array}{l} x + 5y = 2{,}3 \\ \underline{x + y = 1{,}5} \end{array}$

e) $\begin{array}{r} 23x - 19y = 5 \\ \underline{y = 2x} \end{array}$ **f)** $\begin{array}{l} 4x + 3y = 15 \\ \underline{2x - y = 5} \end{array}$

72. a) $\underline{\begin{aligned} 5y = 2x &= 1 \\ 5y + 2x &= 14 \end{aligned}}$

b) $\underline{\begin{aligned} 6x - 3y &= 15 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}}$ **c)** $\underline{\begin{aligned} y &= 1{,}5x \\ x &= 1{,}5y \end{aligned}}$

73. a) $\underline{\begin{aligned} 2x - 5y &= 6 \\ 5y - 2x &= 6 \end{aligned}}$

b) $\underline{\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned}}$ **c)** $\underline{\begin{aligned} 8y + 5x &= 20 \\ 1{,}6y + x &= 4 \end{aligned}}$

74. Begründen Sie an Hand der grafischen Darstellung von Aufgabe **1/72** und **1/73**, warum drei charakteristische Fälle bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen auftreten und wodurch sie bedingt sind!

---

7. Ein Aufklärungsflugzeug überfliegt eine gegnerische Fahrzeugkolonne in Marschrichtung in 1 min 12 s und in entgegengesetzter Richtung in 52 s. Wie lang ist die Fahrzeugkolonne und welche Geschwindigkeit hat diese, wenn das Flugzeug die Kolonne mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von $v = 400\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ überfliegt?

8. 1 Liter 40 %ige Salzsäure ist mit Wasser so zu verdünnen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die mehr als 6 % Salzsäure enthält. In wieviel Liter Wasser darf man den einen Liter Säure höchstens geben?

9. 3 Liter 70 %ige Säure sind mit 12 %iger Säure so zu mischen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die weniger als 30 % Säure enthält. Wieviel Liter der 12 %igen Säure muß man mindestens zusetzen?

10. Ein zylinderförmiger Kessel von 3 m Höhe und 190 cm Durchmesser ist zu einem Drittel mit einer 25 %igen Ammoniaklösung gefüllt. Wieviel Liter einer 18 %igen Ammoniaklösung muß man zugeben, um eine 24 %ige Lösung zu erhalten?

11. Ein mit Quecksilber ($\varrho_{\text{Hg}} = 13{,}6\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) vollständig gefülltes und verschlossenes Gefäß aus Gußeisen ($\varrho_{\text{Fe}} = 7{,}2\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$), das beim Eintauchen in Wasser 20 kg Wasser verdrängt, hat eine Gesamtmasse von 250 kg. Wie groß ist die Masse des Quecksilbers, wie groß die des Gefäßes?

12. In einem Maschinenbaubetrieb wird eine größere Anzahl gleicher Drehteile benötigt. Der Betrieb kann sie entweder auf einer Revolverdrehmaschine oder einem Drehautomaten herstellen. Die geplante Herstellungszeit für ein Drehteil, Stückzeitnorm genannt, betrage auf der Revolverdrehmaschine 5,5 min, auf dem Drehautomaten 4 min. Das Einrichten (Einstellen der Maschine für die Fertigung dieses Teiles) dauert dagegen bei der Revolverdrehmaschine nur 220 min, während es bei dem Automaten 700 min dauert. Infolge der hohen Einrichtzeit beim Automaten ist offensichtlich für kleine Stückzahlen die Fertigung auf der Revolverdrehmaschine rationeller als auf dem Drehautomaten. Bei hohen Stückzahlen ist es genau umgekehrt. Das zeigen auch die folgenden Beispiele:

Fertigungszeiten	auf der Revolverdrehmaschine	auf dem Drehautomaten
a) für 100 Stück	$100 \cdot 5{,}5\ \text{min} + 220\ \text{min} = 770\ \text{min}$	$100 \cdot 4\ \text{min} + 700\ \text{min} = 1100\ \text{min}$
b) für 500 Stück:	$500 \cdot 5{,}5\ \text{min} + 220\ \text{min} = 2970\ \text{min}$	$500 \cdot 4\ \text{min} + 700\ \text{min} = 2700\ \text{min}$

Welches ist im vorliegenden Fall die sogenannte *Grenzstückzahl*, d. h. bei welcher Stückzahl dauert die Fertigung nach beiden Verfahren gleich lange?

Lösen Sie diese Aufgabe

a) als Gleichung mit einer Unbekannten; **b)** als Gleichungssystem mit zwei Unbekannten!

---

3. Winkelfunktionen; Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks

1. Rechnen Sie die folgenden im Gradmaß gegebenen Winkel ins Bogenmaß um!

a) $1°$ **b)** $0{,}1°$ **c)** $0{,}01°$ **d)** $1'$ **e)** $1''$ **f)** $45°$
g) $120°$ **h)** $75°$ **i)** $300°$ **k)** $180°$ **l)** $350°$ **m)** $32°$
n) $67{,}5°$ **o)** $102{,}7°$ **p)** $256{,}58°$ **q)** $318{,}04°$ **r)** $177{,}42°$

2. Rechnen Sie die folgenden im Bogenmaß gegebenen Winkel ins Gradmaß um!

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{5}$ **c)** $\frac{\pi}{10}$ **d)** $\frac{\pi}{15}$ **e)** $\frac{\pi}{30}$ **f)** $\frac{\pi}{180}$

g) $\frac{3}{2}\pi$ **h)** $\frac{3}{4}\pi$ **i)** $\frac{7}{8}\pi$ **k)** $\frac{\pi}{12}$ **l)** $1{,}13\pi$ **m)** 0,1

n) 0,01 **o)** 2 **p)** 1,5 **q)** 3,04 **r)** π **s)** $\frac{2}{3}\pi$

t) 3 **u)** 0,703

3. Bestimmen Sie die vier Winkelfunktionswerte der folgenden Winkel durch Messung am Kreis!

a) 22,5° **b)** 45° **c)** 67,5°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln die folgenden Funktionswerte!

4. a) sin 12° **b)** sin 84° **c)** sin 3° **d)** sin 29° **e)** sin 37°
f) cos 2° **g)** cos 17° **h)** cos 32° **i)** cos 51° **k)** cos 68°

5. a) tan 21° **b)** tan 58° **c)** tan 5° **d)** tan 12° **e)** tan 31°
f) cot 8° **g)** cot 13° **h)** cot 64° **i)** cot 76° **k)** cot 87°

6. a) sin 5,6° **b)** sin 38,1° **c)** sin 27,3° **d)** sin 77,7° **e)** sin 40,9°
f) cos 53,5° **g)** cos 11,8° **h)** cos 44,6° **i)** cos 87,6° **k)** cos 58,9°

7. a) tan 0,5° **b)** tan 88,0° **c)** tan 56,1° **d)** tan 43,9° **e)** tan 68,8°
f) cot 32,3° **g)** cot 52,4° **h)** cot 72,9° **i)** cot 64,8° **k)** cot 53,2°

8. a) sin 58,11° **b)** sin 63,44° **c)** sin 87,15° **d)** sin 34,26° **e)** sin 19,24°
f) cos 22,94° **g)** cos 17,32° **h)** cos 37,22° **i)** cos 9,67° **k)** cos 1,12°

9. a) tan 1,92° **b)** tan 17,44° **c)** tan 28,55° **d)** tan 39,67° **e)** tan 41,72°
f) cot 14,74° **g)** cot 26,59° **h)** cot 34,53° **i)** cot 43,88° **k)** cot 53,46°

10. a) cos 74,37° **b)** tan 73,06° **c)** sin 13,79° **d)** cot 64,42° **e)** tan 87,44°
f) sin 81,53° **g)** cot 53,76° **h)** cos 25,61°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln die Winkel im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$, denen die folgenden Funktionswerte zugeordnet sind!

11. a) $\sin x = 0{,}2756$ **b)** $\sin x = 0{,}6157$ **c)** $\sin x = 0{,}8829$
d) $\sin x = 0{,}4787$ **e)** $\sin x = 0{,}2990$ **f)** $\sin x = 0{,}5105$
g) $\cos x = 0{,}0454$ **h)** $\cos x = 0{,}9921$ **i)** $\cos x = 0{,}1547$
k) $\cos x = 0{,}6858$ **l)** $\cos x = 0{,}7325$ **m)** $\cos x = 0{,}9724$

12. a) $\tan x = 0{,}0699$ **b)** $\tan x = 0{,}2679$ **c)** $\tan x = 1{,}483$
d) $\tan x = 0{,}9725$ **e)** $\tan x = 0{,}1495$ **f)** $\tan x = 0{,}4536$
g) $\cot x = 1{,}865$ **h)** $\cot x = 0{,}3115$ **i)** $\cot x = 2{,}592$
k) $\cot x = 3{,}420$ **l)** $\cot x = 5{,}730$ **m)** $\cot x = 0{,}0052$

13. a) $\sin x = 0{,}6407$ **b)** $\sin x = 0{,}4711$ **c)** $\sin x = 0{,}8308$
d) $\sin x = 0{,}6300$ **e)** $\sin x = 0{,}6070$ **f)** $\sin x = 0{,}0081$
g) $\cos x = 0{,}1700$ **h)** $\cos x = 0{,}3473$ **i)** $\cos x = 0{,}9872$
k) $\cos x = 0{,}0037$ **l)** $\cos x = 0{,}0323$ **m)** $\cos x = 0{,}9999$

14. a) $\tan x = 0{,}3259$ **b)** $\tan x = 0{,}6425$ **c)** $\tan x = 1{,}022$
d) $\tan x = 8{,}190$ **e)** $\tan x = 0{,}7420$ **f)** $\tan x = 0{,}6000$
g) $\cot x = 0{,}2510$ **h)** $\cot x = 0{,}4758$ **i)** $\cot x = 1{,}321$
k) $\cot x = 1{,}085$ **l)** $\cot x = 0{,}9980$ **m)** $\cot x = 0{,}0020$

15. Stellen Sie je eine Schablone für die Sinus- und für die Tangenskurve her! Zeichnen Sie mit ihrer Hilfe auch die Kosinus- und die Kotangenskurve!

16. Bestimmen Sie die Vorzeichen der Werte der vier Winkelfunktionen zu folgenden Winkeln!

a) 230° **b)** 175° **c)** 335° **d)** 117,5° **e)** 221,6° **f)** 100,9°
g) 212,7° **h)** 148,5° **i)** 241,5° **k)** 155,37° **l)** 93,50° **m)** 252,30°
n) 300,23° **o)** 354,63° **p)** 244,66° **q)** 327,76° **r)** 173,25° **s)** 70,28°
t) 92,7° **u)** 182,7° **v)** 52,7°

17. Leiten Sie aus den nachstehenden Werten der Sinus- und der Tangensfunktionen die entsprechenden Werte der Kofunktionen her!

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$\tan x$	0	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	–

18. Beschreiben und vergleichen Sie den Verlauf der Kurven der Sinus- und Kosinusfunktion sowie der Tangens- und Kotangensfunktion im Bereich von 0° bis 90°!
Welche Punkte haben die beiden Kurven jeweils gemeinsam?

19. Zeichnen Sie alle 4 Funktionsbilder im Bereich von 0° bis 90° in ein und dasselbe Koordinatensystem! Welche Punkte haben jetzt die Kurven gemeinsam?

20. Berechnen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ABC ($\gamma = 90°$), von denen folgende Stücke gegeben sind!

a) $a = 12{,}7$ cm; $\alpha = 80{,}5°$
b) $\alpha = 17{,}3°$; $b = 74{,}54$ m
c) $a = 4$ m; $c = 5$ m
d) $b = 12$ cm; $a = 16$ cm
e) $c = 125$ m; $\alpha = 35{,}60°$
f) $c = 10{,}50$ cm; $\beta = 40{,}30°$
g) $a = 63$ mm; $\alpha = 40{,}30°$
h) $b = 80{,}70$ m; $\beta = 62{,}30°$

21. In einem rechtwinkligen Dreieck (vgl. Bild 3/21) sind die folgenden Stücke gegeben:

a) $c = 18$ m; $p = 8$ m
b) $h_c = q = 3{,}5$ cm
c) $p = 10{,}2$ cm; $\alpha = 37{,}5°$
d) $h_c = 22{,}42$ m; $b = 25{,}30$ m
e) $h_c = 13$ cm; $\alpha = 26{,}5°$
f) $p = q = 17$ cm

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt!

22. In einem gleichschenkligen Dreieck (vgl. Bild 3/22) sind die folgenden Stücke gegeben:

a) $c = 125$ m; $h_c = 85$ m
b) $a = 3{,}70$ m; $c = 2{,}50$ m
c) $a = 5{,}70$ m; $c = 3{,}50$ m
d) $c = 19{,}64$ cm; $\gamma = 55{,}40°$
e) $c = 75{,}92$ dm; $\alpha = 52{,}62°$
f) $h_c = 4{,}786$ m; $\gamma = 32{,}10°$

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt!

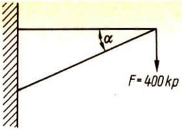
23. Berechnen Sie im Rechteck mit den Seiten $a = 5{,}5$ m und $b = 4{,}2$ m die Winkel, welche die Diagonalen mit den Rechteckseiten bilden, sowie die von beiden Diagonalen eingeschlossenen Winkel!

24. Von einem Rechteck ist die Diagonale 6,5 m lang und einer der von den beiden Diagonalen eingeschlossener Winkel ε 55° groß. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

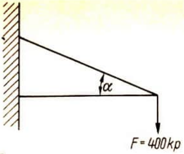
25. Von einem Rhombus sind die Seite $a = 12{,}5$ cm und der Winkel $\alpha = 45°$ gegeben. Berechnen Sie die Länge der beiden Diagonalen des Rhombus und den Flächeninhalt!

26. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last $F = 400$ kp (Bild A 3/1).

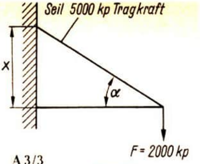
a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; 45°; 60° der Zugstange gegen den Tragarm!
b) Handelt es sich um Zug- oder um Druckkräfte?
c) Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!



A 3/1

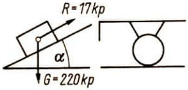


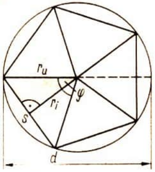
A 3/2



A 3/3

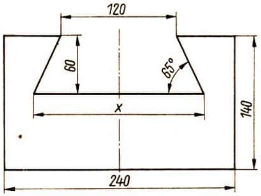
A 3/4



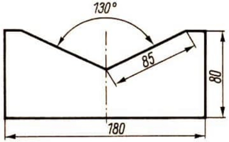


A 3/5

A 3/6



A 3/7



27. Am Ende eines Tragarms mit Stütze hängt eine Last $F = 400$ kp (Bild A 3/2).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; $45°$; $60°$ der Stütze gegen den Tragarm!

b) Werden Tragarm und Stütze auf Zug oder auf Druck beansprucht?

c) Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

28. Ein Ausleger soll 2000 kp tragen und ist mit einem Seil von 5000 kp Tragfähigkeit abzufangen. Wie groß muß das Maß x mindestens werden, wenn die Tragfähigkeit des Seiles nicht überschritten werden soll (Bild A 3/3)?

29. Eine Kiste, die 220 kg wiegt, wird mittels einer Schrotleiter abgeladen (Bild A 3/4). Bei welchem Winkel α beginnt die Kiste zu gleiten, wenn zur Überwindung der Reibung 17 kp erforderlich sind?

30. Eine Kiste, die 96 kg wiegt, soll auf einer unter 25° gegen die Horizontalebene geneigten Holzrampe hochgezogen werden. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Gleitreibung die Größe der erforderlichen Zugkraft! Die Reibungszahl für Holz auf Holz ist im Mittel $\mu = 0{,}18$.

31. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm soll ein regelmäßiges Fünfkant gefräst werden (Bild A 3/5). Bestimmen Sie

a) die Seite s des Fünfkants,

b) den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche!

32. Berechnen Sie für die in Bild A 3/6 dargestellte Schwalbenschwanzführung das Maß x!

33. Berechnen Sie für das in Bild A 3/7 dargestellte Führungsprisma die fehlenden Maße!

34. In einem Punkt greifen zwei senkrecht aufeinander stehende Kräfte $F_1 = 126$ kp und $F_2 = 215$ kp an. Wie groß ist der Winkel zwischen der Resultierenden und F_2?

35. In einem Punkt greifen zwei gleich große Kräfte $F_1 = F_2 = 516$ kp an, die einen Winkel von $\alpha = 43{,}5°$ einschließen. Wie groß ist die Resultierende?

36. Eine Kraft $F = 600$ kp soll in zwei gleichgroße Kräfte zerlegt werden, die einen Winkel von 65° einschließen. Wie groß sind diese Kräfte?

37. Wie groß ist der Steigungswinkel eines geraden Kreiskegels vom Grundkreisdurchmesser $d = 8$ cm und der Höhe $h = 10$ cm?

38. Wie hoch ist ein Baum, der bei einer Sonnenhöhe von 35° einen 28,6 m langen horizontalen Schatten wirft?

39. Welcher Breitenkreis ist halb so lang wie der Äquator?

40. Eine Leiter von 20 m Länge lehnt an einer lotrechten Wand. In welcher Höhe trifft sie die Wand, wenn sie gegen den horizontalen Erdboden unter 70° geneigt steht?

41. Welchen Böschungswinkel hat ein kegelförmiger Sandhaufen, dessen Seitenlinie 1,8 m und dessen Durchmesser auf dem Boden 2,9 m beträgt?

42. Wie groß ist der Inhalt der Dachfläche eines Satteldaches mit den Traufenkantenlängen $a = 10$ m, $b = 9$ m, wenn die Dachflächen unter 65° gegen die Horizontale geneigt sind?

43. Jemand erblickt die Spitze eines Turms, von dem er 30 m entfernt ist, unter einem Erhebungswinkel von 30°. Seine Augenhöhe beträgt 1,70 m. Das Gelände liegt eben und waagerecht. Wie hoch ist der Turm?

44. Bestimmen Sie unter Verwendung von Winkelfunktionen die Neigungswinkel der Bilder der Funktionen gegen die x-Achse, die in den Aufgaben **2/7a** bis **2/7p** durch ihre Gleichungen gegeben sind!

45. Verfahren Sie wie in Aufgabe **3/44** mit den Funktionen, die in den Aufgaben **2/23a** bis **2/24d** durch ihre Gleichungen gegeben sind!

46. Welche Anstiege haben die Funktionen, deren Bilder die x-Achse unter den Neigungswinkeln

a) 15° **b)** 30° **c)** 45° **d)** 67,5° **e)** 100° **f)** 115,7°
g) 128° **h)** 135° **i)** 150° **k)** 167,7°

schneiden?

47. Wie lauten die Gleichungen der Funktionen, deren Bilder den Neigungswinkel α gegen die x-Achse haben und die die y-Achse im Punkte $(0; b)$ schneiden?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
α	12,6°	123°	70°	135°	45°	86°	105°	0°
b	7,5	−4	0	−1	1	−2,8	4,6	5

48. Für welche lineare Funktion ist die x-Achse das Bild?
Hinweis: Überlegen Sie, wie groß in diesem Fall Neigungswinkel und Anstieg sind und in welchem Punkt das Bild die y-Achse schneidet! (Vgl. auch Aufgabe **3/47h**.)

4. Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen

Ermitteln Sie die Quadrate folgender Zahlen mit Hilfe der Quadratzahlentafel!

1. a) 17 **b)** 120 **c)** 35 **d)** 350 **e)** 3,5 **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{1}{20}$ **h)** 0,01

2. a) 13 **b)** 140 **c)** 75 **d)** 750 **e)** 7,5 **f)** $\frac{1}{3}$ **g)** $\frac{1}{30}$ **h)** 0,001

3. a) 0,24 **b)** -3 **c)** -19 **d)** $-0{,}5$ **e)** $-\frac{3}{7}$ **f)** $-\frac{1}{3}$ **g)** $-3{,}3$ **h)** -200

4. a) 0,22 **b)** -4 **c)** -17 **d)** $-0{,}3$ **e)** $-\frac{3}{8}$ **f)** $-\frac{1}{2}$ **g)** $-4{,}6$ **h)** -300

5. Zu jeder der Zahlen in den Aufgaben **4/1** bis **4/4** gibt es eine zweite, deren Quadrat dem Quadrat der obenstehenden Zahl gleich ist. Geben Sie diese Zahlen an!

6. Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung $y = x^2$ mit dem Definitionsbereich

$$x \in \left\{-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}$$

Zeichnen Sie das Bild dieser Funktion!

7. Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist um k Einheiten parallel zur y-Achse erst in der positiven Richtung und dann in der negativen Richtung zu verschieben. Zeichnen Sie die Bilder mit Hilfe der Schablone und geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

a) $k = 2$ **b)** $k = 5$ **c)** $k = 0{,}8$ **d)** $k = 3$ **e)** $k = 0{,}5$ **f)** $k = \sqrt{2}$

8. Die folgenden Punkte sind Scheitel von Parabeln mit Gleichungen vom Typ $y = x^2 + e$. Wie lauten die Gleichungen?

a) $S(0; 5)$ **b)** $S(0; -4)$ **c)** $S(0; -0{,}25)$

Stellen Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe der Schablone grafisch dar! Geben Sie für die Funktionen eventuell vorhandene Nullstellen annähernd durch Ablesen aus der grafischen Darstellung sowie für die Bilder die Koordinaten der Scheitel an!

9. a) $y = x^2 - 7$ **b)** $y = x^2 + \sqrt{5}$ **c)** $y = x^2 + \frac{3}{4}$ **d)** $y = x^2 - \left(\frac{11}{5}\right)$

10. a) $y = x^2 - 9$ **b)** $y = x^2 + \frac{1}{2}$ **c)** $y = x^2 + \sqrt{3}$ **d)** $y = x^2 - \frac{13}{4}$

11. a) $y = x^2 - 1{,}8$ **b)** $y = x^2 + \sqrt{2{,}7}$ **c)** $y = x^2 - 1{,}5^2$ **d)** $y = x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

12. a) $y = x^2 - 1{,}9$ **b)** $y = x^2 + \sqrt{1{,}8}$ **c)** $y = x^2 - 2{,}5^2$ **d)** $y = x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Berechnen Sie für folgende Funktionen die Nullstellen mit Hilfe der Quadratzahltafel!

13. a) $y = x^2 - 9$ **b)** $y = x^2 - 6{,}25$ **c)** $y = x^2 - 12{,}25$ **d)** $y = x^2 - 0{,}81$

14. a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = x^2 - 2{,}25$ **c)** $y = x^2 - 0{,}25$ **d)** $y = x^2 - 1{,}44$

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist um k Einheiten parallel zur x-Achse erst in der positiven Richtung und dann in der negativen Richtung zu verschieben. Zeichnen Sie mit Hilfe der Schablone die Bilder, und geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

15. a) $k = 2$ **b)** $k = 5$ **c)** $k = 0{,}8$

16. a) $k = 3$ **b)** $k = 0{,}5$ **c)** $k = \sqrt{2}$

17. Die folgenden Punkte sind Scheitel von Parabeln mit Gleichungen vom Typ $y = (x + d)^2$. Geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

a) $S(1; 0)$ **b)** $S(-3; 0)$ **c)** $S(-1; 0)$

Stellen Sie folgende Funktionen grafisch dar, und geben Sie die Koordinaten der Scheitel an!

18. a) $y = (x-2)^2$ **b)** $y = (x+5)^2$ **c)** $y = (x-0{,}4)^2$ **d)** $y = -(x+1)^2$

19. a) $y = (x-3)^2$ **b)** $y = (x+4)^2$ **c)** $y = (x+0{,}9)^2$ **d)** $y = -(x-3)^2$

Geben Sie für die Bilder folgender Funktionen die Koordinaten der Scheitel an, und zeichnen Sie daraufhin das Bild mit Hilfe der Parabelschablone! Haben die Funktionen Nullstellen?

20. a) $y = x^2 - 4x + 4$
b) $y = x^2 + 3x + 2{,}25$
c) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

21. a) $y = x^2 + 4x + 4$
b) $y = x^2 - 3x + 2{,}25$
c) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

22. a) $y = x^2 + 7x - 2$
b) $y = x^2 - 5x - \frac{3}{4}$

23. a) $y = x^2 - 3x + 2$
b) $y = x^2 - 7x + \frac{10}{3}$

Geben Sie von folgenden Parabeln die Scheitelkoordinaten an! Haben die Funktionen Nullstellen? Wie lautet jeweils die Normalform der Gleichung?

24. a) $y = (x+2)^2 - 3$
b) $y = (x-5)^2 - \frac{2}{5}$
c) $y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 1{,}8$

25. a) $y = (x-2)^2 - 2$
b) $y = (x-4)^2 + 3{,}5$
c) $y = (x+1{,}5)^2 - \frac{1}{4}$

Die folgenden Punkte sind Scheitel von Parabeln mit Gleichungen vom Typ $y = x^2 + px + q$ (p, q reell). Geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!

26. a) $S\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$ **b)** $S\left(3; -\frac{2}{5}\right)$ **c)** $S\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$ **d)** $S(-1{,}2; 2{,}4)$

27. a) $S\left(-4; -\frac{5}{2}\right)$ **b)** $S(0{,}6; -0{,}6)$ **c)** $S(-2; -2)$ **d)** $S(2; 2)$

Folgende Funktionen sind grafisch darzustellen! Wie heißen die Koordinaten der Scheitel? Gibt es Nullstellen?

28. a) $y = x^2$ **b)** $y = 3x^2$ **c)** $y = -0{,}5x^2$
d) $y = -3x^2$ **e)** $y = (3x)^2$ **f)** $y = \frac{1}{10}x^2$

29. a) $y = (x+5)^2$ **b)** $y = 2(x+5)^2$ **c)** $y = \frac{1}{2}(x+5)^2$

30. a) $y = -x^2 + 0{,}5^2$
b) $y = -x^2 + 2$
c) $y = -x^2 - \sqrt{7}$

31. a) $y = -x^2 - 1{,}2^2$
b) $y = -x^2 + (-1{,}2)^2$
c) $y = -x^2 + 3{,}8$

32. a) $y = -(x-2)^2 - 3$
b) $y = -(x+3)^2 + 8$

33. a) $y = -(x-5)^2 - 4$
b) $y = -(x+2)^2 + 5$

34. a) $y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}$ **b)** $y = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ **c)** $y = -x^2 + 3x - \frac{9}{4}$

35. Stellen Sie die folgenden Funktionen alle in ein und demselben Koordinatensystem dar!

$y = f_1(x) = x^2 + 3$; $y = f_2(x) = 2x^2 + 3$; $y = f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$;

$y = f_4(x) = -2x^2 + 3$; $y = f_5(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

Ermitteln Sie die Zahlen, deren Quadrat folgendermaßen lautet! Benutzen Sie gegebenenfalls die Quadratzahlentafel!

36. **a)** 25 **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{225}{96}$ **d)** $0{,}04$ **e)** $0{,}4225$ **f)** $0{,}0289$

37. **a)** 144 **b)** $\frac{36}{121}$ **c)** $\frac{180}{125}$ **d)** $6{,}25$ **e)** $0{,}0036$ **f)** $0{,}9025$

38. **a)** $0{,}256$ **b)** $9r^2$ **c)** $0{,}01p^2$ **d)** 5 **e)** 2 **f)** a

39. **a)** $44{,}1$ **b)** $16m^2$ **c)** 7 **d)** 17 **e)** 3 **f)** b

Bestimmen Sie aus den folgenden Gleichungen die Lösungsmenge für die Variable x und machen Sie jedesmal die Probe!

40. **a)** $x^2 - 576 = 0$ **b)** $x^2 - 12{,}96 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{225}{16} = 0$ **d)** $x^2 = 0{,}016$ **e)** $x^2 + 17 = 0$ **f)** $3x^2 - 12 = 0$

41. **a)** $x^2 - 729 = 0$ **b)** $x^2 - \frac{121}{169} = 0$ **c)** $x^2 = 0{,}09$ **d)** $x^2 = 0{,}0004$ **e)** $x^2 + 9 = 0$ **f)** $5x^2 - 45 = 0$

42. **a)** $32x^2 - 800 = 0$

b) $\frac{x^2}{5} - 125 = 0$

c) $\frac{x^2}{m} - 16m = 0 \quad (m \neq 0)$

d) $\frac{r}{s}x^2 - \frac{s}{r} = 0 \quad (s \neq 0;\ r \neq 0)$

e) $\frac{r}{s}x^2 - \frac{r}{s} = 0 \quad (s \neq 0;\ r \neq 0)$

f) $ax^2 + b = 0 \quad (a \neq 0)$

43. **a)** $12x^2 - 75 = 0$

b) $0{,}4\left(x^2 - \frac{4}{25}\right) = 0$

c) $\frac{x^2}{3} - 27 = 0$

d) $\frac{8}{9}x^2 - \frac{288}{676} = 0$

e) $m^2x^2 - n^2 = 0 \quad (m \neq 0)$

f) $ax^2 - b = 0 \quad (a \neq 0)$

44. **a)** $(x - 4)(x + 4) = 0$

b) $(x - 7)^2 + 14x = 0$

c) $x + 3 + \frac{5}{x - 3} = 0$

d) $\frac{x + 3}{x - 3} + \frac{x - 3}{x + 3} = 0$

45. **a)** $(x + 11)^2 - 121x = 0$

b) $\frac{9}{x + 5} + x - 5 = 0$

c) $\frac{x + 25}{x + 9} = \frac{13 + x}{47 - x}$

d) $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x - a}{x + a} = \frac{2(a^2 + 1)}{1 - a^2} \quad (|a| \neq 1)$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, und machen Sie jeweils die Probe!

46. **a)** $x^2 - 5x = 0$ **b)** $x^2 + 5x = 0$ **c)** $x^2 + \frac{5}{7}x = 0$ **d)** $3{,}5x^2 + \frac{3}{5}x = 0$

e) $5 - x + 3 = \frac{6}{x + 3} \quad (x \neq -3)$

47. **a)** $x^2 - 4x = 0$ **b)** $x^2 + 2x = 0$ **c)** $x^2 - bx = 0$ **d)** $a(x^2 - bx) = 0$

e) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}x = 0$

Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen, soweit reelle Lösungen existieren, und machen Sie jeweils die Probe!

48. **a)** $x^2 - 4x - 12 = 0$

b) $x^2 + 3x - 18 = 0$

c) $x^2 + 5x + \frac{9}{4} = 0$

d) $x(5 - x) = -24$

e) $x = \frac{1}{2x + 1}$

49. **a)** $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 - 5x - 12 = 0$

c) $x^2 + 4x + \frac{13}{5} = 0$

d) $x(4 - x) = -15$

e) $x = \frac{2}{3x + 1}$

f) $\frac{1}{x} = 2x + 1$

g) $x^2 - \frac{1}{2x} - 2 = 0$

f) $\frac{2}{x} = 3x + 1$

g) $x^2 - \frac{1}{5x} - 1 = 0$

50. a) $x^2 - \frac{15}{16}x - \frac{25}{24} = 0$
b) $x^2 - \frac{24}{5}x - 1 = 0$
c) $x^2 - 2x + 0{,}75 = 0$
d) $x^2 + x - 156 = 0$
e) $x^2 + 23x + 120 = 0$
f) $x^2 - 12x + \frac{275}{9} = 0$

51. a) $x^2 - \frac{15}{16} + \frac{9}{64} = 0$
b) $x^2 + \frac{18}{5}x - 1 = 0$
c) $x^2 - 4x + 3{,}75 = 0$
d) $x^2 + x - 182 = 0$
e) $x^2 + 12x - 58 = 0$
f) $x^2 - \frac{45}{14}x - 1 = 0$

52. a) $x^2 - 2x - 24 = 0$
b) $x^2 + 2x - 24 = 0$
c) $a^2 + 3a + 2 = 0$
d) $x^2 - 5x + 6 = 0$
e) $m^2 + m - 6 = 0$
f) $x^2 - 3x = 4$
g) $x^2 + 3x = 10$
h) $s^2 = s + 42$

53. a) $x^2 - 4x - 5 = 0$
b) $x^2 + 4x - 5 = 0$
c) $x^2 + 5x - 6 = 0$
d) $a^2 - 3a - 4 = 0$
e) $r^2 + 2r - 8 = 0$
f) $x^2 + x - 2 = 0$
g) $x^2 - 12x = -27$
h) $z^2 = z + 30$

54. Das Produkt aus dem vierten Teil und dem fünften Teil einer Zahl ist 500. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingung?

55. Die Summe aus dem Quadrat einer negativen Zahl und 79 ist gleich 200. Wie heißt die Zahl?

56. Das Quadrat aus der Summe des Reziproken einer Zahl und der Zahl 3 ist 36. Wie heißt die Zahl?

57. Wenn man das Quadrat gewisser Zahlen um 12 vermindert, so erhält man das Vierfache dieser Zahlen. Wieviel solcher Zahlen gibt es, und welche Zahlen sind das?

58. Das 10000fache einer Zahl ist gleich dem Quadrat dieser Zahl. Welche Zahlen haben diese Eigenschaft?

59. Welche Zahl muß man zu jedem Faktor des Produktes $47 \cdot 53$ addieren, damit das Produkt gleich 1840 ist?

60. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks sei 1 m lang. Wie lang ist jede Seite des Dreiecks?

61. Wie lang muß die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck sein, dessen Umfangslänge 1 m sein soll?

62. Die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sollen sich wie $3:4$ verhalten. Wie lang sind sie zu zeichnen, wenn die Hypotenuse 5,5 cm lang ist?

63. In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich die Länge der Basis zur Länge der Höhe wie $5:6$. Welchen Umfang hat dieses Dreieck, wenn die Länge eines Schenkels 1040 mm beträgt?

64. Eine ovale Radrennbahn hat eine Länge von 360 m. Bei einem Verfolgungsrennen ist der Verfolger um $2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ schneller als der Verfolgte, so daß er für eine Runde 2 s weniger benötigt. Nach wieviel Runden holt der Verfolger den Verfolgten ein, wenn sie mit 180 m Abstand gestartet sind?

65. Um welche Strecke muß man die Seite a eines Quadrates verlängern, um ein Quadrat mit **a)** doppeltem, **b)** dreifachem, **c)** vierfachem Flächeninhalt zu erhalten?

66. Um welche Strecke muß man die Seite a eines gleichseitigen Dreiecks verlängern, um ein gleichseitiges Dreieck mit **a)** doppeltem, **b)** dreifachem, **c)** neunfachem Flächeninhalt zu erhalten?

67. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen eine Seite um 2,5 cm kürzer ist als die andere und dessen Diagonale 12,5 cm lang ist?

68. Der Umfang eines Rechtecks ist 37 m lang, der Flächeninhalt dieses Rechtecks beträgt 85 m². Wie lang sind die Seiten?

69. Bestimmen Sie den Radius desjenigen Kreises, dessen 16 cm lange Sehnen vom Kreismittelpunkt einen Abstand von 3,5 cm haben!

70. Die Differenz der Maßzahlen der Flächeninhalte zweier Quadrate beträgt 11, die Differenz der Maßzahlen der Seitenlängen dieser Quadrate beträgt 1. Wie lang sind die Seiten der beiden Quadrate?

71. Die Summe der Maßzahlen der Flächeninhalte zweier Kreise beträgt 15,70, die Differenz der Maßzahlen der Radien dieser Kreise beträgt 1. Wie lang sind die Radien der beiden Kreise?

72. Zwei Widerstände sollen hintereinandergeschaltet einen Gesamtwiderstand von 50 Ω (8 Ω) und parallelgeschaltet einen Gesamtwiderstand von 12 Ω (1,875 Ω) ergeben. Wie groß sind die Einzelwiderstände jeweils zu wählen?

73. In einer Montagehalle bewegt sich der Laufkran mit einer Geschwindigkeit $v_{\mathrm{Kr}} = 0{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Seine Laufkatze bewegt sich rechtwinklig dazu mit einer Geschwindigkeit $v_{\mathrm{K}} = 0{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Die Last wird dabei gehoben mit der Geschwindigkeit $v_{\mathrm{L}} = 0{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Wie groß ist die relative Geschwindigkeit **a)** der Laufkatze in bezug auf die Montagehalle, **b)** der Last in bezug auf den Laufkran, **c)** der Last in bezug auf die Montagehalle?

74. Zwei rechtwinklig in einem Punkt angreifende Kräfte verhalten sich wie 1 : 2. Wie groß sind die Kräfte, wenn die resultierende Kraft 1 Mp beträgt?

75. Ein Flugzeug hat in bezug auf die umgebende Luft eine Geschwindigkeit von $320\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ($450\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$). Es wird durch einen rechtwinklig angreifenden Wind um $15\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ($25\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$) seitlich abgetrieben.
Um welchen Betrag ändert sich dadurch die Geschwindigkeit des Flugzeuges in bezug auf den Erdboden?

76. Der Brunnen auf der ehemaligen Festung Königstein ist 320,7 m tief. Welche Zeit vergeht vom Loslassen eines frei fallenden Steines am Brunnenrand bis zu seinem Aufschlag?
Hinweis: Der Luftwiderstand soll unberücksichtigt bleiben; Erdbeschleunigung $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

77. Welche Fallgeschwindigkeit v muß ein Hammer mit dem Gewicht $G = 40$ kp besitzen, damit seine kinetische Energie W_{kin} 200 kpm beträgt?
Hinweis: $W_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2} v^2$; $m = \frac{G}{g}$, wobei m die Masse des Hammers und g die Erdbeschleunigung ($\approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$) ist.

78. Die Tragfähigkeit F_G des Eises auf Gewässern mit Süßwasser kann für Kettenfahrzeuge nach der Formel $F_G = 10^5 \cdot h^2$ näherungsweise berechnet werden.
Die Stärke h der Eisdecke wird in m und das Gewicht F_G des Fahrzeuges in kp angegeben.
a) Wie stark muß die Eisdecke eines Gewässers mindestens sein, damit sie einen 50 000 kp schweren Panzer trägt?
b) Die Eisdecke eines Gewässers ist 0,35 m stark. Wie schwer darf höchstens ein Kettenfahrzeug sein, damit es dieses Eis befahren kann?

79. Ein 1,60 m langer Vierkantstab hat ein Gewicht von 100 kp. Die Seiten des rechteckigen Querschnitts unterscheiden sich um 7,8 cm. Wie sind seine Abmessungen ($\varrho_{\mathrm{Stahl}} = 7{,}8\ \mathrm{kg/dm^3}$)?

80. Der Preis für eine gewisse Anzahl Türschlösser beträgt 30 M. Würde ein Schloß 0,25 M weniger kosten, erhielte man für denselben Gesamtpreis 4 Schlösser mehr. Wieviel Schlösser wurden gekauft?

81. Sind die in Klammer angegebenen Zahlen Lösungen der jeweiligen Gleichung?

a) $x^2 + 8x - 48 = 0 \quad (4;12)$

b) $x^2 - 5{,}2x + 1 = 0 \quad \left(-\frac{1}{5}; -5\right)$

c) $x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{27} = 0 \quad \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$

d) $x^2 + 5x - 5 = 0 \quad (5; 1)$

e) $8x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (0{,}5; -0{,}25)$

f) $x^2 + 2x = 0 \quad (2; -2)$

g) $x^2 + 9.9x + 1 = 0 \quad (0{,}1; -10)$

h) $6x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$

Wie lautet jeweils die Normalform der quadratischen Gleichung mit den folgenden Lösungen?

82. a) $x_1 = -5; \quad x_2 = 3$
b) $x_1 = 3; \quad x_2 = -5$
c) $x_1 = 5; \quad x_2 = -3$
d) $x_1 = -\frac{3}{7}; \quad x_2 = -\frac{4}{7}$
e) $x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = -\frac{1}{4}$
f) $x_1 = a; \quad x_2 = -a$
g) $r_1 = 21; \quad r_2 = 1$

83. a) $x_1 = 7; \quad x_2 = -4$
b) $x_1 = -4; \quad x_2 = -7$
c) $x_1 = 22; \quad x_2 = 8$
d) $x_1 = \frac{3}{8}; \quad x_2 = -\frac{5}{8}$
e) $x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$
f) $a_1 = m; \quad a_2 = -m$
g) $t_1 = 0{,}30; \quad t_2 = -0{,}05$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen grafisch und führen Sie die Proben rechnerisch durch!

84. a) $x^2 + x - 6 = 0$
b) $x^2 - 2x + 1 = 0$
c) $x^2 - 3x + 4 = 0$
d) $x^2 - 4x - 5 = 0$
e) $x^2 + 2x + 5 = 0$
f) $x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$

85. a) $x^2 - x - 3 = 0$
b) $x^2 + 2x - 5 = 0$
c) $x^2 + 2x + 4 = 0$
d) $x^2 - 3x - 4 = 0$
e) $x^2 - 4x + 3 = 0$
f) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen!

86. a) $y = x^2 + 7x + 12$
b) $y = \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{64}x + 1$
c) $y = a^2x^2 + 3ax + 2 \quad (a \neq 0)$
d) $y = 20x^2 - rx - r^2$
e) $y = x^2 - 7$
f) $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$
g) $y = (x - 0{,}4)^2$
h) $y = -x^2 + 5x - \frac{23}{4}$
i) $y = x^2 + 2x + \frac{1}{5}$
k) $y = x^2 - 0{,}5x + 1{,}2$
l) $y = -x^2 + 7x - \frac{4}{5}$
m) $y = -x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

87. a) $y = x^2 + 9x + 20$
b) $y = 6x^2 - 44x + 70$
c) $y = x^2 - 5$
d) $y = (x + 1{,}8)^2$
e) $y = x + 4x + \frac{1}{2}$
f) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

88. a) $y = ax^2 - 2bx - c \quad (a \neq 0)$
b) $y = 20x^2 + x - 12$
c) $y = \left(x - \frac{10}{3}\right)^2$
d) $y = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$
e) $y = x^2 - 0{,}3x + 1{,}8$
f) $y = -x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$

5. Potenzfunktionen; Rechnen mit Potenzen

Schreiben Sie folgende Produkte als Potenzen!

1. **a)** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
b) $3{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3{,}5$
c) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$
d) $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$
e) $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y)$
f) $(m - n)(m - n)(m - n)$

2. **a)** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
b) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$
c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
d) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$
e) $k \cdot m \cdot k \cdot m \cdot m \cdot k$
f) $(r \cdot h) \cdot (r \cdot h)$

Schreiben Sie folgende Potenzen als Produkte!

3. **a)** 3^5 **b)** $6{,}5^2$ **c)** $\left(-\frac{3}{8}\right)^4$ **d)** 6^2 **e)** $(m \cdot n)^4$ **f)** $(-k)^3$ **g)** $(a + b + c)^3$ **h)** $(x - y)^2$

4. **a)** 4^6 **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ **c)** $(-6)^2$ **d)** n^5 **e)** $(m + n)^3$ **f)** $(-a)^5$ **g)** $(a + 2c)^2$ **h)** $(p - q)^3$

Berechnen Sie!

5. **a)** $(-2)^3$ **b)** $(-25)^2$ **c)** $(0{,}2)^5$ **d)** -3^2 **e)** $(-a)^7$ **f)** $-(-2)^4$ **g)** $+(-1)^5$ **h)** $-\left(+\frac{1}{5}\right)^4$

6. **a)** $(-3)^4$ **b)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ **c)** -5^4 **d)** $(-k)^6$ **e)** $-(+25)^2$ **f)** $+(-6)^3$ **g)** $-(-1)^{15}$ **h)** $-(-13)^2$

7. Stellen Sie das Volumen von Würfeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen grafisch dar! Tragen Sie dazu auf der Abszissenachse die Seitenlängen und auf der Ordinatenachse die Volumina ab!
Bestimmen Sie zu fünf selbstgewählten Seitenlängen die Volumina und zu fünf selbstgewählten Volumina die Seitenlängen!

8. Zeichnen Sie die Bilder folgender Funktionen! Wählen Sie jeweils als Definitionsbereich alle reellen Zahlen zwischen $a = -2$ und $b = +2$ einschließlich $a = -2$ und $b = +2$!

a) $y = x^2$ **b)** $y = x^3$ **c)** $y = x^4$ **d)** $y = x^5$
e) Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften dieser Funktionen!

Untersuchen Sie mit Hilfe der Bedingungen $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$, ob die folgenden Funktionen gerade oder ungerade sind!

9. **a)** $y = x^9$ **b)** $y = x^{20}$ **c)** $y = -x^3$ **d)** $y = x^2 + 5$

10. **a)** $y = x$ **b)** $y = \frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ **c)** $y = -x^4$ **d)** $y = x^2 - 3$

---

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen gerade oder ungerade sind!

a) $y = |x|$ **b)** $y = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ **c)** $y = x - 6$
d) $y = 3x^3$ **e)** $y = x^3 + 1$ **f)** $y = 2$

Stellen Sie für die folgenden Funktionen durch Symmetrieuntersuchungen an ihren Bildern fest, ob sie gerade oder ungerade sind!

11. **a)** $y = x^4$ **b)** $y = (-x)^3$

c)

x	-3	-1	0	1	3
y	9	1	0	1	9

12. **a)** $y = x^5$ **b)** $y = -x^2$

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Welches Verhalten zeigen die Funktionen mit folgenden Gleichungen in den angegebenen Intervallen?

13. **a)** $y = x^2 \quad (-\infty < x < +\infty)$
b) $y = -x^3 \quad (-\infty < x < +\infty)$
c) $y = x^3 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$
d) $y = x^4 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

14. **a)** $y = -x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$
b) $y = x^3 \quad (0 < x < 1)$
c) $y = x^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$
d) $y = x^5 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

Geben Sie auch zu jeder Funktion den Wertevorrat an!

Zeichnen Sie die Bilder der folgenden Funktionen mit dem Definitionsbereich $-2 \leqq x \leqq +2$ jeweils in dasselbe Koordinatensystem!

15. **a)** $y = x^2;\quad y = x^2 + 2;\quad y = x^2 - 2{,}5$
b) $y = x^3;\quad y = x^3 - 2;\quad y = x^3 + 3$
c) $y = x^4;\quad y = x^4 + 1{,}5;\quad y = x^4 - 1$

16. Verschieben Sie die Bilder der Funktionen **a)** $y = x$, **b)** $y = x^2$, **c)** $y = x^3$ jeweils um **α)** 1, **β)** 2, **γ)** 4 Einheiten in der positiven Richtung der y-Achse! Führen Sie die Verschiebungen dann um **δ)** 1, **ε)** 3, **ρ)** $\frac{3}{4}$ Einheiten in der negativen Richtung der y-Achse aus!

Geben Sie für alle so entstandenen Funktionen die Gleichungen an!

17. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden 6 Funktionen in dasselbe Koordinatensystem! (Definitionsbereich: $-2 \leqq x \leqq +2$)

$$y = 2x^3;\quad y = x^3;\quad y = -\frac{1}{2}x^3;$$
$$y = -x^3;\quad y = \frac{1}{3}x^3;\quad y = -\frac{3}{2}x^3$$

Spiegeln Sie die Bilder der folgenden Funktionen an der x-Achse und an der y-Achse! Geben Sie die Gleichungen der so entstandenen Funktionen an!

18. **a)** $y = x^3$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **c)** $y = -\frac{1}{2}x^4$

19. **a)** $y = x^2$ **b)** $y = 2x^3$ **c)** $y = -\frac{2}{3}x^2$

---

2. Spiegeln Sie die Bilder folgender Funktionen!

a) $y = 2x^2 + 2 \; (-\infty < x < +\infty)$ an der x-Achse,
b) $y = 2x^2 - 2 \; (-\infty < x < +\infty)$ an der x-Achse,
c) $y = x^3 + 1 \; (0 \leqq x < +\infty)$ an der x-Achse,
d) $y = x^3 - 1 \; (0 \leqq x < +\infty)$ an der x-Achse,
e) $y = x^2 \; (0 \leqq x < +\infty)$ an der Geraden $y = x$!

Stellen Sie die Gleichungen der zu den Spiegelbildern gehörenden Funktionen auf! Bestimmen Sie zu diesen Funktionen den Definitionsbereich und den Wertevorrat!

Berechnen bzw. vereinfachen Sie soweit wie möglich die folgenden Terme!

Bemerkung zu den Aufgaben 20 bis 65:

Alle Basen sind rationale Zahlen, alle Exponenten sind natürliche Zahlen $\geqq 2$. Jeder auftretende Divisor ist von Null verschieden.

20. **a)** $a^3 + 4a^3 - 2a^2 + 3a^3 + 4a^2$

b) $7{,}2x^2 - 1{,}8y^2 + 2{,}6x^2 - 3{,}1y^2 + 4{,}3y^2 - 0{,}6x^2$

21. **a)** $1{,}2a^3 - 4{,}9a^3 + 1{,}5a^3 + 2{,}6a^3$

b) $\frac{1}{6}m^5 - \frac{2}{5}m^5 + \frac{2}{9}m^5 - \frac{7}{12}m^5 + \frac{13}{24}m^5 - \frac{17}{36}m^5 + \frac{2}{3}m^5$

c) $3{,}5r^k - 2\frac{1}{4}r^k + 1{,}5r^k + 3\frac{3}{4}r^k - 0{,}75r^k$

22. **a)** $5^2 + 6 \cdot 5^2 - 10 \quad 5^2$

b) $2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot (-3)^2$

c) $(-3)^4 - (-4)^3$

d) $3^4 - 5 \cdot 3^4 + 7 \cdot 3^4$

e) $2 \cdot (-4)^4 - 5(-3)^2 - 2 \cdot 4^2$

f) $(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - 1$

23. **a)** $3^2 \cdot 3^3$

b) $(-4)^2 \cdot (-4)^4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$

d) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^2$

e) 7^{3+2}

24. **a)** $7^5 : 7^3$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^6 : \left(\frac{1}{5}\right)^3$

c) $13^6 \cdot \frac{1}{13^4}$

d) $\frac{(-2)(-2)(-2)(-2)}{(-2)^2}$

e) $\frac{5^7}{5^3}$

25. **a)** $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 6^2$

b) $(-5)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$

c) $(2 \cdot 4)^3$

d) $\left(4 \cdot \frac{1}{8}\right)^2$

e) $(-2)^4 \cdot \frac{1}{4^4}$

f) $8^5 : 4^5$

g) $(5^2)^4$

h) $\left(\frac{1}{6^2}\right)^3$

26. **a)** $12^3 : 4^3$

b) $5^2 : \frac{1}{10^2}$

c) $\frac{1}{6^2} : \frac{1}{12^2}$

d) $\frac{49^4}{7^4}$

e) $\left(51 \cdot \frac{1}{17}\right)^4$

f) $(-1)^5 \cdot 2^5$

g) $(-5^2)^2$

h) $(3^3)^3$

i) $2^{3 \cdot 4}$

27. **a)** x^3x^5

b) a^2a^4

c) $\frac{3}{5}b^3 \cdot \frac{4}{7}b^2$

d) $(-x)^4x^3$

e) $(-x)^3x^4$

f) $\frac{1}{2}a^2b^4c^3 \cdot \frac{3}{4}a^3b^4c^2$

g) $(x-1)^3 \cdot (x-1)^2$

h) $a^{2m}a^m$

i) $c^{2m-n}c^{2n-m}$

28. **a)** m^3m^5

b) y^6y^4

c) $\left(-\frac{6}{7}v^3\right)\left(-\frac{1}{8}v^6\right)$

d) $(-x^3)x^4$

e) $(-x^3)(-x^4)$

f) $7{,}24a^3b^2 \cdot 82{,}3a^2b^2$

g) $(a-b)^4c^5(a-b)^2c^7$

h) x^nx^{3n}

i) $r^{3k+1}r^{3-2k}$

29. **a)** $\frac{1}{2}a^2b^4c^3 \cdot \frac{3}{4}a^3b^4c^2$

b) $0{,}2x^4y^2z^3 \cdot 7{,}5x^3y^2z^4$

c) $2\frac{1}{2}r^3 \cdot 3\frac{1}{3}r^2s^4 \cdot \frac{1}{4}s^5$

30. **a)** $2{,}1x^2 \cdot 3x^2 \cdot 3{,}7x^3$ **b)** $4{,}3a^2 \cdot 0{,}6a^3 \cdot \frac{1}{2}a^2$ **c)** $\frac{1}{2}p^2 \cdot 3p^4 \cdot \frac{4}{3}p^5$

31. **a)** $\left(0{,}3a^4b^3 + 5\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot 4\frac{1}{11}ab^2$ **b)** $(2{,}9x^4y^3 - 1{,}5x^3y^2 + 3{,}0x^3y) \cdot \left(-2\frac{1}{3}x^3y^3\right)$

32. **a)** $(2a^3 + 3a^5)(a^4 + 2a^6)$ **b)** $\left(\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{7}a^5\right)\left(\frac{5}{3}a^2 + \frac{3}{4}a^4\right)$

c) $(3a^4x^2 + 2a^3x^3)(4a^2x^4 - 6a^2x^5)$ **d)** $(a^{m-1}b^{m+1} - a^{m+1}b^{n-1})(ab^n + a^3b^{n-2})$

33. **a)** $2^6 : 2^4$ **b)** $(-3)^5 : 3^2$ **c)** $(-5^8) : (-5)^3$

34. **a)** $a^4 : a^2$

b) $5^{18} : 5^{14}$

c) $(1{,}2x^4) : (3{,}6x^2)$

d) $(-x^5) : x^2$

e) $(-x)^5 : x^2$

f) $x^m : x^2$; $(m \geqq 4)$

g) $10^{5a-2} : 10^a$ $(a \geqq 1)$

h) $x^{2p+5q} : x^{q-p-2}$

35. **a)** $x^6 : x^3$

b) $b^{27} : b^{13}$

c) $(1{,}8m^5) : (5{,}4m^2)$

d) $(-x)^7 : x^3$

e) $x^5 : (-x^2)$

f) $a^n : a^3$; $(n \geqq 5)$

g) $5^{7k+1} : 5^{2k}$

h) $a^{2r-s+1} : a^{r-s}$ $(r \geqq 1)$

36. **a)** $169m^8n^7o^6 : 13m^5n^2o^4$ **b)** $4\frac{1}{3}p^{11}q^9r^5 : 3\frac{1}{4}p^7q^7r^2$

37. **a)** $\frac{17^3}{34^3} \cdot \frac{23^3}{69^3}$ **b)** $\left(\frac{a^6}{2b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^5}{a^3}\right)^3$

c) $\frac{(2p^4q^7)^5}{(3p^2q^2)^5}$

38. **a)** $\frac{15^2}{22^2} \cdot \frac{11^2}{5^2}$ **b)** $\left(\frac{4b^4}{a}\right)^4 \left(\frac{a}{8b}\right)^4$

c) $\frac{(30^4p^5)^3}{(60^2p^2)^3}$

39. **a)** $(m^2)^4$ **b)** $(0{,}3 \cdot m^3 \cdot n^2)^3$

c) $(x^{n-1} \cdot y^{n-2})^3$ $[n \geqq 4]$ **d)** $\left(\frac{5x^3}{6y^2}\right)^3$

40. **a)** $(a^3)^4$ **b)** $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^2$

c) $(4m^pn^q)^3$ **d)** $\left(\frac{4a^2}{7b^3}\right)^2$

41. **a)** $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$ **b)** $\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$ **c)** $(0{,}3^2)^2$ **d)** $(0{,}75^2)^3$

42. **a)** $\left(\frac{1}{4}a^2\right)^3$ **b)** $(0{,}3m^3n^2)^3$ **c)** $(-9p^2q^4r^2)^2$ **d)** $\left(\frac{1}{3}x^m\right)^4$

Schreiben Sie in Form einer einzigen Potenz!

43. **a)** $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ **b)** $a^4 \cdot b^4 \cdot (c + d)^4$

c) $m^2 \cdot \frac{k^2}{l^2}$ **d)** $\frac{(a - b)^5}{(a + b)^5} \cdot (a - 1)^5$

44. **a)** $a^3b^3c^3$ **b)** $\frac{m^5}{n^5}$

c) $\frac{(r - s)^4}{(k + o)^4}$ **d)** $(x - y)^3 (x + y)^3$

45. Berechnen Sie!

a) 20^1 **b)** 5^0 **c)** 1^1 **d)** 100^0 **e)** $(-6)^0$

f) $(-b)^0$; $(b \neq 0)$ **g)** $\frac{(-3)^2}{(-3)^3}$ **h)** $2^3 \cdot 5^0$ **i)** $(-5)^3 \cdot (-5)^1$

46. Vereinfachen Sie folgende Quotienten!

a) $x^3 : x^3$ **b)** $a^{m+1} : a^m$; $(m \geqq 0)$ **c)** $3x^{m+2} : 3x^{m+1}$; $(m \geqq -1)$

d) $(0{,}21x^3y^6) : (7x^2y^2)$ **e)** $\dfrac{27a^m}{20b^3} : \dfrac{9a^4}{12b^4}$

47. Der spezifische Widerstand in einem Gleichstromkreis kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$R = \varrho \dfrac{l}{A}$ (ϱ spezifischer Widerstand in $\dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$, l Länge des Leiters in m, A Querschnitt des Leiters in mm^2).

Zeichnen Sie

a) das Querschnitt-Widerstands-Diagramm für

$\varrho_{\mathrm{Fe}} = 0{,}10\ \dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$; $l_1 = 0{,}2$ m ($l_2 = 1$ m; $l_3 = 10$ m),

b) Das Länge-Widerstands-Diagramm für

$\varrho_{\mathrm{Cu}} = 0{,}1055\ \dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$; $A_1 = 0{,}5\ \mathrm{mm}^2$ ($A_2 = 2\ \mathrm{mm}^2$; $A_3 = 5\ \mathrm{mm}^2$)

Wählen Sie dazu geeignete Koordinateneinheiten! Benutzen Sie den Rechenstab! Liegt direkte oder indirekte Proportionalität vor?

48. Entscheiden Sie mit Hilfe der Kriterien $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$, ob die folgenden Funktionen gerade oder ungerade sind!

a) $y = x^{-3}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x^2 \cdot x^3}$ **c)** $y = x^{-4}$ **d)** $y = x^{-10}$

49. Spiegeln Sie die Bilder der Funktionen $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$ und $y = x^{-3}$ (jeweils $-5 \leqq x < 0$, $0 < x \leqq +5$) an der y-Achse und an der x-Achse! Stellen Sie die Gleichungen der zu den Spiegelbildern gehörenden Funktionen auf!

50. a) Zeichnen Sie die Bilder der Potenzfunktionen

$y = x^n$; $n \in \{-4; -3; -2; -1; 2; 3; 4\}$

in dasselbe Koordinatensystem!

b) Zeichnen Sie zusätzlich die Bilder der Funktionen $y = x^1$ und $y = x^0$ in dieses Koordinatensystem! Beachten Sie dabei den Definitionsbereich der Funktion $y = x^0$!

c) Untersuchen Sie die Bilder dieser Funktionen
auf gemeinsame Punkte,
auf die Symmetrieverhältnisse,
auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Definitionsbereich und im Wertevorrat!

Formen Sie die folgenden Terme so um, daß keine Potenzen mit negativen Exponenten auftreten!

51. a) 5^{-6} **b)** x^{-4}

c) 15^{-c} $(c \in N)$ **d)** $\dfrac{1}{6^{-2}}$

e) $\dfrac{1}{x^{-k}}$ (k natürlich) **f)** $\dfrac{1}{(-10)^{-3}}$

g) $a^4 \cdot b^{-3}$ **h)** $\dfrac{m^{-3}}{n^{-6}}$

i) $\dfrac{1}{x^{-7} \cdot y^a}$ (a natürlich)

52. a) 4^{-3} **b)** $(-b)^{-2}$

c) $\dfrac{a^3}{a^{-3}}$ **d)** a^{-5}

e) $(6^{-1})^3$ **f)** $\dfrac{1}{2^{-3}}$

g) $x^{-4} \cdot y^{-4}$ **h)** 1^{-3}

i) $\dfrac{1}{(-3)^{-4}}$

Berechnen bzw. vereinfachen Sie!

53. **a)** $5^{-3} \cdot 125$ **b)** $\frac{5}{3}x^0 \cdot \frac{9}{5}z^{-2}$ **c)** $\frac{7}{8}x^2 \cdot 0{,}4x^{-2}$ **d)** $400a^{2n} \cdot 0{,}08a^{-5n}$

54. **a)** $108 \cdot 3^{-4}$ **b)** $r^{-3} \cdot s^3$ **c)** $k^{-x} \cdot k^x$ **d)** $4b^3c^{-5} \cdot 3b^{-4}c^5$

55. **a)** $a^{k+1} \cdot b^{k-1} \cdot c^{-k} \cdot a^{-k} \cdot b^{-k} \cdot c^{k-1}$, **b)** $(2x + 3x^{-1}) \cdot (3x^{-2} - 2x^{-1})$

56. **a)** $(-5)^3 : (-5)^6$
b) $a^5 : a^9$
c) $\left(\frac{1}{2}p^{12}\right) : \left(\frac{3}{2}p^{14}\right)$
d) $(q^{2n-1} \cdot r^{3n}) : (q^{2n+1} \cdot r^{3n})$
e) $\dfrac{2^a \cdot 2^5 \cdot 2^{10-a}}{2^{2a-3}}$

57. **a)** $(-4^{10}) : (-4)^{12}$
b) $c^6 : c^{11}$
c) $(1{,}4q^{12}) : (3{,}5q^{20})$
d) $a^{m-1} \cdot b^{-n}) : (a^m \cdot b^{2n} \cdot c^1)$
e) $\dfrac{x^{-2a-4}}{x^{-2a+4}}$

58. **a)** $(3^2)^{-2}$ **b)** $\left(\frac{x^2}{10}\right)^{-1}$ **c)** $(a^{-5})^2$ **d)** $(-x^{-7})^{-2}$ **e)** $(r^{-4}s^3t)^{-3}$ **f)** $\dfrac{(a^2 - b^2)^{-2}}{(a + b)^{-2}}$

59. **a)** $(5^{+2})^{-3}$ **b)** $(3^{-2})^2$ **c)** $\left(\frac{1}{6}x^3\right)^{-1}$ **d)** $\left(\frac{4}{5}a^{-3}\right)^{-2}$ **e)** $(n^{-4} \cdot v^{-2})^3$ **f)** $\dfrac{(a - b)^{-2}}{(a^2 - b^2)^{-1}}$

Folgende Terme sind so umzuformen, daß keine Variablen im Nenner mehr vorkommen!

60. **a)** $\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{4}{9}y^{-2}}$ **b)** $\dfrac{0{,}6x^2}{1{,}8x^{-5}}$ **c)** $\dfrac{4\frac{1}{3}a^k}{\frac{25}{26}b^{-k}}$ **d)** $\dfrac{0{,}5x^0}{\frac{3}{4}x^{-6}}$

61. **a)** $\dfrac{m^{-1}}{m^{-2}}$ **b)** $\dfrac{m^{-2}}{m^{-5}}$ **c)** $\dfrac{0{,}6m^{-x}}{4{,}8m^{-3x}}$ **d)** $\dfrac{0{,}3m^{-3k}}{\frac{1}{3}m^{-4k}}$ **e)** $\dfrac{x^{-a-2}}{x^{-a-1}}$ **f)** $\dfrac{5\frac{1}{3}x^{-2a-4}}{0{,}4x^{-2a+4}}$

g) $\dfrac{x^{a+1}y^{-a-1}z^{-a}}{x^{-a+1}y^az}$ **h)** $\dfrac{x^{-2n+3}y^{-n+1}z^{-m-1}}{x^{-n+2}y^{-2n+1}z^{-m+n}}$

62. **a)** $\dfrac{m^{-5}o^{-2}}{n^{-2}o^{-3}} \cdot \dfrac{m^4n^{-3}p^{-2}}{o^{-3}}$ **b)** $\dfrac{u^{-6}w^2x^{-5}}{v^{-2}} \cdot \dfrac{w^{-5}x^6}{u^{-5}v^{-1}}$

63. **a)** $\dfrac{a^{-6}c^{-5}}{b^2d^{-4}} : \dfrac{a^{-8}b^{-2}}{c^{-7}d^5}$ **b)** $\dfrac{x^4y^{-7}}{x^{-2}z} : \dfrac{x^6y^{-1}}{y^7z^{-1}}$ **c)** $\dfrac{a^{r-2}b^{2s+3}}{a^{-r-1}c^{-2s+1}} : \dfrac{c^{s-1}}{a^{-2r+1}b^{s-3}c^{-s}}$

64. **a)** $\left(\frac{x^6}{y^{-1}}\right)^{-1}$ **b)** $\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\frac{a^{-4}}{b^{-3}}\right)^{-1}$ **d)** $\left(\frac{a^2b^{-2}}{c^3}\right)^{-2}$ **e)** $\left(\frac{a^{-1}b^2}{c^{-1}d^{-2}}\right)^3$ **f)** $\left(\frac{a^{-4}b}{cd^{-2}}\right)^{-1}$

65. **a)** $\left(\frac{a^{-6}d^{-4}}{b^{-3}c^4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^4b^{-2}}{c^{-2}d^{-3}}\right)^{-3}$ **b)** $\left(\frac{q^{-2}s^3}{r^{-4}t^{-1}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{r^{-2}t^{-4}}{q^{-6}s^{10}}\right)^{-1}$ **c)** $\left(\frac{m^{-1}o^4}{n^2p^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{n^{-4}o^3}{mp^{-6}}\right)^{-3}$

66. Schreiben Sie folgende Zahlen als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen!

a) 30 024 011,4705 **b)** 0,000 010 101 010 **c)** 9,090 909 **d)** 12 345 678 900
e) 9876,543 210 **f)** 204 060,800 **g)** 103,050 709 **h)** 90 000,000 09

67. **Schreiben Sie folgende Summen als Dezimalzahlen!**

a) $10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 10^0 + 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-3}$

b) $7 \cdot 10^9 + 7 \cdot 10^{-9}$ c) $10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1$

d) $10^{-5} + 10^{-6} + 10^{-7}$ e) $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2$

f) $10^5 + 10^0 + 10^{-5}$ g) $5 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6}$

h) $9 \cdot 10^8 + 8 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-6} + 10^{-8}$

Schreiben Sie folgende Zahlen in der Form $a_0 \cdot 10^q$ mit a rational, $1 \leqq a_0 \leqq 10$ und q ganzzahlig!

68. a) 2421 b) 35 040 000 c) 0,238 d) 0,000 048 e) 43 800 f) 400

69. a) 23,41 b) 0,0205 c) 0,001 d) 0,000 05 e) 34 165 f) 4 000 300

Schreiben Sie ohne abgetrennte Zehnerpotenzen!

70. a) $7 \cdot 10^5$ b) $5 \cdot 10^{-3}$ c) $2{,}73 \cdot 10^4$ d) $9{,}834 \cdot 10^7$ e) $6 \cdot 10^4$ f) $8{,}42 \cdot 10^1$

71. a) $4{,}6 \cdot 10^{-2}$ b) $3{,}43 \cdot 10^{-4}$ c) $6{,}42 \cdot 10^7$ d) $8{,}3 \cdot 10^{-5}$ e) $4{,}2 \cdot 10^{-2}$ f) $3{,}2 \cdot 10^6$

72. Vereinfachen Sie die Schreibweise folgender Zahlen durch Benutzen der Schreibweise mit Zehnerpotenzen!

a) In 22,4 l Sauerstoff unter Normalbedingungen befinden sich 602 400 000 000 000 000 000 000 Moleküle.
b) Ein Molekül Wasser (H_2O) hat eine Masse von 0,000 000 000 000 000 000 000 1602 g.
c) Die elektrische Elementarladung beträgt 0,000 000 000 000 000 000 1602 C.
d) Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 149 500 000 000 m.

Drücken Sie die folgenden Maßangaben mit Hilfe der gesetzlichen Vorsätze aus!

73. a) 10^6 t b) 10^3 t c) 10^{-1} t d) 10^3 A

74. a) 10^{-3} A b) 10^3 m c) 10^{-3} p d) 10^{-3} l

Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

75. a) $7350 \cdot 172\,000$ b) $0{,}000\,41 \cdot 230$ c) $\dfrac{7270}{192}$ d) $\dfrac{0{,}00038}{0{,}0145}$ e) $\dfrac{0{,}873}{0{,}000\,53}$

76. a) $0{,}000\,643 \cdot 0{,}72$ b) $\dfrac{7310}{52}$ c) $\dfrac{0{,}093}{0{,}38}$ d) $\dfrac{691}{0{,}0485}$ e) $57{,}2 \cdot 0{,}000\,081$

77. Bestimmen Sie näherungsweise die Länge der Diagonale eines Rechtecks, dessen Seiten $a = 2$ cm und $b = 3$ cm lang sind!

78. Bestimmen Sie näherungsweise die Länge der Raumdiagonale eines Würfels, dessen Kanten $a = 20$ mm lang sind!

79. Wie lang ist die Kante eines Würfels, dessen Volumen 20 cm³ beträgt?

Radizieren Sie!

80. a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $\sqrt[4]{810\,000}$

81. a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt[4]{256}$ c) $\sqrt[3]{216\,000}$

82. a) $\sqrt{(-7)^2}$ b) $\sqrt[5]{3{,}2^5}$ c) $\sqrt[6]{a^6}$ (a ganzz.)

83. a) $\sqrt{(-5)^2}$ b) $-\sqrt[7]{17^7}$ c) $\sqrt[8]{(-16)^2}$

Ermitteln Sie unter Verwendung der Tafel oder des Rechenstabes rationale Näherungswerte für folgende Wurzeln! Überschlagen Sie das Ergebnis!

84. **a)** $\sqrt{285}$ **b)** $\sqrt{4372}$ **c)** $\sqrt{65\,000}$ **d)** $\sqrt{0{,}39}$ **e)** $\sqrt{0{,}05}$ **f)** $\sqrt[3]{4}$ **g)** $\sqrt[3]{23{,}8}$ **h)** $\sqrt[3]{856}$

85. **a)** $\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{63}$ **c)** $\sqrt{3850}$ **d)** $\sqrt{0{,}90}$ **e)** $\sqrt{0{,}008}$ **f)** $\sqrt[3]{6}$ **g)** $\sqrt[3]{7000}$ **h)** $\sqrt[3]{0{,}053}$

Schreiben Sie die folgenden Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten!

86. **a)** $\sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt[5]{3}$ **c)** $\sqrt[5]{6}$ **d)** $\sqrt[2]{6}$ **e)** $\sqrt[2]{\frac{5}{3}}$ **f)** $\sqrt[4]{\left(+\frac{1}{2}\right)}$

87. **a)** $\sqrt[7]{3}$ **b)** $\sqrt[9]{3}$ **c)** $\sqrt[7]{9}$ **d)** $\sqrt[3]{3}$ **e)** $\sqrt[5]{\frac{6}{7}}$ **f)** $\sqrt[4]{\left(-\frac{2}{3}\right)}$

Schreiben Sie folgende Potenzen als Wurzeln!

88. **a)** $3^{\frac{1}{7}}$ **b)** $6^{\frac{1}{3}}$ **c)** $5^{\frac{1}{11}}$ **d)** $a^{\frac{1}{8}}$ ($a \geqq 0$, reell)

89. **a)** $4^{\frac{1}{2}}$ **b)** $3^{\frac{1}{5}}$ **c)** $7^{\frac{1}{8}}$ **d)** $r^{\frac{1}{s}}$ ($r \geqq 0$, reell; $s \geqq 2$, natürlich)

90. Spiegeln Sie das Bild der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ an der x-Achse! Geben Sie die Gleichung, den Definitionsbereich und den Wertevorrat der durch das Spiegelbild dargestellten Funktion an!

91. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen $y = \sqrt[4]{x}$ und $y = -\sqrt[4]{x}$!

Hinweis: Benutzen Sie beim Entwerfen der Wertetafel die Tatsache, daß $a^4 = (a^2)^2$ also $\sqrt[4]{x} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{x}}$ (Tabelle oder Rechenstab also jeweils zweimal nacheinander anwenden!)

92. Verändern Sie die Wurzel auf den Wurzelexponenten n!

a) $\sqrt{5^2}$, $n = 6$ **b)** $\sqrt[3]{3^5}$, $n = 12$ **c)** $\sqrt[5]{6^2}$, $n = 10$

d) $\sqrt[4]{a^3}$, $n = 8$ ($a \geqq 0$, reell)

93. Verändern Sie die folgenden Wurzelpaare so, daß sie gleiche Wurzelexponenten besitzen!

a) $\sqrt{6^3}$ und $\sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt[4]{17^2}$ und $\sqrt[10]{2^5}$ **c)** $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[5]{a^2}$ ($a \geqq 0$, reell)

d) $\sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[q]{a^r}$ ($a, b \geqq 0$ und reell; $n, q, r \geqq 2$ und natürlich)

94. Bringen Sie folgende Wurzeln jeweils auf den kleinstmöglichen Wurzelexponenten!

a) $\sqrt[8]{3^4}$ **b)** $\sqrt[16]{a^{32}}$ (a reell) **c)** $\sqrt[33]{k^{11}}$ ($k \geqq 0$, reell) **d)** $\sqrt[18]{17^{30}}$

---

3. Zeichnen Sie die Bilder der Funktionen

a) $y = a \cdot x^{-1}$, $(-\infty < x < 0;\ 0 < x < \infty)$

b) $y = a \cdot x^{-2}$, $(-\infty < x < 0;\ 0 < x < \infty)$

c) $y = \frac{1}{x} + a$, $(-\infty < x < 0;\ 0 < x < \infty)$

[jeweils mit $a \in \{3; 0{,}5; -1; -2\}$]!

Geben Sie zu jeder Funktion den Wertevorrat an!

Bemerkung zu den Aufgaben **95** *bis* **101:**

Wenn im folgenden nichts anderes angegeben ist, sind die durch Variablen dargestellten Basen positive reelle Zahlen und die durch Variablen dargestellten Exponenten rationale Zahlen.

95. Formen Sie die folgenden Terme so um, daß sie nur positive Exponenten enthalten!

a) $6^{-\frac{1}{3}}$ **b)** $4^{-\frac{2}{5}}$ **c)** $a^{-\frac{1}{7}}$ **d)** $\left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{5}}$ **e)** $\dfrac{m^{-\frac{1}{3}}}{n^{-\frac{1}{4}}}$

Wenden Sie auf die folgenden Terme die entsprechenden Potenzgesetze an, und vereinfachen Sie weitgehend!

96. **a)** $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $n^{\frac{3}{2}} \cdot n^{\frac{4}{2}} \cdot n^{\frac{5}{2}}$

d) $a^{-\frac{4}{7}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{14}}$

97. **a)** $6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$

b) $k^{\frac{1}{5}} \cdot k^{\frac{3}{5}}$

c) $a^{\frac{1}{7}} \cdot a^{\frac{3}{14}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$

d) $x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{2n}}$ $(n \geqq 2$; natürlich)

98. **a)** $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot (-2)^{\frac{4}{7}}$

c) $b^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{2}}$ **d)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} : \left(\frac{4}{12}\right)^{\frac{2}{5}}$

99. **a)** $6^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}$ **b)** $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{8}} \cdot \left(\frac{24}{9}\right)^{\frac{3}{8}}$

c) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ **d)** $5^{-\frac{1}{4}} : 10^{-\frac{1}{4}}$

100. **a)** $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{5}}$

c) $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{5}}$

101. **a)** $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$ **b)** $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{7}}$

c) $\left(3^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}$

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich! Die durch Variablen dargestellten Radikanden sollen dabei stets positive reelle Zahlen sein.

102. **a)** $5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

c) $7\sqrt[3]{9} + 4\sqrt[3]{9} - 6\sqrt[3]{9}$

103. **a)** $7\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 3\sqrt{3}$

c) $4\sqrt[3]{5} + 7\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{8}$

104. **a)** $8\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 17\sqrt{a}$

b) $4x\sqrt{b} - 5y\sqrt{b} + 6z\sqrt{b}$

105. **a)** $5\sqrt{b} - 3\sqrt{b} + 20\sqrt{b}$

b) $4\sqrt[3]{r} + 5\sqrt[3]{r} - 6\sqrt[6]{r^2}$

106. **a)** $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$ **b)** $\sqrt[3]{17} \cdot \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2} \cdot \sqrt[8]{u^2}$ **d)** $\sqrt[3]{a^4x^2} \cdot \sqrt[3]{a^2x^4}$

e) $\sqrt[2]{18} : \sqrt[2]{2}$ **f)** $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}}$

107. **a)** $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{6}$

c) $4\sqrt{x} \cdot 3\sqrt{y}$ **d)** $\sqrt[3]{b^5} \cdot \sqrt[3]{a^4b}$

e) $\sqrt{40} : \sqrt{10}$ **f)** $\sqrt{\frac{15}{24}} \cdot \sqrt{\frac{9}{25}}$

108. **a)** $\sqrt[4]{\frac{8}{27}} \cdot \sqrt[2]{\frac{8}{27}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[2]{ab^2}}$

109. **a)** $\sqrt{\frac{a^3}{b}} \cdot \sqrt{ab^2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{y}}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{u^3}}{\sqrt[5]{u^8}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{8}}$

e) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$ f) $a\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{a^4b}$

g) $5\sqrt{x^4y^6}\cdot 27\sqrt{x^7y^3}$

c) $\dfrac{\sqrt[9]{r^5}}{\sqrt[12]{r^5}}$ d) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3x^3}}{\sqrt[9]{a^5x^3}}$

e) $\sqrt[3]{189}:\sqrt[3]{7}$ f) $a\sqrt[3]{20a^2x^6}\cdot\sqrt[3]{6a^3x^2}$

g) $\sqrt{5ab}\cdot\sqrt{10ac^5}\cdot b^2\sqrt{2c}$

110. a) $\sqrt[4]{160\,000}$ b) $\sqrt[3]{0{,}000\,04}$

c) $\sqrt[3]{81x^3}$ d) $\sqrt{\dfrac{a^2x}{b^2y}}$

111. a) $\sqrt[3]{162}$ b) $\sqrt{\dfrac{1}{490\,000}}$

c) $\sqrt{225a^3b^2}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{16b^4c^2}{8dc^3}}$

112. a) $\sqrt[3]{1\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{x^4}{y^3}}$ c) $\sqrt{\dfrac{a}{b^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}$

d) $\sqrt[8]{\dfrac{x^3y^5}{z}}:\sqrt[5]{\dfrac{x^2z^2}{y^3}}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{24}}:\sqrt[8]{\dfrac{25}{48}}$ f) $\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y^2}}:\sqrt[8]{\dfrac{x^5}{y^4}}$

113. a) $2\sqrt{12}+5\sqrt{3}+10\sqrt{75}-5\sqrt{243}$ b) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{256}-\sqrt[3]{500}+\sqrt[3]{1372}-\sqrt[3]{108}$ d) $4\sqrt{15}+2\sqrt{240}-3\sqrt{135}+5\sqrt{60}$

e) $7\sqrt{54}-9\sqrt{726}+10\sqrt{864}-7\sqrt{600}+9\sqrt{726}$

114. a) $\left(5\sqrt{3}-4\sqrt{27}+2\sqrt{81}\right)\sqrt{3}$ b) $\left(16-5\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)$

115. a) $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)$ b) $\left(2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{2}\right)\left(2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{3}\right)$

c) $\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{6}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{6u}-5\sqrt{w}\right)^2$

e) $\left(a\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+a\sqrt{b}\right)$

116. a) $\left(\sqrt{5}\right)^2$ b) $\sqrt{3^2}$

c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4$ d) $\left(\sqrt[5]{a^7b^6}\right)^{10}$

e) $\sqrt{a^{2n}}$ (n ganzz.)

117. a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$ b) $\sqrt[3]{4^6}$

c) $\sqrt[6]{(-3)^{12}}$ d) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$

e) $\left(\sqrt[9]{z^4}\right)^6$

118. a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{9}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}$

e) $\sqrt[3]{2\sqrt{16}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}$

g) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^{12}r^{48}w^{24}}}$

119. a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{64}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6}}$

e) $\sqrt[2]{3\sqrt[3]{27}}$ f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{12}}}$

g) $\sqrt[5]{\sqrt{a^{20}b^5c^{10}}}$

120. a) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{z^6}}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{q^{24}}}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt{k^2\sqrt[3]{k^2}}}$ d) $\sqrt{r\sqrt{r\sqrt{r}}}$

In den folgenden Termen soll der Nenner rational gemacht werden.

121. a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{32}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt{\frac{9}{10}}$ e) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{5}{2\cdot\sqrt{8}}$

122. a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ e) $\frac{7}{2\sqrt{18}}$ f) $\sqrt{\frac{y^4}{x}}$

123. a) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{3+\sqrt{6}}$ c) $\frac{6\sqrt{7}}{8+3\sqrt{7}}$ d) $\frac{\sqrt{x}}{ax+b\sqrt{x}}$ $(x>0;\ ax+b\sqrt{x}\neq 0)$

e) $\frac{\sqrt{10}+12}{8+\sqrt{10}}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ g) $\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$

---

4. Unter welchen Bedingungen sind jeweils die folgenden Wurzeln definiert?

a) $\sqrt{b}$ b) $\sqrt[3]{-a}$ c) $\sqrt[m]{\frac{1}{x}}$ d) $\sqrt{x-y}$ e) $\sqrt{1-a}$ f) $\sqrt[4]{3b-2}$ g) $\sqrt[n]{5x-4}$

---

6. Rechnen mit Logarithmen

Lösen Sie folgende Gleichungen!

1. a) $2^x = 512$ b) $2^x = \sqrt[5]{8}$ c) $2^x = 1$ d) $10^x = 10000$ e) $10^x = 0{,}000001$

2. a) $2^x = \frac{1}{16}$ b) $2^x = 2\sqrt[3]{4}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$ d) $10^x = 0{,}1$ e) $10^x = \sqrt[3]{10000}$

Berechnen Sie! Begründen Sie in jedem Falle das Ergebnis unter Verwendung der äquivalenten Gleichung in Potenzschreibweise!

3. a) $\log_2 8$ b) $\log_8 2$ c) $\log_{10} 1000$ d) $\log_{1000} 10$ e) $\log_2 128$ f) $\log_2 \frac{1}{16}$

4. a) $\log_3 81$ b) $\log_{81} 3$ c) $\log_{27} \frac{1}{3}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ e) $\log_2 0{,}5$ f) $\log_2 0{,}125$

5. a) $\log_3 243$ b) $\log_3 \frac{1}{81}$ c) $\log_4 1024$ d) $\log_4 \frac{1}{64}$ e) $\log_5 0{,}008$

6. a) $\log_3 0{,}\overline{1}$ b) $\log_5 \frac{1}{625}$ c) $\log_{10} 10000000$ d) $\log_7 (49^{-2})$

7. a) $2^{\log_2 8}$ b) $5^{\log_5 1}$

8. a) $3^{\log_3 13}$ b) $7^{\log_7 7}$

Ermitteln Sie folgende Logarithmen und begründen Sie die Ergebnisse!

9. a) lg 10000 **b)** lg 0,001 **c)** $\lg \sqrt{10}$ **d)** $\lg \sqrt[4]{1000}$

10. a) lg 100 **b)** lg 0,00001 **c)** $\lg \sqrt[3]{100}$ **d)** $\lg \sqrt[4]{100}$

Benutzen Sie im folgenden die Tafel der vierstelligen Logarithmen!

11. a) lg 1 **b)** lg 66 **c)** lg 100 **d)** lg 3,3 **e)** lg 8,5 **f)** lg 0,10 **g)** lg 550 **h)** lg 41000

12. a) lg 37 **b)** lg 89 **c)** lg 10 **d)** lg 5,4 **e)** lg 0,25 **f)** lg 1 **g)** lg 7100 **h)** lg 28000000

13. a) lg 0,28 **b)** lg 0,0003 **c)** lg 72,3 **d)** lg 0,00321 **e)** lg 1,28 **f)** lg 538000 **g)** lg 0,32 **h)** lg 54,4

14. a) lg 0,0041 **b)** lg 0,584 **c)** lg 321000 **d)** lg 0,302 **e)** lg 34,8 **f)** lg 2,03 **g)** lg 7,59 **h)** lg 0,000437

15. a) lg 13,4 **b)** lg 1,25 **c)** lg 0.00432 **d)** lg 0,298 **e)** lg 0,0000707 **f)** lg 0,000372 **g)** lg 1.01

16. a) lg 37,7 **b)** lg 8,94 **c)** lg 0,0517 **d)** lg 80000 **e)** lg 821 **f)** lg 0,123 **g)** lg 0,0987

17. a) $\lg x = 0{,}1523$
b) $\lg x = 0{,}8785 - 1$
c) $\lg x = 1{,}9031$
d) $\lg x = 3{,}7372$
e) $\lg x = 0{,}9415 - 1$
f) $\lg x = 4{,}6730$

18. a) $\lg x = 2{,}7810$
b) $\lg x = 0{,}0453 - 3$
c) $\lg x = 0{,}9004$
d) $\lg x = 0{,}8261 - 4$
e) $\lg x = 0{,}0302$
f) $\lg x = 2{,}9818$

19. a) $\lg x = 0{,}4654 - 6$
b) $\lg x = 0{,}3224 - 5$
c) $\lg x = 8{,}6385$
d) $\lg x = 0{,}0216 - 1$
e) $\lg x = 7{,}9294$
f) $\lg x = 1{,}1533$

20. a) $\lg x = 0{,}5092 - 2$
b) $\lg x = 0{,}4900$
c) $\lg x = 5{,}4871$
d) $\lg x = 0{,}6964 - 3$
e) $\lg x = 0{,}4425 - 10$
f) $\lg x = 0{,}0792 - 4$

21. a) lg 3,579 **b)** lg 50340 **c)** lg 0,5723 **d)** lg 0,002038 **e)** lg 0,01528 **f)** lg 28,28

22. a) lg 821,3 **b)** lg 20,02 **c)** lg 0,0004807 **d)** lg 0,07543 **e)** lg 310,4 **f)** lg 0,03050

23. a) lg 27450 **b)** lg 10030 **c)** lg 20830000 **d)** lg 0,0001013 **e)** lg 0,002704 **f)** lg 5038

24. a) lg 190500 **b)** lg 0,01407 **c)** lg 30,71 **d)** lg 0,1099 **e)** lg 0,00002049 **f)** lg 5299000

Bestimmen Sie x in den folgenden Gleichungen auf vier Grundziffern genau!

25. a) $\lg x = 3{,}4305$
b) $\lg x = 0{,}8930 - 3$
c) $\lg x = 1{,}5619$
d) $\lg x = 2{,}3170$
e) $\lg x = 0{,}8145 - 2$
f) $\lg x = 2{,}7524$

26. a) $\lg x = 0{,}5360$
b) $\lg x = 0{,}0900 - 2$
c) $\lg x = 5{,}6005$
d) $\lg x = 0{,}5031 - 4$
e) $\lg x = 0{,}6991 - 5$
f) $\lg x = 0{,}5125$

---

1. Gibt es jeweils eine rationale Zahl x, für die die folgenden Gleichungen gelten?

a) $9^x = 27$ **b)** $3^x = 6$ **c)** $8^x = 32$

d) $5^x = 2$ **e)** $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 0{,}064$ **f)** $10^x = 200$

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe, indem sie entweder diese Zahl bestimmen oder indem Sie zeigen, daß es eine solche Zahl nicht gibt!

2. **Überprüfen Sie folgende Gleichungen!**

a) $5^{\sqrt{13}} \cdot 5^{\sqrt{52}} = 5^{3 \cdot \sqrt{13}}$ b) $8^{\sqrt{8}} \cdot 2^{\sqrt{8}} = 2^{8 \cdot \sqrt{2}}$ c) $5^{\sqrt{52}} : 5^{\sqrt{13}} = 5^{\sqrt{13}}$

d) $256^{\sqrt{2}} : 8^{\sqrt{8}} = 4^{\sqrt{2}}$ e) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{5}} : \left(3^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{2}} = 1$ f) $\dfrac{25^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}}}{5^{\sqrt{25}}} = 5^{3\sqrt{5}-5}$

---

27. a) $\lg x = 1{,}0249$
b) $\lg x = 4{,}6000$
c) $\lg x = 0{,}6563$
d) $\lg x = 0{,}6489 - 2$
e) $\lg x = 4{,}01368$

28. a) $\lg x = 0{,}9120 - 1$
b) $\lg x = 0{,}5085 - 3$
c) $\lg x = 3{,}1630$
d) $\lg x = 5{,}0410$
e) $\lg x = 0{,}2570 - 2$

29. a) $\lg x = 0{,}0162 - 1$
b) $\lg x = 0{,}1137 - 11$
c) $\lg x = 0{,}0900 - 4$
d) $\lg x = 4{,}3691$

30. a) $\lg x = 3{,}0141$
b) $\lg x = 2{,}2399$
c) $\lg x = 10{,}6500$
d) $\lg x = 0{,}1580$

Ermitteln Sie x auf fünf Grundziffern genau!

31. a) $\lg 1{,}0254 = x$
b) $\lg 100{,}25 = x$
c) $\lg x = 1{,}00050$
d) $\lg x = 0{,}01299$
e) $\lg 0{,}0010947 = x$
f) $\lg x = 0{,}03400 - 2$

32. a) $\lg 1{,}0047 = x$
b) $\lg 103580 = x$
c) $\lg x = 0{,}03609 - 1$
d) $\lg x = 2{,}02301$
e) $\lg 0{,}010768 = x$
f) $\lg x = 0{,}04089 - 3$

Berechnen Sie x aus folgenden Gleichungen durch Zusammenfassen ihrer rechten Seiten!

33. a) $\lg x = \lg 4 + \lg 25$
b) $\lg x = \lg 2 + \lg 2 + \lg 5$
c) $\lg x = \log 90 - \lg 30$
d) $\log_2 x = \log_2 8 + \log_2 128$
e) $\log_2 x = \log_2 32 - \log_2 16$
f) $\lg x = \lg 51 - \lg 17$
g) $\lg x = 3 \cdot \lg 8$
h) $\lg x = 5 \cdot \lg 2$
i) $\lg x = \frac{1}{2} \cdot \lg 256$

34. a) $\lg x = \lg 5 + \lg 20$
b) $\lg x = \lg 3 + \lg 3 + \lg 5$
c) $\lg x = \lg 120 - \lg 30$
d) $\log_2 x = \log_2 16 + \log_2 32$
e) $\log_2 x = \log_2 64 - \log_2 8$
f) $\lg x = \lg 36 - \lg 12$
g) $\lg x = 5 \cdot \lg 3$
h) $\lg x = \frac{1}{3} \lg 125$
i) $\lg x = \frac{1}{2} \lg 2$

Bestimmen Sie x in den folgenden Gleichungen durch geschicktes Zusammenfassen bzw. Umstellen!

35. a) $\lg x = \lg 2000 - \lg 25$
b) $\lg m = \lg x - \lg \frac{m}{5}$
c) $\lg_a z^3 = \log_a x - \log_a z^2$
d) $\log_3 x = \log_3 781 - \log_3 11$
e) $\lg 3 = \frac{1}{6} \lg x$
f) $\lg x = \frac{1}{5} \lg 243$
g) $\log_6 x = \log_6 10000$

36. a) $\lg 144 = \lg x - \lg 5$
b) $\lg 13 = \lg 26 - \lg x$
c) $\log_r x = \log_r 4m - \log_r 2m$
d) $\log_5 2 = \log_5 20000 - \log_5 x$
e) $\log_5 2 = x \cdot \log_5 128$
f) $\lg x = \frac{1}{b} \lg a$
g) $\lg x = \frac{1}{5} \lg 17$

Vervollständigen Sie folgende Gleichungen!

37. a) $\lg \ldots = \lg a + \lg b$

b) $\lg m = \lg \frac{m}{2} + \lg \ldots$

c) $\log_2 5000 = \log_2 \ldots + \log_2 25$

d) $\log_a \ldots = \log_a r + \log_a 2r$

38. a) $\lg \ldots = \lg 6 + \lg 5 + \lg 4$

b) $\lg \ldots = \lg \frac{m}{2} + \lg \frac{m}{2}$

c) $\log_{130} 121 = \log_{130} \ldots + \log_{130} 11$

d) $\log_a \frac{3b}{2} = \log_a \frac{3b}{2} + \log_a \ldots$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Produkte!

Hinweis: Bestimmen Sie die vierte Grundziffer im Produkt nur dann, wenn jeder Faktor mindestens vierziffrig gegeben ist!

39. a) $3{,}81 \cdot 17{,}8$ b) $0{,}51 \cdot 23$ c) $0{,}0257 \cdot 3410$ d) $0{,}702 \cdot 0{,}0578$ e) $631 \cdot 70\,800$ f) $0{,}1304 \cdot 5{,}288$

40. a) $25{,}3 \cdot 4{,}27$ b) $0{,}66 \cdot 29$ c) $35\,200 \cdot 0{,}0622$ d) $0{,}683 \cdot 0{,}0405$ e) $283 \cdot 90\,300$ f) $0{,}1176 \cdot 7{,}827$

41. a) $5{,}28 \cdot 7{,}41 \cdot 9{,}99$
b) $755 \cdot 602 \cdot 830$
c) $0{,}002\,65 \cdot 0{,}341 \cdot 0{,}0827$
d) $39{,}42 \cdot 5{,}783 \cdot 210{,}8$
e) $0{,}8311 \cdot 0{,}010\,74 \cdot 0{,}087\,18$

42. a) $3{,}64 \cdot 2{,}55 \cdot 8{,}62$
b) $583 \cdot 456 \cdot 850$
c) $0{,}004\,35 \cdot 0{,}0131 \cdot 0{,}878$
d) $85{,}32 \cdot 6{,}100 \cdot 346{,}3$
e) $0{,}020\,91 \cdot 0{,}066\,27 \cdot 0{,}3492$

43. a) $23{,}7 \cdot 0{,}0875 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}543$
b) $124 \cdot 5{,}38 \cdot 0{,}0277 \cdot 0{,}741 \cdot 0{,}000\,318$
c) $27{,}5 \cdot 2{,}03 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}439$
d) $142 \cdot 3{,}59 \cdot 0{,}000\,162 \cdot 0{,}506 \cdot 0{,}0923$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Quotienten!

44. a) $53\,100 : 72{,}3$ b) $2{,}37 : 0{,}476$ c) $0{,}854 : 0{,}703$ d) $\frac{72{,}4}{0{,}005\,03}$ e) $\frac{82\,200}{0{,}0242}$ f) $\frac{0{,}0572}{0{,}000\,0504}$ g) $0{,}0719 : 821$ h) $21{,}86 : 0{,}000\,3544$

45. a) $72{,}3 : 501$ b) $0{,}575 : 0{,}233$ c) $0{,}608 : 87\,900$ d) $\frac{5{,}81}{29{,}3}$ e) $\frac{0{,}488}{5{,}23}$ f) $\frac{0{,}007\,08}{9770}$ g) $0{,}2718 : 44{,}44$ h) $0{,}005\,072 : 1{,}099$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Potenzen!

46. a) $15{,}2^7$ b) 1013^4 c) $1{,}05^{13}$ d) $0{,}025^5$ e) $0{,}999^7$ f) $0{,}000\,708^3$ g) $103{,}4^{12}$ h) $78{,}03^8$

47. a) $0{,}583^7$ b) $18{,}6^4$ c) $103{,}5^8$ d) $0{,}033^5$ e) $1{,}111^7$ f) $0{,}000\,826^6$ g) 2^{64} h) $95{,}08^{10}$

Berechnen Sie logarithmisch die folgenden Wurzeln!

48. a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{3570}$ c) $\sqrt[7]{7}$ d) $\sqrt{829\,000}$ e) $\sqrt[3]{0{,}010\,12}$ f) $\sqrt[4]{0{,}005\,107}$ g) $\sqrt[10]{1000}$

49. a) $\sqrt[3]{4{,}6}$ b) $\sqrt[3]{24\,600}$ c) $\sqrt[10]{10}$ d) $\sqrt{5\,670\,000}$ e) $\sqrt[5]{0{,}073\,50}$ f) $\sqrt[4]{1{,}0980}$ g) $\sqrt{0{,}000\,2905}$

50. a) $\sqrt[5]{13{,}7^2}$ b) $\sqrt{0{,}241}$ c) $85\,300^{\frac{4}{3}}$ d) $\sqrt[3]{0{,}005\,188}$ e) $\sqrt[5]{853^4}$ f) $154{,}3^{\frac{3}{4}}$

51. a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[7]{7}$ c) $\sqrt[3]{0{,}000\,0417}$ d) $\sqrt[5]{91{,}4}$ e) $\sqrt[4]{0{,}246}$ f) $\sqrt[12]{1{,}20}$

Berechnen Sie logarithmisch unter Verwendung eines übersichtlichen Rechenschemas die folgenden Terme!

52. a) $\frac{13{,}8 \cdot 20\,000}{100 \cdot 50{,}0 \cdot 27{,}6}$ b) $\frac{0{,}11 \cdot 18{,}4 \cdot 0{,}053\,74}{52{,}82 \cdot 0{,}781}$ c) $\frac{13{,}8 \cdot 548 \cdot 2000}{5{,}21 \cdot 30{,}4}$

53. a) $\frac{532 \cdot 82{,}7 \cdot 1024}{0{,}537 \cdot 63{,}4}$ b) $\frac{11{,}44 \cdot 0{,}8502}{0{,}358}$ c) $\frac{0{,}0005997 \cdot 0{,}66}{12{,}1 \cdot 0{,}369 \cdot 0{,}2084}$

54. a) $\frac{0{,}587 \cdot 0{,}000243 \cdot 2{,}58}{722 \cdot 458}$ b) $\frac{44{,}7 \cdot 0{,}0522 \cdot 3{,}01}{0{,}371 \cdot 17{,}4}$ c) $\frac{0{,}2448 \cdot 0{,}7599 \cdot 0{,}0005281}{261{,}7 \cdot 3{,}577}$

55. a) $\frac{17000 \cdot 28{,}4}{14{,}2 \cdot 34{,}00 \cdot 0{,}020}$ b) $\frac{218 \cdot 0{,}00403 \cdot 53{,}8}{52{,}82 \cdot 0{,}781}$

c) $\frac{21{,}8 \cdot 154 \cdot 1001}{8{,}72 \cdot 0{,}104 \cdot 0{,}00782}$ d) $\frac{791{,}3 \cdot 622 \cdot 3{,}8}{1{,}286 \cdot 0{,}75 \cdot 60}$

56. a) $2{,}13 \cdot 0{,}841^7$ b) $(0{,}0902 \cdot 507)^3$ c) $(3{,}02 \cdot 84{,}1)^6$ d) $\frac{5810}{9{,}81^4}$

e) $\frac{0{,}356^3}{2{,}55}$ f) $\frac{18{,}7^4}{19{,}7^3}$ g) $\left(\frac{72{,}03}{0{,}5421}\right)^5$ h) $\left(\frac{0{,}0784}{21{,}8}\right)^3$

i) $233^2 \cdot 23{,}3^3$

57. a) $5{,}38 \cdot \sqrt{11{,}4}$ b) $0{,}023 \cdot \sqrt[3]{3640}$ c) $0{,}258 \cdot \sqrt{0{,}0781}$ d) $\frac{\sqrt{0{,}32}}{1{,}414}$

e) $\frac{\sqrt[3]{155{,}8}}{0{,}0473}$ f) $\frac{\sqrt{0{,}003072}}{24{,}35}$ g) $\frac{21{,}8}{\sqrt{744}}$ h) $\frac{0{,}07082}{\sqrt[3]{0{,}07082}}$

i) $\frac{53800}{\sqrt[3]{0.993}}$ k) $\frac{\sqrt{528}}{\sqrt{6{,}28}}$ l) $\frac{\sqrt{731{,}8}}{\sqrt[3]{0{,}547}}$ m) $\frac{\sqrt[3]{0{,}07824}}{\sqrt{2{,}308}}$

58. a) $0{,}728 \cdot \sqrt[5]{51{,}3}$ b) $2{,}54 \cdot \sqrt[4]{10200}$ c) $\frac{\sqrt[3]{71{,}05}}{12{,}21}$ d) $\frac{\sqrt[6]{17{,}8}}{\sqrt[5]{17{,}8}}$

e) $\sqrt[12]{\frac{4096}{729}}$ f) $\frac{0{,}199}{\sqrt[5]{31{,}8}}$ g) $\left(\sqrt[7]{\frac{0{,}0421}{3{,}14}}\right)^2$ h) $\sqrt[4]{\left(\frac{5318}{0{,}02703}\right)^3}$

59. a) $\frac{3{,}872 \cdot 13{,}41^2}{0{,}5281 \cdot 0{,}734}$ b) $\frac{\sqrt{0{,}0728} \cdot 5{,}27}{22{,}4^2}$ c) $\frac{153{,}3^3}{0{,}00391 \cdot \sqrt{91{,}8}}$ d) $\frac{\sqrt{5{,}31} \cdot 0{,}408^3}{11{,}8^2 \cdot \sqrt[3]{555}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{22{,}4} \cdot 0{,}138^3}$ f) $\frac{55{,}8 \cdot \sqrt{9{,}81}}{\sqrt[3]{0{,}531} \cdot 22.1}$ g) $\left(\frac{13{,}8^2}{\sqrt{5500} \cdot 17{,}4}\right)^3$ h) $\sqrt{\frac{671{,}8 \cdot 4{,}83^2}{\sqrt{521{,}3} \cdot 0{,}538}}$

Berechnen Sie folgende Terme mit Hilfe des Rechenstabes!

60. a) $\frac{23{,}4 \cdot 0{,}827}{0{,}0573}$ b) $\frac{50000 \cdot 0{,}237}{480{,}2}$

c) $\frac{5120 \cdot 0{,}640}{1{,}280}$ d) $\frac{0{,}0728 \cdot 11{,}4}{0{,}973}$

e) $\frac{0{,}387 \cdot 5{,}426}{13{,}8}$ f) $\frac{5120 \cdot 0{,}543}{0{,}00371}$

61. a) $\frac{567 \cdot 811}{5{,}67}$ b) $\frac{238{,}5 \cdot 0{,}5384}{777{,}7}$

c) $\frac{7{,}44}{13{,}8 \cdot 2{,}47}$ d) $\frac{0{,}00548}{2{,}09 \cdot 33{,}80}$

e) $\frac{7{,}862 \cdot 0{,}3503}{6{,}528}$

62. Lösen Sie auch die Aufgaben **6/52** bis **6/55**, **6/57** und **6/59** mit Hilfe des Rechenstabes, und achten Sie auf Genauigkeitsunterschiede gegenüber der logarithmischen Rechnung!

Benutzen Sie bei den nächsten Aufgaben ausschließlich den Rechenstab!

63. Die chemische Analyse von 212,4 g Braunkohle ergab:
Wasser 110,7 g; Asche 8,9 g; C 63,2 g; H 5,7 g; O 20,5 g; N 0,85 g; S 2,55 g.
Rechnen Sie die angegebenen Massen in Prozent um! Bestimmen Sie den Anteil (in Tonnen) der verschiedenen Bestandteile an der Ladung eines Kohlenzuges von 1500 Tonnen!

64. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle!

Planet	Mittlere Entfernung von der Sonne (in 10^6 km)	Umlaufszeit (in Jahren)	Mittlere Geschwindigkeit (in km · s^{-1})
Merkur	57,9	0,24	
Venus	108,2	0,62	
Erde	149,6	1,00	
Mars	227,9	1,88	
Jupiter	778,3		13,1
Saturn	1428		9,6
Uranus	2872		6,8
Neptun	4498		5,4
Pluto	5910		4,7

65. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, die Angaben über den Zusammenhang von Spannung, Stromstärke, Leistung, Energie und den Kosten der elektrischen Energie enthält!
(1 kWh ≙ 0,08 M.)

Gerät	Spannung U (in Volt)	Stromstärke I (in Ampere)	Leistung N (in Watt)	Zeit t (in h)	Energie W (in kWh)	Preis P (in M)
Glühlampe	220		40	6		
Motor	380		$5{,}5 \cdot 10^3$	2		
Tauchsieder	220		1000	0,2		
Heizkörper	220		750			1,00
Glühlampe	24	4,15		10		
Radiogerät	220		120	5		
Kochherd	220		$2{,}4 \cdot 10^3$	30		
Sicherung	220	10		1		
Trafo-Station	$6 \cdot 10^3$		$1 \cdot 10^5$	1		
Trafo-Station	220		$1 \cdot 10^5$	1		
Kraftwerk	$6 \cdot 10^3$		$4{,}5 \cdot 10^8$	24		

66. Ein Stab mit rechteckigem Querschnitt sei an einem Ende fest eingeklemmt, das andere Ende sei mit F (in kp) belastet. Die Durchbiegung B des Stabes beträgt $B = \frac{4Fl^3}{Ebh^3}$.
Berechnen Sie die Durchbiegung von Stäben aus

a) Stahl: Länge $l = 75$ cm; Breite $b = 1{,}5$ cm; Höhe $h = 2{,}2$ cm; $F = 2{,}5$; 172; 8,75 kp und $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm^{-2}

b) Kupfer: Länge $l = 64$ cm; Breite $b = 1{,}8$ cm; Höhe $h = 3{,}0$ cm; $F = 1{,}3$; 4,72; 6,95 kp und $E = 1{,}2 \cdot 10^6$ kp · cm^{-2}

67. Bei der Bestandsaufnahme über vorhandenen Kupfer- und Aluminiumdraht wurde die folgende Tabelle zusammengestellt:

Rolle Nr.	Mittlerer Durchmesser d der Rolle (in m)	Anzahl N der Windungen auf der Rolle	Material Cu/Al
1	1,20	84	Cu
2	1,05	37	Cu
3	0,55	430	Cu
4	1,35	22	Cu
5	1,35	205	Cu
6	0,40	30	Cu
7	1,50	80	Al
8	1,45	45	Al
9	1,20	135	Al

Berechnen Sie

a) die Länge des Kupferdrahtes ingesamt, **b)** die Länge des Aluminiumdrahtes insgesamt!

68. Bei der Spannschraube gilt zwischen der aufzuwendenden Kraft F_1 und der Druckkraft F_2 die Beziehung $F_1 = F_2 \cdot \frac{h}{2\pi R}$.

Hierin bedeuten h die Steigung des Schraubengewindes und R den Radius des Handrades. Wie groß ist jeweils die gesuchte Größe für

a) $F_2 = 1000$ kp; $h = 4{,}2$ mm; $R = 55{,}8$ cm;
b) $F_1 = 5{,}2$ kp; $h = 3{,}6$ mm; $R = 55{,}8$ cm;
c) $F_1 = 2{,}5$ kp; $h = 2{,}3$ mm; $F_2 = 1830$ kp?

69. Beim Kegel gibt die Bezeichnung „Kegel $\frac{1}{k}$" das Verhältnis $\frac{\text{Änderung des Durchmessers}}{\text{Länge des Kegelstumpfes}}$ an:

$$\frac{1}{k} = \frac{D-d}{l}.$$

a) Berechnen Sie d aus $D = 60$ mm; $l = 120$ mm; Kegel $\frac{1}{8}$!

b) Berechnen Sie $\frac{1}{k}$ aus $D = 150$ mm; $d = 120$ mm; $l = 360$ mm!

70. Für den Differentialflaschenzug gelten die Formeln

$$F_1 = F_2 \frac{D-d}{2D} \quad \text{und} \quad s_{F_2} = \frac{D-d}{2D} s_{F_1},$$

wobei F_1 die Kraft, F_2 die Last ist und D bzw. d die Durchmesser der koaxialen Kettenräder sind, während s_{F_2} den Lastweg und s_{F_1} den Kraftweg bedeuten.

a) Welche Kraft ist notwendig, um eine Last von 40 Mp anzuheben, wenn $D = 555$ mm und $d = 550$ mm ist?
b) Wie groß ist in **a)** der Kraftweg s_{F_1}, wenn die Last um 12,5 cm angehoben werden soll?
c) Welche Last kann im vorliegenden Fall höchstens gehoben werden, wenn die Kraft $F \leqq 0{,}098$ Mp ist?
d) Was erhält man in den Aufgaben **a)** bis **c)**, wenn $D = 13{,}5$ cm und $d = 131$ mm ist?

71. Wird Stallmist 6 Stunden nach dem Ausbringen untergepflügt, so beträgt die Ertragswirkung gegenüber sofortigem Unterpflügen nur noch 97 %. Nach 24 Stunden beträgt sie 94 % und nach 4 Tagen nur noch 86 %. Berechnen Sie die entsprechenden Ertragsverluste

a) für 15 ha Kartoffeln bei einem erwarteten Ertrag von 240 $\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$,

b) für 12 ha Zuckerrüben bei einem erwarteten Ertrag von 380 $\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$!

7. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

Bestimmen Sie folgende Funktionswerte!

1. **a)** sin 265° **b)** sin 108° **c)** sin 241,5° **d)** sin 204,3°
e) sin 349,6° **f)** sin 187,42° **g)** sin 174,05° **h)** sin 213,38°
i) sin.323,83° **k)** cos 202° **l)** cos 237,6° **m)** cos 106,73°

2. **a)** tan 223° **b)** tan 142,8° **c)** tan 202,22° **d)** tan 197,29°
e) tan 353,85° **f)** tan 186,35° **g)** tan 313,6° **h)** tan 283,55°
i) tan 354,21° **k)** cot 132° **l)** cot 231,2° **m)** cot 100,34°

3. **a)** sin 358° **b)** sin 185,5° **c)** sin 178,08° **d)** tan 180,75°
e) tan 181,07° **f)** tan 177,04° **g)** cos 95° **h)** cos 92,7°
i) cos 270,92° **k)** cot 274° **l)** cot 264,9° **m)** cot 91,37°

Bestimmen Sie zu folgenden Funktionswerten die Winkel im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$!

4. **a)** $\sin x = 0{,}3223$ **b)** $\sin x = 0{,}8443$ **c)** $\cos x = 0{,}9018$
d) $\cos x = -0{,}1392$ **e)** $\tan x = -1{,}080$ **f)** $\tan x = 0{,}9036$
g) $\cot x = 0{,}0524$ **h)** $\cot x = -0{,}4101$

5. (I)
a) $\sin x = 0{,}9952$ **b)** $\sin x = 0{,}8771$ **c)** $\sin x = 0{,}6547$
d) $\sin x = 0{,}3584$ **e)** $\sin x = -0{,}1942$ **f)** $\sin x = 0{,}1115$
g) $\sin x = 0{,}7230$ **h)** $\sin x = -0{,}5329$ **i)** $\sin x = 0{,}2773$
k) $\cos x = 0{,}2342$ **l)** $\cos x = 0{,}8728$ **m)** $\cos x = 0{,}4336$

(II)
a) $\tan x = 0{,}9725$ **b)** $\tan x = 0{,}8302$ **c)** $\tan x = 0{,}7563$
d) $\tan x = 0{,}4431$ **e)** $\tan x = 0{,}1228$ **f)** $\tan x = -0{,}3365$
g) $\tan x = -0{,}8421$ **h)** $\tan x = 0{,}2290$ **i)** $\tan x = 0{,}6563$
k) $\cot x = 0{,}1772$ **l)** $\cot x = 0{,}7781$ **m)** $\cot x = 0{,}1000$

(III)
a) $\sin x = 0{,}0941$ **b)** $\sin x = 0{,}0828$ **c)** $\sin x = 0{,}0541$
d) $\tan x = 0{,}0175$ **e)** $\tan x = 0{,}0332$ **f)** $\tan x = 0{,}0122$
g) $\cos x = 0{,}0819$ **h)** $\cos x = 0{,}0454$ **i)** $\cos x = 0{,}0226$
k) $\cot x = 0{,}0717$ **l)** $\cot x = 0{,}0613$ **m)** $\cot x = 0{,}0118$

6. Bestimmen Sie die Winkel x im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$, die den folgenden Funktionswerten zugeordnet sind!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin x$	0	1	−0,5	0,3746	−0,7314	0,1500	−0,0728
$\cos x$	0	1	−1	0,7071	−0,9336	0,2358	−0,7005
$\tan x$	0	1	2	−3	−0,4452	0,9387	−0,0120
$\cot x$	0	1	−3	−16,50	0,1700	−1,319	−2,439

7. Warum steht in Satz 3/10 bei der Tangens- und Kotangensfunktion die Bedingung $0° < x < 90°$ und nicht ebenfalls $0° \leqq x \leqq 90°$, wie bei der Sinus- und Kosinusfunktion?

8. Geben Sie zu den nachstehenden Winkeln jeweils die folgenden drei äquivalenten Winkel bei positivem und negativem Drehsinn an!

a) 50° **b)** 175° **c)** 335° **d)** 117,5° **e)** −221,68°
f) −33° **g)** 212,7° **h)** −148,5° **i)** 241° 15′ **k)** 7° 10′ 10″

9. Wie groß ist der Hauptwert der folgenden Winkel?

a) 1200° **b)** 5180° **c)** −320° **d)** −1755° **e)** −615° 23′
f) 2123° **g)** −4713° **h)** 498° 10′ **i)** −913,2° **k)** 2916,48°

10. Bestimmen Sie die Werte aller Winkelfunktionen der folgenden Winkel!

a) −30° **b)** −18° **c)** −135° **d)** −83,4° **e)** −90,45°
f) −174,77° **g)** −214,92°

11. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionswerten die im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ gelegenen Winkel!

	a)	b)	c)		d)	e)	f)
$\sin x$	−0,4848	−0,9024	0,0820	$\tan x$	− 0,3759	−0,9935	2,877
$\cos x$	0,9655	0,3704	−0,8671	$\cot x$	−191,0	−1,333	0,0107

12. Bestimmen Sie jeweils die Funktionswerte!

a) sin 383° **b)** sin 773,2° **c)** sin (−640,56°) **d)** sin (−3620,78°)
e) cos 421° **f)** cos 1527,3° **g)** cos (−704,64°) **h)** cos(−1083,92°)
i) tan 8000° **k)** tan (−444,7°) **l)** cot 992,25° **m)** cot (−524,44°)

13. Geben Sie sämtliche Winkel x im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu den folgenden Funktionswerten (im Gradmaß) an!

a) $\sin x = 0{,}9511$ **b)** $\sin x = 0{,}6428$ **c)** $\sin x = 0{,}9736$ **d)** $\sin x = -0{,}1951$
e) $\sin x = 3{,}23 \cdot 10^{-2}$ **f)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **g)** $\cos x = 0{,}4067$ **h)** $\cos x = -0{,}8805$
i) $\cos x = 0{,}2190$ **k)** $\tan x = 1$ **l)** $\tan x = 0{,}7265$ **m)** $\tan x = -3{,}630$
n) $\tan x = -0{,}5924$ **o)** $\tan x = 5{,}18$ **p)** $\cot x = 0$ **q)** $\cot x = -\sqrt{3}$

14. Untersuchen Sie an Hand von Beispielen, welche der Winkelfunktionen gerade und welche ungerade sind!

15. Untersuchen Sie die Symmetrieverhältnisse bei den Bildern der Winkelfunktionen in den folgenden Bereichen!

a) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ **b)** $0 \leqq x \leqq \pi$ **c)** $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$

16. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) sin 0,0001° **b)** sin 0,0018° **c)** sin 0,000094° **d)** sin 1″
e) tan 0,0001° **f)** tan 0,000313° **g)** tan 0,0000847° **h)** tan 0,5″

17. Bestimmen Sie die Winkel x (im Gradmaß) im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu den nachstehenden Funktionswerten!

a) $\sin x = 0{,}0000238$ **b)** $\sin x = 3{,}76 \cdot 10^{-6}$ **c)** $\sin x = 8{,}24 \cdot 10^{-7}$
d) $\tan x = 0{,}0000104$ **e)** $\tan x = 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\tan x = 9{,}83 \cdot 10^{-7}$

18. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $\cos x \cdot \tan x$ b) $\sin x \cdot \cot x$ c) $\dfrac{\cos x}{\cot x}$

d) $\dfrac{\sin x}{\tan x}$ e) $\dfrac{\tan x}{\cot x}$ f) $\tan x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}$

19. Gegeben sind die folgenden Funktionswerte:

a) $\sin 30° = 0{,}5$ b) $\tan 45° = 1$ c) $\cos 120° = -0{,}5$
d) $\tan 0° = 0$ e) $\cot 270° = 0$ f) $\sin 13° = 0{,}2250$
g) $\cos 40° = 0{,}7660$ h) $\tan 308° = -1{,}280$ i) $\cot 59° = 0{,}6009$

Bestimmen Sie jeweils die anderen drei Funktionswerte der Winkel, ohne die Tafeln der Winkelfunktionswerte zu benutzen!

20. Berechnen Sie aus den gegebenen Funktionswerten jeweils die Werte der drei anderen Winkelfunktionen!

a) $\sin x = \dfrac{1}{3}$ b) $\cos x = \dfrac{3}{4}$ c) $\tan x = 3$

d) $\cot x = \sqrt{3}$ e) $\sin x = \dfrac{10}{11}$ f) $\cos x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

g) $\tan x = \dfrac{1}{4}$ h) $\cot x = 2 - \sqrt{3}$ i) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

k) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ l) $\tan x = -1$ m) $\cot x = \sqrt{3} - 2$

Schlagen Sie folgende Logarithmen in der Tafel auf!

21. a) $\lg \sin 19{,}5°$ b) $\lg \sin 31{,}67°$ c) $\lg \sin 93{,}5°$ d) $\lg \sin 17{,}42°$
e) $\lg \cos 73{,}92°$ f) $\lg \cos 37{,}57°$ g) $\lg |\cos 224{,}7°|$

22. a) $\lg \tan 21{,}28°$ b) $\lg \tan 50{,}68°$ c) $\lg \tan 187{,}55°$ d) $\lg \tan 47{,}33°$
e) $\lg \cot 38{,}95°$ f) $\lg \cot 45{,}08°$ g) $\lg |\cot 101{,}54°|$

23. Bestimmen Sie zu den in Aufgabe **7/12** gegebenen Winkelfunktionswerten die Logarithmen und entscheiden Sie vorher, wo Betragsstriche gesetzt werden müssen!

---

1. Stellen Sie in einem einzigen Koordinatensystem dar:

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{1)}\ y = \sin x \\ \textbf{2)}\ y = 2 \sin x \\ \textbf{3)}\ y = \sin 2x \end{array}\right\} \quad (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

a) Vergleichen Sie die Ordinaten der Punkte der zu **1)** und **2)** gehörenden Kurven bei jeweils gleichen Argumenten!
b) Welche kleinste Periode hat die Funktion $y = \sin 2x$?

2. Stellen Sie in einem einzigen Koordinatensystem dar:

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{1)}\ y = \sin x \\ \textbf{2)}\ y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \textbf{3)}\ y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \quad (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

Vergleichen Sie die Lage der drei Funktionsbilder im Koordinatensystem!

Ermitteln Sie zu den nachstehenden Logarithmen sämtliche Winkel im Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$!

24. a) $\lg \sin x = 0{,}6093 - 1$ **b)** $\lg \sin \alpha = 0{,}3775 - 1$ **c)** $\lg \sin \gamma = 0{,}5717 - 1$
d) $\lg \sin \beta = 0{,}0135 - 1$ **e)** $\lg \sin \gamma = 0{,}9438 - 1$ **f)** $\lg \sin \gamma = 0{,}1437 - 1$

25. a) $\lg \cos \gamma = 0{,}5341 - 1$ **b)** $\lg \cos x = 0{,}7230 - 1$ **c)** $\lg \cos \alpha = 0{,}9892 - 1$
d) $\lg \cos \beta = 0{,}2700 - 1$ **e)** $\lg \cos \alpha = 0{,}9000 - 1$ **f)** $\lg \cos \beta = 0{,}2356 - 1$

26. a) $\lg \tan x = 0{,}1387$ **b)** $\lg \tan \beta = 0{,}8003$ **c)** $\lg \tan \gamma = 0{,}6486 - 1$
d) $\lg \tan \gamma = 1{,}0944$ **e)** $\lg \tan \beta = 0{,}8345 - 1$ **f)** $\lg \tan x = 0{,}1479 - 1$

27. a) $\lg \cot \alpha = 0{,}9848 - 1$ **b)** $\lg \cot \gamma = 0{,}6129 - 1$ **c)** $\lg \cot x = 0{,}2509$
d) $\lg \cot \gamma = 0{,}3688$ **e)** $\lg \cot \beta = 0{,}1888$ **f)** $\lg \cot \alpha = 0{,}9800$

28. a) $\lg \sin x = 0{,}8810 - 1$ $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}9750 - 2$ $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}9996 - 1$ $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}3075 - 1$ $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}2764 - 1$ $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 0{,}9000 - 2$ $(\tan x < 0)$
g) $\lg \cot x = 0{,}7718$ $(\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 1{,}2700$ $(\cot x < 0)$

Berechnen Sie in den folgenden Aufgaben jeweils die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks!

29. a) $a = 4$ cm, $\beta = 43°$, $\gamma = 55°$ **b)** $a = 5{,}6$ cm, $\beta = 83{,}8°$, $\gamma = 26{,}5°$ **c)** $c = 146$ m, $\alpha = 20{,}2°$, $\beta = 74{,}3°$ **d)** $b = 8{,}5$ cm, $\beta = 44{,}2°$, $\gamma = 54{,}5°$

e) $c = 121{,}56$ m, $\beta = 13{,}47°$, $\gamma = 101{,}25°$ **f)** $b = 2{,}389$ km, $\alpha = 39°\,17'$, $\beta = 68°\,28'$ **g)** $a = 44{,}8$ cm, $\alpha = 59°\,10'$, $\beta = 41°\,18'$ **h)** $c = 64{,}8$ m, $\alpha = 42°\,43'$, $\beta = 102°\,19'$

30. a) $b = 3{,}8$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $\gamma = 53{,}6°$ **b)** $a = 35{,}75$ m, $c = 26{,}48$ m, $\alpha = 93{,}57°$ **c)** $a = 7{,}0$ cm, $b = 5{,}8$ cm, $\alpha = 43{,}7°$ **d)** $a = 32{,}3$ cm, $c = 36{,}6$ cm, $\gamma = 55{,}7°$

e) $a = 12{,}15$ m, $b = 27{,}83$ m, $\beta = 102{,}24°$ **f)** $b = 4{,}3$ cm, $c = 4{,}6$ cm, $\gamma = 20°\,35'$ **g)** $a = 30{,}4$ cm, $c = 27{,}8$ cm, $\alpha = 67°\,23'$ **h)** $b = 24{,}9$ m, $c = 17{,}2$ m, $\beta = 117°\,4'$

31. Berechnen Sie die Seiten des Dreiecks, von dem $\alpha = 81{,}91°$, $\beta = 41{,}54°$ und $a = 258{,}4$ cm gegeben sind!

32. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel der Dreiecke!

a) $a = 6{,}1$ cm, $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 63{,}2°$ **b)** $a = 123{,}5$ cm, $b = 134{,}2$ m, $\gamma = 102{,}16°$ **c)** $b = 17{,}81$ m, $c = 13{,}85$ m, $\alpha = 74{,}32°$ **d)** $a = 245{,}9$ m, $b = 392{,}5$ m, $\gamma = 47°\,43'$

33. Berechnen Sie die Winkel der Dreiecke, deren Seiten gegeben sind!

a) $a = 5{,}38$ m, $b = 1{,}97$ m, $c = 4{,}75$ m **b)** $a = 2{,}458$ km, $b = 3{,}019$ km, $c = 1{,}389$ m **c)** $a = 27{,}18$ m, $b = 33{,}88$ m, $c = 35{,}03$ m **d)** $a = 8{,}754$ km, $b = 6{,}672$ km, $c = 8{,}386$ km

34. Berechnen Sie zu den Aufgaben **7/29** bis **7/33** die Flächeninhalte der Dreiecke!

35. Ein Leitungsmast wird unter einem Winkel von 105° mit 70 kp und 40 kp Zug beansprucht (Bild A 7/1).
Bestimmen Sie rechnerisch Größe und Richtung der Resultierenden!

36. Der 5,20 m hohe Mast am Ende einer elektrischen Grubenbahn ist durch eine waagerechte Seilspannkraft von 1020 kp belastet und durch ein schräges Drahtseil am Boden gegen Biegung verankert (Bild A 7/2). Bestimmen Sie rechnerisch

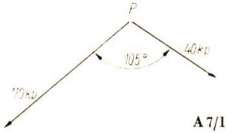
a) die Spannkraft im Ankerseil,

b) die Belastung des Mastfundamentes (Gewicht des Mastes: $F = 800$ kp)!

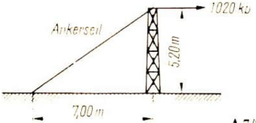
37. a) Ein Drehkran trägt am Auslegerkopf B eine Last $F = 3000$ kp.
Welche Spannkräfte treten in der Strebe S und in der Zugstange Z auf (Bild A 7/3)? Sind es Zug- oder Druckkräfte?
Beantworten Sie die Fragen auch für

b) $F = 6000$ kp; $\overline{AB} = 6000$ mm; $\overline{BC} = 5000$ mm; $\overline{AC} = 2000$ mm;

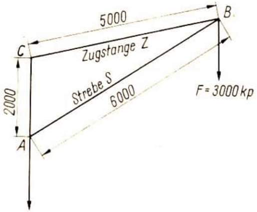
c) $F = 4000$ kp; $\overline{AB} = 3000$ mm; $\overline{BC} = 2000$ mm; $\overline{AC} = 1500$ mm!



A 7/1



A 7/2



A 7/3

38. Drei Kräfte, deren Wirkungslinien in einer Ebene liegen, greifen in einem Punkte P an und halten sich das Gleichgewicht.

a) $F_1 = 50$ kp, $F_2 = 60$ kp, $F_3 = 80$ kp

b) $F_1 = 720$ kp, $F_2 = 315$ kp, $F_3 = 555$ kp

Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

39. Von einem Standpunkt P aus sieht man einen Turm unter dem Sehwinkel $\alpha = 29{,}82°$. Der Standpunkt P ist horizontal um $d = 240$ m vom Turm entfernt und liegt um $h = 19{,}40$ m höher als der Fuß des Turmes. Wie hoch ist der Turm?

40. Berechnen Sie die Horizontalentfernungen e_1 und e_2 eines Turmes von den Standorten St. 1 und St. 2 und die Höhe der Turmspitze über NN (Bild A 7/4).

a) Gemessen sind die Grundlinie $b = 247{,}290$ m, die Horizontalwinkel $\varphi_1 = 110{,}99°$ und $\varphi_2 = 34{,}90°$.

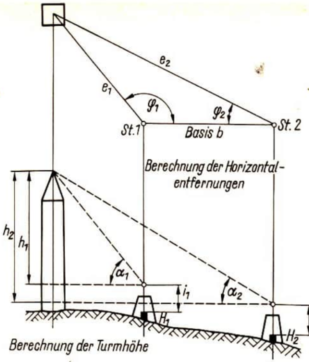
b) Gegeben sind die Höhen der Standorte $H_1 = 145{,}02$ m über NN; $H_2 = 139{,}04$ m über NN sowie die Höhen der Meßinstrumente $i_1 = 1{,}30$ m; $i_2 = 1{,}20$ m. Gemessen sind die Höhenwinkel $\alpha_1 = 19{,}12°$ und $\alpha_2 = 12{,}80°$.

41. Von einer Klasse wird ein LPG-Feld vermessen (Bild A 7/5).
Ergebnisse:

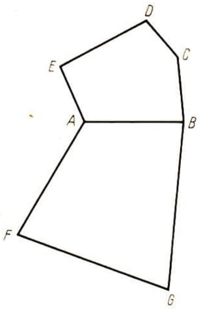
Basis $\overline{AB} = 125$ m

$\sphericalangle\, BAC = \alpha_1 = 35{,}1°$	$\sphericalangle\, ABC = \beta_1 = 87{,}8°$
$\sphericalangle\, BAD = \alpha_2 = 58{,}1°$	$\sphericalangle\, ABD = \beta_2 = 71{,}0°$
$\sphericalangle\, BAE = \alpha_3 = 112{,}0°$	$\sphericalangle\, ABE = \beta_3 = 26{,}1°$
$\sphericalangle\, BAF = \alpha_4 = 121{,}0°$	$\sphericalangle\, ABF = \beta_4 = 33{,}6°$
$\sphericalangle\, BAG = \alpha_5 = 64{,}0°$	$\sphericalangle\, ABG = \beta_5 = 84{,}2°$

Der Flächeninhalt des Feldes ist zu berechnen.



A 7/4



A 7/5

42. Eine neue Eisenbahnlinie wird gebaut. Sie verläuft in einer Ebene senkrecht zu einer bereits bestehenden Bahnlinie, über die sie mittels einer Brücke von 8,50 m Höhe geführt werden soll. Wie lang muß die Rampe mindestens sein, wenn der Anstiegswinkel nicht mehr als 1° betragen soll?

43. Im Gelände ist eine Basis $\overline{AB} = 225$ m vermessen worden. Ein dritter Punkt im Gelände ist C, der von A und B aus nicht zugänglich ist. Mit dem Theodoliten wurden $\sphericalangle\ CAB = \alpha = 75°\ 20'$ und $\sphericalangle\ CBA = \beta = 42°\ 40'$ ermittelt. Wie lang sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (Bild A 7/6)?

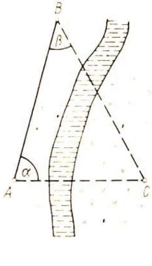
44. Wieviel Hektar Land werden durch die Trockenlegung der in Bild A 7/7 skizzierten feuchten Wiese $ABCD$ gewonnen?

Bemerkung: $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sind nicht begehbar. $\overline{AB} = 470$ m; $\overline{BC} = 675$ m; $\alpha = 115°$; $\beta_1 = 26°$; $\beta_2 = 72{,}5°$.

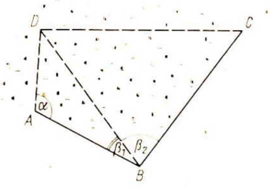
45. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten A und B soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte A und B liegen gleich hoch und sind von einem in gleicher Höhe liegenden Geländepunkt C aus beide sichtbar. Die Peilstrecken $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ werden zu 2,380 km und 3,450 km bestimmt. Der Winkel ACB beträgt 38,7°.

a) Wie groß ist die Horizontalentfernung $\overline{AB}$?

b) In welchen Richtungen von A und B aus ist die Schneise zu schlagen?



A 7/6



A 7/7

46. Ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt mit dem Flächeninhalt A_1 und dem Durchmesser von der Länge d_1 wird durch ein kegelförmiges Stück mit einem zweiten Rohr vom Querschnitt mit dem Flächeninhalt $A_2 = 3A_1$ (Bild A 7/8) verbunden. Berechnen Sie die Längen s der Mantellinien des Verbindungsstückes!

47. Eine oben und unten offene Übergabeschurre ist herzustellen. Die technische Zeichnung zeigt Bild A 7/9.
Der Rutschwinkel γ soll 50°, die (obere) Aufnahmefläche 0,4 m² und die (untere) Abgabefläche 0,25 m² betragen. Berechnen Sie die fehlenden Maße für b_1, b_2, l_1, l_2 und β!

48. Eine Rauchabzughaube ist anzufertigen (Bild A 7/10). Berechnen Sie die Neigungswinkel der Seitenbleche gegen die Grundfläche!

49. An der Küste eines Hafenortes ist eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = 830$ m abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wird ein vorüberfahrendes Schiff zum gleichen Zeitpunkt angepeilt. Die Peilrichtungen bilden mit der Standlinie die Winkel $\alpha = 86{,}40°$ und $\beta = 78{,}50°$.
In welcher Entfernung von A und B und in welchem Abstand von der Standlinie befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung?

50. Von einem Schiff aus peilt man gleichzeitig den Leuchtturm L in Richtung S 55° O und den Kirchturm K in Richtung S 28° W an. Die Strecke $\overline{KL}$ ist nach der Seekarte 33,2 km lang und hat die Richtung N 85° O.

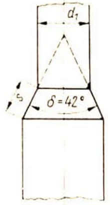
a) In welcher Entfernung von K und L befindet sich das Schiff zum Zeitpunkt der Beobachtung (in sm)?

b) Welchen Kurs muß das Schiff einhalten, wenn es im Abstand von 4 sm am Leuchtturm vorbeifahren soll?

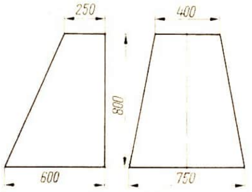
51. Ein Schiff steuert einen Kurs N 45° W bei einer Geschwindigkeit von 9 sm · h⁻¹ (9 Knoten). Vom Schiffsort A aus peilt man einen Leuchtturm unter N 23,4° O. Nach 90 min peilt man vom Schiffsort B aus denselben Leuchtturm in Richtung N 85,3° O.

a) Wie weit ist das Schiff am Ort B vom Leuchtturm entfernt?

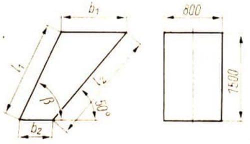
b) Welchen Abstand hat der Leuchtturm vom Schiffskurs?



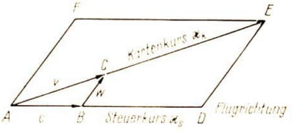
A 7/8



A 7/10



A 7/9



A 7/11

52. Ein Schiff legt 54 sm beim Kurs S 35° 40′ W zurück, während es ein Strom in dieser Zeit 7 sm nach S 20° 15′ O versetzt. Welches ist der wahre Kurs des Schiffes, und wie groß ist die Entfernung über Grund (der wahre Weg des Schiffes)?

53. Der Kurs eines Flugzeuges in der eigentlichen Flugrichtung wird als Steuerkurs $\varkappa_s$, die Geschwindigkeit in dieser Richtung als Eigengeschwindigkeit c bezeichnet.
Der Wind wirkt unter einer bestimmten Windrichtung und mit einer bestimmten Windstärke – der Windgeschwindigkeit w – beschleunigend oder verzögernd auf das Flugzeug ein und treibt das Flugzeug aus der beabsichtigten Flugrichtung heraus. Dadurch fliegt das Flugzeug in einer anderen Richtung, dem Kurs über Grund oder dem Kartenkurs $\varkappa_k$. Die Geschwindigkeit in dieser Richtung heißt Geschwindigkeit über Grund v.
Das Geschwindigkeitsdreieck ABC heißt Winddreieck, der Winkel CAB Abtrift, in umgekehrter Richtung Vorhaltewinkel (Bild A 7/11).
Eine Maschine vom Typ Il 14 der Interflug ($c = 320\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) fliegt von Barth nach Berlin-Schönefeld. Es herrscht Westwind Stärke 8 ($w \approx 54\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).
Entnehmen Sie den Steuerkurs $\varkappa_s$ einer Landkarte und berechnen Sie $\varkappa_k$, v und die Abtrift!

54. Eine Maschine vom Typ Il 14 der Interflug ($c = 320\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) fliegt von Dresden nach Erfurt (190 km). Der Kartenkurs $\varkappa_k$ beträgt 267° (Winkelangabe: N über O). Es herrscht NW-Wind mit einer Windgeschwindigkeit $w = 50\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit über Grund v, den Vorhaltewinkel und die Flugzeit!

55. Die Entfernung Sonne–Erde beträgt im Mittel $149 \cdot 10^6$ km, die Entfernung Erde–Mond $384 \cdot 10^3$ km. Der scheinbare Durchmesser der Sonne ist rund 32′, der des Mondes rund 31′. Berechnen Sie die wahren Durchmesser von Sonne und Mond!

56. Unter der Horizontalparallaxe eines Gestirns versteht man den Sehwinkel, unter welchem der Erdradius einem Beobachter vom Gestirn aus erscheinen würde. Berechnen Sie die Horizontalparallaxe des Mondes unter Benutzung der in Aufgabe **7/55** gegebenen Entfernung (Erdradius: 6370 km)!

8. Körperberechnung und Körperdarstellung

1. Zeichnen Sie im Grundriß-Aufriß-Verfahren

a) einen Würfel mit 55 cm Kantenlänge; Maßstab 1 : 10;
b) eine quadratische Säule ($a = 2$ m; $h = 5$ m); Maßstab 1 : 50;
c) ein gerades Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche (Katheten $a = 3$ cm, $b = 4$ cm; Höhe des Prismas gleich der Hypotenuse der Grundfläche); Maßstab 1 : 1;
d) ein schiefes Prisma mit regelmäßiger sechsseitiger Grundfläche (Maße beliebig)!

2. Zeichnen Sie nach den folgenden Angaben Bilder in schräger Parallelprojektion (sog. Schrägbilder)!

a) Quader 4 cm × 6 cm × 8 cm; $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$; Maßstab 1 : 1

b) regelmäßiges dreiseitiges Prisma; Grundkante $a = 3$ dm; Höhe $h = 2a$; $q = \frac{2}{3}$; $\alpha = 60°$; Maßstab 1 : 10

c) Würfel; Kante $a = 4$ cm; Maßstab 1 : 1

α) $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$ β) $q = \frac{1}{3}$; $\alpha = 30°$

γ) $q = \frac{2}{3}$; $\alpha = 60°$ δ) $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 135°$

ε) $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 225°$ ϱ) $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 315°$

3. Berechnen Sie Mantel- und Oberflächeninhalt von folgenden regelmäßigen Prismen mit der Grundfläche G und der Höhe h!

a) G: Quadrat; Seitenlänge 6,5 cm²; $h = 3{,}8$ cm
b) G: gleichseitiges Dreieck; Seitenlänge 7,2 dm; $h = 3{,}4$ dm
c) G: Sechseck; Seitenlänge 13 cm; $h = 4{,}5$ cm
d) G: Achteck; Seitenlänge 20 mm; $h = 50$ mm

4. Zeichnen Sie Netze von folgenden geraden Prismen!

a) G: rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 12 cm und 4 cm; $h = 3$ cm
b) G: Rhombus mit der Seitenlänge 4 cm und einem Winkel $\alpha = 60°$; $h = 6$ cm
c) Quader mit den Kanten 2 cm; 8 cm; 4 cm
d) G: gleichseitiges Dreieck; alle Kanten gleichlang (40 mm)

5. Berechnen Sie Mantel- und Oberflächeninhalt eines schiefen Prismas, das ein Rechteck (12 cm × 18 cm) als Grundfläche und die Höhe $h = 24$ cm hat und

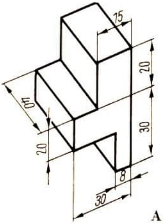
a) über die längere Rechteckseite unter 30°,
b) über die kürzere Rechteckseite unter 50° gegen die Grundfläche geneigt ist!

6. a) Wieviel Quadratmeter Blech benötigt man, um einen oben offenen quaderförmigen Kasten (30 cm × 50 cm × 70 cm) herzustellen (Höhe: 70 cm), wenn mit 8% Verschnitt gerechnet werden muß?
b) Wieviel Quadratmeter sind mit Rostschutzfarbe zu streichen?

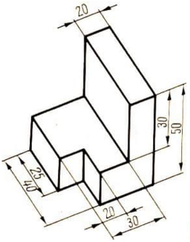
7. Welchen Oberflächeninhalt hat ein Sechskantstahl mit der Grundkante s und der Länge l?

8. Berechnen Sie die Volumina der in den Aufgaben **8/3, 8/4, 8/6** und **8/7** genannten Prismen!

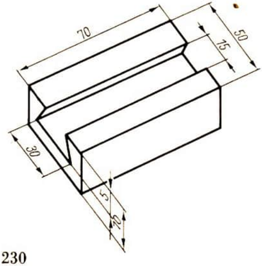
9. Der Querschnitt eines Dammes ist ein gleichschenkliges Trapez. Die Dammsohle ist 38 m, die Dammkrone 12 m breit; der Damm ist 7,20 m hoch. Wieviel Kubikmeter Boden sind auf jeden Kilometer aufzuschütten?



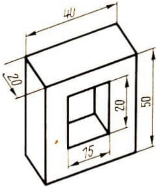
A 8/1



A 8/2



A 8/3



A 8/4

10. Wieviel Ziegel sind zum Bau eines Giebels nötig, der die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit 12 m langer Grundlinie und 5 m großer Höhe hat und 25 cm stark werden soll? Für 1 m^3 Mauerwerk werden 400 Steine benötigt.

11. Berechnen Sie die Massen der aus Stahl ($\varrho = 7{,}85$ kg dm^{-3}) hergestellten Werkstücke, die in den Bildern A 8/1 bis A 8/4 dargestellt sind! (Maßangaben in mm)

12. Ein quaderförmiger Wasserkasten soll 32 l fassen. Die Grundfläche soll quadratisch, die Höhe aber nur halb so groß wie die Grundkante sein. Wie lang sind die Innenkanten des Kastens?

13. Ein Wasserkasten mit quadratischem Querschnitt (Grundkante $a = 15$ cm) und der Höhe $h = 25$ cm ist zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Er wird über eine Grundkante gekippt. Bei welchem Neigungswinkel beginnt das Wasser auszufließen?

14. Wieviel Wasser kann man aus dem in Aufgabe **8/13** beschriebenen Wasserkasten abschütten, wenn der Kasten anfänglich ganz gefüllt war und so geneigt wird, daß sein Boden mit der Waagerechten einen Winkel von 25° bildet?

15. Wieviel wiegt eine 1 m lange Stahlstange mit quadratischem Querschnitt, wenn dessen Kantenlänge 20 mm beträgt? ($\varrho = 7{,}8$ g cm^{-3})

16. Ein Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche hat die Grundkante $a_1 = 25$ cm, die Deckkante $a_2 = 15$ cm, die Höhe $h = 12$ cm. Er ist zeichnerisch im Maßstab 1 : 3 im Schrägbild $\left(\alpha = 30°;\ q = \frac{1}{3}\right)$ und im Zweitafelbild darzustellen. Außerdem ist der Inhalt der Oberfläche zu bestimmen.

17. Eine Pyramide entsteht aus einem Würfel mit der Seite a dadurch, daß die Eckpunkte einer Seitenfläche mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche verbunden werden. Bestimmen Sie den Inhalt der Oberfläche und entwerfen Sie ein Schrägbild $\left(\alpha = 60°;\ q = \frac{2}{3}\right)$!

18. Bei einem sechsseitigen, regelmäßigen Pyramidenstumpf ist die Grundkante $a_1 = 1{,}5$ m, die Deckkante $a_2 = 0{,}5$ m und jede Seitenkante $s = 2$ m lang. Wie groß ist der Inhalt der Mantelfläche?

19. Das Dach eines Turmes ist pyramidenförmig. Die Grundkante ist 3,2 m lang, die Höhe 6,8 m groß; die Grundfläche ist ein Quadrat. Wieviel Quadratmeter Dachfläche sind einzudecken?

20. Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen

a) einer quadratischen geraden Pyramide (Länge der Grundkante $a = 6$ cm; Höhe $h_K = 24$ cm);
b) einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche; Spitze senkrecht über der Rechteckmitte (Längen der Grundkanten $a = 12$ m; $b = 8$ m; Höhe $h_K = 16$ m);
c) einer regelmäßigen, dreiseitigen Pyramide (Länge der Grundkante $a = 5$ cm; Höhe $h_K = 3$ cm)!

21. Ein Quarzkristall aus einem geraden sechsseitigen Prisma (Grundkantenlänge 1,7 cm; Seitenkantenlänge 6,2 cm) mit zwei auf den Grundflächen aufsitzenden Pyramiden (Seitenkantenlänge je 2,5 cm) wiegt 145 p. Wie groß ist die Dichte von Quarz?

22. Alaun kristallisiert in Form von Oktaedern, das sind Doppelpyramiden, die mit ihren quadratischen Grundflächen aneinandersitzen und lauter gleichlange Seiten haben. Bei einem Alaunkristall ist jede Kante 4,6 cm lang. Die Dichte beträgt $\varrho = 1{,}7$ g cm^{-3}. Wie schwer ist der Kristall?

23. Ein quadratisches Spitzzelt hat am Boden 11 m Umfang und ist 1,60 m hoch. Berechnen Sie seinen Luftraum und den Flächeninhalt des Zeltplanenstoffes (ohne Bodenbedeckung).

24. Ein Laubendach in Form einer quadratischen Pyramide mit 1,80 m langen Grundkanten und 1,35 m langen Seitenkanten wird mit Dachpappe bedeckt. Wieviel Quadratmeter sind nötig?

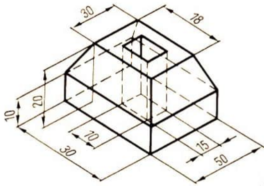
25. Aus einem Stück Quadratstahl (50 mm × 50 mm × 120 mm) soll eine symmetrische pyramidenförmige Spitze von 114 mm Höhe gefertigt werden. Wieviel Prozent beträgt der Abfall?

26. Ein regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf hat als Eckenmaße (das sind die Entfernungen von einer Ecke zur gegenüberliegenden) in der Grundfläche $e_1 = 80$ mm, in der Deckfläche $e_2 = 64$ mm. Die Seitenkanten sind $s = 17$ mm lang. Berechnen Sie Mantelflächeninhalt, Oberflächeninhalt und Volumen.

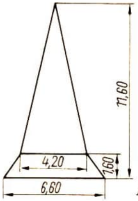
27. Berechnen Sie das Gewicht des in Bild A 8/5 dargestellten Werkstücks aus Gußstahl ($\varrho = 7{,}8$ g cm$^{-3\circ}$; Maßangaben in mm)!

28. Eine Turmspitze besteht aus einem Pyramidenstumpf und einer Pyramide, wie es das Bild A 8/6 zeigt. Der Turm selbst ist eine quadratische Säule von 52 m Höhe bis zur Turmspitze. Berechnen Sie

a) den Inhalt der Dachfläche der Turmspitze,
b) den vom Turm (einschließlich seiner Spitze) eingeschlossenen Raum (Maßangaben in Metern).



A 8/5



A 8/6

29. Zeigen Sie, daß sich aus der (genauen) Volumenformel für den Pyramidenstumpf für $G_1 = G_2$ die Formel für das Prismenvolumen und für $G_2 = 0$ die Formel für das Pyramidenvolumen ergibt!

30. Führen Sie dieselben Untersuchungen für die beiden Näherungsformeln für das Volumen des Pyramidenstumpfes durch!

31. Ein Stahlbolzen besteht aus drei aufeinandersitzenden Kreiszylindern mit gemeinsamer Achse, die folgende Maße haben:

d	40	30	23	in mm
h	13	25	25	in mm

a) Wie groß ist die Masse des Bolzens? ($\varrho = 7{,}86$ g cm^{-3})

b) Wie groß ist sein Oberflächeninhalt?

32. Drei gemauerte Rundsäulen von je 6,20 m Höhe und Durchmessern von 92 cm, 82 cm, 92 cm tragen eine Terrasse.

a) Wieviel Kubikmeter Mauerwerk enthalten die drei Säulen?
b) Wieviel Quadratmeter Mantelfläche sind zu verputzen?
c) Wie groß ist der Bedarf an Verputzmörtel bei 1,5 cm Putzstärke?

33. Ein Messingring hat eine lichte Weite von 320 mm, eine Wanddicke von 40 mm und eine Höhe von 90 mm. Wie groß ist seine Masse? ($\varrho = 8{,}5$ kg dm^{-3})

34. Wie lang ist ein Aluminiumrohr, das 1,852 kp wiegt, wenn der Außendurchmesser 36 mm und die Wandstärke 2 mm betragen? ($\varrho = 2{,}7$ g cm^{-3})

35. Wieviel Quadratmeter Blech braucht man für 10000 Konservendosen vom Durchmesser 10 cm, die je 1 l fassen, wenn für den Verschnitt 16% zugeschlagen werden müssen?

36. Die Teilstriche eines zylindrischen Meßglases mit der lichten Weite $d = 40$ mm sind von 5 zu 5 cm^3 angebracht. Wie weit liegen sie auseinander?

37. Ein Stück Rundstahl (Durchmesser 30 mm; Länge 100 mm) ist auf der einen Seite kegelförmig abzudrehen (Kegelhöhe 30 mm).

a) Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?
b) Wieviel Quadratzentimeter Fläche sind zu polieren?

38. Wie groß ist das Volumen eines kegelförmigen Kelchglases, das eine lichte Öffnung von 80 mm und eine Seitenlinienlänge von 160 mm hat?

39. Eine Boje hat die Gestalt eines Doppelkegels. Die gesamte Höhe beträgt 1,70 m, ihr Grundkreisdurchmesser 75 cm.

a) Wie schwer ist sie, wenn das Blech 2,5 mm stark ist? ($\varrho = 7{,}2$ kg dm^{-3}).
b) Warum ist es unnötig, die Höhen der beiden einzelnen Teilkegel anzugeben?

40. Bis zu welcher Höhe muß ein Kelchglas von der Höhe 16 cm angefüllt werden, wenn es „$\frac{3}{4}$ voll" sein soll?

41. Eine Viertelkreisfläche mit dem Radius 40 cm wird zu einem Kegelmantel zusammengebogen. Wie groß sind Grundkreisdurchmesser d, Höhe h, Volumen V des entstehenden Kegels?

42. Ein kleiner Eimer hat folgende Abmessungen: oberer Durchmesser $D = 23$ cm; unterer Durchmesser $d = 18$ cm; Höhe $h = 19$ cm. Wieviel Liter faßt er? Ist es sinnvoll, hier die Näherungsformeln zu verwenden?

43. Wieviel wiegen 100 Senkniete mit folgenden Abmessungen: Nietdurchmesser 22 mm; oberer Kopfdurchmesser 35 mm; gesamte Nietlänge 80 mm; Kopfhöhe 11 mm; $\varrho = 7{,}85$ kg dm^{-3}?

44. Das Flammrohr eines 860 mm langen Kessels hat die Form eines abgestumpften Kegels (Durchmesser an den Enden 450 mm bzw. 280 mm).

a) Wie groß ist die Heizfläche?
b) Welchen Durchmesser hat der Kessel, wenn das Flammrohr 22% des gesamten Kesselvolumens einnimmt?

45. Eine Rolle mit 120 Windungen Stahldraht ($\varrho = 7{,}8$ kg dm^{-3}) mit einem durchschnittlichen Durchmesser von 60 cm wiegt 10 kp. Welchen Flächeninhalt hat der Drahtquerschnitt?

46. Ein Kegel von 10 cm Höhe hat an der Spitze einen Öffnungswinkel von 30°. Wie groß sind Volumen und Mantelflächeninhalt?

47. Ein kegelförmiger Abraumberg mit einem Böschungswinkel von 35° hat einen unteren Umfang (durch Abschreiten geschätzt) von 28 m. Wie hoch ist der Kegel? Wieviel Kubikmeter Abraum sind abgelagert?

48. Ein kegelförmiger Sandhaufen (Höhe auf 2 m geschätzt; Böschungswinkel auf 30° geschätzt) soll durch Lastkraftwagen mit 3 t Ladefähigkeit abgefahren werden. Wieviel Fuhren sind mindestens erforderlich? (1 m^3 Sand wiegt 1800 kp.)

49. Auf einen zlyindrischen Turm von 11 m Umfang ist ein 6 m hohes kegelförmiges Dach gesetzt und mit Blech beschlagen worden. Für 1 m^2 werden einschließlich Arbeitslohn 5,60 M berechnet. Wie hoch werden die Kosten?

50. Ein rundes Spitzzelt hat einen Durchmesser von 4 m und ist 2 m hoch. Berechnen Sie den Inhalt der Bodenfläche, das Volumen und den Flächeninhalt des benötigten Zeltplanenstoffs (mit Bodenbespannung)!

51. Ein Ballon hat einen Radius von 2,1 m. Wieviel Kubikmeter Raum schließt er ein?

52. Aus einem Holzwürfel von 28 cm Kantenlänge wird die größtmögliche Kugel gedreht. Wieviel Prozent beträgt der Abfall?

53. Wieviel Kugeln von 3 cm Durchmesser können aus einem Stück Bleirohr von 1,80 m Länge, 3 cm Wanddicke und 9 cm lichter Weite durch Schmelzen bei 4% Verlust hergestellt werden?

54. Wieviel wiegt eine eiserne Hohlkugel von 1 cm Wandstärke und einem äußeren Durchmesser von 15 cm? ($\varrho = 7{,}8$ g cm^{-3})

55. Welche Wandstärke hat eine eiserne Kugel mit 1,2 kg Masse, deren äußerer Durchmesser 90 mm beträgt? ($\varrho = 7{,}8$ kg dm^{-3})

56. In einem Zylinder mit der lichten Weite 7 cm steht Wasser bis zur Höhe 11,8 cm. Bis zu welcher Höhe steigt das Wasser, wenn eine Eisenkugel vom Durchmesser 6 cm hineingelegt wird?

57. Welches Volumen hat die Erde, wenn Sie diese als Kugel mit einem Radius von 6370 km annähern?

58. Der Gesteinsmantel der Erde ist etwa 1200 km dick. Berechnen Sie sein Volumen! (vgl. Aufgabe **8/57**)

59. Eine halbkugelförmige Schöpfkelle soll 1 l Flüssigkeit fassen. Wie groß muß ihr lichter Durchmesser sein?

60. Wie groß ist die Erdoberfläche? (vgl. Aufgabe **8/57**)

61. Welchen Durchmesser hat eine Kugel, deren Oberflächeninhalt 1,1 m^2 beträgt?

62. Eine Kugel hat 3 cm, eine andere 4 cm Durchmesser. Welchen Durchmesser hat eine Kugel, deren Oberflächeninhalt gleich der Summe der Oberflächeninhalte der beiden erstgenannten ist?

63. Der Umfang einer Kugel beträgt 157 cm. Wie groß ist **a)** ihr Durchmesser, **b)** ihr Oberflächeninhalt, **c)** ihr Volumen?

64. Eine Kugel hat den Oberflächeninhalt $A_0 = 616$ cm^2. Wie groß ist ihr Volumen?

65. Kann man eine Korkkugel tragen, deren Durchmesser 1 m ist? ($\varrho = 0{,}24$ g cm^{-3}) Wie groß ist ihr Oberflächeninhalt?

66. Die Lunge des Menschen besteht aus rund 1,6 Milliarden kugelförmigen Lungenbläschen vom Durchmesser 0,2 mm. Wie groß ist der gesamte Oberflächeninhalt der Lunge?

67. Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen des Mondes ($d = 3476$ km) und vergleichen Sie mit den entsprechenden Größen der Erde ($r = 6370$ km)!

68. Der Durchmesser eines kugelförmigen Ballons beträgt 22 m. Wieviel Quadratmeter Stoff benötigt man für seine Hülle?

69. Ein zylindrischer Schwimmer mit kugelförmig nach außen gewölbten Böden hat folgende Abmessungen:
Gesamtlänge 700 mm; Segmenthöhen je 100 mm; Durchmesser 400 mm. Man berechne Volumen und Oberflächeninhalt.

70. Man berechne für eine Kugel mit dem Radius 6 cm Volumen bzw. Flächeninhalt von Kugelsegment bzw. Kugelkappe für eine Höhe von 3 cm.

71. Aus einer Holzkugel soll ein Kugelsektor ausgestochen werden, der ein Drittel des Volumens der Kugel ausmacht. Wie groß ist seine Höhe?

72. Eine Kugelkappe hat einen Flächeninhalt von 942,5 cm². Zu ihr gehört ein Kugelradius von 10 cm.

a) Wie groß ist das Volumen des zugehörigen Kugelabschnitts?
b) Wie groß ist das Volumen des zugehörigen Kugelausschnittes?

73. Welchen Oberflächeninhalt hat die Nordpolarzone der Erde, wenn der Erdradius zu 6370 km und der Radius des die Nordpolarzone begrenzenden Kreises zu 2536 km angenommen wird?

74. Eine Bikonkavlinse hat einen Durchmesser von 45 mm und ist am Rande 6 mm dick. Die Radien der Stammkugeln sind je 120 mm lang. Wie groß ist ihre Masse? ($\varrho = 2{,}8\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$)

75. Welchen Flächeninhalt haben die Zonen der Erde, wenn der Erdradius mit 6370 km angenommen wird? Der Abstand von der Äquatorebene betrage für die Polarkreise je 5842 km und für die Wendekreise je 2540 km.

76. Bei einer Glasschale, deren Stammkugel einen Radius von 10,5 cm hat, beträgt die obere lichte Weite 20 cm, während der ebene Boden einen Durchmesser von 10 cm hat.
Wieviel Kubikzentimeter Flüssigkeit faßt sie?

77. Aus einer Kugel ist ein Ausschnitt so herausgenommen, daß seine Höhe die Hälfte des Kugelradius $r = 30$ cm beträgt.
Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen des Kugelausschnitts!

78. Eine Halbkugel wird durch zwei zur Grundfläche parallele Schnitte in 3 Teile von gleichen Höhen zerlegt. In welchem Verhältnis stehen die Volumina dieser Teile zueinander?

79. Eine plankonvexe Linse (Durchmesser 90 mm; Dicke in der Mitte 15 mm) wiegt 118,2 p.
Welche Dichte hat die Glassorte?

80. Ein Kraftstofftank besteht aus einem zylindrischen Teil von 3,50 m Länge und zwei aufgesetzten Kugelkappen von je 180 mm Höhe. Der Durchmesser ist 1,20 m lang.

a) Wieviel Liter faßt der Tank?
b) Welche Masse hat der leere Tank, wenn 1 m² Stahlblech 31,4 kp wiegt?

Lösungen

1. Arbeiten mit Variablen

1. a) $\{0; 1; 2\}$
b) $\{0; 3; 6; 9\}$

2. a) die leere Menge
b) $\{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$

3. a) Elemente: 1; 3; 5; 7; 9
Echte Teilmengen: $\{1\}$; $\{3\}$; $\{5\}$; $\{7\}$; $\{9\}$; $\{1; 3\}$; $\{1; 5\}$; $\{1; 7\}$; $\{1; 9\}$; $\{3; 5\}$; $\{3; 7\}$; $\{3; 9\}$; $\{5; 7\}$; $\{5; 9\}$; $\{7; 9\}$; $\{1; 3; 5\}$; $\{1; 3; 7\}$; $\{1; 3; 9\}$; $\{1; 5; 7\}$; $\{1; 5; 9\}$; $\{1; 7; 9\}$; $\{3; 5; 7\}$; $\{3; 5; 9\}$; $\{3; 7; 9\}$; $\{5; 7; 9\}$; $\{1; 3; 5; 7\}$; $\{1; 3; 5; 9\}$; $\{1; 3; 7; 9\}$; $\{1; 5; 7; 9\}$; $\{3; 5; 7; 9\}$

b) Elemente: 7; 77; 777; 7777
Echte Teilmengen: $\{7\}$; $\{77\}$; $\{777\}$; $\{7777\}$; $\{7; 77\}$; $\{7; 777\}$; $\{7; 7777\}$; $\{77; 777\}$; $\{77; 7777\}$; $\{777; 7777\}$; $\{7; 77; 777\}$; $\{7; 77; 7777\}$; $\{7; 777; 7777\}$; $\{77; 777; 7777\}$

c) Elemente: A; B; C
Echte Teilmengen: $\{A\}$; $\{B\}$; $\{C\}$; $\{A; B\}$; $\{A; C\}$; $\{B; C\}$

d) Elemente: ○; □; △; ◇
Echte Teilmengen: {○}; {△}; {□}; {◇}; {○; △}; {○; □}; {○; ◇}; {△; □}; {△; ◇}; {□; ◇}; {○; △; □}; {○; △; ◇}; {○; □; ◇}; {△; □; ◇}

4. $M_1 = M_3$; $M_2 \sim M_4$

5. a) Kreis
b) Kreiszylinderoberfläche

6. a) Parallelenpaar in dieser Ebene zu der gegebenen Geraden
b) Kugeloberfläche

7. Menge aller Punkte der gegebenen Ebene, die von den beiden Endpunkten der gegebenen Strecke jeweils gleich weit entfernt sind.

8. Menge aller Punkte der gegebenen Ebene, in der der Winkel liegt, die von den beiden Schenkeln des Winkels jeweils gleichen Abstand haben.

9. a) $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$; $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$; $\frac{\text{Ertrag}}{\text{Fläche}}$; $\frac{\text{Produktionsmenge}}{\text{Zeit}}$

b) Beispiele: $\frac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Grundwert}}$; $\frac{\text{Kraft} \cdot \text{Kraftweg}}{\text{Last}}$

10. a) $\{0; 6; 20; 42\}$
b) $\{0; 5; 12; 21; 32; 45; 60; 77; 96\}$
c) $\{0; 99; 9999; 999999\}$
d) $\{95; 174; 287; 440; 639; 890\}$
e) $\{5; 3; 1; 25; 23; 21; 50; 48; 46\}$

11. a) $\{2; 6; 12; 20; 30; 42; 56; 72; 90; 110\}$
b) $\{1; 8; 17; 28; 41; 56; 73\}$
c) $\{42; 59; 66; 74\}$
d) $\{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$
e) $\{4; 6; 2; 4; 0; 2\}$

12. a) $3n$ mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
b) $2n$ mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
c) n^2 mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
d) $2n + 1$ mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
e) n^3 mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
f) n^4 mit $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

13. a) 98; keine; $a - 2$; $2b - 1$; $2b - 2$; keine; $98 - x$
b) $100 - x$; keine; $a - x$; $2b - x + 1$; $2b - x$; $1 - 2b - x$; $100 - 2x$
c) $101 - 2b$; $1 - 2b$; $a - 2b + 1$; 2; 1; $2 - 4b$; $101 - 2b - x$

14. **a)** $103;\ 3;\ a + 3;\ 2b + 2;\ 7b + 3;\ a - 7;\ 4 - 2b$
b) $100 + a;\ a;\ 2a;\ a + 2b - 1;\ a + 7b;\ 2a - 10;\ a + 1 - 2b$
c) $2b + 99;\ 2b - 1;\ a + 2b - 1;\ 4b - 2;\ 9b - 1;\ a + 2b - 11;\ 0$

15. **a)** 19038 **b)** 276536 **c)** 348379 **d)** 905 **e)** 61071
f) 361929 **g)** 14533 **h)** 87485 **i)** 58698 **k)** 695430

16. **a)** 543680 **b)** 649062 **c)** 389470 **d)** 261300
e) 74276400 **f)** 74810411 **g)** 43545312 **h)** 349436700

17. **a)** 368 **b)** 823 **c)** 195 **d)** 303
e) 32845 **f)** 3795 **g)** 76 **h)** 640

18. **a)** $x = 1;\ 2$ **b)** $x = 2$ **c)** $[x;\ x]$

19. **a)** $x = 10, 11, \ldots, 20$ **b)** für kein x **c)** $x < 6$ **d)** $x > 0 \quad (x \in N)$
e) $x \geqq 9 \quad (x \in N)$ **f)** $x \geqq 5 \quad (x \in N)$ **g)** für kein x

20. **a)** $x = 6$ **b)** $x \leqq 4$ **c)** $34 \leqq x \leqq 38$ **d)** für kein x
e) $5 \leqq x \leqq 10$ **f)** für kein x **g)** $x \leqq 1$

21. **a)** für alle x **b)** $x = 5$ **c)** für kein x **d)** $x = 0$ **e)** $x = 5$
f) für kein x **g)** für alle x **h)** $x = 2$ **i)** für alle x **k)** für alle x

22. **a)** $x = 37$ **b)** für kein x **c)** $x = 2$ **d)** für kein x **e)** $x = 1$
f) für kein x **g)** $x = 6$ **h)** $x = 5$ **i)** für alle x **k)** für alle x

23. $\frac{27}{21} = \frac{54}{42} = \frac{18}{14} \neq \frac{15}{32}$

24. **a)** $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$ **c)** $\frac{35}{49} = \frac{15}{21}$ **d)** $\frac{2^2}{2^3} > \frac{3^2}{3^3}$ **e)** $\frac{3^2}{2^3} > \frac{2^3}{3^2}$

25. **a)** $\frac{5}{7} < \frac{7}{9}$ **b)** $\frac{14}{26} < \frac{13}{15}$ **c)** $\frac{14}{26} < \frac{15}{27}$ **d)** $\frac{3}{5} > \frac{9}{25}$ **e)** $\frac{5}{3} < \frac{25}{9}$

26. **a)** $\frac{10}{32} < \frac{33}{100} < \frac{1}{3} = \frac{33}{99} < \frac{5}{14} < \frac{3}{8}$
b) $\frac{22}{33} < \frac{33}{44} < \frac{44}{55} < \frac{66}{77} < \frac{77}{88} < \frac{99}{100}$
c) $\frac{63}{110} < \frac{3}{5} = \frac{63}{105} = \frac{54}{90} = \frac{60}{100} < \frac{99}{150}$

27. **a)** $\frac{7}{10} > \frac{4}{7} > \frac{5}{9} > \frac{3}{6} > \frac{2}{5} > \frac{1}{4}$
b) $\frac{5}{50} > \frac{6}{65} > \frac{5}{55} > \frac{5}{60} > \frac{5}{70}$
c) $\frac{20}{102} > \frac{12}{68} = \frac{9}{51} > \frac{14}{85} > \frac{5}{34}$

31. **a)** für alle $n > 24$ **b)** $n = 24$ **c)** für alle $n < 24$

32. **a)** für alle $n > 11$ **b)** für kein n **c)** für alle $n < 12$

33. **a)** 2 **b)** keine Lösung **c)** $\frac{5}{9}$
d) $\frac{b + c}{5}$ **e)** $\frac{b - c}{5} \quad (c \leqq b)$ **f)** $\frac{b \cdot c}{25}$

34. **a)** $\frac{4}{7}$ **b)** $\frac{45}{49}$ **c)** $\frac{9}{5}$
d) $\frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$ **e)** keine Lösung **f)** $\frac{3}{2}$

35. **a)** $\frac{22}{21} = 1{,}\overline{047619}$ **b)** $\frac{8}{21} = 0{,}\overline{380952}$

c) keine Lösung im Bereich der gebrochenen Zahlen

d) $\frac{21}{5} = 4{,}2$ **e)** $\frac{7}{15} = 0{,}4\overline{6}$ **f)** $\frac{15}{7} = 2{,}\overline{142857}$

36. **a)** $\frac{22}{5} = 4{,}4$ **b)** keine Lösung **c)** $\frac{8}{5} = 1{,}6$

d) $\frac{5}{21} = 0{,}\overline{238095}$ **e)** $\frac{15}{7} = 2{,}\overline{142857}$ **f)** $\frac{7}{15} = 0{,}4\overline{6}$

37. **a)** $\frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$ **b)** $\frac{19}{60} = 0{,}31\overline{6}$ **c)** $\frac{31}{24} = 1{,}291\overline{6}$

d) $\frac{83}{273} = 0{,}\overline{3040290}$ **e)** $\frac{4}{33} = 0{,}\overline{12}$ **f)** $\frac{1}{8} = 0{,}125$

38. **a)** $\frac{37}{15} = 2{,}4\overline{6}$ **b)** $\frac{11}{24} = 0{,}458\overline{3}$ **c)** $\frac{35}{48} = 0{,}7291\overline{6}$

d) $\frac{571}{180} = 3{,}17\overline{2}$ **e)** $\frac{3}{4} = 0{,}75$ **f)** $\frac{12}{5} = 2{,}4$

39. **a)** $\frac{3}{4} = 0{,}75$ **b)** $\frac{9}{4} = 2{,}25$ **c)** $\frac{24}{5} = 4{,}8$

d) $\frac{595}{432} = 1{,}3773\overline{148}$ **e)** $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$

40. **a)** 12 **b)** $\frac{45}{2} = 22{,}5$ **c)** $\frac{12}{11} = 1{,}\overline{09}$ **d)** $\frac{121}{12} = 10{,}08\overline{3}$ **e)** $\frac{4}{9} = 0{,}\overline{4}$

41. **a)** 1 **b)** $\frac{1}{2} = 0{,}5$ **c)** $\frac{6}{7} = 0{,}\overline{857142}$

d) $\frac{16}{25} = 0{,}64$ **e)** $\frac{6}{5} = 1{,}2$ **f)** $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

42. **a)** 2 **b)** 1 **c)** $\frac{1}{2} = 0{,}5$

d) $\frac{77}{78} = 0{,}9\overline{871794}$ **e)** $\frac{6}{35} = 0{,}1\overline{714285}$ **f)** $\frac{6}{35} = 0{,}1\overline{714285}$

43. **a)** $x = \frac{13}{3}$ **b)** keine Lösung **c)** keine Lösung

d) $x = 0$ **e)** $x = 12$ **f)** alle gebrochenen Zahlen

g) $x = 2$ **h)** $x = 6$ **i)** keine Lösung

k) $x = \frac{4}{5}$ **l)** $x = \frac{1}{9}$

44. **a)** zueinander reziprok **b)** gleich

45. $+\frac{7}{13} = +\frac{21}{39} = +\frac{49}{91}$; $-\frac{35}{65} = -\frac{77}{143}$

46. a) $+\frac{9}{15} > +\frac{8}{14} > +\frac{7}{13}$

b) $-\frac{7}{13} > -\frac{8}{14} > -\frac{9}{15}$

c) $+0{,}3 > +\frac{2}{7} > -\frac{1}{3} > -\frac{5}{12}$

d) $+0{,}9 > +0{,}8 > +\frac{3}{5} > +\frac{1}{3} > -\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$

e) $+22{,}8 > +\frac{110}{7} > -0{,}33 > -\frac{1}{3} > -32$

47. a) $\left|+\frac{7}{13}\right| < \left|+\frac{8}{14}\right| < \left|+\frac{9}{15}\right|$

b) $\left|-\frac{7}{13}\right| < \left|-\frac{8}{14}\right| < \left|-\frac{9}{15}\right|$

c) $\left|+\frac{2}{7}\right| < |+0{,}3| < \left|-\frac{1}{3}\right| < \left|-\frac{5}{12}\right|$

d) $\left|-\frac{1}{5}\right| < \left|-\frac{1}{4}\right| < \left|+\frac{1}{3}\right| < \left|+\frac{3}{5}\right| < |+0{,}8| < |+0{,}9|$

e) $|-0{,}33| < \left|-\frac{1}{3}\right| < \left|+\frac{110}{7}\right| < |+22{,}8| < |-32|$

48. a) $+1{,}2$ b) -3 c) $-8{,}2$ d) $-\frac{15}{4}$ e) $+4$ f) $-\frac{1}{6}$

49. a) $-\frac{13}{6}$ b) $+12$ c) $+2$ d) -3 e) $+\frac{3}{4}$ f) $+\frac{12}{2}$

50.

	$a+b+c$	$-(a+b+c)$	$a+b-c$	$a-b+c$	$a-b-c$
a)	-3	$+3$	$+5$	-9	-1
b)	-20	$+20$	-4	-20	-4
c)	$-\frac{19}{30}$	$+\frac{19}{30}$	$-\frac{37}{30}$	$+\frac{1}{30}$	$-\frac{17}{30}$
d)	$+3{,}81$	$-3{,}81$	$+3{,}81$	$+1{,}81$	$+1{,}81$
e)	$-0{,}34$	$+0{,}34$	$-0{,}26$	$+0{,}66$	$+0{,}74$

51.

	$(a+b)\cdot c$	$(a-b)\cdot c$	$(a+b):c$	$(a-b):c$	$a\cdot b\cdot c$
a)	-4	$+20$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{5}{4}$	$+24$
b)	$+96$	$+96$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$	0
c)	$-\frac{7}{25}$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{28}{9}$	$-\frac{8}{9}$	$+\frac{3}{50}$
d)	0	0	nicht lösbar	nicht lösbar	0
e)	$+0{,}012$	$-0{,}028$	$+7{,}5$	$-17{,}5$	$+0{,}004$

52.	$-a$	$-b$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$a+b$	$a-b$	$b-a$
a)	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{11}{4}$	$+\frac{8}{5}$	$-\frac{4}{11}$	$-\frac{17}{8}$	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{27}{8}$
b)	$+0{,}02$	$+0{,}04$	-50	-25	$-0{,}06$	$+0{,}02$	$-0{,}02$
c)	-210	-55	$+\frac{1}{210}$	$+\frac{1}{55}$	$+265$	$+155$	-155
d)	$+\frac{12}{5}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$+\frac{12}{5}$	$-\frac{119}{60}$	$-\frac{169}{60}$	$+\frac{169}{60}$
e)	$+13{,}2$	$+2{,}5$	$-\frac{5}{66}$	$-\frac{2}{5}$	$-15{,}7$	$-10{,}7$	$+10{,}7$
f)	$+\frac{7}{8}$	0	$-\frac{8}{7}$	nicht lösbar	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{8}$	$+\frac{7}{8}$
g)	-1	$+\frac{11}{3}$	$+1$	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{8}{3}$	$+\frac{14}{3}$	$-\frac{14}{3}$
h)	$-0{,}33$	$+1$	$+\frac{100}{33}$	-1	$-0{,}77$	$+1{,}33$	$-1{,}33$
i)	$+1$	-1	-1	$+1$	0	-2	$+2$

53.	$a \cdot b$	$a : b$	$b : a$	$\|a+b\|$	$\|a-b\|$	$\|a \cdot b\|$
a)	$-\frac{55}{32}$	$-\frac{5}{22}$	$-\frac{22}{5}$	$+\frac{17}{8}$	$+\frac{27}{8}$	$+\frac{55}{32}$
b)	$+0{,}0008$	$+0{,}5$	$+2$	$+0{,}06$	$+0{,}02$	$+0{,}0008$
c)	$+11\,550$	$+\frac{42}{11}$	$+\frac{11}{42}$	$+265$	$+155$	$+11\,550$
d)	-1	$-\frac{144}{25}$	$-\frac{25}{144}$	$+\frac{119}{60}$	$+\frac{169}{60}$	$+1$
e)	$+33$	$+\frac{132}{25}$	$+\frac{25}{132}$	$+15{,}7$	$+10{,}7$	$+33$
f)	0	nicht lösbar	0	$+\frac{7}{8}$	$+\frac{7}{8}$	0
g)	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{11}{3}$	$+\frac{8}{3}$	$+\frac{14}{3}$	$+\frac{11}{3}$
h)	$-0{,}33$	$-0{,}33$	$-\frac{100}{33}$	$+0{,}77$	$+1{,}33$	$+0{,}33$
i)	-1	-1	-1	0	$+2$	$+1$

54. a) -4 **b)** $+\frac{1}{6}$ **c)** $-\frac{77}{10}$

55. a) -2 **b)** $+\frac{3}{7}$ **c)** -1

56. a) 210 **b)** -1

57. a) $+34$ **b)** 0

58. a) 0 **b)** $+7$

59. Um entgegengesetzte Zahlen. Ihr Quotient ist -1.

60. a) $6a - 2c$ b) $-a^3 + 5a^2b - 4ab^2$
c) $\frac{1}{4}s + \frac{2}{3}t$ d) $\frac{3}{10}x + \frac{y}{16} - 4\frac{1}{2}$

61. a) $174{,}8x + 296{,}7y + 165{,}6z$ b) $-2{,}01a + 1{,}26b + 4{,}46c$
c) $-6{,}5a + 7{,}5b$ d) $6{,}8a - 0{,}5b$

62. a) $-0{,}4x + 12{,}5xy + 6xz + 7{,}4yz$ b) $-44{,}5m^2 + 16m^2n + 1{,}1mn^2 - 2\frac{3}{8}mn$

63. a) 67,8 b) 11,7 c) 87,6 d) 0,0406 e) 44 700 000 f) 0,69

64. a) 108 b) 19,1 c) 2190 d) 0,0277 e) 25 600 000 f) 0,92

65. a) 391 b) 377 000 000 c) 0,000 0747 d) 48 100 e) 0,000 778

66. a) 80 b) 226 000 000 c) 0,000 05 d) 180 000 e) 0,000 484

67. a) 735 b) 4,98 c) 1,22 d) 14 400
e) 3 400 000 f) 1135 g) 0,000 0876 h) 61 700

68. a) 0,144 b) 2,47 c) 0,000 006 92 d) 0,198
e) 0,000 000 725 f) 0,0933 g) 0,006 12 h) 0,004 62

69. a) $67a + 2b$ b) $68m - 94n$
c) $18b^2 + 70d^2 - 40d + 68c^2$ d) $\frac{3}{10}x + \frac{3}{16}y - 4\frac{1}{2}$

70. a) $p - q + r - 1$ b) $5p - 7q + 9r + 1$
c) $-5p + 7q - 9r - 1$ d) $1\frac{1}{3}p - 1\frac{1}{4}q + 1\frac{1}{3}r - \frac{1}{3}$
e) $5\frac{1}{3}p - 7\frac{1}{4}q + 9\frac{1}{3}r + 1\frac{2}{3}$ f) $\frac{2}{3}p - \frac{3}{4}q + \frac{2}{3}r - 1\frac{2}{3}$
g) $4\frac{2}{3}p - 6\frac{3}{4}q + 8\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}$

71. a) $-2p^3 + 3q^2 - 5r^4 - r^3 - 7$
b) $4p^3 - 5q^2 + 5r^4 - r^3 - 7$
c) $-4p^3 + 5q^2 - 5r^4 + r^3 + 7$
d) $-2p^3 + 3q^2 - 5r^4 - r^3 + \frac{3}{2}p - \frac{5}{7}q + \frac{5}{4}r - 7\frac{3}{7}$
e) $4p^3 - 5q^2 + 5r^4 - r^3 + \frac{3}{2}p - \frac{5}{7}q + \frac{5}{4}r - 7\frac{3}{7}$
f) $-2p^3 + 3q^2 - 5r^4 - r^3 - \frac{3}{2}p + \frac{5}{7}q - \frac{5}{4}r - 6\frac{4}{7}$
g) $4p^3 - 5q^2 + 5r^4 - r^3 - \frac{3}{2}p + \frac{5}{7}q - \frac{5}{4}r - 6\frac{4}{7}$

73. a) $9p - 12q + 15r$ b) $-\frac{2}{3}p + q - \frac{4}{3}r - \frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}p - \frac{3}{16}q + \frac{1}{4}r + \frac{1}{2}$ d) $7p - 10q + 13r + 2$
e) $17p - 24q + 31r + 4$ f) $\frac{109}{40}p - \frac{39}{10}q + \frac{203}{40}r + \frac{4}{5}$
g) $7\frac{1}{3}p - 9q + 11\frac{1}{3}r + \frac{8}{3}$ h) $\frac{23}{24}p - 1\frac{7}{32}q + 1\frac{11}{24}r - \frac{1}{3}$

74. a) $-5b$

b) $-90xy$

c) $30{,}6x^2y - 39{,}95x^2z + 60{,}35^2$

d) $101\frac{1}{2}p^2q - 47\frac{1}{8}pq^2 + 113\frac{1}{10}p^2q^2$

e) $271x - 484y + 10282z$

f) $338o - 312p + 116q + 234$

g) $10\frac{1}{6}a + 17b - 85\frac{5}{6}c$

h) $\frac{1}{8}x^2 - 15\frac{3}{4}xy - \frac{11}{20}xz - y^2 - 1\frac{1}{20}yz$

i) $147x - 137y$

k) $-212x + 108y$

l) $-2a - 8\frac{1}{2}c$

m) $1{,}5x - 12y$

n) $-\frac{1}{5}a - 1\frac{1}{10}b$

75. a) $p_0V_0 + p_0V_0\gamma t_2 - p_0V_0\gamma t_1$

b) $10abc - 20abd$

c) $2a^2bc^2 - 3ab^2c^2$

d) $3 - 6a$

e) $48x^2y - 72x^3$

f) $-200r^2s^2 - 300r^3s$

76. a) $x(-4 + y)$

b) $a\left(\frac{2}{3} + 2\right)$

c) $ab(2 + 3x - y)$

d) $3ab(3ab - 2a - b + 4)$

e) $y(-1 + 3x)$

f) $x(1 + a)$

g) $-x(1 + y)$

h) $5p(5q^2 - 7pq - 5q + 7)$

77. a) $3rst^2(5r - 6s + 11t - 9rs)$

b) $\frac{2}{5}a^2bc(2b - bc + 3c - 4)$

78. a) $0{,}2mn(mn - 3m + 4n - 6)$

b) $18xyz(3x - 6y - 2z)$

79. a) $2m^2nu - 60mu + m^2n - 30m$

b) $-0{,}08uz - \frac{1}{10}u - 0{,}04z - \frac{1}{20}$

c) $-0{,}08uz - \frac{1}{10}u + 0{,}04z + \frac{1}{20}$

d) $-0{,}04m^2nz - \frac{1}{20}m^2n + 1{,}2mz + \frac{3}{2}m$

e) $4u^2 - 1$

f) $\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{15}mn - \frac{15m}{n} + 2$

80. a) $3ax - \frac{2}{3}ay - 3bx + \frac{2}{3}by$

b) $7ax - \frac{5}{2}ay - \frac{7}{2}x + \frac{5}{4}y$

c) $3a - 6b - 3c + ax - 2bx - cx$

d) $ub + ua - uc - 2b^2 - 2ab + bc - ac + c^2$

e) $a - ay + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}y$

f) $4x^2 + \frac{4}{3}xz - 19x + xy + \frac{1}{3}yz - 4y - z + 12$

g) $3a - \frac{3a}{2b} - 2b - \frac{2b}{3a} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{2b} + 3$

h) $50r^3s^3 - 25r^4s^2 - 25r^2s^4$

81. a) $-6x^2 + 26xy + 60xz - 28y^2 - 132yz - 144z^2$

b) $-9m^4 - 78m^3n + 167m^2n^2 - 40mn^3 - 10n^4$

82. a) $3(4a - b)$

b) $-13b(2a + 5c)$

c) $18xyz(3x - 6y - 2z)$

d) $-7r(4s + 11t + 12u + 13v)$

e) $15mn(3n - 1 + 9mn - 7m)$ f) $\frac{1}{12}\pi h(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$

g) $\frac{1}{24}\pi h(3d_1^2 + 3d_2^2 + 4h^2)$ h) $V_0(1 + \gamma \Delta t)$

i) $p_0 V_0[1 + \gamma(t_2 - t_1)]$ k) $a(q^2 - 1)$

l) $q(aq - 1)$ m) $q^2(a - 1)$

83. a) $(a + b)(d - c - e)$ b) $(2m - 7n)(2m - 7l)$

c) $(8x - 3y)\left(\frac{3}{8}u - \frac{1}{2}v\right)$ d) $(a + b)(x - 1)$

e) $(b - 5)(2a + 3)$ f) $(2x - 5y + 3z)(4a - 5b)$

g) $2(3 + 5u)(x - 2y - 1)$ h) $(a - b) \cdot 0 = 0$

84. a) $16 + 8a + a^2$ b) $b^2 - 6b + 9$ c) $b^2 - x^2$

d) $1 - 2y + y^2$ e) $x^2 - 1$ f) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

g) $9 + 6z + z^2$ h) $\frac{36}{25}a^2 - \frac{18}{5}a + \frac{9}{4}$

i) $\frac{4}{25}a^2 + \frac{6}{25}a + 0{,}09$ k) $\frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{3}by + \frac{1}{4}b^2$

85. a) $x^2 + 6xy + 9y^2$ b) $r^2 - 4r + 4$ c) $\frac{1}{4} + n + n^2$

d) $\frac{9}{25}x^2 - \frac{12}{5}xy + 4y^2$ e) $0{,}01m^2n^2$ f) $9I_1^2 - 6I_1I_2 + I_2^2$

g) $196a^2b^2 - 169a^2$ h) $x^2 - 4xy + 4y^2$ i) $9 + 6s + s^2$

k) $25a^2 - 3a + 0{,}09$ l) $0{,}4225$ m) 1024

n) $625a^2b^2 + 10abc + 0{,}04c^2$ o) $0{,}04z^2 - \frac{1}{4}$

86. a) $48xy$ b) $0{,}88a - 0{,}3$ c) $1825b^2 + 3500b - 1225$

87. a) c^2 b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{25}{4}$ d) $\frac{1}{9}$ e) 1 f) 1

88. a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{49}{9}$ d) 1 e) 4 f) 6

89. a) 9 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{400}$ d) $\frac{225}{4}$ e) $\frac{1}{16}$

f) $5184b^2$ g) $100\frac{q^2}{p^2}$ h) $\frac{1}{4}$ i) $\frac{25}{4x^2}$

90. a) $\frac{25}{4}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 1 d) $250\,000$ e) $\frac{b^2}{576}$

f) $4\frac{x^2}{r^2}$ g) 9 h) $\frac{729}{4}$ i) $\frac{25}{4}\frac{x^2}{y^2}$

91. a) $\pm 130z$; $(13 \pm 5z)^2$ b) $\pm 2xyz$; $(xy \pm z)^2$

c) $\pm\frac{mn}{24}$; $\left(\frac{m}{3} \pm \frac{n}{16}\right)^2$ d) $\pm 0{,}3ab$; $(0{,}15a \pm b)^2$

92. a) $+130z$; $-(13 \pm 5z)^2$ b) $\pm 8rs$; $(r \pm 4s)^2$

c) $\pm 0{,}36c$; $(0{,}9 \pm 0{,}2c)^2$

93. a) nicht möglich b) $(a - b)^3$ c) $(m^2 - n^2)^2$ d) $(x + 2)^3$

94. a) $(x+y)(x-y)$ **b)** $(x+1)^4$ **c)** $(x-6)^2$ **d)** $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$

96. a) $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
b) $4x^2+9y^2+16z^2+2(-6xy+8xz-12yz)$
c) $4x^2+9y^2+16z^2+2(-6xy+8xz-12yz)$

97. a) $8xy-7y^2-y$ **b)** $-8xy+7y^2+y$ **c)** $8x-7y-1$
d) $-8x+7y+1$ **e)** $2{,}4x-2{,}1y-0{,}3$

98. a) $-\frac{1}{2}a^2+10ab-3a^2b^2+\frac{3}{2}ab^2$ **b)** $-a+20b-6ab^2+3b^2$
c) $-1+20\frac{b}{a}-6b^2+3\frac{b^2}{a}$ **d)** $-\frac{1}{4}+5\frac{b}{a}-\frac{3}{2}b^2+\frac{3}{4}\frac{b^2}{a}$
e) $-\frac{1}{b}+\frac{20}{a}-6b+3\frac{b}{a}$ **f)** $-\frac{1}{4b^2}+\frac{5}{ab}-\frac{3}{2}+\frac{3}{4a}$
g) $-\frac{1}{100b^2}+\frac{1}{5ab}-\frac{3}{50}+\frac{3}{100a}$

99. a) $b+a-c+4$ **b)** $ab+b-1$
c) $\frac{rt}{2}+sr-2t^2+\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{5}{2}p+3-q$

100. a) $2x-ay+y$ **b)** $m+n+2$ **c)** $14rs-8$ **d)** $-6y+12$

101. a) $x+1$ **b)** $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$

102. a) $b+c-1$ **b)** $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

103. a) $c^2+2cd-4d^2$ **b)** x^3-2x^2-3x-4
c) $\frac{27}{64}a^3+\frac{9}{40}a^2b+\frac{3}{25}ab^2+\frac{8}{125}b^3$

104. a) $9r^2s^2-6rs-1$ **b)** $\frac{1}{2}m-\frac{1}{5}n$ **c)** $\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{16}$

105. a) $3a^2-7ab+5b^2$ **b)** $x+3$ **c)** $\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}$
d) $2x+3$ **e)** $125p^3-25p^2-5p+1$ **f)** $3x^2+2xy-y^2$

106. Die Zahlen sind teilbar durch

a) 2, 3, 6 **b)** 2, 5, 10
c) 2, 3, 6 **d)** 2, 4, 8
e) 2, 4 **f)** 2, 4, 8, 10, 25, 50, 100
g) 2, 3, 4, 5, 6, 10, 25, 50, 100 **h)** 2, 3, 4, 5, 6, 10, 25, 50, 100
i) 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 25, 50, 100 **k)** 2, 4, 8
l) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 25, 50, 100 **m)** 3, 5, 25

107. a) $2^2\cdot 3^2$ **b)** $2^3\cdot 7$ **c)** $7\cdot 13$ **d)** $2\cdot 3^2\cdot 5$
e) $3\cdot 5\cdot 7$ **f)** $2\cdot 3^2\cdot 7$ **g)** $2^3\cdot 19$ **h)** $2^3\cdot 3\cdot 7$
i) $2\cdot 3^2\cdot 11$ **k)** $3^2\cdot 5^2$ **l)** $2^4\cdot 3\cdot 5$ **m)** $2\cdot 3^2\cdot 17$
n) $2^3\cdot 5\cdot 11$ **o)** $2^3\cdot 3^2\cdot 7$ **p)** 5^4 **q)** $2^4\cdot 3^2\cdot 5$
r) $2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ **s)** $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$ **t)** $2^6\cdot 3\cdot 5$ **u)** $2^3\cdot 5^3$

108. 181; 373

109. Sie hat stets den Primfaktor 2.

110. a) g. g. T. 4; k. g. V. 168 **b)** g. g. T. 14; k. g. V. 210
c) g. g. T. 9; k. g. V. 270 **d)** g. g. T. 13; k. g. V. 78

111. a) g. g. T. 2; k. g. V. 240 **b)** g. g. T. nicht vorhanden; k. g. V. 1050
c) g. g. T. nicht vorhanden; k. g. V. 240 **d)** g. g. T. nicht vorhanden; k. g. V. 1260

112.

	a)	b)	c)	d)	e)
g. g. T. k. g. V.	5 420	5 600	65 780	5 4290	55 3960

113.

	a)	b)	c)	d)	e)
g. g. T. k. g. V.	21 210	42 1260	35 525	3 1260	12 240

114.

	a)	b)
g. g. T. k. g. V.	abc $a^2b^2c^2$	ac^2 $a^2b^2c^2$

115.

	a)	b)
g. g. T. k. g. V.	xyz $x^2y^2z^2$	x xyz

116. a) g. g. T. r^2st
k. g. V. $r^3s^2t^3$

b) g. g. T. rs^2t^2
k. g. V. $r^2s^3t^2$

c) g. g. T. $21mn$
k. g. V. $63m^2n^2$

d) g. g. T. $42mn$
k. g. V. $84m^2n^2$

117. a) g. g. T. $a + b$
k. g. V. $(a + b)^2 (a - b)$

b) teilerfremd
k. g. V. $(2p - 3q)^2 (2p + 3q)^2$

c) teilerfremd
k. g. V. $-(x + y)^2 (x - y)^2$

118. a) a^2b^2 **b)** $60x^2y^2$ **c)** $a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$
d) $60a^2b^2$ **e)** $(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)$ **f)** $2(5y - 2z)(2y - 5z)$

119. a) $\frac{36}{96}$ **b)** $\frac{495}{540}$ **c)** $\frac{1005}{1206}$ **d)** $\frac{40}{60}$ **e)** $\frac{56}{70}$
f) $\frac{189}{217}$ **g)** $\frac{851}{1173}$ **h)** $\frac{91}{143}$ **i)** $\frac{1440}{2070}$

120. a) $\frac{120ab}{112bc}$ **b)** $\frac{5st(a + b)}{85rst}$ **c)** $\frac{6m^3n}{10m^2n^2}$
d) $\frac{13(x - y)}{x^2 - y^2}$ **e)** $\frac{8}{16p^2 - 4q}$ **f)** $\frac{7(3x + 0{,}5)}{(3x + 0{,}5)^2}$

121. a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{9}{10}$ **c)** $\frac{7}{8}$ **d)** $\frac{15}{16}$ **e)** $\frac{109}{117}$ **f)** $\frac{7}{8}$
g) $\frac{11}{13}$ **h)** $\frac{2}{3}$ **i)** $\frac{1}{2}$ **k)** $\frac{7}{11}$ **l)** $\frac{10}{13}$ **m)** $\frac{1}{37}$

122. a) $\frac{22p}{3q}$ **b)** $\frac{1}{x^2}$ **c)** 7

123. a) x^2 **b)** $\frac{10a^2 - 5b^2}{2a - b}$ **c)** $3(x - 1)$

124. a) $-r - s$ **b)** $-a + b$ **c)** $\frac{(5 + 2x)(5 - 2x)^2}{5}$

125. a) $-\frac{1}{2}$ **b)** $2x - 5$ **c)** $\frac{(5p - 3q)^3}{3p - 5q}$

126. a) $\frac{91}{24}$ b) $\frac{623}{180}$ c) $\frac{491}{120}$ d) $\frac{61}{15}$

127. a) 14 b) $12\frac{5}{6}$ c) $19\frac{1}{2}$

128. a) $5\frac{19}{20}$ b) 4 c) $27\frac{17}{40}$

129. a) $\frac{503}{48x}$ b) $\frac{3a^2+4bc-9b^2+16}{abc}$ c) $\frac{4n^2-6m^2+8mn-13}{2mn}$

d) $\frac{12ax-5+3a^2-8x}{a^2}$

130. a) $\frac{a^6-b^6}{a^3b^3}$ b) $\frac{4+c^2}{2c}$

c) $\frac{-100x-20y^3-5y^2+41y+20}{160y^2+200y}$ d) $\frac{2u^3+5u^2-u^2v+3uv^2-5v^2}{u^3-uv^2}$

131. a) $\frac{b+g}{bg}$ b) $\frac{1+x^4}{x^2}$ c) $\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$ d) $\frac{4m^2+8mn-5n^2}{m^2n+mn^2}$

132. a) $\frac{2c^3-35c^2+127c}{c^3-12c^2+47c-60}$ b) $\frac{-251s-49}{15r-30t}$ c) $\frac{7y^2-5x^2+3(x+y)}{xy(x+y)}$

133. a) $\frac{-26m^2+36mn-27m-30n^2+27n}{24mn(m-n)}$ b) $\frac{22m+3}{3m+1}$

c) $\frac{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}{R_1R_2R_3R_4}$

134. a) $\frac{-22m^4+22m^3n+23m^2-29mn^3-34mn+29n^4+17n^2}{m^3-m^2n-mn^2+n^3}$

b) $\frac{-56y^4+28y^4z-92y^3z+16y^3z^2-6y^2z^2-29y^2z^3-72yz^3-23yz^4+42z^4}{12y^4z^2-12y^2z^4}$

137. a) 1 b) $\frac{13a}{5b}$ c) $9m$

138. a) $\frac{ru}{sv}$ b) $\frac{4q}{p}$ c) $9m$

139. a) $\frac{2x^2}{bmyz}$ b) $\frac{8y}{15z}$ c) 1

140. a) $\frac{m^2p}{2n}$ b) $\frac{abc}{xyz}$ c) $\frac{1}{nr}$

141. a) $\frac{1}{(a+b)^2}$ b) 1 c) $\frac{x}{x+y}+y$ d) 1

e) $\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}$

142. a) $\frac{1}{a^2-b^2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{9}{11}$ d) $\frac{x^2}{y^2}-\frac{2x}{y}+1$

143. a) $\frac{4}{ax}$ b) $\frac{1}{abxy}$ c) $\frac{5}{3}$

144. a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{b}{25x^2}$ c) $\frac{1}{2q}$

145. a) $\frac{x}{6}$ b) $-8000fmp$ c) $\frac{1}{135b^2}$ d) $\frac{20y}{3}$

146. a) $\frac{64}{81a^2b^2c^2}$ b) $\frac{9x^2}{2r^2s}$ c) $-\frac{2}{3xy}$ d) $-6r^2$

147. a) $\frac{2500b^2}{a}$ b) $\frac{4}{a}$ c) -8 d) $\frac{1573xy}{69}$ e) $-6s$

148. a) -25 b) $-\frac{9}{2x}$ c) $\frac{81a}{128b}$ d) $\frac{69}{1573xy}$ e) $\frac{30n}{m}$

149. a) $-\frac{2p}{3q}$ b) $a-b$ c) $\frac{a-b}{-am^3+am^2n+amn^2-an^3}$

150. a) $\frac{9ax}{4by}$ b) $\frac{y(a^2+b^2)}{4x(a-b)}$ c) $\frac{a-b}{(a+b)^2}$

151. a) $\frac{5}{7}<\frac{9}{7}$ b) $\frac{8}{27}<\frac{23}{27}$ c) $\frac{5}{9}>\frac{5}{11}$ d) $\frac{15}{901}<\frac{15}{900}$

e) $\frac{39}{102}<\frac{2}{5}$ f) $\frac{215}{105}>-\frac{351}{189}$ g) $-\frac{209}{113}<-\frac{95}{63}$ h) $\frac{50}{71}<\frac{118}{121}$

i) $\frac{15}{18}=\frac{70}{84}$ k) $\frac{13}{12}=\frac{143}{132}$ l) $-\frac{151}{201}<-\frac{3}{4}$ m) $\frac{7}{8}<\frac{8}{9}$

152. a) $\frac{a}{b}>\frac{2a}{3b}$ b) $\frac{a}{5ab}<\frac{3b}{7b^2}$ c) $\frac{a+b}{a-b}\gtrless\frac{a-b}{a+b}$ für $a\gtrless b$

153. a) $\frac{x}{2y}=\frac{11x}{22y}$ b) $\frac{rs}{3st}>\frac{rst}{4st^2}$ c) $\frac{2x-y}{2x+y}>\frac{x-2y}{x+2y}$

2. Lineare Funktionen; lineare Gleichungen

1. a) $M=\left\{[1;1],\left[2;\frac{1}{2}\right],\left[4;\frac{1}{4}\right]\right\}$ b) $M=\left\{\left[1;\frac{1}{4}\right],\left[2;\frac{1}{2}\right],[4;1]\right\}$

2. a) $M=\left\{\left[1;\frac{1}{9}\right],\left[3;\frac{1}{3}\right],[9;1]\right\}$ b) $M=\left\{[1;1],\left[3;\frac{1}{3}\right],\left[9;\frac{1}{9}\right]\right\}$

3. a) $M=\left\{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{12}\right],[0;0],\left[\frac{1}{2};\frac{1}{12}\right],\left[1;\frac{1}{3}\right],\left[\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right],\left[2;\frac{4}{3}\right]\right\}$ $f(x)=\frac{x^2}{3}$

b) $M=\left\{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{36}\right],[0;0],\left[\frac{1}{2};\frac{1}{36}\right],\left[1;\frac{1}{9}\right],\left[\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right],\left[2;\frac{4}{9}\right]\right\}$ $f(x)=\left(\frac{x}{3}\right)^2$

4. a) $M=\{[0;5],[4;4],[8;3],[12;2],[16;1],[20;0]\}$
Definitionsbereich $X=\{0;4;8;12;16;20\}$
Wertevorrat $Y=\{0;1;2;3;4;5\}$

b) $M = \{[0; 10], [3; 9], [6; 8], [9; 7], [12; 6], [15; 5], [18; 4]\}$
Definitionsbereich $X = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$
Wertevorrat $Y = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

5. a)

$\mathfrak{P}$ (in p)	10	20	30	50	60
l (in mm)	115	130	145	175	190

b) $l = 100 + \frac{3}{2} \cdot \mathfrak{P}$ (l in mm, $\mathfrak{P}$ in p)

6. a)

t (in min)	10	20	30	40	50
s (in km)	18	28	38	48	58

b) $s = 8 + t$ (s in km; t in min)

8. Anstieg:

a) 0,2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 0,8 **d)** 1 **e)** 1,2 **f)** 2 **g)** 5 **h)** 20

i) -30 **k)** -8 **l)** -2 **m)** -1 **n)** $-\frac{1}{2}$ **o)** $-\frac{1}{5}$ **p)** $-\frac{1}{10}$

Koordinaten der Eckpunkte des Steigungsdreiecks [neben (0; 0) und (1; 0)]:

a) (1; 0,2) **b)** $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ **c)** (1; 0,8) **d)** (1; 1) **e)** (1; 1,2)
f) (1; 2) **g)** (1; 5) **h)** (1; 20) **i)** (1; -30) **k)** (1; -8)
l) (1; -2) **m)** (1; -1) **n)** $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ **o)** $\left(1; -\frac{1}{5}\right)$ **p)** $\left(1; -\frac{1}{10}\right)$

Steigungswinkel (runde Werte):

a) 11° **b)** 27° **c)** 39° **d)** 45° **e)** 50°
f) 63° **g)** 79° **h)** 87° **i)** 92° **k)** 97°
l) 117° **m)** 135° **n)** 153° **o)** 169° **p)** 174°

10. Eine Schar paralleler Geraden mit dem Anstieg -2

11. Ein Geradenbüschel mit dem Büschelzentrum in $(0; -2{,}4)$

12. a) $y = \frac{3}{5}x + 3$; $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$; $y = \frac{3}{5}x - 5$

b) $y = -5x + 3$; $y = -5x + \frac{1}{2}$; $y = 5x - 5$

15. a) zu **13. a)** $Y = \{-2; 1; 4; 7; 10; 13\}$

b) $Y = \left\{\frac{1}{2}; \frac{7}{10}; \frac{9}{10}; \frac{11}{10}; \frac{13}{10}; \frac{15}{10}\right\}$

c) $Y = \left\{0; -\frac{3}{2}; -3; -\frac{9}{2}; -6; -\frac{15}{2}\right\}$

d) $Y = \{-1; 4\}$

zu **14. a)** $Y = \{-1{,}6; -0{,}6; 0{,}4; 1{,}4; 2{,}4; 3{,}4\}$

b) $Y = \{2; -3; -8; -13; -18; -23\}$

c) $Y = \left\{-\frac{3}{5}; -\frac{7}{5}; -\frac{11}{5}; -\frac{15}{5}; -\frac{19}{5}; -\frac{23}{5}\right\}$

d) $Y = \{2; 6\}$

b) zu **13. a)** $Y = \{-8; -5; -2; 1; 4; 7\}$

b) $Y = \left\{\frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{2}; \frac{7}{10}; \frac{9}{10}; \frac{11}{10}\right\}$

c) $Y = \left\{3; \frac{3}{2}; 0; -\frac{3}{2}; -3; -\frac{9}{2}\right\}$

d) $Y = \{-1; 4\}$

zu **14. a)** $Y = \{-3{,}6; -2{,}6; -1{,}6; -0{,}6; 0{,}4; 1{,}4\}$

b) $Y = \{12; 7; 2; -3; -8; -13\}$

c) $Y = \left\{1; \frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; -\frac{7}{5}; -\frac{11}{5}; -3\right\}$

d) $Y = \{2; 6\}$

16. $y = \frac{3}{4}x - 6$

17. $y = -3x + 2$

18.

	Schnittpunkte mit:	x-Achse	y-Achse
a)	$y = -\frac{3}{2}x + 5$	$\frac{10}{3}$	5
	$y = -\frac{3}{2}x$	0	0
	$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
	$y = -\frac{3}{2}x + 2{,}8$	$\frac{28}{15}$	$\frac{14}{5}$
b)	$y = -\frac{3}{7}x + 1$	$\frac{7}{3}$	1
	$y = -\frac{3}{7}x - 4$	$-\frac{28}{3}$	-4
	$y = -\frac{3}{7}x - \frac{7}{4}$	$-\frac{49}{12}$	$-\frac{7}{4}$
	$y = -\frac{3}{7}x - 1{,}2$	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{6}{5}$

19.

	Schnittpunkte mit:	x-Achse	y-Achse
a)	$y = -x + 3$	3	3
	$y = -x - 2$	-2	-2
	$y = -x + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$y = -x + 0{,}8$	$0{,}8$	$0{,}8$
b)	$y = 2x + 4$	-2	4
	$y = 2x - 1$	$\frac{1}{2}$	-1
	$y = 2x + \frac{5}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$
	$y = 2x + 1{,}8$	$-0{,}9$	$1{,}8$

21. P_1 auf **c)**; P_2 auf **c)**; P_3 auf **a)** und **c)**; P_4 auf **b)**; P_6 auf **c)**

22. **a)** $y = 2x$ **b)** $y + \frac{5}{3}x = 0$ **c)** $6y + x = 0$ **d)** $10y - 3x = 0$

23. **a)** nicht **b)** nicht **c)** y-Achse **d)** x-Achse

24. **a)** x- und y-Achse **b)** nicht **c)** y-Achse **d)** x-Achse

25. **a)** -2 **b)** 6 **c)** 0 **d)** 4 **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** 6

27. **a)** bis **f)**: ja

28. **a)** ja **b)** nein **c)** ja **d)** nein **e)** nein **f)** nein
g) ja **h)** ja **i)** nein **k)** ja

29. **a)** $x = 1$ **b)** $x = -\frac{1}{3}$ **c)** $x = -66$ **d)** $x = \frac{5}{4}$ **e)** $x = \frac{13}{8}$ **f)** $x = -1$

30. **a)** $x = 6$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 10$

31. **a)** $x = \frac{2}{3}$ **b)** $x = -\frac{4}{3}$ **c)** keine Lösung

32. **a)** $x = a - b$ **b)** $x = \frac{c - b}{a}$ $(a \neq 0)$ **c)** $x = -rs$
d) $x = \frac{a \cdot c}{b}$ $(b \neq 0)$ **e)** $x = \frac{mn + pq}{m - p}$ $(m \neq p)$

33. **a)** $x = m - n$ **b)** $x = ab + ac$ **c)** $x = \frac{c}{a - b}$ $(a \neq b)$
d) $x = \frac{pr}{q}$ $(q \neq 0)$ **e)** $x = \frac{a(a + 1)}{a - 1}$ $(a \neq 1)$

34. **a)** $b = \frac{2a}{c + d}$ $(c + d \neq 0)$; $c = \frac{2a}{b} - d$ $(b \neq 0)$; $d = \frac{2a}{b} - c$ $(b \neq 0)$
b) $b = \frac{2ac}{c - d}$ $(c \neq d)$; $c = \frac{bd}{b - 2a}$ $(b \neq 2a)$; $d = \frac{c(b - 2a)}{b}$ $(b \neq 0)$
c) $a = \frac{bc}{b + c}$ $(b + c \neq 0)$; $b = \frac{ac}{c - a}$ $(a \neq c)$; $c = \frac{ab}{b - a}$ $(a \neq b)$

35. **a)** $b = \frac{a}{c(d - e)}$ $(c \neq 0, d \neq e)$; $c = \frac{a}{b(d - e)}$ $(b \neq 0, d \neq e)$;
$d = \frac{a}{bc} + e$ $(b \neq 0, c \neq 0)$; $e = d - \frac{a}{bc}$ $(b \neq 0, c \neq 0)$
b) $b = \frac{2a}{c} - d$ $(c \neq 0)$; $c = \frac{2a}{b + d}$ $(b + d \neq 0)$; $d = \frac{2a}{c} - b$ $(c \neq 0)$
c) $b = \frac{a}{1 + cd}$ $(cd \neq -1)$; $c = \frac{a - b}{bd}$ $(b \neq 0, d \neq 0)$; $d = \frac{a - b}{bc}$ $(b \neq 0, c \neq 0)$

36. **a)** $x = \frac{2b^2}{2b - 1}$ $(2b \neq 1)$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = a$ **d)** $x = 3$
e) $x = 8$ **f)** $x = \frac{3}{4}$ **g)** $x = 14$ **h)** $x = 9{,}5$
i) $x = -3b$ **k)** $x = -5\frac{7}{17}$ **l)** $x = \frac{2ac - ab + bc}{2(2a - c)}$ $(2a \neq c)$
m) $x = \frac{2a^2 + b^2}{b}$ $(b \neq 0)$

37. **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** 9; 10; 11 **c)** $-\frac{1}{4}$

38. **a)** 10; 11 **b)** $\frac{8}{3}$ **c)** $-\frac{2}{15}$ **39.** 25 kΩ

40. $R_1 = 24{,}5\ \Omega$; $R_2 = 49\ \Omega$; $R_3 = 98\ \Omega$ **41.** 8 h

42. 50 M, 75 M, 60 M **43.** $1\frac{1}{2}$ h **44.** 3 : 10

45. $c = 25{,}2$ cm; $a = b = 21{,}2$ cm **46.** $A = 6\frac{2}{3}$ cm² **47.** 600 m

48. **a)** $x = 11$; $y = 55$ **b)** $x = 13$; $y = 5$
c) Alle Paare $[x; y]$, die der Gleichung $y = \frac{2}{7}x$ genügen.
d) $x = 36$; $y = 18$

49. **a)** $x = 15$; $y = 5$ **b)** $x = 8$; $y = 6$ **c)** $x = 5$; $y = -2$
d) $x = 80$; $y = 20$

50. **a)** $x = \frac{8}{5}$; $y = \frac{21}{5}$ **b)** $x = \frac{5}{6}$; $y = \frac{3}{5}$ **c)** $x = \frac{6000}{29}$; $y = \frac{-7420}{29}$

51. **a)** $x = -2$; $y = 4$ **b)** $x = 0{,}8$; $y = -3{,}2$ **c)** $x = -2$; $y = 3$

52. **a)** $x = 2$; $y = -1$ **b)** $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{3}$ **c)** $u = 4$; $v = \frac{1}{2}$
d) $x = 10$; $y = -3$ **e)** $a = \frac{1}{6}$; $b = \frac{1}{7}$

53. **a)** $x = 3$; $y = 2$ **b)** $x = -8$; $y = -5$ **c)** $x = 4$; $y = \frac{3}{2}$
d) $a = -\frac{25}{3}$; $b = \frac{11}{3}$ **e)** $y = 1$; $z = 18$

54. **a)** $x = \frac{10}{3}$; $y = 0$ **b)** $x = 6$; $y = -2$ **c)** $x = -\frac{7}{5}$; $y = -\frac{1}{2}$
d) $x = 0$; $y = -1$ **e)** $x = -5$; $y = -13$

55. **a)** $x = \frac{8}{7}$; $y = 4$ **b)** $r = 3$; $s = -2$ **c)** $x = 3$; $y = -\frac{1}{2}$
d) $x = 5$; $y = 3$ **e)** $x = 3$; $y = 2$

56. **a)** $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{a-b}{2}$ **b)** $x = \frac{-5b}{a-b}$; $y = \frac{5a}{a-b}$ $(a - b \neq 0)$
c) $x = \frac{1}{a+b}$; $y = \frac{1}{a+b}$ $(a + b \neq 0)$

57. **a)** $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{a}{2} - b$ **b)** $x = \frac{c}{a-b}$; $y = \frac{-c}{a-b}$ $(a \neq b)$
c) $x = \frac{m+an}{2a}$; $y = \frac{m-an}{2a}$ $(a \neq 0)$

58. 45; 7 **59.** 18; 32 **60.** 55 **61.** 73

62. 35 Ladungen zu 6 t, 27 Ladungen zu 10 t

63. 6 Wagen mit 15 t, 32 Wagen mit 20 t

64. 502,875 l; 201,25 l je 100 km

65. **a)** 45 min; 37,5 km **b)** 54 min; 45 km

66. 126 min **67.** $6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

68. 1,8 A; 1,2 A **69.** 23 kg Kupfer, 11 kg Zink

70. **a)** $x = 2; y = 1$ **b)** $x = -2; y = -2$ **c)** $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$
d) $x = 2; y = 1$ **e)** $x = -3; y = -\frac{9}{2}$ **f)** $x = -45; y = -30$

71. **a)** $x = 3; y = 10$ **b)** $x = 7; y = 3$ **c)** $x = -3; y = -\frac{3}{2}$
d) $x = 1{,}3; y = 0{,}2$ **e)** $x = -\frac{1}{3}; y = -\frac{2}{3}$ **f)** $x = 3; y = 1$

72. **a)** Keine Lösung
b) Jedes Zahlenpaar $[x; y]$, das eine der Gleichungen erfüllt.
c) $x = 0; y = 0$

73. **a)** Keine Lösung **b)** $x = 3; y = 1$
c) Jedes Zahlenpaar $[x; y]$, das eine der Gleichungen erfüllt.

3. Winkelfunktionen; Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks

1. **a)** 0,0175 **b)** 0,00175 **c)** 0,000175 **d)** 0,000291 **e)** 0,00000485
f) $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$ **g)** $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$ **h)** $\frac{5\pi}{12} \approx 1{,}309$ **i)** $\frac{5\pi}{3} \approx 5{,}236$ **k)** $\pi = 3{,}1416$
l) 6,1087 **m)** 0,5585 **n)** 1,1781 **o)** 1,7925 **p)** 4,4782
q) 5,5509 **r)** 3,0967

2. **a)** 60° **b)** 36° **c)** 18° **d)** 12° **e)** 6°
f) 1° **g)** 270° **h)** 135° **i)** 157,5° **k)** 15°
l) 203,4° **m)** 5,73° **n)** 0,573° **o)** 114,6° **p)** 85,94°
q) 174,2° **r)** 180° **s)** 120° **t)** 171,9° **u)** 40,3°

3.

x	22,5°	45°	67,5°
$\sin x$	0,38	0,71	0,92
$\cos x$	0,92	0,71	0,38
$\tan x$	0,41	1	2,41
$\cot x$	2,41	1	0,41

4. **a)** 0,2079 **b)** 0,9945 **c)** 0,0523 **d)** 0,4848 **e)** 0,6018
f) 0,9994 **g)** 0,9563 **h)** 0,8480 **i)** 0,6293 **k)** 0,3746

5. **a)** 0,3839 **b)** 1,600 **c)** 0,0875 **d)** 0,2126 **e)** 0,6009
f) 7,115 **g)** 4,331 **h)** 0,4877 **i)** 0,2493 **k)** 0,0524

6. **a)** 0,0976 **b)** 0,6170 **c)** 0,4586 **d)** 0,9770 **e)** 0,6547
f) 0,5948 **g)** 0,9789 **h)** 0,7120 **i)** 0,0419 **k)** 0,5165

7. **a)** 0,0087 **b)** 28,64 **c)** 1,488 **d)** 0,9623 **e)** 2,578
f) 1,582 **g)** 0,7701 **h)** 0,3076 **i)** 0,4706 **k)** 0,7481

8. **a)** 0,8491 **b)** 0,8945 **c)** 0,9988 **d)** 0,5629 **e)** 0,3295
f) 0,9209 **g)** 0,9547 **h)** 0,7963 **i)** 0,9858 **k)** 0,9998

9. **a)** 0,0335 **b)** 0,3142 **c)** 0,5441 **d)** 0,8293 **e)** 0,8916
f) 3,801 **g)** 1,998 **h)** 1,453 **i)** 1,040 **k)** 0,7411

10. **a)** 0,2694 **b)** 3,283 **c)** 0,2383 **d)** 0,4787 **e)** 22,37
f) 0,9891 **g)** 0,7330 **h)** 0,9017

11. **a)** 16° **b)** 38° **c)** 62° **d)** 28,6° **e)** 17,4° **f)** 30,7°
g) 87,4° **h)** 7,2° **i)** 81,1° **k)** 46,7° **l)** 42,9° **m)** 13,5°

12. **a)** 4° **b)** 15° **c)** 56° **d)** 44,2° **e)** 8,5° **f)** 24,4°
g) 28,2° **h)** 72,7° **i)** 21,1° **k)** 16,3° **l)** 9,9° **m)** 89,7°

13. **a)** 39,85° **b)** 28,11° **c)** 56,18° **d)** 39,05° **e)** 37,37° **f)** 0,46°
g) 80,21° **h)** 69,68° **i)** 9,17° **k)** 89,79° **l)** 91,85° **m)** 0,6° bis 0,9°

14. **a)** 18,05° **b)** 32,72° **c)** 45,63° **d)** 83,04° **e)** 36,57° **f)** 30,96°
g) 75,91° **h)** 64,55° **i)** 37,12° **k)** 42,67° **l)** 45,06° **m)** 89,89°

16.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)	l)	m)	n)	o)	p)	q)	r)	s)	t)	u)	v)
$\sin x$	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+
$\cos x$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	+	−	+	−	−	+
$\tan x$	+	−	−	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	+
$\cot x$	+	−	−	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	+

17.

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos x$	1	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174	0
$\cot x$	–	5,671	2,747	1,732	1,192	0,839	0,577	0,364	0,176	0

18. Die zum Argument 45° gehörenden Punkte.

19. Außer den in Aufgabe **3/18** genannten Punkten haben noch gemeinsam:
Sinus- und Tangensfunktion den zum Argument 0° gehörenden Punkt;
Kosinus- und Kotangensfunktion den zum Argument 90° gehörenden Punkt;
Sinus- und Kotangensfunktion den zum Argument 51,8° gehörenden Punkt;
Kosinus- und Tangensfunktion den zum Argument 38,2° gehörenden Punkt.

20. **a)** $\beta = 9{,}5°$; $b = 2{,}1$ cm; $c = 12{,}9$ cm; $A = 13{,}5\ \text{cm}^2$
b) $\beta = 72{,}7°$; $a = 23{,}22$ m; $c = 78{,}1$ m; $A = 865{,}4\ \text{m}^2$
c) $\alpha = 53{,}13°$; $\beta = 36{,}87°$; $c = 3$ m; $A = 6\ \text{m}^2$
d) $\alpha = 53{,}13°$; $\beta = 36{,}87°$; $c = 20$ cm; $A = 96\ \text{cm}^2$
e) $\beta = 54{,}4°$; $a = 73$ m; $b = 102$ m; $A = 3723\ \text{m}^2$
f) $\alpha = 49{,}7°$; $a = 8{,}01$ cm; $b = 6{,}79$ cm; $A = 27{,}19\ \text{cm}^2$
g) $\beta = 49{,}7°$; $b = 74$ mm; $c = 97$ mm; $A = 2331\ \text{mm}^2$
h) $\alpha = 27{,}7°$; $a = 42{,}37$ m; $c = 91{,}14$ m; $A = 1710\ \text{m}^2$

21. **a)** $\alpha = 41{,}8°$; $\beta = 48{,}2°$; $a = 12$ m; $b = 13{,}4$ m; $A = 80{,}5$ m²
b) $\alpha = \beta = 45°$; $a = b = 4{,}95$ cm; $c = 7$ cm; $A = 12{,}25$ cm²
c) $\beta = 52{,}5°$; $a = 16{,}8$ cm; $b = 21{,}8$ cm; $c = 27{,}5$ cm; $A = 183{,}1$ cm²
d) $\alpha = 62{,}4°$; $\beta = 27{,}6°$; $a = 48{,}4$ m; $b = 54{,}6$ m; $A = 612{,}1$ m²
e) $\beta = 63{,}5°$; $a = 14{,}5$ cm; $b = 29{,}1$ cm; $c = 32{,}6$ cm; $A = 211{,}6$ cm²
f) $\alpha = \beta = 45°$; $a = b = 24$ cm; $c = 34$ cm; $A = 288$ cm²

22. **a)** $\alpha = \beta = 53{,}67°$; $a = b = 105{,}5$ m; $\gamma = 72{,}66°$; $A = 5312$ m²
b) $\alpha = \beta = 70{,}26°$; $\gamma = 39{,}48°$; $A = 4{,}35$ m²
c) $\alpha = \beta = 72{,}12°$; $\gamma = 35{,}76°$; $A = 9{,}50$ m²
d) $\alpha = \beta = 62{,}30°$; $a = b = 21{,}13$ cm; $A = 183{,}7$ cm²
e) $a = b = 62{,}51$ dm; $\gamma = 74{,}76°$; $\alpha = \beta = 52{,}62°$; $A = 18{,}85$ m²
f) $a = b = 4{,}980$ m; $c = 2{,}753$ m; $\alpha = \beta = 73{,}95°$; $A = 6{,}589$ m²

23. Winkel zwischen Diagonale und Rechteckseite: 37,36° bzw. 52,64°
Winkel zwischen den Diagonalen: 105,28° bzw. 74,72°

24. $a = 3{,}0$ m; $b = 5{,}8$ m

25. $e = 23{,}1$ cm; $f = 9{,}6$ cm; $A = 110{,}9$ cm²

26.

	F_Z	F_D
30°	800 kp	693 kp
45°	566 kp	400 kp
60°	462 kp	231 kp

27.

	F_Z	F_D
30°	693 kp	800 kp
45°	400 kp	566 kp
60°	231 kp	462 kp

28. $x = a \tan \alpha = 0{,}4365a$

29. $\alpha = 4{,}43°$

30. $F_Z = 56{,}3$ kp

31. **a)** $s = 35{,}3$ mm **b)** Verlust: 24,3 %

32. $x = 176$ mm

33. Breite der Ausfräsung: 154 mm
Tiefe der Ausfräsung: 36 mm

34. 30,4° **35.** 958,2 kp **36.** 355,8 kp **37.** 68,2° **38.** 20 m

39. Der 60. Breitenkreis **40.** 18,79 m **41.** 36,3° **42.** 213 m² **43.** rund 19 m

44. **a)** 11,3° **b)** 26,6° **c)** 38,7° **d)** 45° **e)** 50,2°
f) 63,4° **g)** 78,7° **h)** 87,1° **i)** 91,9° **k)** 97,1°
l) 116,6° **m)** 135° **n)** 153,4° **o)** 168,7° **p)** 174,3°

45. Zu **23.** **a)** 76°; 14° **b)** 82,9°; 172,9°
c) 116,6°; 63,4° **d)** 166°; 166°

Zu **24.** **a)** 71,6°; 108,4° **b)** 78,7°; 104°
c) 71,6°; 108,4° **d)** 45°; 135°

46. **a)** 0,268 **b)** $\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577$ **c)** 1 **d)** 2,41 **e)** $-5{,}67$

f) $-2{,}08$ **g)** $-1{,}28$ **h)** -1 **i)** $-\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx -0{,}577$ **k)** $-0{,}218$

47. **a)** $y = 0{,}2235\,x + 7{,}5$ **b)** $y = -1{,}54\,x - 4$
c) $y = 2{,}747\,x$ **d)** $y = -x - 1$
e) $y = x + 1$ **f)** $y = 14{,}3\,x - 2{,}8$
g) $y = -3{,}732\,x + 4{,}6$ **h)** $y = 5$

48. $y = 0$

4. Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen

1. a) 289 **b)** 14400 **c)** 1225 **d)** 122500
e) 12,25 **f)** $\frac{1}{4}$ **g)** $\frac{1}{400}$ **h)** 0,0001

2. a) 169 **b)** 19600 **c)** 5625 **d)** 562500
e) 56,25 **f)** $\frac{1}{9}$ **g)** $\frac{1}{900}$ **h)** 0,000001

3. a) 0,0576 **b)** 9 **c)** 361 **d)** 0,25
e) $\frac{9}{49}$ **f)** $\frac{1}{9}$ **g)** 10,89 **h)** 40000

4. a) 0,0484 **b)** 16 **c)** 289 **d)** 0,09
e) $\frac{9}{64}$ **f)** $\frac{1}{4}$ **g)** 21,16 **h)** 90000

7. a) $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 2$ **b)** $y = x^2 + 5$; $y = x^2 - 5$
c) $y = x^2 + 0{,}8$; $y = x^2 - 0{,}8$ **d)** $y = x^2 + 3$; $y = x^2 - 3$
e) $y = x^2 + 0{,}5$; $y = x^2 - 0{,}5$ **f)** $y = x^2 + \sqrt{2}$; $y = x^2 - \sqrt{2}$

8. a) $y = x^2 + 5$ **b)** $y = x^2 - 4$ **c)** $y = x^2 - 0{,}25$

	Nullstellen	Koordinaten des Scheitels
9. a)	$-\sqrt{7}$; $+\sqrt{7}$	$(0;\ -7)$
b)	– –	$(0;\ +\sqrt{5})$
c)	– –	$\left(0;\ +\frac{3}{4}\right)$
d)	$-\sqrt{\frac{11}{5}}$; $+\sqrt{\frac{11}{5}}$	$\left(0;\ -\frac{11}{5}\right)$
10. a)	-3; $+3$	$(0;\ -9)$
b)	– –	$\left(0;\ +\frac{1}{2}\right)$
c)	– –	$(0;\ +\sqrt{3})$
d)	$-\frac{1}{2}\sqrt{13}$; $+\frac{1}{2}\sqrt{13}$	$\left(0;\ -\frac{13}{4}\right)$
11. a)	$-\sqrt{1{,}8}$; $+\sqrt{1{,}8}$	$(0;\ -1{,}8)$
b)	– –	$(0;\ +\sqrt{2{,}7})$
c)	$-1{,}5$; $+1{,}5$	$(0;\ -2{,}25)$
d)	$-\frac{2}{3}$; $+\frac{2}{3}$	$\left(0;\ -\frac{4}{9}\right)$
12. a)	$-\sqrt{1{,}9}$; $+\sqrt{1{,}9}$	$(0;\ -1{,}9)$
b)	– –	$(0;\ +\sqrt{1{,}8})$
c)	$-2{,}5$; $+2{,}5$	$(0;\ -6{,}25)$
d)	$-\frac{1}{3}$; $+\frac{1}{3}$	$\left(0;\ -\frac{1}{9}\right)$

13. a) ± 3 **b)** $\pm 2{,}25$ **c)** $\pm 3{,}5$ **d)** $\pm 0{,}9$

14. a) ± 2 **b)** $\pm 1{,}5$ **c)** $\pm 0{,}5$ **d)** $\pm 1{,}2$

15. a) $y = (x-2)^2$; $y = (x+2)^2$ **b)** $y = (x-5)^2$; $y = (x+5)^2$
c) $y = (x-0{,}8)^2$; $y = (x+0{,}8)^2$

16. a) $y = (x-3)^2$; $y = (x+3)^2$ **b)** $y = (x-0{,}5)^2$; $y = (x+0{,}5)^2$
c) $y = \left(x-\sqrt{2}\right)^2$; $y = \left(x+\sqrt{2}\right)^2$

17. a) $y = (x-1)^2$ **b)** $y = (x+3)^2$ **c)** $y = (x+1)^2$

18. a) $(2;0)$ **b)** $(-5;0)$ **c)** $(0{,}4;0)$ **d)** $(-1;0)$

19. a) $(3;0)$ **b)** $(-4;0)$ **c)** $(-0{,}9;0)$ **d)** $(3;0)$

	Koordinaten des Scheitels	Nullstellen
20. a)	$(2;\ 0)$	2
b)	$(-1{,}5;\ 0)$	$-1{,}5$
c)	$\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$	$\frac{1}{2}$
21. a)	$(-2;\ 0)$	-2
b)	$(1{,}5;\ 0)$	1,5
c)	$\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$	$\frac{1}{2}$
22. a)	$(-3{,}5;\ -14{,}25)$	0,28 und $-7{,}28$
b)	$(2{,}5;\ -7)$	5,15 und $-0{,}15$
23. a)	$(1{,}5;\ -0{,}25)$	2 und 1
b)	$\left(3{,}5;\ -\frac{107}{12}\right)$	6,5 und 0,5

	Koordinaten des Scheitels	Nullstellen	Normalform der Gleichung
24. a)	$(-2;\ -3)$	$-0{,}27$ und $-3{,}73$	$x^2 + 4x + 1 = 0$
b)	$\left(5;\ -\frac{2}{5}\right)$	5,63 und 4,37	$x^2 - 10x + 24\frac{3}{5} = 0$
c)	$(0{,}75;\ 1{,}8)$	keine	$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{189}{80} = 0$
25. a)	$(2;\ -2)$	3,41 und 0,59	$x^2 - 4x + 2 = 0$
b)	$(4;\ 3{,}5)$	keine	$x^2 - 8x + 19{,}5 = 0$
c)	$(-1{,}5;\ -0{,}25)$	-1 und -2	$x^2 + 3x + 2 = 0$

26. a) $y = x^2 + x - 2{,}75$ **b)** $y = x^2 - 6x + 8{,}6$
c) $y = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{28}{9}$ **d)** $y = x^2 + 2{,}4x + 3{,}84$

27. a) $y = x^2 + 8x + 13{,}5$ **b)** $y = x^2 - 1{,}2x - 0{,}24$

c) $y = x^2 + 4x + 2$ **d)** $y = x^2 - 4x + 6$

	Koordinaten des Scheitels	Nullstellen
28. a) bis f)	$(0;\,0)$	0
29. a) bis c)	$(-5;\,0)$	-5
30. a)	$(0;\,0{,}25)$	$\pm 0{,}5$
b)	$(0;\,2)$	$\pm\sqrt{2}$
c)	$\left(0;\,-\sqrt{7}\right)$	keine
31. a)	$(0;\,-1{,}44)$	keine
b)	$(0;\,1{,}44)$	$\pm 1{,}2$
c)	$(0;\,3{,}8)$	$\pm 1{,}95$
32. a)	$(2;\,-3)$	keine
b)	$(-3;\,8)$	$-0{,}17$ und $-5{,}83$
33. a)	$(5;\,-4)$	keine
b)	$(-2;\,5)$	$0{,}24$ und $4{,}24$
34. a)	$\left(\frac{5}{2};\,0\right)$	$\frac{5}{2}$
b)	$\left(\frac{1}{4};\,0\right)$	$\frac{1}{4}$
c)	$\left(\frac{3}{2};\,0\right)$	$\frac{3}{2}$

36. a) ± 5 **b)** $\pm\frac{2}{3}$ **c)** $\pm\frac{5}{8}\sqrt{6}$ **d)** $\pm 0{,}2$ **e)** $\pm 0{,}65$ **f)** $\pm 0{,}17$

37. a) ± 12 **b)** $\pm\frac{6}{11}$ **c)** $\pm\frac{6}{5}$ **d)** $\pm 2{,}5$ **e)** $\pm 0{,}06$ **f)** $\pm 0{,}95$

38. a) $\pm 0{,}16\sqrt{10}$ **b)** $\pm 3r$ **c)** $\pm 0{,}1p$ **d)** $\pm\sqrt{5}$ **e)** $\pm\sqrt{2}$ **f)** $\pm\sqrt{a}$

39. a) $\pm 2{,}1\sqrt{10}$ **b)** $\pm 4m$ **c)** $\pm\sqrt{7}$ **d)** $\pm\sqrt{17}$ **e)** $\pm\sqrt{3}$ **f)** $\pm\sqrt{b}$

40. a) $x_{1,2} = \pm 24$ **b)** $x_{1,2} = \pm 3{,}6$ **c)** $x_{1,2} = \pm\frac{15}{4}$

d) $x_{1,2} = \pm 0{,}04\sqrt{10}$ **e)** keine reelle Lösung **f)** $x_{1,2} = \pm 2$

41. a) $x_{1,2} = \pm 27$ **b)** $x_{1,2} = \pm\frac{11}{13}$ **c)** $x_{1,2} = \pm 0{,}3$

d) $x_{1,2} = \pm 0{,}02$ **e)** keine reelle Lösung **f)** $x_{1,2} = \pm 3$

42. a) $x_{1,2} = \pm 5$ **b)** $x_{1,2} = \pm 25$ **c)** $x_{1,2} = \pm 4m$

d) $x_{1,2} = \pm\frac{s}{r}$ **e)** $x_{1,2} = \pm 1$ **f)** $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$

43. **a)** $x_{1,2} = \pm 2{,}5$ **b)** $x_{1,2} = \pm\frac{2}{5}$ **c)** $x_{1,2} = \pm 9$

d) $x_{1,2} = \pm\frac{9}{13}$ **e)** $x_{1,2} = \pm\frac{n}{m}$ **f)** $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

44. **a)** $x_{1,2} = \pm 4$ **b)** keine reelle Lösung
c) $x_{1,2} = \pm 2$ **d)** keine reelle Lösung

45. **a)** $x_1 = 0;\quad x_2 = -22$ **b)** $x_{1,2} = \pm 4$
c) $x_{1,2} = \pm 23$ **d)** $x_{1,2} = \pm 1$

46. **a)** $x_1 = 0;\quad x_2 = 5$ **b)** $x_1 = 0;\quad x_2 = -5$ **c)** $x_1 = 0;\quad x_2 = -\frac{5}{7}$.

d) $x_1 = 0;\quad x_2 = -\frac{6}{35}$ **e)** $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{97}$

47. **a)** $x_1 = 0;\quad x_2 = 4$ **b)** $x_1 = 0;\quad x_2 = -2$ **c)** $x_1 = 0;\quad x_2 = b$

d) $x_1 = 0;\quad x_2 = b$ **e)** $x_1 = 0;\quad x_2 = -\frac{4}{9}$

48. **a)** $x_1 = 6;\quad x_2 = -2$ **b)** $x_1 = 3;\quad x_2 = -6$ **c)** $x_1 = -\frac{1}{2};\quad x_2 = -\frac{9}{2}$

d) $x_1 = 8;\quad x_2 = -3$ **e)** $x_1 = \frac{1}{2};\quad x_2 = -1$ **f)** $x_1 = \frac{1}{2};\quad x_2 = -1$

g) $x_{1,2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{33}\right)$

49. **a)** $x_1 = 5;\quad x_2 = 3$ **b)** $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{73}\right)$ **c)** $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{5}}$

d) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{19}$ **e)** $x_1 = \frac{2}{3};\quad x_2 = -1$ **f)** $x_1 = \frac{2}{3};\quad x_2 = -1$

g) $x_{1,2} = \frac{1}{10}\left(1 \pm \sqrt{101}\right)$

50. **a)** $x_{1,2} = \frac{15}{32} \pm \frac{5}{32}\sqrt{\frac{155}{3}}$ **b)** $x_1 = 5;\quad x_2 = -\frac{1}{5}$ **c)** $x_1 = +\frac{3}{2};\quad x_2 = +\frac{1}{2}$

d) $x_1 = 12;\quad x_2 = -13$ **e)** $x_1 = -8;\quad x_2 = -15$ **f)** $x_1 = 8\frac{1}{3};\quad x_2 = 3\frac{2}{3}$

51. **a)** $x_1 = \frac{3}{4};\quad x_2 = \frac{3}{16}$ **b)** $x_{1,2} = \frac{1}{5}\left(-9 \pm \sqrt{106}\right)$ **c)** $x_1 = \frac{5}{2};\quad x_2 = \frac{3}{2}$

d) $x_1 = 13;\quad x_2 = -14$ **e)** $x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{94}$ **f)** $x_1 = \frac{7}{2};\quad x_2 = -\frac{2}{7}$

52. **a)** 6; −4 **b)** 4; −6 **c)** −1; −2 **d)** 3; 2 **e)** 2; −3
f) 4; −1 **g)** 2; −5 **h)** 7; −6

53. **a)** 5; −1 **b)** 1; −5 **c)** 1; −6 **d)** 4; −1 **e)** 2; −4
f) 1; −2 **g)** 9; 3 **h)** 6; −5

54. ± 100 **55.** −11 **56.** $\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}$ **57.** Zwei: 6; −2

58. 0; 10000 **59.** −7; −93 **60.** $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ m $\approx$ 1,16 m

61. $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ m $\approx$ 0,29 m **62.** 4,4 cm; 3,3 cm **63.** 2880 mm

64. Der Verfolger legt 5 Runden bis zum Einholen zurück.

65. a) $a(\sqrt{2}-1)$ **b)** $a(\sqrt{3}-1)$ **c)** a

66. a) $a(\sqrt{2}-1)$ **b)** $a(\sqrt{3}-1)$ **c)** $2a$

67. 75 cm^2 **68.** 8,5 m; 10 m **69.** 8,7 cm **70.** 5; 6

71. 1; 2 **72.** 20Ω; 30 Ω (3 Ω; 5 Ω)

73. a) 1,17 ms^{-1} **b)** 0,81 ms^{-1} **c)** 1,21 ms^{-1}

74. 0,45 Mp; 0,90 Mp **75.** 0,35 kmh^{-1} (0,7 kmh^{-1})

76. 8,09 s **77.** 10 ms^{-1} **78. a)** 0,71 m **b)** 12250 kp

79. 5,9 cm × 13,7 cm × 160 cm **80.** 20 Schlösser zu je 1,50 M

81. a) ja **b)** nein **c)** ja **d)** nein
e) ja **f)** nein; nur −2 **g)** nein **h)** ja

82. a) $x^2+2x-15=0$ **b)** $x^2+2x-15=0$
c) $x^2-2x-15=0$ **d)** $x^2+x+\frac{12}{49}=0$
e) $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}=0$ **f)** $x^2-a^2=0$
g) $r^2-22r+21=0$

83. a) $x^2-3x-28=0$ **b)** $x^2+11x+28=0$
c) $x^2-30x+176=0$ **d)** $x^2+\frac{1}{4}x-\frac{15}{64}=0$
e) $x^2+\frac{1}{2}x=0$ **f)** $a^2-m^2=0$
g) $t^2-0{,}25t-0{,}015=0$

84. a) $x_1=2;\quad x_2=-3$ **b)** $x_{1,2}=1$
c) keine reelle Lösung **d)** $x_1=5;\quad x_2=-1$
e) keine reelle Lösung **f)** $x_{1,2}=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{33})$

85. a) $x_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{13})$ **b)** $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{6}$
c) keine reelle Lösung **d)** $x_1=4;\quad x_2=-1$
e) $x_1=3;\quad x_2=1$ **f)** $x_1=\frac{1}{2};\quad x_2=-\frac{3}{4}$

86. a) −3; −4 **b)** keine Nullstellen
c) $-\frac{1}{a};\ -\frac{2}{a}$ **d)** $\frac{r}{4};\ -\frac{r}{5}$
e) $-\sqrt{7};\ \sqrt{7}$ **f)** $\frac{7}{2}$
g) 0,4 **h)** $\frac{1}{2}(5+\sqrt{2});\ \frac{1}{2}(5-\sqrt{2})$

i) $-1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}$; $-1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}$ **k)** keine Nullstellen

l) $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{229}{5}}$; $\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{229}{5}}$ **m)** keine Nullstellen

87. a) -4; -5 **b)** 5; $\frac{7}{3}$ **c)** $+\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$ **d)** $-1{,}8$

e) $-2 + \sqrt{\frac{7}{2}}$; $-2 - \sqrt{\frac{7}{2}}$ **f)** 1; $-\frac{1}{2}$

88. a) $\frac{b}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{b^2 + ac}$; $\frac{b}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{b^2 + ac}$ **b)** $\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{5}$

c) $\frac{10}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ **e)** keine Nullstellen **f)** $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$

5. Potenzfunktionen; Rechnen mit Potenzen

1. a) 2^4 **b)** $3{,}5^3$ **c)** $\left(-\frac{2}{7}\right)^4$ **d)** c^7 **e)** $(xy)^2$ **f)** $(m - n)^3$

2. a) 5^6 **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ **c)** $(-2)^4$ **d)** b^5 **e)** $(km)^3$ **f)** $(rh)^2$

3. a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **b)** $6{,}5 \cdot 6{,}5$

c) $\left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$ **d)** $6 \cdot 6 \cdot 6$

e) $(m \cdot n) \cdot (m \cdot n) \cdot (m \cdot n) \cdot (m \cdot n)$ **f)** $(-k) \cdot (-k) \cdot (-k)$

g) $(a + b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c)$ **h)** $(x - y) \cdot (x - y)$

4. a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

c) $(-6) \cdot (-6)$ **d)** $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$

e) $(m + n) \cdot (m + n) \cdot (m + n)$ **f)** $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$

g) $(a + 2c) \cdot (a + 2c)$ **h)** $(p - q) \cdot (p - q) \cdot (p - q)$

5. a) -8 **b)** 625 **c)** $-0{,}000\,32$ **d)** -9

e) $-a^7$ **f)** -16 **g)** -1 **h)** $-\frac{1}{625}$

6. a) 81 **b)** $-\frac{1}{27}$ **c)** 625 **d)** k^6

e) -625 **f)** -216 **g)** 1 **h)** -169

8. e) zu **a)** und **c)** achsensymmetrisch, zu **b)** und **d)** zentralsymmetrisch

9. a) und **c)** ungerade; **b)** und **d)** gerade

10. a) und **b)** ungerade; **c)** und **d)** gerade

11. b) ungerade; **a)** und **c)** gerade

12. a) und **c)** ungerade; **b)** gerade

13. a) fallend und steigend; $0 \leqq y < \infty$
b) fallend; $-\infty < y < \infty$
c) steigend; $-1 \leqq y \leqq 1$
d) fallend und steigend; $0 \leqq y \leqq 1$

14. a) steigend und fallend; $-1 \leqq y \leqq 0$
b) steigend; $0 < y < 1$
c) fallend und steigend; $0 \leqq y \leqq 1$
d) steigend; $-1 \leqq y \leqq 1$

16. a) $y = x + 1, \quad y = x + 2, \quad y = x + 4$

$y = x, \quad y = x - 1, \quad y = x + \frac{13}{4}$

b) $y = x^2 + 1, \quad y = x^2 + 2, \quad y = x^2 + 4$

$y = x^2, \quad y = x^2 - 1, \quad y = x^2 + \frac{13}{4}$

c) $y = x^3 + 1, \quad y = x^3 + 2, \quad y = x^3 + 4$

$y = x^3, \quad y = x^3 - 1, \quad y = x^3 + \frac{13}{4}$

		Spiegelung an der x-Achse	Spiegelung an der y-Achse
18. a)	$y = x^3$	$y = -x^3$	$y = -x^3$
b)	$y = \frac{1}{2}x^2$	$y = -\frac{1}{2}x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$
c)	$y = -\frac{1}{2}x^4$	$y = \frac{1}{2}x^4$	$y = -\frac{1}{2}x^4$
19. a)	$y = x^2$	$y = -x^2$	$y = x^2$
b)	$y = 2x^3$	$y = -2x^3$	$y = -2x^3$
c)	$y = -\frac{2}{3}x^2$	$y = \frac{2}{3}x^2$	$y = -\frac{2}{3}x^2$

20. a) $8a^3 + 2a^2$ **b)** $9{,}2x^2 - 0{,}6y^2$

21. a) $0{,}4a^3$ **b)** $\frac{17}{120}m^5$ **c)** $5\frac{3}{4}r^k$

22. a) -75 **b)** -12 **c)** 145 **d)** 243 **e)** 435 **f)** 2

23. a) 243 **b)** 4096 **c)** $\frac{1}{256}$ **d)** 3125 **e)** $16\,807$

24. a) 49 **b)** $\frac{1}{125}$ **c)** 169 **d)** 4 **e)** 625

25. a) 4 **b)** -1 **c)** 512 **d)** $\frac{1}{4}$ **e)** $\frac{1}{16}$

f) 32 **g)** $390\,625$ **h)** $\frac{1}{46\,656}$

26. a) 27 **b)** 2500 **c)** 4 **d)** 2401 **e)** 81
f) -32 **g)** 625 **h)** 19683 **i)** 4096

27. a) x^8 **b)** a^6 **c)** $\frac{12}{35}b^5$ **d)** x^7 **e)** $-x^7$
f) $\frac{3}{8}a^5b^8c^5$ **g)** $(x-1)^5$ **h)** a^{3m} **i)** c^{m+n}

28. a) m^8 **b)** y^{10} **c)** $\frac{3}{28}v^9$ **d)** $-x^7$ **e)** x^7
f) $595{,}852a^5b^4$ **g)** $(a-b)^6 \cdot c^{12}$ **h)** x^{4n} **i)** r^{k+4}

29. a) $\frac{3}{8}a^5b^8c^5$ **b)** $1{,}5x^7y^4z^7$ **c)** $2\frac{1}{12}m^3r^2s^9$

30. a) $23{,}31x^7$ **b)** $1{,}29a^7$ **c)** $2p^{11}$

31. a) $\frac{15}{11}a^5b^5 + \frac{45}{2}a^3b^3$ **b)** $-6\frac{5}{33}x^7y^6 + 3\frac{1}{2}x^6y^5 - 7x^6y^4$

32. a) $6a^{11} + 7a^9 + 2a^7$ **b)** $-\frac{3}{14}a^9 - \frac{10}{21}a^7 + \frac{3}{20}a^6 + \frac{1}{3}a^4$
c) $18a^6x^7 + 12a^6x^6 - 12a^5x^8 + 8a^5x^7$ **d)** $-a^{m+4} \cdot b^{2n-3} + a^m \cdot b^{2n+1}$

33. a) 4 **b)** -27 **c)** 3125

34. a) a^2 **b)** 625 **c)** $\frac{1}{3}x^2$ **d)** $-x^3$
e) $-x^3$ **f)** x^{m-2} **g)** 10^{4a-2} **h)** $x^{3p+4q+2}$

35. a) x^3 **b)** b^{14} **c)** $\frac{1}{3}m^3$ **d)** $-x^4$
e) $-x^3$ **f)** a^{n-3} **g)** 5^{5k+1} **h)** a^{r+1}

36. a) $13m^3n^5o^2$ **b)** $\frac{4}{3}p^4q^2r^3$

37. a) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ **b)** $(2a^3b^3)^3 = 8a^9b^9$ **c)** $\left(\frac{2}{3}p^2q^5\right)^5 = \frac{32}{243}p^{10}q^{25}$

38. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ **b)** $\left(\frac{1}{2}b^3\right)^4 = \frac{1}{16}b^{12}$ **c)** $\left(\frac{1}{2}c^2p^3\right)^3 = \frac{1}{8}c^6p^9$

39. a) m^8 **b)** $0{,}3^3 \cdot m^9n^6 = 0{,}027m^9n^6$
c) $x^{3n-3} \cdot y^{3n-6}$ **d)** $\frac{125x^9}{216y^6}$

40. a) a^{12} **b)** $\frac{1}{4}p^8$ **c)** $64m^{3p}n^{3q}$ **d)** $\frac{16a^4}{49b^6}$

41. a) $\frac{1}{81}$ **b)** $\frac{1}{64}$ **c)** 0,0081 **d)** 0,177978515625

42. a) $\frac{1}{64a^6}$ **b)** $0{,}027m^9n^6$ **c)** $81p^4q^8r^4$ **d)** $\frac{1}{81}x^{4m}$

43. **a)** $(xyz)^2$ **b)** $[ab(c+d)]^4$ **c)** $\left(m \cdot \frac{k}{l}\right)^2$ **d)** $\left[\frac{a-b}{a+b}(a-1)\right]^5$

44. **a)** $(abc)^3$ **b)** $\left(\frac{m}{n}\right)^5$ **c)** $\left(\frac{r-s}{k+o}\right)^4$ **d)** $(x^2-y^2)^3$

45. **a)** 20 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 1 **e)** 1
f) 1 **g)** 1 **h)** 8 **i)** 625

46. **a)** 1 **b)** a **c)** x **d)** $0{,}03xy^4$ **e)** $\frac{9}{5}a^{m-4}b$

47. **a)** indirekte Proportionalität **b)** direkte Proportionalität

48. **a)** und **b)** ungerade; **c)** und **d)** gerade

49.

Funktion	Spiegelung an der x-Achse	Spiegelung an der y-Achse
$y = x^{-1}$	$y = -x^{-1}$	$y = -x^{-1}$
$y = x^{-2}$	$y = -x^{-2}$	$y = x^{-2}$
$y = x^{-3}$	$y = -x^{-3}$	$y = -x^{-3}$

51. **a)** $\frac{1}{5^6}$ **b)** $\frac{1}{x^4}$ **c)** $\frac{1}{15^c}$ **d)** 6^2 **e)** x^k **f)** $(-10)^3$
g) $\frac{a^4}{b^3}$ **h)** $\frac{n^6}{m^3}$ **i)** $\frac{x^7}{y^a}$

52. **a)** $\frac{1}{4^3}$ **b)** $\frac{1}{(-b)^2}$ **c)** a^6 **d)** $\frac{1}{a^5}$ **e)** $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ **f)** 2^3
g) $\frac{1}{(xy)^4}$ **h)** 1 **i)** $(-3)^4$

53. **a)** 1 **b)** $3z^{-2}$ **c)** $\frac{7}{20}$ **d)** $32a^{-3n}$

54. **a)** $\frac{4}{3}$ **b)** $\left(\frac{s}{r}\right)^3$ **c)** 1 **d)** $12b^{-1}$

55. **a)** $\frac{a}{b \cdot c}$ **b)** $9x^{-3} - 6x^{-2} + 6x^{-1} - 4$

56. **a)** $-\frac{1}{125}$ **b)** a^{-4} **c)** $\frac{1}{3}p^{-2}$ **d)** q^{-2} **e)** 2^{18-2a}

57. **a)** $\frac{1}{16}$ **b)** c^{-5} **c)** $\frac{2}{5}q^{-8}$ **d)** $a^{-1}b^{-3n}c^{-1}$ **e)** x^{-8}

58. **a)** $\frac{1}{81}$ **b)** $10x^{-2}$ **c)** a^{-10} **d)** x^{14} **e)** $r^{12}s^{-9}t^{-3}$ **f)** $(a-b)^{-2}$

59. **a)** $\frac{1}{15\,625}$ **b)** $\frac{1}{81}$ **c)** $6x^{-3}$ **d)** $\frac{25}{16}a^6$ **e)** $n^{-12}v^{-6}$ **f)** $\frac{a+b}{a-b}$

60. **a)** $\frac{9}{8}(xy)^2$ **b)** $\frac{1}{3}x^7$ **c)** $\frac{338}{75}(ab)^k$ **d)** $\frac{2}{3}x^6$

61. a) m **b)** m^3 **c)** $\frac{1}{8} m^{2x}$ **d)** m^k

e) x^{-1} **f)** $\frac{40}{3} x^{-8}$ **g)** $x^{2a} \cdot y^{-2a-1} \cdot z^{-a-1}$ **h)** $y^n \cdot x^{1-n} \cdot z^{-n-1}$

62. a) $m^{-1}n^{-1}o^4p^{-2}$ **b)** $u^{-1}v^3w^{-3}x$

63. a) $a^2d^9c^{-12}$ **b)** yz^{-2} **c)** b^{-s}

64. a) $x^{-6}y^{-1}$ **b)** x^6y^9 **c)** a^4b^{-3} **d)** $a^{-4}b^4c^6$

e) $a^{-3}b^6c^3d^6$ **f)** $a^4b^{-1}cd^{-2}$

65. a) c^2d^{-1} **b)** str^{-10} **c)** $m^{-1}n^{-8}op^{12}$

66. a) $3 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-4}$

b) $1 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-7} + 1 \cdot 10^{-9} + 1 \cdot 10^{-11}$

c) $9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-6}$

d) $1 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2$

e) $9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-5}$

f) $2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^{-1}$

g) $1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-6}$

h) $9 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^{-5}$

67. a) 103 201,107 **b)** 7 000 000 000,000 000 007

c) 12 340 **d)** 0,000 0111

e) 4300 **f)** 100 001,000 05

g) 0,005 067 **h)** 908 070 605,040 302 01

68. a) $2{,}421 \cdot 10^3$ **b)** $3{,}504 \cdot 10^7$ **c)** $2{,}38 \cdot 10^{-1}$

d) $4{,}8 \cdot 10^{-5}$ **e)** $4{,}38 \cdot 10^4$ **f)** $4 \cdot 10^2$

69. a) $2{,}341 \cdot 10^1$ **b)** $2{,}05 \cdot 10^{-2}$ **c)** $1 \cdot 10^{-3}$

d) $5 \cdot 10^{-5}$ **e)** $3{,}4165 \cdot 10^4$ **f)** $4{,}0003 \cdot 10^6$

70. a) 700 000 **b)** 0,005 **c)** 27 300

d) 98 340 000 **e)** 60 000 **f)** 84,2

71. a) 0,046 **b)** 0,000 343 **c)** 64 200 000

d) 0,000 083 **e)** 0,042 **f)** 3 200 000

72. a) $6{,}024 \cdot 10^{23}$ Moleküle **b)** $2{,}988 \cdot 10^{-23}$ g

c) $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C **d)** $1{,}495 \cdot 10^{11}$ m

73. a) 1 Mt **b)** 1 kt **c)** 1 dt **d)** 1 kA

74. a) 1 mA **b)** 1 km **c)** 1 mp **d)** 1 ml

75. a) $1{,}26 \cdot 10^9$ **b)** $9{,}43 \cdot 10^{-2}$ **c)** 37,9 **d)** $2{,}62 \cdot 10^{-2}$ **e)** $1{,}65 \cdot 10^3$

76. a) $4{,}63 \cdot 10^{-4}$ **b)** $1{,}41 \cdot 10^2$ **c)** 0,245 **d)** $1{,}43 \cdot 10^4$

e) $4{,}63 \cdot 10^{-3}$

77. 3,61 cm **78.** 34,6 mm **79.** 2,71 cm

80. a) 8 **b)** 3 **c)** 30 **81. a)** 7 **b)** 4 **c)** 60

82. a) 7 **b)** 3,2 **c)** a **83. a)** 5 **b)** -17 **c)** 2

84. a) 16,88 **b)** 66,12 **c)** 255 **d)** 0,6245
e) 0,2236 **f)** 1,587 **g)** 2,876 **h)** 9,493

85. a) 2,646 **b)** 7,937 **c)** 62,05 **d)** 0,9387
e) 0,08944 **f)** 1,817 **g)** 19,13 **h)** 0,3756

86. a) $5^{\frac{1}{3}}$ **b)** $3^{\frac{4}{5}}$ **c)** $6^{\frac{1}{5}}$ **d)** $6^{-\frac{5}{2}}$ **e)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ **f)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

87. a) $3^{\frac{1}{7}}$ **b)** $3^{\frac{1}{9}}$ **c)** $9^{\frac{12}{7}}$ **d)** $3^{-\frac{5}{3}}$ **e)** $\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{6}{5}}$ **f)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

88. a) $\sqrt[7]{3}$ **b)** $\sqrt[3]{6}$ **c)** $\sqrt[7]{5^2}$ **d)** $\sqrt[8]{a}$

89. a) $\sqrt[2]{4}$ **b)** $\sqrt[8]{3^3}$ **c)** $\sqrt[8]{7^{-1}}$ **d)** $\sqrt[5]{r}$

90. $y = -\sqrt[3]{x}$; DB: $-\infty < x < \infty$; WV: $-\infty < y < +\infty$

92. a) $\sqrt[6]{5^6}$ **b)** $\sqrt[12]{3^{20}}$ **c)** $\sqrt[10]{6^4}$ **d)** $\sqrt[8]{a^6}$

93. a) $\sqrt[6]{6^9}$ und $\sqrt[6]{5^2}$ **b)** $\sqrt{17}$ und $\sqrt{2}$
c) $\sqrt[15]{a^5}$ und $\sqrt[15]{a^6}$ **d)** $\sqrt[n \cdot q]{b^q}$ und $\sqrt[n \cdot q]{a^{r \cdot n}}$

94. a) $\sqrt{3}$ **b)** a^2 **c)** $\sqrt[3]{k}$ **d)** $\sqrt[3]{17^5}$

95. a) $\frac{1}{6^{\frac{1}{3}}}$ **b)** $\frac{1}{4^{\frac{2}{5}}}$ **c)** $\frac{1}{a^{\frac{1}{7}}}$ **d)** $b^{\frac{1}{5}}$ **e)** $\frac{n^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{3}}}$

96. a) $5^{\frac{8}{15}}$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ **c)** n^6 **d)** $a^{-\frac{5}{7}}$

97. a) 6 **b)** $k^{\frac{4}{5}}$ **c)** $a^{\frac{13}{7}}$ **d)** $x^{\frac{3}{2n}}$

98. a) $6^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{7}}$ **c)** $(bd)^{\frac{1}{2}}$ **d)** 1

99. a) $30^{\frac{2}{5}}$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{8}}$ **c)** 1 **d)** $2^{\frac{1}{4}}$

100. a) $5^{\frac{1}{6}}$ **b)** $9^{\frac{6}{5}}$ **c)** $x^{\frac{2}{25}}$ **101. a)** $7^{\frac{2}{3}}$ **b)** $3^{\frac{6}{35}}$ **c)** $3^{\frac{1}{m}}$

102. a) $11\sqrt{3}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{5}$ **c)** $5\sqrt[3]{9}$

103. a) $-2\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{3} + 6\sqrt{6}$ **c)** $11\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{8} = 11\sqrt[3]{5} + 4$

104. a) $-4\sqrt{a}$ **b)** $(4x - 5y + 6z)\sqrt{b}$ **105. a)** $22\sqrt{b}$ **b)** $3\sqrt[3]{r}$

106. **a)** 12 **b)** $\sqrt[3]{51}$ **c)** u **d)** a^2x^2 **e)** 3 **f)** $\sqrt[3]{5}$

107. **a)** 5 **b)** $2\sqrt[3]{9}$ **c)** $12\sqrt{xy}$ **d)** $ab^2\sqrt[3]{a}$ **e)** 2 **f)** $\frac{3}{20}\sqrt{10}$

108. **a)** $\frac{4}{9}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ **b)** $\sqrt[6]{\frac{1}{ab^2}}$ **c)** $\frac{1}{u}$ **d)** $\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$ **e)** $\sqrt[6]{2^5}$ **f)** $a^2b\sqrt[3]{ab^2}$
g) $135x^5y^4\sqrt{xy}$

109. **a)** $a^2\sqrt{b}$ **b)** $\sqrt[12]{y^5}$ **c)** $\sqrt[36]{r^5}$ **d)** $\sqrt[18]{\frac{x^3}{a}}$ **e)** 3 **f)** $2ax^2\sqrt[3]{15a^2x^2}$
g) $10ac^2\sqrt{b}$

110. **a)** 20 **b)** $\frac{1}{50}\sqrt[3]{5}$ **c)** $3x\sqrt[3]{3}$ **d)** $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}}$

111. **a)** $3\sqrt[3]{6}$ **b)** $\frac{1}{700}$ **c)** $15ab\sqrt{a}$ **d)** $b\sqrt[3]{\frac{2b}{cd}}$

112. **a)** $\sqrt[6]{\frac{15}{8}}$ **b)** $\sqrt[6]{\frac{x^2}{y}}$ **c)** $\sqrt[6]{\frac{a}{b^5}}$ **d)** $\sqrt[40]{x^{31}yz^{11}}$
e) $\sqrt[8]{\frac{1}{12}}$ **f)** $\sqrt[8]{x}$

113. **a)** $14\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $3\sqrt[3]{4}$ **d)** $13\sqrt{15}$ **e)** $89\sqrt{6}$

114. **a)** $18\sqrt{3} - 21$ **b)** $47\sqrt{2} - 68$

115. **a)** $28 + 9\sqrt{10}$ **b)** $4\sqrt[3]{36} + 15\sqrt[3]{6} + 42$ **c)** $108 - 48\sqrt{2}$
d) $6u - 10\sqrt{6uw} + 25w$ **e)** $a^2b - c$

116. **a)** 5 **b)** 3 **c)** $3\sqrt[3]{3}$ **d)** $a^{14} \cdot b^{12}$ **e)** a^n

117. **a)** 3 **b)** 16 **c)** 9 **d)** 5 **e)** $z^2\sqrt[3]{z^2}$

118. **a)** 2 **b)** $\sqrt[4]{3}$ **c)** $\sqrt[4]{3}$ **d)** $\sqrt[3]{x^2}$
e) 2 **f)** $\sqrt[3]{a^2}$ **g)** $r^2w\sqrt{a}$

119. **a)** 3 **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt[10]{a^3}$
e) 3 **f)** x **g)** $a^2c\sqrt{b}$

120. **a)** $\sqrt[5]{z}$ **b)** q **c)** $\sqrt[3]{k}$ **d)** $\sqrt[8]{r^7}$

121. **a)** $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ **b)** $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ **c)** $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ **d)** $\frac{3}{10}\sqrt{10}$ **e)** $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ **f)** $\frac{5}{8}\sqrt{2}$

122. **a)** $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ **b)** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ **c)** $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ **d)** $\frac{4}{15}\sqrt{5}$ **e)** $\frac{7}{12}\sqrt{2}$ **f)** $\frac{y^2}{x}\sqrt{x}$

123. **a)** $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$ **b)** $\frac{6-2\sqrt{6}}{3}$ **c)** $48\sqrt{7}-126$ **d)** $\frac{a\cdot\sqrt{x}-b}{a^2x-b^2}$

e) $\frac{43-2\sqrt{10}}{27}$ **f)** $\sqrt{6}-2$ **g)** $25+18\sqrt{2}$

6. Rechnen mit Logarithmen

1. **a)** $x=9$ **b)** $x=\frac{3}{5}$ **c)** $x=0$ **d)** $x=4$ **e)** $x=-6$

2. **a)** $x=-4$ **b)** $x=\frac{5}{3}$ **c)** $x=-6$ **d)** $x=-1$ **e)** $x=\frac{4}{5}$

3. **a)** 3 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** 3 **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** 7 **f)** -4

4. **a)** 4 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $-\frac{1}{3}$ **d)** -3 **e)** -1 **f)** -3

5. **a)** 5 **b)** -4 **c)** 5 **d)** -3 **e)** -3

6. **a)** -2 **b)** -4 **c)** 7 **d)** -4

7. **a)** 8 **b)** 1 **8.** **a)** 13 **b)** 7

9. **a)** 4 **b)** -3 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{3}{4}$

10. **a)** 2 **b)** -5 **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$

11. **a)** 0,0000 **b)** 1,8195 **c)** 2,0000 **d)** 0,5185
e) 0,9294 **f)** 0,0000 − 1 **g)** 2,7404 **h)** 4,6128

12. **a)** 1,5682 **b)** 1,9494 **c)** 1,0000 **d)** 0,7324
e) 0,3979 − 1 **f)** 0,0000 **g)** 3,8513 **h)** 7,4472

13. **a)** 0,4472 − 1 **b)** 0,4771 − 4 **c)** 1,8591 **d)** 0,5065 − 3
e) 0,1072 **f)** 5,7308 **g)** 0,5051 − 1 **h)** 1,7356

14. **a)** 0,6128 − 3 **b)** 0,7664 − 1 **c)** 5,5065 **d)** 0,4800 − 1
e) 1,5416 **f)** 0,3075 **g)** 0,8802 **h)** 0,6405 − 4

15. **a)** 1,1271 **b)** 0,0969 **c)** 0,6355 − 3 **d)** 0,4742 − 1
e) 0,8494 − 5 **f)** 0,5705 − 4 **g)** 0,0043

16. **a)** 1,5763 **b)** 0,9513 **c)** 0,7135 − 2 **d)** 4,9031
e) 2,9143 **f)** 0,0899 − 1 **g)** 0,9943 − 2

17. **a)** 1,42 **b)** 0,756 **c)** 80
d) 5460 **e)** 0,874 **f)** 4710

18. **a)** 604 **b)** 0,00111 **c)** 7,95
d) 0,00067 **e)** 1,072 **f)** 959

19. **a)** 0,000 002 92 **b)** 0,000 0215 **c)** 435 000 000
d) 0,1051 **e)** 85 000 000 **f)** 14,3

20. **a)** 0,0323 **b)** 3,09 **c)** 307 000
d) 0,004 97 **e)** 0,000 000 000 277 **f)** 0,000 12

21. **a)** 0,5538 **b)** 4,7019 **c)** 0,7576 − 1
d) 0,3092 − 3 **e)** 0,1841 − 2 **f)** 1,4515

22. **a)** 2,9145 **b)** 1,3015 **c)** 0,6819 − 4
d) 0,8775 − 2 **e)** 2,4919 **f)** 0,4843 − 2

23. **a)** 4,4385 **b)** 4,0013 **c)** 7,3187
d) 0,0056 − 4 **e)** 0,4320 − 3 **f)** 3,7023

24. **a)** 5,2799 **b)** 0,1483 − 2 **c)** 1,4873
d) 0,0410 − 1 **e)** 0,3115 − 5 **f)** 6,7242

25. **a)** 2695 **b)** 0,007 816 **c)** 3647
d) 207,5 **e)** 0,065 24 **f)** 565,5

26. **a)** 3,436 **b)** 0,012 30 **c)** 398 600
d) 0,000 3185 **e)** 0,000 050 02 **f)** 3,255

27. **a)** 10,59 **b)** 39 810 **c)** 4,532
d) 0,044 56 **e)** 10 320

28. **a)** 0,8166 **b)** 0,003 225 **c)** 1455
d) 109 900 **e)** 0,018 07

29. **a)** 0,1038 **b)** 0,000 000 000 012 99
c) 0,000 123 **d)** 23 390

30. **a)** 1033 **b)** 173,7 **c)** 44 670 000 000 **d)** 1,439

31. **a)** 0,010 89 **b)** 2,001 08 **c)** 10,012
d) 1,0304 **e)** 0,039 30 − 3 **f)** 0,010 814

32. **a)** 0,002 04 **b)** 5,015 28 **c)** 0,108 67
d) 105,44 **e)** 0,032 14 − 2 **f)** 0,001 0987

33. **a)** 100 **b)** 20 **c)** 3 **d)** 1024 **e)** 2
f) 3 **g)** 512 **h)** 32 **i)** 16

34. **a)** 100 **b)** 45 **c)** 4 **d)** 512 **e)** 8
f) 3 **g)** 243 **h)** 5 **i)** $\sqrt{2}$

35. **a)** 80 **b)** $\frac{m^2}{5}$ **c)** z^5 **d)** 71 **e)** 729
f) 3 **g)** 10 000

36. **a)** 720 **b)** 2 **c)** 2 **d)** 10 000 **e)** $\frac{1}{7}$
f) $\sqrt[6]{a}$ **g)** $\sqrt[5]{17}$

37. **a)** ab **b)** 2 **c)** 200 **d)** $2r^2$

38. **a)** 120 **b)** $\frac{m^2}{4}$ **c)** 11 **d)** 1

39. **a)** 67,8 **b)** 11,7 **c)** 87,6
d) 0,0406 **e)** 44 700 000 **f)** 0,6896

40. **a)** 108 **b)** 19,1 **c)** 2190
d) 0,0277 **e)** 25 600 000 **f)** 0,9205

41. **a)** 391 **b)** 377 000 000 **c)** 0,000 0747
d) 48 060 **e)** 0,000 7782

42. **a)** 80 **b)** 226 000 000 **c)** 0,000 05
d) 180 200 **e)** 0,000 4839

43. **a)** 1,18 **b)** 0,004 35 **c)** 1,93 **d)** 0,003 86

44. **a)** 733,2 **b)** 4,979 **c)** 1,215 **d)** 14 390
e) 3 397 000 **f)** 1135 **g)** 0,000 0876 **h)** 61 680

45. **a)** 0,144 **b)** 2,47 **c)** 0,000 006 92 **d)** 0,198
e) 0,000 000 725 **f)** 0,0933 **g)** 0,006 116 **h)** 0,004 615

46. **a)** $1{,}87 \cdot 10^{8}$ **b)** $1{,}053 \cdot 10^{12}$ **c)** 1,89 **d)** $9{,}77 \cdot 10^{-9}$
e) 0,994 **f)** $3{,}55 \cdot 10^{-10}$ **g)** $1{,}494 \cdot 10^{24}$ **h)** $1{,}375 \cdot 10^{15}$

47. **a)** 0,0229 **b)** $1{,}2 \cdot 10^{5}$ **c)** $1{,}317 \cdot 10^{16}$ **d)** $3{,}91 \cdot 10^{-8}$
e) 2,089 **f)** $3{,}18 \cdot 10^{-19}$ **g)** $1{,}84 \cdot 10^{19}$ **h)** $6{,}039 \cdot 10^{19}$

48. **a)** 1,71 **b)** 15,28 **c)** 1,32 **d)** 910,6
e) 0,2163 **f)** 0,2673 **g)** 1,995

49. **a)** 1,36 **b)** 29,09 **c)** 1,26 **d)** 2381
e) 0,5933 **f)** 1,024 **g)** 0,017 04

50. **a)** 2,85 **b)** 0,491 **c)** 3 755 000 **d)** 0,1731 **e)** 221 **f)** 43,78

51. **a)** 1,71 **b)** 1,32 **c)** 0,0347 **d)** 2,47 **e)** 0,704 **f)** 1,015

52. **a)** 2 **b)** 0,002 636 **c)** 95 500

53. **a)** $1{,}323 \cdot 10^{6}$ **b)** 27,16 **c)** 0,000 4254

54. **a)** $1{,}113 \cdot 10^{-9}$ **b)** 1,088 **c)** $1{,}05 \cdot 10^{-7}$

55. **a)** 49 990 **b)** 1,146 **c)** $4{,}739 \cdot 10^{8}$ **d)** 32 320

56. **a)** 0,634 **b)** 95 600 **c)** $2{,}68 \cdot 10^{14}$ **d)** 0,627
e) 0,0177 **f)** 16,0 **g)** $4{,}14 \cdot 10^{10}$ **h)** $4{,}65 \cdot 10^{-8}$
i) $6{,}87 \cdot 10^{8}$

57. **a)** 18,2 **b)** 0,354 **c)** 0,721 **d)** 0,40
e) 114 **f)** 0,002 276 **g)** 0,799 **h)** 0,1712
i) 53 900 **k)** 9,168 **l)** 33,08 **m)** 0,2816

58. **a)** 1,60 **b)** 25,5 **c)** 0,3392 **d)** 0,908
e) 1,15 **f)** 0,0996 **g)** 0,292 **h)** 9342

59. **a)** 1796 **b)** 0,02834 **c)** 96 130 000 **d)** 0,01369
e) 80,38 **f)** 9,766 **g)** 0,003 216 **h)** 35,72

60. **a)** 338 **b)** 24,7 **c)** 2560 **d)** 0,853
e) 0,152 **f)** 749 000

61. **a)** 81 100 **b)** 0,165 **c)** 0,218 **d)** $7{,}76 \cdot 10^{-5}$
e) 0,422

63.

Wasser	Asche	C	H	O	N	S
52,12 %	4,19 %	29,76 %	2,68 %	9,65 %	0,40 %	1,20 %
781,8 t	62,9 t	446,3 t	40,2 t	144,8 t	6,0 t	18,0 t

64.

	Umlaufzeit (in a)	Geschwindigkeit (in $km \cdot s^{-1}$)
Merkur		47,9
Venus		35,1
Erde		29,8
Mars		24,1
Jupiter	11,9	
Saturn	29,5	
Uranus	84,0	
Neptun	164,8	
Pluto	248,4	

65.

	I (in A)	N (in W)	t (in h)	W (in kWh)	P (in M)
Glühlampe	0,182			0,24	0,02
Motor	14,47			11	0,88
Tauchsieder	4,54			0,2	0,02
Heizkörper	3,41		16,7	12,5	
Glühlampe		99,6		1	0,08
Radio	0,545			0,6	0,05
Kochherd	10,91			72	5,76
Sicherung		2200		2,2	0,18
Trafo-Station	16,67			100	8,00
Trafo-Station	455			100	8,00
Kraftwerk	75000			$1{,}08 \cdot 10^7$	86400

66. a)

F (in kp)	2,5	172	8,75
B_{Fe} (in cm)	0,13	8,6	0,44

b)

F (in kp)	1,3	4,72	6,95
B_{Cu} (in cm)	0,023	0,085	0,13

67. a) 2180 m b) 1090 m

68. a) 1,20 kp b) 5060 kp c) 26,8 cm

69. a) 45 mm b) $\frac{1}{12}$

70. a) 180 kp b) 27,80 m c) 21,8 Mp d) 593 Mp; 8,44 m; 6,61 Mp

71.

	Ertragsverlust (in dt)	−3 %	−6 %	−14 %
a)	Kartoffeln	108	216	504
b)	Zuckerrüben	137	274	638

7. Winkelfunktionen und Trigonometrie

1. **a)** −0,9962 **b)** 0,9511 **c)** −0,8788 **d)** −0,4115 **e)** −0,1805 **f)** −0,1291
g) 0,1037 **h)** −0,5502 **i)** −0,5902 **k)** −0,9272 **l)** −0,5358 **m)** −0,2879

2. **a)** 0,9325 **b)** −0,7590 **c)** 0,4085 **d)** 0,3110 **e)** −0,1078 **f)** 0,1113
g) −1,050 **h)** −4,149 **i)** −0,1014 **k)** −0,9004 **l)** 0,7212 **m)** −0,1824

3. **a)** −0,0349 **b)** −0,0958 **c)** 0,0335 **d)** 0,0131 **e)** 0,0187 **f)** −0,0517
g) −0,0872 **h)** −0,0471 **i)** 0,0161 **k)** −0,0699 **l)** 0,0892 **m)** −0,0239

4. **a)** 18,8°; 161,2° **b)** 57,6°; 122,4° **c)** 25,6°; 334,4° **d)** 98°; 262°
e) 132,8°; 312,8° **f)** 42,1°; 222,1° **g)** 87°; 267° **h)** 112,3°; 292,3°

5. **(I)** **a)** 84,4°; 95,6° **b)** 61,3°; 118,7° **c)** 40,9°; 139,1° **d)** 21°; 159°
e) 191,2°; 348,8° **f)** 6,4°; 173,6° **g)** 46,3°; 133,7° **h)** 212,2°; 327,8°
i) 16,1°; 163,9° **k)** 76,45°; 283,55° **l)** 29,21°; 330,79° **m)** 64,31°; 295,69°

(II) **a)** 44,2°; 224,2° **b)** 39,7°; 219,7° **c)** 37,1°; 217,1° **d)** 23,9°; 203,9°
e) 7°; 187° **f)** 161,4°; 341,4° **g)** 139,9°; 319,9° **h)** 12,9°; 192,9°
i) 33,28°; 213,28° **k)** 79,95°; 259,95° **l)** 52,12°; 232,12° **m)** 84,29°; 264,29°

(III) **a)** 5,4°; 174,6° **b)** 4,75°; 175,25° **c)** 3,10°; 176,9° **d)** 1°; 181°
e) 1,9°; 181,9° **f)** 0,7°; 180,7° **g)** 85,3°; 274,7° **h)** 87,4°; 272,6°
i) 88,71°; 271,29° **k)** 85,9°; 265,9° **l)** 86,48°; 273,52° **m)** 89,32°; 269,32°

6.

a)		**b)**		**c)**		**d)**	
0°	180°	90°		210°	330°	22°	158°
90°	270°	0°	360°	180°		45°	315°
0°	180°	45°	225°	63,43°	243,43°	108,44°	288,44°
90°	270°	45°	225°	161,56°	341,56°	176,53°	356,53°

e)		**f)**		**g)**	
227°	313°	8,63°	171,37°	184,18°	355,82°
159°	201°	76,36°	283,64°	134,47°	225,53°
156°	336°	43,19°	223,19°	179,31°	359,31°
80,35°	260,35°	142,84°	322,84°	157,71°	337,71°

7. Weil die Tangensfunktion bei 90° und die Kotangensfunktion bei 0° nicht definiert sind.

8.

a)	−1030°	−670°	−310°	50°	410°	770°	1130°
b)	− 905°	−545°	−185°	175°	535°	895°	1255°
c)	− 745°	−385°	− 25°	335°	695°	1055°	1415°
d)	− 962,5°	−602,5°	−242,5°	117,5°	477,5°	837,5°	1197,5°
e)	−1301,68°	−941,68°	−581,68°	−221,68°	138,32°	498,32°	858,32°
f)	−1113°	−753°	−393°	−33°	327°	687°	1047°
g)	− 867,3°	−507,3°	−147,3°	212,7°	572,7°	932,7°	1292,7°
h)	−1228,5°	−868,5°	−508,5°	−148,5°	211,5°	571,5°	931,5°
i)	− 838° 45′	−478° 45′	−118° 45′	241° 15′	601° 15′	961°15′	1321° 15′
k)	−1072° 49′ 50″		−352° 49′ 50″		367° 10′ 10″		1087° 10′ 10″
		−712° 49′ 50″		7° 10′ 10″		727° 10′ 10″	

9. **a)** 120° **b)** 140° **c)** 40° **d)** 45° **e)** 104° 37′
f) 283° **g)** 327° **h)** 138° 10′ **i)** 166,8° **k)** 36,48°

10.

	a) −30°	b) −18°	c) −135°	d) −83,4°	e) −90,45°	f) −174,77°	g) −214,92°
sin	−0,5000	−0,3090	−0,7071	−0,9934	−1,000	−0,0911	0,5724
cos	0,8660	0,9511	−0,7071	0,1149	−0,0078	−0,9958	−0,8200
tan	−0,5774	−0,3249	1,0000	−8,643	128,9	0,0915	−0,6981
cot	−1,732	−3,078	1,0000	−0,1157	0,0078	10,93	−1,432

11.

	sin x	cos x
a)	−151°; −29°; 209°; 331°	−344,9°; −15,1°; 15,1°; 344,9°
b)	−115,52°; −64,48°; 244,48°; 295,52°	−291,74°; −68,26°; 68,26°; 291,74°
c)	−355,29°; −184,71°; 4,71°; 175,29°	−209,88°; −150,12°; 150,12°; 209,88°

	tan x	cot x
d)	−200,6°; −20,6°; 159,4°; 339,4°	−180,3°; −0,3°; 179,7°; 359,7°
e)	−224,81°; −44,81°; 135,19°; 315,19°	−216,88°; −36,88°; 143,12°; 323,12°
f)	−289,17°; −109,17°; 70,83°; 250,83°	−270,61°; −90,61°; 89,39°; 269,39°

12. **a)** 0,3907 **b)** 0,8007 **c)** 0,9831 **d)** −0,3548 **e)** 0,4848 **f)** 0,0471
g) 0,9643 **h)** 0,9977 **i)** 5,671 **k)** −10,78 **l)** −0,0393 **m)** 3,592

13.

$$\left.\begin{array}{rr} \textbf{a)} & 72^\circ \\ \textbf{b)} & 40^\circ \\ \textbf{c)} & 76{,}8^\circ \\ \textbf{d)} & 191{,}25^\circ \\ \textbf{e)} & 1{,}85^\circ \\ \textbf{f)} & 45^\circ \\ \textbf{g)} & 66^\circ \\ \textbf{h)} & 151{,}7^\circ \\ \textbf{i)} & 77{,}35^\circ \end{array}\right\} + k \cdot 360^\circ \ (k \text{ ganzzahlig}) \qquad \left.\begin{array}{r} 108^\circ \\ 140^\circ \\ 103{,}2^\circ \\ 348{,}75^\circ \\ 178{,}15^\circ \\ 315^\circ \\ 294^\circ \\ 208{,}3^\circ \\ 282{,}65^\circ \end{array}\right\} + k \cdot 360^\circ \ (k \text{ ganzzahlig})$$

$$\left.\begin{array}{rr} \textbf{k)} & 45^\circ \\ \textbf{l)} & 36^\circ \\ \textbf{m)} & 105{,}4^\circ \\ \textbf{n)} & 149{,}36^\circ \\ \textbf{o)} & 79{,}07^\circ \\ \textbf{p)} & 90^\circ \\ \textbf{q)} & 150^\circ \end{array}\right\} + k \cdot 180^\circ \ (k \text{ ganzzahlig})$$

16. **a)** $1{,}75 \cdot 10^{-6}$ **b)** $3{,}14 \cdot 10^{-5}$ **c)** $1{,}64 \cdot 10^{-6}$ **d)** $4{,}89 \cdot 10^{-6}$
e) $1{,}75 \cdot 10^{-6}$ **f)** $5{,}46 \cdot 10^{-6}$ **g)** $1{,}48 \cdot 10^{-6}$ **h)** $2{,}44 \cdot 10^{-6}$

17. (Winkel nur im Quadranten I angegeben)
a) $1{,}36^\circ \cdot 10^{-3}$ **b)** $2{,}16^\circ \cdot 10^{-4}$ **c)** $4{,}72^\circ \cdot 10^{-5}$ **d)** $5{,}96^\circ \cdot 10^{-4}$
e) $2{,}54^\circ \cdot 10^{-4}$ **f)** $5{,}63^\circ \cdot 10^{-5}$

18. **a)** $\sin x$ **b)** $\cos x$ **c)** $\sin x$ **d)** $\cos x$ **e)** $\tan^2 x$ **f)** $\sin x$

19. **a)** $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866;$ $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577;$

$\cot 30° = \sqrt{3} \approx 1{,}732$

b) $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707;$ $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707;$

$\cot 45° = 1$

c) $\sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866;$ $\tan 120° = -\sqrt{3} \approx -1{,}732;$

$\cot 120° = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx -0{,}577$

d) $\sin 0° = 0;$ $\cos 0° = 1;$ $\cot 0°$ nicht erklärt

e) $\sin 270° = -1;$ $\cos 270° = 0;$ $\tan 270°$ nicht erklärt

f) $\cos 13° = 0{,}9744;$ $\tan 13° = 0{,}2309;$ $\cot 13° = 4{,}331$

g) $\sin 40° = 0{,}6428;$ $\tan 40° = 0{,}8391;$ $\cot 40° = 1{,}192$

h) $\sin 308° = -0{,}788;$ $\cos 308° = 0{,}6157;$ $\cot 308° = -0{,}7813$

i) $\sin 59° = 0{,}8572;$ $\cos 59° = 0{,}5150;$ $\tan 59° = 1{,}664$

20. **a)** $\sin x = \frac{1}{3}$

(Lage des Winkels: Quadrant I und II)

$\cos x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ — Der Funktionswert ist im Quadranten I +, im Quadranten II −.

$\tan x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ (±)

$\cot x = 2\sqrt{2}$ (±)

b) $\cos x = \frac{3}{4}$

(I und IV)

$\sin x = \frac{1}{4}\sqrt{7}$ (±)

$\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (±)

$\cot x = \frac{3}{7}\sqrt{7}$ (±)

c) $\tan x = 3$

(I und III)

$\sin x = \frac{3}{10}\sqrt{10}$ (±)

$\cos x = \frac{1}{10}\sqrt{10}$ (±)

$\cot x = \frac{1}{3}$ (+)

d) $\cot x = \sqrt{3}$

(I und III)

$\sin x = \frac{1}{2}$ (±)

$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (±)

$\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (+)

e) $\sin x = \frac{10}{11}$

(I und II)

$\cos x = \frac{1}{11}\sqrt{21}$ (±)

$\tan x = \frac{10}{21}\sqrt{21}$ (±)

$\cot x = \frac{1}{10}\sqrt{21}$ (±)

f) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $(\pm)$
(I und IV) $\tan x = 2-\sqrt{3}$ $(\pm)$
$\cot x = 2+\sqrt{3}$ $(\pm)$

g) $\tan x = \frac{1}{4}$ $\sin x = \frac{1}{17}\sqrt{17}$ $(\pm)$
(I und III) $\cos x = \frac{4}{17}\sqrt{17}$ $(\pm)$
$\cot x = 4$ $(+)$

h) $\cot x = 2-\sqrt{3}$ $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $(\pm)$
(I und III) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $(\pm)$
$\tan x = 2+\sqrt{3}$ $(+)$

i) $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $(\mp)$
(III und IV) $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $(\pm)$
$\cot x = \sqrt{3}$ $(\pm)$

k) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $(\pm)$
(I und IV) $\tan x = \sqrt{3}$ $(\pm)$
$\cot x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $(\pm)$

l) $\tan x = -1$ $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $(\pm)$
(II und IV) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $(\mp)$
$\cot x = 1$ $(-)$

m) $\cot x = \sqrt{3}-2$ $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $(\pm)$
(II und IV) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $(\mp)$
$\tan x = \sqrt{3}+2$ $(-)$

21. a) 0,5235 − 1   **b)** 0,7201 − 1   **c)** 0,9992 − 1   **d)** 0,4829 − 1
e) 0,4425 − 1   **f)** 0,8991 − 1   **g)** 0,8517 − 1

22. a) 0,5905 − 1   **b)** 0,0867   **c)** 0,1223 − 1   **d)** 0,0387
e) 0,0924   **f)** 0,9988 − 1   **g)** 0,3100 − 1

23. a) $\lg \sin 383° = 0{,}5919 - 1$ **b)** $\lg \sin 773{,}2° = 0{,}9035 - 1$
c) $\lg \sin(-640{,}56°) = 0{,}9926 - 1$ **d)** $\lg |\sin(-3620{,}78°)| = 0{,}5500 - 1$
e) $\lg \cos 421° = 0{,}6856 - 1$ **f)** $\lg \cos 1527{,}3° = 0{,}6731 - 2$
g) $\lg \cos(-704{,}64°) = 0{,}9842 - 1$ **h)** $\lg \cos(-1083{,}92°) = 0{,}9991 - 1$

i) $\lg \tan 8000° = 0{,}7537$ k) $\lg |\tan(-444{,}7°)| = 1{,}0401$
l) $\lg |\cot 992{,}25°| = 0{,}5941 - 2$ m) $\lg \cot(-524{,}44°) = 0{,}5553$

24. a) 24°; 156° b) 13,8°; 166,2° c) 21,9°; 158,1°
d) 5,92°; 174,08° e) 61,48°; 118,52° f) 8°; 172°
jeweils $+k \cdot 360°$ (k ganzzahlig)

25. a) 70°; 290° b) 58,1°; 301,9° c) 12,7°; 347,3°
d) 79,27°; 280,73° e) 12,25°; 347,75° f) 80,09°; 279,91°
jeweils $+k \cdot 360°$ (k ganzzahlig)

26. a) 54° b) 81° c) 24° d) 85,4° e) 34,34° f) 8,00°
jeweils $+k \cdot 180°$ (k ganzzahlig)

27. a) 46° b) 67,7° c) 29,3° d) 23,16° e) 32,92° f) 5,98°
jeweils $+k \cdot 180°$ (k ganzzahlig)

28. a) 49,50°; 130,50° b) 185,42°; 354,58° c) 2,4°; 357,6° d) 101,71°; 258,29°
jeweils $+k \cdot 360°$ (k ganzzahlig)
e) 10,70° f) 175,46° g) 9,60° h) 176,93°
jeweils $+k \cdot 180°$ (k ganzzahlig)

29. a) $\alpha = 82°$; $b = 2{,}76$ cm; $c = 3{,}31$ cm; $A = 4{,}51\ \text{cm}^2$
b) $\alpha = 69{,}7°$; $b = 5{,}94$ cm; $c = 2{,}66$ cm; $A = 7{,}42\ \text{cm}^2$
c) $\gamma = 85{,}5°$; $a = 0{,}506$ m; $b = 1{,}410$ m; $A = 0{,}3555\ \text{m}^2$
d) $\alpha = 81{,}3°$; $a = 12{,}05$ cm; $c = 9{,}93$ cm; $A = 41{,}71\ \text{cm}^2$
e) $\alpha = 65{,}28°$; $a = 112{,}6$ m; $b = 28{,}98$ m; $A = 1595\ \text{m}^2$
f) $\gamma = 72°\,15'$; $a = 1{,}626$ km; $c = 2{,}446$ km; $A = 1{,}85\ \text{km}^2$
g) $\gamma = 79°\,32'$; $b = 34{,}42$ cm; $c = 51{,}31$ cm; $A = 758{,}4\ \text{cm}^2$
h) $\beta = 34°\,58'$; $a = 45{,}06$ m; $b = 38{,}06$ m; $A = 838{,}2\ \text{m}^2$

30. a) $\beta = 42{,}81°$; $\alpha = 83{,}59°$; $a = 5{,}56$ cm; $A = 8{,}50\ \text{cm}^2$
b) $\gamma = 47{,}66°$; $\beta = 38{,}77°$; $b = 22{,}44$ m; $A = 296{,}4\ \text{m}^2$
c) $\beta = 34{,}9°$; $\gamma = 101{,}4°$; $c = 9{,}9$ cm; $A = 19{,}9\ \text{cm}^2$
d) $\alpha = 46{,}8°$; $\beta = 77{,}5°$; $b = 43{,}4$ cm; $A = 577\ \text{cm}^2$
e) $\alpha = 24{,}34°$; $\gamma = 46{,}42°$; $c = 21{,}36$ m; $A = 122{,}5\ \text{m}^2$
f) $\beta = 19°\,11'$; $\alpha = 140°\,14'$; $a = 8{,}37$ cm; $A = 6{,}33\ \text{cm}^2$
g) $\gamma = 57°\,35'$; $\beta = 55°\,2'$; $b = 27{,}0$ cm; $A = 346{,}4\ \text{cm}^2$
h) $\gamma = 37°\,57'$; $\alpha = 24°\,59'$; $a = 11{,}81$ m; $A = 90{,}43\ \text{m}^2$

31. $a = 511{,}6$ cm; $b = 342{,}7$ cm; $c = 431{,}2$ cm; $A = 71\,370\ \text{cm}^2$

32. a) $b = 578$ cm; $\alpha = 70{,}27°$; $\gamma = 46{,}53°$; $A = 12{,}79\ \text{cm}^2$
b) $c = 200{,}6$ m; $\alpha = 36{,}99°$; $\beta = 40{,}85°$; $A = 8100\ \text{m}^2$
c) $a = 18{,}93$ m; $\beta = 60{,}90°$; $\gamma = 44{,}78°$; $A = 114{,}6\ \text{m}^2$
d) $c = 291{,}0$ m; $\alpha = 38°\,41'$; $\beta = 93°\,36'$; $A = 35\,700\ \text{m}^2$

33. a) $\alpha = 97{,}68°$; $\beta = 21{,}30°$; $\gamma = 61{,}02°$; $A = 4{,}637\ \text{m}^2$
b) $\alpha = 53{,}39°$; $\beta = 99{,}63°$; $\gamma = 26{,}98°$; $A = 1{,}683\ \text{km}^2$
c) $\alpha = 46{,}42°$; $\beta = 64{,}53°$; $\gamma = 69{,}05°$; $A = 429{,}9\ \text{m}^2$
d) $\alpha = 70{,}03°$; $\beta = 45{,}76°$; $\gamma = 64{,}21°$; $A = 26{,}29\ \text{km}^2$

34. Die Lösungen sind bereits bei den Lösungen der Aufgaben **7/29** bis **7/33** mit angegeben.

35. 71,07 kp; Winkel zwischen der Resultierenden
und der 40-kp-Komponente: 72,1°
und der 70-kp-Komponente: 32,9°

36. **a)** 1271 kp **b)** 1558 kp

37. **a)** Stange: 7500 kp (Zug); Strebe: 9000 kp (Druck)
b) Stange: 15000 kp (Zug); Strebe: 18000 kp (Druck)
c) Stange: 5333 kp (Zug); Strebe: 8000 kp (Druck)

38. **a)** Winkel zwischen F_1 und F_2: 87,1°
F_1 und F_3: 131,5°
F_2 und F_3: 141,4°

b) Winkel zwischen F_1 und F_2: 133,1°
F_1 und F_3: 155,5°
F_2 und F_3: 71,4°

39. 132,3 m

40. **a)** $e_1 = 252{,}3$ m; $e_2 = 411{,}7$ m **b)** $h_1 = 87{,}46$ m; $h_2 = 93{,}54$ m

41. $\overline{AD} = 155{,}1$ m; $A_{ADE} = 51{,}60$ a
$\overline{AE} = 82{,}3$ m; $A_{ABD} = 82{,}30$ a
$\overline{BD} = 138{,}5$ m;
$\overline{BC} = 85{,}6$ m; $A_{BCD} = 16{,}24$ a
$\overline{AG} = 236$ m; $A_{AGB} = 132{,}60$ a
$\overline{AF} = 161{,}3$ m; $A_{AEG} = 159{,}60$ a
Gesamtfläche: $A \approx 4{,}42$ ha

42. Länge der Rampe: 487 m

43. $\overline{AC} = 172{,}8$ m
$\overline{BC} = 246{,}6$ m

44. $\overline{BD} = 676{,}9$ m
$A_{ABD} = 6{,}97$ ha
$A_{BCD} = 21{,}79$ ha Gesamtfläche: $A = 28{,}76$ ha

45. **a)** $\overline{AB} = 2{,}18$ km **b)** $\alpha = 98{,}24°$; $\beta = 43{,}06°$

46. $$s = d_1 \frac{\sqrt{3} - 1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = 1{,}02 d_1$$

47. $b_1 = 0{,}50$ m; $b_2 = 0{,}31$ m; $\beta = 54{,}45°$
$l_1 = 1{,}844$ m; $l_2 = 1{,}958$ m

48. Neigungswinkel der Seitenbleche gegen die Grundfläche:
$\alpha = 90°$; $\beta = 66{,}4°$; $\gamma = \delta = 77{,}7°$

49. Entfernung von A: 3122 m; Entfernung von B: 3180 m
Abstand von der Standlinie: 3116 m

50. **a)** Entfernung von K: 11,61 sm; Entfernung von L: 15,15 sm
b) Kurs: S 70,3° O

51. **a)** Am Ort B beträgt die Entfernung vom Leuchtturm 14,23 sm.
b) Abstand des Leuchtturms vom Schiffskurs: 10,85 sm.

52. Wahrer Kurs: S 29,95° W; Entfernung über Grund: 58,23 sm

53. $\varkappa_k = \text{N } 166° \text{ O}$; $v = 328{,}7 \text{ km h}^{-1}$; Abtrift: 9,43°

54. $v = 289 \text{ km h}^{-1}$; Vorhaltewinkel: 7,4°; Flugzeit: 40 min

55. Sonnendurchmesser: $1{,}388 \cdot 10^6$ km; Monddurchmesser: $3{,}457 \cdot 10^3$ km

56. Parallaxe des Mondes: 0,95°

8. Körperberechnung und -darstellung

3. a) $A_M = 98{,}8 \text{ cm}^2$; $A_O = 141{,}06 \text{ cm}^2$
b) $A_M = 73{,}44 \text{ dm}^2$; $A_O = 118{,}33 \text{ dm}^2$
c) $A_M = 351 \text{ cm}^2$; $A_O = 1229 \text{ cm}^2$
d) $A_M = 8000 \text{ mm}^2$; $A_O = 11\,863 \text{ mm}^2$

5. a) $A_M = 2304 \text{ cm}^2$; $A_O = 2736 \text{ cm}^2$
b) $A_M = 2016 \text{ cm}^2$; $A_O = 2448 \text{ cm}^2$

6. a) $1{,}38 \text{ m}^2$ b) $2{,}54 \text{ m}^2$

7. $A_O = 3s^2\sqrt{3} + 6sl$

8. zu 3: a) $160{,}55 \text{ cm}^3$ b) $76{,}23 \text{ dm}^3$ c) 1976 cm^3 d) $96\,570 \text{ mm}^3$
zu 4: a) 90 cm^3 b) 83 cm^3 c) 64 cm^3 d) $27\,712 \text{ mm}^3$
zu 6: 105 dm^3
zu 7: $V = 3\frac{s^2 l}{2}\sqrt{3}$

9. $180\,000 \text{ m}^3$

10. 3000 St.

11. Bild 8/1: 307,7 g; Bild 8/2: 384,7 g; Bild 8/3: 212,9 g; Bild 8/4: 266,9 g

12. 40 cm

13. 31°

14. Gesamtvolumen 5,625 l; abzugießen sind 3,439 l

15. 3,12 kp

16. 1890 cm^2

17. $A_O = a^2(1 + \sqrt{5})$

18. $3\sqrt{15} \text{ m}^2 \approx 11{,}6 \text{ m}^2$

19. $44{,}7 \text{ m}^2$

20. a) $A_O = 326{,}4 \text{ cm}^2$; $V = 288 \text{ cm}^3$
b) $A_O = 428{,}4 \text{ m}^2$; $V = 512 \text{ m}^3$
c) $A_O = 35{,}8 \text{ cm}^2$; $V = 10{,}8 \text{ cm}^3$

21. $2{,}6 \text{ g cm}^{-3}$

22. 77,87 p

23. $V = 4{,}033\ \text{m}^3$; Stoffmenge: $11{,}6\ \text{m}^2$

24. $3{,}6\ \text{m}^2$

25. 68,3 %

26. $A_M = 35{,}64\ \text{cm}^2$; $A_O = 103{,}81\ \text{cm}^2$; $V = 50{,}615\ \text{cm}^3$

27. 170 p

28. **a)** $128{,}9\ \text{m}^2$ **b)** $1866{,}2\ \text{m}^3$

29. $\frac{h}{3}\left(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2\right) \xrightarrow{G_1 = G_2} \frac{h}{3} \cdot 3G_1 = G_1 \cdot h$; $\frac{h}{3}\left(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2\right) \xrightarrow{G_2 = 0} \frac{h}{3} \cdot G_1$

30. $\frac{G_1 + G_2}{2} h \xrightarrow{G_1 = G_2} G_1 \cdot h$; $\frac{G_1 + G_2}{2} h \xrightarrow{G_2 = 0} \frac{G_1h}{2} \neq \frac{G_1 \cdot h}{3}$

$$\left(\frac{\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}}{2}\right)^2 h \xrightarrow{G_1 = G_2} \left(\frac{2\sqrt{G_1}}{2}\right)^2 h = G_1h$$

$$\left(\frac{\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}}{2}\right)^2 h \xrightarrow{G_2 = 0} \left(\frac{\sqrt{G_1}}{2}\right)^2 h = \frac{G_1h}{4} \neq \frac{G_1h}{3}$$

31. **a)** $m = 3{,}490\ \text{kg}$ **b)** $A_O = 83{,}10\ \text{cm}^2$

32. **a)** $11{,}52\ \text{m}^3$ **b)** $53{,}56\ \text{m}^2$ **c)** $0{,}789\ \text{m}^3$

33. 34,6 kg

34. 3,2 m

35. $464\ \text{m}^2$

36. 4 mm

37. **a)** 20 % **b)** $88{,}6\ \text{cm}^2$

38. $260\ \text{cm}^3$

39. **a)** 39,4 kg **b)** Das Volumen ist stets das gleiche.

40. 14,56 cm

41. $d = 20\ \text{cm}$; $h_k \approx 38{,}7\ \text{cm}$; $V = 4053\ \text{cm}^3$

42. 6,3 l. Die Näherungsformeln liefern die Werte 6,27 l bzw. 6,4 l; sie sind gut verwendbar.

43. 8,855 kp

44. **a)** $99\ \text{dm}^2$ **b)** 77,4 cm

45. $1{,}7\ \text{mm}^2$

46. $V = 72{,}2\ \text{cm}^3$; $A_M = 87{,}6\ \text{cm}^2$

47. $h_k = 3{,}2\ \text{m}$; $V \approx 65\ \text{m}^3$

48. etwa 15 Fuhren

49. 34,35 m² $\triangleq$ 192 M

50. $A_B = 12{,}57\ \text{m}^2$; $V = 8{,}377\ \text{m}^3$; Stoffmenge: 30,33 m²

51. 38,8 m³

52. 47,6 %

53. 1382 Stück

54. 4,8 kp

55. 14,2 mm

56. bis 45,55 cm

57. $1{,}088 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$

58. $5{,}089 \cdot 10^{11}\ \text{km}^3$

59. 15,6 cm

60. $5{,}1 \cdot 10^{8}\ \text{km}^2$

61. 59,2 cm

62. 5 cm

63. **a)** 5 cm **b)** 78,5 cm² **c)** 65,45 cm³

64. 3,943 m³

65. 125,7 kp; $A_O = 3{,}14\ \text{m}^2$

66. 200 m²

67. $V = 2{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{km}^3$; Mond : Erde $\approx$ 1 : 50
$A_O = 3{,}8 \cdot 10^{7}\ \text{km}^2$; Mond : Erde $\approx$ 1 : 13,5

68. 1521 m²

69. $V = 73{,}3\ \text{dm}^3$; $A_O = 88\ \text{dm}^2$

70. $V = 141{,}4\ \text{cm}^3$; $A_M = 113{,}1\ \text{cm}^2$

71. $h = \dfrac{2}{3} r$

72. **a)** $V_{\text{Abschnitt}} = 3{,}535\ \text{dm}^3$ **b)** $V_{\text{Ausschnitt}} = 3{,}142\ \text{dm}^3$

Der Ausschnitt ist kleiner als der Abschnitt, da der Kegel aus dem Abschnitt „ausgestochen“ ist ($h > r$!).

73. $2{,}1 \cdot 10^{7}\ \text{km}^2$

74. 17,44 g

75. Polarzone: $2{,}1 \cdot 10^{7}\ \text{km}^2$
gemäßigte Zone: $1{,}3 \cdot 10^{8}\ \text{km}^2$
Äquatorialzone: $1{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{km}^2$

76. 1291 cm³

77. $V = 28{,}27\ \text{dm}^3$; $A_O = 5278\ \text{cm}^2$

78. $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{8r^3}{81}\pi : \frac{20r^3}{81}\pi : \frac{26r^3}{81}\pi = 4 : 10 : 13$

79. $\varrho = 2{,}4\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$

80. **a)** 4068 l **b)** 499, 26 kg

Lösungen der Zusatzaufgaben

1. Arbeiten mit Variablen

1. mindestens 12

2. mindestens 13

3. $M = \{2\}$

5. **a)** $b = a$ $\alpha)$ $2a$ $\beta)$ 0 $\gamma)$ a^2
   b) $b = -a$ $\alpha)$ 0 $\beta)$ $2a$ oder $-2a$ $\gamma)$ $-a^2$

6. **a)** $\alpha)$ $a + \frac{1}{a}$ $\beta)$ $a - \frac{1}{a}$ $\gamma)$ a^2
   b) $\alpha)$ $a - \frac{1}{a}$ $\beta)$ $a + \frac{1}{a}$ $\gamma)$ $-a^2$
   c) $\alpha)$ a oder b $\beta)$ a oder $-b$ $\gamma)$ 0 $(b \neq 0)$

7. **a)** $(x-3)^2 \geqq 0$ **b)** $(x+4)^2 + 1 > 0$
   c) $-(x-10)^2 - 1 < 0$ **d)** $(2x-2y)^2 + y^2 \geqq 0$
   e) $\left(\frac{x}{4} - 8\right)^2 + 1 > 1$ **f)** $\frac{9x^2}{25} - x + \frac{25}{35} > \left(\frac{3}{5}x - \frac{5}{6}\right)^2 \geqq 0$

2. Lineare Funktionen, lineare Gleichungen

1. **a)** $x \in \mathfrak{M}_1,\ y \in \mathfrak{M}_2$

$$x = y : \left\{[0;0], \left[\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right], [1;1], [2;2]\right\}$$

$$2x = y : \left\{[0;0], \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2};1\right], [1;2], [2;4]\right\}$$

   b) ja

2. **a)** $x = 0$ **b)** $x = a$ **c)** alle x
   d) alle x für $m = n$, $x = 1$ für $m \neq n$
   e) alle x für $m = n$, $x = -1$ für $m \neq n$
   f) alle x für $n = 0$, kein x für $n \neq 0$

3. **a)** $x = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ **b)** $x = \{1; 4; 7; 10\}$
   c) $x = \{0; 1; 2\}$ **d)** $x = 0$

4. **a)** mit Traktoren
   b) Bei gleichem Stundenlohn billiger mit Traktoren, gleiche Kosten bei Abrechnung nach Tonnenkilometern.

5. 64%ig

6. $3\frac{1}{3}$ l

7. 6,7 km; 64,5 km h^{-1}

8. weniger als $5\frac{2}{3}$ l

9. mehr als $6\frac{2}{3}$ l

10. 3779 l

11. $225\frac{1}{4}$ kg Quecksilber in einem Gefäß von $24\frac{3}{4}$ kg

12. 320 St.

5. Potenzfunktionen; Rechnen mit Potenzen

1. a) gerade b) gerade c) weder gerade noch ungerade
   d) gerade e) weder gerade noch ungerade f) gerade

2.

	Funktion	Gleichung des Spiegelbildes	Definitionsbereich	Wertevorrat
a)	$y = 2x^2 + 2$	$y = -2x^2 - 2$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < y \leqq -2$
b)	$y = 2x^2 - 2$	$y = -2x^2 + 2$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < y \leqq 2$
c)	$y = x^3 + 1$	$y = -x^3 - 1$	$0 \leqq x < +\infty$	$-\infty < y \leqq -1$
d)	$y = x^3 - 1$	$y = -x^3 + 1$	$0 \leqq x < +\infty$	$-\infty < y \leqq 1$
e)	$y = x^2$	$y = +\sqrt{x}$	$0 \leqq x < +\infty$	$0 \leqq y < +\infty$

4. a) $b \geqq 0$ b) $a \leqq 0$ c) $x > 0$; $m \geqq 2$, natürlich
   d) $x \geqq y$ e) $a \leqq 1$ f) $b \geqq \frac{2}{3}$
   g) $x \geqq \frac{4}{5}$, $n \geqq 2$, natürlich

6. Rechnen mit Logarithmen

1. a) $\frac{3}{2}$ b) nein c) $\frac{5}{3}$
   d) nein e) 3 f) nein

2. a) $5^{3\sqrt{13}} = 5^{3\sqrt{13}}$ b) $8^{2\sqrt{8}} = 8^{\sqrt[2]{8}}$ c) $5^{\sqrt{13}} = 5^{\sqrt{13}}$
   d) $2^{8\sqrt{2}} : 2^{6\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}}$ e) $3^{\sqrt{10}} : 3^{\sqrt{10}} = 1$ f) $\frac{5^{3\sqrt{5}}}{5^5} = 5^{3\sqrt{5}-5}$

7. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

1. **a)** Die Ordinaten von **2)** sind jeweils doppelt so groß wie die von **1)**.
   b) Kleinste Periode: π

2. In Richtung der x-Achse um $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ verschoben.

Inhaltsverzeichnis

0013 05-1 · 3,60