

Dipl.-Ing. Erich Gasse

MATHEMATIK

für metallbearbeitende Berufe

Teil 1

Arithmetik und
Algebra



FACHBUCHVERLAG GMBH LEIPZIG

Dipl.-Ing. Erich Gasse

MATHEMATIK

für metallbearbeitende Berufe

Teil 1

Arithmetik und
Algebra

Siebente Auflage

FACHBUCHVERLAG GMBH LEIPZIG



1953

Fachbuchverlag GmbH, Leipzig, in Verbindung mit dem A. Ziemsen Verlag, Wittenberg/Lutherstadt

Satz, Druck und Bindung: IV/2/14 - VEB Werkdruck Gräfenhainichen - 166

**Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 114 — 210/105/53 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der
Deutschen Demokratischen Republik**

Vorwort

Oftmals hört man von Facharbeitern der Metallbearbeitung — leider sogar von Spezialisten — die Ansicht: „Ich als Praktiker brauche die Mathematik nicht! Ich komme auch ohne sie aus!“ Mit solchen und ähnlichen Worten glauben sich die Betreffenden darüber hinwegtrösten zu können, daß ihnen gewisse mathematische Grundkenntnisse fehlen, die über das Grundschulrechnen hinausgehen.

Auf die oft erhobene Frage, wozu überhaupt ein tüchtiger Werkstattmann oder Techniker die „schwierige Mathematik“ brauche, sei kurz folgendes geantwortet:

Die Mathematik ist die Grundlage der Technik. Auf ihr baut sich zunächst die Mechanik auf. Diese wiederum ist zur Berechnung der Maschinenelemente und der aus ihnen zusammengesetzten Maschinenteile auf Festigkeit erforderlich. Ohne Kenntnis der Berechnungsgrundlagen für die einfachsten Maschinenteile ist ein rationelles Bauen von Maschinen nur in den seltensten Fällen möglich.

Die Mathematik liefert also dem Techniker und Ingenieur das für seine Arbeit nötige Rüstzeug. Sie ist aber auch unentbehrlich für den fortschrittlichen Facharbeiter, der im neuen Arbeitsbewußtsein unserer Zeit schöpferisch mitdenkend an der güte- und mengenmäßigen Steigerung der Produktion teilnehmen sowie zur wirtschaftlich besten Ausnutzung des Materials und zur Senkung der Selbstkosten seines Betriebes beitragen will. Nur so wird es möglich, daß die Metallbearbeitung als einer der Schwerpunkte des Fünfjahrplanes ihre hohen Aufgaben erfüllen kann.

Der Werkstattmann braucht hier keine Scheu vor zu großen Schwierigkeiten zu haben; denn jeder Mensch mit gesundem Verstand vermag bei einigem Fleiß so weit in die Mathematik einzudringen, wie es in diesem Fachbuch vorgesehen ist.

Das Buch ist ein Lehr- und Aufgabenbuch der Mathematik zum Selbstunterricht, im wesentlichen eingestellt auf die Bedürfnisse des Technikers und des Facharbeiters in den metallbearbeitenden Berufen.

Die Fülle des für sie nötigen Stoffes zwang zu seiner Verteilung auf zwei Bände. Der vorliegende 1. Band behandelt eingehend das Rechnen mit Zahlen und Buchstaben einschließlich der Gleichungen, während sich der ebenfalls in neuer Auflage erschienene 2. Band mit der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie befaßt.

Dem jungen, strebsamen Facharbeiter wird es nach gründlicher Durcharbeitung der in diesem 1. Bande enthaltenen Beispiele und Aufgaben möglich sein, sich mathematisch so weit fortzubilden, daß er die grundlegenden Berechnungen für die Metallbearbeitung selbständig ausführen und sich zur Aufnahmeprüfung für eine Fachschule melden kann.

Der ältere Praktiker wird gern die Gelegenheit benutzen, sein in der Schule erworbenes mathematisches Wissen und Können, das ihm teilweise entschwunden ist, wieder aufzufrischen, an Hand des Buches weiter in die Materie einzudringen und daraus für seine Arbeit den größtmöglichen Nutzen zu ziehen.

Diesen Zielen entsprechend sind alle eingekleideten Aufgaben der Praxis der Metallbearbeitung entnommen. Zur Kontrolle der eigenen Arbeit sind die Lösungen sämtlicher Aufgaben am Schlusse des Buches angegeben.

Verfasser und Verlag werden auch weiterhin Anregungen zur Verbesserung des Werkes dankbar entgegennehmen.

Leipzig, im März 1953

Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

A. Das Fachrechnen mit bestimmten Zahlen

| | | | |
|---|----|---|----|
| I. Die 4 Grundrechnungsarten ... | 1 | Kehrwert..... | 32 |
| 1. <i>Mit ganzen Zahlen</i> | 1 | Division von gemeinen Brüchen | 33 |
| a) Zusammenzählen oder Addieren | 1 | Division von Potenzen | 35 |
| b) Abziehen oder Subtrahieren ... | 4 | Potenzen mit negativen Expo- | |
| Subtrahieren einer Zahl | 4 | nenten | 36 |
| Subtrahieren einer Summe ... | 6 | Potenzen mit dem Expo- | |
| c) Malnehmen oder Multiplizieren | 8 | nenten 0 | 37 |
| Multiplikation relativer Zahlen | 12 | Sehr kleine Zahlen..... | 37 |
| Potenzen | 13 | b) Dezimalzahlen oder Zehner- | |
| Große Zahlenwerte | 15 | brüche | 42 |
| d) Teilen oder Dividieren | 17 | Umwandlung eines gewöhn- | |
| Teilbarkeitsregeln | 18 | lichen Bruches in einen Dezi- | |
| Primzahlen | 19 | malbruch | 43 |
| Teilerfremde Zahlen | 20 | Umwandlung einer Dezimalzahl | |
| Größter gemeinsamer Teiler ... | 21 | in einen gewöhnlichen Bruch . | 44 |
| Kleinstes gemeinsames Viel- | | Addieren von Dezimalzahlen . | 45 |
| faches | 21 | Subtrahieren von Dezimal- | |
| Dividieren größerer Zahlen ... | 22 | zahlen..... | 46 |
| Dividieren relativer Zahlen ... | 25 | Multiplizieren von Dezimal- | |
| 2. <i>Mit Brüchen</i> | 26 | zahlen | 46 |
| a) Gemeine Brüche | 26 | Dividieren von Dezimalzahlen | 47 |
| Formveränderungen gemeiner | | II. Die in der Technik gebräuch- | |
| Brüche | 28 | lichen Maße und Einheiten | 50 |
| Addition und Subtraktion von | | 1. <i>Längenmaße</i> | 51 |
| gemeinen Brüchen..... | 28 | 2. <i>Flächenmaße</i> | 52 |
| Addition und Subtraktion ge- | | 3. <i>Körpermaße</i> | 54 |
| mischter Zahlen..... | 30 | 4. <i>Gewichtsmaße</i> | 55 |
| Multiplikation von gemeinen | | 5. <i>Zeitmaße</i> | 56 |
| Brüchen..... | 31 | | |

| | | | |
|--|----|--|----|
| 6. <i>Winkelmaße</i> | 57 | d) Geschwindigkeit und Beschleunigung | 63 |
| a) Winkelmessung in Winkelgraden | 57 | e) Masse | 65 |
| b) Winkelmessung im Bogenmaß | 59 | f) Arbeit und Leistung | 65 |
| 7. <i>Temperaturmaße, Wärmemaße</i> | 60 | 9. <i>Elektrotechnische Maßeinheiten</i> | 68 |
| a) Messen des Wärmezustandes | 60 | III. Der Dreisatz oder die Regeldetri | 70 |
| b) Messen der Wärmemenge | 61 | IV. Die Prozentrechnung | 74 |
| 8. <i>Abgeleitete Maßeinheiten (Auswahl)</i> | 61 | 1. <i>Gesucht der Prozentwert</i> | 75 |
| a) Die Spannung | 61 | 2. <i>Gesucht der Prozentsatz</i> | 76 |
| b) Einheitsgewicht oder Wichte | 62 | 3. <i>Gesucht der Grundwert</i> | 78 |
| c) Kräftepaare und Momente | 63 | Promillerechnung | 80 |
| | | V. Die Zinsrechnung | 81 |

B. Das Rechnen mit Buchstaben

| | | | |
|---|-----|---|-----|
| I. Einführung | 84 | III. Das Rechnen mit Proportionen | 114 |
| II. Die 4 Grundrechnungsarten mit Buchstaben | 85 | 1. <i>Die arithmetischen Proportionen</i> | 114 |
| 1. <i>Das Addieren</i> | 85 | 2. <i>Die geometrischen Proportionen</i> | 115 |
| a) Addieren einer Summe | 87 | a) Aufsuchen der 4. Proportionale | 117 |
| b) Addieren relativer Zahlen | 88 | b) Mittlere Proportionale oder geometrisches Mittel | 118 |
| 2. <i>Das Subtrahieren</i> | 92 | c) Proportionalitätsfaktor | 119 |
| a) Subtrahieren von Summen und Differenzen | 93 | d) Korrespondierende Addition und Subtraktion | 119 |
| b) Subtrahieren relativer Zahlen | 94 | IV. Die Potenzrechnung | 125 |
| 3. <i>Das Multiplizieren</i> | 96 | Potenzen mit negativer Basis | 127 |
| a) Multiplizieren von Summen und Differenzen | 99 | a) Addition und Subtraktion von Potenzen | 128 |
| b) Ausklammern des gemeinschaftlichen Faktors | 105 | b) Multiplizieren von Potenzen | 128 |
| 4. <i>Das Dividieren</i> | 106 | c) Dividieren von Potenzen | 130 |
| a) Dividieren eines Produkts durch eine Zahl | 107 | Gleichhohe Potenzen | 130 |
| b) Dividieren relativer Zahlen | 107 | Gleichbasige Potenzen | 130 |
| c) Dividieren einer Summe durch eine Zahl | 108 | d) Potenzieren von Potenzen | 131 |
| d) Dividieren einer Summe durch eine Summe | 109 | e) Der Lehrsatz des Pythagoras | 135 |
| e) Dividieren durch einen Bruch | 112 | V. Die Wurzelrechnung | 137 |
| | | a) Addition und Subtraktion von Wurzeln | 140 |

| | | | |
|--|-----|--|-----|
| b) Potenzen mit gebrochenen Exponenten | 141 | 2. Die komplexen Zahlen | 160 |
| c) Rechnen mit Wurzeln | 142 | a) Graphische (zeichnerische) Darstellung | 160 |
| d) Zahlengebiet der reellen Zahlen | 143 | b) Rechnen mit komplexen Zahlen | 163 |
| e) Irrationalität von $\sqrt{2}$ | 144 | Addition und Subtraktion komplexer Zahlen | 163 |
| f) Rationalmachen des Nenners | 145 | Multiplikation und Division komplexer Zahlen | 164 |
| g) Ausziehen der Quadratwurzeln | 146 | Potenzieren komplexer Zahlen | 165 |
| Wurzelziehen durch Faktore zerlegung des Radikanden . . . | 146 | Radizieren komplexer Zahlen | 165 |
| Wurzelziehen im Näherungsverfahren | 147 | VII. Das Rechnen mit Logarithmen | 168 |
| Rechnerische Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel | 148 | a) Das natürliche oder Napersche Logarithmensystem | 170 |
| VI. Das Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen | 155 | b) Das gewöhnliche oder dekadische oder Briggssche Logarithmensystem | 170 |
| 1. Die imaginären Zahlen | 155 | c) 4 Logarithmengesetze | 173 |
| a) Zeichnerische Darstellung der imaginären Zahlen | 156 | d) Zusammenhang verschiedener Logarithmensysteme | 177 |
| b) Multiplikation und Division imaginärer Zahlen | 157 | VIII. Das Rechnen mit dem Rechen-schieber | 181 |
| c) Potenzen der imaginären Einheit | 158 | | |

C. Das Rechnen mit Gleichungen (Algebra)

| | | | |
|---|-----|---|-----|
| I. Die verschiedenen Arten von Gleichungen | 186 | Substitutionsmethode oder Einsetzungsverfahren | 208 |
| II. Die Gleichungsgesetze | 189 | Gleichsetzungsverfahren | 211 |
| III. Die Lösungsverfahren von Gleichungen | 192 | Additionsverfahren | 213 |
| 1. Rechnerische Lösungsverfahren | 192 | c) Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten | 217 |
| a) Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten | 192 | d) Quadratische Gleichungen (Gleichungen 2. Grades) mit einer Unbekannten | 219 |
| Rechnerische Lösung von „Eingekleideten Aufgaben“ . . | 196 | Sonderfälle der Normalform der quadratischen Gleichung | 220 |
| Technische Grundgleichungen | 197 | Das Wurzelgesetz für die quadratischen Gleichungen . | 225 |
| b) Lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten | 207 | Lehrsatz von Vieta | 226 |

| | | | |
|--|-----|-------------------------------------|-----|
| Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten | 229 | linearer Gleichungen | 235 |
| 2. <i>Zeichnerische Lösungsverfahren</i> | 235 | quadratischer Gleichungen | 245 |
| | | kubischer Gleichungen | 253 |

Anhang

| | | | |
|--|-----|---|-----|
| I. Zusammenfassende | | III. Lösungen | 272 |
| Übersichten | 263 | A. Das Fachrechnen mit bestimmten Zahlen | 272 |
| 1. <i>Verschiedene Arten der Zahlen</i> | 263 | B. Das Rechnen mit Buchstaben | 276 |
| 2. <i>Die Rechenoperationen</i> | 264 | C. Das Rechnen mit Gleichungen (Algebra) | 280 |
| 3. <i>Abgeleitete Formeln und Regeln</i> | 265 | IV. Stichwortverzeichnis | 283 |
| 4. <i>Arten und Formen von Gleichungen</i> | 270 | V. Namenverzeichnis | 288 |
| II. Das griechische Alphabet | 271 | | |

A. Das Fachrechnen mit bestimmten Zahlen

I. Die 4 Grundrechnungsarten

1. Mit ganzen Zahlen

a) Das Zusammenzählen oder Addieren

Die Rechenaufgabe: „43 vermehrt um 27 ergibt 70“ schreibt man in der einfachen mathematischen Form:

$$43 + 27 = 70$$

[lies: 43 plus 27 gleich 70].

In der Sprache der Mathematik heißt das Zeichen $+$: „plus“. Die Aufgabe behandelt das Zusammenzählen oder Addieren zweier Zahlen; nämlich der Zahl 43 und der Zahl 27. Diese beiden Zahlen, die zusammengezählt oder addiert werden, heißen die Glieder oder Summanden. Das Ergebnis der Addition nennt man die Summe.

Zusammenfassung:

| Name der Rechenoperation | Beispiel | Die Zahl 43 heißt | Die Zahl 27 heißt | Das Ergebnis 70 heißt |
|--------------------------|----------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| Addition | $43 + 27 = 70$ | Summand | oder Glied | Summe |

Das 1. Beispiel behandelte die Addition von zwei Zahlen. Man kann aber auch mehrere Zahlen addieren, z. B.:

$$21 + 5 + 9 + 15 = 50.$$

Bei der Bildung einer Summe aus mehreren Gliedern — vorstehend sind es 4 Glieder — kann man die Reihenfolge der Glieder beliebig ändern und erhält dasselbe Ergebnis. Man kann also auch rechnen:

$$21 + 9 + 5 + 15 = 50 \quad \text{oder}$$

$$9 + 21 + 15 + 5 = 50 \quad \text{usw.}$$

Man erhält den Lehrsatz:

Bei der Bildung einer Summe ist die Reihenfolge der Glieder beliebig.

Um sich das Kopfrechnen weitgehend zu erleichtern, ordnet man die Glieder zweckmäßig so, daß man — wenn dies möglich ist — als Teilergebnisse durch 10 teilbare Zahlen erhält. Zweistellige Zahlen lassen sich bei einer nicht zu großen Anzahl der einzelnen Summanden bequem bei einiger Übung im Kopf addieren. Es empfiehlt sich jedoch auch hier, das erhaltene Ergebnis nochmals zu überprüfen, indem man die Summe noch einmal bei geänderter Gliedfolge bildet. Drei- und mehrstellige Zahlen addiert man besser schriftlich. Hierbei ist neben der grundlegenden Forderung einer sauberen, für jedermann lesbaren und zu keiner Verwechslung Anlaß gebenden Zahlenschrift darauf zu achten, daß man die Zahlen richtig untereinander schreibt. Es hat der Einer unter dem Einer, der Zehner unter dem Zehner, der Hunderter unter dem Hunderter usw. zu stehen.

| | | | |
|----------------|------|---------------|------|
| Man rechne so: | 751 | und nicht so: | 751 |
| | 3 | | 3 |
| | 81 | | 81 |
| | 1500 | | 1500 |
| | 51 | | 51 |
| | 3614 | | 3614 |
| | 6000 | | |

Man addiere einmal von oben nach unten und — was man nie vergesse — zur Probe ein zweites Mal in umgekehrter Gliedfolge.

Aufgaben:

- 1) In der nachstehenden Zahlentabelle sind die senkrechten Spalten a bis e und die waagerechten Zeilen f bis k zu addieren. Ferner sind die Ergebnisse der Spalten a bis e zusammenzuzählen. Diese Summe muß gleich der Zahl sein, die man durch Addition der Ergebnisse der Zeilen f bis k erhält.

| | a | b | c | d | e | $\Sigma^1)$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|------|-------------|
| f | 5621 | 105 | 17 | 621 | 5014 | |
| g | 214 | 7843 | 321 | 30018 | 230 | |
| h | 1050 | 18132 | 5160 | 3489 | 4567 | |
| i | 50040 | 6507 | 45618 | 692 | 89 | |
| k | 87 | 516 | 7000 | 6907 | 142 | |
| $\Sigma^1)$ | | | | | | |

- 2) In den Betrieben des Kreises Leipzig gab es im August 1950: 3462 Männer, 407 Frauen und 361 Jugendliche, die wegen ihrer hervorragenden Arbeitsleistungen im Neuaufbau unserer Wirtschaft als

¹⁾ Das Zeichen Σ ist der griechische große Buchstabe S (Sigma). Es wird in der Mathematik als Zeichen für eine Summe verwendet.

Aktivisten ausgezeichnet worden waren. Am 13. Oktober 1950, dem Tage der Aktivisten, konnten weitere 1645 Männer, 130 Frauen und 234 Jugendliche zu Aktivisten ernannt werden.

Wie groß war die Gesamtzahl der Aktivisten in den Leipziger Betrieben

- a) im August 1950,
b) am 13. Oktober 1950?
- 3) Wieviel Kilogramm beträgt das Gesamtgewicht (= Bruttogewicht) eines Eisenbahn-Kohlenwagens, eines sog. Selbstentladers, wenn beträgt:
- a) das Leergewicht des Wagens (= Tara) = 8640 kg
b) die Kohlenladung (= Nettogewicht) = 19560 kg.
- 4) Die Produktion der metallurgischen Industrie betrug im Jahre 1950 in der DDR: 527 Millionen DM. Der Fünfjahrplan sieht für die nächsten 5 Jahre eine Produktionssteigerung um 723 Millionen vor. Wie hoch wird die Produktion der metallurgischen Industrie im Jahre 1955 sein?
- 5) Die Gesamtfertigungszeit für 30 Lagerbuchsen setzt sich aus folgenden Teilzeiten zusammen:
- a) Rüstgrundzeit = 24 min d) Nebenzeit = 287 min
b) Rüstverlustzeit = 3 „ e) Verlustzeit = 40 „
c) Hauptzeit = 112 „

Die Teilzeiten verstehen sich vorstehend auf 30 Stück. Wie groß ist die Gesamtfertigungszeit?

- 6) Der Zählerstand einer Gasuhr beträgt: 2541 m³. Welchen Stand wird der Zähler zeigen, nachdem 97 m³ verbraucht worden sind?
- 7) Während der Jahre 1951 bis 1955 werden nach dem Fünfjahrplan an neuen Produktionskapazitäten in Betrieb genommen:

| | |
|----------------------|-----------|
| Für Rohstahl | 1800000 t |
| „ Walzstahl | 1600000 t |
| „ Roheisen | 900000 t |
| „ Eisenerzförderung | 1500000 t |
| „ Kupfererzförderung | 900000 t |

Wieviel Tonnen beträgt die gesamte Erhöhung der Produktionskapazität?

b) Das Abziehen oder Subtrahieren

Das Subtrahieren einer Zahl

Die Rechenoperation: $43 - 27 = 16$ [lies: 43 minus 27 gleich 16]

stellt eine ausgeführte Subtraktion dar und besagt: „Wenn man die Zahl 43 um 27 verkleinert, so erhält man 16.“

Auch beim Abziehen oder Subtrahieren heißen die beiden Zahlen 43 und 27: Glieder. Im einzelnen heißt hier jedoch die Zahl 43: „der Minuend“ (auf deutsch: die zu verkleinernde Zahl) und die Zahl 27: „der Subtrahend“ (auf deutsch: die abzuziehende Zahl). Bei einer Subtraktionsaufgabe sind der Minuend und der Subtrahend durch das Zeichen: „—“ miteinander verbunden. In der Sprache der Mathematik heißt dieses Zeichen: „minus“. Das Ergebnis 16 der vorstehenden Subtraktion nennt man: „die Differenz“.

Zusammenfassung:

| Name der Rechenoperation | Beispiel | Die Zahl 43 heißt | Die Zahl 27 heißt | Das Ergebnis 16 heißt |
|--------------------------|----------------|-------------------|-------------------------------|-----------------------|
| Subtraktion | $43 - 27 = 16$ | Minuend | Subtrahend oder Glieder | Differenz |

Während man bei den unter a) auf S. 1 behandelten Additionsaufgaben durch Zusammenzählen von 2 oder mehreren Gliedern immer wieder als Ergebnis positive Zahlen erhält, so ist dies bei einer Subtraktion nur bedingt der Fall.

Die kleinste positive ganze Zahl ist 1. Eine größte positive ganze Zahl gibt es nicht; denn, gesetzt den Fall, es könnte jemand die größte positive Zahl nennen, so wäre diese angeblich größte Zahl immer noch kleiner als die Zahl, die entsteht, wenn man zu der genannten Zahl noch 1 hinzuzählen würde. Das für eine unendlich große Zahl in der Mathematik verwendete Zeichen: ∞ ist keine eigentliche Zahl mehr. Vielmehr ist ∞ das Zeichen für eine Größe, die größer ist als jede noch so große angebbare Zahl.

Das Zahlengebiet, das bisher in der Addition behandelt wurde, umfaßt sämtliche positive ganze Zahlen von 1 bis ∞ . Dieses Zahlengebiet reicht jedoch nicht aus, um alle Subtraktionsaufgaben zu lösen.

Man erhält positive ganze Zahlen als Ergebnis einer Subtraktion nur dann, wenn der Minuend größer als der Subtrahend ist.

Das mathematische Zeichen für „größer als“ ist: $>$ und für „kleiner als“: $<$. Man schreibt also: $8 > 6$ oder $6 < 8$. Als Gedächtnisregel für das Auseinanderhalten der beiden Zeichen $>$ und $<$ kann man sich merken,

daß man das Zeichen $<$ = „kleiner als“ als einen Teil des gedruckten Buchstabens *k*, des Anfangsbuchstabens des Wortes „kleiner“, auffassen kann. Noch einfacher und leichter merkt man sich die folgende Gedächtnisregel:

! Die Zeichen $<$ und $>$ öffnen das Maul in Richtung des größeren Wertes!

Ist der Minuend ebenso groß wie der Subtrahend, so erhält man das Ergebnis: 0 [sprich: „Null!“].

Ist der Minuend aber kleiner als der Subtrahend, so kommt man auf keine positive Zahl mehr.

Zum Verständnis mögen nachstehende Beispiele dienen: Die Addition der beiden positiven Zahlen 2 und 5 ergibt die positive Zahl 7.

Die Subtraktion der positiven Zahl 2 (als Subtrahend) von der positiven Zahl 5 (als Minuend) ergibt als Differenz die positive Zahl 3 oder mathematisch geschrieben $5 - 2 = 3$.

Hier war der Minuend $>$ Subtrahend.

Ist aber die Aufgabe: $2 - 5 = ?$ gestellt, ist also der Minuend $<$ Subtrahend, so kann man keine positive Zahl als Ergebnis angeben.

Um nun auch mit derartigen Aufgaben rechnen zu können, bedient man sich der negativen Zahlen, die durch das vor die positive Zahl gesetzte Zeichen „-“ gekennzeichnet sind. Man spricht die negative Zahl: „-3“ „minus drei“ aus. Hierzu ein

Beispiel aus dem Naturgeschehen:

Wenn im späten Herbst bei einer Außentemperatur von 2° Wärme die Temperatur um 5° fällt, so erhält man Frost von 3° . Wir operieren hierbei mit den im Volksmunde üblichen Begriffen „Wärme“ und „Frost“. Mathematisch stellt sich dieses herbstliche Naturgeschehen in der Form: $2 - 5 = -3$ dar.

Die an der Thermometerskala oberhalb des Nullpunktes stehenden Zahlen sind als die Versinnbildlichung der Zahlenfolge der positiven Zahlen anzusehen.

(Ebenso stellen die auf einem Zollstock stehenden Zahlen die Zahlenreihe der positiven Zahlen dar.)

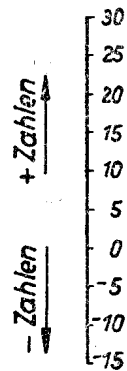


Bild 1

Die neben dem Quecksilberfaden des Thermometers vom Nullpunkt nach unten hin immer größer werdenden Zahlen stellen die Zahlenfolge der negativen Zahlen dar.

Zählt man zu irgendeiner positiven oder negativen Zahl eine positive Zahl hinzu, so kommt man auf eine Zahl, die auf der durch die Thermometerskala dargestellten Zahlengeraden weiter nach oben hin liegt. Subtrahiert man von irgendeiner Zahl eine positive Zahl, so schreitet man hingegen auf der Thermometerskala nach unten fort.

Beispiele:

$$a) +5 + 15 = +20$$

$$c) -10 + 25 = +15$$

$$b) +5 - 15 = -10$$

$$d) -10 - 25 = -35$$

Aufgaben:

Wieviel ergibt:

$$8) 17 - 35 =$$

$$11) 124 - 149 =$$

$$15) -100 + 115 =$$

$$9) 35 - 17 =$$

$$12) -17 - 28 =$$

$$16) -47 - 13 =$$

$$10) 124 - 49 =$$

$$13) -28 + 17 =$$

$$17) 78 + 45 =$$

$$14) -11 + 100 =$$

Das Subtrahieren einer Summe

Die Aufgabe: $24 - (3 + 15) = ?$ sagt: Man soll von der Zahl 24 die Summe der beiden Zahlen 3 + 15 subtrahieren.

Man kann hier 2 Wege zur Lösung einschlagen:

α) Man bildet die Summe der beiden in eine Klammer eingeschlossenen Zahlen 3 und 15 und erhält 18. Diese Zahl zieht man von 24 ab und erhält 6.

β) Man zieht von 24 die 3 ab und erhält 21. Von 21 subtrahiert man 15 und erhält wiederum 6.

Bei dem 2. Lösungsweg hat man jedes Glied der Summe 3 + 15 von 24 nacheinander subtrahiert. Man hat folgende wichtige Regel angewendet:

Steht vor einer Klammer das Minuszeichen, so hat man, wenn man die Klammer fortlassen will, die Vorzeichen der in der Klammer stehenden Glieder in ihr Gegenteil zu verkehren.

Steht vor einer Klammer das Pluszeichen, so kann man die Klammer fortlassen, ohne irgendeine Änderung vornehmen zu müssen.

Außer der runden Klammern () bedient man sich auch eckiger [] und geschweifter { } Klammern. Bisweilen steht in einer eckigen Klammer noch eine runde. Dann berechnet man zunächst den Inhalt der runden Klammer und danach den der eckigen Klammer; z. B.:

$$37 - [14 - (7 + 2)] = 37 - [14 - 9] = 37 - 5 = 32$$

oder man läßt zuerst die runde Klammer fort, wobei man die Vorzeichen der in der Klammer stehenden Zahlen in ihr Gegenteil verkehrt, wenn ein Minuszeichen vor der Klammer steht, und dann beseitigt man auf dieselbe Art die eckige Klammer; also folgendermaßen:

$$37 - [14 - (7 + 2)] = 37 - [14 - 7 - 2] = 37 - 14 + 7 + 2 = 32.$$

Aber auch die eckige [] Klammer kann noch in einer geschweiften { } Klammer stehen; z. B.:

$$91 - \{37 - [14 - (5 + 2)] - 3\}.$$

Man erhält durch Auflösen der runden Klammer:

$$91 - \{37 - [14 - 5 - 2] - 3\},$$

durch Auflösen der eckigen Klammer:

$$91 - \{37 - 14 + 5 + 2 - 3\},$$

durch Auflösen der geschweiften Klammer:

$$91 - 37 + 14 - 5 - 2 + 3 = 64.$$

Beispiele:

a) $47 - [23 - (10 - 2)] = ?$

1. Lösungsweg:

Inhalt der () Klammer berechnet: $47 - [23 - 8] =$

Inhalt der [] berechnet: $47 - 15 = 32$

2. Lösungsweg:

() Klammer aufgelöst: $47 - [23 - 10 + 2] =$

[] Klammer aufgelöst: $47 - 23 + 10 - 2 = 32$

b) $145 - (24 + 16) - \{37 - [16 - (24 - 18)]\} = ?$

1. Lösungsweg:

$$145 - 40 - \{37 - [16 - 6]\} =$$

$$145 - 40 - \{37 - 10\} =$$

$$145 - 40 - 27 = 78$$

2. Lösungsweg:

$$145 - 24 - 16 - \{37 - [16 - 24 + 18]\} =$$

$$145 - 24 - 16 - \{37 - 16 + 24 - 18\} =$$

$$145 - 24 - 16 - 37 + 16 - 24 + 18 = 78$$

Aufgaben:

18) $96 - (13 + 33) =$

19) $15 - (7 - 18 + 29) =$

20) $443 - [340 - (105 - 8)] =$

21) $2050 - [345 - (143 - 98)] =$

22) $67 - \{68 - [42 - (27 + 13)]\} =$

23) $1000 - [1832 - (765 + 1067)] =$

24) $1500 + (1300 - 1700) - (1100 + 400) =$

25) $101 - [123 - (25 + 16 + 75)] + (101 - 95) =$

26) $170 - (230 - 30) + (107 - 67) - (47 - 27) =$

27) $500 - [(483 + 117) - (121 + 79)] - (256 + 44) =$

28) Durch eine Kältemaschine wird die Temperatur von 19°C um 24°C gesenkt. Wieviel Grad Celsius beträgt die Temperatur?

29) Ein Personenzug, der fahrplanmäßig um 22^{10} Uhr abfahren mußte, kann wegen einer unvorhergesehenen Betriebsstörung erst um 1^{05} Uhr abfahren. Wieviele Stunden und Minuten beträgt die Verspätung?

- 30) Die Erzeugung der Energiewirtschaft der DDR betrug im Jahre 1950: 790 Millionen DM. Im Fünfjahrplan ist für das Jahr 1955 eine Erzeugung von 1400 Millionen DM vorgesehen. Um wieviele Millionen DM erhöht sich die Erzeugung der Energiewirtschaft?
- 31) In der Materialausgabe beträgt der Bestand an Schrauben M 8 \times 40 DIN 931 St 37.12 z am Wochenanfang: 2750 Stück. Für Fertigungszwecke werden im Laufe einer Woche an die Werkstatt folgende Stückzahlen ausgegeben: Montag: 225 Stck.; Dienstag: 240 Stck.; Mittwoch: 335 Stck.; Donnerstag: 302 Stck.; Freitag: 165 Stck.; Sonnabend: 83 Stck. Wie groß ist der Schraubenbestand am Wochenende?
- 32) Die Summe von 4 Winkeln beträgt 360° . Es soll also sein $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (siehe griechisches Alphabet auf Seite 271). Wie groß ist δ , wenn $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 87^\circ$, $\gamma = 112^\circ$ gegeben sind?
- 33) Einkaufspreis 1750 DM, Verkaufspreis 1925 DM. Wie groß ist der Verdienst?
- 34) Bruttogewicht (= Gesamtgewicht = Inhalt + Verpackung): 32 kg, Taragewicht (Gewicht der Verpackung): 3 kg. Wie groß ist das Nettogewicht (Gewicht des Inhalts)?
- 35) Am 17. August 1950 wurde vom Ministerrat der DDR eine Verordnung über die Verbesserung der Entlohnung der Arbeiter und Angestellten in den volkseigenen und ihnen gleichgestellten Betrieben verkündet. Nach ihr betragen beispielsweise für die Arbeiter der Metallindustrie die Stundenlöhne (in Pf.) in den Lohngruppen:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ab 1. 9. 1950: | 87 | 95 | 105 | 112 | 124 | 137 | 150 | 166 |
| bisher: | 81 | 86 | 95 | 100 | 108 | 119 | 130 | 144 |

Wie groß ist der stündliche Mehrverdienst in den einzelnen Lohngruppen?

- 36) In einen nur zum Teil gefüllten Behälter, der 530 l faßt, konnten noch 180 l nachgefüllt werden. Wieviel Liter waren schon darin?
- 37) Gewicht eines unbearbeiteten Gußteiles (Rohling): 22 kg; Gewicht des Fertigteiles (nach dem Fräsen, Bohren und Gewindeschneiden): 18 kg. Wieviel beträgt der Werkstoffabfall?

c) Das Malnehmen oder Multiplizieren

Die Aufgabe: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ ist ein Sonderfall der im Abschnitt a) auf Seite 1 behandelten Additionsaufgaben. Hier ist die Summe 15 aus 5 Gliedern gebildet, die untereinander gleich sind. Man schreibt derartige Additionsaufgaben, bei denen sämtliche Glieder gleich sind, in der kurzen Form:

$$3 \cdot 5 = 15$$

[lies: Drei mal fünf gleich fünfzehn].

Dieser Rechengvorgang ist das Malnehmen oder Multiplizieren. Man nennt eine solche Ausrechnung eine Multiplikation.

Eine Multiplikation entsteht durch das Addieren gleicher Summanden.

Die beiden Zahlen 3 und 5 heißen bei der Multiplikation die Faktoren (nicht wie bei der Addition oder Subtraktion: Glieder). Im einzelnen nennt man die Zahl 3 den Multiplikand (auf deutsch: die zu vervielfältigende Zahl) und die Zahl 5 den Multiplikator (auf deutsch: den Vervielfältiger). Die beiden Faktoren 3 und 5 sind durch das mathematische Zeichen für die Multiplikation, den Punkt, getrennt. Das im bürgerlichen Rechnen übliche Malzeichen „ \times “ wird in der Elementar-Mathematik nicht verwendet. Das Ergebnis einer Multiplikationsaufgabe — hier ist es die Zahl 15 — nennt man das Produkt.

Zusammenfassung:

| Name der Rechenoperation | Beispiel | Die Zahl 3 heißt | Die Zahl 5 heißt | Das Ergebnis 15 heißt |
|--------------------------|------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------|
| Multiplikation | $3 \cdot 5 = 15$ | Multiplikand | Multiplikator | Produkt |
| | | Faktoren | | |

Die einfachsten Multiplikationsaufgaben sind die Aufgaben des kleinen und großen Einmaleins. Unter dem kleinen Einmaleins versteht man sämtliche Produkte, die sich bei der Multiplikation einstelliger Faktoren ergeben: z. B. $7 \cdot 8 = 56$ oder $6 \cdot 9 = 54$. Das große Einmaleins umfaßt alle die Produkte, bei denen der eine Faktor eine zweistellige, der andere eine einstellige Zahl ist: z. B. $37 \cdot 5 = 185$ oder $64 \cdot 3 = 192$ oder $6 \cdot 46 = 276$ oder $7 \cdot 52 = 364$.

Derartige kleine Multiplikationsaufgaben muß man fehlerfrei und schnell im Kopf rechnen können, da sie zum Rechenhandwerkszeug gehören. Wie überall, so gilt auch hier das Wort: „Übung macht den Meister!“ Also: „Üben, üben und noch einmal üben!“

Alle anderen Multiplikationsaufgaben mit größeren Faktoren rechne man schriftlich oder mit Hilfe des im Abschnitt B VIII auf Seite 181 behandelten Rechenstabes, der in der Praxis und auch in diesem Buche als Rechenschieber bezeichnet wird.

Beim Multiplizieren kann man, ohne hierdurch das Ergebnis zu ändern, die einzelnen Faktoren vertauschen. Man kann also den Multiplikand zum Multiplikator machen und umgekehrt. Es ist gleich, ob man: $43 \cdot 5 = 215$ oder $5 \cdot 43 = 215$ rechnet. In kurzer Form erhält man folgenden Lehrsatz:

Die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts ist beliebig.

(Vergleiche den entsprechenden Lehrsatz der Addition: Die Reihenfolge der Glieder ist in einer Summe beliebig.)

Zum anschaulichen Beweise dieses Lehrsatzes diene die nachstehend skizzierte gelochte Blechplatte, in die 3 Reihen mit je 6 Löchern gebohrt sind.

Die Lochzahl in der Platte stellt man nicht durch das umständliche und zeitraubende Abzählen aller Löcher fest; vielmehr schlägt man einen der beiden folgenden Wege ein:

- a) Da man 3 Reihen mit je 6 Löchern hat, rechnet man $6 + 6 + 6$ oder 6 Löcher sind dreimal vorhanden; d. h. $6 \cdot 3 = 18$.

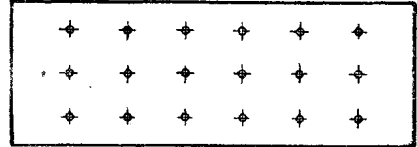


Bild 2

- b) Da 6mal 3 Löcher untereinanderstehen, rechnet man

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

oder 3 Löcher sind sechsmal vorhanden; d. h.

$$3 \cdot 6 = 18.$$

Aus den beiden gleichen Ergebnissen der Wege a) und b) ersieht man, daß

$$6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$$

ist, w. z. b. w. [was zu beweisen war].

Ebenso läßt sich durch 120 Ziegelsteine, von denen 6 Reihen nebeneinander, 5 Reihen hintereinander und 4 Schichten übereinander liegen, beweisen, daß

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 6 \cdot 5 = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 5 \cdot 6 \cdot 4 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \text{ ist.}$$

Von der soeben bewiesenen Tatsache, daß in einem Produkt die Reihenfolge der Faktoren beliebig ist, macht man beim schriftlichen Multiplizieren praktischen Gebrauch insofern, als man stets mit der Zahl die die wenigsten Stellen hat, multipliziert. Man rechnet

$$\text{also: } \begin{array}{r} 4738 \cdot 62 \\ \hline 28428 \\ 9476 \\ \hline 293756 \end{array}$$

$$\text{und nicht: } \begin{array}{r} 62 \cdot 4738 \\ \hline 248 \\ 434 \\ 186 \\ 496 \\ \hline 293756 \end{array}$$

Aber auch beim Multiplizieren im Kopf ordnet man die Faktoren eines Produktes so, daß man — wenn möglich — als Zwischenprodukte Zahlen erhält, die sich leicht weiterhin vervielfachen lassen.

Beispiele:

- a) In der Aufgabe $5 \cdot 7 \cdot 18$ rechnet man: $5 \cdot 18 = 90$ und dann $90 \cdot 7 = 630$. Man hat also gerechnet: $5 \cdot 18 \cdot 7$.
- b) $4 \cdot 7 \cdot 25$ rechnet man nicht in der gegebenen Reihenfolge der Faktoren aus, sondern besser: $4 \cdot 25 \cdot 7 = 100 \cdot 7 = 700$.

Aufgaben:

Folgende Produkte sind nach Möglichkeit im Kopf auszurechnen:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|---|
| 38) $5 \cdot 7 \cdot 12 =$ | 45) $15 \cdot 2 \cdot 25 =$ | 52) $4 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 5 =$ |
| 39) $25 \cdot 6 \cdot 2 =$ | 46) $8 \cdot 9 \cdot 5 =$ | 53) $8 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 4 =$ |
| 40) $6 \cdot 35 \cdot 4 =$ | 47) $9 \cdot 15 \cdot 6 =$ | 54) $125 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =$ |
| 41) $9 \cdot 14 \cdot 5 =$ | 48) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$ | 55) $3 \cdot 225 \cdot 3 \cdot 4 =$ |
| 42) $2 \cdot 61 \cdot 5 =$ | 49) $2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 =$ | 56) $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 4 =$ |
| 43) $4 \cdot 23 \cdot 5 =$ | 50) $5 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 2 =$ | 57) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 =$ |
| 44) $22 \cdot 9 \cdot 5 =$ | 51) $5 \cdot 31 \cdot 2 \cdot 3 =$ | |

58) Ein Becherwerk fördert in der Minute 1 t Braunkohle. Wieviel Tonnen Braunkohle werden in einer Dreiviertelstunde gefördert?

59) Der durchschnittliche Wochenlohn eines Schlossers beträgt 58 DM. Wie groß ist sein Jahreseinkommen bei 50 Arbeitswochen?

60) Der Eisenbahntarif beträgt 8 Pf pro km. Was kostet eine Reise von 125 km?

61) Ein 55-PS-Fahrzeugmotor verbraucht für 100 km an Benzin 20 l. Wie hoch sind die Brennstoffkosten für 400 km, wenn 1 l Benzin 50 Pf kostet?

62) Die in Watt gemessene Leistung einer Glühbirne berechnet sich aus dem Produkt von Spannung (Volt) und Stromstärke (Ampere).

Wieviel Watt verbraucht eine Glühbirne bei 110 V, wenn durch sie ein Strom von 5 A fließt?

63) Ein Kugellager enthält 14 Kugeln vom Durchmesser 12 mm. Eine Kugel wiegt rund 7 g. Wie groß ist das Kugelgewicht für 5 Kugellager?

64) Für eine Stahlkonstruktion werden verbraucht:

18 m gleichschenkliges Winkeleisen $\angle 60 \cdot 60 \cdot 8$.

Ein Meter wiegt 7 kg.

4 m ungleichschenkliges Winkeleisen $\angle 50 \cdot 100 \cdot 8$.

Ein Meter wiegt 9 kg.

13 m Doppel T-Eisen $\text{I} 8$. Ein Meter wiegt 6 kg.

Wie groß ist das Gesamtgewicht der Stahlkonstruktion?

65) Wieviel Umdrehungen in einer Stunde macht eine Riemenscheibe bei einer Drehzahl von 250 U/min?

(Anleitung: Da eine Stunde 60 Minuten hat, ist die Anzahl der Umdrehungen in einer Stunde 60mal so groß wie die Umdrehungszahl in der Minute, die hier 250 beträgt.)

66) Die Geschwindigkeit eines Schnellzuges beträgt 20 m in der Sekunde. Wieviel Kilometer legt er in einer Stunde zurück?

- 67) Der Zeichnungsmaßstab M. 5:1 besagt, daß die auf einer Zeichnung angegebenen Längen eines Maschinenteils 5 mal so groß wie in Wirklichkeit sind.

Wie groß ist eine rechteckige Zwischenscheibe von den Seitenlängen 22 und 31 mm im Maßstab M. 5:1 zu zeichnen?

Die Multiplikation relativer Zahlen

Zahlen mit Vorzeichen + oder - nennt man relative Zahlen. Relativ heißt „bezogen auf“. Hier wird der Zahlenwert auf den Nullpunkt bezogen. Beispiele für relative Zahlen sind Temperaturangaben in + und - Graden, bezogen auf den Nullpunkt (= der Temperatur des schmelzenden Eises). Die Höhe eines Berges und die Tiefe eines Schachtes sind auch relative Zahlen in bezug auf die Höhe des Meeresspiegels: 0 m. Einnahmen (Gewinn) bezeichnet man mit + DM im Gegensatz zu Ausgaben (Verlust) mit - DM¹⁾.

Beim Multiplizieren zweier Faktoren mit gleichen bzw. ungleichen Vorzeichen sind 4 Fälle möglich:

- α) Multiplikand und Multiplikator sind positiv:

Das Produkt von zwei oder mehreren positiven Zahlen ergibt immer wieder eine positive Zahl.

Hiervon wurde bei den bisherigen Multiplikationen stillschweigend Gebrauch gemacht, wobei jedoch beim Schreiben der positiven Faktoren von dem Vorsetzen des +-Zeichens vor die positiven Zahlen der Einfachheit halber Abstand genommen wurde.

Es ist also: $(+3) \cdot (+5) = (+15)$. Vorzeichenregel: $\boxed{+ \cdot + = +}$

- β) Multiplikand ist negativ; Multiplikator ist positiv:

Multipliziert man eine negative Zahl mit einer positiven, dann erhält man eine negative Zahl; denn

$$(-3) \cdot (+5) \text{ heißt } (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15.$$

Es ist also: $(-3) \cdot (+5) = (-15)$. Vorzeichenregel: $\boxed{- \cdot + = -}$

- γ) Multiplikand ist positiv; Multiplikator ist negativ:

Da die Reihenfolge der Faktoren in einem Produkt beliebig ist, ergibt sich nach der Vertauschung der Faktoren im Fall β:

$(+5) \cdot (-3) = (-15)$. Vorzeichenregel: $\boxed{+ \cdot - = -}$

¹⁾ Die Zeichen + und - haben bei unseren Betrachtungen je zweierlei Bedeutung:

a) Rechenzeichen für auszuführende Addition bzw. Subtraktion.

b) Charakterisierungsmerkmale für positive bzw. negative Zahlen, z. B. (+7), (-3); das Vorzeichen gehört zu der Zahl!

δ) Multiplikand und Multiplikator sind negativ:

Man ersieht aus den ersten 3 Fällen $\alpha \dots \gamma$, daß das Vorzeichen des Produkts gleich dem des Multiplikanden ist, wenn das Vorzeichen des Multiplikators $+$ ist (Fall α und β). Das Vorzeichen des Produkts ist umgekehrt wie das des Multiplikanden, wenn der Multiplikator negativ ist (Fall γ). Entsprechend wird für Fall δ) festgelegt:

$$(-5) \cdot (-3) = (+15).$$

Vorzeichenregel:

| |
|-----------------|
| $- \cdot - = +$ |
|-----------------|

Die letzte etwas schwerer verständliche Vorzeichenregel unter δ) kann man sich auch so erklären, daß in der deutschen Sprache eine doppelte Verneinung einer Bejahung entspricht: Wenn z. B. unter 50 Ablesungen keine falsch ist, so sind alle richtig. Oder: „Dieser Flansch ist nicht unrund“ heißt: „Der Flansch ist rund“ usw.

Zusammenfassung:

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv (Fall α und δ).

$$\left. \begin{array}{l} + \cdot + \\ - \cdot - \end{array} \right\} = +$$

Das Produkt zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ist negativ (Fall β und γ).

$$\left. \begin{array}{l} - \cdot + \\ + \cdot - \end{array} \right\} = -$$

Beispiele:

a) $(-12) \cdot (+6) = -72$

e) $(+5) \cdot (-6) \cdot (+4) = -120$

b) $(+18) \cdot (-6) = -108$

f) $(-5) \cdot (+7) \cdot (-6) = +210$

c) $(-21) \cdot (-5) = +105$

g) $(-3) \cdot (-5) \cdot (-7) = -105$

d) $(+43) \cdot (+7) = +301$

h) $(+4) \cdot (+6) \cdot (+8) = +192$

Aufgaben:

68) $(+15) \cdot (+2) \cdot (-6) =$

73) $(+8) \cdot (-10) \cdot (+12) =$

69) $(+3) \cdot (-4) \cdot (-8) =$

74) $(-10) \cdot (+11) \cdot (-12) =$

70) $(-5) \cdot (+6) \cdot (+7) =$

75) $(+11) \cdot (+3) \cdot (+4) =$

71) $(-6) \cdot (-8) \cdot (+9) =$

76) $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (+5) =$

72) $(-7) \cdot (-9) \cdot (-11) =$

77) $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6) =$

Die Potenzen

Wie eingangs dieses Abschnittes über das Multiplizieren gezeigt wurde, führt die Addition gleichgroßer Zahlen zur Multiplikation.

Produkte, die aus mehreren gleichgroßen Faktoren gebildet werden, nennt man Potenzen. So ist beispielsweise in dem Produkt: $2 \cdot 2 \cdot 2$ die Zahl 2 dreimal als Faktor gesetzt.

Man schreibt: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

und liest: 2 hoch 3 gleich 8.

Oder man schreibt: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$

und liest: 4 hoch 5 gleich 1024.

In der Gleichung: $4^2 = 16$ nennt man 4 die Grundzahl oder Basis; 2 ist die Hochzahl oder der Potenzexponent.

Der Potenzexponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist. Das Ergebnis 16 heißt die Potenz. Die Schreibweise des Exponenten in höherer Stellung hinter der Basis rührt her von Descartes (auch Cartesius genannt — 1596 bis 1650 — französischer Mathematiker).

Zusammenfassung:

| Name der Rechenoperation | Beispiel | Die Zahl 4 heißt | Die Zahl 2 heißt | Das Ergebnis 16 heißt |
|--------------------------|------------|----------------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| Potenzierung | $4^2 = 16$ | Grundzahl oder Basis | Hochzahl oder Potenzexponent | Potenz |

Potenzen mit der Hochzahl 2, z. B.: $5^2 = 25$ oder $7^2 = 49$ usw., nennt man Quadratzahlen oder kurz: Quadrate.

Potenzen mit der Hochzahl 3, z. B.: $4^3 = 64$ oder $6^3 = 216$ usw., nennt man Kubikzahlen oder kurz: Kuben.

Potenzen mit der Hochzahl 4, z. B. $3^4 = 81$ oder $5^4 = 625$, nennt man Biquadrate.

Quadrat- und Kubikzahlen werden im technischen Rechnen viel verwendet. Man findet ihre Werte entweder durch Multiplizieren oder mit Hilfe des später behandelten Rechenschiebers. Man bedient sich aber auch mit Vorteil der mathematischen Tafel der Zahlen 1 ... 1000.

Es empfiehlt sich, die Reihe der Quadratzahlen zu lernen:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,
121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.

In der Reihe der Quadratzahlen der ganzen Zahlen wechseln gerade und ungerade Zahlen miteinander ab.

Das Quadrat einer geraden Zahl ist eine gerade Zahl;

z. B. $4^2 = 16$; $8^2 = 64$.

Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl;

z. B. $3^2 = 9$; $5^2 = 25$.

Quadratzahlen haben die Eigenschaft, bei der Teilung durch 4 den Rest 0 oder 1 zu lassen; je nachdem die Basis eine gerade oder ungerade Zahl ist.

$$\begin{array}{ll} \text{z. B. } 225 : 4 = 56 \text{ Rest } 1, & 256 : 4 = 64 \text{ Rest } 0, \\ 289 : 4 = 72 \text{ Rest } 1, & 324 : 4 = 81 \text{ Rest } 0. \end{array}$$

Zum vereinfachten Schreiben großer Zahlen bedient man sich der Potenzen mit der Basis 10. Es bedeutet:

$$\begin{array}{ll} 10^1 = 10 & 10^9 = 1\,000\,000\,000 = 1 \text{ Milliarde} \\ 10^2 = 100 & 10^{12} = & 1 \text{ Billion} \\ 10^3 = 1000 & 10^{15} = & 1 \text{ Billiarde} \\ 10^4 = 10\,000 & 10^{18} = & 1 \text{ Trillion} \\ 10^5 = 100\,000 & 10^{21} = & 1 \text{ Trilliarde} \\ 10^6 = 1\,000\,000 = 1 \text{ Million} & & \end{array}$$

Bei Potenzen mit der Basis 10 gibt die Hochzahl an, wieviel Nullen an die 1 hinten anzusetzen sind.

Beispiele für große Zahlenwerte

Die Elastizitätszahl für Stahl beträgt $2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$; man schreibt sie vereinfacht: $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Die Gleitzahl $800\,000 \text{ kg/cm}^2$ kann man schreiben $8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Die Loschmidtsche Zahl, die von dem österreichischen Physiker Loschmidt im Jahre 1865 aufgestellt wurde, gibt die Anzahl der in einem Kubikzentimeter enthaltenen Gasmoleküle an. Diese Zahl beträgt $27 \cdot 10^{18} = 27 \text{ Trillionen}$.

In der Astronomie (Sternkunde) rechnet man mit sehr großen Entfernungen; so versteht man unter einem Lichtjahr die Strecke, die das Licht innerhalb eines Jahres im leeren Weltraum zurücklegt. 1 Lichtjahr beträgt: $946 \cdot 10^{15} \text{ cm}$ oder $946 \cdot 10^{10} \text{ km}$. Eine noch größere Entfernung ist die Sternweite oder Parsec¹⁾ = $3080 \cdot 10^{10} \text{ km}$. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $3 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 300\,000 \text{ km}$ in der Sekunde.

Die in der Fernmeldetechnik gebräuchlichen Frequenzen betragen:

Frequenzen der Rundfunkwellen: 300 ... 3000 Kilohertz (kHz)

(1 Kilohertz = 1000 Hertz; 1 Hertz = 1 Schwingung in der Sekunde).

Frequenzen der Kurzwellen: 3000 ... 30000 kHz =

(Kurzwellenfunk) $3 \cdot 10^6 \dots 3 \cdot 10^7 \text{ Hz}$.

Frequenzen der Ultrakurzwellen: 30000 ... 300000 kHz =

(Fernsehen) $3 \cdot 10^7 \dots 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$.

¹⁾ 1 Parsec ist diejenige Strecke, die die Sonne mit jenem Punkte verbindet, von dem aus gesehen der Erdbahnhalmesser ($149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$) unter einem Winkel von $1''$ (Siehe Seite 58) erscheint. 1 Parsec = 3,26 Lichtjahre.

Aufgaben:

Aufgabe 78 bis 87: Kopfrechnen! Aufgabe 88 bis 97: Potenzen berechnen und durch Tabelle die Richtigkeit prüfen! Aufgabe 98 bis 107: Als Potenzen schreiben!

| | | | | | | | |
|-----|-----------|------|---|-----|------|---|-----|
| 78) | $5^2 =$ | 92) | 600^2 | $=$ | 105) | $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ | $=$ |
| 79) | $2^5 =$ | 93) | 201^2 | $=$ | 106) | $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 =$ | |
| 80) | $2^3 =$ | 94) | 16^3 | $=$ | 107) | $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =$ | |
| 81) | $3^2 =$ | 95) | 160^3 | $=$ | 108) | $3^2 + 4^2$ | $=$ |
| 82) | $2^4 =$ | 96) | 20^3 | $=$ | 109) | $5^2 - 4^2$ | $=$ |
| 83) | $4^3 =$ | 97) | 200^3 | $=$ | 110) | $7^2 - 4^2$ | $=$ |
| 84) | $4^2 =$ | 98) | $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$ | | 111) | $12^2 + 5^2 - 13^2 =$ | |
| 85) | $3^4 =$ | 99) | $6 \cdot 6 \cdot 6$ | $=$ | 112) | $5^2 - 4^2 - 3^2 =$ | |
| 86) | $5^3 =$ | 100) | $5^2 \cdot 5^2$ | $=$ | 113) | $3^2 + 4^2 - 7^2 =$ | |
| 87) | $3^5 =$ | 101) | $3^2 \cdot 4^2$ | $=$ | 114) | $3^3 + 4^3 =$ | |
| 88) | $11^2 =$ | 102) | $4^3 \cdot 5^3$ | $=$ | 115) | $3^2 - 2^3 =$ | |
| 89) | $111^2 =$ | 103) | $4^3 \cdot 4^2$ | $=$ | 116) | $3^2 + 3^3 + 3^4 =$ | |
| 90) | $123^2 =$ | 104) | $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$ | $=$ | 117) | $1^2 + 2^3 - 3^2 =$ | |
| 91) | $300^2 =$ | | | | | | |

118) Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm hat den Flächeninhalt von 1 cm^2 . Wie viele solcher Quadrate kann man in ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm hineinzeichnen? (Zeichnung!)

119) Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm? (Zeichnung!)

120) Wieviel Sekunden haben 60 Stunden?

121) Wieviel Stunden haben 24 Tage?

122) $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$.

a) $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = ? \text{ mm}$;

b) $1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = ? \text{ cm} = ? \text{ mm}$;

c) $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = ? \text{ dm} = ? \text{ cm} = ? \text{ mm}$.

An die Stelle der Fragezeichen sind Potenzen der Basis 10 zu setzen!

123) Wieviel Würfel von der Kantenlänge 1 cm kann man aus einem Würfel von der Kantenlänge 2 cm herstellen? Die Sägeblattstärke werde vernachlässigt! (Ergebnis in Potenzform angeben!)

124) Wieviel Quadratzentimeter beträgt die Oberfläche des Würfels mit der Kantenlänge 2 cm? (Vgl. Aufgabe 118.)

d) Das Teilen oder Dividieren

Das Teilen oder die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

Multipliziert man 6 mit 7, so ist, wie im Abschnitt c) erklärt wurde, die Summe aus 7 Gliedern zu bilden, von denen jedes gleich 6 ist; also $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$. Man schreibt dafür $6 \cdot 7 = 42$. Die Zahl 42 besteht aus 7 gleichgroßen Teilen der Größe 6. Bei der Multiplikation wird eine neue Zahl berechnet, die aus gleichen Teilen besteht. Es sind die Anzahl der Teile und ihre Größe gegeben, während die zusammengesetzte Zahl gesucht wird.

Umgekehrt verhält es sich bei der Division. Hier ist eine bestimmte Zahl, z. B. 42, gegeben, die in 7 gleiche Teile geteilt werden soll. Oder es soll von 42 ein und dieselbe Zahl siebenmal hintereinander abgezogen werden, so daß das Endergebnis dieser mehrfachen Subtraktion gleich Null ist: $42 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 = 0$.

Bei der Division ist nach der Größe der einzelnen Teile gefragt. Man schreibt eine derartige Aufgabe in der Form: $42 : 7 = 6$. Man liest: 42 geteilt durch 7 gleich 6.

(Eine andere dasselbe besagende Schreibart $\frac{42}{7} = 6$ [gesprochen: 42 Siebentel gleich 6] wird bei der Bruchrechnung, die im Abschnitt A I 2 auf S. 26 behandelt wird, verwendet.)

In der Schreibform $42 : 7 = 6$ nennt man die Zahl 42, die in eine bestimmte Anzahl, nämlich 7, gleicher Teile zerlegt werden soll, den Dividend, auf deutsch: die zu teilende Zahl. Die Zahl 7, die die Anzahl der Teile angibt, heißt Divisor oder Teiler. Dividend und Divisor sind durch das Divisionszeichen, den Doppelpunkt, getrennt. Das Ergebnis der Division heißt der Quotient.

Zusammenfassung:

| Name der Rechenoperation | Beispiel | Die Zahl 42 heißt | Die Zahl 7 heißt | Das Ergebnis 6 heißt |
|--------------------------|--------------|-------------------|----------------------------------|----------------------|
| Division | $42 : 7 = 6$ | Dividend | Divisor oder Teiler | Quotient |

Meist bleibt bei einer Division ein Rest übrig. Soll man z. B. 16 durch 5 teilen, so soll man mehrmals hintereinander 5 von 16 subtrahieren. Man erhält $16 - 5 - 5 - 5 = 1$ oder, einfacher geschrieben: $16 : 5 = 3$ Rest 1. Erhält man bei einer Division keinen Rest, so ist der Dividend durch den Divisor teilbar.

Beispiele für teilbare Zahlen:

$$534 : 2 = 267 \quad 639 : 3 = 213 \quad 892 : 4 = 223 \quad 470 : 5 = 94 \text{ usw.}$$

Um leicht festzustellen, ob eine gegebene Zahl durch eine andere teilbar ist, bedient man sich der folgenden

Teilbarkeitsregeln

a) Teilbarkeit durch 2: Jede Zahl, die auf 0, 2, 4, 6, 8 endet, ist durch 2 teilbar.

Zahlen, die durch 2 teilbar sind, nennt man gerade Zahlen, während alle anderen ganzen Zahlen ungerade heißen. In der Reihenfolge der ganzen Zahlen wechseln gerade und ungerade Zahlen miteinander ab. Jede zweite Zahl in der Zahlenfolge ist also durch 2 teilbar.

β) Teilbarkeit durch 3: Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Unter der Quersumme einer Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern. So ist z. B. die Quersumme von 2345 die Zahl $14 = 5 + 4 + 3 + 2$. Von 14 beträgt die Quersumme 5. 14 ist die einfache Quersumme, 5 ist die Quersumme der Quersumme. Sowohl 14 als auch 5 sind nicht durch 3 teilbar; somit ist 2345 nicht durch 3 teilbar. Anders verhält es sich bei der Zahl 6789. Sie ist durch 3 teilbar; denn ihre Quersumme 30 ist durch 3 teilbar. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß nicht etwa, wie bei der Teilbarkeit durch 2, die Größe der Endziffer für die Teilbarkeit durch 3 maßgebend ist. Wenn auch bei einer Zahl, z. B. 1463 oder 1469 oder 1456, die Endziffer durch 3 teilbar ist, so ist sie nicht durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme nicht durch 3 teilbar ist.

γ) Teilbarkeit durch 4: Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

Die Zahl 7932 ist durch 4 teilbar, weil 32 sich durch 4 teilen läßt.
 $7932 : 4 = 1983$.

5814 ist nicht durch 4 teilbar, weil die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl 14 sich nicht ohne Rest durch 4 teilen läßt.
 $5814 : 4 = 1453 \text{ Rest } 2$.

δ) Teilbarkeit durch 5: Jede Zahl, die auf 0 oder 5 endet, ist durch 5 teilbar.

Beispiele:

$$5680 : 5 = 1136$$

$$6815 : 5 = 1363$$

ε) Teilbarkeit durch 6: Jede Zahl, die durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist durch 6 teilbar. Oder anders ausgedrückt: Jede gerade Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, ist durch 6 teilbar.

Beispiel:

2352 erfüllt die beiden Bedingungen. Sie ist gerade, und ihre Quersumme läßt sich durch 3 teilen.

$$2352 : 6 = 392$$

ζ) Teilbarkeit durch 8: Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.

Beispiel:

Die Zahl 7336 ist durch 8 teilbar, weil 336 sich durch 8 teilen läßt.

$$7336 : 8 = 917.$$

8148 ist nicht durch 8 teilbar, weil 148 nicht durch 8 teilbar ist.

$$8148 : 8 = 1018 \text{ Rest } 4.$$

η) Teilbarkeit durch 9: Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beispiel:

183456 hat die Quersumme 27 und ist somit durch 9 teilbar.

$$183456 : 9 = 20384.$$

232849 hat die Quersumme 28 und ist somit nicht durch 9 teilbar.

$$232849 : 9 = 25872 \text{ Rest } 1.$$

θ) Teilbarkeit durch 10: Jede auf 0 endende Zahl ist durch 10 teilbar.

Beispiele:

$$820 : 10 = 82$$

$$940 : 10 = 94.$$

ι) Teilbarkeit durch 11: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz folgender Teilquersummen durch 11 teilbar ist: Man bildet, von rechts beginnend, die Summe der 1., 3., 5., 7. usw. Ziffer und zieht von ihr die Summe der übrigen Ziffern ab.

Beispiel:

Die Zahl 132539 ist durch 11 teilbar, weil die Differenz der beiden Teilquersummen $(9 + 5 + 3) - (3 + 2 + 1) = 17 - 6 = 11$ durch 11 teilbar ist.

$$132539 : 11 = 12049.$$

Primzahlen

Zahlen, die durch keine andere Zahl — außer durch sich selbst und durch 1 — teilbar sind, heißen Primzahlen.

Durch sich selbst und durch 1 ist jede Zahl teilbar, z. B.:

$$365 : 365 = 1 \text{ und } 365 : 1 = 365.$$

Die Reihenfolge der Primzahlen¹⁾ im Zahlenbereich 1...100 ist folgende:

| | | | | | |
|----|-----------------|----|---|----|----|
| | 2 ²⁾ | 3 | 5 | 7 | |
| 11 | | 13 | | 17 | 19 |
| | | 23 | | | 29 |
| 31 | | | | 37 | |
| 41 | | 43 | | 47 | |
| | | 53 | | | 59 |
| 61 | | | | 67 | |
| 71 | | 73 | | | 79 |
| | | 83 | | | 89 |
| | | | | 97 | |

¹⁾ Eine Methode der Feststellung der Primzahlen stammt von dem griechischen Gelehrten Eratosthenes [275 bis 194 v. Chr.], die er in seiner Schrift: *cribrum Eratosthenis* [= Das Sieb des Eratosthenes] darstellt. Dasselbe Verfahren soll jedoch schon früher dem großen Plato [427 bis 347 v. Chr.] bekannt gewesen sein.

²⁾ Die 2 ist die kleinste Primzahl.

Mit Ausnahme der Zahl 2 sind alle Primzahlen ungerade Zahlen.

Entweder ist die einer Primzahl vorausgehende oder die ihr nachfolgende ganze Zahl durch 6 teilbar, falls die Primzahl $p \geq 5$ ist.

Beispiel:

Der Primzahl 83 folgt die ganze Zahl 84, die durch 6 teilbar ist. Der Primzahl 97 geht die Zahl 96, die durch 6 geteilt werden kann, voraus. Jede teilbare Zahl läßt sich in Primfaktoren zerlegen:

Beispiele:

$$\begin{aligned} 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 1100 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \\ 1260 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 360 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ u. ä.} \end{aligned}$$

Aufgaben:

Durch welche Zahlen des Zahlenbereiches 1...10 sind die folgenden Zahlen teilbar:

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 125) 213 | 127) 194 | 129) 268 | 131) 530 | 133) 232 |
| 126) 138 | 128) 205 | 130) 369 | 132) 413 | 134) 366. |

Folgende Zahlen sind in Primfaktoren zu zerlegen:

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 135) 150 | 137) 210 | 139) 534 | 141) 675 | 143) 896 |
| 136) 174 | 138) 330 | 140) 570 | 142) 784 | 144) 970. |

Für die Bruchrechnung, die im Abschnitt A I 2 behandelt wird, braucht man noch folgende Begriffe:

Teilerfremde Zahlen

Zahlen heißen teilerfremd (oder: relativ prim), wenn sie keinen gemeinsamen Teiler (Divisor) haben.

Um die Teilerfremdheit zweier Zahlen festzustellen, zerlegt man die Zahlen in Primfaktoren und stellt dann fest, ob und in welchen Faktoren die Zerlegungsprodukte übereinstimmen. (Die Teilerfremdheit zweier Zahlen läßt sich auch durch die auf der nächsten Seite beschriebene ortlaufende Division der Reste feststellen.)

Beispiele:

a) Sind 10 und 21 teilerfremd?

$$\text{Zerlegung in Primfaktoren: } 10 = 2 \cdot 5; \quad 21 = 3 \cdot 7.$$

Man sieht, daß die Zerlegungsprodukte $2 \cdot 5$ und $3 \cdot 7$ keinen gemeinsamen Faktor haben; d. h. 10 und 21 sind teilerfremd.

b) $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$
 $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ } Die beiden Zahlen sind ebenfalls teilerfremd.

c) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
 $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ } Die beiden Zahlen 105 und 154 sind nicht teilerfremd. Sie haben den gemeinsamen Teiler 7.

d) $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$
 $88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$ } Die beiden Zahlen 66 und 88 sind nicht teilerfremd, da ihre Zerlegung in Primfaktoren die beiden Zahlen gemeinsamen Faktoren $2 \cdot 11$ aufweist. 66 und 88 lassen sich durch den gemeinsamen Teiler $2 \cdot 11 = 22$ dividieren.

Aufgaben:

In den folgenden Aufgaben ist festzustellen, ob die betreffenden Zahlen teilerfremd sind oder nicht. Sind die Zahlen nicht teilerfremd, so ist die Zahl, durch die sie sich teilen lassen, anzugeben.

| | | |
|----------------|----------------|------------------|
| 145) 26 und 33 | 148) 35 und 38 | 151) 129 und 134 |
| 146) 21 „ 28 | 149) 38 „ 57 | 152) 155 „ 186 |
| 147) 35 „ 46 | 150) 46 „ 69 | 153) 119 „ 122 |
| | | 154) 141 „ 159. |

Größter gemeinsamer Teiler (g. g. T.)

Unter dem größten gemeinsamen Teiler zweier oder mehrerer Zahlen versteht man die größte Zahl, durch die sich eine jede von ihnen teilen läßt. Auch hier hat man die zu untersuchenden Zahlen zuerst in Primfaktoren zu zerlegen. Anschließend hat man festzustellen, welches die größte Zahl ist, durch die die Zahlen teilbar sind¹⁾.

Beispiele:

| | |
|--|--|
| a) $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ | } Die 3 Zahlen 60, 140, 180 haben als g. g. T.: $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$. |
| $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ | |
| $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ | |
| b) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ | } g. g. T.: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$. |
| $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ | |
| $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ | |
| c) $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ | } g. g. T.: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$. |
| $216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ | |
| $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ | |

Aufgaben:

Es sind die größten gemeinsamen Teiler folgender Zahlen anzugeben:

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 155) 40 und 140 | 158) 50 und 125 | 161) 56 und 140 |
| 156) 48 „ 72 | 159) 80 „ 200 | 162) 72 „ 252 |
| 157) 80 „ 144 | 160) 96 „ 128 | 163) 172 „ 176 |
| | | 164) 176 „ 220 |

Von dem Erkennen teilerfremder Zahlen und von dem Bestimmen des größten gemeinsamen Teilers wird beim Kürzen in der Bruchrechnung Gebrauch gemacht.

Das kleinste gemeinsame Vielfache

Unter dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Zahlen versteht man die kleinste Zahl, die durch diese Zahlen teilbar ist.

¹⁾ Ein anderes Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von 2 Zahlen ist die „fortlaufende Division der Reste“: Man dividiert die größere der beiden Zahlen durch die kleinere und dann durch den Rest der Division wieder den vorigen Divisor. Dieses Verfahren setzt man so lange fort, bis eine dieser Divisionen keinen Rest mehr ergibt. Der letzte Divisor ist dann der größte gemeinsame Teiler. Wenn er 1 ist, so sind die beiden Zahlen teilerfremd. Das Verfahren der „fortlaufenden Division der Reste“ stammt von Euklid und wird auch „Euklid'scher Algorithmus“ genannt.

So ist z. B. das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 4 und 6 die Zahl 12. 4 und 6 sind zwar auch in 24 oder 36 enthalten, aber die kleinste Zahl, die sich durch 4 und 6 teilen läßt, ist 12, das sog. kleinste gemeinsame Vielfache. Um das kleinste gemeinsame Vielfache zu bestimmen, hat man wiederum die gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren zu zerlegen. Sodann bildet man das kleinste gemeinsame Vielfache aus einem Produkt, in dem die gefundenen Primfaktoren so oft als Faktor stehen, wie sie in einem Zerlegungsprodukt am häufigsten vorkommen.

Beispiele:

a) Welches ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 6, 18 und 27?

Zerlegung in Primfaktoren:

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2 \cdot 2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Kleinstes gemeinsames Vielfaches:} \\ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108. \end{array}$$

In den vorstehenden 4 Zerlegungsprodukten tritt die Primzahl 2 am häufigsten als Faktor zweimal in der 4 auf; die Primzahl 3 tritt am häufigsten dreimal in der 27 auf. Das kleinste gemeinsame Vielfache muß also aus dem Produkt der Primzahlen 2 und 3 gebildet werden, in dem die 2 zweimal und die 3 dreimal als Faktoren stehen; d. h.: das kleinste gemeinsame Vielfache beträgt: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$.

b) Kleinstes gemeinsames Vielfaches von

4, 8, 6 und 12?

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2 \cdot 2 \\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ = 24 \end{array}$$

c) Kleinstes gemeinsames Vielfaches von

8, 12, 18, 24?

$$\left. \begin{array}{l} 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ = 72 \end{array}$$

Aufgaben:

Es sind die kleinsten gemeinsamen Vielfachen folgender Zahlen zu bestimmen:

| | | |
|----------------|--------------------|----------------------|
| 165) 4, 6, 9 | 168) 4, 6, 10, 15 | 171) 6, 9, 10, 18 |
| 166) 9, 12, 18 | 169) 3, 4, 5, 6 | 172) 18, 20, 30, 45 |
| 167) 4, 16, 24 | 170) 7, 10, 14, 35 | 173) 40, 50, 20, 100 |
| | | 174) 12, 20, 50, 75. |

Das kleinste gemeinsame Vielfache wird zur Bestimmung des sog. Hauptnenners in der Bruchrechnung gebraucht.

Das Dividieren größerer Zahlen

Größere Zahlen dividiert man in der Praxis mit dem Rechenschieber, der in dem Abschnitt B behandelt wird. Auch wendet man die in demselben Abschnitt erklärte Logarithmenrechnung an. Die Genauigkeit beim Dividieren mit dem Rechenschieber bzw. mittels der Logarithmen ist zwar nicht sehr hoch, aber für die Zwecke der Werkstattpraxis meist aus-

reichend. Ein genaues Rechnen beim Dividieren größerer Zahlen muß schriftlich vorgenommen werden.

Als Wiederholung des Dividierens, wie es in der Schule gelehrt wird, einige Divisionsaufgaben als Beispiel.

Beispiele:

a) $485321 : 7134 = 68$

$$\begin{array}{r} 42804 \downarrow \\ \underline{57281} \\ 57072 \\ \underline{\quad\quad} \\ 209 \end{array}$$

Ergebnis: 68 Rest 209.

Erklärung zum vorstehenden Beispiel:

Man stellt zuerst fest, wievielmals der Teiler (Divisor) 7134 in den ersten Ziffern des Dividenden 48532 enthalten ist. Dies ist sechsmal der Fall. Die 6 ist die erste Ziffer des hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Ergebnisses. Unter 48532 schreibt man das Produkt $6 \cdot 7134$ (dies ist 42804) und zieht es ab. Man erhält 5728. Sodann holt man die nächste Ziffer, die 1, des Dividenden herunter und schreibt sie hinter 5728. Man erhält 57281. Hierin ist der Teiler 7134 achtmal enthalten. Die 8 ist die 2. Ziffer des Ergebnisses. Unter 57281 setzt man das Produkt $8 \cdot 7134 = 57072$. Man subtrahiert es von 57281 und erhält 209. Beim Dividenden sind keine weiteren Stellen zum Herunterholen vorhanden. 209 ist der bei dieser Aufgabe sich ergebende Rest.

b) $582731 : 648 = 899$

$$\begin{array}{r} 5184 \downarrow \\ \underline{6433} \\ 5832 \downarrow \\ 6011 \\ \underline{5832} \\ 179 \end{array}$$

Ergebnis:
899 Rest 179

c) $1738130 : 365 = 4762$

$$\begin{array}{r} 1460 \downarrow \\ \underline{2781} \\ 2555 \downarrow \\ 2263 \\ \underline{2190} \\ 730 \\ \underline{730} \\ 0 \end{array}$$

Ergebnis: 4762

Der Dividend ist durch den Divisor ohne Rest teilbar.

Aufgaben:

- 175) $442800 : 3600 =$
 176) $4721964 : 52 =$
 177) $9777780 : 180 =$
 178) $27966380 : 103579 =$
 179) $45422000 : 504 =$
 180) $1219260 : 9754 =$

Die nebenstehenden Divisionen sind schriftlich auszuführen. Gegebenenfalls vorhandene Reste sind anzugeben.

- 181) Die Wiederinstandsetzung eines D-Zug-Wagens durch eine Arbeitsbrigade von 6 Mann ist mit 3500 Stunden vorveranschlagt. Wieviel Wochen hat die Brigade bei 48stündiger Arbeitswoche mit dieser Arbeit zu tun?

- 181a) In einem Rb-Ausbesserungswerk benötigen 7 Arbeiter 651 Arbeitsstunden zur Wiederinstandsetzung einer Lokomotive, eine Aktivbrigade von 7 Mann dagegen braucht nur 553 Stunden. Wieviele Stunden hat jeder einzelne Arbeiter und jeder einzelne Aktivist mit dieser Arbeit zu tun?
- 182) In einem volkseigenen Betrieb werden 80000 Fernmelderelais aus insgesamt 4 Millionen Einzelteilen hergestellt. Aus wieviel Teilen besteht ein Fernmelderelais?
- 183) Zum Nieten eines Baggerkastens werden 32 Niete benötigt. Wieviel Kästen kann man mit 2000 Niete abnieten? Wieviel Stück bleiben übrig?
- 184) Wieviel 11 m lange Eisenbahnschienen werden zum Bau einer 100 km langen eingleisigen Strecke gebraucht?
- 185) Die Geschwindigkeit eines Eilzuges beträgt 80 km je Stunde. Wieviel Meter legt der Zug in der Sekunde zurück?
- 186) Ein Schwungrad einer Tag und Nacht laufenden Dampfmaschine macht in 24 Stunden 103680 Umdrehungen. Wie groß ist seine minutliche Umdrehungszahl?
- 187) In einem großen volkseigenen Werk wurden an 2750 Arbeiter im Monat 536250 DM Lohn ausgezahlt. Nach Einführung des Leistungslohnes werden an dieselben Arbeiter im Monat 673750 DM Lohn ausgezahlt. Wie groß war und wie groß ist jetzt das durchschnittliche Monatseinkommen der Arbeiter?
- 188) Ein Kraftwagen legt bei einer Überlandfahrt in den ersten 5 Stunden folgende Strecken zurück:
- | | |
|-----------------------------------|--------|
| In der 1. Stunde eine Strecke von | 30 km |
| „ „ 2. „ „ „ „ | 50 km |
| „ „ 3. „ „ „ „ | 60 km |
| „ „ 4. „ „ „ „ | 20 km |
| „ „ 5. „ „ „ „ | 40 km. |

Wie groß ist die gesamte zurückgelegte Strecke während dieser 5 Stunden? Wieviel Kilometer legt der Wagen durchschnittlich in der Stunde zurück?

Anleitung: Um den Durchschnitts- oder Mittelwert mehrerer verschiedenen Größen zu bestimmen, hat man die Größen zu addieren und ihre Summe durch die Anzahl der verschiedenen Größen zu dividieren. Man nennt diesen Mittelwert auch das arithmetische Mittel (vgl. S. 115).

- 189) Welches ist das arithmetische Mittel (siehe Anleitung der vorhergehenden Aufgabe!) folgender Zahlen:
- | | |
|-------------------|-------------------------------|
| a) 2 und 12 | d) 5, 12, 3, 7, 13 |
| b) 5, 60, 25 | e) 25, 257, 13, 368, 132, 45. |
| c) 50, 40, 10, 60 | |

190) Eine Sechskantschraube $\frac{1}{2}'' \times 35$ (d. h. $\frac{1}{2}$ Zoll Nenndurchmesser und 35 mm lang) wiegt 85 g. Wieviel solcher Schrauben sind in einer 56 kg schweren Kiste enthalten, wenn das Gewicht der leeren Kiste (Tara!) 5 kg beträgt?

191) Eine Druckplatte hat die Abmessungen: $480 \times 315 \times 15$ mm. In welcher Größe erscheinen diese Maße in einer Zeichnung mit dem Maßstab: M. 1 : 5?

(Erklärung: Maßstab M. 1 : 5 heißt: Die wirklichen Maße sind 5 mal so groß, wie sie auf der Zeichnung dargestellt sind.)

192) Das durch eine Kurbel ausgeübte Drehmoment wird in cmkg [sprich: Zentimeter-Kilogramm] gemessen und wird aus dem Produkt der in cm gemessenen Kurbelarmlänge und der in kg gemessenen Handkraft des Arbeiters berechnet.

Durch eine Kurbel mit der Armlänge 65 cm wird ein Drehmoment von 2275 cmkg hervorgerufen. Wie groß ist die Handkraft?

193) Wieviel quadratische Zwischenscheiben $40 \square$ kann man aus 2 m Bandstahl 40×7 schneiden? Wieviel Gramm wiegt eine Zwischenscheibe, wenn 1 m Bandstahl 1570 g wiegt?

194) Eine Kreiselpumpe fördert stündlich 144 t Wasser. Wieviel Liter fördert sie in der Minute?
(1 t = 1000 l.)

195) In einen Flachstahl sollen 34 Löcher in gleichem Abstand gebohrt werden. Wie groß ist der in der nebenstehenden Skizze mit x bezeichnete Lochabstand?

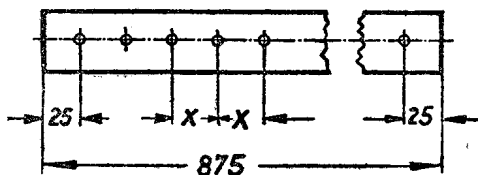


Bild 3

196) Eine Kugellager-Stahlkugel 18 mm \varnothing wiegt 25 g. Wieviel Kugeln wiegen 10 kg?

Das Dividieren relativer Zahlen

Im Abschnitt I 1 c S. 13 wurden die beiden Regeln angegeben:

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ergibt eine positive Zahl; also: $+\cdot + = +$ und $-\cdot - = +$.

Das Produkt zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ergibt eine negative Zahl; also: $+\cdot - = -$ und $-\cdot + = -$.

Da die Division die Umkehrrechenart der Multiplikation ist, müssen folgende 4 Vorzeichenregeln gelten:

| | | | | | | |
|----------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $+\cdot + = +$ | \rightarrow | $+$ | $=$ | $+$ | $:$ | $+$ |
| $-\cdot + = -$ | \rightarrow | $+$ | $=$ | $-$ | $:$ | $-$ |
| $+\cdot - = -$ | \rightarrow | $-$ | $=$ | $-$ | $:$ | $+$ |
| $-\cdot - = +$ | \rightarrow | $-$ | $=$ | $+$ | $:$ | $-$ |

(Symbolisch!)

Zusammenfassung:

Der Quotient zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv.

$$\left. \begin{array}{l} + : + \\ - : - \end{array} \right\} = +$$

Der Quotient zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ist negativ.

$$\left. \begin{array}{l} - : + \\ + : - \end{array} \right\} = -$$

Beispiele:

a) $+ 24 : + 3 = + 8$

b) $+ 36 : - 12 = - 3$

c) $- 39 : + 13 = - 3$

d) $- 52 : - 14 = + 3$.

2. Mit Brüchen

a) Die gemeinen Brüche

Die Schreibart $\frac{3}{4}$ [gesprochen: drei Viertel] ist, wie bereits in A I I d auf S. 17 erwähnt wurde, gleichbedeutend mit der Divisionsaufgabe $3 : 4$. Die beiden untereinanderstehenden Zahlen 3 und 4 sind durch den waagerechten Bruchstrich getrennt. Der schrägliegende Bruchstrich ($3/4$) wird bisweilen mit Rücksicht auf Platzersparnis im Druck verwendet.

Der Ausdruck $\frac{3}{4}$ stellt einen gemeinen Bruch dar. Er entsteht dadurch, daß man ein Ganzes in mehrere (hier: 4) gleiche Teile teilt und hiervon eine bestimmte Anzahl (hier: 3) nimmt.

Die Zahl unter dem Bruchstrich (4) heißt der Nenner.

Der „Nenner“ „nennt“ die Größe der Teile.

Die Zahl über dem Bruchstrich (3) heißt der Zähler.

Der „Zähler“ „zählt“ die gleichgroßen Teile, die zu nehmen sind.

Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so nennt man einen solchen gemeinen Bruch einen echten Bruch¹⁾, z. B.:

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{7}{9}; \frac{51}{63}; \frac{101}{102} \text{ usw.}$$

Der Wert eines jeden echten Bruches ist eine Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt.

Ist der Nenner kleiner als der Zähler, so nennt man einen solchen gemeinen Bruch einen unechten Bruch, z. B.:

$$\frac{9}{5}; \frac{10}{7}; \frac{4}{3}; \frac{8}{7}; \frac{53}{4} \text{ usw.}$$

1) Ein Bruch mit dem Zähler 1 heißt Stammbruch (z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ usw.) im

Gegensatz zu einem Zweigbruch oder abgeleiteten Bruch (z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ usw.)

Ein unechter Bruch ist eine Zahl, die größer als 1 ist. Einen unechten Bruch kann man in eine gemischte Zahl verwandeln. Man kann beispielsweise für den unechten Bruch $\frac{7}{3}$ die gemischte Zahl $2\frac{1}{3}$ schreiben. Eine gemischte Zahl besteht aus einer ganzen Zahl, hier 2, und einem echten Bruch, hier $\frac{1}{3}$. Um einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln, hat man den Zähler des unechten Bruches (7) durch seinen Nenner (3) zu teilen. Das Ergebnis der Division (2) ist die ganze Zahl der gemischten Zahl, während der verbleibende Rest (1) der Zähler des echten Bruches ($\frac{1}{3}$) ist. Der Nenner des echten Bruches (3) ist auch der Nenner des unechten Bruches.

Umgekehrt wandelt man eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch um, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des echten Bruches multipliziert und den Zähler des echten Bruches hinzuzählt¹⁾. Das Ergebnis ist der Zähler des gesuchten unechten Bruches, während sein Nenner der Nenner der gemischten Zahl bleibt.

Beispiele:

Folgende gemischte Zahlen werden in unechte Brüche umgewandelt:

$$\text{a) } 4\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{14}{3} \quad \text{b) } 2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4} \quad \text{c) } 3\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Eine gemischte Zahl ist die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch.

Beispiel:

$$5\frac{2}{7} = 5 + \frac{2}{7}.$$

Da ein Ganzes aus $\frac{7}{7}$ besteht, so sind 5 Ganze gleich $\frac{35}{7}$. Es ist also:

$$5 + \frac{2}{7} = \frac{35}{7} + \frac{2}{7} = \frac{37}{7}.$$

(Siehe Addition gleichnamiger Brüche auf S. 28.)

Man beachte den Unterschied zwischen einer gemischten Zahl, z. B. $3\frac{2}{5}$, und dem Produkt aus einer ganzen Zahl mal einem echten Bruch, z. B.: $3 \cdot \frac{2}{5}$! Wenn sich auch beide Größen in der Schreibart nur wenig unterscheiden, so stellen sie jedoch wertmäßig Grundverschiedenes dar. Wie gezeigt, ist $3\frac{2}{5}$ die Summe von $3 + \frac{2}{5}$, also: $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$, während $3 \cdot \frac{2}{5}$ das Produkt aus 3 und $\frac{2}{5}$ ist, das, wie später S. 31 gezeigt wird, gleich $\frac{6}{5}$ ist.

Aufgaben:

Die nachstehenden gemischten Zahlen (bzw. unechten Brüche) sind in unechte Brüche (bzw. gemischte Zahlen) zu verwandeln:

¹⁾ Die Verwandlung einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch nennt man das „Einrichten eines Bruches“.

$$\begin{array}{llll}
 197) 9\frac{7}{8} = & 199) 12\frac{3}{11} = & 201) 16\frac{2}{3} = & 203) \frac{40}{13} = & 205) \frac{22}{7} = \\
 198) 10\frac{1}{2} = & 200) 14\frac{2}{7} = & 202) \frac{25}{3} = & 204) \frac{135}{4} = & 206) \frac{355}{113} =
 \end{array}$$

Formveränderungen gemeiner Brüche

Der Wert eines gemeinen Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler und den Nenner mit ein und derselben Zahl multipliziert oder durch ein und dieselbe Zahl ohne Rest dividiert. Diese Rechenoperationen nennt man Erweitern und Kürzen.

Erweitern heißt Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren.

Man kann also schreiben:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}; \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 11} = \frac{33}{44}; \quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} \text{ usw.}$$

Kürzen heißt Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren. Man kürzt durch den größten gemeinsamen Teiler (siehe S. 21) des Zählers und Nenners. z. B.:

$$\frac{64}{80} = \frac{64 : 16}{80 : 16} = \frac{4}{5}, \quad \frac{90}{126} = \frac{90 : 18}{126 : 18} = \frac{5}{7}.$$

Erweitern und Kürzen ändern nur die Form, aber nicht den Wert eines Bruches.

Addition und Subtraktion von gemeinen Brüchen

a) Gleichnamige Brüche sind gemeine Brüche, die denselben Nenner haben; z. B. $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$ oder $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{7}$. Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner beibehält.

Beispiele:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \frac{2}{7} + \frac{6}{7} = \frac{2+6}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7} \\
 \text{b) } \frac{1}{5} + \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1+7-4}{5} = \frac{4}{5} \\
 \text{c) } \frac{5}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{5-4+8}{3} = \frac{9}{3} = 3.
 \end{array}$$

β) Ungleichnamige Brüche sind gemeine Brüche, deren Nenner voneinander verschieden sind.

Ungleichnamige Brüche lassen sich nicht ohne weiteres addieren oder subtrahieren. Man hat sie vorher gleichnamig zu machen; d. h. man hat sie so umzuformen, daß sie denselben Nenner, den sog. Hauptnenner, haben. Unter dem Hauptnenner mehrerer ungleichnamiger Brüche versteht man das kleinste gemeinsame Vielfache der einzelnen Nenner (siehe S. 21).

Ist z. B. die Summe der 5 Brüche:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{15}$$

zu bilden, so sucht man zunächst den Hauptnenner zu den 5 einzelnen Nennern, indem man sie in Faktoren zerlegt, wie das nachstehende Schema zeigt:

| Nenner | Faktoren |
|--------|-----------|
| 4 = | 2 · 2 |
| 5 = | 5 |
| 6 = | 2 · 3 |
| 8 = | 2 · 2 · 2 |
| 15 = | 3 · 5 |

Der Hauptnenner (das ist das kleinste gemeinsame Vielfache der einzelnen Nenner) lautet sodann, wie auf S. 22 gezeigt wurde:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Hauptnenner: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Sodann werden die einzelnen Glieder (das sind die Brüche: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{15}$) in ihrer Form so verändert, daß sie den Hauptnenner 120 zum Nenner haben. Diese Formveränderung nimmt man durch Erweitern vor; also:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{15} = \frac{30}{120} + \frac{24}{120} + \frac{20}{120} + \frac{45}{120} + \frac{56}{120}.$$

Nunmehr lassen sich diese fünf gleichnamigen Brüche addieren, indem man die Zähler addiert und die erhaltene Summe durch den Hauptnenner teilt; also:

$$\frac{30 + 24 + 20 + 45 + 56}{120} = \frac{175}{120} = 1 \frac{55}{120} \text{ oder gekürzt: Ergebnis: } 1 \frac{11}{24}.$$

Beispiele:

$$\text{a) } \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{4+9+10}{12} = \frac{23}{12} = 1 \frac{11}{12}$$

$$\text{Hauptnenner: } 3 \cdot 4 = 12.$$

$$\text{b) } \frac{3}{5} + \frac{5}{6} - \frac{7}{15} = \frac{18 + 25 - 14}{30} = \frac{29}{30}$$

$$\text{Hauptnenner: } 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

$$\text{c) } \frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{8}{9} = \frac{9 + 30 + 32}{36} = \frac{71}{36} = 1 \frac{35}{36}$$

$$\text{Hauptnenner: } 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

Aufgaben:

207) Welche Form nehmen die Brüche: $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{13}$ nach Erweiterung mit 2 an?

208) Die Brüche: $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{9}{19}$, $\frac{10}{21}$ sind mit 3 zu erweitern.

- 209) Die Brüche: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}$ sind so umzuformen, daß sie den Nenner 18 haben, ihren Wert aber behalten.
- 210) Die Brüche: $\frac{36}{96}, \frac{64}{144}, \frac{45}{99}, \frac{48}{104}$ sind so zu kürzen, daß der Zähler jedes Bruches gegenüber seinem Nenner teilerfremd ist.
- 211) Wie lauten die Brüche: $\frac{14}{16}, \frac{26}{39}, \frac{10}{12}, \frac{24}{27}$ in gekürzter Form?
- 212) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$ 217) $\frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{5}{16} =$ 222) $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{7}{10} - \frac{11}{20} =$
- 213) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} =$ 218) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$ 223) $\frac{3}{8} - \frac{5}{12} + \frac{7}{16} - \frac{9}{24} =$
- 214) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} =$ 219) $\frac{3}{4} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} =$ 224) $\frac{7}{10} - \frac{4}{25} - \frac{1}{2} =$
- 215) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} =$ 220) $\frac{5}{6} + \frac{3}{14} + \frac{2}{21} =$ 225) $\frac{11}{15} + \frac{3}{10} - \frac{5}{6} =$
- 216) $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9} - \frac{5}{9} =$ 221) $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{12} + \frac{2}{15} =$ 226) $\frac{11}{14} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$

Addition und Subtraktion gemischter Zahlen

Gemischte Zahlen werden addiert bzw. subtrahiert, indem man zunächst die ganzen Zahlen und sodann die echten Brüche addiert bzw. subtrahiert. Man kann die gemischten Zahlen aber auch vorherin unechte Brüche umformen und diese dann addieren.

Beispiele:

$$\text{a) } 7\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} = (7 + 2) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 9 + \frac{3}{3} = 9 + 1 = 10$$

$$\text{oder } = \frac{23}{3} + \frac{7}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

$$\text{b) } 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = (2 + 3) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5 + \frac{5}{6} = 5\frac{5}{6}$$

$$\text{oder } = \frac{5}{2} + \frac{10}{6} = \frac{15}{6} + \frac{20}{6} = 5\frac{5}{6}$$

$$\text{c) } 1\frac{1}{8} + 2\frac{5}{6} - 2\frac{11}{12} - \frac{1}{24} = (1 + 2 - 2) + \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{6} - \frac{11}{12} - \frac{1}{24}\right)$$

$$= 1 + \frac{3 + 20 - 22 - 1}{24} = 1 + \frac{0}{24} = 1$$

$$\text{oder } = \frac{9}{8} + \frac{17}{6} - \frac{35}{12} - \frac{1}{24} = \frac{27}{24} + \frac{68}{24} - \frac{70}{24} - \frac{1}{24} = \frac{24}{24} = 1.$$

Aufgaben:

$$227) 3\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4} =$$

$$228) 5\frac{3}{5} + 4\frac{1}{5} - 8\frac{2}{5} - 4\frac{2}{5} =$$

229) $7\frac{5}{8} - 4\frac{3}{8} =$

233) $2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3} =$

230) $3\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} =$

234) $3\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} =$

231) $2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{3} =$

235) $1\frac{3}{4} - \frac{5}{6} =$

232) $1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{5} =$

236) $2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{8} =$

Multiplikation von gemeinen Brüchen

Ein gemeiner Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert; der Nenner bleibt unverändert.

$$\text{Denn: } \frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7}.$$

Beispiele:

a) $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{4 \cdot 4}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

b) $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{4} = \frac{3}{4}$

Zur Erinnerung! Ein Bruch wird mit einer Zahl erweitert, indem man seinen Zähler und seinen Nenner mit der Zahl multipliziert. Der Bruch behält durch Erweitern seinen Wert.

Eine gemischte Zahl wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man zunächst die ganze Zahl und sodann den echten Bruch mit der ganzen Zahl multipliziert und die beiden Produkte addiert.

Man kann aber auch die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln und dann diesen mit der ganzen Zahl multiplizieren:

Beispiele:

a) $5\frac{1}{4} \cdot 3 = 5 \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 3 = 15 + \frac{3}{4} = 15\frac{3}{4}$

oder $= \frac{21}{4} \cdot 3 = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}$

b) $1\frac{1}{7} \cdot 2 = 1 \cdot 2 + \frac{1}{7} \cdot 2 = 2 + \frac{2}{7} = 2\frac{2}{7}$

oder $= \frac{8}{7} \cdot 2 = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$

c) $11\frac{1}{3} \cdot 3 = 11 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 33 + 1 = 34$

oder $= \frac{34}{3} \cdot 3 = 34$.

Ein Bruch wird mit einem Bruch multipliziert, indem man ihre Zähler und ihre Nenner miteinander multipliziert.

Beim Multiplizieren zweier Brüche brauchen also die Brüche nicht gleichnamig zu sein wie beim Addieren.

Beispiele:

$$a) \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$b) \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\overset{1}{3} \cdot 5}{4 \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{5}{8} \quad \begin{array}{l} \text{vor dem Multiplizieren} \\ \text{wurde hier durch 3 gekürzt} \end{array}$$

$$c) \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\overset{2}{4} \cdot 5}{7 \cdot \underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{10}{21}$$

Wird ein echter Bruch mit sich selbst multipliziert — d. h. wird er quadriert — so ist das Ergebnis wiederum ein echter Bruch, der kleiner als der ursprüngliche ist. Das Quadrat einer ganzen Zahl, die weder 0 noch 1 ist, ist dagegen immer größer als die Zahl selbst.

Beispiele:

$$a) \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$$

$$b) 4^2 = 16 \quad 16 > 4$$

$$c) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \frac{1}{9} < \frac{1}{3}$$

Eine gemischte Zahl wird mit einer gemischten Zahl multipliziert, indem man die gemischten Zahlen zunächst in unechte Brüche verwandelt und diese sodann multipliziert.

Man beachte den Unterschied gegenüber dem Addieren zweier gemischter Zahlen: Bei der Multiplikation gemischter Zahlen müssen diese unbedingt in unechte Brüche umgewandelt werden; bei der Addition war diese Umwandlung nicht erforderlich.

Beispiele:

$$a) 2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{11 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

$$b) 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{\overset{5}{10} \cdot 3}{\underset{1}{3} \cdot \underset{1}{2}} = 5$$

$$c) 2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{\overset{3}{9} \cdot \overset{5}{10}}{\underset{2}{4} \cdot \underset{1}{3}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Den Kehrwert oder den reziproken Wert eines Bruches erhält man dadurch, daß man den Zähler und den Nenner eines Bruches miteinander vertauscht.

Der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ lautet $\frac{3}{2}$. Der reziproke Wert eines echten Bruches ist ein unechter Bruch oder eine ganze Zahl, z. B.:

Der Kehrwert zu $\frac{1}{2}$ lautet $\frac{2}{1}$ oder, was dasselbe ist, 2.

Jede ganze Zahl kann als ein Bruch mit dem Nenner 1 aufgefaßt werden. Der Kehrwert von 3 lautet $\frac{1}{3}$.

Das Produkt jeder Zahl mit ihrem Kehrwert hat den Wert 1; z. B. $\frac{3}{4}$ hat den Kehrwert $\frac{4}{3}$. Das Produkt beider Zahlen ist $\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 3} = 1$.

Aufgaben:

$$237) 16 \cdot \frac{5}{8} =$$

$$244) \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} =$$

$$251) 3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} =$$

$$238) \frac{3}{5} \cdot 4 =$$

$$245) \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$252) 2\frac{3}{4} \cdot 3\frac{3}{11} =$$

$$239) \frac{3}{7} \cdot 14 =$$

$$246) \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$253) \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$240) 5 \cdot 3\frac{1}{4} =$$

$$247) \left(\frac{1}{4}\right)^3 =$$

$$254) 5 \cdot \frac{2}{5} - \frac{5}{6} \cdot 6 =$$

$$241) 4\frac{2}{5} \cdot 10 =$$

$$248) \left(\frac{1}{10}\right)^3 =$$

$$255) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) =$$

$$242) 2\frac{3}{14} \cdot 7 =$$

$$249) \left(\frac{1}{10}\right)^4 =$$

$$256) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$$

$$243) \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} =$$

$$250) 1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} =$$

Die Division von gemeinen Brüchen

Dividieren und Multiplizieren sind umgekehrte Rechenoperationen. Sämtliche Divisionsaufgaben mit Brüchen lassen sich in sehr einfacher Weise mit den Regeln für die Multiplikation ausführen, indem man den Kehrwert des Divisors bildet und mit diesem den Dividend multipliziert. Gemischte Zahlen sind vorher in unechte Brüche umzuwandeln.

Die Division von gemeinen Brüchen gestaltet sich somit im einzelnen folgendermaßen:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Bruch mit dem Kehrwert der ganzen Zahl multipliziert.

Beispiele:

a) $\frac{1}{4} : 5 = ?$

Der Kehrwert des Divisors 5 lautet $\frac{1}{5}$.Hiermit ist der Dividend $\frac{1}{4}$ zu multiplizieren; also:

$$\frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

b) $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}$

Ein Bruch wird durch einen zweiten Bruch dividiert, indem man den Kehrwert des zweiten Bruches mit dem ersten Bruch multipliziert.

Beispiele:

a) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = ?$

Der Kehrwert des zweiten Bruches $\frac{3}{4}$ beträgt $\frac{4}{3}$.Hiermit ist der erste Bruch $\frac{2}{3}$ zu multiplizieren; also:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

b) $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1 \frac{1}{8}$

c) $\frac{4}{5} : \frac{8}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 8} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$

Gemischte Zahlen sind vor dem Dividieren in unechte Brüche umzuwandeln!

Beispiele:

a) $3 \frac{1}{3} : 1 \frac{2}{3} = \frac{10}{3} : \frac{5}{3} = \frac{10 \cdot 3}{3 \cdot 5} = 2$

b) $2 : 2 \frac{2}{3} = 2 : \frac{8}{3} = 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

c) $4 \frac{2}{5} : 2 = \frac{22}{5} : 2 = \frac{22 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{11}{5} = 2 \frac{1}{5}$

Aufgaben:

257) $\frac{8}{9} : 4 =$

264) $\frac{12}{13} : \frac{3}{4} =$

271) $6\frac{3}{10} : 3 =$

258) $\frac{39}{40} : 13 =$

265) $\frac{5}{7} : \frac{10}{21} =$

272) $10 : \frac{3}{10} =$

259) $8 : \frac{3}{16} =$

266) $\frac{48}{55} : \frac{12}{33} =$

273) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 : \frac{1}{8} =$

260) $\frac{4/5}{3} =$

267) $\frac{4}{15} : \frac{8}{15} =$

274) $\frac{1}{4} : \left(\frac{1}{8}\right)^2 =$

261) $\frac{4}{5/3} =$

268) $2\frac{4}{5} : 1\frac{1}{20} =$

275) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^3 =$

262) $\frac{12}{8/9} =$

269) $1\frac{3}{8} : 8\frac{1}{4} =$

276) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{8}{9}\right)^2 =$

263) $\frac{12/8}{9} =$

270) $8\frac{1}{4} : 1\frac{3}{8} =$

Die Division von Potenzen

a) mit gleicher Hochzahl (Exponent):

Es soll z. B. die Potenz 3^2 durch die Potenz 4^2 geteilt werden; d. h. der Bruch $\frac{3^2}{4^2}$ soll in einfacherer Form geschrieben werden.

Es bedeutet:

$$\frac{3^2}{4^2} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \text{also} \quad \boxed{\frac{3^2}{4^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

Ebenso erhält man

$$\frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

oder

$$\frac{4^3}{5^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

Die an Hand dieser 3 Zahlenbeispiele erklärte Division läßt sich in Worten ausdrücken in der

Regel (a): Potenzen mit derselben Hochzahl, aber mit verschiedenen Grundzahlen werden dividiert, indem man den Quotient der Grundzahlen mit der gemeinsamen Hochzahl potenziert.

β) mit gleicher Grundzahl (Basis):

Es soll z. B. die Potenz 2^6 durch die Potenz 2^3 geteilt werden, d. h. der Bruch $\frac{2^6}{2^3}$ soll in einfacherer Form geschrieben werden. Es bedeutet:

$\frac{2^6}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$. Im Zähler steht die Basis 2 sechsmal, im Nenner dreimal als Faktor. Dieser Bruch kann gekürzt werden durch $2 \cdot 2 \cdot 2$. Man erhält:

$$\frac{\overset{1}{2} \cdot \overset{1}{2} \cdot \overset{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\underset{1}{2} \cdot \underset{1}{2} \cdot \underset{1}{2}} = 2^3$$

Man hat gerechnet:

$$\boxed{\frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3}$$

Weitere Beispiele:

a) $\frac{4^7}{4^5} = 4^{7-5} = 4^2$

c) $\frac{6^{10}}{6^7} = 6^{10-7} = 6^3$

b) $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

d) $\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$

In Worten ausgedrückt erhält man die

Regel (b): Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Hochzahlen (Hochzahl des Zählers minus Hochzahl des Nenners) potenziert.

Potenzen mit negativen Exponenten

In den bisherigen Beispielen für die Division von Potenzen mit derselben Basis war der Zählerexponent $>$ Nennerexponent. Man erhielt als Ergebnis eine Potenz mit positivem Exponenten. Ist aber der Zählerexponent $<$ Nennerexponent, so erhält man unter Benutzung der Regel (b) eine Potenz mit negativem Exponenten. Eine solche Potenz hat nach der Erklärung einer Potenz auf S. 14 keinen Sinn; denn man kann in der Potenz 2^{-3} die Grundzahl 2 nicht -3 mal als Faktor setzen. Um aber auch für Potenzen mit negativen Exponenten die bisherigen Potenzregeln anwenden zu können, ist folgende Begriffserklärung festgelegt:

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem Kehrwert der Potenz mit positivem Exponenten, oder durch ein Zahlenbeispiel ausgedrückt:

$$\boxed{2^{-3} = \frac{1}{2^3}}$$

Somit gilt die obige Regel (b):

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3}.$$

Beispiele:

$$a) 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$c) 6^{-3} = \frac{1}{216}$$

$$b) 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$d) 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

Potenzen mit dem Exponenten 0

Ist bei der Division zweier Potenzen mit derselben Basis der Zählerexponent = Nennere exponent, so ergibt sich bei Anwendung der Regel (b) eine Potenz mit dem Exponenten 0, die folgendermaßen definiert wird:

Eine Potenz mit dem Exponent 0 hat den Wert 1, oder durch ein

Zahlenbeispiel ausgedrückt: $2^0 = 1$

Es gilt die Regel (b): $2^0 = 1 = \frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$.

Statt der Potenzbasis 2 im vorstehenden Zahlenbeispiel kann man auch jede beliebige andere Zahl einsetzen.

Sehr kleine Zahlen

Zum vereinfachten Schreiben sehr kleiner Zahlen bedient man sich in der Technik der Potenzen der Zahl 10 mit negativen Exponenten. So bedeutet z. B.

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 1 \text{ Hundertstel}$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000} = 1 \text{ Millionstel}$$

(vergleiche die großen Zahlen auf S. 15)

$$10^{-12} = \frac{1}{10^{12}} = \frac{1}{1000000000000} = 1 \text{ Billionstel.}$$

Beispiele:

Der tausendste Teil eines Millimeters heißt Mikron; er wird mit dem griechischen Buchstaben μ [sprich: My] bezeichnet. Also

$$1 \mu = \frac{1}{1000} \text{ mm} = 10^{-3} \text{ mm.}$$

Der millionste Teil eines Millimeters oder, was dasselbe ist, der tausendste Teil eines Mikron, ist ein Millimikron; man bezeichnet 1 Millimikron mit $1 \text{ m}\mu = 10^{-6} \text{ mm}$.

Gebräuchlich sind ferner die Bezeichnungen:

$$1 \text{ \AA} (\text{Ångström}^1) = 10^{-8} \text{ cm} = \frac{1}{10} \text{ m}\mu \quad \text{und} \quad 1 \text{ X-Einheit} = 10^{-11} \text{ cm.}$$

¹⁾ Benannt nach Anders Jonas Ångström (1814 bis 1874), einem für die Spektralforschung verdienten schwedischen Physiker.

Der tausendste Teil der Einheit der Stromstärke 1 Ampere (A) ist ein Milliampere (mA); es ist $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$.

Die Einheit des Widerstandes ist 1 Ohm (Ω). Eine Million Ohm heißt 1 Megohm (M Ω); es ist also $1 \Omega = 10^{-6} \text{ M}\Omega$.

Die Einheit der elektrischen Spannung ist 1 Volt (V). Tausend Volt nennt man 1 Kilovolt (kV) = 1000 V; es ist also $1 \text{ V} = 10^{-3} \text{ kV}$.

Die praktische Einheit der Kapazität in der Elektrotechnik ist das Farad (F) bzw. das Mikrofarad (μF); es ist 1 Mikrofarad = 10^{-6} Farad.

Die Division mit 0 und ∞

α) Wird der Nenner eines Bruchs größer und immer größer, so wird der Wert des Bruchs immer kleiner. Wird schließlich im Grenzfall der Nenner unendlich groß, so wird der Wert des Bruches gleich 0.

In der Reihe der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{200}, \frac{1}{2000}$ usw. ist jeder Bruch um den zehnten Teil kleiner als der vorhergehende. Der Nenner wird ständig um den 10fachen Betrag größer als der vorausgehende. Wenn der Nenner größer als jede angebbare Zahl wird (S. 4), so wird der Wert des Bruches kleiner als jede angebbare Zahl, in Zeichen: $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Den Sachverhalt drückt man kurz in Zeichen aus:

$$(\alpha) \frac{1}{\infty} = 0. \text{ Damit darf nicht gerechnet werden!}$$

β) Wenn umgekehrt der Nenner eines Bruches kleiner und immer kleiner wird, so wird der Wert des Bruches immer größer. Wird schließlich im Grenzfall der Nenner gleich 0, so ist dann der Wert des Bruches gleich ∞ .

Der Nenner eines Bruches sei ein echter Bruch, während sein Zähler eine ganze Zahl ist. Es ist nach den Regeln der Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch

$$\begin{aligned} \frac{1}{1/2} &= 1 \cdot \frac{2}{1} = 2 & \frac{1}{1/200} &= 1 \cdot \frac{200}{1} = 200 \\ \frac{1}{1/20} &= 1 \cdot \frac{20}{1} = 20 & \frac{1}{1/2000} &= 1 \cdot \frac{2000}{1} = 2000 \end{aligned}$$

Man ersieht hieraus, daß die Nenner $\frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{200}, \frac{1}{2000}$ immer kleiner werden und sich dem Wert $\frac{1}{\infty}$ nähern. In Zeichen: $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varepsilon > 0$.

Den Sachverhalt drückt man kurz in Zeichen aus:

$$(\beta) \frac{1}{0} = \infty. \text{ Damit darf nicht gerechnet werden!}$$

Die Bezeichnungen (α) und (β) sollen lediglich einen komplizierten Sachverhalt einfach und übersichtlich symbolisch ausdrücken.

Beim praktischen Rechnen ist die Division durch 0 oder ∞ nicht gestattet!

Beispiele:

In dem Grundgesetz der Festigkeitslehre, dem Hookeschen Gesetz, wird der Begriff der Dehnzahl verwendet. Diese Dehnzahl ist eine sehr kleine Zahl; sie beträgt z. B. für Schweißstahl: $5 \cdot 10^{-7}$. Mit solchen kleinen Zahlen läßt sich unbequem rechnen. Deshalb wird in der Festigkeitslehre mit dem Kehrwert der Dehnzahl gerechnet. Dieser Kehrwert heißt der Elastizitätsmodul. Er ist eine sehr große Zahl. Für den soeben erwähnten Schweißstahl beträgt der Elastizitätsmodul:

$$\frac{1}{5 \cdot 10^{-7}} = 2000000.$$

γ) Teilt man 0 durch irgendeine Zahl, so erhält man 0. Es ist:

$$\frac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1/20}{5} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1/200}{5} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1/2000}{5} = \frac{1}{10000}$$

usw.

Die Zähler auf der linken Seite dieser nebenstehenden Gleichungen $\frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{200}, \frac{1}{2000}$ usw. sowie die rechten Seiten der Gleichungen werden immer kleiner. Sie nähern sich dem unter (α) abgeleiteten Wert $\frac{1}{\infty} = 0$. Man erhält also $\frac{0}{5} = 0$. Das folgt schon einfach daraus, daß die Division die Umkehrrechenoperation der Multiplikation ist; nämlich aus $0 \cdot 5 = 0$.

Statt des Nenners 5 kann man jede beliebige andere Zahl einsetzen. Es ist also auch:

(γ)

$$\boxed{\frac{0}{7} = 0}$$

δ) Ebenso läßt sich beweisen, daß man ∞ durch jede beliebige Zahl teilen kann und immer wieder ∞ erhält. Es gilt

(δ)

$$\boxed{\frac{\infty}{7} = \infty}$$

In den ersten beiden Formeln war der Zähler gleich 1, in den beiden letzten war es der Nenner. Statt der 1 im Nenner kann man auch jede andere Zahl einsetzen. Es ist also auch:

$$\text{a) } \frac{0}{543} = 0, \text{ da } 0 \cdot 543 = 0 \quad \text{b) } \frac{\infty}{78} = \infty.$$

Aufgaben:

277) Die Leistung wird in der Technik in PS (Pferdestärke) oder in kW (Kilowatt) gemessen.

Für Überschlagsrechnungen kann man 1 PS gleich $\frac{3}{4}$ kW setzen.

Wieviel kW kann man setzen für

a) 4 PS, b) 6 PS, c) 120 PS, d) $\frac{1}{3}$ PS, e) $2\frac{1}{2}$ PS.

278) Wieviel PS kann man nach den Angaben der vorhergehenden Aufgabe einsetzen für

a) 1 kW, b) 180 kW, c) 21 kW, d) $7\frac{1}{2}$ kW, e) $5\frac{1}{4}$ kW.

279) Die Gewichtseinheiten Zentner und Pfund werden in technischen Rechnungen nicht verwendet. Vielmehr rechnet man mit kg und t. Bekanntlich ist:

1 \mathcal{U} = $\frac{1}{2}$ kg, 1 Ztr. = 100 \mathcal{U} , 1 t = 1000 kg,

Wieviel Kilogramm sind

a) 40 \mathcal{U} , b) 150 \mathcal{U} , c) 1000 \mathcal{U} , d) $2\frac{1}{2}$ t, e) 20 t.

280) Wieviel Tonnen sind

a) 20 Ztr., b) 50 Ztr., c) 75 Ztr., d) 250 \mathcal{U} , e) 1000 \mathcal{U} .

281) Die gesetzliche Temperatureinteilung in Deutschland ist jetzt die Celsiusteilung. Früher war die Einteilung nach Réaumur¹⁾ die übliche. In den Ländern des englischen Sprachgebietes ist die Teilung nach Fahrenheit²⁾ zum Teil in Gebrauch. Die Umrechnung einer

¹⁾ René Antoine Ferchault de Réaumur [sprich: Reomür] 1683 bis 1757, französischer Naturforscher, führte die 80teilige Gradeinteilung für das Weingeist-Thermometer ein.

²⁾ Daniel Gabriel Fahrenheit, 1686 bis 1736, Physiker, erfand das Quecksilberthermometer.

Der Nullpunkt der Fahrenheitschen Thermometerskala entspricht der Temperatur einer Mischung von Eis, Wasser und Salmiak. Der Temperatur schmelzenden Eises entspricht der Teilstrich 32° . Die Körperwärme eines gesunden Menschen beträgt 96° Fahrenheit.

Temperaturangabe in Réaumurgraden (R) in Celsiusgrade (C) erfolgt durch die Beziehung:

$$C = \frac{5}{4} R.$$

Fahrenheitgrade (F) werden in Celsiusgrade (C) umgerechnet nach der Beziehung $C = \frac{5}{9} (F - 32)$. So entsprechen 40° Réaumur: $C = \frac{5}{4} \cdot 40 = 50^\circ$ Celsius. Der Temperatur 212° Fahrenheit entsprechen $C = \frac{5}{9} (212 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 180 = 100^\circ$ Celsius.

a) Wieviel Grade Celsius entsprechen 36° Réaumur?

b) Wieviel Grade Celsius entsprechen 113° Fahrenheit?

282) 1 engl. Fuß entspricht einer Länge von etwa $\frac{3}{10}$ m.

Wieviel Metern entsprechen

a) 20 engl. Fuß,

b) 50 engl. Fuß,

c) $4\frac{1}{2}$ engl. Fuß.

283) Den Umfang eines Kreises berechnet man dadurch, daß man den Kreisdurchmesser mit $\frac{22}{7}$ multipliziert.

Welchen Umfang hat ein Schwungrad von $3\frac{1}{2}$ m Durchmesser?

284) Der Kranz eines geschweißten Handwagenrades wird aus Flacheisen gefertigt.

Wie lang muß es genommen werden, wenn der Raddurchmesser 560 mm betragen soll?

285) Die Trommel einer Handwinde ist 570 mm lang und hat einen Durchmesser von 350 mm.

Wieviel Meter Drahtseil von $9\frac{1}{2}$ mm Durchmesser lassen sich in der ersten Lage auf die Trommel aufwinden? Wieviel Trommelumdrehungen sind hierfür erforderlich?

286) Einem Hochofen muß im Vergleich zur erzeugten Roheisenmenge die $2\frac{1}{5}$ fache Gewichtsmenge an Erz, dieselbe Menge Koks und die $\frac{4}{5}$ fache Menge an Zuschlägen zugeführt werden.

Wieviel Tonnen Erz, Koks und Zuschläge braucht ein Hochofen bei einer Leistung von 750 t Roheisen?

287) Das eisenreichste Erz, der sogenannte Magneteisenstein, findet sich in Schweden und enthält $\frac{7}{10}$ seines Gewichtes an Eisen.

Wieviel Tonnen Magneteisenstein werden für die Gewinnung von 3640 t Eisen gebraucht?

288) Ein Hochofen braucht zur Verbrennung von 1 t Koks rund 3000 m^3 trockene Luft. 1 m^3 Luft wiegt angenähert $1\frac{3}{10}$ kg.

Wievielmals so groß ist das zur Verbrennung erforderliche Luftgewicht im Vergleich zum verbrannten Koksgehalt?

- 289) Den Inhalt eines Kreises bestimmt man für überschlägliche Rechnung genügend genau dadurch, daß man das Quadrat des Durchmessers mit $\frac{11}{14}$ multipliziert.
Wieviel mm^2 beträgt der Querschnitt eines Rohres mit der lichten Weite 28 mm?
- 290) Der stündliche Stromverbrauch eines elektrischen Kochers beträgt $\frac{3}{4}$ kWh (Kilowattstunde).
In welcher Zeit sind 2 kWh verbraucht?
- 291) Zwei Kreiselpumpen eines Wasserwerkes fördern in einer Viertelstunde $\frac{3}{8}$ t. In welcher Zeit wird 1 t gefördert?
- 292) Bei einem Zerreiversuch hatte ein Probestab aus St 37 sich um $\frac{3}{10}$ seiner ursprünglichen Länge bis auf 156 mm gedehnt.
Wie lang war der Probestab vor der Belastung?
- 293) Eine 30 mm dicke Sperrplatte für den Holzmodellbau wird so hergestellt, daß die Mittelschicht 10mal so dick ist wie jedes der beiden sie sperrenden Furniere.
Wie dick sind die Sperrfurniere und die Mittelschicht auszuführen?

b) Die Dezimalzahlen oder Zehnerbrüche

Dividiert man den Zähler eines Bruchs durch seinen Nenner und ist der Zähler nicht ein Vielfaches des Nenners, so erhält man eine Dezimalzahl (oder auch Dezimalbruch oder Zehnerbruch genannt).

Beispiel:

$$\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0,875 \text{ [sprich: „0 Komma 8—7—5“].}$$

Gleichzeitig ist

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{875}{1000}$$

(Zähler und Nenner wurden so erweitert, daß im Nenner eine Zehnerpotenz steht).

$$\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = \frac{800}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000},$$

demnach

$$0,875 = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Das Kennzeichen für eine Dezimalzahl ist das Komma oder ein Punkt oberhalb der Zeile (nach DIN 1302); also auch 0·875. Die letzte Schreibweise ist jedoch weniger gebräuchlich. Die Stellen hinter dem Komma sind die Dezimalstellen. Sie werden einzeln hintereinander ausgesprochen. [Man spricht 4,15: Vier Komma eins fünf, nicht: 4 Komma fünfzehn.]

In der Dezimalzahl 12,4567 ist die 4 die Anzahl der Zehntel, die 5 = Anzahl der Hundertstel, die 6 = Anzahl der Tausendstel, die 7 = Anzahl der Zehntausendstel. Es bedeutet hiernach:

$$12,4567 = 12 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{7}{10000}.$$

Steht an der letzten Stelle hinter dem Komma eine Null, so kann sie fortgelassen werden. Man kann auch, ohne den Wert der Dezimalzahl zu ändern, hinter die letzte Stelle hinter dem Komma eine oder mehrere Nullen anhängen. Es ist $0,4 = 0,40 = 0,400$.

Umwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen Dezimalbruch

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$$

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$$

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

$$\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0,2$$

$$\frac{1}{100} = 0,01 (= 10^{-2})$$

$$\frac{1}{3} = 0,3\bar{3} \dots$$

$$\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0,16\bar{6} \dots$$

$$\frac{1}{1000} = 0,001 (= 10^{-3})$$

$$\frac{1}{9} = 0,1\bar{1} \dots$$

Enthält der Nenner eines gemeinen Bruches nur die Zahlen 2 und 5 als Grundfaktoren, so läßt sich der gemeine Bruch in eine endliche Dezimalzahl verwandeln. Man dividiert den Zähler durch den Nenner. Die Divisionsaufgabe geht auf.

Die Dezimalzahlen, hinter deren letzte Dezimalstelle einige Punkte geschrieben sind, heißen periodische Dezimalzahlen. Die Punkte deuten an, daß die letzte bzw. die letzten Dezimalstellen sich immer wiederholen.

Es ergibt: $\frac{1}{7} = 1 : 7 = 0,142857 \overline{142857} \dots$ Hier wiederholt sich die Zifferngruppe 142857. Die immer wiederkehrende Ziffer oder Zifferngruppe heißt die Periode, die durch einen darübergesetzten Strich kenntlich gemacht wird. Die nicht wiederkehrenden vorangehenden Ziffern nennt man die vorperiodischen Stellen; z. B. $0,2345\overline{45} \dots$; hier ist die Periode: 45; die vorperiodischen Stellen: 23.

Praktisch verwendet man meist nur die ersten 3 oder 2 Dezimalstellen. Die nachfolgenden läßt man fortfallen, wobei man die letzte stehenbleibende

Dezimalstelle um eine Zahl erhöht, wenn die erste fortfallende Dezimalstelle eine 5 oder eine noch größere Ziffer ist. Man rundet also folgendermaßen ab:

$$\begin{array}{rcll} 2,7348231 & \approx 2,73 & \text{oder} & \approx 2,735 & \text{Das Zeichen } \approx \text{ heißt:} \\ 1,35152 & \approx 1,35 & \text{,,} & \approx 1,352 & \text{angenähert, nahezu gleich} \\ 0,16666 \dots & \approx 0,17 & \text{,,} & \approx 0,167. & \text{(rund, etwa).} \end{array}$$

Aufgaben:

Die nachstehenden Brüche sind in Dezimalbrüche — falls erforderlich, auf 3 Dezimalstellen abgerundet — umzuwandeln:

$$\begin{array}{lllll} 294) \frac{3}{8} = & 296) \frac{7}{20} = & 298) 1\frac{1}{2} = & 300) 1\frac{2}{15} = & 302) 2\frac{5}{12} = \\ 295) \frac{1}{16} = & 297) \frac{8}{5} = & 299) 2\frac{3}{4} = & 301) 4\frac{2}{3} = & 303) \frac{3}{250} = \end{array}$$

Umgekehrt führt man aber rechnerisch aus die

Umwandlung einer Dezimalzahl
in einen gewöhnlichen Bruch

Statt 0,24 kann man schreiben $\frac{24}{100}$ oder, durch 4 gekürzt, $\frac{6}{25}$; also

$$0,24 = \frac{6}{25}.$$

$$0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$$

$$0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$0,002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}.$$

Man verwandelt eine Dezimalzahl in einen gewöhnlichen Bruch, indem man ihn als Zehntel, Hundertstel usw. schreibt.

Periodische Dezimalzahlen verwandelt man in gewöhnliche Brüche, indem man sie mit 10, 100 oder 1000 multipliziert und davon die Dezimalzahl selbst oder ihren 10- oder 100- (usf.)fachen Wert subtrahiert. Das Vielfache der Dezimalzahl wird so gewählt, daß die Periode bei der Subtraktion fortfällt. Die nachstehenden Beispiele mögen das Verfahren verdeutlichen.

Beispiele:

a) Die reinperiodische Dezimalzahl $0,27\overline{27} \dots$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden:

Der 100fache Wert beträgt: $27,27\overline{27} \dots$

$$\begin{array}{r} \text{,, } 1 \text{ ,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ \hline 0,27\overline{27} \end{array}$$

Der 1fache Wert vom 100fachen subtrahiert, ergibt den 99fachen Wert: 27.

Der 1fache Wert ist dann: $\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; Ergebnis: $0,27\overline{27} \dots = \frac{3}{11}$.

b) Die periodische Dezimalzahl mit vorperiodischen Stellen: $0,2733\overline{3} \dots$ soll in einen gemeinen Bruch verwandelt werden:

Das 1000fache beträgt: $273,33\overline{3} \dots$

„ 100 „ „ $27,33\overline{3} \dots$

Die Differenz ist das 900fache.

Sie beträgt: 246.

Das 1fache beträgt: $\frac{246}{900} = \frac{41}{150}$; Ergebnis: $0,2733\overline{3} \dots = \frac{41}{150}$.

Ergebnisse für weitere *Beispiele*:

$$0,33\overline{3} \dots = \frac{1}{3}$$

$$1,22\overline{2} \dots = 1\frac{2}{9}$$

$$0,151\overline{5} \dots = \frac{5}{33}$$

$$2,86\overline{6} \dots = 2\frac{13}{15}$$

$$0,44\overline{4} \dots = \frac{4}{9}$$

$$0,173\overline{3} \dots = \frac{13}{75}$$

$$2,11\overline{1} \dots = 2\frac{1}{9}$$

$$0,26\overline{6} \dots = \frac{4}{15}$$

Das Addieren von Dezimalzahlen

Ebenso wie beim Addieren ganzer Zahlen (siehe Seite 2) hat man beim Addieren von Dezimalzahlen die einzelnen Glieder (Summanden) so untereinanderzuschreiben, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter usw. stehen. Wenn man diese Forderung erfüllt, dann stehen auch zwangsläufig die Kommas sowie die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel untereinander. Zusammengefaßt: Beim Addieren von Dezimalzahlen haben die Kommas untereinanderzustehen!

Beispiele:

| | |
|----|-------------|
| a) | 10,035 |
| | 0,12 |
| | 143,702 |
| | 0,033 |
| | 0,003 |
| | 200,007 |
| | <u>2,01</u> |
| | 355,910 |

| | |
|----|-----------------|
| b) | 3,25 |
| | 0,003 25 |
| | 32,1 |
| | 123,456 |
| | 5,403 |
| | 3 000,722 |
| | <u>0,065 75</u> |
| | 3 165,00000 |

Das Subtrahieren von Dezimalzahlen

Auch hier hat man die Dezimalzahlen so untereinanderzuschreiben, daß die Kommas untereinanderstehen:

$$\begin{array}{r} \text{Beispiele:} \quad \text{a) } 13,750 \\ \quad \quad \quad \quad - 7,025 \\ \quad \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad \quad 6,725 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{b) } 6,800 \\ \quad \quad \quad - 2,934 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 3,866 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{c) } 100,0000 \\ \quad \quad \quad - 69,0408 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 30,9592 \end{array}$$

Statt einer ganzen Zahl schreibt man hinter den Einer das Komma und so viele Nullen, wie erforderlich sind. Statt 100 also: 100,0000.

Das Multiplizieren von Dezimalzahlen

a) Eine Dezimalzahl wird mit 10 oder einer Potenz von 10, also 100 oder 1000 oder 10000 usw., multipliziert, indem man das Komma um so viele Stellen nach rechts rückt, wie der Multiplikator Nullen hat.

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 0,573 \cdot 10 = 5,73 & \text{d) } 0,075 \cdot 100 = 7,5 \\ \text{b) } 7,832 \cdot 100 = 783,2 & \text{e) } 0,0301 \cdot 1000 = 30,1 \\ \text{c) } 2,005 \cdot 1000 = 2005 & \text{f) } 10,0403 \cdot 10000 = 100403. \end{array}$$

β) Eine Dezimalzahl wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man das Komma der Dezimalzahl zunächst beim Multiplizieren nicht berücksichtigt, sodann aber im Ergebnis soviel Stellen von rechts nach links hin durch das Komma abtrennt, wie bei der Dezimalzahl Stellen hinter dem Komma stehen.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 27,345 \cdot 43 = 1175,835 \\ \quad \quad \quad \underline{109380} \\ \quad \quad \quad \quad 82035 \\ \quad \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 1175,835 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{c) } 4,25 \cdot 805 = 3421,25 \\ \quad \quad \quad \underline{3400} \\ \quad \quad \quad \quad 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2125 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 3421,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 70,05 \cdot 16 = 1120,8 \\ \quad \quad \quad \underline{42030} \\ \quad \quad \quad \quad 1120,80 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{d) } 0,008 \cdot 125 = 1 \\ \quad \quad \quad \underline{1,000} \end{array}$$

γ) Eine Dezimalzahl wird mit einer Dezimalzahl multipliziert, indem man die Kommas zunächst nicht beachtet — man multipliziert also so, als wenn man 2 ganze Zahlen zu multiplizieren hätte. Zum Schluß aber streicht man im Ergebnis soviel Stellen von rechts her durch das Komma ab, wie die beiden Dezimalzahlen zusammen Stellen hinter dem Komma haben.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 432,1 \cdot 0,5 = 216,05 \\ \quad \quad \quad \underline{216,05} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{b) } 0,053 \cdot 0,002 = 0,000106 \\ \quad \quad \quad \underline{0,000106} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 14,25 \cdot 3,1 = 44,175 \\ \underline{4275} \\ 1425 \\ \hline 44,175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } 1,001 \cdot 0,042 = 0,042042 \\ \underline{4004} \\ 2002 \\ \hline 0,042042 \end{array} \approx 0,042$$

$$\text{e) } 0,4^2 = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

$$\text{f) } 0,15^2 = 0,0225$$

$$\text{g) } 0,03^2 = 0,03 \cdot 0,03 = 0,0009$$

$$\text{h) } 0,1^3 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$$

$$\text{i) } 0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \cdot 0,2 = 0,008$$

$$\text{k) } 0,4^3 = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \cdot 0,4 = 0,064.$$

Das Dividieren von Dezimalzahlen

a) Eine Dezimalzahl wird durch 10 oder eine Potenz von 10, also 100 oder 1000 oder 10000 usw., dividiert, indem man das Komma um so viele Stellen nach links rückt, wie der Divisor Nullen hat.

Beispiele:

$$\text{a) } 132,65 : 10 = 13,265$$

$$\text{d) } 0,734 : 10 = 0,0734$$

$$\text{b) } 9748,2 : 100 = 97,482$$

$$\text{e) } 0,012 : 100 = 0,00012$$

$$\text{c) } 17534,84 : 1000 \approx 17,535$$

$$\text{f) } 7000,0 : 1000 = 7.$$

Eine Dezimalzahl wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man die Division wie bei ganzen Zahlen ausführt und beim Überschreiten des Kommas in der Dezimalzahl auch im Ergebnis das Komma setzt. An die letzte Dezimalstelle des Dividenden können, falls erforderlich, Nullen angehängt werden.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 248,5300 : 32 = 7,7665 \dots \\ \underline{224} \downarrow \\ 245 \\ \underline{224} \downarrow \\ 213 \\ \underline{192} \downarrow \\ 210 \\ \underline{192} \downarrow \\ 180 \end{array} \approx 7,767$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 2,21 : 17 = 0,13 \\ \underline{17} \\ 51 \\ \underline{51} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 321,6 : 24 = 13,4 \\ \underline{24} \downarrow \\ 81 \\ \underline{72} \downarrow \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } 2,3976 : 162 = 0,0148 \\ \underline{162} \\ 777 \\ \underline{648} \\ 1296 \\ \underline{1296} \\ 0 \end{array}$$

γ) Hat man eine Dezimalzahl, z. B. 1,026, durch eine andere Dezimalzahl, z. B. 0,57, zu dividieren, so kann man das soeben unter β) erklärte Rechnungsverfahren zunächst nicht anwenden.

Statt $1,026 : 0,57$ kann man schreiben: $\frac{1,026}{0,57}$.

Diesen Bruch erweitert man mit derjenigen Potenz von 10, die den Nenner (Divisor) 0,57 zur ganzen Zahl macht; also:

$$\frac{1,026}{0,57} = \frac{1,026 \cdot 100}{0,57 \cdot 100} = \frac{102,6}{57} = 102,6 : 57.$$

Hierdurch hat man die Aufgabe des Dividierens einer Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl auf die des Dividierens einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl zurückgeführt. Man erhält also folgende Regel:

Eine Dezimalzahl wird durch eine Dezimalzahl dividiert, indem man im Dividend und im Divisor das Komma gleichmäßig um so viele Stellen nach rechts rückt, bis der Divisor eine ganze Zahl wird. Dann dividiert man, wie unter β) angegeben.

Beispiele:

a) $243,5 : 2,302$.

Der Divisor 2,302 hat 3 Stellen hinter dem Komma. Damit er eine ganze Zahl wird, hat man das Komma um 3 Stellen nach rechts zu rücken. Gleichzeitig hat man im Dividend 243,5 das Komma um 3 Stellen nach rechts zu setzen. Er lautet dann 243500. Die auf diese Weise umgeformte Aufgabe lautet:

$$243500 : 2302 = 105,77 \dots$$

$$\begin{array}{r} 2302 \\ \underline{13300} \\ 11510 \\ \underline{17900} \\ 16114 \\ \underline{17860} \\ 16114 \\ \underline{17460} \end{array}$$

b) $3,6 : 0,12 = 360 : 12 = 30$

c) $0,042 : 0,14 = 4,2 : 14 = 0,3$

d) $17,8 : 0,02 = 1780 : 2 = 890$

e) $0,39 : 0,003 = 390 : 3 = 130$

f) $0,136 : 1,7 = 1,36 : 17 = 0,08$.

Aufgaben

über das Rechnen mit Dezimalzahlen:

304) $4,725 + 38,03 + 120,45 - 0,534 + 37,329 =$

305) $154,2 + 47,04 - 1,43 + 0,06 - 99,87 =$

306) $11,1 - (17,5 - 7,5) + 0,9 =$ 315) $(7,6 - 7,1) \cdot (0,15 + 0,05) =$

307) $0,16 + (0,04 - 0,2) =$ 316) $1000(0,03 - 0,029) =$

308) $(0,019 + 0,001) \cdot 10 =$ 317) $0,3^2 + 0,4^2 =$

309) $3 \cdot 0,06 \cdot 0,3 =$ 318) $1,2^2 + (0,8^2 - 0,08) =$

310) $1,5(3,75 - 2,25) =$ 319) $(0,023 - 0,002) \cdot 100 =$

311) $(1,6 - 3,2) \cdot 5 =$ 320) $0,378 : 2,7 =$

312) $(-0,2)^2 =$ 321) $7,5 \cdot 0,5 \cdot 40 \cdot 0,04 =$

313) $(-0,3)^3 =$ 322) $(7,75 - 0,25) : 0,15 =$

314) $(5,5 + 2,5) : 0,4 =$ 323) $(90,25 - 0,5^2) \cdot 0,1 =$

324) Der genormte Zeichenmaßstab M. 1 : 2,5 wird im technischen Zeichnen für Verkleinerungen viel verwendet. Hierbei ist ein Werkstück 2,5mal so groß, wie es auf der Zeichnung erscheint.

Wie groß ist in diesem Maßstab ein Blech mit den Abmessungen: 125×200 mm zu zeichnen?

325) Wieviel Millimeter beträgt der Gewindedurchmesser einer $\frac{3}{4}$ " Whitworth-Schraube? ($1'' = 25,4$ mm)

326) Auf eine Gewindelänge von $1''$ kommen bei dem $\frac{1}{2}$ " Whitworth-Gewinde 12 Gänge. Wie groß ist die Gewindesteigung?
(Anleitung: Gewindesteigung = $25,4$: Gangzahl.)

327) Die Gewindesteigung der $1''$ Schraube beträgt $3,175$ mm. Wieviel Gänge kommen auf ein Zoll?

328) Das spez. Volumen und die Wichte sind reziproke Größen?
(Wichte = 1 : spez. Volumen; spez. Volumen = 1 : Wichte.) Das spez. Volumen der Luft beträgt $0,774$. Wie groß ist die Wichte der Luft¹⁾?

329) Der Fünfjahrplan legt für das Jahr 1955 folgenden Produktionsumfang fest:

| | |
|------------------------|-------------------|
| Maschinenbau | 8,1 Milliarden DM |
| Elektrotechnik | 2,25 „ „ |
| Feinmechanik und Optik | 930 Millionen „ |

Wieviel DM wird die gesamte Produktion dieser Industrien betragen? [Das Ergebnis ist in Zahlen auszusprechen!]

¹⁾ Unter dem „spezifischen Volumen“ eines Körpers versteht man das Volumen der Gewichtseinheit. Es hat die Dimension: m^3/kg . Umgekehrt aber: Unter dem „spezifischen Gewicht“ (jetzt als „Wichte“ bezeichnet) versteht man das Gewicht der Volumeneinheit. Die Wichte hat die Dimension (= Größe): kg/m^3 .

- 330) Um die Zahnteilung eines Zahnrades zu bestimmen, hat man den Modul mit 3,14 zu multiplizieren.
Wie groß ist die Zahnteilung bei einem mit dem Modul 7,5 mm geschnittenen Zahnrad?
- 331) Die Zahnhöhe eines Zahnrades setzt sich aus der Kopf- und Fußhöhe zusammen. Man wählt bei bearbeiteten Zähnen die Kopfhöhe gleich dem Modul, die Fußhöhe gleich dem 1,166fachen Modul.
Wie groß ist die Zahnhöhe eines mit dem Modul 3,75 mm bearbeiteten Zahnrades?
- 332) Das Gewicht eines Quadratmeters einer Blechplatte in Kilogramm bestimmt man rechnerisch, indem man die Dicke des Bleches in Millimeter mit der Wichte des Werkstoffes multipliziert.
Wieviel Kilogramm wiegen $2,5 \text{ m}^2$ Stahlblech von 4 mm Dicke? (Wichte: 7,85)
- 333) Das Gewicht eines Gußstückes kann man angenähert aus dem Modellgewicht berechnen, indem man das letzte mit einer Umrechnungszahl multipliziert. Diese Umrechnungszahl hängt ab von der Holzart des Modells und dem Werkstoff des Gußstückes. Sie beträgt z. B. für ein Modell aus Fichtenholz und für den Gußwerkstoff Messing: 15,8.
Wie schwer ist ein Gußstück aus Messing, dessen Modell 0,75 kg wiegt?
- 334) Ende des Jahres 1950 gab es in unseren volkseigenen Betrieben 770 Aktivistenpläne. Ende März 1951 waren es bereits 2,3 mal so viel. Wieviele sind das?

II. Die in der Technik gebräuchlichen Maße und Einheiten

In den Textübungsaufgaben des Abschnittes I wurden als Anwendung für die Grundrechnungsarten mit den reellen Zahlen diese Zahlen im Zusammenhang mit einer allgemein bekannten Abmessung (Dimension) verwendet. Diese Abmessungen wurden als sogenannte Einheiten (Kurzzeichen) mit kleinen lateinischen Buchstaben ohne Punkt hinter die Zahlen gesetzt. Über die Schreibweise dieser Einheiten gibt das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene DIN-Blatt DIN 1301 Auskunft. Man schreibt beispielsweise: 7,5 m und drückt damit die Länge einer Strecke aus, die $7\frac{1}{2}$ mal so lang ist wie eine festgelegte Einheitsstrecke. Die Zahl 7,5 zählt, wie das Wort Zahl zum Ausdruck bringt, die Anzahl der als Maßeinheit benutzten Meter (m), oder man vergleicht die Länge der Strecke 7,5 m mit der Länge der Einheitsstrecke 1 m. Messen heißt nämlich nichts anderes als Vergleichen.

Die in der Technik am meisten verwendeten Maßeinheiten und die von ihnen abgeleiteten Größen werden nachstehend unter Benutzung der genormten Schreibweise behandelt.

1. Die Längenmaße

Die Einheit der Länge ist das Meter (m). Ein im Büro der Maße und Gewichte im Pavillon de Breteuil bei Paris aufbewahrter Stab aus einer Legierung von 90% Platin und 10% Iridium dient als Urmeter. Kopien dieses Urmeterstabes wurden an die einzelnen Staaten verteilt und dienen diesen Staaten als Normalen der Längeneinheit. Das Meter sollte nach einem Beschluß einer von der französischen Nationalversammlung 1791 eingesetzten Kommission der 40 millionste Teil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridians sein. Eine andere Bestimmung der genauen Länge eines Meters ist durch die Wellenlänge des Lichtes, und zwar der roten Linie des Elementes Kadmium, möglich. Hiernach beträgt $1\text{ m} = 1553\,164,1$ Wellenlängen dieses Lichtes in trockener Luft von 15° und 760 mm Druck.

Der 10. Teil eines Meters ist ein Dezimeter (dm). 1 Dezimeter wird in 10 Zentimeter (cm) geteilt. 1 Zentimeter setzt sich aus 10 Millimeter (mm) zusammen. Das im Maschinenbau verwendete kleinste Längenmaß ist das Mikron (μ). Man versteht hierunter den tausendsten Teil des Millimeters. Noch kleinere, im praktischen Maschinenbau nicht verwendete Längenmaße, sind das Millimikron ($m\mu$), das Ångström (Å) und die X-Einheit¹⁾.

Es betragen: $1\text{ m}\mu = \frac{1}{1000}\mu$, $1\text{ Å} = \frac{1}{10}\text{ m}\mu$, $1\text{ X-Einheit} = \frac{1}{1000}\text{ Å}$.

Größere Längeneinheiten als das Meter sind der Kilometer (km) = 1000 m. Die größten Längeneinheiten, das Lichtjahr (Lj)²⁾, die Sternenweite oder Parsec³⁾ und die Astronomische Einheit (AE)⁴⁾, haben für den Astronomen Bedeutung.

Es betragen: $1\text{ Lichtjahr (Lj)} = 0,946 \cdot 10^{18}\text{ cm}$
 $1\text{ Parsec} = 3,26\text{ Lj} = 3,08 \cdot 10^{18}\text{ cm}$
 $1\text{ Astron. Einheit (AE)} = 1,495 \cdot 10^{13}\text{ cm}$

Zusammenfassung:

$$1\text{ m} = 10\text{ dm} = 100\text{ cm} = 1000\text{ mm} = 1000000\mu = \frac{1}{1000}\text{ km}$$

Ein in der Seefahrt gebräuchliches Längenmaß ist die Seemeile. Man versteht darunter die Länge einer Meridianminute. Ein Längengrad ist 40000 km lang. Der 360. Teil hiervon ist ein Meridiangrad. Dieser wird in 60 Meridianminuten unterteilt. Folglich ist eine Meridianminute = $\frac{40000}{360 \cdot 60}$ (km) = 1,852 km = 1 Seemeile.

(Die veraltete geographische Meile betrug etwa 4 Seemeilen = 7422 m.)

¹⁾ Siehe Beispiele für sehr kleine Zahlenwerte auf Seite 37.

²⁾ Ein Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht innerhalb eines Jahres im leeren Weltraum zurücklegt.

³⁾ Siehe Seite 15.

⁴⁾ Die „Astronomische Einheit“ ist gleich der mittleren Entfernung Erde — Sonne.

Englische Längenmaße sind:

- 1 mil = 0,001 Zoll = 0,025 mm
- 1 Linie = $\frac{1}{12}$ Zoll = 2,117 mm = 1'''
- 1 Zoll (inch) = 25,4 mm = 1''
- 1 Fuß (foot) = 12 Zoll = 304,8 mm = 1'
- 1 Yard = 3 Fuß = 0,9144 m
- 1 engl. Meile = 1760 Yards = 1,609 km.

Russische Längenmaße sind:

- 1 Meile = 7 Werst \approx 7,5 km
- 1 Werst = 500 Sáschehn = 1,06 km
- 1 Linia = 0,1 Diuim = 0,25 cm
- 1 Diuim = $\frac{1}{12}$ Fuß = 2,54 cm
- 1 russ. Fuß \approx 1 engl. Fuß = 0,3048 m
- 1 Werschóck = 4,445 cm
- 1 Sotka = $\frac{1}{100}$ Sáschehn
- 1 Arschín = 0,7112 m
- 1 Sáschehn = 3 Arschín = 3 · 16 Werschóck
= 7 Fuß = 2,13 m.

Aufgaben:

- | | |
|--|--|
| 335) $40 \mu = ? \text{ mm}$ | 344) $\frac{3}{4} \text{ m} = ? \text{ mm}$ |
| 335a) $\frac{3}{4} \text{ m} = ? \text{ mm}$ | 345) $\frac{1}{25} \text{ m} = ? \text{ mm}$ |
| 336) $0,65 \text{ mm} = ? \mu$ | 346) $2 \text{ m } 3 \text{ cm } 5 \text{ mm} = ? \text{ mm}$ |
| 337) $6,5 \text{ mm} = ? \text{ cm}$ | 347) $3 \text{ dm } 7,5 \text{ mm} = ? \text{ mm}$ |
| 338) $9,25 \text{ cm} = ? \text{ dm}$ | 348) $300 \text{ m} = ? \text{ km}$ |
| 339) $\frac{1}{2} \text{ dm} = ? \text{ mm}$ | 349) $1,8 \text{ km} = ? \text{ m}$ |
| 340) $8,3 \text{ dm} = ? \text{ mm}$ | 350) $10 \text{ km } 50 \text{ m} = ? \text{ m}$ |
| 341) $1250 \text{ mm} = ? \text{ dm}$ | 351) $1,5 \text{ km} - 300 \text{ m} = ? \text{ m}$ |
| 342) $75 \text{ mm} = ? \text{ m}$ | 352) $2 \text{ m} - 45 \text{ cm} + 5 \text{ mm} = ? \text{ mm}$ |
| 343) $1,02 \text{ m} = ? \text{ mm}$ | 353) $100 \text{ mm} + 100 \mu = ? \text{ mm}$ |

2. Die Flächenmaße

Unter Verwendung der vorstehend behandelten Längenmaße werden die Flächenmaße bestimmt. Eine quadratische Fläche mit der Seitenlänge von 1 m ist die Einheit der Fläche. Sie hat den Flächeninhalt 1 Quadratmeter oder — in DIN-Schreibweise — 1 m^2 . Allgemein bestimmt man den Flächeninhalt einer rechteckigen Fläche aus dem Produkt der beiden Seiten, also:

$$\text{Länge} \times \text{Breite.}$$

Ein Rechteck mit den Seitenlängen von 0,5 m und 0,8 m hat den Flächeninhalt $0,5 \text{ (m)} \cdot 0,8 \text{ (m)} = 0,4 \text{ (m}^2\text{)}$. Aus dem Produkt zweier in Meter

gemessenen Rechteckseiten erhält man den Rechteckinhalt in Quadratmeter; es ergibt also $m \cdot m = m^2$. Beide Rechteckseiten müssen in derselben Längeneinheit gemessen sein. Beträgt die eine Seite 20 cm, die andere 1,5 m, so muß man zur Flächeninhaltsbestimmung beide Seiten in Meter ausdrücken. Da 20 cm = 0,2 m ist, berechnet man den Inhalt: $0,2 \text{ (m)} \cdot 1,5 \text{ (m)} = 0,3 \text{ (m}^2\text{)}$.

Die Fläche eines Quadratmeters kann man in 100 Quadratdezimeter = 100 dm² unterteilen.

1 dm² setzt sich aus 100 Quadratcentimeter = 100 cm² zusammen.

1 cm² „ „ 100 Quadratmillimeter = 100 mm² „ „

Größere Flächeneinheiten sind:

1 Ar (a) = 100 m². Ein Quadrat mit 10 m Seitenlänge ist die Fläche eines Ars.

1 Hektar (ha) = 100 a = 10000 m². Der Flächeninhalt eines Quadrats mit 100 m Seitenlänge beträgt 1 ha.

1 Quadratkilometer (km²) = 100 ha = 10000 a = 1000000 m².

Zusammenfassung:

| | |
|--|--|
| 1 m ² = 100 dm ² = 10000 cm ² = 1000000 mm ² | |
| 1 dm ² = 100 cm ² ; 1 cm ² = 100 mm ² | |
| 1 km ² = 100 ha = 10000 a = 1000000 m ² | |
| 1 ha = 100 a; 1 a = 100 m ² | |

Ein veraltetes Flächenmaß, das jedoch in der Landwirtschaft auch heute noch verwendet wird, ist der Morgen.

1 (preußischer) Morgen ist eine Fläche von etwa 25 a.

4 Morgen sind also 1 ha.

Russische Flächenmaße sind:

1 Qu.-Werst = 250000 Qu.-Sáschehn = 1,14 km²

1 Qu.-Sáschehn = 9 Qu.-Arschín = 4,55 m².

Aufgaben:

354) $\frac{1}{2}$ dm² = ? cm² 357) 200 cm² = ? m² 360) 5000 m² = ? ha

355) 7,5 cm² = ? mm² 358) 150 mm² = ? cm² 361) 600 a = ? ha

356) $\frac{1}{4}$ m² = ? cm² 359) 3000 ha = ? km² 362) $\frac{3}{4}$ ha = ? a

363) $5\frac{1}{2}$ km² = ? ha.

364) Die beschnittene Lichtpause im DIN-Format A 0 hat die Seitenlängen 841 mm und 1189 mm. Wieviel Quadratmeter Pauspapier werden für eine solche Lichtpause verwendet?

- 365) Durch fortgesetztes Halbieren des Formates A 0 erhält man die Formate A 1, A 2 usw. Das Format A 4 hat die Seitenlängen 210×297 (mm).
Wie viele solcher Blätter kann man aus 1 m^2 schneiden?
- 366) Wieviel Quadratzoll enthält 1 m^2 ?
- 367) Wieviel Quadratcentimeter beträgt die Querschnittsfläche eines Vierkantstahles von 8 mm Kantenlänge?
- 368) Der rechteckige Grundriß eines Fabrikgeländes beträgt $2 \text{ km} \times 600 \text{ m}$.
Wieviel Hektar sind dies?
- 368a) Ein Neubauer besitzt ein rechteckiges Stück Land, das 300 m lang und 250 m breit ist. Wieviel Ar sind das?
- 368b) Auf einem volkseigenen Gut werden 37 ha Land mit Zuckerrüben, 14 ha mit Weizen, 23 ha mit Roggen, 9 ha mit Kartoffeln und 21 ha mit Ölfrüchten bebaut. Wieviel Morgen Land (1 Morgen zu 25 a) sind insgesamt bestellt worden?

3. Die Körpermaße

Der Rauminhalt oder das Volumen eines Würfels, dessen Kante 1 m lang ist, beträgt 1 Kubikmeter (m^3). Andere Bezeichnungen für 1 m^3 sind Festmeter oder Raummeter. Die Grundfläche dieses Würfels ist 1 m^2 ; seine Höhe beträgt 1 m.

Der 1000. Teil eines Kubikmeters ist der Kubikdezimeter (dm^3). Dies entspricht dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge von $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$. Im Geschäftsleben wird der Kubikdezimeter als Hohlmaß benutzt und Liter (l) genannt.

Der 1000. Teil eines Kubikdezimeters ist der Kubikcentimeter (cm^3). Ein Würfel mit der Kantenlänge von 1 cm hat das Volumen 1 cm^3 .

Der 1000. Teil eines Kubikcentimeters ist der Kubikmillimeter (mm^3). Sein Volumen entspricht dem eines Würfels mit der Kantenlänge von 1 mm.

Von dem Rauminhalt eines Liters (l) = 1 dm^3 leiten sich noch folgende Raummaße ab:

$$1 \text{ Hektoliter (1 hl)} = 100 \text{ l} = 100 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ Deziliter (1 dl)} = \frac{1}{10} \text{ l} = 100 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ Zentiliter (1 cl)} = \frac{1}{100} \text{ l} = 10 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ Milliliter (1 ml)} = \frac{1}{1000} \text{ l} = 1 \text{ cm}^3.$$

Zusammenfassung:

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000000 \text{ cm}^3 = 1000000000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3; 1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3; 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l} = 1000 \text{ dl} = 10000 \text{ cl} = 100000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ l} = 10 \text{ dl}; 1 \text{ dl} = 10 \text{ cl}; 1 \text{ cl} = 10 \text{ ml}; 1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

In England und Amerika wird als Raummaß 1 Kubikfuß (cbcfoot) benutzt. 1 cbcfoot = 0,0283 m³.

Die Vermessung von Schiffen erfolgt in Registertonnen. 1 Register-
tonne hat einen Rauminhalt von 100 engl. Kubikfuß = 2,83 m³.

Es sei hierbei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine Registertonne ein Raummaß ist. Man verwechsle sie nicht mit dem Gewichtsmaß 1 t (siehe im folgenden Abschnitt: Gewichtsmaße).

Russische Körpermaße sind:

- 1 Gárnitz = 3,28 l
- 1 Wedró = 10 Krutschka = 12,5 l
- 1 Tschétwert = 210 l
- 1 Tschetwerík = 26,2 l
- 1 Botschka = 4,92 l.

Aufgaben:

- | | | |
|--|---|--|
| 369) 4,5 m ³ = ? dm ³ | 376) 6 ¹ / ₄ hl = ? l | 383) 1 ¹ / ₄ dl = ? cl |
| 370) 7750 cm ³ = ? dm ³ | 377) 3 ¹ / ₂ l = ? dl | 384) 12 ¹ / ₂ cl = ? ml |
| 371) 150 mm ³ = ? cm ³ | 378) 0,1 hl = ? l | 385) 325 dm ³ = ? l |
| 372) 0,35 dm ³ = ? cm ³ | 379) 0,4 l = ? cm ³ | 386) 20 m ³ = ? l |
| 373) 275 dm ³ = ? m ³ | 380) 3 cl = ? l | 387) 750 cm ³ = ? l |
| 374) 15 cm ³ = ? mm ³ | 381) 0,5 cl = ? ml | 388) 1 ¹ / ₂ l = ? cm ³ . |
| 375) ¹ / ₂₅ m ³ = ? dm ³ | 382) ¹ / ₈ l = ? dl | |

4. Gewichtsmaße

Die in der Technik verwendete Gewichtseinheit ist das Kilogramm (kg). Man versteht darunter das Gewicht eines Kubikdezimeters oder, was dasselbe ist, eines Liters Wasser von 4° Celsius. (Siehe S. 63: Pond.)

1000 kg nennt man eine Tonne (t). Dieses Gewicht entspricht dem eines Kubikmeters Wasser von 4° Celsius.

Der 1000. Teil eines Kilogramms ist ein Gramm (g). Es ist das Gewicht eines Kubikzentimeters Wasser von 4° Celsius.

- Der 10. Teil eines Gramms heißt Dezigramm (dg)
- „ 100. „ „ „ „ Zentigramm (cg)
- „ 1000. „ „ „ „ Milligramm (mg).

Nicht einbegriffen in die DIN-Normen sind folgende Gewichtseinheiten:

- 1 Pfund = 500 g
- 1 Zentner = 50 kg
- 1 Doppelzentner = 100 kg
- 1 Dekagramm = 10 g
- 1 Hektogramm = 100 g
- 1 metrisches Karat = 200 mg.

In England und Amerika wird mit dem engl. Pfund (lb) gerechnet. Es entspricht:

$$1 \text{ engl. Pfund (lb)} = 0,4536 \text{ kg}$$

oder

$$1 \text{ kg} = 2,2046 \text{ engl. Pfund (lbs)}.$$

Zusammenfassung:

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 10000 \text{ dg} = 100000 \text{ cg} = 1000000 \text{ mg} = \frac{1}{1000} \text{ t}$$

$$1 \text{ g} = 10 \text{ dg} = 100 \text{ cg} = 1000 \text{ mg}$$

Aufgaben:

389) $\frac{1}{4} \text{ t} = ? \text{ kg}$

390) $100 \text{ kg} = ? \text{ t}$

391) $0,03 \text{ kg} = ? \text{ g}$

392) $500 \text{ g} = ? \text{ kg}$

393) $50 \text{ dg} = ? \text{ g}$

394) $\frac{3}{4} \text{ g} = ? \text{ dg}$

395) $10\frac{1}{2} \text{ g} = ? \text{ mg}$

396) $625 \text{ mg} = ? \text{ cg}$

397) $0,009 \text{ kg} = ? \text{ mg}$

398) $350 \text{ dg} = ? \text{ kg}$

399) $2 \text{ kg} + 20 \text{ g} + 2000 \text{ mg} = ? \text{ g}$

400) $\frac{1}{5} \text{ g} + 3 \text{ dg} + 5 \text{ cg} = ? \text{ mg}$

401) $0,75 \text{ t} - 200 \text{ kg} + \frac{1}{20} \text{ t} = ? \text{ kg}$

402) $19,5 \text{ kg} + 500 \text{ g} = ? \text{ t}$

403) $20 \text{ Ztr.} = ? \text{ t}$

404) $7000 \text{ kg} = ? \text{ Ztr.}$

405) $70 \text{ Doppelztr.} = ? \text{ t}$

406) $7\frac{1}{2} \text{ Doppelztr.} = ? \text{ kg}$

407) $475 \text{ lbs} = ? \text{ kg}$

408) $5725 \text{ lbs} = ? \text{ t.}$

5. Zeitmaße

Die Einheit des Zeitmaßes bestimmt man aus der zeitlichen Dauer eines Tages von Mittag zu Mittag, wobei man unter Mittag den Zeitpunkt versteht, in dem die Sonne genau im Süden steht. Da die Tageslängen zu verschiedenen Jahreszeiten nicht genau in ihrer Dauer übereinstimmen, so wird der Zeitbestimmung der Mittelwert der Dauer aller Tage vom Mittag des 21. März des einen bis zum Mittag des 21. März des nächsten Jahres zugrunde gelegt. Man nennt diesen Mittelwert: 1 mittlerer Sonnentag. Auf die Einheit der Zeit kommt man, indem man diesen mittleren Sonnentag in 24 Stunden, jede Stunde in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden teilt. Da $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ ist, so hat also ein Tag 86400 Sekunden. Die Sekunde ist die Einheit der Zeit, die sich nach vorstehendem wie folgt definiert.

Eine Sekunde ist der 86400. Teil eines mittleren Sonnentages.

Die genormten Kurzzeichen für die Zeitmaße sind:

h = Stunde (lateinisch hora = die Stunde)

m
oder } = Minute
min

min schreibt man, wenn dieses Zeichen allein steht und nicht mit einem anderen Kurzzeichen zusammen verwendet wird.

s = Sekunde.

Dieselben Zeichen werden auch zum Schreiben der Uhrzeit verwendet, wobei sie in diesem Falle erhöht oberhalb der Zeile geschrieben werden; also z. B. $3^h 26^m 16^s$ [sprich: 3 Uhr, 26 Minuten und 16 Sekunden].

Zusammenfassung:

| |
|--|
| $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$ $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ |
|--|

Aus Vorstehendem ergibt sich, daß bei der Umrechnung der Zeiteinheiten in andere die umzurechnende Zeit mit 60 bzw. 3600 multipliziert oder dividiert werden muß. Es sei daran erinnert, daß Längen, Flächen- und Rauminhalte sowie Gewichte durch Multiplikation oder Division mit 10 oder einer Potenz von 10 umgerechnet werden.

Beispiele: a) Wieviel Sekunden sind 0,2 min?
 $0,2 \cdot 60 = 12$ Ergebnis 12 s.

b) Wieviel Minuten sind 192s?
 $192 : 60 = 3,2$ Ergebnis: 3,2 min.

Aufgaben:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 409) $0,6 \text{ min} = ? \text{ s}$ | 414) $7344 \text{ s} = ? \text{ h}$ |
| 410) $0,4 \text{ h} = ? \text{ min}$ | 415) $4,34 \text{ h} = ? \text{ h} ? \text{ min} ? \text{ s}$ |
| 411) $0,1 \text{ h} = ? \text{ s}$ | 416) $3 \text{ h } 39 \text{ min } 36 \text{ s} = ? \text{ h}$ |
| 412) $225 \text{ min} = ? \text{ h}$ | 417) $14\frac{1}{3} \text{ h} + 40 \text{ min} = ? \text{ h}$ |
| 413) $2124 \text{ s} = ? \text{ min}$ | 418) $3,2 \text{ min} + 2 \text{ min } 12 \text{ s} + 29 \text{ s} + 7 \text{ s} = ? \text{ min.}$ |

6. Winkelmaße

a) Winkelmessung in Winkelgraden

Unter einem Winkel versteht man zwei von einem Punkt — dem Scheitelpunkt — ausgehende Strahlen verschiedener Richtung, die Schenkel genannt werden. In der mathematischen Schriftsprache wird der Winkel mit \sphericalangle bezeichnet. Um die Größe eines Winkels zu messen, muß man die beiden Geraden bis zu ihrem Schnittpunkt verfolgen. Dieser Punkt heißt der Scheitel; die beiden Geraden sind die Schenkel des Winkels. Liegen beide Schenkel in einer geraden Linie, aber auf verschiedenen Seiten des Scheitels, so heißt der Winkel ein gestreckter oder gerader. Die Hälfte eines gestreckten Winkels heißt ein rechter Winkel. Bei ihm stehen die beiden Schenkel senkrecht — auch lotrecht oder vertikal genannt — aufeinander. Ein Winkel, der kleiner als ein rechter ist, heißt ein spitzer Winkel; einer der größer als ein rechter ist, ein stumpfer Winkel.

Jeder Winkel wird durch einen Bogen gemessen, der um seinen Scheitel mit einem beliebigen Radius (Halbmesser) zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird. Die Größe der Winkel wird durch Grade — mathematisches Zeichen $^{\circ}$ rechts oberhalb der Zahl — ausgedrückt.

Der gestreckte Winkel hat 180° , der rechte 90° . Dreht man eine Strecke um den einen ihrer beiden Endpunkte einmal ganz herum, so daß sie zum Schluß mit ihrer Ursprungslage zusammenfällt, so hat sie den Winkel von 360° beschrieben.

Der Winkel von 360° heißt Vollwinkel.

Die Einteilung des Vollwinkels in 360° rührt von der überholten, irrigen Zeitrechnung her, nach der die Erde stillstehe und die Sonne, die sich um sie drehe, täglich um 1° weitergehe. Diese Laufbahnänderung erneuere sich alle 360 Tage (= 1 Jahr).

Im Maschinenbau sind die Winkel von 90° , 60° und 45° die häufigsten. Der 90° \sphericalangle wird in der Praxis als Normal-, Anschlag- und Kreuzwinkel benutzt.

Für genaue Messungen unterteilt man den Winkel von 1° Größe in 60 gleiche Teile, die man Minuten — mathem. Zeichen: ' hinter der Zahl, oberhalb der Zeile — nennt. $1'$ wird in $60''$ [lies: 60 Sekunden] unterteilt.

Zusammenfassung:

| |
|--|
| $1^{\circ} = 60' = 3600''$ $1' = 60''$ $1 \text{ rechter Winkel} = 90^{\circ}$ |
|--|

Die genauesten Winkelmessungen werden in der Praxis mit dem Winkelteilungsprüfer mit Theodolit und Kollimator der Firma Zeiß ausgeführt. Die Meßunsicherheit beträgt $\pm 1''$.

Die Umrechnung eines in Graden gegebenen Winkels in Minuten bzw. Sekunden oder umgekehrt ist ebenso wie die Umrechnung der Zeiteinheiten durch Multiplikation bzw. Division mit 60 oder 3600 vorzunehmen.

Beispiele:

$$a) 5\frac{1}{4}^{\circ} = (5\frac{1}{4} \cdot 60)' = 315'$$

$$c) 210'' = (210 : 60)' = 3\frac{1}{2}'$$

$$b) 2\frac{1}{3}' = (2\frac{1}{3} \cdot 60)'' = 140''$$

$$d) 312' = (312 : 60)^{\circ} = 5,2^{\circ}$$

Aufgaben:

$$419) 7,5^{\circ} = ?'$$

$$421) 2\frac{3}{4}' = ?''$$

$$423) 1\frac{1}{2}^{\circ} = ?''$$

$$420) 70' = ?^{\circ} ?'$$

$$422) 100'' = ?' ?''$$

424) Welchen Winkel bilden die beiden Uhrzeiger um 1^h ?

425) Welchen Winkel legt der große Uhrzeiger in 40 min zurück?

- 426) Die bei allen Schiffskompassen angebrachte Windrose ist eine waagrecht gelegene Kreisscheibe, die durch 32 vom Mittelpunkt nach dem Umkreis gezogene, gleichweit voneinander abstehende Radien die Lage der Himmels- und Weltgegend veranschaulicht. Am äußersten Rande der Windrose ist die Einteilung von 360 verzeichnet. Wieviele Grade kommen auf jeden der 32 aufgezeichneten Radien?
- 427) Wie groß ist der Winkel, der entsteht, wenn man 2 aufeinanderfolgende Ecken eines Sechskantstahles mit dem Mittelpunkt der Querschnittsfläche verbindet?
- 428) Nach dem Normblatt DIN 2504 über Anschlußmaße für Flansche sind für die Nennweite 350 mm 16 Schrauben je $1\frac{3}{8}$ vorgesehen. Wieviel Grad beträgt die Lochteilung?

Anmerkung:

In neuerer Zeit ist man z. T. dazu übergegangen, den rechten Winkel nicht, wie allgemein üblich, in 90° , sondern in Anlehnung an das Zehnersystem in 100 Grade einzuteilen. Zum Unterschied von der mit dem Zeichen $^\circ$ bezeichneten 90er Teilung bezeichnet man diese neue Winkleinheit nach DIN 1302 mit Neugrad. Man schreibt für diese Einheit: 1^g .

Es entsprechen: $100^\text{g} = 90^\circ$ oder $1^\text{g} = 0,9^\circ = 54'$.

Den Neugrad teilt man in 100 Neuminuten und schreibt für 1 Neuminute: 1^c (c = centum = 100). 1 Neuminute unterteilt sich in 100 Neusekunden, von denen man eine mit 1^so schreibt.

1° entspricht somit $\frac{100^\text{g}}{90} = 1,1\bar{1} \dots^\text{g} = 1^\text{g} 11^\text{c} 11,1 \dots^\text{so}$. Die Umrechnung eines in Neugraden, -minuten und -sekunden gegebenen Winkels in Neugrade gestaltet sich wesentlich einfacher; es ist z. B.:

$$32^\text{g} 26^\text{c} 74^\text{so} = 32,2674^\text{g}.$$

Zur Erleichterung der Umrechnung der bisherigen Winkelgrade in Neugrade gibt es diesbezügliche Tabellen.

b) Winkelmessung im Bogenmaß

Die Größe eines Winkels bestimmt man außer in Graden bzw. Neugraden — besonders in der höheren Mathematik — durch die Länge des ihn überspannenden Kreisbogens des Einheitskreises. Zum Verständlichmachen hiervon einige vorberemerkende Erklärungen!

Der Einheitskreis ist der Kreis mit dem Radius (Halbmesser) 1. Ob dieser Radius 1 m, 1 cm, 1 dm oder eine andere als Einheit gewählte Länge ist, ist belanglos. Wesentlich hingegen ist, daß man die Länge des Kreishalbmessers als Maßeinheit festlegt. Der Umfang des Einheitskreises beträgt $2 \cdot 3,14159 \dots = 6,28318 \dots$. Die Zahl $3,14159 \dots$, für die $\frac{22}{7}$ oder $\frac{355}{113}$ Näherungswerte sind, wird mit dem griechischen Buchstaben π [sprich: Pi] bezeichnet.

Es ist also: $\pi = 3,14159\dots$

Umfang des Einheitskreises $= 2 \cdot \pi$.

Beschreibt man um den Scheitel eines Winkels den Kreis mit dem Radius 1, so ist die Länge des den Winkel überspannenden Kreisbogens ein Maß für die Größe des Winkels.

Zum Vollwinkel 360° gehört der gesamte Umfang des Einheitskreises. Man bezeichnet somit den Winkel 360° mit $2 \cdot \pi$. Der gestreckte oder gerade Winkel 180° wird von dem halben Einheitskreis überspannt. Ferner erhält man:

| | | |
|-------------|------------------------------------|-----------------|
| 180° | $\frac{\wedge}{\underline{\quad}}$ | π |
| 90° | $\frac{\wedge}{\underline{\quad}}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| 60° | $\frac{\wedge}{\underline{\quad}}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| 45° | $\frac{\wedge}{\underline{\quad}}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| 30° | $\frac{\wedge}{\underline{\quad}}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

Der Bogen von der Länge 1 beim Radius 1 überspannt den Winkel

$$360^\circ : 6,28318 = 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 44,8'' = 63,66198^s.$$

Man bezeichnet diesen Winkel nach DIN 1302 mit 1 rad [sprich: 1 Radiant]

| |
|--|
| $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44,8''$ $= 63,66198^s$ |
|--|

Aufgaben:

Die in Graden gegebenen Winkel sind im Bogenmaß anzugeben.

429) $20^\circ = ?$ 430) $15^\circ = ?$ 431) $36^\circ = ?$ 432) $120^\circ = ?$ 433) $270^\circ = ?$

Welchen Winkeln in Graden entspricht:

434) $0,5 \text{ rad} = ?$ 436) $1,2 \text{ rad} = ?$ 438) $3 \text{ rad} = ?$

435) $\frac{1}{3} \text{ rad} = ?$ 437) $2 \text{ rad} = ?$

7. Temperaturmaße — Wärmemaße

a) Messen des Wärmezustandes

Der Wärmezustand oder die Temperatur eines Körpers wird mit dem Quecksilberthermometer gemessen. Taucht man ein solches Thermometer zunächst in schmelzendes Eis und dann in die Dämpfe des (bei 760 mm Druck) siedenden Wassers, so erhält man 2 Fundamentalpunkte (Eispunkt

und Siedepunkt). Der Abstand der beiden Fundamentalpunkte wird in 100 gleiche Teile geteilt. Jeder der durch die Teilung gebildeten Abschnitte heißt Grad. Man bezeichnet den Eispunkt mit 0°C [sprich: 0 Grad Celsius] und den Siedepunkt mit 100°C^1).

Über die noch z. T. verwendeten Temperaturangaben nach Fahrenheit und Réaumur und deren Umrechnung siehe: Aufgabe 281 Seite 40.

In der Technik werden Temperaturen auch nach der absoluten Temperaturskala angegeben, bei der lediglich eine Verlegung des Nullpunktes der Celsiuskala um $273,16^{\circ}\text{C}$ unter den Gefrierpunkt des Wassers erfolgt. 15°C entsprechen $(273,16^{\circ}\text{C} + 15^{\circ}\text{C}) = 288,16^{\circ}\text{K}$ [sprich: 288,16 Grad Kelvin]²).

b) Messen der Wärmemenge

Die gesetzlichen Einheiten für die Wärmemengenmessung sind die Kilokalorie (kcal) und die Grammkalorie (cal) sowie die Kilowattstunde (kWh).

Unter einer Kilokalorie (bzw. Grammkalorie) versteht man die Wärmemenge, die 1 kg (bzw. 1 g) Wasser bei Atmosphärendruck um 1°C erwärmt.

Heizwerte von Brennstoffen werden durch die Anzahl von Kilokalorien (kcal) bestimmt, die bei der Verbrennung einer bestimmten Menge des betreffenden Brennstoffes entwickelt werden.

Unter dem Heizwert eines Kraftstoffes versteht man die Wärmemenge in kcal, die 1 kg eines festen oder flüssigen oder 1 m^3 eines gasförmigen Kraftstoffes bei vollständiger Verbrennung unter unveränderlichem Druck entwickelt.

Die in der Elektrotechnik verwendete Einheit der Kilowattstunde entspricht 860 kcal.

8. Abgeleitete Maßeinheiten (Auswahl)

Die in den vorhergehenden Abschnitten 1 bis 7 behandelten Maßeinheiten sind die Grundeinheiten für die von ihnen abgeleiteten technischen Maßeinheiten, von denen anschließend im Rahmen dieses Buches nur die wichtigsten behandelt werden können.

a) die Spannung

Läßt man ein Gewicht auf eine Fläche bestimmter Größe einwirken, so erhält man eine Spannung, der man die Maßeinheit kg/cm^2 [lies: Kilogramm je Quadratzentimeter] gibt, wenn das Gewicht in Kilogramm und die Fläche in Quadratzentimeter angegeben sind. Die Maßeinheit kann aber bei Zugrundelegung anderer Gewichts- und Flächeneinheiten auch: kg/mm^2 oder t/m^2 oder g/cm^2 usw. sein.

¹) Anders Celsius, 1701 bis 1744 in Upsala, schwedischer Stern- und Naturforscher.

²) Lord Kelvin, englischer Physiker, 1824 bis 1907.

In der Festigkeitslehre werden verwendet:

Zug-, Druck-, Biege-, Verdrehungs- und Abscherspannungen. Die ersten drei Spannungen, bei denen die Krafrichtung senkrecht zur beanspruchten Fläche liegt, nennt man Normalspannungen. Die beiden letzten Spannungen (Verdrehungs- und Abscherspannung) werden durch eine Kraft hervorgerufen, deren Richtung mit der Lage der beanspruchten Fläche zusammenfällt. Sie heißen Tangential- oder Schubspannungen.

Als Einheit für die Größe der Dampfspannung wird die Atmosphäre (at oder Atm) gewählt. Es entspricht

1 Atm (= 1 physikalische Atmosphäre)
dem Druck von 1,033 kg auf 1 cm² Fläche = 760 Torr¹⁾,
1 at (= 1 metrische oder technische Atmosphäre)
dem Druck von 1 kg auf 1 cm² Fläche = 735,56 Torr.

Umrechnung: 1 at = 0,9678 Atm
1 Atm = 1,0333 at.

Die Maßeinheit einer Spannung in kg/cm² haben auch die in der Festigkeitslehre verwendeten Elastizitäts- und Schubzahlen. Für Elastizitätszahl sagt man auch Elastizitätsmodul oder Dehnsteife. Für Schubzahl sagt man auch Schubmodul oder Schubsteife. Der Kehrwert dieser Zahlen hat die Maßeinheit: $\frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}$. Man nennt den Kehrwert des Elastizitätsmoduls: Dehnzahl oder Spanndehe. Der Kehrwert des Schubmoduls heißt: Schubzahl oder Spannschiebe. Bei der üblichen Markenbezeichnung von Stahl findet man die Angaben über seine Mindestzugfestigkeit.

Die normmäßige Markenbezeichnung für Stahl ist in DIN 17006 festgelegt. Es wird zum Beispiel ein Stahl mit 34 kg/mm² Zugfestigkeit mit St 34 [sprich: St vierunddreißig] bezeichnet. Die Buchstaben (St) geben die Werkstoffart, die Zifferngruppe (34) im allgemeinen die Mindestzugfestigkeit an.

b) Das Einheitsgewicht oder die Wichte

(früher: Spezifisches Gewicht)

Unter der Wichte eines Körpers versteht man die Zahl, die angibt, wieviel Gramm 1 cm³ oder wieviel Kilogramm 1 dm³ oder wieviel Tonnen 1 m³ des Körpers wiegt. Die Dimension des Einheitsgewichtes (Wichte) ist folgende: g/cm³ [lies: Gramm je Kubikzentimeter] oder kg/dm³ oder t/m³.

Über die Größe der Wichte für die verschiedenen festen Körper sowie für Flüssigkeiten und Gase geben einschlägige Tabellen Auskunft. In der

¹⁾ 1 Torr ist der Druck von 1 mm QS (Quecksilbersäule).

1 Torr = 1,33322 mb (Millibar), 760 Torr = 1013,3 mb (Millibar).

Die Bezeichnung Torr ist zu Ehren des Physikers Evangeliste Torricelli (1608 bis 1647), eines Schülers Galileis, gewählt.

Technik wird die Wichte zur Gewichtsbestimmung eines Körpers benutzt. Man erhält das Gewicht in Kilogramm, wenn man das in dm^3 bestimmte Volumen mit der Wichte multipliziert.

Der Kehrwert (reziproke Wert) der Wichte ist das spezifische Volumen. Es gibt an, wieviel Kubikmeter Raum das Gewicht von 1 Tonne einnimmt. Seine Maßeinheit ist: m^3/t oder dm^3/kg oder cm^3/g .

e) Kräftepaare und Momente

2 gleichgroße parallel, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte, deren Größe man in der Technik in Kilogramm mißt, greifen an einem Körper an und versuchen, ihn zu drehen. Es sind Bestrebungen im Gange, zum Unterschied von Masse und Gewicht das Kilogramm nur noch als Masseneinheit anzuwenden und als Gewichtseinheit das Kilopond (kp) einzuführen.

1 kp = 1000 p (Pond) von Pondus lat. = Last.

Man nennt 2 derartige Kräfte ein Kräftepaar. Die Größe eines Kräftepaars hängt von dem in Meter gemessenen Abstand der Kräfte und von der in Kilogramm gemessenen Größe der einen der beiden gleichgroßen Kräfte ab.

Man mißt ein Kräftepaar, indem man den Kraftabstand und die Kraftgröße bestimmt und beide miteinander multipliziert. Das Produkt von Meter mal Kilogramm nennt man Meterkilogramm, und man schreibt diese Maßeinheit: mkg.

Dieselbe Maßeinheit (Produkt von Länge \times Kraft) haben die in der Technik verwendeten Momente. Man unterscheidet zwischen Biegemomenten und Drehmomenten.

Ein an seinem einen Ende fest eingespannter Stab von einer bestimmten Anzahl Zentimeter Länge wird an seinem anderen Ende durch eine Kraft von einer bestimmten Anzahl Kilogramm durchgebogen. Die hervorgerufene Wirkung heißt Biegemoment. Seine Größe bestimmt man durch das Produkt aus der Stablänge in Zentimeter und der Kraftgröße in Kilogramm. Die Maßeinheit des Biegemomentes ist also $\text{cm} \cdot \text{kg}$ [sprich: Zentimeterkilogramm].

Greift an einem um einen festen Punkt drehbaren Körper in einem gewissen Abstände eine bestimmte Kraft an, so nennt man die hervorgerufene Drehwirkung ein Drehmoment. Seine Größe hängt von der Kraftgröße in Kilogramm und dem in Meter oder Zentimeter gemessenen Abstände ab. Die Maßeinheit des Drehmomentes ist also ebenfalls: cmkg oder mkg.

d) Geschwindigkeit und Beschleunigung

Unter der Geschwindigkeit eines sich fortbewegenden Körpers versteht man den in einer bestimmten Zeit zurückgelegten Weg. Sie wird durch den Quotienten aus Weg und Zeit gemessen.

Also: Geschwindigkeit = Weg : Zeit.

Die in der Technik verwendeten Geschwindigkeitseinheiten sind der in 1 s zurückgelegte Weg in Meter, also $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; oder der in 1 h zurückgelegte Weg in Kilometer, also $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ist die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gegeben, so erhält man seine Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, indem man die gegebene Geschwindigkeit durch 3,6 teilt. Zur Begründung hierfür folgendes

Beispiel:

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \cdot 1000 \frac{\text{m}}{\text{h}}; \text{ denn } 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}.$$

Da 1 h = 3600 s ist, ergibt sich für

$$72 \cdot 1000 \frac{\text{m}}{\text{h}} = \frac{72 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{72 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die in manchen technischen Arbeiten verwendeten Bezeichnungen:

$$1 \text{ „Benz“} = 1 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ sowie } 1 \text{ „cel“} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

haben sich bisher noch nicht eingebürgert.

In der Schifffahrt wird als Geschwindigkeitseinheit gebraucht:

$$1 \text{ Knoten} = 1 \frac{\text{Seemeile}}{\text{h}} = \frac{1852 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 51 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Nimmt die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers während einer bestimmten Zeit zu oder ab, so erfährt der Körper eine Beschleunigung bzw. Verzögerung.

Die Beschleunigung wird aus dem Quotienten der Geschwindigkeit durch die Zeit berechnet, wobei allerdings die Zeitdauer möglichst klein zu wählen ist. Hieraus ergibt sich die Maßeinheit der Beschleunigung zu:

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Man schreibt auch $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Für die Beschleunigung, die in 1 s eine Geschwindigkeitszunahme von 1 cm/s hervorruft, die also 1 cm/s² beträgt, ist die Bezeichnung 1 „gal“¹⁾ vorgeschlagen. Der 1000. Teil dieser Einheit ist 1 „Milligal“.

Die Beschleunigung, die ein frei herabfallender Körper durch die Anziehungskraft der Erde erfährt, beträgt 9,81 m/s².

¹⁾ Zu Ehren des italienischen Physikers Galileo Galilei (1564 bis 1642). Von ihm sind die Gesetze des freien Falls erkannt.

e) Masse

Der in der Technik verwendete Begriff der Masse eines Körpers wird nach dem sogenannten „dynamischen Grundgesetz“ als der Quotient des Körpergewichts in Kilogramm geteilt durch die Erdbeschleunigung $9,81 \text{ m s}^{-2}$ definiert.

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht in kg}}{\text{Erdbeschleunigung in m/s}^2}.$$

Um die Maßeinheit der Masse aus dieser Gleichung zu ermitteln, hat man kg durch m/s^2 zu dividieren. Man rechnet mit den Einheiten m, kg, s^2 so, als ob es sich um bestimmte Zahlen handele.

$$\text{Man erhält } \frac{\text{kg}}{\text{m/s}^2} = \text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{m} = \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}} = \text{kg s}^2 \cdot \text{m}^{-1}.$$

f) Arbeit und Leistung

Hebt man ein Gewicht von 5 kg auf eine Höhe von 1,5 m, so verrichtet man die mechanische Arbeit von $5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ mkg}$ [lies: Meterkilogramm]. Die Maßeinheit der Arbeit ist das Produkt aus Meter \times Kilogramm. Sie ist die gleiche wie die eines Momentes oder Kräftepaares nach Abschnitt c. Aus dem soeben angeführten Beispiel kann man ersehen, daß dieselbe Arbeit verrichtet wird, wenn man 1,5 kg um 5 m hebt, nämlich: $1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ mkg}$.

In beiden Fällen ist es gleich, in welcher Zeit die Arbeit von 7,5 mkg ausgeführt wird. Berücksichtigt man die Dauer der Arbeitszeit, so kommt man auf den Begriff der Leistung. Die Leistung ist um so größer, je schneller die Arbeit verrichtet wird; d. h. je kürzer (kleiner) die Arbeitszeit bei derselben Arbeitsmenge ist. Wird dieselbe Arbeit in längerer Zeit ausgeführt, so ist die Leistung kleiner. Diesen Tatsachen wird die folgende Gleichung gerecht:

$$\text{Leistung} = \text{Arbeit} : \text{Zeit}.$$

Wird die Arbeit in mkg und die Zeit in s gemessen, so ist die Maßeinheit der Leistung $\frac{\text{mkg}}{\text{s}}$ [lies: Meterkilogramm je Sekunde].

Die Leistung von 75 Meterkilogramm je Sekunde nennt man eine Pferdestärke = 1 PS = $75 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$.

Die englische Leistungseinheit ist 1 HP (horse power = Pferdestärke). Sie beträgt 1 HP = $76 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$.

Die in der Elektrotechnik verwendete Leistung ist 1 kW (= 1 Kilowatt) = 1000 W (= 1000 Watt).

Es betragen:

$$\begin{aligned} 736 \text{ W} &= 0,736 \text{ kW} = 1 \text{ PS} \text{ oder} \\ 1000 \text{ W} &= 1 \text{ kW} = 1,36 \text{ PS.} \end{aligned}$$

Der in der Elektrotechnik verwendete Begriff der Kilowattstunde kWh ist eine Arbeit, die 367000 mkg beträgt. Auf diese Zahl kommt man durch folgende Umrechnung:

$$1 \text{ kW} = 1,36 \text{ PS} = 1,36 \cdot 75 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} = 102 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

$$1 \text{ kWh} = 102 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 102 \cdot 3600 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \cdot \text{s} = 367000 \text{ mkg.}$$

Aufgaben:

- 439) Welcher absoluten Temperatur in ° K entsprechen 158° C ?
- 440) Wieviel °C sind 260° K ?
- 441) Wieviel kcal sind zur Erwärmung von 1,2 m³ Wasser von 10° C auf 35° C erforderlich ?
- 442) Wieviel kcal enthalten 8,5 l Dieselöl (Wichte 0,88) bei einem Heizwert von 10500 $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$?
Anleitung: Zuerst das Gewicht in Kilogramm berechnen! Vergleiche Seite 61 unter 7b: Erklärung des Heizwertes!
- 443) An einem Rundstahl von 1,33 cm² Querschnitt hängen 2 t und beanspruchen den Stahlquerschnitt auf Zug.
Wie groß ist die auftretende Zugspannung in kg/cm² ?
- 444) Welche Zugfestigkeit in kg je cm² hat der für höher beanspruchte Triebwerkteile verwendete Stahl St 50 ?
Anleitung: Vergleiche S. 61 unter 8a.
- 445) Die Wichte von Kork beträgt 0,2. Wie groß ist das spez. Volumen ?
- 446) Die Wichte der Luft ist ungefähr doppelt so groß wie die des Leuchtgases. Wie groß ist das spez. Volumen der Luft im Vergleich zu dem des Leuchtgases ?
- 447) Wieviel wiegen 25 l Benzol (Wichte 0,88) ?
- 448) An dem Lenkrade eines Kraftwagens (40 cm Durchmesser) üben die linke und die rechte Hand des Wagenführers eine Kraft von je 7,5 kg aus. Die beiden Kräfte wirken in paralleler Richtung; sie sind gleichgroß, aber entgegengesetzt gerichtet.
Wie groß ist dieses Kräftepaar in cmkg ?
- 449) An dem freien Ende eines einseitig eingespannten Stabes von 1½ m Länge greift eine Kraft von 40 kg an.
Wie groß ist das auftretende Biegemoment in cmkg ?
- 450) An einer Kurbel mit der Kurbelarmlänge 400 mm greift die Handkraft von 25 kg an.
Welches Drehmoment in mkg wird hierdurch ausgeübt ?

- 451) Wie groß ist das Drehmoment eines Motors in mkg, wenn bei einem Riemenscheibendurchmesser von 250 mm eine Zugkraft von 60 kg gemessen wird?
Anleitung: Drehmoment (mkg)
= Riemenscheibendurchmesser (m) \times Zugkraft (kg).
- 452) Die Geschwindigkeit eines Kraftwagens beträgt 54 km/h. Wieviel m/s sind dies?
- 453) Wieviel Kilometer legt ein Radfahrer, der mit 4 m/s fährt, in einer Stunde zurück?
- 454) Die Schnittgeschwindigkeit beim Hobeln (Schruppen) mit Schnellstahl beträgt 9,6 m/min. Wieviel Sekunden beträgt die Schnittzeit für einen Arbeitshub von 48 cm Länge?
- 455) Der Umfang einer Schleifscheibe beträgt 1250 mm.
Wie groß ist ihre minutliche Drehzahl bei einer Umfangsgeschwindigkeit (= Geschwindigkeit eines Punktes am Umfang) von 25 m/s?
- 456) Ein Segelschiff hat 9 m/s Geschwindigkeit. Wieviel Knoten sind das?
- 457) Die Geschwindigkeit eines Schnelldampfers beträgt 30 Knoten.
Wieviel Kilometer legt er in einer Stunde zurück?
- 458) Die Schallgeschwindigkeit beträgt 333 m/s, die Lichtgeschwindigkeit 300 000 km/s.
Wievielmal so groß ist die Lichtgeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit?
- 459) Wie groß ist die Geschwindigkeit in km/h der Umdrehung der Erde am Äquator?
Anleitung: Äquatorumfang = 40 000 km;
Drehzahl der Erde = 1 U/Tag.
- 460) Wie groß ist die Masse eines 29,43 kg schweren Körpers?
Es ist die in der Technik übliche Maßeinheit der Masse anzugeben!
- 461) Wie groß ist das Gewicht eines Körpers, der die Masse $7 \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$ hat?
- 462) Ein Kran hebt in 1,2 min eine Last von 20 t um 4680 mm. Wie groß ist
a) die Geschwindigkeit in m/s?
b) die verrichtete Arbeit in mkg?
c) die aufgewendete Leistung in PS und kW?
- 463) Ein elektrischer Generator speist 300 Glühlampen zu je 40 W.
Wie groß ist seine Leistung in a) kW und b) PS?
- 464) Die Leistung einer Pumpe in PS berechnet man, indem man das Produkt aus dem sekundlich geförderten Wassergewicht in Kilogramm mal der Gesamtförderhöhe (Saug- + Druckhöhe) in Meter bildet und durch 75 teilt.
Wie groß ist die Leistung einer Kolbenpumpe, die in 1 min 21 m³ Wasser aus 5,3 m Tiefe ansaugt und auf 39,7 m drückt?

9. Elektrotechnische Maßeinheiten

α) Elektrische Stromstärke. Die Einheit der Stromstärke ist 1 Ampere¹⁾. Es ist die Stromstärke, die in 1 Sekunde aus einer wässrigen Lösung von Silbernitrat 1,118 mg chemisch reines Silber ausscheidet.

Kurzzeichen: 1 A = 1 Ampere

$$1 \text{ mA} = \frac{1}{1000} \text{ A} = 1 \text{ Milliampere.}$$

β) Elektrischer Widerstand. Die Einheit des Widerstandes ist 1 Ohm²⁾. Es ist der Widerstand einer Quecksilbersäule bei 0° C von 1 mm² Querschnitt und 106,3 cm Länge.

Kurzzeichen: 1 Ω = 1 Ohm

$$1 \text{ k}\Omega = 1 \text{ Kiloohm} = 1000 \Omega$$

$$1 \text{ M}\Omega = 1 \text{ Megohm} = 1000 \text{ k}\Omega = 1000000 \Omega.$$

γ) Elektrischer Leitwert. Die Einheit des elektrischen Leitwertes ist 1 Siemens³⁾. Man versteht hierunter den Kehrwert des elektrischen Widerstandes.

$$\text{Kurzzeichen: } 1 \text{ S} = 1 \text{ Siemens} = \frac{1}{1 \Omega}.$$

δ) Spezifischer Widerstand ist eine Werkstoffkonstante, die von dem Stoff des elektrischen Leiters und der Temperatur abhängt. Er hat die Dimension: $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$. Der spez. Widerstand ist der Widerstand eines Drahtes von 1 mm² Querschnitt und 1 m Länge.

ε) Leitfähigkeit oder spezifischer Leitwert ist der Kehrwert des spez. Widerstandes. Er hat die Dimension: $\frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$.

ζ) Spannung und elektromotorische Kraft. Die Einheit der elektromotorischen Kraft ist 1 Volt⁴⁾. Es ist die Spannung, die in einem Leiter, dessen Widerstand 1 Ω beträgt, einen Strom von 1 A fließen läßt. Spannung (in V) = Stromstärke (in A) × Widerstand (in Ω).

Kurzzeichen: 1 V = 1 Volt

$$1 \text{ kV} = 1 \text{ Kilovolt} = 1000 \text{ V.}$$

η) Elektrizitätsmenge. Die Einheit ist ein Coulomb⁵⁾ bzw. eine Amperesekunde. Es ist die Elektrizitätsmenge, die bei einer Stromstärke

¹⁾ André Marie Ampère (1775 bis 1836), französischer Physiker und Mathematiker.

²⁾ Georg Simon Ohm (1789 bis 1854), geb. in Erlangen, gest. in München — Universitätsprofessor in München.

³⁾ Werner v. Siemens (1816 bis 1892), geb. in Lenthe bei Hannover, gest. in Berlin.

⁴⁾ Alessandro Volta (1745 bis 1827), italienischer Physiker — Professor der Physik in Como, Pavia und Padua.

⁵⁾ Charles Augustin de Coulomb (1736 bis 1806), französischer Ingenieur.

von 1 A durch den Querschnitt eines Leiters in 1 s fließt. Die Elektrizitätsmenge ist gleich dem Produkt aus Stromstärke in A \times Zeit in s.

Kurzzeichen: 1 C = 1 Coulomb = 1 Amperesekunde
1 Ah = 1 Amperestunde = 3600 C.

ø) Elektrische Leistung: Die Einheit ist ein Watt¹⁾. Es ist die Leistung eines Stromes von 1 A Stärke in einem Leiter, an dessen Enden eine Spannungsdifferenz von 1 V besteht. Bei Gleichstrom mißt man die Leistung aus dem Produkt von Spannung (in V) \times Stromstärke (in A).

Bei Wechselstrom muß darüber hinaus dieses Produkt noch mit dem sogenannten Leistungsfaktor multipliziert werden. Der Leistungsfaktor wird mit $\cos \varphi$ [sprich: Kosinus Fi] bezeichnet. Er ist eine unbenannte Zahl, die kleiner als 1 ist; z. B. $\cos \varphi = 0,7$.

1 Watt = 1 Voltampere bei Glühlichtbelastung (induktionsfrei)
1 Watt = 1 Voltampere $\times \cos \varphi$ bei Motorenbelastung (induktiv).
Kurzzeichen: 1 W = 1 Watt
1 kW = 1 Kilowatt = 1000 W
1 MW = 1 Megawatt = 1000 kW = 1000000 W.

Umrechnungszahlen: 1 PS = 736 W = 0,736 kW = 75 $\frac{\text{mkg}}{\text{s}}$
1 HP = 746 W = 0,746 kW = 76 $\frac{\text{mkg}}{\text{s}}$
1 kW = 1,36 PS = 102 $\frac{\text{mkg}}{\text{s}}$.

υ) Elektrische Arbeit. Die Einheit ist 1 Joule²⁾ [gesprochen: Dschau]. Dies ist die Arbeit von 1 W während 1 Sekunde. 1 Joule = 1 Wattsekunde.

Die Arbeit von 1 W. während 1 Stunde heißt 1 Wattstunde.

„ „ „ 1 kW „ 1 „ „ 1 Kilowattstunde.

Kurzzeichen: 1 J = 1 Joule = 1 Wattsekunde
1 Wh = 1 Wattstunde = 3600 J
1 kWh = 1 Kilowattstunde = 1000 Wh.

κ) Kapazität eines Kondensators. Die Einheit ist ein Farad³⁾. Dies ist die Kapazität eines Kondensators, der durch die Elektrizitätsmenge 1 C auf die Spannung von 1 V geladen wird.

1 Farad = 1 Coulomb: 1 Volt

Kapazität = $\frac{\text{Elektrizitätsmenge in C}}{\text{Elektrom. Kraft in V}}$.

Kurzzeichen: 1 F = 1 Farad
1 μ F = 1 Mikروفarad = $\frac{1}{1000000}$ F.

¹⁾ James Watt (1736 bis 1819), englischer Ingenieur.

²⁾ James Prescott Joule (1818 bis 1889), englischer Physiker. Der Familienname dieses berühmten Elektrotechnikers wird Dschuhl ausgesprochen im Gegensatz zu der Maßbenennung: Dschau.

³⁾ Michael Faraday (1791 bis 1867), englischer Physiker.

λ) Induktivität. Die Einheit ist ein Henry¹⁾. Dies ist die Induktivität einer Strombahn, bei der eine Änderung der Stromstärke in 1 Sekunde um 1 Ampere eine induzierte Spannung von 1 Volt erzeugt.

Kurzzeichen: 1 H = 1 Henry.

μ) Frequenz oder Periodenzahl. Die Einheit ist 1 Hertz²⁾. Unter der Frequenz versteht man die in der Zeiteinheit (= 1 Sekunde) erfolgende Zahl der periodisch wiederkehrenden Einzelzustände des Wechselstromes.

Kurzzeichen: 1 Hz = 1 Hertz

1 kHz = 1000 Hz.

III. Der Dreisatz oder die Regeldetri

Unter dem Dreisatz oder der Regeldetri³⁾ versteht man diejenige Rechnungsart, durch die eine Größe errechnet wird, die von einer anderen Größe mittelbar oder unmittelbar abhängig ist.

Bei der Lösung von Aufgaben mit Hilfe des Dreisatzes stellt man 3 Sätze — daher der Name Dreisatz — auf. Diese 3 Sätze sind der Behauptungssatz, der Folgerungssatz und der Schlußsatz.

Beispiel für diese Rechnungsart:

a) 126 kg Stahl kosten 54 DM. Was kosten 84 kg?

Lösung: 1. Behauptungssatz: 126 kg Stahl kosten 54 DM.

2. Folgerungssatz: 1 kg Stahl kostet $\frac{54}{126}$ DM.

3. Schlußsatz: 84 kg Stahl kosten $\frac{54}{126} \cdot 84$ DM = 36 DM.

Der Behauptungssatz, der aus dem Aufgabentext zu entnehmen ist, wird stets so aufgestellt, daß an seinem Ende die Größe steht, nach der gefragt ist. Hier ist nach dem Preise gefragt. Der Preis muß am Ende des Behauptungssatzes dieser Aufgabe stehen.

Im Folgerungssatz bleibt die Reihenfolge der beiden Größen die gleiche. Man folgt in dem Folgerungssatz von der Vielheit (126 kg) auf die Einheit (1 kg). Wenn 126 kg 54 DM kosten, dann kostet die Einheit den 126. Teil, nämlich $\frac{54}{126}$ DM. Man muß jedoch bei dem Schluß von der Vielheit auf die Einheit darauf achten, ob man es in der Aufgabe mit einem sogenannten geraden Verhältnis, wie hier, oder mit einem umgekehrten

¹⁾ Henry (1797 bis 1878), amerikanischer Physiker.

²⁾ Heinrich Hertz (1857 bis 1894), Professor der Physik in Kiel, Karlsruhe u. Bonn.

³⁾ Regeldetri = regula de tri = Regel von den 3.

Verhältnis, das in dem nachfolgenden Beispiel b) behandelt wird, zu tun hat.

Der dritte aufzustellende Satz, der Schlußsatz, bringt das Ergebnis der Aufgabe, indem man von der Einheit auf die gefragte Vielheit schließt.

Wenn 1 kg nämlich $\frac{54}{126}$ DM kostet, dann kostet die gefragte Gewichtsmenge von 84 kg: $\frac{54 \cdot 84}{126}$ DM = 36 DM. (Bruch zunächst weitgehendst kürzen!)

In kürzerer Form schreibt man die Lösung der Aufgabe zweckmäßig folgendermaßen:

| | kg | DM |
|------------------|-----|---|
| Behauptungssatz: | 126 | 54 |
| Folgerungssatz: | 1 | $\frac{54}{126}$ |
| Schlußsatz: | 84 | $\frac{3 \cdot 12}{\cancel{54} \cdot \cancel{84}} = 36$ DM $\frac{126}{7}$ |

Beispiel für ein umgekehrtes Verhältnis:

b) In welcher Zeit wird eine bestimmte Arbeit von 6 Arbeitern ausgeführt, wenn sie von 13 Arbeitern in 48 Stunden geleistet werden kann?

Lösung: 1. Behauptungssatz: 13 Arbeiter brauchen 48 Stunden.

2. Folgerungssatz: 1 Arbeiter braucht $48 \cdot 13$ Stunden.

3. Schlußsatz: 6 Arbeiter brauchen $\frac{48 \cdot 13}{6} = 104$ Std.

oder einfacher geschrieben

| Zahl der Arbeiter | Zahl der Stunden |
|-------------------|---|
| 13 | 48 |
| 1 | $48 \cdot 13$ |
| 6 | $\frac{8}{6} = 104$ $\frac{48 \cdot 13}{6}$ 1 |

In dieser Aufgabe steigt beim Schluß von der Vielheit auf die Einheit die Zahl der Arbeitsstunden. Wenn 13 Arbeiter eine Arbeit in 48 Stunden erledigen, dann braucht 1 Arbeiter eine 13mal so lange Zeit. Umgekehrt wird beim Schluß von der Einheit auf die Vielheit die Arbeitsstundenzeit für 6 Arbeiter nur den 6. Teil von der Arbeitszeit eines Arbeiters betragen.

In erweiterter Form wird der Dreisatz auch zur Lösung von Aufgaben verwendet, bei denen die Abhängigkeit mehrerer Größen voneinander gegeben ist. Man hat hier mehrmals von einer Vielheit auf die Einheit und umgekehrt zu schließen.

Beispiel:

c) 2 m² Messingblech von 4 mm Dicke wiegen 68 kg. Wieviel wiegen 5 m² Messingblech von 6 mm Dicke?

Lösung:

| Blechdicke in mm | Blechgröße in m ² | Gewicht in kg |
|---------------------|---------------------------------|---|
| 4 | 2 | 68 |
| 1 | 2 | $\frac{68}{4}$ |
| 6 | 2 | $\frac{68 \cdot 6}{4}$ |
| 6 | 1 | $\frac{68 \cdot 6}{4 \cdot 2}$ |
| 6 | 5 | $\frac{17 \cdot 3}{4 \cdot 2} = 255 \text{ kg}$ |

Aufgaben:

- 465) 3 m Doppel-T-Träger I 20 wiegen 78,9 kg.
Wieviel wiegen 5 m von diesem Profil?
- 466) 7 kg Messing (Ms 58) enthalten 4,06 kg Kupfer.
Wieviel Kupfer ist in 20 kg Messing enthalten?
- 467) Die Riemengeschwindigkeit eines Motors, der 300 Umdrehungen in der Minute macht, beträgt 8 m/s.
Wie groß wird die Riemengeschwindigkeit bei 950 U/min?
- 468) Wieviel Gramm Silber werden von dem Strom von 4 A in einer Viertelstunde aus einer wässrigen Silbernitratlösung ausgeschieden?
(Siehe: Elektrotechnische Maßeinheiten Seite 68 unter α .)
- 469) Ein Gleichstrom von 5 A leistet bei 220 V 1,1 kW.
Wie groß ist bei 110 V und 20 A die Leistung?
- 470) Wie groß ist der metallische Gesamtquerschnitt eines Stahlseiles, das aus 6 Litzen mit je 37 Drähten besteht, wenn ein anderes Seil mit 6 Litzen mit je 19 Drähten desselben Querschnittes einen Gesamtquerschnitt von 89,5 mm² hat?
- 471) Ein Wasserbehälter hat 4 Zuleitungsrohre gleichen Querschnittes und wird durch sie in 5 Stunden gefüllt. Die Wassergeschwindigkeit ist in allen Rohren die gleiche.
Wie lange dauert das Füllen des Behälters, wenn 1 Zuleitungsrohr wegen Betriebsschadens ausfällt?

- 472) Bei einer Schnittgeschwindigkeit von 12 m/min mit Werkzeugstahl dauert die Bearbeitung eines Werkstückes 25 min.
Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit des Schnellschnittstahles, der dasselbe Werkstück in 20 min bearbeitet?
- 473) Eine Welle aus St 60 von 1560 mm Länge wird in $3^h 20^m$ mit einer Schnittgeschwindigkeit von 9 m/min abgedreht. Wie lange dauert das Abdrehen einer Welle aus demselben Werkstoff und mit dem gleichen Durchmesser, aber von 1040 mm Länge, wenn die Schnittgeschwindigkeit durch Wahl eines Schnelldrehstahles auf 24 m/min gesteigert worden ist? (Vorschub und Schnittzahl bleiben ungeändert.)
- 474) Bei einer Schnittgeschwindigkeit von 15 m/min und einem Bohrerdurchmesser von 12 mm macht die Bohrspindel 400 U/min.
Wie groß ist ihre Drehzahl bei einem Bohrdurchmesser von 16 mm zu wählen, wenn man mit der Schnittgeschwindigkeit auf den doppelten Wert heraufgehen will?
- 475) 3 m Flachstahl von 20 mm Dicke und 120 mm Breite wiegen 56,52 kg.
Wieviel wiegen 7 m Flachstahl von 10 mm Dicke und 140 mm Breite?
- 476) 2 m² Aluminiumblech von 0,8 mm Dicke wiegen 4,32 kg.
Wieviel wiegen 10 m² Aluminiumblech von 4 mm Dicke?
- 477) 1 m Stahldraht vom Durchmesser 0,4 mm wiegt 1 g.
Wieviel wiegen 50 m Stahldraht vom Durchmesser 0,6 mm?
(Bemerkung: Das Gewicht von Rundmaterial nimmt mit dem Quadrat des Durchmessers zu.)
- 478) Ein Kran hebt in 2,4 min eine Last von 3,6 t um 8,25 m.
In welcher Zeit hebt er bei derselben Leistung eine doppelt so schwere Last um $\frac{1}{3}$ der angegebenen Höhe?
- 479) 2 Schleuderpumpen gleicher Leistung fördern in 5 Stunden 14400 m³ Abwasser. In welcher Zeit wird die doppelte Abwassermenge gefördert, wenn man eine 3. Pumpe gleicher Leistung hinzuschaltet?
- 480) In einem volkseigenen Stahlwerk brauchen 3 Hochöfen gleicher Leistung für die tägliche Erzeugung von 2000 t Roheisen eine Erzmenge von 6600 t. Wieviele Tonnen Erz werden monatlich (30 Tage) benötigt, wenn ein weiterer Hochofen angeblasen wird?
- 481) Durch eine Gasflamme werden 0,75 l Wasser von 20°C in 6 min zum Kochen (100°C) gebracht. In welcher Zeit werden 2 l Wasser durch dieselbe Flamme um 45°C erwärmt?
- 482) Durch 400 kg Kohle wird in 6 Stunden eine Dampfmenge von 5000 kg erzeugt. Wieviel Dampf wird in 9 Stunden durch die doppelte Kohlenmenge erzeugt?
- 483) Bei 8stündiger Arbeitszeit wird eine bestimmte Arbeit von 9 Arbeitern in 15 Tagen vollendet. Wieviel Tage brauchten für dieselbe Arbeit bei 6stündiger Arbeit 12 Arbeiter?

- 484) Ein Kurbelrad mit einem 0,4 m langen Kurbelarm, an dem eine Kraft von 20 kg wirkt, macht 100 U/min. Die Leistung beträgt 1,12 PS. Wieviel PS werden geleistet, wenn bei 150 U/min 30 kg an dem um 10 cm kürzeren Kurbelarm angreifen?

IV. Die Prozentrechnung

Unter 1% [lies: 1 Prozent] oder 1 v. H. [lies: 1 vom Hundert] versteht man den hundertsten Teil einer bestimmten Anzahl. Die Bezeichnung 1 v. H. soll in der Technik möglichst nicht mehr verwendet werden. Das Wort Prozent, das von den lateinischen Wörtern pro centum abgeleitet ist, heißt in seiner Ursprungsbedeutung: „Von Hundert“. 1% ist gleichbedeutend mit $\frac{1}{100}$ oder 0,01.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Es entspricht 3% dem $\frac{3}{100}$ Teil einer bestimmten Menge oder anders betrachtet: Auf 100 Teile entfallen 3 Teile.

Um den Zahlenwert für 3% von 140 Stück zu bestimmen, hat man $\frac{3}{100}$ von 140 zu nehmen oder man multipliziert 140 mit 0,03. Man erhält: $140 \cdot 0,03 = 4,2$. Die Erklärung für diese Rechenvorschrift ergibt sich aus dem Dreisatz:

Auf 100 Stück entfallen 3 Stück,
 „ 1 „ entfällt $\frac{3}{100}$ Stück,
 „ 140 „ entfallen $\frac{3}{100} \cdot 140 = 4,2$ Stück.

Die Zahl 4,2 heißt der Prozent- oder Hundertwert.

„ „ 140 „ „ Grundwert.

„ „ 3 „ „ Prozent- oder Hundertsatz.

3% von 140 Stück sind 4,2 Stück.

Der Prozentsatz vom Grundwert ist der Prozentwert.

Die 3 Größen: Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz stehen, wie sich aus dem soeben behandelten Zahlenbeispiel ergibt, in folgender Beziehung zueinander:

$$\text{Prozentwert} = \frac{\text{Prozentsatz}}{100} \times \text{Grundwert.}$$

Von diesen 3 Größen können zwei gegeben sein, während die dritte gesucht wird. Es sind also folgende 3 Aufgabenarten möglich:

1. Gegeben: Prozentsatz und Grundwert. — Gesucht: Prozentwert.
2. „ Grundwert und Prozentwert. — „ Prozentsatz.
3. „ Prozentsatz und Prozentwert. — „ Grundwert.

Zu jeder dieser 3 Aufgabenarten einige technische Beispiele sowie Aufgaben!

1. Gesucht der Prozentwert

Beispiele:

a) Eine unbearbeitete Welle wiegt 12 kg. Der Spanverlust beim Abdrehen beträgt 25%. Wieviel Kilogramm Späne sind das?

Gegeben ist: Grundwert = 12 kg
Prozentsatz = 25%.

Gesucht ist der Prozentwert = Spanverlust in Kilogramm.

25% ist gleichbedeutend dem Bruch $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Man hat von 12 kg den vierten Teil zu nehmen oder man hat 12 kg mit $\frac{1}{4}$ zu multiplizieren. Man erhält 3 kg.

Ergebnis: 25% von 12 kg sind 3 kg.
Der Spanverlust beträgt 3 kg.

Folgerung: Die bearbeitete Welle wiegt 9 kg. Dies sind 75% des Gewichtes der unbearbeiteten Welle.

b) Die Bearbeitungszeit eines Teiles, die bisher 4,5 h betrug, wird durch eine rationelle Fertigung (Einführung von Vorrichtungen und zweckmäßigen Werkzeugen) um 20% gesenkt. Wie groß ist der Gewinn an Bearbeitungszeit?

Gegeben ist: Grundwert = 4,5 h.
Prozentsatz = 20%.

Gesucht ist der Prozentwert = Gewinn an Bearbeitungszeit. 20% sind $\frac{20}{100} = 0,2$. Man hat den Grundwert 4,5 mit dem 100. Teil des Prozentsatzes, $\frac{20}{100} = 0,2$, zu multiplizieren. Also: $4,5^{(h)} \cdot 0,2 = 0,9^{(h)} = 54^{(\text{min})}$.

Ergebnis: Der Gewinn an Bearbeitungszeit beträgt 54 min.

c) Die Rotgußsorte Rg 10 (= Maschinenbronze) hat folgende prozentuale Zusammensetzung:

86% Cu (= Kupfer) 10% Sn (= Zinn) 4% Zn (= Zink).

Wieviel Kilogramm dieser Legierungsmetalle sind in 20 kg Maschinenbronze enthalten?

Mit Hilfe des Dreisatzes findet man:

In 100 kg Bronze sind 86 kg Cu enthalten;

„ 20 kg „ „ $\frac{86}{100} \cdot 20$ kg Cu = 17,2 kg Cu enthalten.

Oder einfacher: Um den Cu-Gehalt (= Prozentwert) von 20 kg Bronze (= Grundwert) zu erhalten, multipliziert man den Grundwert mit $\frac{86}{100} = 0,86$; also: $0,86 \cdot 20 = 17,2$. Ebenso bestimmt man den Kilogrammgehalt an Sn und Zn; nämlich:

Zinngehalt: $0,1 \cdot 20 = 2$ kg Sn

Zinkgehalt: $0,04 \cdot 20 = 0,8$ kg Zn.

Ergebnis: In 20 kg Maschinenbronze Rg 10 sind enthalten:

17,2 kg Cu; 2 kg Sn; 0,8 kg Zn.

Probe: Die Summe der Gewichte der einzelnen Legierungsmetalle: $17,2 + 2 + 0,8$ ergibt das Gesamtgewicht: 20 kg.

2. Gesucht der Prozentsatz

Es ist immer: $\text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} \times 100$.
in %

Beispiele:

a) In 75 g Kochsalzlösung sind 3,75 g Kochsalz (chemische Formel: NaCl = Natriumchlorid) enthalten. Wieviel prozentig ist diese Kochsalzlösung?

Erklärung: Eine 10%ige Kochsalzlösung enthält in 100 g Lösung 10 g NaCl.

Lösung: 75 g entsprechen 100%

3,75 g „ $\frac{100 \cdot 3,75}{75} = 5$ %.

Ergebnis: Die gegebene Kochsalzlösung ist 5%ig.

b) Eine Zugstange von 2,5 m Länge hat sich unter der Einwirkung einer Zugkraft um 5 mm verlängert. Wie groß ist die Dehnung in %?

In diesem Beispiel entspricht die gesuchte Dehnung dem Prozentsatz.

Die Ursprungslänge 2,5 m entspricht dem Grundwert.

Die Verlängerung 5 mm entspricht dem Prozentwert.

Grundwert und Prozentwert müssen in derselben Längeneinheit, z. B. Millimeter, eingesetzt werden.

Es gilt die Beziehung: $\text{Dehnung} = \frac{\text{Verlängerung in mm}}{\text{Ursprungslänge in mm}} \times 100$.
in %

Die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt, erhält man:

$$\text{Dehnung} = \frac{5}{2500} \cdot 100 = 0,2\%.$$

Ergebnis: Die Dehnung beträgt 0,2%.

c) Vorbemerkung: Die Nutzleistung (oder effektive Leistung) einer Maschine ist stets kleiner als die der Maschine zugeführte Leistung (oder indizierte Leistung). In jeder Maschine treten Verluste auf. Den Quotienten: $\frac{\text{Effektive Leistung}}{\text{Indizierte Leistung}}$ nennt man den Wirkungsgrad. Der Wirkungsgrad ist eine Zahl, die zwischen 0 und 1 liegen muß; z. B. 0,93 oder 0,8 u. ä. Der 100fache Wert dieser Zahl ist der in Prozenten angegebene Wirkungsgrad, z. B. 93% oder 80% u. ä.

Der Wirkungsgrad einer Maschine gibt an, wieviel Prozent die effektive Leistung von der indizierten Leistung beträgt.

Zusammenfassung:

Es gibt 2 Möglichkeiten, den Wirkungsgrad zahlenmäßig auszudrücken:

1. Sagt man: „Der Wirkungsgrad beträgt z. B. 0,85“, so heißt dies:
Die Nutzleistung ist 0,85mal so groß wie die zugeführte Leistung;
also: Nutzleistung = 0,85 · indizierte Leistung.
2. Sagt man: „Der Wirkungsgrad beträgt 85%“, so heißt dies:
Die Nutzleistung beträgt 85% von der zugeführten Leistung;
also: Nutzleistung = $\frac{85}{100}$ · indizierte Leistung.

Nach der vorstehenden Gegenüberstellung ist es gleich, ob man sagt: „Der Wirkungsgrad beträgt 0,85“, oder „Der Wirkungsgrad beträgt 85%“.

Beide Aussagen drücken ein und dasselbe Größenverhältnis der effektiven zur indizierten Leistung — allerdings durch eine andere Form — aus.

Zahlenbeispiel:

Die indizierte Leistung einer elektrischen Gleichstrommaschine beträgt 27 PS. Es werden von ihr 17,5 kW erzeugt. Wie groß ist ihr Wirkungsgrad?

Für die Bestimmung des Wirkungsgrades müssen sowohl die indizierte Leistung von 27 PS als auch die effektive Leistung von 17,5 kW in derselben Maßeinheit, also in PS oder in kW, angegeben sein. Da 1 PS = 0,736 kW ist, so hat man für 27 PS einzusetzen: $27 \cdot 0,736 = 19,87$ kW.

Mittels Dreisatz rechnet man:

$$\begin{array}{l} 19,87 \text{ kW sind } 100\% \\ 17,5 \text{ kW } \quad \text{„} \quad \frac{17,5 \cdot 100}{19,87} = 88\%. \end{array}$$

Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn man den oben angegebenen Quotienten: $\frac{\text{Effektive Leistung}}{\text{Indizierte Leistung}}$ ausrechnet: $\frac{17,5}{19,87} = 0,88 = 88\%$.

Ergebnis: Der Wirkungsgrad beträgt 88%.

3. Gesucht der Grundwert

$$\text{Es ist: Grundwert} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz}} \times 100.$$

Beispiele:

a) Bei der Fertigung eines Massenartikels sind 46 Stück Ausschuß. Diese Stückzahl macht 2,3% von der Gesamtzahl der gefertigten Teile aus. Wieviel Stück wurden im ganzen gefertigt?

Nach dem Dreisatz ergibt sich:

$$2,3\% \text{ sind } 46 \text{ Stück}$$

$$100\% \text{ ,, } \frac{46 \cdot 100}{2,3} = 2000 \text{ Stück.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Prozentwert ist } 46 \\ \text{Prozentsatz ist } 2,3 \\ \text{Grundwert ist } 2000 \end{array} \right\} \text{ Also: } 2000 = \frac{46}{2,3} \cdot 100.$$

Ergebnis: Es wurden insgesamt 2000 Stück gefertigt.

b) Ein Aktivist braucht zur Herstellung eines Werkstückes 2,5 min weniger als die Norm angibt. Dies bedeutet eine Zeitersparnis von 20%. Wieviel Minuten beträgt die wirkliche Arbeitszeit?

$$\text{Prozentsatz: } 20\%$$

$$\text{Prozentwert: } 2,5 \text{ min}$$

$$\text{Grundwert: Norm-Zeit.}$$

$$\text{Wirkliche Arbeitszeit} = \text{Norm-Zeit} - \text{Zeitersparnis.}$$

$$\text{Also: Norm-Zeit} = \frac{2,5}{20} \cdot 100 = 12,5 \text{ min.}$$

$$\text{Ergebnis: Wirkliche Arbeitszeit} = 12,5 - 2,5 = 10 \text{ min.}$$

c) Für die Kostenermittlung wird der Unkostenzuschlag mit 150% des Lohnes angesetzt. Er beträgt bei der Fertigung einer bestimmten Stückzahl von Sechskantschrauben: 12,60 DM. Wie hoch ist der Arbeitslohn?

$$\text{Dreisatz: } 150\% \text{ sind } 12,60 \text{ DM}$$

$$100\% \text{ ,, } \frac{12,60}{150} \cdot 100 = 8,40 \text{ DM.}$$

$$\text{Ergebnis: Der Arbeitslohn beträgt } 8,40 \text{ DM.}$$

Vermischte Aufgaben zur Prozentrechnung:

485) Die Abzüge vom Wochenlohn eines Arbeiters betragen 5,40 DM. Dies sind 12% vom Bruttolohn. Wie hoch ist dieser?

485a) In einem Hallischen Wahlbezirk waren zur Volksbefragung am 3. 6. 51 insgesamt 1100 Personen in den Wählerlisten eingetragen. Am 3. 6. genügten 94%, am 4. 6. 3%, am 5. 6. 2% ihrer Wahlpflicht. Wieviele Personen haben an jedem der 3 Tage gewählt und wieviele haben ihrer Wahlpflicht nicht genügt?

486) Für eine durch Riemen angetriebene Maschine ist die Einhaltung der minutlichen Umdrehungszahl von 450 U/min erforderlich. Um den auftretenden Riemenschlupf, durch den die Drehzahl um 2,5%

absinken würde, auszugleichen, führt man den Durchmesser der treibenden Scheibe, der mit 180 mm festgelegt war, um 2,5% größer aus.

a) Auf welche Drehzahl würde bei 180 mm Durchmesser die Drehzahl infolge Riemenschlupf absinken?

b) Wie groß führt man zum Ausgleich des Schlupfes die treibende Scheibe im Durchmesser aus?

487) Für das Jahr 1955 ist die Zahl der Beschäftigten in der Volkswirtschaft der DDR auf 7,6 Millionen festgesetzt. Dies entspricht einer Erhöhung der Gesamtzahl der Beschäftigten auf 113,3%. Um wieviel Personen erhöht sich die Beschäftigtenzahl in den nächsten 5 Jahren?

488) Lötzinn SnL 40 DIN 1707 besteht aus 40% Sn und 60% Pb.

a) Wieviel kg Lötzinn SnL 40 lassen sich aus 12 kg Sn herstellen?

b) Wieviel Blei ist erforderlich?

489) Unter der relativen Feuchtigkeit der Luft versteht man das Verhältnis ihrer tatsächlichen¹⁾ zur größtmöglichen Feuchtigkeit; also:

Relative Feuchtigkeit = $\frac{\text{Tatsächliche Feuchtigkeit}}{\text{Größtmögliche Feuchtigkeit}}$. Wie groß ist die relative Feuchtigkeit der Luft in %, wenn die tatsächliche Feuchtigkeit 0,0148 und die größtmögliche Feuchtigkeit 0,0173 beträgt?

490) Unter dem Güteverhältnis oder Gütegrad einer Dampfkesseleinietung versteht man den Wert:

$$\frac{\text{Teilung (in mm)} - \text{Nietdurchmesser (in mm)}}{\text{Teilung (in mm)}} \cdot 100\%$$

Das Güteverhältnis gibt an, wieviel Prozent die durch den Nietquerschnitt geschwächte Nietteilung von der Teilung beträgt. Für eine dreireihige Doppel-Laschennietung ist die Nietteilung mit 170 mm und der Nietdurchmesser mit 25 mm bestimmt.

Wie groß ist der Gütegrad der Vernietung?

491) Ein Kubikmeter frisches Kiefernholz wiegt 900 kg. Nach der künstlichen Holztrocknung ist das Gewicht auf 500 kg gesunken.

Wieviel Prozent beträgt der Gewichtsverlust in bezug auf das Ursprungsgewicht?

492) Die Luft in einem Zimmer (4 m lang, 3 m breit, 2³/₄ m hoch) enthält 6,93 m³ Sauerstoff und 25,74 m³ Stickstoff.

Wieviel Prozent dieser beiden Elemente enthält die Luft? Wieviel Prozent beträgt die restliche Luftmenge, die aus Kohlendioxyd, Schwefeldioxyd, Edelgasen und Staub besteht?

493) Der Stundenlohn der Arbeiter in volkseigenen und gleichgestellten Betrieben des Schwermaschinenbaus wird in der Lohngruppe 7 auf Grund der Verordnung über die Verbesserung der Entlohnung der

¹⁾ Die tatsächliche (oder absolute) Feuchtigkeit gibt das Gewicht des in 1 m³ Luft enthaltenen Wasserdampfes in kg an; in der obigen Aufgabe sind also 14,8 g Wasserdampf in 1 m³ Luft enthalten.

Arbeiter und Angestellten seit 1. 9. 50 von 1,30 DM auf 1,56 DM erhöht. Wieviel Prozent beträgt diese Lohnerhöhung?

494) Im Fünfjahrplan der DDR ist für die chemische Industrie folgender Produktionsstand im Jahre 1955 vorgesehen:

| | Produktionsstand 1955 | in % gegenüber 1950 |
|--|--------------------------|------------------------|
| 1. Schwefelsäure [SO ₃] | 400 000 t | 156 |
| 2. Ätznatron [NaOH] | 250 000 t | 170 |
| 3. Soda [Na ₂ CO ₃] | 380 000 t | 372 |
| 4. Stickstoffdünger | 235 000 t | 113 |
| 5. Phosphordünger | 93 000 t | 191 |
| 6. Synthetischer Kautschuk | 60 000 t | 159 |
| 7. Seife | 100 000 t | 277 |
| 8. Benzin | 780 000 t | 175 |
| 9. Dieseltreibstoff | 475 000 t | 119 |
| 10. Kraftfahrzeugdecken | 900 000 Stück | 200 |

Wie hoch war der Produktionsstand 1950?

Die Promillerechnung

Die in den Beispielen und Aufgaben behandelten Prozentrechnungen hatten als Grundlage ihrer Rechnung die Zahl 100.

Geht man von der Zahl 1000 aus, so kann man derartige Aufgaben ganz entsprechend durchführen. Der 1000. Teil einer bestimmten Größe heißt 1 Promille (lateinisch: von 1000), und man schreibt dafür 1‰ [lies: 1 Promille].

Die Promillerechnung wird in der Technik wenig angewendet. Sie ist am Platze, wenn man es mit kleinen Prozentsätzen zu tun hat, die man zweckmäßig als Promillesätze umrechnet.

Beispiele:

a) 1 g ist der 1000. Teil eines Kilogramms; d. h.

1 g ist 1‰ von einem Kilogramm.

b) Wieviel μ sind 7‰ von 80 mm?

$$1\text{‰} \text{ von } 80 \text{ mm sind } \frac{1}{1000} \cdot 80 = 0,08 \text{ mm} = 80 \mu$$

$$7\text{‰} \text{ von } 80 \text{ mm sind } 7 \cdot 80 = 560 \mu.$$

c) Wieviel ‰ sind $0,3\%$?

$$0,3\% = \frac{0,3}{100} = \frac{3}{1000} = 3\text{‰}.$$

Oder umgekehrt kann man mit Prozenten statt mit Promille rechnen, indem man den 10. Teil des Promillesatzes als Prozentsatz einführt; z. B.

$$8\text{‰} = \frac{8}{1000} = \frac{0,8}{100} = 0,8\%.$$

V. Die Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist die Anwendung der Prozentrechnung im Geldverkehr. Ihre Aufgabe besteht in der Berechnung der Zinsen eines Kapitals. Unter Zinsen versteht man die in Geld gewährte Vergütung für die Nutzung eines Kapitals. Der Gläubiger (= Geldgeber) verliert für die Zeit, während der er sein Geld an einen anderen verliehen hat, die Möglichkeit, über die entliehenen Geldsummen zu verfügen. Die Höhe der Zinsen, die der Schuldner (= Geldnehmer) zu zahlen hat, wird durch den Zinssatz (oder Zinsfuß) ausgedrückt, der angibt, wieviel von einem Kapital von 100 DM in 1 Jahre an Zinsen zu zahlen ist.

Der Zusammenhang zwischen der Prozentrechnung und der Zinsrechnung kommt in der nachstehenden Gegenüberstellung der in diesen beiden Rechnungen gebräuchlichen Bezeichnungen zum Ausdruck:

| | | | | | | |
|---------------------------------|---|------|----------------|------------------------------------|---|-------|
| Der Zinssatz oder Zinsfuß | } | in % | entspricht dem | Prozentsatz oder Hundertsatz | } | in %. |
|---------------------------------|---|------|----------------|------------------------------------|---|-------|

Die Zinsen in DM entsprechen dem Prozentwert in DM.

Das Kapital in DM entspricht dem Grundwert in DM.

Beispiele:

a) Wie groß sind die Jahreszinsen eines Kapitals von 14000 DM zu 4%?

Lösung: Nach dem Dreisatz schreibt man:

| | | |
|----------------|---------|--|
| 100 DM Kapital | bringen | 4 DM Zinsen |
| 1 DM | „ | „ $\frac{4}{100}$ DM Zinsen |
| 14000 DM | „ | „ $\frac{4}{100} \cdot 14000$ DM = 560 DM. |

Ergebnis: Die Jahreszinsen betragen 560 DM.

b) Wieviel Zinsen bringen 2000 DM zu $3\frac{1}{3}\%$ in 3 Jahren?

Lösung: 100 DM bringen zu $3\frac{1}{3}\%$ in 1 Jahr: $3\frac{1}{3}$ DM
 100 DM „ „ „ „ 3 Jahren: $3\frac{1}{3} \times 3 = 10$ DM.
 1 DM bringt zu $3\frac{1}{3}\%$ in 3 Jahren: $\frac{10}{100}$ DM
 2000 DM bringen „ „ „ 3 „ : $\frac{10}{100} \cdot 2000 = 200$ DM.

Ergebnis: 2000 DM bringen in 3 Jahren zu $3\frac{1}{3}\%$ an Zinsen 200 DM.

c) Wieviel Zinsen bringen 5000 DM zu $2\frac{1}{2}\%$ in 90 Tagen? (Man rechnet allgemein das Jahr mit 360 Tagen).

Lösung: 100 DM bringen in 360 Tagen: $2\frac{1}{2}$ DM
 1 DM bringt „ 360 „ : $\frac{2\frac{1}{2}}{100}$ DM
 1 DM „ „ 1 Tag : $\frac{2\frac{1}{2}}{100 \cdot 360}$ DM
 1 DM „ „ 90 Tagen: $\frac{2\frac{1}{2} \cdot 90}{100 \cdot 360}$ DM
 5000 DM bringen „ 90 „ : $\frac{2\frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 5000}{100 \cdot 360}$ DM = 31,25 DM.

Ergebnis: 5000 DM bringen in 90 Tagen: 31,25 DM Zinsen.

d) Welches Kapital, das zu 5% auf Zinsen steht, bringt jährlich 250 DM Zinsen?

Lösung: 5 DM sind die Zinsen von 100 DM
 250 DM „ „ „ „ $\frac{100}{5} \cdot 250 = 5000$ DM.

Ergebnis: 5000 DM ist das Kapital, das bei 5% im Jahre 250 DM Zinsen bringt.

e) 250 DM bringen in $1\frac{1}{2}$ Jahren 7,50 DM Zinsen. Wie hoch ist der Zinsfuß?

Lösung: 250 DM bringen in $1\frac{1}{2}$ Jahren: 7,50 DM
 100 DM „ „ $1\frac{1}{2}$ „ : $\frac{7,50}{250} \cdot 100$ DM
 100 DM „ „ 1 Jahre : $\frac{7,50 \cdot 100}{250 \cdot 1,5}$ DM = 2 DM.

Ergebnis: Der Zinsfuß beträgt: 2%.

f) Nach wieviel Jahren hat man von einem Kapital, das zu 5% steht, die Hälfte an Zinsen bezahlt?

Lösung: Die Höhe des Kapitals ist in der Aufgabe nicht angegeben. Sie ist beliebig anzunehmen, z. B. 3000 DM. Für ein Kapital von 100 DM hat man 5 DM Zinsen bezahlt in 1 Jahr.

Für 1 DM hat man 5 DM Zinsen bezahlt in 100 Jahren
 „ 1 „ „ „ 1 „ „ „ „ $\frac{100}{5}$ „
 „ 3000 „ „ „ 1 „ „ „ „ $\frac{100}{5 \cdot 3000}$ „
 „ 3000 „ „ „ 1500 „ „ „ „ $\frac{100 \cdot 1500}{5 \cdot 3000}$ „ = 10 Jahre.

Ergebnis: Die Hälfte eines Kapitals, das zu 5% übernommen ist, hat man in 10 Jahren an Zinsen bezahlt.

Aufgaben:

- 495) In der nachstehenden Tabelle sind die fehlenden Zahlenwerte, die durch die Buchstaben a...h ersetzt sind, zu berechnen!

| Kapital in DM | Zinssatz in % | Zinsen in DM | Anzahl der Jahre |
|---------------------|---------------------|--------------------|------------------------|
| a | 2 | 7,50 | 1,5 |
| b | 2,5 | 50 | 4 |
| 50 | c | 25 | 10 |
| 30000 | d | 3000 | 3 |
| 680 | 4 | e | 5 |
| 20000 | 4,25 | f | 6 |
| 5000 | 3 | 450 | g |
| 7000 | 6 | 210 | h |

- 496) Eine Maschine, die für 36000 DM gekauft wurde, hat in einem Jahre infolge Abnutzung 15% des Anschaffungswertes verloren.
- Wieviel Mark beträgt der Wertverlust (= Abschreibung oder Amortisation)?
 - Welchen Wert hat die Maschine nach 1 Jahre (= Buchwert)?
- 497) Eine Schuld von 7000 DM wird mit 4% verzinst. Welcher Betrag ist nach einem halben Jahre zurückzuzahlen?
- 498) Ein Grundstück ist mit einer Hypothek von 60000 DM belastet, die mit 5,5% verzinst wird. Welcher Zinsbetrag ist monatlich aufzubringen?
- 499) Eine Hypothek von 10000 DM ist vierteljährlich mit 150 DM zu verzinsen. Wie hoch ist der Zinsfuß?
- 500) Eine Sparkasse verzinst die Spareinlagen mit 2,5%. Wie groß ist der Verdienst der Kasse an einem Sparguthaben von 15000 DM, wenn sie diesen Betrag in einer Hypothek von 6,5% anlegt?
- 501) Wenn auf einen Genossenschaftsumsatz in Höhe von 3 000 000 DM jährlich 3% Rückvergütung gezahlt werden, wie hoch ist der DM Betrag dieser Rückvergütung?
- 502) Die jährliche Rückvergütung auf den zur Abrechnung kommenden Genossenschaftsumsatz in Höhe von 1 200 000 DM beträgt 42 000 DM. Wieviel % des Umsatzes kann an die einzelnen Genossenschaftsmitglieder rückvergütet werden?
- 503) Die am Jahresende ausgezahlte Rückvergütung einer Konsumgenossenschaft beträgt 4,5%. Es ist ein Betrag von 81000 DM. Wie hoch ist der Umsatz, auf den die Rückvergütung zur Verteilung kommt?

B. Das Rechnen mit Buchstaben

I. Einführung

Der bisherige 1. Teil dieses Buches befaßte sich mit dem Rechnen mit bestimmten Zahlen. Die Rechnungen ohne Zahlen (richtiger: mit unbestimmten Zahlen), die sogenannte Buchstabenrechnung, findet man in der Technik als sogenannte „Formeln“ oder in „Gleichungen“ in technischen Arbeiten, Aufsätzen und Abhandlungen. Eine Anwendung der Buchstabenrechnung — der allgemeinen Arithmetik — ist die Lehre von den Gleichungen oder die Algebra, die erst im Abschnitt C dieses Buches behandelt wird.

Die Buchstabenrechnung umfaßt die 4 Grundrechnungsarten (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren), die Potenzrechnung, das Wurzelziehen und das Logarithmieren. Zur höheren Arithmetik gehören die Theorie der Reihen, die Kombinationslehre und die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In der Buchstabenrechnung werden die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets oder — falls diese nicht ausreichen — auch des griechischen Alphabets benutzt. Es werden durch diese Buchstaben nicht bestimmte Zahlen gekennzeichnet. Jeder Buchstabe kann eine ganz beliebige Zahl darstellen. Innerhalb der gleichen Rechnung jedoch muß der Wert für einen vielleicht öfter vorkommenden Buchstaben stets der gleiche sein. Beispielsweise hat die Summe:

$a + b + c$ den Wert 11, wenn man $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$ setzt. Setzt man $a = 5$, $b = 2$, $c = 8$, so hat dieselbe Buchstaben-Summe den Wert 15. Sie kann aber auch den Wert 55 haben, wenn $a = 10$, $b = 30$, $c = 15$ ist.

Nur vereinzelt — und dies sind nur Ausnahmefälle — werden in der Mathematik zur Kennzeichnung bestimmter, unveränderlicher Zahlen charakteristische Buchstaben verwendet.

Beispiele:

Der Buchstabe e hat in der höheren Mathematik den Wert $e = 2,71828$. Dieser Wert bildet die Grundlage des sogenannten natürlichen Logarithmen-systems.

Der Buchstabe i (der Elektrotechniker wählt den Buchstaben j für denselben Zweck) ist für die Kennzeichnung der imaginären Größe vorbehalten. $i = \sqrt{-1}$. Hierauf kommen wir in dem späteren Abschnitt B VI zurück.

Der griechische Buchstabe π [sprich: Pi] stellt die sog. Ludolfsche¹⁾ Zahl dar. $\pi = 3,14159\dots$ Sie gibt an, wie oft der Durchmesser eines Kreises in dem Umfang des Kreises enthalten ist.

Der Vorteil der Buchstabenrechnung liegt darin, daß die mit unbestimmten Zahlen gelösten Aufgaben ein Ergebnis haben, das für jede beliebige bestimmte Zahl, die man in die Aufgabe und ihr Ergebnis für die Buchstaben einsetzt, gültig ist. Würde man die Buchstabenrechnung nicht haben, so müßte man, wenn man einen Zahlenwert in der Aufgabe ändert, jedesmal den gesamten Lösungsgang erneut durchführen, um das diesbezügliche Ergebnis zu erhalten.

Ein weiterer Vorteil der Buchstabenrechnung ist die Schaffung einer eigenen mathematischen Schriftsprache, die es ermöglicht, in knapper, gedrängter Form Lehrsätze durch einige wenige Buchstaben eindeutig und oftmals in übersichtlicherer und verständlicherer Form als durch langatmige Sätze auszusprechen. Die Grundlage zum Erlernen und Verstehen dieser Schriftsprache ist die Beherrschung des Rechnens mit bestimmten Zahlen, das im Teil A I behandelt wurde.

II. Die vier Grundrechnungsarten der Buchstabenrechnung

Im folgenden Abschnitt werden die 4 Grundrechnungsarten mit unbestimmten Zahlen behandelt. Es bedeutet dies in erster Linie eine Verallgemeinerung des Rechnens mit bestimmten Zahlen. Gleichzeitig aber ist hiermit eine Wiederholung und Vertiefung des bisher gewonnenen Wissens verbunden.

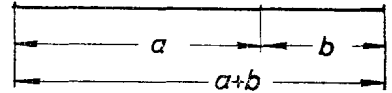
1. Das Addieren

Der Lehrsatz: „In einer Summe ist die Reihenfolge der Glieder beliebig“ wird bei einer Summe aus nur 2 Gliedern a und b in der allgemeinen Form ausgedrückt:

$$a + b = b + a$$

¹⁾ Ludolf von Ceulen [sprich: Köhlen], 1540 bis 1610, geb. in Hildesheim. Mathematiklehrer in verschiedenen holländischen Städten. Er starb als Professor der Kriegsbaukunst in Leiden. Er hat die nach ihm benannte Zahl auf 35 Dezimalstellen berechnet.

An der nachstehenden Skizze erkennt man, daß es gleich ist, ob man an eine a cm lange Strecke eine b cm lange Strecke ansetzt oder ob man eine b cm lange Strecke um a cm verlängert. In beiden Fällen erhält man als Ergebnis eine $(a + b)$ cm lange Gesamtstrecke.



Bei einer Summe aus 3 Gliedern schreibt man:

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c \\ = b + c + a = c + a + b = c + b + a.$$

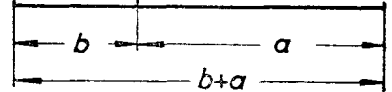


Bild 4

Geometrisch (d. h. zeichnerisch) läßt sich die Summe $a + b + c$ als eine Strecke darstellen, die aus den 3 Teilstrecken a , b und c gebildet ist.

In der nebenstehenden Skizze ist $a = 2$ cm; $b = 3$ cm; $c = 1$ cm gewählt. Die Gesamtstrecke ist immer 6 cm lang und unabhängig davon, in welcher Reihenfolge man die 3 Strecken aneinanderfügt (addiert).

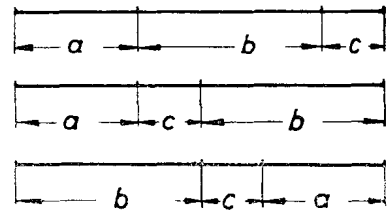


Bild 5

(maßstäblich auf $\frac{1}{5}$ verkleinert)

Die Größe $2a$ ist doppelt so groß wie a . Algebraisch ausgedrückt:

$$a + a = 2a$$

Genauer müßte es heißen:

$a + a = 2 \cdot a$, wie z. B. $3 + 3 = 2 \cdot 3$ ist. Das Malzeichen zwischen dem Koeffizienten 2 (s. u.) und der unbestimmten Zahl a läßt man jedoch der Einfachheit halber und weil hier keine Mißverständnisse eintreten können (wie z. B. zwischen $2 \cdot 3$ und 23), weg.

In der nebenstehenden Zeichnung stellt sich $2a$ als die Strecke dar, die durch Addieren zweier gleichlanger Strecken von je a cm Länge gebildet wird.

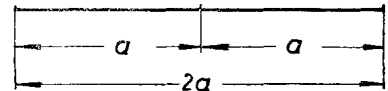


Bild 6

In der Schreibweise $2a$ heißt 2 der Koeffizient [sprich: Ko-effizient] oder die Beizahl oder die Vorzahl der Größe a .

Der Koeffizient der unbestimmten Zahl a ist 1 und nicht etwa — wie der Anfänger immer nur zu gern sagt — 0, weil man nichts vor die Zahl a schreibt. Nur der Einfachheit halber schreibt man a und meint damit $1a$.

In einer Summe darf man nur die gleichartigen Größen addieren. So faßt man z. B. in der Summe:

$$a + 2b + 3c + 4a + b + c + 3b + 3c$$

sämtliche Glieder mit a , sämtliche mit b und sämtliche mit c zusammen und erhält:

$$\underbrace{a + 4a}_{5a} + \underbrace{2b + b + 3b}_{6b} + \underbrace{3c + c + 3c}_{7c} =$$

a) Addieren einer Summe

Die Aufgabe: „Es ist zu der unbestimmten Zahl a die Summe der beiden Zahlen b und c zu addieren“ schreibt man in algebraischer Form:

$$a + (b + c).$$

Diese Aufgabe ist im Bild 7 geometrisch dargestellt.

Aus diesem Bilde ergibt sich: Es ist gleich, ob man zu einer Größe a zunächst die Größe b addiert und dann zu dem Zwischenergebnis $a + b$ die Größe c hinzuzählt oder ob man sofort zu a die Summe $(b + c)$ addiert. In beiden Fällen erhält man die Größe $a + b + c$.

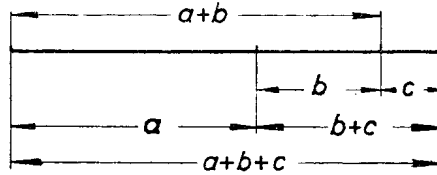


Bild 7

Die geometrische Lösung zeigt also, daß man setzen darf:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

Ebenso erhält man:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man an der nachstehenden Zeichnung erkennen:

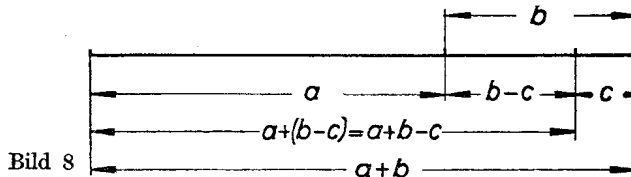


Bild 8

In Worten ausgedrückt, heißt dies:

Steht vor einer Klammer das Rechenzeichen $+$, so kann man die Klammer fortlassen.

Ebenso erhält man:

$$(a + b) + c = a + b + c.$$

Dieselbe Regel gilt auch dann, wenn in einer Summe mehrere Klammern vorkommen:

$$a + [b + (c + d) + e] = a + b + c + d + e.$$

b) Addieren relativer Zahlen

Wenn vor einer unbestimmten Zahl kein Vorzeichen (+ oder -) steht, so ist stets eine positive unbestimmte Zahl gemeint. Man schreibt also für (+ a) nur a.

Negative unbestimmte Zahlen schreibt man stets mit einem Minus-Zeichen, also (- b) oder (- 4 c).

Mit Vorzeichen versehene Zahlen nennt man, wie bereits auf S. 12 erwähnt, relative Zahlen.

Unter dem absoluten Betrag einer relativen Zahl versteht man den positiven Wert dieser Zahl. In der höheren Mathematik kennzeichnet man einen absoluten Betrag durch zwei senkrechte, die Zahl einschließende Striche; z. B.:

$$|+a| = a \quad \text{und} \quad |-b| = b.$$

Wenn auch von dieser vorstehenden Schreibart im Rahmen des vorliegenden Buches weiterhin kein Gebrauch gemacht wird, so sei sie aber trotzdem hier der Vollständigkeit halber und als Grundlage für die höhere Mathematik erwähnt.

Regel 1:

Relative Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge addiert und der Summe das gemeinsame Vorzeichen gibt.

1) Die beiden relativen Zahlen haben das Vorzeichen +.

$$(+a) + (+b) = +(a + b).$$

Der Beweis möge durch folgendes erbracht werden:

Die positiven Größen (+ a) und (+ b) mögen als Vermögen von a DM bzw. b DM aufgefaßt werden. Fügt man zu einem Vermögen von a DM ein Vermögen von b DM hinzu, so besitzt man ein Vermögen von (a + b) DM.

2) Die beiden relativen Zahlen haben das Vorzeichen -.

$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

Die negativen Größen (- a) und (- b) mögen als das Gegenteil eines Vermögens, als Schulden, aufgefaßt werden. Vergrößert man eine Schuld von a DM durch eine weitere Schuld von b DM, so hat man eine Gesamtschuld von (a + b) DM.

Regel 2:

Relative Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge subtrahiert und der Differenz das Vorzeichen der absolut größeren Zahl gibt.

1) Von den beiden relativen Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen, $(+a)$ und $(-b)$ bzw. $(-a)$ und $(+b)$, sei der absolute Betrag der Zahl $(+a)$ größer als der der relativen Zahl $(-b)$;

$$\alpha) (+a) + (-b) = +(a - b), \text{ wenn } a > b \text{ ist.}$$

Zahlenbeispiel:

$$(+5) + (-3) = +(5 - 3) = +2.$$

Wenn man ein Vermögen von a DM besitzt und macht b DM Schulden, so hat man noch ein Vermögen von $(a - b)$ DM, wenn der ursprüngliche Besitz größer als die aufgenommene Schuld ist.

$$\beta) (-a) + (+b) = -(a - b), \text{ wenn } a > b \text{ ist.}$$

Zahlenbeispiel:

$$(-5) + (+3) = -(5 - 3) = -2.$$

Wenn man a DM Schulden hat und kann in dieser Lage b DM als Einnahme (Vermögen) verbuchen, so behält man immer noch Schulden, wenn die Höhe der Einnahmen von b DM absolut kleiner als die vorhandenen Schulden ist.

2) Von den beiden relativen Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen, $(+a)$ und $(-b)$ bzw. $(-a)$ und $(+b)$, sei der absolute Betrag der Zahl a kleiner als der der Zahl b ;

$$\alpha) (+a) + (-b) = -(b - a), \text{ wenn } a < b \text{ ist.}$$

Zahlenbeispiel:

$$(+2) + (-5) = -(5 - 2) = -3.$$

Wenn man bei einem kleinen Vermögen von a DM eine große Schuld von b DM aufnimmt, die in ihrem absoluten Betrage größer als der ursprüngliche Besitz ist, so hat man letzten Endes eine Schuld von $(b - a)$ DM.

$$\beta) (-a) + (+b) = +(b - a), \text{ wenn } a < b \text{ ist.}$$

Zahlenbeispiel:

$$(-2) + (+5) = +3.$$

Wenn man bei a DM Schulden eine Einnahme von b DM hat, so hat man dann keine Schulden mehr, sondern ein Vermögen von $(b - a)$ DM, wenn die Einnahme größer als die Höhe der Schulden ist.

3) Die absoluten Beträge der beiden zu addierenden relativen Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen sind gleich;

$\alpha) (+a) + (-b) = 0$, wenn $a = b$ ist.

Zahlenbeispiel:

$$(+5) + (-5) = 0.$$

Wenn man a DM besitzt und gibt b DM aus, so hat man zum Schluß keinen Pfennig mehr in der Tasche, wenn der ursprüngliche Besitz von a DM gleich der Ausgabe in Höhe von b DM ist.

$\beta) (-a) + (+b) = 0$, wenn $a = b$ ist.

Zahlenbeispiel:

$$(-5) + (+5) = 0.$$

Wenn man a DM Schulden hat und einen gleichgroßen Betrag b DM einnimmt, dann hat man danach weder Schulden noch Vermögen.

Die beiden vorstehend gegebenen Regeln 1 und 2 über das Addieren relativer Zahlen werden im folgenden in einer einzigen Rechnungsanweisung zusammengefaßt:

Steht vor einer relativen Zahl, $(+b)$ oder $(-b)$, das Rechenzeichen $+$, so ersetze man das Rechenzeichen durch das nachfolgende Vorzeichen der relativen Zahl und nehme statt der relativen Zahl ihren absoluten Betrag.

Mit Buchstaben geschrieben erhält man:

$$(+a) + (+b) = a + b$$

$$(+a) + (-b) = a - b$$

$$(-a) + (-b) = -a - b$$

$$(-a) + (+b) = -a + b.$$

Zahlenbeispiele:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $(+5) + (+3) = +5 + 3 = +8$ | e) $(+3) + (+5) = +3 + 5 = +8$ |
| b) $(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$ | f) $(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$ |
| c) $(+5) + (-3) = +5 - 3 = +2$ | g) $(+3) + (-5) = +3 - 5 = -2$ |
| d) $(-5) + (+3) = -5 + 3 = -2$ | h) $(-3) + (+5) = -3 + 5 = +2.$ |

Aufgaben:

1) Welchen Wert hat $3b$ wenn $b = 1; 3; 5; \frac{1}{2}; 0,3?$

2) „ „ „ $\frac{1}{5}c$ „ $c = 2; 4; 6; 1\frac{1}{4}; 2,5?$

3) „ „ „ $0,2a$ „ $a = 0; 1; 2; \frac{1}{2}; 0,1?$

4) „ „ „ $a + 2b$ „ a) $a = 1; b = 1?$

b) $a = 2; b = 2?$

c) $a = 3; b = 3?$

d) $a = 4; b = 4?$

e) $a = 5; b = 5?$

5) Wie groß ist $100a + 10b + c$ wenn $a = 5; b = 4; c = 2?$

6) Die Zahl 743 ist als die Summe der 3 Zahlen a, b und c darzustellen, wenn $a = 7, b = 4$ und $c = 3$ sein soll?

- 7) Wie lautet die Quersumme einer dreiziffrigen Zahl (z. B.: 142), wenn man den Hunderter (1) mit a, den Zehner (4) mit b und den Einer (2) mit c bezeichnet?
- 8) n sei irgendeine beliebige gerade oder ungerade Zahl.
Ist $2n$ dann eine gerade oder ungerade Zahl?
- 9) Wie schreibt man in allgemeiner Form eine ungerade Zahl?
(Anleitung: Eine ungerade Zahl ist um 1 größer oder kleiner als eine gerade Zahl.)
- 10) Welche Werte nehmen die nachstehenden Summen an, wenn
 $a = 4$; $b = 9$; $c = 6$?
- | | |
|---|---------------------------|
| a) $2a + b + 3c$? | d) $0,2a + 0,3b + 0,4c$? |
| b) $a + 2b + 4c$? | e) $0,1a + 2a + 0,6c$? |
| c) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$? | |
- 11) Welchen Wert nimmt die Summe $3a + 7b + c$ an, wenn
- | | |
|--|--|
| a) $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$? | d) $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{2}{7}$; $c = 0$? |
| b) $a = 3$; $b = 4$; $c = 2$? | e) $a = 2$; $b = 2$; $c = 2$? |
| c) $a = 0$; $b = \frac{1}{7}$; $c = 1$? | |
- 12) a) $a + 2b + 3c + 3b + 3a + 4c = ?$
 b) $7a + (3b + a) + 4b + 2a = ?$
 c) $9m + 5n + (6n + m) = ?$
 d) $0,1a + 3b + (\frac{1}{4}c + 0,7a + b) + \frac{3}{4}c + (0,2a + 6b) + c = ?$
 e) $0,4x + 0,3y + 0,6x + 1,7y = ?$
 f) $2,4u + 3,1v + 0,6u + 2,4w + 0,9v + 2,6w = ?$
 g) $\frac{1}{2}c + \frac{1}{3}d + 0,5c + \frac{1}{6}d = ?$
 h) $3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 4\frac{2}{3}z + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z + \frac{3}{4}y = ?$
- 13) Es ist zu zeigen, daß $u + (v + w) = u + v + w$ ist, wenn
- | |
|--|
| a) $u = 3$; $v = 4$; $w = 5$ |
| b) $u = 2$; $v = 0,1$; $w = 0,9$ |
| c) $u = \frac{1}{2}$; $v = \frac{1}{4}$; $w = \frac{3}{4}$. |
- Welche Werte nimmt die Summe jeweils an?
- 14) Wie groß ist das arithmetische Mittel der beiden Zahlen a und b?
(Vgl. Anleitung auf S. 24, Aufgabe Nr. 188.)
- 15) Welches ist der Mittelwert von a, b und c?
- 16) Wie groß ist die Summe der nachstehenden relativen Zahlen:
- | | |
|--|--|
| a) $(-3a) + (5b) =$ | f) $(-3\frac{1}{4}x) + (+2\frac{1}{2}x) =$ |
| b) $(-2a) + (-3b) =$ | g) $(-\frac{5}{6}k) + (+\frac{1}{3}k) =$ |
| c) $(+m) + (-2n) =$ | h) $(-0,2r) + (+1,2r) =$ |
| d) $(+0,1u) + (+0,4v) =$ | i) $(+0,2z) + (-0,2z) =$ |
| e) $(-2\frac{3}{4}d) + (-1\frac{1}{4}d) =$ | k) $(-0,45t) + (-0,55t) =$ |

2. Das Subtrahieren

Die Subtraktion ist die umgekehrte Rechenoperation der Addition. Beim Addieren findet man aus den beiden Gliedern (oder Summanden) a und b die Summe c und schreibt algebraisch: $a + b = c$.

Zahlenbeispiel:

Für $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ erhält man $2 + 3 = 5$.

Beim Subtrahieren bestimmt man aus der Summe c und einem Gliede, z. B. a , das andere Glied b . Algebraisch ausgedrückt: $b = c - a$.

Zahlenbeispiel:

Für $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ erhält man: $5 - 2 = 3$.

Die Subtraktionsaufgabe

$$a - b = c$$

stellt sich zeichnerisch folgendermaßen dar (Bild 9).

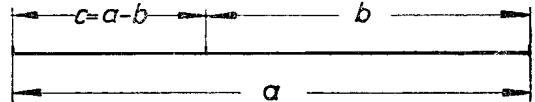


Bild 9

Man kürzt die Strecke a um die Länge der Strecke b und erhält als Ergebnis die Strecke c .

(Gewählt: $a = 67$ mm; $b = 42$ mm; dann $c = 25$ mm.)

Bei der Subtraktion darf man nicht (wie bei der Addition) Minuend und Subtrahend vertauschen. $a - b$ ist verschieden von $b - a$, wenn $a \neq b$ [lies: „ a ungleich b “] ist. Wenn $a > b$ ist, dann ist $a - b$ eine positive Zahl. Die Subtraktion ist in diesem Falle im Bereiche der positiven Zahlen ausführbar. Bei denselben Werten für a und b ergibt die Differenz $b - a$ eine negative (relative) Zahl, deren absoluter Betrag gleich $a - b$ ist.

Zahlenbeispiel:

Für $a = 6$; $b = 4$ ist $a - b = 6 - 4 = 2$ und $b - a = 4 - 6 = -2$.

Die Reihenfolge bei der Subtraktion mehrerer Glieder ist beliebig.

Beispiel:

$$10a - 3a - 5a = 10a - 5a - 3a = 2a.$$

Zeichnerische Darstellung dieser Gleichung ($a = 0,8$ cm):

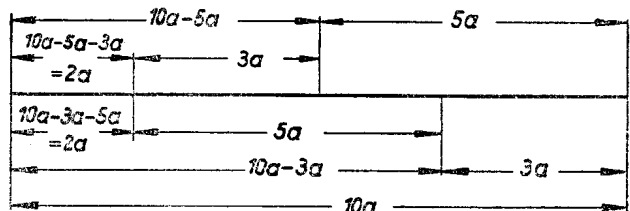


Bild 10

Mehrgliedrige Ausdrücke mit Summanden und Subtrahenden nebeneinander heißen algebraische Summen.

Beispiel:

$$a - b + c - 2d \quad \text{oder} \quad 2x + 3y - 4z - 5u \quad \text{u. ä.}$$

In einer algebraischen Summe dürfen nur gleichartige Größen zu Summen bzw. Differenzen zusammengefaßt werden:

Beispiele:

$$\text{a) } 5a - 2b + 3a + 6b = 5a + 3a + 6b - 2b = 8a + 4b$$

$$\text{b) } 2,5d + 7,2e + 1,8f - 1,5d - 0,8f + 2,8e =$$

$$2,5d - 1,5d + 7,2e + 2,8e + 1,8f - 0,8f =$$

$$1d \quad + \quad 10e \quad + \quad 1f \quad =$$

$$d + 10e + f$$

a) Subtrahieren von Summen und Differenzen

Ist von einer Zahl eine Summe oder eine Differenz abzuziehen, so wird dies in der mathematischen Schriftsprache dadurch gekennzeichnet, daß man die zu subtrahierende Summe oder Differenz in eine Klammer setzt.

$$a - (b + c) \text{ heißt:}$$

Es ist von einer Zahl a die Summe der beiden Zahlen b und c abzuziehen.

$$a - (b - c) \text{ heißt:}$$

Es ist von einer Zahl a die Differenz, die aus den beiden Zahlen b und c gebildet ist, abzuziehen.

Während beim Addieren einer Summe, wie auf Seite 87 gezeigt wurde, die Klammer fortgelassen werden darf, ist dies beim Subtrahieren nicht der Fall. Aus den folgenden 2 Skizzen erhält man folgende wichtige Formeln betreffs Auflösen von Klammern, vor denen das Minuszeichen steht.

$$(1) \quad \boxed{a - (b + c) = a - b - c}$$

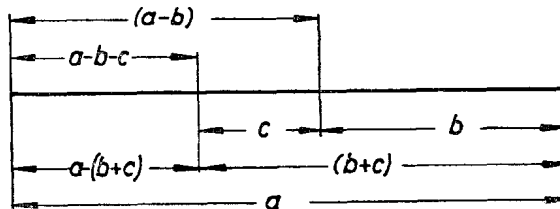


Bild 11

(2) $a - (b - c) = a - b + c$

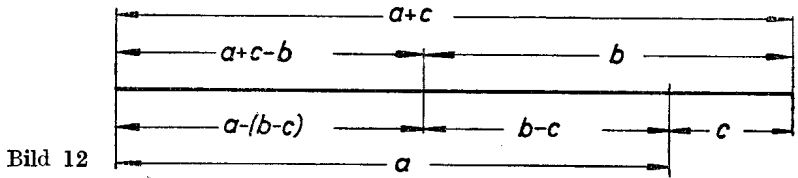


Bild 12

Man erhält die wichtige Regel:

Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen, so darf man die Klammer nur dann fortlassen, wenn man gleichzeitig die Vorzeichen sämtlicher Glieder in der Klammer in ihr Gegenteil verkehrt.

Umgekehrt hat man beim Setzen von Klammern in einer algebraischen Summe die Vorzeichen der Glieder, die in die Klammer eingeschlossen werden, in ihr Gegenteil zu verkehren, wenn vor die Klammer ein Minuszeichen zu stehen kommt.

Beispiele:

a) $7u + 4v - 2w + 3z = 7u + 4v - (2w - 3z)$

b) $12x - 3y - 4z = 12x - (3y + 4z)$

c) $r - 2s + 3t - 4u - 5v =$
 $r - (2s - 3t) - (4u + 5v) =$
 $r - (2s - 3t + 4u + 5v) =$

b) Das Subtrahieren relativer Zahlen

Wenn man von irgendeiner relativen Zahl (es ist gleich, ob sie positiv oder negativ ist) eine positive Zahl zu subtrahieren hat, so hat man um den Betrag der positiven Zahl rückwärts zu zählen.

An der Zahlengeraden stellt sich dies folgendermaßen dar:

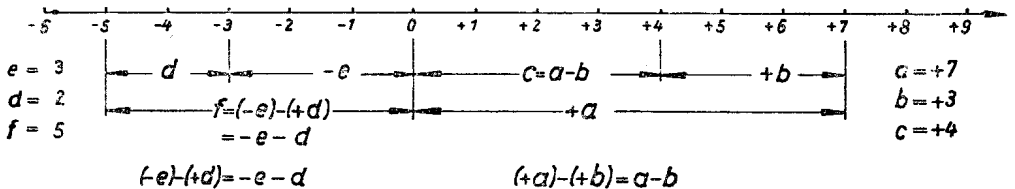


Bild 13

In der vorstehenden Skizze wird rechts vom Nullpunkt das Subtrahieren der positiven Zahl + b von der positiven Zahl + a veranschaulicht. (Es war der Fall gewählt $a > b$; dann ist auch $+a - (+b) > 0$; d. h. positiv).

Links vom Nullpunkt, wo sich auf der Zahlengeraden die negativen Zahlen befinden, wurde das Subtrahieren der positiven Zahl $+d$ von der negativen Zahl $-e$ gezeigt.

Da also das Subtrahieren einer positiven Zahl als ein Rückwärtszählen zu verstehen ist, so hat man in logischer Schlußfolgerung das Subtrahieren einer negativen Zahl wie folgt aufzufassen:

Hat man von einer relativen (positiven oder negativen) Zahl eine negative Zahl zu subtrahieren, so versteht man darunter ein Vorwärtszählen um die entsprechende positive Zahl (= absoluter Betrag der negativen Zahl); also:

$$(+a) - (-b) = +a + b$$

$$(-a) - (-b) = -a + b.$$

(Die letzte der beiden Gleichungen hat eine positive Zahl als Ergebnis, wenn $a < b$ ist. Ist $a > b$, dann erhält man eine negative Zahl als Ergebnis.)

Eine andere Erklärung für das Subtrahieren relativer Zahlen ist folgende:

Eine relative Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

Es ist also: $(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$

$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b).$$

Zusammenfassung

der Formeln für die Addition und Subtraktion relativer Zahlen. Als anschauliches Hilfsmittel können dabei die Vorzeichenregeln (S. 12—13) dienen.

$$(+a) + (+b) = a + b$$

$$(+a) - (+b) = a - b$$

$$(+a) + (-b) = a - b$$

$$(+a) - (-b) = a + b$$

$$(-a) + (+b) = -a + b$$

$$(-a) - (+b) = -a - b$$

$$(-a) + (-b) = -a - b$$

$$(-a) - (-b) = -a + b.$$

Als anschauliches Hilfsmittel für diese Formeln können die Vorzeichenregeln (S. 12 u. 13) dienen.

Aufgaben:

17) $7,5b - 2,5b =$

19) $5a + 3b - 4a - 2b =$

18) $2,1u - 1,1u =$

20) $4a - 6a =$

21) $8a + 4b + 2a - 3b =$

22) $5\frac{2}{3}a - 2\frac{1}{4}b - 2\frac{1}{3}a + 3\frac{1}{2}b - \frac{1}{3}a - 1\frac{1}{4}b =$

23) $8\frac{1}{5}x + 3,25y + 2,6z - 3,2x - 1\frac{1}{4}y - 1\frac{3}{5}z =$

24) $1,001t + 2,72s - 3,121t - 2,85s + 2,12t + 1,13s =$

25) $u + 2v - 0,9u - 3v =$

26) $2\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}n - 1\frac{1}{4}m + 1\frac{2}{3}n + \frac{3}{4}m - 2\frac{1}{3}n =$

27) Es sind die Zahlenwerte für x und y zu bestimmen, wenn

$$x = a - (b - c)$$

$$y = a - b + c \text{ ist für}$$

| | a | b | c |
|--------------|----------------|-----|----------------|
| α) | 12 | 7 | 3 |
| β) | 7,3 | 4,8 | 1,5 |
| γ) | 10 | 0,8 | 0,2 |
| δ) | $5\frac{3}{4}$ | 3 | $2\frac{1}{4}$ |
| ϵ) | 7,09 | 4,1 | 2,01 |

28) $(a + b - c) - (a - b + c) =$

29) $(a + b - c) + (a - b + c) =$

30) $(6x - 5) - (x - 7) - (2x + 3) =$

31) $12,5 - (3x - 2,5) - (10,3 - 10x) - (6x + 4,7) =$

32) $(3a - 2b) - (8b - 2a) - (4a - 9b) =$

33) $(2a + b) - [3c - (3b + c) + 4b] + 2c =$

34) $1,2m - \{0,3n + [3,4o - (0,8m + 0,2n) + 2,9n] + 0,6o\}$

35) $\frac{1}{2}x - [\frac{1}{3}y - (\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y) + \frac{3}{4}x] + 2y =$

36) $0,3u - [v - (\frac{1}{5}u + \frac{3}{4}v - \frac{1}{2}u) - 0,25v] =$

37) $(+3x) + (-2x) =$

42) $(-3,75t) - (-0,25t) =$

38) $(+3,2a) - (+1,8a) =$

43) $(-1,01c) + (-10,01c) =$

39) $(+\frac{1}{4}m) - (+\frac{3}{4}m) =$

44) $(-2,84d) + (+4,34d) =$

40) $(+\frac{2}{3}r) - (-\frac{1}{3}r) =$

45) $(+0,98v) + (+0,2v) =$

41) $(-2,25s) - (+0,75s) =$

46) $(-2,5f) - (-2,5f) =$

3. Das Multiplizieren

Stehen 2 Buchstaben ohne Vorzeichen nebeneinander oder sind sie, wie es allgemein üblich ist, in der Handschrift sogar zusammengeschrieben, so ist stets zwischen die beiden Buchstaben ein Malzeichen bzw. ein Punkt gesetzt zu denken. Es bedeutet also:

$$ab = a \times b = a \cdot b.$$

Das Zeichen \times wird in der Algebra niemals, der Punkt nur selten geschrieben. ab wird gesprochen: „a mal b“ oder einfach „a be“.

Bei der Erklärung des Begriffs des Koeffizienten oder der Beizahl auf Seite 86 war vor einen Buchstaben, z. B. a , eine bestimmte Zahl, z. B. 2 , geschrieben. $2a$ bedeutet das Doppelte der Größe a . Ebenso ist beispielsweise $3,5b$ eine Größe, die $3\frac{1}{2}$ mal so groß wie die Größe b ist. Auch hier wird zwischen die bestimmte Zahl und den Buchstaben kein Punkt gesetzt. Setzt man an die Stelle der bestimmten Zahl (Koeffizient) eine unbestimmte Zahl a , so erhält man das Produkt $a \cdot b$, das ebenfalls eine unbestimmte Größe ist. So hat $a \cdot b$ für $a = 3$ und $b = 4$ den Wert 12 oder für $a = 7$ und $b = 8$ den Wert 56 usw.

Nach der Begriffserklärung eines Produktes (Seite 8) ist unter $a \cdot b$ eine Summe zu verstehen, die aus b Gliedern der Größe a besteht; also $a \cdot b = a + a + a + a + \dots$. Das Glied a steht b mal auf der rechten Seite der letzten Gleichung.

Faßt man in dem Produkt $a \cdot b$ den Buchstaben a als Kennzeichen für eine unbestimmte Zahl auf, während b die in cm gemessene Länge einer Strecke darstellt, so wird durch das Produkt $a \cdot b$ die Länge einer Strecke ausgedrückt, die a mal so lang wie die Strecke von der Länge b cm ist.

Bedeutet in dem Produkt $a \cdot b$ die beiden Faktoren die Längen zweier Strecken in Zentimeter, so stellt das Produkt $a \cdot b$ in der Geometrie den in Quadratzentimeter gemessenen Flächeninhalt des Rechteckes mit den Seiten a und b dar. Den Flächeninhalt des nebenstehenden Rechteckes erhält man, wenn man die Seite a mit der Seite b oder umgekehrt multipliziert. Es ist also $a \cdot b = b \cdot a$.

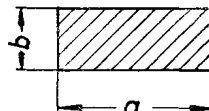


Bild 14

Zur Erinnerung:

$a + b$ bedeutet die Länge einer aus den Teilstrecken a und b zusammengesetzten Strecke.

Sind in einem Rechteck die 4 Seiten gleich lang, und zwar je a cm, so hat man es mit einem Quadrat zu tun, dessen Inhalt $a \times a = a \cdot a = a^2$ (cm^2) beträgt.

Den Umfang dieses Quadrates erhält man, indem man die Summe der 4 Seiten bildet; also $a + a + a + a = 4a$. Der Umfang $4a$ hat die Dimension einer Länge. Er wird somit in cm oder m gemessen.

Man unterscheide zwischen: a^2 und $2a$

| |
|--------------------------------|
| $a^2 = a \cdot a$ $2a = a + a$ |
|--------------------------------|

Unterscheide!

Das aus 3 Faktoren gebildete Produkt $a \cdot b \cdot c$ stellt, sofern a , b und c die Längen dreier Strecken sind, den Rauminhalt oder das Volumen eines Quaders mit den Seiten a , b und c dar.

Die Grundfläche des nachstehenden Quaders ist ein Rechteck mit den Seiten a und b und hat den Inhalt $a \cdot b$ (cm^2). Die Quaderhöhe beträgt c (cm). Das Volumen des Körpers beträgt: Grundfläche \times Höhe, also: $a \cdot b \cdot c$. Da aber, wie oben gezeigt, $a \cdot b$ eine unbestimmte Zahl ist, so kann man den Punkt zwischen $a \cdot b$ und c fortlassen. Das Volumen beträgt: $a \cdot b \cdot c$ (cm^3).

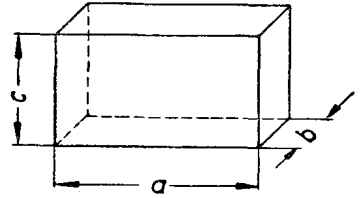


Bild 15

Auch hier ist $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$. In Worten ausgedrückt heißt dies:

! In einem Produkt ist die Reihenfolge der Faktoren beliebig.

Beim Multiplizieren zweier relativer Zahlen (Seite 12) wurden die Vorzeichenregeln behandelt. Sie werden ihrer Wichtigkeit wegen noch einmal angeführt:

1) Haben 2 Faktoren das gleiche Vorzeichen, so ist das Produkt positiv; d. h.

$$\begin{aligned} (+a) \cdot (+b) &= +a \cdot b \\ (-a) \cdot (-b) &= +a \cdot b \end{aligned}$$

2) Haben 2 Faktoren ungleiche Vorzeichen, so ist das Produkt negativ; d. h.

$$\begin{aligned} (+a) \cdot (-b) &= -a \cdot b \\ (-a) \cdot (+b) &= -a \cdot b \end{aligned}$$

Wenn ein Produkt mit einer Zahl zu multiplizieren ist, so ist nur ein Faktor dieses Produktes mit der Zahl zu multiplizieren; also

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot b \cdot c.$$

Die Richtigkeit ergibt sich durch Einsetzen bestimmter Zahlen; z. B.

$$a = 2; \quad b = 5; \quad c = 3.$$

$$\text{Denn} \quad (2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3) = (2 \cdot 3) \cdot 5 = 30.$$

Aufgaben:

- | | | |
|---|--|---|
| 47) $2\frac{1}{2}a \cdot 4 =$ | 51) $2c \cdot \frac{1}{2}d =$ | 55) $7a + 5b + 2a =$ |
| 48) $5a \cdot 3a =$ | 52) $a \cdot b \cdot a \cdot a =$ | 56) $2,5a \cdot 0,4a =$ |
| 49) $5a + 3a =$ | 53) $b \cdot c \cdot c \cdot b =$ | 57) $2,5a + 0,4a =$ |
| 50) $4a \cdot 3b =$ | 54) $7a \cdot 5b \cdot 2a =$ | 58) $\frac{2}{3}a \cdot \frac{3}{5}b =$ |
| 59) $2x \cdot 0,5y \cdot 3 =$ | 63) $\frac{1}{4}v \cdot \frac{1}{5}v =$ | |
| 60) $3x \cdot 0,4y \cdot 2x \cdot 5y =$ | 64) $\frac{1}{4}v + \frac{1}{5}v =$ | |
| 61) $3x + 0,4y + 2x + 5y =$ | 65) $\frac{1}{3}r \cdot \frac{1}{2}s \cdot \frac{1}{4}t =$ | |
| 62) $2\frac{2}{5}u \cdot 5 =$ | 66) $\frac{1}{2}a^2 \cdot b \cdot 2b =$ | |

a) Multiplizieren von Summen und Differenzen

1) Eine Zahl ist mit einer Summe (bzw. Differenz) zu multiplizieren.

Das Produkt $a \cdot (b + c)$ stellt sich zeichnerisch als der Flächeninhalt des nebenstehenden, stark umrandeten Rechtecks mit den Seiten a und $(b + c)$ dar. Diese Rechtecksfläche setzt sich aus 2 Teilrechtecken mit den Flächeninhalten $a b$ und $a c$ zusammen. Es ist also der Gesamtflächeninhalt gleich der Summe der beiden Teilrechtecksinhalte oder in Buchstaben:

$$a \cdot (b + c) = a b + a c$$

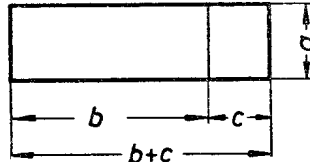


Bild 16

Ebenso ist das Produkt $a \cdot (b - c)$ als der Inhalt des nachstehenden, stark umrandeten Rechtecks mit den Seiten a und $(b - c)$ aufzufassen. Dieses Rechteck erhält man, wenn man von dem großen Rechteck mit den Seiten a und b das kleine Rechteck mit den Seiten a und c subtrahiert.

Es ist also:

$$a \cdot (b - c) = a b - a c$$

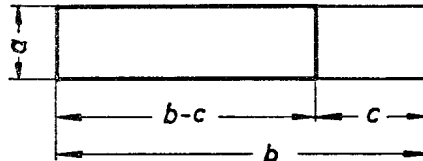


Bild 17

Die beiden letzten Formeln, in Worten ausgedrückt, ergeben den Satz:

Eine Summe oder Differenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der Summe bzw. Differenz mit dieser Zahl multipliziert und die Teilprodukte addiert oder subtrahiert.

2) 2 algebraische Summen sind zu multiplizieren.

α) Das aus den zwei Summen $(a + b)$ und $(c + d)$ gebildete Produkt $(a + b)(c + d)$ ist der Flächeninhalt des stark umrandeten Rechteckes mit den Seiten $(a + b)$ und $(c + d)$. Dieses Rechteck setzt sich aus 4 Teilrechtecken mit den Inhalten $a c$, $a d$, $b c$ und $b d$ zusammen. Der Gesamtinhalt ist also:

$$(a + b)(c + d) = a c + a d + b c + b d$$

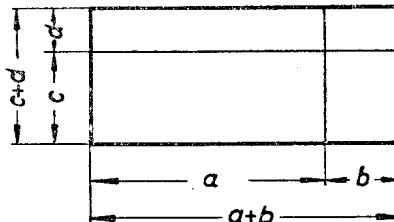


Bild 18

Man unterscheide hiervon den Ausdruck: $(a + b) c + d$, der aus dem Produkt $(a + b) \cdot c$ vermehrt um d besteht.

Man erhält: $(a + b) c + d = a c + b c + d$.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)c + d = ac + bc + d$$

Unterscheide!

Ebenso ist: $a + b(c + d) = a + bc + bd$.

β) Das Produkt der Summe $(a + b)$ mal der Differenz $(c - d)$ kann als der Flächeninhalt des nebenstehend stark umrandeten Rechteckes mit den Seiten $(a + b)$ und $c - d$ betrachtet werden. Diese Fläche setzt sich wiederum aus 4 Teilflächen zusammen, von denen je 2 voneinander abziehen sind. Aus der Zeichnung ersieht man, daß

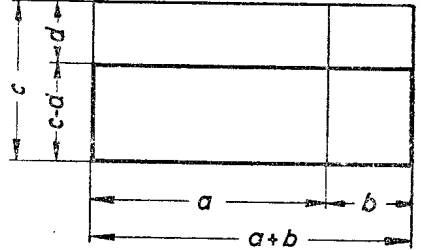
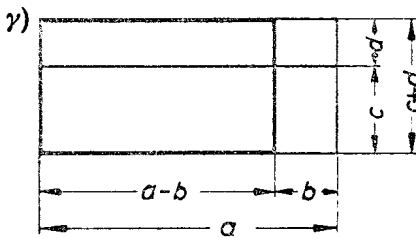


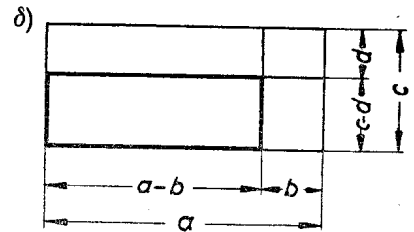
Bild 19

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

Analog ergeben sich die Produkte zweier algebraischer Summen in den folgenden Fällen γ und δ . Man versuche selbst, zur Übung an Hand der Zeichnungen die Produkte zu bilden.



$$(a-b)(c-d) = ac + ad - bc - bd$$



$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

Bild 20

Die vorhergehenden 4 Fälle α , β , γ und δ werden in einer einzigen Regel zusammengefaßt:

2 algebraische Summen (Differenzen) werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen mit jedem Glied der anderen multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert bzw. subtrahiert.

Beim Ausmultiplizieren zweier Klammern, in denen mehrere Glieder stehen, z. B. $(a + b + c) \cdot (a - b - c)$, halte man eine gewisse Ordnung ein, damit nicht etwa wegen der fehlenden Übersichtlichkeit ein Teilprodukt vergessen wird. Man multipliziere zuerst mit dem 1. Gliede der 1. Klammer (a) jedes Glied der 2. Klammer; dann nehme man das 2. Glied der ersten Klammer (b) und multipliziere mit ihm jedes Glied der 2. Klammer usw.

Man rechne also so:

$$\begin{aligned}(a + b + c)(x - y - z) &= a x - a y - a z \\ &+ b x - b y - b z \\ &+ c x - c y - c z.\end{aligned}$$

Man kann aber auch umgekehrt verfahren, indem man jedes Glied der 1. Klammer der Reihe nach mit jedem Gliede der 2. Klammer multipliziert, also so:

$$\begin{aligned}(a + b + c)(x - y - z) &= a x + b x + c x \\ &- a y - b y - c y \\ &- a z - b z - c z.\end{aligned}$$

Merkregel: Besitzt die 1. Klammer m und die 2. Klammer n Glieder, so erhält man nach dem Ausmultiplizieren $m \cdot n$ Glieder.

Unter Benutzung der Regeln über die Multiplikation algebraischer Summen lassen sich einige sehr oft gebrauchte und somit äußerst wichtige Formeln ableiten:

$$\begin{aligned}\alpha) \quad (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a a + a b + b a + b b \\ &= a^2 + 2 a b + b^2.\end{aligned}$$

Dasselbe findet man aus der Zeichnung eines Quadrates, dessen Seiten $(a + b)$ cm lang sind und das somit den Inhalt $(a + b)^2$ hat. Die Fläche dieses Quadrates setzt sich aus den beiden Quadraten a^2 und b^2 und den beiden gleich großen Rechtecken $a b$ zusammen.

Es ist also:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2} \quad ^1)$$

In Worten heißt diese wichtige Formel: Das Quadrat einer zweigliedrigen Summe ist gleich der Summe aus den Quadraten der Summanden und dem doppelten Produkt der Summanden.

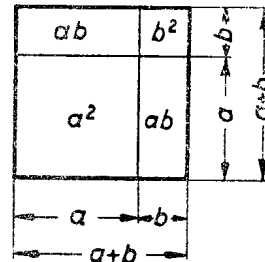


Bild 21

$$\begin{aligned}\beta) \quad (a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b) = a a - a b - b a + b b \\ &= a^2 - 2 a b + b^2.\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis findet man auch aus der nachstehenden Zeichnung:

Die beiden Rechtecke mit dem Inhalt $a b$ überdecken sich mit einem Teil ihrer Fläche. Die überdeckte Fläche ist das Quadrat mit der Seite b . Deshalb wird zu der Differenz $a^2 - 2 a b$ noch das Quadrat b^2 hinzugezählt. Der Inhalt des stark umrandeten Quadrates mit den Seiten $(a - b)$ ist:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2 a b + b^2} \quad ^1)$$

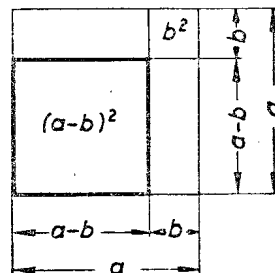


Bild 22

¹⁾ Diese Regel ist ein Spezialfall des in der höheren Mathematik auftretenden binomischen Lehrsatzes.

In Worten:

Das Quadrat einer Differenz ist gleich der Summe der Quadrate von Minuend und Subtrahend, vermindert um das doppelte Produkt aus Minuend und Subtrahend.

$$\gamma) \quad (a + b)(a - b) = a \cdot a - a b + b a - b \cdot b = a^2 - b^2.$$

Aus der nebenstehenden Zeichnung sieht man, daß das stark umrandete Rechteck mit dem Inhalt $(a + b)(a - b)$ gleich der Fläche des Rechteckes mit den Seiten $(a + b)$ und a , vermindert um die Fläche des Rechteckes mit den Seiten $(a + b)$ und b , ist; d. h.:

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= (a + b)a - (a + b)b \\ &= a^2 + ab - (ab + b^2) \\ &= a^2 + ab - ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

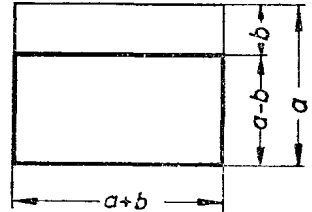


Bild 23

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

d. h. in Worten:

Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Zahlen.

Die letzte Formel wird auch oft umgekehrt angewendet:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b),$$

d. h. in Worten:

Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Produkt aus der Summe und der Differenz der Potenzbasen.

Nachstehend noch ein anschaulicher, geometrisch leicht verständlicher Beweis der Formel:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Aus dem nebenstehenden großen Quadrat mit der Seite a werde das schraffiert gezeichnete Quadrat mit der Seite b herausgeschnitten. Der übrig-

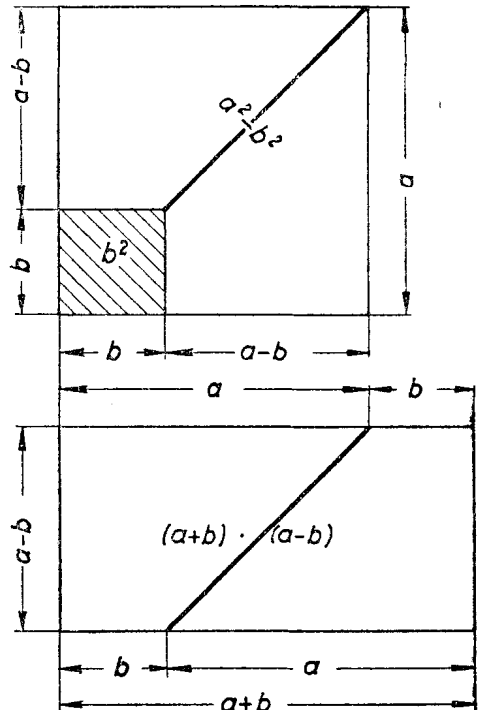


Bild 24

bleibende Restteil des Quadrates, der also den Flächeninhalt $a^2 - b^2$ hat, wird längs der stark gezeichneten Geraden zerschnitten. Man erhält dann 2 Vierecke (Trapeze), die man, wie die 2. Abbildung zeigt, aneinanderlegt.

Das hierdurch entstehende Rechteck hat den Flächeninhalt: $(a + b)(a - b)$ und hat denselben Inhalt wie der obige Quadratrestteil.

Es ist also:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Aufgaben:

- | | |
|---|--|
| 67) $(2a - 5b + 6c) \cdot 3x =$ | 82) $(g + h)(a - b) =$ |
| 68) $3a(2x + 3y) =$ | 83) $(2a - 3b)(3a + 2b) =$ |
| 69) $4(a + b) + 3(a - b) =$ | 84) $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)(6a - 12b) =$ |
| 70) $18(2r + 3s) - 7(3r - 5s) =$ | 85) $(0,5x - 0,3y)(0,2x - 0,5y) =$ |
| 71) $2(u - 3v) + 3(3u - v) =$ | 86) $(2a + 3b)(2a - 3b) =$ |
| 72) $a(2x + 3y - 1) =$ | 87) $(a + 2b - c)(2a + b - 2c) =$ |
| 73) $(3a - 2b - 5c)y =$ | 88) $(a + 3b + 3c)(a - 3b - 3c) =$ |
| 74) $(2x - 3)c + 3c =$ | 89) $(2 - a)^2 =$ |
| 75) $\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) =$ | 90) $(2a + 3b)^2 =$ |
| 76) $0,5(m + n) + 0,5(m - n) =$ | 91) $(n + 1)(n - 1) =$ |
| 77) $-2a(5 - 3b) =$ | 92) $(2c + 3)^2 =$ |
| 78) $2y^2 + 0,5y(3x - 4y) =$ | 93) $(3a + b)(3a - b) =$ |
| 79) $(a + b)(x + y) =$ | 94) $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y) =$ |
| 80) $(c - d)(u + v) =$ | 95) $(0,5m + 0,4n)(0,5m - 0,4n) =$ |
| 81) $(e - f)(x - y) =$ | 96) $17^2 - 13^2 = (17 + 13)(17 - 13) =$ |
- 97) In dem Produkt $a b$ wird a um 3 vermehrt und b um 5 verkleinert.
 a) Um welchen Betrag ändert sich der Wert des Produkts?
 b) Wie groß ist dieser Betrag, wenn $a = 2$ und $b = 7$ ist?
- 98) Um wieviel wird ein Rechteck größer, dessen Seiten a cm und b cm lang sind, wenn man a um 1 cm und b um 2 cm verlängert?
- 99) Besteht ein Unterschied zwischen $(a + b)^2$ und $(a^2 + b^2)$?
 Wenn ja, um welchen Betrag unterscheiden sich die beiden Werte?
 (Zur Probe setze man $a = 2$ und $b = 3$!)
- 100) Um welchen Betrag unterscheiden sich $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$?
- 101) Wie groß ist die schraffierte Querschnittsfläche des Bildes 25? (Man bestimme sie als die Differenzfläche zweier Rechtecke sowie — zur Probe — als Summe von 3 Rechtecken.)

102) Wie groß ist die Querschnittsfläche? (Bild 26.)

103) Wie groß ist die Querschnittsfläche? (Bild 27.)

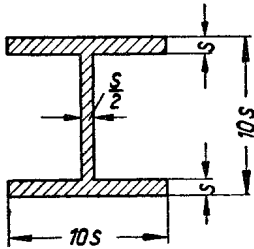


Bild 25

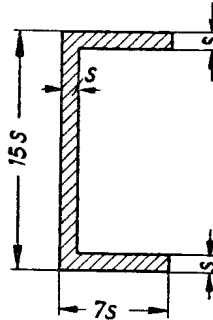


Bild 26

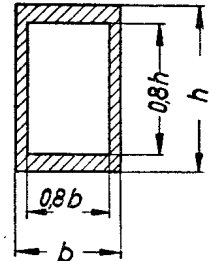


Bild 27

104) a) $42 \cdot 38 =$

b) $64 \cdot 56 =$

c) $87 \cdot 93 =$

Anleitung: Man benutze zweckmäßig die

Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$;

für $42 \cdot 38$ setze man $(40 + 2)(40 - 2)$.

105) Das Quadrat einer zweistelligen mit 5 endenden Zahl läßt sich nach folgender Regel bilden:

a) Man bilde den 10fachen Betrag der Zehnerstelle.

b) Zu dieser Zahl zähle man 10 hinzu.

c) Die unter a) und b) gefundenen Werte sind zu multiplizieren.

d) Zu dem unter c) gefundenen Zahlenwert ist 25 zu addieren.

Diese Regel ist durch eine algebraische Formel auszudrücken und zu beweisen.

Anleitung: Jede zweistellige mit 5 endende Zahl läßt sich in der Form $(10a + 5)$ schreiben, worin a eine der ganzen Zahlen von 1 bis 9 ist.

Zahlenbeispiel: $35^2 = ?$

a) $10 \cdot 3 = 30$

c) $30 \cdot 40 = 1200$

b) $30 + 10 = 40$

d) $1200 + 25 = 1225$.

Ergebnis: $35^2 = 1225$.

106) Das Quadrat einer beliebigen zweistelligen Zahl läßt sich nach der folgenden Regel bilden:

a) Bilde den 100fachen Wert des Quadrates der Zehnerstelle!

b) Bilde den 20fachen Wert des Produktes aus Einer- und Zehnerstelle!

c) Bilde das Quadrat der Einerstelle!

d) Die Summe der unter a)...c) gefundenen Werte ist das Ergebnis.

Diese Regel ist durch eine algebraische Formel auszudrücken, durch die die allgemeine Gültigkeit der Regel bewiesen ist.

Zahlenbeispiel: $37^2 = ?$

a) $100 \cdot 9 = 900$

b) $20 \cdot 3 \cdot 7 = 420$

c) $7^2 = 49$

d) $900 + 420 + 49 = 1369.$

- 107) Welche Formel läßt sich an Hand der nebenstehenden Zeichnung aufstellen?

Die Richtigkeit der aufgestellten Formel ist durch Rechnung zu überprüfen!

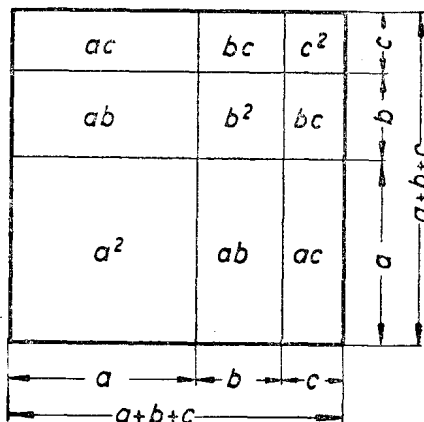


Bild 28

- 107a) Durch wiederholtes Ausmultiplizieren leite man die Formeln ab:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Anleitung: Man setze für $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$.

b) Das Ausklammern des gemeinschaftlichen Faktors

Während beim Multiplizieren von Summen oder Differenzen mit einer Zahl die vorhandenen Klammern verschwinden, werden beim sog. Ausklammern des gemeinschaftlichen Faktors oder — man nennt es auch — beim Klammersetzen in eine algebraische Summe Klammern gesetzt. So ist z. B. in der Summe: $a x + b x + c x$ den 3 Gliedern die Größe x gemeinsam. Man kann sie vor eine Klammer setzen und schreibt:

$$a x + b x + c x = x(a + b + c).$$

Multipliziert man die rechte Seite dieser Gleichung aus, so erhält man die linke Seite.

Weitere Beispiele:

$$a b x + a b y + a b z = a b (x + y + z)$$

$$3 a b - 6 a c + 9 a d = 3 a (b - 2 c + 3 d)$$

$$0,3 x^2 + 3 x y - 0,6 x y^2 = 0,3 x (x + 10 y - 2 y^2)$$

$$2 a b - a + a c = a (2 b - 1 + c).$$

Aufgaben:

108) $16a - 24b + 8c =$

109) $8ab + 12bc =$

110) $36xy - 30y^2 + 18y =$

111) $10 - 20a - 30b =$

112) $3ax + 4bx - cx =$

113) $(a + b)c - (a + b)d =$

114) $a(x - y) - (x - y) =$

115) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{8}x =$

116) $0,5a^2 - a + 1,5ab =$

4. Das Dividieren

Soll die unbestimmte Zahl a durch eine andere unbestimmte Zahl b dividiert werden, so schreibt man $a : b$ oder auch in Bruchform $\frac{a}{b}$. Voraussetzung: $b \neq 0$ (vgl. S. 38). (Um Verwechslungen vorzubeugen, wird zweckmäßig beim Buchstabenrechnen der waagerechte Bruchstrich: $\frac{a}{b}$, nicht der schräge: a/b , verwendet.)

Ist a von b verschieden, mathematisch ausgedrückt: $a \neq b$ [lies: a ungleich b], so hat der Quotient $\frac{a}{b}$ einen unbestimmten Wert je nach der Größe von a und b . Ist $a = 6$ und $b = 3$, dann beträgt $\frac{a}{b} = 2$; für $a = 5$ und $b = 2$ ist $\frac{a}{b} = 2,5$.

Wenn der Zähler a und der Nenner b des Quotienten (Bruches) $\frac{a}{b}$ einander gleich sind, ist also $a = b$, dann ist der Wert des Quotienten $\frac{a}{a} = 1$. Setzt man z. B. für $a = b = 4$ ein, so würde man für $\frac{a}{a}$ den bestimmten Wert $\frac{4}{4}$ erhalten, und dies ist 1.

Ebenso erhält man $\frac{ab}{ab} = 1$ oder $\frac{uvw}{uvw} = 1$ oder $\frac{a^2}{a^2} = 1$ oder $\frac{x+y}{x+y} = 1$, da bei allen diesen Brüchen im Zähler und Nenner derselbe Wert steht. Die soeben angeführten Beispiele lassen sich in dem Satz zusammenfassen:

┃ Jede Zahl durch sich selbst dividiert ergibt 1.

Das letzte Beispiel $\frac{x+y}{x+y} = 1$ kann man auch in der Form schreiben: $(x + y) : (x + y) = 1$. Man muß die Summe im Zähler und auch die im Nenner in Klammern einschließen. Man beachte den Unterschied zwischen den beiden Aufgaben:

(I) $(x + y) : (x + y) =$

(II) $x + y : x + y =$

In (I) erhält man, wie soeben gezeigt, 1.

In (II), wo die Klammern fehlen, kann man nur schreiben: $x + \frac{y}{x} + y$. Man erhält keinen bestimmten Wert.

Für $x = 2$ und $y = 4$ erhält man

$$\text{in (I) } (2 + 4) : (2 + 4) = 6 : 6 = 1$$

$$\text{und in (II) } 2 + 4 : 2 + 4 = 2 + 2 + 4 = 8.$$

Für $x = 3$ und $y = 4$ erhält man in (I) $(x + y) : (x + y) = 1$

$$\text{in (II) } x + y : x + y = 8\frac{1}{3}.$$

a) Dividieren eines Produktes durch eine Zahl

Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man nur einen Faktor durch diese Zahl dividiert.

In Buchstaben:

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$$

oder in Bruchform:

$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$$

Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet durch Einsetzen beliebiger Zahlenwerte für a , b und c ein.

Man erhält z. B. für $a = 4$; $b = 6$ und $c = 2$:

$$\frac{4 \cdot 6}{2} = \frac{4}{2} \cdot 6 = 4 \cdot \frac{6}{2} = 12.$$

Die letzte Formel rückwärts gelesen, ergibt:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Dies drückt sich in Worten wie folgt aus:

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit dieser Zahl multipliziert (S. 31).

b) Dividieren relativer Zahlen (s. S. 25)

Entsprechend der auf S. 98 angeführten Vorzeichenregel gilt auch hier:

| | |
|------------|---------------------------------------|
| $+:+ = +$ | d. h.: plus durch plus gleich plus, |
| $-:- = +$ | d. h.: minus durch minus gleich plus, |
| $+: - = -$ | d. h. plus durch minus gleich minus, |
| $-: + = -$ | d. h.: minus durch plus gleich minus. |

Bild 29

$$(+a) : (+b) = +\frac{a}{b}$$

$$(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}$$

$$(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$$

$$(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}.$$

Beispiele:

$$(+ a b) : (+ a) = + \frac{a b}{a} = + b$$

$$(+ 6 a b) : (- 3 a) = - \frac{6 a b}{3 a} = - 2 b$$

$$(- x^2 y) : (- x^2) = + \frac{x^2 y}{x^2} = + y$$

$$(- r s v) : (+ r v) = - \frac{r s v}{r v} = - s$$

$$(+ 8 a b) : \left(- \frac{1}{16} b \right) = - \frac{8 a b}{\frac{1}{16} b} = - 128 a$$

$$(- 0,4 x^2) : (- 0,2 x) = + \frac{0,4 x^2}{0,2 x} = + 2 x.$$

c) Dividieren einer Summe durch eine Zahl

Eine Summe (oder Differenz) zweier unbestimmter Zahlen wird durch eine dritte unbestimmte Zahl dividiert, indem man jedes Glied der Summe (oder Differenz) durch diese Zahl dividiert.

Dieser Satz, der sich als Formel ausdrückt:

$$(a + b) : c = a : c + b : c \quad \text{oder, anders geschrieben:}$$

$$(a - b) : c = a : c - b : c \quad \text{,, ,, ,, :}$$

| |
|---|
| $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ |
| $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ |

ist die Umkehrung des auf S. 99 bewiesenen Satzes über das Multiplizieren einer Summe mit einer Zahl. Da die Multiplikation die umgekehrte Rechenoperation der Division ist, folgt aus $(a + b) : c = a : c + b : c$ die Gleichung $(a + b) = (a : c + b : c) \cdot c$. Die rechte Seite der Gleichung ausmultipliziert ergibt:

$$(a : c) \cdot c + (b : c) c, \text{ und dies ist tats\u00e4chlich: } a + b.$$

Beispiele:

$$a) (2 a x - 4 b x + 8 x) : 2 x = \frac{2 a x - 4 b x + 8 x}{2 x} = \frac{2 a x}{2 x} - \frac{4 b x}{2 x} + \frac{8 x}{2 x} = a - 2 b + 4.$$

Man h\u00e4tte in dieser Aufgabe auch den gemeinsamen Faktor des Z\u00e4hlers ausklammern k\u00f6nnen; also: $\frac{2 x (a - 2 b + 4)}{2 x}$. Z\u00e4hler und Nenner durch $2 x$ geteilt, ergibt: $\frac{1 \cdot (a - 2 b + 4)}{1} = a - 2 b + 4$.

Grundfalsch w\u00e4re es, die $2 x$ des Nenners etwa nur gegen die in dem 1. Gliede des Z\u00e4hlers enthaltenen $2 x$ zu k\u00fcrzen. Man darf niemals beim K\u00fcrzen eines Bruches, in dessen Z\u00e4hler eine Summe steht,

nur ein Glied kürzen. Immer ist die ganze Summe zu kürzen, und dies macht man so, daß man zunächst — wenn möglich — die Summe durch Ausklammern in ein Produkt verwandelt und dann erst einen Faktor dieses entstandenen Produkts hebt.

$$b) \frac{3a + 6ab}{3a} = \frac{3a(1 + 2b)}{3a} = 1 + 2b$$

$$\text{oder} \quad = \frac{3a}{3a} + \frac{6ab}{3a} = 1 + 2b,$$

aber niemals: $\frac{3a + 6ab}{3a} = 1 + 6ab!$ Diese Gleichung ist falsch!

$$c) \frac{ab + cd}{a} = \frac{ab}{a} + \frac{cd}{a} = b + \frac{cd}{a}.$$

Das Ausklammern eines gemeinsamen Faktors im Zähler war nicht möglich.

$$d) \frac{x^2y + xy}{xy} = \frac{xy(x+1)}{xy} = x + 1$$

$$e) \frac{x^2 + ax - cx}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{ax}{x^2} - \frac{cx}{x^2} = 1 + \frac{a}{x} - \frac{c}{x} = 1 + \frac{a-c}{x}.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 113 Nr. 117...121.

d) Dividieren einer Summe durch eine Summe

In der Aufgabe $\frac{ax + bx}{a + b}$ darf man nicht die a der ersten Glieder und die b der zweiten Glieder gegeneinander kürzen. Glieder darf man nicht heben, nur Faktoren. Als mahrende Gedächtnisregel möge folgender Satz dienen:

Faktoren heben, verhindert Fehler!

Wer Glieder hebt, macht grobe Fehler!

Will man den Bruch: $\frac{ax + bx}{a + b}$ durch Kürzen vereinfachen, so ziehe man den gemeinsamen Faktor x im Zähler vor die Klammer und kürze dann erst durch die Summe $(a + b)$. Also so: $\frac{ax + bx}{a + b} = \frac{x(a + b)}{a + b} = x$.

Für diese Art der Rechnung noch einige

Beispiele:

$$a) \frac{a^2c + ac^2}{a + c} = \frac{ac(a + c)}{a + c} = ac$$

$$b) \frac{3x - 3y}{2x - 2y} = \frac{3(x - y)}{2(x - y)} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$c) \frac{a + ab}{3b + 3} = \frac{a(1 + b)}{3(b + 1)} = \frac{a}{3} = \frac{1}{3}a$$

$$d) \frac{x - y}{y - x} = \frac{-1(y - x)}{y - x} = -1.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 113 Nr. 122...126.

Bisweilen läßt sich unter Benutzung der auf S. 101 u. 102 abgeleiteten Formeln:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

der Zähler oder Nenner in ein Produkt umwandeln, so daß anschließend der Bruch gekürzt werden kann. Hierfür einige

Beispiele:

$$\text{a) } \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b$$

$$\text{b) } \frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)(a + b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$$

$$\text{c) } \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a + b)^2}{a + b} = a + b$$

$$\text{d) } \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2}{a - b} = a - b$$

$$\text{e) } \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a - b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a - b}{a + b}$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 113 Nr. 127...133.

Kommt man mit den beiden soeben angegebenen Verfahren für das Umwandeln einer Summe in ein Produkt nicht zum Ziel, so führe man die Division wie beim Rechnen mit bestimmten Zahlen (S. 23) durch:

Man teilt das 1. Glied des Dividenden durch das 1. Glied des Divisors (Teilers) und multipliziert mit dem erhaltenen Quotienten den ganzen Teiler. Dieses Produkt zieht man vom Dividenden ab (d. h.: Vorzeichen ändern und addieren) und wiederholt das bisherige Verfahren mit dem sich ergebenden Rest.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \text{a) } (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \\ \underline{a^3 + a^2b} \\ 2a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \underline{2a^2b + 2a^2b} \\ ab^2 + b^3 \\ \underline{ ab^2 + b^3} \\ 0 \end{array} \quad \text{Ergebnis: } a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } (3x^2 + xy - 2y^2) : (3x - 2y) = x + y \\ \underline{3x^2 - 2xy} \\ 3xy - 2y^2 \\ \underline{ 3xy - 2y^2} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ergebnis: } x + y \\ \text{Probe: } (3x - 2y)(x + y) \\ = 3x^2 + xy - 2y^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{e) } (x^3 + y^3) : (x + y) = x^2 - xy + y^2 \\
 \begin{array}{r}
 x^3 \\
 \hline
 + x^2 y \\
 y^3 - x^2 y \\
 \hline
 - x^2 y - x y^2 \\
 y^3 \qquad + x y^2 \\
 \hline
 y^3 \qquad + x y^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Ergebnis: $x^2 - xy + y^2$
 Probe: $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$
 $= x^3 + y^3.$

$$\begin{array}{r}
 \text{d) } (2a^2 - ab - 6b^2) : (2a + 3b) = a - 2b \\
 \begin{array}{r}
 2a^2 + 3ab \\
 \hline
 - 4ab - 6b^2 \\
 - 4ab - 6b^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Ergebnis: $a - 2b$
 Probe: Durch Multiplikation des
 Ergebnisses mit dem
 Divisor erhält man den
 Dividenten!

$$\begin{array}{r}
 \text{e) } (6a^2 + 5ab - 6b^2) : (3a - 2b) = 2a + 3b \\
 \begin{array}{r}
 6a^2 - 4ab \\
 \hline
 9ab - 6b^2 \\
 9ab - 6b^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Ergebnis: $2a + 3b$
 Probe nicht vergessen!

Weitere Übungsaufgaben: S. 113 Nr. 134...138.

Die Divisionsaufgabe $\frac{1}{x+y}$ läßt sich nicht durchführen. Man kann sie nur in anderer Form schreiben; nämlich $1 : (x + y)$: Es ist stets

$$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Begründung: Es ergibt sich, wenn für $x = 2$ und $y = 4$ gesetzt wird:

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{2+4} \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{6} \neq \frac{3}{4}.
 \end{array}$$

Wäre die Ungleichung $\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ eine richtige Gleichung, so müßte umgekehrt: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ gleich $\frac{1}{x+y}$ sein. Um $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ zu addieren, muß man diese beiden ungleichnamigen Brüche gleichnamig machen. Der Hauptnenner ist das Produkt der beiden Nenner, also xy . Für $\frac{1}{x}$ setzt man $\frac{y}{xy}$ und für $\frac{1}{y} = \frac{x}{xy}$. Also ist: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy}$. Diese beiden gleichnamigen Brüche lassen sich addieren, indem man sie auf einen Bruchstrich setzt, dessen Zähler die Summe der beiden Zähler und dessen Nenner der gemeinsame Nenner (Hauptnenner) ist.

Man erhält:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y+x}{xy} = \frac{x+y}{xy}.$$

Beispiele für das Addieren gleich- und ungleichnamiger Brüche:

$$a) \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = \frac{2+3}{a} = \frac{5}{a}$$

$$b) \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$c) \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{2b}{ab} + \frac{3a}{ab} = \frac{2b+3a}{ab} = \frac{3a+2b}{ab}$$

$$d) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$e) \frac{a}{bc} + \frac{c}{b} = \frac{a}{bc} + \frac{c \cdot c}{bc} = \frac{a+c^2}{bc}$$

$$f) \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{z}{xyz} + \frac{y}{xyz} + \frac{x}{xyz} = \frac{x+y+z}{xyz}$$

$$g) \frac{a}{b} + 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a+b}{b}$$

$$h) \frac{c}{d} - 1 = \frac{c}{d} - \frac{d}{d} = \frac{c-d}{d}$$

$$i) \frac{a}{d} - \frac{b+c}{d} = \frac{a-(b+c)}{d} = \frac{a-b-c}{d} \quad \text{Achtung! Klammer im Zähler nicht vergessen!}$$

$$j) \frac{a}{x-1} + \frac{a}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)+a}{(x-1)^2} = \frac{ax}{(x-1)^2}.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 113 Nr. 139...148.

e) Dividieren durch einen Bruch

Ebenso wie beim Dividieren durch Brüche mit bestimmten Zahlen (Seite 34) ist auch hier der Dividend mit dem Kehrwert (reziproker Wert) des Teilers (Divisors) zu multiplizieren. Hierzu einige

Beispiele:

$$a) x : \frac{x}{y} = x \cdot \frac{y}{x} = \frac{xy}{x} = y$$

$$b) \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} \cdot a^2 = \frac{a \cdot a}{a} = a$$

$$c) (a+b) : \frac{c^2}{a-b} = (a+b) \cdot \frac{a-b}{c^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{c^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$$d) \frac{2}{x} : \frac{3}{x} = \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{3} = \frac{2 \cdot 3}{x \cdot x} = \frac{6}{x^2}$$

$$e) \frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x} \cdot x^2 \cdot x^3 = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x} = x^4.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 113 Nr. 149...156.

Aufgaben:

117) $\frac{6uv^2 - 9u^2v}{6uv} =$

118) $\frac{2,5abx - 2ax + 1,5x}{0,5x} =$

119) $\frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ac - a}{\frac{1}{2}a} =$

120) $\frac{ax + bx^2 + cx^3}{x} =$

121) $\frac{\frac{2}{5}az + \frac{3}{4}bz - \frac{7}{10}cz}{\frac{1}{20}z} =$

122) $\frac{2a + 4b}{a + 2b} =$

123) $\frac{6r + 9s}{2r + 3s} =$

124) $\frac{4ax^2 - 4ay^2}{x^2 - y^2} =$

125) $\frac{3ax - 3bx + 3cx}{a - b + c} =$

134) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a - b) =$

135) $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) : (a^2 + b^2) =$

136) $(z^2 + z - 20) : (z - 4) =$

137) $(x^2 + 1,5x - 1) : (2x - 1) =$

138) $(x^3 - y^3) : (x - y) =$

139) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a}{a-b} =$

140) $\frac{a+2b}{b} - \frac{a+b}{b} =$

141) $\frac{3x}{4y} - \frac{2x}{3y} =$

142) $\frac{x-y}{5a} - \frac{x-y}{2a} =$

143) $\frac{2a}{x-1} - \frac{a}{x^2-1} =$

144) $\frac{a}{x+1} - \frac{a}{x-1} =$

145) $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} =$

146) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} =$

147) $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} =$

126) $\frac{3a^2x + 3x^3}{a^2 + x^2} =$

127) $\frac{a^2 - b^2}{a + b} =$

128) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} =$

129) $\frac{a^2 + ab + 0,25b^2}{a + 0,5b} =$

130) $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)(a-b)} =$

131) $\frac{9x^2 - 4y^2}{3x + 2y} =$

132) $\frac{0,36r^2 - 0,25s^2}{0,6r - 0,5s} =$

133) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} =$

148) $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} - \frac{2}{1-a^2} =$

149) $x : \frac{1}{x} =$

150) $a : \frac{a}{2} =$

151) $\frac{a}{6} : \frac{b}{12} =$

152) $\frac{b}{3} : \frac{3}{b} =$

153) $\frac{5}{x} : \frac{x}{5} =$

154) $\frac{a}{b} : \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a^2} =$

155) $\frac{6}{x} : \frac{2}{x^2} : 3 =$

156) $\frac{a^2}{c} : \frac{b^2}{c} : \frac{a}{b} =$

III. Das Rechnen mit Proportionen

Beim Vergleichen zweier Zahlen a und b miteinander kann man entweder feststellen, um wieviel die Zahl a größer als die Zahl b ist — d. h. man bildet die Differenz $(a - b)$ — oder aber man bildet den Quotienten $\frac{a}{b}$ und drückt dadurch aus, wie oft die Zahl b in der Zahl a enthalten ist.

Die Differenz zweier Zahlen nennt man das arithmetische Verhältnis, während ihr Quotient das geometrische Verhältnis ist.

Beispiel:

Das arithmetische Verhältnis der Zahlen 36 und 9 beträgt 27; denn $36 - 9 = 27$. Die Zahl 36 ist um 27 größer als 9.

Das geometrische Verhältnis der Zahlen 36 und 9 beträgt 4; denn $\frac{36}{9} = 4$. Die Zahl 36 ist viermal so groß wie 9.

Sind 2 Verhältnisse einander gleich, so nennt man eine solche Gleichheit eine Proportion. Man unterscheidet zwischen

- a) Arithmetische Proportion, z. B. $36 - 9 = 40 - 13$,
- b) geometrische Proportion, z. B. $\frac{36}{9} = \frac{12}{3}$ oder $36 : 9 = 12 : 3$.

Bei jeder Proportion unterscheidet man zwischen den beiden Außengliedern und den beiden Innengliedern. Wie der Name sagt, stehen die Außenglieder bei einer Proportion außen, die Innenglieder aber innen in der Proportion.

Bei der unter a) angegebenen arithmetischen Proportion sind die Außenglieder: 36 und 13, die Innenglieder: 9 und 40. Bei der unter b) angeführten geometrischen Proportion sind die Außenglieder: 36 und 3, die Innenglieder 9 und 12.

1. Die arithmetischen Proportionen

Über die Außen- und Innenglieder der arithmetischen Proportionen, die in der Technik weniger verwendet werden als die geometrischen, gilt der

Lehrsatz:

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der Außenglieder gleich der Summe der Innenglieder.

In der arithmetischen Proportion: $27 - 12 = 48 - 33$ sind die Außenglieder: 27 und 33. Ihre Summe beträgt: $27 + 33 = 60$. Sie ist gleich der Summe der beiden Innenglieder 12 und 48; nämlich $12 + 48 = 60$.

Allgemein ausgedrückt: Die 4 Größen a, b, c und d bilden die arithmetische Proportion: $a - b = c - d$, wenn $a + d = b + c$ ist.

Oder umgekehrt:

Aus der Gleichheit zweier Summen: $(a + d) = (b + c)$ läßt sich immer die arithmetische Proportion: $a - b = c - d$ aufstellen.

Sonderfall:

Sind in einer arithmetischen Proportion die beiden Innenglieder gleich groß, so nennt man dieses Innenglied das arithmetische Mittel oder den Mittelwert zu den beiden äußeren Gliedern.

Beispiele:

- a) $8 - 5 = 5 - 2$. 5 ist das arithmetische Mittel zu 2 und 8.
- b) $25 - 17 = 17 - 9$. Die beiden Innenglieder 17 und 17 sind einander gleich. 17 ist der Mittelwert zu 25 und 9.
- c) Kennt man das arithmetische Mittel zweier Zahlen nicht, so bezeichne man es zunächst mit dem Buchstaben x . Zu den beiden Zahlen 4 und 12 soll der Mittelwert bestimmt werden. Es muß die Gleichung gelten: $12 - x = x - 4$. Da die Summe der Außenglieder gleich der der beiden Innenglieder ist, ergibt sich: $12 + 4 = x + x$ oder $16 = 2x$. In Worten heißt diese letzte Gleichung: Das Doppelte einer unbekanntes Zahl ist 16. Hieraus folgt, daß die unbekanntes Zahl selbst die Hälfte von 16, also $\frac{16}{2} = 8$ ist.

Das arithmetische Mittel oder der Mittelwert zweier Zahlen ist die halbe Summe aus den beiden Zahlen.

Der Mittelwert zu den beiden unbestimmten Zahlen a und b lautet: $\frac{a + b}{2}$.

Mit Vorstehendem ist die Bedeutung der arithmetischen Proportionen für die Technik erschöpft. Von größerer Wichtigkeit sind die geometrischen Proportionen, die man einfach auch nur mit „Proportionen“ bezeichnet. Spricht man von einer „Proportion“, so ist damit stets eine geometrische Proportion gemeint.

2. Die geometrischen Proportionen

Die Gleichheit zweier Brüche nennt man eine (geometrische) Proportion. Man schreibt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $a : b = c : d$ und liest: a zu b wie c zu d . Man meint damit: Es verhält sich a zu b , wie sich c zu d verhält.

In dieser Proportion sind die Außenglieder: a und d ; die Innenglieder: b und c .

Für jede Proportion gilt der wichtige

Produktensatz: In jeder Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem der Innenglieder.

Wenn $a : b = c : d$ ist, so soll nach diesem Produktsatz $ad = bc$ sein.

Beweis: Die Proportion $a : b = c : d$ oder, in Bruchform geschrieben: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist eine Gleichung. Wie später im Abschnitt C II Seite 190 gezeigt wird, darf man jede Seite einer Gleichung mit ein und derselben Zahl multiplizieren. Hier mögen die beiden Seiten dieser Gleichung mit dem Hauptnenner der beiden Brüche, nämlich bd , multipliziert werden. Dies ergibt: $\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$. Die linke Seite kann man durch b , die rechte durch d kürzen und erhält: $ad = bc$. Dies ist die Behauptung, und somit ist der Beweis erbracht.

(Anmerkung: Der Produktsatz ist ähnlich dem über die Außen- und Innenglieder der arithmetischen Proportionen. Dort war die Summe aus den beiden Außengliedern gleich der aus den beiden Innengliedern. Hier handelt es sich jedoch um die Gleichheit der Produkte der Außen- und Innenglieder.)

Wer dieser vorstehenden, allgemein gültigen Beweisführung noch nicht folgen kann, der überzeuge sich durch Einsetzen von Zahlenwerten von der Richtigkeit der Behauptung. Jedoch ist hier das Einsetzen der Zahlenwerte vorsichtig auszuführen. 3 Werte kann man beliebig wählen, z. B. $a = 4$, $b = 2$, $c = 10$. d jedoch muß so gewählt werden, daß $\frac{4}{2} = \frac{10}{d}$ ist. Da 4 doppelt so groß wie 2 ist, muß auch 10 doppelt so groß wie d sein; d. h. $d = 5$. Die Proportion lautet somit: $4 : 2 = 10 : 5$. Das Produkt der Außenglieder $4 \cdot 5 = 20$ ist gleich dem Produkt der Innenglieder $2 \cdot 10 = 20$.

Den Produktsatz kann man dazu benutzen, um schnell festzustellen, ob eine Proportion richtig ist:

$$\begin{array}{rcll}
 5 : 6 = 10 : 12 & \text{ist richtig; denn} & 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10 & \\
 & & 60 = 60 & \text{ebenso:} \\
 10 : 4 = 5 : 2 & \text{,, ,, ,,} & 10 \cdot 2 = 4 \cdot 5 & \\
 & & 20 = 20 & \text{oder:} \\
 2 : 2,5 = 4 : 5 & \text{,, ,, ,,} & 2 \cdot 5 = 2,5 \cdot 4 & \\
 & & 10 = 10. & \text{Aber:}
 \end{array}$$

$7 : 3 \neq 21 : 8$; das Produkt der Außenglieder: $7 \cdot 8 = 56$ ist nicht gleich dem Produkt der Innenglieder: $3 \cdot 21 = 63$.

Umgekehrt läßt sich aus der Gleichheit zweier Produkte eine Reihe von Proportionen (im ganzen 8 Stück) aufstellen, indem man die Faktoren des einen Produkts zu Außengliedern (oder Innengliedern) und die Faktoren des anderen Produktes zu Innengliedern (oder Außengliedern) einer Proportion macht.

Beispiel:

Aus $3 \cdot 16 = 4 \cdot 12$ ergeben sich folgende 8 Proportionen:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $3 : 4 = 12 : 16$ | e) $4 : 3 = 16 : 12$ |
| b) $3 : 12 = 4 : 16$ | f) $4 : 16 = 3 : 12$ |
| c) $16 : 4 = 12 : 3$ | g) $12 : 3 = 16 : 4$ |
| d) $16 : 12 = 4 : 3$ | h) $12 : 16 = 3 : 4$ |

An diesen soeben aufgeführten 8 Proportionen erkennt man auch den folgenden Satz über die Vertauschbarkeit der Außen- und Innenglieder:

In einer Proportion darf man die Außenglieder oder die Innenglieder oder die beiden Seiten der Proportion miteinander vertauschen.

Aus der Proportion $a : b = c : d$ folgt

| | |
|--------------------------------------|-----------------|
| durch Vertauschung der Außenglieder: | $d : b = c : a$ |
| „ „ „ Innenglieder: | $a : c = b : d$ |
| | $d : c = b : a$ |
| „ „ „ beiden Seiten: | $c : d = a : b$ |
| | $c : a = d : b$ |
| | $b : d = a : c$ |
| | $b : a = d : c$ |

In diesen 8 Proportionen ist immer das Produkt der Außenglieder gleich dem der Innenglieder; nämlich: $a d = b c$.

a) Aufsuchen der 4. Proportionale

Sind von einer Proportion nur 3 Glieder bekannt, so kann man das fehlende 4. Glied nach der folgenden Regel bestimmen:

Ein Innenglied einer Proportion ist gleich dem Produkt der beiden Außenglieder, geteilt durch das andere Innenglied.
 Ein Außenglied einer Proportion ist gleich dem Produkt der beiden Innenglieder, geteilt durch das andere Außenglied.

(Diese Regel läßt sich leicht mit Hilfe der Lehre von den Gleichungen (Seite 192 ff.) beweisen. Hier wird auf die Beweisführung verzichtet.)

Das unbekannte Glied einer Proportion möge x lauten.

$$\begin{aligned} \text{Aus } a : x = c : d \text{ folgt } x &= \frac{a d}{c} \\ \text{„ } a : b = x : d \text{ „ } x &= \frac{a d}{b} \\ \text{„ } x : b = c : d \text{ „ } x &= \frac{b c}{d} \\ \text{„ } a : b = c : x \text{ „ } x &= \frac{b c}{a} \end{aligned}$$

Zahlenbeispiele:

$$\text{a) } 4 : 7 = 32 : x \text{ ergibt: } x = \frac{7 \cdot 32}{4} = 56$$

$$\text{b) } 1/2 : 2/3 = 12 : x; \text{ hieraus } x = \frac{2/3 \cdot 12}{1/2} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 2}{3} = 16$$

$$\text{c) } 2 : 11 = x : 55; x = \frac{2 \cdot 55}{11} = 10$$

$$\text{d) } 8a : 5b = x : 2,5b; x = \frac{8a \cdot 2,5b}{5b} = 4a$$

$$\text{e) } \frac{a}{b} : x = \frac{c}{d} : \frac{b}{d}; x = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{d}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot c} = \frac{a}{c}$$

$$\text{f) } (a + b) : x = (a^2 - b^2) : (a - b); x = \frac{(a + b) \cdot (a - b)}{a^2 - b^2} = 1$$

$$\text{g) } x : 2,5 = 6 : 7,5; x = \frac{2,5 \cdot 6}{7,5} = 2$$

$$\text{h) } x : 2a = b : 6a; x = \frac{2ab}{6a} = \frac{b}{3} = \frac{1}{3}b.$$

b) Mittlere Proportionale oder geometrisches Mittel

Eine Proportion, bei der die Innenglieder (oder Außenglieder) gleich sind, heißt eine stetige Proportion. In der stetigen Proportion: $a : b = b : c$ nennt man b die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zu a und c . In der stetigen Proportion $a : b = c : a$ ist a die mittlere Proportionale zu b und c .

Zahlenbeispiele:

a) In der Proportion $2 : x = x : 8$ ist die Unbekannte x das geometrische Mittel zu 2 und 8. Nach dem Produktsatz ist: $x \cdot x = 2 \cdot 8$ oder $x^2 = 16$; d. h.: das Quadrat einer unbekanntem Zahl x ist gleich 16. Die unbekanntem Zahl x ist dann 4.

Das geometrische Mittel zu 2 und 8 lautet 4.

(Wiederholung: Das arithmetische Mittel zu 2 und 8 lautet $\frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$.)

b) Aus der Proportion:

$$x : 4 = 9 : x \text{ folgt: } x^2 = 36 \text{ oder } x = 6.$$

Das geometrische Mittel zu 4 und 9 ist 6. (Das arithmetische Mittel zu 4 und 9 ist 6,5.)

c) Wie lautet die mittlere Proportionale zu 4 und 16?

Man stellt die Proportion auf: $4 : x = x : 16$ und findet hieraus

$$x^2 = 4 \cdot 16 = 64 \quad \text{oder} \quad x = 8.$$

(Das arithmetische Mittel zu 4 und 16 lautet: $x = \frac{4 + 16}{2} = \frac{20}{2} = 10$).

c) Der Proportionalitätsfaktor

Aus dem Verhältnis der beiden Zahlen 2 und 3, das man entweder als gemeinen Bruch $\frac{2}{3}$ oder aber auch in der Form 2:3 schreibt, lassen sich durch Erweitern mit irgendwelchen Zahlen gleiche Verhältnisse aufstellen.

Durch Erweitern mit 2 erhält man das gleiche Verhältnis $\frac{4}{6}$.

Die Proportion $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ hat den sog. Proportionalitätsfaktor 2.

In der Proportion $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ beträgt der Proportionalitätsfaktor 4; denn $\frac{12}{20}$ ist aus $\frac{3}{5}$ durch Erweitern des letzten Verhältnisses mit 4 entstanden.

Bestimmung des Proportionalitätsfaktors: Den Proportionalitätsfaktor einer Proportion bestimmt man dadurch, daß man den Zähler (oder Nenner) des einen Verhältnisses durch den Zähler (oder Nenner) des anderen Verhältnisses teilt.

Beispiel:

Wie lautet der Proportionalitätsfaktor der Proportion:

$$2 : 5 = 36 : 90 ?$$

Lösung: $36 : 2 = 18$ oder $90 : 5 = 18$.

18 ist der Proportionalitätsfaktor der Proportion:

$$2 : 5 = 36 : 90.$$

d) Korrespondierende Addition und Subtraktion

Aus der Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lassen sich weitere Proportionen dadurch ableiten, daß man sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Proportion die gleichen Rechenoperationen des Addierens oder Subtrahierens vornimmt.

Wenn man beispielsweise in der gegebenen Proportion $a : b = c : d$ zu dem Zähler a des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ den Nenner b hinzuzählt, so hat man in entsprechender Weise auch bei dem Verhältnis $c : d$ zum Zähler c den Nenner d zu addieren.

Man erhält aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ die neue Proportion: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Die Rechenoperationen, die man auf der linken Seite der Proportion vornimmt, müssen denen, die man auch rechts vornehmen muß, damit man eine neue Proportion erhält, entsprechen oder — man nennt dies auch — sie müssen korrespondieren.

Auf diese Weise erhält man aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgende Proportionen:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \quad \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d} \text{ u. ä.}$$

Zahlenbeispiel:

Aus der Proportion $2:3 = 6:9$ erhält man nach dem Verfahren der korrespondierenden Addition die neuen Proportionen:

$$\begin{aligned} \frac{2+3}{3} &= \frac{6+9}{9} \text{ das ist } \frac{5}{3} = \frac{15}{9} \text{ oder} \\ \frac{3-2}{3} &= \frac{9-6}{9} \text{ „ „ } \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \text{ „} \\ \frac{3+2}{3-2} &= \frac{9+6}{9-6} \text{ „ „ } \frac{5}{1} = \frac{15}{3} \text{ „} \\ \frac{2}{2+3} &= \frac{6}{6+9} \text{ „ „ } \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Der Beweis für die Allgemeingültigkeit der korrespondierenden Addition läßt sich mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors wie folgt führen:

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, dann kann man den Proportionalitätsfaktor m so finden, daß $a = mc$ und $b = md$ ist. Wie im Kapitel „Gleichungen“ (S. 189) gezeigt wird, darf man die linken und rechten Seiten der Gleichungen miteinander addieren, subtrahieren, multiplizieren oder auch dividieren, und man erhält hierdurch wiederum eine Gleichung. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen:

$$a = mc$$

$$b = md$$

$$\text{erhält man } a + b = mc + md$$

$$a + b = m(c + d)$$

Diese Gleichung durch die ursprüngliche $b = md$

$$\text{dividiert, ergibt } \frac{a+b}{b} = \frac{m(c+d)}{md}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Man hat somit die gewünschte Gleichung erhalten. Der Beweis ist erbracht. Auf ähnlichen Wegen lassen sich die anderen angeführten Gleichungen beweisen.

Beispiel:

Mit Hilfe des Gesetzes der korrespondierenden Addition ist die Unbekannte x in der folgenden Proportion zu berechnen:

$$(2+x):x = 3:2.$$

Man formt die Proportion so um, daß die Unbekannte x nur in einem Gliede vorkommt. Auf beiden Seiten der Proportion zieht man vom ersten Gliede das zweite ab:

$$\begin{aligned} (2 + x - x) : x &= (3 - 2) : 2 \\ 2 : x &= 1 : 2 \\ x &= \frac{2 \cdot 2}{1} = 4 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x = 4$.

Das allgemeine Gesetz der korrespondierenden Addition läßt sich ebenfalls mittels des Proportionalitätsfaktors beweisen.

Wenn m, n, p und q irgendwelche beliebige Zahlen sind, so erhält man aus der ursprünglichen Proportion:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

die neue Proportion:
$$\frac{m a + n b}{p a - q b} = \frac{m c + n d}{p c - q d}$$

Zahlenbeispiel:

Es sei $a = 2$ $b = 3$ $c = 4$ $d = 6$
 $m = 7$ $n = 8$ $p = 9$ $q = 5$.

Die ursprüngliche Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lautet hiermit: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Es ergibt sich die neue Proportion:

$$\begin{aligned} \frac{m a + n b}{p a - q b} &= \frac{m c + n d}{p c - q d} \\ \frac{7 \cdot 2 + 8 \cdot 3}{9 \cdot 2 - 5 \cdot 3} &= \frac{7 \cdot 4 + 8 \cdot 6}{9 \cdot 4 - 5 \cdot 6} \\ \frac{14 + 24}{18 - 15} &= \frac{28 + 48}{36 - 30} \\ \frac{38}{3} &= \frac{76}{6} \end{aligned}$$

Die sog. fortlaufenden Proportionen entstehen durch Gleichsetzen mehrerer Verhältnisse.

Aus $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ ergibt sich: $a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2$.

(Anmerkung: An die Buchstaben a, b, c, d sind hier ein wenig unterhalb der Zeile kleine arabische Zahlen, der sog. Zeiger oder Index, angehängt. a_1 ist eine von a_2 verschiedene Zahl, ebenso b_1 und b_2 usw.)

Zahlenbeispiel:

Aus $\frac{48}{40} = \frac{24}{20} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ erhält man die fortlaufende Proportion:

$48 : 24 : 12 : 6 = 40 : 20 : 10 : 5$. Aus einer fortlaufenden Proportion lassen sich mehrere Proportionen durch Herausgreifen entsprechender Glieder aufstellen; man erhält z. B. aus $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4$ folgende Proportionen: $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ oder $a_1 : a_3 = b_1 : b_3$ oder $a_2 : a_4 = b_2 : b_4$.

Aufgaben über das Rechnen mit Proportionen

- 157) Welche 8 Proportionen lassen sich aus der Produktgleichung:
 $a b = c d$ ableiten?
- 158) Welche Proportionen erhält man aus $x : y = a : b$ durch Vertauschen der Außen- und Innenglieder?
 Die Unbekannte x ist in den Aufgaben 159... 173 zu berechnen:
- 159) $\frac{x}{3} = \frac{1}{4}$ 163) $\frac{6}{5} = \frac{3a}{x}$ 168) $x : \frac{a}{2} = \frac{1}{4} : \frac{a}{8}$
- 160) $\frac{2}{x} = \frac{4}{1}$ 164) $a : 5b = x : 10b$ 169) $x : 2a = 0,3b : 6a$
- 161) $\frac{1}{5} = \frac{x}{4}$ 165) $12a : 6ab = x : b$ 170) $0,3a : 5b = 1,5a : x$
- 162) $\frac{2}{a} = \frac{1}{x}$ 166) $2 : 7 = 14a : x$ 171) $ab : a^2 = x : a$
- 167) $0,5 : x = 0,25 : 4$ 172) $1,2 : x = 6 : 0,5$
- 173) $2\frac{1}{2} : x = 5 : 4$.
- 174) Wie lautet zu den Zahlen 4 und 25
 a) das arithmetische Mittel?
 b) das geometrische Mittel?
- 175) Es ist das α) arithmetische und β) geometrische Mittel anzugeben zu den Zahlen:
 a) 8 und 18 c) 4 und 36 e) 2 und 72.
 b) 9 „ 16 d) 3 „ 48
- 176) Wie lautet der Proportionalitätsfaktor folgender Proportionen:
 a) $3 : 4 = 15 : 20$ c) $2 : 5 = 2a : 5a$ e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$.
 b) $1 : 2 = 13 : 26$ d) $u : v = u^2 : uv$
- Die Unbekannte x ist in den Aufgaben 177... 186 mit Hilfe des Gesetzes der korrespondierenden Addition und Subtraktion zu berechnen.
- 177) $(8 + x) : x = 5 : 1$ 182) $(x - 1) : x = 1 : 3$
- 178) $(x + 7) : x = 5 : 1,5$ 183) $(x + 2) : x = 1 : 3$
- 179) $(5 - x) : x = 1 : 4$ 184) $(a + x) : x = (a + b) : b$
- 180) $(2 - x) : x = 3 : 1$ 185) $(a - x) : x = b : (a - b)$
- 181) $\frac{x - 3}{x + 3} = \frac{1}{4}$ 186) $(2a + x) : x = (a + b) : (b - a)$.
- 187) Die Höhe eines Fabrikschornsteines kann man durch Vergleich seiner Schattenlänge mit der Schattenlänge einer senkrecht stehenden Stange bestimmter Länge berechnen. Die Vergleichsmessungen müssen zur gleichen Zeit vorgenommen werden. Es verhält sich die Schornsteinhöhe zur Schattenlänge des Schornsteins wie die Stangenlänge zur Schattenlänge der Stange.
 Wie hoch ist ein Schornstein, der einen Schatten von 90 m wirft, wenn gleichzeitig eine 2 m lange Meßstange einen 3 m langen Schatten hat?

188) Die Umfänge zweier Kreise U_1 und U_2 verhalten sich wie die Durchmesser d_1 und d_2 .

Die Kreisinhalte F_1 und F_2 verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser d_1 und d_2 .

a) Diese beiden Sätze sind in Form von Proportionen anzugeben!

b) Der Kreis mit dem Durchmesser $d_1 = 10$ mm hat den Umfang $U_1 = 31,4$ mm. Wie groß ist der Umfang U_2 des Kreises mit dem Durchmesser $d_2 = 25$ mm?

c) Wievielfach größer wird der Querschnitt eines Rohres bei Verdoppelung des Rohrdurchmessers?

189) Bei einem Riementrieb verhalten sich (unter Vernachlässigung des Riemenschlupfes) die Riemenscheibendurchmesser umgekehrt wie die Lastdrehzahlen.

Die treibende Scheibe habe einen Durchmesser $D_1 = 125$ mm und macht $n_1 = 800$ U/min. Wie groß muß der Durchmesser D_2 der getriebenen Scheibe ausgeführt werden, wenn sie $n_2 = 400$ U/min machen soll?

190) Unter dem Übersetzungsverhältnis i eines Hebels versteht man das Verhältnis der Hebelarmlängen; also $i = \frac{L}{l}$, wenn L die in mm gemessene Länge des Hebelarmes der Kraft P und l die in mm gemessene Länge des Hebelarmes der Last Q ist. Nach dem Hebelgesetz ist das Produkt aus Kraft mal Kraftarm gleich dem aus Last mal Lastarm; als Formel heißt das: $P L = Q l$.

a) Welche Proportion läßt sich zwischen den Hebelarmlängen und den Kräften aufstellen?

b) Wie groß ist i , wenn die an dem Hebel wirkende Kraft $P = 45$ kg der Last $Q = 225$ kg das Gleichgewicht hält?

c) An einem wie langen Hebelarm l greift diese Last an, wenn die Kraft an dem Hebelarm $L = 520$ mm wirkt?

191) Das Übersetzungsverhältnis oder kürzer die Übersetzung i von Zahnrädern ist das Verhältnis der minutlichen Drehzahl n_1 des treibenden Rades zu der Drehzahl n_2 des getriebenen Rades. Es sei: $d_1 =$ Durchmesser des treibenden Rades in mm; $d_2 =$ Durchmesser des getriebenen Rades in mm; $z_1 =$ Zähnezahl des treibenden Rades; $z_2 =$ Zähnezahl des getriebenen Rades.

(Anmerkung: Index 1 weist auf das treibende Rad hin.)

Die Drehzahlen von treibendem und getriebenem Rad verhalten sich umgekehrt wie die Durchmesser der Räder.

Die Durchmesser zweier Zahnräder verhalten sich wie ihre Zähnezahlen.

a) i kann kleiner bzw. größer als 1 sein. Bei einer Übersetzung ins Schnelle ist $n_2 > n_1$. Wie groß ist dann i ?

- b) Welche Proportionen bestehen zwischen den Drehzahlen und den Durchmessern, zwischen den Durchmessern und den Zähnezahlen und zwischen den Drehzahlen und den Zähnezahlen bei 2 miteinander arbeitenden Zahnrädern?
- c) Wie groß ist bei der Übersetzung $i = \frac{1}{6}$ die Zähnezahl z_1 des treibenden Rades, wenn das getriebene Rad $z_2 = 15$ Zähne hat?
- 192) Bei gleichen Temperaturen verhalten sich die Rauminhalte V_1 und V_2 (in m^3) eines Gases umgekehrt wie die Spannungen p_1 und p_2 (in at).
- a) Dieses Gesetz ist in einer Formel anzugeben!
- b) 100 m^3 Gas stehen unter einem Druck von 1,5 at. Wie groß ist das Gasvolumen, wenn der Druck um 1 at erhöht wird unter Beibehaltung der Temperatur?
- 193) Die Durchflußmengen Q durch ein Rohr verhalten sich wie die Geschwindigkeiten v des durchströmenden Wassers. $Q_1 : Q_2 = v_1 : v_2$.
Durch ein Rohr fließen minutlich $Q_1 = 3,8 m^3$ hindurch. Wird die Durchflußgeschwindigkeit um 1 m/s erhöht, so wird die Durchflußmenge um 1,9 m^3 größer. Wie groß ist die ursprüngliche Durchflußgeschwindigkeit v_1 ?
- 194) Im Schmiedemessing (Muntzmetall, Ms 60) verhält sich die in ihm enthaltene Kupfermenge zu der Zinkmenge wie 3 : 2. Wieviel Kupfer (Cu) und Zink (Zn) sind in 40 kg Messing enthalten?
(Anleitung: In 40 kg Messing sind x kg Cu und $(40 - x)$ kg Zn enthalten. Proportion aufstellen! x unter Zuhilfenahme der korrespondierenden Addition berechnen!)
- 195) Verdoppelt man die Kraft, die einen Stab von einem bestimmten Querschnitt auf Zug beansprucht, so verdoppelt sich auch die dadurch hervorgerufene Zugspannung. Bei einer dreifachen Kraft wird die Zugspannung dreimal so groß usw.
- a) Welche Proportion kann man zwischen den Kräften P_1, P_2, P_3 und den durch sie hervorgerufenen Spannungen p_1, p_2, p_3 aufstellen?
- b) Erhöht man die einen Stab auf Zug beanspruchende Kraft P_1 um 100 kg, so wächst die Spannung $p_1 = 400 \text{ kg/cm}^2$ auf $p_2 = 450 \text{ kg/cm}^2$. Wie groß ist P_1 ?
- 196) Nach dem Ohmschen Gesetz der Elektrotechnik verhalten sich bei gleichen Spannungen die Stromstärken i_1 und i_2 umgekehrt wie die Widerstände r_1 und r_2 . Also: $i_1 : i_2 = r_2 : r_1$.
Erniedrigt man in einem Stromkreise den Widerstand von 110 Ω um die Hälfte, so nimmt die Stromstärke bei ein und derselben Spannung um 2 A zu. Welcher Strom floß ursprünglich in dem Stromkreise?
(Anleitung: Bei dem Widerstand $r_1 = 110 \Omega$ fließt der Strom i_1 .
" " " " $r_2 = 55 \Omega$ " " " $i_1 + 2$.
Stelle die Proportion zwischen diesen Widerständen und Stromstärken auf und bestimme i_1 mit Hilfe des Gesetzes der korrespondierenden Addition und Subtraktion!)

IV. Die Potenzrechnung

Ist bei einer Potenz (vgl. S. 14) die Basis oder der Potenzexponent oder beides (Potenzwert) eine unbestimmte Zahl, so kann man diese Größen, z. B. a^3 , x^4 oder 2^x , 3^a oder x^a , b^x usw., nicht weiter ausrechnen. Wohl aber läßt sich mit solchen unbestimmten Größen operieren, d. h. man kann mit ihnen weiterrechnen. Diese Größen werden erst dann bestimmt, wenn man bestimmte Zahlen für die unbestimmten einsetzt.

Unter a^n versteht man ein Produkt aus n Faktoren, deren jeder a ist. Die Potenzierung ist eine Multiplikation mit gleichen Faktoren¹⁾.

Für $a > 1$ und $n > 1$ wird $a^n > a$
 „ $a < 1$ „ $n > 1$ „ $a^n < a$.

Beispiel:

Für $a = 2$ und $n = 3$ wird $a^n = 2^3 = 8 > 2$
 „ $a = 0,2$ „ $n = 3$ „ $a^n = 0,2^3 = 0,008 < 0,2$.

Potenziert man eine Zahl, die größer als 1 ist, so wird der Potenzwert erst recht größer als 1.

Beispiel: $2^2 = 4$.

Potenziert man eine Zahl, die kleiner als 1 ist, so wird der Potenzwert erst recht kleiner als 1.

Beispiel: $0,2^2 = 0,04$.

1) Die Quadratzahlen gerader Zahlen sind gerade Zahlen.

Beweis:

Die Grundzahl möge a lauten. Wenn sie gerade ist, so kann man sie in der Form $a = 2n$ schreiben, wobei n eine beliebige gerade oder ungerade Zahl ist. Aus $a = 2n$ folgt $a^2 = 4n^2$; d. h. a^2 ist eine durch 4 teilbare Zahl. Sie ist also gerade.

2) Die Quadratzahlen ungerader Zahlen sind stets ungerade Zahlen.

Beweis:

Die ungerade Basis a läßt sich in der Form $a = 2n + 1$ schreiben. Es ist dann $a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Hierin ist $4n^2$ und $4n$ stets gerade, was für eine ganze Zahl auch immer n ist. Die Summe der beiden geraden Zahlen $4n^2 + 4n$ ist ebenfalls gerade. Zählt man aber zu einer geraden Zahl 1 hinzu, wie die rechte Seite der für a^2 angegebenen Gleichung besagt, so erhält man eine ungerade Zahl.

¹⁾ Für Potenzen, deren Potenzexponent kleiner oder gleich 0 ist [also: $n \leq 0$], gelten die Definitionen auf Seite 131.

Aus diesen beiden Sätzen 1) und 2) folgt:

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen ist stets eine ungerade Zahl.

Dies kann allgemein, wie folgt, bewiesen werden. 2 aufeinanderfolgende Quadratzahlen haben die Form: $(2n)^2$ und $(2n+1)^2$. Ihre Differenz beträgt: $(2n+1)^2 - (2n)^2 = 4n+1$. Dies ist stets eine ungerade Zahl.

Die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ergibt eine Quadratzahl.

Beispiele:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$$

Der Beweis hierfür läßt sich durch nebenstehende Zeichnung veranschaulichen: Das gesamte Quadrat setzt sich aus $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ Teilquadraten zusammen.

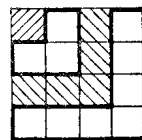


Bild 30

Man unterscheide zwischen dem Produkt

$$2a = a + a$$

und der Potenz

$$a^2 = a \cdot a.$$

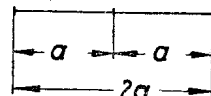


Bild 31

Ist a die Größe einer Strecke von a cm Länge, so ist $2a$ die Länge der Strecke, die doppelt so lang ist wie die Strecke a . (Bild 31.)

a^2 aber ist der Inhalt des Quadrates mit der Seite a . (Bild 32.)

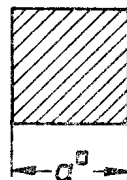


Bild 32

Es unterscheiden sich

$$3a = a + a + a$$

und

$$a^3 = a \cdot a \cdot a.$$

Geometrisch betrachtet, ist $3a$ eine Strecke (Bild 33) und a^3 der Inhalt des Würfels mit der Kante a . (Bild 34.)

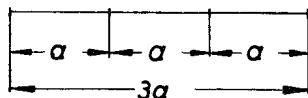


Bild 33

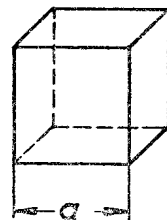


Bild 34

Man unterscheide zwischen

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \text{ und } \frac{1}{2}a^2$$

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2.$$

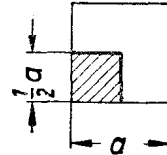


Bild 35

Die schraffierte Fläche hat den Inhalt $\left(\frac{1}{2}a\right)^2$. Es ist der vierte Teil des Quadrates mit der Seite a (Bild 35).

$\frac{1}{2}a^2$ ist die Hälfte des Quadrates mit der Seite a (Bild 36).

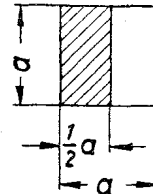


Bild 36

Potenzen mit negativer Basis

$$\begin{aligned} (-2)^2 &= -2 \cdot -2 = 4 && = 2^2 \\ (-2)^3 &= -2 \cdot -2 \cdot -2 = -8 && = -2^3 \\ (-2)^4 &= -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 16 && = 2^4 \\ (-2)^5 &= -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = -32 && = -2^5 \\ (-2)^6 &= -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 64 && = 2^6. \end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen für die Potenzen der negativen Zahl (-2) ersieht man, daß das Ergebnis für die Exponenten 2, 4, 6 — gerade Zahlen — positiv ist. Für ungerade Exponenten 3, 5, 7 usw. ist der Potenzwert negativ. Das folgt aus fortgesetzter Anwendung der Vorzeichenregeln (s. S. 13).

Ist m eine beliebige gerade oder ungerade ganze Zahl, so ist

$2m$ stets eine gerade Zahl und

$2m \pm 1$ [sprich: $2m$ plus oder minus 1] stets ungerade.

Hiermit gilt allgemein:

$$\begin{aligned} (-a)^{2m} &= a^{2m} \\ (-a)^{2m \pm 1} &= -a^{2m \pm 1}. \end{aligned}$$

Die Potenz einer negativen Zahl ist für gerade Exponenten positiv; für ungerade Exponenten ist sie negativ.

Beispiele:

$$(-0,2)^2 = 0,04$$

$$(-0,3)^3 = -0,3^3 = -0,027$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\left(\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

$$(-3)^4 = 3^4 = 81$$

$$(-4)^3 = -(4^3) = -64.$$

a) Addition und Subtraktion von Potenzen

Potenzen lassen sich nur addieren und subtrahieren, wenn die Basen und Exponenten gleich sind. Man braucht in diesem Falle nur die Beizahlen (Koeffizienten) der Potenzen zu addieren oder subtrahieren.

Beispiele:

a) $2a^3 + 3a^3 + 5a^3 - a^3 = 9a^3$

b) $b^x + 3b^x + 4b^x = 8b^x$

c) $5b^2 - 2b^2 + 6b^2 - 8b^2 = b^2$

d) $0,5x^2 + 0,3x^2 + x^2 - 1,4x^2 + 0,6x^2 = x^2$

e) $0,5x + 0,3x^2 = ?$ läßt sich nicht addieren; denn die Potenzexponenten 1 und 2 sind verschieden. Man kann in diesem Beispiel den gemeinsamen Faktor x ausklammern und erhält $= x(0,5 + 0,3x)$.

f) $2,3a^2 + 2,7b^2 = ?$ läßt sich nicht addieren; denn die Potenzbasen sind verschieden.

g) $2,3a^2 + 2,3b^2 = 2,3(a^2 + b^2)$.

Nur der gemeinsame Faktor 2,3 läßt sich ausklammern.

h) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}y^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = x^2 + y^2$.

Die Glieder mit x^2 und die mit y^2 sind getrennt addiert worden.

Ebenso:

i) $0,5x^2 - 2,5y^2 + 0,5x^2 + 1,5y^2 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

Weitere Übungsaufgaben: S. 132 Nr. 197...206.

b) Multiplizieren von Potenzen

1) Gleichbasige Potenzen = Potenzen mit gleicher Basis

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{2+3} = a^5$$

$$b^3 \cdot b^4 = (b \cdot b \cdot b) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = b^{3+4} = b^7$$

Allgemein: $a^m \cdot a^n = ?$

a^m ist ein Produkt aus m Faktoren a ; also $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots}_{m \text{ Faktoren } a}$

a^n ist ein Produkt aus n Faktoren a ; also $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots}_{n \text{ Faktoren } a}$

Das Produkt der beiden Potenzen a^m und a^n ergibt ein Produkt aus $(m + n)$ Faktoren a ; also

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

d. h.:

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Beispiele:

$$a) x^4 \cdot x^2 = x^{4+2} = x^6$$

$$c) z^2 \cdot z^3 \cdot z^4 = z^{2+3+4} = z^9$$

$$b) y^5 \cdot y = y^{5+1} = y^6$$

$$d) 2 a^2 \cdot a = 2 a^{2+1} = 2 a^3$$

$$e) 5 b \cdot 7 b^3 = 5 \cdot 7 \cdot b \cdot b^3 = 35 b^4, \text{ aber unterscheide:}$$

$$5 b + 7 b^3 = b (5 + 7 b^2)$$

$$f) 0,2 c^2 \cdot 0,5 c = 0,1 c^{2+1} = 0,1 c^3$$

$$g) a^{x+2} a^{2-x} = a^{x+2+2-x} = a^4$$

$$h) a^{m+n} \cdot a^{m-n} = a^{m+n+m-n} = a^{2m}.$$

Umgekehrt läßt sich als Produkt schreiben:

$$i) a^{10} = a^{4+6} = a^4 \cdot a^6 \quad \text{oder}$$

$$j) x^{m+n} = x^m \cdot x^n.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 132 u. 133 Nr. 207...216.

2) Gleichnamige oder gleichhohe Potenzen = Potenzen mit gleichen Exponenten (Hochzahlen)

$$a^2 \cdot b^2 = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a b \cdot a b = (a b)^2 \quad \text{oder}$$

$$x^3 \cdot y^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (y \cdot y \cdot y) = (x y) \cdot (x y) \cdot (x y) = (x y)^3.$$

$$\text{Allgemein: } a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \dots)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \dots)}_{n \text{ Faktoren } b}$$

In diesem Produkt von n Faktoren a und n Faktoren b wird je ein Faktor a mit einem Faktor b zu einem Produkt $a b$ zusammengefaßt. Man erhält dann n solcher Produkte $a b$.

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a b) \cdot (a b) \cdot (a b) \cdot (a b) \dots}_{n \text{ Faktoren } (a b)} = (a b)^n$$

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a b)^n} \quad \text{d. h.}$$

Potenzen mit gleichen Hochzahlen werden multipliziert, indem man die Grundzahlen multipliziert und mit der gemeinsamen Hochzahl potenziert.

Beispiele:

$$a) 0,25^n \cdot 4^n = (0,25 \cdot 4)^n = 1^n = 1$$

$$b) \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 8^x = \left(\frac{1}{4} \cdot 8\right)^x = 2^x$$

$$c) (a b)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(a b \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a}\right)^2 = a^2$$

$$d) (2x)^a \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^a = \left(2x \cdot \frac{1}{x}\right)^a = 2^a$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{x+y}{a-b}\right)^3 \cdot \left(\frac{x-y}{a+b}\right)^3 &= \left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{a-b} \cdot \frac{x-y}{a+b}\right)^3 \\ &= \left(\frac{(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)(a-b)(a+b)}\right)^3 = 1^3 = 1. \end{aligned}$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 133 Nr. 217 ... 226.

3) Ungleichbasige sowie ungleichnamige Potenzen lassen sich nicht multiplizieren. Hierfür ein Beispiel: $a^5 \cdot b^3$ bleibt unverändert $a^5 \cdot b^3$.

c) Dividieren von Potenzen

Auf Seite 35... 37 wurde das Dividieren von Potenzen mit bestimmten Zahlen behandelt. Auch hier gelten die dort angeführten Regeln a... d.

1) Gleichhohe Potenzen (= Potenzen mit gleichen Hochzahlen)

$$a^3 : b^3 = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

Allgemein:

$$a^m : b^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots}^{\text{m Faktoren a}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \dots}_{\text{m Faktoren b}}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Hier wurde je einer der m Faktoren a im Zähler mit je einem der m Faktoren b im Nenner zu dem Quotienten $\frac{a}{b}$ zusammengefaßt.

Man erhielt ein Produkt aus m Faktoren $\frac{a}{b}$; also:

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

in Worten:

Potenzen mit gleichen Hochzahlen, aber mit verschiedenen Basen, werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit der gemeinsamen Hochzahl potenziert.

2) Gleichbasige Potenzen

$$a^6 : a^2 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^4 = a^{6-2}.$$

Im Zähler des vorstehenden Quotienten steht das Produkt aus 6 Faktoren a , im Nenner das Produkt aus 2 Faktoren a . Es lassen sich 2 Faktoren a

wegheben. Es bleiben somit im Zähler $6 - 2 = 4$ Faktoren übrig. Ebenso findet man allgemein, daß sich der Bruch $\frac{a^m}{a^n}$ durch n Faktoren a kürzen läßt. Es bleiben dann $(m-n)$ Faktoren im Zähler übrig. Hierbei sei vorausgesetzt, daß $m > n + 1$ ist. Also:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

in Worten:

┌ Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Hochzahlen potenziert.

Damit $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$ auch eine Potenz wird,

setzt man $a^1 = a$

Damit die Regel $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ auch gilt, wenn im Nenner mehr Faktoren als im Zähler stehen, wenn also $n > m$ ist, hat man folgende Definition (Vergleiche Seite 36) für eine Potenz mit negativem Exponenten festgelegt:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

in Worten:

┌ Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem Kehrwert der Potenz mit positivem Exponenten.

Ist $n = m$, so erhält man als Ergebnis der Division $a^m : a^n$ eine Potenz mit dem Exponenten 0, für die nach der auf Seite 37 gegebenen Begriffserklärung der Wert 1 festgesetzt ist. Allgemein gilt nach dieser Definition:

$$a^0 = 1.$$

in Worten:

┌ Eine Potenz mit dem Exponenten 0 hat den Wert 1.

Übungsaufgaben: S. 133 Nr. 227 ... 241.

d) Potenzieren von Potenzen

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{3 \cdot 2} = a^6.$$

Setzt man für $3 = m$ und für $2 = n$, so erhält man: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. a^m stellt ein Produkt aus m Faktoren a dar. $(a^m)^n$ stellt ein Produkt aus n Faktoren a^m dar, von denen jeder, wie soeben festgestellt, seinerseits aus m Faktoren a besteht. $(a^m)^n$ ist also ein Produkt aus $(m \cdot n)$ Faktoren der Größe a .

Als Potenz geschrieben:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

in Worten:

┌ Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt
└ der Exponenten potenziert.

Beispiele:

a) $(a^3 b^4)^2 = a^3 b^4 \cdot a^3 b^4 = a^6 b^8$

b) $(3 a b^5)^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot (b^5)^2 = 9 a^2 b^{10}$

c) $(-a^3)^2 = (-a^3) \cdot (-a^3) = a^6$

d) $\frac{(x^3 \cdot y^2)^3}{(x^2 \cdot y^3)^2} = \frac{x^9 y^6}{x^4 y^6} = x^5$

e) $(a^2 - b^2)^2 = (a^2)^2 - 2 a^2 b^2 + (b^2)^2 = a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4$

f) $(0,3 r^2 + 2 s)^2 = 0,09 r^4 + 1,2 r^2 s + 4 s^2$

Für $r = 2$ und $s = 1$ erhält man zur Probe:

$$(0,3 \cdot 4 + 2 \cdot 1)^2 = 0,3^2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1^2$$

$$(1,2 + 2)^2 = 0,09 \cdot 16 + \quad 4,8 \quad + \quad 4$$

$$3,2^2 = 1,44 + \quad 4,8 \quad + \quad 4$$

$$10,24 = \quad 10,24$$

g) $16^3 = 2^x$. Wie groß ist x ? Für 16 setze man 2^4 ; also $(2^4)^3 = 2^x$; $2^{12} = 2^x$. Diese beiden Potenzen mit der Basis 2 können nur gleich sein, wenn die Exponenten gleich sind, d. h.

$$x = 12.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 133 Nr. 242... 256.

Aufgaben über das Rechnen mit Potenzen:

197) $0,5 a^2 + 0,5 b^2 + 1,5 a^2 - 3,5 b^2 =$

198) $\frac{1}{5} x^2 + \frac{2}{5} y^2 + \frac{3}{5} z^4 =$

199) $\frac{1}{4} x^2 y - 3 x^2 y + 2 x^2 y + \frac{3}{4} x^2 y =$

200) $0,25 v^3 + 1,1 w^3 + 1,25 v^3 - 0,6 w^3 + 0,5 v^3 + 1,5 w^3 =$

201) $1,4 a^m + 1,4 a^n + 2,6 a^m + 2,6 a^n =$

202) $2 x^2 y + 4 x y^2 + 4 x^2 y - x y^2 =$

203) $2 a^2 (a + b) + 2 a^2 (a - b) =$

204) $x^2 (y^3 + z^2) - y^3 (x^2 + z^2) =$

205) $(a + b)^2 + (a - b)^2 + (a + b) \cdot (a - b) =$

206) $16 x^2 - 9 y^2 =$

207) $a^n \cdot a^{n-1} =$

- 208) $b^{x+3} \cdot b^{x-3} =$
- 209) $3 a^2 \cdot \frac{1}{2} b^3 \cdot 4 a^2 =$
- 210) $0,1 x^3 y^4 \cdot 4 x^4 y^2 =$
- 211) $(-a)^{2n-1} \cdot (-a) =$
- 212) $(-x)^n \cdot (-x)^{n-1} =$
- 213) $(-b)^{2n} \cdot (-b) =$
- 214) $3 a^2 b \cdot \frac{1}{6} a b =$
- 215) $(x+y)^2 (x+y) =$
- 216) $(a-b)^3 (b-a)^2 =$
- 217) $0,25^2 \cdot 4^2 \cdot 0,5^2 =$
- 218) $3,5^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 =$
- 219) $x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 =$
- 220) $(-a)^2 \cdot (-b)^2 =$
- 221) $(a x)^n \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n =$
- 222) $a^2 \cdot (-c)^2 =$
- 223) $x^3 \cdot (-y)^3 =$
- 224) $2 a^2 \cdot 3 b^2 \cdot 0,5 c^2 =$
- 225) $(2 a)^2 \cdot (3 b)^2 \cdot (0,5 c)^2 =$
- 226) $\frac{4}{5} a^n \cdot \frac{3}{4} b^{2n+1} \cdot \frac{5}{6} a^{n+1} =$
- 227) $a^m : a =$
- 228) $64 a^2 : 4 b^2 =$
- 229) $m^{x+1} : m^{x-1} =$
- 230) $a^{m-1} : a^{m+1} =$
- 231) $a^{2n} : a^{n-m} =$
- 232) $a^n b : a b^n =$
- 233) $a^{m-1} : a^m =$
- 234) $2,1 x^5 y^4 : 0,3 x^4 y^4 =$
- 235) $\frac{1}{3} a^{m+n} : \frac{1}{9} a^n =$
- 236) $\frac{x^{m+2}}{x^2} \cdot \frac{x^{m+1}}{x^{2m+1}} =$
- 237) $a^{-2} : a^{-3} =$
- 238) $a^{-3} : a^{-3} =$
- 239) $(6,4 x^3 - 5,6 x) : 0,8 x =$
- 240) $(-3)^{-2} =$
- 241) $(-2)^{-3} =$
- 242) $(x^n y)^3 =$
- 243) $(1,2 a^2 b^3)^2 =$
- 244) $(0,2 a b^2)^3 =$
- 245) $(-a^2)^3 =$
- 246) $(-a^3)^4 =$
- 247) $\frac{(r^5 s^4)^2}{(rs)^4} =$
- 248) $(a^3 b^5)^4 : (a^2 b^4)^3 =$
- 249) $(a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) =$
- 250) $(a^2 + b^2)^2 =$
- 251) $(\frac{1}{2} u^2 - 2 v^2)^2 =$
- 252) $(0,2 a - b) (0,2 a + b) =$
- 253) $a^m + 2 a^m =$
 $a^m \cdot 2 a^m =$
 $2 a^m : a^m =$
- 254) $25 x^2 + 5 x^2 =$
 $25 x^2 - 5 x^2 =$
 $25 x^2 \cdot 5 x^2 =$
 $25 x^2 : 5 x^2 =$
 $(25 x^2)^2 =$
- 255) $8 a + 16 a^2 =$
 $8 a \cdot 16 a^2 =$
 $8 a : 16 a^2 =$
- 256) $\left. \begin{array}{l} 27^2 = 3^x \\ 2^{12} = 64^x \end{array} \right\} x = ?$

257) Eine rechteckige Blechtafel mit den Abmessungen a und $\frac{a}{2}$ soll in 15 gleichgroße rechteckige Stücke zerschnitten werden.

- α) Welche Fläche hat ein jedes der 15 Blechstücke?
 β) Wie können die Schnitte liegen?
 γ) Welche Abmessungen haben dann in jedem der möglichen Fälle die einzelnen Stücke?

258) Aus einem rechteckigen Blech mit den Abmessungen a und $0,8a$ soll ein überall gleichbreiter Blechrahmen von der Breite $0,1a$ nach nebenstehender Skizze gefertigt werden.

- α) Wie groß ist die Fläche des herausfallenden Bleches?
 β) Wieviel Prozent der ursprünglichen Fläche ist dies?

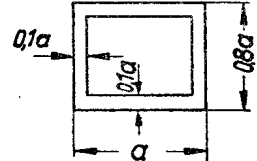


Bild 37

- 259) Ein Quadrat hat die Seite von der Länge a cm. Um wieviel cm^2 nimmt sein Inhalt zu, wenn seine Seite α) verdoppelt und β) um 1 cm verlängert wird?
- 260) Eine massive Welle vom Durchmesser d (cm) wird mit dem Durchmesser $\frac{d}{2}$ aufgebohrt. Wie groß ist die prozentuale Gewichtsersparnis?
- 261) Das Widerstandsmoment W eines Kreisquerschnittes vom Durchmesser d (cm) wird in der Festigkeitslehre zur Berechnung einer auf Biegung beanspruchten Welle verwendet. Es beträgt: $W = 0,1 d^3$ und hat die Dimension cm^3 .

Den wievielten Teil hiervon beträgt das Widerstandsmoment einer nur halb so starken Welle?

- 262) Unter dem Trägheitsmoment J , das ebenso wie das Widerstandsmoment eine oft benutzte Rechnungsgröße der Festigkeitsrechnung ist, versteht man: $J = 0,2 d^4$ (gemessen in cm^4).

Um wieviel Prozent nimmt das Trägheitsmoment eines Kreisquerschnittes vom Durchmesser d cm ab, wenn der Durchmesser um 10% verkleinert wird?

(Anleitung: Der neue Durchmesser beträgt $0,9d$.)

- 263) Die Zentrifugalkraft Z , die bei der Berechnung umlaufender Massen (Schwungräder, Turbinenlaufräder, Turbogebälse, Kupplungen usw.) von Bedeutung ist, wird nach der Gleichung $Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ berechnet. Hierin bedeutet m die umlaufende Masse, r den Fliehkreisradius und v die Umfangsgeschwindigkeit, die der Drehzahl direkt proportional ist (d. h.: Wird die Drehzahl verdoppelt, so verdoppelt sich auch die Umfangsgeschwindigkeit). Wievielman so groß wird die Zentrifugalkraft bei doppelter Drehzahl?

- 264) Beim Potenzflaschenzug besteht zwischen der zu hebenden Last Q und der hierfür aufzuwendenden Kraft P folgende Beziehung: $P = \frac{Q}{2^n}$,

wobei man unter n die Anzahl der losen Rollen des Flaschenzuges versteht. Wie verhält sich die Hubkraft P_1 bei einem Potenzflaschenzug mit 2 losen Rollen zu der Hubkraft P_2 eines mit 4 Rollen bei ein und derselben Last Q ?

- 265) Bei einer Kreiselpumpe verhalten sich die Förderhöhen H zueinander wie die Quadrate der Drehzahlen. Die Antriebsleistungen N aber sind den Kuben der Drehzahlen proportional.

Erhöht man die Betriebsdrehzahl einer Kreiselpumpe von 1250 U/min auf 1440 U/min — also um $15,2\%$ —, um wieviel Prozent erhöhen sich dann a) die Förderhöhen, b) die Antriebsleistungen?

- 266) Für die in cm gemessene Durchbiegung f eines auf Biegung beanspruchten Trägers sind folgende Faktoren ausschlaggebend:

- Die Größe der wirkenden Kraft P in kg.
- Die Lage und Größe des Trägerquerschnittes, die durch das Trägheitsmoment J , gemessen in cm^4 , in Rechnung gesetzt werden.
- Die Werkstoffeigenschaften, die durch das Elastizitätsmaß E , gemessen in kg/cm^2 , berücksichtigt werden.
- Die Art der Lagerung und Belastung des Trägers. Sie wird durch eine bestimmte für den jeweiligen Fall gültige Beizahl c zum Ausdruck gebracht.
- Die in cm gemessene sich durchbiegende Länge l des Trägers.

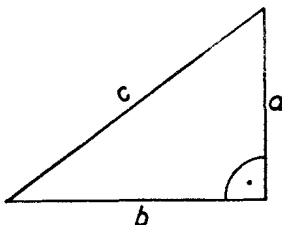
Alle diese Faktoren werden in der Berechnungsgleichung für die Durchbiegung zusammengefaßt: $f = c \cdot \frac{P l^3}{E J}$.

Um wieviel Prozent nimmt die Durchbiegung f eines Trägers zu, wenn die Länge l um 10% vergrößert wird?

e) Der Lehrsatz des Pythagoras¹⁾

In dem nachstehenden rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden den

rechten Winkel einschließenden Seiten a und b die Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist die Hypotenuse. (Man beachte die Schreibart der beiden aus der griechischen Sprache stammenden Fremdwörter! Kathete mit th und dann $t!$ Hypotenuse nur mit $t!$)



Katheten:
a und b

Hypotenuse:
c

Bild 38

¹⁾ Pythagoras, Sohn des Mnesarchos aus Samos, geb. etwa 580 v. Chr. Geb. Griechischer Philosoph und Mathematiker. 532 wanderte er nach Italien aus, um der Gewaltherrschaft des Polykrates zu entgehen. Er gründete zu Kroton einen Bund oder Orden, der neben der Pflege der Wissenschaften auch sittlichen, religiösen und politischen Absichten gewidmet war.

Man fertige sich von dem vorstehend skizzierten Dreieck 4 Stück (I...IV) aus Papier an und lege sie auf 2 verschiedene Arten in eine quadratische Fläche mit der Seite $(a + b)$, wie nachstehend angegeben.

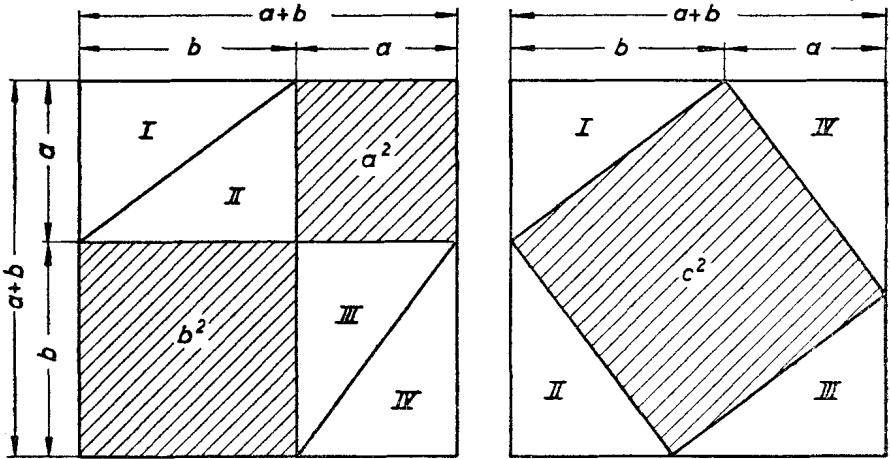


Bild 39

Aus den vorstehenden 2 Zeichnungen (bzw. aus dem Versuch) ersieht man, daß die von den 4 rechtwinkligen Dreiecken nicht bedeckte, schraffierte Fläche des Quadrates in beiden Fällen gleich groß sein muß.

Im ersten Falle sind die beiden Quadratflächen a^2 und b^2 , im zweiten Falle die Fläche c^2 nicht bedeckt. Es ist also:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Worten:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Dieser äußerst wichtige pythagoräische Lehrsatz, der hier in einfacher Weise rein anschaulich ohne irgendwelche Rechnungen oder schwierigere geometrische Betrachtungen bewiesen wurde, gilt für jedes beliebige rechtwinklige Dreieck. Immer sind die Längen der Katheten und die Länge der Hypotenuse durch die Beziehung: $a^2 + b^2 = c^2$ gekuppelt.

In dem vorhergehend gezeichneten Dreieck möge $a = 3$ cm, $b = 4$ cm und $c = 5$ cm sein. Dann ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25.$$

3 ganze Zahlen, die derartig gewählt sind, daß die Summe der Quadrate von 2 Zahlen gleich dem Quadrat der 3. Zahl ist, nennt man pythagoräische Zahlen oder pythagoräische Tripel.

Das Tripel 3, 4, 5 war schon vor 4000 Jahren den alten Babyloniern bekannt. Der griechische Gelehrte Pythagoras aus Samos, nach dem der pythagoräische Lehrsatz mit Unrecht benannt wird — erst Euklid bewies 300 Jahre später die allgemeine Gültigkeit des nach Pythagoras benannten Satzes — stellte im 6. Jahrhundert v. Chr. weitere derartige Zahlentripel auf und gab eine Anweisung zu ihrer Aufstellung an.

Nachstehend einige wenige pythagoräische Tripel:

| a | b | c |
|----|----|----|
| 5 | 12 | 13 |
| 8 | 15 | 17 |
| 7 | 24 | 25 |
| 20 | 21 | 29 |
| 9 | 40 | 41 |

Man überzeuge sich von der Richtigkeit dieser Tripel, indem man sie in die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ einsetzt.

Von diesen ursprünglichen Tripeln kann man beliebig viele sog. abgeleitete Tripel bilden, indem man Vielfache der Zahlen a, b, c nimmt. Von dem ursprünglichen Tripel: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ kann man folgende abgeleitete Tripel bilden

durch Verdoppelung: $a = 6$; $b = 8$; $c = 10$
 „ Verdreifachung: $a = 9$; $b = 12$; $c = 15$
 „ Halbierung: $a = 1,5$; $b = 2$; $c = 2,5$ usw.

Wenn nämlich

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist, dann ist auch

$$(2a)^2 + (2b)^2 = (2c)^2.$$

Die Quadrate gebildet, ergibt:

$$4a^2 + 4b^2 = 4c^2.$$

4 vor die Klammer gezogen

$$4(a^2 + b^2) = 4c^2.$$

Links und rechts durch 4 geteilt, ergibt die Ursprungsgleichung:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

V. Die Wurzelrechnung

Die entgegengesetzte Rechenoperation des Addierens ist das Subtrahieren, die des Multiplizierens ist das Dividieren.

Die Rechenoperation des Potenzierens hat 2 Umkehrungen:

1. das Wurzelziehen oder Radizieren,
2. das Logarithmieren.

Die 3 Größen a , m und q seien miteinander folgendermaßen gekuppelt:

$$a^m = q.$$

2 von diesen 3 Größen mögen gegeben sein, während die dritte durch Rechnung zu bestimmen ist.

Man hat somit 3 Aufgaben:

1. Gegeben: a und m . Gesucht: q .
Diese Aufgabe ist eine Aufgabe der Potenzrechnung.
2. Gegeben: m und q . Gesucht: a .
Diese Aufgabe gehört zur Wurzelrechnung.
3. Gegeben: a und q . Gesucht: m .
Diese Aufgabe gehört zur Logarithmenrechnung.

Im vorliegenden V. Abschnitt befassen wir uns mit der 2. Aufgabe, der Radizierung, die die umgekehrte Arbeit des Potenzierens ist. Man sucht aus einem Produkt q , das aus m gleichen Faktoren gebildet ist, die Größe der Zahl a , die mehrmals als Faktor gesetzt, das Produkt ergibt.

Man versteht unter der m ten Wurzel aus q , geschrieben:

$$\sqrt[m]{q} \quad [\text{lies: „}m\text{te Wurzel aus }q\text{}],$$

die Zahl, die m -mal als Faktor gesetzt, q ergibt.

Diese Erklärung des Begriffs der Wurzel drückt sich algebraisch in der Definitionsgleichung aus:

$$\left(\sqrt[m]{q}\right)^m = q$$

[lies: „ m te Wurzel aus q hoch m gleich q “].

Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ist aus dem kleinen lateinischen r , dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes *radix* = Wurzel, entstanden¹⁾. Dieses Zeichen rührt von dem Mathematiker Christoph Rudolf aus Jauer (1525) her.

Die Gleichung $a = \sqrt[m]{q}$ ist eine andere Schreibart für $a^m = q$.

In der Gleichung $a = \sqrt[m]{q}$ heißt m der Wurzelexponent. Ist $m = 2$, so hat man es mit einer Quadratwurzel zu tun. Da die Quadratwurzeln sehr oft gebraucht werden, schreibt man aus Vereinfachungsgründen statt $\sqrt[2]{q}$ nur \sqrt{q} und liest: „2. Wurzel aus q oder auch Quadratwurzel q “.

Ist $m = 3$, so bedeutet $\sqrt[3]{q}$ die Kubikwurzel. Man liest $\sqrt[3]{q}$: „3. Wurzel aus q oder auch Kubikwurzel q “.

Der Fall, daß der Wurzelexponent $m = 1$ ist, hat für die Wurzelrechnung keine Bedeutung; denn die 1. Wurzel aus einer Zahl ist keine Wurzel mehr, sondern die Zahl selbst. Man schreibt also niemals $\sqrt[1]{q}$, sondern dafür q .

¹⁾ Vergleiche: Radiceschen = Wurzelchen.

In der Gleichung $a = \sqrt[m]{q}$ heißt die Größe q , die unter dem Wurzelzeichen steht, aus der also die Wurzel gezogen werden soll, der Radikand (der letzte Buchstabe ist ein d , kein t).

Das Ergebnis der vorliegenden Radizierung a ist der Wurzelwert oder die Wurzel selbst. Die Einfügung des Wurzelexponenten in die Öffnung des Wurzelzeichens stammt von Girard (um 1600).

Zusammenfassung:

| Name der Rechenoperation | Beispiel | Die Zahl q heißt | Die Zahl m heißt | Das Ergebnis a heißt |
|--------------------------|-------------------|--------------------|--------------------|------------------------|
| Radizierung | $\sqrt[m]{q} = a$ | Radikand | Wurzelexponent | Wurzel |

Zahlenbeispiele:

$$\begin{aligned} \sqrt{64} &= 8; \text{ denn } 8^2 = 64 \\ 64 &= \text{Radikand} \\ 2 &= \text{Wurzelexponent ist nicht geschrieben} \\ 8 &= \text{Wurzel (genauer: Quadratwurzel)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{125} &= 5; \text{ denn } 5^3 = (\sqrt[3]{125})^3 = 125 \\ 125 &= \text{Radikand} \\ 3 &= \text{Wurzelexponent} \\ 5 &= \text{Wurzel (genauer Kubikwurzel)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \sqrt{4} = 2 & \sqrt{1,96} = 1,4 & \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \\ \sqrt{0,04} = 0,2 & \sqrt{3,61} = 1,9 & \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} \\ \sqrt[3]{0,008} = 0,2 & \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} & \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \end{array}$$

In allen diesen Beispielen war der Radikand eine Quadrat- bzw. Kubikzahl. Der Wert der Wurzeln läßt sich in diesen Fällen sehr leicht angeben.

Die Quadratwurzel aus einer Quadratzahl ist die Basis der Quadratzahl; als Formel $\sqrt{a^2} = a$.

Die Kubikwurzel aus einer Kubikzahl ist die Basis der Kubikzahl; $\sqrt[3]{a^3} = a$.

Die n te Wurzel aus der n ten Potenz einer Zahl a ist die Zahl a selbst; also $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl kann sowohl positiv als auch negativ sein. Man kennzeichnet diese Tatsache dadurch, daß man

vor das Ergebnis das Zeichen „ \pm “ [gelesen: „plus oder minus“] setzt; also: $\sqrt{16} = \pm 4$; denn $(+4)^2 = 16$, ebenso aber auch $(-4)^2 = 16$. $\sqrt[9]{25}$ ist sowohl $+3/5$ als auch $-3/5$; denn $(+3/5)^2 = 9/25 = (-3/5)^2$.

Allgemein gilt:

$$\sqrt{a^2} = \pm a$$

Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl läßt sich im Bereiche der bisher behandelten Zahlen (reelle Zahlen) nicht ziehen. Es gibt keine reelle Zahl, die ins Quadrat erhoben einen negativen Wert hat. Die Quadrate aller positiven und negativen Zahlen ergeben stets einen positiven Wert. Um aber auch mit Wurzeln aus negativen Zahlen rechnen zu können, führte man die sog. imaginären Zahlen ein, die im nächsten Kapitel dieses Bandes behandelt werden.

Im Gegensatz zu den Quadratwurzeln lassen sich die Kubikwurzeln (3. Wurzeln) aus negativen Zahlen ziehen; denn die 3. Potenz einer negativen Zahl ist wiederum eine negative Zahl.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{-27} = -3,$$

weil $(-3)^3 = -3 \cdot -3 \cdot -3 = +9 \cdot -3 = -27$ ist.

Aus negativen Zahlen lassen sich im Bereich der reellen Zahlen nur Wurzeln mit einem ungeraden Wurzelexponenten ziehen.

Zusammenfassung:

Quadratwurzeln aus positiven Zahlen haben einen positiven und einen negativen Wert. $\sqrt{25} = \pm 5$.

Quadratwurzeln aus negativen Zahlen haben keinen positiven oder negativen reellen Wert. $\sqrt{-25}$ ist bisher unmöglich zu berechnen.

Kubikwurzeln aus negativen Zahlen haben einen negativen Wert.

$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

Übungsaufgaben: S. 151 Nr. 267... 269.

a) Addition und Subtraktion von Wurzeln

Wurzeln lassen sich nur dann addieren bzw. subtrahieren, wenn sie gleiche Wurzelexponenten und gleiche Radikanden haben.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} &= 2 \sqrt[3]{a} \text{ oder mit bestimmten Zahlen: } \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{27} = 2 \sqrt[3]{27}, \\ \text{d. h.:} \quad 3 + 3 &= 2 \cdot 3 \\ 3 + 3 &= 6. \\ 4\sqrt{b} - \sqrt{b} &= 3\sqrt{b} \text{ oder mit bestimmten Zahlen: } 4\sqrt{25} - \sqrt{25} = 3\sqrt{25}, \\ \text{d. h.:} \quad 4 \cdot 5 - 5 &= 3 \cdot 5 \\ 20 - 5 &= 15. \end{aligned}$$

Aber: $\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} =$ kann nicht addiert werden,
da die Wurzelexponenten verschieden sind.

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} =$ kann nicht addiert werden,
da die Radikanden verschieden sind.

Umgekehrt kann man auch nicht für $\sqrt{a^2 + b^2}$ etwa $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$ sagen; denn $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und nicht $= a^2 + b^2$. Man merke sich:

Die Wurzel aus einer Summe ist nicht gleich der Summe der Wurzeln aus den einzelnen Gliedern. $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Zahlenbeispiele:

a) $\sqrt{16 + 9} = ?$

Falsch: $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

Richtig: $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

b) $\sqrt{35^2 + 12^2} = ?$

Es erscheint verlockend einfach, bleibt aber trotzdem

Falsch: $\sqrt{35^2 + 12^2} = 35 + 12 = 47$.

Richtig: $\sqrt{35^2 + 12^2} = \sqrt{1225 + 144} = \sqrt{1369} = 37$.

c) $\sqrt{29^2 - 21^2} = ?$

Falsch: $\sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{29^2} - \sqrt{21^2} = 29 - 21 = 8$.

Richtig: $\sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$.

Einfacher formt man den Radikanden nach der Formel um:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{(29 + 21)(29 - 21)} = \sqrt{50 \cdot 8} = \sqrt{400} = 20.$$

d) $\sqrt{85^2 - 13^2} = \sqrt{(85 + 13)(85 - 13)} = \sqrt{98 \cdot 72} = \sqrt{2 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 36}$
 $= 2 \cdot 7 \cdot 6 = 84$.

Weitere Übungsaufgaben: S. 151 Nr. 270... 280.

b) Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Jede Wurzel kann als eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten geschrieben werden.

$$\sqrt[m]{q} = q^{\frac{1}{m}}$$

Daß diese Schreibart, die von Michael Stifel (um 1550) stammt, richtig ist, erkennt man, wenn man beide Seiten dieser Gleichung in die m te Potenz erhebt und beiderseits das gleiche Ergebnis erhält: Nach der Definitionsgleichung der Wurzel (S. 138) erhält man links $(\sqrt[m]{q})^m = q$. Erhebt man rechts $q^{\frac{1}{m}}$ in die m te Potenz, so erhält man nach der Regel über das Potenzieren von Potenzen (S. 132):

$$\left(q^{\frac{1}{m}}\right)^m = q^{\frac{1}{m} \cdot m} = q.$$

Ist der Wurzelradikand selbst eine Potenz, so kann man statt der Wurzel eine Potenz schreiben, deren Exponent ein gemeiner Bruch ist. Der Zähler dieses Bruches ist der Potenzexponent des Radikanden, der Nenner ist der Wurzelexponent; z. B.:

$$\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}}$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

oder allgemein

$$\sqrt[m]{q^n} = q^{\frac{n}{m}}$$

Den Potenzexponenten findet man bisweilen auch als Dezimalzahl geschrieben; z. B.:

$$c^{1,25} = c^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{c^5}$$

$$\text{oder } a^{0,4} = a^{\frac{4}{10}} = a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$$

$$9^{1,5} = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 151 Nr. 281 ... 294.

Unter Benutzung der Schreibweise der Wurzeln als Potenzen läßt sich leicht der Beweis führen für die Regeln über

c) Das Rechnen mit Wurzeln

Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden multipliziert bzw. dividiert, indem man aus dem Produkt bzw. Quotienten der Radikanden die Wurzel zieht.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b} \quad \text{oder anders geschrieben: } a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{m}}.$$

Zahlenbeispiel:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b} \quad \text{oder } a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}} = (a : b)^{\frac{1}{m}}.$$

Zahlenbeispiel:

$$\sqrt{50} : \sqrt{2} = \sqrt{50 : 2} = \sqrt{25} = 5.$$

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Ein Produkt wird radiziert, indem man die einzelnen Faktoren radiziert und das Produkt der Wurzeln bildet.

Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden potenziert.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

denn $\left(\frac{1}{a^m}\right)^n = a^{\frac{1}{m} \cdot n} = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Zahlenbeispiel:

$$(\sqrt{9})^3 = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27.$$

Eine Wurzel wird radiziert, indem man die Wurzelexponenten multipliziert.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

denn $\left(\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = \sqrt[nm]{a}$.

Zahlenbeispiel:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 151 u. 152 Nr. 295... 327.

d) Das Zahlengebiet der reellen Zahlen

Die ganzen, positiven und negativen Zahlen (± 1 , ± 2 , ± 3 usw.) einschließlich der Null sowie sämtliche positiven und negativen Brüche bilden die Menge der rationalen Zahlen. Addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert man 2 rationale Zahlen, so entsteht stets wieder eine rationale Zahl (Ausnahme: Die Division durch 0 ist auszuschließen.) (vgl. S. 38).

Die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ist nur dann eine ganze Zahl, wenn der Radikand eine Quadratzahl ist. Ist der Radikand einer Quadratwurzel keine Quadratzahl, so erhält man als Wurzelwert keine ganze Zahl, aber auch keine gebrochene Zahl, sondern eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl. Solche Zahlen nennt man **irrationale Zahlen**.

Die Gesamtheit sämtlicher rationalen und irrationalen Zahlen nennt man die Menge der reellen Zahlen.

Zusammenfassung:

Zu den rationalen Zahlen gehören:

a) Alle positiven und negativen ganzen Zahlen und die Null; z. B.:

$$+5, +18, -4, -13 \text{ usw.}$$

b) Alle positiven und negativen gebrochenen Zahlen; z. B.:

$$+ \frac{2}{3}, + \frac{3}{5}, - \frac{8}{3}, - \frac{10}{7} \text{ usw.}$$

c) Alle positiven und negativen endlichen Dezimalzahlen und periodischen Dezimalzahlen; z. B.:

$$+ 0,125, - 0,25, - 0,36\overline{36} \dots, + 0,43\overline{3} \dots$$

Zu den irrationalen Zahlen gehören:

Die n ten Wurzeln aus Zahlen, die keine n ten Potenzen sind. Eine Irrationalzahl ist eine nicht periodische unendliche Dezimalzahl, z. B. $0,124583617 \dots$ (keine Periode!).

e) Irrationalität von $\sqrt{2}$

Bereits 300 Jahre v. Chr. hat Euklid die Irrationalität von $\sqrt{2}$ folgendermaßen nachgewiesen:

$\sqrt{2}$ kann nicht 1 sein; denn $1^2 = 1$. $\sqrt{2}$ kann aber auch nicht 2 sein; denn $2^2 = 4$. $\sqrt{2}$ muß folglich zwischen 1 und 2 liegen. $\sqrt{2}$ ist keine ganze Zahl. Nehmen wir an, daß $\sqrt{2}$ eine gebrochene Zahl wäre, so müßte sich diese Wurzel darstellen lassen als $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Es sollen p und q ganze Zahlen sein; jedoch sind beide nicht gerade Zahlen, da man sonst $\frac{p}{q}$ durch 2 kürzen könnte. Wenn $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ist, dann ist das Quadrat hiervon $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $p^2 = 2q^2$; d. h. p^2 ist eine gerade Zahl und somit ist auch p gerade. Man setze $p = 2m$. Aus $p^2 = 2q^2$ folgt dann: $(2m)^2 = 2q^2$ oder $4m^2 = 2q^2$ oder $2m^2 = q^2$. Dies heißt aber, daß q^2 und somit auch q gerade ist. Hier liegt ein Widerspruch zu der an p und q geknüpften Bedingung, daß beide nicht gerade sind, vor. Somit ist bewiesen, daß $\sqrt{2}$ sich nicht als gebrochene Zahl darstellen läßt. $\sqrt{2}$ ist eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl. Man rechnet mit dem abgerundeten Wert:

$$\sqrt{2} = 1,414 \dots$$

Geometrisch stellt sich $\sqrt{2}$ als Diagonale d des Quadrates mit der Seite 1 dar. Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ist:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$d = \sqrt{2}.$$

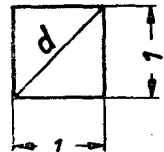


Bild 40

Ebenfalls irrational ist $\sqrt{3}$. Man merke sich:

$$\sqrt{3} = 1,732 \dots$$

Geometrisch kann man $\sqrt{3}$ als die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks darstellen, dessen Katheten die Längen 1 und $\sqrt{2}$ haben.

Nach dem Pythagoras ist:

$$\begin{aligned} D^2 &= 1^2 + (\sqrt{2})^2 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3; \text{ d. h.} \\ D &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

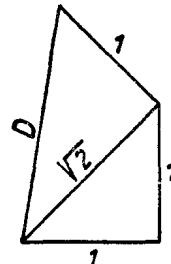


Bild 41

Zu den irrationalen Zahlen gehören ferner die Ludolf-sche Zahl $\pi = 3,14159 \dots$ und die Basis des natürlichen Logarithmensystems $e = 2,71828 \dots$ (S. 170).

f) Beseitigung von Wurzeln aus dem Nenner eines Bruches
(Rationalmachen des Nenners)

Steht im Nenner eines Bruches eine Wurzel, so beseitigt man diese Wurzel dadurch, daß man den Bruch mit der Wurzel erweitert. Der Bruch behält durch Erweitern seinen Wert. Diese Rechenoperation des Erweiterns führt man zur Erleichterung des Rechnens durch; denn es wäre umständlich und schwierig, den Zahlenwert eines Bruches, in dessen Nenner eine Wurzel steht, zu berechnen.

Beispielsweise berechnet sich der Wert von $\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : 1,414$ nur schwer. Es ist einfacher $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mit $\sqrt{2}$ zu erweitern; also:

$$\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414}{2} = 0,707.$$

Weitere Beispiele:

- a) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3} = 2 \cdot 1,732 : 3 = 3,464 : 3 = 1,155$
- b) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a}{b} \sqrt{b}.$

Steht eine Wurzel als Glied einer Summe oder Differenz im Nenner eines Bruches¹⁾, so verfährt man, wie folgende Beispiele zeigen:

$$c) \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3} = 0,268.$$

¹⁾ Die Summe aus einer rationalen Zahl a und einer irrationalen Zahl \sqrt{b} ist stets irrational. Die Summe aus einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl: $a + \sqrt{b}$ heißt konjugiert irrational zu der Differenz aus den gleichen Zahlen: $a - \sqrt{b}$.

Die Summe zweier konjugiert irrationaler Zahlen ist stets rational, ihre Differenz aber ist irrational

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b}) &= 2a, \\ (a + \sqrt{b}) - (a - \sqrt{b}) &= 2\sqrt{b}. \end{aligned}$$

Hier wurde die Formel:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

oder $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$ zu Hilfe genommen.

$$d) \frac{11}{5 - \sqrt{3}} = \frac{11 \cdot (5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{11(5 + \sqrt{3})}{25 - 3} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2,5 + 0,866 = 3,366$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{1,732 - 1,414}{3 - 2} = 0,318$$

$$f) \frac{3 + \sqrt{a}}{3 - \sqrt{a}} = \frac{(3 + \sqrt{a})(3 + \sqrt{a})}{(3 + \sqrt{a})(3 - \sqrt{a})} = \frac{9 + 6\sqrt{a} + a}{9 - a}$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 152 Nr. 328...337.

g) Das Ausziehen der Quadratwurzel

In der Praxis bedient man sich zur Bestimmung eines Wurzelwertes des Rechenschiebers oder der in den verschiedensten Taschenbüchern vorhandenen Tabellen. Bisweilen benutzt man auch die Logarithmentafel, besonders zur Bestimmung der Wurzeln mit höheren Wurzel-exponenten. Hat man keines dieser Hilfsmittel (Rechenschieber, Tabelle, Logarithmentafel) zur Hand, so ist man auf die rechnerische Bestimmung der Quadratwurzel angewiesen. Auch hier kann man verschiedene Wege einschlagen:

α) Wurzelziehen durch Faktorenzerlegung des Radikanden. Das Verfahren möge an einigen Zahlenbeispielen erklärt werden:

$$1. \sqrt{11664} = \sqrt{4 \cdot 2916} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 729} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 81} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{81} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 108.$$

Der Radikand 11664 wurde in das Produkt von 4 Quadratzahlen zerlegt. Aus jedem Faktor des Radikanden wurde die Wurzel gezogen und das Produkt der Wurzeln gebildet.

$$2. \sqrt{176400} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420.$$

Der Radikand 176400 wurde hier in Primfaktoren zerlegt. Unter dem Wurzelzeichen steht die 2 viermal als Faktor. Im Ergebnis kommt die 2 somit nur zweimal als Faktor vor. Die 3, 5 und 7 stehen unter dem Wurzelzeichen je zweimal als Faktor. Folglich kommen sie im Ergebnis nur je einmal vor.

$$3. \sqrt{800} = \sqrt{2 \cdot 400} = 20 \sqrt{2} = 20 \cdot 1,414 = 28,28.$$

Die Wurzel läßt sich nur aus dem einen Faktor 400 ziehen. $\sqrt{2}$ ist bekannt mit 1,414.

$$4. \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5 \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot 1,732 = 8,66.$$

$$5. \sqrt{288} = \sqrt{2 \cdot 144} = 12 \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot 1,414 = 16,97.$$

Übungsaufgaben: S. 152 Nr. 338...342.

β) Wurzelziehen im Näherungsverfahren durch Überschlagrechnungen.

Ist keine besonders hohe Genauigkeit für das Ergebnis erforderlich oder muß man sich schnell einen Überblick über ein voraussichtliches Ergebnis verschaffen, so begnügt man sich mit einer Überschlagsrechnung. Man stellt hierbei fest, wie groß ungefähr der Wert einer Wurzel ist. Hierfür zunächst einige Vorbemerkungen:

| | |
|--|------------------|
| Das Quadrat einer einstelligen Zahl ist ein- | oder zweistellig |
| „ „ „ zweistelligen „ „ drei- | „ vierstellig |
| „ „ „ dreistelligen „ „ fünf- | „ sechstellig |
| „ „ „ vierstelligen „ „ sieben- | „ achtstellig |
| usw. | |

Umgekehrt:

| | |
|-------------------|----------------------|
| Ist der Radikand: | Dann ist die Wurzel: |
| 1 oder 2stellig | 1stellig |
| 3 „ 4 „ | 2 „ |
| 5 „ 6 „ | 3 „ |
| 7 „ 8 „ | 4 „ |

Um sich dies leicht zu merken, teile man den Radikanden von rechts nach links in Gruppen von je 2 Stellen, z. B. $\sqrt{70|00|00}$. Dann ist die Stellenzahl der Wurzel gleich der Anzahl der entstandenen Gruppen. $\sqrt{70|00|00}$ ist eine dreistellige Zahl.

Die Stellenzahl einer Quadratwurzel ist gleich der Anzahl der Gruppen von je 2 Ziffern, in die man den Radikanden von rechts nach links zerlegt.

Die 1. Ziffer der Quadratwurzel ist gleich der Wurzel aus der nächstkleineren Quadratzahl unter der ersten Stellengruppe links:

Beispiele:

| | Die 1. Zahl der $\sqrt{\quad}$ lautet: | Die $\sqrt{\quad}$ ist größer als: |
|-----------------------------------|--|------------------------------------|
| $\sqrt{38}$ = einstellig | 6 | 6 |
| $\sqrt{4 84}$ = zweistellig | 2 | 20 |
| $\sqrt{65 61}$ = „ | 8 | 80 |
| $\sqrt{1 18 81}$ = dreistellig | 1 | 100 |
| $\sqrt{18 14 76}$ = „ | 4 | 400 |
| $\sqrt{2 52 81 00}$ = vierstellig | 1 | 1000 |

$$\sqrt{6|00|00} > 200 \approx 250$$

$$\sqrt{73|00|00} > 800$$

$$\sqrt{2|00|00|00} > 1000 = 1414 \text{ [denn } \sqrt{2} = 1,414\text{]}$$

$$\sqrt{3|00} > 10 = 17,32 \text{ [denn } \sqrt{3} = 1,732\text{]}$$

$$\sqrt{30|00} > 50$$

$$\sqrt[3]{3|00|00} = 173,2$$

$$\sqrt{25|00} = 50$$

$$\sqrt[3]{49|00|00} = 700$$

$$\sqrt{36|00} = 60$$

usw.

γ) Das rechnerische Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel

Es sei hier vor Beginn der Erklärung des vielleicht für den einen oder anderen zunächst ein wenig umständlich oder gar schwierig erscheinenden Rechnungsverfahrens noch einmal wiederholt, daß der in der Praxis stehende Facharbeiter sich mit diesen Rechnungen nicht zu befassen braucht. Er nimmt den Rechenschieber oder die Zahlentafel zur Hand und hat dann im Handumdrehen das gesuchte Ergebnis.

Wer aber, darüber hinausgehend, sich etwas eingehender mit den mathematischen Grundlagen befassen will, dem seien diese nachstehenden Betrachtungen gewidmet.

An nachstehendem Zahlenbeispiel werden die einzelnen Schritte a...i des Rechnungsganges beschrieben:

$$\begin{array}{r} \sqrt{67\overline{89}76} = 824 \\ \underline{64} \\ 38\overline{9} : 16 \\ \underline{324} \leftarrow 10 \cdot 16 \cdot 2 + 2^2 \\ 65\overline{7}6 : 164 \\ \underline{6576} \leftarrow 10 \cdot 4 \cdot 164 + 4^2 \\ \hline \end{array}$$

- Man teile den Radikanden von rechts nach links in Gruppen von je 2 Ziffern ein.
- Unter die erste Zifferngruppe links (67) schreibe man die nächstkleinere Quadratzahl (64) und ziehe sie ab. Man erhält 3.
- Die 1. Ziffer des Ergebnisses ist die Wurzel aus 64; also 8.
- Die nächste Zifferngruppe (89) wird heruntergeholt und neben den Rest (3) gesetzt. Die letzte Ziffer (9) wird abgestrichen.
- Die übrig bleibende Zahl (38) wird durch das Doppelte des bisherigen Ergebnisses ($2 \cdot 8 = 16$) dividiert. Als Quotient erhält man die 2. Ziffer des Ergebnisses, nämlich 2.

- f) Unter 389 schreibe man das Quadrat der 2. Ziffer des Ergebnisses (4) plus das zehnfache Produkt der 2. Ziffer des Ergebnisses mit dem letzten Divisor (16). Man erhält 324.
- g) Ziehe 324 von 389 ab. Ergebnis: 65. Die letzte Zifferngruppe 76 wird heruntergeholt und neben 65 gesetzt. Die letzte Ziffer (6) wird abgestrichen.
- h) Die übrigbleibende Zahl 657 wird durch das Doppelte des bisherigen Ergebnisses ($2 \cdot 82 = 164$) geteilt. Man erhält 4. Dies ist die letzte Ziffer des Ergebnisses.
- i) Unter 6576 schreibt man das Quadrat der letzten Ziffer (16) + das zehnfache Produkt der letzten Ziffer mit dem letzten Divisor. Man erhält: $16 + 4 \cdot 164 \cdot 10 = 6576$.

Beim nunmehrigen Subtrahieren ergibt sich der Rest 0. Die Wurzel ließ sich ziehen. Ergebnis: $\sqrt{678976} = 824$. (Vergleiche Tabelle!)

Bei noch größeren Radikanden wird das vorstehende Verfahren der Radizierung in derselben Weise fortgesetzt.

$$\begin{array}{r} \sqrt{12|809\,241} = 3579 \\ \underline{9} \\ 380 : 6 \\ \underline{325} \\ 5592 : 70 \\ \underline{4949} \\ 64341 : 714 \\ \underline{64341} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{97|535\,376} = 9876 \\ \underline{81} \\ 1653 : 18 \\ \underline{1504} \\ 14953 : 196 \\ \underline{13769} \\ 118476 : 1974 \\ \underline{118476} \end{array}$$

Dieses vorstehende, schematisch erklärte Rechenverfahren beruht auf der Anwendung folgender leicht verständlich aufgebauter algebraischer Formeln:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b + c)^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) + 2(a + b) \cdot c + c^2 \\ (a + b + c + d)^2 &= [(a^2 + 2ab + b^2) + 2(a + b) \cdot c + c^2] \\ &\quad + 2(a + b + c)d + d^2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Beim Radizieren einer Dezimalzahl wird diese in Gruppen von je 2 Ziffern sowohl nach links als auch nach rechts vom Komma aus zerlegt.

$$\begin{array}{r} \sqrt{33|44,3089} = 57,83 \\ \underline{25} \\ 844 : 10 \\ \underline{749} \\ 9530 : 114 \\ \underline{9184} \\ 34689 : 1156 \\ \underline{34689} \end{array}$$

Das Komma wird im Ergebnis gesetzt, bevor die erste Zifferngruppe nach dem Komma heruntergeholt wird.

$$\sqrt{2,809} = ?$$

Beim Abteilen der 2-Ziffer-Gruppen nach links und rechts vom Komma ist darauf zu achten, daß die letzte Gruppe rechts hinter dem Komma auch aus 2 Ziffern bestehen muß. Aus diesem Grunde muß in der nebenstehenden Aufgabe an die 9 noch eine 0 angehängt werden.

Will man die Wurzel auf noch weitere Dezimalstellen berechnen, so hat man noch weitere Zifferngruppen, die aus je 2 Nullen bestehen, herunterzuholen.

$$\sqrt{2,8090} = 1,6760 \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 180 : 2 \\ 156 \\ \hline 2490 : 32 \\ 2289 \\ \hline 20100 : 334 \\ 20076 \\ \hline 2400 : 3352 \end{array}$$

$$\sqrt{2} = ?$$

Um $\sqrt{2}$ zu berechnen, denke man sich diese Wurzel in der Dezimalzahlform

$$\sqrt{2,000000}$$

geschrieben.

Auf wieviel Dezimalstellen man auch immer $\sqrt{2}$ berechnet, eine Periode wird sich im Ergebnis nicht ergeben. $\sqrt{2}$ ist eben, wie bereits früher gezeigt, eine irrationale Zahl. (Siehe: Seite 144.)

$$\sqrt{2,000000} = 1,4142 \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 100 : 2 \\ 96 \\ \hline 400 : 28 \\ 281 \\ \hline 11900 : 282 \\ 11296 \\ \hline 60400 : 2828 \\ 56564 \\ \hline 3836 \end{array}$$

$$\sqrt{0,3} = ?$$

$$\sqrt{0,30000000} = 0,5477 \dots$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 500 : 10 \\ 416 \\ \hline 8400 : 108 \\ 7609 \\ \hline 79100 : 1094 \\ 76629 \\ \hline 2471 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = ?$$

1. Lösungsweg:

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1,732 \dots = 0,866 \dots$$

2. Lösungsweg:

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0,75} = 0,866 \dots$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 1100 : 16 \\ 996 \\ \hline 10400 : 172 \\ 10356 \\ \hline 44 \end{array}$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 152 Nr. 343 ... 352.

Aufgaben:

267) Folgende Gleichungen sind in Gleichungen mit einer Wurzel umzuformen. Wie groß ist in jedem Falle x ?

a) $x^2 = 100$

c) $x^2 = \frac{4}{9}$

e) $x^3 = 64$

b) $x^2 = 0,25$

d) $x^4 = 81$

f) $x^2 = a$.

268) Wie kann man a als Produkt zweier gleicher Faktoren schreiben?

269) Schreibe mit Hilfe des Wurzelzeichens folgende Gleichungen:

a) $3^2 = 9$

c) $2^5 = 32$

e) $(-3)^2 = 9$

b) $2^3 = 8$

d) $0,2^2 = 0,04$

f) $(-2)^3 = -8$.

270) $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$

296) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28} =$

271) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{b} =$

297) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22,5} =$

272) $2a\sqrt{x} - a\sqrt{x} =$

298) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} =$

273) $8\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 6\sqrt{x} =$

299) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} =$

274) $a\sqrt{b} - b\sqrt{b} =$

300) $5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{8} =$

275) $\sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{a^2 b} + 2\sqrt[3]{a^2 b} =$

301) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a^3} =$

276) $\sqrt{12^2 + 35^2} =$

302) $\sqrt{2b} \cdot \sqrt{8b} =$

277) $\sqrt{28^2 + 45^2} =$

303) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{12a^5} =$

278) $\sqrt{13^2 - 12^2} =$

304) $\sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt[3]{16a} =$

279) $\sqrt{41^2 - 9^2} =$

305) $\sqrt[4]{d} \cdot \sqrt[4]{d x^3} \sqrt[4]{d^2 x} =$

280) $\sqrt{65^2 - 33^2} =$

306) $\sqrt{5c} \cdot \sqrt{125c^3} =$

281) $4^{0,5} =$

307) $\sqrt{108} : \sqrt{3} =$

282) $27^{2/3} =$

308) $\sqrt{18} : \sqrt{2} =$

283) $32^{0,2} =$

309) $\sqrt{3} : \sqrt[3]{16} =$

284) $81^{0,25} =$

310) $\sqrt{0,18} : \sqrt{0,02} =$

285) $4^{1,5} =$

311) $\sqrt{1,25} : \sqrt{5} =$

286) $32^{1,2} =$

312) $\sqrt{10} : \sqrt{0,1} =$

287) $a^{1,4} =$

313) $\sqrt{x^2 y} : \sqrt{y} =$

288) $a^{1,5} =$

314) $\sqrt{8a^3} : \sqrt{2a} =$

289) $125^{2/3} =$

315) $\sqrt{x} : \sqrt{\frac{x}{a^2}} =$

290) $3^{1/3} - 2^{1/2} =$

316) $\sqrt[3]{a^2 b} : \sqrt[3]{\frac{b}{a}} =$

291) $4^{-0,5} =$

317) $\sqrt[4]{2x^2 y^3} : \sqrt[4]{\frac{1}{8x^2 y}} =$

292) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1,5} =$

293) $\sqrt[2/3]{25} =$

294) $\sqrt[1,5]{512} =$

295) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} =$

318) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a^{1-2n}} =$

319) $\sqrt[4]{4^2} =$

320) $\sqrt[3]{a^6} =$

321) $\sqrt[n]{x^{2n}} =$

322) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64 a^{12}}} =$

323) $\sqrt[3]{\sqrt{x}} =$

324) $\sqrt{\sqrt{81}} =$

325) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}} =$

326) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) =$

327) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 =$

329) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} =$

330) $\frac{2}{2 + \sqrt{2}} =$

331) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$

332) $\frac{33}{6 + \sqrt{3}} =$

333) $\frac{11}{5 - \sqrt{3}} =$

334) $\frac{47}{4\sqrt{3} - 1} =$

335) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$

336) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$

In den Aufgaben 328...337 sind die Nenner rational zu machen.

328) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} =$

337) $\frac{1}{x - \sqrt{y}} =$

In den Aufgaben 338...342 sind die Wurzeln durch Faktorenzerlegung zu berechnen.

338) $\sqrt{419904} =$

341) $\sqrt{32} =$

339) $\sqrt{180625} =$

342) $\sqrt{242} =$

340) $\sqrt{213444} =$

In den Aufgaben 343...352 sind die Wurzeln durch Rechnung zu bestimmen.

343) $\sqrt{793881} =$

348) $\sqrt{3} =$

344) $\sqrt{31684} =$

349) $\sqrt{5} =$

345) $\sqrt{54,0225} =$

350) $\sqrt{0,1} =$

346) $\sqrt{5882,89} =$

351) $\sqrt{5\frac{1}{2}} =$

347) $\sqrt{0,001024} =$

352) $\sqrt{\frac{4}{5}} =$

353) Ein Wellenzapfen soll als Vierkant mit der Schlüsselweite $s = 32$ mm gefräst werden. Wie groß muß der Durchmesser des Zapfens (= Eckenmaß des Vierkants) gedreht werden?

354) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten

- a) $a = 5 \text{ cm}$ und $b = 12 \text{ cm}$
- b) $a = 15 \text{ cm}$ „ $b = 112 \text{ cm}$
- c) $a = 15 \text{ cm}$ „ $b = 36 \text{ cm}$ lang.

Wie lang ist die Hypotenuse?

355) Wie lang ist die Diagonale eines Rechteckes mit den Seiten:

- a) $a = 30 \text{ cm}$ und $b = 16 \text{ cm}$
- b) $a = 15 \text{ cm}$ „ $b = 20 \text{ cm}$
- c) $a = 10 \text{ cm}$ „ $b = 24 \text{ cm}$?

356) Ein Rechteck mit den Seiten

- a) $a = 5 \text{ cm}$ und $b = 20 \text{ cm}$
- b) $a = 4 \text{ cm}$ „ $b = 36 \text{ cm}$
- c) $a = 3 \text{ cm}$ „ $b = 12 \text{ cm}$

hat denselben Flächeninhalt wie ein Quadrat. Wie groß ist die Quadratseite?

357) Wie lautet das geometrische Mittel (s. S. 118) zu den beiden Zahlen:

- a) $a = 2$ und $b = 32$?
- b) $a = 0,4$ „ $b = 4,9$?
- c) $a = 1/2$ „ $b = 1/8$?

358) Den Flächeninhalt F eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c kann man mit Hilfe der nach Heron (um 100 v. Chr.) benannten heronischen Dreiecksformel berechnen:

$$F = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

Hierin bedeutet $s = \frac{a + b + c}{2}$.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten:

- a) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 13 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm}$?
- b) $a = 15 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$?
- c) $a = 20 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$, $c = 13 \text{ cm}$?
- d) $a = 25 \text{ cm}$, $b = 39 \text{ cm}$, $c = 16 \text{ cm}$?
- e) $a = 25 \text{ cm}$, $b = 52 \text{ cm}$, $c = 33 \text{ cm}$?

359) Eine 8 m lange Leiter lehnt an einer Hauswand in 7,5 m Höhe an. Wieviel m ist der Leiterfuß von der Hauswand entfernt?

360) Wie groß ist die Höhe h in einem gleichseitigen Dreiecke mit der Seite a ?

Anleitung: Aus dem Pythagoras folgt, daß ein Kathetenquadrat gleich dem Hypotenusenquadrat, vermindert um das andere Kathetenquadrat, ist.

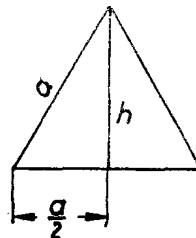


Bild 42

- 361) Aus einem Streifen sollen möglichst viele kreisförmige Scheiben vom Durchmesser d , wie nachstehend abgebildet, gestanzt werden. Wie groß wird x und b , wenn $d = 6$ cm betragen soll?

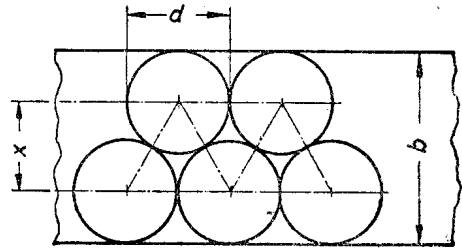


Bild 43

- 362) Ein 9 m langer Mast bricht 4 m über dem Erdboden um. In welcher Entfernung vom Fuße des Mastes berührt die Mastspitze den Erdboden? (Pythagoras anwenden!)

- 363) Eine Stahlkugel fällt von einem 80 m hohen Turm nach unten. Nach wieviel Sekunden schlägt sie unten auf?

Anleitung: Man benutze die Gleichung $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, in der bedeutet:

t = Fallzeit in s

h = Fallhöhe in m

g = Erdbeschleunigung ≈ 10 m/s².

- 364) In einen Zylinder wird Wasser unter der Spannung $p = 18$ at gepreßt. Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit v im Querschnitt f ?

Anleitung: Man benutze die Gleichung

$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot 10 \cdot p}$. Hierin bedeutet:

v = Geschwindigkeit in m/s

$g \approx 10$ m/s²

p = Spannung in at.

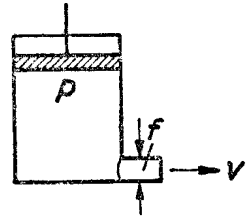


Bild 44

- 365) Zur überschläglichen Berechnung der Durchmesser von Transmissionswellen benutzt man die Gleichung

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

Hierin bedeutet:

d = Wellendurchmesser in cm

N = übertragene Leistung in PS

n = Drehzahl der Welle in U/min.

Wie stark ist eine Transmissionswelle auszuführen, die bei 100 U/min $N = 16$ PS überträgt?

- 366) Zwischen der in Lux (L_x) gemessenen Beleuchtungsstärke E und der in Hefnerkerzen (HK) gemessenen Lichtstärke I und der Entfernung m der Lichtquelle in Metern besteht folgende Beziehung:

$$E = \frac{I}{m^2};$$

d. h.: Die Beleuchtungsstärke ist direkt proportional der Lichtstärke, aber umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes der Lichtquelle.

In welcher Höhe über einem Zeichentisch muß eine 150kerzige Lampe angebracht werden, wenn man eine Beleuchtungsstärke von 75 Lx haben will?

VI. Das Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen

Die in diesem Kapitel angestellten grundlegenden Betrachtungen über die imaginären und komplexen Zahlen, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben und sich vielmehr nur auf das geringste Maß beschränken, gehen über den Bedarf des in der Praxis stehenden Werkmeisters hinaus. Wem diese nächsten 12 Seiten zu schwer erscheinen sollten, möge sie getrost zunächst überschlagen. Wer aber später einmal mit Erfolg die Aufnahmeprüfung einer Ingenieurschule ablegen und sich anschließend sein Studium durch gute Vorkenntnisse erleichtern will, dem sei dieses Kapitel eine willkommene Hilfe.

1. Die imaginären Zahlen

Das Quadratwurzelziehen aus negativen Zahlen war bis zum 18. Jahrhundert eine unmögliche Rechenoperation. Man hatte nämlich nicht die Möglichkeit, die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl durch eine der bis dahin bekannten reellen (rationalen und irrationalen) Zahlen auszudrücken.

Da im Bereich der reellen Zahlen die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl sinnlos ist, war man gezwungen, die Menge der reellen Zahlen durch Hinzunahme neuer Zahlen zu erweitern. Ähnliche Gründe hatten schon früher dazu geführt, die ganzen Zahlen durch Hinzunahme der gebrochenen Zahlen zur Menge der rationalen Zahlen zu erweitern. Dadurch wurde es überhaupt erst möglich, die Division von Zahlen in jedem Falle sinnvoll zu machen. Weiter zwang das rechnerische Bedürfnis, alle positiven Zahlen zu radizieren, zur Einführung der irrationalen Zahlen, die zusammen mit den rationalen Zahlen die Menge der reellen Zahlen bilden.

Um nun auch ausnahmslos negative Zahlen radizieren zu können, führte Euler¹⁾ 1777 die imaginären Zahlen ein, die zusammen mit den reellen Zahlen die Menge der komplexen Zahlen bilden (vgl. S. 160). Im Bereich

¹⁾ Leonhard Euler, 1707 bis 1783, geb. zu Basel, Schüler Johann Bernoullis. Professor der Physik und Mathematik zu Petersburg (1730) und Berlin (1741). Auswärtiges Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris.

dieser Zahlen ist es nun sinnvoll, Quadratwurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen.

Die Einheit der imaginären Zahlen ist nach Euler

$$i = \sqrt{-1}$$

Der Elektrotechniker setzt für i , um Verwechslungen mit anderen mit i bezeichneten Größen (z. B. Stromstärke i) zu vermeiden, den Buchstaben j .

Es gibt also imaginäre Zahlen mit der Eigenschaft, daß ihr Quadrat gleich einer negativen reellen Zahl ist, z. B.

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Ferner ergab sich durch die Einführung der imaginären Zahlen, daß der für positive Radikanden gültige Satz $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ auch für negative Radikanden gilt. $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$, also

$$\sqrt{-a} = i \sqrt{a}$$

So, wie die Zahl 1 die Einheit der reellen Zahlen ist, ist hier i die Einheit sämtlicher imaginärer Zahlen. Aus ihr bildet man durch Addition bzw. Subtraktion alle ganzen imaginären Zahlen; also

$$i + i = 2i; \quad 2i + i = 3i; \quad 2i + 2i = 4i \text{ usw.}$$

Durch Subtraktion zweier imaginärer Zahlen, bei denen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, erhält man die negativen imaginären Zahlen.

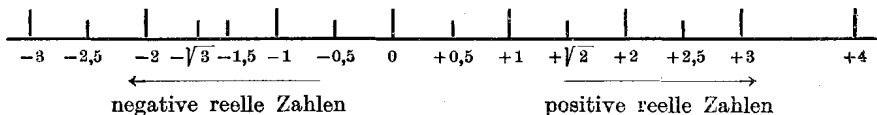
Beispiel:

$$2i - 5i = -3i; \quad 0,4i - 0,7i = -0,3i; \quad \frac{1}{4}i - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{4}i.$$

Durch Addition und Subtraktion zweier imaginärer Zahlen erhält man stets wieder eine imaginäre Zahl.

a) Die zeichnerische Darstellung der imaginären Zahlen

Sämtliche reellen Zahlen (positive sowie negative ganze und gebrochene Zahlen und die irrationalen Zahlen) stellt man auf der waagrecht (horizontal) liegenden Zahlengeraden der reellen Zahlen dar, wie die nachstehende Skizze, bei der als Beispiel einige reelle Zahlen aufgetragen sind, zeigt.



Sämtliche imaginären Zahlen stellt man auf der im Nullpunkt der reellen Zahlengeraden errichteten Senkrechten dar. Man trägt nach oben hin die imaginäre Einheit i wiederholt ab. Die dadurch entstandenen Teilpunkte bezeichnet man vom Nullpunkt aus nach oben hin mit $+i$, $+2i$, $+3i$ usw. Durch Abtragen der imaginären Einheit nach unten erhält man die Punkte $-i$, $-2i$, $-3i$. Zwischen den aufgetragenen Teilpunkten der positiven und negativen ganzen imaginären Zahlen liegen die Punkte für die gebrochenen imaginären Zahlen.

Die Zahlengeraden der reellen und imaginären Zahlen schneiden sich im Nullpunkt senkrecht miteinander. Der Nullpunkt gehört sowohl zur reellen als auch zur imaginären Zahlenachse.

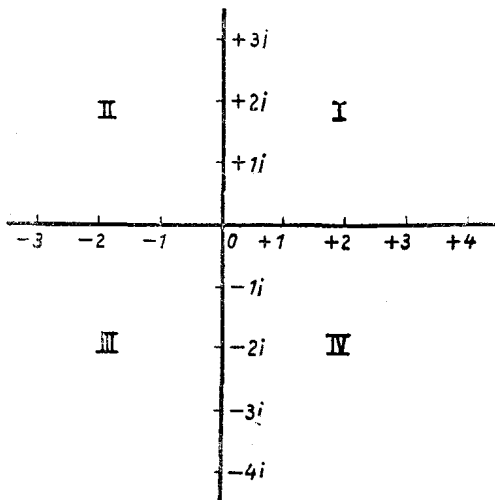


Bild 45

Die beiden aufeinander senkrecht stehenden Zahlengeraden bilden ein Achsen- oder Koordinatenkreuz.

Die waagerechte Achse (Zahlengerade der reellen Zahlen) nennt man die Abszissenachse, während die senkrechte Achse (Zahlengerade der imaginären Zahlen) die Ordinatenachse heißt.

Die Abszissen- und Ordinatenachse zerlegen die Ebene in 4 Teile, die sog. 4 Quadranten. Den oben rechts liegenden Quadranten bezeichnet man als I. Quadranten. Die drei restlichen Quadranten II bis IV folgen in entgegengesetzter Drehrichtung des Uhrzeigers. Der II. Quadrant liegt oben links, der III. unten links, der IV. unten rechts.

b) Die Multiplikation und Division imaginärer Zahlen

Während das Produkt bzw. der Quotient zweier reeller Zahlen stets wieder eine reelle Zahl ergibt, ist dies beim Multiplizieren bzw. Dividieren imaginärer Zahlen nicht der Fall.

Bei der Multiplikation und Division mit imaginären Zahlen wird der Faktor i genau so wie ein reeller Faktor behandelt; es ist aber die Grundbedingung $i^2 = -1$ hierbei zu beachten. Das Quadrat der imaginären Einheit i^2 gehört nicht mehr zu den imaginären Zahlen, sondern ist reell, nämlich -1 .

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Das Produkt einer reellen Zahl mit einer imaginären ergibt eine imaginäre Zahl.

Beispiel:

$$2 \cdot 3i = 6i \text{ oder } 0,2i \cdot 5 = i.$$

Der Quotient einer imaginären und reellen Zahl ergibt eine imaginäre Zahl.

a) Der Zähler (Dividend) ist imaginär: $4i : 2 = 2i$
 $0,8i : 4 = 0,2i.$

b) Der Nenner (Divisor) ist imaginär: $\frac{6}{3i} = ?$

Durch Erweitern mit i folgt:

$$\frac{6i}{3i \cdot i} = \frac{6i}{3 \cdot -1} = -2i.$$

Das Produkt (und der Quotient) zweier imaginärer Zahlen ergibt eine reelle Zahl.

Beispiel:

$$2i \cdot 4i = 8i^2 = -8$$

$$4i : 2i = 2 \text{ (} i \text{ hebt sich).}$$

Ein Produkt aus mehreren imaginären Faktoren kann sowohl reell als auch imaginär sein. Es richtet sich dies nach der Anzahl der imaginären Faktoren.

Beispiel:

$$3 \cdot 2i \cdot 2 \cdot 3i = 36i^2 = -36 \text{ (reell!)}$$

$$2i \cdot 3i \cdot 2 \cdot 4i = 48i^2 \cdot i = -48i \text{ (imaginär!).}$$

Ist die Anzahl der imaginären Faktoren eine gerade Zahl, so ist das Produkt reell; ist sie eine ungerade Zahl, so ist das Produkt imaginär.

c) Potenzen der imaginären Einheit

Für die Potenzen der imaginären Einheit i ergibt sich:

$$i^0 = i^{5-5} = i^5 : i^5 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^1 = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$$

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = +1$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(i^2) = +1$$

usw.

Zusammenstellung der Ergebnisse:

$$i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = +1$$

$$i^5 = i; \quad i^6 = -1; \quad i^7 = -i; \quad i^8 = +1.$$

Allgemein gilt für jede beliebige ganze Zahl n :

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i$$

Die Potenzen der imaginären Einheit mit negativen Exponenten: $i^{-1} = \frac{1}{i}$.

Dieser Bruch wird entweder mit i erweitert, man erhält:

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i.$$

oder dieser Bruch wird mit $i^4 (= 1)$ multipliziert, man erhält:

$$\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i.$$

Man erhält also:

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{i}{i^3} = \frac{i}{-i} = -1$$

$$i^{-6} = \frac{i^4}{i^6} = \frac{1}{i^2} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i$$

$$i^{-7} = \frac{i^4}{i^7} = \frac{1}{i^3} = i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{i^4}{i^4} = 1$$

$$i^{-8} = \frac{i^4}{i^8} = \frac{1}{i^4} = 1$$

$$i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{i^4}{i^5} = \frac{1}{i} = -i$$

usw.

Aufgaben über das Rechnen mit imaginären Zahlen:

Die Wurzeln in den Aufgaben 367...369, sind unter Benutzung der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ in einfacher Form zu schreiben.

367) a) $\sqrt{-36} =$ b) $\sqrt{-0,25} =$ c) $3\sqrt{-16} =$ d) $2\sqrt{-\frac{1}{4}} =$

368) a) $\sqrt{-a^2} =$ b) $\sqrt{-x^4} =$ c) $\sqrt{-y^8} =$ d) $\frac{1}{z^2}\sqrt{-z^{12}} =$

369) a) $\sqrt{-12} =$ b) $\sqrt{-27} =$ c) $\sqrt{-a^2b^2} =$ d) $\frac{1}{3}\sqrt{-18x^2} =$

Wie groß sind in den Aufgaben 370...378 die Zahlenwerte?

370) a) $3i^2 =$ b) $-2i^2 =$ c) $(0,5i)^2 =$ d) $0,5i^2 =$

371) a) $15i + 10i =$ b) $12i - 3i =$ c) $\frac{10i + 2i}{3} =$ d) $(2i + 3i) \cdot 2 =$

372) a) $0,3i - 0,5i =$ b) $\frac{1}{3}i - \frac{5}{6}i =$ c) $0,1i - i =$ d) $\frac{i}{2} - \frac{i}{2} =$

373) a) $\frac{1}{2} \cdot 4i =$ b) $0,25i \cdot 8 =$ c) $-0,4 \cdot -5i =$ d) $\frac{2}{3}i \cdot -\frac{3}{4} =$

$$374) \text{ a) } 6i \cdot 0,3i = \quad \text{ b) } -0,6i \cdot 2i = \quad \text{ c) } ai : bi = \quad \text{ d) } \frac{2}{3}i : \frac{3}{4}i =$$

$$375) \text{ a) } \frac{9,6i}{0,6} = \quad \text{ b) } \frac{2,4i}{4} = \quad \text{ c) } \frac{10}{2,5i} = \quad \text{ d) } \frac{3,6}{6i} =$$

$$376) \text{ a) } 4 \cdot -3i \cdot -0,5i = \quad \text{ b) } -3i \cdot -i \cdot 4i = \quad \text{ c) } 2i \cdot 3i \cdot 5i \cdot 0,1i =$$

$$\text{ d) } 3i \cdot -2i \cdot 4i \cdot i =$$

$$377) \text{ a) } 3i\sqrt{2} \cdot 5i\sqrt{8} = \quad \text{ b) } -3i\sqrt{2} \cdot 5i\sqrt{8} = \quad \text{ c) } 0,2i\sqrt{2,5} \cdot 5i\sqrt{0,4} =$$

$$\text{ d) } \sqrt{18} \cdot i \sqrt{\frac{1}{8}} =$$

$$378) \text{ a) } i^{11} = \quad \text{ b) } i^{14} = \quad \text{ c) } i^{16} = \quad \text{ d) } i^{21} =$$

2. Die komplexen Zahlen

Wenn man zwei von 0 verschiedene Zahlen, von denen die eine reell, die andere imaginär ist, addiert oder subtrahiert, so erhält man als Ergebnis eine Zahl, die weder reell noch imaginär ist. Sind z. B. a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen, so ist $a + bi$ weder reell noch imaginär. Eine derartige Zahl nennt man eine komplexe Zahl. Komplexe Zahlen setzen sich aus einem reellen und einem imaginären Teil zusammen. Man kann sie in der Form $a + bi$ darstellen. Sie umfassen das Gebiet aller Zahlen, die bisher in diesem Buche behandelt wurden.

Für $b = 0$ wird $a + bi = a$; d. h. man erhält eine reelle Zahl, wenn der imaginäre Teil der komplexen Zahl fortfällt.

Für $a = 0$ wird $a + bi = bi$; d. h.: Ist der reelle Teil der komplexen Zahl gleich Null, so hat man es mit einer imaginären Zahl zu tun.

Die reellen und imaginären Zahlen kann man somit als Sonderfälle der komplexen Zahlen auffassen.

a) Graphische (zeichnerische) Darstellung

Sämtliche komplexen Zahlen lassen sich als Punkte in den vier Quadranten der sog. Gaußschen Zahlenebene darstellen. Diese Zahlenebene, die nach dem deutschen Mathematiker Karl Friedrich Gauß¹⁾ benannt

¹⁾ Karl Friedrich Gauß, 1777 bis 1855, Professor und Direktor der Sternwarte zu Göttingen. Von ihm wurde der sog. Hauptsatz der Algebra über die Lösung der Gleichungen n -ten Grades, die Methode der kleinsten Quadrate, die Theorie des Elektromagnetismus u. a. aufgestellt. Zusammen mit dem Physiker Wilhelm Eduard Weber legte er den ersten elektromagnetischen Telegraphen an.

ist, wird durch die waagerechte Achse der reellen Zahlen und durch die auf ihr im Nullpunkt senkrechte Achse der imaginären Zahlen gebildet. Um die komplexe Zahl $a + bi$ in dieser Ebene darzustellen, sucht man auf der waagerechten Achse den Punkt A, der der reellen Zahl a entspricht. Auf der senkrechten Achse sucht man den Punkt B, der der imaginären Zahl bi entspricht. Die in den Punkten A und B auf den beiden Achsen errichteten Senkrechten schneiden sich in dem Punkt P, der ein Bild der komplexen Zahl $a + bi$ ist.

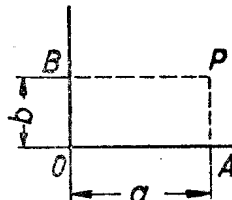


Bild 46

Die komplexe Zahl $a + bi$ wird durch den Punkt P der Gaußschen Zahlenebene abgebildet. Der Punkt P hat die Abszisse $OA = a$ und die Ordinate $OB = b$.

Komplexe Zahlen, die im

- | | | | |
|---------------|----------------|------------------------|-------------|
| 1. Quadranten | (oben rechts) | liegen, haben die Form | $a + bi$, |
| 2. „ | (oben links) | „ „ „ „ | $-a + bi$, |
| 3. „ | (unten links) | „ „ „ „ | $-a - bi$, |
| 4. „ | (unten rechts) | „ „ „ „ | $+a - bi$. |

Zahlenbeispiel:

Folgende komplexe Zahlen sind zeichnerisch darzustellen:

- (1): $2 + 3i$
- (2): $-3 + i$
- (3): $-1 - 2i$
- (4): $3,5 - 1,5i$.

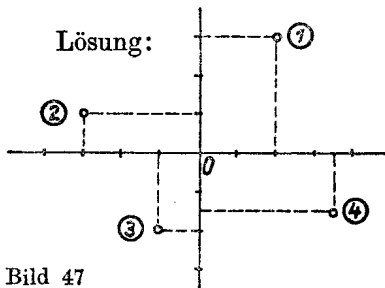


Bild 47

Komplexe Zahlen, die in ihrem reellen Bestandteile übereinstimmen, liegen auf einer Parallelen zur imaginären Achse, z. B.: $3 + i$ und $3 + 3i$ und $3 + 0,5i$ und $3 - 2\frac{1}{2}i$.

Komplexe Zahlen, die in ihrem imaginären Bestandteile übereinstimmen, bilden sich auf einer Parallelen zur Achse der reellen Zahlen ab; z. B.: $2 + 4i$ und $5 + 4i$ und $-2,5 + 4i$.

2 komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen ihres imaginären Teiles voneinander unterscheiden, heißen konjugiert komplexe Zahlen.

Beispiele:

Konjugiert komplex zueinander sind:

(1): $2 + 3i$ und (1a): $2 - 3i$,

ebenso (2): $-3 + 2i$ „ (2a): $-3 - 2i$.

Die Bilder konjugiert komplexer Zahlen liegen symmetrisch zur Achse der reellen Zahlen.

Unter dem absoluten Betrag einer komplexen Zahl $a + bi$ versteht man $\sqrt{a^2 + b^2}$. Der absolute Betrag der durch den Punkt P dargestellten komplexen Zahl $a + bi$ ist die Länge der Verbindungsstrecke OP des Nullpunktes 0 mit dem Punkt P; denn nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist:

$$\begin{aligned} OP^2 &= OA^2 + AP^2 \\ &= a^2 + b^2 \quad \text{oder} \\ OP &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

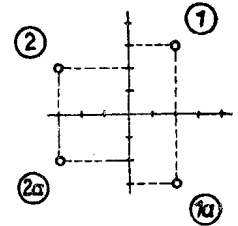


Bild 48

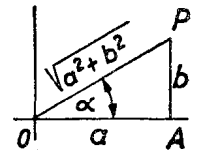


Bild 49

Der Winkel α , den OP mit der positiven Richtung (vom Nullpunkt 0 nach rechts hin) der waagerechten Achse bildet, heißt das Argument der komplexen Zahl.

Das Argument einer komplexen Zahl ist der Winkel α , der durch Drehung der positiv gerichteten Hälfte der horizontalen reellen Zahlengeraden in entgegengesetzter Bewegungsrichtung des Uhrzeigers entsteht.

Zahlenbeispiele:

Welches sind die absoluten Beträge der komplexen Zahlen:

(1): $3 + 4i$

(2): $-12 + 5i$

Lösung: (1): $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(2): $\sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$.

Welches sind die absoluten Beträge der konjugiert komplexen Zahlen

(1): $2 + 1,5i$ und (2): $2 - 1,5i$?

Absoluter Betrag von (1):

$$\sqrt{2^2 + 1,5^2} = \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5$$

und von (2):

$$\sqrt{2^2 + (-1,5)^2} = \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5.$$

Was kann man bezüglich der Argumente dieser beiden Zahlen feststellen?

(1) hat das Argument α_1

(2) „ „ „ α_2

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ.$$

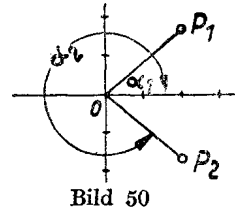


Bild 50

Allgemein gelten folgende Sätze:

Konjugiert komplexe Zahlen haben denselben absoluten Betrag. Die Summe ihrer Argumente beträgt 360° .

Komplexe Zahlen (mit demselben absoluten Betrag) haben den gleichen Abstand vom Nullpunkt; d. h. sie liegen auf einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, der den Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$ hat.

b) Das Rechnen mit komplexen Zahlen

Mit komplexen Zahlen, die die Form $a \pm bi$ haben, die also aus der Summe oder Differenz einer reellen und einer imaginären Zahl bestehen, rechnet man so, wie man es mit gewöhnlichen Summen bzw. Differenzen zu tun gewohnt ist. Man ist hierbei bestrebt, das Ergebnis ebenfalls nach Möglichkeit in die Form einer komplexen Zahl (reeller Teil \pm imaginärer Teil) zu bringen.

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i$$

in Worten heißt das:

Komplexe Zahlen werden addiert, indem man zu der Summe ihrer reellen Teile die Summe der imaginären Teile hinzuzählt.

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$$

oder in Worten:

Komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem man zu der Differenz der reellen Teile die Differenz der imaginären Teile hinzuzählt.

Sonderfälle:

a) Die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt stets eine reelle Zahl; denn:

$$(a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (bi - bi) = 2a.$$

b) Die Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt stets eine imaginäre Zahl; denn:

$$(a + bi) - (a - bi) = (a - a) + (bi + bi) = 2bi.$$

Zahlenbeispiele:

$$\begin{array}{ll}
 (7 + 3i) + (2 + 5i) = 9 + 8i & (7 + 3i) - (2 + 5i) = 5 - 2i \\
 (5 + 2i) + (3 - 5i) = 8 - 3i & (5 + 2i) - (3 - 5i) = 2 + 7i \\
 (3 + 5i) + (2i - 1) = 2 + 7i & (3 + 5i) - (2i - 1) = 4 + 3i \\
 (5 + 2i) + (3 - 2i) = 8 & (5 + 2i) - (3 - 2i) = 2 + 4i \\
 (3 + 5i) + (2i - 3) = 7i & (3 + 5i) - (2i - 3) = 6 + 3i \\
 (3 + 5i) + (5i - 3) = 10i & (3 + 5i) - (5i - 3) = 6 \\
 (5 + 2i) + (5 - 2i) = 10 & (5 + 2i) - (5 - 2i) = 4i.
 \end{array}$$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Auch diese Rechenoperationen werden so durchgeführt, als wenn man es mit gewöhnlichen Summen zu tun hat. Man beachte aber hierbei, daß $i^2 = -1$ ist, und sei bestrebt, das Ergebnis wieder in die Form einer komplexen Zahl zu bringen.

$$\begin{aligned}
 (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i.
 \end{aligned}$$

Sonderfall:

Die Multiplikation zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt eine reelle Zahl; denn

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Vergleiche hiermit:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

Ist eine komplexe Zahl durch eine reelle zu teilen, so teile man jedes Glied der komplexen Zahl durch die reelle Zahl:

$$\frac{a + bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$$

oder mit Zahlen:

$$\frac{6 + 15i}{3} = \frac{6}{3} + \frac{15}{3}i = 2 + 5i.$$

Ist eine reelle oder komplexe Zahl durch eine komplexe Zahl zu teilen, so verwandele man den Nenner des Bruches (Divisor) in eine reelle Zahl, indem man den Bruch mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl erweitert.

$$\begin{aligned}
 \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} \\
 &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i
 \end{aligned}$$

oder mit Zahlen:

$$\frac{17 - 6i}{3 - 4i} = \frac{(17 - 6i)(3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{(51 + 24) + (68i - 18i)}{9 + 16} = \frac{75 + 50i}{25} = 3 + 2i.$$

Potenzieren komplexer Zahlen

Unter Anwendung der Regeln für das Multiplizieren komplexer Zahlen lassen sich leicht höhere Potenzen komplexer Zahlen durch wiederholtes Multiplizieren bilden.

Zahlenbeispiele:

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \\(1+i)^3 &= (1+i)^2 \cdot (1+i) = 2i(1+i) = 2i - 2 \\(1+i)^4 &= [(1+i)^2]^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4 \\(1+i)^5 &= (1+i)^4 \cdot (1+i) = -4(1+i) = -4 - 4i \\(1+i)^6 &= (1+i)^4 \cdot (1+i)^2 = -4 \cdot 2i = -8i \\(3+i\sqrt{2})^2 &= 9 + 6i\sqrt{2} + 2i^2 = 7 + 6i\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Radizieren komplexer Zahlen

$$\begin{aligned}(\sqrt{a+bi} + \sqrt{a-bi})^2 &= a + bi + 2\sqrt{a+bi} \cdot \sqrt{a-bi} + a - bi \\&= 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \\&= 2(\sqrt{a^2 + b^2} + a).\end{aligned}$$

Zieht man in der soeben erhaltenen Gleichung:

$$(\sqrt{a+bi} + \sqrt{a-bi})^2 = 2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)$$

auf beiden Seiten die Wurzel, so erhält man

$$(1) \quad \sqrt{a+bi} + \sqrt{a-bi} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}.$$

Ebenso erhält man

$$(2) \quad \sqrt{a+bi} - \sqrt{a-bi} = i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}.$$

Gleichung (1) und (2) addiert, liefert:

$$2\sqrt{a+bi} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}.$$

Diese letzte Gleichung auf der linken und rechten Seite durch 2 dividiert, ergibt:

$$(a) \quad \sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Gleichung (1) und (2) subtrahiert, ergibt:

$$(b) \quad \sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Man ersieht, daß die Wurzel aus einer komplexen Zahl wiederum eine komplexe Zahl ist.

Zahlenbeispiele:

- a) $\sqrt{5 + 12i} = ?$ Beim Vergleich dieser Aufgabe mit der Formel (a) für $\sqrt{a + bi}$ sieht man, daß hier $a = 5$ und $b = 12$ gesetzt ist. Man erhält also:

$$\begin{aligned}\sqrt{5 + 12i} &= \sqrt{\frac{\sqrt{5^2 + 12^2} + 5}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5^2 + 12^2} - 5}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{13 + 5}{2}} + i \sqrt{\frac{13 - 5}{2}} \\ &= 3 + i \cdot 2.\end{aligned}$$

Ergebnis: $\sqrt{5 + 12i} = 3 + 2i$.

Probe: Beide Seiten des Ergebnisses quadriert, ergibt:

$$\begin{aligned}5 + 12i &= 9 + 12i + 4i^2 \\ &= 5 + 12i.\end{aligned}$$

- b) $\sqrt{2i} = ?$ Hier ist in Formel (a) für $a = 0$ und $b = 2$ zu setzen

$$\sqrt{2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{0^2 + 4} + 0}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{0^2 + 4} - 0}{2}} = 1 + i.$$

Ergebnis: $\sqrt{2i} = 1 + i$.

Probe: Durch Quadrieren erhält man: $2i = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

- c) $\sqrt{35 - 12i} = ?$ In Formel (b) ist für $a = 35$ und $b = 12$ zu setzen:

$$\begin{aligned}\sqrt{35 - 12i} &= \sqrt{\frac{\sqrt{35^2 + 12^2} + 35}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{35^2 + 12^2} - 35}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{1225 + 144} + 35}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{1225 + 144} - 35}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{37 + 35}{2}} - i \sqrt{\frac{37 - 35}{2}} = 6 - i.\end{aligned}$$

Ergebnis: $\sqrt{35 - 12i} = 6 - i$. (Probe machen!)

- d) $\sqrt{-i} = ?$ In Formel (b) ist für $a = 0$ und $b = -1$ zu setzen:

$$\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 0}}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 0}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} - i \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 - i).$$

Ergebnis: $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$. (Probe machen!)

Aufgaben über das Rechnen mit komplexen Zahlen:

- 379) In welchem Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegen die Bilder folgender komplexer Zahlen:

a) $-0,5 + 3i$

c) $-4 - 0,4i$

b) $2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$

d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}i$

380) Welche Größe ist allen komplexen Zahlen, die vom Nullpunkt gleich weit entfernt liegen, gemeinsam?

381) Welche Größe ist allen komplexen Zahlen gemeinsam, deren Bilder auf einer beliebigen durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen?

382) Welchen Abstand vom Nullpunkt (absoluter Betrag oder Modul) haben die Bilder folgender komplexer Zahlen

a) $3 + 4i$ b) $3 - 4i$ c) $-3 + 4i$ d) $-3 - 4i$?

383) Auf welcher Linie liegen die Bilder aller komplexen Zahlen, die dargestellt sind durch

a) $a + 2i$

b) $3 + bi$?

384) $(\frac{1}{2} + i) + (\frac{1}{2} - i) =$

392) $(4 + 2i)(3 - 5i) =$

385) $i\sqrt{2} + (3 - 2i)\sqrt{2} =$

393) $(0,2 + 0,5i)(5 + 2i) =$

386) $(-\frac{1}{4} + 2i) - (\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i) =$

394) $(\sqrt{37} + 3i\sqrt{7}) \cdot (-3i\sqrt{7} + \sqrt{37}) =$

387) $(3,5 - 0,5i) + (0,5 + 2,5i) =$

395) $(1 + i)^2 =$

388) $(2,5 + 3i) - (5,5 - 3i) =$

396) $(1 - i)^2 =$

389) $0,5(2 + i) =$

397) $(1 - i)(1 + i) =$

390) $i(2 - 3i) =$

398) $(3a + 4bi)(3a - 4bi) =$

391) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + i) =$

Die Aufgaben 399...403 sind in Produkte zweier konjugiert komplexer Faktoren zu zerlegen:

399) $a^2 + b^2 =$

408) $\frac{15}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}} =$

415) $(2 + i\sqrt{3})^2 =$

400) $16 + 9 =$

416) $(1 - i)^2 =$

401) $64 + 9 =$

409) $\frac{5i}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}} =$

417) $(1 - i)^4 =$

402) $37 =$

410) $\frac{1 + i}{1 - i} =$

418) $(i\sqrt{3} - 1)^3 =$

403) $a + b =$

411) $\frac{5 + 12i}{3 + 2i} =$

419) $(a + bi)^2 + (a - bi)^2 =$

404) $\frac{2}{1 + i} =$

412) $\frac{a + bi}{b - ai} =$

420) $(a + bi)^2 - (a - bi)^2 =$

405) $\frac{50}{7 - i} =$

413) $\frac{ai - b}{a + bi} =$

421) $\sqrt{8 + 6i} =$

406) $\frac{53}{7 + 2i} =$

414) $(4 + 3i)^2 =$

422) $\sqrt{-8 + 6i} =$

407) $\frac{4}{1 + i\sqrt{3}} =$

423) $\sqrt{1 + 2i\sqrt{2}} =$

424) $\sqrt{-\frac{3}{4} + i} =$

425) $\sqrt{-\frac{3}{4} - i} =$

427) $\sqrt{\frac{144 + 17i}{4 - 3i}} =$

426) $\sqrt{\frac{26 - 18i}{1 - 3i}} =$

428) $\sqrt{\frac{12 + 34i}{\sqrt{5 + 12i}}} =$

VII. Das Rechnen mit Logarithmen

Zu Beginn des Kapitels B V, „Die Wurzelrechnung“, wurden die beiden Umkehrungen des Potenzierens, nämlich das Radizieren und das Logarithmieren, genannt. Es wurde dort folgende Erklärung gegeben: Ist in der Gleichung $a^m = q$ die Größe m gesucht, während a und q bekannt sind, so gehört diese Aufgabe zur Logarithmenrechnung. Die Auflösung der Gleichung $a^m = q$ nach der gesuchten Größe m schreibt man in der Form

$$m = {}^a\log q$$

[lies: m ist gleich Logarithmus q zur Basis a].

Es bedeutet in der

| Potenzrechnung | Logarithmenrechnung |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| Gleichung: $a^m = q$ | Gleichung: $m = {}^a\log q$ |
| m = Potenzexponent (oder Hochzahl) | m = Logarithmus |
| a = Potenzbasis (oder Grundzahl) | a = Basis des Logarithmensystems |
| q = Potenzwert | q = Numerus |

Erklärung des Logarithmus:

Der Logarithmus (\log) einer Zahl q zur Basis a ist der Potenzexponent m , mit dem man die Basis a potenzieren muß, um die Zahl q (Numerus) zu erhalten.

Die Basis a könnte in der Logarithmenrechnung theoretisch irgendeine beliebige positive Zahl (außer $+1$) sein. Praktisch jedoch werden als Basis nur die Zahl 10 und die Zahl e verwendet. Hierauf wird ein wenig später näher eingegangen.

Alle Logarithmen mit derselben Basis bilden ein bestimmtes Logarithmensystem. Beispielsweise würde in einem Logarithmensystem mit der Basis 2 sein:

$${}^2\log 8 = 3; \text{ denn } 2^3 = 8$$

$${}^2\log 32 = 5; \text{ denn } 2^5 = 32$$

$${}^2\log 1,414 = 0,5; \text{ denn } 2^{0,5} = 1,414$$

$${}^2\log 1024 = 10; \text{ denn } 2^{10} = 1024$$

In einem Logarithmensystem mit der Basis 3 ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^3\log 9 &= 2; \text{ denn } 3^2 = 9 \\ {}^3\log 81 &= 4; \text{ denn } 3^4 = 81. \end{aligned}$$

Mit einem Logarithmensystem mit der Basis 1 kann man weder theoretisch noch praktisch etwas anfangen, da alle Potenzen der Zahl 1 wiederum 1 ergeben.

Weitere Zahlenbeispiele

für Logarithmensysteme mit beliebigen anderen Basen sind:

$$\begin{aligned} {}^4\log 64 &= 3, \quad \text{weil } 4^3 = 64 \text{ ist} \\ {}^5\log 25 &= 2, \quad \text{„ } 5^2 = 25 \text{ ist} \\ {}^9\log 3 &= 0,5, \quad \text{„ } 9^{0,5} = 9^{1/2} = \sqrt{9} = 3 \text{ ist} \\ {}^{27}\log 3 &= 1/3, \quad \text{„ } 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ ist usw.} \end{aligned}$$

Wie groß auch immer die Basis eines Logarithmensystems gewählt sein möge, immer lassen sich folgende Tatsachen feststellen:

- a) Der Logarithmus der Zahl 1 zu irgendeiner beliebigen Basis ist gleich 0; in Buchstaben

$$\boxed{{}^a\log 1 = 0}$$

denn $a^0 = 1$ (Seite 131).

- b) Der Logarithmus der Basis ist stets gleich 1;

$$\boxed{{}^a\log a = 1}$$

denn $a^1 = a$.

- c) Aus diesen beiden Sätzen sieht man, daß der Logarithmus einer Zahl zwischen 1 und der Basis stets ein echter Bruch ist.

- d) Der Logarithmus einer beliebig kleinen Zahl ε , im Zeichen:

$\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$), also ${}^a\log \varepsilon$, nähert sich für unbegrenzt verkleinertes ε dem Werte $-\infty$.

Man drückt den Sachverhalt kurz symbolisch aus durch:

$$\boxed{{}^a\log 0 = -\infty} \quad (\text{vgl. S. 38}).$$

- e) Der Logarithmus eines echten Bruches (also einer Zahl zwischen 0 und 1) ist negativ, weil ${}^a\log 1 = 0$ und ${}^a\log 0 = -\infty$ ist.

In der Zahl der unendlich vielen möglichen Logarithmensysteme sind nur die beiden folgenden Logarithmensysteme von praktischer Bedeutung:

a) Das natürliche Logarithmensystem oder das
Napersche¹⁾ Logarithmensystem

Dieses System wird hauptsächlich in der höheren Mathematik und in theoretischen Berechnungen verwendet. In ihm ist die Basis die Zahl $e = 2,7182818 \dots$. Sie ergibt sich, wenn man in der Potenz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für n einen sehr, sehr großen Wert, d. h. im Grenzfall²⁾ ∞ , einsetzt oder wenn man folgende Summe, die eine sog. Reihenentwicklung der Zahl e darstellt, mit möglichst vielen Gliedern berechnet:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \text{ usw.}$$

Man schreibt die natürlichen Logarithmen nicht in der Form ${}^e\log 100 = 4,6052$, sondern, vereinfacht nach DIN 1302, unter Fortlassen der Basis e und unter Verwendung der Buchstaben \ln statt \log : $\ln 100 = 4,6052$ [lies: natürlicher Logarithmus 100 gleich 4 Komma 6—0—5—2]. Allgemein schreibt man für ${}^e\log x$: $\ln x$.

Man merke sich: $\ln e = 1$; denn $e^1 = e$

$\ln 0 = -\infty$; „ $e^{-\infty} = 0$

$\ln 1 = 0$; „ $e^0 = 1$.

b) Das gewöhnliche oder dekadische Logarithmensystem
oder Briggsche³⁾ Logarithmensystem

Das Briggsche System hat die Basis 10. Statt ${}^{10}\log 100 = 2$ schreibt man nach DIN 1302: $\lg 100 = 2$. Man läßt also die Basis 10 sowie den Buchstaben o in \log fort.

¹⁾ Der englische Mathematiker John Napier [sprich: Naper], auch Naper genannt, lebte von 1550 bis 1617. Er ist der Entdecker des natürlichen Logarithmensystems, auf das er durch die Bemühungen, eine kürzere Berechnung der Dreiecke zu finden, geführt wurde. Er gab 1614 als erster eine Logarithmentafel heraus.

²⁾ In der höheren Mathematik schreibt man den Grenzfall $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, wenn n sich dem Wert ∞ immer mehr und mehr nähert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

[Lies: limes $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ hoch n für n nach unendlich gleich e .]

³⁾ Der englische Mathematiker Henry Briggs, der von 1556 bis 1631 lebte, war Professor der Geometrie in London und Oxford. Er entdeckte, daß ein Logarithmensystem mit der Basis 10 bequemer im Gebrauch ist als das einige Jahre früher von seinem Freunde Napier aufgestellte natürliche Logarithmengesetz. Briggs veröffentlichte 1624 als erster eine Tafel der Logarithmen mit 14 Dezimalstellen.

Zusammenstellung über die mathematische Schreibweise des Wortes Logarithmus.

| | | |
|---|---|---|
| log allgemein für Logarithmen beliebiger Systeme | lg gewöhnlicher Logarithmus Basis 10 | ln natürlicher Logarithmus Basis e = 2,7182818 ... |
|---|---|---|

Im dekadischen Logarithmensystem, nach dem die in der Praxis verwendeten Logarithmentafeln aufgestellt sind, ist

$$\begin{aligned}
 \lg 1000 &= 3 & , \text{ weil } 10^3 &= 1000 \\
 \lg 100 &= 2 & , \text{ ,, } 10^2 &= 100 \\
 \lg 10 &= 1 & , \text{ ,, } 10^1 &= 10 \\
 \lg 1 &= 0 & , \text{ ,, } 10^0 &= 1 \\
 \lg 0,1 &= -1 & , \text{ ,, } 10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0,1 \\
 \lg 0,01 &= -2 & , \text{ ,, } 10^{-2} &= \frac{1}{10^2} = 0,01 \\
 \lg 0,001 &= -3 & , \text{ ,, } 10^{-3} &= \frac{1}{10^3} = 0,001 \\
 \lg 0 &= -\infty & , \text{ ,, } 10^{-\infty} &= \frac{1}{10^\infty} = 0. \text{ Hiermit wird jedoch} \\
 & & & \text{ nicht gerechnet!}
 \end{aligned}$$

Aus Vorstehendem sieht man, daß die Zahlen (Numeri) über 1 positive, die Zahlen unter 1 negative Logarithmen haben, oder, anders ausgedrückt:

Ist der Numerus größer als 1, so ist der Logarithmus positiv. Ist der Numerus kleiner als 1, aber größer als 0, so ist der Logarithmus negativ. Ist der Numerus gleich 0, so ist der Logarithmus $-\infty$.

Das dekadische Logarithmensystem bietet den Vorteil, daß man bei einer Zahl (Numerus) aus der Anzahl ihrer Ziffern sofort erkennt, zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ihr Logarithmus liegt;

Beispiel:

$$\begin{array}{ll}
 \lg 8 & \text{liegt zwischen 0 und 1; er beträgt } \lg 8 = 0, \dots \\
 \lg 36 & \text{,, ,, 1 ,, 2; ,, ,, } \lg 36 = 1, \dots \\
 \lg 586 & \text{,, ,, 2 ,, 3; ,, ,, } \lg 586 = 2, \dots \\
 \lg 2341 & \text{,, ,, 3 ,, 4; ,, ,, } \lg 2341 = 3, \dots
 \end{array}$$

Statt der Punkte hinter dem Komma sind Dezimalstellen einzusetzen, die man einer Logarithmentafel zu entnehmen hat.

Die Logarithmen von Zahlen, die größer als 1 sind, bestehen aus einer ganzen Zahl, die vor dem Komma steht — man nennt sie Kennziffer (oder auch Charakteristik) — und aus Dezimalstellen — sie heißen Mantisse. Es ist

$$\begin{array}{ll}
 \lg 2 = 0,3010 & \lg 2000 = 3,3010 \\
 \lg 20 = 1,3010 & \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \lg 200 = 2,3010 & \text{Logarithmus} \quad \text{Kenn-} \quad \text{Mantisse} \\
 & \text{(Numerus > 1)} \quad \text{ziffer}
 \end{array}$$

- (a) Die Kennziffer des Logarithmus ist gleich der um 1 verminderten Stellenzahl des Numerus, sofern dieser größer als 1 ist.

Ist der Numerus ein echter Dezimalbruch (liegt er also zwischen 0 und 1), so ist der Logarithmus negativ. Man schreibt ihn als Summe eines echten Dezimalbruches und einer negativen ganzen Zahl (Kennziffer);

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \lg 0,2 = 0,3010 - 1 \\ \lg 0,02 = 0,3010 - 2 \\ \lg 0,002 = 0,3010 - 3 \end{array} \qquad \lg 0,0002 = 0,3010 - 4.$$

\uparrow
 Logarithmus
 (Numerus < 1)

\uparrow
 Mantisse

\uparrow
 negative
 Kennziffer

- (b) Die negative Kennziffer des Logarithmus von Dezimalbrüchen ist so groß wie die Anzahl der Nullen vor der ersten Ziffer des Numerus.

Bei der Bestimmung eines Logarithmus hat man zunächst die Kennziffer nach Regel (a) oder (b) festzulegen. Sodann entnimmt man die Mantisse des Logarithmus irgendeiner Logarithmentafel.

Nachstehend ein Auszug aus der im „Hilfsbuch für Betrieb und Konstruktion“ enthaltenen vierstelligen Logarithmentafel:

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 300 | 4771 | 4773 | 4774 | 4776 | 4777 | 4778 | 4780 | 4781 | 4783 | 4784 |
| 301 | 4786 | 4787 | 4789 | 4790 | 4791 | 4793 | 4794 | 4796 | 4797 | 4799 |
| 302 | 4800 | 4802 | 4803 | 4804 | 4806 | 4807 | 4809 | 4810 | 4812 | 4813 |
| 303 | 4814 | 4816 | 4817 | 4819 | 4820 | 4822 | 4823 | 4824 | 4826 | 4827 |

In dem vorstehenden Auszug sind in der ersten senkrechten Spalte N (= Numerus) die Zahlen 300 bis 303 und daneben in 10 senkrechten Spalten 0 bis 9 die Mantissen enthalten.

Der $\lg 300$ hat nach Regel (a) die Kennziffer 2 und die Mantisse 4771. Es ist somit $\lg 300 = 2,4771$.

$\lg 300,3$ hat ebenfalls die Kennziffer 2 und die Mantisse 4776, die man in der senkrechten Spalte 3 findet. $\lg 300,3 = 2,4776$. $\lg 30,03$ hat die Kennziffer 1, weil 30,03 eine 2stellige Zahl ist; die Mantisse aber bleibt dieselbe Zahl 4776. Also: $\lg 30,03 = 1,4776$.

Die Mantisse aller Zahlen mit gleicher Ziffernfolge (hier 3003) ist dieselbe (hier 4776).

Weitere Beispiele aus vorstehendem Auszug:

$$\begin{array}{ll} \lg 3030 = 3,4814 & \lg 0,03033 = 0,4819 - 2 \\ \lg 0,303 = 0,4814 - 1 & \lg 3,034 = 0,4820. \end{array}$$

Die Umkehrung zu diesen Beispielen besteht in dem Aufsuchen des Numerus, wenn der Logarithmus gegeben ist. Auch hierzu benutzt man die Logarithmentafel.

Beispiele:

Wie groß ist x , wenn $\lg x = 3,4791$?

Zur Mantisse 4791 gehört die Ziffernfolge des Numerus: 3014. Die Kennziffer des gegebenen Logarithmus beträgt 3; somit ist der Numerus vierstellig. $x = 3014$.

| | |
|----------------------|---------------------|
| $\lg x = 4,4827$ | Lösung: $x = 30390$ |
| $\lg x = 0,4816$ | „ $x = 3,031$ |
| $\lg x = 0,4790 - 1$ | „ $x = 0,3013$ |
| $\lg x = 0,4771 - 2$ | „ $x = 0,03$ |

Steht die Mantisse des gesuchten Logarithmus nicht in der Logarithmentafel, so begnügt man sich entweder mit der nächstliegenden Mantisse oder aber, was meistens nicht erforderlich ist, man bestimmt durch Interpolieren (= Dazwischenschalten) die letzte Stelle des Numerus.

Wenn man eine genügende Sicherheit und Fertigkeit im Aufschlagen der Logarithmen bzw. umgekehrt der Numeri hat, kann man an das Rechnen mit Logarithmen herangehen. Das bringt eine bedeutende Zeitersparnis und Erleichterung beim Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren. Die Grundlage für das Rechnen mit Logarithmen ist die Kenntnis der:

c) 4 Logarithmengesetze

Diese gelten für jedes beliebige Logarithmensystem. Es ist also gleichgültig, wie groß die Basis des Logarithmus ist. Nachstehend werden die 4 Logarithmengesetze für das dekadische Logarithmensystem (mit der Basis 10) aufgeführt und bewiesen:

- 1) Der Logarithmus eines Produktes
ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

$$\lg (a b) = \lg a + \lg b$$

Beweis: Aus $a = 10^m$ folgt in logarithmischer Schreibweise: $m = \lg a$.

Ebenso ergibt sich aus: $b = 10^n$

die logarithmische Form: $n = \lg b$.

Durch Multiplikation von a und b :

$$a b = 10^m \cdot 10^n = 10^{m+n},$$

oder logarithmisch geschrieben:

$$m + n = \lg (a b).$$

Setzt man für

$$m = \lg a \text{ und } n = \lg b,$$

so ergibt sich:

$$\lg (a b) = \lg a + \lg b \quad \text{w. z. b. w.}$$

2) Der Logarithmus eines Quotienten

ist gleich dem Logarithmus des Zählers vermindert um den Logarithmus des Nenners:

$$\lg \left(\frac{a}{b} \right) = \lg a - \lg b$$

Beweis: Es sei $a = 10^m$ oder $m = \lg a$

und $b = 10^n$ „ $n = \lg b$.

Durch Division der Werte für a und b erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}.$$

Logarithmisch geschrieben, ist: $m - n = \lg \left(\frac{a}{b} \right)$.

Für $m = \lg a$ und $n = \lg b$ gesetzt, erhält man:

$$\lg \left(\frac{a}{b} \right) = \lg a - \lg b \quad \text{w. z. b. w.}$$

3) Der Logarithmus einer Potenz

wird erhalten, wenn der Logarithmus der Potenzbasis mit dem Potenzexponenten multipliziert wird.

$$\lg (a^n) = n \cdot \lg a$$

Beweis: Es sei $a = 10^q$ oder, was dasselbe ist, $q = \lg a$.

Dann ist:

$$a^n = (10^q)^n = 10^{nq}$$

oder logarithmisch geschrieben:

$$nq = \lg (a^n).$$

Setzt man hierin für

$$q = \lg a,$$

so erhält man die gesuchte Gleichung:

$$\lg (a^n) = n \cdot \lg a.$$

4) Der Logarithmus einer Wurzel

wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

$$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a$$

Beweis: Da man eine Wurzel stets als Potenz mit einem gebrochenen Exponenten schreiben kann, so läßt sich der Beweis für die Logarithmierung einer Wurzel auf dieselbe Art wie unter 3. durchführen.

Zusammenfassung:

In der Logarithmenrechnung wird zurückgeführt:

das Multiplizieren auf das Addieren: $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$

„ Dividieren „ „ Subtrahieren: $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$

„ Potenzieren „ „ Multiplizieren: $\lg(a^n) = n \cdot \lg a$

„ Radizieren „ „ Dividieren: $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a$.

Beispiele für die 4 Logarithmengesetze:

1) Aus einer vierstelligen Logarithmentafel hat man entnommen:

$\lg 2 = 0,3010$ und $\lg 3 = 0,4771$. Wie groß ist dann

a) $\lg 6$ b) $\lg 1,5$ c) $\lg 8$ d) $\lg \sqrt{3}$?

Lösung: a) $\lg 6 = \lg(2 \cdot 3) = \lg 2 + \lg 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$

b) $\lg 1,5 = \lg\left(\frac{3}{2}\right) = \lg 3 - \lg 2 = 0,4771 - 0,3010 = 0,1761$

c) $\lg 8 = \lg(2^3) = 3 \lg 2 = 3 \cdot 0,3010 = 0,9030$

d) $\lg \sqrt{3} = \frac{1}{2} \lg 3 = \frac{1}{2} \cdot 0,4771 = 0,2386$.

2) Wie groß ist die Seite des Quadrates mit dem Inhalt $F = 0,4 \text{ m}^2$?

Lösung: $F = a^2 = 0,4$; $a = \sqrt{0,4}$; durch Logarithmierung erhält man:

$\lg a = \lg \sqrt{0,4} = \frac{1}{2} \lg 0,4 = \frac{1}{2} (0,6021 - 1)$.

Um nach der Division durch 2 eine ganze Zahl als Kennziffer zu erhalten, formt man den Klammerinhalt um:

$\lg a = \frac{1}{2} (1,6021 - 2) = 0,8011 - 1$.

Durch Aufsuchen des Numerus erhält man: $a = 0,6325 \text{ [m]}$.

3) Folgende Ausdrücke sind zu logarithmieren:

a) $\frac{a b^2}{c^3 d}$ b) $\sqrt[3]{\frac{b^2 c}{(d+e)^2 \cdot f}}$ c) $\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt{a^3 b}$.

Lösung: a) $\lg \frac{a b^2}{c^3 d} = \lg a + 2 \lg b - (3 \lg c + \lg d)$

b) $\lg \sqrt[3]{\frac{b^2 c}{(d+e)^2 \cdot f}} = \frac{1}{3} [2 \lg b + \lg c - (2 \lg(d+e) + \lg f)]$

c) $\lg \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt{a^3 b} = \frac{1}{3} (2 \lg a + \lg b) + \frac{1}{2} (3 \lg a + \lg b)$.

4) $x = 2,3^{1,4}$. Wie groß ist x ?

Lösung: $\lg x = 1,4 \lg 2,3 = 1,4 \cdot 0,3617$

$$\begin{aligned} \lg(\lg x) &= \lg(1,4 \cdot 0,3617) = \lg 1,4 + \lg 0,3617 \\ &= 0,1461 + 0,5583 - 1 = 0,7044 - 1. \end{aligned}$$

Durch Aufsuchen des Numerus erhält man:

$$\lg x = 0,5063 \quad \text{und} \quad x = 3,208.$$

5) Beträgt der Durchmesser einer Kugel d [m], so beträgt ihr Volumen $V = \frac{\pi d^3}{6}$ [m³]; hierin ist $\pi = 3,142$ einzusetzen. Wieviel Liter Gas faßt ein kugelförmiger Ballon vom Durchmesser $d = 1,975$ m?

$$\text{Lösung: } V = \frac{3,142 \cdot 1,975^3}{6}$$

$$\begin{aligned} \lg V &= \lg 3,142 + 3 \lg 1,975 - \lg 6 \\ &= 0,4972 + 3 \cdot 0,2956 - 0,7782 \\ &= 0,4972 + 0,8868 - 0,7782 = 0,6058 \\ V &= 4,035 \text{ [m}^3\text{]} = 4035 \text{ [l]}. \end{aligned}$$

d) Der Zusammenhang verschiedener Logarithmensysteme

wird durch folgende 2 Formeln gezeigt.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \boxed{b \log a = \frac{c \log a}{c \log b}} \\ (2) \quad & \boxed{b \log a = \frac{1}{a \log b}} \end{aligned}$$

Als Gedächtnishilfe für diese beiden Formeln wende man folgende vereinfachenden Schreibweisen an:

$$b \log a = \frac{a}{b \times c} \quad c \log a = \frac{a}{c \times b} \quad c \log b = \frac{b}{c \times a}$$

Die beiden Formeln würden hiermit dann lauten:

$$(1) \quad \frac{a}{b \times c} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \quad (2) \quad \frac{a}{b \times c} = \frac{1}{\frac{b}{c \times a}}$$

Betrachtet man das für den Logarithmus als Symbol gewählte \times Zeichen als Bruchstrich, so wären die beiden Formeln nach den Regeln für die Bruchrechnung ohne weiteres richtig; nämlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c \times a}}$$

Zum Beweise der Formel (1) setze man: ${}^b\log a = x$ oder, was dasselbe ist, $b^x = a$. Logarithmiert man diesen letzten Ausdruck in einem Logarithmensystem mit der Basis c , so ergibt sich nach dem 3. Logarithmengesetz:

$${}^c\log a = {}^c\log (b^x) = x \cdot {}^c\log b.$$

Dividiert man beide Seiten dieser letzten Gleichung:

$$x \cdot {}^c\log b = {}^c\log a \text{ durch } {}^c\log b,$$

so erhält man:

$$x = \frac{{}^c\log a}{{}^c\log b}$$

oder, da man für ${}^b\log a = x$ gesetzt hatte:

$${}^b\log a = \frac{{}^c\log a}{{}^c\log b} \text{ w. z. b. w.}$$

Setzt man in dieser soeben bewiesenen Formel (1) $c = a$, so erhält man

$${}^b\log a = \frac{{}^a\log a}{{}^a\log b} = \frac{1}{{}^a\log b}.$$

Und dies ist Formel (2).

Zusammenhang zwischen natürlichem und gewöhnlichem Logarithmus

Setzt man in Formel (1) für b die Basis e des natürlichen Logarithmen systems und für c die Basis 10 des gewöhnlichen Logarithmensystems ein, so erhält man: ${}^e\log a = \frac{{}^{10}\log a}{{}^{10}\log e}$ oder in genormter Schreibweise:

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e}.$$

Man bezeichnet $\lg e$ mit dem

| |
|-----------------------------|
| Modul $M = \lg e = 0,43429$ |
|-----------------------------|

Der Kehrwert dieses Moduls hat die Größe

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{0,43429} = 2,3026.$$

Mit diesen Zahlenwerten ergibt sich:

| |
|--|
| $\ln a = \frac{\lg a}{0,43429} = 2,3026 \cdot \lg a$ |
|--|

in Worten: Kennt man den gewöhnlichen (oder dekadischen) Logarithmus einer Zahl, so bestimmt man den natürlichen (oder Naperschen) Logarithmus dadurch, daß man den gewöhnlichen Logarithmus mit 2,3026 multipliziert (oder durch den Modul $M = 0,43429$ dividiert).

Der absolute Zahlenwert des natürlichen Logarithmus einer Zahl ist größer als der des dekadischen Logarithmus.

Anleitung: Die Riemenkraft beträgt:

$$\text{im ziehenden Teil: } S_1 = P \cdot \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1}$$

und im gezogenen Teil:

$$S_2 = P \cdot \frac{1}{e^{\mu \alpha} - 1}.$$

α ist im Bogenmaß einzusetzen (s. S. 59)

$$\alpha = \frac{172^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 3; \quad e = 2,718.$$

- 453) Ein Hanfseil ist über ein Rohr aus Grauguß geführt und umschlingt es in einem Winkel $\alpha = 250^\circ$. Eine an dem einen Seilende hängende Last Q wird durch eine an dem anderen Ende angreifende Zugkraft $P = 40 \text{ kg}$ gehalten. Wie groß ist die Last Q ?

Anleitung: Man rechne mit $Q = P \cdot e^{\mu \alpha}$ und setze für $\mu = 0,25$ und $\alpha = \frac{250^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 4,36$.

- 454) Unter dem in cm gemessenen Trägheitshalbmesser i eines Profils versteht man: $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$; hierin ist I das Trägheitsmoment in cm^4 und F die Querschnittsfläche in cm^2 . Für den I Stahl I 12 entnimmt man einer Stahlbauprofilabelle: $I = 328 \text{ cm}^4$ und $F = 14,2 \text{ cm}^2$. Welcher Wert für den Trägheitshalbmesser i müßte in der Tabelle für dieses Profil verzeichnet sein?

- 455) Wie groß ist der elektrische Widerstand R in Ohm eines $l = 10,35 \text{ km}$ langen Eisendrahtes vom Durchmesser $d = 2 \text{ mm}$, wenn der spezifische Widerstand $\rho = 0,125$ beträgt?

Anleitung: $R = \frac{4 \cdot l \cdot \rho}{\pi d^2}$; hierin: $\pi = 3,14$, $l = \text{Länge in m}$,
 $\rho = \text{spez. Widerstand}$, $d = \text{Durchmesser in mm}$, $R = \text{Widerstand in } \Omega$.

- 456) Der Widerstand eines Heizkörpers beträgt $R = 80,75 \Omega$. Er verzehrt eine Stromstärke $I = 3,25 \text{ A}$. Wie groß ist die in 20 min erzeugte Wärmemenge Q in kcal?

Anleitung: Fließt ein Strom I Ampere während t Sekunden durch einen Draht vom Widerstand R Ohm, so beträgt nach dem Jouleschen Gesetz die in kcal entwickelte Wärmemenge

$$Q = 0,00024 I^2 \cdot R \cdot t.$$

- 457) Eine Werkstatt, die $12,5 \text{ m}$ lang und $9,75 \text{ m}$ breit ist, soll eine Beleuchtungsstärke $E = 35 \text{ Lux (Lx)}$ erhalten. Wie groß ist bei einer Lichtausbeute $\eta = 0,25$ der Lichtbedarf Φ in Lumen (Lm)?

Anleitung: $\Phi = \frac{E \cdot F}{\eta}$; hierin $F = \text{Bodenfläche in m}^2$.

458) Nach dem Kirchhoffschen¹⁾ Gesetz über Stromverzweigung verhalten sich die in 2 parallel geschalteten Widerständen r_1 und r_2 fließenden Stromstärken i_1 und i_2 umgekehrt wie die Widerstände zueinander. Es gilt also die Beziehung: $i_1 : i_2 = r_2 : r_1$.

Wie groß ist r_2 für $i_1 = 2,5$ A; $i_2 = 3,8$ A; $r_1 = 0,955 \Omega$?

VIII. Das Rechnen mit dem Rechenschieber

Im praktischen Maschinenrechnen bedient man sich zum Multiplizieren und Dividieren fast ausschließlich des Rechenschiebers. Er kann auch an Stelle mathematischer und trigonometrischer Tabellen zum Bestimmen der Quadratzahlen und Kuben (3. Potenzen) sowie der Quadrat- und Kubikwurzeln, ferner zum schnellen Ermitteln des Kreisinhaltens bei gegebenem Durchmesser und zum Aufsuchen der trigonometrischen Funktionen (\sin , \cos , tg , ctg) verwendet werden. Eine bisweilen auf der Rückseite eines Rechenschiebers angebrachte kleine flache Rechenmaschine (Castell-Addiator) macht den gewöhnlichen Rechenschieber auch zur Ausführung von Additions- und Subtraktionsaufgaben geeignet. Ferner gibt es noch Sonder-Rechenstäbe für spezielle Rechenaufgaben der Praxis; z. B.: Schnittzeitbestimmung, Berechnung der Riemenleistung und -geschwindigkeit, Tragkraft von Federn, Wellenberechnung auf Biegung und Verdrehung, Wechselräderbestimmung, Gewichtsberechnung und noch viele andere²⁾.

Die Vorzüge und Anwendungsmöglichkeiten des Rechenschiebers sind also auf technischen Gebieten sehr groß. Er gehört zu dem unumgänglich notwendigsten Handwerkszeug eines Ingenieurs oder Technikers.

Die bekanntesten Rechenschiebersysteme sind das System Rietz und das System Darmstadt, das seinen Namen nach der Technischen Hochschule Darmstadt trägt, auf der dieser Rechenschieber entwickelt wurde.

Ein jeder Rechenschieber besteht aus dem Gehäuse (Stab), in dem die verschiebbare Zunge gleitend geführt wird, sowie aus dem über Gehäuse und Zunge verschiebbaren Läufer aus Glas mit Ablese-Markenstrich.

Das charakteristische Merkmal eines Rechenschiebers sind die auf dem Gehäuse und der Zunge aufgetragenen logarithmischen Teilungen, die die Ausführung des Multiplizierens und Dividierens ermöglichen.

Würde man statt der logarithmischen Teilungen normale Teilungen mit gleichmäßigen Teilstrichabständen verwenden, wie sie jeder Maßstab, Zollstock oder Bandmaß besitzt, so könnte man mit einem solchen Stabe nur addieren bzw. subtrahieren.

¹⁾ Kirchhoff (1824 bis 1887), von 1854 bis 1875 Professor der Physik in Heidelberg, dann in Berlin.

²⁾ Auf diese Sonder-Rechenstäbe kann im Rahmen dieses Buches nicht eingegangen werden. Im Band Körwien, „Graphisches Rechnen (Nomographie)“ des gleichen Verlages sind sie eingehend behandelt.

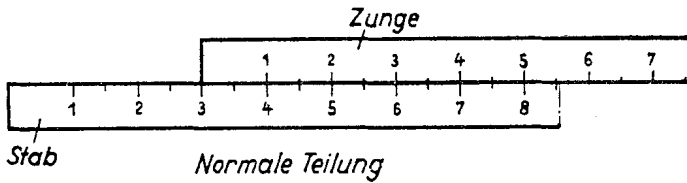


Bild 51

Schiebt man nämlich bei normalen Teilungen, wie die obenstehende Abbildung zeigt, die Zunge so weit nach rechts hin, daß der Teilungsanfang über der 3 des Stabes liegt, so liest man unter der 2 der Zunge auf der Stabteilung 5 ab. Dies ist das Ergebnis der Addition $3 + 2 = 5$. Durch Aneinandersetzen der 3 und 2 cm langen Strecken erhält man die 5 cm lange Strecke als Ergebnis der Streckenaddition. Umgekehrt führt man das Subtrahieren einer Strecke von einer anderen aus. Die vorstehende Schieberstellung verdeutlicht die Subtraktionen: $4 - 1 = 3$ oder $5 - 2 = 3$ oder $6 - 3 = 3$ usw.

Auf der Zahlengeraden des metrischen Maßstabes errichtet man in den einzelnen Punkten $0 \dots 10$ Senkrechte nach oben und trägt auf diesen die zugehörigen Werte der Logarithmen als Strecken in einem bestimmten Maßstabe ab. Da $\lg 10 = 1$ ist, so hat man die Senkrechte im Punkte 10 gleich der Längeneinheit zu machen. Man wähle als Längeneinheit eine Strecke von 25 cm Länge. — Die Skalenlänge der gebräuchlichen normalen Rechenschieber beträgt 25 cm. — Beispielsweise hat man die Senkrechte im Punkte 8 des metrischen Maßstabes ($25 \cdot 0,9031 =$) 22,58 cm lang zu machen, da $\lg 8 = 0,9031$ ist.

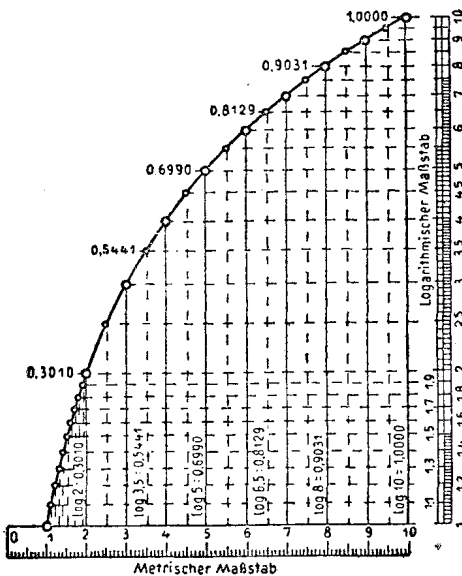


Bild 52
Herstellung einer logarithmischen Teilung

Verbindet man die auf diese Weise auf den Senkrechten erhaltenen Punkte miteinander, so erhält man die sog. logarithmische Kurve. Diese schneidet, da $\lg 1 = 0$ ist, die Zahlengerade im Punkte 1. Zwischen den Punkten 0 und 1 erhält man für die logarithmische Kurve keine positiven Werte, da die Logarithmen der Zahlen zwischen 0 und 1 (d. h. die Logarithmen von echten Brüchen) negativ sind.

Geht man von jedem Punkt der logarithmischen Kurve aus nach rechts bis auf eine Parallele zu den errichteten Senkrechten, so erhält man den 25 cm langen logarithmischen Maßstab. (In der vorstehenden Abbildung beträgt die Maß-

stablänge mit Rücksicht auf Platzersparnis nur 66 mm.) Bei ihm sind die Logarithmen der Zahlen als Strecken aufgetragen. Die an die einzelnen Punkte des Maßstabes angeschriebenen Zahlen jedoch sind die Numeri der betreffenden Logarithmen. Die Teilung des Rechenstabes ist in ihren untereinander ungleichen Abständen den Mantissen der Briggs'schen Logarithmen proportional.

Zur Anfertigung einer logarithmischen Skala braucht man nicht den soeben erklärten Umweg über die logarithmische Kurve zu machen; man kann vielmehr die einzelnen Teilpunkte sogleich auf Grund der Zahlenwerte auftragen, die man einer Logarithmentafel entnimmt. Die nebenstehende Abbildung zeigt die 2 untereinander liegenden und aneinander vorbeigleitenden logarithmischen Skalen des Stabes und der Zunge eines Rechenschiebers,

In der gezeichneten Stellung der Zunge liegt die 1 der Zungenskala über dem mit 1,2 bezeichneten Punkt der Stabskala. Unter der Zahl 2,5 der Zungenskala liegt die Zahl 3 der Stabskala. Hier ist die Streckenaddition $\lg 1,2 + \lg 2,5 = \lg (1,2 \cdot 2,5) = \lg 3$ veranschaulicht. Man erkennt, daß der mit logarithmisch geteilten Maßstäben durchgeführten Streckenaddition die Multiplikation $1,2 \cdot 2,5 = 3$ entspricht.

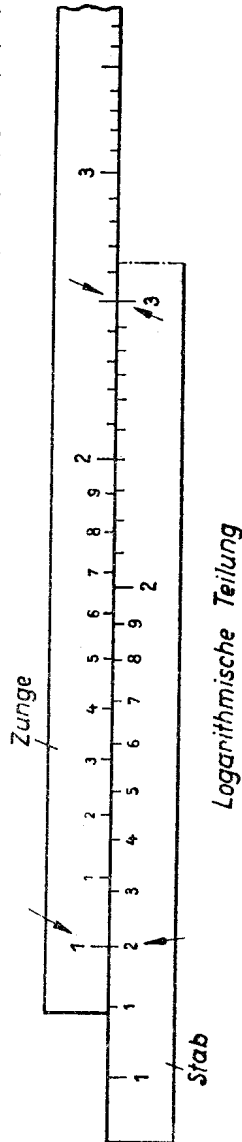
Um allgemein das aus den beiden Zahlen a und b gebildete Produkt ab zu berechnen, schiebt man den Anfangsstrich 1 der Zungenskala über die Zahl a der Stabskala und liest unter der Zahl b der Zungenskala das Produkt; ab auf der Gehäusenskala ab; denn $\lg a + \lg b = \lg (ab)$.

Auf diese Weise lassen sich im Rahmen der Ablesegenauigkeit, die die logarithmische Skala gestattet (meistens 3...4 Ziffern) und die in den meisten Fällen für die Zwecke der Praxis ausreicht, sämtliche Multiplikationsaufgaben ausführen.

Ebenso läßt sich in umgekehrter Reihenfolge die Division zweier Zahlen auf eine logarithmische Streckensubtraktion zurückführen. Die letzte Figur zeigt gleichzeitig die Lösung der Divisionsaufgabe $3 : 2,5 = 1,2$; denn es ist:

$$\lg 3 - \lg 2,5 = \lg (3 : 2,5) = \lg 1,2.$$

Soll allgemein $a : b$ berechnet werden, so verschiebt man die Zunge so, daß die Zahl b auf der Zunge über die Zahl a des Stabes zu liegen kommt.



Unter der 1 der Zunge liest man dann auf der Gehäuseskala den Quotienten $a : b$ ab; denn es ist:

$$\lg a - \lg b = \lg (a : b).$$

Bei der Ausführung mehrfacher Multiplikations- und Divisionsaufgaben, z. B. $\frac{3,4 \cdot 4,25}{2,7}$, berechnet man zweckmäßig zuerst den Quotienten $3,4 : 2,7$ und multipliziert das Zwischenergebnis, das zwar unter der 1 der Zungenskala steht, aber ohne Interesse ist, mit 4,25, ohne daß man die Zunge noch einmal zu verschieben hat. Das Endergebnis steht unter der 4,25 der Zungenskala und gibt die Ziffernfolge 5 3 5 an. Zur Bestimmung der Stellenzahl des Ergebnisses geben die Gebrauchsanweisungen für den jeweils verwendeten Rechenschieber sogenannte Stellenregeln an, die aber, so einfach sie auch sein mögen, leider in der Praxis leicht zu Verwechslungen und Fehlern führen können. Sicherer rechnet man, wenn man, soweit dies möglich ist, durch eine einfache Kopfrechnung mit grob abgerundeten Zahlenwerten das Ergebnis überschlägt. Im letzten Beispiele würde man rechnen:

$\frac{3,4 \cdot 4,25}{2,7} \approx \frac{3 \cdot 4}{3} \approx 4$; d. h. das Endergebnis liegt in der Nähe von 4. Es beträgt laut der mit dem Schieber ermittelten Ziffernfolge: 5,35.

Bei der Aufgabe: $\frac{23,4 \cdot 1730 \cdot 347 \cdot 0,00227}{0,0000135 \cdot 218 \cdot 4520} = ?$

bestimmt man zunächst ohne Berücksichtigung der Dezimalstellen der einzelnen Faktoren die Ziffernfolge des Ergebnisses, indem man zweckmäßig in folgender Reihenfolge den Schieber betätigt:

$$(234 : 135 \cdot 173) : (218 \cdot 347) : (452 \cdot 227).$$

Man erhält die Ziffernfolge: 239.

Zur Ermittlung der Stellenzahl des Ergebnisses denkt man sich die in der Aufgabe gegebenen Zahlen in Produkte einstelliger Zahlen und Zehnerpotenzen verwandelt; also:

$$\frac{2,34 \cdot 10^1 \cdot 1,730 \cdot 10^3 \cdot 3,47 \cdot 10^2 \cdot 2,27 \cdot 10^{-3}}{1,35 \cdot 10^{-5} \cdot 2,18 \cdot 10^2 \cdot 4,52 \cdot 10^3}.$$

Die Zehnerpotenzen zusammengefaßt, ergibt:

$$\frac{10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3}}{10^{-5} \cdot 10^2 \cdot 10^3} = 10^{1+3+2-3-(-5+2+3)} = 10^3 = 1000.$$

Mit den einstelligen grob abgerundeten Zahlen ergibt eine Überschlagsrechnung:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 5} \approx 3.$$

Die oben durchgeführte Schieberrechnung ergibt genauer: 2,39.

Das Ergebnis lautet somit: $2,39 \cdot 1000 = 2390$.

Außer den beiden 25 cm langen Hauptskalen des normalen Rechenschiebers sind auf ihm noch 2 nur halb so lange logarithmische Skalen vorhanden. Auf 25 cm Länge kommen 2 hintereinander liegende 12,5 cm lange Skalen. Diese werden zur Bestimmung der Quadratzahlen (sowie umgekehrt der Quadratwurzeln) benutzt. Nach dem 3. Logarithmengesetz (S. 174) ist:

$$\lg(a^2) = 2 \lg a,$$

┌ d. h.: Die logarithmische Skala der Quadratzahlen ist
└ halb so lang wie die der Basen der Quadratzahlen.

Die Skala für die Kubikzahlen hat nur $\frac{1}{3}$ der Länge der normalen Logarithmenskala; denn

$$\lg(a^3) = 3 \cdot \lg a.$$

Die Handhabung eines Rechenschiebers und seine vielfachen Verwendungsmöglichkeiten werden in der zu jedem Rechenschieber gehörenden Anleitung erklärt. Dieses Kapitel beschränkte sich lediglich auf die Erklärung der mathematischen Grundlagen für das Rechnen mit dem Rechenschieber. Einige nachfolgende Übungsaufgaben mögen zur Erhöhung der Sicherheit beim Multiplizieren und Dividieren beitragen.

Aufgaben:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 459) $1,6 \cdot 2,5 =$ | 476) $6,54 : 2,31 =$ |
| 460) $2,3 \cdot 0,12 =$ | 477) $0,124 : 0,0402 =$ |
| 461) $620 \cdot 7,5 =$ | 478) $10,2 : 5,73 =$ |
| 462) $5,4 \cdot 470 =$ | 479) $3,22 : 10,4 =$ |
| 463) $0,79 \cdot 0,55 =$ | 480) $40,8 : 204 =$ |
| 464) $1,07 \cdot 21,5 =$ | 481) $687 : 0,95 =$ |
| 465) $21,6 \cdot 1,11 =$ | 482) $97,2 : 645 =$ |
| 466) $17,5 \cdot 8,58 =$ | 483) $0,705 : 8,55 =$ |
| 467) $5,65 \cdot 21,4 =$ | 484) $\frac{412 \cdot 946}{504} =$ |
| 468) $92,5 \cdot 23,8 =$ | 485) $\frac{3,14 \cdot 788}{542} =$ |
| 469) $1,23 \cdot 4,56 \cdot 7,8 =$ | 486) $\frac{7,52 \cdot 34,1}{20,4 \cdot 4,13} =$ |
| 470) $87 \cdot 6,54 \cdot 0,321 =$ | 487) $\frac{9,81 \cdot 2100 \cdot 0,62}{3,14 \cdot 5} =$ |
| 471) $2,46 \cdot 87,5 \cdot 3,1 =$ | 488) $\frac{154 \cdot 21,5 \cdot 0,024}{98,4 \cdot 3,62 \cdot 0,3} =$ |
| 472) $9,75 \cdot 3,15 \cdot 7,82 =$ | |
| 473) $0,864 \cdot 2,46 \cdot 5,79 =$ | |
| 474) $158 : 24,6 =$ | |
| 475) $24,6 : 1,35 =$ | |

C. Das Rechnen mit Gleichungen (Algebra)

I. Die verschiedenen Arten von Gleichungen

Die bisher behandelten Rechenoperationen, auf deren gründlichste Beherrschung nicht oft genug hingewiesen werden kann, werden beim Rechnen mit Gleichungen verwendet. Die Lehre von den Bestimmungsgleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten ist die Algebra. Das Wort „Algebra“ stammt aus dem Arabischen (Al-dschebr) und bedeutet das Herüberbringen.

Durch eine Gleichung werden, wie der Name schon sagt, 2 Größen einander gleichgesetzt. Sie werden durch das Gleichheitszeichen = voneinander getrennt. Die eine Größe steht auf der linken, die andere auf der rechten Seite der Gleichung.

Man unterscheidet folgende Arten von Gleichungen:

- a) Identische Gleichungen,
- b) Bestimmungsgleichungen,
- c) Funktionsgleichungen.

Zu a) Mathematische Formeln sind identische Gleichungen.

Der Satz: „In einer Summe ist die Reihenfolge der Summanden beliebig“ läßt sich durch die Formel $a + b + c + d = b + d + c + a$ darstellen. Diese Formel ist eine identische Gleichung; in ihr wird die auf der linken Seite stehende Summe $a + b + c + d$ der auf der rechten Gleichungsseite stehenden Summe $b + d + c + a$ gleichgesetzt.

Beispiele:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$a^2b + ab^2 = ab(a + b)$$

$$a^2b^2 = (ab)^2$$

$$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}.$$

Identische Gleichungen sind für jeden Zahlenwert der gegebenen Größen a, b, c usw. richtig. Sie drücken allgemeingültige Wahrheiten aus.

Zu b) Die Bestimmungsgleichungen tragen in sich den mathematischen Befehl, die in ihr auftretende Unbekannte zu bestimmen; z. B.:

$$2x - 6 = 12 \quad \text{oder} \quad 2x = 6$$

$$(x = 9) \quad \quad \quad (x = 3)$$

Man bestimmt die Unbekannte einer Bestimmungsgleichung also derart, daß bei Einsetzen des berechneten Wertes der Unbekannten in die gegebene Bestimmungsgleichung diese zu einer identischen Gleichung wird. (Dies kommt einer Probe für die Richtigkeit des berechneten Wertes der Unbekannten gleich.)

Sind in einer technischen Formel alle Größen bis auf eine bekannt, so läßt sich eine solche Formel als Bestimmungsgleichung ansprechen.

Aus der Gleichung für das Ohmsche Gesetz: $U = I \cdot R$ ($U =$ Spannung in V; $I =$ Stromstärke in A und $R =$ Widerstand in Ω) kann man eine der 3 Größen U , I und R bestimmen, wenn die beiden anderen gegeben sind.

Beispiele:

| | | |
|--|---|--------------------------------|
| Zugspannung σ | } | $\sigma = \frac{P}{F}$ |
| Belastende Kraft P | | |
| Querschnitt F | | |
| Wellendurchmesser d | } | $d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ |
| Leistung N | | |
| Drehzahl n | | |
| Widerstandsmoment W eines rechteckigen Balkenquerschnittes | } | $W = \frac{bh^3}{6}$ |
| Balkenbreite b | | |
| Balkenhöhe h | | |
| Umfangsgeschwindigkeit v | } | $v = \frac{d \pi n}{60}$ |
| Wellendurchmesser d | | |
| Drehzahl n ($\pi = 3,14$) | | |
| Leistung N | } | $N = \frac{P v}{75}$ |
| Umfangskraft P | | |
| Umfangsgeschwindigkeit v | | |
| Drehmoment M_t | } | $M_t = 71\,620 \frac{N}{n}$ |
| Leistung N | | |
| Drehzahl n | | |
| Biegemoment M_b | } | $M_b = W \cdot \sigma_b$ |
| Widerstandsmoment W | | |
| Biegespannung σ_b | | |

Neben diesen einfachen Beispielen für Bestimmungsgleichungen kann die Unzahl aller technischen Formeln angeführt werden.

Die zu bestimmende Größe, die man nach gegebenenfalls erforderlichen mathematischen Umformungen der Gleichung berechnen kann, nennt man die Unbekannte der Gleichung. In der Mathematik bezeichnet man die unbekanntenen Größen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, also mit x oder y oder z . Die bekannten Größen dagegen werden mit den ersten Buchstaben des Alphabets a oder b oder c usw. benannt.

Die Gleichung

$$2x - a = 15b$$

stellt in mathematischer Form eine Bestimmungsgleichung dar. Man kann aus ihr die unbekanntene Größe x bestimmen, wenn a und b irgendwelche bekannte Größen sind. Nur für diesen einen berechneten Wert von x ist diese Gleichung richtig.

Zu c) Eine Funktionsgleichung enthält 2 oder mehrere veränderliche Größen, die voneinander abhängig sind. Funktionsgleichungen werden durch gerade Linien oder Kurven in der Technik dargestellt.

| | | |
|-------------------|--------------------|----------------|
| <i>Beispiele:</i> | $y = 3x$ | $y = 2ax^2$ |
| | $9x^2 + 4y^2 = 36$ | $y = ax^3 + b$ |

Im folgenden werden zunächst nur die unter b) angeführten Bestimmungsgleichungen behandelt. Erst bei den zeichnerischen Lösungsverfahren der Gleichungen kommen wir auf die Funktionsgleichungen zurück.

Neben dieser Einteilung der Gleichungen nach ihrer Art (identische Gleichungen — Bestimmungsgleichungen — Funktionsgleichungen) unterscheidet man die Gleichungen nach der in ihnen vorkommenden höchsten Potenz der Unbekannten. Man spricht von dem Grad der Gleichung:

Eine Gleichung, in der die Unbekannte x in der 1. Potenz vorkommt heißt eine Gleichung 1. Grades oder eine lineare Gleichung.

Beispiel: $3x + 5 = 32$.

Kommt die Unbekannte in quadratischer Form vor, so hat man es mit einer quadratischen Gleichung zu tun.

Beispiel: $7x^2 + 25x = 12$.

Gleichungen 3. Grades mit der Unbekannten in der 3. Potenz (x^3) heißen kubische Gleichungen.

Beispiel: $2x^3 + x^2 - x - 18 = 0$.

Gleichungen, in denen die Unbekannte in der 4. Potenz (x^4) vorkommt, heißen: Biquadratische Gleichungen.

Beispiel: $2x^4 + x^2 - 3 = 0$.

Allgemein nennt man eine Gleichung, in der die Unbekannte den Potenzexponenten n hat, eine Gleichung n -ten Grades.

Beispiel: $ax^n + bx^{n-1} + cx^3 + x = d$.

Es wird sich ergeben, daß

- a) eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten x eine Lösung besitzt,
- b) „ quadratische „ „ „ „ „ x zwei Lösungen „ „
- c) „ kubische „ „ „ „ „ „ x drei „ „ „

Allgemein: Eine Gleichung n -Grades mit einer Unbekannten x besitzt n Lösungen, wenn auch komplexe Zahlen als Lösungen zugelassen werden. (Dieser Sachverhalt wird in dem sog. „Fundamentalsatz der Algebra“ der höheren Mathematik bewiesen.)

Als ein weiteres charakteristisches Unterscheidungsmerkmal für Gleichungen wählt man die Zahl der Unbekannten, die in einer Gleichung auftreten. Meistens kommt nur eine Unbekannte, nämlich x , in einer Gleichung vor. Solche Gleichungen sind Gleichungen mit einer Unbekannten.

Treten in einer Gleichung noch weitere Unbekannte auf; z. B. y , z oder sogar noch u , v und w , so hat man es je nach der Zahl der Unbekannten mit einer Gleichung mit 2 oder mehreren Unbekannten zu tun.

II. Die Gleichungsgesetze

Jede Gleichung kann man mit einer Zweitafel-Waage, die sich im Gleichgewichtszustande befindet, vergleichen. Auf der linken Waagschale muß die gleiche Gewichtsmenge wie auf der rechten Waagschale liegen. Liegen z. B. links 5 kg Stahl, so müssen auf der rechten Seite, wenn die Waage im Gleichgewichtszustande sich befinden soll, 3 kg Blei und 2 kg Aluminium oder ähnliche Stoffe liegen, die zusammen ein Gewicht von 5 kg haben. Bei einer Gleichung sind die beiden Seiten mit den auf den beiden Waagschalen aufliegenden Gewichten zu vergleichen.

Der Gleichgewichtszustand einer Waage wird nicht geändert, wenn man auf jede Waagschale ein und dieselbe Gewichtsmenge hinzulegt oder fortnimmt. Auch kann man die auf der linken Schale liegende Gewichtsmenge verdoppeln oder verdreifachen oder mit einer beliebigen Zahl multiplizieren, wenn man auch gleichzeitig zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes mit der auf der rechten Schale liegenden Gewichtsmenge dasselbe macht. Nehme ich von der linken Waagschale einen bestimmten Teil fort, so muß ich es auf der rechten Seite auch tun. Sonst würde die rechte Seite zu schwer sein. Diese mechanisch leicht einleuchtenden Tatsachen lassen sich auf das Rechnen mit Gleichungen anwenden.

Es ergeben sich folgende 4 Grundgesetze:

I. Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert ergibt Gleiches.

Bei der Gleichung $x + a = c$

subtrahiert man auf der linken und auf der rechten Seite a und erhält

$$x + a - a = c - a \quad \text{oder} \quad x = c - a.$$

Betrachtet man dieses Ergebnis für x mit der gegebenen Gleichung, so sieht man folgendes: Das Glied $+a$ der linken Seite der gegebenen Gleichung erscheint in der Ergebnislgleichung auf der rechten Seite als $-a$.

Bei der Gleichung $x - b = d$

zählt man auf jeder Seite $+b$ hinzu und erhält

$$x - b + b = d + b \quad \text{oder} \quad x = d + b.$$

Im Ergebnis steht rechts $+b$, während in der gegebenen Gleichung auf der linken Seite $-b$ stand.

Zusammenfassung:

┌ Kommt ein Glied auf die andere Seite der Gleichung, so muß man
└ ihm das entgegengesetzte Vorzeichen geben.

Aufgaben:

1) $x + 3 = 10$

4) $6,3 = x + 2,3$

7) $\frac{5}{7} + x = \frac{12}{7}$

2) $7 + x = 5$

5) $x - 5 = 5$

8) $x - 1,25 = \frac{3}{4}$

3) $x + 1,6 = 1,7$

6) $x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

9) $3,5 = x - 2,5$

10) $4,8 + x = 7,3$.

┌ II. a) Gleiches mit Gleichem multipliziert ergibt gleiche
└ Produkte.

┌ b) Gleiches durch Gleiches dividiert ergibt gleiche
└ Quotienten.

a) Gegeben ist die Gleichung $\frac{x}{a} = b$.

Man multipliziert beide Gleichungsseiten mit a und erhält:

$$\frac{x}{a} \cdot a = a b \quad \text{oder} \quad x = a b.$$

In der gegebenen Gleichung war a der Divisor der linken Seite (a stand im Nenner). Im Ergebnis ist a auf der rechten Seite zum Faktor geworden.

Weitere Beispiele:

a) $\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$;

beide Seiten mit 3 multipliziert, ergibt:

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \quad \text{oder} \quad x = 1.$$

β) $\frac{x}{2a} = \frac{b}{2c}$;

beide Seiten mit $2a$ multipliziert, ergibt

$$\frac{x}{2a} \cdot 2a = \frac{b}{2c} \cdot 2a \quad \text{oder} \quad x = \frac{ab}{c}.$$

b) Gegeben ist die Gleichung $a \cdot x = c$.

Man dividiert beide Gleichungsseiten durch a und erhält

$$\frac{a \cdot x}{a} = \frac{c}{a} \quad \text{oder} \quad x = \frac{c}{a}.$$

In der gegebenen Gleichung war a der Faktor der linken Seite. Im Ergebnis steht a als Nenner der rechten Seite.

Beispiele:

$$\alpha) \quad 3x = 18 \quad \text{oder} \quad \frac{3x}{3} = \frac{18}{3} \quad \text{oder} \quad x = 6$$

$$\beta) \quad 3ax = \frac{a^2}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{3ax}{3a} = \frac{a^2}{3 \cdot 3a} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{9}.$$

Zusammenfassung:

Eine Größe, die als Faktor auf der einen Gleichungsseite steht, kann auf die andere Gleichungsseite als Divisor gebracht werden und umgekehrt.

Aufgaben:

11) $2,4x = 7,2$

15) $0,4x = \frac{1}{2}$

18) $\frac{x}{2a} = a$

12) $0,1x = 10$

16) $\frac{x}{4} = 0,4$

19) $\frac{x}{a^2} = a$

13) $2ax = \frac{a^2}{3}$

17) $\frac{x}{0,3} = 0,3$

20) $\frac{x}{a^2b} = ab$

14) $ab^2x = a^2b$

III. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Wurzel zieht oder beide Seiten in dieselbe Potenz erhebt¹⁾.

Beispiele:

a) Gegeben: $x^2 = 9$. Man zieht aus der linken und aus der rechten Seite die Quadratwurzel und erhält:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9} \quad \text{oder} \quad x = \pm 3$$

b) $x^n = a$. Man zieht die n -te Wurzel und erhält:

$$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{oder} \quad x = \sqrt[n]{a}$$

c) $\sqrt{x} = a$ in die 2. Potenz erhoben, ergibt: $(\sqrt{x})^2 = a^2$ oder $x = a^2$.

¹⁾ Vorsicht! Vorzeichen der Wurzel beachten!

$$\text{z. B. } \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \\ x = \pm 3.$$

IV. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Gleichungsseiten logarithmiert.

Gegeben $a^x = b$. Beide Seiten logarithmiert, ergibt:

$$x \lg a = \lg b$$

Beide Seiten durch $\lg a$ geteilt:

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Aufgaben:

21) $x^3 = 8$

24) $x^3 = 0,0125$

28) $\sqrt{x} = 0,1$

22) $x^2 = 0,09$

25) $x^4 = 0,0016$

29) $\sqrt[3]{x} = a$

23) $x^2 = \frac{4}{25}$

26) $a^x = \sqrt{a}$

30) $\sqrt{x} = 0,04$.

27) $b^{2x} = a^2$

Eine Gleichung darf man sowohl von links nach rechts als auch in umgekehrter Richtung lesen. Wenn z. B. $2x = 15$ ist, dann ist auch $15 = 2x$. Mit anderen Worten kann man dies wie folgt ausdrücken: Bei jeder Gleichung darf man die beiden Seiten miteinander vertauschen.

Bei einer Ungleichung ist dieses Vertauschen verboten.

In der Ungleichung $x > 2a$ darf man nicht x und $2a$ gegeneinander vertauschen; also nicht: $2a > x$. Vertauscht man bei einer Ungleichung die beiden Seiten, so muß man auch das Ungleichungszeichen ändern; aus $x > 2a$ folgt $2a < x$. (Vergleiche das auf Seite 4 über das Ungleichheitszeichen Gesagte!)

III. Die Lösungsverfahren von Gleichungen

1. Rechnerische Lösungsverfahren

a) Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Das Ziel der Berechnung ist: Es soll durch Rechnung die Unbekannte x oder y oder z — je nachdem wie man sie genannt hat — mit positivem Vorzeichen auf die eine Seite der Gleichung für sich allein gebracht werden. Man nennt dieses Verfahren auch: das Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten x (oder y bzw. z).

Beispiel:

In der Gleichung $2x + 3 = 3x - 2$ erscheint die Unbekannte x sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite. Ferner aber ist x noch mit multiplikativen Konstanten verbunden. Die Aufgabe soll so umgeformt werden, daß man als Ergebnis (Lösung) erhält $x = 5$. Daß diese Lösung richtig ist, erkennt man daran, daß die gegebene Bestimmungsgleichung $2x + 3 = 3x - 2$ durch Einsetzen des Wertes 5 für x zu einer identischen Gleichung wird, bei der auf der linken Seite derselbe Zahlen-

wert wie auf der rechten steht. Man erhält hier $2 \cdot 5 + 3 = 3 \cdot 5 - 2$ oder $13 = 13$. Um zu dem Ergebnis ($x = 5$) zu kommen, verwendet man folgendes

Lösungsverfahren:

Sämtliche Glieder mit der Unbekannten x werden auf die linke Gleichungsseite, alle anderen Glieder auf die rechte Seite gebracht. Man ordnet die Glieder.

Also hier:
$$2x - 3x = -2 - 3 \quad \text{oder} \quad -x = -5.$$

Um auf der linken Seite $+x$ zu erhalten, multipliziert man die linke und die rechte Seite mit -1 und erhält

$$x = 5.$$

Sind auf einer Gleichungsseite Klammern vorhanden, so hat man zunächst die Klammern durch Ausmultiplizieren zu beseitigen.

Beispiele:

a) $4x + 2(3 - x) = 10$
 Klammer ausmultipliziert: $4x + 6 - 2x = 10$
 Glieder geordnet: $4x - 2x = 10 - 6$
 Differenzen ausgerechnet: $2x = 4$
 Durch 2 geteilt: $x = 2.$

b) $6(x - 3) = x + 7$
 $6x - 18 = x + 7$
 $6x - x = 18 + 7$
 $5x = 25$
 $x = 5.$

Zur Probe setzt man $x = 5$ in die gegebene Gleichung $6(x - 3) = x + 7$ ein und erhält:

$$\begin{aligned} 6(5 - 3) &= 5 + 7 \\ 6 \cdot 2 &= 5 + 7 \\ 12 &= 12. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist identisch. Die Lösung $x = 5$ ist richtig.

c) $3(3x - 2) + 4(2x - 1) = 41$
 $9x - 6 + 8x - 4 = 41$
 $9x + 8x = 41 + 6 + 4$
 $17x = 51$
 $x = 3$

Probe: $3(3 \cdot 3 - 2) + 4(2 \cdot 3 - 1) = 41$
 $3(9 - 2) + 4(6 - 1) = 41$
 $3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 41$
 $41 = 41.$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (3 - 2x)(x + 1) &= 5x - 1 - 2x^2 \\ 3x - 2x^2 + 3 - 2x &= 5x - 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

auf beiden Seiten $+ 2x^2$ zugezählt:

$$\begin{aligned} 3x + 3 - 2x &= 5x - 1 \\ 3x - 2x - 5x &= -3 - 1 \\ -4x &= -4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } (3 - 2 \cdot 1)(1 + 1) &= 5 \cdot 1 - 1 - 2 \cdot 1^2 \\ (3 - 2)(1 + 1) &= 5 - 1 - 2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad a(x - 1) - b &= x - a \\ ax - a - b &= x - a \\ ax - x &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{x ausgeklammert: } \quad x(a - 1) &= b \\ x &= \frac{b}{a - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad (a - x)(b + x) &= c - x^2 \\ ab - bx + ax - x^2 &= c - x^2 \\ ax - bx &= c - ab \\ x(a - b) &= c - ab \\ x &= \frac{c - ab}{a - b}. \end{aligned}$$

$$\text{g)} \quad \frac{2}{x - 3} = \frac{5}{x}.$$

Die gegebene Bestimmungsgleichung ist eine Proportion, bei der das Produkt der Außenglieder ($2 \cdot x$) stets gleich dem Produkt der Innenglieder $5(x - 3)$ ist:

$$\begin{aligned} 2x &= 5(x - 3) \\ 2x &= 5x - 15 \\ 2x - 5x &= -15 \\ -3x &= -15; \text{ dividiert durch } -3, \text{ ergibt:} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } \frac{2}{5 - 3} &= \frac{5}{5} \\ \frac{2}{2} &= \frac{5}{5} \end{aligned}$$

$1 = 1$ ist eine identische Gleichung.

Folgende Gleichungen sind nach x aufzulösen. (Probe für die Richtigkeit machen!)

Aufgaben:

31) $\frac{1}{2}x = 2x - 9$

32) $x : \frac{2}{3} = 6$

33) $\frac{x}{0,75} = 20$

34) $\frac{1,5}{x} = 0,5$

35) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = x - 14$

36) $\frac{5x+1}{3x-2} = 6$

37) $\frac{9}{x-3} = 3$

38) $\frac{x-3}{9} = 3$

39) $7(x-3) + 3(x-5) = 2(3x+2)$

40) $\frac{16}{x} + 2,5 = 6\frac{1}{2}$

41) $3x + 7 = 8x - 28$

42) $11x - (25 - 3x) = 17$

43) $7 - (7x - 28) = 0$

44) $3(10 - x) - 6(9,5 - x) = 0$

45) $3x = 2(x + 2)$

46) $3(x + 4) = (17 - x) \cdot 4$

47) $5(8 - 2x) = 4(x + 3)$

48) $(x - 10) \cdot 3 = \frac{1}{2}x$

49) $5(x - 16) = 20$

50) $5(x - 1) = 4x + 25$

*51) $\frac{9}{x} = x$

*52) $3 + x = \frac{3x+1}{x}$

*53) $\frac{x}{36} = \frac{1}{x}$

*54) $(x - 2)^2 = 4(5 - x)$

*55) $(x + 2)(x - 2) = 12$

56) $5\sqrt{x-5} = 10$

57) $\sqrt{x+2} = 3$

58) $\sqrt{40x+3} = 13$

59) $3\sqrt[3]{x+24} = 9$

*60) $2 + \sqrt[3]{5x^2} = 7$

61) $\frac{0,4}{x} = 2$

62) $0,2x = 4$

63) $x - 0,2 = 4$

64) $0,4 - x = 0,2$

65) $\frac{0,4}{x-1} = 2$

66) $(0,3 + x) \cdot 3 = 1,2$

67) $(0,5 - x) \cdot 2 = 0,4$

68) $(0,5 - x) \cdot 2 = x + 0,1$

69) $0,2(x + 1) = 1$

70) $3(x - 7) = 4,2$

71) $2(7x + 3) - 3(2x + 1) = 27$

72) $\frac{6}{x-1} = 2$

73) $\frac{2x+1}{x-1} = 5$

75) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$

77) $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-4}{x+2}$

74) $\frac{0,5x+2}{3-0,25x} = 2$

76) $\frac{2}{x-4} = \frac{6}{x-3}$

78) $\frac{x-5}{x-7} = \frac{x-8}{x-9}$

79) $\frac{x-3}{x} = \frac{x+1}{x+10}$

80) $\frac{3}{5,9+x} = \frac{4}{8,1-x}$

*) Die mit * gekennzeichneten Aufgaben führen auf rein quadratische Gleichungen. (S. Seite 220.)

Rechnerische Lösung von „Eingekleideten Aufgaben“

Ist eine Aufgabe nicht wie bisher in der Form einer Bestimmungsgleichung gegeben, sondern liegt eine Aufgabe im Text vor, so handelt es sich um eine sogenannte „Eingekleidete Aufgabe“ oder „Textaufgabe“. Man hat dann zunächst aus dem Wortlaut der Aufgabe die Bestimmungsgleichung aufzustellen. Hierbei geht man folgendermaßen vor: Die gesuchte Größe bezeichne man mit der Unbekannten x . Sind noch weitere Unbekannten vorhanden, so nenne man sie y und z . Ferner werde man sich über die gegebenen, bekannten Größen klar. Aus dem Aufgabentext suche man die über irgendwelche Gleichheiten gemachten Angaben festzustellen. Diese Gleichheiten drücke man in der Form einer Gleichung aus. Maßeinheiten werden in einer Gleichung nicht geschrieben. Jedoch muß den Zahlenwerten auf beiden Gleichungsseiten die gleiche Maßeinheit zukommen.

Beispiele:

- a) Das 7fache einer Zahl um 3 vermehrt, ergibt 59. Wie lautet diese Zahl?

Lösung: Die Zahl, die zunächst noch unbekannt ist, laute x . Das 7fache von ihr ist: $7x$. Das 7fache der Zahl um 3 vermehrt ist: $7x + 3$. Dies soll 59 ergeben. Die Bestimmungsgleichung lautet somit:

$$\begin{aligned} 7x + 3 &= 59 \\ 7x &= 59 - 3 \\ 7x &= 56 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x = 8$

- b) Welche Zahl ergibt bei Vermehrung um ihr 4faches und ihr 7faches 48?

Lösung:

$$\begin{aligned} x + 4x + 7x &= 48 \\ 12x &= 48 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x = 4$.

- c) Um wieviel muß man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{4}{7}$ vergrößern, um einen Bruch vom Wert $\frac{2}{3}$ zu erhalten?

Lösung:

$$\frac{4+x}{7+x} = \frac{2}{3} \quad (\text{Proportionsregel!})$$

$$12 + 3x = 14 + 2x$$

Ergebnis: $x = 2$.

- d) Welche Zahl kann man zu jedem Gliede des Verhältnisses $3 : 12 = 4 : 16$ addieren, um wiederum ein richtiges Verhältnis zu erhalten?

Lösung:

$$\frac{3 + x}{12 + x} = \frac{4 + x}{16 + x}.$$

Man bildet das Produkt der Außen- und das der Innenglieder und setzt sie gleich:

$$\begin{aligned} (3 + x)(16 + x) &= (12 + x)(4 + x) \\ 48 + 3x + 16x + x^2 &= 48 + 12x + 4x + x^2. \end{aligned}$$

Die Glieder mit x auf die linke Seite, die ohne x auf die rechte Seite gebracht, ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - x^2 + 3x + 16x - 12x - 4x &= 48 - 48 \\ 3x &= 0 \\ \underline{x = 0.} \end{aligned}$$

Ergebnis: Es gibt keine Zahl der geforderten Eigenschaft.

- e) Um wieviel muß man jeden Faktor der Produkte $15 \cdot 20$ und $32 \cdot 9$ vermehren, damit die neuen Produkte gleich werden?

Lösung:

$$\begin{aligned} (15 + x) \cdot (20 + x) &= (32 + x) \cdot (9 + x) \\ 300 + 15x + 20x + x^2 &= 288 + 32x + 9x + x^2 \\ -6x &= -12 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x = 2$.

d. h.: Zu jedem Faktor muß man 2 addieren. Man erhält dann:

$$17 \cdot 22 = 34 \cdot 11 \quad \text{oder} \quad 374 = 374.$$

Um als Anwendung der Gleichungen mit einer Unbekannten einige technisch wichtige Aufgaben lösen zu können, wird nachstehend folgende Zusammenstellung gegeben:

Zusammenstellung einer Auswahl technischer Grundgleichungen:

| Lfd. Nr. | Die Grundgleichung behandelt und lautet | | Die einzelnen Buchstabengrößen bedeuten | | | haben die Maßeinheit | | |
|----------|---|------------------------|---|-------------|-----------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------------|
| | | | | | | | | |
| 1. | Wichte (früher spezifisches Gewicht) | $\gamma = \frac{G}{V}$ | γ [sprich: Gamma] = Wichte | G = Gewicht | V = Rauminhalt oder Volumen | kg dm ³ | oder $\frac{g}{\text{cm}^3}$ | oder $\frac{t}{\text{m}^3}$ |
| | | | | | | kg | „ g | „ t |
| | | | | | | dm ³ | „ cm ³ | „ m ³ |

| Lfd. Nr. | Die Grundgleichung behandelt | und lautet | Die einzelnen Buchstabengrößen bedeuten | haben die Maßeinheit |
|----------|------------------------------|--|--|--|
| 2. | Masse | $m = \frac{G}{g}$ | m = Masse G = Gewicht g = Fallbeschleunigung | $\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}}$ kg $\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left[g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ |
| 3. | Gleichförmige Bewegung | $v = \frac{s}{t}$ | v = Geschwindigkeit s = Weg t = Zeit | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ oder $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ m „ km s „ h |
| 4. | Fallgesetz | $s = \frac{1}{2} g t^2$ | s = Fallhöhe t = Fallzeit g = Fallbeschleunigung | $\frac{\text{m}}{\text{s}^2} [g = 9,81 \approx 10]$ |
| 5. | Umfangsgeschwindigkeit | $v = \frac{\pi d n}{60}$ | v = Umfangsgeschwindigkeit d = Durchmesser n = Drehzahl $\pi = 3,14$ | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ m U/min |
| 6. | Leistung | $N = \frac{P v}{75}$ | N = Leistung P = Kraft v = Geschwindigkeit | PS kg $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| 7. | Drehmoment | $M_t = 716 \frac{N}{n}$ | M_t = Drehmoment N = Leistung n = Drehzahl | mkg [Meterkilogramm] PS U/min |
| 8. | Mechanischer Wirkungsgrad | $\eta = \frac{N_o}{N_i} \cdot 100$ | η [sprich: Eta] = Wirkungsgrad N_o = Nutzleistung N_i = aufgewandte Leistung | % [Prozent] PS PS |
| 9. | Dehnung | $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100$ | ε [sprich: Epsilon] = Dehnung Δl [sprich: Delta Ell] = Längenänderung l_0 = Ursprungslänge | % m oder cm oder mm m „ cm „ mm Δl und l_0 müssen gleiche Maßeinheit haben |
| 10. | Zulässige Spannung | $\sigma_{zul} = \frac{P}{F}$ | σ_{zul} [sprich: Sigma Zul] = zulässige Spannung P = Zug- bzw. Druckkraft F = beanspruchter Querschnitt | kg/cm^2 kg cm^2 |

| Lfd. Nr. | Die Grundgleichung behandelt und lautet | Die einzelnen Buchstabengrößen bedeuten | haben die Maßeinheit | | | | | | |
|---------------------|--|--|---|---|----------------------|------------------------|--------------------------|----------------------|---------------------|
| 11. | Flächen- pressung $p = \frac{P}{F}$ | p = Flächenpressung P = Kraft F = Fläche | kg/cm ² kg cm ² | | | | | | |
| 12. | Biege- moment $M_b = W \cdot \sigma_b$ | M _b = Biegemoment W = Widerstands- moment σ_b [sprich: Sigma Be] = Biegespannung | cmkg [Zentimeter- kilogramm] cm ² kg/cm ² | | | | | | |
| 13. | Trägheits- halbmesser $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ | i = Trägheits- halbmesser J = Trägheits- moment F = Fläche | cm cm ⁴ cm ² | | | | | | |
| 14. | Das Ohmsche Gesetz $I = \frac{U}{R}$ | I = Stromstärke U = Spannung R = Widerstand | A = Ampere V = Volt Ω [sprich: Omega] = Ohm | | | | | | |
| 15. | Elektrischer Widerstand $R = \frac{l \cdot \rho}{F}$ | R = Widerstand l = Leiterlänge F = Querschnitt ρ = spez. Widerstand | Ω m mm ² $\Omega \cdot \text{mm}^2$ m <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td rowspan="3" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>Werte für ρ:</td> </tr> <tr> <td>Kupfer $\rho = 1/57$</td> </tr> <tr> <td>Aluminium $\rho = 1/32$</td> </tr> <tr> <td>Eisen $\rho = 1/8$</td> </tr> </table> | } | Werte für ρ : | Kupfer $\rho = 1/57$ | Aluminium $\rho = 1/32$ | Eisen $\rho = 1/8$ | |
| } | Werte für ρ : | | | | | | | | |
| | Kupfer $\rho = 1/57$ | | | | | | | | |
| | Aluminium $\rho = 1/32$ | | | | | | | | |
| Eisen $\rho = 1/8$ | | | | | | | | | |
| 16. | Gewicht von Leitungen $G = \frac{F \cdot l \cdot \gamma}{1000}$ | G = Gewicht F = Querschnitt l = Länge γ = Wichte | kg mm ² m kg dm ³ <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td rowspan="4" style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>Werte für γ:</td> </tr> <tr> <td>Kupfer $\gamma = 8,85$</td> </tr> <tr> <td>Aluminium $\gamma = 2,7$</td> </tr> <tr> <td>Eisen $\gamma = 7,8$</td> </tr> <tr> <td>Zink $\gamma = 7,2$</td> </tr> </table> | } | Werte für γ : | Kupfer $\gamma = 8,85$ | Aluminium $\gamma = 2,7$ | Eisen $\gamma = 7,8$ | Zink $\gamma = 7,2$ |
| } | Werte für γ : | | | | | | | | |
| | Kupfer $\gamma = 8,85$ | | | | | | | | |
| | Aluminium $\gamma = 2,7$ | | | | | | | | |
| | Eisen $\gamma = 7,8$ | | | | | | | | |
| Zink $\gamma = 7,2$ | | | | | | | | | |
| 17. | Elektrische Leistung für Gleichstrom $N = U \cdot I$ | N = Leistung U = Spannung I = Stromstärke | W = Watt V = Volt A = Ampere | | | | | | |
| 18. | Das Joulesche Gesetz $Q = 0,24 \times U \cdot I \cdot t$ | Q = entwickelte Wärmemenge I = Stromstärke U = Spannung t = Zeit | cal = Grammkalorie A = Ampere V = Volt s = Sekunde | | | | | | |
| 19. | Frequenz $f = \frac{p \cdot n}{60}$ | f = Frequenz p = Polpaare = halbe Polzahl n = Drehzahl/min | Perioden s — U/min | | | | | | |

| Lfd. Nr. | Die Grundgleichung behandelt | und lautet | Die einzelnen Buchstabengrößen bedeuten | haben die Maßeinheit |
|----------|------------------------------|---|---|----------------------------------|
| 20. | Kirchhoff-sches Gesetz | $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ | R = Gesamtwiderstand zweier parallel geschalteter Widerstände $r_1 = \left. \begin{array}{l} \text{parallel} \\ \text{geschaltete} \end{array} \right\}$ Widerstände $r_2 = \left. \begin{array}{l} \text{parallel} \\ \text{geschaltete} \end{array} \right\}$ Widerstände | Ω Ω Ω |

Die folgenden Aufgaben 81...130 sind unter Benutzung der vorstehenden 20 Grundgleichungen zu lösen.

Beispiele und Aufgaben:

- 81) Wie groß ist das Gewicht eines Körpers, dessen Volumen und Wichte bekannt sind?

Die Grundgleichung (lfd. Nr. 1) lautet: $\gamma = \frac{G}{V}$. In der vorliegenden Aufgabe ist V und γ gegeben. Gefragt ist nach G. Man hat die Gleichung $\gamma = \frac{G}{V}$ nach G aufzulösen und erhält durch Multiplikation beider Gleichungsseiten mit V: $G = \gamma \cdot V$.

Zahlenbeispiel:

Wieviel Braunkohle faßt ein Kasten mit den lichten Maßen $1000 \times 500 \times 200$ mm? $\gamma = 1,5$ [kg/dm³]. Rauminhalt des Kastens in dm³: $10 \times 5 \times 2 = 100$ [dm³]. Braunkohlengewicht: $G = 1,5 \cdot 100 = 150$ [kg].

- 82) Wie groß ist das Volumen eines Körpers, dessen Gewicht und Wichte bekannt sind?

Die Grundgleichung (lfd. Nr. 1): $\gamma = \frac{G}{V}$ ist nach dem gefragten Volumen V aufzulösen. Man erhält: $V = \frac{G}{\gamma}$.

Zahlenbeispiel:

Wie groß ist das Volumen eines Körpers aus Grauguß, der 20 kg wiegt? $\gamma = 7,3$ [kg/dm³].

$$V = \frac{20}{7,3} = 2,74 \text{ dm}^3.$$

- 83) Wie groß ist die Masse eines Gewichtes von 10 kg?

Nach Grundgleichung (lfd. Nr. 2) ist $m = \frac{G}{g}$. Also hier:

$$m = \frac{10}{9,81} \approx \frac{10}{10} = 1 \left[\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}} \right].$$

- 84) Die Masse eines Körpers beträgt $5 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}}$. Wie schwer ist er?

Aus der Gleichung: $m = \frac{G}{g}$ erhält man: $G = m \cdot g$. Also hier: $G = 5 \cdot 9,81 = 49,05$ [kg].

- 85) Ein Radfahrer fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15 km/h. In welcher Zeit legt er 100 km zurück?

Grundgleichung (lfd. Nr. 3): $v = \frac{s}{t}$ nach t aufgelöst, ergibt $t = \frac{s}{v}$.

Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$t = \frac{100}{15} = 6,67 \text{ [Stunden]} = 6\frac{2}{3} \text{ [h]} = 6^h 40'$$

- 86) Wie groß ist der in t Sekunden zurückgelegte Weg, wenn die Geschwindigkeit v m/sek beträgt?¹⁾

Aus der Gleichung $v = s/t$ erhält man $s = v t$.

Als Anwendung folgendes Zahlenbeispiel:

Das Aufschlagen eines Fallbären einer Ramme hört man 2 sek später, als man es sieht. Wie weit ist die Ramme vom Beobachtungspunkt entfernt? Die Schallgeschwindigkeit beträgt: $v = 333$ m/sek.

$$s = 333 \cdot 2 = 666 \text{ [m]}.$$

- 87) Ein von einem Turm geworfener Stein schlägt nach 4 sek auf die Erde auf. Wie hoch ist der Turm?¹⁾

Nach dem Fallgesetz (lfd. Nr. 4) ist $s = \frac{1}{2} g t^2$.

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man Turmhöhe $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4^2$.

Für überschlägliche Rechnungen setze man $g \approx 10$ m/s² und erhält hier:

$$s \approx \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 \approx 80.$$

Ergebnis: Der Turm ist 80 m hoch.

- 88) Wie groß ist die Fallzeit eines von einem 50 m hohen Turm herabfallenden Steines?¹⁾

Die Gleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$ ist nach t aufzulösen. Beide Gleichungsseiten werden mit 2 multipliziert und durch g dividiert. Man erhält: $s \cdot \frac{2}{g} = t^2$. Auf beiden Seiten wird die Quadratwurzel gezogen:

$$\sqrt{t^2} = \sqrt{\frac{2s}{g}} = t. \text{ Für } s = 50 \text{ und } g = 10 \text{ ergibt sich:}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{10}} = \sqrt{10} = 3,2.$$

Ergebnis: Die Fallzeit beträgt 3,2 sek.

- 89) Ein Ventilator von 300 mm Durchmesser macht 900 U/min. Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit?

Die Umfangsgeschwindigkeit beträgt nach lfd. Nr. 5: $v = \frac{\pi d n}{60}$

d ist mit 0,3 m einzusetzen. Also: $v = \frac{\pi \cdot 0,3 \cdot 900}{60} = 14,1$.

Ergebnis: Die Umfangsgeschwindigkeit beträgt 14,1 m/s.

¹⁾ Zur Vermeidung der Verwechslung des Formelzeichens s für die Weglänge mit dem Kurzzeichen für die Zeiteinheit einer Sekunde s wurde in dieser Aufgabe Sekunde mit sek abgekürzt.

- 90) Die Umfangsgeschwindigkeit einer Riemenscheibe beträgt $v = 4,19 \text{ m/s}$ bei der Drehzahl $n = 100 \text{ U/min}$. Wie groß ist der Riemenscheibendurchmesser?

$$\text{Aus } v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \text{ erh\u00e4lt man } d = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n} = \frac{60 \cdot 4,19}{\pi \cdot 100}, d = 0,8 \text{ [m]}.$$

Ergebnis: Der Riemenscheibendurchmesser betr\u00e4gt 800 mm.

- 91) Wie gro\u00df ist die Drehzahl einer Bohrmaschine, bei der ein 10 mm Bohrer mit einer Schnittgeschwindigkeit $v = 20 \text{ m/min}$ arbeitet?

$$\text{Gegeben ist: } v = 20 \text{ m/min oder } \frac{1}{3} \text{ m/s,}$$

$$d = 10 \text{ mm oder } 0,01 \text{ m.}$$

$$\text{Aus } v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \text{ erh\u00e4lt man } n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot d} = \frac{60 \cdot \frac{1}{3}}{\pi \cdot 0,01} = \frac{2000}{\pi}.$$

$$\text{Ergebnis: } n = 640 \left[\frac{\text{U}}{\text{min}} \right].$$

- 92) Die Riemenscheibe einer Transmission \u00fcbertr\u00e4gt 60 PS. Die Riemengeschwindigkeit betr\u00e4gt 15 m/s. Wie gro\u00df ist die Zugkraft des Riemens?

Die Gleichung f\u00fcr die mechanische Leistung (lfd. Nr. 6) lautet:

$$N = \frac{P \cdot v}{75}.$$

Von den 3 Gr\u00f6\u00dfen dieser Gleichung sind gegeben: $N = 60 \text{ PS}$ und die Riemengeschwindigkeit, die gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe ist, $v = 15 \text{ m/s}$. Setzt man diese beiden bekannten Gr\u00f6\u00dfen in die Leistungsgleichung ein, so erh\u00e4lt man: $60 = \frac{P \cdot 15}{75}$.

$$\text{Nach der Zugkraft } P \text{ aufgel\u00f6st, ergibt sich: } P = \frac{60 \cdot 75}{15} = 300.$$

Ergebnis: Die Zugkraft betr\u00e4gt 300 kg.

- 93) Eine Handkurbel vom Kurbelradius 50 cm wird in der Minute 30 mal von einem Mann mit der Handkraft 25 kg gedreht.

Welche Leistung wendet der Arbeiter auf?

$$\text{Gegeben ist: } r = 0,5 \text{ [m]} \text{ oder Durchmesser } d = 1 \text{ [m]}.$$

$$\text{Drehzahl } n = 30 \left[\frac{\text{U}}{\text{min}} \right].$$

$$\text{Kraft } P = 25 \text{ [kg]}.$$

In die Leistungsgleichung eingesetzt, erh\u00e4lt man:

$$N = \frac{25 \cdot v}{75}.$$

Nach lfd. Nr. 5 ist $v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 30}{60} = \frac{\pi}{2} = \frac{3,14}{2} = 1,57$.

Somit beträgt: $N = \frac{25 \cdot 1,57}{75} = 0,52$.

Ergebnis: Die aufgewandte Leistung beträgt 0,52 PS.

- 94) Mit welcher Geschwindigkeit wird eine Last von 1 t bei einer aufgewandten Leistung von 4,5 PS gehoben?

Gegeben: Kraft $P = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$,
Leistung $N = 4,5 \text{ PS}$.

Aus der Leistungsgleichung $N = \frac{P \cdot v}{75}$ erhält man

$$v = \frac{75 \cdot N}{P} = \frac{75 \cdot 4,5}{1000} = 0,34.$$

Ergebnis: Die Hubgeschwindigkeit beträgt 0,34 m/s.

- 95) Wieviel PS leistet ein Motor mit $n = 3000 \text{ U/min}$, wenn sein Drehmoment $M_t = 16 \text{ mkg}$ beträgt?

Das Drehmoment nach lfd. Nr. 7 beträgt $M_t = 716 \cdot \frac{N}{n}$.

Hier ist gegeben: $M_t = 16 \text{ [mkg]}$ und $n = 3000 \text{ [U/min]}$.

In die Drehmomentengleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$16 = 716 \cdot \frac{N}{3000}.$$

Man erhält $N = \frac{16 \cdot 3000}{716} = 67$.

Ergebnis: Die Motorleistung beträgt 67 PS.

- 96) Welches Drehmoment überträgt eine Kardanwelle bei

$$n = 180 \text{ [U/min]}$$

und der Leistung $N = 36 \text{ PS}$.

$$M_t = 716 \cdot \frac{36}{180} = 143,2.$$

Ergebnis: Das Drehmoment beträgt 143,2 mkg.

- 97) Wie bestimmt man die Drehzahl einer Welle, wenn die übertragene Leistung und das Drehmoment gegeben sind?

Man löst die Gleichung $M_t = 716 \cdot \frac{N}{n}$ nach n auf und erhält $n = 716 \cdot \frac{N}{M_t}$,

wobei N die Anzahl der PS

und M_t das in mkg gemessene Drehmoment ist.

- 98) Wie groß ist der Wirkungsgrad eines Dieselmotors, dessen an den Kolben durch die Wärmeenergie abgegebene Leistung $N_i = 200 \text{ PS}$ und dessen Nutzleistung $N_e = 160 \text{ PS}$ betragen?

Der Wirkungsgrad beträgt nach lfd. Nr. 8:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{N_e}{N_i} \cdot 100\% \\ &= \frac{160}{200} \cdot 100 = 80\%.\end{aligned}$$

- 99) Ein 12-PS-Motor treibt über ein Schneckengetriebe, das einen Gesamtwirkungsgrad $\eta = 75\%$ besitzt, ein Förderband an. Wie groß ist die Antriebsleistung des Bandes?
- 100) Wie groß muß die Antriebsleistung einer Winde mit dem Wirkungsgrad $\eta = 80\%$ sein? Die Winde hebt eine Last von 300 kg in der Sekunde $\frac{1}{2}$ m hoch.
Anleitung: Die Nutzleistung der Winde berechne man aus der Gleichung $N_e = \frac{P \cdot v}{75}$.
- 101) Wieviel Prozent beträgt die Dehnung eines Rundstahls von 3 m Länge, der sich bei Belastung um 2 mm verlängert hat?
- 101a) Ein Aktivist sagt: Addiere ich zur Hälfte meiner alten Arbeitszeit, die ich zur Herstellung eines Werkstückes brauchte, 15 Minuten, so erhalte ich $3^h 45^m$. Wie lange arbeitete ich früher an dem Werkstück?
- 102) Die Meßlänge eines Normalstabes für Zerreißversuche beträgt 200 mm. Um wieviel verlängert sich der Stab, wenn seine Dehnung 15% beträgt?
- 103) Bei einer Dehnung von 12% verlängert sich ein Stab um 48 mm. Wie lang war ursprünglich der Stab?
- 104) Für einen durch die Last $P = 1000$ kg auf Zug beanspruchten Rundstahl ist eine Spannung von 400 kg/cm^2 zugelassen. Wie groß muß mindestens der Stahlquerschnitt sein?
- 105) Mit welcher maximalen Kraft darf ein Querschnitt von 5 cm^2 bei einer zulässigen Spannung von 600 kg/cm^2 belastet werden?
- 106) Welche Kraft ruft bei einer Auflagefläche $F = 50 \text{ cm}^2$ eine Flächenpressung $p = 10 \text{ kg/cm}^2$ hervor?
- 107) Der Fuß einer mit 10 t belasteten Säule stützt sich auf Mauerwerk, für das eine maximale Pressung $p = 8 \text{ kg/cm}^2$ zulässig ist.
Welche Auflagefläche ist notwendig, damit diese Pressung nicht überschritten wird?
- 108) Ein Doppel-T-Träger $\text{I} 8$ hat ein Widerstandsmoment $W = 19,4 \text{ cm}^3$. Welches Biegemoment kann er aufnehmen, wenn eine Biegespannung $\sigma_b = 1000 \text{ kg/cm}^2$ zugelassen wird?
- 109) Für eine hölzerne Bohle ist eine Biegespannung $\sigma_b = 100 \text{ kg/cm}^2$ zugelassen. Wie groß muß ihr Widerstandsmoment bei einem sie beanspruchenden Biegemoment $M_b = 3750 \text{ cmkg}$ sein?
- 110) Für das Normal-Profil $\text{I} 12$ mit dem Querschnitt $F = 14,2 \text{ cm}^2$ beträgt das Trägheitsmoment $J = 327 \text{ cm}^4$. Wie groß ist der Trägheitshalbmesser?

- 111) Für eine Säule aus Grauguß mit dem Querschnitt $F = 113 \text{ cm}^2$ beträgt der Trägheitshalbmesser $6,4 \text{ cm}$. Wie groß ist ihr Trägheitsmoment?
- 112) Ein auf Knicken beanspruchter Holzstempel hat ein Trägheitsmoment $J = 7200 \text{ cm}^4$ und einen Trägheitshalbmesser $i = 6 \text{ cm}$.
Wie groß ist der Querschnitt des Stempels?
- 113) Ein Widerstand von 200Ω wird an eine Spannung von 110 V gelegt. Welcher Strom fließt durch den Widerstand?
- 114) Durch einen Widerstand $R = 55 \Omega$ fließt ein Strom $I = 4 \text{ A}$. Wie groß ist die Spannung?
- 115) Wie groß ist der Widerstand, durch den bei einer Spannung $U = 440 \text{ V}$ eine Stromstärke $I = 8 \text{ A}$ fließt?
- 116) Wie groß ist der Widerstand eines Kupferdrahtes ($\rho = 1/57$) vom Querschnitt $F = 2 \text{ mm}^2$ und der Länge $l = 171 \text{ m}$?
- 117) Wie lang ist ein Eisendraht ($\rho = 1/8$) vom Querschnitt $F = 5 \text{ mm}^2$, der einen Widerstand $R = 6 \Omega$ hat?
- 118) Ein Aluminiumdraht ($\rho = 1/32$) ist $1,6 \text{ km}$ lang und hat einen Widerstand $R = 2,5 \Omega$. Wie groß ist der Querschnitt dieses Drahtes?
- 119) Wie lang ist ein 54 kg schwerer Aluminiumdraht ($\gamma = 2,7$) von 4 mm^2 Querschnitt?
- 120) Ein 250 m langer Eisendraht ($\gamma = 7,8$) wiegt 39 kg .
Welchen Querschnitt hat der Draht?
- 121) Wieviel wiegen 5 m Kupferdraht von 6 mm Durchmesser? ($\gamma = 8,8$).
Anleitung: Der Drahtquerschnitt ist aus der Gleichung $F = \frac{\pi}{4} d^2$ zu berechnen!
- 122) Welchen Strom verbraucht eine Glühbirne von 50 W bei einer Spannung von 110 V ?
- 123) Wie groß ist die Leistung eines Gleichstromgenerators, der bei 220 V Spannung eine Stromstärke von 50 A liefert?
- 124) Die Stromstärke eines Gleichstromgenerators von $8,8 \text{ kW}$ Leistung beträgt 40 A . Welche Spannung ist vorhanden?
- 125) In welcher Zeit entwickelt eine Glühlampe von 220 V eine Wärmemenge $Q = 2000 \text{ cal}$, wenn die Stromstärke $0,4 \text{ A}$ beträgt?
- 126) Ein elektrisches Heizgerät für 110 V entwickelt in 1 min eine Wärmemenge $Q = 5000 \text{ cal}$. Wie groß ist die Stromstärke?
- 127) Wie groß ist die Drehzahl eines 4poligen Drehstrommotors bei der Periodenzahl $f = 50$?
- 128) Wie viele Pole hat ein Wechselstrommotor, der bei der Frequenz $f = 40$ eine Drehzahl $n = 600 \text{ U/min}$ hat?

- 129) Wie groß ist die Periodenzahl eines 6poligen Drehstrommotors bei der Drehzahl $n = 1200$ U/min?
- 130) Der Gesamtwiderstand zweier parallel geschalteter Widerstände, von denen der eine dreimal so groß wie der andere ist, beträgt 6 Ohm. Wie groß sind die beiden Einzelwiderstände?
- 131) Die Schwingungszahl des Kammertones a_1 beträgt 440 Schwingungen in der Sekunde. Sie verhält sich zu der des Tones f_1 wie 5 : 4. Wieviel Schwingungen führt der Ton f_1 in der Sekunde aus?
- 132) Einer Wassermenge von $1\frac{1}{2}$ m³ von 10° C werden 97 500 kcal zugeführt. Auf welche Temperatur erwärmt sich das Wasser?

Anleitung: Zur Erwärmung eines Liters Wasser ($1000 \text{ l} = 1 \text{ m}^3$) um 1° C wird die Wärmemenge $Q = 1$ kcal (1 Kilokalorie) benötigt. Um a Liter Wasser von der Temperatur t_1 auf die Temperatur t_2 zu erwärmen, braucht man:

$$Q = a(t_2 - t_1) \text{ kcal.}$$

Hierin bedeutet: $Q =$ Wärmemenge in kcal,
 $a =$ die zu erwärmende Wassermenge in l,
 $t_1 =$ ursprüngliche Wassertemperatur in ° C,
 $t_2 =$ Temperatur des erwärmten Wassers.

- 133) Eine 11 m lange Eisenbahnschiene hat sich infolge Temperaturerhöhung um 6,6 mm verlängert. Die Ausdehnungszahl beträgt $\alpha = 0,000012$. Wie groß war der Temperaturanstieg?

Anleitung: Es ist zu rechnen nach der Gleichung:

$$l_t = l_0(1 + \alpha \Delta t).$$

Hierin bedeutet:

$l_t =$ neue Länge (nach Erwärmung) in m,
 $l_0 =$ ursprüngliche Länge in m,
 $\alpha =$ Ausdehnungszahl,
 $\Delta t =$ Temperaturanstieg in ° C.

- 134) Ein Balken rechteckigen Querschnittes von der Breite $b = 12$ cm hat ein Trägheitsmoment: $J = 8000$ cm⁴. Wie groß ist seine Querschnittshöhe?

Anleitung: Zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines rechteckigen Querschnittes benutzt man die Gleichung:

$$J = \frac{b h^3}{12}.$$

Hierin bedeutet:

$J =$ Trägheitsmoment in cm⁴,
 $b =$ Querschnittsbreite in cm,
 $h =$ Querschnittshöhe in cm.

- 135) Wie lang ist ein Pendel, bei dem eine volle Hin- und Herschwingung 2 s dauert? (Ein solches Pendel heißt Sekundenpendel.)

Anleitung: Die Gleichung für die Schwingungszeit lautet

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin bedeutet:

T = Schwingungszeit (Hin- und Herschwingung)
in s,

l = Pendellänge in m,

g = Erdbeschleunigung = 9,81 m/s²,

π = 3,14.

- 136) Wie hoch steht der Wasserspiegel über der Ausflußöffnung eines Gefäßes, wenn das Wasser mit einer Geschwindigkeit $v = 3,13$ m/s ausfließt?

Anleitung: Die Gleichung für die Ausflußgeschwindigkeit lautet:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Hierin bedeutet:

v = Ausflußgeschwindigkeit in m/s,

h = Wasserstandshöhe über Ausflußöffnung in m.

- 137) Für welche Bildweite ist bei einer Linse mit der Brennweite $f = 15$ cm die Bildweite gleich der Gegenstandsweite?

Anleitung: Man benutze die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Hierin bedeutet:

f = Brennweite in cm,

g = Gegenstandsweite in cm,

b = Bildweite in cm.

b) Lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten

Hat man für die beiden Unbekannten x und y nur eine einzige Gleichung, in der diese beiden Unbekannten enthalten sind, so gibt es für diese Gleichung unzählig viele richtige Lösungen, da sie durch unzählig viele Wertepaare für x und y befriedigt werden kann.

Beispielsweise ist die Gleichung: $x + 2y = 50$ für folgende in der nachstehenden Tabelle übereinander stehende Wertepaare erfüllt:

| | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|-----|
| x | 0 | 2 | 4 | 44 | 48 | 50 | 70 |
| y | 25 | 24 | 23 | 3 | 1 | 0 | -10 |

Diese Tabelle stellt nur eine kleine Auswahl zusammengehöriger x - und y -Werte dar und kann beliebig erweitert werden. Welchen Wert x auch

immer annehmen mag, immer läßt sich der dazugehörige Wert für y so berechnen, daß $x + 2y = 50$ ist. Man sieht also, daß man mit einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten nichts anfangen kann, da man unendlich viele richtige Lösungen erhält.

Erst dann, wenn man noch eine 2. lineare Gleichung gestellt bekommen hat, erhält man nur ein einziges Lösungspaar x, y , das die beiden linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten erfüllt. Würde man z. B. die folgenden beiden Gleichungen gestellt bekommen,

$$\begin{aligned}x + 2y &= 50 \quad \text{und} \\ 2x + y &= 28,\end{aligned}$$

so ist nur die Lösung $x = 2$ und $y = 24$ die einzig mögliche und richtige.

An die beiden Gleichungen, die man zum Lösen braucht, sind jedoch noch folgende 2 Bedingungen zu stellen:

1. Die beiden Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein.

Beispiel:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 50 \\ 2x + 4y &= 100.\end{aligned}$$

Die 2. Gleichung ist aus der ersten dadurch entstanden, daß man deren beide Seiten mit 2 multipliziert hat. Die 2. Gleichung hängt von der ersten ab. Es gibt unendlich viele Lösungspaare, die beide Gleichungen erfüllen. Für jedes $x = a$ existiert ein y so, daß beide Gleichungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned}\text{z. B. } x &= 0, \quad y = 25 \\ x &= 2, \quad y = 24 \\ x &= 1, \quad y = 24,5 \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

2. Die beiden Gleichungen dürfen sich nicht widersprechen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 50 \\ x + 2y &= 30.\end{aligned}$$

Für diese beiden einander widersprechenden Gleichungen gibt es kein Lösungspaar.

Hat man 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, die die vorstehenden beiden Bedingungen der Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit erfüllen, so kann man aus diesen beiden Gleichungen immer das Wertepaar für die beiden Unbekannten bestimmen, das beide Gleichungen befriedigt. Zur rechnerischen Lösung bedient man sich einer der nachfolgend behandelten 3 Lösungsmethoden:

Die Substitutionsmethode¹⁾ oder das Einsetzungsverfahren

Aus einer der beiden gegebenen Gleichungen wird die eine Unbekannte ausgerechnet; d. h. man formt die Gleichung so lange um, bis auf der linken Seite der Gleichung die eine Unbekannte mit dem Vorzeichen +, ohne Koeffizienten (Beizahl), Exponenten usw., steht. Sodann wird der ermittelte Wert für die Unbekannte in die 2. Gleichung eingesetzt oder substituiert.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} \text{a) (I)} \qquad \qquad \qquad 2x + y = 28 \\ \text{(II)} \qquad \qquad \qquad x + 2y = 50. \end{array}$$

Die Gleichung (I) löst man nach y auf:

$$y = 28 - 2x$$

und setzt diesen Wert für y in die 2. Gleichung ein; also:

$$\begin{array}{r} x + 2(28 - 2x) = 50 \\ x + 56 - 4x = 50 \\ \quad \quad \quad -3x = -6 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x = 2. \end{array}$$

Um y zu bestimmen, setzt man diesen für x gefundenen Wert entweder in die erste oder in die zweite der beiden gegebenen Gleichungen ein. In die Gleichung (I) eingesetzt, erhält man:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 2 + y = 28 \\ \qquad \qquad \quad y = 24. \\ \text{Ergebnis: } \underline{x = 2; \quad y = 24.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) (I)} \qquad \qquad \qquad 7x + 2y = 16 \\ \text{(II)} \qquad \qquad \qquad \underline{3x - y = 5.} \end{array}$$

Gleichung (II) nach y aufgelöst, ergibt:

$$y = 3x - 5.$$

Diesen Wert für y in Gleichung (I) eingesetzt:

$$7x + 2(3x - 5) = 16.$$

Klammer aufgelöst: $7x + 6x - 10 = 16.$

Glieder mit x auf der linken Seite, absoluten Glieder auf der rechten Seite zusammengefaßt:

$$\begin{array}{r} 13x = 26 \\ \quad \quad \quad x = 2. \end{array}$$

Diesen für x berechneten Wert in Gleichung (I) eingesetzt:

¹⁾ Substituieren = vertreten oder einsetzen. Substitut = Stellvertreter, Ersatz.

$$7 \cdot 2 + 2y = 16.$$

Hieraus: $y = 1.$

Ergebnis: $\underline{x = 2; y = 1.}$

Diese Ergebniswerte für x und y setzt man zur Probe in die gegebenen Gleichungen ein. Man erhält für (I):

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 &= 16 \\ 16 &= 16. \end{aligned}$$

Gleichung (II) ergibt:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 1 &= 5 \\ 5 &= 5. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der für x und y gefundenen Ergebnisse in die gegebenen beiden Bestimmungsgleichungen (I) und (II) kommt man auf identische Gleichungen, wenn die Ergebnisse richtig waren.

c) (I) $9x - 3y = 9$

(II) $\underline{x = \frac{2}{3}y.}$

Gleichung (II) ist bereits in einer nach x aufgelösten Form gegeben; den Wert: $x = \frac{2}{3}y$ in Gleichung (I) eingesetzt:

$$9 \cdot \frac{2}{3}y - 3y = 9.$$

Hieraus: $y = 3.$

Diesen für y berechneten Wert in Gleichung (II) eingesetzt:

$$x = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

Ergebnis: $\underline{x = 2; y = 3.}$

Man setze zur Probe die nebenstehenden Ergebniswerte in die gegebenen Gleichungen (I) und (II) ein.

d) (I) $x - y = 5$

(II) $\underline{y + x = 9.}$

Aus Gleichung (II) erhält man:

$$y = 9 - x.$$

Diesen y -Wert in Gleichung (I) eingesetzt:

$$x - (9 - x) = 5$$

$$x - 9 + x = 5.$$

Hieraus: $x = 7.$

Diesen x -Wert in (II) eingesetzt: $y = 2.$

Ergebnis: $\underline{x = 7; y = 2.}$

Probe für die Richtigkeit des Ergebnisses nicht vergessen!

Aufgaben:

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|--|
| 138) $2x + 3y = 41$ | 142) $x : y = 5$ | 147) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = 1$ |
| $3x - y = 12$ | $x - y = 8$ | $\frac{3}{2}x + y = 11$ |
| 139) $x + 3y = 100$ | 143) $\frac{x}{y} = 3$ | 148) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6$ |
| $3x - y = 0$ | $x + y = 8$ | $\frac{x}{3} + y = 11$ |
| 140) $y - x = 0,5$ | 144) $x : y = 5 : 2$ | 149) $x + 1 = \frac{1}{2}y$ |
| $x + y = \frac{5}{6}$ | $(x - 1) : (y + 1) = 2$ | $y - 1 = \frac{9}{4}x$ |
| 141) $5x = 3y$ | 145) $(x + 4) : (y - 1) = 2$ | |
| $x + 0,4y = 10$ | $x : y = 1 : 2$ | |
| | 146) $(x - 1) : y = 2$ | |
| | $3y - x = 2$ | |

Das Gleichsetzungsverfahren

Die beiden gegebenen Gleichungen werden nach derselben Unbekannten aufgelöst. Die für diese Unbekannte gefundenen Werte werden einander gleichgesetzt:

Beispiele:

a) (I) $7x - 2y = 22$
 (II) $3x + 4y = 24$.

Beide Gleichungen werden nach x aufgelöst; man erhält

aus der Gleichung (I): $x = \frac{22}{7} + \frac{2}{7}y$

und aus der Gleichung (II): $x = 8 - \frac{4}{3}y$.

Die beiden für x gefundenen Werte auf den rechten Gleichungsseiten werden gleichgesetzt:

$$\frac{22}{7} + \frac{2}{7}y = 8 - \frac{4}{3}y$$

Beide Gleichungsseiten mit dem Hauptnenner $3 \cdot 7 = 21$ multipliziert, ergibt:

$$\begin{aligned} 66 + 6y &= 168 - 28y \\ 34y &= 102 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Diesen y -Wert in Gleichung (I) eingesetzt:

$$\begin{aligned} 7x - 2 \cdot 3 &= 22 \\ 7x &= 22 + 6 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x = 4; y = 3$.

b) (I) $3x : y = 6$
 (II) $x + y = 9$.

Beide Gleichungen nach y aufgelöst, ergibt:

$$(I a) \quad y = \frac{1}{2} x$$

$$(II a) \quad y = 9 - x.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (I a) und (II a) werden gleichgesetzt; man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x &= 9 - x \\ \frac{3}{2} x &= 9 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Diesen für x berechneten Wert in die Gleichung (I a) eingesetzt, ergibt:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Ergebnis: $x = 6; y = 3.$

$$\begin{array}{l} c) \text{ (I)} \quad 2y = 3x - 10 \\ \text{ (II)} \quad 5y = x + 14. \end{array}$$

Gleichung (I) und (II) nach y aufgelöst, ergibt:

$$(I a) \quad y = \frac{3}{2} x - 5$$

$$(II a) \quad y = \frac{1}{5} x + \frac{14}{5}.$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten der Gleichungen (I a) und (II a) erhält man:

$$\frac{3}{2} x - 5 = \frac{1}{5} x + \frac{14}{5}$$

$$\begin{array}{l} \text{Mit 10 multipliziert:} \quad 15x - 50 = 2x + 28 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 13x = 78 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 6. \end{array}$$

Diesen x -Wert in Gleichung (I a) eingesetzt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2} \cdot 6 - 5 \\ &= 9 - 5 = 4 \\ \underline{x = 6; y = 4.} \end{aligned}$$

Ergebnis:

Aufgaben:

- | | | |
|-------------------------------------|--|-------------------------------------|
| 150) $x = 3y$ $x - y = 4$ | 154) $3x + 2y = 16$ $5x - 2y = 0$ | 158) $x + y = 9$ $x : y = 2$ |
| 151) $x : y = 3$ $x - y = 6$ | 155) $3x - 2y = 28$ $x - 5y = 5$ | 159) $y - 2x = 1$ $2x + y = 9$ |
| 152) $x = 3y - 13$ $x + 5y = 27$ | 156) $2x - 3y = 6$ $5x - y = 28$ | 160) $x = 3y - 2$ $5y = x + 12$ |
| 153) $x = 2y + 1$ $10y = 4x + 1$ | 157) $\frac{1}{2}x + y = 4$ $x - y = 2$ | 161) $7x + y = 32$ $5x - y = 16$ |

Das Additionsverfahren

Die beiden gegebenen Gleichungen werden durch Multiplikation mit einer Zahl so umgeformt, daß die eine der beiden Unbekannten in beiden Gleichungen dieselbe Beizahl (Koeffizienten) bekommt. Darauf werden die beiden Gleichungen entweder addiert oder subtrahiert, so daß diese Unbekannte herausfällt und sich eine Gleichung mit nur einer Unbekannten ergibt.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} \text{a) (I)} \\ \text{(II)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = 16 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3. \end{array} \right.$$

Gleichung (I) wird mit 2, Gleichung (II) mit 3 multipliziert; man erhält:

$$\begin{array}{l} \text{(I a)} \\ \text{(II a)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 9y = 48. \end{array}$$

Durch diese Multiplikationen erreichte man, daß in den Gleichungen (I a) und (II a) die Unbekannte x denselben Koeffizienten (6) bekam. Man subtrahiert die Gleichung (I a) von (II a) und erhält:

$$13y = 26$$

$$\text{oder:} \quad y = 2.$$

Diesen y -Wert in (I) eingesetzt:

$$\begin{array}{l} 3x - 2 \cdot 2 = 11 \\ 3x = 15 \\ x = 5. \end{array}$$

$$\text{Ergebnis:} \quad \underline{x = 5; \quad y = 2.}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) (I)} \\ \text{(II)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{x}{2} + y = 9 \\ 2x - y = 1. \end{array}$$

In den beiden gegebenen Gleichungen hat die Unbekannte y bereits den gleichen Koeffizienten, nämlich 1. Eine Multiplikation der beiden Gleichungen mit irgendeiner Zahl ist hier nicht erforderlich. Durch Addition von (I) und (II) erhält man:

$$2\frac{1}{2}x = 10$$

$$\text{oder} \quad x = 4.$$

Diesen x -Wert in (I) eingesetzt:

$$\begin{array}{l} \frac{4}{2} + y = 9 \\ 2 + y = 9 \\ y = 7. \end{array}$$

$$\text{Ergebnis:} \quad \underline{x = 4; \quad y = 7.}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) (I)} \quad 4x + 3y = 97 \\ \quad \text{(II)} \quad 7x + 3y = 127. \end{array}$$

Eine Multiplikation ist nicht erforderlich, da y den gleichen Koeffizienten hat. Gleichung (I) von (II) subtrahiert, ergibt:

$$3x = 30 \quad \text{oder} \quad x = 10.$$

Diesen Wert in (I) eingesetzt ergibt:

$$\begin{array}{l} \text{Ergebnis:} \quad 40 + 3y = 97 \\ \quad 3y = 57 \quad \text{oder} \quad y = 19. \\ \quad \underline{x = 10; \quad y = 19.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d) (I)} \quad 7x + 3y = 100 \\ \quad \text{(II)} \quad 3x - y = 20 \quad | \cdot 3. \end{array}$$

Hier braucht nur Gleichung (II) mit 3 multipliziert zu werden. Man erhält

$$\text{(II a)} \quad 9x - 3y = 60.$$

Jetzt hat y in (I) und (II a) die gleiche Beizahl 3. Durch Addition von (I) und (II a) erhält man: $16x = 160$ oder $x = 10$. Diesen Wert für x in Gleichung (II) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{array}{l} \text{Ergebnis:} \quad 3 \cdot 10 - y = 20 \\ \quad \quad \quad -y = -10 \\ \quad \quad \quad \underline{y = 10.} \\ \quad \underline{x = 10; \quad y = 10.} \end{array}$$

Aufgaben:

$$162) \begin{array}{l} 6x - y = 11 \\ x + 6y = 8 \end{array}$$

$$166) \begin{array}{l} 5x + 3y = 19 \\ 6x - 2y = 6 \end{array}$$

$$170) \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 0 \end{array}$$

$$163) \begin{array}{l} \frac{x}{3} + y = 7 \\ \frac{x}{2} - y = 3 \end{array}$$

$$167) \begin{array}{l} 3x + 4y = 25 \\ 6x + 3y = 30 \end{array}$$

$$171) \begin{array}{l} \frac{x}{3} + 2y = 10 \\ 2x - \frac{y}{2} = 10 \end{array}$$

$$164) \begin{array}{l} 3x + 5y = 44 \\ x + y = 10 \end{array}$$

$$168) \begin{array}{l} 5x + 2y = 30 \\ 3y - 2x = 7 \end{array}$$

$$172) \begin{array}{l} 0,2x + 0,5y = 2 \\ 0,6x - y = 1 \end{array}$$

$$165) \begin{array}{l} 2x + 3y = 19 \\ 5x - y = 5 \end{array}$$

$$169) \begin{array}{l} 2x + 4y = 38 \\ 5y + 3x = 51 \end{array}$$

$$173) \begin{array}{l} 0,3x + 0,5y = 1 \\ 0,2x - 3y = 0 \end{array}$$

Zusammenfassung der 3 Lösungsverfahren:

Nach welchem der 3 vorstehend behandelten Lösungsverfahren — Einsetzungs- oder Gleichsetzungs- oder Additionsverfahren — man eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten löst, ist belanglos. Alle drei führen auf dasselbe Ergebnis. Man wählt von den 3 Verfahren das zur Lösung, mit dem

man am leichtesten und somit am schnellsten zum Ziel zu kommen erhofft. Abschließend werden die 3 Lösungsverfahren gegenübergestellt an folgendem

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2x + 3y = 12 \\ \text{(II)} \quad 4x - y = 10. \end{array}$$

Nach dem Einsetzungsverfahren erhält man aus (II)

$$y = 4x - 10$$

und setzt diesen Wert in (I) ein:

$$\begin{aligned} 2x + 3(4x - 10) &= 12 \\ 2x + 12x - 30 &= 12 \\ 14x &= 42 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Diesen Wert in Gleichung (I) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3y &= 12 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

oder

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen nach y auf; man erhält

$$\begin{array}{l} \text{aus Gleichung (I):} \quad y = 4 - \frac{2}{3}x \\ \text{aus Gleichung (II):} \quad y = 4x - 10. \end{array}$$

Die Gleichsetzung dieser beiden y -Werte ergibt:

$$\begin{aligned} 4 - \frac{2}{3}x &= 4x - 10 \\ -\frac{14}{3}x &= -14 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Beim Additionsverfahren wird die Gleichung (I) mit 2 multipliziert. Man erhält:

$$\begin{array}{l} \text{(I a)} \quad 4x + 6y = 24 \\ \text{(II)} \quad 4x - y = 10 \\ \hline \text{(I a) - (II)} \quad 7y = 14 \\ y = 2. \end{array}$$

Eingekleidete Aufgaben:

- 174) Die Summe zweier Zahlen beträgt 12, ihre Differenz ist 2. Wie lauten die beiden Zahlen?
- 175) Die Differenz und der Quotient zweier Zahlen ist 3. Wie lauten diese Zahlen?
- 176) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 13. Vertauscht man die Zehner- mit der Einerstelle, so ist die dadurch entstehende Zahl um 9 kleiner als die ursprüngliche Zahl. Wie lautet sie?

Anleitung: Die Zehnerstelle möge x , die Einerstelle y sein. Die ursprüngliche Zahl lautet dann: $10x + y$. Vertauscht man die beiden Stellen, so lautet die sich ergebende Zahl: $x + 10y$. Die Quersumme der gesuchten Zahl hat die allgemeine Form: $x + y$.

- 177) In einem Zugseil herrscht eine Spannung von 150 kg/cm^2 . Beansprucht man ein Seil, dessen Querschnittsfläche doppelt so ist, mit einer Zugkraft, die um 100 kg größer ist, so tritt eine Spannung von 100 kg/cm^2 auf. Wie groß ist der Querschnitt und die Zugkraft des Seiles?

Anleitung: Spannung = Kraft : Fläche. (Grundgleichung Nr. 10 S. 198)

- 178) Erhöht man die auf einen Körper wirkende Kraft von 15 kg um 6 kg , so nimmt die Beschleunigung des Körpers um 2 m/s^2 zu. Wie groß sind die Masse des Körpers und die ursprüngliche Beschleunigung?

Anleitung: Kraft = Masse \times Beschleunigung

$$P = m \times b.$$

- 179) An einem zweiarmigen Hebel hängen zwei Gewichte, die zusammen 50 kg wiegen. Die Hebelarme verhalten sich wie $2 : 3$. Wie schwer ist jedes der beiden Gewichte?

Anleitung: Die Hebelarme verhalten sich umgekehrt wie die Gewichte.

- 180) 2 Stirnräder haben einen Achsabstand $a = 450 \text{ mm}$. Wie groß müssen die Teilkreisdurchmesser der Zahnräder ausgeführt werden, wenn das Übersetzungsverhältnis $4 : 5$ betragen soll?

Anleitung: Achsabstand = Summe der Teilkreishalbmesser.
 Übersetzungsverhältnis = Verhältnis der Durchmesser.

- 181) Eine Schleuderpumpe füllt einen Wasserbehälter in 20 min . Eine andere Pumpe schwächerer Leistung benötigt hierfür 30 min . In welcher Zeit füllen die beiden Pumpen bei gleichzeitiger Förderung den Behälter?

Anleitung: Die erste Pumpe füllt in 1 min : $\frac{1}{20}$ des Behälters. Beide Pumpen füllen den Behälter in $x \text{ min}$. In 1 min füllen beide Pumpen $\frac{1}{x}$ des Behälters.

- 182) Durch eine Pumpe A wird ein Behälter in 2 Stunden , durch eine andere Pumpe B in 4 Stunden gefüllt. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn beide Pumpen zugleich fördern?

- 183) 2 Pumpen, von denen die eine doppelt so viel wie die andere fördert, füllen gemeinsam in 30 min einen Behälter. Welche Zeit würde gebraucht werden, wenn jede Pumpe für sich allein arbeiten müßte?

- 184) 2 elektrische Widerstände, von denen der eine doppelt so groß wie der andere ist, haben bei Hintereinanderschaltung 6Ω Widerstand.

a) Wie groß ist jeder Widerstand?

b) Wie groß ist der Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung?

Anleitung: 2 Teilwiderstände r_1 und r_2 haben bei Hintereinanderschaltung den Gesamtwiderstand: $R = r_1 + r_2$.

Bei Parallelschaltung berechnet sich ihr Gesamtwiderstand R_1 aus der Gleichung $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$.

- 185) 2 parallel geschaltete Widerstände, von denen der eine um 50% größer als der andere ist, haben einen Gesamtwiderstand von 6Ω . Wie groß sind die beiden Widerstände?

Anleitung: Grundgleichung Nr. 20. Seite 200.

Anmerkung: Nur im vorliegenden Falle, wo vorausgesetzt ist, daß für die Widerstände positive Werte gelten sollen, führt die Aufgabe auf eine einzige Lösung, wie es bei linearen Gleichungen auch immer der Fall ist.

- 186) Um 8 Uhr morgens geht ein Fußgänger von A nach dem 20 km entfernten B. Er legt stündlich 5 km zurück. Um 10 Uhr fährt ihm ein Radfahrer mit einer Stundengeschwindigkeit von 15 km/h nach. Wann und wo holt ihn der Radfahrer ein?

Anleitung: Der Fußgänger legt in x Stunden $5x$ (km) zurück. Der Radfahrer ist 2 Stunden weniger als der Fußgänger unterwegs.

- 187) Zu einer bestimmten Zeit fährt von A nach dem 200 km entfernten B ein Personenkraftwagen mit 70 km/h Geschwindigkeit ab. Zur gleichen Zeit fährt von B nach A ein Luftkraftwagen mit 30 km/h Geschwindigkeit. Nach welcher Zeit treffen sich die beiden Fahrzeuge? Wieviel Kilometer hat der Personenkraftwagen zurückgelegt?

c) Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten

Zur Berechnung von 3 unbekanntnen Größen x , y und z benötigt man 3 voneinander unabhängige und widerspruchsfreie Gleichungen. Bei 4 Unbekannten braucht man 4 derartige Gleichungen. Allgemein sind zur Berechnung von n Unbekannten n Gleichungen erforderlich¹⁾.

Ein allgemein gültiger Lösungsweg für lineare Gleichungen mit n Unbekannten ist folgender:

Man löst eine Gleichung der gegebenen n Gleichungen nach einer der n Unbekannten, z. B. nach x , auf, so daß man also eine Gleichung erhält, auf deren linken Seite nur x und auf deren rechten Seite die anderen Unbekannten vorkommen. Den für x erhaltenen Ausdruck setzt man in die anderen Gleichungen, in denen x vorkommt, ein. Man erhält somit $(n - 1)$ Gleichungen mit nur noch $(n - 1)$ Unbekannten. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man $(n - 2)$ Gleichungen mit $(n - 2)$ Unbekannten. Durch fortgesetztes Wiederholen dieses Verfahrens erhält man schließlich und endlich eine Gleichung mit nur noch einer einzigen Unbekannten, deren Wert man aus dieser Gleichung bestimmen kann. Durch rückwärtiges Einsetzen dieses gefundenen Wertes erhält man schrittweise die anderen Unbekannten.

Das Lösen linearer Gleichungen mit 3 unbekanntnen Größen zeigt folgendes

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & x + y + z = 9 \\ \text{(II)} & z - x + y = 5 \\ \text{(III)} & \underline{2x + 3y - z = 9.} \end{array}$$

¹⁾ Das gilt jedoch nicht für den Fall, daß alle Zahlengrößen der rechten Gleichungsseiten gleich Null sind.

Aus Gleichung (I) bestimmt man: $x = 9 - y - z$ und setzt diesen Wert in (II) und (III) ein.

Man erhält:

$$(II\ a) \quad z - (9 - y - z) + y = 5$$

oder

$$z - 9 + y + z + y = 5$$

$$2z + 2y = 14$$

sowie

$$(III\ a) \quad 2(9 - y - z) + 3y - z = 9$$

oder

$$18 - 2y - 2z + 3y - z = 9$$

$$y - 3z = -9.$$

Man hat also die beiden Gleichungen erhalten:

$$2z + 2y = 14$$

$$y - 3z = -9.$$

Aus diesen bestimmt man nach einer der unter b) angeführten 3 Lösungsmethoden die beiden Unbekannten y und z . Man erhält $y = 3$ und $z = 4$. Diese beiden Ergebnisse in Gleichung (I) eingesetzt, ergibt $x = 2$.

Ergebnis: $x = 2$; $y = 3$; $z = 4$.

Aufgaben:

188) $x + y - z = 1$

$$2x + 3y - 3z = 0$$

$$3x - 2y + z = 6$$

189) $3x + 2y + 6z = 50$

$$2x + 3y + 4z = 40$$

$$6x + 4y + \frac{1}{3}z = 30$$

190) $2x + 3y + 5z = 3$

$$10x + 6y - 10z = 5$$

$$20x - 3y + 5z = 10.$$

191) Das Doppelte einer Zahl vermehrt um eine 2. Zahl ergibt 8. Das Doppelte der zweiten Zahl vermehrt um eine 3. Zahl ergibt 14. Das Doppelte der dritten Zahl vermehrt um die 1. Zahl ergibt ebenfalls 14. Wie lauten die drei Zahlen?

192) Die Summen je zweier Dreiecksseiten betragen 7 cm, 9 cm und 8 cm. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks?

193) Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180° . Wie groß sind die Dreieckswinkel, wenn sie sich wie 1 : 2 : 3 verhalten?

Anleitung: Vergleiche das Rechnen mit fortlaufenden Proportionen auf Seite 121.

194) In einem Dreieck ist der eine Winkel 20° größer als der zweite und 20° kleiner als der dritte Winkel.

Wie groß sind die 3 Winkel?

195) 3 elektrische Widerstände, von denen der zweite doppelt so groß wie der erste, aber nur halb so groß wie der dritte ist, ergeben bei Hintereinanderschaltung einen Gesamtwiderstand von $3,5 \Omega$. Wie groß sind die 3 Widerstände?

Anleitung: Vergleiche Aufgabe 184 auf Seite 216.

196) 3 parallel geschaltete Widerstände haben einen Gesamtwiderstand von $\frac{1}{14} \Omega$. Der 1. Widerstand ist doppelt so groß wie der 2. Dieser wiederum ist doppelt so groß wie der 3. Wie groß sind die 3 Widerstände?

Anleitung: Der Gesamtwiderstand R von drei parallel geschalteten Widerständen r_1, r_2 und r_3 ergibt sich aus: $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$.

197) Drei an einem Punkt angreifende Kräfte sind im Gleichgewicht. Die erste ist 80 kg kleiner als die zweite, während die dritte 30 kg größer als die zweite ist. Die 3 Kräfte betragen zusammen 310 kg. Wie groß ist jede der drei Kräfte?

Erklärung: Drei im Gleichgewicht befindliche, an einem Punkt angreifende Kräfte P_1, P_2 und P_3 lassen sich durch nebenstehendes Dreieck darstellen, dessen Seitenlängen den Größen der Kräfte entsprechen.

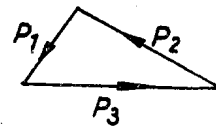


Bild 54

d) Quadratische Gleichungen (Gleichungen 2. Grades)

Mit einer Unbekannten

In der quadratischen Gleichung: $A x^2 + B x + C = 0$ kommt die einzige in ihr enthaltene Unbekannte x sowohl mit dem Potenzexponenten 2 als auch mit dem (nicht hingeschriebenen) Exponenten 1 vor. Ist das quadratische Glied x^2 mit einem Koeffizienten (= Beizahl) — hier ist es der Faktor A — verbunden, so ist die quadratische Gleichung in allgemeiner Form gegeben. Man hat eine solche quadratische Gleichung, die man auch wegen des in ihr vorkommenden höchsten Exponenten 2 eine Gleichung 2. Grades nennt, zunächst auf die Normalform zu bringen, indem man sie durch die Beizahl A teilt. Man erhält: $\frac{A x^2}{A} + \frac{B x}{A} + \frac{C}{A} = \frac{0}{A}$ oder $x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} = 0$. Setzt man hierin den Quotienten $\frac{B}{A} = a$ und $\frac{C}{A} = b$, so erhält man die Normalform der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + a x + b = 0.$$

Die Normalform ist durch folgendes gekennzeichnet:

1. Das quadratische Glied x^2 hat das Vorzeichen + und keinen Koeffizienten (richtiger: den Koeffizienten 1).

2. Das lineare Glied $a x$ hat den Koeffizienten a , der größer oder kleiner als 0 sein kann.
3. Das von x freie Glied, das Freiglied oder auch das absolute Glied genannt, kann positiv oder negativ sein.
4. Die aus dem quadratischen Gliede, dem linearen Gliede und dem Freigliede gebildete Summe ist gleich 0.

Sonderfälle der Normalform
der quadratischen Gleichung

1) Fällt das lineare Glied $a x$ der in der Normalform gegebenen quadratischen Gleichung: $x^2 + a x + b = 0$ fort, so erhält man die rein-quadratische Gleichung: $x^2 + b = 0$.

In einer rein quadratischen Gleichung kommt die Unbekannte x nur in der quadratischen Form vor.

Aus: $x^2 + b = 0$ folgt $x^2 = -b$ und durch beiderseitiges Wurzelziehen: $x_{1,2} = \pm \sqrt{-b}$; denn eine Quadratwurzel kann sowohl positiv als auch negativ sein.

Die rein quadratische Gleichung: $x^2 + b = 0$ hat die beiden Lösungen, die man auch Wurzeln nennt,

$$x_1 = + \sqrt{-b} \quad \text{und} \quad x_2 = - \sqrt{-b}.$$

Ist $b > 0$ (d. h. b ist positiv), so sind die beiden Wurzeln imaginär.

Für $b < 0$ (d. h. b ist negativ) erhält man 2 reelle Lösungen.

Beispiele:

a) $x^2 - 16 = 0.$

Das absolute Glied auf die rechte Gleichungsseite gebracht: $x^2 = 16.$

Durch beiderseitiges Wurzelziehen erhält man: $x = \pm 4.$

Die beiden Lösungen lauten:

$$\underline{x_1 = +4; \quad x_2 = -4.}$$

b) $x^2 + 225 = 0$

$$x^2 = -225$$

$$x = \pm \sqrt{-225} = \pm 15i$$

Ergebnis: $\underline{x_1 = 15i; \quad x_2 = -15i.}$

c) $\frac{3x}{2} = \frac{216}{x}.$

Das Produkt der Außenglieder ist gleich dem der Innenglieder:

$$3x^2 = 432.$$

Durch 3 dividiert: $x^2 = 144.$

Beidseitig radiziert: $x = \pm 12 \quad \text{d. h. :}$

Ergebnis: $\underline{x_1 = 12; \quad x_2 = -12.}$

Probe: Den Lösungswert $x_1 = 12$ in die Ursprungsgleichung eingesetzt, ergibt:

$$\frac{3 \cdot 12}{2} = \frac{216}{12}$$

$$18 = 18.$$

Dies ist eine identische Gleichung und ein Kennzeichen für die Richtigkeit von $x_1 = 12$. Ebenso macht man die Probe mit dem 2. Lösungswert $x_2 = -12$.

d) $3x^2 - 5 = 142$.

Die konstanten Glieder, das sind die Glieder ohne x , auf die rechte Seite gebracht, ergibt:

$$3x^2 = 142 + 5$$

$$3x^2 = 147$$

$$x^2 = 49.$$

Ergebnis: $x_1 = +7$; $x_2 = -7$.

e) $\frac{4+x}{4-x} = \frac{x+16}{x-16}$.

Das Produkt der Außenglieder gleich dem der Innenglieder gesetzt, ergibt:

$$(4+x) \cdot (x-16) = (4-x) \cdot (x+16)$$

$$4x + x^2 - 64 - 16x = 4x - x^2 + 64 - 16x$$

$$2x^2 = 128$$

$$x^2 = 64.$$

Ergebnis: $x_1 = +8$; $x_2 = -8$.

Weitere Übungsaufgaben: S. 227 Nr. 198... 202.

2) Fällt das konstante Glied b der in der Normalform gegebenen quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ fort, so lautet die quadratische Gleichung: $x^2 + ax = 0$.

Man klammert x aus und erhält: $x(x+a) = 0$.

Ein Produkt — hier: $x(x+a)$ — kann nur dann gleich 0 sein, wenn einer der beiden Faktoren gleich 0 ist. Durch Nullsetzen der beiden Faktoren des Produktes $x(x+a)$ erhält man die beiden Lösungen:

und (aus $x_2 + a = 0$):

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -a.$$

Beispiele:

a) $x^2 - 3x = 0$.

Durch Ausklammern von x erhält man:

$$x(x-3) = 0.$$

Dieses Produkt kann nur dann gleich 0 sein, wenn die Unbekannte x die Werte annimmt:

$$\underline{x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 3.}$$

b) $x^2 + 5x = 0$. Man erhält auf dieselbe Weise:

$$x(x + 5) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -5.$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 227 Nr. 203...207.

Sind in der Normalform der quadratischen Gleichung: $x^2 + ax + b = 0$ sowohl $a \neq 0$ als auch $b \neq 0$ [lies: b ungleich 0], so kann man zur rechnerischen Bestimmung der Unbekannten x einen der folgenden 2 Lösungswege einschlagen:

1) Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ mittels der quadratischen Ergänzung.

Subtrahiert man das Freiglied b der Normalform:

$$x^2 + ax + b = 0$$

auf beiden Seiten der Gleichung, so erhält man:

$$x^2 + ax = -b.$$

Sodann fügt man auf beiden Seiten dieser Gleichung, um auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat zu bekommen, die sog. quadratische Ergänzung $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ hinzu.

Die quadratische Ergänzung ist das Quadrat des halben Koeffizienten des in x linearen Gliedes.

Die Gleichung lautet dann:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -b + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Die linke Seite ist das Quadrat der Summe $x + \frac{a}{2}$. Man schreibt also:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b.$$

Zieht man auf beiden Seiten dieser letzten Gleichung die Wurzel und beachtet, daß eine Quadratwurzel sowohl einen positiven als auch einen negativen Wert haben kann, so ergibt sich:

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{a}{2}$, so erhält man:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Die vor dem Wurzelzeichen stehenden beiden Vorzeichen + und – besagen, daß die quadratische Gleichung $x^2 + a x + b = 0$ für die Unbekannte x die beiden Lösungen hat:

$$\begin{array}{l} x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \\ x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \end{array}$$

Anmerkung: Der unter dem Wurzelzeichen stehende Radikand $\left(\frac{a^2}{4} - b\right)$ heißt die Diskriminante D . Bezüglich ihrer Größe kann man folgende 3 möglichen Fälle unterscheiden:

I) $D = \frac{a^2}{4} - b > 0$; d. h. die Diskriminante ist positiv. Man hat 2 reelle Lösungen x_1 und x_2 .

II) $D = \frac{a^2}{4} - b = 0$; die Diskriminante ist 0.

Man hat zwei zusammenfallende Lösungen; nämlich: $x_{1,2} = -\frac{a}{2}$.

III) $D = \frac{a^2}{4} - b < 0$; d. h. die Diskriminante ist negativ. Man hat keine reelle Lösung, da die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl imaginär ist. Man erhält 2 konjugiert komplexe Zahlen zum Ergebnis.

Zahlenbeispiel:

Welches sind die Lösungen der in allgemeiner Form gegebenen quadratischen Gleichung:

$$4x^2 - 20x + 24 = 0.$$

Man dividiert durch die Beizahl 4 des quadratischen Gliedes und erhält die Normalform:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Das absolute Glied nach rechts gebracht:

$$x^2 - 5x = -6.$$

Die quadratische Ergänzung lautet $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ und wird beidseitig addiert:

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Die linke Seite als Quadrat geschrieben, die rechte Seite ausgerechnet:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Auf beiden Seiten radiziert: $x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$.

$-\frac{5}{2}$ nach rechts gebracht: $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Somit lautet das Ergebnis:

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Probe: $x_1 = 3$ in die Ursprungsgleichung eingesetzt, ergibt

$$4 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 + 24 = 0$$

$$36 - 60 + 24 = 0$$

$$0 = 0.$$

$x_2 = 2$ in die Ursprungsgleichung eingesetzt, ergibt

$$4 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 24 = 0$$

$$16 - 40 + 24 = 0$$

$$0 = 0.$$

2) Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + a x + b = 0$ mittels der nachstehenden Formel:

Aus $x^2 + a x + b = 0$ erhält man die beiden
 Lösungen: $x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Formel wurde bei dem unter 1. erklärten Lösungsverfahren mittels der quadratischen Ergänzung bewiesen.

Diese Formel drückt sich in Worten als folgende Lösungsvorschrift für die in der Normalform gegebene quadratische Gleichung aus:

Die beiden Ergebnisse der quadratischen Gleichung $x^2 + a x + b = 0$ erhält man folgendermaßen:

1. Man nehme die Hälfte des Koeffizienten von x und ändere das Vorzeichen; also: $-\frac{a}{2}$.
2. Hierzu addiere bzw. subtrahiere man die Wurzel, deren Radikand gebildet ist aus der Summe des Quadrates der soeben hingeschriebenen Zahl und aus dem absoluten Gliede mit entgegengesetztem

Vorzeichen; also: $\pm \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Beispiele:

Wie lauten die Lösungen folgender quadratischen Gleichungen:

a) $x^2 - 18x + 80 = 0.$

Der Koeffizient von x ist: -18 .

Das absolute Glied ist: $+80$.

Nach der vorstehenden Lösungsvorschrift errechnet man die beiden Ergebnisse aus:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{18}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2 - 80} \\ &= 9 \pm \sqrt{81 - 80} = 9 \pm \sqrt{1} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\underline{x_1 = 10; \quad x_2 = 8.}$

b) $x^2 + x - 42 = 0.$

Der Koeffizient von x ist: $+1$ (nicht etwa $0!$).

Das absolute Glied ist: -42 .

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 42} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{168}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\underline{x_1 = 6; \quad x_2 = -7.}$

c) $6x^2 - x - 1 = 0.$

Diese quadratische Gleichung ist zunächst auf die Normalform zu bringen, indem man sie durch die Beizahl des quadratischen Gliedes: 6 teilt. Man erhält:

$$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0.$$

Der Koeffizient von x lautet: $-\frac{1}{6}$.

Das absolute Glied ist: $-\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= +\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{6}} \\ &= +\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{24}{144}} = +\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144}} \\ &= +\frac{1}{12} \pm \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\underline{x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.}$

Weitere Übungsaufgaben: S. 227 Nr. 208 ... 217.

Das Wurzelgesetz für die quadratischen Gleichungen

Die beiden Lösungen (auch Wurzeln genannt) der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ betragen, wie vorstehend abgeleitet wurde:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Durch Addition dieser beiden Lösungen x_1 und x_2 erhält man:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) + \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) = -a; \text{ d. h.}$$

Die Summe der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich der Beizahl von x mit entgegengesetztem Vorzeichen.

$$x_1 + x_2 = -a$$

Durch Multiplikation der beiden Werte für x_1 und x_2 erhält man:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b; \text{ d. h.}$$

Das Produkt der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem absoluten Gliede.

$$x_1 \cdot x_2 = b$$

Beispiel:

Wie lautet die quadratische Gleichung, die die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 7$ hat?

Die Summe der beiden Wurzeln ist: $x_1 + x_2 = 3 + 7 = 10$. Sie ist gleich dem Koeffizienten von x mit umgekehrten Vorzeichen; also $a = -10$

Das Produkt der beiden Wurzeln ist: $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 7 = 21$. Es ist gleich dem Freiglied; also $b = 21$.

Somit lautet die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Probe: Für $x_1 = 3$ wird aus

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 21 &= 3^2 - 10 \cdot 3 + 21 \\ &= 9 - 30 + 21 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $x_2 = 7$ wird aus

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 21 &= 7^2 - 10 \cdot 7 + 21 \\ &= 49 - 70 + 21 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weitere Übungsaufgaben: S. 227 Nr. 218 ... 222.

Lehrsatz von Vieta¹⁾

Die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ läßt sich als Produkt der beiden Faktoren: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ schreiben, worin x_1 und x_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind.

¹⁾ Vieta [sprich: Wi-eta] (1540 bis 1603), französischer Mathematiker — Erfinder der Buchstabenbezeichnung für unbestimmte Zahlen.

Beweis: Multipliziert man die beiden Klammern $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ aus, so erhält man: $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$.

Da aber $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 x_2 = +b$ ist, so erhält man:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - (-a)x + b = x^2 + ax + b.$$

Beispiel:

Die Summe $x^2 - 3x - 70$ ist in ein Produkt aus 2 Faktoren zu zerlegen. Man setzt $x^2 - 3x - 70 = 0$ und löst diese quadratische Gleichung:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 70} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{280}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{17}{2}$$

$$x_1 = 10; \quad x_2 = -7.$$

Das gesuchte Produkt lautet: $(x - 10) \cdot (x + 7)$.

Ergebnis: $x^2 - 3x - 70 = (x - 10)(x + 7)$.

Probe: Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite erhält man die linke Seite.

Aufgaben:

198) $25x^2 = 9$

✓ 208) $x^2 - 11x + 30 = 0$

199) $4x^2 + 36 = 0$

✓ 209) $x^2 + 8x + 15 = 0$

200) $\frac{2}{3}x = \frac{1,5}{x}$

210) $x^2 - 3x = 10$

201) $(x + a)(x - a) = 3a^2$

211) $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$

202) $ax^2 = b$

212) $x^2 - 2,9x = 0,3$

203) $x^2 = 16x$

213) $x^2 + 3,2x + 0,6 = 0$

204) $(x + 3)^2 = 9$

✓ 214) $8x^2 + 2x = 1$

205) $(x + 5)(x - 5) + 10x + 25 = 0$

✓ 215) $6x^2 + x = 15$

206) $\frac{2+x}{x-2} = \frac{x-2}{2-x}$

216) $18x^2 + 9x + 1 = 0$

207) $(x + 4)^2 = (4 - x)^2 + 4x^2$

✓ 217) $12x^2 - 17x = -6$.

Für die Aufgaben 218... 222 sind die quadratischen Gleichungen anzugeben, die die Lösungen x_1 und x_2 haben.

218) $x_1 = -4; \quad x_2 = +3$

221) $x_1 = +2i; \quad x_2 = -2i$

219) $x_1 = \sqrt{3}; \quad x_2 = -\sqrt{3}$

222) $x_1 = 2 + i; \quad x_2 = 2 - i$.

220) $x_1 = 1 + \sqrt{2}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Die in den Aufgaben 223... 227 gegebenen quadratischen Ausdrücke sind in Faktoren zu zerlegen:

223) $x^2 + x - 6$

226) $x^2 + 2x + \frac{3}{4}$

✓ 224) $x^2 - 10x + 24$

227) $x^2 - 2,5x + 1$.

✓ 225) $x^2 + 2x - 8$

- 228) Die Zahl 216 ist in das Produkt zweier Faktoren zu zerlegen, von denen der eine um 6 größer als der andere ist. Wie lauten die beiden Faktoren? $18 \cdot 12$
- 229) 41 soll in die Summe zweier Glieder zerlegt werden, deren Produkt 378 ist. Wie lauten die beiden Glieder?
- 230) Welche Zahlen ergeben durch 4 dividiert 1 mehr, als wenn man 8 durch sie teilt?
- 231) Der Inhalt eines Rechteckes beträgt 28 cm^2 . Wie groß sind seine Seiten, wenn die eine 3 cm größer als die andere ist?
- 232) Von den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes ist die eine halb so lang wie die andere. Wie lang ist die Hypotenuse, wenn die längere Kathete $a \text{ cm}$ mißt?
- 233) Eine Strecke von der Länge $a \text{ cm}$ heißt nach dem „Goldenen Schnitt“ geteilt, wenn sie so in 2 Teilabschnitte zerlegt wird, daß der größere Abschnitt (x) die mittlere Proportionale (= geometrisches Mittel) zur ganzen Strecke (a) und zu dem kleineren Abschnitt ($a-x$) ist. Wie groß ist der größere Abschnitt dieser so geteilten Strecke?

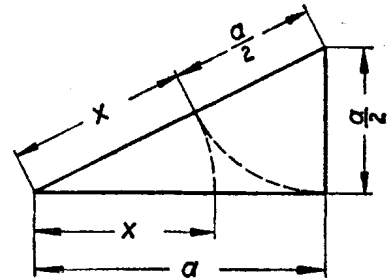


Bild 54

Anmerkung: Verkürzt man die Hypotenuse der Aufgabe 232 um die Länge der kürzeren Kathete, so erhält man den größeren Abschnitt der nach dem „Goldenen Schnitt“ geteilten anderen Kathete. Die Teilung nach dem: „Goldenen Schnitt“ nennt man auch: „Stetige Teilung“.

- 234) Bei der Härtebestimmung eines Werkstoffes mittels der Kugeldruckprobe nach Brinell (1900) errechnet man die Eindrucktiefe h einer kleinen Stahlkugel von bestimmtem Durchmesser D in einem zu prüfenden Werkstoff aus dem leicht zu messenden Durchmesser d des Eindrucks und dem Durchmesser D der Kugel.

- a) Wie drückt sich h durch D und d aus?
 b) Wie groß ist h für $D = 10 \text{ mm}$ und $d = 6 \text{ mm}$?

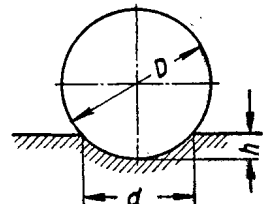


Bild 55

Anleitung: Aus dem Bilde 55 entnehme man das nebenstehend skizzierte Dreieck (Bild 56) und setze den Lehrsatz des Pythagoras an!

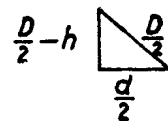


Bild 56

- 235) Um wieviel muß man den Durchmesser d eines Rohres vergrößern, damit die lichte Querschnittsfläche f doppelt so groß wird?
- 236) Von 2 Drähten ist der Widerstand des einen 1Ω größer als der des anderen. Bei Parallelschaltung bilden beide Drähte einen verzweigten Stromweg von $1,2 \Omega$ Gesamt-widerstand. Wie groß sind die beiden Widerstände?
- 237) Der Widerstand zweier Drähte beträgt bei Hintereinanderschaltung 18Ω , bei Nebeneinanderschaltung 4Ω . Wie groß sind die Widerstände der beiden Drähte?

Mit mehreren Unbekannten

Die für die rechnerische Lösung einfachsten Fälle der quadratischen Gleichungen mit 2 Unbekannten liegen vor, wenn gegeben ist:

- a) in der einen Gleichung die Summe oder Differenz, in der anderen das Produkt der beiden Unbekannten;
- b) in der einen Gleichung die Summe oder Differenz der Quadrate der Unbekannten und in der anderen Gleichung die Summe oder die Differenz oder das Produkt der Unbekannten;
- c) eine quadratische und eine lineare Gleichung.

Die für diese 3 Fälle zweckmäßigsten Lösungswege mögen an einer Reihe charakteristischer Beispiele gezeigt werden:

Beispiele zu a):

$$\begin{array}{l} \alpha) \text{ (I)} \quad x + y = 7 \\ \text{ (II)} \quad \underline{\quad xy = 12.} \end{array}$$

Aus Gleichung (II) bestimmt man:

$$y = \frac{12}{x}$$

und setzt diesen Wert in (I) ein:

$$x + \frac{12}{x} = 7.$$

Beide Seiten mit x multipliziert:

$$x^2 + 12 = 7x.$$

Durch Ordnen der Glieder erhält man die Normalform:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

mit den beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_1 &= 4; \quad x_2 = 3. \end{aligned}$$

Setzt man $x_1 = 4$ in (I) ein, so erhält man: $4 + y_1 = 7$ oder $y_1 = 3$.

„ „ $x_2 = 3$ „ „ „ „ „ „ $3 + y_2 = 7$ „ $y_2 = 4$.

Man erhält 2 Lösungspaare als

$$\begin{aligned} \text{Ergebnis:} \quad & x_1 = 4; \quad y_1 = 3 \\ & \text{und } x_2 = 3; \quad y_2 = 4. \end{aligned}$$

Einfacher ist der Lösungsgang unter Zuhilfenahme des Wurzelgesetzes für quadratische Gleichungen (Seite 225):

Man stellt die Normalform einer quadratischen Gleichung auf, in der die Beizahl von x gleich dem negativen Wert von der Summe der beiden Unbekannten (hier: -7) ist und in der das Freiglied gleich dem Produkt der beiden Unbekannten ist (hier: 12); also: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Die weitere Lösung: Siehe oben!

$$\begin{aligned} \beta) \quad (I) \quad & x - y = 4 \\ (II) \quad & \underline{x y = 60.} \end{aligned}$$

Der Lösungsweg entspricht dem zuerst angeführten des Zahlenbeispiels α); also:

$$\begin{aligned} \text{aus (II):} \quad & y = \frac{60}{x} \\ \text{in (I) eingesetzt:} \quad & x - \frac{60}{x} = 4 \quad \text{oder} \quad x^2 - 60 = 4x. \end{aligned}$$

$$\text{Geordnet: } x^2 - 4x - 60 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 60} = 2 \pm 8; \quad x_1 = 10; \quad x_2 = -6.$$

Diese Werte in (I) oder (II) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} & y_1 = 6; \quad y_2 = -10. \\ \text{Ergebnis:} \quad & x_1 = 10; \quad y_1 = 6 \\ & x_2 = -6; \quad y_2 = -10. \end{aligned}$$

Beispiele zu b):

$$\begin{aligned} \alpha) \quad (I) \quad & x^2 + y^2 = 25 \\ (II) \quad & \underline{x y = 12.} \end{aligned}$$

Man multipliziert (II) mit 2 und erhält (II a): $2xy = 24$.

Durch Addition von (I) und (II a) ergibt sich: $x^2 + 2xy + y^2 = 49$

oder: $(x + y)^2 = 49$.

Durch beiderseitiges Radizieren erhält man: $x + y = \pm 7$.

Man hat somit die Summe der beiden Unbekannten bestimmt, während ihr Produkt in (II) gegeben ist. Die Aufgabe ist auf den vorhergehenden Fall a) Beispiel α) zurückgeführt. Hier liegen die folgenden 2 Gleichungspaare vor:

$$\begin{aligned} x + y = 7 \quad \text{und} \quad x + y = -7 \\ \underline{x y = 12} \quad \quad \quad \underline{x y = 12.} \end{aligned}$$

Man erhält die 4 Lösungspaare als

$$\begin{aligned} \text{Ergebnis:} \quad & x_1 = 3; \quad y_1 = 4 & x_3 = 4; \quad y_3 = 3 \\ & x_2 = -3; \quad y_2 = -4 & x_4 = -4; \quad y_4 = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \beta) \text{ (I)} \quad x^2 - y^2 = 3 \\ \text{ (II)} \quad \underline{xy = 2.} \end{array}$$

Aus (II) erhält man: $y = \frac{2}{x}$ und setzt diesen Wert in (I) ein:

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3; \text{ beide Seiten mit } x^2 \text{ multipliziert, ergibt:}$$

$$x^4 - 4 = 3x^2 \text{ oder geordnet } x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung 4. Grades oder eine biquadratische Gleichung. Man kann sie aber auch als eine quadratische Gleichung für die Unbekannte x^2 auffassen und erhält somit als Lösungen:

$$\begin{aligned} x_{1,2}^2 &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_1^2 &= +4; \text{ hieraus } x_1 = +2; x_2 = -2 \\ x_2^2 &= -1; \text{ hieraus } x_3 = +i; x_4 = -i. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der 4 Lösungen der Unbekannten x in (II) erhält man:

$$y_1 = +1; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = -2i; \quad y_4 = 2i.$$

Ergebnis:

$$\begin{array}{l} x_1 = +2; \quad y_1 = +1 \\ x_2 = -2; \quad y_2 = -1 \\ x_3 = +i; \quad y_3 = -2i \\ x_4 = -i; \quad y_4 = +2i. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \gamma) \text{ (I)} \quad x^2 - y^2 = 9 \\ \text{ (II)} \quad \underline{x + y = 9.} \end{array} \quad \delta) \text{ (I)} \quad x^2 - y^2 = 27$$

Für (I) gesetzt: $(x + y)(x - y) = 9$
 Hierin (II) eingesetzt: $9(x - y) = 9$

$$\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \text{(II)} \quad \underline{x + y = 9} \end{array}$$

Durch Addition: $2x = 10$
 Ergebnis: $x = 5$
 $y = 4.$

$$\begin{array}{l} (x + y)(x - y) = 27 \\ (x + y) \cdot 3 = 27 \\ x + y = 9 \\ \underline{x - y = 3} \end{array}$$

Ergebnis: $2x = 12$
 $x = 6$
 $y = 3.$

$$\begin{array}{l} \varepsilon) \text{ (I)} \quad x^2 + y^2 = 25 \\ \text{ (II)} \quad \underline{x + y = 7} \end{array} \quad \zeta) \text{ (I)} \quad x^2 + y^2 = 25$$

Aus (II): $y = 7 - x$ Aus (II): $y = x - 1$

In (I): $x^2 + (7 - x)^2 = 25$
 $x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$
 $2x^2 - 14x + 24 = 0$
 $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12}$$

$$= \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Ergebnis: $x_1 = 4; y_1 = 3$
 $x_2 = 3; y_2 = 4.$

In (I): $x^2 + (x - 1)^2 = 25$
 $2x^2 - 2x + 1 = 25$
 $x^2 - x - 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

Ergebnis: $x_1 = 4; y_1 = 3$
 $x_2 = -3; y_2 = -4.$

Beispiele zu c):

Man löst die lineare Gleichung nach einer der beiden Unbekannten auf und setzt den gefundenen Wert in die andere (quadratische) Gleichung ein. Man erhält so eine quadratische Gleichung mit nur einer Unbekannten. Aus der großen Zahl der verschiedensten Beispiele hierfür mögen folgende herausgegriffen sein:

$$\begin{array}{l} \alpha) \text{ (I)} \quad 2x^2 - 3y^2 = 29 \\ \text{ (II)} \quad \frac{x}{y} = 4 \end{array}$$

$$\text{Aus (II): } x = 4y$$

$$\begin{array}{l} \text{In (I): } 32y^2 - 3y^2 = 29 \\ 29y^2 = 29 \\ y^2 = 1 \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } \begin{array}{l} y_1 = +1; y_2 = -1 \\ x_1 = +4; x_2 = -4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta) \text{ (I)} \quad x^2 + xy + y^2 = 4 \\ \text{ (II)} \quad x + 2y = 2 \end{array}$$

$$\text{Aus (II): } x = 2 - 2y$$

$$\begin{array}{l} (2 - 2y)^2 + (2 - 2y)y + y^2 = 4 \\ 3y^2 - 6y = 0 \\ 3y(y - 2) = 0 \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } \begin{array}{l} y_1 = 0; y_2 = 2 \\ x_1 = 2; x_2 = -2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \gamma) \text{ (I)} \quad x(x + y) = 20 \\ \text{ (II)} \quad 2x + 3y = 11 \end{array}$$

$$\text{Aus (II): } y = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x$$

$$\text{In (I): } x \left(x + \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x \right) = 20$$

$$x \left(\frac{x}{3} + \frac{11}{3} \right) = 20$$

$$x^2 + 11x - 60 = 0$$

$$\begin{array}{l} x_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} + 60} \\ = -\frac{11}{2} \pm \frac{19}{2} \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } x_1 = 4; x_2 = -15$$

$$y_1 = 1; y_2 = \frac{41}{3}$$

$$\begin{array}{l} \delta) \text{ (I)} \quad 4x^2 - y = 90 \\ \text{ (II)} \quad 4x - y = 10 \end{array}$$

$$\text{(I-II): } 4x^2 - 4x = 80$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 80}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$$\text{Ergebnis: } x_1 = 5; x_2 = -4$$

$$y_1 = 10; y_2 = -26$$

Aufgaben:

$$238) \begin{array}{l} x + y = 15 \\ xy = 56 \end{array}$$

$$239) \begin{array}{l} x + y = 5,4 \\ xy = 2 \end{array}$$

$$240) \begin{array}{l} x + y = 2\frac{1}{2} \\ xy = 1 \end{array}$$

$$241) \begin{array}{l} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{array}$$

$$242) \begin{array}{l} y - x = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{3}{16} \end{array}$$

$$243) \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 37 \\ x + y = 7 \end{array}$$

$$244) \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 37 \\ x - y = 5 \end{array}$$

$$245) \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 50 \\ xy = 7 \end{array}$$

$$246) \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 65 \\ x^2 - y^2 = 63 \end{array}$$

$$247) \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 23 \\ x + y = 23 \end{array}$$

$$248) \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{array}$$

$$249) \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 15 \\ xy = 4 \end{array}$$

- 250) $x^2 + y^2 = a^2$ 253) $x^2 + y^2 = 29$ 256) $3x^2 + y = 15$
 $x - y = 0$ $2x + 3y = 16$ $2x - y = 1$
- 251) $x^2 - y^2 = a^2$ 254) $x^2 - xy + y^2 = 7$ 257) $3x^2 = 2y$
 $x - y = a$ $2x - y = 1$ $y - x = 4$
- 252) $x^2 + y^2 = 2a^2$ 255) $3x^2 + y^2 = 117$
 $xy = a^2$ $\frac{x}{y} = 2$

258) Zwei Zahlen, die sich um 21 unterscheiden, haben das geometrische Mittel 10. Wie lauten diese beiden Zahlen?

Anleitung: Das geometrische Mittel m zweier Zahlen x und y bestimmt man aus $m = \sqrt{xy}$ oder $m^2 = x \cdot y$.

259) Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 10; das geometrische Mittel ist 8. Welches sind diese beiden Zahlen?

260) Das arithmetische Mittel zweier Zahlen beträgt 10, während das harmonische Mittel derselben beiden Zahlen 9,6 ist. Wie lauten diese beiden Zahlen?

Anleitung: Zu 2 Zahlen x und y ist das:

$$\text{Arithmetische Mittel: } m_1 = \frac{1}{2}(x + y)$$

$$\text{Harmonische Mittel: } m_2 = \frac{2xy}{x + y}$$

261) Zwei Zahlen haben das geometrische Mittel: $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ und das harmonische Mittel: $\frac{1}{3}$. Welches sind diese Zahlen?

262) Die Diagonale eines Rechteckes mit dem Flächeninhalt von 60 cm^2 ist 13 cm lang. Wie lang sind die beiden Rechteckseiten?

263) In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Summe der Katheten 71 cm . Die Hypotenuse ist 61 cm lang. Wie groß sind die Katheten?

264) Zwei Kräfte P_1 und P_2 , von denen die 2. um 10 kg größer als die 1. ist, wirken in aufeinander senkrechter Richtung nach der nebenstehenden Skizze. Ihnen wird durch eine 3. Kraft P_3 das Gleichgewicht gehalten. Die Summe der 3 Kräfte beträgt 120 kg . Wie groß sind die 3 Kräfte?

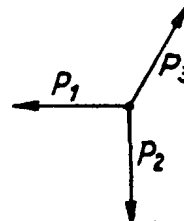


Bild 57

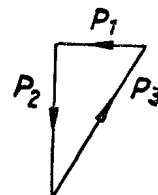


Bild 58

Anleitung: Die 3 im Gleichgewicht befindlichen Kräfte P_1 , P_2 und P_3 lassen sich durch das nebenstehende rechtwinklige Dreieck darstellen, dessen Seitenlängen der Größe der Kräfte entsprechen.

Lehrsatz des Pythagoras anwenden!

- 265) An einem Punkt greifen 2 senkrecht zueinander gerichtete Kräfte P_1 und P_2 an, von denen die eine um 7 kg größer als die andere ist. Ihre Resultierende (= Mittelkraft) beträgt $R = 17$ kg. Wie groß sind P_1 und P_2 ?

Anleitung: Die 3 Kräfte P_1 , P_2 und R bilden das nebenstehende, schraffierte rechtwinklige Dreieck.

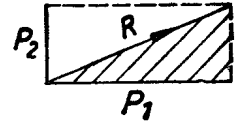


Bild 59

- 266) Das genormte Papierformat A 0 ist das Ausgangsformat für die üblichen Papiergrößen, wie sie für Geschäftsbriefe, Betriebsvordrucke, Zeichnungen, Zeitschriften, Buchformate, Postkarten usw. verwendet werden.

Das Normformat A 0 ist eine rechteckige Fläche von 1 m^2 Inhalt. Seine Seiten stehen ebenso, wie die aller Formate, im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$. Wie groß sind die beiden Seiten des Formates A 0?

- 267) Eine Linse hat die Brennweite $f = 24$ cm. Auf ihrer Achse befindet sich ein leuchtender Punkt. Das Bild dieses Punktes ist $a = 150$ cm von der Lichtquelle entfernt. Wie groß sind die Bild- und die Gegenstandsweite?

Anleitung: Vergleiche Aufgabe 137 auf S. 207.
Ferner setze man $a = b + g$.

- 268) Zu Vergleichsmessungen der Stärke zweier Lichtquellen bedient man sich neben anderen des Bunsenschen Fettfleckphotometers. Bei ihm wird ein kleiner weißer Schirm aus durchscheinendem Papier, in dessen Mitte sich ein Fettfleck befindet, auf beiden Seiten von je einer Lichtquelle in senkrechter Richtung beleuchtet. Man stellt die bestrahlte Fläche in einer solchen Entfernung von den beiden Lichtquellen auf, daß sich der Fettfleck nicht mehr von dem durchscheinenden Papier abhebt. In dieser Stellung verhalten sich die Lichtstärken I_1 und I_2 der beiden Leuchten wie die Quadrate der Entfernungen des Schirmes von den Lichtquellen?

Es betrage der Abstand der beiden Lichtquellen voneinander 2 m. Ihre in Hefnerkerzen gemessenen Lichtstärken verhalten sich wie 1 zu 9. Wie weit ist die stärkere Lichtquelle von dem Transparenzschirm entfernt?

- 269) 2 Drähte ergeben hintereinander geschaltet einen Widerstand von 15Ω . Bei Parallelschaltung der beiden Drähte beträgt der Widerstand $3\frac{1}{3} \Omega$. Wie groß sind die beiden Widerstände?

- 270) In einem Gleichstromkreise ist ein Widerstand von 55Ω eingeschaltet. Die Leistung des Stromerzeugers beträgt 220 W. Wie groß ist die Stromstärke und die Spannung?

Anleitung: Leistung = Spannung \times Stromstärke.
Widerstand = Spannung : Stromstärke.

- 271) Aus einer Kreisfläche mit dem Durchmesser D soll ein konzentrischer Kreis so ausgestanzt werden, daß die übrigbleibende Kreisringfläche

gleich der Hälfte des Ursprungskreises ist. Wie groß muß der Durchmesser des auszustanzenden Kreises werden?

Anleitung: Kreisinhalt $= \frac{1}{4} \pi D^2$.

272) Wie groß ist die Hälfte der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den beiden gleich großen Katheten D ?

(Man vergleiche dieses Ergebnis mit dem der vorhergehenden Aufgabe!)

2. Zeichnerische Lösungsverfahren

Durch die im vorhergehenden Abschnitt behandelten rechnerischen Lösungsverfahren für die Gleichungen erhält man, sofern es sich um lineare oder quadratische Gleichungen handelt, stets ein oder mehrere Ergebnisse. Bei kubischen Gleichungen und solchen noch höheren Grades — aber auch schon bei quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten — versagen die angeführten rechnerischen Lösungsmethoden. Bisweilen sind solche Gleichungen nur unter Anwendung schwieriger Rechenkniffe aufzulösen¹⁾. An ihrer Stelle benutzt man einfacher graphische (= zeichnerische) Lösungsverfahren und erhält hierdurch schnell Ergebnisse, die zwar wegen der mit einer Zeichnung unter Umständen verbundenen Ungenauigkeit und wegen der beschränkten Ablesegenauigkeit auf dem Millimeterpapier nur Näherungswerte ergeben, die aber für die Mehrzahl der in der Technik auftretenden Fälle vollauf genügen.

Eine Gleichung 1. Grades mit einer Unbekannten, z. B. $3x - 2 = 0$, kann man unter Einführen einer 2. Unbekannten y als eine sog. Funktionsgleichung (s. S. 188) auffassen, indem man sie in der Form: $3x - 2 = y$ schreibt und untersucht, für welche Werte von x die Unbekannte $y = 0$ ist, d. h., man muß die sog. „Nullstellen“ der Funktionsgleichung bestimmen (die Schnittpunkte der Kurve mit der x -Achse). Der gefundene Wert für x ist dann die Lösung der gegebenen Gleichung. Die Unbekannte x , der man bei einer solchen Untersuchung beliebige Werte geben kann, nennt man die unabhängige Veränderliche, während die Unbekannte y die abhängige Veränderliche²⁾ heißt; denn zu jedem Wert der beliebig zu wählenden Veränderlichen x gehört ein bestimmter Wert der abhängigen Veränderlichen y .

Um eine Funktionsgleichung zeichnerisch darzustellen, fertigt man zunächst eine sog. Wertetabelle an, die beispielsweise für die Gleichung: $y = 3x - 2$ folgendermaßen aussieht:

| | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|---|---|---|----|----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | -8 | -5 | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |

¹⁾ Unzerlegbare allgemeine Gleichungen 5. und höheren Grades lassen sich überhaupt nicht mehr rechnerisch exakt, d. h. mit Hilfe von Wurzelzeichen lösen. (Beweis stammt von dem norwegischen Mathematiker Abel.)

²⁾ Statt des Wortes: „Veränderliche“ sagt man auch „Variable“ (lateinisch: *variatio* = die Veränderung).

Man setzt in die gegebene Funktionsgleichung der Reihe nach für x bestimmte Zahlenwerte ein und rechnet den jeweils zugehörigen Wert für y aus. Die zueinander gehörenden Wertepaare für x und y stehen in der Wertetabelle untereinander.

Sodann fertigt man nach dieser Wertetabelle ein Bild oder eine sog. graphische Darstellung dieser Funktion an. Ein solches Bild heißt eine Schaulinie oder Kurve der Funktion. Man benutzt hierfür 2 einander rechtwinklig sich schneidende Geraden; das sog. Kartesische Koordinatenkreuz.¹⁾ Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden, die man die Koordinatenachsen oder auch kurz die Achsen nennt, ist der Nullpunkt oder der Koordinaten-Ursprungspunkt 0. Die waagrecht liegende Achse heißt die x -Achse oder Abszissenachse. Die senkrechte Achse heißt die y -Achse oder Ordinatenachse. Bei der Darstellung der komplexen Zahlen (S. 160ff.) hatten wir bereits ein Koordinatenkreuz kennengelernt. Während dort auf der Abszissenachse die reellen Zahlen und auf der Ordinatenachse die imaginären Zahlen abgebildet wurden, werden hier beide Achsen nur für die Darstellung reeller Zahlen verwendet. Auch hier wird die Zeichenebene in 4 Quadranten I...IV unterteilt. Jedem Wertepaar x, y der obigen Wertetabelle entspricht ein Punkt der Ebene mit den Koordinaten x und y . Beispielsweise stellt sich das Wertepaar $x = 2; y = 4$ durch den Punkt A dar, der von der y -Achse 2 Einheiten und von der x -Achse 4 Einheiten entfernt ist. Das Wertepaar $x = 0; y = -2$ wird durch den auf der y -Achse gelegenen Punkt B dargestellt. Dem Wertepaar $x = -1; y = -5$ entspricht der im III. Quadranten liegende Punkt C mit den Koordinaten $x = -1$ und $y = -5$. Verbindet man die 3 Punkte A, B und C miteinander, so erhält man eine gerade Linie. Sie ist das Schaubild der Funktion $y = 3x - 2$. Auf ihr liegen auch sämtliche andere Wertepaare x, y der obigen Wertetabelle. Uns interessiert, wie eingangs erwähnt, zu erfahren, für welchen Wert von x die Unbekannte y gleich 0 ist. Dies ist der Schnittpunkt der gefundenen Geraden mit der x -Achse. Er ist vom Nullpunkt $\frac{2}{3}$ Einheiten entfernt. Der Wert $x = \frac{2}{3}$ ist die Lösung der linearen Gleichung $3x - 2 = 0$.

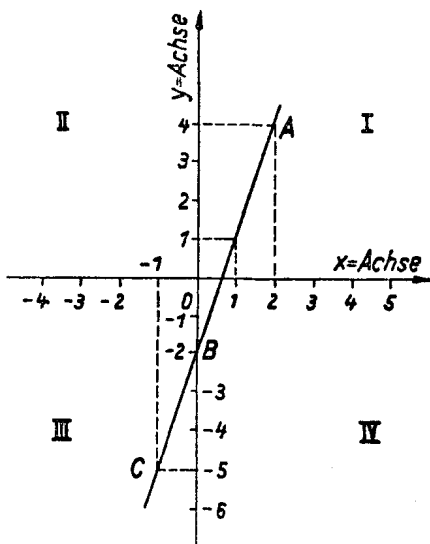


Bild 60

¹⁾ Das Koordinatenkreuz wurde von Descartes (Cartesius) eingeführt (vgl. S. 14)

Beispiele:

für die zeichnerische Darstellung linearer Funktionen und der Lösung linearer Gleichungen.

a) Gegebene Gleichung: $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Wertetabelle:

| | | | | | | | |
|---|----------------|----|---------------|---|---------------|---|---------------|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ |

Der Schnittpunkt der durch die gegebene Gleichung dargestellten Geraden mit der x-Achse hat die Koordinaten

$$x = -2; y = 0.$$

Die Gleichung

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0$$

hat die Lösung:

$$x = -2.$$

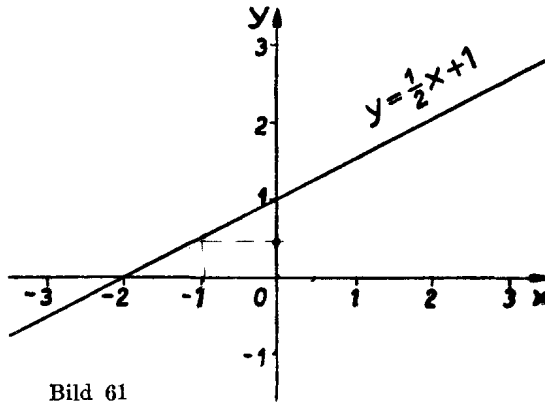


Bild 61

b) Gegebene Gleichung:

$$y + 2x = 4.$$

Die gegebene Gleichung formt man so um, daß auf der linken Seite nur die abhängige Veränderliche y steht; also:

$$y = -2x + 4.$$

Wertetabelle:

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 4 | 2 | 0 | -2 |

Die Wertetabelle braucht nur 2 oder 3 Werte der unabhängig Veränderlichen x zu enthalten.

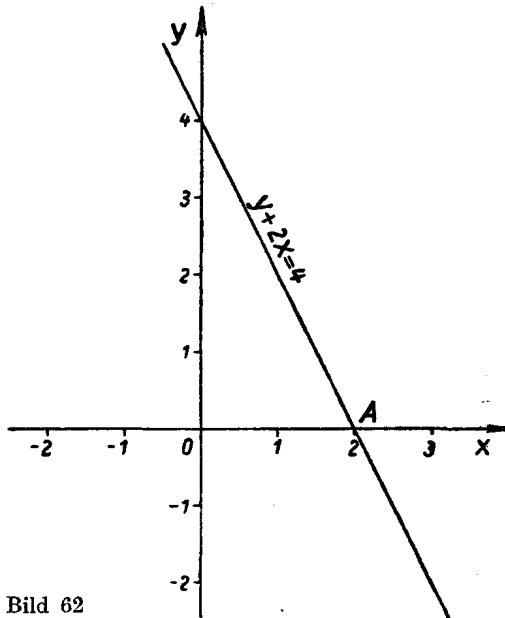


Bild 62

Im Bild 62 schneidet die Gerade:

$$y + 2x = 4$$

die x -Achse in dem Punkt A mit den Koordinaten

$$x = 2; y = 0.$$

Die Gleichung

$$-2x + 4 = 0$$

hat die Lösung:

$$x = 2.$$

c) Gegebene Gleichung:

$$y = 2x - 4.$$

Wertetabelle:

| | | | |
|---|----|----|----|
| x | 0 | 1 | 3 |
| y | -4 | -2 | +2 |

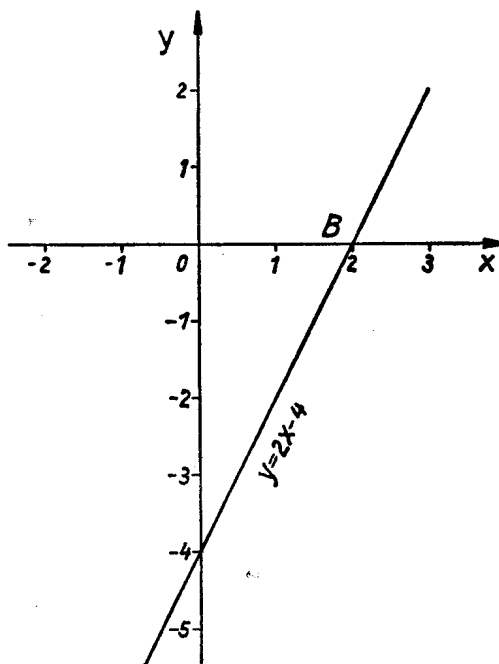


Bild 63

Der auf der x -Achse liegende Punkt B hat die Abszisse:

$$x = 2 \text{ (Bild 63).}$$

Die Lösung der Gleichung:

$$2x - 4 = 0$$

lautet:

$$x = 2.$$

d) Gegebene Gleichung:

$$y = -4x - 1.$$

Wertetabelle:

| | | |
|---|----|----|
| x | -1 | 0 |
| y | +3 | -1 |

Der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse hat die Koordinaten:

$$x = -0,25; y = 0.$$

Die Gleichung:

$$-4x - 1 = 0$$

hat die Lösung:

$$x = -0,25.$$

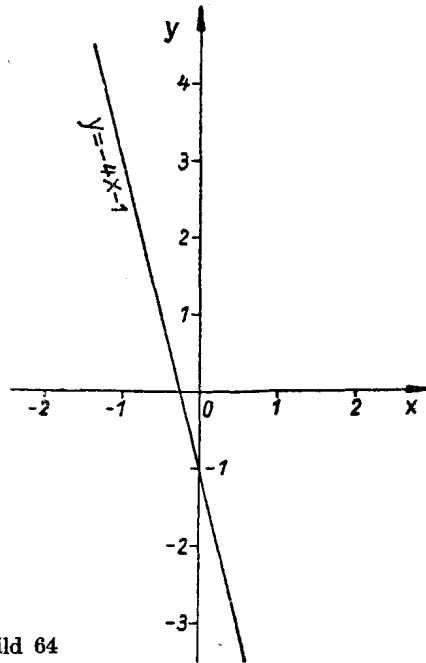


Bild 64

e) Gegebene Gleichung:

$$y = 3x.$$

Wertetabelle:

| | | | |
|---|----|---|----|
| x | -1 | 0 | +1 |
| y | -3 | 0 | +3 |

Da die durch die Gleichung bestimmte Gerade durch den Nullpunkt geht, hat die Gleichung:

$$3x = 0$$

die Lösung:

$$x = 0.$$

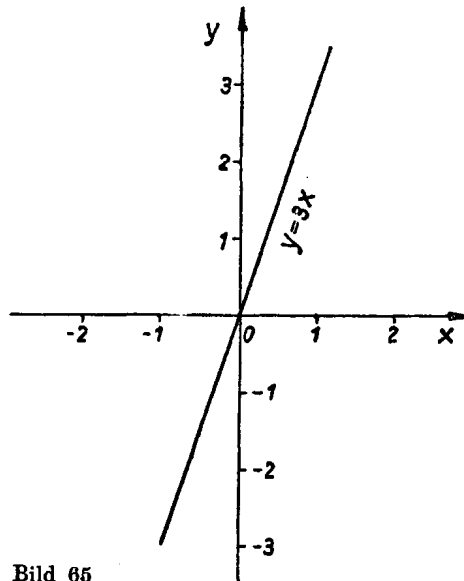


Bild 65

f) Gegebene Gleichung:

$$y = -\frac{1}{4}x.$$

Wertetabelle:

| | | | |
|---|---------------|---|----------------|
| x | -2 | 0 | +2 |
| y | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ |

Auch diese Gerade geht durch den Nullpunkt.

Die Gleichung:

$$-\frac{1}{4}x = 0$$

hat die Lösung:

$$x = 0.$$

g) Die Gleichung:

$$y = 2$$

stellt sich im rechtwinkligen Koordinatenkreuz als die im Abstände 2 zur x-Achse laufende Parallele dar. Jeder Punkt auf dieser Parallelen hat die Ordinate

$$y = 2.$$

h) Die graphische Darstellung von

$$x = 3$$

ist die Parallele zur y-Achse im Abstände 3. Jeder Punkt auf ihr hat die Abszisse

$$x = 3.$$

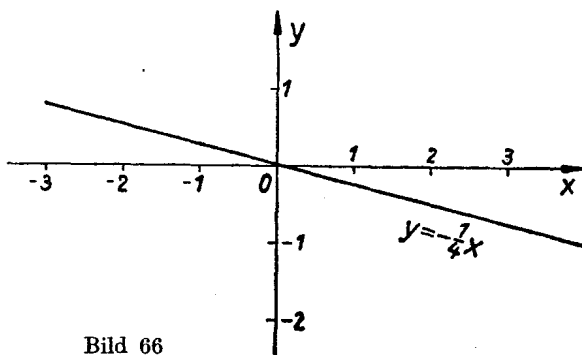


Bild 66

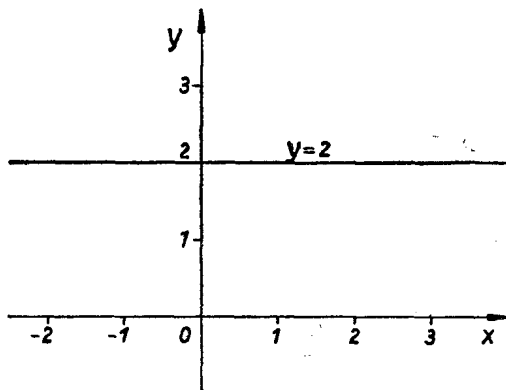


Bild 67

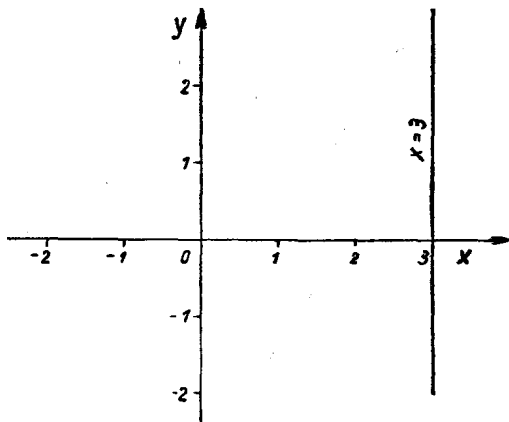


Bild 68

Aufgaben:

Folgende Funktionsgleichungen sind zeichnerisch darzustellen. In welchen Punkten schneiden die ermittelten Geraden die x-Achse?

- 273) $y - x = 3$ 277) $2x - 4y = 5$ 281) $\frac{x}{y+2} = 1$
- 274) $x - y = 2$ 278) $\frac{y}{x} = 2$. 282) $(y+1):(x-1) = 2$
- 275) $y + \frac{1}{2}x = 1$ 279) $x:y = 3$
- 276) $2y + 4x = 3$ 280) $\frac{y+2}{x} = 4$

Für die graphische Lösung linearer Gleichungen mit 2 Unbekannten hat man jede der beiden gegebenen linearen Gleichungen als eine gerade Linie darzustellen und hierdurch die Koordinaten des Schnittpunktes P der beiden gefundenen Geraden festzustellen. Der Schnittpunkt P liegt sowohl auf der einen als auch auf der anderen Geraden. Seine Koordinaten x und y erfüllen beide Gleichungen. Sie sind das gesuchte Lösungspaar.

Beispiele:

a) Welche Werte der Unbekannten x und y sind die auf zeichnerischem Wege sich ergebenden Lösungen der beiden Gleichungen:

(I) $y = x + 1$

(II) $y = -2x + 7$.

Wertetabelle für Gleichung (I):
 $y = x + 1$

| | | | |
|---|----|---|---|
| x | -1 | 0 | 1 |
| y | 0 | 1 | 2 |

Wertetabelle für Gleichung (II):
 $y = -2x + 7$

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 |
| y | 5 | 3 | 1 |

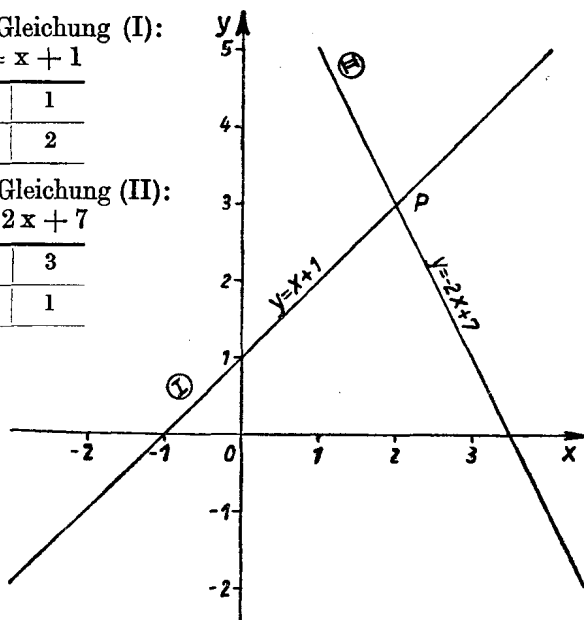


Bild 69

Die beiden Geraden schneiden sich nach Bild 69 in dem Punkt P, der die Koordinaten $x = 2$ und $y = 3$ hat. Diese Werte für x und y sind die Lösungen der beiden gegebenen Gleichungen.

b) Es sind auf zeichnerischem Wege die Lösungen der beiden nachstehenden Gleichungen zu bestimmen:

$$(I) \quad x + y = 6$$

$$(II) \quad y = x + 6.$$

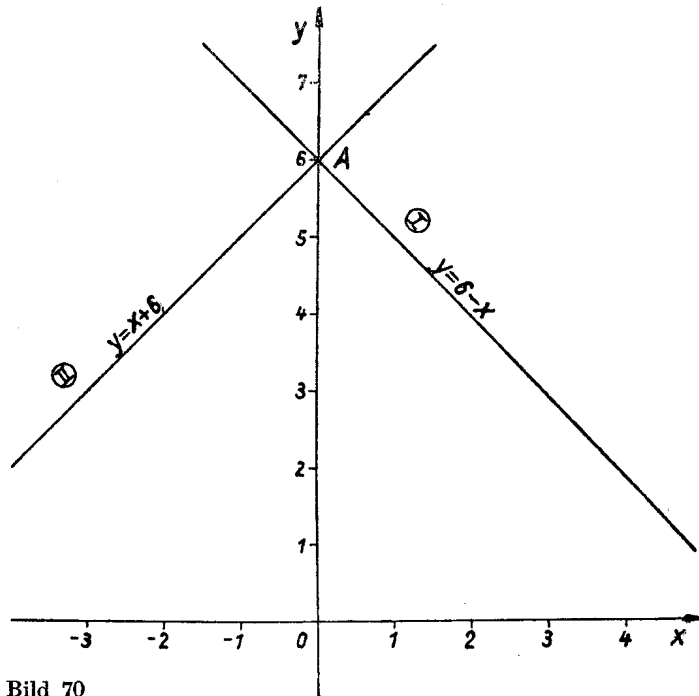


Bild 70

Zur rechnerisch bequemen Aufstellung der beiden Wertetabellen bringt man die Gleichung (I) auf eine Form, bei der auf der linken Seite nur y steht; d. h. man löst die Gleichung nach y auf.

$$(Ia) \quad y = -x + 6$$

$$(II) \quad y = x + 6.$$

Wertetabelle für Gleichung (Ia):

| x | -1 | 2 | 4 |
|---|----|---|---|
| y | 7 | 4 | 2 |

Wertetabelle für Gleichung (II):

| x | -3 | -1 | 1 |
|---|----|----|---|
| y | 3 | 5 | 7 |

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt A mit den Koordinaten $x = 0$; $y = 6$. Dies sind die Lösungen der beiden gegebenen Gleichungen.

- c) Die Gleichungen (I) $4x = 2y$
 (II) $x = y - 1$ sind zeichnerisch zu lösen.

Beide Gleichungen nach y aufgelöst, ergibt:

- (Ia) $y = 2x$
 (IIa) $y = x + 1$.

Wertetabelle für Gleichung (Ia):

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|----|---|---|---|
| y | -2 | 0 | 2 | 4 |

Wertetabelle für Gleichung (IIa):

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|----|---|---|---|
| y | 0 | 1 | 2 | 3 |

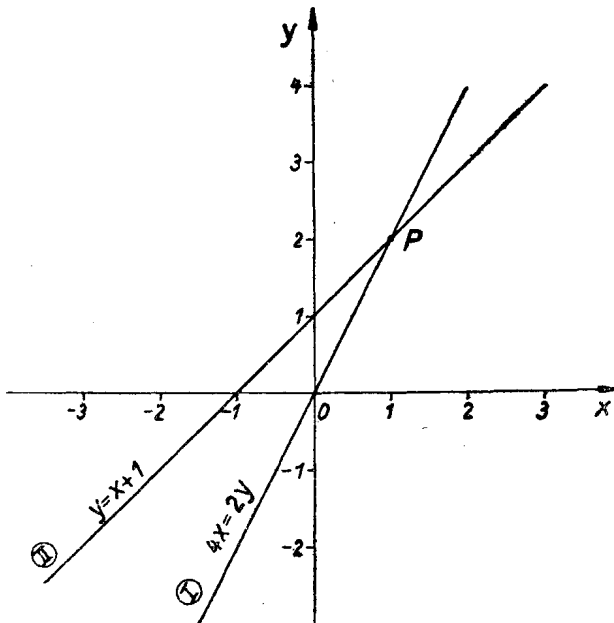


Bild 71

Die beiden nach diesen Wertetabellen gezeichneten Geraden schneiden sich im Punkt P mit den Koordinaten $x = 1$; $y = 2$.

Die Lösungen sind: $x = 1$; $y = 2$.

- d) Die durch die Gleichungen

- (I) $y = x + 2$
 (II) $y = x - 3$

dargestellten Geraden sind parallel und haben somit keinen Schnittpunkt. Es gibt für diese beiden Gleichungen kein Lösungspaar.

Die beiden gegebenen Gleichungen widersprechen sich. (Siehe Seite 208 unter 2.).

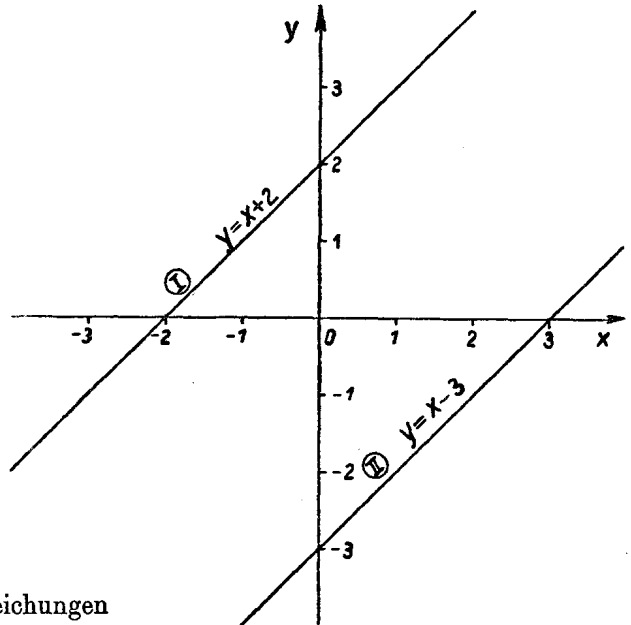


Bild 72

e) Die beiden Gleichungen

$$(I) \quad y = 2x$$

$$(II) \quad 2y = 4x$$

stellen sich zeichnerisch (Bild 73) durch ein und dieselbe Gerade dar. Ein Schnittpunkt ist somit nicht vorhanden. Beide Geraden haben unendlich viele Punkte gemeinsam, da sie sich überdecken. Es gibt also unendlich viele Lösungspaare, die beide Gleichungen erfüllen! (vgl. Seite 208).

z. B. $x = y = 0$
 $x = 1, y = 2$
 $x = 2, y = 4$
 usw.

Die Gleichungen (I) und (II) sind voneinander abhängig; denn (II) ist aus (I) durch Multiplikation mit dem Faktor 2 entstanden.

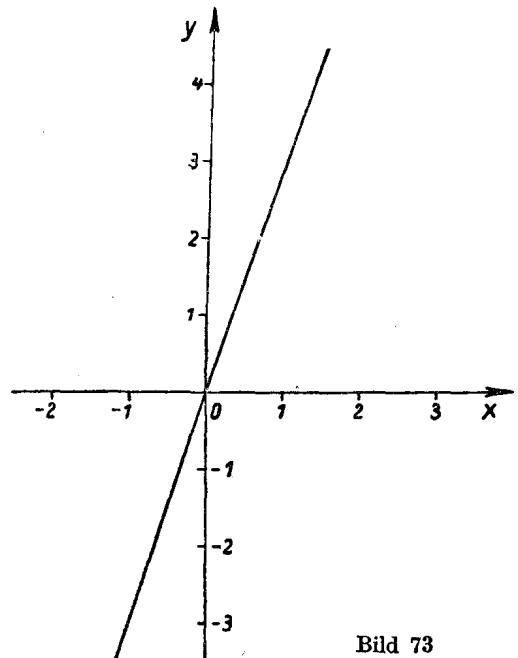


Bild 73

Aufgaben:

Welches sind die Lösungen der nachstehenden linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten:

- 283) $y + 2x = 0$ 285) $y - x = 4$ 287) $x + 2y = 5$
 $3x - 2y = 7$ $x - 2y = -5$ $3x + 6y = 15$
- 284) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ 286) $y - 3 = 2x$
 $x - y = 2$ $2x - y = 7$

Als weitere Übungsaufgaben werden die Aufgaben Nr. 138...149 auf S. 211, Nr. 150...161 auf S. 212 und Nr. 162...173 auf S. 214 zur zeichnerischen Lösung empfohlen.

Graphische Lösung quadratischer Gleichungen

Im Gegensatz zu den linearen Gleichungen, die, wie vorhergehend gezeigt wurde, sich zeichnerisch als gerade Linien darstellen, sind die Schaubilder der Gleichungen 2. Grades Kurven.

Die nachstehende zeichnerische Darstellung der Funktionsgleichung $y = x^2$ ergibt die quadratische Einheitsparabel.

Wertetabelle für $y = x^2$:

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Die Einheitsparabel geht durch den Nullpunkt und liegt symmetrisch zur y-Achse. Sie berührt die x-Achse im Nullpunkt mit ihrem sog. Scheitel. Die y-Achse ist die Symmetrielinie dieser Parabel. Sie heißt die Achse der Einheitsparabel (Bild 74.)

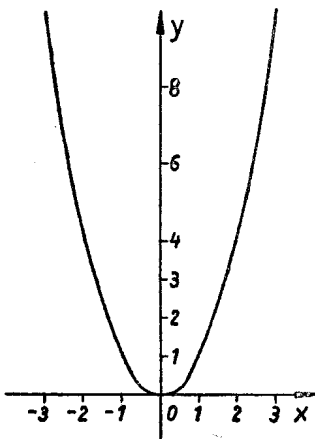


Bild 74

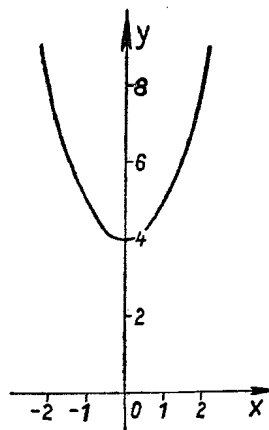


Bild 75

Zeichnerische Darstellung (Bild 75) der Funktionsgleichung 2. Grades:

$$y = x^2 + 4.$$

Wertetabelle für $y = x^2 + 4$:

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|---|---|---|----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 13 | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 13 |

Diese Parabel geht nicht durch den Nullpunkt. Sie liegt ebenfalls symmetrisch zur y -Achse. Ihr Scheitel hat die Koordinaten $x = 0$; $y = 4$.

Die Parabel des Bildes 74 ist um 4 Einheiten nach oben hin im Sinne der positiven Richtung der y -Achse verschoben.

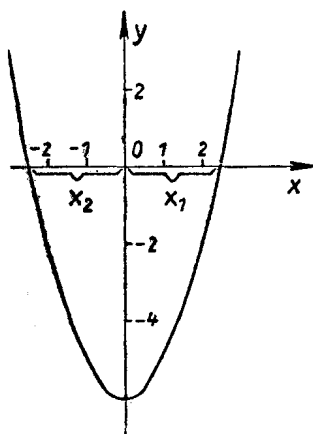


Bild 76

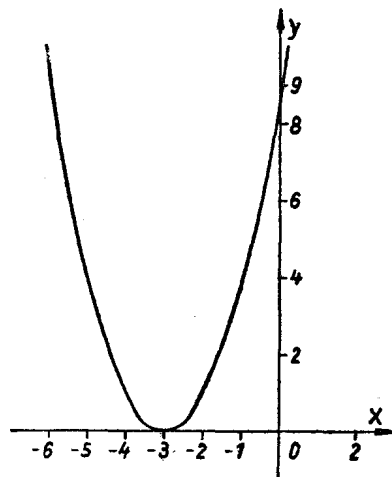


Bild 77

Die Gleichung $y = x^2 - 6$ ergibt als Schaubild Bild 76, die um 6 Einheiten nach unten hin verschobene Einheitsparabel, die die x -Achse in zwei zum Nullpunkt symmetrisch gelegenen Punkten in den Abständen $x_1 = +2,45 = +\sqrt{6}$ und $x_2 = -2,45 = -\sqrt{6}$ schneidet. Ihr auf der y -Achse liegender Scheitel hat die Ordinate $y = -6$.

Die graphische Darstellung der Gleichung: $y = (x + 3)^2$ ergibt die Parabel nach Bild 77

Wertetabelle für $y = (x + 3)^2$

| | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|---|
| x | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
| y | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Die Einheitsparabel des Bildes 74 ist um 3 Einheiten nach links im Sinne der negativen Richtung der x -Achse verschoben. Ihr Scheitel hat die Abszisse -3 .

Die in Bild 78 dargestellte Gleichung $y = (x - 2)^2$ ergibt dementsprechend die Einheitsparabel, die um 2 Einheiten nach rechts hin verschoben ist und deren Scheitel auf der x -Achse liegt und vom Nullpunkt um 2 Einheiten entfernt ist. Die Achse dieser Parabel (gestrichelt gezeichnet) liegt parallel zur y -Achse.

Die Gleichung $y = (x - 2)^2 + 1$ ($= x^2 - 4x + 5$) stellt sich auf Grund der sich ergebenden

Wertetabelle für $y = (x - 2)^2 + 1$

| | | | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 10 | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 | 10 |

als eine Einheitsparabel dar, die in Richtung der positiven x -Achse um 2 Einheiten verschoben ist und deren Scheitel eine Einheit oberhalb der x -Achse liegt (Bild 79).

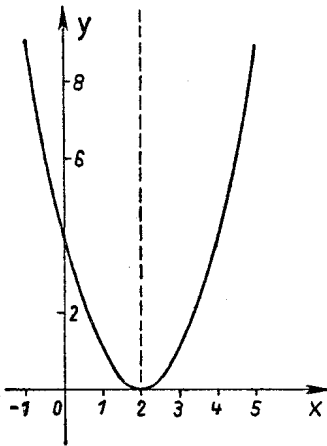


Bild 78

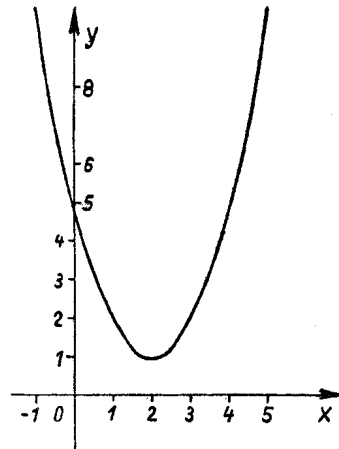


Bild 79

Um die Gleichung $y = x^2 + 6x + 7$ auf eine ähnliche Form wie die vorhergehende Gleichung zu bringen, formt man die rechte Seite durch Hinzuzählen und gleichzeitiges Abziehen der quadratischen Ergänzung $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ (s. S. 222) um:

$$y = x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7$$

$$y = (x + 3)^2 - 2.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, daß die sich ergebende Parabel (Bild 80) eine Einheitsparabel ist, deren Scheitel die Koordinaten $x = -3$; $y = -2$ hat und deren Achse der y -Achse parallel ist.

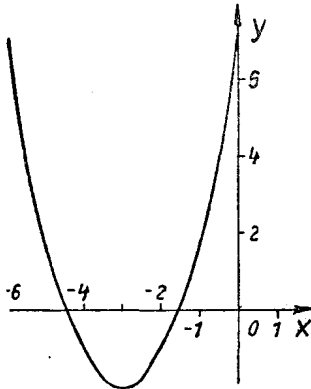


Bild 80

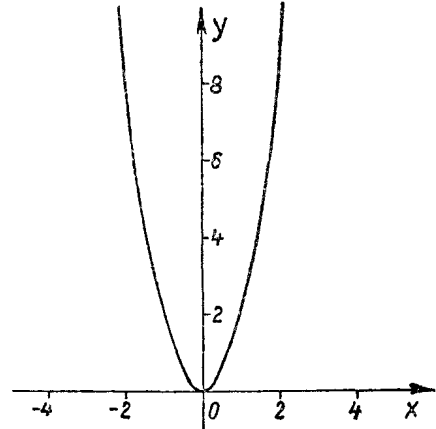


Bild 81

In den vorstehenden 7 Bildern 74...80 ist stets die Einheitsparabel in irgendeiner Lage dargestellt. Diese 7 Parabeln sind deckungsgleich.

Die durch die Gleichung $y = 2x^2$ dargestellte Parabel — Bild 81 — hat einen steileren Verlauf. Sie ist in Richtung der y -Achse gestreckt.

Wertetabelle für $y = 2x^2$

| | | | | | |
|---|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |

Der Verlauf der Parabel wird flacher für die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ (Bild 82).

Wertetabelle für $y = \frac{1}{2}x^2$

| | | | | | |
|---|----|----|---|---|---|
| x | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 |
| y | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |

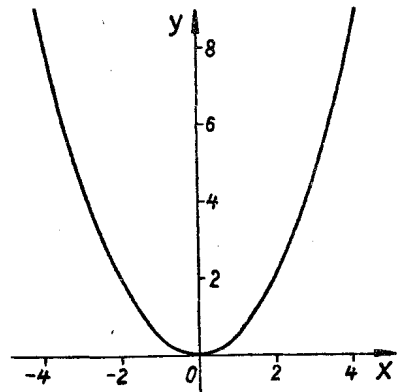


Bild 82

Die beiden letzten Abbildungen zeigen, daß die Form der Parabel durch die Beizahl des Gliedes x^2 beeinflußt wird. Je nachdem die Beizahl größer oder kleiner als 1 ist, hat die Parabel einen steileren oder flacheren Verlauf.

Für die zeichnerische Lösung quadratischer Gleichungen kann man eine der folgenden 3 graphischen Lösungsmethoden anwenden:

1. Punktweise Parabelkonstruktion mittels Wertetabelle:

Die gegebene quadratische Gleichung bringt man auf die Nullform; d. h. alle Glieder werden auf die linke Seite der Gleichung gebracht, so daß auf der rechten Seite nur noch 0 steht.

Beispiel:

Die Gleichung $x^2 + 8 = 6x$

lautet in der Nullform: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Man setzt die linke Seite dieser auf die Nullform gebrachten quadratischen Gleichung gleich y und erhält somit eine nach y aufgelöste oder explizite Funktionsgleichung. (Im Gegensatz zu dieser Form nennt man eine Funktion, die nicht nach y aufgelöst ist — z. B.: $x^2 - y + 6x = 7$ — eine implizite Funktion.)

Im Beispiel erhält man die explizite quadratische Funktion:

$$y = x^2 - 6x + 8.$$

Für diese Gleichung stellt man die Wertetabelle auf.

Wertetabelle für $y = x^2 - 6x + 8$:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | 8 | 3 | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 |

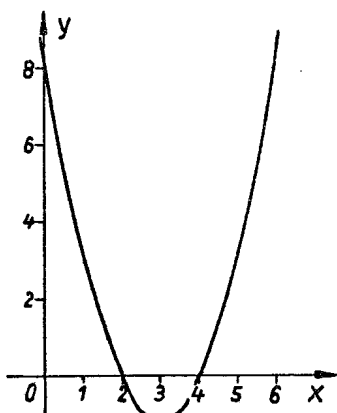


Bild 83

Sodann zeichnet man die erhaltenen Wertepaare dieser Tabelle als Punkte in der Ebene des x - y -Koordinatenkreuzes. Die Verbindungslinie dieser Punkte ergibt eine Parabel. Man bestimmt aus der Zeichnung die Stellen, an denen die Parabel die x -Achse schneidet. Dort ist $y = 0$. Die beiden Abszissenwerte $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ sind die beiden Lösungen der gegebenen quadratischen Gleichung (Bild 83).

Bezüglich der Lage der Parabel sind verschiedene Fälle möglich:

- a) Die Parabel schneidet die x -Achse in 2 verschiedenen Punkten. Die quadratische Gleichung hat 2 verschiedene reelle Lösungen.

Beispiel:

Die Lösung der Gleichung:

$$x^2 + 1,5x = 1$$

ist zeichnerisch in Bild 84 dargestellt.

$$x_1 = 0,5$$

$$\text{und } x_2 = -2$$

sind die Abszissen der Schnittpunkte der Parabel:

$$y = x^2 + 1,5x - 1$$

mit der x -Achse und somit auch die beiden Lösungen. Hier ist $D > 0$ (vgl. Seite 223).

b) Die Parabel berührt die x -Achse. Die quadratische Gleichung hat zwei zusammenfallende Lösungen.

Beispiel:

$$x^2 + 9 = 6x$$

$$x_{1,2} = 3$$

ist die Abszisse des Berührungspunktes (Bild 85). Hier ist $D = 0$ (vgl. Seite 223).

c) Die Parabel liegt mit allen ihren Punkten oberhalb der x -Achse. Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung, sondern nur 2 imaginäre.

Beispiel:

$$x^2 + 4 = 0.$$

Die beiden imaginären Lösungen lauten:

$$x_1 = +2i$$

$$x_2 = -2i.$$

Die Parabel hat mit der x -Achse weder einen Schnittpunkt, noch berührt sie diese (Bild 86). Hier ist $D < 0$ (vgl. Seite 223).

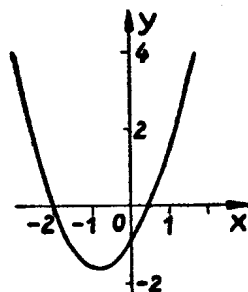


Bild 84

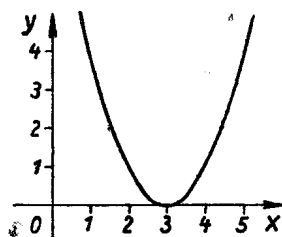


Bild 85

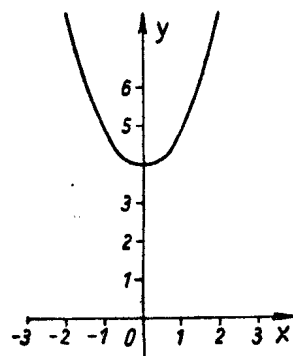


Bild 86

2. Zeichnen der Einheitsparabel $y = x^2$ und Parallelverschieben in eine bestimmte Lage:

Für die Durchführung dieser graphischen Lösungsmethode zeichnet man sich die Einheitsparabel $y = x^2$ (Seite 245 Bild 74) auf durchsichtiges Milli-

meterpapier und legt dieses in einer bestimmten Lage über ein aufgezeichnetes Koordinatenkreuz. Man stellt sodann fest, in welchen Punkten die Parabel von der x -Achse des Kreuzes geschnitten wird.

Beispiele:

a) $x^2 - 4 = 0.$

Die beiden Lösungen sind $x_1 = +2$ und $x_2 = -2$. Es sind dies die Abszissenwerte der Schnittpunkte der Einheitsparabel mit der x -Achse des Koordinatenkreuzes. Die auf Transparentpapier gezeichnete Einheitsparabel liegt ähnlich der in Bild 76 auf Seite 246. Sie ist um 4 Einheiten nach unten hin verschoben.

b) $x^2 + 4 = 4x.$

Man bringt die Gleichung auf die Nullform und erhält:

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Die linke Seite wird als Quadrat geschrieben:

$$(x - 2)^2 = 0.$$

Die auf Transparentpapier gezeichnete Einheitsparabel ist um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Sie liegt dann so, wie das Bild 78 auf Seite 247 zeigt. Sie berührt die x -Achse in dem Punkt mit der Abszisse $x = +2$. Dies ist die Lösung.

c) $x^2 - 4x + 1 = 0.$

Man nimmt folgende Umformungen vor:

Man zählt die quadratische Ergänzung zu den beiden ersten Gliedern zu und zieht sie gleichzeitig wieder ab:

$$x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 1 = 0$$

oder $(x - 2)^2 - 3 = 0.$

Die Einheitsparabel ist um 2 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach unten hin zu verschieben (vgl. Bilder 79 und 80 auf Seite 247 u. 248).

Sie schneidet dann die x -Achse in zwei Punkten mit den Abszissen $x_1 = 3,7$ und $x_2 = 0,3$. Dies sind die Lösungen der quadratischen Gleichung.

3. Schnittpunktsbestimmung der Einheitsparabel $y = x^2$ mit einer geraden Linie:

Bei der gegebenen quadratischen Gleichung bringt man auf die linke Seite nur das Glied x^2 und auf die rechte Seite die übrigen Glieder.

Beispiel:

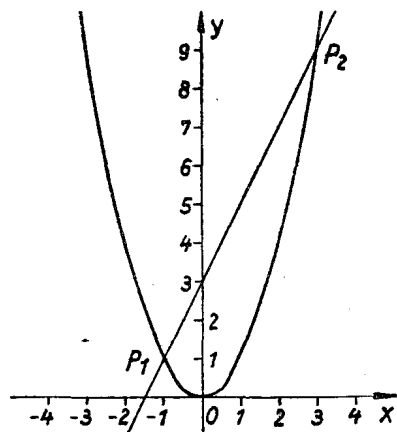
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 = 2x + 3.$$

Die linke Seite setzt man gleich y_1 ; also: $y_1 = x^2$.

Die rechte Seite setzt man gleich y_2 ; also: $y_2 = 2x + 3$.

Man zeichnet nun die gerade Linie $y_2 = 2x + 3$ und stellt durch Überdecken mit der auf Transparentpapier gezeichneten Einheitsparabel $y_1 = x^2$ fest, in welchen Punkten sich die gerade Linie mit ihr schneidet. Es ist zu untersuchen, für welche x -Werte $y_1 = y_2$ ist oder, anders ausgedrückt, für welche Abszissenwerte x die Einheitsparabel und die gerade Linie dieselben Ordinaten y haben (Bild 87).



Die beiden Schnittpunkte sind mit P_1 und P_2 bezeichnet. In diesen beiden Punkten haben sowohl die Einheitsparabel, als auch die gerade Linie den gleichen Ordinatenwert. In P_1 beträgt

Bild 87

er: $y_1 = 1$ und in P_2 : $y_2 = 9$. Wesentlich ist aber die Größe der Abszissenwerte der Schnittpunkte. Sie betragen für P_1 : $x_1 = -1$ und für P_2 : $x_2 = 3$ und sind die Lösungen der gegebenen quadratischen Gleichung.

Zum Üben dieses Verfahrens noch einige weitere

Beispiele:

a)
$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Diese Gleichung umgeformt lautet $x^2 = 3x - 2$. Man setzt: $y_1 = x^2$ und $y_2 = 3x - 2$ und untersucht die Schnittpunkte der geraden Linie $y_2 = 3x - 2$ mit der Einheitsparabel $y_1 = x^2$. Als Abszissenwerte der Schnittpunkte, die gleichzeitig die Lösung der gegebenen quadratischen Gleichung sind, liest man ab: $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

b)
$$x^2 - 9 = 0.$$

Man hat die Gerade $y_2 = 9$ mit der Einheitsparabel $y_1 = x^2$ zum Schnitt zu bringen. Die Gerade $y_2 = 9$ ist die in dem Abstände von 9 Einheiten zur x -Achse gezogene Parallele. Die Abszissenwerte der Schnittpunkte lauten: $x_1 = +3$ und $x_2 = -3$ und sind die gesuchten Lösungen.

c)
$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Die Gleichung der aufzuzeichnenden geraden Linie lautet: $y = 6x - 9$. Man stellt fest, daß sie die Einheitsparabel: $y = x^2$ nicht in 2 Punkten schneidet. Sie berührt sie nur in dem Punkt mit der Abszisse: $x = 3$; d. h. die gegebene quadratische Gleichung hat nur die eine Lösung; $x = 3$.

d)
$$x^2 - 6x + 10 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung, da die Einheitsparabel: $y = x^2$ von der Geraden: $y = 6x - 10$ in keinem Punkte geschnitten oder berührt wird.

Aufgaben:

Auf zeichnerischem Wege sind die auf Seite 227 Nr. 198...217 angeführten Aufgaben, soweit dies möglich ist, zu lösen.

Graphische Lösung kubischer Gleichungen

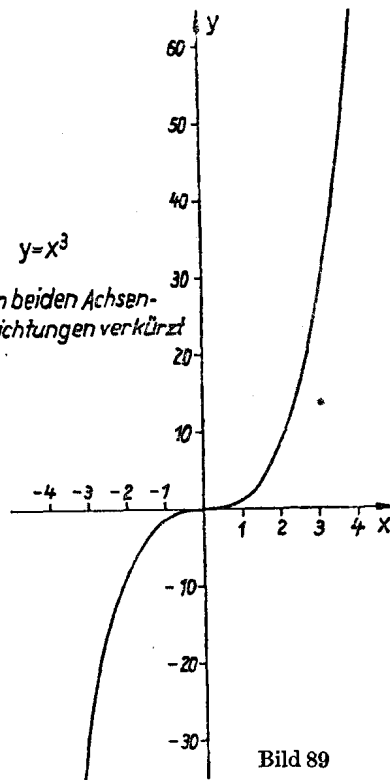
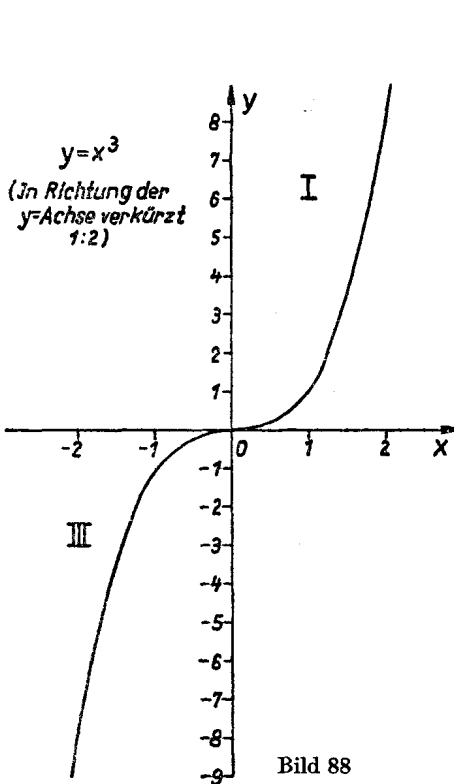
Wie auf Seite 189 schon gesagt wurde, besitzt eine kubische Gleichung mit einer Unbekannten x drei Lösungen.

Verschiedene Möglichkeiten:

- a) Alle 3 Lösungen sind reell und verschieden.
- b) 2 reelle Lösungen fallen zusammen, die 3. ist davon verschieden.
- c) Alle 3 Lösungen sind reell und fallen zusammen.
- d) Eine Lösung ist reell, die anderen beiden sind konjugiert komplex.

Entsprechend der Gleichung der quadratischen Einheitsparabel $y = x^2$ (Seite 245) lautet die Gleichung der kubischen Einheitsparabel $y = x^3$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|-----|----|----|----------------|-----------------|---|----------------|---------------|---|---|----|
| x | -3 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
| y | -27 | -8 | -1 | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{64}$ | 0 | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 | 8 | 27 |



Nach der Wertetabelle für $y = x^3$ (Seite 253) ergibt sich eine Kurve (Bilder 88 u. 89), deren sämtliche Punkte im I. und III. Quadranten liegen. Diese kubische Einheitsparabel hat im Vergleich mit der quadratischen Einheitsparabel einen ähnlichen Verlauf, wenn man sich den im III. Quadranten liegenden Teil der kubischen Einheitsparabel in den II. Quadranten hochgeklappt vorstellt.

Der Leser zeichne sich das Bild der kubischen Einheitsparabel auf durchsichtiges Millimeterpapier, um es anschließend bei der Lösung kubischer Gleichungen verwenden zu können. Es empfiehlt sich hierbei, die Maßstäbe der Achsen, wie es in den beiden vorstehenden Bildern 88 und 89 durchgeführt ist, zu verkürzen.

Die Verfahren der zeichnerischen Lösung kubischer Gleichungen werden nachstehend an Hand einiger einfacher Beispiele erklärt.

Beispiele:

a) Die kubische Gleichung: $x^3 - 4x = 0$ ist zeichnerisch zu lösen.

Auf der linken Seite der gegebenen Gleichung läßt man nur das kubische Glied x^3 stehen, während auf die rechte Seite alle übrigen Glieder — hier ist es nur das lineare Glied — gebracht werden. Man schreibt also: $x^3 = 4x$ und setzt: (I) $y_1 = x^3$

$$(II) \quad y_2 = 4x.$$

Es ist dann zu untersuchen, für welche x -Werte $y_1 = y_2$ ist.

Man zeichne die durch Gleichung (II) gegebene gerade Linie, die durch den Nullpunkt läuft, und lege über diese Zeichnung die auf durchsichtiges Millimeterpapier gezeichnete kubische Einheitsparabel. Man beachte aber hierbei, daß die Maßstäbe für die Koordinatenachsen beider Zeichnungen gleich groß gewählt werden müssen!

Die Abszissen x_1 und x_2 der Schnittpunkte P_1 und P_2 der kubischen Einheitsparabel mit der Geraden (Bild 90) sind 2 der gesuchten Lösungen der gegebenen Gleichung; denn die beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 haben gemeinsame Ordinaten y . Der 3. Schnittpunkt ist der Nullpunkt mit den Koordinaten $x = 0$; $y = 0$.

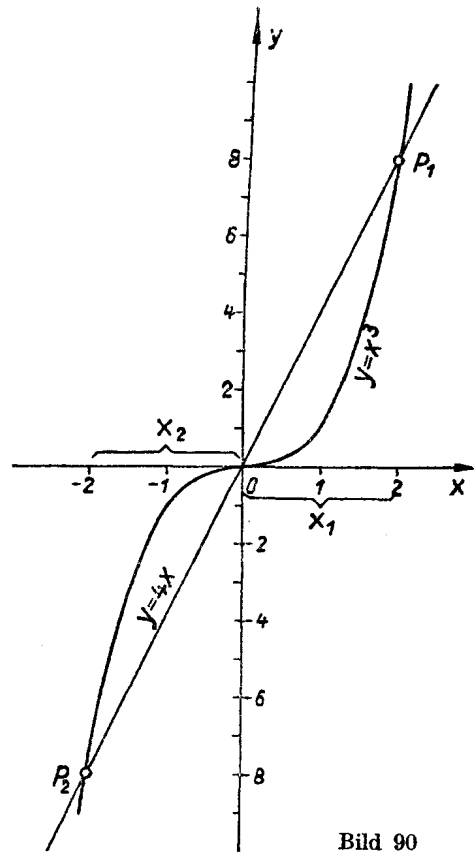


Bild 90

Die 3 reellen Lösungen der gegebenen kubischen Gleichung:

$$x^3 - 4x = 0 \quad \text{lauten: } x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 0 \quad (\text{Fall a., S. 253})$$

b) Um die x -Werte der Gleichung:

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

zeichnerisch zu bestimmen, bringt man alle Glieder bis auf x^3 auf die rechte Seite der Gleichung und schreibt also: $x^3 = -3x + 4$.

Man setzt: (I) $y_1 = x^3$
 (II) $y_2 = -3x + 4$.

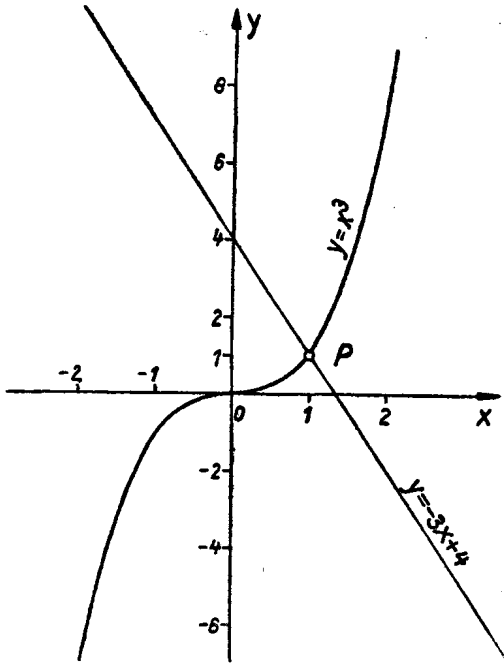


Bild 91

Die zeichnerische Untersuchung hat wieder das Ziel festzustellen, für welche x -Werte $y_1 = y_2$ ist.

Gleichung (I) ist die auf durchsichtiges Millimeterpapier gezeichnete kubische Einheitsparabel. Gleichung (II) stellt sich zeichnerisch als die Gerade dar, die wegen des negativen Koeffizienten von x ($= -3$) nach rechts hin abfällt und die wegen des absoluten Gliedes ($+4$) nicht durch den Nullpunkt hindurchgeht, sondern in Richtung der y -Achse um 4 Einheiten nach oben hin verschoben ist. Durch Überdeckung der Parabel über die Gerade erhält man Bild 91. Es ergibt sich nur ein Schnittpunkt P, der die gemeinsame Abszisse $x = 1$ hat. Die gegebene Gleichung $x^3 + 3x - 4 = 0$ hat nur eine reelle Lösung; nämlich $x = 1$. Die beiden anderen Lösungen sind konjugiert komplex (Fall d, Seite 253).

c) Die Aufgabe: $x^3 - 3x - 2 = 0$ schreibt man in der Form: $x^3 = 3x + 2$ und setzt:

$$(I) \quad y_1 = x^3$$

$$(II) \quad y_2 = 3x + 2.$$

Hier ist die durch Gleichung (I) gegebene kubische Einheitsparabel über die gerade Linie (II) $y_2 = 3x + 2$ zu legen. Diese Gerade steigt wegen des positiven Koeffizienten von x nach rechts hin an und ist wegen des positiven Freigliedes ($+2$) in Richtung der y -Achse um 2 Einheiten vom Nullpunkt aus gerechnet nach oben hin verschoben.

Durch Überdeckung der beiden im gleichen Maßstab gezeichneten Koordinatenkreuze erhält man nebenstehendes Bild 92. Man sieht, daß sich die beiden Kurven in dem Punkte P_1 mit der Abszisse $x_1 = 2$ schneiden und daß sie sich in dem Punkte P_2 mit der Abszisse $x_2 = -1$ berühren.

$x_1 = 2$ und $x_{2,3} = -1$ sind die drei reellen Lösungen der gegebenen kubischen Gleichung:

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Anmerkung: Der 3. reelle Lösungswert fällt in dieser Aufgabe mit dem Wert $x_2 = -1$ zusammen. Der Berührungspunkt einer Geraden (hier: Punkt P_2) kann als zwei unendlich nahe liegende Schnittpunkte oder im Grenzfall als zwei zusammenfallende Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve betrachtet werden (Fall b, S. 253.).

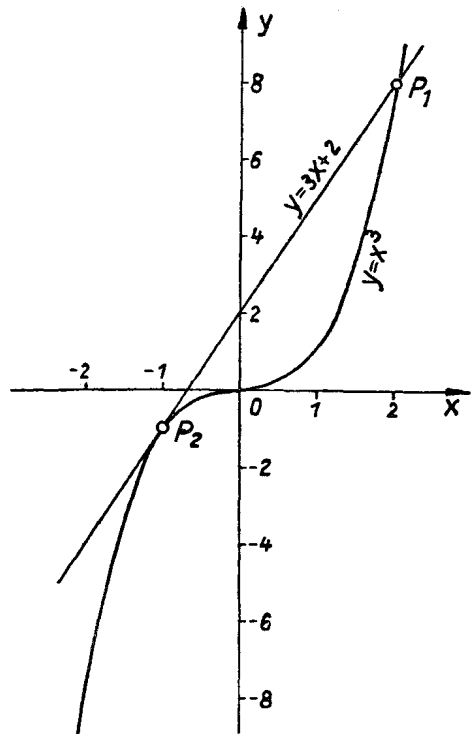


Bild 92

d) Zur zeichnerischen Lösung der Aufgabe:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

bringt man wiederum alle Glieder bis auf das kubische auf die rechte Seite und schreibt somit: $x^3 = x^2 + 2x$.

Man setzt:

$$(I) \quad y_1 = x^3$$

$$(II) \quad y_2 = x^2 + 2x$$

und hat zu untersuchen, für welche Werte der Veränderlichen x die beiden y -Werte einander gleich sind. Die Gleichung (II) stellt sich hier als die quadratische Einheitsparabel $y_2 = x^2 + 2x$ dar, die man nach Aufstellen der zu ihr gehörenden Wertetabelle leicht zeichnen kann.

Wertetabelle für $y = x^2 + 2x$.

| | | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 | 15 |

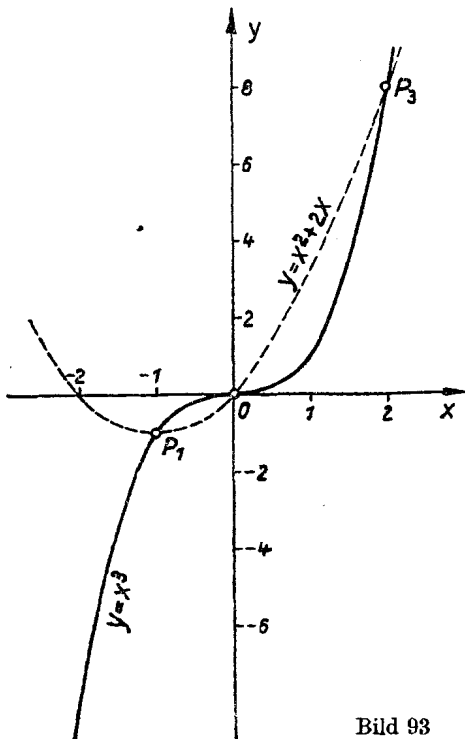


Bild 93

Diese quadratische Einheitsparabel wird, wie aus nebenstehendem Bild 93 ersichtlich ist, von der sie überdeckenden kubischen Einheitsparabel $y = x^3$ in 3 Punkten, nämlich P_1 , dem Nullpunkt 0 und in P_3 geschnitten (Bild 93).

Die Abszissen dieser drei Schnittpunkte, die die Lösungen der gegebenen Gleichung:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

sind, lauten:

$$x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 2.$$

(Fall a, S. 253.)

e) Die kubische Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

löst man zeichnerisch am einfachsten, indem man

a) die Wertetabelle für die Funktionsgleichung

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

aufstellt und

β) die sich hierdurch ergebende allgemeine kubische Parabel aufzeichnet und

γ) die Abszissen x der Schnittpunkte dieser kubischen Parabel mit der x -Achse feststellt. Sie sind die Lösungen der gegebenen Gleichung; denn in den Schnittpunkten ist jedesmal die Ordinate $y = 0$.

Zum leichteren Aufstellen der Wertetabelle bedient man sich zweckmäßig der nachfolgend erklärten, sogenannten

Hornersche Anordnung.

Man schreibt die Beizahlen sämtlicher Glieder mit x^3, x^2, x^1, x^0 nebeneinander hin. (Die Beizahl des Gliedes $x^0 (= 1)$ ist das Freiglied. Fehlt in der gegebenen Gleichung eines dieser Glieder, so hat man die Beizahl 0 aufzuschreiben.)

In der vorliegenden Aufgabe schreibt man also:

$$1 \quad -3 \quad -1 \quad +3.$$

Um festzustellen, welchen Wert y für einen beliebig gewählten Wert x , z. B. $x = 5$, annimmt, multipliziert man die Beizahl von x^3 (im Beispiel: 1) mit 5 und schreibt dieses Produkt ($5 \cdot 1 = 5$) unter die Beizahl des Gliedes mit x^2 , also unter -3 . Man bildet die Summe der untereinanderstehenden Zahlen -3 und 5. Man erhält: $+2$. Das Produkt ($2 \cdot 5 =$) 10 schreibt man unter die Beizahl von x , also unter -1 und erhält als Summe der beiden untereinanderstehenden Zahlen -1 und 10 die Zahl 9. Das Produkt von 9 mal 5, also: 45, kommt unter das Freiglied 3 zu stehen. Die Summe vom Freiglied 3 und dem letzten Produkt 45 ergibt den gesuchten Wert $y = 48$. Das soeben geschilderte Verfahren sieht praktisch so aus:

$$\begin{array}{rcccc} x = (5) & 1 & -3 & -1 & +3 \\ & & 5 & 10 & 45 \\ \hline & & 2 & 9 & (48) \end{array}$$

Für $x = 5$ ist $y = 48$.

Durch wiederholtes Durchführen dieses Verfahrens erhält man:

$$\begin{array}{rcccc} x = (4) & 1 & -3 & -1 & +3 \\ & & 4 & 4 & 12 \\ \hline x = (3) & & 1 & 3 & (15) \\ & & 3 & 0 & -3 \\ \hline x = (2) & & 0 & -1 & (0) \\ & & 2 & -2 & -6 \\ \hline x = (1) & & -1 & -3 & (-3) \\ & & 1 & -2 & -3 \\ \hline x = (-1) & & -2 & -3 & (0) \\ & & -1 & 4 & -3 \\ \hline x = (-2) & & -4 & 3 & (0) \\ & & -2 & 10 & -18 \\ \hline x = (-3) & & -5 & 9 & (-15) \\ & & -3 & 18 & -51 \\ \hline x = (-4) & & -6 & 17 & (-48) \\ & & -4 & 28 & -108 \\ \hline & & -7 & 27 & (-105) \end{array}$$

In der vorstehenden Anordnung ist die erste Zahlenreihe der Beizahlen aus Vereinfachungsgründen nur einmal am Kopf der Aufstellung geschrieben. Die zusammengehörenden x - und y -Werte sind durch Einklammern gekennzeichnet; z. B.: (4) und (15) oder (3) und (0) oder (2) und (-3) usw.

Somit ergibt sich folgende Wertetabelle für $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$:

| | | | | | | | | | | |
|---|------|-----|-----|----|---|---|----|---|----|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | -105 | -48 | -15 | 0 | 3 | 0 | -3 | 0 | 15 | 48 |

und die hiernach gezeichnete Kurve (Bild 94).

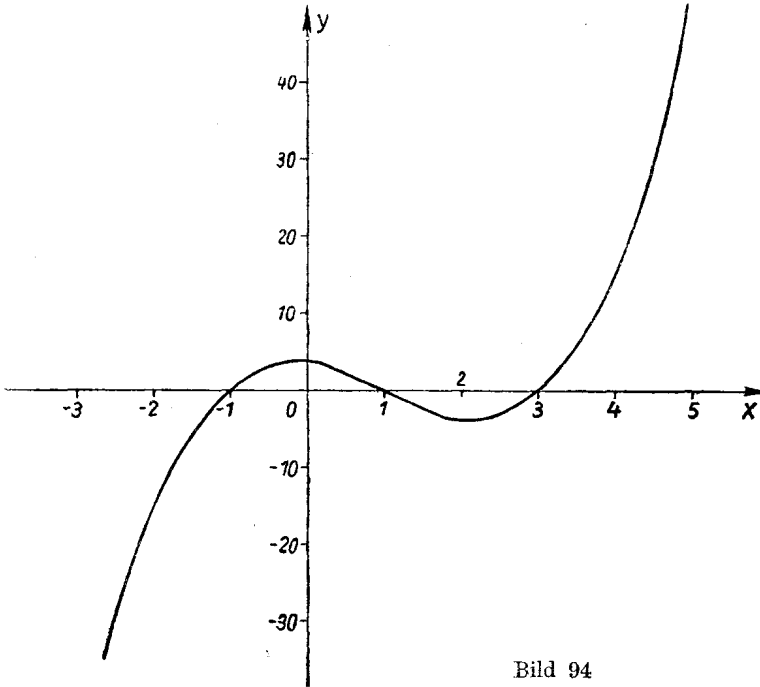


Bild 94

Aus der obigen Wertetabelle kann man schon die Lösungen der gegebenen Gleichung ablesen; sie betragen: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$, weil die hierzu gehörenden y -Werte gleich 0 sind.

Die zeichnerische Darstellung (Bild 94) der Funktionsgleichung

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

verdeutlicht den Verlauf der kubischen Parabel und zeigt die Schnittpunkte mit der x -Achse. Die Abszissen dieser 3 Schnittpunkte sind die 3 Lösungen.

Beweis

für die allgemeine Gültigkeit der Hornerischen Anordnung:

Die gegebene Funktionsgleichung 3. Grades in allgemeiner Form möge lauten:

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Hierin sind die unbestimmten Koeffizienten, die jeden beliebigen positiven oder negativen Wert annehmen können:

$$a \quad b \quad c \quad d.$$

Bei der Bestimmung des Wertes der abhängigen Veränderlichen y für irgendeinen beliebigen Wert der Unabhängigen x hatte man in der vorhergehenden Aufgabe folgendermaßen gerechnet:

$$x = x \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline & ax & s_1 x & s_2 x \\ \hline & s_1 & s_2 & s_3 \end{array}.$$

Hierin bedeutet:

$$\begin{array}{l|l|l} s_1 = ax + b & s_2 = s_1 x + c & s_3 = s_2 x + d \\ & = (ax + b)x + c & = (ax^2 + bx + c)x + d \\ & = ax^2 + bx + c & = ax^3 + bx^2 + cx + d. \end{array}$$

Der Wert der letzten Summe s_3 ist also tatsächlich gleich dem gegebenen

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Auf dieselbe Art läßt sich die Gültigkeit der Hornerischen Anordnung auch für Funktionsgleichungen höheren Grades beweisen.

f) Die Gleichung:

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$$

ist zeichnerisch unter Zuhilfenahme der Hornerischen Anordnung zu lösen

Lösung:

Man setzt $y = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$

und untersucht, für welche x -Werte die abhängige Veränderliche $y = 0$ ist.

| | | | | |
|------------|---|----|-----|-------|
| $x = (-4)$ | 2 | 1 | -13 | 6 |
| | | -8 | 28 | -60 |
| $x = (-3)$ | | -7 | 15 | (-54) |
| | | -6 | 15 | -6 |
| $x = (-2)$ | | -5 | 2 | (0) |
| | | -4 | 6 | 14 |
| $x = (-1)$ | | -3 | -7 | (20) |
| | | -2 | 1 | 12 |
| $x = (1)$ | | -1 | -12 | (18) |
| | | 2 | 3 | -10 |
| $x = (2)$ | | 3 | -10 | (-4) |
| | | 4 | 10 | -6 |
| $x = (3)$ | | 5 | -3 | (0) |
| | | 6 | 21 | 24 |
| $x = (4)$ | | 7 | 8 | (30) |
| | | 8 | 36 | 92 |
| | | 9 | 23 | (98) |

Wertetabelle:

| | | | | | | | | | |
|---|-----|----|----|----|---|----|---|----|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | -54 | 0 | 20 | 18 | 6 | -4 | 0 | 30 | 98 |

Aus dem nachstehenden Bild 95, das nach der obigen Wertetabelle gefertigt wurde, erkennt man die 3 Schnittpunkte mit der x-Achse und erhält die 3 Lösungen: $x_1 = -3$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 2$.

g) Die auf Seite 256 gelöste kubische Gleichung

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

ist mit Hilfe der Horner-schen Anordnung zu lösen!

Lösung:

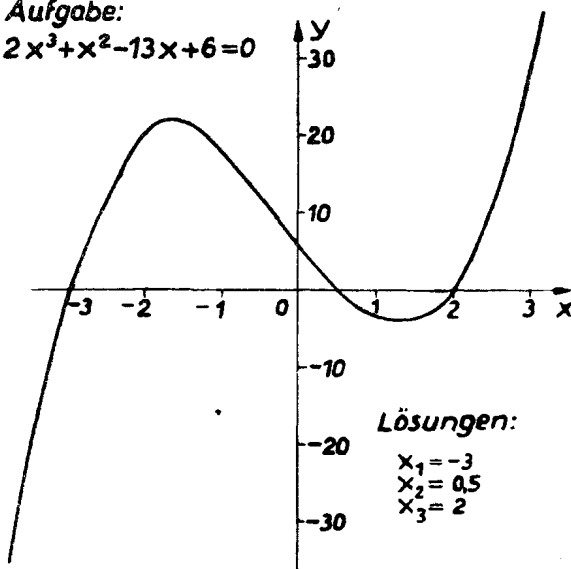
In der Funktionsgleichung 3. Grades:

$y = x^3 - 3x - 2$ fehlt das Glied mit x^2 . Man denke es sich als: $0 \cdot x^2$ geschrieben. Die Funktion würde dann lauten:

$$y = x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x - 2.$$

Aufgabe:

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$$



Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_2 &= 0,5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Bild 95

Die Reihenfolge der Beizahlen ist:

| | | | | |
|------------|--------------|----|----|-------|
| $x = (-3)$ | ¹ | 0 | -3 | -2 |
| | | -3 | 9 | -18 |
| $x = (-2)$ | | -3 | 6 | (-20) |
| | | -2 | 4 | -2 |
| $x = (-1)$ | | -2 | 1 | (-4) |
| | | -1 | 1 | 2 |
| $x = (1)$ | | -1 | -2 | (0) |
| | | 1 | 1 | -2 |
| $x = (2)$ | | 1 | -2 | (-4) |
| | | 2 | 4 | 2 |
| $x = (3)$ | | 2 | 1 | (0) |
| | | 3 | 9 | 18 |
| $x = (4)$ | | 3 | 6 | (16) |
| | | 4 | 16 | 52 |
| | | 4 | 13 | (50) |

Wertetabelle:

| | | | | | | | | |
|---|-----|----|----|----|----|---|----|----|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | -20 | -4 | 0 | -2 | -4 | 0 | 16 | 50 |

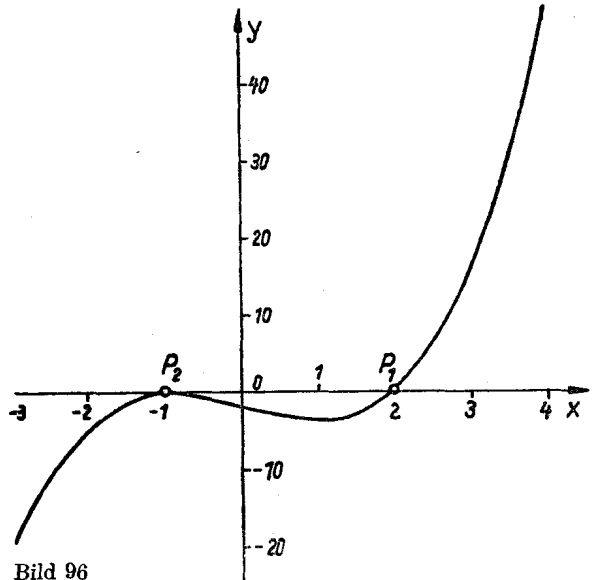


Bild 96

Die in Bild 96 gezeichnete kubische Parabel schneidet die x -Achse in P_1 mit der Abszisse $x_1 = 2$ und berührt die x -Achse in P_2 mit der Abszisse $x_2 = -1$. Die gegebene Gleichung hat die Lösungen:

$$x_1 = 2; \quad x_{2,3} = -1.$$

Im Punkte $x = -1$ fallen 2 Lösungen zusammen, die kubische Parabel berührt die x -Achse in zwei zusammenfallenden Punkten (Fall b, Seite 253).

Aufgaben:

Folgende kubische Gleichungen sind zeichnerisch zu lösen:

288) $4x^3 - 9x = 0$

295) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

289) $x^3 + 2x + 3 = 0$

296) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

290) $x^3 + x = 2$

297) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

291) $x^3 + x + 2 = 0$

298) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

292) $x^3 - 2x = 4$

299) $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$

293) $x^3 - 3x + 2 = 0$

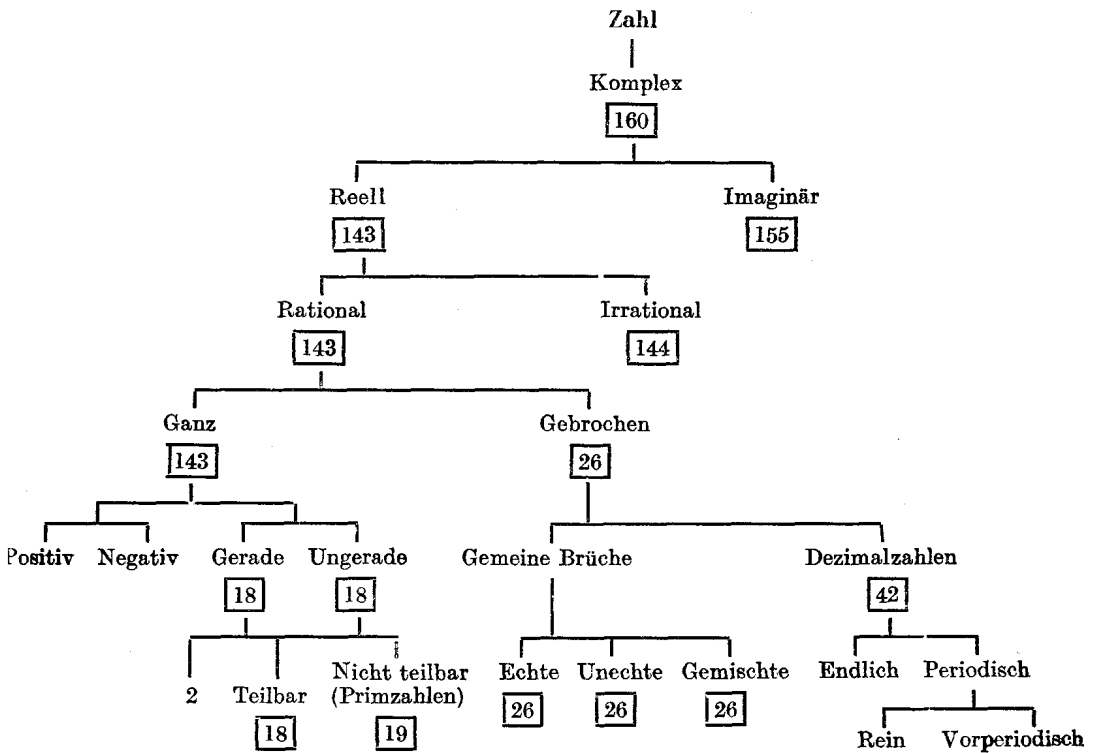
294) $x^3 + 1,5x^2 - x = 0$

300) $x^3 - 9x^2 + 23x = 15$

Anhang

I. Zusammenfassende Übersichten

1. Die Arten der Zahlen



Die Zahlen im weisen auf die Seitenzahl hin, wo die betreffende Zahlenart näher erklärt wurde.

| Rechenoperation | Beispiel | Rechenzeichen | Bezeichnung für die Zahlen | | das Ergebnis | Bemerkungen |
|-----------------|--------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------------|--------------|--|
| | | | 16 | 2 | | |
| Addition | $16 + 2 = 18$ | + plus | Summanden oder Glieder | | Summe | |
| Subtraktion | $16 - 2 = 14$ | - minus | Minuend | Subtrahend oder Glieder | Differenz | Ist der Subtrahend > Minuend, dann ist die Differenz eine negative Zahl. Subtrahend = Minuend, dann ist die Differenz = 0 |
| Multiplikation | $16 \cdot 2 = 32$ | · mal | Multiplikand | Multiplikator oder Faktoren | Produkt | |
| Division | $16 : 2 = 8$ | : durch | Dividend | Divisor oder Teiler | Quotient | Andere Schreibart: $\frac{16}{2} = 8$. 16 heißt Zähler, 2 heißt Nenner Zähler > Nenner, dann unechter Bruch Zähler < Nenner, dann echter Bruch Zähler = Nenner, dann ganze Zahl |
| Potenzierung | $16^2 = 256$ | 16^2 = 16 hoch 2 | Basis oder Grundzahl | Potenzexponent od. Hochzahl | Potenz | Hochzahl 2: Quadratzahlen Hochzahl 3: Kubikzahlen oder Kuben |
| Radizierung | $\sqrt[2]{16} = 4$ | Wurzel aus | Radikand | Wurzel-exponent | Wurzel | Wurzelexponent 2 wird in der Regel nicht geschrieben: $\sqrt{16}$ heißt Quadratwurzel Wurzeln mit dem Wurzelexponenten 3 heißen Kubikwurzeln $\sqrt[3]{27} = 3$ |
| Logarithmierung | ${}^2\log 16 = 4$ | log Logarithmus | Numerus | Logarithmen-basis | Logarithmus | Basis 10: Dekadischer oder Briggscher Logarithmus $\lg 100 = 2$ Basis e: Natürlicher oder Napierscher Logarithmus $\ln 100 = 4,6052$ |

3. Abgeleitete Formeln und Regeln

Bruchrechnung

1) Formveränderungen der Brüche (keine Wertänderung!).

a) Erweitern = Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplizieren: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$.

b) Kürzen = Zähler und Nenner durch ein und dieselbe Zahl dividieren: $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$.

2) Kehrwert oder reziproker Wert von $\frac{a}{b}$ lautet $\frac{b}{a}$, von a lautet $\frac{1}{a}$.

3) Addition und Subtraktion von Brüchen:

a) Gleichnamige Brüche: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$,

b) Ungleichnamige Brüche: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$.

Hauptnenner = kleinstes gemeinsames Vielfach.

4) Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

5) Division von Brüchen:

Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multiplizieren!

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Vorzeichenregeln

Klammerauflösen: $a + (b - c + d) = a + b - c + d$
 $a - (b - c + d) = a - b + c - d.$

Klammersetzen: $+ a x + b x = x(a + b)$
 $- a x - b x = -x(a + b)$
 $+ a x - b x = x(a - b)$
 $- a x + b x = -x(a - b).$

Relative Zahlen:

1) Addition: $(+a) + (+b) = +(a + b)$
 $(-a) + (-b) = -(a + b)$
 $(+a) + (-b) = +(a - b),$ wenn $a > b$
 $= -(b - a),$ wenn $a < b$
 $= 0,$ wenn $a = b$
 $(-a) + (+b) = -(a - b),$ wenn $a > b$
 $= +(b - a),$ wenn $a < b$
 $= 0,$ wenn $a = b.$

- 2) Subtraktion: $(+a) - (+b) = +(a - b)$
 $(+a) - (-b) = +(a + b)$
 $(-a) - (+b) = -(a + b)$
 $(-a) - (-b) = -(a - b)$
- 3) Multiplikation: $(+a) \cdot (+b) = +ab$
 $(-a) \cdot (-b) = +ab$
 $(+a) \cdot (-b) = -ab$
 $(-a) \cdot (+b) = -ab$
- 4) Division: $(+a) : (+b) = +\frac{a}{b}$,
 $(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}$,
 $(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$,
 $(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}$.

Proportionen

(Geometrische) Proportion = Gleichheit zweier Brüche: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

oder, anders geschrieben, $a : b = c : d$.

Außenglieder: a und d ; Innenglieder: b und c .

1) **Produktensatz:** Produkt der Außenglieder = Produkt der Innenglieder.

Aus $a : b = c : d$ folgt: $ad = bc$.

2) **Vertauschungssatz:** Außen- und Innenglieder dürfen unter sich und gegeneinander vertauscht werden;

Aus $a : b = c : d$ folgt:
 $a : c = b : d$
 $d : b = c : a$
 $d : c = b : a$
 $c : d = a : b$ usw.

3) **Bestimmen der 4. Proportionale:**

Aus $a : b = c : d$ folgt: $a = \frac{bc}{d}$, $c = \frac{ad}{b}$,
 $b = \frac{ad}{c}$, $d = \frac{bc}{a}$.

4) **Mittlere Proportionale oder geometrisches Mittel:**

Aus $a : x = x : b$ folgt $x^2 = ab$ oder $x = \sqrt{ab}$.

5) **Korrespondierende Addition und Subtraktion:**

Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$, $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$,
 $\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$, $\frac{ma + nb}{pa - qb} = \frac{mc + nd}{pc - qd}$ usw.

6) Fortlaufende Proportion:

Aus $a : b : c : d = a_1 : b_1 : c_1 : d_1$ folgt $a : b = a_1 : b_1$
 $d : b = d_1 : b_1$
 $c : c_1 = d : d_1$
 $a_1 : a = c_1 : c$ usw.

Potenzrechnung

$a^1 = a$
 $a^2 = a \cdot a$ Unterscheide! $a + a = 2a$
 $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a + a + a = 3a$
 $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ Faktoren}} \quad \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{m \text{ Glieder}} = ma$

1) Potenzexponent = 0:

$a^0 = 1.$

2) Potenzexponent < 0 (also negativ):

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$

$10^{-2} = 0,01.$

3) Gebrochener Potenzexponent:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^{0,5} = \sqrt{a}.$

4) Negative Potenzbasis:

a) Gerader Potenzexponent:

$(-a)^{2m} = a^{2m}$

b) Ungerader Potenzexponent:

$(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$

5) Rechengesetze für Potenzen:

| | Gleichbasige Potenzen | Gleichnamige Potenzen | Gleichbasige und gleichnamige Potenzen |
|----------------|---------------------------|--|--|
| Addition | $a^m + a^n = ?$ | $a^m + b^m = ?$ | $a^m + a^m = 2a^m$ |
| | nicht zu addieren | | |
| Subtraktion | $a^m - a^n = ?$ | $a^m - b^m = ?$ | $a^m - a^m = 0$ |
| | nicht zu subtrahieren | | |
| Multiplikation | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $a^m b^m = (a b)^m$ | $a^m \cdot a^m = a^{2m}$ |
| Division | $a^m : a^n = a^{m-n}$ | $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ | $a^m : a^m = a^0 = 1$ |
| Potenzierung | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | | |

Wurzelrechnung

$$\left(\sqrt[m]{q}\right)^m = q.$$

Quadratwurzel: $\sqrt{a^2} = \pm a.$

Kubikwurzel: $\sqrt[3]{a^3} = a.$

n-te Wurzel: $\sqrt[n]{a^n} = a.$

Rechengesetze für Wurzeln:

| | Wurzeln mit gleichen Radikanden | Wurzeln mit gleichen Exponenten | Wurzeln mit gleichen Radikanden und Exponenten |
|----------------|--|---|---|
| Addition | $\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{a} = ?$ nicht zu addieren | $\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b} = ?$ | $\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{a} = 2 \sqrt[m]{a}$ |
| Subtraktion | $\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{a} = ?$ nicht zu subtrahieren | $\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b} = ?$ | $\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{a} = 0$ |
| Multiplikation | $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$ | $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$ | $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^2}$ |
| Division | $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}$ | $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ | $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^0} = 1$ |
| Potenzierung | $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ | | |
| Radizierung | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ | | |

Imaginäre Zahlen

Einheit der imaginären Zahlen: $i = \sqrt{-1}$

$$\sqrt{-a} = i \sqrt{a}; \quad \sqrt{-a^2} = a i$$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

| | | | |
|-----------------|---------------------|----------------------|------------------|
| Addition: | $i + 2i = 3i;$ | $ai + bi = (a + b)i$ | |
| Subtraktion: | $4i - i = 3i;$ | $ai - bi = (a - b)i$ | |
| Multiplikation: | $4i \cdot 3 = 12i;$ | $2i \cdot 3i = -6$ | |
| Division: | $4i : 2 = 2i;$ | $6 : 3i = -2i.$ | |
| Potenzierung: | $i^0 = +1$ | Allgemein: | |
| | $i^1 = +i$ | $i^5 = +i$ | $i^{4n} = +1$ |
| | $i^2 = -1$ | $i^6 = -1$ | $i^{4n+1} = +i$ |
| | $i^3 = -i$ | $i^7 = -i$ | $i^{4n+2} = -1$ |
| | $i^4 = +1$ | $i^8 = +1$ | $i^{4n+3} = -i.$ |

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahl = Reelle Zahl \pm imaginäre Zahl = $a \pm bi$.

$a + bi$ und $a - bi$ sind konjugiert komplexe Zahlen.

| | |
|-----------------|---|
| Addition: | $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ $(a + bi) + (a - bi) = 2a.$ |
| Subtraktion: | $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ $(a + bi) - (a - bi) = 2bi.$ |
| Multiplikation: | $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$ |
| Division: | $\frac{a + bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot i$ $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$ |
| Potenzierung: | $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$ |
| Radizierung: | $\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$ $\sqrt{a - bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$ |

Logarithmenrechnung

1) Dekadischer oder Briggscher Logarithmus: Basis 10.

$$10^{\lg x} = x$$

$$\lg 10 = 1$$

$$\lg 0 = -\infty$$

$$\lg 2 = 0,3010$$

$$\lg 3 = 0,4771.$$

Natürlicher oder Napierscher Logarithmus: Basis e .

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 0 = -\infty.$$

$$e = 2,7182818\dots$$

$$2) \lg a b = \lg a + \lg b$$

$$3) \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$$

$$4) \lg a^n = n \lg a$$

$$5) \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a$$

$$6) \lg x = M \ln x.$$

$$\text{Modul: } M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,43429.$$

$$\lg a < \ln a.$$

4. Arten und Formen von Gleichungen

a) Identische Gleichungen: z. B.: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Bestimmungsgleichungen: z. B.: $\frac{3x+5}{7} = x - 1$

Funktionsgleichungen: z. B.: $x^2 + y^2 = 1$

b) Lineare Gleichungen: $ax + b = 0.$

Quadratische Gleichungen:

α) Rein quadratisch: $x^2 - b = 0.$

β) In allgemeiner Form: $Ax^2 + Bx + C = 0.$

γ) In der Normalform: $x^2 + ax + b = 0.$

Kubische Gleichungen: $2x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0.$

Gleichungen n-ten Grades: $ax^n + bx^{n-1} + cx^2 + d = 0.$

c) Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten:

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

d) Funktionsgleichungen in

impliziter Form: $2x + 3y = 6$

expliziter Form: $y = 3x - 4.$

Lösungen linearer Gleichungen:

$$x - b = a \text{ ergibt } x = a + b$$

$$x + b = a \quad ,, \quad x = a - b$$

$$bx = a \quad ,, \quad x = \frac{a}{b}$$

$$\frac{x}{b} = a \quad ,, \quad x = ab$$

$$\frac{b}{x} = a \text{ ergibt } x = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{b} \quad ,, \quad x = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad ,, \quad x = \frac{bc}{a}$$

Lösungen quadratischer Gleichungen:

$$x^2 = a \text{ ergibt } x_1 = +\sqrt{a} \text{ und } x_2 = -\sqrt{a}.$$

$$x^2 + a x + b = 0 \text{ ergibt } x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Diskriminante: $\frac{a^2}{4} - b.$

Wurzelgesetz für quadratische Gleichungen:

Die quadratische Gleichung: $x^2 + a x + b = 0$ hat die beiden Lösungen x_1 und x_2 . Es ist dann: $x_1 + x_2 = -a =$ negativer Koeffizient von x
 $x_1 \cdot x_2 = b =$ Freiglied (absolutes Glied).

Satz von Vieta:

Wenn x_1 und x_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + a x + b = 0$ sind, dann ist: $(x - x_1)(x - x_2) = 0.$

Oder: Der quadratische Ausdruck: $x^2 + a x + b$ läßt sich in das Produkt der beiden Linearfaktoren: $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ zerlegen, wobei x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + a x + b = 0$ sind.

II. Das griechische Alphabet

| Griechischer Buchstabe | | Benennung des Buchstabens | Entsprechender deutscher Buchstabe | Griechischer Buchstabe | | Benennung des Buchstabens | Entsprechender deutscher Buchstabe |
|------------------------|-------|---------------------------|------------------------------------|------------------------|-------|---------------------------|------------------------------------|
| groß | klein | | | groß | klein | | |
| A | α | Alpha | A | Ν | ν | Ny (sprich: Nü) | N |
| B | β | Béta | B | Ξ | ξ | Ksi | X, ks |
| Γ | γ | Gámma | G | Ο | ο | Omikron | Ö (kurz) |
| Δ | δ | Délta | D | Π | π | Pi | P |
| E | ε | Epsilon | Ĕ (kurz) | Ρ | ρ | Rho | R |
| Z | ζ | Zéta | Z, ds | Σ | σ, ς | Sigma | S |
| H | η | Etá | Ē (lang) | Τ | τ | Tau | T |
| Θ | θ | Théta | Th | Υ | υ | Ypsilon | Y, Ü |
| I | ι | Jóta | J | Φ | φ | Phi (sprich: Fi) | Ph, F |
| K | κ | Káppa | K | Χ | χ | Chi | Ch |
| Λ | λ | Lámbda | L | Ψ | ψ | Psi | Ps |
| M | μ | My (sprich: Mü) | M | Ω | ω | Omega | Ö (lang) |

III. Lösungen

A. Das Fachrechnen mit bestimmten Zahlen

| | | |
|---------------------------|-------------|--|
| 1) a) 57012 | 39) 300 | 90) 15129 |
| b) 33103 | 40) 840 | 91) 90000 |
| c) 58116 | 41) 630 | 92) 360000 |
| d) 41727 | 42) 610 | 93) 40401 |
| e) 10042 | 43) 460 | 94) 4096 |
| 200000 (Summe) | 44) 990 | 95) 4096000 |
| f) 11378 | 45) 750 | 96) 8000 |
| g) 38626 | 46) 360 | 97) 8000000 |
| h) 32398 | 47) 810 | 98) 3 ⁵ |
| i) 102946 | 48) 120 | 99) 6 ² |
| k) 14652 | 49) 180 | 100) 5 ⁴ |
| 200000 (Summe) | 50) 570 | 101) 12 ² |
| 2) a) 4230 | 51) 930 | 102) 20 ³ |
| b) 6239 | 52) 4200 | 103) 4 ⁵ |
| 3) 28200 kg | 53) 7200 | 104) 24 ² |
| 4) 1250 Millionen DM | 54) 3000 | 105) 2 ⁹ |
| 5) 466 min | 55) 8100 | 106) 20 ³ |
| 6) 2638 m ³ | 56) 1080 | 107) 24 ² |
| 7) 6700000 t | 57) 720 | 108) 25 |
| 8) — 18 | 58) 45 t | 109) 9 |
| 9) 18 | 59) 2900 DM | 110) 33 |
| 10) 75 | 60) 10 DM | 111) 0 |
| 11) — 25 | 61) 40 DM | 112) 0 |
| 12) — 45 | 62) 550 W | 113) — 24 |
| 13) — 11 | 63) 490 g | 114) 91 |
| 14) 89 | 64) 240 kg | 115) 1 |
| 15) 15 | 65) 15000 U | 116) 117 |
| 16) — 60 | 66) 72 km | 117) 0 |
| 17) 123 | 67) 110 mm | 118) 4 |
| 18) 50 | 155 mm | 119) 16 cm ² |
| 19) — 3 | 68) — 180 | 120) 216000 s |
| 20) 200 | 69) + 96 | 121) 576 Std |
| 21) 1750 | 70) — 210 | 122) a) 10 ² mm |
| 22) 1 | 71) + 432 | b) 10 ² cm = 10 ³ mm |
| 23) 1000 | 72) — 693 | c) 10 ⁴ dm = 10 ⁵ cm |
| 24) — 400 | 73) — 960 | = 10 ⁵ mm |
| 25) 100 | 74) + 1320 | 123) 2 ³ |
| 26) — 10 | 75) + 132 | 124) 24 cm ² |
| 27) — 200 | 76) + 120 | 125) 3 |
| 28) — 5° C | 77) + 360 | 126) 2; 3; 6 |
| 29) 2 h 55 min | 78) 25 | 127) 2 |
| 30) 610 Millionen | 79) 32 | 128) 5 |
| 31) 1400 | 80) 8 | 129) 2; 4 |
| 32) 126° | 81) 9 | 130) 3; 9 |
| 33) 175 DM | 82) 16 | 131) 2; 5; 10 |
| 34) 29 kg | 83) 64 | 132) 7 |
| 35) 6; 9; 10; 12; 16; 18; | 84) 16 | 133) 2; 4; 8 |
| 20; 22 [Pf] | 85) 81 | 134) 2; 3; 6 |
| 36) 350 l | 86) 125 | 135) 2 · 3 · 5 · 5 |
| 37) 4 kg | 87) 243 | 136) 2 · 3 · 29 |
| 38) 420 | 88) 121 | 137) 2 · 3 · 5 · 7 |
| | 89) 12321 | 138) 2 · 3 · 5 · 11 |

| | | |
|---|---|------------------------|
| 139) $2 \cdot 3 \cdot 89$ | 190) 600 Stück | 219) $\frac{17}{20}$ |
| 140) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$ | 191) $96 \times 63 \times 3$ mm | 220) $1\frac{1}{7}$ |
| 141) $3^3 \cdot 5^2$ | 192) 35 kg | 221) $\frac{2}{15}$ |
| 142) $2^4 \cdot 7^2$ | 193) 50 Stück | 222) $\frac{1}{8}$ |
| 143) $2^7 \cdot 7$ | ca. 63 g | 223) $\frac{1}{48}$ |
| 144) $2 \cdot 5 \cdot 97$ | 194) 2400 l/min | 224) $\frac{1}{25}$ |
| 145) Teilerfremd | 195) 25 mm | 225) $\frac{1}{5}$ |
| 146) 7 | 196) 400 Stück | 226) $\frac{1}{28}$ |
| 147) Teilerfremd | 79 | 227) 6 |
| 148) Teilerfremd | 197) $\frac{79}{8}$ | 228) $3\frac{1}{4}$ |
| 149) 19 | 198) $\frac{21}{2}$ | 229) $-\frac{3}{3}$ |
| 150) 23 | 199) $\frac{135}{11}$ | 230) $4\frac{1}{12}$ |
| 151) Teilerfremd | 200) $\frac{100}{7}$ | 231) $4\frac{3}{4}$ |
| 152) 31 | 201) $\frac{50}{3}$ | 232) $5\frac{7}{12}$ |
| 153) Teilerfremd | 202) $8\frac{1}{3}$ | 233) $4\frac{7}{15}$ |
| 154) 3 | 203) $3\frac{1}{13}$ | 234) $5\frac{9}{10}$ |
| 155) 20 | 204) $33\frac{3}{4}$ | 235) $11\frac{12}{12}$ |
| 156) 24 | 205) $3\frac{1}{7}$ | 236) $1\frac{1}{8}$ |
| 157) 16 | 206) $3\frac{16}{113}$ | 237) 10 |
| 158) 25 | 207) $\frac{6}{16}, \frac{8}{18}, \frac{10}{22}, \frac{12}{26}$ | 238) $2\frac{2}{5}$ |
| 159) 40 | 208) $\frac{21}{45}, \frac{24}{51}, \frac{27}{57}, \frac{30}{63}$ | 239) 6 |
| 160) 32 | 209) $\frac{9}{18}, \frac{12}{18}, \frac{15}{18}, \frac{8}{18}$ | 240) $16\frac{1}{4}$ |
| 161) 28 | 210) $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}$ | 241) 44 |
| 162) 36 | 211) $\frac{7}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}$ | 242) $15\frac{1}{2}$ |
| 163) 4 | 212) $\frac{1}{2}$ | 243) $\frac{2}{3}$ |
| 164) 44 | 213) $2\frac{1}{3}$ | 244) $\frac{2}{3}$ |
| 165) 36 | 214) $1\frac{1}{5}$ | 245) $\frac{1}{4}$ |
| 166) 36 | 215) $\frac{1}{2}$ | 246) $\frac{4}{9}$ |
| 167) 48 | 216) $\frac{8}{9}$ | 247) $\frac{1}{64}$ |
| 168) 60 | 217) $1\frac{1}{16}$ | 248) $\frac{1}{1000}$ |
| 169) 60 | 218) $\frac{2}{3}$ | 249) $\frac{1}{10000}$ |
| 170) 70 | | 250) $4\frac{1}{12}$ |
| 171) 90 | | 251) $4\frac{2}{3}$ |
| 172) 180 | | |
| 173) 200 | | |
| 174) 300 | | |
| 175) 123 | | |
| 176) 90807 | | |
| 177) 54321 | | |
| 178) 270 R. 50 | | |
| 179) 90123 R. 8 | | |
| 180) 125 R. 10 | | |
| 181) ca. 12 Wochen | | |
| 181 a) 93h; 79h | | |
| 182) 50 Teile | | |
| 183) 62 Kasten Rest: 16 Stück | | |
| 184) 18181 Stück | | |
| 185) 22,2 m/s | | |
| 186) 72 U/min | | |
| 187) 195 DM und 245 DM | | |
| 188) 200 km 40 km/h | | |
| 189) a) 7 b) 30 c) 40 d) 8 e) 140 | | |

- 252) 9
 253) $\frac{3}{4}$
 254) $-\frac{3}{4}$
 255) $\frac{1}{4}$
 256) $\frac{1}{6}$
 257) $\frac{2}{9}$
 258) $\frac{3}{40}$
 259) $42\frac{2}{3}$
 260) $\frac{4}{15}$
 261) $2\frac{2}{5}$
 262) $13\frac{1}{2}$
 263) $\frac{1}{6}$
 264) $1\frac{3}{13}$
 265) $1\frac{1}{2}$
 266) $2\frac{2}{5}$
 267) $\frac{1}{2}$
 268) $2\frac{2}{3}$
 269) $\frac{1}{6}$
 270) 6
 271) $2\frac{1}{10}$
 272) $33\frac{1}{3}$
 273) $\frac{1}{2}$
 274) 16
 275) 16
 276) $\frac{3}{8}$
 277) a) 3 kW
 b) $4\frac{1}{2}$ kW
 c) 90 kW
 d) $\frac{1}{4}$ kW
 e) $1\frac{7}{8}$ kW
 278) a) $\frac{4}{3}$ PS
 b) 240 PS
 c) 28 PS
 d) 10 PS
 e) 7 PS
 279) a) 20 kg
 b) 75 kg
 c) 500 kg
 d) 2500 kg
 e) 20000 kg
 280) a) 1 t
 b) $2\frac{1}{3}$ t
 c) $3\frac{3}{4}$ t
 d) $\frac{1}{3}$ t
 e) $\frac{1}{2}$ t
 281) a) } 45° C
 b) }
 282) a) 6 m
 b) 15 m
 c) 1 m 35 cm
 283) 11 m
 284) 1760 mm
 285) 66 m Länge
 60 U
 286) 1650 t Erz
 750 t Koks
 600 t Zuschläge
 287) 5200 t
 288) $3\frac{9}{10}$ mal
 289) 616 mm²
 290) 2 h 40 min
 291) 40 min
 292) 120 mm
 293) $2\frac{1}{2}$ mm
 25 mm
 294) 0,375
 295) 0,0625
 296) 0,35
 297) 1,6
 298) 1,5
 299) 2,75
 300) $\approx 1,133$
 301) $\approx 4,667$
 302) $\approx 2,417$
 303) 0,012
 304) 200
 305) 100
 306) 2
 307) 0
 308) 0,2
 309) 0,054
 310) 2,25
 311) -8
 312) 0,04
 313) $-0,027$
 314) 20
 315) 0,1
 316) 1
 317) 0,25
 318) 2
 319) 2,1
 320) 0,14
 321) 6
 322) 50
 323) 9
 324) 50 × 80 mm
 325) 19,05 mm
 326) 2,12 mm
 327) 8
 328) 1,29
 329) 11 280 000 000 DM
 330) 23,6 mm
 331) 8,12 mm
 332) 78,5 kg
 333) 11,85 kg
 334) 1771
 335) 0,04 mm
 335a) 750 mm
 336) 650 μ
 337) 0,65 cm
 338) 0,925 dm
 339) 50 mm
 340) 830 mm
 341) 12,5 dm
 342) 0,075 m
 343) 1020 mm
 344) 750 mm
 345) 40 mm
 346) 2035 mm
 347) 307,5 mm
 348) 0,3 km
 349) 1800 m
 350) 10050 m
 351) 1200 m
 352) 1555 mm
 353) 100,1 mm
 354) 50 cm²
 355) 750 mm²
 356) 2500 cm²
 357) 0,02 m²
 358) 1,5 cm²
 359) 30 km²
 360) 0,5 ha
 361) 6 ha
 362) 75 a
 363) 550 ha
 364) 1 m²
 365) 16
 366) 1550 Quadrat Zoll
 367) 0,64 cm²
 368) 120 ha
 368a) 750 a
 368b) 416 Morgen
 369) 4500 dm³
 370) $7\frac{3}{4}$ dm³
 371) 0,15 cm³
 372) 350 cm³
 373) 0,275 m³
 374) 15000 mm³

| | | |
|---------------------------|---|-------------------------|
| 375) 40 dm ³ | 427) 60° | 473) 50 min |
| 376) 625 l | 428) 22,5° | 474) 600 U/min |
| 377) 35 dl | 429) $\pi/9$ | 475) 76,93 kg |
| 378) 10 l | 430) $\pi/12$ | 476) 108 kg |
| 379) 400 cm ³ | 431) $\pi/5$ | 477) 112,5 g |
| 380) 0,03 l | 432) $\frac{2}{3}\pi$ | 478) 1,6 min |
| 381) 5 ml | 433) $\frac{3}{2}\pi$ | 479) 6 h 40 min |
| 382) 1,25 dl | 434) 28,65° | 480) 264000 t |
| 383) 12,5 cl | 435) 19,098° | 481) 9 min |
| 384) 125 ml | 436) 68,76° | 482) 15000 kg |
| 385) 325 l | 437) 114,59° | 483) 15 Tage |
| 386) 20000 l | 438) 171,89° | 484) 1,89 PS |
| 387) $\frac{3}{4}$ l | 439) 431,16° K | 485) 45 DM |
| 388) 1500 cm ³ | 440) — 13,16° C | 485 a) 1034; 33; 22; 11 |
| 389) 250 kg | 441) 30000 kcal | 486) a) 439 U/min |
| 390) 0,1 t | 442) 78540 kcal | b) 184,5 mm |
| 391) 30 g | 443) 1500 kg/cm ² | 487) 890000 |
| 392) $\frac{1}{3}$ kg | 444) 5000 kg/cm ² | 488) a) 30 kg |
| 393) 5 g | 445) 5 | b) 18 kg |
| 394) 7,5 dg | 446) $\frac{1}{2}$ | 489) 85,5% |
| 395) 10500 mg | 447) 22 kg | 490) 85,3% |
| 396) 62,5 cg | 448) 300 cmkg | 491) 44,4% |
| 397) 9000 mg | 449) 6000 cmkg | 492) 21% |
| 398) 0,035 kg | 450) 10 mkg | 78% |
| 399) 2022 g | 451) 15 mkg | 1% |
| 400) 550 mg | 452) 15 m/s | 493) 20% |
| 401) 600 kg | 453) 14,4 km/h | 494) 1) 256000 t |
| 402) $\frac{1}{50}$ t | 454) 3 s | 2) 147000 t |
| 403) 1 t | 455) 1200 U/min | 3) 102000 t |
| 404) 140 Ztr. | 456) 17,6 Knoten | 4) 208000 t |
| 405) 7 t | 457) 55 km | 5) 48700 t |
| 406) 750 kg | 458) ca. 1 Million | 6) 37700 t |
| 407) 215,45 kg | 459) 1670 km/h | 7) 36000 t |
| 408) 2,597 t | 460) 3 $\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}}$ | 8) 446000 t |
| 409) 36 s | 461) 68,67 kg | 9) 400000 t |
| 410) 24 min | 462) a) 0,065 m/s | 10) 450000 Stck |
| 411) 360 s | b) 93600 mkg | 495) a) 250 DM |
| 412) 3,75 h | c) 17,3 PS | b) 500 DM |
| 413) 35,4 min | 12,7 kW | c) 5% |
| 414) 2,04 h | 463) a) 12 kW | d) 3 $\frac{1}{3}$ % |
| 415) 4 h 20 m 24 s | b) 16,3 PS | e) 136 DM |
| 416) 3,66 h | 464) 210 PS | f) 5100 DM |
| 417) 15 h | 465) 131,5 kg | g) 3 Jahre |
| 418) 6 min | 466) 11,6 kg | h) $\frac{1}{2}$ Jahr |
| 419) 450' | 467) 25,3 m/s | 496) a) 5400 DM |
| 420) 1° 10' | 468) 4,02 g | b) 30600 DM |
| 421) 165'' | 469) 2,2 kW | 497) 7140 DM |
| 422) 1' 40'' | 470) 174,3 mm ² | 498) 275 DM |
| 423) 5400'' | 471) 6 h 40 min | 499) 6% |
| 424) 30° | 472) 15 m/min | 500) 600 DM |
| 425) 240° | | 501) 90000 DM |
| 426) 11 $\frac{1}{4}$ ° | | 502) 3 $\frac{1}{2}$ % |
| | | 503) 180000 DM |

B. Das Rechnen mit Buchstaben

- 1) 3
9
15
1,5
0,9
- 2) 0,4
0,8
1,2
0,25
0,5
- 3) 0
0,2
0,4
0,1
0,02
- 4) a) 3
b) 6
c) 9
d) 12
e) 15
- 5) 542
- 6) $100a + 10b + c$
- 7) $a + b + c$
- 8) gerade
- 9) $2n + 1$
oder
 $2n - 1$
- 10) a) 35
b) 46
c) 6,5
d) 5,9
e) 22
- 11) a) 20
b) 39
c) 2
d) 4
e) 22
- 12) a) $4a + 5b + 7c$
b) $10a + 7b$
c) $10m + 11n$
d) $a + 10b + 2c$
e) $x + 2y$
f) $3u + 4v + 5w$
g) $c + \frac{1}{2}d$
h) $6x + y + 5z$
- 13) a) 12
b) 3
c) 1,5
- 14) $\frac{1}{2}(a + b)$
- 15) $\frac{1}{3}(a + b + c)$
- 16) a) $-3a + 5b$
b) $-2a - 3b$
c) $m - 2n$
d) $0,1u + 0,4v$
e) $-4d$
- f) $-\frac{3}{4}x$
g) $-\frac{1}{2}k$
h) r
i) 0
k) $-t$
- 17) $5b$
- 18) u
- 19) $a + b$
- 20) $-2a$
- 21) $10a + b$
- 22) $3a$
- 23) $5x + 2y + z$
- 24) s
- 25) $0,1u - v$
- 26) $2m - n$
- 27) $x = y$
α) 8
β) 4
γ) 9,4
δ) 5
ε) 5
- 28) $2b - 2c$
- 29) $2a$
- 30) $3x - 1$
- 31) x
- 32) $a - b$
- 33) $2a$
- 34) $2m - 3n - 4o$
- 35) y
- 36) 0
- 37) x
- 38) $1,4a$
- 39) $-\frac{1}{2}m$
- 40) r
- 41) $-3s$
- 42) $-3,5t$
- 43) $-11,02c$
- 44) $1,5d$
- 45) $1,18v$
- 46) 0
- 47) $10a$
- 48) $15a^2$
- 49) $8a$
- 50) $12ab$
- 51) cd
- 52) a^2b
- 53) b^2c^2
- 54) $70a^2b$
- 55) $9a + 5b$
- 56) a^2
- 57) $2,9a$
- 58) $0,4ab$
- 59) $3xy$
- 60) $12x^2y^2$
- 61) $5x + 5,4y$
- 62) $12u$
- 63) $0,25v^2$
- 64) $1^{\frac{3}{20}}v$
- 65) $\frac{1}{24}rst$
- 66) a^2b^2
- 67) $6ax - 15bx + 18cx$
- 68) $6ax + 9ay$
- 69) $7a + b$
- 70) $15r + 89s$
- 71) $11u - 9v$
- 72) $2ax + 3ay - a$
- 73) $3ay - 2by - 5cy$
- 74) $2cx$
- 75) b
- 76) m
- 77) $6ab - 10a$
- 78) $1,5xy$
- 79) $ax + bx$
 $+ ay + by$
- 80) $cu + cv - du - dv$
- 81) $ex - ey - fx + fy$
- 82) $ag - bg + ah - bh$
- 83) $6a^2 - 5ab - 6b^2$
- 84) $3a^2 - 4ab - 4b^2$
- 85) $0,1x^2 - 0,31xy$
 $+ 0,15y^2$
- 86) $4a^2 - 9b^2$
- 87) $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$
 $+ 5ab - 4ac - 5bc$
- 88) $a^2 - 9b^2 - 9c^2$
 $- 18bc$
- 89) $4 - 4a + a^2$
- 90) $4a^2 + 12ab + 9b^2$
- 91) $n^2 - 1$
- 92) $4c^2 + 12c + 9$
- 93) $9a^2 - b^2$
- 94) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$
- 95) $0,25m^2 - 0,16n^2$
- 96) 120
- 97) a) $3b - 5a - 15$ b) -4
- 98) $2a + b + 2$
- 99) $2ab$
- 100) $4ab$
- 101) $24s^2$
- 102) $27s^2$
- 103) $0,36bh$
- 104) a) 1596
b) 3584
c) 8091
- 105) $(10a + 5)^2 =$
 $10a(10a + 10) + 25$
- 106) $(10a + b)^2 = 100a^2$
 $+ 20ab + b^2$
- 107) $(a + b + c)^2 = a^2$
 $+ b^2 + c^2 + 2ab$
 $+ 2ac + 2bc$

- 108) $8(2a - 3b + c)$
 109) $4b(2a + 3c)$
 110) $6y(6x - 5y + 3)$
 111) $10(1 - 2a - 3b)$
 112) $x(3a + 4b - c)$
 113) $(a + b)(c - d)$
 114) $(x - y)(a - 1)$
 115) $\frac{1}{2}x(x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4})$
 116) $0,5a(a - 2 + 3b)$
 117) $v - 1,5u$
 118) $5ab - 4a + 3$
 119) $0,5a + c - 2$
 120) $a + bx + cx^2$
 121) $8a + 15b - 14c$
 122) 2
 123) 3
 124) 4a
 125) 3x
 126) 3x
 127) a - b
 128) x + 1
 129) a + 0,5b
 130) 1
 131) 3x - 2y
 132) 0,6r + 0,5s
 133) $\frac{x+y}{x-y}$
 134) $a^2 - 2ab + b^2$
 135) a + b
 136) z + 5
 137) 0,5x + 1
 138) $x^2 + xy + y^2$
 139) $\frac{b}{a-b}$
 140) 1
 141) $\frac{x}{12y}$
 142) $\frac{3(y-x)}{10a}$
 143) $\frac{a(2x+1)}{x^2-1}$
 144) $\frac{2a}{1-x^2}$
 145) $\frac{2b}{a^2-b^2}$
 146) $\frac{4xy}{x^2-y^2}$
 147) $2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
 148) 0
 149) x^2
 150) 2
 151) $2\frac{a}{b}$
 152) $\frac{1}{8} \cdot b^2$
- 153) $\frac{25}{x^2}$
 154) $\frac{1}{b}$
 155) x
 156) $\frac{a}{b}$
 157) a : c = d : b
 b : c = d : a
 a : d = c : b
 b : d = c : a
 d : b = a : c
 d : a = b : c
 c : b = a : d
 c : a = b : d
 158) x : a = y : b
 b : y = a : x
 b : a = y : x
 159) 0,75
 160) 0,5
 161) 0,8
 162) 0,5a
 163) 2,5a
 164) 2a
 165) 2
 166) 49a
 167) 8
 168) 1
 169) 0,1b
 170) 25b
 171) b
 172) 0,1
 173) 2
 174) a) 14,5
 b) 10
 175) a) α 13 β 12
 b) α 12,5 β 12
 c) α 20 β 12
 d) α 25,5 β 12
 e) α 37 β 12
 176) a) 5
 b) 13
 c) a
 d) u
 e) 6
 177) 2
 178) 3
 179) 4
 180) 0,5
 181) 5
 182) 1,5
 183) -3
 184) b
 185) a - b
 186) b - a
 187) 60 m
- 188) a) $\frac{U_1}{U_2} = \frac{d_1}{d_2}$
 b) 78,5 mm
 c) 4 mal
 189) 250 mm
 190) a) L : l = Q : P
 b) 5
 c) 104 mm
 191) a) i < l
 b) $\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$
 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}$
 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$
 c) $z_1 = 90$
 192) a) $V_1 : V_2 = P_2 : P_1$
 b) 60 m³
 193) 2 m/s
 194) Cu : 24 kg
 Zn : 16 kg
 195) a) $P_1 : P_2 : P_3$
 = $P_1 : P_2 : P_3$
 b) $P_1 = 800$ kg
 196) $i_1 = 2$ A
 197) $2a^2 - 3b^2$
 198) $\frac{1}{5}(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$
 199) $3x^2y$
 200) $2(v^3 + w^3)$
 201) $4(a^m + a^n)$
 202) $3xy(2x + y)$
 203) $4a^3$
 204) $z^2(x^2 - y^2)$
 205) $3a^2 + b^2$
 206) $(4x + 3y)(4x - 3y)$
 207) a^{2n-1}
 208) b^2x
 209) $6a^4b^3$
 210) $0,4x^7y^6$
 211) a^{2n}
 212) $-x^{2n-1}$
 213) $-b^{2n+1}$
 214) $0,5a^3b^2$
 215) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y$
 + $3xy^2 + y^3$
 216) $(a - b)^5$
 217) 0,25
 218) 0,125
 219) $(xyz)^3$
 220) $(ab)^2$
 221) 1
 222) $(ac)^2$
 223) $-(xy)^3$
 224) $3(abc)^2$

- 225) $9(a b c)^2$
 226) $0,5(a b)^{2n+1}$
 227) a^{m-1}
 228) $\left(\frac{4a}{b}\right)^2$
 229) m^2
 230) a^{-2}
 231) a^{n+m}
 232) $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$
 233) $\frac{1}{a}$
 234) $7x$
 235) $3a^m$
 236) 1
 237) a
 238) 1
 239) $8x^2 - 7$
 240) $\frac{1}{9}$
 241) $\frac{1}{9}$
 242) $x^2 n y^3$
 243) $1,44 a^4 b^6$
 244) $0,008 a^3 b^6$
 245) $-a^6$
 246) a^{12}
 247) $r^6 s^4$
 248) $a^6 b^8$
 249) $a^4 - b^4$
 250) $a^4 + 2a^2 b^2 + b^4$
 251) $\frac{1}{4}u^4 - 2u^2 v^2 + 4v^4$
 252) $0,04 a^2 - b^2$
 253) $3a^m$
 $2a^{2m}$
 2
 254) $30x^2$
 $20x^2$
 $125x^4$
 5
 $625x^4$
 255) $8a(1+2a)$
 $128a^3$
 $0,5a^{-1}$
 256) 6
 2
 257) $\alpha) \frac{a^2}{30}$
 $\beta) 1. 14 \text{ Querschnitte}$
 oder
 $2. 14 \text{ Längsschnitte}$
 oder
 $3. 2 \text{ Längs- und}$
 4 Querschnitte
 $4. 4 \text{ Längs- und}$
 2 Querschnitte
- $\gamma) 1. \frac{a}{15} \times \frac{a}{2}$
 2. $a \times \frac{a}{30}$
 3. $\frac{a}{6} \times \frac{a}{5}$
 4. $\frac{a}{3} \times \frac{a}{10}$
 258) $\alpha) 0,48 a^2$
 $\beta) 60\%$
 259) $\alpha) 3a^2$
 $\beta) 2a + 1$
 260) 25%
 261) $\frac{1}{3}$
 262) $\sim 34\%$
 263) 4 mal
 264) $4:1$
 265) a) 32%
 b) 52%
 266) $33,1\%$
 267) a) $x = 10$
 b) $x = 0,5$
 c) $x = \frac{2}{3}$
 d) $x = 3$
 e) $x = 4$
 f) $x = \sqrt{a}$
 268) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$
 269) a) $3 = \sqrt[3]{9}$
 b) $2 = \sqrt[3]{8}$
 c) $2 = \sqrt[5]{32}$
 d) $0,2 = \sqrt[3]{0,04}$
 e) $-3 = \sqrt[3]{-9}$
 f) $-2 = \sqrt[3]{-8}$
 270) $3\sqrt{3}$
 271) $\sqrt{a} + 4\sqrt{b}$
 272) $a\sqrt{x}$
 273) $2\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)$
 274) $(a-b)\sqrt[3]{b}$
 275) $4\sqrt[3]{a^2 b}$
 276) 37
 277) 53
 278) 5
 279) 40
 280) 56
 281) 2
 282) 9
 283) 2
 284) 3
 285) 8
 286) 64
 287) $\sqrt[5]{a^7}$
 288) $\sqrt[5]{a^3}$
- 289) 25
 290) $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$
 291) $0,5$
 292) 125
 293) 125
 294) 64
 295) 12
 296) 14
 297) 15
 298) 3
 299) 2
 300) 40
 301) a^3
 302) $4b$
 303) $6a^3$
 304) $4a$
 305) dx
 306) $25c^2$
 307) 6
 308) 3
 309) 4
 310) 3
 311) $0,5$
 312) 10
 313) x
 314) $2a$
 315) a
 316) a
 317) $2xy$
 318) a^2
 319) 2
 320) a^2
 321) x^2
 322) $2a^2$
 323) $\sqrt[6]{x}$
 324) 3
 325) $\sqrt[9]{5}$
 326) $a - b$
 327) $a + 2\sqrt{ab} + b$
 328) $3,414$
 329) $0,414$
 330) $0,586$
 331) $3 + \sqrt{6}$
 332) $6 - \sqrt{3}$
 333) $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{3})$
 334) $4\sqrt{3} + 1$
 335) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$
 336) $\frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a - b}$
 337) $\frac{x + \sqrt{y}}{x^2 - y}$

- 338) 648
 339) 425
 340) 462
 341) 5,6569
 342) 15,5563
 343) 891
 344) 178
 345) 7,35
 346) 76,7
 347) 0,032
 348) 1,732
 349) 2,236
 350) 0,316
 351) 2,34521
 352) 0,894
 353) 45 mm
 354) a) 13 cm
 b) 113 cm
 c) 39 cm
 355) a) 34 cm
 b) 25 cm
 c) 26 cm
 356) a) 10 cm
 b) 12 cm
 c) 6 cm
 357) a) 8
 b) 1,4
 c) $\frac{1}{4}$
 358) a) 24 cm²
 b) 42 cm²
 c) 66 cm²
 d) 120 cm²
 e) 330 cm²
 359) 2,78 m
 360) $\frac{a}{2} \sqrt{3} = 0,866a$
 361) x = 5,19 cm
 b = 11,19 cm
 362) 3 m
 363) 4 s
 364) 60 m/s
 365) 75 mm
 366) ca. 1,40 m
 367) a) 6 i
 b) 0,5 i
 c) 12 i
 d) i
 368) a) a i
 b) x² i
 c) y⁴ · i
 d) z⁴ i
 369) a) 2 i $\sqrt{3}$
 b) 3 i $\sqrt{3}$
 c) a b i
 d) x i $\sqrt{2}$
 370) a) -3
 b) +2
 c) -0,25
 d) -0,5
 371) a) 25 i
 b) 9 i
 c) 4 i
 d) 10 i
 372) a) -0,2 i
 b) -0,5 i
 c) -0,9 i
 d) 0
 373) a) 2 i
 b) 2 i
 c) 2 i
 d) $-\frac{1}{2} i$
 374) a) -1,8
 b) 1,2
 c) a/b
 d) $\frac{8}{9}$
 375) a) 16 i
 b) 0,6 i
 c) -4 i
 d) -0,6 i
 376) a) -6
 b) -12 i
 c) 3
 d) -24
 377) a) -60
 b) 60
 c) -1
 d) 1,5 i
 378) a) -i
 b) -1
 c) 1
 d) i
 379) a) II.
 b) IV.
 c) III.
 d) I.
 380) Modul
 381) Argument
 382) a-d) 5
 383) a) Parallele im Ab-
 stande 2 zur Ab-
 szissenachse
 b) Parallele im Ab-
 stande 3 zur Ordi-
 natenachse
 384) 1
 385) 3 - i $\sqrt{2}$
 386) -1 + 1,5 i
 387) 4 + 2 i
 388) -3 + 6 i
 389) 1 + 0,5 i
 390) 3 + 2 i
 391) 2 + $\sqrt{2} i$
 392) 22 - 14 i
 393) 2,9 i
 394) 100
 395) 2 i
 396) -2 i
 397) 2
 398) 9a² + 16 b²
 399) (a + b i)(a - b i)
 400) (4 + 3 i)(4 - 3 i)
 401) (8 + 3 i)(8 - 3 i)
 402) (6 + i)(6 - i)
 403) ($\sqrt{a} + \sqrt{b} i$)
 · ($\sqrt{a} - \sqrt{b} i$)
 404) 1 - i
 405) 7 + i
 406) 7 - 2 i
 407) 1 - i $\sqrt{3}$
 408) 3 ($\sqrt{2} + i \sqrt{3}$)
 409) i $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
 410) i
 411) 3 + 2 i
 412) i
 413) i
 414) 7 + 24 i
 415) 1 + 4 i $\sqrt{3}$
 416) -2 i
 417) -4
 418) 8
 419) 2(a² - b²)
 420) 4 a b i
 421) 3 + i
 422) 1 + 3 i
 423) $\sqrt{2} + i$
 424) $\frac{1}{2} a + i$
 425) $\frac{1}{2} a - i$
 426) 3 + i
 427) 5 + 2 i
 428) 3 + i
 429) a) m = ^alog a
 b) 1 = ^blog n
 c) 2 = ⁵log 25
 d) 3 = ^{0,1}log 0,001
 e) 0,30103 = lg 2
 f) 0,43429 = lg e
 g) 2,3026 = ln 10
 430) a) 4
 b) 0,5
 c) $\frac{1}{3}$
 d) $\frac{2}{3}$
 e) 1,5
 431) a) 0
 b) 3
 c) -2
 d) $\frac{2}{3}$
 e) 0,75

- | | | |
|-----------------|-------------------------|-------------|
| 432) a) -2 | 445) a) 2,489 | 463) 0,435 |
| b) -3 | b) 2,594 | 464) 23 |
| c) 8 | c) 2,692 | 465) 24 |
| d) 256 | 446) a) 0 | 466) 150 |
| e) 3 | b) 2,3026 | 467) 121 |
| f) 2 | c) -2,3026 | 468) 2200 |
| 433) a) 1,30103 | d) 4,6052 | 469) 43,8 |
| b) 3,30103 | e) 6,9078 | 470) 182 |
| c) 0,30103 - 1 | 447) 19stellig | 471) 666 |
| d) 0,69897 - 1 | 448) 148,9 m | 472) 240 |
| e) 0,90309 | 449) 47,5% | 473) 12,3 |
| f) 0,1505 | 450) 50 mm | 474) 6,43 |
| g) 0,1003 | 451) 9,5 mm | 475) 18,2 |
| 434) 0,3183 | 452) 280 kg | 476) 2,83 |
| 435) 0,7979 | 120 kg | 477) 3,09 |
| 436) 3,132 | 453) ≈ 119 kg | 478) 1,78 |
| 437) 0,01039 | 454) 4,81 cm | 479) 0,31 |
| 438) 0,003661 | 455) 412 Ω | 480) 0,2 |
| 439) 5,532 | 456) 245,6 kcal | 481) 723 |
| 440) 4,236 | 457) ≈ 17100 lm | 482) 0,151 |
| 441) 0,6262 | 458) 0,628 Ω | 483) 0,0824 |
| 442) 0,6331 | 459) 4 | 484) 775 |
| 443) 1,343 | 460) 0,276 | 485) 4,56 |
| 444) a) 11030 | 461) 4650 | 486) 3,05 |
| b) 1,45 | 462) 2549 | 487) 814 |
| | | 488) 0,74 |

C. Das Rechnen mit Gleichungen

- | | | |
|---------------------|---------------------|-------------|
| 1) 7 | 25) 0,2 | 52) ± 1 |
| 2) -2 | 26) 0,5 | 53) ± 6 |
| 3) 0,1 | 27) $\lg a : \lg b$ | 54) ± 4 |
| 4) 4 | 28) 0,01 | 55) ± 4 |
| 5) 10 | 29) a^3 | 56) 9 |
| 6) 1 | 30) 0,0016 | 57) 7 |
| 7) 1 | 31) 6 | 58) 2,5 |
| 8) 2 | 32) 4 | 59) 3 |
| 9) 6 | 33) 15 | 60) ± 5 |
| 10) 2,5 | 34) 3 | 61) 0,2 |
| 11) 3 | 35) 30 | 62) 20 |
| 12) 100 | 36) 1 | 63) 4,2 |
| 13) $\frac{1}{6} a$ | 37) 6 | 64) 0,2 |
| 14) $\frac{a}{b}$ | 38) 30 | 65) 1,2 |
| 15) 1,25 | 39) 10 | 66) 0,1 |
| 16) 1,6 | 40) 4 | 67) 0,3 |
| 17) 0,09 | 41) 7 | 68) 0,3 |
| 18) $2a^2$ | 42) 3 | 69) 4 |
| 19) a^3 | 43) 5 | 70) 8,4 |
| 20) $a^3 b^3$ | 44) 9 | 71) 3 |
| 21) 2 | 45) 4 | 72) 4 |
| 22) 0,3 | 46) 8 | 73) 2 |
| 23) 0,4 | 47) 2 | 74) 4 |
| 24) 0,232 | 48) 12 | 75) 3 |
| | 49) 20 | 76) 4,5 |
| | 50) 30 | 77) 0,4 |
| | 51) ± 3 | 78) 11 |

- 79) 5
 80) 0,1
 99) 9 PS
 100) 2,5 PS
 101) 0,067%
 101a) 7 Std.
 102) 30 mm
 103) 400 mm
 104) 2,5 cm²
 105) 3000 kg
 106) 500 kg
 107) 1250 cm²
 108) 19400 cmkg
 109) 37,5 cm³
 110) 4,8 cm
 111) 4628 cm⁴
 112) 200 cm²
 113) 0,55 A
 114) 220 V
 115) 55 Ω
 116) 1,5 Ω
 117) 240 m
 118) 20 mm²
 119) 5 km
 120) 20 mm²
 121) 1,24 kg
 122) 0,45 A
 123) 11 kW
 124) 220 V
 125) 95 s
 126) 3,2 A
 127) 1500 U/min
 128) 8
 129) 60 Perioden/s
 130) 8 und 24 Ω
 131) 352
 132) 75° C
 133) 50° C
 134) 20 cm
 135) ≈ 1 m
 136) 0,5 m
 137) 30 cm
- | x | y |
|------|-----------|
| 138) | 7 9 |
| 139) | 10 30 |
| 140) | 1/6 2/3 |
| 141) | 6 10 |
| 142) | 10 2 |
| 143) | 6 2 |
| 144) | 15 6 |
| 145) | 2 4 |
| 146) | 7 3 |
| 147) | 6 2 |
| 148) | 6 9 |
| 149) | 4 10 |
| 150) | 6 2 |
| 151) | 9 3 |
| 152) | 2 5 |

- | x | y |
|------|---|
| 153) | 6 2,5 |
| 154) | 2 5 |
| 155) | 10 1 |
| 156) | 6 2 |
| 157) | 4 2 |
| 158) | 6 3 |
| 159) | 2 5 |
| 160) | 13 5 |
| 161) | 4 4 |
| 162) | 2 1 |
| 163) | 12 3 |
| 164) | 3 7 |
| 165) | 2 5 |
| 166) | 2 3 |
| 167) | 3 4 |
| 168) | 4 5 |
| 169) | 7 6 |
| 170) | 4 6 |
| 171) | 6 4 |
| 172) | 5 2 |
| 173) | 3 0,2 |
| 174) | 7 und 5 |
| 175) | 4,5 und 1,5 |
| 176) | 76 |
| 177) | 2 cm ² 300 kg |
| 178) | m = 3 kgs ² m ⁻¹ b = 5 ms ⁻² |
| 179) | 20 kg und 30 kg |
| 180) | 200 mm 250 mm |
| 181) | 12 min |
| 182) | 1 h 20 min |
| 183) | 90 min 45 min |
| 184) | r ₁ = 2 Ω r ₂ = 4 Ω R ₁ = 1,33 Ω |
| 185) | 10 Ω und 15 Ω |
| 186) | Um 11 Uhr 5 km vor B |
| 187) | 2 h 140 km |
| 188) | x = 3 y = 5 z = 7 |
| 189) | x = 2 y = 4 z = 6 |
| 190) | x = 1/2 y = 1/3 z = 1/5 |

- 191) x = 2
 y = 4
 z = 6
 192) a = 3 cm
 b = 4 cm
 c = 5 cm
 193) α = 30°
 β = 60°
 γ = 90°
 194) α = 60°
 β = 40°
 γ = 80°
 195) r₁ = 0,5 Ω
 r₂ = 1 Ω
 r₃ = 2 Ω
 196) r₁ = 0,5 Ω
 r₂ = 0,25 Ω
 r₃ = 0,125 Ω
 197) P₁ = 40 kg
 P₂ = 120 kg
 P₃ = 150 kg
 198) + 0,6; - 0,6
 199) + 3 i; - 3 i
 200) + 1,5; - 1,5
 201) + 2 a; - 2 a
 202) + √(b/a); - √(b/a)
 203) 0; 16
 204) 0; - 6
 205) 0; - 10
 206) 0; 2
 207) 0; 4
 208) 5; 6
 209) - 5; - 3
 210) - 2; 5
 211) 1; - 1/2
 212) - 0,1; 3
 213) - 0,2; - 3
 214) 1/4; - 1/2
 215) 3/2; - 5/3
 216) - 1/3; - 1/6
 217) 2/3; 3/4
 218) x² + x - 12 = 0
 219) x² - 3 = 0
 220) x² - 2x - 1 = 0
 221) x² + 4 = 0
 222) x² - 4x + 5 = 0
 223) (x - 2)(x + 3)
 224) (x - 6)(x - 4)
 225) (x + 4)(x - 2)
 226) (x + 0,5)(x + 1,5)

- 227) $(x - 0,5)(x - 2)$
 228) 12 und 18 sowie -12
 und -18
 229) 14 und 27
 230) 8 und -4
 231) 7 cm und 4 cm
- 232) $\frac{a}{2}\sqrt{5}$
- 233) $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$
- 234) a) $h = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - d^2})$
 b) $h = 1$ mm
- 235) $d(\sqrt{2} - 1) = 0,41$ d
 236) 2 Ω und 3 Ω
 237) 12 Ω und 6 Ω
 238) $x_1 = 8; y_1 = 7$
 $x_2 = 7; y_2 = 8$
 239) $x_1 = 5; x_1 = 0,4$
 $x_2 = 0,4; y_2 = 5$
 240) $x_1 = 2; y_1 = \frac{1}{2}$
 $x_2 = \frac{1}{2}; y_2 = 2$
 241) $x_1 = 3; y_1 = 2$
 $x_2 = -2; y_2 = -3$
 242) $x_1 = \frac{1}{4}; y_1 = \frac{3}{4}$
 $x_2 = -\frac{3}{4}; y_2 = -\frac{1}{4}$
 243) $x_1 = 6; y_1 = 1$
 $x_2 = 1; y_2 = 6$
 244) $x_1 = 6; y_1 = 1$
 $x_2 = -1; y_2 = -6$
 245) $x_1 = 7; y_1 = 1$
 $x_2 = 1; y_2 = 7$
 $x_3 = -7; y_3 = -1$
 $x_4 = -1; y_4 = -7$
 246) $x_1 = 8; y_1 = 1$
 $x_2 = -8; y_2 = 1$
 $x_3 = 8; y_3 = -1$
 $x_4 = -8; y_4 = -1$
 247) $x_1 = 12; y_1 = 11$
 248) $x_1 = 13; y_1 = 12$
 249) $x_1 = 4; y_1 = 1$
 $x_2 = -4; y_2 = -1$
 $x_3 = i; y_3 = -4$
 $x_4 = -; y_4 = 4i$
 250) $x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2};$
- $y_1 = + \frac{a}{2}\sqrt{2}$
 $x_2 = - \frac{a}{2}\sqrt{2};$
 $y_2 = - \frac{a}{2}\sqrt{2}$
- 251) $x = a; y = 0$
 252) $x = a; y = a$
 253) $x_1 = 5; y_1 = 2$
 $x_2 = -\frac{1}{13}; y_2 = \frac{70}{13}$
 254) $x_1 = 2; y_1 = 3$
 $x_2 = -1; y_2 = -3$
 255) $x_1 = 6; y_1 = 3$
 $x_2 = -6; y_2 = -3$
 256) $x_1 = 2; y_1 = 3$
 $x_2 = \frac{8}{3}; y_2 = -\frac{19}{3}$
 257) $x_1 = 2; y_1 = 6$
 $x_2 = -\frac{4}{3}; y_2 = \frac{8}{3}$
 258) 4 und 25
 259) 4 und 16
 260) 8 und 12
 261) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$
 262) 5 cm und 12 cm
 263) 11 cm und 60 cm
 264) $P_1 = 30$ kg
 $P_2 = 40$ kg
 $P_3 = 50$ kg
 265) $P_1 = 15$ kg
 $P_2 = 8$ kg
 266) 1,189 m
 0,841 m
 267) 120 und 30 cm
 268) 1,5 m
 269) 10 und 5 Ω
 270) 110 V
 2 A
 271) $\frac{D}{2}\sqrt{2}$
 272) $\frac{D}{2}\sqrt{2}$
- 273) $x = -3$
 274) $x = 2$
 275) $x = 2$
 276) $x = \frac{3}{4}$
 277) $x = 2,5$
 278) $x = 0$
 279) $x = 0$
 280) $x = 0,5$
 281) $x = 2$
 282) $x = 1,5$
 283) $x = 1; y = -2$
 284) $x = -2; y = -4$
 285) $x = -3; y = 1$
 286) } Keine
 287) } Lösung!
 288) $x_1 = +1,5$
 $x_2 = -1,5$
 $x_3 = 0$
 289) $x_1 = -1$
 290) $x = 1$
 291) $x = -1$
 292) $x = 2$
 293) $x_1 = -2$
 $x_2 = 1$
 294) $x_1 = 0,5$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = -2$
 295) $x_1 = 2$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = -3$
 296) $x_1 = -1$
 $x_2 = -1$
 $x_3 = 3$
 297) $x_1 = -1$
 $x_2 = 2$
 $x_3 = 4$
 298) $x_1 = -2$
 $x_2 = 1$
 $x_3 = 4$
 299) $x_1 = 2$
 $x_2 = -3$
 $x_3 = -5$
 300) $x_1 = 1$
 $x_2 = 3$
 $x_3 = 5$

IV. Stichwortverzeichnis

(Die mit * gekennzeichneten Seitenzahlen weisen auf Aufgaben hin)

- Absoluter Betrag relativer Zahlen 88
 — komplexer Zahlen 162
 Absolutes Glied d. quadrat. Gleichung 220
 Absolute Temperatur 61, 66*
 Abszissenachse 157, 236
 Achsabstand v. Stirnrädern 216*
 Addition von Dezimalzahlen 45
 — ganzen Zahlen 1
 — gebrochenen Zahlen 28
 — relativen Zahlen 88
 — unbestimmten Zahlen 85
 Additionsverfahren 213
 Aktivistebewegung 3*
 Alphabet, griechisches 271
 Amortisation 83*
 Ampere 38, 68
 Amperesekunde 69
 Amperestunde 69
 Angström 37, 51
 Ar 53
 Arbeit 65, 67*
 Argument, kompl. Zahlen 162
 Arithmetisches Mittel 24*, 115, 122*
 Arithmetische Proportionen 115
 Astronomische Einheit 51
 Atmosphäre, physikalische 62
 —, technische 62
 Ausdehnung 206*
 Ausfließgeschwindigkeit 154*, 207*

 Barometerstand 179*
 Basis 14, 35
 — d. Logarithmensysteme 168
 Bekannte Größen 188
 Beleuchtungsstärke L_x 154*, 180*
 Benz 64
 Beschleunigung 64, 216*
 Bestimmungsgleichungen 186
 Biegemomente 63, 66*, 187, 199, 204*
 Bildweite 207*, 234*
 Biquadrate 14
 Biquadratische Gleichungen 188
 Bogenmaß 59
 Bohrmaschine 202*
 Brennstoffkosten 11*
 Brinellsche Härteprüfung 228*
 Bruchrechnung — Formeln 265
 Bruchstrich 106
 Brüche, echte 26
 —, gemeine 26
 —, gleichnamige 28

 Brüche, unechte 26
 —, ungleichnamige 28
 —, Addition 28
 —, Subtraktion 28
 —, Multiplikation 31
 —, Division 33
 Bruttogewicht 3*, 8*
 Buchwert 83*

 Castell, Addiator 181
 Cel 64
 Celsius 40*, 61
 Coulomb 68

 Dehnung 42*, 76*, 198, 204*
 Dekagramm 55
 Dezigramm 55
 Deziliter 54
 Dezimalzahlen, periodische 43
 —, Addition 45
 —, Subtraktion 46
 —, Multiplikation 46
 —, Division 47
 Dezimeter 51
 Differenz 4
 Diskriminante, quadratischer Gleichungen 223
 Dividend 17
 Division 17
 —, Dezimalzahlen 47
 — ganzer Zahlen 17 ff.
 — gebrochener Zahlen 33
 — größerer Zahlen 22
 — relativer Zahlen 25, 107
 — unbestimmter Zahlen 106
 — mit 0 und ∞ 38,
 Divisor 17
 Doppelzentner 55
 Durchbiegung 135*
 Durchschnittswert 24*
 Drahtgewicht 205*
 Drehmoment 25*, 63, 66*, 187, 198, 203*
 Drehzahl 198, 199, 201*, 202*, 203*
 Dreisatz 70 ff.

 e 84
 Echte Brüche 26 ff.
 Effektive Leistung 77*, 198, 203*, 204*
 Eingekleidete Aufgaben 196 ff.
 Einheitsparabel, quadratische 245
 —, kubische 253
 Einsetzungsverfahren 209

- Eisenbahnschiene, Wärmeausdehnung 206*
 Elastizitätszahl 15, 62
 Elektromotorische Kraft 68
 Elektrotechnische Maßeinheiten 68
 Erweitern 28
 Explizite Funktionsgleichung 249
 Exponenten, negative 36
- Fahrenheit 40*, 61
 Faktoren 9
 Fallbeschleunigung 154*, 198, 201*
 Fallgeschwindigkeit 201*
 Fallhöhe 154*, 198, 201*
 Fallzeit 154*, 198, 201*
 Farad 38, 69
 Fertigungszeit 3*, 78*
 Festmeter 54
 Feuchtigkeit 79*
 Fettfleckphotometer 234*
 Flächenmaße 52 ff.
 Flächenpressung 199, 204*
 Flansch 59*
 Flaschenzug 133*
 Freiglied d. quadr. Gleichung 220
 Frequenz 70, 199, 205*
 Frequenzen elektr. Wellen 15
 Fünfjahrplan 3*, 8*, 49*, 78*, 79*
 Funktionsgleichungen 186, 235 ff.
 —, explizite u. implizite 249
 Fuß, englisch 41*, 52
- Gal 64
 Ganze Zahlen 143
 Gaußsche Zahlenebene 161
 Gebrochene Zahlen 26, 143
 Gegenstandsweite 207*, 231*
 Gemeinschaftlicher Faktor 104
 Gemischte Zahlen 26 ff.
 — —, Addition u. Subtraktion 30
 Geometrisches Mittel 118, 122*, 153*
 Gerade Zahlen 18
 Geschwindigkeit 11*, 24*, 63 ff., 67*,
 198, 201*, 217
 — des Schalls 67*
 — d. Lichtes 15, 67*
 Gewicht 197, 198, 200*
 Gewichtsmaße 55
 Gleichgewicht d. Kräfte 219*, 233*
 Gleichsetzungsverfahren 211
 Gleichungen 187 ff.
 —, Formeln 270
 —, identische usw. 186, 270
 — n-ten Grades 188, 270
 Gleichungsgesetze 189 ff.
 Gleitzahl 15, 62
 Glieder 1
 Goldener Schnitt 228*
- Grad, Winkel- 57 ff.
 — der Gleichungen 188
 Gramm 55
 Grammkalorie 61
 Große Zahlenwerte 15
 Grundwert 78 ff.
 Grundzahl 14, 35
 Gußstück, Gewichtsbestimmung 50*
 Gütegrad einer Vernietung 79*
- Hanfseil, Kräfte 179*
 Handwinde 41*
 Hauptnenner 28 ff.
 Hebel 216*
 Hefnerkerze 154*, 234*
 Heizwert 61, 66*
 Hektar 53, 54*
 Hektogramm 55
 Hektoliter 54
 Henry 70
 Heronische Dreiecksformel 153*
 Hertz 70
 Hintereinanderschaltung 216*, 219*,
 229*, 234*
 Hochofen, Beschickung 41*
 —, Verbrennung 41*
 Hochzahl 14, 35
 Hornersche Anordnung 257 ff.
 Horse power 65
 Hundertwert 74*
 Hypotenuse 136, 153*
 Hypothek 83*
- Identische Gleichungen 186
 Imaginäre Zahlen 155*
 —, Formeln 268
 —, Zeichn. Darstellung 156 ff.
 —, Addition u. Subtraktion 156
 —, Multiplikation u. Division 157
 —, Potenzen 158
 Implizite Funktionsgleichung 249
 Index 123
 Indizierte Leistung 77*
 Irrationale Zahlen 144
 Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$: 144
- Joule 69
 Joulesche Gesetz 199
- Kammerton 206*
 Kapazität 38, 69
 Karat, metrisches 55
 Katheten 136, 154*
 Kehrwert 32 ff.
 Kelvin 61, 66*
 Kennziffer d. Logarithmus 171 ff.
 Kilogramm 55
 Kilohertz 70
 Kilokalorie 61, 66, 206*

- Kilometer 51
 Kiloohm 68
 Kilopond 63
 Kilovolt 38, 68,
 Kilowatt 40*, 65, 67*, 69
 Kilowattstunde 42*, 61, 69
 Kirchhoffsches Gesetz 181*, 200, 206*
 Klammern 6
 Knoten 64, 67*
 Koeffizient 86, 219
 Kolbenpumpe, Leistung 67*
 Komplexe Zahlen 160 ff.
 — —, Formeln 269
 — —, graph. Darstellung 160 ff.
 — —, Addition u. Subtraktion 163
 — —, Multiplikation u. Division 164
 — —, Potenzierung 165
 — —, Radizierung 165
 Konjugiert irrationale Zahlen 145
 Konjugiert komplexe Zahlen 162
 Koordinatenachsen 236
 Körpermaße 54
 Korrespondierende Addition u. Sub-
 traktion 119, 122*
 Kraft 198
 Kräftepaar 63, 66*
 Kreiselpumpe, Fördermenge 25*, 42*,
 135*
 Kreisinhalt 42*, 123*, 134*, 234*
 Kreisumfang 41*, 123*
 Kuben 14
 Kubikdezimeter 54, 55*
 Kubikfuß 54
 Kubikmeter 54, 55*
 Kubikmillimeter 54
 Kubikwurzel 138
 Kubikzentimeter 54, 55*
 Kubische Gleichung 188
 — —, graph. Lösung 253 ff.
 Kugeldruckprobe 228*
 Kugelvolumen 176*
 Kürzen 28

 Längenkreis 51
 Längenmaße 51
 Leistung 65, 67*, 187, 198, 202*,
 203*
 —, elektrische 11*, 69, 199, 205*, 234*
 Leistungsfaktor 69
 Leitfähigkeit 68
 Lichtbedarf 180*
 Lichtgeschwindigkeit 15, 67*
 limes 170
 Lichtjahr 15, 51
 Lineare Gleichung 188 ff.
 — — mit 2 Unbekannten 207 ff.
 — — mit mehreren Unbekannten 217 ff.
 — —, rechnerische Lösung 192 ff.
 — —, zeichnerische Lösung 235 ff.

 Linie 52
 Linsengleichung 207*, 234*
 Liter 25*, 60
 log, lg, ln 171
 Logarithmengesetze 173 ff.
 Logarithmenrechnung 168 ff.
 —, Formeln 269
 Logarithmensystem 168
 —, dekadisches 170
 —, natürliches 170
 —, Zusammenhang 176 ff.
 Logarithmentafel, Erklärung 172
 Logarithmische Kurve 182
 — Skala 183, 185
 — Teilung 183
 Logarithmus, Begriffserklärung 168
 — einer Potenz 174
 — eines Produktes 173
 — — Quotienten 174
 — einer Wurzel 174
 Loschmidtsche Zahl 15
 Ludolfsche Zahl 85, 145
 Lumen 180*
 Lux 154*, 180*

 Magneteisenstein 41*
 Mantisse d. Logarithmus 171
 Masse 65, 67*, 134*, 198, 200*, 216*
 Maßstab d. Zeichnung 12*, 24*, 49*
 Megawatt 69
 Megohm 38, 68
 Meile, geogr. und englisch 51
 —, See- 51, 64
 Meter 51
 Meterkilogramm 63, 66*
 Meridiangrad 51
 Meridianminute 51
 Mikrofarad 38, 69
 Mikron 37, 51, 80*
 Mil, engl. 52
 Milliampere 38, 68
 Milligal 64
 Milligramm 55
 Milliliter 54
 Millimeter 51, 52*
 Millimikron 37, 51
 Minuend 4
 Minute 56
 Mittel, arithmetisches 24, 115, 233*
 —, geometrisches 118, 153*, 233*
 —, harmonisches 233*
 Mittlere Proportionale 118, 179*
 Mittelwert 24*, 115
 Modul des Logarithmensystems 177
 Momente 63
 Morgen 53
 Multiplikand 9
 Multiplikation v. Dezimalzahlen 46

- Multiplikation v. ganzen Zahlen 9
 — — gebrochenen Zahlen 31
 — — relativen Zahlen 12, 98
 — — Summen u. Differenzen 99 ff.
 — unbestimmter Zahlen 96 ff.
 Multiplikator 9
 Negative Zahlen 5
 Nenner 26
 Nettogewicht 3*, 8*
 Neugrad 59
 Neuminute 59
 Neusekunde 59
 Normalform d. quadr. Gleichung 219 ff.
 Normalspannungen 62
 Normalstab f. Zerreiversuch 204*
 Normale Teilung 181
 Numerus 168
 Nutzleistung 77*, 198, 203*, 204*
 Ohm 38, 68
 Ohmsches Gesetz 124*, 199, 205*
 Ordinatenachse 157, 236
 Papierformate 53*, 234*
 Parallelschaltung 216*, 219*, 229*,
 234*
 Parsec 15, 51
 Pendel 207*
 Periode 43
 Periodenzahl 70, 199, 205*
 Pferdestärke 40*, 65, 67*, 69
 Pfund 40*, 55
 —, engl. 55
 Polzahl 199, 205*, 206*
 Pond 63
 Potenzen 13
 — mit der Basis 10: 15
 — — negativer Basis 127
 — — negativem Exponenten 36
 — — gebrochenen Exponenten 141
 — gleichnamige 129
 —, Addition u. Subtraktion 128
 —, Division 35, 130
 —, Multiplikation 128
 —, Potenzierung 131
 Potenzrechnung 125 ff.
 —, Formeln 267
 Primzahlen 19
 Produkt 9
 — unbestimmter Zahlen 96 ff.
 — relativer Zahlen 98
 Produktsatz für Proportionen 115 ff.
 Promillerechnung 80
 Proportionen 114 ff., 122*, 221*
 —, Formeln 266
 —, fortlaufende 121
 —, stetige 118
 Proportionale, vierte 117
 Proportionalitätsfaktor 119, 122*
 Prozentgehalt einer Lösung 76*
 Prozentrechnung 74 ff.
 Prozentsatz 76 ff.
 Prozentwert 75 ff.
 Pythagoras, Lehrsatz 135 ff.
 —, Anwendungen 153*, 154*, 228*,
 233*, 234*, 235*
 Pythagoreische Zahlen 136, 137
 Quadrant 157, 236
 Quadratdezimeter 53
 Quadrat. Einheitsparabel 245
 — Ergänzung 222
 — Gleichung 188
 — — m. mehreren Unbekannten 229 ff.
 — — allgemeine Form 219
 — — Normalform 219
 — — reine 220
 — — rechnerische Lösung 219 ff.
 — — zeichnerische Lösung 245 ff.
 Quadratkilometer 53
 Quadratmeter 53
 Quadratmillimeter 53
 Quadratwurzel 138 ff., 185
 Quadratwurzel, Ausziehen 146 ff.
 Quadratzahlen 14, 185
 Quadratzentimeter 53
 Quadratzoll 54*
 Quersumme 18, 215*
 Quotient 17
 Radiant 60,
 Radikand 139
 Rationale Zahlen 143
 Rationalmachen d. Nenners 145
 Radkranzlnge 41*
 Raummeter 54
 Reaumur 40*, 61
 Rechenoperationen, Übersicht 264
 Rechenschieber 181 ff.
 Rechenstbe, Sonder- 181
 Reelle Zahlen 143
 Regeldetri 70 ff.
 Registertonne 54
 Relative Zahlen 12, 88, 94, 98, 107
 Resultierende 234*
 Reziproker Wert 32 ff.
 Riemenkrfte 179*, 202*
 Riemenschlupf 78*
 Schaulinie 236
 Schlüsselweite 152*
 Schneckengetriebe 204*
 Schnellstahl 67*
 Schnittgeschwindigkeit 67*, 202*
 Schubspannungen 62

- Schwingungszahl 206*
 Sekunde 16*, 56
 Siemens 68
 Sonntag, mittlerer 56
 Spannung, elektr. 68, 199
 Spannung, Festigkeitslehre 61, 198, 216*
 Spezifisches Gewicht 62, 197, 200*
 — Leitwert 68
 — Volumen 49, 64, 66*
 — Widerstand 68, 199, 205*
 Stammbruch 26
 Stellenzahlbestimmung (Rechen-
 schieber) 184
 Sternweite 15, 51
 Stirnräder 216*
 Stromstärke 68, 199
 Stromverzweigung 181*, 200, 206*
 Stunde 16*, 56
 Stundenlöhne 8*, 79*
 Substitutionsmethode 209 ff.
 Subtrahend 4
 Subtraktion v. Dezimalzahlen 46
 — — ganzen Zahlen 4
 — — gebrochenen Zahlen 28 ff.
 — — relativen Zahlen 94 ff.
 — — Summen 6, 93
 — — unbestimmten Zahlen 92 ff.
 Summand 1
 Summe 1
 Tangentialspannungen 62
 Tara 3*, 8*
 Technische Grundgleichungen 197 ff.
 Teilbarkeitsregeln 18
 Teiler 17
 Teiler, größter gemeinsamer 21
 Teilerfremde Zahlen 20
 Teilung, normale und logarithmische 181
 Temperaturmaße 60
 — Celsius, Reaumur, Fahrenheit 40*, 60
 Tonne 40*, 55
 Torr 62
 Trägheitshalbmesser 180*, 199, 204*
 205*
 Trägheitsmoment 134*, 199, 204*, 205*
 Übersetzung v. Zahnrädern 123*, 216*
 Umdrehungszahl 11*, 24*, 187, 198,
 201*, 202*
 Umfangsgeschwindigkeit 67*, 187, 198,
 201*, 202*
 Unbekannte Größen 188
 Unechte Brüche 26 ff.
 Unendlich = ∞ 4
 Ungerade Zahlen 18
 Ungleichheitszeichen 4, 92
 Urmeter 51
 Variable 235
 Veränderliche 235
 Vielfach, kleinstes gemeinsames 21
 Vieta, Lehrsatz 226
 Vollwinkel 58
 Volt 38, 68
 Voltampere 69
 Volumen, spezifisches 49, 63, 66*
 Vorperiodische Stellen 43
 Vorzeichenregeln 12, 25, 265
 Wärmemaße 61, 66*
 Wärmemenge 180*, 199, 205*, 206*
 Wasserbehälter 216*
 Watt 11*, 65, 69, 199, 205*, 234*
 Wattsekunde 69
 Wattstunde 69
 Weg 11*, 24*, 63 ff., 67*, 197, 201*,
 217
 Wellendurchmesser 154*, 179*, 187
 Werkstoffbezeichnung 62, 66*
 Wertetabelle 235
 Whitworth-Schraube 49*
 Wichte 62, 197, 200*,
 Widerstand, elektr. 180*, 199, 205*
 Widerstandsmoment 134*, 187, 199,
 204*
 Windrose 59*
 Winkelgrad 57 ff.
 Winkelmaße 57 ff., 60*
 Winkelsumme im \triangle 218*
 Wirkungsgrad, allgemein 77
 —, mechanisch 198, 203*, 204*
 —, thermisch 179*
 — beim Dieselmotor 203*
 — — Schneckengetriebe 204*
 — einer Winde 204*
 Wurzelexponent 139
 Wurzelgesetz für quadr. Gleichungen
 225
 Wurzeln, Addition und Subtraktion
 140
 —, Multiplikation 142
 —, Potenzierung 143
 —, Radizierung 143
 Wurzelrechnung 137 ff.
 —, Formeln 268
 Wurzelzeichen 138
 X-Einheit 37, 51
 Yard 51
 Zähler 26
 Zahlen, gemischte 26
 Zahleneinteilung 263
 Zahlenwerte, sehr große 15
 —, sehr kleine 37

| | |
|---|--|
| Zahnhöhe 50* | Zentimeter 51 |
| Zahnteilung 50*, 179* | Zentner 40*, 55 |
| Zehnerbrüche (= Dezimalzahlen) 42 ff. | Zentrifugalkraft 134* |
| Zeiger 123 | Zinsrechnung 81 ff. |
| Zeit 11*, 24*, 63, 67*, 198, 199, 201*, 217* | Zoll 52 |
| Zeitmaße 56 | Zugspannungen 62, 66*, 124*, 204*, 216* |
| Zentigramm 55 | Zweigbruch 26 |
| Zentiliter 54 | |

V. Namenverzeichnis

| | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| Abel 235 | Fahrenheit 40 | Napier 170 |
| Ampère 68 | Faraday 69 | Ohm 68 |
| Angström 37 | Galilei 62, 64 | Plato 19 |
| Bernoulli 155 | Gauß 160 | Pythagoras 135, 137 |
| Briggs 170 | Henry 70 | Réaumur 40 |
| Brinell 228 | Heron 153 | Siemens 68 |
| Cartesius 14 | Hertz 70 | Stifel 142 |
| Celsius 61 | Jauer 138 | Torricelli 62 |
| Coulomb 68 | Joule 69 | Vieta 226 |
| Descartes 14, 236 | Kelvin 61 | Volta 68 |
| Eratosthenes 19 | Kirchhoff 181 | Watt 69 |
| Enklid 21, 137, 144 | Loschmidt 15 | Weber 160 |
| Euler 155 | Ludolf van Ceulen 85 | |