Dipl.-Ing. Erich Gasse

MATHEMATIK

für metallbearbeitende Berufe

Teil 2 | Geometrie
Stereometrie
Trigonometrie

FACHBUCHVERLAG GMBH · LEIPZIG

Dipl.-Ing. Erich Gasse

MATHEMATIK

für metallbearbeitende Berufe

Teil 2 | Geometrie
Stereometrie
Trigonometrie

4. verbesserte Auflage

FACHBUCHVERLAG GMBH · LEIPZIG 1952

Bestellnummer: A 1013

Fachbuchverlag GmbH., Leipzig W 31, in Verbindung mit dem A. Ziemsen Verlag, Wittenberg/Lutherstadt

Satz, Druck und Bindung: IV/2/14 - VEB Werkdruck Gräfenhainichen - 5

Lizenz Nr. 114 – 270/171/51

Vorwort

Wie bereits im 1. Band dieses mathematischen Werkes gezeigt wurde, ist in der Metallbearbeitung auch für den im wesentlichen praktisch Arbeitenden ein tieferes Eindringen in die Mathematik die unerläßliche Voraussetzung für ein Schaffen im neuen Geiste unserer Zeit. Nur von der sicheren Grundlage gewisser mathematischer Kenntnisse aus kann der Werkstattmann über das bloße Erfahrungsschema für einzelne Arbeitsvorgänge hinauswachsen zu freier, schöpferischer Arbeit, kann er teilnehmen an der Verbesserung der Arbeitsmethoden und an der güte- und mengenmäßigen Leistungssteigerung, kann er mit beitragen zu der wirtschaftlich besten Verwertung des Materials und zur Senkung der Selbstkosten seines Betriebes — kurz zur Erfüllung all der hohen Aufgaben, die der Fünfjahrplan gerade der Metallbearbeitung als einem Schwerpunkte unserer Wirtschaft stellt.

Beim Erwerb der dazu notwendigen mathematischen Bildung will ihm die „Mathematik für metallbearbeitende Berufe“ ein wirksamer Helfer sein.

Der 1. Band behandelt das Fachrechnen mit bestimmten Zahlen und Buchstaben sowie das Rechnen mit Gleichungen. Unter Voraussetzung des in jenem Bande gebotenen Stoffes befaßt sich der vorliegende 2. Band mit der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie.

Auch er ist zunächst gedacht als Lehr- und Aufgabenbuch zum Selbstunterricht für den vorwärtsstrebenden Facharbeiter, Techniker und Ingenieur, insbesondere für unsere Aktivisten. Darüber hinaus soll er, ebenso wie der 1. Band, den Besuchern der Volkshochschule sowie den Studierenden der Arbeiter- und Bauernfakultät Wegweiser und Helfer in ihrer Ausbildung sein.

Bei der Behandlung des Stoffes ist nicht nur Wert auf eine möglichst leichtverständliche Beweisführung für die einzelnen geometrischen, stereometrischen und trigonometrischen Lehrsätze gelegt, sondern es wird auch eine große Zahl von Beispielen und Aufgaben gebracht, die sich den Bedürfnissen der Praxis anpassen und den Stoff somit dem Leser nahebringen.

Für sämtliche Aufgaben sind am Schluß des Buches zur Nachprüfung der eigenen Lösungen die Ergebnisse angeführt.

Die Zusammenstellung der abgeleiteten Lehrsätze und Formeln ist als kurze Wiederholung des Stoffgebietes gedacht und kann gleichzeitig zum Nachschlagen in der Praxis dienen.

Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Die Geometrie der Ebene

A. Einleitung ... 1
1. Einteilung der Geometrie ... 1
2. Geschichte der Geometrie ... 1

B. Die geometrischen Grundbegriffe ... 4
1. Der Punkt ... 4
2. Die Linien ... 4
3. Die Winkel ... 6
Aufgaben ... 13

C. Die Dreiecke ... 15
1. Bezeichnung der einzelnen Größen ... 15
2. Einteilung der Dreiecke ... 16
3. Lehrsätze über die Dreiecke ... 18
a) Summe zweier Dreiecksseiten ... 18
b) Differenz zweier Dreiecksseiten ... 18
c) Innenwinkel ... 18
d) Außenwinkel ... 20
e) Verhältnis zwischen Seiten- und Winkelgrößen ... 20
f) Satz des Thales ... 21
g) Winkel mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Schenkeln ... 21
Aufgaben ... 22
4. Die Kongruenz der Dreiecke ... 25
5. Symmetrie ... 28

D. Die planimetrischen Grundkonstruktionen ... 29
1. Konstruktion von Senkrechten ... 29
2. Konstruktion paralleler Geraden ... 32
3. Streckenteilung ... 34
4. Winkelkonstruktion und -teilung ... 35

E. Die Vierecke ... 38
1. Bezeichnung der einzelnen Größen ... 38
2. Die Einteilung der Vierecke ... 39
Zusammenstellung ... 41
3. Lehrsätze über die Vierecke ... 42
a) Winkelsätze ... 42
b) Seitensatz ... 43
c) Diagonalensätze ... 43
d) 2 Mittelliniensätze für Trapeze ... 44
Aufgaben ... 45

F. Der Kreis ... 49
1. Bezeichnung der einzelnen Teile ... 49
Aufgaben ... 53
2. Lehrsätze über den Kreis ... 54
Sehnen ... 54
Tangenten ... 56
Äußere und innere Tangenten an 2 Kreisen ... 58
Kreis und Winkel ... 59
Kreis und Dreieck ... 61
Kreis und Viereck ... 63
Aufgaben ... 64

G. Flächeninhaltsbestimmung ... 67
1. Einleitung ... 67
2. Flächeninhaltsbestimmung geradlinig begrenzter Flächen ... 68
Quadrat ... 68
Rechteck ... 68
Parallelogramm ... 69
Lehrsatz des Euklid ... 69
Lehrsatz des Pythagoras ... 70
Höhensatz ... 71
Die Projektion einer Strecke ... 72

Der allgemeine Lehrsatz des Pythagoras 75
Dreieck 75
Inkreis 76
Ankreis 77
Heronische Dreiecksformel 78
Trapez 79
Viereck 79
Beliebige n-Ecke 82
Beispiele 82
Aufgaben 91

H. Verhältnisgleichheit und Ähnlichkeit 97
Innere und äußere Teilung einer Strecke 98
Vierte Proportionale 99
Mittlere Proportionale oder geometrisches Mittel 99
1. Strahlensatz 100
2. Strahlensatz 102
Anwendung der Strahlensätze
a) Winkelhalbierende im Dreieck 102
b) Harmonische Teilung 103
c) Harmonisches Mittel 105
d) Schwerlinien im Dreieck 106
Ähnlichkeit 106
Ähnlichkeitslage 107
Die 4 Ähnlichkeitssätze 108
Beispiele 108
Anwendung der Ähnlichkeitssätze
a) Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke 109
b) Der Sehnensatz 110
c) Der Sekantensatz 110
d) Der Sekanten-Tangentensatz .. 111
e) Der goldene Schnitt oder die stetige Teilung 112
f) Der Satz des Ptolemäus 113
Aufgaben 113

I. Regelmäßige Vielecke 116
1 Grundbegriffe 116
2. Konstruktion regelmäßiger Vielecke 118
a) Technische Verfahren der Praxis 118
b) Mathematische Konstruktionsverfahren 119
c) Näherungskonstruktionen 121
3. Berechnung regelmäßiger Vielecke 123
a) Beziehung zwischen s_n und s_{2n} . 123
b) Seitenlängen und Umfänge 124
c) Inhalte 125
d) Sehnen und Tangenten-Vielecke 127

K. Kreisberechnungen 130
1. Kreisumfang 130
Die Zahl π 131
2. Kreisinhalt 131
Quadratur des Kreises 132
Aufgaben 133
3. Kreisring 135
4. Kreisausschnitt oder -sektor ... 137
Aufgaben 138
5. Kreisabschnitt oder -segment ... 142

L. Schwerpunktsberechnungen ... 145
1. Strecke 145
2. Dreieck 145
3. Regelmäßiges Vieleck 145
4. Viereck 145
5. Trapez 146
6. Vieleck 148
7. Kreis 148
8. Kreisbogen 148
9. Kreissektor 149

Teil II. Die Geometrie des Raumes

A. Die stereometrischen Grundbegriffe und die verschiedenen Körper 150
1. Ebenflächige Körper 150
a) Prismen 150
b) Pyramiden 151

c) Pyramidenstumpfe 152
d) Obeliske 152
e) Prismoide 152
f) Die 5 platonischen Körper ... 152
2. Krummflächige Körper 154
a) Zylinder 154
b) Zylinderhuf 155
c) Hohlzylinder 155
d) Kegel 155
e) Kegelstumpf 156
f) Kugel 156
g) Kugelabschnitt 157
h) Kugelausschnitt 157
i) Kugelschicht 158
k) Ring 158

B. Berechnung der Rauminhalte und Oberflächen 158

1. Ebenflächige Körper 159
Quader 159
Würfel 159
Cavalierischer Grundsatz 160
Prismen 160
Schief abgeschnittene Prismen 161
Pyramiden 163
Prismoid 166
Pyramidenstumpf 168
Obelisk 170
Platonische Körper 171

Aufgaben 171

2. *Krummflächige Körper* 178
Guldinsche Regeln 179
Satz des Cavalieri 179
Zylinder 179
Schiefer Kreiszylinder........ 180
Schräg geschnittener gerader Kreiszylinder 180
Zylinderhuf oder Zylinderstutz 181
Hohlzylinder oder Rohr 183
Kegel........................... 183
Schiefer Kreiskegel 185
Kegelstumpf 185
Kugel 187
Kugelabschnitt oder -segment 189
Kugelausschnitt oder -sektor.. 190
Kugelkappe oder Kalotte 190
Kugelschicht 191
Kugelzone 192
Hohlkugel 193
Hohlkugel-Ausschnitt oder Hohlkugel-Sektor 193
Zylindrischer Ring........... 194
Aufgaben 194

Teil III. Die Trigonometrie

A. Einleitung 204
Winkelmessung im Grad- und Bogenmaß 205

B. Die 4 trigonometrischen Funktionen für spitze Winkel 206
1. sin, cos, tg *und* ctg *im rechtwinkligen Dreieck* 206
2. Die Funktionswerte der Komplementwinkel 210
3. Die Funktionswerte bestimmter Winkel 210
4. Die trigonometrischen Zahlentafeln 212
5. Die Beziehungen der Funktionen untereinander 214
6. Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke 217
7. Anwendungsbeispiele 219
Aufgaben 231

C. Die 4 trigonometrischen Funktionen für sämtliche Winkel 235
1. Einheitskreis und Koordinatenkreuz 235
2. Die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis....... 237
3. Der Funktionsverlauf und die 4 trigonometrischen Kurven 239

4. Die Funktionswerte für stumpfe und negative Winkel 244

D. Die 4 trigonometrischen Funktionen im schiefwinkligen Dreieck 249

1. Der Sinussatz 250
2. Der Kosinussatz 251
3. Der Halbwinkelsatz 253
4. Dreiecksinhalt 254
5. Beispiele und Aufgaben 255

E. Die trigonometrischen Funktionen zusammengesetzter Winkel 261

1. Die Additionstheoreme 261
2. Die Funktionen der doppelten und halben Winkel 265
3. Beispiele und Aufgaben 266

F. 1. Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen ... 269

2. Beispiele und Aufgaben 271
3. Die Mollweideschen Formeln und der Tangenssatz 273
Aufgaben 278

G. Goniometrische Gleichungen .. 278

Aufgaben 282

H. Die Sinusschwingung 283

1. Die Amplitude oder Schwingungsweite 283
2. Die Periode und die Frequenz ... 284
3. Die Phasenverschiebung 285
4. Zusammengesetzte Sinusschwingungen 286
a) Die Summe zweier Sinusfunktionen 286
b) Das Produkt zweier Sinusfunktionen 289

Zusammenstellung der Lehrsätze und Formeln 293

Lösungsergebnisse der Aufgaben .. 302

Sachverzeichnis 310

Teil 1

Die Geometrie der Ebene oder die Planimetrie

A. Einleitung

Die *Geometrie* (auf Deutsch: Erdvermessung) ist ganz allgemein die Lehre von den Längen-, Flächen- und Raumgrößen. Sie betrachtet nur die Form und die Größenverhältnisse, sowie die Lagebeziehungen der einzelnen Teile zueinander. Der Stoff dieser Gebilde wird außer acht gelassen.

1. Einteilung der Geometrie

Je nachdem sich die geometrischen Betrachtungen auf ebene (= plane) Gebilde, die sich durch Linien in einer Ebene darstellen lassen, oder auf räumliche Gebilde beziehen, unterscheidet man zwischen der Geometrie der Ebene, der sogenannten *Planimetrie*, und der Geometrie des Raumes, der sogenannten *Stereometrie* (Stereo = der Stern). Die Geometrie auf der Oberfläche einer Kugel ist die *sphärische Geometrie*, die für den Astronomen und den Seemann von Bedeutung ist.

Ein Teilgebiet der ebenen Geometrie ist die *Trigonometrie*, die die Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten geometrischer Gebilde aufstellt. Eine Verbindung algebraischer und geometrischer Begriffe finden wir in der *analytischen Geometrie*, in der geometrische Probleme auf rechnerischem Wege gelöst werden. Die *darstellende Geometrie* beschäftigt sich mit der zeichnerischen Wiedergabe körperlicher Gebilde und ist die Grundlage des technischen Zeichnens. Ein besonderer Zweig der darstellenden Geometrie ist die *Perspektive*. Sie stellt die Körper (dreidimensional) auf der zweidimensionalen Zeichenfläche so dar, daß bei dem Betrachter einer perspektivischen Zeichnung der Eindruck eines Körpers erweckt wird. Unter der Geometrie der Bewegung versteht man die sog. *Kinematik*, die für die Ausbildung von Maschinengetrieben von Bedeutung ist.

Für Leser, die an der geschichtlichen Entwicklung der Geometrie interessiert sind, folgt nachstehender kurzer Überblick über die

2. Geschichte der Geometrie

Als Begründer der Geometrie gelten die alten Ägypter. Sie bedienten sich der praktischen Geometrie bei der Feldmeßkunst zur Einteilung der Felder nach den alljährlich eintretenden Nilüberschwemmungen. Die

Regeln dieser Feldmeßkunst sind schon in dem um 1700 v. Chr. entstandenen Papyrus Rhind, dem Mathematikheft des ägyptischen Schülers Ahmes, enthalten. Zu einer eigentlichen Wissenschaft entwickelt wurden diese geometrischen Grundlagen aber erst von den Griechen.

Die ältesten griechischen Geometer sind:

Thales von Milet (639—548 v. Chr.). Er ist einer der sogenannten 7 Weisen des Altertums.

Anaximander (610—546 v. Chr.) und Anaximenes (um 600 v. Chr.) beschäftigten sich mehr mit astronomischen Fragen.

Anaxagoras (499—428 v. Chr.) versuchte den Kreisinhalt genauer zu bestimmen. Von ihm stammen die Grundelemente der Perspektive.

Auf Pythagoras (580—501 v. Chr.) aus Samos werden zurückgeführt der Beweis von der Winkelsumme im Dreieck, der pythagoreische Lehrsatz, der aber schon lange vorher den ägyptischen Feldmessern bekannt war, die pythagoreischen Zahlen sowie die Anfänge der Zahlentheorie.

Hippokrates (um 460 v. Chr.) von Chios ist der Verfasser des ersten griechischen Elementarbuches der Mathematik.

Platon (429—348 v. Chr.) erhob die Geometrie zur Grundlage der Philosophie. Von ihm wird berichtet, daß er keinen Schüler annahm, der nicht geometrische Vorkenntnisse besaß. Sein Schüler Menächmus (um 350) entdeckte die Kegelschnitte, die Aristäus (um 320) in 5 Büchern behandelte.

Mit Euklid (um 300 v. Chr.) beginnt eine neue Epoche der Geometrie. Er faßte erstmalig mit einer für alle Zeiten mustergültigen Systematik die bisher bekannten Sätze der Mathematik in seinen „Elementen" zusammen. Nach ihm zeichnet sich

Eratosthenes (276—195 v. Chr.) durch Anwendung der Geometrie auf die Geodäsie (= Feldmeßkunst) aus.

Archimedes (287—212 v. Chr.) bezeichnete als erster die Strecken durch Zahlen und berechnete bereits Flächen- und Rauminhalte nach Methoden, die erst 2 Jahrtausende später als sogenannte Infinitesimalrechnung genau begründet wurden.

Apollonius (um 200 v. Chr.) ist durch sein Werk über die Kegelschnitte sowie durch die Berührungsaufgaben bekannt.

Heron (um 110 v. Chr.) überlieferte ein Lehrbuch für Feldmesser und die nach ihm benannte Dreiecksinhaltsformel.

Hipparch (um 140 v. Chr.) und Theodosius (um 55 v. Chr.) verfaßten Werke über die für die Astronomie wichtige sphärische Trigonometrie.

Nach Christi Geburt ragt unter den griechischen Geometern als der bekannteste Ptolemäus (87—165 n. Chr.) hervor. Er entwickelte die Grundlagen der Trigonometrie und arbeitete Projektionsmethoden für Landkarten aus. Von ihm stammt die Lehre vom Viereck. Andere der Geometrie kundige Gelehrte beschäftigten sich hauptsächlich mit der Abfassung von Kommentaren. Es seien erwähnt die mathematischen Sammlungen des Pappos (um 300 n. Chr.) und der von Eutokius (um 540 n. Chr.) verfaßte Kommentar zu Archimedes und Apollonius.

Die Geometrie der alten Römer steht im Vergleich zur griechischen Geometrie auf niedriger Stufe. Sie beschränkten sich auf die praktische Feldmeßkunst.

Die Geometrie der alten Inder zeichnete sich durch die ihnen eigene Beweisführung auf Grund augenfälliger Anschauung aus. Die geometrischen Hauptwerke sind die des Aryabhatta (um 510 n. Chr.) über den Inhalt von Pyramide und Kugel. Erwähnenswert sind ferner die Werke von Brahmegupta (um 638) über Vierecke und die Anfänge der Trigonometrie und von Bhaskara Acharya (um 1160).

Die Geometrie der Araber beschränkte sich hauptsächlich auf eine Übersetzung der griechischen Geometriebücher. Von ihnen wurde die Trigonometrie vervollkommnet.

Im Abendlande waren seit der Völkerwanderung bis zum 12. Jahrhundert geometrische Kenntnisse so gut wie unbekannt. Der englische Mönch Atelharts übersetzte 1120 Euklids Werke aus dem Arabischen ins Lateinische. 1220 verfaßte Leonardo von Pisa seine „Practica geometrica“.

Im Mittelalter beschäftigte sich die Geometrie mit der Architektur und der Malerei. Erwähnt seien:

Albrecht Dürer (1471—1528), von dem die Grundlagen des maßstabgerechten Grund- und Aufrißzeichnens sowie die Aufstellung der Gesetze der Perspektive stammen, und

Leonardo da Vinci (1452—1519). Von ihm stammt die Erfindung des Ellipsenzirkels. Verdienste um die Geometrie erwarben sich der Portugiese Nonius (1492—1577), der Niederländer Ludolf van Ceulen (1539—1610), (Die Ludolfsche Zahl: π), ferner Vieta (1540—1603) auf dem Gebiete der sphärischen Trigonometrie sowie Napier (1550—1617) und Briggs (1556—1630) durch Einführung der Logarithmen für die Trigonometrie.

Im 17. Jahrhundert beschäftigten sich Kepler (1571—1630), Cavalieri (1598—1647) und Guldin (1577—1643) mit der Inhaltsberechnung von Körpern. Descartes (1596—1650), auch Cartesius genannt, ist der Begründer der analytischen Geometrie. Newton (1643—1727) und Leibniz (1646—1716) führten durch Anwendung der von ihnen erfundenen Differential- und Integralrechnung die Geometrie auf die moderne Bahn.

Die wichtigsten Vertreter der neueren Geometrie am Ende des 17. Jahrhunderts und im 18. Jahrhundert sind die Gebrüder Jakob und Johann Bernoulli, Euler, Lambert und Monge, der der Schöpfer der darstellenden Geometrie ist.

Das 19. Jahrhundert brachte durch Poncelet, Möbius, Steiner und Gauß sowohl in der reinen Geometrie als auch in der höheren analytischen Geometrie neue Fortschritte.

B. Die geometrischen Grundbegriffe

1. Der Punkt

Der Punkt hat weder eine Längen- noch eine Breiten- noch eine Höhenausdehnung. Hieraus ergibt sich: Ein Punkt hat keine Ausdehnung. Selbst das kleinste Sandkorn ist im geometrischen Sinne kein Punkt, da es ja einen, wenn auch sehr kleinen Raum einnimmt. In der Geometrie ist der Punkt nur die Stelle, an der sich zwei oder mehrere Linien schneiden. Bild 1 zeigt einige Beispiele solcher Punkte, die durch den Schnitt von Linien gebildet werden:

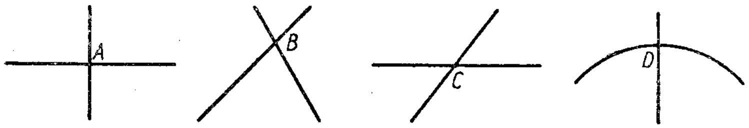


Bild 1

Ein Punkt wird durch einen neben den Schnitt der Linien gesetzten großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

2. Die Linien

2 Punkte A und B einer Ebene (Bild 2) kann man durch verschiedene Linien miteinander verbinden. Es gibt nur eine einzige Verbindung, die die kürzeste ist, und zwar die in der nebenstehenden Skizze mit 1 bezeichnete gerade Linie.

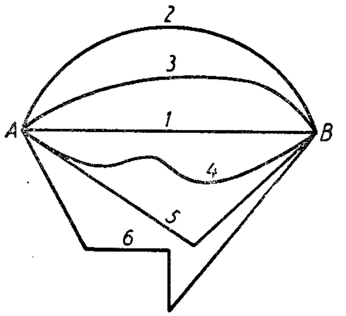


Bild 2

Die gerade Strecke ist der kürzeste Weg zwischen 2 Punkten.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird durch das natürliche Empfinden des Menschen und durch die Erfahrung bestätigt. Mit Hilfsmitteln der höheren Mathematik kann er auch bewiesen werden.

Die weiteren Verbindungslinien der beiden Punkte A und B im Bild 2 haben folgende Eigenschaften:

Linie 2 ist ein Teil eines Kreisbogens. Er hat an allen Stellen eine gleichbleibende (= konstante) Krümmung.

Linie 3 ist eine nur nach der einen Seite gekrümmte Linie. Die Krümmung ändert sich während des Verlaufes dieser Linie. Ein Radfahrer, der längs Linie 3 von A nach B fahren würde, müßte dauernd den Lenker nach rechts eingeschlagen oder mehr oder weniger nach rechts mit seinem Oberkörper geneigt die Strecke zurücklegen.

Linie 4 hat keine konstante Krümmung. Die Krümmung ist veränderlich (= variabel). Längs dieser Linie müßte ein Radfahrer mehrere Male den Lenker nach links und nach rechts einschlagen.

Linie 5 stellt einen gebrochenen Linienzug dar. Er setzt sich aus 2 Strecken zusammen.

Linie 6: Der Weg von A nach B längs dieses Linienzuges setzt sich aus 4 geradlinigen Teilstrecken zusammen. Wir haben es hier mit einer mehrfach gebrochenen Linie zu tun.

Wesentlich für die Geometrie sind zunächst nur die geraden Linien, die man sich durch Fortschreiten eines Punktes in ein und derselben Richtung in unendlich weite Ferne vorstellt. Man nennt sie Geraden (nicht Graden!). Eine gerade Linie, die von einem Punkt A ausgeht und unbegrenzt in geradliniger Richtung sich nur nach einer Seite hin erstreckt (Bild 3), nennt man „*Strahl*". Vergleiche: Der Sonnenstrahl geht von der Sonne als dem Anfangspunkt aus in die „Unendlichkeit". Zeichnerische Darstellung eines Strahles:

Bild 3

Ist eine gerade Linie durch einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt B begrenzt (Bild 4), so heißt sie eine *Strecke*.

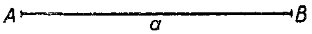


Bild 4

Ein Strahl ist eine nur einseitig begrenzte gerade Linie, während eine Strecke beidseitig begrenzt ist. Man bezeichnet eine Strecke durch ihre beiden Endpunkte A und B (große lateinische Buchstaben) oder durch einen kleinen an die Strecke geschriebenen lateinischen Buchstaben a oder b usw.

Zusammenfassung:

Eine Gerade ——————— ist nach keiner Richtung begrenzt.

Ein Strahl |——————— ist nach einer Richtung begrenzt.

Eine Strecke |———————| ist nach beiden Richtungen begrenzt.

Die Länge einer Strecke mißt man in irgendeinem Längenmaße, z. B. in mm, cm, dm oder m, wobei 1000 mm = 100 cm = 10 dm = 1 m ist.

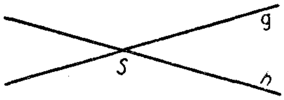


Bild 5

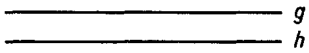


Bild 6

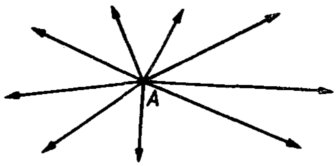


Bild 7

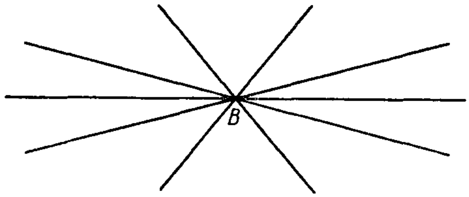


Bild 8

Der Maschinentechniker und -ingenieur mißt Strecken fast ausschließlich in mm. Wenn man die Länge der Strecke a messen soll, so vergleicht man ihre Länge mit der Längeneinheit. Messen heißt Vergleichen. Man stellt beispielsweise fest, daß die Strecke a 50mal so lang wie 1 mm ist, und schreibt a = 50 mm.

Die Länge einer beliebigen Kurve wird gemessen, indem man

1) einen Faden (oder Bandmaß) vollständig an die Kurve anlegt, diesen dann zu einer Strecke spannt und als solche ausmißt (bzw. am Bandmaß die Länge sofort abliest); oder
2) die Kurve in möglichst kleine Strecken zerlegt, die man dann einzeln ausmißt oder mit dem Zirkel auf eine Gerade überträgt.

2 Geraden g und h (Bild 5) können sich entweder in nur 1 Punkt S schneiden, oder sie schneiden sich überhaupt nicht, d. h. sie sind parallel.

Ist g parallel der Geraden h (Bild 6), so schreibt man g || h.

Von einem Punkt A aus können unendlich viele Strahlen ausgehen (Bild 7).

Durch einen Punkt B können unendlich viele gerade Linien hindurchgehen (Bild 8).

3. Die Winkel

2 von einem Punkt ausgehende Strahlen (Bild 9) bilden einen Winkel miteinander. Man versteht unter einem Winkel die gegenseitige Neigung zweier von einem Punkt ausgehender Strahlen. Der Ausgangspunkt der beiden Strahlen heißt der Scheitelpunkt oder auch kurz *Scheitel des Winkels*. Die beiden Strahlen nennt man die *Schenkel des Winkels* Das Zeichen für Winkel ist ein kleiner Winkel mit einem Bogen $\sphericalangle$. Zur Benennung der Winkel werden die ersten Buchstaben des griechischen Alphabetes verwendet (siehe Band 1: Griechisches Alphabet). Die am

meisten verwendeten griechischen Buchstaben zur Winkelbezeichnung sind

α = Alpha γ = Gamma ϱ = Rho ω = Ōmega
β = Bēta δ = Delta φ = Phi (sprich: Fi)

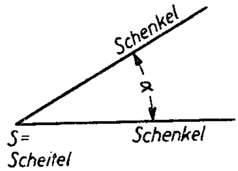


Bild 9

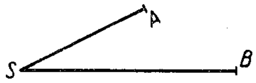


Bild 10

Wählt man auf den beiden Schenkeln des Winkels je einen Punkt A und B (Bild 10), so kann man den Winkel auch wie folgt bezeichnen: $\sphericalangle$ ASB. Die drei großen Buchstaben werden nebeneinander geschrieben, wobei der Scheitel S der mittlere Buchstabe ist.

Die Reihenfolge der 3 Punkte A, S und B wählt man bei der Winkelbezeichnung meist so, daß beim Entlanglaufen auf den Schenkeln des Winkels in der gewählten Reihenfolge, also A-S-B, das Winkelfeld stets zur linken Hand liegen würde.

Würde man die Reihenfolge der 3 Punkte bei der Winkelbezeichnung umkehren, also $\sphericalangle$ BSA, so läge beim Entlanglaufen auf den Schenkeln des Winkels von B nach S und sodann von S nach A das Winkelfeld des soeben betrachteten Winkels zur rechten Hand. Unter $\sphericalangle$ BSA wird man zufolge der obigen Verabredung den durch das Außenfeld der Strahlen gebildeten Winkel verstehen.

Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge der auf den Schenkeln liegenden Strecken SA und SB ab, sondern nur von der gegenseitigen Neigung der beiden Schenkel. Die Größe eines Winkels wird in Graden (°) gemessen. Zum Messen eines Winkels bedient man sich eines Transporteurs oder Winkelmessers. Dies ist eine halbkreisförmige Scheibe, die am Rande in 180 gleiche Teile (Grade) eingeteilt ist.

Bei 2 sich im Punkte S schneidenden Geraden g und h, auf denen nach Bild 11 die Punkte A, B, C und D liegen, entstehen 4 Winkel, nämlich

$$\sphericalangle \text{ASD} = \sphericalangle \alpha$$
$$\sphericalangle \text{CSA} = \sphericalangle \beta$$
$$\sphericalangle \text{BSC} = \sphericalangle \gamma$$
$$\sphericalangle \text{DSB} = \sphericalangle \delta$$

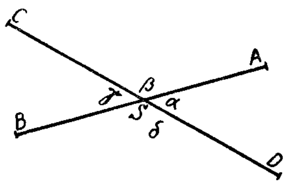


Bild 11

Die Summe dieser 4 Winkel beträgt 360°.

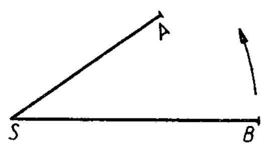


Bild 12

Ein Winkel entsteht, wenn sich um den einen Endpunkt einer festliegenden Strecke SB eine 2. Strecke SA, deren Anfangspunkt S mit dem Anfangspunkt S der ersten

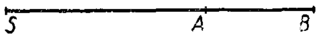


Bild 13

Strecke zusammenfällt, im entgegengesetzten Sinne der Drehbewegung eines Uhrzeigers — dies ist der mathematisch-positive **Drehsinn** — in eine bestimmte Lage dreht (Bild 12). Der Richtungsunterschied der Strecke SA gegenüber der Strecke SB ist dann der Winkel α mit dem Scheitel S und den beiden Schenkeln SA und SB. Fällt der Schenkel SA mit der Richtung des Schenkels SB zusammen, so beträgt der entstandene Winkel 0° (Bild 13). Hat SA eine Viertelkreisbewegung zurückgelegt, steht SA senkrecht auf SB (Bild 14). Der entstandene Winkel beträgt 90°. Man nennt einen Winkel von 90° einen **rechten Winkel** und bezeichnet $\sphericalangle \alpha = 1\,R$.

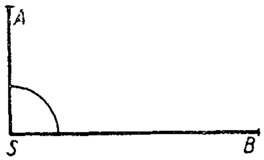


Bild 14

Das Zeichen für Senkrechtstehen ist: $\perp$. Steht SA senkrecht auf SB, so schreibt man SA $\perp$ SB.

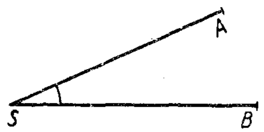


Bild 15

Ist die Neigung des Schenkels SA kleiner als 90°, aber größer als 0°, so ist ein solcher Winkel ein spitzer Winkel.

$\sphericalangle$ ASB (Bild 15) ist ein **spitzer Winkel**.

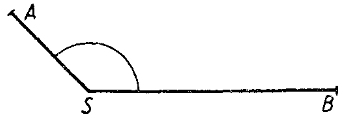


Bild 16

Dreht man SA über die 90°-Lage hinaus, so erhält man einen **stumpfen Winkel** (Bild 16).

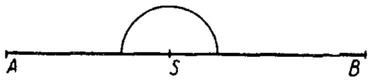


Bild 17

Nach einer halben Kreisbewegung des Punktes A fällt der Schenkel SA in die entgegengesetzte Richtung von SB. A, S und B liegen auf einer geraden Linie. Der entstandene Winkel beträgt 180°. Man nennt ihn einen **gestreckten Winkel** (Bild 17).

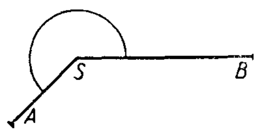


Bild 18

Eine noch weitere Drehung führt zu dem sog. **erhabenen** oder **überstumpfen Winkel** (Bild 18).

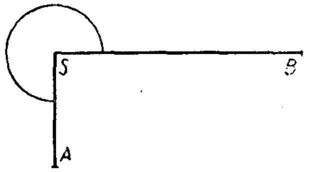


Bild 19

Bild 20

Steht SA wiederum auf SB, aber nach unten hin, senkrecht — dies ist nach einer $^3/_4$ Kreisumdrehung des Punktes A der Fall —, so beträgt dieser Winkel 270° oder 3 R (Bild 19).

Hat sich der Schenkel SA einmal ganz herumgedreht (Bild 20), so daß also A wieder auf den festliegenden Schenkel SB zu liegen kommt, so hat man es mit einem Vollwinkel zu tun. Er beträgt 360° oder 4R.

Zusammenfassung:

Wenn $0° < \alpha < 90°$ ist, dann ist α ein spitzer Winkel.
„ $\alpha = 90°$, ist α ein rechter Winkel.
„ $90° < \alpha < 180°$, ist α ein stumpfer Winkel.
„ $\alpha = 180°$, ist α ein gestreckter Winkel.
„ $180° < \alpha < 360°$, ist α ein erhabener oder überstumpfer Winkel.
„ $\alpha = 270°$, beträgt α 270° oder 3 R.
„ $\alpha = 360°$, heißt der Winkel ein Vollwinkel. Er beträgt 4 R.

Verlängert man einen Schenkel des Winkels α über den Scheitel hinaus (Bild 21), so entsteht sein Nebenwinkel β.

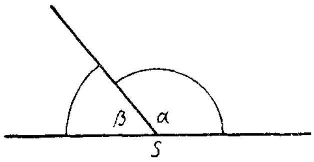


Bild 21

Es ist dann:

$$\alpha + \beta = 180°$$

Winkel, die sich zu 180° ergänzen, heißen Supplementwinkel. Für Nebenwinkel gilt der wichtige Lehrsatz:

Nebenwinkel betragen zusammen 180°, sie sind also Supplementwinkel.

Haben 2 spitze Winkel α und β den Scheitel S und einen Schenkel gemeinsam und stehen die beiden anderen Schenkel aufeinander senkrecht, so beträgt ihre Summe

$$\alpha + \beta = 90° \qquad \text{(Bild 22)}$$

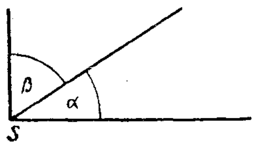


Bild 22

Winkel, die sich zu 90° ergänzen, heißen Komplementwinkel.

Komplementwinkel betragen zusammen 90°.

Die Verlängerungen der Schenkel eines Winkels α über den Scheitel S nach der anderen Richtung bilden den Winkel β (Bild 24).

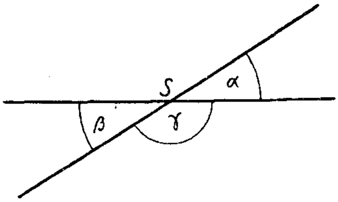


Bild 23

Winkel, die den Scheitel gemeinsam haben und bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen bilden, heißen Scheitelwinkel.

Lehrsatz: *Scheitelwinkel sind gleich.*

Beweis:

α und γ (Bild 23) ergänzen sich als Nebenwinkel zu 180°; desgleichen β und γ, so daß man hat:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma = 180^\circ$$

d. h.: $\alpha = \beta$.

Soweit der exakte mathematische Beweis!

Man erkennt aber auch, daß die beiden Winkel α und β durch die gleiche Drehung einer Geraden um einen auf ihr liegenden Punkt S entstehen und somit gleich sind.

Zusammenfassung:

Beim Schnitt 2 beliebig liegender Geraden (Bild 24) entstehen 4 Winkel, α, β, γ, δ, die folgende Eigenschaften haben:

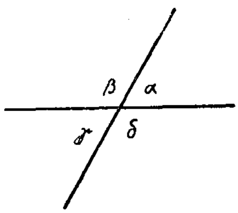


Bild 24

1) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

2) α und γ sowie β und δ sind Scheitelwinkel.

$$\alpha = \gamma \text{ und } \beta = \delta$$

3) $\left.\begin{array}{l}\alpha \text{ und } \beta\\ \beta \text{ und } \gamma\\ \gamma \text{ und } \delta\\ \delta \text{ und } \alpha\end{array}\right\}$ sind 4 Paar Nebenwinkel.

$$\alpha + \beta = 180^\circ \qquad \gamma + \delta = 180^\circ$$
$$\beta + \gamma = 180^\circ \qquad \delta + \alpha = 180^\circ$$

Winkel an parallelen Geraden

Werden 2 Parallele g und h durch eine dritte Gerade s in den Punkten P und P_1 geschnitten, erhält man insgesamt 8 Winkel, von denen je 4 an den Schnittpunkten P und P_1 liegen (Bild 25).

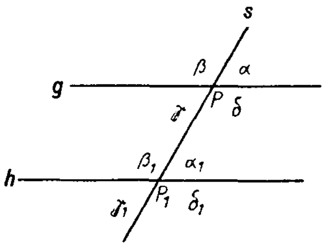


Bild 25

Die Winkel bei P mögen α, β, γ, δ und die bei P_1 in entsprechender Lage α_1, β_1, γ_1, δ_1 heißen. Auf der rechten Seite der schneidenden Geraden s liegen die Winkel α, δ, α_1, δ_1; auf der linken Seite β, γ, β_1, γ_1. Oberhalb der Parallelen liegen die Winkel α, β, α_1, β_1; unterhalb: δ, γ, δ_1, γ_1.

Wir unterscheiden folgende 3 Arten von Winkelpaaren:

1) Winkelpaare, die auf derselben Seite der schneidenden Geraden und auf denselben Seiten der Parallelen liegen, heißen Gegenwinkel (oder gleichliegende Winkel oder Stufenwinkel).

   Gegenwinkel sind: α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1.

2) Winkelpaare, von denen der eine links, der andere rechts der schneidenden Geraden und von denen der eine oberhalb, der andere unterhalb der Parallelen liegt, heißen Wechselwinkel. Wie der Name Wechselwinkel angibt, hat man bei Wechselwinkeln die Seiten der geschnittenen Parallelen und der schneidenden Geraden zu wechseln.

   Wechselwinkel sind: α und γ_1, β und δ_1, γ und α_1, δ und β_1.

3) Winkelpaare, die auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, von denen aber der eine oberhalb, der andere unterhalb der Parallelen liegt, heißen entgegengesetzte Winkel.

   Entgegengesetzte Winkel sind: α und δ_1, β und γ_1, γ und β_1, δ und α_1.

Über diese 3 Arten von Winkeln gibt es folgende 3 Lehrsätze:

1) Gegenwinkel an Parallelen sind gleich,
2) Wechselwinkel an Parallelen sind gleich,
3) Entgegengesetzte Winkel an Parallelen betragen zusammen 2 R.

Beweise zu

1) Man kann sich die Parallelen durch Verschieben des einen Winkels z. B. α in seinen Gegenwinkel z. B. α_1 entstanden denken.

2) Nach 1) ist $\alpha = \alpha_1$ als Gegenwinkel. Als Scheitelwinkel ist aber $\gamma_1 = \alpha_1$. Hieraus folgt, daß $\alpha = \gamma_1$ ist nach dem Grundsatz: Sind 2 Größen (α und γ_1) einer 3. Größe (α_1) gleich, so sind sie untereinander gleich.

3) Es ist $\alpha + \delta = 180°$, da α und δ Nebenwinkel sind. Man kann in diese Gleichung für δ auch δ_1 setzen, da $\delta = \delta_1$ als Gegenwinkel. Man erhält $\alpha + \delta_1 = 180°$ w. z. b. w.

In diesen 3 Lehrsätzen gingen wir von der Parallelität der beiden geschnittenen Geraden aus, d. h. wir setzten voraus, daß die beiden Geraden parallel sind, und behaupteten, daß in einem solchen Falle die Gegenwinkel und auch die Wechselwinkel gleich sind und daß ferner die Summe von 2 entgegengesetzt liegenden Winkeln 180° beträgt.

Man kann aber auch umgekehrt vorgehen, und zwar so: Wir setzen voraus, daß 2 Gegenwinkel an irgendwelchen Geraden, die von einer 3. Geraden geschnitten werden, gleich sind, und wir behaupten dann, daß in diesem Falle die beiden geschnittenen Geraden parallel sind. Vertauscht man in einem Lehrsatz die Behauptung mit der Voraussetzung, so erhält man die Umkehrung dieses Lehrsatzes, die aber nicht immer richtig zu sein braucht. Die Umkehrungen unserer letzten 3 Sätze sind gültig und haben folgenden Wortlaut:

1) u. 2) Werden 2 Geraden von einer 3. so geschnitten, daß ein Paar Gegenwinkel oder auch Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

3) Werden 2 Geraden von einer 3. so geschnitten, daß 2 entgegengesetzt liegende Winkel sich zu 2 Rechten ergänzen, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit 2 beliebigen Punkten auf dem Umfang (Peripherie) des Kreises, so entsteht ein Zentriwinkel.

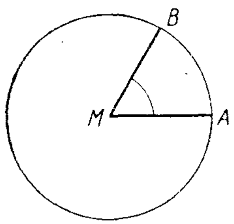


Bild 26

Im Bild 26 ist der Mittelpunkt M eines Kreises mit den Punkten A und B auf der Peripherie verbunden.

Der hierdurch entstehende Winkel BMA ist ein Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel).

Verbindet man einen Punkt A auf der Peripherie eines Kreises mit zwei anderen ebenfalls auf der Peripherie gelegenen Punkten B und C, so entsteht ein sog. Peripheriewinkel.

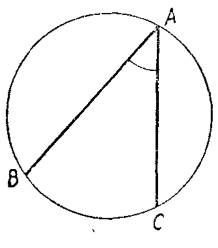


Bild 27

Winkel CAB im Bild 27 ist ein Peripheriewinkel (Umfangswinkel).

Aufgaben

1) Wieviele Schnittpunkte entstehen durch den Schnitt von
   a) 2 Parallelen mit einer Geraden?
   b) 2 Parallelen mit 2 Parallelen?
   c) 3 Parallelen mit einer Geraden?

2) Welches ist die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten bei a) 3 Geraden, b) 4 Geraden und c) 5 Geraden?

3) Durch wieviele gerade Linien kann man a) 3, b) 4, c) 5, d) 6 und e) n Punkte einer Ebene, von denen niemals drei auf einer geraden Linie liegen, miteinander verbinden?

   Anleitung zu e): Man ziehe von einem Punkte aus $(n-1)$ Verbindungslinien und beachte, daß man nur von der Hälfte der n Punkte die Verbindungslinien zu ziehen braucht.

4) 3 Geraden gehen durch einen Punkt S. Wieviele Winkel entstehen an diesem Punkte? Wie groß ist die Anzahl der entstehenden Winkel, wenn n Geraden durch einen Punkt S hindurchgehen?

5) Wie groß ist der zu dem Winkel $\alpha = 35°$ gehörende
   a) Komplementwinkel?
   b) Nebenwinkel oder Supplementwinkel?
   c) Scheitelwinkel?

6) Beim Schnitt zweier Geraden entstehen 4 Winkel. Einer von ihnen betrage 45°. Wie groß sind die 3 anderen Winkel?

7) Welchen Winkel bilden die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel α und β?

8) Von 2 Nebenwinkeln ist der eine doppelt so groß wie der andere. Wie groß sind die beiden Winkel?

9) Welchen Winkel bilden die Zeiger der Uhr um
   a) 3 Uhr, b) 6 Uhr,
   c) 9 Uhr und d) 12 Uhr?

10) Um wieviele Grade weicht die NO-Richtung von der NS-Richtung ab?

11) a) Welchen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 1 min?
    b) Welchen Winkel beschreibt der Stundenzeiger in 1 h?

12) Um wieviele Grade weicht
    a) der große,
    b) der kleine Zeiger der Uhr um 2 h 30 min von der 12-Uhr-Stellung ab?
    c) Welchen Winkel bilden die beiden Zeiger zu dieser Zeit miteinander?

13) 2 Stirnräder haben 13 und 36 Zähne. Um wieviele Grade dreht sich das große Zahnrad weiter, wenn das kleine eine volle Umdrehung macht?

14) Der Zentriwinkel eines Kreises beträgt
a) 18°, b) 40°, c) 72°, d) 120°, e) 270°.
Den wievielten Teil der gesamten Kreisfläche scließen die beiden Schenkel des Zentriwinkels ein?

15) 2 Flachstähle von 40 mm Breite sollen auf Gehrung zu einem Winkel der Größe
a) 90°, b) 70°, c) 60° und d) α
zusammengeschweißt werden.
Unter welchen Winkel müssen die beiden Flachstähle in schräger Richtung zugeschnitten werden?

16) Bei der schraffiert gezeichneten Querschnittsfläche (Bild 28) eines Drehstahles unterscheidet man zwischen folgenden sich zu 90° ergänzenden 3 Schnittwinkeln:

α = Freiwinkel
β = Keilwinkel
γ = Spanwinkel.

Bild 28

Wie groß ist der Spanwinkel, wenn der Freiwinkel 8° und der Keilwinkel 74° beträgt?

17) In welchem Verhältnis stehen 2 Winkel zueinander, deren Schenkel paarweise parallel und
a) gleichgerichtet sind,
b) entgegengesetzt gerichtet sind,
c) von denen ein Schenkelpaar gleich-, das andere entgegengesetzt gerichtet ist?

18) Zum Heben einer Last Q ist ein Seil um ein Rohr von 400 mm lichter Weite gelegt. Die Zugkraft P greift unter einem Winkel a) 70°, b) 50°, c) α an. Wie groß ist der Umschlingungswinkel des Seiles? (Bild 29).
(Der Umschlingungswinkel φ ist der Zentriwinkel, dessen Schenkel auf den beiden Seilrichtungen senkrecht stehen.)

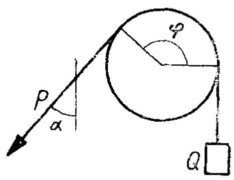


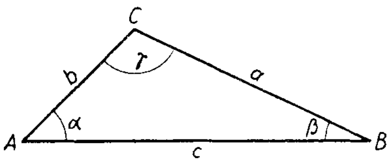
Bild 29

19) Ein Zahnrad hat 45 Zähne. Welchen Winkel bilden die Mittellinien zweier aufeinander folgender Zähne?

20) Die Schenkel eines Winkels von 30° sind 70 mm lang. Wie ändert sich die Größe des Winkels, wenn man die Länge der Schenkel 30 mm länger macht?

C. Die Dreiecke

1. Bezeichnung und Benennung der einzelnen Größen



Ein Dreieck ist ein geschlossener Linienzug von drei Strecken (Bild 30).

Bild 30

Man unterscheidet

a) Ecken. Sie werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet; z. B. A, B und C. Ein Dreieck wird durch die 3 Ecken bezeichnet, indem man sie nebeneinandersetzt und davor das Zeichen: $\triangle$ schreibt. Also: $\triangle$ ABC. Lies „Dreieck Abece". Die Reihenfolge der 3 Buchstaben wählt man gern so, daß man das Dreieck in mathematisch positivem Sinne (entgegengesetzte Umlaufsrichtung des Uhrzeigers) umläuft.

b) Seiten. Man bezeichnet sie entweder durch 2 nebeneinander geschriebene große lateinische Buchstaben, z. B. AB, BC, CA, oder mit 1 kleinem lateinischen Buchstaben, z. B. a, b und c, wobei die Seite a der Ecke A, die Seite b der Ecke B und die Seite c der Ecke C gegenüberliegen.

c) Winkel. Sie werden entweder durch 3 nebeneinander geschriebene große lateinische Buchstaben der Ecken und das davor gesetzte Winkelzeichen oder durch einen kleinen griechischen Buchstaben, z. B. $\sphericalangle\,\alpha$, $\sphericalangle\,\beta$ und $\sphericalangle\,\gamma$, bezeichnet, wobei der Winkel α an der Ecke A, $\sphericalangle\,\beta$ an der Ecke B und $\sphericalangle\,\gamma$ an der Ecke C liegt. $\sphericalangle\,\alpha$, $\sphericalangle\,\beta$ und $\sphericalangle\,\gamma$ sind die 3 Innenwinkel des Dreieckes. Die Außenwinkel des Dreieckes sind die Winkel, die durch eine Dreiecksseite und die Verlängerung der anderen gebildet werden.

Weitere Dreieckslinien sind:

d) Höhen (Bild 31). Unter einer Dreieckshöhe versteht man eine Strecke, die auf einer Dreiecksseite senkrecht steht und die gegenüberliegende Ecke trifft. Man bezeichnet die Höhe von der Ecke A auf die Seite a mit dem Zeichen: h_a (h = Höhe; Zeiger oder Index a gibt an, daß es sich um die Höhe auf die Seite a handelt).

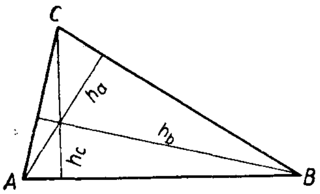


Bild 31

Die 3 Höhen eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte, dem Höhenschnittpunkt. (Beweis auf Seite 61)

e) Mittellinien oder Schwerlinien (Bild 32): Unter einer Mittellinie eines Dreickes versteht man die Verbindungslinie der Mitte einer Seite mit der gegenüberliegenden Ecke und bezeichnet sie durch das Zeichen: m_b

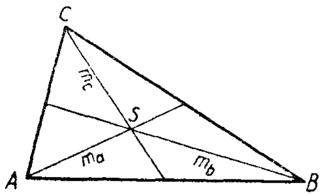


Bild 32

($m =$ Mittellinie; Index b weist auf die Mittellinie von der Ecke B aus hin).

Die 3 Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in dem Schwerpunkt S des Dreiecks.

(Siehe Seiten 106 u. 145)

f) Winkelhalbierende (Bild 33): Eine Winkelhalbierende ist eine Gerade, die einen Dreieckswinkel halbiert. Man bezeichnet z. B. die Halbierende des $\sphericalangle \gamma$ mit: w_γ.

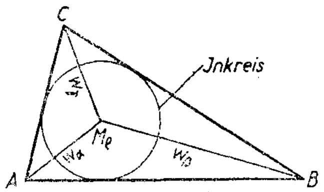


Bild 33

Die 3 Winkelhalbierenden eines Dreieckes schneiden sich in dem Mittelpunkt M_ϱ des Kreises, den man dem Dreieck einbeschreibt.

Dies ist der sogenannte Inkreis.

(Beweis auf Seite 61)

g) Mittelsenkrechte (oder Mittellote) (Bild 34): Dies sind die Senkrechten auf den Mitten der 3 Seiten.

Auch sie schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkt M_r des Kreises, den man dem Dreieck umbeschreibt.

Dies ist der sogenannte Umkreis.

(Beweis auf Seite 61)

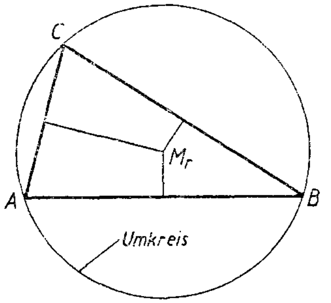


Bild 34

2. Einteilung der Dreiecke

Nach Größe der Dreiecksseiten:

a) Gleichseitige Dreiecke.

Die 3 Seiten und die 3 Winkel sind gleich groß.

b) Gleichschenklige Dreiecke.

2 Seiten und die beiden gegenüberliegenden Winkel sind gleich. Die gleichlangen Seiten heißen Schenkel, die 3. Seite heißt die Grundlinie oder Basis. Die an ihr liegenden beiden gleichgroßen Winkel heißen die Basiswinkel.

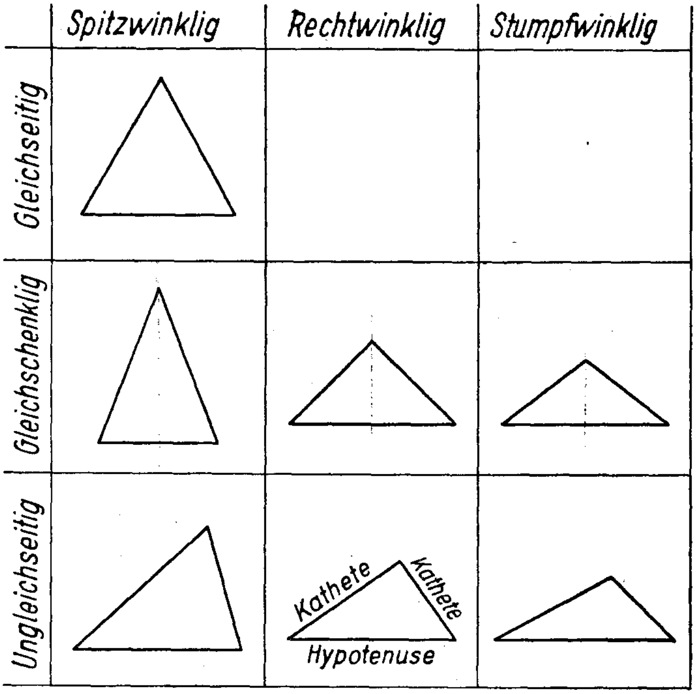


Bild 35

c) Ungleichseitige Dreiecke

Die 3 Seiten und auch die 3 Winkel sind verschieden groß.

Nach der Größe der Winkel:

a) Spitzwinklige Dreiecke

Jeder der 3 Winkel ist kleiner als 90° also spitz.

b) Rechtwinklige Dreiecke

Ein Dreieckswinkel beträgt 90° oder 1 R. In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die den rechten Winkel bildenden Seiten die beiden *Katheten* (= Lotseiten) und die 3., dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die *Hypotenuse* (= Spannseite).

c) Stumpfwinklige Dreiecke

Einer der Winkel ist größer als 90° (aber kleiner als 180°) also stumpf.

3. Lehrsätze über die Dreiecke

a) Die **Summe zweier Dreiecksseiten** ist stets größer als die dritte Dreiecksseite (Bild 36).

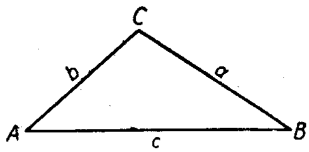


Bild 36

also: $a + b > c$
$b + c > a$
$a + c > b$

Beweis

Der kürzeste Weg von dem Punkte A nach B ist die gerade Verbindungslinie AB. Der Weg von A nach B über C ist ein Umweg; er ist also länger.

b) Die **Differenz zweier Dreiecksseiten** ist stets kleiner als die 3. Dreiecksseite; also: $c - a < b$
$a - c < b$
$b - c < a$

Beweis

Liest man die im vorstehenden Lehrsatz a) angeführte 1. Ungleichung: $a + b > c$ rückwärts, so lautet sie: $c < a + b$. Bei einer Ungleichung darf man auf jeder Seite ein und dieselbe Größe subtrahieren. Zieht man hier auf beiden Seiten a ab, so erhält man $c - a < b$.

c) Die **Winkelsumme in jedem Dreieck** beträgt stets 180°

Für diesen äußerst wichtigen und sehr oft angewendeten Lehrsatz werden nachstehend 3 Beweise angeführt:

1) Man ziehe (Bild 37) durch C die Parallele zu AB. Bei C liegen dann die 3 Winkel ε, γ, δ, die zusammen einen gestreckten Winkel ergeben. Es ist also: $\varepsilon + \gamma + \delta = 180°$. Als Wechselwinkel an Parallelen ist aber $\varepsilon = \alpha$ und $\delta = \beta$. Setzt man in die 1. Gleichung für ε und δ die gleichgroßen Winkel α und β ein, so erhält man

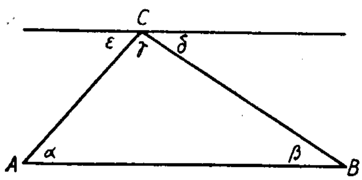


Bild 37

$$\underline{\underline{\alpha + \beta + \gamma = 180°,}}$$

2) Man verlängere (Bild 38) die Seite AC über C hinaus und ziehe durch C die Parallele zu AB. Bei C entstehen die 3 Winkel: ε, δ und γ.

Sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel; also: $\varepsilon + \delta + \gamma = 180°$.

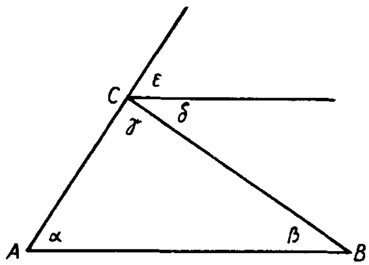


Bild 38

Als Gegenwinkel an Parallelen ist:

$$\varepsilon = \alpha.$$

Als Wechselwinkel an Parallelen ist:

$$\delta = \beta.$$

Für ε und δ werden die gleichgroßen Werte α und β in die Gleichung $\varepsilon + \delta + \gamma = 180°$ eingesetzt; man erhält wiederum:

$$\underline{\underline{\alpha + \beta + \gamma = 180°}}$$

3) Man denke sich das Dreieck ABC (Bild 39) in vergrößertem Maßstabe auf den Erdboden gezeichnet und umlaufe seinen Umfang mit nach vorn ausgestrecktem Arme. Man gehe von A aus über B nach C und von C nach A. Wenn man von A kommend, in B angelangt ist und in der Richtung BC weitergehen will, so beschreibt man mit dem ausgestreckten Arm den Winkel δ. Entsprechend beträgt der in C durch den ausgestreckten Arm beschriebene Winkel: ε, und in A ist dieser Winkel: ζ. Nachdem man in A angekommen ist und wieder die Ausgangsstellung eingenommen hat, hat man eine volle Umdrehung ausgeführt und somit den Winkel $\delta + \varepsilon + \zeta = 360°$ beschrieben.

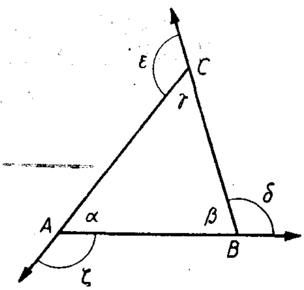


Bild 39

Als Nebenwinkel ist:

$$\delta = 180° - \beta$$
$$\varepsilon = 180° - \gamma$$
$$\zeta = 180° - \alpha$$

Diese Werte in die Gleichung $\delta + \varepsilon + \zeta = 360°$ eingesetzt, ergibt $180° - \beta + 180° - \gamma + 180° - \alpha = 360°$ oder

$$\underline{\underline{\alpha + \beta + \gamma = 180°}}$$

Folgerungen aus dem Lehrsatz über die Winkelsumme im Dreieck:

Kennt man 2 Winkel eines Dreieckes, so kann man den 3. berechnen, indem man die Summe der beiden gegebenen Winkel von 180° abzieht (= subtrahiert).

Ein ebenes rechtwinkliges Dreieck hat nur einen rechten Winkel; denn besäße es 2 rechte Winkel, so müßte der dritte Winkel 0° betragen, was unmöglich ist.

Im rechtwinkligen Dreieck beträgt die Summe der beiden spitzen Winkel 90°. Diese beiden spitzen Winkel sind also Komplementwinkel.

Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck betragen die beiden Basiswinkel je 45°. (45°-Zeichendreieck!)

Beträgt in einem rechtwinkligen Dreieck der eine Winkel 60°, so ist der andere 30° groß. (Zeichendreieck!)

Ein stumpfwinkliges Dreieck hat nur einen stumpfen Winkel, denn gäbe es zwei, so wäre allein schon ihre Summe ohne den dritten Winkel größer als 2 R, was unmöglich ist.

Im gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Winkel 60°; denn einerseits betragen die Winkel zusammen 180°, andererseits aber sind die Winkel untereinander gleich.

d) Ein Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel (Bild 40).

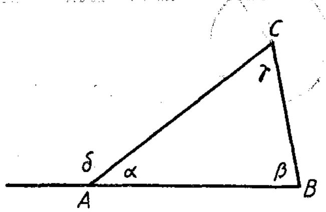


Bild 40

Beweis

Der dem Innenwinkel α anliegende Außenwinkel möge δ lauten. Es ist dann $\alpha + \delta = 180°$. Da aber ferner $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ als Winkelsumme im Dreieck ist, so kann man die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen gleichsetzen; d. h.

$$\alpha + \delta = \alpha + \beta + \gamma$$

oder

$$\underline{\delta = \beta + \gamma.}$$

Folgerung: Ein Außenwinkel ist stets größer als jeder der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

e) Der größeren von 2 Dreiecksseiten liegt auch der größere Winkel gegenüber (Bild 41).

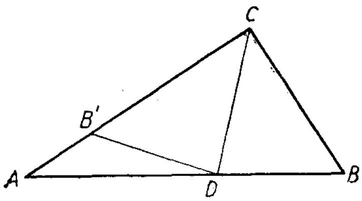


Bild 41

Beweis

Es sei AC > BC. Man zeichne CD als die Winkelhalbierende des $\sphericalangle \gamma$ und klappe das Dreieck CDB um CD um, so daß B auf AC zu liegen kommt. B muß zwischen A und C liegen. In der nebenstehenden Skizze ist es der Punkt B'. Nach der Folgerung zum Außenwinkelsatz unter d): $\sphericalangle$ CB'D > $\sphericalangle$ CAB. Da aber $\sphericalangle$ CB'D der umgeklappte Winkel CBD ist, so ist also $\sphericalangle$ CBD > $\sphericalangle$ CAB.

Es gilt auch die Umkehrung dieses letzten Satzes. Sie lautet:

In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Folgerungen:

1. Sind 2 Dreieckswinkel gleich groß, so sind es auch die beiden gegenüberliegenden Seiten.
2. Sind 2 Dreiecksseiten gleich groß, so sind es auch die beiden gegenüberliegenden Winkel; d. h. die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes ist doppelt so groß wie ein Basiswinkel.

f) Der Lehrsatz des Thales

Der Peripheriewinkel über dem Halbkreis beträgt 90°.

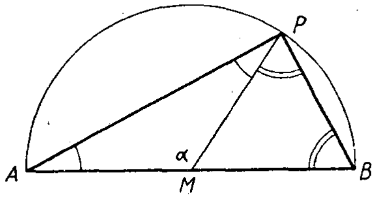


Bild 42

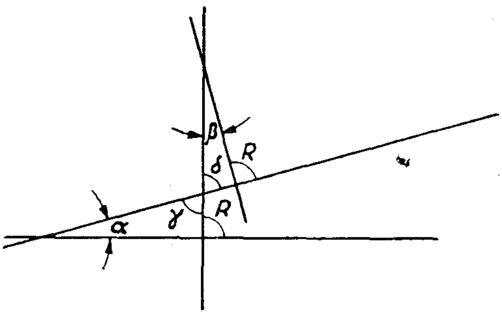
Beweis (Bild 42)

Man verbinde einen beliebigen Punkt P auf der Peripherie mit den Endpunkten A und B des Durchmessers und mit dem Mittelpunkt M. Es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle$ BPA $= 90°$ ist. $\sphericalangle$ AMP möge α sein. Die beiden Dreiecke AMP und MBP sind gleichschenklig. Da in gleichschenkligen Dreiecken die Basiswinkel gleich sind, ist $\sphericalangle \mathrm{PAM} = \sphericalangle \mathrm{MPA} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Als Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks MBP ist $\sphericalangle \mathrm{AMP} = \sphericalangle \mathrm{MBP} + \sphericalangle \mathrm{BPM}$. Da diese beiden Winkel als Basiswinkel gleich sind, ist $\sphericalangle \mathrm{BPM} = \frac{\alpha}{2}$.

Folglich: $\sphericalangle \mathrm{BPA} = \sphericalangle \mathrm{BPM} + \sphericalangle \mathrm{MPA} = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = 90°.$

g) Winkel mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Schenkeln

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich, wenn der Scheitel des einen Winkels nicht zwischen den Schenkeln des anderen liegt.



Behauptung:

$$\alpha = \beta$$

Beweis (Bild 43):

Da im rechtwinkligen Dreieck die spitzen Winkel Komplementwinkel sind, ist:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 90°$$

Bild 43

γ und δ sind als Scheitelwinkel gleich:

$$\gamma = \delta$$

Subtrahiert man die Gleichungen, so folgt:

$$\alpha = \beta\,,\ \text{w. z. b. w.}$$

Hinweis: Siehe Aufgabe 39!

Aufgaben

21) Wo liegen alle Punkte, die von 2 Punkten A und B gleich weit entfernt sind?

22) Gegeben sind 3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B und C. Es soll ein 4. Punkt so bestimmt werden, daß er von den 3 gegebenen Punkten gleich weit entfernt liegt!

23) In einem gleichseitigen Dreieck sind die folgenden 3 Punkte zu konstruieren:
a) Der Schwerpunkt S!
b) Der Mittelpunkt des Umkreises M_r!
c) Der Mittelpunkt des Inkreises M_ϱ!
Wie liegen diese 3 Punkte zueinander?

24) Eine Laderampe hat einen Neigungswinkel von 25°. Sie liegt auf einer Hausmauer auf. Welchen Winkel bildet sie mit ihr?

25) Wie groß ist der Neigungswinkel der Dachflächen gegen die Ebene des Dachbodens, wenn die gleichlangen Dachflächen eines Satteldaches miteinander einen Winkel von 100° bilden?

26) Von einem rechteckigen Stück Blech 200×400 wird eine Ecke nach Bild 44 unter 60° abgeschnitten. Wie groß sind die Winkel α und β?

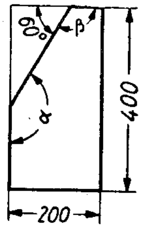


Bild 44

27) Warum kann man aus den 3 Seiten a = 4 cm, b = 5 cm und c = 9 cm kein Dreieck bilden?

28) Von einem Dreieck ist gegeben:

a) $\alpha = 25°$, $\beta = 75°$	d) $\alpha = 20°$, $\beta = 90°$
b) $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$	e) $\alpha = 75°$, $\beta = 30°$
c) $\alpha = 40°$, $\beta = 40°$	f) $\alpha = 91°$, $\beta = 96°$

Wie groß ist der Winkel γ?

29) 2 gleichgroße Kräfte A und B greifen an einem Punkt P an. Ihre Wirkungsgeraden stehen aufeinander senkrecht (Bild 45). Welche Winkel α und β bildet ihre Resultierende R mit ihnen?

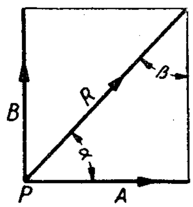


Bild 45

30) Bei einem 45°-Zeichendreieck (dies ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck) ist die größte Seite c cm lang.
Wie groß ist die Höhe dieses Zeichendreieckes?

31) Der Senkwinkel für Kegelsenkungen beträgt 90° nach Bild 46.
Wie groß sind die Winkel α und β?

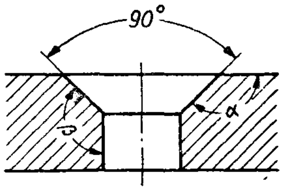


Bild 46

32) In einem Dreieck ist β doppelt, γ dreimal so groß wie α. Wie groß sind die 3 Winkel? Wo wird ein solches Dreieck verwendet?

33) 4 Geraden (Bild 47) schneiden sich in 6 Punkten. Gegeben sind

$$\sphericalangle \alpha = 30°,$$
$$\sphericalangle \beta = 60°,$$
$$\sphericalangle \gamma = 45°.$$

Man berechne die fehlenden Winkel!

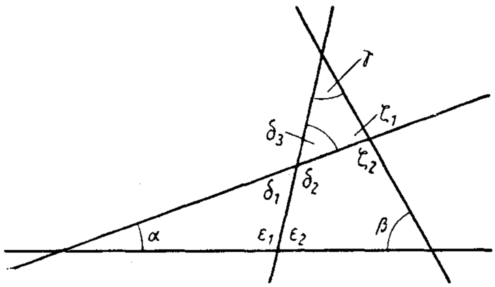


Bild 47

34) In einem gleichseitigen Dreieck ist mit Hilfe eines Winkelmessers ein Winkel in 3 gleiche Teile geteilt. Unter welchen Winkeln schneiden diese Teilungslinien die gegenüberliegende Dreiecksseite?

35) Für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c ist der Mittelpunkt M_r des Umkreises zu bestimmen! Wo liegt er? Wie groß ist der Halbmesser des Umkreises?

36) Ein Dreieck hat die Innenwinkel $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$ und $\gamma = 80°$. Wie groß sind die Außenwinkel an den 3 Ecken?

37) In einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seite c sind die Fußpunkte der 3 Höhen D, E und F miteinander verbunden. Dadurch entsteht wieder ein gleichseitiges Dreieck. Wie lang ist seine Seite? Unter welchen Winkeln schneiden sich die 3 Höhen?

38) Wie groß sind in der Aufgabe 4) Lösung c (S. 32) die Winkel: $\sphericalangle$ ABD, $\sphericalangle$ ACD, $\sphericalangle$ DAC, $\sphericalangle$ CAB?

39) Es ist folgender Satz zu beweisen: Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, ergänzen sich zu 180°, wenn der Scheitel des einen Winkels zwischen den Schenkeln des anderen liegt. (Vergleiche diesen Satz mit dem unter g) auf Seite 21 bewiesenen Lehrsatz!)

40) Auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α ruht eine Last vom Gewicht G kg (Bild 48).

Dieses Gewicht G stellt sich als Kraft durch die Strecke G dar und läßt sich in die beiden Seitenkräfte N (= Normalkraft) und A (= Abtriebskraft) zerlegen.

Wie groß ist der Winkel β, den die Richtung der Kraft N mit der Richtung von G bildet?

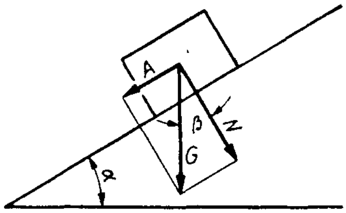


Bild 48

41) In regelmäßigen Vielecken sind die Seiten und sämtliche Winkel gleich groß. Wie groß sind die Winkel im regelmäßigen

a) 6-Eck? c) 8-Eck?
b) 5-Eck? d) 12-Eck?

Anleitung: Man verbinde den Mittelpunkt des Vieleckes mit den Ecken. Man erhält n gleichschenklige Dreiecke.

42) Wie groß ist der stumpfe Winkel, den die Halbierungslinien der Dreieckswinkel α und β miteinander bilden?

43) Wie groß ist der Basiswinkel α eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel γ an der Spitze beträgt:

a) 30° c) 90° e) 160°
b) 70° d) 100° f) γ

44) Wie groß ist der Winkel γ an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Basiswinkel α beträgt:

a) 10° c) 45° e) 80°
b) 20° d) 60° f) α

45) In einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll auf AB ein Punkt D und auf AC ein Punkt E so bestimmt werden, daß AE = ED = DB ist. Wie groß muß der Winkel ABE werden?

46) Es ist zu beweisen, daß der Winkel AMB (Bild 49) dreimal so groß wie der Winkel ACB ist, wenn DC = r = Kreisradius ist!

Anleitung: Hilfslinie MD ziehen!

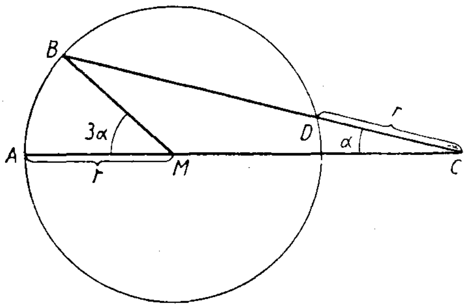


Bild 49

4. Die Kongruenz der Dreiecke

Unter der *Kongruenz* zweier planimetrischer Figuren versteht man ihre *Deckungsgleichheit.* Man kann das Wort Kongruenz ins Deutsche übersetzen mit „Deckungsgleichheit" oder „vollständige Übereinstimmung" oder „Gleichheit in Form und Inhalt". 2 Figuren sind kongruent, wenn sie sich vollständig zur Deckung bringen lassen; d. h. wenn sie in allen Stücken (Seiten und Winkeln) übereinstimmen. Sie müssen gleich sein nach Form und Inhalt. So haben z. B. sämtliche gleichseitigen Dreiecke zwar dieselbe Form — ihre Winkel betragen immer 60° —, ihre Inhalte aber sind nicht immer gleich. Dies ist nur der Fall, wenn die beiden gleichseitigen Dreiecke auch in der Länge ihrer Seiten übereinstimmen. Gleichseitige Dreiecke mit der gleichen Seitenlänge stimmen in Form und Inhalt überein. Sie können zur gegenseitigen Deckung gebracht werden; d. h. sie sind kongruent.

Ebenso sind sämtliche rechtwinkligen Dreiecke, deren eine Kathete doppelt so lang wie die andere ist, der Form nach gleich. Sie sind aber nicht kongruent.

Eine Stanze liefert mit ein und demselben Stempel stets kongruente Schnitte.

Die Stücke, die bei der gegenseitigen Deckung zweier kongruenter Figuren aufeinanderfallen, nennt man *homologe oder gleichliegende Stücke.*

Das mathematische Zeichen für die Kongruenz ist ein Gleichheitszeichen mit einem waagerecht darüberliegenden umgekehrten S; also $\cong$.

Wenn 2 Dreiecke kongruent sind, so stimmen sie in allen gleichliegenden Stücken überein; d. h. sowohl die Seiten als auch die Winkel des einen Dreiecks sind gleich den entsprechenden des anderen Dreiecks. Die beiden Dreiecke haben dann auch den gleichen Flächeninhalt.

Um nun aber festzustellen, ob 2 Dreiecke kongruent sind, braucht man sie nicht auf die Gleichheit sämtlicher homologer Stücke zu prüfen, vielmehr genügt es schon, wenn eine bestimmte Anzahl (3 geeignete Stücke) von Seiten und Winkeln des einen Dreiecks mit der des anderen übereinstimmt. Welche Bedingungen für die Kongruenz zweier Dreiecke erfüllt sein müssen, ist festgelegt in den

4 Kongruenzsätzen:

I) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den 3 Seiten übereinstimmen.

Merkzeichen $\boxed{\text{S S S}}$

II) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in 2 Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Merkzeichen $\boxed{\text{S W S}}$

III) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in 2 Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Merkzeichen $\boxed{\text{S s W}}$

IV) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und 2 Winkeln übereinstimmen.

Merkzeichen $\boxed{\text{W S W}}$ oder $\boxed{\text{W W S}}$

Nach dem Wortlaut der vier Kongruenzsätze müssen also 2 Dreiecke mindestens in 3 voneinander unabhängigen Stücken übereinstimmen, damit sie kongruent sind. 2 Dreiecke, die in der Größe ihrer 3 Winkel übereinstimmen, brauchen nicht kongruent zu sein; denn 3 Winkel sind nicht voneinander unabhängig, da man den 3. Winkel stets aus den beiden anderen berechnen kann (Seite 18 Nr. 3c).

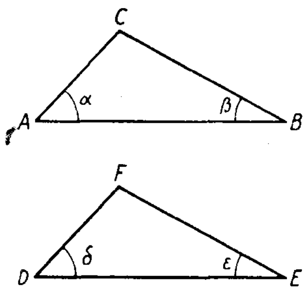


Bild 50

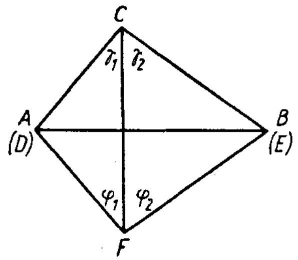


Bild 51

Beweis des 2. Kongruenzsatzes (Bild 50) $\boxed{\text{SWS-Satz}}$

Voraussetzung: $AB = DE$, $AC = DF$, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \delta$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Man lege die Ecke D auf A und die Seite DE auf AB. Da nach Voraussetzung $DE = AB$ ist, fällt E auf B. DF kommt auf AC zu liegen, weil $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \delta$. F fällt auf C, da nach Voraussetzung $DF = AC$ sein soll. Es decken sich also die 3 Ecken der beiden Dreiecke; d.h. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis des 4. Kongruenzsatzes (Bild 50) $\boxed{\text{WSW-Satz}}$

Voraussetzung: $AB = DE$, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \delta$, $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \varepsilon$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Man lege DE auf AB. Da nach Voraussetzung die beiden Seiten gleich lang sein sollen, fällt D auf A und E auf B. DF kommt auf AC und EF auf BC zu liegen, weil $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \delta$ und $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \varepsilon$ ist. F muß also auf AC und BC liegen. Es fällt mit dem Schnittpunkt der beiden Geraden zusammen. Beide Dreiecke decken sich mit ihren 3 Ecken; sie sind kongruent.

Beweis des 1. Kongruenzsatzes (Bild 50 und 51) $\boxed{\text{SSS-Satz}}$

Voraussetzung: $AB = DE$, $AC = DF$, $CB = FE$.

Behauptung: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Man lege beide Dreiecke mit der größten Seite DE an AB aneinander und verbinde C mit F (Bild 51). Es ist $AC = AF$ und $BC = BF$; $\triangle AFC$ und $\triangle BCF$ sind gleichschenklig.

Aus der zweiten Folgerung zu e auf Seite 21 ergibt sich

$$\sphericalangle\gamma_1 = \sphericalangle\varphi_1$$
$$\sphericalangle\gamma_2 = \sphericalangle\varphi_2$$

Durch Addition folgt: $\sphericalangle\gamma_1 + \sphericalangle\gamma_2 = \sphericalangle\varphi_1 + \sphericalangle\varphi_2$

oder: $\sphericalangle BCA = \sphericalangle AFB$

$\triangle ABC$ und $\triangle AFB$ stimmen in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein und sind nach dem 2. Kongruenzsatz kongruent.

Beweis des 3. Kongruenzsatzes $\boxed{\text{SsW-Satz}}$

Der Beweis wird ebenso wie der des 1. Kongruenzsatzes, jedoch durch Aneinanderlegen der jeweils dem Winkel gegenüberliegenden Seite geführt.

Zur Übung im selbständigen Arbeiten beweise man mit Hilfe der Kongruenzsätze jeden der nachstehend aufgeführten

Lehrsätze für das gleichschenklige Dreieck:

1) In jedem gleichschenkligen Dreieck teilt die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze die Basis in 2 gleiche Teile und steht auf ihr senkrecht.
2) Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.
3) Die Mittelsenkrechte auf der Basis geht durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.
4) Das Lot von der Spitze auf die Basis halbiert diese und den Winkel an der Spitze.
5) Stehen 2 gleichschenklige Dreiecke nach ~~verschiedenen~~ Seiten über der Basis, so steht die Verbindungslinie ihrer Spitzen auf der gemeinsamen Basis senkrecht und halbiert sie sowie die Winkel an der Spitze.

Anwendungsbeispiel für die Kongruenz zweier Dreiecke

Der Abstand zweier Punkte A und B (Bild 52) kann wegen eines zwischen ihnen liegenden Hindernisses nicht unmittelbar gemessen werden. Man wählt zur Durchführung dieser Aufgabe einen 3. Hilfspunkt C, der von A und B aus zugänglich ist, und verlängert AC über C hinaus um sich selbst bis zum Punkte D. Ebenso verlängert man BC über C hinaus bis E. Die Entfernung DE, die man messen kann, ist dann gleich der gesuchten, nicht unmittelbar meßbaren Entfernung AB.

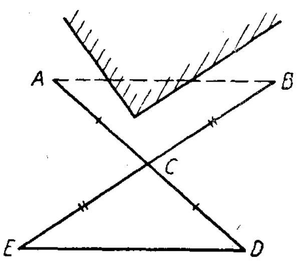


Bild 52

Beweis

Die beiden Dreiecke ACB und EDC sind nach dem 2. Kongruenzsatz $\boxed{\text{SWS}}$ deckungsgleich, weil sie in 2 Seiten ($AC = CD$ und $BC = CE$) sowie in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ($\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$) übereinstimmen.

5. Symmetrie

Unter der Symmetrie (auf deutsch: die Ebenmäßigkeit oder Gleichförmigkeit) versteht man in der Geometrie der Ebene die spiegelbildliche Lage zweier Gebilde (Linien, Flächen) in der Ebene zu einer Geraden, der Symmetrieachse. Entsprechende Punkte — d. h. symmetrisch gelegene Punkte — liegen auf verschiedenen Seiten dieser Symmetrieachse und haben von ihr gleichen Abstand. Außerdem steht ihre Verbindungslinie senkrecht zur Symmetrieachse. Symmetrische ebene Figuren sind kongruent. Sie können aber nicht durch Verschieben in der Ebene zur Deckung gebracht werden, sondern nur durch Umklappen um die Symmetrieachse.

Beispiel:

Die beiden Dreiecke ABC und $A_1C_1B_1$ befinden sich in spiegelbildlicher Lage zur Symmetrieachse X—X. Ihre Eckpunkte A und A_1 (bzw. B und B_1, sowie C und C_1) sind gleichweit von der Symmetrieachse X—X entfernt. Würde man das Bild 53 auf ein Stück Papier zeichnen und dieses dann längs der Symmetrieachse X—X zusammenfalten, so kämen die beiden Dreiecke zur Deckung. Die beiden in Symmetrielage befindlichen Dreiecke ABC und $A_1C_1B_1$ sind also kongruent. Der Versuch, das Dreieck $A_1C_1B_1$ durch Verschieben in der Zeichenebene mit dem Dreieck ABC zur Deckung zu bringen, würde jedoch ohne Erfolg bleiben, da der Umlaufsinn der beiden Dreiecke entgegengesetzt ist.

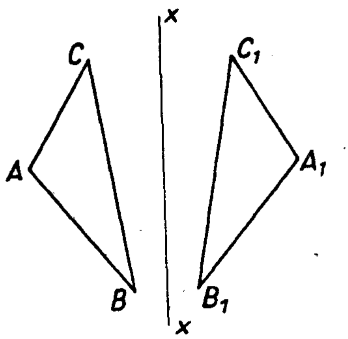


Bild 53

Im Bild 53 liegt die Symmetrieachse außerhalb des Dreiecks ABC. Wir hatten hier 2 Figuren (Dreieck ABC und $A_1C_1B_1$), die zur Achse X—X symmetrisch lagen.

Jedes gleichschenklige Dreieck ist eine sogenannte axialsymmetrische Figur.

Die Symmetrieachse X—X (Bild 54) geht durch die Ecke C und steht senkrecht auf der Basis AB. Sie zerlegt das gleichschenklige Dreieck ABC in 2 Teildreiecke ADC und BCD, die sich in spiegelbildlicher Lage zur Symmetrieachse X—X befinden.

CD steht nicht nur senkrecht auf der Basis, sondern halbiert sie auch. Gleichzeitig aber ist CD die Winkelhalbierende des Winkels BCA.

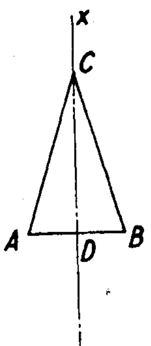


Bild 54

Es gibt auch Figuren, die mehrere Symmetrieachsen besitzen. Man nennt sie mehrfach axialsymmetrisch. So hat z. B. ein gleichseitiges Dreieck 3 Symmetrieachsen.

Der Kreis besitzt sogar unendlich viele Symmetrieachsen, denn er wird durch jeden Durchmesser in symmetrische Hälften geteilt.

Sämtliche in einem späteren Abschnitt behandelten regelmäßigen Vielecke sind axialsymmetrische Figuren.

Die Achsschnitte durch Drehkörper, die beispielsweise durch spanabnehmende Bearbeitung auf Drehbänken gefertigt werden, sind axialsymmetrische Figuren. Die Mittellinie eines solchen Achsschnittes, die nach DIN 15 als Strichpunktlinie gezeichnet wird, ist die Symmetrieachse.

D. Die einfachsten planimetrischen Konstruktionen

Der Mathematiker benutzt als Handwerkszeug zum Zeichnen und Konstruieren geometrischer Gebilde lediglich den Zirkel und das Lineal, während der technische Zeichner und Ingenieur neben der oft geradezu komfortablen Ausrüstung seines Reißzeugkastens als wesentliche Zeichenhilfe noch 2 Zeichendreiecke oder bisweilen in größeren Konstruktionsbüros eine mit Teilkopf versehene Zeichenmaschine zur Verfügung hat.

1. Konstruktionen von Senkrechten

Aufgabe 1

In einem Punkte A ist auf einer Geraden g die Senkrechte zu errichten (Bild 55).

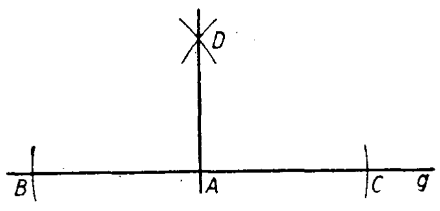


Bild 55

Lösung

Um A beschreibt man mit beliebiger Zirkelöffnung einen Kreis, der die Gerade g in 2 von A gleich weit entfernten Punkten B und C schneidet. Um B und C beschreibt man mit einer anderen etwas größeren Zirkelöffnung 2 Kreisbogen, die sich in D schneiden. Die Verbindungslinie von D mit A ist die gesuchte Senkrechte.

Beweis

$\triangle BAD \cong \triangle ACD$ nach $\boxed{\text{SSS-Satz}}$;

denn AB = AC nach Konstruktion
und BD = CD nach Konstruktion
AD = AD, weil jede Größe sich selbst gleich ist.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit der homologen Stücke. Es ist also $\sphericalangle$ BAD = $\sphericalangle$ DAC. Da aber beide als Nebenwinkel zusammen 180° betragen, muß jeder 90° groß sein; d. h. DA $\perp$ g.

Aufgabe 2

Auf einer Strecke AB ist die **Mittelsenkrechte** (= Mittellot) zu **errichten** (Bild 56).

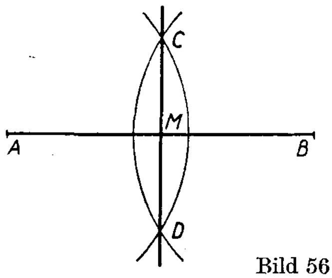


Bild 56

Lösung

Um die beiden Endpunkte der Strecke AB beschreibt man mit einer Zirkelöffnung, die größer ist als die halbe Länge der Strecke AB zwei Kreisbogen, die sich in C und D schneiden. Die Verbindungslinie CD steht auf AB senkrecht und schneidet AB in dem Mittelpunkt M.

Beweis

$\triangle$ ABC und $\triangle$ ADB sind gleichschenklig und stehen nach verschiedenen Seiten auf der gemeinsamen Grundlinie AB. Die Verbindungslinie ihrer Spitzen C und D halbiert die gemeinsame Grundlinie und steht senkrecht auf ihr (vgl. Satz 5 auf Seite 27).

Im Anschluß an diese Konstruktion sei der nachfolgende, mit Hilfe der Kongruenzsätze zu beweisende Lehrsatz angegeben:

„Alle Punkte, die von zwei gegebenen Punkten die gleiche Entfernung haben, liegen auf der Mittelsenkrechten zu diesen Punkten.“

Aufgabe 3

Auf eine Gerade g ist von einem außerhalb liegenden Punkt A **das Lot zu fällen!** (Bild 57).

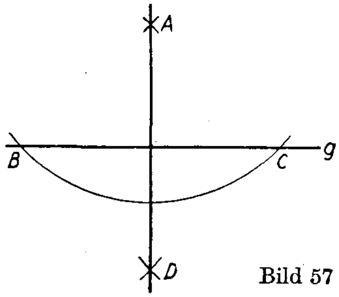


Bild 57

Lösung

Um A beschreibt man mit einer beliebigen Zirkelöffnung einen Kreis, der die Gerade g in den beiden Punkten B und C schneidet. Um diese beiden Punkte beschreibt man nach der entgegengesetzten Seite der Geraden hin 2 gleich große Kreisbogen, die sich in D schneiden. AD ist das gesuchte Lot.

Beweis

Man verbinde A mit B und C sowie D mit B und C. Es entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke BCA und CBD über der gemeinsamen Grundlinie BC. Nach Satz 5 auf Seite 27 steht die Verbindungslinie ihrer Spitzen auf der gemeinsamen Basis BC senkrecht.

Aufgabe 4

In dem einen Endpunkte A einer Strecke AB ist die Senkrechte zu errichten!

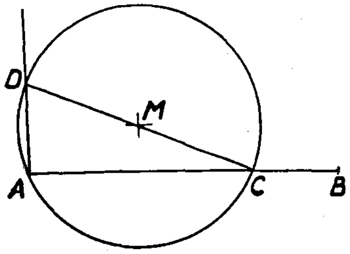


Bild 58

Lösung a)

Um einen beliebig gewählten Punkt M (Bild 58) beschreibt man den Kreis, der durch A hindurchgeht und die gegebene Strecke in dem Punkte C schneidet. Die Verlängerung der Verbindungslinie CM über M hinaus schneidet den Kreis in D (CD ist ein Kreisdurchmesser). AD ist die gesuchte Senkrechte.

Beweis

$\sphericalangle$ DAC beträgt 90° als Peripheriewinkel über dem Halbkreis nach dem Lehrsatz des Thales (Seite 21).

Lösung b)

Man hat mit einer beliebigen Zirkelspanne viermal gleich große Kreisbogen zu beschreiben:

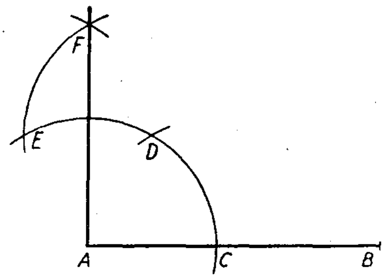


Bild 59

Der Kreisbogen um A liefert den Punkt C (Bild 59).

Dann beschreibt man um C den gleichen Bogen und erhält auf dem ersten den Punkt D.

Der Bogen um D liefert E.

Schließlich erhält man F als Schnittpunkt der Bogen um E und D.

FA ist die gesuchte Senkrechte.

Beweis

$$\sphericalangle DAC = 60°, \text{ da } \triangle ACD \text{ gleichseitig ist.}$$
$$\sphericalangle EAD = 60°, \text{ da } \triangle EAD \text{ gleichseitig ist.}$$

$\triangle$ EAD und $\triangle$ EDF sind gleichschenklig und stehen nach verschiedenen Seiten über der gemeinsamen Grundlinie ED. Nach Seite 27 Satz 5 wird $\sphericalangle$ EAD durch AF halbiert; d. h. $\sphericalangle$ FAD = 30°. Somit ist:

$$\begin{aligned}\sphericalangle FAB &= \sphericalangle DAC + \sphericalangle FAD\\ &= 60° + 30°\\ &= 90° \text{ d. h. } FA \perp AB\end{aligned}$$

Lösung c)

Man beschreibt um A (Bild 60) einen beliebigen Kreisbogen, dann den gleichen Bogen um B und C. Zum Schluß zieht man durch die Schnittpunkte B und C eine Gerade bis D. AD steht senkrecht zu AB.

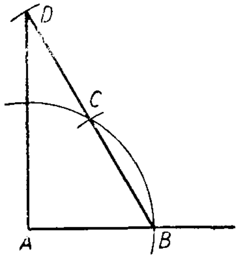


Bild 60

Beweis

$\sphericalangle$ BCA = 60°, da $\triangle$ ABC gleichseitig ist.
$\sphericalangle$ ACD = 120° als Nebenwinkel zu $\sphericalangle$ BCA.
Da $\triangle$ ACD gleichschenklig ist, müssen die Basiswinkel gleich sein. Zusammen betragen sie 60°, jeder also 30°.

$$\begin{array}{r} \sphericalangle DAC = 30^\circ \\ \sphericalangle CAB = 60^\circ \\ \hline \underbrace{\sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB}_{} = 90^\circ \end{array}$$

$\sphericalangle$ DAB = 90°; d. h. DA $\perp$ AB.

Lösung d)

In der Praxis bedient sich der Konstrukteur oder technische Zeichner zum Errichten der Senkrechten bzw. zum Fällen des Lotes (Aufgabe 3) der Zeichenmaschine, die bekanntlich zwei zueinander rechtwinklig stehende Lineale besitzt: Er legt das eine Lineal an die Gerade heran, auf die das Lot gefällt oder auf der die Senkrechte errichtet werden soll; das 2. Lineal gibt dann die Richtung der auf der ersten senkrecht stehenden Geraden an.

Statt der Zeichenmaschine, die nicht immer in einemKonstruktionsbüro an jedem Zeichenbrett vorhanden ist, benutzt man auch einfacher ein Zeichendreieck, das man mit einer Kathete an ein zweites Zeichendreieck oder Lineal oder Reißschiene anlegt, die man an die Gerade gelegt hat, auf der die Senkrechte errichtet werden soll. Durch Verschieben des 1. Dreiecks längs der Berührungskante mit dem 2. Dreieck (Lineal oder Reißschiene) kann man die Senkrechte in jede beliebige zu ihr parallele Lage bringen.

2. Konstruktion paralleler Geraden

Aufgabe 5

Zu einer gegebenen Geraden g ist durch einen außerhalb liegenden Punkt A die Parallele zu konstruieren.

Lösung a)

Auf der Geraden g wählt man einen beliebigen Punkt M (Bild 61) und beschreibt um ihn den Kreis, der durch A hindurchgeht. Dieser

Kreis schneidet die Gerade g in B und B_1. Um B_1 beschreibt man mit BA den Kreis und erhält den Punkt A_1. AA_1 ist die gesuchte Parallele.

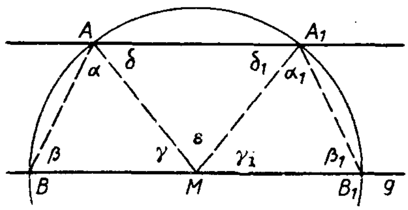


Bild 61

Beweis

$\triangle\ MA_1A$ ist gleichschenklig nach Konstruktion; somit ist $\sphericalangle\ \delta = \sphericalangle\ \delta_1$.

$$\delta + \delta_1 = 2\,\delta = 180^\circ - \varepsilon.$$

$\triangle\ ABM \cong \triangle\ A_1MB_1$ nach $\boxed{\text{SSS-Satz}}$ (Seite 25); somit ist

$$\sphericalangle\ \gamma = \sphericalangle\ \gamma_1.$$

$$\gamma + \gamma_1 = 2\,\gamma = 180 - \varepsilon$$

Es folgt:

$$2\,\delta = 2\,\gamma \text{ oder } \delta = \gamma.$$

Da δ und γ Wechselwinkel an der schneidenden Geraden AM sind, muß wegen ihrer Gleichheit $AA_1 \parallel BB_1$ sein.

Lösung b)

Auf der gegebenen Geraden g wählt man 2 beliebige Punkte B und C (Bild 62). Der Kreisbogen um C mit AB und der Kreisbogen mit BC um A schneiden sich in D.

AD ist die gesuchte Parallele.

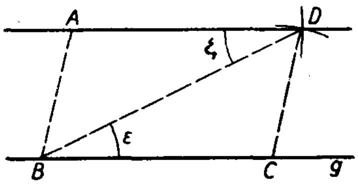


Bild 62

Beweis

Man zeichne als Hilfslinien AB, DC und BD. Nach Konstruktion ist $AB = DC$ und $AD = BC$. Da jede Größe sich selbst gleich ist, ist $BD = BD$. Aus der Gleichheit dieser Seiten folgt nach dem $\boxed{\text{SSS-Satz}}$: $\triangle\ BDA \cong \triangle\ BCD$. Als homologe Stücke sind $\sphericalangle\ \varepsilon = \sphericalangle\ \zeta$. Da diese Winkel aber auch Wechselwinkel an der schneidenden Geraden BD sind, so folgt nach dem Satz 1) und 2) auf Seite 12: $AD \parallel BC$.

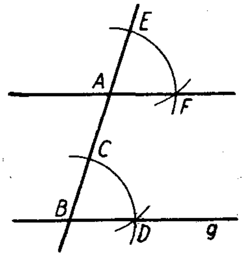


Bild 63

Lösung c)

Durch A legt man eine beliebige Gerade, die g in B schneidet (Bild 63). Um A und B beschreibt man 2 gleiche Kreisbogen beliebiger Größe. Die entstehenden Schnittpunkte seien C, D und E. Um E beschreibt man mit CD den Kreis und erhält F. Die Verbindungslinie von A mit F ist die gesuchte Parallele.

Beweis

$\triangle BDC \cong \triangle AFE$ nach $\boxed{\text{S S S-Satz}}$ (Seite 25).

Es folgt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EAF$.

Diese beiden Winkel sind Gegenwinkel an der schneidenden Geraden AB. Da die Gegenwinkel gleich sind, müssen nach dem Satz 1) und 2) auf Seite 12 die geschnittenen Geraden parallel sein.

Der technische Zeichner verwendet zum Konstruieren paralleler Geraden die Parallelführung seines Reißbrettes oder die Zeichenmaschine oder ein Zeichendreieck und ein Lineal.

Mit Dreieck und Lineal wird Aufgabe 5 folgendermaßen gelöst:

Zunächst legt man die eine Kathete des rechtwinkligen Zeichendreiecks an die gegebene Gerade g und dann ein Lineal an die Hypotenuse des Dreiecks an. Das Lineal hält man fest und verschiebt nun das Dreieck an ihm entlang, bis seine obere Kante den Punkt A erreicht. Die von ihr festgelegte Gerade g′ ist die gesuchte Parallele (Bild 64 u. 65).

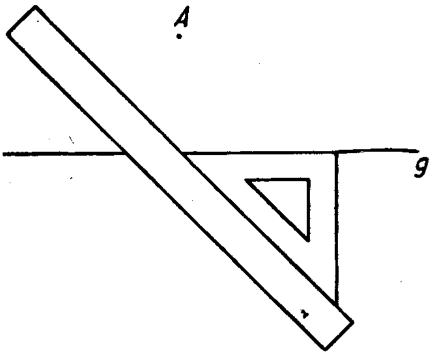


Bild 64

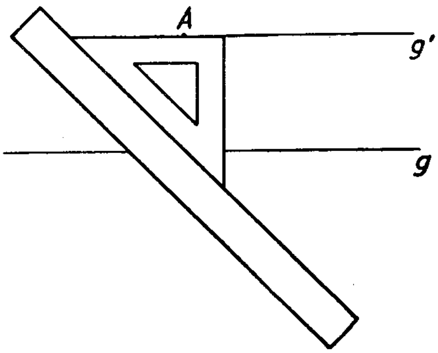


Bild 65

3. Das Teilen von Strecken

Aufgabe 6

Eine gegebene Strecke AB ist in 2 gleiche Teile zu teilen (d. h. die Strecke ist zu halbieren)!

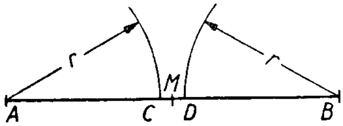


Bild 66

Die Lösung ist die gleiche wie bei der Aufgabe 2 auf Seite 30.

M ist der Mittelpunkt der Strecke AB.

Beim technischen Zeichnen kann der Mittelpunkt M einer Strecke AB ohne Zuhilfenahme eines Lineals oder Zeichendreiecks, also nur mittels Zirkels, schnell und einfach folgendermaßen bestimmt werden (Bild 66):

Man schätzt r als die ungefähre Hälfte von AB und beschreibt mit r Kreisbogen um A und B. Die verbleibende kleine Reststrecke CD läßt sich nach Augenmaß in M halbieren. M ist der gesuchte Mittelpunkt von AB.

Aufgabe 7

Eine gegebene Strecke AB ist in m **gleich große Teile** zu teilen (Bild 67).

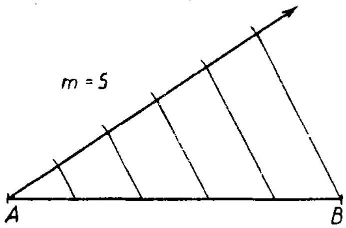


Bild 67

Lösung

Vom Endpunkt A der gegebenen Strecke AB zieht man einen beliebigen Strahl und trägt auf ihm m-mal eine beliebige Strecke hintereinander ab. Den letzten Teilpunkt verbindet man mit dem Endpunkt B der gegebenen Strecke und zieht zu dieser Verbindungslinie durch die anderen Teilpunkte auf dem Strahl die Parallelen, die die gegebene Strecke in den gesuchten Teilpunkten schneiden.

Der Beweis zu dieser Konstruktionsaufgabe ergibt sich nach dem 1. Strahlensatz, der in einem späteren Abschnitte (S. 100) behandelt wird.

4. Konstruktion und Teilung von Winkeln

Aufgabe 8

Im Punkte A einer gegebenen Geraden g ist an diese Gerade ein gegebener **Winkel α anzutragen** (Bild 68).

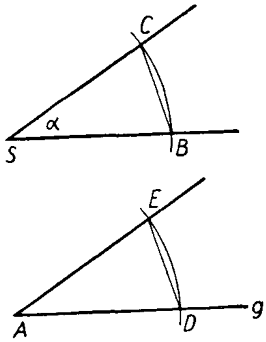


Bild 68

Lösung

Man beschreibt um den Scheitel S des gegebenen Winkels α einen beliebigen Kreisbogen, der die beiden Schenkel in B und C schneidet. Der Kreis um A mit derselben Zirkelöffnung ($= BS = CS$) schneidet die gegebene Gerade g in D. Um D beschreibt man den Kreisbogen mit BC und erhält den Punkt E. Man macht also $DE = BC$.

Der Winkel EAD ist dann gleich dem gegebenen Winkel α.

Beweis

$\triangle ADE \cong \triangle SBC$ nach $\boxed{\text{SSS-Satz}}$

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit der homologen Winkel:

$\sphericalangle EAD = \sphericalangle \alpha$.

Aufgabe 9

Der Winkel $\alpha = 60°$ ist zu konstruieren! (Bild 69.)

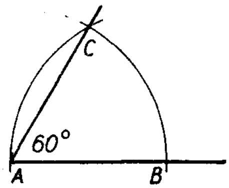


Bild 69

Lösung

Man beschreibt um die Endpunkte der beliebig gewählten Strecke AB mit der Zirkelöffnung AB die beiden gleichen Kreisbogen. Sie schneiden sich im Punkte C. Man verbindet C mit A.

Der hierdurch entstehende Winkel CAB beträgt 60°.

Beweis

Verbindet man B mit C, so ist das hierdurch entstehende $\triangle$ ABC gleichseitig. In ihm ist jeder Winkel 60° groß; also

$$\sphericalangle CAB = 60°.$$

Aufgabe 10

Ein gegebener Winkel ist in 2 gleichgroße Teile zu teilen (= halbieren)!

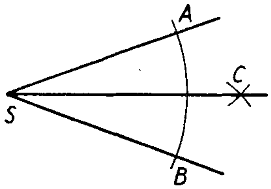


Bild 70

Lösung a) (Bild 70)

Um den Scheitel S des Winkels beschreibt man einen beliebigen Kreisbogen, der die beiden Schenkel in A und B schneidet. Um A und B beschreibt man mit gleicher Zirkelspanne 2 Kreisbogen, die sich in C schneiden. Die Verbindungslinie CS ist die Halbierungslinie des gegebenen Winkels.

Beweis

Durch die Hilfslinien AC und BC entstehen zwei kongruente Dreiecke:

$$\triangle SCA \cong \triangle SBC \text{ nach } \boxed{\text{SSS-Satz}}$$

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit der entsprechenden Winkel; also: $\sphericalangle ASC = \sphericalangle CSB$.

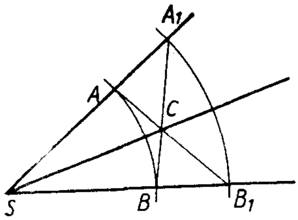


Bild 71

Lösung b) (Bild 71)

Um den Scheitel S beschreibt man 2 beliebige Kreisbogen, die die Schenkel in A und B sowie in A_1 und B_1 schneiden. Die beiden Verbindungslinien AB_1 und A_1B schneiden sich im Punkte C. Die Verbindungslinie von S mit C ist die gesuchte Halbierungslinie.

Beweis

$$\triangle ASB_1 \cong \triangle A_1SB \qquad \text{[SWS-Satz]}$$

folglich: $\sphericalangle BA_1S = \sphericalangle SB_1A$

und $\sphericalangle SBA_1 = \sphericalangle B_1AS$

und als Nebenwinkel: $\sphericalangle A_1BB_1 = \sphericalangle A_1AB_1$

$\triangle A_1AC \cong \triangle BB_1C$ [WSW-Satz]

folglich: $AC = BC$

$\triangle ASC \cong \triangle CSB$ [SSS-Satz]

folglich: $\sphericalangle ASC = \sphericalangle CSB$ w. z. b. w.

Im Anschluß an die Aufgabe der Winkelhalbierung beweise man unter Zuhilfenahme des SsW-Satzes den nachstehenden Satz:

„Sämtliche Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden denselben Abstand haben, liegen auf der Winkelhalbierenden des durch die Geraden gebildeten Winkels."

Aufgabe 11

Der Winkel $\alpha = 30°$ ist zu konstruieren! (Bild 72.)

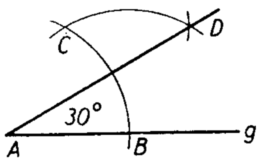


Bild 72

Lösung

Man konstruiere nach Aufgabe 9 den Winkel $\alpha = 60°$ und halbiere ihn nach Aufgabe 10. Man gehe also folgendermaßen vor: Um den auf der Geraden g liegenden Punkt A beschreibt man einen beliebigen Kreisbogen, der die Gerade in B schneidet. Um B beschreibe man mit derselben Zirkelöffnung einen 2. Kreisbogen, der den ersten in C schneidet. Um C schlägt man wiederum mit derselben Zirkelöffnung einen 3. Kreisbogen, der den 2. in D schneidet. Verbindet man D mit A, so ist $\sphericalangle DAB = 30°$.

Beweis

Vergleiche die Beweise zu Aufgaben 9 und 10.

Aufgabe 12

Ein rechter Winkel ist in 3 gleiche Teile zu teilen! (Bild 73.)

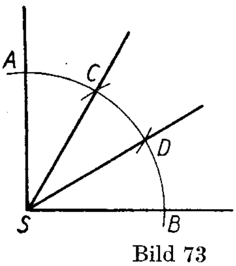


Bild 73

Lösung

Um den Scheitel des rechten Winkels beschreibt man einen beliebigen Kreisbogen, der die beiden Schenkel in A und B schneidet. Mit derselben Zirkelöffnung ($SA = SB$) beschreibt man um A und B 2 Kreisbogen, die den ersten in C und D schneiden. Die Verbindungslinien CS und DS dritteln den rechten Winkel.

Anmerkung zur Dreiteilung eines Winkels:

Nur der rechte Winkel und seine ganzen Vielfachen (also: 180°, 270° usw.) lassen sich auf einfache Weise mit Zirkel und Lineal in 3 gleiche Teile teilen. Im allgemeinen ist die Winkeldreiteilung (auch Winkeltrisektion genannt) mit Zirkel und Lineal unmöglich.

Beweis

$$\sphericalangle CSB = 60^\circ \text{ nach Aufgabe 9 (Seite 36)}$$
$$\text{ebenso } \sphericalangle ASD = 60^\circ$$
$$\sphericalangle ASC = 90^\circ - \sphericalangle CSB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$
$$\sphericalangle CSD = \sphericalangle ASD - \sphericalangle ASC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$
$$\sphericalangle DSB = \sphericalangle CSB - \sphericalangle CSD = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

Aufgabe 13

Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt außerhalb der Zeichenfläche liegt und somit für die Konstruktion unzugänglich ist, ist zu halbieren! (Bild 74.)

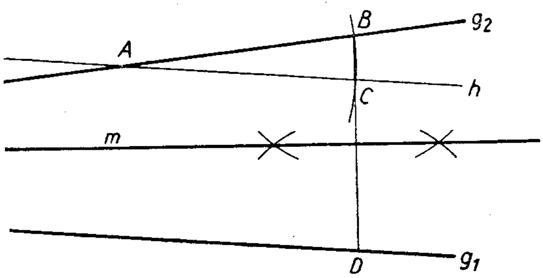


Bild 74

Lösung

Die beiden Schenkel des Winkels seien g_1 und g_2. Ihr Schnittpunkt ist der außerhalb der Zeichenfläche liegende Scheitel S. Man zieht zu dem einen Schenkel g_1 eine parallele Hilfslinie h nach Aufgabe 5 (Seite 32).

Diese bildet mit dem zweiten Schenkel g_2 einen Winkel mit dem Scheitel A. Ein beliebiger Kreisbogen um A schneidet die beiden Schenkel in B und C. Man verbindet B mit C und verlängert diese Verbindungslinie bis zum Schenkel g_1. Man erhält dort den Schnittpunkt D. Die Mittelsenkrechte m auf BD (siehe Aufgabe 2) ist die gesuchte Halbierungslinie des gegebenen Winkels mit unzugänglichem Scheitel.

Beweis

Nach Konstruktion ist $\triangle$ CBA gleichschenklig. Wie man durch die später behandelten Regeln der Ähnlichkeitslehre zeigen kann, ist auch $\triangle$ DBS gleichschenklig. Die Mittelsenkrechte m auf der Basis BD halbiert nach Satz 3 auf Seite 27 den Winkel an der Spitze.

E. Die Vierecke

1. Bezeichnung der einzelnen Größen

Ein Viereck ist ein geschlossener Linienzug von 4 Strecken. Es entsteht, wenn man 4 Punkte einer Ebene, von denen aber keine 3 in einer Geraden liegen, der Reihe nach verbindet. Es hat 4 Seiten, 4 Ecken und 4 Winkel. Ein Viereckswinkel wird von 2 aneinanderstoßenden Seiten gebildet. Man bezeichnet ein Viereck durch die 4 neben-

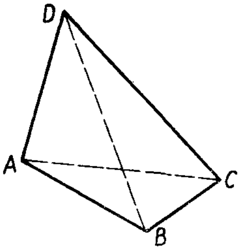


Bild 75

einander geschriebenen Buchstaben der Ecken; also nach Bild 75: Viereck ABCD (sprich: Viereck Abecede). Die Reihenfolge der Buchstaben wählt man wie beim Dreieck meist so, daß beim Umlaufen des Vierecks in der Reihenfolge der Buchstaben das Viereck linker Hand liegt. Die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Vierecksecken (AC und BD) heißen die Diagonalen. Die Diagonalen liegen bei einem Viereck, von dessen 4 Winkeln keiner größer als 180° ist, innerhalb der Vierecksfläche. Ist ein Winkel des Vierecks überstumpf, so liegt die eine Diagonale außerhalb des Vierecks. Ein solches Viereck mit einem überstumpfen Winkel nennt man ein ausgebuchtetes Viereck.

2. Die Einteilung der Vierecke

a) Das Trapez

Trapez schreibt man nicht mit „tz"! Das Wort stammt aus der griechischen Sprache und bedeutet „Tischchen". Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem 2 gegenüberliegende Seiten parallel sind. Man unterscheidet:

Das allgemeine Trapez (Bild 76):

Die nicht parallelen Seiten sind ungleich lang.

Das gleichschenklige Trapez (Bild 77):

Die beiden nicht parallelen Seiten sind gleichlang. Sie heißen die Schenkel.

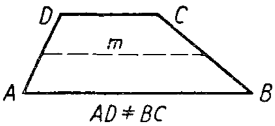


Bild 76

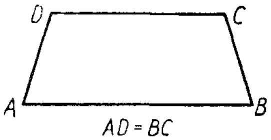


Bild 77

Beispiel

Der Querschnitt durch die sog. Schwalbenschwanzführung zweier aufeinander gleitender Teile ist ein gleichschenkliges Trapez.

Die Verbindungslinie der Mitten der beiden nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist die Mittellinie (m).

b) Das Parallelogramm oder Rhomboid

Ein Parallellogramm (Bild 78) ist ein Viereck, bei dem die 2 Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind. Diese parallelen Seiten sind außerdem noch gleichlang. Also: AB || CD (lies: Abe parallel Cde), AD || BC und AB = CD, AD = BC.

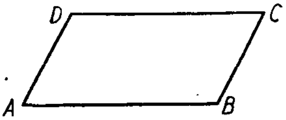


Bild 78

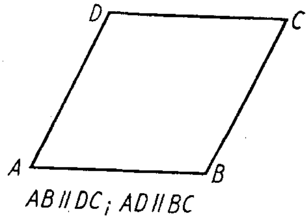


Bild 79

Bild 80

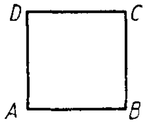


Bild 81

c) Der Rhombus oder die Raute (Bild 79)

Ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit lauter gleichen Seiten. Bei ihm sind je 2 gegenüberliegende Seiten einander parallel. Ein Rhombus ist also ein Spezialrhomboid mit gleich langen Seiten. $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$; $AB = BC = CD = DA$.

d) Das Rechteck (Bild 80)

Das Rechteck ist ein Parallelogramm, dessen sämtliche 4 Winkel je 90° betragen. Ein Rechteck ist als ein Spezialrhomboid mit gleich großen 90°-Winkeln.

e) Das Quadrat (Bild 81)

Ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten.

f) Das Drachenviereck (Bild 82)

Das Drachenviereck kann man durch die Verbindungslinien zweier gegenüberliegender Ecken (= Diagonalen) in 2 gleichschenklige Dreiecke zerlegen.

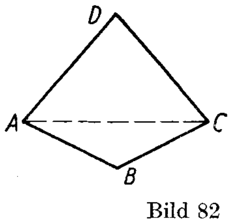


Bild 82

Die in der vorstehenden Aufzählung unter b bis e genannten Vierecke sind Parallelogramme. Das Rhomboid ist ein verschobenes Rechteck. Der Rhombus ist ein verschobenes Quadrat. Während beim Rechteck und Quadrat die Winkel rechte sind, ist dies beim Rhomboid und Rhombus nicht der Fall.

Zusammenstellung über die Vierecke (Bild 83)

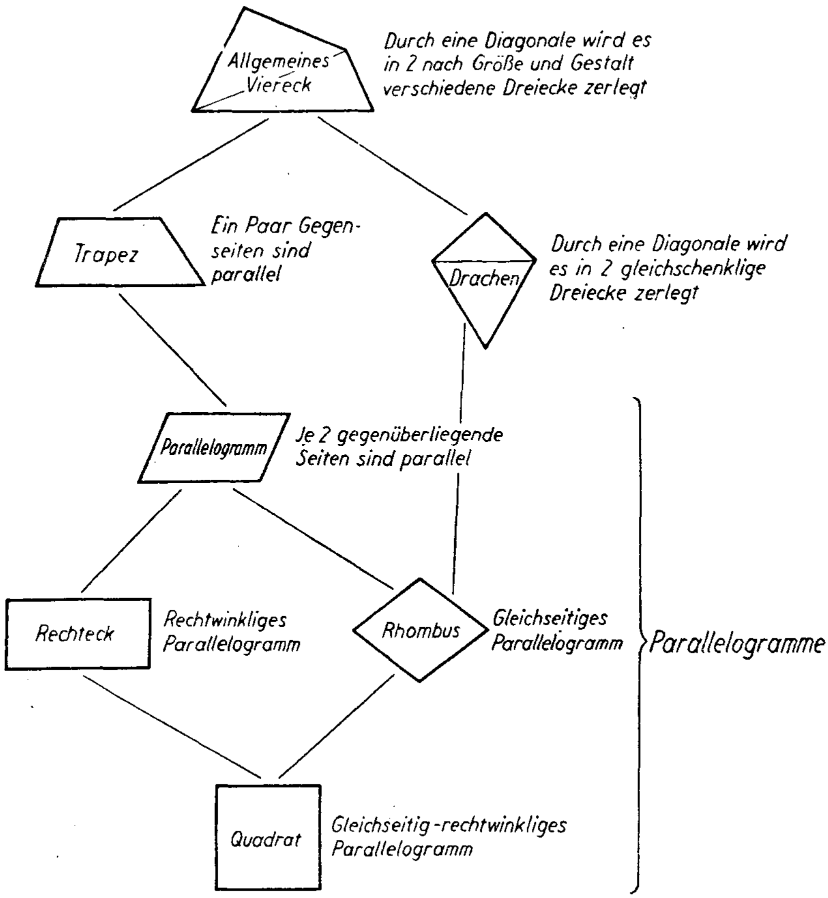


Bild 83

3. Lehrsätze über die Vierecke

a) Winkelsätze

α) Allgemeine Vierecke

Die Winkelsumme in jedem Viereck beträgt 360° (Bild 84).

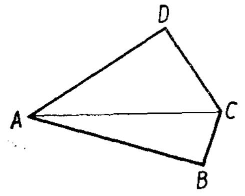


Bild 84

Beweis

Durch eine Diagonale wird das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt. Die Winkelsumme in jedem dieser beiden Dreiecke beträgt 180°. Die Summe der 6 Winkel der beiden Dreiecke beträgt $2 \times 180° = 360°$. Sie ist die gleiche wie die der 4 Winkel des Viereckes.

β) Trapez

Die Summe der beiden Winkel, die einer der nichtparallelen Seiten anliegen, beträgt 180° (Bild 85).

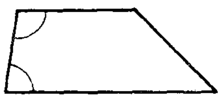


Bild 85

Beweis

Die beiden Winkel, die einer der nichtparallelen Seiten anliegen, sind entgegengesetzte Winkel an Parallelen, die nach dem auf Seite **11** angeführten Lehrsatz **3** zusammen 180° betragen.

γ) Parallelogramm

In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich (Bild 86).

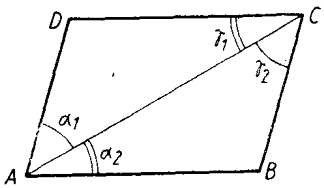


Bild 86

Beweis

Durch die Diagonale AC des Parallelogramms ABCD entstehen 4 Winkel:

Als Wechselwinkel an den Parallelen AD und BC sind: $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \gamma_2$.

Als Wechselwinkel an den Parallelen AB und DC sind: $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \gamma_1$.

Durch Addition der linken Seiten der beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \gamma_1 + \sphericalangle \gamma_2$$

oder $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$

In jedem Parallelogramm sind die einer Seite anliegenden Winkel Supplementwinkel, d. h. sie betragen zusammen 180°.

Beweis

$\sphericalangle$ DAB und $\sphericalangle$ ABC sind entgegengesetzte Winkel an den beiden Parallelen AD und BC. Nach dem Lehrsatz 3 auf Seite 11 betragen sie zusammen 180°.

b) Seitensatz

In jedem Parallelogramm (Rhomboid, Rhombus, Rechteck, Quadrat) sind die Gegenseiten gleich.

Beweis

Eine Diagonale teilt jedes Parallelogramm in 2 kongruente Dreiecke nach dem WSW-Satze. Es ist nämlich die Diagonale den beiden Dreiecken gemeinsam, und die an der Diagonale liegenden Winkel sind als Wechselwinkel an Parallelen gleich. Als gleichliegende (= homologe) Stücke in kongruenten Dreiecken sind dann auch die beiden Gegenseiten gleich lang.

Anmerkung zum Seitensatz:

Es gilt auch die Umkehrung des vorstehenden Seitensatzes. Sie lautet:

Sind in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten gleich lang, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

c) Diagonalensätze

α) Parallelogramm

In jedem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen (Bild 87).

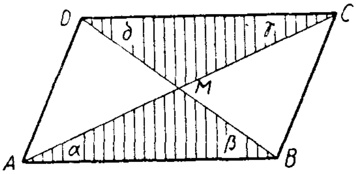


Bild 87

Beweis

Durch die beiden Diagonalen im Parallelogramm entstehen 4 Dreiecke, von denen je 2 gegenüberliegende kongruent sind. Es ist $\triangle$ ABM $\cong$ $\triangle$ CDM, weil

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\,\alpha = \sphericalangle\,\gamma \\ \sphericalangle\,\beta = \sphericalangle\,\delta\end{array}\right\}\text{ als Wechselwinkel an den Parallelen AB und DC}$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{DC}\ \left\{\text{als Gegenseiten im Parallelogramm (Seite 43).}\right.$$

Aus der Kongruenz dieser beiden Dreiecke folgt die Gleichheit der homologen Stücke: AM = MC und DM = MB.

β) Rhombus

In jedem Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren die Rhombuswinkel (Bild 88).

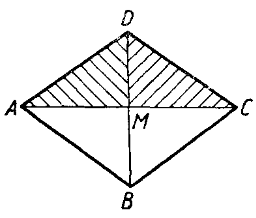


Bild 88

Beweis

Die beiden nebeneinanderliegenden Dreiecke AMD und MCD sind kongruent nach dem SSS-Satz; denn AD = DC als Rhombusseiten, AM = MC nach dem Diagonalensatz (Nr. c α).

DM = DM ist sich selbst gleich. Wegen der aus der Kongruenz folgenden Gleichheit der homologen Stücke ist ∢ AMD = ∢ DMC. Da beide zusammen 2 R betragen, ist jeder 90° groß. Ferner folgt aus der Gleichheit der gleichliegenden Stücke:

∢ MDA = ∢ CDM.

γ) Rechteck und Quadrat

In jedem Rechteck und Quadrat sind die Diagonalen einander gleich (Bild 89).

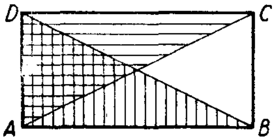


Bild 89

Beweis

Durch die beiden Diagonalen erhält man die nach dem SWS-Satz einander kongruenten Dreiecke ACD und ABD.

(∢ CDA = ∢ DAB = 90°; AD = AD; DC = AB.) DB und AC sind als homologe Stücke gleich, also DB = AC.

d) Mittelliniensätze für das Trapez

α) Die Mittellinie eines Trapezes ist den beiden parallelen Seiten parallel (Bild 90).

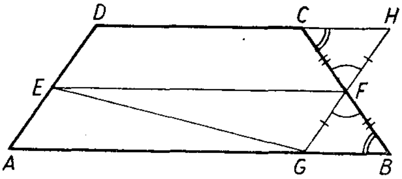


Bild 90

Beweis

Die Mittellinie des Trapezes ABCD verbindet die Mitten E und F der beiden Schenkel. Durch F ziehe man zu AD die Parallele, die AB in G und die Verlängerung von DC in H schneidet. AGHD ist ein Parallelogramm, in dem nach dem Satz Nr. b auf Seite 43 die gegenüberliegenden Seiten AD und GH gleich lang sind. Da nach dem WSW-Satz △ GBF ≅ △ FHC ist (∢ BFG = ∢ CFH als Scheitelwinkel, ∢ HCF = ∢ GBF als Wechselwinkel, CF = FB nach Konstruktion), sind die gleichliegenden Stücke GF und FH einander gleich. AE war nach Konstruktion die Hälfte von AD. Wie soeben gezeigt wurde, ist GF die Hälfte von GH. Sind die beiden Ganzen (AD = GH) gleich, so sind es auch die beiden Hälften von ihnen, also AE = GF. Nun ist nach dem SWS-Satz △ AGE ≅ △ FEG. (AE = GF wie eben bewiesen wurde, ∢ GEA = ∢ EGF als Wechselwinkel an den nach Konstruktion parallelen Strecken AD und GH, EG = EG), so daß ∢ AGE und ∢ FEG als homolog liegende Winkel einander gleich sind. Daraus folgt nach Umkehrung 2 S. 12 EF || AG und wegen AG || DH auch EF || DH.

Auch die Umkehrung von Satz α) gilt:

Die Parallele zur Grundseite, die den einen Trapezschenkel halbiert, halbiert auch den anderen.

β) Die Länge der Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe aus den Längen der beiden parallelen Seiten.

Oder algebraisch ausgedrückt:
Die Länge der Mittellinie eines Trapezes ist das arithmetische Mittel aus den Längen der parallelen Seiten.

Beweis
Wie soeben unter α) gezeigt wurde, ist EF = DH; ebenso ist EF = AG, weil auch AGFE ein Parallelogramm ist.

$$EF = DH = DC + CH$$
$$EF = AG = AB - GB$$

Durch Addition der beiden Gleichungen: $2\,EF = DC + AB + CH - GB.$

Aus der Kongruenz der Dreiecke GBF und FHC folgt, daß CH = GB ist. Somit fallen die beiden letzten Glieder der letzten Gleichung fort und man erhält:

$$2\,EF = DC + AB \quad \text{oder} \quad EF = \frac{1}{2}(DC + AB).$$

Folgerung

Man denke sich die parallele Seite DC des vorstehend betrachteten Trapezes immer kleiner und kleiner werdend. Im Grenzfall wird sie 0 cm lang. Der Punkt D fällt nach Bild 91 mit C in einem Punkt T zusammen. Aus dem Trapez ABCD wird das Dreieck ABT. Verbindet man in diesem die Mitten der Seiten AT und BT durch eine Gerade, so ist diese Verbindungslinie RS parallel der Grundlinie AB. Ihre Länge beträgt entsprechend dem vorstehenden Satze:

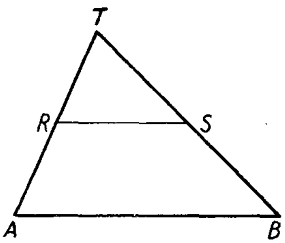


Bild 91

$$RS = \frac{1}{2}(AB + 0) = \frac{1}{2}\,AB.$$

In Worten drückt sich dies aus als folgender

Lehrsatz: Die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten ist parallel zu der dritten Dreiecksseite und halb so lang wie diese!

Aufgaben

47) Ein Wellenstumpf von 50 mm Durchmesser ist so durch 4 zur Wellenachse parallele Flächen anzufräsen, daß er die größtmögliche Querschnittsform erhält. Es ist der Schnitt senkrecht zur Achse aufzuzeichnen!

48) In einem Parallelogramm ist ein Winkel
a) 65°,
b) 100° und
c) α. Wie groß sind die drei übrigen Winkel?

49) Die Winkel an der Grundlinie eines Trapezes sind
a) $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$;
b) $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$ und
c) α, β.
Wie groß sind die beiden übrigen Winkel?

50) Von den 4 Winkeln α, β, γ, δ eines Viereckes sind die folgenden gegeben
a) $\alpha = 70°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$,
b) $\alpha = \beta = 40°$, $\gamma = \delta$,
c) $\alpha + \gamma = 180°$, $\alpha = \beta$, $\gamma = 60°$.
Wie groß sind die fehlenden Winkel?

51) a) Ein Parallelogramm (Rhomboid, Rhombus, Rechteck, Quadrat) ist aus 4 Stäben, die in den Ecken durch Scharniere verbunden sind, gebildet. Ist das Parallelogramm beweglich oder starr?
b) Man verbinde bei dem unter a) gegebenen Parallelogramm 2 gegenüberliegende Ecken durch einen in den Endpunkten beweglichen Diagonalstab. Ist das Parallelogramm beweglich oder starr?
c) Welche Figur ergibt sich beim Verschieben eines der unter a) gegebenen Parallelogramme?
d) Kann man ein in den Endpunkten durch Scharniere verbundenes Trapez in ein anderes Trapez verschieben? Wenn nicht, was für eine Figur ergibt sich?

52) Der Winkel α eines Parallelogramms durchläuft, jeweils um 20° steigend, die Werte 10°, 30°, 50°, ... 170°. In einer Tabelle sind die Werte für die Größen der 3 fehlenden Winkel β, γ und δ anzugeben!

53) Unter welchen 4 Winkeln schneiden sich die Höhen eines Parallelogramms, wenn der eine Winkel des Parallelogramms $\alpha = 75°$ beträgt?
Erklärung: Die Höhen eines Parallelogramms sind Strecken, die zwischen zwei parallelen Gegenseiten liegen und auf diesen senkrecht stehen.

54) In einem Dreieck ABC, dessen $\sphericalangle \alpha = 60°$ ist, wird die Mittellinie $m_a = AD$ um sich selbst über D hinaus bis E verlängert. Wie groß sind die Winkel in dem entstehenden Viereck ABEC?

55) Ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = 10$ cm und $b = 6$ cm wird durch 3 parallele, in gleichen Abständen gelegte Schnitte in 4 Teile zerlegt. Wie lang sind die parallelen Seiten der entstandenen 4 Trapeze?

56) In ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Schenkel $a = 10$ cm soll ein Rhombus so eingezeichnet werden, daß der eine Rhombuswinkel mit dem Winkel an der Spitze des Dreieckes zusammenfällt. Die gegenüberliegende Rhombusecke soll auf der Basis des gleichschenkligen Dreieckes liegen. Wie groß ist die Seite des entstehenden Rhombus?

57) Wie groß sind die Winkel eines Rhombus, wenn der eine doppelt so groß wie der andere ist?

58) Die eine Seite eines Rechteckes ist um 5 cm größer als die andere. Der Umfang des Rechteckes beträgt 50 cm. Wie groß sind die Rechtecksseiten?

Anleitung: Rechtecksumfang = Seitensumme!

59) Aus einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Quadrat durch 2 Schnitte, die parallel zu den Katheten liegen, herauszuschneiden. Ein Winkel des Quadrates soll mit dem rechten Winkel des gegebenen Dreieckes zusammenfallen. Die Gegenecke des Quadrates soll auf der Hypotenuse liegen. Durch welche Linie findet man diese Gegenecke?

60) Wie groß ist der mittlere Durchmesser des im Achsschnitt skizzierten K e g e l s (Bild 92)?

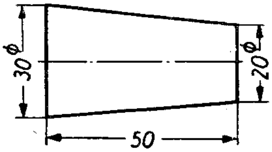


Bild 92

61) Der senkrechte Schnitt durch einen S e c h s k a n t s t a h l ist ein regelmäßiges Sechseck, dessen Ecken der Reihe nach mit A, B, C, D, E und F bezeichnet werden mögen. Man verbinde die Ecken A und C mit dem Mittelpunkt M des regelmäßigen 6-Eckes. Was für ein Parallelogramm ist das Viereck ABCM? Wie groß sind die Winkel in diesem Viereck?

62) Der nebenstehende (Bild 93) doppelkegelförmige Schwimmer hat an seinen beiden Spitzen die Winkel

$$\alpha = 60° \quad \text{und}$$
$$\beta = 90°.$$

Wie groß sind die Winkel γ und δ?

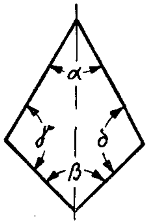


Bild 93

63) Der K e i l (Bild 94) hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten l und b. Seine Höhe beträgt h cm. Die obere Keilkante, die parallel der Grundfläche liegt, ist l_1 cm lang. In der halben Höhe soll ein zur Grundfläche paralleler Schnitt gelegt werden. Welche Schnittfigur entsteht? Wie groß sind die Seiten der Schnittfigur?

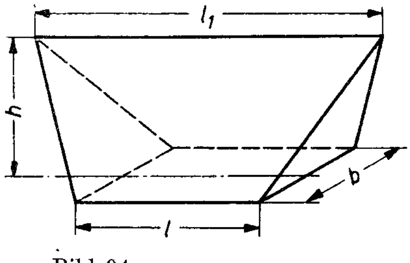


Bild 94

64) Ein Beilageblech hat die Abmessungen im Bild 95. Maße in mm. Wie groß ist die Blechbreite in 15 mm Abstand von der 40 mm langen Seite? Wie groß sind die Winkel α und β?

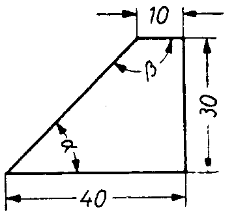


Bild 95

65) Ein biegsames Seil ist um eine feststehende Walze geschlungen (Bild 96). Der Umschlingungswinkel beträgt 120°. Wie groß ist der Winkel α, den beide Seilrichtungen bilden?

Anleitung

1) Die Winkel S_1AM und MBS_2 betragen je 90°.
2) Man verlängere die beiden Seilrichtungen bis zu ihrem Schnittpunkt P und lege der Berechnung das Viereck MAPB zugrunde!

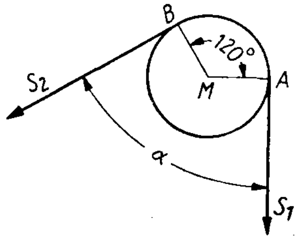


Bild 96

66) Eine punktförmige Lichtquelle S entwirft von einem undurchsichtigen Körper B auf einem Lichtschirm C einen Schatten D, der doppelt so lang wie der Körper B ist (Bild 97).

Wie weit ist die Lichtquelle von dem Schirm entfernt, wenn der Abstand zwischen Körper und Schirm 2 m beträgt?

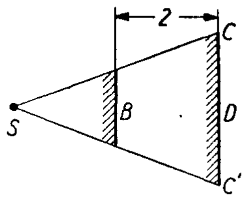


Bild 97

67) In dem nebenstehend skizzierten 5-zackigen Stern (Bild 98), dem sog. Pentagramm, mit den Ecken A, B, C, D und E und dem Mittelpunkt M sind zu berechnen:

a) $\sphericalangle$ BMA,
b) $\sphericalangle$ CMA,
c) $\sphericalangle$ DAC,
d) Summe der Winkel an den 5 Ecken und
e) Die 4 Winkel in dem Viereck ABCM!

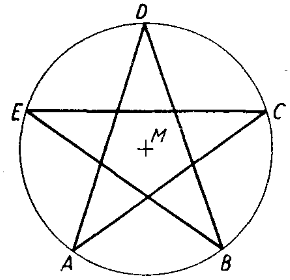


Bild 98

68) Welchen Winkel bilden die Halbierungslinien zweier Winkel an einer Seite eines Parallelogramms?

69) Die 4 aufeinanderfolgenden Ecken eines Parallelogramms sind A, B, C und D. Durch die Ecke D ist eine Gerade g gezogen, die das Parallelogramm nicht schneidet. Die Eckpunkte A, B und C haben von ihr die Abstände a, b und c. Wie groß ist b im Vergleich zu a und c?

70) Wie lang ist das Stück x, das auf der Mittellinie eines Trapezes mit den parallelen Seiten a und b von den beiden Diagonalen begrenzt wird?

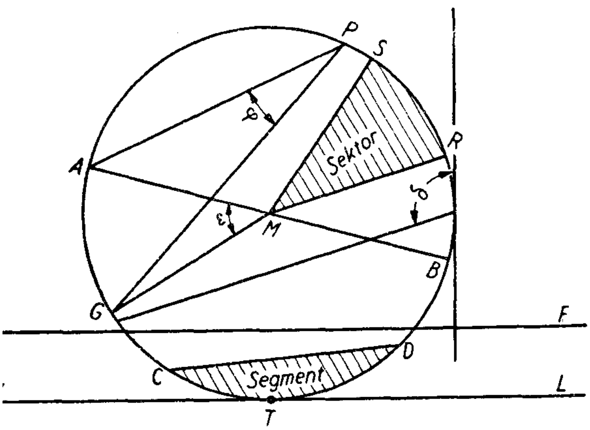
F. Der Kreis

1. Benennung und Bezeichnung der einzelnen Teile (Bild 99)

Der Kreis ist eine ebene in sich geschlossene Linie, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte, dem Kreismittelpunkt M (seltener auch Zentrum genannt), gleichweit entfernt sind. Dreht man in der Ebene eine Strecke MA um den einen Endpunkt M, so beschreibt der andere Endpunkt A einen Kreis.

Die in sich geschlossene Linie, die den Kreis bildet, nennt man auch Peripherie. Ihre Länge bezeichnet man als Kreisumfang U. Die Größe der von der Peripherie umschlossenen Fläche heißt der Kreisinhalt F. Die gerade Verbindungslinie eines auf der Peripherie liegenden Punktes A mit dem Mittelpunkt M heißt der Kreishalbmesser oder Radius r. Aus der Erklärung des Kreises folgt: Alle Radien des Kreises sind gleich. Verlängert man den Radius AM über M hinaus bis zum Schnittpunkt B mit der Peripherie, so nennt man die Strecke AB den Durchmesser d.

Die beiden Punkte A und B, deren Verbindungslinie durch den Kreismittelpunkt geht, liegen einander auf der Peripherie diametral gegenüber. Die Verbindungslinie zweier beliebiger auf der Peripherie liegender Punkte C und D heißt eine Sehne s. Der Durchmesser d ist die größte Sehne eines Kreises. Alle anderen Sehnen eines Kreises sind kleiner als der Durchmesser. Der von den beiden auf der Peripherie liegenden Punkten C und D begrenzte Teil der Peripherie heißt der Kreisbogen b. Man bezeichnet ihn mit $\overset{\frown}{CD}$ (lies: Bogen CD). Die Fläche, die von einer Sehne und dem dazu gehörenden Bogen eingeschlossen wird, heißt Kreisabschnitt oder Segment. Die Fläche, die von den beiden Radien RM und SM sowie dem zugehörenden Bogen eingeschlossen wird, heißt der Kreisausschnitt oder Sektor. Die Fläche eines Kreissektors setzt sich zusammen



$MA = r =$ *Radius*
$AB = d =$ *Durchmesser*
$CD = s =$ *Sehne*
$\overset{\frown}{CD} = b =$ *Bogen*
$EF =$ *Sekante*
$T =$ *Berührungspunkt*
$KL =$ *Tangente*
$\sphericalangle\ \omega =$ *Zentriwinkel*
$\sphericalangle\ \varphi =$ *Peripheriewinkel*
$\sphericalangle\ \delta =$ *Sehnentangentenwinkel*

Bild 99

aus der Fläche eines Segmentes und der eines gleichschenkligen Dreieckes. Beträgt der von den beiden Radien gebildete Winkel 90°, d. h. stehen die beiden Radien aufeinander senkrecht, so ist der Flächeninhalt des Sektors der 4. Teil des gesamten Kreisinhaltes; man nennt diese Fläche einen Kreisquadrant. Ist der Winkel SMR = 60°, so ist der Flächeninhalt dieses Sektors $\frac{1}{6}$ des Kreisinhaltes. Ein solcher Sektor heißt Sextant.

Kreis und Gerade

In der Lage eines Kreises und einer Geraden zueinander gibt es 3 Möglichkeiten:

1) Eine Gerade schneidet einen Kreis in 2 Punkten. Diese Gerade heißt Sekante. Eine durch den Kreismittelpunkt gehende Sekante heißt Zentrale.
2) Eine Gerade berührt einen Kreis in 1 Punkt T. Diese Gerade heißt die Berührende oder Tangente. Der Punkt T heißt der Berührungspunkt. Eine Tangente kann als eine Sekante in der Grenzlage aufgefaßt werden, bei der die beiden Schnittpunkte der Sekante sich immer mehr und mehr einander näherten und schließlich in einen Punkt T zusammenfielen.
3) Eine Gerade schneidet oder berührt einen Kreis nicht. Es gibt keinen Berührungs- und keinen Schnittpunkt.

Kreis und Winkel

Beim Kreise unterscheidet man 3 Arten von Winkeln:

1) Winkel, deren Scheitel der Kreismittelpunkt M und deren Schenkel 2 Radien MA und MG sind, heißen Mittelpunkts- oder Zentriwinkel; also z. B. $\sphericalangle$ GMA.
2) Winkel, deren Scheitel auf der Peripherie liegen und deren Schenkel 2 Sehnen sind, heißen Umfangs- oder Peripheriewinkel, z. B. $\sphericalangle$ GPA.
3) Winkel, deren Scheitel auf der Peripherie liegen und deren Schenkel von einer Sehne und der Tangente in einem ihrer Endpunkte gebildet werden, heißen Sehnentangentenwinkel, z. B. $\sphericalangle\ \delta$.

Kreis und Kreis

2 Kreise mit verschieden großen Radien r_1 und r_2, aber mit gemeinsamem Mittelpunkt M, liegen konzentrisch oder gleichmittig zueinander. Die von den beiden Kreisperipherien eingeschlossene Fläche heißt Kreisring. Sein Flächeninhalt kann als Differenz der Flächeninhalte der beiden Kreise mit den Radien r_1 und r_2 bestimmt werden (Bild 100).

Die schraffierte Fläche ist die Kreisringfläche.

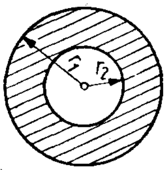


Bild 100

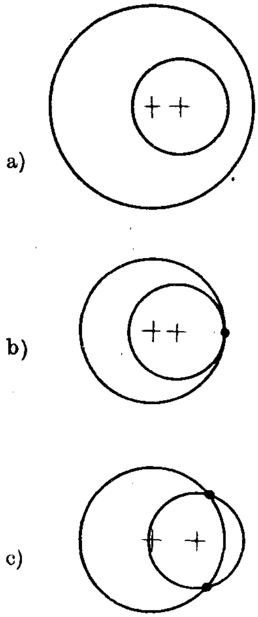


Bild 101

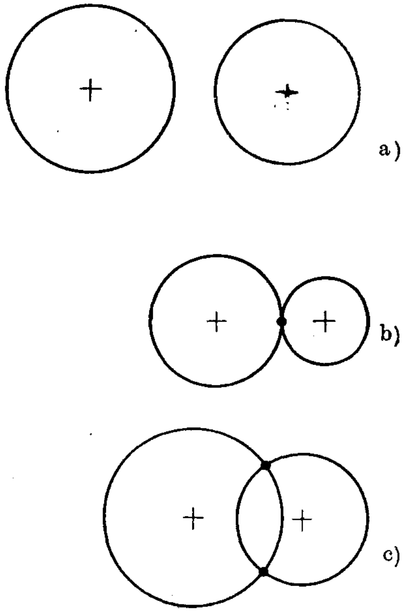


Bild 102

2 Kreise mit nicht gemeinsamem Mittelpunkt können verschiedene Lagen einnehmen:

1) Die beiden Mittelpunkte liegen innerhalb der großen Kreisfläche (Bild 101a ... c):
   a) Die beiden Kreise liegen exzentrisch oder ungleichmittig zueinander, ohne einen Punkt gemeinsam zu haben (Bild 101a).
   b) Die beiden Kreise berühren sich von innen (in einem Punkte) (Bild 101b).
   c) Die beiden Kreise schneiden sich (in 2 Punkten) von innen (Bild 101c).
2) Der Mittelpunkt des einen Kreises liegt außerhalb der Fläche des anderen Kreises (Bild 102a ... c).
   a) Die beiden Kreise haben keinen Schnitt- oder Berührungspunkt miteinander. Die beiden Kreise meiden sich (Bild 102a).
   b) Die beiden Kreise berühren sich von außen (in 1 Punkt) (Bild 102b).
   c) Die beiden Kreise schneiden sich von außen (in 2 Punkten) (Bild 102c).

Die Gerade, die die beiden Mittelpunkte miteinander verbindet, heißt die Mittelpunktsgerade oder die Zentrallinie oder die Zentrale z.

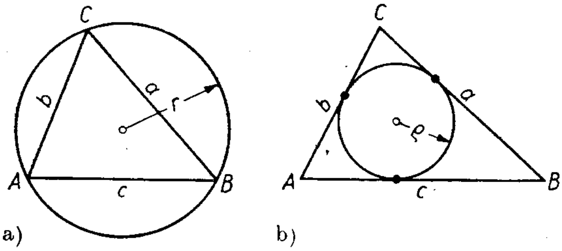
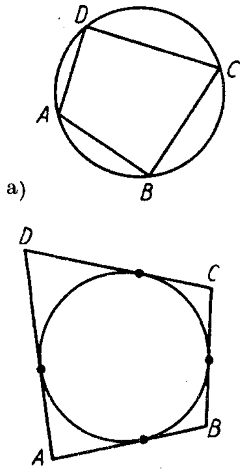


Bild 103



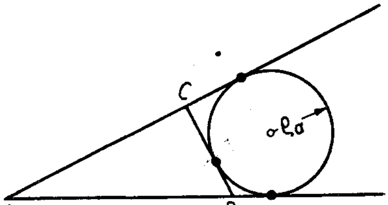


Bild 104

Bild 105

Kreis und Dreieck

a) Der Kreis, der durch die 3 Ecken A, B, C eines Dreieckes hindurchgeht, heißt der Umkreis. Die 3 Seiten a, b, c des Dreieckes sind Sehnen des Umkreises.

Der Radius des Umkreises wird mit r bezeichnet (Bild 103a).

b) Der Kreis, der die 3 Seiten eines Dreieckes von innen berührt, heißt der Inkreis. Die 3 Seiten a, b und c des Dreieckes sind Tangenten an den Kreis.

Der Radius des Inkreises wird mit ϱ (dem griechischen r) bezeichnet (Bild 103b).

c) Jedes Dreieck hat außerdem noch 3 Ankreise. Ein Ankreis berührt eine Dreiecksseite und die Verlängerung der beiden anderen Dreiecksseiten.

Die Ankreisradien werden mit ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bezeichnet, wobei die Indizes auf die berührte Dreiecksseite hinweisen (Bild 104).

Kreis und Viereck

a) Durch die Verbindung von 4 auf der Peripherie des einen Kreises gelegenen Punkte entsteht ein Sehnenviereck. Seine Seiten sind Sehnen des Kreises (Bild 105a).

b) Legt man durch 4 auf der Peripherie eines Kreises gelegene Punkte die Tangenten und bringt die Tangenten zweier nebeneinander gelegener Punkte miteinander zum Schnitt, so entsteht ein Tangentenviereck (Bild 105b).

Aufgaben

71) Wie groß ist der zu einem jeden Sextanten gehörende Zentriwinkel?

72) Der Inhalt eines Kreises beträgt $F = 314{,}15\ \text{mm}^2$. Der Inhalt eines aus diesem Kreise herausgeschnittenen Sektors beträgt $F = 62{,}83\ \text{mm}^2$. Wie groß ist der Zentriwinkel dieses Sektors?

73) Wie groß ist die Sehne eines Kreisabschnittes (= Segmentes), dessen Bogen der 6. Teil des gesamten Umfanges ist?

74) Der Kreis mit dem Radius $r = 1$ cm hat den Flächeninhalt lt. Tabelle $F = 3{,}1416\ \text{cm}^2$.
   a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadranten?
   b) Der wievielste Teil des Quadranteninhaltes ist der Inhalt des Sextanten?

75) Ein Kreisbogen ist der 8. Teil des gesamten Kreisumfanges. Welcher Zentriwinkel gehört zu diesem Bogen?

76) Ein nahtloses Flußstahlrohr St 55 von $D = 38$ mm Außendurchmesser hat eine Wandstärke $s = 2{,}5$ mm.
   a) Wie groß ist die lichte Weite d (= Innendurchmesser)?
   b) Welche Gleichung kann man zwischen D, d und s aufstellen?

77) Zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 haben gleich große Durchmesser und schneiden sich von außen in den beiden Punkten P_1 und P_2. Welche Beschaffenheit hat das Viereck $M_1P_1M_2P_2$?

78) Gegeben sind 2 kreisförmige Scheiben vom Durchmesser $d_1 = 300$ mm und $d_2 = 200$ mm. Die beiden sich am nächsten liegenden Punkte auf ihren Peripherien haben den Abstand $a = 100$ mm. Wie groß ist der Achsabstand der beiden Scheiben?

79) Auf 2 parallelen Wellen von 2 m Abstand sitzen 2 Riemenscheiben mit gleichen Durchmessern $D = 500$ mm. Wie lang ist der für sie erforderliche Riemen? (Der Umfang einer Scheibe beträgt $U = 1570$ mm.)

80) Wie groß ist der Achsabstand a (= Zentrale) zweier Reibräder mit den Durchmessern $D_1 = 200$ mm und $D_2 = 400$ mm?
   Anleitung: 2 Reibräder berühren sich von außen an ihrem Umfang.

81) Bei einem Planetengetriebe läuft ein kleines außenverzahntes Stirnrad vom Durchmesser d in einem größeren innenverzahnten Zahnrade vom Durchmesser D um. Wie groß ist der Achsabstand der beiden Zahnräder?

82) Die Teilung (= Abstand von Lochmitte bis Lochmitte) für eine einreihige Rundnaht beträgt $t = 60$ mm, während der Nietlochdurchmesser $d = 23$ mm beträgt. Wieviel mm Fleisch bleibt zwischen 2 nebeneinanderliegenden Nietlöchern stehen?

83) Ein Kugellager besteht aus einem Kugellagerinnenring, auf dem die Kugeln laufen, und aus einem Kugellageraußenring, der von außen die Kugeln umschließt.

a) Welchen Weg beschreiben die Mittelpunkte der Kugeln eines Kugellagers?

b) Welche Beziehung besteht zwischen d_a, d und D_i, wenn man unter d_a den Außendurchmesser des Kugellagerringes, unter d den Kugeldurchmesser und unter D_i den Innendurchmesser des Kugellageraußenringes versteht?

84) Wie liegen 2 Kreise mit den Radien r_1 und r_2 ($r_1 > r_2$) zueinander, wenn ihre Zentrale beträgt

a) $z = r_1 + r_2$, c) $r_1 < z < r_1 + r_2$, e) $r_1 - r_2 < z < r_1$,
b) $z > r_1 + r_2$, d) $z = r_1 - r_2$, f) $0 < z < r_1 - r_2$, g) $z = 0$?

85) Bei den **Passungssystemen** versteht man unter der Toleranz T der Welle bzw. Bohrung den Unterschied zwischen dem zulässigen Größt- und Kleinstmaß des Wellen- bzw. Bohrungsdurchmessers. Unter dem Spiel S eines Bewegungssitzes versteht man die Differenz zwischen dem Bohrungsdurchmesser D und dem Wellendurchmesser d. Das Größtspiel erhält man, wenn man vom Größtmaß der Bohrung das Kleinstmaß der Welle subtrahiert. Zur Berechnung des Kleinstspieles hat man entsprechend die Differenz des Kleinstmaßes der Bohrung — Größtmaß der Welle zu nehmen.

Es sei gegeben: Wellendurchmesser-Größtmaß: 29,992 mm
„ -Kleinstmaß: 29,978 mm
Bohrungsdurchmesser-Größtmaß: 30,015 mm
„ -Kleinstmaß: 30,000 mm

a) Wieviel μ ($1\,\mu = 0{,}001$ mm) beträgt die Toleranz der Bohrung? Wie groß ist die Toleranz der Welle?

b) Wieviel μ beträgt das Größt- und das Kleinstspiel?

86) 2 Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 liegen exzentrisch so zueinander, daß der kleinere Kreis ganz im Inneren des großen liegt. Der größte und kleinste Peripherieabstand der beiden Kreise betrage a und b [a > b]. Wie groß ist die Exzentrizität $e = M_1M_2$ der beiden Kreise?

2. Lehrsätze über den Kreis

Sehnen

(1) Die Mittelsenkrechte auf einer Sehne geht durch den Mittelpunkt und halbiert den Zentriwinkel, der aus den beiden nach den Endpunkten der Sehne gezogenen Radien gebildet ist (Bild 106).

Voraussetzung

CM soll die Mittelsenkrechte auf der Sehne AB sein; in Gleichungsform ausgedrückt: $AC = BC$, $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB = 90^\circ$.

Behauptung

a) M soll der Mittelpunkt sein; d. h. $AM = MB = r$,

b) Der Zentriwinkel wird halbiert; d. h. $\sphericalangle CMA = \sphericalangle BMC$.

Beweis

Man verbinde M mit A und B. Dann ist $\triangle ACM \cong \triangle BMC$ nach SWS-Satz; denn $AC = BC$ nach Voraussetzung, $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB$ nach Voraussetzung; $MC = MC$, da jede Größe sich selbst gleich ist.

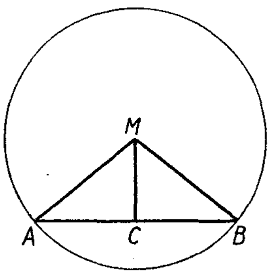


Bild 106

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit der homologen Stücke:

$AM = BM$ und $\sphericalangle CMA = \sphericalangle BMC$ w.z.b.w.

Umkehrungen zu (1):

a) Das Lot vom Mittelpunkt auf die Sehne halbiert diese und den zugehörigen Zentriwinkel.

Voraussetzung: $AM = MB$; $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB = 90°$.

Behauptung: $AC = BC$; $\sphericalangle CMA = \sphericalangle BMC$.

Beweis

$\triangle ACM \cong \triangle BMC$ nach SsW-Satz; denn $AM = MB$ nach Voraussetzung. $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB = 90°$ nach Voraussetzung und $MC = MC$. AM und MB sind als Hypotenusen die größten Dreiecksseiten. Aus der Kongruenz folgt: $AC = BC$ und $\sphericalangle CMA = \sphericalangle BMC$.

b) Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem Sehnenmittelpunkt steht senkrecht auf der Sehne und halbiert den zugehörigen Zentriwinkel.

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des SSS-Satzes und Bild 106.

Anwendung zu Lehrsatz (1): Wie findet man den Mittelpunkt eines Kreises?

Lösung

Drei beliebige Punkte A, B, C auf der Kreisperipherie verbindet man durch die 2 Geraden AB und BC und errichtet auf ihnen die Mittelsenkrechten. Der Kreismittelpunkt M muß auf einer jeden der beiden Senkrechten liegen; also ist M der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten.

(2) Sehnen gleicher Länge haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt (Bild 107).

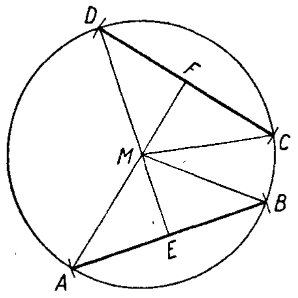


Bild 107

Voraussetzung: $AB = DC$

Behauptung: $ME = MF$.

Beweis

$\triangle ABM \cong \triangle CDM$ nach SSS-Satz; denn $AB = DC$ nach Voraussetzung, $MA = MC = r$, $MB = MD = r$.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit der homologen Stücke. Hier sind es die Abstände des Mittelpunktes von der Sehne; also $ME = MF$.

Umkehrung zu (2): Sehnen, die gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, sind gleich lang.

Den Beweis möge der Leser selbst finden.

(Anleitung: Man zeigt die Kongruenz der Dreiecke mit dem SWS-Satz).

Parallelverschieben einer Sehne

Verschiebt man eine Sehne AB (Bild 108) innerhalb eines Kreises parallel zu sich mehr und mehr nach außen hin, so wird der Abstand der Sehne vom Kreismittelpunkt größer. Die Länge der Sehne wird kleiner. Ihre Endpunkte rücken näher aneinander. Das Aneinanderrücken erfolgt auf beiden Seiten des Fußpunktes des vom Mittelpunkt auf die Sehnen gefällten Lotes gleichmäßig (= symmetrisch). Die Fußpunkte C, C_1, C_2 usw. der vom Mittelpunkte M auf die Sehnen AB, A_1B_1, A_2B_2 usw. gefällten Lote sind immer Mittelpunkte der parallelen Sehnen und liegen auf ein und demselben Radius. Wird im Grenzfall der Abstand einer Sehne gleich dem Radius, so sind die beiden Endpunkte der Sehne in den Fußpunkt des vom Mittelpunkte auf die Sehne gefällten Lotes zusammengefallen. Aus der Sehne ist Punkt T geworden. Die Sehne ist auf den Punkt T zusammengeschrumpft. Die parallele Gerade durch diesen Punkt T zu der Schar paralleler Sehnen ist die in T an den Kreis gelegte Tangente. Aus dieser vorstehenden einfachen Grenzbetrachtung ergeben sich folgende wichtige Sätze bezüglich der

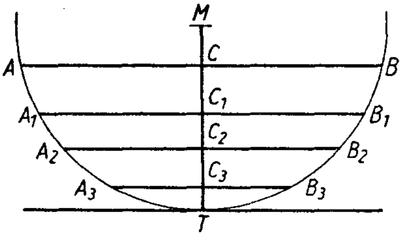


Bild 108

Tangenten.

(3) Der Radius des Kreises steht im Berührungspunkt senkrecht auf der Tangente.

Die Umkehrung lautet:

(3a) Die Senkrechte im Berührungspunkt einer Tangente geht durch den Kreismittelpunkt.

Anwendungen

An einen Kreis ist in einem gegebenen Punkt seines Umfanges die Tangente zu konstruieren.

Lösung

Man verbinde den gegebenen Punkt auf der Peripherie mit dem Mittelpunkt des Kreises und errichte in ihm auf dieser Verbindungslinie die Senkrechte, die die gesuchte Tangente ist.

Von einem Punkt außerhalb eines Kreises ist an den Kreis die Tangente zu legen! (Bild 109.)

Lösung

Man verbinde den gegebenen Punkt P mit dem Kreismittelpunkt M, halbiere MP in F und beschreibe mit FM um F den Kreis. Dieser Kreis schneidet den gegebenen in den 2 Punkten T_1 und T_2. Nach dem Satz des Thales (Seite 21) ist $\sphericalangle PT_1M = 90°$; d. h. T_1P ist die gesuchte Tangente. Es ist aber auch $\sphericalangle MT_2P = 90°$; d. h. T_2P ist ebenfalls eine Kreistangente. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises lassen sich stets 2 Tangenten an den Kreis legen.

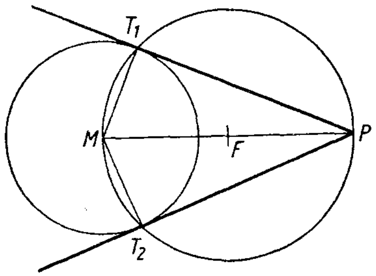


Bild 109

Lehrsatz

(4) Die von einem Punkt außerhalb eines Kreises an den Kreis gelegten Tangenten sind gleich lang.

Voraussetzung: $\sphericalangle PT_1M = \sphericalangle MT_2P = 90°$ (siehe Bild 109).

Behauptung: $PT_1 = PT_2$.

Beweis

$\triangle MPT_1 \cong \triangle PMT_2$ nach SsW-Satz; MP ist die größte Dreiecksseite, da sie dem rechten Winkel gegenüberliegt. Sie ist sich selbst gleich. $MP = MP$, $MT_1 = MT_2$ als Kreisradien; $\sphericalangle PT_1M = \sphericalangle MT_2P$ nach Voraussetzung. Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit der homologen Stücke: $PT_1 = PT_2$. Es sind ferner noch folgende gleichliegenden Stücke gleich: $\sphericalangle MPT_1 = \sphericalangle T_2PM$ und $\sphericalangle T_1MP = \sphericalangle PMT_2$ oder in Worten ausgedrückt:

(4a) Der Winkel zwischen den von einem Punkte an den Kreis gelegten 2 Tangenten, sowie der Winkel zwischen den zugehörigen Berührungsradien wird durch die Zentrale halbiert.

Umkehrung

Die Winkelhalbierende des von 2 Kreistangenten gebildeten Winkels geht durch den Kreismittelpunkt; d. h. sie ist die Zentrale.

Praktische Anwendung.

Zur Mittelpunktsbestimmung kreisförmiger Querschnitte (Wellen, Baumstämme usw.) benutzt man den Winkelhaken. (Bild 110). Er besteht aus einem Winkel, der meistens ein rechter ist, und einem auf ihm befestigten Lineal, dessen eine Kante die Halbierende des Winkels ist.

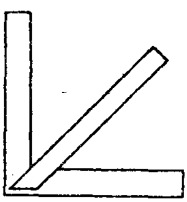


Bild 110

Durch 2maliges Anlegen des Winkelhakens in verschiedener Lage an den Kreisquerschnitt erhält man als Schnittpunkte der längs der Linealkante angerissenen Geraden den gesuchten Kreismittelpunkt.

Konstruktion der gemeinsamen äußeren und inneren Tangenten

Aufgabe 1

An 2 Kreise sind die beiden *äußeren Tangenten* zu konstruieren (Bild 111)!

Lösung

Gegeben sind die beiden Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2. Ihre Radien betragen r_1 und r_2. Man beschreibe mit dem Radius $r_2 - r_1$ um M_2 den *Hilfskreis* und lege an ihn von M_1 aus die beiden Tangenten. Die gefundenen Berührungspunkte der beiden Tangenten sind T_1 und T_2. Man verlängere M_2T_1 und M_2T_2 bis zum Schnitt mit dem größeren konzentrischen Kreis, der den Radius r_2 hat. Die Schnittpunkte heißen S_1 und S_2. Die Parallele zu M_1T_1 durch S_1 und die Parallele zu M_1T_2 durch S_2 sind die gesuchten beiden äußeren Tangenten.

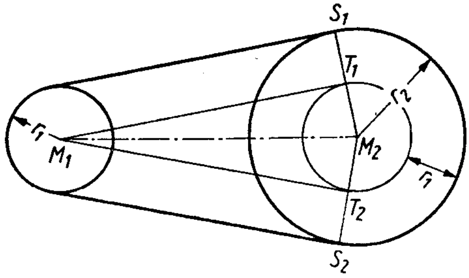


Bild 111

Aufgabe 2

An 2 Kreise sind die beiden *inneren Tangenten* zu konstruieren (Bild 112)!

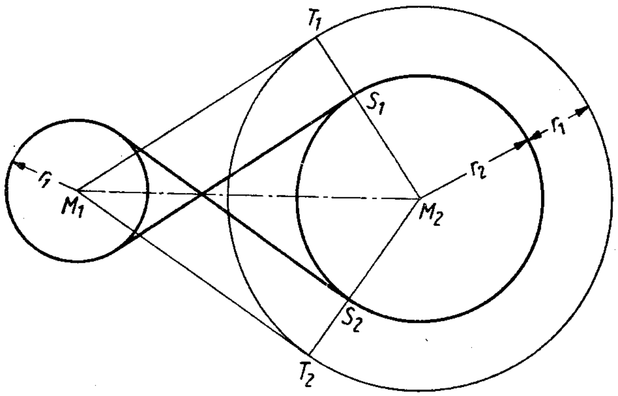


Bild 112

Lösung

Die Konstruktion hat man entsprechend der vorigen durchzuführen. Man hat jedoch als *Hilfskreis* den Kreis mit $r_1 + r_2$ um M_2 zu beschreiben.

Kreis und Winkel

(5) Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.

Bezüglich der Lage der beiden Winkel zueinander sind 3 verschiedene Fälle möglich.

Fall 1

Der Zentriwinkel ω und der über dem gleichen Bogen AB stehende Peripheriewinkel φ haben einen Schenkel gemeinsam (Bild 113).

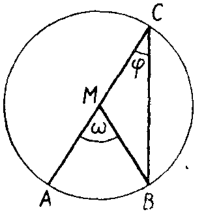


Bild 113

Der Kreismittelpunkt M liegt auf dem einen Schenkel des Peripheriewinkels. $\triangle$BCM ist gleichschenklig, da MC und MB Radien sind. Die beiden Basiswinkel sind gleich.

Nach dem Außenwinkelsatz (Seite 20) ist

$$\omega = 2\,\varphi.$$

Fall 2

Der Mittelpunkt M des Kreises liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels (Bild 114). Man verbinde C mit M. Der Peripheriewinkel φ bei C wird durch diese Verbindungslinie in φ_1 und φ_2 zerlegt, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Ebenso wird der Zentriwinkel ω bei M durch die Verlängerung dieser Verbindungslinie in ω_1 und ω_2 zerlegt. $\omega_1 + \omega_2 = \omega$.

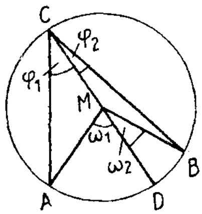


Bild 114

Nach Fall 1 ist $\omega_1 = 2\,\varphi_1$

und $\omega_2 = 2\,\varphi_2$

Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\,\varphi_1 + 2\,\varphi_2 = 2\,(\varphi_1 + \varphi_2)$$

d. h. $\omega = 2\,\varphi$

Fall 3

Der Mittelpunkt M des Kreises liegt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels (Bild 115). Man verbinde wiederum C mit M und verlängere es bis zum Schnitt D mit der Kreisperipherie.

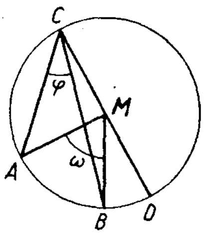


Bild 115

Im Gegensatz zu Fall 2 hat man die Differenz der 2 Winkel zu bilden

$$\sphericalangle \mathrm{DMA} = 2 \times \sphericalangle \mathrm{DCA}$$
$$\sphericalangle \mathrm{DMB} = 2 \times \sphericalangle \mathrm{DCB}$$

$$\sphericalangle \mathrm{DMA} - \sphericalangle \mathrm{DMB} = 2 \times (\sphericalangle \mathrm{DCA} - \sphericalangle \mathrm{DCB})$$

d. h. $\omega = 2\,\varphi$

Aus diesem Lehrsatz ergeben sich als Folgerungen:
Peripheriewinkel über demselben Bogen sind gleich (Bild 116).

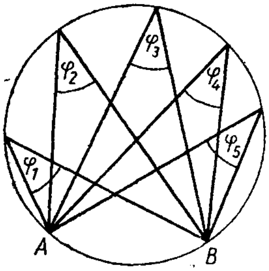


Bild 116

Im Bild 116 liegen die Peripheriewinkel φ_1, φ_2 usw. über dem gleichen Bogen $\widehat{AB}$. Ein jeder von ihnen ist halb so groß wie der mit ihnen über demselben Bogen stehende (nicht eingezeichnete) Zentriwinkel.

Satz des Thales

Jeder Peripheriewinkel über dem Halbkreis ist ein rechter (Bild 117).

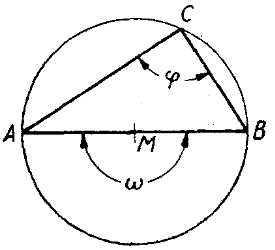


Bild 117

Da der Zentriwinkel ω im Halbkreis 180° trägt und doppelt so groß wie der Peripheriewinkel φ ist, muß der letzte 90° betragen. (Dieser Satz wurde schon auf Seite 21 bewiesen.)

(6) Der Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel über dem zugehörigen Kreisbogen

oder

Der Sehnentangentenwinkel ist halb so groß wie der Zentriwinkel, der mit ihm auf dem gleichen Bogen steht (Bild 118).

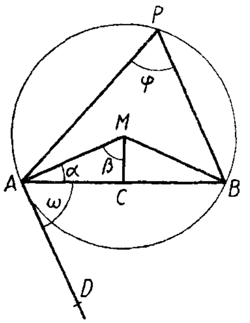


Bild 118

Behauptung: $\sphericalangle\, \omega = \sphericalangle\, \varphi$

Beweis

Das Lot MC vom Mittelpunkt M auf die Sehne AB halbiert nach Satz (1) auf Seite 54 den Zentriwinkel BMA; d. h. $\sphericalangle\, BMA = 2\beta$.

Nach Satz (5) auf Seite 59 ist der Zentriwinkel BMA doppelt so groß wie der Peripheriewinkel φ über dem gleichen Bogen AB; d. h. $2\beta = 2\varphi$ oder $\beta = \varphi$.

Im rechtwinkligen Dreieck ACM ist $\alpha + \beta = 90°$ oder $\alpha = 90° - \beta$ oder
$$\alpha = 90° - \varphi$$
Nach Satz (3) auf Seite 56 ist $\alpha + \omega = 90°$ oder $\alpha = 90° - \omega$.
Somit ergibt sich $90° - \omega = 90° - \varphi$ oder $\omega = \varphi$ w. z. b. w.

Kreis und Dreieck

Umkreis:

(7) Die **Mittelsenkrechten** auf den 3 Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises.

Beweis

Die Seiten eines Dreiecks, um das ein Kreis beschrieben ist, der durch seine 3 Ecken geht, sind die Sehnen des Kreises. Nach Satz (1) auf Seite 54 liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf den Mittelsenkrechten der Sehnen. Der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten hat von allen 3 Ecken gleichen Abstand. Er gehört also auch der 3. Mittelsenkrechten an. Alle 3 Mittelsenkrechten gehen durch einen Punkt.

Auf Vorstehendem beruht folgender Satz:

Die 3 Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem **Höhenschnittpunkt.**

Beweis

Man ziehe durch die 3 Ecken des Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten. Es entsteht ein neues Dreieck, in dem die Mittelsenkrechten die Höhen des ersten Dreiecks sind. Da sich aber die Mittelsenkrechten nach dem vorhergehenden Satz in dem neuen Dreieck in einem Punkt schneiden, so tun dies auch die Höhen in dem ursprünglichen Dreieck.

Inkreis

(8) Die **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.

Beweis

Die Seiten des Dreiecks, in das ein Kreis beschrieben ist, sind Tangenten des Kreises. Sein Mittelpunkt liegt also nach Satz (4a) auf Seite 57 auf den Halbierenden aller 3 Dreieckswinkel. Der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden hat von allen 3 Seiten gleichen Abstand; er gehört also auch der 3. Winkelhalbierenden an. Alle 3 Winkelhalbierenden gehen durch einen Punkt.

Folgerung aus (7) und (8):
Um und in jedes Dreieck läßt sich je ein Kreis beschreiben.

Ankreis

(9) Halbiert man einen Dreieckswinkel und die Außenwinkel der beiden anderen Dreieckswinkel, so schneiden sich diese Halbierungslinien in dem Mittelpunkt eines der 3 Ankreise (Bild 119).

Beweis

Der Ankreis berührt eine Dreiecksseite und die Verlängerung der beiden anderen Seiten. Sein Mittelpunkt muß also auf den Winkelhalbierenden liegen.

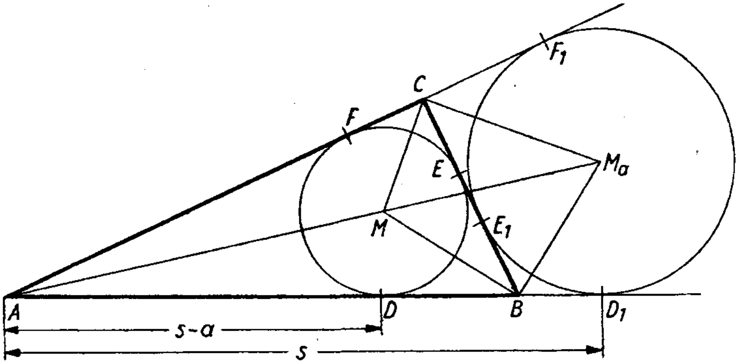


Bild 119

(10a) Die Strecke von einer Dreiecksecke bis zum Berührungspunkt des Ankreises der gegenüberliegenden Seite ist gleich dem halben Dreiecksumfang.

(10b) Die Strecke von einer Dreiecksecke bis zum Berührungspunkt des Inkreises ist gleich der Differenz aus dem halben Dreiecksumfang und der Gegenseite.

Beweis zu (10a)

Es ist $\left.\begin{aligned} BD_1 &= BE_1 \\ CE_1 &= CF_1 \\ AD_1 &= AF_1 \end{aligned}\right\}$ nach Satz (4) Seite 57.

Der Umfang des Dreiecks ABC ist

$$U = AB + BC + CA = AB + BE_1 + E_1C + CA = AB + BD_1 + CF_1 + CA = AD_1 + AF_1.$$

Man bezeichnet den Dreiecksumfang allgemein mit

$$\boxed{U = 2\,s = a + b + c}$$

Unter s versteht man also den *halben Dreiecksumfang*

$$\boxed{s = \frac{a + b + c}{2}}$$

$$U = 2\,s = AD_1 + AF_1 = 2\,AD_1 = 2\,AF_1 \quad \text{oder} \quad AD_1 = AF_1 = s.$$

Beweis zu (10b)

Es ist $\left.\begin{aligned} AD &= AF \\ DB &= BE \\ CF &= CE \end{aligned}\right\}$ nach Satz (4) Seite 57.

Der Umfang des Dreiecks ABC ist:

$$U = AB + BC + CA = AD + DB + BE + EC + CF + FA = 2\,AD + 2\,EB + 2\,CE = 2\,s$$

$$AD + EB + CE = s; \qquad AD + a = s;$$
$$AD + BC = s; \qquad AD = s - a.$$

Kreis und Viereck

(11) Im Sehnenviereck beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180°. Die beiden gegenüberliegenden Winkel sind Supplementwinkel (Bild 120).

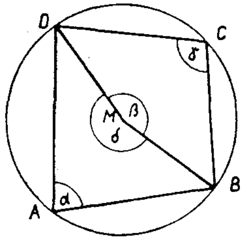


Bild 120

Behauptung: $\underline{\alpha + \gamma = 180°}$.

Beweis

α ist der Peripheriewinkel zu $\sphericalangle\, \beta$. Nach Satz (5) Seite 59 ist $\sphericalangle\, \beta = 2\,\alpha$. Ebenso ist $\sphericalangle\, \delta = 2\,\gamma$. Die beiden Winkel β und δ zusammengezählt, ergibt den bei M liegenden Vollwinkel:

$$\text{also } 2\,\alpha + 2\,\gamma = 360°$$
$$\text{oder } \alpha + \gamma = 180°$$

Umkehrung:

Beträgt in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 2 R, so kann man um das Viereck den Kreis beschreiben.

(12) Im Tangentenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der beiden anderen Gegenseiten (Bild 121).

Beweis

E, F, G und H sind die Berührungspunkte der 4 Seiten mit der Peripherie des eingeschriebenen Kreises.

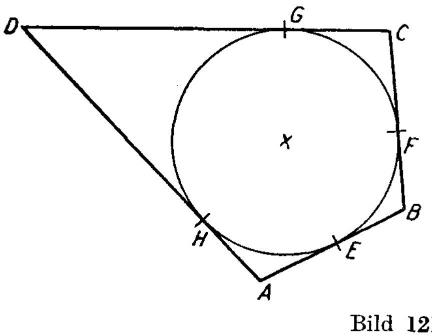


Bild 121

$$\left.\begin{array}{l} AE = AH \\ BE = BF \\ CG = CF \\ DG = DH \end{array}\right\} \text{nach Satz (4) S. 57.}$$

Durch Addition:

$$\underbrace{AE + BE}_{AB} + \underbrace{CG + DG}_{CD} = \underbrace{AH + BF + CF + DH}_{AD + BC}$$

Umkehrung

Ist in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen, so ist das Viereck ein Tangentenviereck.

Aus (12) und (11) ergibt sich im Gegensatz zum In- und Umkreis beim Dreieck:

Um ein Viereck kann man nur bedingt den In- bzw. Umkreis zeichnen.

Aufgaben

87) Eine Kugel mit dem Mittelpunkt O wird von einer punktförmigen Lichtquelle L beleuchtet. Auf eine Wand, die senkrecht zu LO steht, wird ein kreisförmiger Schatten mit dem Mittelpunkt M geworfen. Durch Zeichnung ist der Durchmesser des Schattens zu bestimmen. Für die Konstruktion werde gewählt:

Kugeldurchmesser $D = 100$ mm,
$OL = 130$ mm und $OM = 90$ mm!

88) Ein runder Turm von 20 m Durchmesser erscheint in horizontaler Blickrichtung von einem Punkte A aus unter dem Winkel 60°. Durch Zeichnung ist zu bestimmen, wie weit dieser Punkt

a) von der Achse des Turmes und
b) vom nächstgelegenen Punkte auf dem Umfang des Turmes entfernt ist!

89) Die Blechschablone nach Bild 122 ist an den mit Pfeilen gekennzeichneten Ecken mit dem Radius $r = 10$ mm abzurunden.

Man zeichne die Schablone im Maßstab M: 1 : 1!

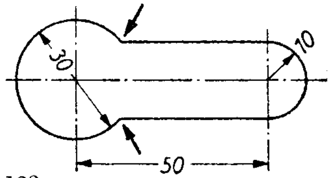


Bild 122

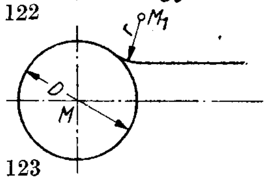


Bild 123

90) Wo berührt der Kreisbogen mit dem Radius r den Kreis mit dem Durchmesser D (Bild 123)?

91) Eine Blechplatte $100 \times 100 \times 2$ soll an den 4 Ecken mit dem Radius $r = 25$ mm abgerundet werden. Es ist die Blechform aufzuzeichnen!

92) Ein Blechstück $50 \times 120 \times 1$ ist an den beiden Enden halbkreisförmig abzurunden.

Es ist eine Zeichnung des fertigen Stückes anzufertigen!

93) In dem kegelförmigen Trichter mit dem Öffnungswinkel $\alpha = 60°$ steckt eine Kugel von 30 mm Durchmesser (Bild 124). Man stelle zeichnerisch fest, wie lang die Strecken a und b sind!

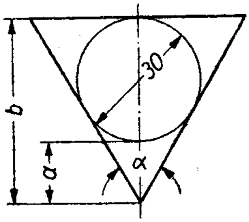


Bild 124

94) In einen Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne AB im Abstande $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkte M gezeichnet. In den Endpunkten dieser Sehne sind die beiden Tangenten an den Kreis gelegt. Sie schneiden sich im Punkte C.

a) Wie groß sind in dem Viereck ACBM die 4 Winkel?

b) Wie weit ist C vom Kreismittelpunkt entfernt?

c) Wie groß ist der Radius des um das Viereck ACMB beschriebenen Umkreises?

95) Von einem Punkt P sind an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M die beiden Tangenten PA und PB gezogen. Die beiden Tangenten schließen den Winkel α ein. Wie groß ist der Winkel AMB? Läßt sich um das Viereck APBM ein Kreis beschreiben?

96) Durch Zeichnung bestimme man, wie lang die gemeinsame äußere Tangente zweier Kreise vom Durchmesser 160 mm und 60 mm ist, wenn die Zentrale $z = 130$ mm beträgt!

97) Durch Zeichnung bestimme man, wie lang die gemeinsame innere Tangente zweier Kreise vom Durchmesser 160 mm und 80 mm ist, wenn die Zentrale $z = 130$ mm beträgt!

98) Gegeben sind 3 Punkte A, B und C. Die Entfernung von A nach B beträgt 15 m, die von B nach C 8 m. Der Winkel ABC ist ein rechter. Durch die 3 Punkte soll der Kreis gelegt werden. Durch Zeichnung bestimme man, wie groß der Durchmesser dieses Kreises ist und wo der Mittelpunkt des Kreises liegt!

99) Die 3 Punkte der vorigen Aufgabe werden durch gerade Linien verbunden, so daß das Dreieck ABC entsteht. Zeichnerisch bestimme man, wie groß der Durchmesser des Kreises ist, den man diesem Dreieck einbeschreiben kann.

100) Der im Bild 125 schematisch skizzierte Kurbelbetrieb hat die Aufgabe, die rotierende Bewegung des Kurbelzapfens T in eine hin- und hergehende Bewegung des Kreuzkopfes K zu verwandeln. Die Schubstangenlänge betrage $KT = l$ mm, der Kurbelkreishalbmesser $OT = r$ mm. (Vergleiche: Seite 226 Bild 360)

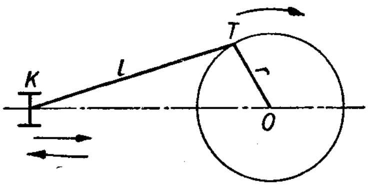


Bild 125

a) Wie groß ist der Weg des Kreuzkopfes für eine halbe Kurbelumdrehung?

b) Wie weit ist die Entfernung zwischen Kreuzkopf K und Kurbelwellenmitte O in der linken und rechten Totlage des Kurbelbetriebes? (In der Totlage liegen K, T und O in einer Geraden.)

101) In einem Tangentenviereck betragen die Längen von 3 Seiten: $a = 12$ cm, $b = 9$ cm und $c = 18$ cm. Die Seite a liegt der Seite c gegenüber. Wie lang ist die 4. Seite d?

102) In einem Sehnenviereck sind die beiden nicht gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 30°$ und $\beta = 140°$ groß. Wie groß sind die Winkel γ und δ?

103) Von 2 Peripheriewinkeln zu verschiedenen Seiten einer Sehne ist der eine dreimal so groß wie der andere. Wie groß sind die beiden Winkel?

104) Die beiden Schenkel des rechten Winkels eines Zeichendreieckes gleiten an 2 in ein Brett eingeschlagenen Nägeln A und B entlang. Welchen Weg beschreibt der Scheitel C des rechten Winkels (Bild 126)?

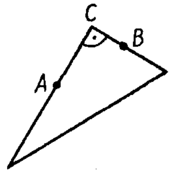


Bild 126

105) a) Welche Parallelogramme sind Sehnenvierecke?
b) Um welche Trapeze kann man einen Kreis beschreiben?
c) Welche Parallelogramme sind Tangentenvierecke?
d) Welchen Kreis (In- oder Umkreis) kann man bei einem Drachenviereck stets zeichnen?

106) An das Dreieck ABC mit den Seiten $a = 40$ mm, $b = 50$ mm und $c = 60$ mm, ist der Ankreis an die Seite a gelegt. Vom Mittelpunkt M_a dieses Ankreises ist auf die Verlängerung von AB das Lot M_aD gefällt. Wie groß ist AD?

107) In das Dreieck der vorhergehenden Aufgabe ist der Inkreis beschrieben. Wie weit ist der Berührungspunkt des Inkreises von der Ecke A entfernt?

108) In dem Dreieck ABC ist um den Mittelpunkt der Seite c mit $\frac{c}{2}$ der Kreis beschrieben. Dieser schneidet die Seiten BC in D und AC in E. Was für Geraden sind AD und BE?

109) Der einfache **Korbbogen** (Bild 127) setzt sich aus 4 Kreisbogen zusammen, von denen je 2 einander gleich sind. Wie groß ist der Radius x, wenn der Radius des kleinen Kreisbogens r mm beträgt?

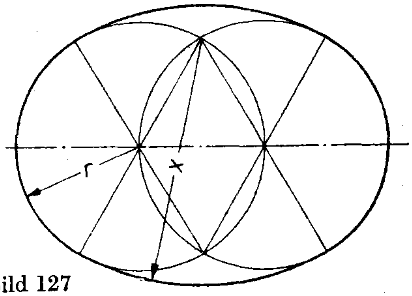


Bild 127

110) Das Rad eines Eisenbahnwagens läuft nach Bild 128 auf einen Bremsklotz, der den Anstiegswinkel 30° hat. In der Bremsstellung würde das Rad den Bremsklotz in einem Punkte B berühren.

Wie groß ist dann der Winkel AMB in der Bremsstellung?

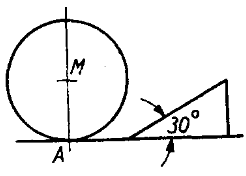


Bild 128

G. Flächeninhaltsbestimmung

1. Einleitung

Eins der für den Techniker und Ingenieur wichtigsten Kapitel der Geometrie ist die Bestimmung der Flächeninhalte ebener Figuren. Er gebraucht die Flächeninhalte zu den verschiedensten Zwecken, aus deren großer Zahl beispielsweise die folgenden erwähnt seien:

1. Volumen- und Gewichtsbestimmung von Körpern für Zwecke der Festigkeitsberechnung oder Preisbildung.
2. Querschnittsbestimmung von Maschinenteilen zum Überprüfen der auftretenden Spannungen.
3. Querschnittsbestimmung von Rohrleitungen und Kanälen zur Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit von Flüssigkeiten oder Gasen.
4. Berechnung der Grundrisse zur Festlegung von Bebauungsplänen bzw. zur Überprüfung der zulässigen Deckenbelastung.
5. Untersuchung von Wellenbelastungen und Bestimmung der auftretenden Durchbiegungen.
6. Bestimmung der Oberflächen von wärmestrahlenden bzw. -leitenden Körpern für Wärmeverlustberechnungen.
7. Flächeninhaltsbestimmung von Indikatordiagrammen der Kolbenmaschinen für Leistungsberechnungen und viele andere.

Das Wesen der Flächeninhaltsbestimmung besteht darin, daß man feststellt, wie oft eine bestimmte Einheitsfläche (z. B. 1 mm^2, 1 cm^2 usw.) in der vorgegebenen Fläche enthalten ist. Die hierbei entstehende Zahl heißt die Maßzahl der Fläche und die verwendete Einheit (bzw. deren Benennung) die Dimension, in welcher die Fläche gemessen wird.

Den Inhalt einer Fläche kann man in mm^2, cm^2, dm^2 oder m^2 bestimmen, je nachdem man die zur Berechnung erforderlichen Längen als mm, cm, dm oder m in die Rechnung einführt. Eine Norm für die Verwendung einer bestimmten Längendimension kann nicht aufgestellt werden. Will man z. B. das Gewicht eines Körpers, wie es meist üblich ist, in kg bestimmen, so rechnet man mit dm als der Längeneinheit oder mit dm^3 als der Volumeneinheit. Das Volumen eines größeren Körpers in m^3 mit der Wichte (= Einheitsgewicht oder spez. Gewicht) multipliziert, ergibt das Körpergewicht in t. Ein in cm^3 festgelegtes Volumen führt auf das Körpergewicht in g. In der Festigkeitsberechnung ist als Einheit der Flächengröße das cm^2 bevorzugt, da die Spannungen in kg/cm^2 bestimmt werden. Bei Strömungsgeschwindigkeiten, die den in einer Sekunde zurückgelegten Weg in m angeben, rechnet man die Querschnittsflächen in m^2. Die Verwendung einer bestimmten Dimension ist zweckgebunden; sie hängt von der für das Ergebnis erforderlichen Dimension ab.

In der reinen Geometrie gibt man keine Längen- oder Flächeneinheiten an. Man spricht dort von der Länge a einer Strecke oder kurz von der Strecke a. Hierbei gibt a gleichzeitig an, daß die betreffende Strecke a-mal so lang wie eine der Betrachtung zugrunde gelegte Längeneinheit ist. Werden noch andere Längen b oder c usw. genannt, so ist die gewählte Längeneinheit selbstverständlich dieselbe.

2. Flächeninhaltsberechnung geradlinig begrenzter Flächen

Quadrat

Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich dem Quadrat der Seite.

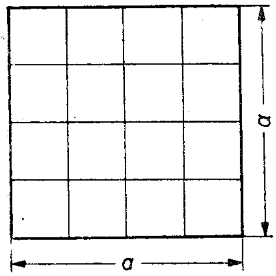


Bild 129

Das Quadrat mit der Seitenlänge a (Bild 129) kann man in a Reihen von je a Flächeneinheiten zerlegen; im ganzen erhält man $a \times a = a^2$ Flächeneinheiten. (Im Bild 129 beträgt $a = 4$.)

Der Flächeninhalt des Quadrates mit der Seite a beträgt:

$$\boxed{f = a^2}$$

Man unterscheide den Inhalt $f = a^2$ von dem Umfang des Quadrates, der sich als Summe der 4 Seiten darstellt. Der Umfang des Quadrates beträgt: $U = a + a + a + a = 4a$.

Unterscheide! a^2 ist der Flächeninhalt des Quadrates mit der Seite a.
2 a ist die Länge der Strecke, die doppelt so lang wie die Strecke a ist.

Rechteck

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus den beiden aneinanderstoßenden Seiten.

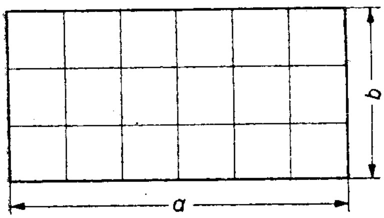


Bild 130

Das Rechteck möge die Seiten a und b haben (Bild 130). Man erhält nach nebenstehendem Bild b untereinanderliegende Reihen von je a nebeneinanderliegenden Flächeneinheiten. (Im Bilde ist $a = 6$ und $b = 3$.) Aus dieser Zerlegung folgt der Rechtecksinhalt:

$$\boxed{f = a \cdot b}$$

Der Umfang des Rechtecks beträgt:

$$U = a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b)$$

Parallelogramm

Das Rechteck ABCD (Bild 131) hat die Grundlinie a und die Höhe h_a.

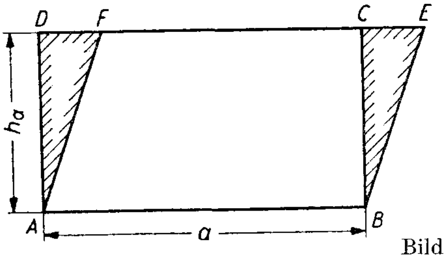


Bild 131

Sein Flächeninhalt beträgt also $f = a \cdot h_a$. Schneidet man von ihm an der linken Seite durch die gerade Schnittlinie AF die Ecke D ab und setzt das abfallende △ AFD an die rechte Seite so an, daß AD auf BC und der Punkt F in die neue Lage E zu liegen kommt, so hat das ursprüngliche Rechteck ABCD den gleichen Flächeninhalt wie das Parallelogramm (Rhomboid) ABEF;

also $\boxed{f = a \cdot h_a}$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe. Oder anders ausgedrückt:

Sämtliche Parallelogramme, die über derselben Grundlinie stehen und die gleiche Höhe haben, sind flächengleich.

Mit Hilfe dieses Satzes werden nachstehend die Fundamentallehrsätze der Geometrie bewiesen. Diese Lehrsätze sind:

Der Lehrsatz des Euklid,
der Lehrsatz des Pythagoras,
der Höhensatz.

Diese 3 Lehrsätze befassen sich mit der Größe der
Quadrate und Rechtecke am rechtwinkligen Dreieck.

Lehrsatz des Euklid

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Behauptung: □ ACHI = ▭ ADKL (Bild 132).

Linkes Kathetenquadrat = Rechteck über dem linken Hypotenusenabschnitt.

Beweis

Man ziehe IM parallel AB. Hierdurch entsteht das Parallelogramm ABMI. □ ACHI = ▱ AB M I, weil beide dieselbe Grundlinie AI und die gleiche Höhe IH haben. Das Parallelogramm ABMI wird im Sinne der Drehbewegung des Uhrzeigers um A gedreht, bis es in die Lage ADNC

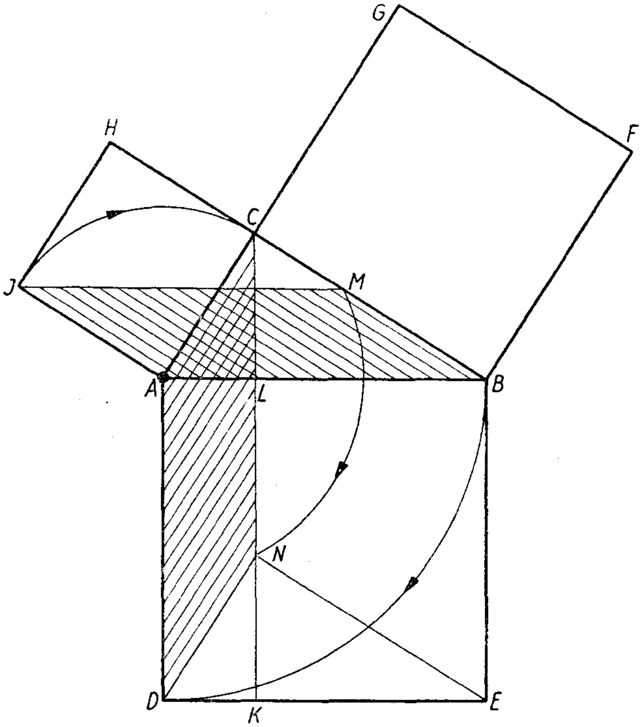


Bild 132

kommt. Es ist dann ▱ ABMI = ▱ ADNC. Da das $\triangle$ ALC $\cong$ $\triangle$ DKN ist, ist auch ▱ ADNC = ▯ ADKL; also:

□ ACHI = ▯ ADKL. w. z. b. w.

Ebenso ergibt sich, daß das Rechteck über dem rechten Hypotenusenabschnitt, ▯ BLKE, gleich dem Quadrat über der rechten Kathete ist;

□ CBFG = ▯ BLKE.

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man:

□ ACHI + □ CBFG = ▯ ADKL + ▯ BLKE.

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht die Summe der Quadrate über den beiden Katheten a und b; also: $a^2 + b^2$. Auf der rechten Seite steht die Summe der beiden Rechtecke über den Hypotenusenabschnitten. Diese Summe ist aber gleich dem Quadrat über der Hypotenuse c; also: c^2. Man erhält somit die Gleichung:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Diese Gleichung ist die Formel für den

Lehrsatz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den beiden Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

Man präge sich den Wortlaut dieses pythagoreischen Lehrsatzes ein und merke sich die nebenstehende Figur (Bild 133) und die Formel!

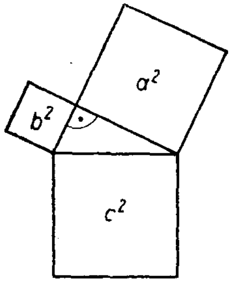


Bild 133

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

In dieser Form lautet der pythagoreische Lehrsatz:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Hierbei sei eindringlichst vor dem leider nur zu gern gemachten Fehler gewarnt, daß man bei der Bestimmung der Hypotenuse c „einfach" die Wurzel aus a^2 zieht und hierzu die Wurzel aus b^2 hinzuzählt. Es ist:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b \text{ (lies: ungleich } a + b\text{).}$$

Für die Richtigkeit des Lehrsatzes des Pythagoras gibt es außerdem noch eine Reihe anderer Beweise, die zu den verschiedensten Zeiten von den Mathematikern der verschiedensten Länder erbracht wurden. Im 1. Teil dieses Buches ist der von den alten Indern stammende sogenannte Indische Beweis des Lehrsatzes des Pythagoras angegeben[1]).

Es gilt auch die Umkehrung zum Lehrsatz des Pythagoras:

Ist in einem Dreieck die Summe der Quadrate über 2 Seiten gleich dem Quadrat über der dritten Seite, so ist dieses Dreieck rechtwinklig.

Höhensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

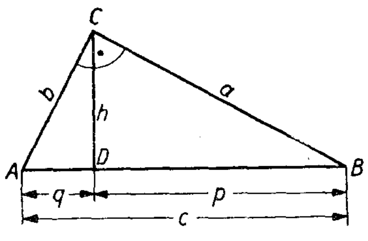


Bild 134

Behauptung $\boxed{h^2 = p \cdot q}$ (Bild 134)

Beweis 1

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist in dem Dreieck ADC:

$$b^2 = h^2 + q^2 \quad \text{oder}$$
$$h^2 = b^2 - q^2.$$

Nach dem Lehrsatz des Euklid ist in dem Dreieck ABC:

$$b^2 = q \cdot c.$$

[1]) Ein anderer Beweis befindet sich im Band „Betriebliches Rechnen".

Diesen Wert für b^2 setze man in die vorletzte Gleichung ein! Man erhält:

$$h^2 = q\,c - q^2 = q\,(c - q) = q \cdot p; \quad \text{w. z. b. w.}$$

Beweis 2

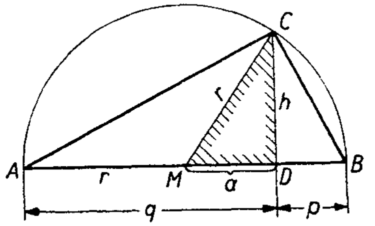


Bild 135

Über AB (Bild 135) als Durchmesser beschreibt man den Halbkreis (Thaleskreis). Auf ihm liegt die Spitze C des rechtwinkligen Dreiecks ABC. Die Mitte der Hypotenuse ist M. Sie ist als Mittelpunkt des Umkreises von den 3 Ecken A, B und C gleichweit entfernt, beispielsweise r. Der Fußpunkt des von C auf die Hypotenuse gefällten Lotes sei D. Man bezeichne CD mit h; MD mit a; AM = BM mit r. In dem rechtwinkligen Dreieck MDC ist nach Pythagoras $h^2 = r^2 - a^2 = (r + a) \times (r - a)$. Wie aus der Zeichnung ersichtlich, ist $r + a = q$ und $r - a = p$. Diese Werte in die letzte Gleichung eingesetzt, ergibt: $h^2 = p \cdot q$. w. z. b. w.

Zusammenfassung:

Lehrsatz des Euklid: $a^2 = p \cdot c$ oder $b^2 = q \cdot c$

Lehrsatz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Achtung! Die vorstehenden 3 Sätze gelten in dieser Form nur für das rechtwinklige Dreieck!

Für schiefwinklige, also nicht rechtwinklige, Dreiecke läßt sich ein dem pythagoreischen Lehrsatz ähnlicher Satz ableiten, der als der erweiterte oder allgemeine Lehrsatz des Pythagoras bezeichnet wird.

Bevor wir uns jedoch diesem zuwenden, müssen wir den Begriff der Projektion einer Strecke auf eine Gerade klären.

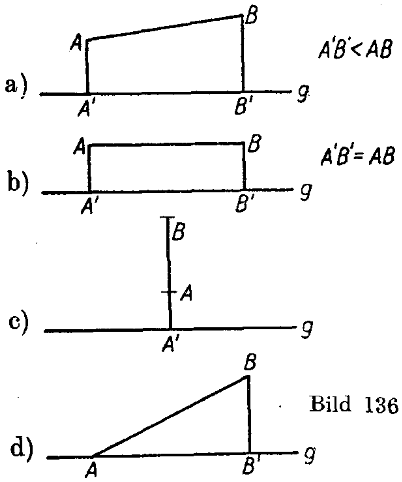


Bild 136

Die Projektion einer Strecke

Die Projektion einer Strecke AB auf eine Gerade g erhält man, wenn man von den beiden Endpunkten der Strecke AB auf die Gerade g die Lote AA′ und BB′ fällt. Der Abstand der Fußpunkte dieser Lote A′B′ ist die Projektion.

Erklärung: Unter der Projektion einer Strecke auf eine Gerade versteht man den Abstand der Fußpunkte der von den Endpunkten der Strecke auf die Gerade gefällten Lote.

A′B′ ist die Projektion der Strecke AB auf die Gerade g. Die Projektion ist niemals größer als die projizierte Strecke AB. In der Regel ist sie kleiner (Bild 136a). Sie kann höchstens gleich der zu projizierenden Strecke sein, nämlich dann, wenn die Strecke mit der Geraden parallel ist (Bild 136b). Ist die Richtung der Strecke AB senkrecht zu der Geraden g, so hat die Projektion die Länge 0, da die beiden Fußpunkte der Lote in einen Punkt A′ zusammenfallen (Bild 136c).

Liegt der eine Endpunkt der zu projizierenden Strecke auf der Geraden g, so ist nur ein Lot zu fällen. Die Projektion von AB ist AB′ (Bild 136d).

Beispiele

1) Die Summe der Projektionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse ist gleich der Hypotenuse.

Beweis

Im Bild 134 hat die Projektion der Kathete a die Länge p. Die Projektion der Kathete b auf die Hypotenuse beträgt q. Die Summe der beiden Projektionen p + q ist gleich der Hypotenuse.

2) Wie groß ist die Projektion der Hypotenuse auf eine Kathete?

Lösung

Die Projektion der Hypotenuse auf eine Kathete ist die Kathete selbst.

3) Der Giebel eines Sägedaches (oder Shed-Daches) hat die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 12 m; die kürzere Kathete ist 6 m lang (Bild 137).

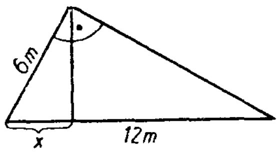


Bild 137

Wo liegt der Fußpunkt des von der Dachspitze auf die Grundlinie gefällten Lotes oder, anders ausgedrückt, wie lang ist die Projektion der kürzeren Kathete auf die Hypotenuse?

Lösung

Die Länge der Projektion betrage x. Nach dem Satz des Euklid ist dann:

$6^2 = 12 \cdot x$; d. h. $x = 3$ m

In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck projiziere man die 3 Seiten aufeinander. Man erhält die 3 Höhenfußpunkte. Im Bild 138 ist AD die Projektion von AC auf AB und AF die Projektion von AB auf AC.

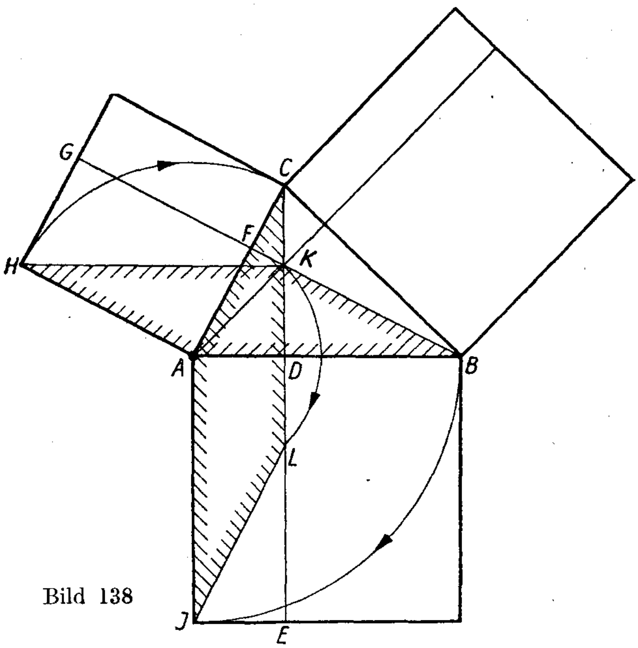


Bild 138

Ähnlich dem Beweis zum Lehrsatz des Euklid beweist man folgenden Lehrsatz:

Konstruiert man in einem spitzwinkligen Dreieck über jeder Seite das Quadrat, sowie die 3 Höhen und verlängert eine jede über ihren Fußpunkt hinaus, so daß alle Quadrate in 2 Rechtecke zerlegt werden, so sind stets 2 in einer Ecke des Dreiecks zusammenstoßende Rechtecke inhaltsgleich.

Behauptung ▭ AFGH = ▭ AJED

Beweis

Zum Beweise ziehe man durch H die Parallele HK zu AB.

▭ AFGH = ▱ ABKH (gleiche Grundlinie HA und gleiche Höhe HG)

▱ ABKH werde um A im Uhrzeigersinne in die Lage AJLC gedreht.

▱ ABKH = ▱ AJLC. Da $\triangle$ ADC $\cong$ $\triangle$ JEL ist, ist auch

▱ AJLC = ▭ AJED. Es folgt:

▭ AFGH = ▭ AJED, w. z. b. w.

Die Inhalte der flächengleichen Teilrechtecke (Bild 139) mögen der Einfachheit halber mit Ia, Ib, IIa, IIb, IIIa und IIIb bezeichnet werden.

Nach dem vorstehenden Satz ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{IIIa} &= \mathrm{IIa} \\ \mathrm{IIIb} &= \mathrm{Ia} \end{aligned}$$

Durch Addition $\mathrm{IIIa} + \mathrm{IIIb} = \mathrm{IIa} + \mathrm{Ia}$

$$c^2 = b^2 - \mathrm{IIb} + a^2 - \mathrm{Ib}.$$

Da Ib = IIb ist, ist: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \mathrm{Ib}$

oder in Worten:

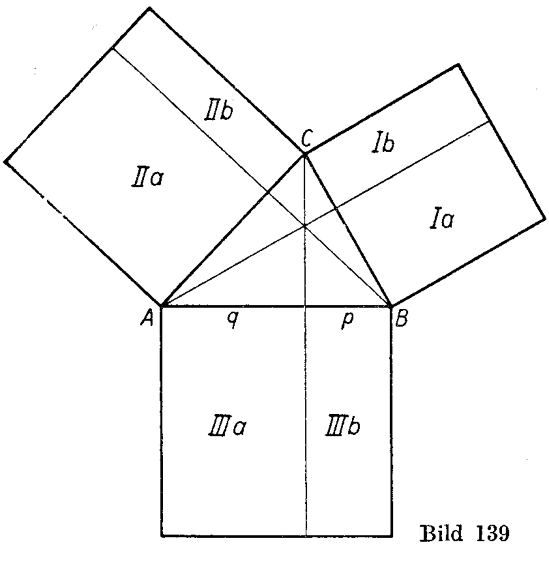


Bild 139

Das Quadrat über der einen Dreiecksseite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

In ähnlicher Weise läßt sich beweisen, daß das Quadrat über der einen Dreiecksseite, die einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten ist, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

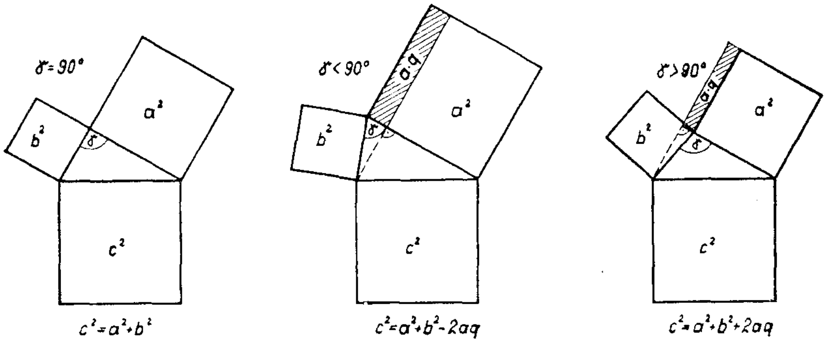
Diese beiden Lehrsätze kann man zusammenfassen in dem

Allgemeinen Lehrsatz des Pythagoras

Das Quadrat über der einen Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermindert oder vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie, je nachdem diese Seiten einen spitzen oder stumpfen Winkel einschließen.

$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2\,aq$	— Zeichen gilt für $\gamma < 90°$
	+ Zeichen gilt für $\gamma > 90°$

Ist das Dreieck rechtwinklig mit der Hypotenuse c, so ist die Projektion q der Kathete b auf die Kathete a gleich 0 und der allgemeine pythagoreische Lehrsatz geht in den gewöhnlichen über.



Dreieck

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe.

$$\boxed{f = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c}$$

Beweis 1

Jedes Parallelogramm kann man durch einen Diagonalschnitt in 2 kongruente (d. h. flächengleiche) Dreiecke zerlegen (Bild 140). Der Inhalt eines der beiden Dreiecke ist halb so groß wie der des Parallelogramms, das die Grundlinie c und die Höhe h_c und somit den Inhalt $c \cdot h_c$ hat.

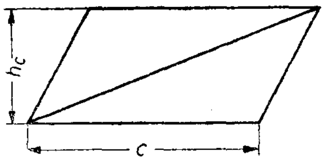


Bild 140

Dreiecksinhalt: $f = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c$

Beweis 2

Das Dreieck ABC ist in halber Höhe parallel zu seiner Grundlinie c geschnitten (Bild 141). Es zerfällt dadurch in ein Trapez und in ein Dreieck. Dieses wird wiederum durch einen senkrechten Schnitt von der Spitze auf seine Grundlinie in 2 Teildreiecke zerlegt, von denen das eine an die linke, das andere an die rechte Seite des Trapezes an- gesetzt wird.

Hierdurch wird aus dem Trapez ein Rechteck, mit den Flächeninhalt

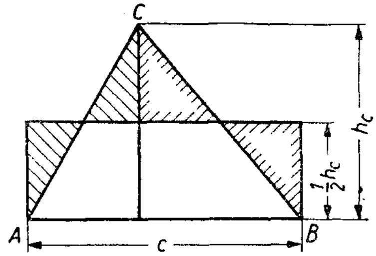


Bild 141

$$f = \frac{1}{2} c \cdot h_c .$$

Die Fläche des Rechtecks ist aber gleich der des ursprünglichen Dreiecks; also beträgt der Inhalt des Dreiecks

$$f = \frac{1}{2} c \cdot h_c .$$

Beweis 3

In einem beliebigen Dreieck ABC (Bild 142) mit der Grundlinie AB = c fälle man von C auf AB die Höhe CD = h_c. Man erhält 2 Teildreiecke I und II. Diese setzt man, wie Bild 142 angibt, an die Seiten AC und BC an. Man erhält ein Rechteck, das aus den Teildreiecken I, II, III und IV besteht. Da aber I = III und II = IV ist, ist der Inhalt des Dreiecks ABC halb so groß wie der des Rechtecks;

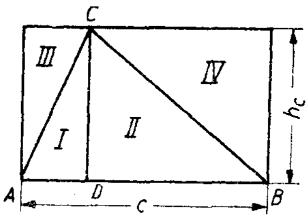


Bild 142

also $f = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Weitere Formeln für den Dreiecksinhalt:

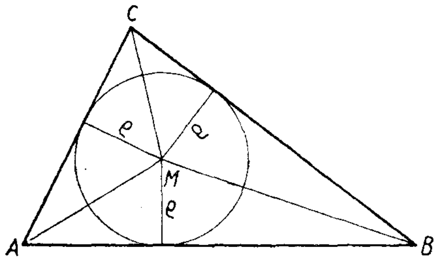


Bild 143

Es sei: ϱ = **Radius des Inkreises**

s = **Halber Dreiecksumfang**

$$= \frac{a + b + c}{2}$$

Mit diesen Größen beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$\boxed{f = \varrho \cdot s}$$

In Worten:

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Radius des Inkreises und dem halben Dreiecksumfang.

Beweis

Die Verbindungslinien des Mittelpunktes M des Inkreises (Bild 143) mit den 3 Ecken A, B und C zerlegen das Dreieck ABC in die 3 Teildreiecke ABM, BCM und CAM, die den Inkreisradius ϱ zur Höhe haben.

Die Flächeninhalte dieser 3 Dreiecke betragen:

$$f_1 = \frac{1}{2} c \cdot \varrho$$

$$f_2 = \frac{1}{2} a \cdot \varrho$$

$$f_3 = \frac{1}{2} b \cdot \varrho$$

Gesamtflächeninhalt:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{1}{2} c \cdot \varrho + \frac{1}{2} a \cdot \varrho + \frac{1}{2} b \cdot \varrho = \varrho \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \varrho \cdot s$$

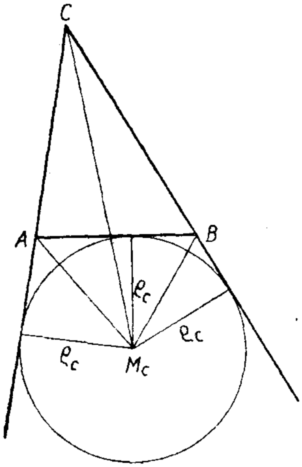


Bild 144

Es sei ϱ_c = **Radius des Ankreises** an die Seite c des Dreiecks ABC.

$s - c$ = Differenz des halben Dreiecksumfanges und der Dreiecksseite, der der Ankreis anliegt.

Mit diesen Größen beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$\boxed{f = \varrho_c \cdot (s - c)}$$

In Worten:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Radius eines Ankreises und der Differenz aus dem halben Dreiecksumfang und der Seite, der der Ankreis anliegt.

Beweis

Der Ankreismittelpunkt M_c ist mit den 3 Ecken des Dreiecks ABC verbunden (Bild 144). Hierdurch entstehen die 3 Teildreiecke CAM_c, BCM_c und BAM_c, die den Ankreisradius ϱ_c zur Höhe haben. Die Flächeninhalte der 3 Teildreiecke betragen:

$$f_1 = \frac{1}{2} b \cdot \varrho_c$$

$$f_2 = \frac{1}{2} a \cdot \varrho_c$$

$$f_3 = \frac{1}{2} c \cdot \varrho_c$$

Gesamtflächeninhalt:

$$f = f_1 + f_2 - f_3 = \frac{1}{2} b \cdot \varrho_c + \frac{1}{2} a \cdot \varrho_c - \frac{1}{2} c \cdot \varrho_c = \varrho_c \cdot \left(\frac{b+a-c}{2}\right)$$

$$= \varrho_c \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right) = \varrho_c \cdot (s - c)$$

Heronische Dreiecksformel

$$\boxed{f = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$$

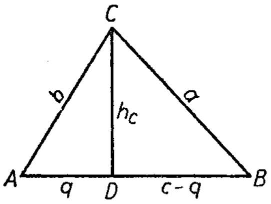


Bild 145

Hierin bedeutet

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$= \text{halber Dreiecksumfang}$

Beweis

Im Dreieck ADC (Bild 145) ist nach dem Pythagoras:

$$b^2 = h_c^2 + q^2$$

oder $h_c^2 = b^2 - q^2 = (b+q) \cdot (b-q)$

$$h_c = \sqrt{(b+q) \cdot (b-q)}$$

Im Dreieck DBC ist nach dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 = h_c^2 + (c-q)^2 = h_c^2 + c^2 - 2cq + q^2$$

Aus Dreieck ADC setze man für $q^2 = b^2 - h_c^2$ ein. Man erhält:

$$a^2 = h_c^2 + c^2 - 2\,cq + b^2 - h_c^2 \quad \text{und:}$$

$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}$$

Diesen Wert für q in die obige Gleichung für h_c eingesetzt, ergibt:

$$h_c = \sqrt{\left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,c}\right)}$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b-c)^2]}$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$$

$$= \frac{2}{c} \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$$

Diesen Wert setzt man in die Flächeninhaltsformel $f = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ ein und erhält:

$$f = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2}{c} \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

$$f = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Trapez

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Mittellinie und der Höhe.

$$f = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h = m \cdot h$$

Beweis 1

Nach Bild 90 auf Seite 44 ist $\triangle GBF \cong \triangle FHC$. Der Inhalt des Trapezes ABCD ist gleich dem des Parallelogrammes AGHD, das als Grundlinie $AG = EF = m$ und die Höhe h hat. Sein Inhalt beträgt also: $f = m \cdot h$. Da aber $m = \frac{a+b}{2}$, so erhält man als Flächeninhalt:

$$f = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h$$

Beweis 2

Die Diagonale AC (Bild 146) zerlegt das Trapez in die beiden Teildreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$, deren Inhalte f_1 und f_2 betragen mögen.

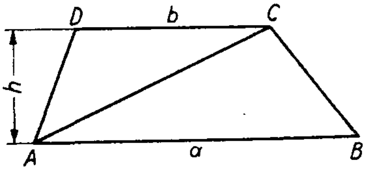


Bild 146

$$f_1 = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$f_2 = \frac{1}{2} b \cdot h$$

Trapezinhalt

$$f = f_1 + f_2 = \frac{1}{2} a h + \frac{1}{2} b h = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h$$

Beweis 3

Legt man 2 kongruente Trapeze mit den parallelen Seiten a und b und der Höhe h nach Bild 147 nebeneinander, so erhält man ein Parallelogramm, dessen Inhalt $f = (a + b) h$ doppelt so groß wie der eines der beiden Trapeze ist. Trapezinhalt:

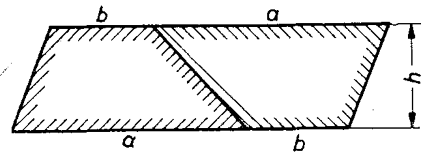


Bild 147

$$f = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$$

Vierecke

Den Inhalt eines beliebigen Vierecks findet man, indem man es durch eine Diagonale in 2 Dreiecke zerlegt und die Summe der Inhalte der beiden Teildreiecke berechnet.

Beispiele

1) Das gegebene Viereck ABCD (Bild 148) hat den Inhalt:

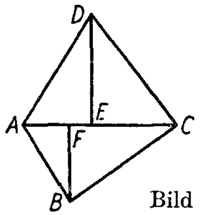


Bild 148

$$f = \frac{1}{2} AC \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot FB$$
$$= \frac{1}{2} AC \cdot (DE + FB)$$

2) Dem Viereck ABCD ist das Rechteck EFGH so umbeschrieben, daß dessen eines Seitenpaar parallel der Vierecksdiagonalen AC ist (Bild 149).

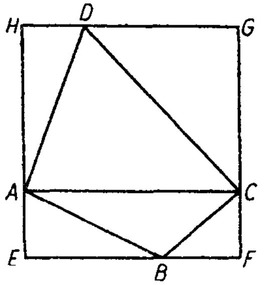


Bild 149

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \square\ AEFC \text{ und}$$
$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \square\ ACGH$$

Durch Addition folgt:

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} (\square\ AEFC + \square\ ACGH)$$
$$ABCD = \frac{1}{2}\ EFGH \text{ d. h.}$$

Der Inhalt des umbeschriebenen Vierecks ist doppelt so groß wie der des ursprünglichen Vierecks.

3) Wie groß ist der Inhalt des Rhombus mit den Diagonalen

$BD = d = 4$ cm und
$AC = e = 6$ cm (Bild 150)?

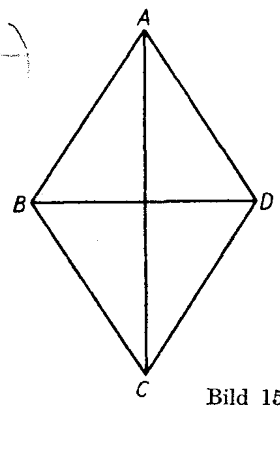


Bild 150

Der Inhalt des Rhombus setzt sich aus 2 flächengleichen Teildreiecken zusammen. Er beträgt also:

$$f = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} d \cdot \frac{e}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} d \cdot e$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}^2$$

Ergebnis:

Der Rhombusinhalt ist gleich dem halben Produkt aus den beiden Diagonalen

4) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Drachenvierecks mit den beiden Diagonalen d und e?

Lösung

Das Drachenviereck ist nach Bild 151 aus 2 gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt, deren Inhalte betragen:

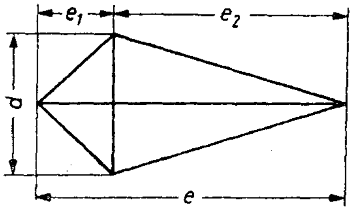


Bild 151

$$f_1 = \frac{1}{2} d \cdot e_1 \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{1}{2} d \cdot e_2$$

Gesamtflächeninhalt:

$$f = f_1 + f_2 = \frac{1}{2} d \cdot (e_1 + e_2) = \frac{1}{2} d \cdot e$$

Ergebnis:

Der Flächeninhalt eines Drachenvierecks ist gleich dem halben Produkt aus seinen beiden Diagonalen.

5) Der Flächeninhalt eines Tangentenvierecks ist aus seinem Umfang und dem Radius des Inkreises zu bestimmen!

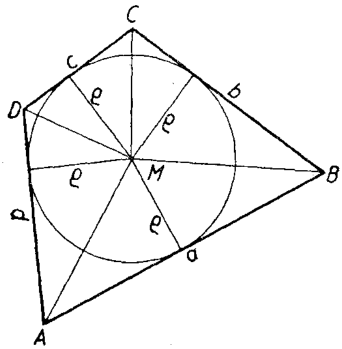


Bild 152

Durch die Verbindungslinien des Mittelpunkts M des Inkreises mit den Ecken des Tangentenviereckes (Bild 152) entstehen 4 Teildreiecke mit gleicher Höhe ϱ (= Radius des Inkreises).

Gesamtflächeninhalt:

$$f = \frac{1}{2} a \cdot \varrho + \frac{1}{2} b \varrho + \frac{1}{2} c \varrho + \frac{1}{2} d \varrho$$

$$= \varrho \left(\frac{a + b + c + d}{2} \right)$$

Der Klammerinhalt ist der halbe Umfang des Vierecks, den man wie beim Dreieck mit s bezeichnet.

Hiermit erhält man:

$$f = \varrho \cdot s.$$

Anmerkung zu Aufgabe 5):

Faßt man das Quadrat mit der Seite a als Tangentenviereck auf, wobei $\varrho = \frac{a}{2}$ und $s = 2a$ beträgt, so ist nach der letzten Gleichung der Inhalt des Quadrates:

$$f = \frac{a}{2} \cdot 2a = a^2.$$

Beliebige n-Ecke

Den Inhalt beliebiger n-Ecke kann man auf verschiedene Arten bestimmen:

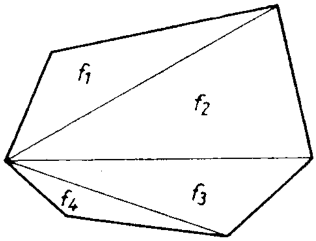


Bild 153

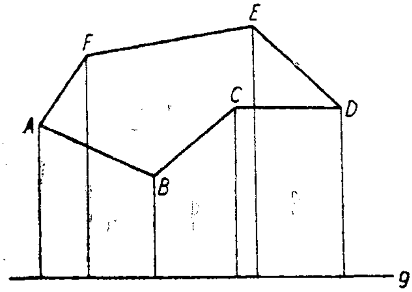


Bild 154

a) Zerlegung in Dreiecke:

Von der einen Ecke des n-Ecks (Bild 153) kann man (n — 3) Diagonalen ziehen und dadurch das n-Eck in (n—2) Teildreiecke zerlegen, deren Inhalte man nach einer der bekannten Formeln ermittelt. In nebenstehendem Bild ist $n = 6$. Die Anzahl der Diagonalen beträgt $(n - 3) = 3$. Es entstehen $(n - 2) = 4$ Teildreiecke. Der Gesamtflächeninhalt des Sechsecks beträgt

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4.$$

b) Trapezmethode:

Man projiziert die Seiten des n-Ecks auf eine beliebig gelegte Gerade g und erhält Trapeze (Bild 154), deren Flächeninhalte man einzeln bestimmen kann. Den Gesamtflächeninhalt des n-Ecks berechnet man als Summe bzw. Differenz der Flächeninhalte der Teiltrapeze.

Beispiele

1) Ein quadratischer Pfeiler, der mit 6 kg/cm² belastet werden darf, hat die Kantenlänge 25 cm. Wieviele Tonnen beträgt die zulässige Last?

Lösung

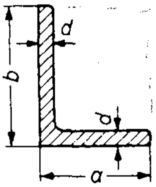
Man bestimmt zunächst die belastete Fläche des Pfeilers mit: $f = 25^2 = 625$ [cm²]. 1 cm² kann mit 6 kg belastet werden; folglich beträgt die zulässige Last: $6 \times 625 = 3750$ [kg] $= 3{,}75$ [t].

2) Das Papierformat DIN A 4 hat die Abmessungen: 210×297 [mm]. Wieviele solcher Blätter kann man aus einem Quadratmeter Papier herausschneiden?

Lösung

Ein Blatt DIN A 4 hat die Fläche $f = 210 \times 297 = 62370$ [mm²]. Da $1\ m^2 = 1000000\ mm^2$ ist, kann man aus ihm $1000000 : 62370 = 16$ Blätter DIN A 4 herausschneiden.

3) Wie groß ist die Querschnittsfläche des ungleichschenkligen Winkelstahls (Bild 155)? (Die Abrundungen mögen bei der Berechnung vernachlässigt werden!)



$a = 40$ mm
$b = 50$ mm
$d = 5$ mm

Bild 155

Lösung

Am einfachsten entnimmt man die Querschnittsflächen genormter Walzprofile einer Profiltabelle. (Siehe Hilfsbuch für Betrieb und Konstruktion.) Hat man eine solche Tabelle nicht zur Hand, so muß man wie folgt rechnen:

$$f = ab - (a - d) \cdot (b - d);$$

denn die Querschnittsfläche ist gleich der Differenz der beiden Rechtecke mit den Seiten a und b sowie $(a - d)$ und $(b - d)$. Mit bestimmten Zahlen erhält man:

$$f = 40 \cdot 50 - 35 \cdot 45 = 2000 - 1575 = 425\,[\text{mm}^2] \quad \text{oder}$$
$$f = 4{,}25\,[\text{cm}^2]$$

4) Welches der 3 Parallelogramme (Bild 156) hat den größten Flächeninhalt?

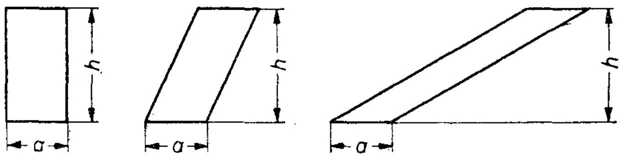


Bild 156

Lösung

Da alle 3 Parallelogramme sowohl dieselbe Grundlinie a, als auch dieselbe Höhe h haben, so sind sie nach dem auf Seite 69 abgeleiteten Lehrsatz flächengleich.

5) Satz von den Ergänzungsparallelogrammen:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt der einen Diagonale eines Parallelogramms die beiden Parallelen zu den Seiten, so sind die von der Diagonale nicht durchsetzten Teil-Parallelogrammflächen einander gleich.

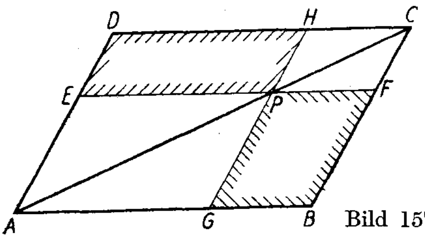


Bild 157

Im Bild 157 ist EF und GH parallel zu den Seiten durch P gezogen.

Behauptung:

▱ EPHD = ▱ PGBF

Beweis

Man erhält 3 Paar kongruenter Dreiecke, nämlich:

1) $\triangle ACD \cong \triangle CAB$
2) $\triangle APE \cong \triangle PAG$
3) $\triangle PCH \cong \triangle CPF$

Von Gleichung 1 wird Gleichung 2 und danach Gleichung 3 subtrahiert. Man erhält:

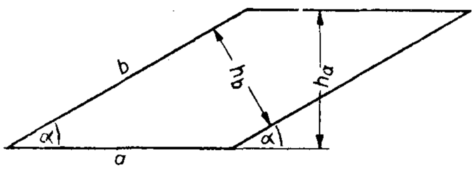
$$\triangle ACD - \triangle APE - \triangle PCH = \triangle CAB - \triangle PAG - \triangle CPF$$

$$▱\ EPHD = ▱\ PGBF \qquad \text{w. z. b. w.}$$

6) Konstruiere das Parallelogramm mit den Seiten $a = 2{,}95$ cm und $b = 3{,}65$ cm und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $\alpha = 30°$. Wie lang sind die Höhen h_a und h_b? Wie groß ist der Flächeninhalt des Parallelogramms?

Lösung

An die gegebene Seite $a = 2{,}95$ cm (Bild 158) trägt man in ihren beiden Endpunkten den Winkel $\alpha = 30°$ an und macht die freien Schenkel 3,65 cm lang. Dadurch erhält man die beiden anderen Ecken des gesuchten Parallelogramms.



Maßstab: 1:1 Bild 158

Der Zeichnung entnimmt man: Höhe $h_a = 1{,}83$ cm und $h_b = 1{,}48$ cm. Der Flächeninhalt ist

$$f = 2{,}95 \times 1{,}83 = 5{,}4\ [\text{cm}^2] \quad \text{oder} \quad f = 3{,}65 \times 1{,}48 = 5{,}4\ [\text{cm}^2]$$

7) Wie groß ist der Querschnitt der Schwalbenschwanzführung (Bild 159)?

Lösung

Der Querschnitt setzt sich aus dem Rechteck mit den Seiten 70 und 30 mm und dem von dem Rechteck abzuziehenden Trapez mit den parallelen Seiten 30 und 20 und der Höhe 10 mm zusammen.

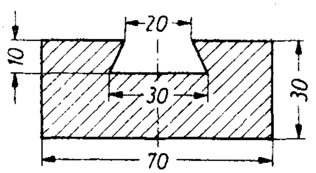


Bild 159

Man erhält:

$$f = 3 \cdot 7 - \frac{2+3}{2} \cdot 1 = 21 - 2{,}5 = 18{,}5\ [\text{cm}^2].$$

8) Ein Dreieck mit der Grundlinie $c = 8$ cm und der Höhe $h_c = 6$ cm wird durch einen in halber Höhe zur Grundlinie parallel gelegten Schnitt in 2 Teile zerlegt (Bild 160). Wie groß sind die Flächeninhalte f_1 und f_2 der Teilfiguren und der gesamte Dreiecksinhalt f?

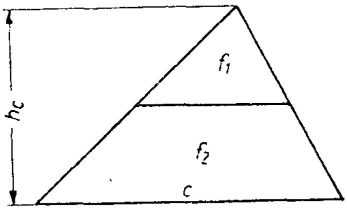


Bild 160

Lösung

Nach Seite 45 ist die Parallele in halber Höhe zur Grundlinie halb so lang wie die Grundlinie, also hier 4 cm. Die obere Teilfigur ist ein Dreieck mit dem Inhalt:

$$f_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ [\text{cm}^2]$$

Die untere Teilfigur ist ein Trapez mit dem Inhalt

$$f_2 = \frac{8 + 4}{2} \cdot 3 = 18\ [\text{cm}^2].$$

Der Gesamtinhalt des Dreiecks beträgt:

$$f = f_1 + f_2 = 6 + 18 = 24\ [\text{cm}^2].$$

Denselben Inhalt für das Dreieck erhält man aus

$$f = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ [\text{cm}^2].$$

9) Wie groß ist die skizzierte Fläche (Bild 161)?

Lösung

Die Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche des Rechtecks mit den Seiten 12 und 15 sowie aus der des Trapezes mit den parallelen Seiten 12 und 6 und der Höhe 5. Man erhält:

Maße in mm

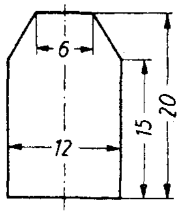


Bild 161

$$f = 12 \cdot 15 + \frac{12 + 6}{2} \cdot 5$$
$$= 180 + 45$$
$$= 225\ \text{mm}^2.$$

10) Die Seitenlängen eines Dreiecks betragen: $a = 4$ cm, $b = 13$ cm und $c = 15$ cm.

Wie groß sind a) der Dreiecksinhalt,
b) die 3 Höhen,
c) der Radius des Inkreises und
d) die Radien der 3 Ankreise?

Lösung

a) Der Umfang des Dreiecks beträgt: $U = a + b + c = 4 + 13 + 15 = 32$ [cm]. Der halbe Umfang ist die Größe $s = \frac{U}{2} = 16$ [cm]. Es beträgt $s - a = 12$, $s - b = 3$ und $s - c = 1$. Die heronische Dreiecksformel ergibt:

$$f = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24 \text{ cm}^2.$$

b) Da der Dreiecksinhalt aber auch gleich dem halben Produkt aus Grundlinie mal Höhe ist, so kann man setzen:

$$f = \frac{a \cdot h_a}{2} \quad \text{oder} \quad = \frac{b \cdot h_b}{2} \quad \text{oder} \quad = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Aus diesen 3 Gleichungen erhält man die 3 Höhen:

$$h_a = \frac{2f}{a} = \frac{2 \cdot 24}{4} = 12 \text{ cm}$$

$$h_b = \frac{2 \cdot f}{b} = \frac{2 \cdot 24}{13} = 3{,}7 \text{ cm}$$

$$h_c = \frac{2 \cdot f}{c} = \frac{2 \cdot 24}{15} = 3{,}2 \text{ cm}.$$

c) Aus der Gleichung für den Dreiecksinhalt $f = \varrho \cdot s$ bestimmt man den Radius des Inkreises: $\varrho = \frac{f}{s} = \frac{24}{16} = 1{,}5$ cm.

d) Die Radien der Ankreise bestimmt man aus:

$$f = \varrho_a \cdot (s-a) = \varrho_b \cdot (s-b) = \varrho_c \cdot (s-c)$$

$$\varrho_a = \frac{f}{s-a} = \frac{24}{12} = 2 \text{ cm}$$

$$\varrho_b = \frac{f}{s-b} = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm}$$

$$\varrho_c = \frac{f}{s-c} = \frac{24}{1} = 24 \text{ cm}.$$

Zur Kontrolle der errechneten Ergebnisse zeichne man das Dreieck und lese die Längen der Radien aus der Zeichnung ab.

11) Wie groß ist der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b?

Man nehme die eine Kathete als Grundlinie, die andere als Höhe und erhält:

$$f = \frac{a \cdot b}{2}; \text{ d. h.}$$

Der Inhalt eines jeden rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der beiden Katheten.

12) Von 2 gleichschenkligen Dreiecken hat das eine die Grundlinie 2 cm und die Höhe 4 cm; das andere die Grundlinie 4 cm und die Höhe 2 cm. Welches Dreieck hat den größeren Flächeninhalt? ?

Da der Inhalt eines jeden Dreiecks gleich dem halben Produkt aus Grundlinie mal Höhe ist, haben die beiden gegebenen Dreiecke denselben Flächeninhalt; nämlich:

$$f = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4\,[\text{cm}^2]$$

13) Wie lang ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seite a?

Das gleichseitige Dreieck ABC wird durch die Höhe CD in 2 deckungsgleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegt. In ihm ist die Hypotenuse $AC = a$. Die eine Kathete AD ist gleich $\frac{a}{2}$, die andere CD ist die gesuchte Höhe h. Nach dem Pythagoras erhält man:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad \text{oder} \quad a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2.$$

Hieraus:

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \quad \text{oder} \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Ergebnis:

Die Höhe im gleichseitigen Dreieck beträgt $\boxed{h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}$

14) In einem rechtwinkligen Dreieck betragen die Katheten
a) $a = 4$ cm und $b = 3$ cm
b) $a = 7$ cm und $b = 24$ cm
c) $a = 16$ cm und $b = 30$ cm.

Wie lang ist die Hypotenuse?

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist: $c^2 = a^2 + b^2$.

Mit dem gegebenen Zahlenwerte erhält man
a) $c^2 = 16 + 9 = 25$ oder $c = 5$ cm
b) $c^2 = 49 + 576 = 625$ oder $c = 25$ cm
c) $c^2 = 256 + 900 = 1156$ oder $c = 34$ cm.

15) Welchen Abstand hat eine 6 cm lange Sehne von dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius 5 cm?

Man verbinde den Kreismittelpunkt M mit den beiden Endpunkten A und B der Sehne und fälle das Lot von M auf die Sehne. Es sei $MD = x =$ gesuchter Abstand. In dem rechtwinkligen Dreieck ADM ist nach dem Pythagoras: $AM^2 = AD^2 + DM^2$ oder mit den gegebenen Zahlenwerten:

$$5^2 = 3^2 + x^2 \quad \text{oder} \quad 25 = 9 + x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = 25 - 9 = 16$$

d. h. $x = 4$ cm.

Die Sehne ist 4 cm vom Mittelpunkt entfernt.

16) Für nebenstehenden Kreisbogen AB (Bild 162) beträgt die Pfeilhöhe CD = 2 cm und die Sehne AB = 8 cm. Wie groß ist der Kreisdurchmesser?

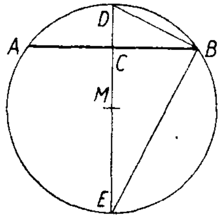


Bild 162

Lösung

Man verbinde B mit D und dem zu D im Kreise diametral gelegenen Punkte E. Nach dem Thales-Satz ist das Dreieck BDE rechtwinklig. In ihm ist die Höhe BC = 4 cm. Die Hypotenusenabschnitte sind DC = 2 cm und CE. Man bestimmt CE nach dem Höhensatz: $BC^2 = DC \cdot CE$ oder $4^2 = 2 \cdot CE$ oder CE = 8 cm.

Setzt man $CE = 2r - DC = 2r - 2$, so erhält man $2r = 8 + 2 = 10$ oder r = 5 cm. Der Kreisdurchmesser beträgt: d = 10 cm.

17) Wie groß sind die Durchmesser des Umkreises und des Inkreises eines Quadrates mit der Seite a?

Nach Bild 163 beträgt der Inkreisdurchmesser

$$D_i = a.$$

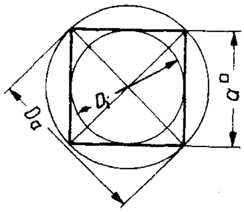


Bild 163

Den Umkreisdurchmesser bestimmt man als die Diagonale des Quadrates mit der Seite a. Sie ist die Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete a:

$$D_a^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2 \quad \text{oder}$$

$$D_a = a \cdot \sqrt{2}.$$

18) Auf einem 36 cm langen Draht sind in den Abständen 9 cm und 21 cm von dem einen Ende 2 Marken (Kreidestriche oder 2 leichte Einkerbungen) angebracht. Man biege den Draht um diese beiden Marken zu einem Dreieck zusammen, so daß seine beiden Enden zusammenfallen. Warum entsteht in diesem Falle ein rechtwinkliges Dreieck?

Lösung

Die Seiten des entstehenden Dreiecks sind 9 cm, 12 cm und 15 cm lang. Da aber $9^2 + 12^2 = 15^2$ ist, so ist nach Umkehrung des Pythagoras das Dreieck rechtwinklig mit den beiden Katheten 9 und 12 und der Hypotenuse 15 cm.

19) Ein 16 m hoher Mast wird durch 3 gleichlange Seile von je 20 m Länge verspannt. Wie weit sind die 3 voneinander gleichweit entfernten Verankerungsstellen der Drahtseile

a) vom Fußpunkt des Mastes und
b) untereinander entfernt?

Lösung

Im Bild 164 ist der Mast AB mit den 3 Verankerungsstellen C, D und E in der Vorderansicht und Draufsicht gezeichnet.

a) Die Entfernung des Verankerungspunktes C vom Mastfußpunkt A ist die Strecke $AC = x$. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{oder}$$
$$20^2 = 16^2 + x^2. \text{ Hieraus:}$$
$$x^2 = 400 - 256 = 144 \quad \text{oder} \quad x = 12 \text{ m}.$$

b) In der Draufsicht ist das schraffiert gezeichnete Dreieck CBF die Hälfte des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite x, dessen Höhe beträgt (siehe: Beispiel 13) $\frac{x}{2}\sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3}$. Diese Höhe ist gleich der Hälfte des Abstandes zweier nebeneinander liegender Verankerungspunkte. Der gesuchte Abstand beträgt:

$$12 \cdot \sqrt{3} = 12 \cdot 1{,}73 = 20{,}76 \text{ m}.$$

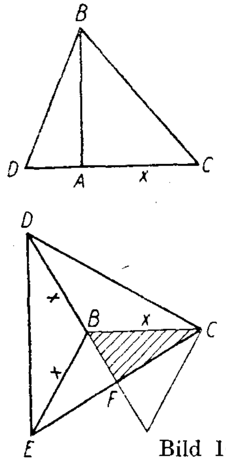


Bild 164

20) **Geometrische Konstruktion algebraischer Ausdrücke**

In den nachstehenden Gleichungen (Bild 165a ... i) ist die Größe **x** konstruktiv zu bestimmen!

a) $x = \sqrt{2}$, b) $x = \sqrt{3}$, c) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$,

d) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, e) $x = \frac{a \cdot b}{c}$, f) $x = \frac{(a + b) \cdot d}{c}$,

g) $x = \sqrt{a \cdot c}$ h) $x = \frac{a^2}{b}$ i) $x = \sqrt{(a + b) \cdot (a - b)}$.

Lösungen

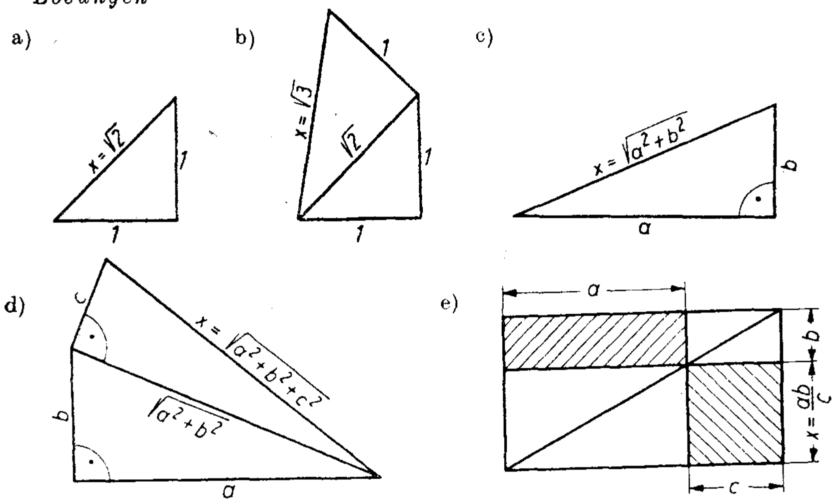
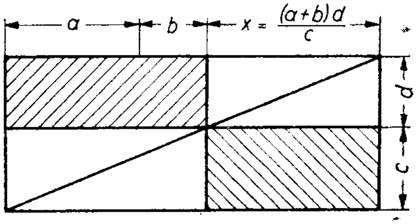


Bild 165 a ... e

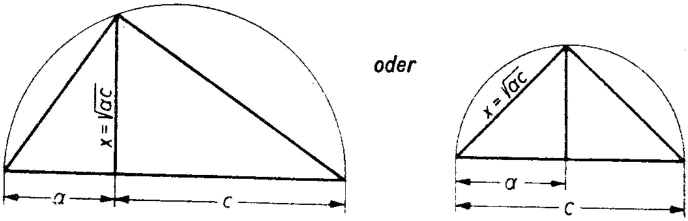
(Siehe Beispiel 5!)

Bild 165 f . . . i

f)

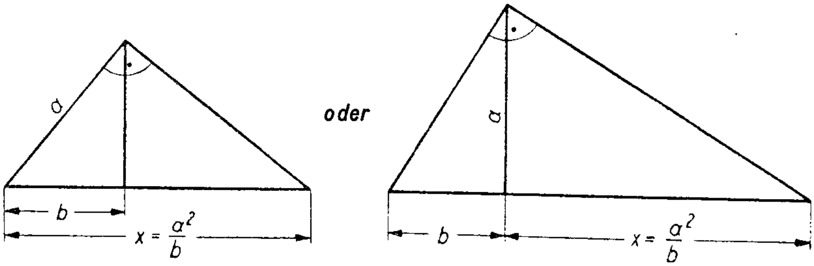


g)



(Höhensatz!) *(Euklid!)*

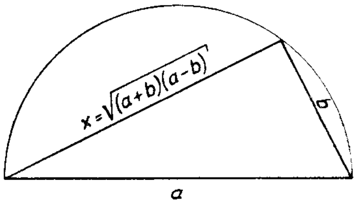
h)

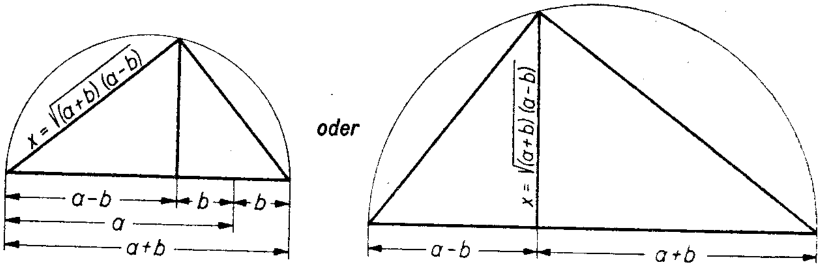


(Euklid!) *(Höhensatz!)*

i)

(Pythagoras)





(Euklid!) *(Höhensatz!)*

Aufgaben

111) Mit wieviel Tonnen kann ein Mauerpfeiler von 38×51 cm² Querschnitt belastet werden, wenn für ihn 7 kg/cm² zugelassen werden?

112) Wie groß ist die Querschnittsfläche des Bildes 166? (Maße in mm)

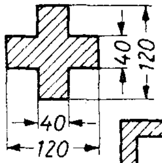


Bild 166

113) Wie groß ist der Querschnitt in cm² der im Bild 167 skizzierten Stütze aus Grauguß? (Maße sind in mm angegeben.)

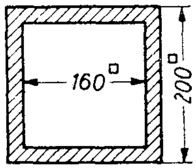


Bild 167

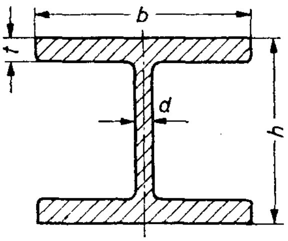
114) Durch Halbieren des DIN-Formates DIN A 4 (210×297 mm) in der Länge und Breite erhält man das Postkarten-Format DIN A 6.

a) Welche Abmessungen hat die Karte?

b) Wieviele solcher Karten können aus einem Quadratmeter geschnitten werden?

115) Ein breit- und parallelflanschiger Stahl (P-Träger) hat die nachstehenden Abmessungen (Bild 168) Maße in mm:

	h	b	d	t
a)	140	140	8	12
b)	320	300	13	22
c)	500	300	16	30
d)	h	b	d	t



Wie groß ist sein Querschnitt für die vorstehenden Tabellenwerte?

Bild 168

116) Wie groß sind die Querschnittsflächen der Trägerprofile im Bild 169a ... e.

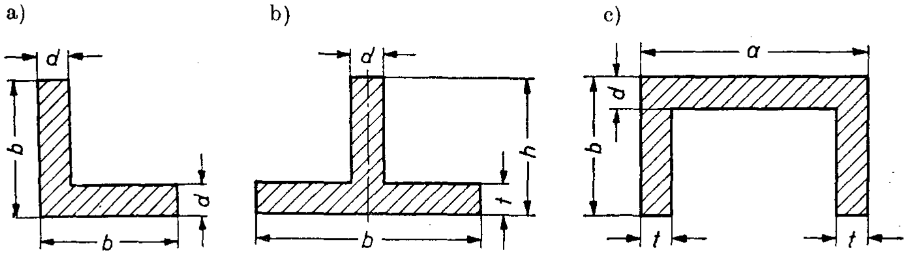


Bild 169a ... c

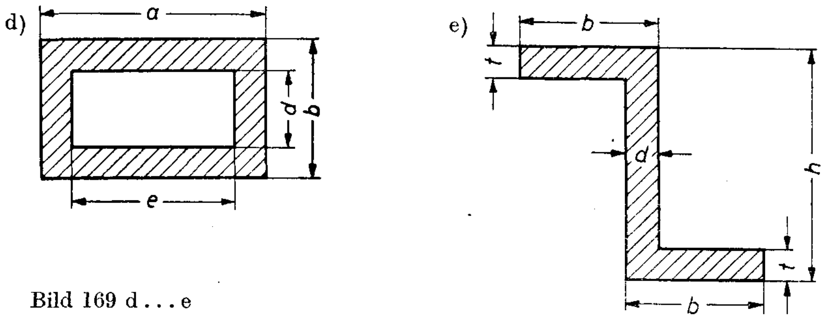


Bild 169 d . . . e

117) In der Bewegungslehre stellt sich der Weg s, der von einem Fahrzeug mit gleichförmiger Fahrgeschwindigkeit v m/s in der Zeit t/s zurückgelegt wird, in einem Geschwindigkeits-Zeitschaubild als der Flächeninhalt eines Rechteckes mit den Seiten t und v dar. Es ist nämlich:

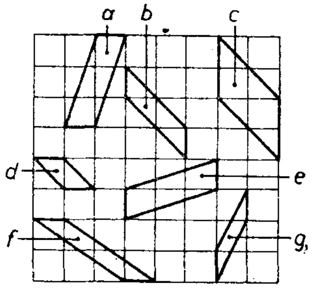
Geschwindigkeit = Weg: Zeit oder in Buchstaben: $v = \frac{s}{t}$ oder $s = v \cdot t$.

Die Fahrzeit eines Kraftwagens wird für 100 m zu 5 s abgestoppt.

a) Wie groß ist seine Geschwindigkeit in m/s und km/h?

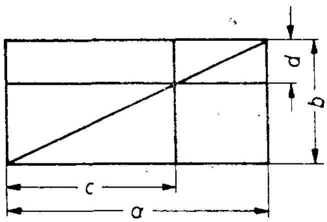
b) Wie groß ist der von diesem Wagen in 10 s zurückgelegte Weg, wenn während dieser Zeit der Geschwindigkeitsmesser dauernd 36 km/h zeigt?

(Anleitung: Geschwindigkeit in m/s ausdrücken!)



118) Die Flächeninhalte der in Bild 170 eingetragenen Parallelogramme a bis g sind in Flächeneinheiten der gezeichneten quadratischen Teilung zu berechnen!

Bild 170



119) a) Welche Beziehung besteht zwischen den Maßen a, b, c und d des Bildes 171.

Bild 171

b) In der zu dem Bild 171 gehörenden Wertetabelle sind die fehlenden Werte der Zeilen α, β, γ und δ zu bestimmen!

	a	b	c	d
α	16	12	12	
β	12	30		5
γ	10		4	12
δ		54	25	4

120) Aus 4 Stäben, von denen je 2 gleich lang sind, ist ein in den Ecken durch Scharniere verbundenes Rechteck gebildet. Ergeben sich beim Bewegen dieses Gelenk-Rechtecks Änderungen

a) am Umfang,
b) am Inhalt der Fläche?

121) Die beiden Seiten eines Parallelogramms betragen $a = 6$ cm und $b = 4$ cm. Sie schließen den Winkel $\alpha = 60°$ ein. Zeichnerisch sind die Höhen h_a und h_b zu bestimmen ($h_a \perp a$; $h_b \perp b$)! Wie groß ist der Inhalt f des Parallelogramms?

122) Wie groß ist die Fläche des in Aufgabe 64) auf Seite 47 angegebenen Beilagebleches?

123) In einem gleichschenkligen Trapez — beispielsweise: Querschnitt durch einen Keilriemen — mit den parallelen Seiten a und b und der Höhe h ist $a = 2b = h = 4$ cm. Wie groß ist sein Inhalt?

124) Aus Flachstahl 50×5 ist ein rechteckiger Rahmen mit den Außenmaßen 750×500 mm zu fertigen. Die Ecken sollen auf Gehrung geschnitten und zusammengeschweißt werden.

a) Wie lang ist der Flachstahl zu nehmen?
b) Wie lang wäre der Flachstahl beim Stumpfaneinanderschweißen zu nehmen?
c) Wie groß ist die Rahmenfläche als Differenz zweier Rechtecke. Man überprüfe die Rahmenfläche als Summe von 4 Trapezflächen.

125) Ein Dreieck hat die Seiten $a = 15$ cm, $b = 20$ cm und $c = 7$ cm. Wie groß sind

a) sein Inhalt,
b) der Radius seines Inkreises und
c) die Radien der 3 Ankreise?

126) Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten $a = 8$ cm und $b = 6$ cm. Wie groß sind

a) sein Inhalt,
b) die Hypotenuse,
c) die Höhe h_c,
d) der Dreiecksumfang,
e) die beiden Hypotenusenabschnitte q und p?

127) Wie groß sind die Flächeninhalte der Dreiecke a bis l (Bild 172) in Flächeneinheiten der gezeichneten quadratischen Teilung?

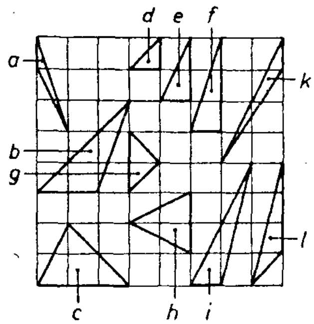


Bild 172

128) Bei einer gleich~~förmig~~ beschleunigten Bewegung (z. B. freier Fall) nimmt die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um die gleichen Beträge zu. Das Geschwindigkeits-Zeit-Schaubild ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten t und der Geschwindigkeit v des sich bewegenden Körpers nach t/s. Der Inhalt dieses Dreiecks ist der während t Sekunden zurückgelegte Weg. Wie drückt sich der Weg s durch die Geschwindigkeit v und die Zeit t aus? Wie groß ist die Endgeschwindigkeit eines Steines, der in einen 176 m tiefen Brunnenschacht fällt und nach 6 s auf die Sohle aufschlägt?

129) Wie groß ist der Inhalt der unterhalb des Streckenzuges A B C D E F G H gelegenen Fläche (Bild 173), wenn die in das Koordinatenkreuz eingetragenen Zahlen cm bedeuten?

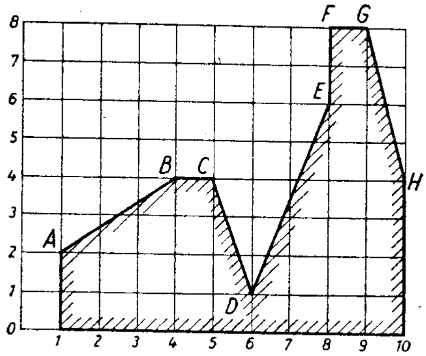


Bild 173

130) Wie groß ist der Inhalt der Fläche des Bildes 174, wenn die an die Achsen angetragenen Zahlen cm bedeuten?

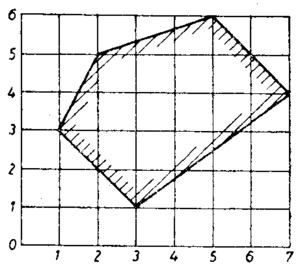


Bild 174

131) Wie groß ist die Querschnittsfläche des Betonträger-Profils (Bild 175)? Die angeschriebenen Längenmaße sind cm.

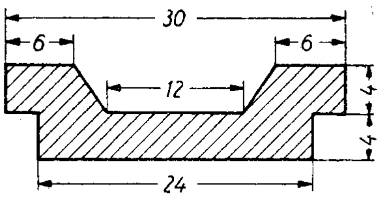


Bild 175

132) Wie groß ist der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a?

a) Man benutze die heronische Dreiecksformel!

b) Man benutze die in Beispiel 13) auf Seite 87 berechnete Höhe des gleichseitigen Dreiecks $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$!

133) Aus Stahlblech 120×140 soll die Schablone nach Bild 176 gefertigt werden. Wie groß ist der Schnittverlust F? Maße in mm.

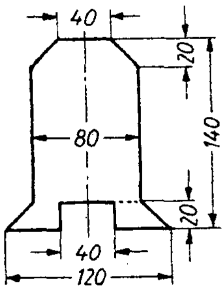


Bild 176

134) In einem Rhombus mit der Seite a beträgt ein Winkel 60°. Wie groß sind die Diagonalen und der Inhalt des Rhombus?

135) Wie groß ist die Seite des gleichseitigen Dreiecks, das den Flächeninhalt 75 m² hat?

136) Wie groß sind in den rechtwinkligen Dreiecken des Beispiels 14) auf Seite 87

a) der Flächeninhalt,
b) die Höhe auf die Hypotenuse,
c) die Größe s und
d) der Radius des Inkreises?

137) Eine Sehne von 4 cm Länge hat in einem Kreise vom Mittelpunkt M den Abstand 1,5 cm. Welchen Durchmesser hat dieser Kreis?

138) In einem Kreise mit dem Durchmesser $d = 15$ cm ist eine Sehne $s = 12$ cm lang. Wie groß ist die zu dieser Sehne gehörende Pfeilhöhe? (Vergleiche Beispiel 16) auf Seite 88).

139) Bei der Brinellschen Kugeldruckprobe drückt eine Prüfkugel mit dem Durchmesser $D = 10$ mm in den auf Härte zu prüfenden Werkstoff. Die Eindrucktiefe h kann man nur sehr schlecht messen, wohl aber den Durchmesser d des Eindruckkreises (Bild 177).

Wie berechnet man die Eindrucktiefe h, wenn man den Durchmesser des Eindruckkreises $d = 8$ mm mißt?

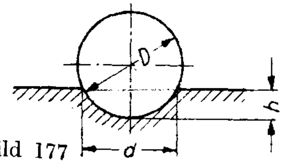


Bild 177

140) Wie groß sind der Obergurt AC bzw. BC und der Untergurt AD bzw. BD in dem Dachbinder (Bild 178) (Maße in m).

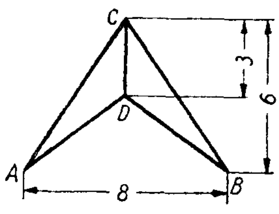


Bild 178

141) Es ist zu beweisen, daß bei einem gleichschenkligen Dreieck das Quadrat über der Grundlinie gleich der vierfachen Differenz aus den Quadraten über dem Schenkel und der Höhe ist.

142) Man beweise, daß bei einem Rhombus die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen gleich dem vierfachen Quadrat über seiner Seite ist!

143) Es ist der folgende Satz unter Benutzung des allgemeinen Lehrsatzes des Pythagoras (Seite 75) zu beweisen:

In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate zweier Seiten (a und b) gleich der Summe aus dem halben Quadrat der dritten Seite (c) und dem doppelten Quadrat der zu dieser gehörigen Mittellinie m_c.

(Für die beiden durch die Mittellinie gebildeten Teildreiecke setze man einmal für a^2 und sodann für b^2 den erweiterten Lehrsatz des Pythagoras an und bilde $a^2 + b^2$!)

144) Man beweise: In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten.

145) Von 2 gegebenen Strecken a und b ist die größere a so in 2 Teile zu zerlegen, daß die Differenz der Quadrate über den Teilstrecken gleich dem Quadrat über b ist!

Anleitung: Die eine Teilstrecke der größeren Strecke a möge x heißen. Die andere Teilstrecke heißt dann $a - x$. Man löse die Gleichung $(a - x)^2 - x^2 = b^2$ nach x auf und konstruiere den für x sich ergebenden algebraischen Ausdruck!

146) Die größere Seite eines Rechtecks soll so in 2 Teile zerlegt werden, daß die Differenz der Quadrate der Teilstrecken gleich dem Rechtecksinhalt wird!

147) Eine Quadratseite soll so in 2 Teile zerlegt werden, daß die Differenz der Quadrate der beiden Teilstrecken gleich dem Quadrat über der halben Diagonale des gegebenen Quadrates wird!

148) Von den 4 Ecken eines Quadrates werden 4 untereinander deckungsgleiche gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke so abgeschnitten, daß das entstehende Achteck gleichlange Seiten hat!

Anleitung: Die gesuchte Achteckseite heiße x. Man drücke den Schenkel des abgeschnittenen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks durch x und die gegebene Quadratseite a aus!

149) In ein Quadrat sollen 2 gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß ihre Mittelpunkte auf einer Diagonale liegen und daß sie sich selbst sowie 2 Quadratseiten berühren! Wie groß ist der Radius eines der beiden Kreise? Wie konstruiert man ihn?

Anleitung: Jeder der beiden Kreise ist der Inkreis in dem aus 2 Quadratseiten und einer Diagonale gebildeten rechtwinkligen Dreieck. Den Inhalt dieses Dreiecks setze man: $f = \frac{1}{2} a^2 = x \cdot s$, worin s den halben Dreiecksumfang und x den gesuchten Radius bedeutet.

150) In ein Quadrat sollen 5 gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß die Mittelpunkte der 4 äußeren die Ecken eines Quadrats bilden und daß ein jeder von ihnen 2 Quadratseiten sowie den in der Mitte liegenden fünften Kreis berührt! Wie groß ist der Radius eines der 5 Kreise? Wie konstruiert man ihn?

Anleitung: Man verbinde die Mittelpunkte zweier nebeneinander liegender Kreise sowohl untereinander, als auch mit dem Mittelpunkt des Quadrates. Es entsteht ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 2 x lang sind, wobei mit x der gesuchte Radius bezeichnet werde. Die Hypotenusenlänge drücke man durch die Quadratseite a und den Radius x aus und setze für das Dreieck den Lehrsatz des Pythagoras an!

151) Über dem Durchmesser eines Halbkreises sind im Inneren des Halbkreises 2 Halbkreise einzuzeichnen, von denen jeder den Radius des ersten Halbkreises zum Durchmesser hat. Wie groß ist der Radius des Kreises, der diese 3 Halbkreise berührt?

Anleitung: Man verbinde den Mittelpunkt des gegebenen Halbkreises mit dem eines der beiden eingezeichneten Halbkreise und dem des gesuchten Kreises untereinander. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten man durch den Halbmesser r und den Radius des gesuchten Kreises x ausdrückt.

152) In einem Halbkreis liegt ein Kreis mit dem Radius des Halbkreises als Durchmesser. Es sollen noch 2 gleichgroße Kreise eingezeichnet werden, von denen jeder den gegebenen Halbkreis, den eingezeichneten Kreis und den Durchmesser des Halbkreises berührt! Wie groß sind die Radien dieser beiden Kreise?

Anleitung: Man verbinde ähnlich wie in Aufgabe 151) die 3 Mittelpunkte. Hier entsteht ein spitzwinkliges Dreieck, dessen Seiten man wiederum durch den gegebenen Halbmesser r und den gesuchten Radius x ausdrückt. Sodann setze man für dieses Dreieck den allgemeinen Lehrsatz des Pythagoras an.

H. Verhältnisgleichheit und Ähnlichkeit

Mißt man die Längen zweier Strecken in ein und derselben Maßeinheit (z. B. in mm oder cm oder dm usw.) und teilt die gefundenen Meßergebnisse durcheinander, so kann man hierdurch feststellen, wieviel Mal die eine Strecke größer oder kleiner als die andere ist. Führt man jedoch die soeben erwähnte Division nicht aus, sondern beschränkt sich darauf, die Divisionsaufgabe in Bruchform anzugeben oder in der durch das Divisionszeichen, den Doppelpunkt, gekennzeichneten Form zu schreiben, so nennt man den erhaltenen Quotienten das *Verhältnis der beiden Strecken.*

Nachstehende Zahlenbeispiele mögen das soeben Gesagte noch eingehender erklären.

Beispiele

1) Die Strecke a ist 10 cm lang. Eine andere Strecke b mißt 250 mm. Die beiden Strecken verhalten sich zueinander wie $10 : 25 = 2 : 5$. In diesem Beispiel durfte man die beiden Strecken erst dann durcheinander dividieren, nachdem man ihnen dieselbe Dimension, nämlich cm, gegeben hatte.

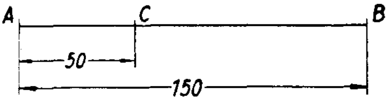


Bild 179

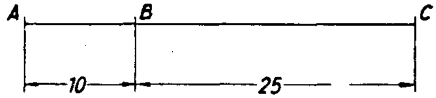


Bild 180

2) (Bild 179) Auf einer Strecke AB = 150 km liegt in 50 km Entfernung von A ein Punkt C. Wie verhalten sich die beiden Teilstrecken AC und CB zueinander? Es ist AC = 50 km und CB = 100 km. Die beiden Strecken verhalten sich zueinander wie 50 : 100 = 1 : 2. Das Ergebnis lautet in Worten: Der Punkt C teilt die Strecke AB im Verhältnis 1 : 2. Wenn der Punkt C, wie es hier der Fall ist, zwischen A und B liegt, spricht man von einer *inneren Teilung*, im Gegensatz zu der *äußeren Teilung*, bei der der Punkt C auf der Verlängerung von AB liegt. Hierfür das nächste Beispiel!

3) (Bild 180). Auf der Verlängerung der 10 m langen Strecke AB über B hinaus liegt der Punkt C, und zwar ist BC = 25 m und somit AC = 35 m. Wie groß ist das Streckenverhältnis AC: BC?

Man erhält: AC: BC = 35 : 25 = 7 : 5. Man sagt: Der Punkt C teilt die Strecke AB äußerlich im Verhältnis 7 : 5, oder das äußere Teilverhältnis beträgt 7 : 5.

Um das innere bzw. äußere Teilverhältnis einer Strecke anzugeben, hat man festzustellen, wie lang die eine Teilstrecke von dem einen Endpunkt bis zum inneren bzw. äußeren Teilpunkt und wie lang die andere Teilstrecke von dem anderen Endpunkt bis zum inneren bzw. äußeren Teilpunkt ist. Sodann hat man die beiden Teilstrecken durcheinander zu dividieren.

4) Wo liegt der Punkt C, der die Strecke AB = 21 cm im Verhältnis 3 : 4 innerlich teilt?

Die beiden Teilstrecken sind AC und BC. Die unbekannte Teilstrecke AC möge mit x bezeichnet werden. Die Teilstrecke BC ist dann (21 — x). Nach der Aufgabe soll x : (21 — x) = 3 : 4 sein. Diese Gleichung nach x aufgelöst:

$$\begin{aligned} 4x &= 3 \cdot (21 - x) && \text{oder} \\ 4x &= 63 - 3x && \text{oder} \\ 7x &= 63 && \text{und somit} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Die beiden Teilstrecken betragen: AC = 9 cm und BC = 12 cm.

5) Wo liegt der Punkt C der vorigen Aufgabe, wenn er die Strecke AB in demselben Verhältnis 3 : 4 äußerlich teilt?

Die beiden Teilstrecken sind AC und BC. Es sei AC = x und BC = 21 + x. Das äußere Teilverhältnis ist das Verhältnis der beiden Strecken AC : BC oder x : (21 + x). Es soll betragen x : (21 + x) = 3 : 4.

Man erhält aus dieser Gleichung x = 63. Es beträgt also AC = 63 cm und BC = 84 cm.

2 Streckenpaare, die dasselbe Teilverhältnis bilden, faßt man als eine Verhältnisgleichung oder als eine Proportion von 4 Strecken auf.

Bilden beispielsweise die beiden Strecken a und b das Verhältnis $a : b$, und stehen 2 andere Strecken c und d in dem gleichen Verhältnis, so ist $a : b = c : d$.

In der Verhältnisgleichung $a : b = c : x$ (= Proportion) heißt die Unbekannte oder gesuchte Strecke x die *vierte Proportionale* zu a, b und c.

Wie groß ist die 4. Proportionale zu den 3 Strecken $a = 2$ cm, $b = 6$ cm und $c = 3$ cm? — Zwischen den 4 Strecken besteht die Proportion $a : b = c : x$ oder mit Zahlenwerten $2 : 6 = 3 : x$. Hieraus erhält man $2x = 18$ und $x = 9$. Die 4. Proportionale beträgt 9 cm. Das Streckenverhältnis der Strecken a und b beträgt $2 : 6 = \frac{1}{3}$, das der Strecken c und x beträgt $3 : 9 = \frac{1}{3}$. Die beiden Streckenverhältnisse sind also gleich.

Unter der *mittleren Proportionale oder dem geometrischen Mittel* zu 2 gegebenen Strecken a und b versteht man die Strecke x, die die Gleichung $a : x = x : b$ erfüllt. Diese Gleichung nach x aufgelöst, ergibt

$$x^2 = a \cdot b \quad \text{oder}$$
$$x = \sqrt{a \cdot b}; \quad \text{d. h.}$$

Die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zu 2 Strecken a und b ist gleich der Wurzel aus dem Produkt der beiden Streckenlängen.

Beispiel

Wie groß ist die mittlere Proportionale zu 2 Strecken, die 3 cm und 12 cm lang sind? — Die unbekannte mittlere Proportionale x berechnet man aus der Gleichung $3 : x = x : 12$. Man erhält

$$x^2 = 3 \cdot 12 \quad \text{und}$$
$$x = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$$

Die mittlere Proportionale x zu 2 gegebenen Strecken a und b konstruiert man entweder durch den

a) Höhensatz:

Man zeichnet (Bild 181) die Summe der beiden Strecken a und b und beschreibt über $a + b$ den Halbkreis (Thaleskreis).

Das Lot auf $a + b$ in dem Punkte D schneidet den Thaleskreis in C.

DC ist die mittlere Proportionale x.

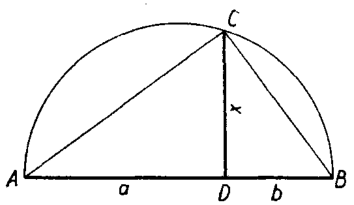


Bild 181

b) Lehrsatz des Euklid:

Man zeichnet (Bild 182) AB = a und hierauf den Punkt D so, daß AD = b ist. Über AB beschreibt man den Thaleskreis und errichtet auf AB in D die Senkrechte, die den Thaleskreis in C schneidet.

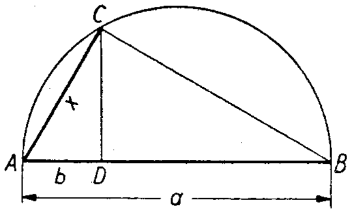


Bild 182

AC ist das gesuchte geometrische Mittel x.

Zur konstruktiven Bestimmung der vorher erwähnten 4. Proportionale benutzt man den Strahlensatz.

1. Strahlensatz

Werden 2 Strahlen von 2 Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

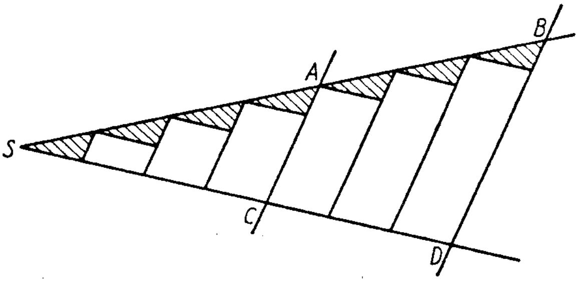


Bild 183

Beweis

Die von dem Punkt S (Bild 183) ausgehenden beiden Strahlen werden durch 2 Parallelen in den Punkten A, B, C und D geschnitten. Es sei SA = 4 cm und AB = 3 cm gewählt. Es verhält sich also SA : AB = 4 : 3. Werden die einzelnen cm auf SA und AB aufgetragen und durch die Teilpunkte die Parallelen zu AC gezogen, so schneiden diese auf SC und CD untereinander gleich lange Teile ab. Die in der Skizze schraffiert gezeichneten Dreiecke sind nämlich kongruent. Es verhält sich daher auch

$$SC : CD = 4 : 3.$$

Folglich ist

$$SA : AB = SC : CD.$$

Wenn sich SA und AB nicht als ganze cm ausmessen lassen, so kann man die Figur verfeinern, indem man die Einteilung in mm oder in 0,1 mm oder noch kleiner vornimmt. Die Schlußweise ist genau die gleiche wie vorher. Man kann immer das Verhältnis SA : AB auf das Verhältnis SC : CD übertragen.

Beispiele

1) Zu den 3 Strecken a = 2 cm, b = 3 cm und c = 4 cm ist die 4. Proportionale x zu konstruieren!

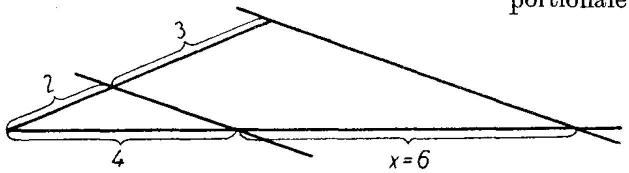


Bild 184

Aus der nebenstehenden Konstruktion (Bild 184) erhält man:

x = 6 cm.

2) Die Strecke AB = 6 cm ist in 7 gleiche Teile zu teilen (Bild 185)!

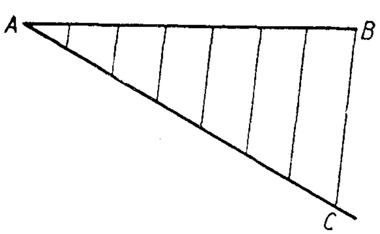


Bild 185

Beschreibung: Durch den einen Endpunkt der gegebenen Strecke (z. B. A) zeichnet man einen beliebigen Strahl und trägt auf ihm siebenmal hintereinander eine beliebige Strecke ab. Den letzten Punkt C verbindet man mit B und zieht zu CB durch die übrigen 6 Punkte auf dem Strahl die Parallelen, die die gegebene Strecke in 7 gleiche Teile teilen.

3) Wie lang sind die einzelnen Teile des Trägers AC der nebenstehenden Stahlkonstruktion ABC (Bild 186)?

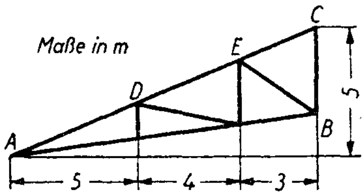


Bild 186

Durch Anfertigen einer maßstäblichen Zeichnung findet man

AD = 5,4 m,
DE = 4,3 m und
EC = 3,3 m.

Rechnerische Nachprüfung:

Die Gesamtlänge des Trägers AC wird aus dem Lehrsatz des Pythagoras bestimmt:

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169.$$

Somit AC = 13.

Nach dem 1. Strahlensatz verhält sich:

$$AC : AD = 12 : 5 \quad \text{oder } AD = \frac{5}{12} \cdot 13 = 5{,}42 \text{ m}$$

$$DE : AC = 4 : 12 \quad \text{oder } DE = \frac{4}{12} \cdot 13 = 4{,}33 \text{ m}$$

$$EC : AC = 3 : 12 \quad \text{oder } EC = \frac{3}{12} \cdot 13 = 3{,}25 \text{ m}$$

Die *Umkehrung des 1. Strahlensatzes* lautet:

Werden 2 Strahlen von 2 Geraden so geschnitten, daß die Abschnitte des einen Strahles sich wie die gleichliegenden des anderen Strahles verhalten, so sind die Geraden parallel.

2. Strahlensatz

Werden 2 Strahlen von 2 Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die zugehörigen vom Scheitel begrenzten Abschnitte eines Strahles.

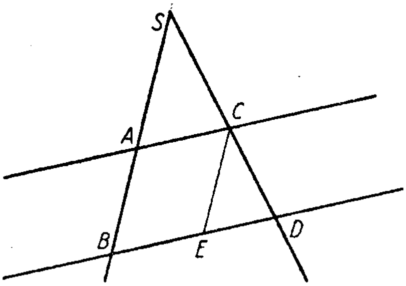


Bild 187

Dieser Lehrsatz drückt sich an Hand des Bildes 187 durch folgende Gleichung aus:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{SA}{SB} \text{ oder } \frac{AC}{BD} = \frac{SC}{SD}$$

Beweis

Man zieht die Hilfslinie CE parallel zu dem Strahle BS. Nach dem 1. Strahlensatz gilt für die beiden Strahlen mit dem Scheitel D und die Parallelen BS und EC: $BE : BD = SC : SD$. Da aber ABEC ein Parallelogramm ist, ist $BE = AC$. Diesen Wert in die letzte Gleichung eingesetzt, ergibt: $AC : BD = SC : SD$ w. z. b. w.

Der Satz gilt auch, wenn der Scheitel zwischen den beiden Parallelen liegt. Der Beweis, der dem obigen entspricht, bleibe dem Leser überlassen.

Anwendung der Strahlensätze.

a) Die Winkelhalbierende im Dreieck

Die Halbierungslinie eines Innen- (oder Außen-) Winkels eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite innen (oder außen) in dem Verhältnis der anliegenden Seiten.

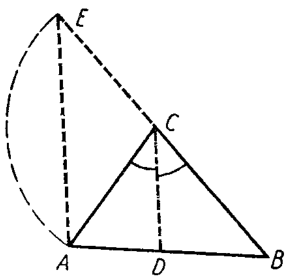


Bild 188

Voraussetzung: CD ist die Halbierungslinie des Winkels BCA (Bild 188).

Behauptung: $AD : DB = AC : BC$.

Beweis

Man verlängere BC über C hinaus, mache die Verlängerung $CE = CA$ und verbinde E mit A. Dreieck ACE ist gleichschenklig. In ihm ist der Winkel CEA gleich dem Winkel EAC, weil die Basiswinkel einander gleich sind. Als Außenwinkel des Dreiecks ACE ist der Winkel $BCA = \sphericalangle CEA + \sphericalangle EAC = 2 \sphericalangle EAC$. Da nach Voraussetzung $\sphericalangle DCA$ die Hälfte des Winkels BCA ist, so ist $\sphericalangle DCA = \sphericalangle EAC$. Hieraus folgt, daß die beiden Geraden AE und DC parallel sind, weil die an ihnen liegenden soeben betrachteten Wechselwinkel gleich sind. Für die beiden Strahlen AB und EB mit dem Scheitelpunkt B, die durch die beiden Parallelen AE und DC geschnitten werden, gilt der 1. Strahlensatz: $AD : DB = EC : BC$.

Und da $EC = AC$ ist, erhält man die Behauptung $AD : DB = AC : BC$. Ähnlich ist die Beweisführung für die Halbierungslinie des Außenwinkels des Dreiecks ABC (Bild 189). Es verhält sich.

$$AD : DB = AC : BC.$$

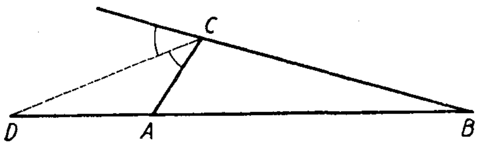


Bild 189

b) Harmonische Teilung

Ist eine Strecke innen und außen in dem gleichen Verhältnis geteilt, so nennt man eine solche Teilung eine *harmonische Teilung.*

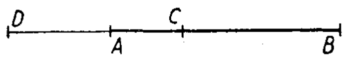


Bild 190

Die gegebene Strecke AB (Bild 190) sei durch die beiden Punkte C und D innerlich und äußerlich in dem gleichen Verhältnis geteilt. Es sei also $AC : CB = AD : DB$. Man sagt: Die Strecke AB ist durch die beiden Punkte C und D harmonisch geteilt.

Konstruktionsbeispiel

Die Strecke $AB = 6$ cm ist im Verhältnis $2 : 3$ harmonisch zu teilen!

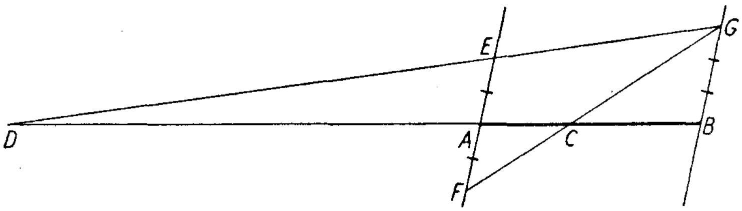


Bild 191

Konstruktionsbeschreibung:

Durch A und B zieht man 2 beliebige parallele Geraden (Bild 191) und trägt auf der durch A gehenden Parallelen nach oben und unten 2 beliebig große, gleichlange Stücke ab. Auf der durch B gelegten Parallelen trägt man nach oben dieselbe gleichgroße Strecke dreimal hintereinander ab. Man verbindet die somit erhaltenen 3 Punkte E, F und G, wie die Skizze angibt, und erhält auf der Strecke AB bzw. auf ihrer Verlängerung die beiden Punkte C und D.

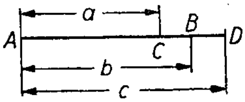
Es verhält sich dann $AC : CB = AD : DB = 2 : 3$.

Beweis

Nach dem 2. Strahlensatz gilt für die beiden durch C gehenden Strahlen: $AF : BG = AC : CB = 2 : 3$ und für die beiden durch D gehenden Strahlen: $AE : BG = AD : DB = 2 : 3$. Es ist also: $AC : CB = AD : DB$. Die beiden Punkte C und D teilen die gegebene Strecke AB innen und außen in dem gleichen Verhältnis, d. h. sie teilen sie harmonisch.

Ist das Teilungsverhältnis kleiner als 1, wie in dieser Aufgabe, nämlich 2 : 3, so liegt der innere Teilpunkt C näher an A. Die beiden Teilpunkte umschließen den Punkt A. Ist aber das Teilungsverhältnis größer als 1, z. B.: 3 : 2 oder 5 : 1, so umschließen die beiden Teilpunkte den Punkt B. Ist das Teilungsverhältnis 1 : 1, so liegt der innere Teilpunkt C auf der Mitte der zu teilenden Strecke AB, während der äußere Teilpunkt in unendlich weite Ferne rückt.

Die Bezeichnung „harmonische Teilung" rührt her von den Beziehungen der Längenverhältnisse (AC, AB und AD nach Bild 192) dreier gleichartiger und gleichgespannter Saiten zu dem Wohlklang (oder der sog. Konsonanz) der damit erzeugten Töne. Nach den Gesetzen der Akustik hängt die Tonhöhe von der Schwingungszahl f der Saite ab. Einem höheren Tone entspricht eine größere Schwingungszahl. Die Schwingungszahlen der Töne wiederum stehen im umgekehrten Verhältnis zu den Saitenlängen, sofern die Saiten gleichen Durchmesser haben und gleichgespannt sind. Es ergibt also eine lange Saite einen tiefen Ton mit kleiner Schwingungszahl und eine kurze Saite einen hohen Ton mit großer Schwingungszahl.



C und D sind die Teilpunkte

Bild 192

Beispiel

Ist die Strecke AB (Bild 192) durch die Punkte C und D im Verhältnis 5 : 1 harmonisch geteilt, so erzeugen die 3 Saiten von der Länge AC, AB und AD den Dreiklang.

1) In welchem Verhältnis stehen diese 3 Längen?

2) In welchem Verhältnis stehen die Schwingungszahlen zueinander?

Lösung

Ist AB durch die Punkte C und D im Verhältnis 5 : 1 harmonisch geteilt, so ist: $\frac{AC}{CB} = \frac{5}{1}$ und $\frac{AD}{BD} = \frac{5}{1}$, oder durch die Buchstaben a, b und c ausgedrückt: $\frac{a}{b-a} = 5$ und $\frac{c}{c-b} = 5$.

Hieraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
a &= 5b - 5a \quad && \text{und} \quad c = 5c - 5b \\
\text{oder } 6a &= 5b && \text{und} \quad 5b = 4c \\
\text{oder } a &= 5/6b && \text{und} \quad c = 5/4b
\end{aligned}
$$

Es verhält sich also $a : b : c = \frac{5}{6}b : b : \frac{5}{4}b = \frac{10}{12}b : \frac{12}{12}b : \frac{15}{12}b = 10 : 12 : 15$; d. h. die Längen der 3 Saiten verhalten sich wie $10 : 12 : 15$.

Die Schwingungszahlen f_1, f_2 und f_3 der 3 Saiten a, b und c verhalten sich umgekehrt wie ihre Längen; d. h.: $f_1 : f_2 : f_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ $= \frac{1}{10} : \frac{1}{12} : \frac{1}{15} = \frac{6}{60} : \frac{5}{60} : \frac{4}{60} = 6 : 5 : 4$; d. h. die Schwingungszahlen der 3 Saiten a, b und c stehen im Verhältnis $6 : 5 : 4$ zueinander.

Beispielsweise wird der Dreiklang der 3 Töne c — e — g hiernach das Schwingungszahlverhältnis 4 : 5 : 6 haben.

Die Schwingungszahlen betragen: $f_c = 261$; $f_e = 329$ und $f_g = 392$. Läßt sich das Verhältnis der Schwingungszahlen zweier oder mehrerer Töne durch ganze, kleine Zahlen (< 7) ausdrücken, so bilden die Töne die vorher erwähnte Konsonanz. Das Gegenteil zur Konsonanz ist die sog. Dissonanz. Bei ihr stehen die Schwingungszahlen im Verhältnis 8 : 9 (Sekunde) oder 8 : 15 (Septime) zueinander.

c) Das harmonische Mittel

Die Punkte C und D teilen die Strecke $AB = r$ harmonisch (Bild 193).

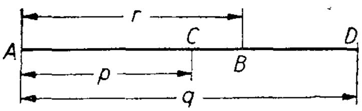


Bild 193

Die größere innere Teilstrecke möge mit p, die größere äußere Teilstrecke mit q bezeichnet werden. r heißt das harmonische Mittel zu p und q. Es verhält sich $AC : CB = AD : DB$, da AB durch C und D harmonisch geteilt ist. Man kann auch einfacher schreiben: $p : (r - p) = q : (q - r)$. Aus dieser Gleichung bestimmt man die Größe des harmonischen Mittels r: $p \cdot (q - r) = q \cdot (r - p)$ oder $pq - pr = qr - pq$ oder $2pq = pr + qr$ oder $2pq = r \cdot (p + q)$ und endlich $r = \frac{2pq}{p+q}$.

Um das harmonische Mittel zu 2 Größen p und q zu bestimmen, bilde man das doppelte Produkt der beiden Größen und teile es durch die Summe der beiden Größen.

Beispiel

Das harmonische Mittel zu $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ ist:

$$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Das harmonische Mittel zu $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ ist:

$$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{4}$$

Man zeige, daß in der Folge der reziproken Zahlen (= Kehrwerte der ganzen Zahlen) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ usw. jede Zahl das harmonische Mittel zu der vorhergehenden und der nachfolgenden ist. Eine solche Folge von Zahlen nennt man eine **harmonische Reihe**.

d) Seitenhalbierende oder Schwerlinie im Dreieck

Die Verbindungslinie der Mitte einer Dreiecksseite mit der gegenüberliegenden Ecke nennt man eine Seitenhalbierende. (Seltener: Seitentransversale.) In der Technik ist für diese Linie die Bezeichnung Schwerlinie gebräuchlich, weil sie den Schwerpunkt der einen Dreiecksseite mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet. In einem Dreieck gibt es 3 Schwerlinien. Sie schneiden sich in dem Schwerpunkt des Dreiecks.

Schwerliniensatz

Die Schwerlinien im Dreieck teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2 : 1, wobei der größere Teilabschnitt der Schwerlinie an der Dreiecksecke liegt, von der sie ausgeht.

Im Dreieck ABC sind D und E die Mitten der Seiten BC und AB (Bild 194). Die Linien AD und CE sind 2 Schwerlinien. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

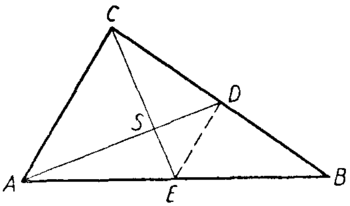


Bild 194

Nach dem Schwerliniensatz soll sein:

$$AS : SD = 2 : 1.$$

Der größere Teilabschnitt der Schwerlinie AD ist AS. Er liegt an der Ecke A und ist doppelt so groß wie der andere Teilabschnitt.

Beweis

Man verbinde D mit E. Da AE = EB und CD = DB ist, muß AC || ED sein nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes, die hier für die beiden Strahlen BA und BC anzuwenden ist. Ferner ist nach dem 2. Strahlensatz AC : ED = AB : EB = 2 : 1; d. h. DE ist halb so groß wie AC. Wendet man den 2. Strahlensatz auf die beiden Strahlen AD und EC mit dem Scheitel S und auf die schneidenden Parallelen AC und ED an, so erhält man:

$$AC : ED = AS : SD = 2 : 1$$

Ähnlichkeit

Nach Abschnitt C 4 (Seite 25) sind kongruente Figuren deckungsgleich. Sie haben dieselbe Gestalt und dieselbe Größe. Haben 2 Figuren nur dieselbe Größe, so sind sie flächengleich. So sind z. B. alle Dreiecke flächengleich, die dieselbe Grundlinie haben und deren Spitzen auf einer Parallelen zur Grundlinie liegen. Haben 2 Figuren nur dieselbe Gestalt, aber verschiedene Größe, so nennt man sie ähnlich. Ähnliche Figuren gehen durch maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung auseinander hervor. Das Zeichen für ähnlich ist: $\sim$ (Ein liegendes umgekehrtes S, vom lateinischen Worte similis herstammend. Similis heißt auf Deutsch: ähnlich).

Beispiele

Alle Quadrate sind untereinander ähnlich. Sie haben dieselbe Gestalt, da ihre Winkel immer 90° betragen.

Alle gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich. Ihre Winkel betragen stets 60°.

Alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich, weil ihre Basiswinkel 45° betragen.

Die Querschnitte durch Sechskantstähle verschiedener Schlüsselweite sind ähnlich.

Das charakteristische Kennzeichen für die Ähnlichkeit geradliniger Figuren ist die Gleichheit der Winkel. Ein weiteres charakteristisches Kennzeichen für die Ähnlichkeit ist, daß die einander entsprechenden Seiten ähnlicher Figuren in dem gleichen Verhältnis zueinander stehen.

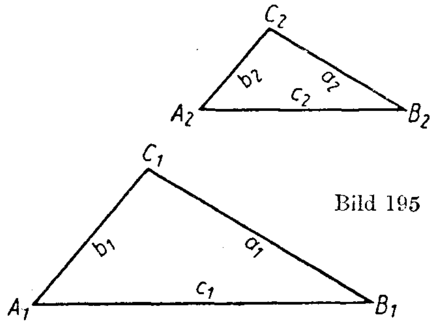


Bild 195

Die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ (Bild 195) stimmen in den Winkeln an den einander entsprechenden Ecken überein. Dieses Kennzeichen genügt für die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke. Aus der Ähnlichkeit folgt, daß die entsprechenden Seiten in dem gleichen Verhältnis zueinander stehen. Es ist:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$$

oder, als laufende Proportion geschrieben:

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

Das Verhältnis zweier entsprechender Seiten, z. B. $a_1 : a_2$ heißt Ähnlichkeitsverhältnis und entspricht dem Maßstab bei einer maßstäblichen Vergrößerung oder Verkleinerung.

2 Dreiecke befinden sich in **Ähnlichkeitslage**, wenn sie mit einem Winkel einander decken und die dem Winkel gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

Die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ (Bild 195) bringt man in Ähnlichkeitslage (Bild 196), indem man die Ecke A_1 auf A_2 legt. Dann fällt B_2 auf A_1B_1 und C_2 auf A_1C_1, sofern die Winkel bei A_1 und A_2 einander gleich sind.

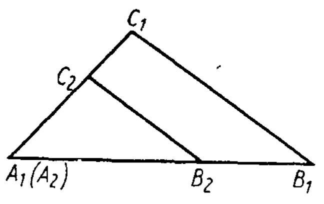


Bild 196

Wenn die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ einander ähnlich sind, dann stimmen sie in den 3 Winkeln überein. Dann muß nach der Umkehrung des Satzes über Gegenwinkel (Seite 12) $C_1B_1 \| C_2B_2$ liegen.

Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende 2 Sätze:

Ähnliche Dreiecke lassen sich in Ähnlichkeitslage bringen! und:

Dreiecke, die sich in Ähnlichkeitslage bringen lassen, sind ähnlich!

Unter Benutzung dieser neuen Begriffserklärung der Ähnlichkeitslage lassen sich die nachstehend aufgeführten 4 Ähnlichkeitssätze ohne Schwierigkeit beweisen. Diese 4 Ähnlichkeitssätze entsprechen den früher behandelten 4 Kongruenzsätzen.

Die *4 Ähnlichkeitssätze* lauten:

2 Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen
1) im Verhältnis der 3 Seiten,
2) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
3) im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel.
4) in 2 Winkeln,

Beispiele zu den 4 Ähnlichkeitssätzen

1) Der Schnittpunkt zweier Geraden g_1 und g_2 liege außerhalb der Zeichenbrettebene. Durch einen auf dem Zeichenbrett liegenden Punkt A ist die Verbindungslinie h mit dem Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 zu zeichnen!

Beschreibung (Bild 197): Man schneidet die beiden gegebenen Geraden g_1 und g_2 durch 2 beliebige Parallelen B_1B_2 und C_1C_2. Man verbindet B_1 und B_2 mit A und zieht durch C_1 die Parallele zu B_1A und durch C_2 zu B_2A. Diese beiden Parallelen schneiden sich in A_1. Die Verbindungslinie des Punktes A mit A_1 ist die gesuchte Verbindungslinie des Punktes A mit dem nicht mehr auf dem Zeichenblatt liegenden Schnittpunkt der beiden geraden Linien g_1 und g_2.

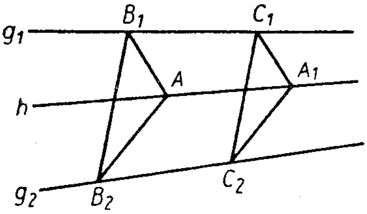


Bild 197

2) Die Entfernung zweier Punkte A und B, die durch einen Fluß oder Sumpf oder Wald getrennt sind, ist zu messen![1])

Beschreibung (Bild 198): Man steckt eine Strecke BP ab. Durch Visieren nach A hin bestimmt man die Richtung AP und steckt auf ihr eine Strecke PX ab. Mit Hilfe eines Feldmeßgerätes (Theodolit) bestimmt man den Winkel $PBA = \beta$ und trägt ihn in einem Punkte B_1 an PB an. Der freie Schenkel schneidet PX in A_1. Da die beiden Dreiecke APB und A_1PB_1 ähnlich sind nach dem 2. Ähnlichkeitssatze, so verhält sich:

$$AB : A_1B_1 = PB : PB_1.$$

Hieraus erhält man: $AB = \frac{A_1B_1 \cdot PB}{PB_1}$

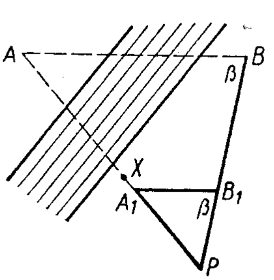


Bild 198

[1]) Der Landmesser (Geodät) bedient sich in der Praxis anderer einfacher Meßmethoden, die aber die Kenntnis trigonometrischer Lehrsätze erfordern.

3) Die Entfernung zweier Fabrikschornsteine A und B, die sich hinter einer Mauer auf unzugänglichem Gelände befinden, ist zu bestimmen[1])!

Beschreibung (Bild 199): Man bestimmt möglichst in Mauernähe einen Punkt H und einen weiter zurückliegenden Punkt P. Man mißt die Winkel AHP und PHB. Man trägt sie an einen auf HP gelegenen beliebigen Punkt H_1 an und erhält die Punkte A_1 und B_1. Es ist dann

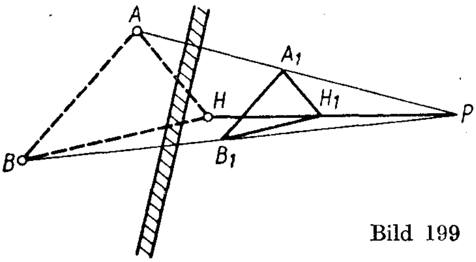


Bild 199

$$\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1,$$

und es verhält sich $AB : A_1B_1 = BH : B_1H_1 = HP : H_1P$. Da man die Strecken A_1B_1, H_1P und HP messen kann, so läßt sich aus der letzten Proportion errechnen:

$$AB = \frac{A_1B_1 \cdot HP}{H_1P}$$

Aus den Ähnlichkeitssätzen ergeben sich folgende weitere Sätze:

a) *Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke*

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Stücke.

Beweis

Die beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (Bild 200) haben die Inhalte

$$f = \frac{c \cdot h}{2} \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{c_1 \cdot h_1}{2}.$$

Bringt man sie in Ähnlichkeitslage so, daß sich C und C_1 decken, dann ersieht man unter Zuhilfenahme der Strahlensätze, daß sich verhält $c : c_1 = h : h_1$. Hiermit ist $h_1 = \frac{h \cdot c_1}{c}$.

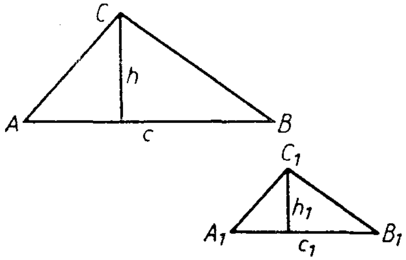


Bild 200

Diesen Wert setzt man in die Verhältnisgleichung für die beiden Flächeninhalte ein und erhält:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{c \cdot h}{c_1 \cdot h_1} = \frac{c \cdot h}{c_1 \cdot h \cdot c_1} \cdot c = \frac{c^2}{c_1^2}.$$

[1]) Der Landmesser (Geodät) bedient sich in der Praxis anderer einfacher Meßmethoden, die aber die Kenntnis grundlegender trigonometrischer Lehrsätze erfordern.

b) *Sehnensatz*

Schneiden sich 2 Sehnen innerhalb eines Kreises, so ist das Produkt aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkt aus den Abschnitten der anderen Sehne.

Beweis

P ist der Schnittpunkt der Sehnen AB und CD (Bild 201). Die Sehnenabschnitte sind a, b, c und d. Der Sehnensatz behauptet: $a \cdot b = c \cdot d$. Man verbindet A mit D und C mit B. Die beiden Dreiecke ADP und BCP sind ähnlich, da die Winkel bei P als Scheitelwinkel und die Winkel bei A und C als Peripheriewinkel über demselben Bogen BD gleich sind. Aus der Ähnlichkeit folgt die Verhältnisgleichheit der gleichliegenden Seiten. Also:

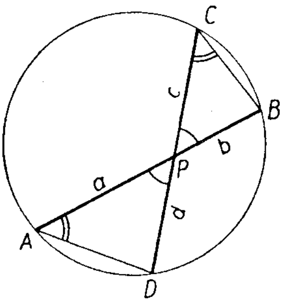


Bild 201

$$a : d = c : b \quad \text{oder}$$
$$a \cdot b = c \cdot d$$

c) *Sekantensatz*

Von allen Sekanten durch ein und denselben Punkt außerhalb eines Kreises bilden die ganzen Sekanten und ihre äußeren Abschnitte ein und dasselbe Produkt.

Beweis

P ist der Schnittpunkt der beiden Sekanten (Bild 202). Die Sekanten sind PA und PC. Ihre äußeren Abschnitte sind PB und PD. Der Sekantensatz lautet: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Man verbindet B mit C und D mit A. Die beiden Dreiecke PDA und PCB sind ähnlich, weil sie in 2 Winkeln übereinstimmen; es sind nämlich der Winkel bei C und der bei A als Peripheriewinkel über dem Bogen BD einander gleich. Der Winkel bei P ist beiden Dreiecken gemeinsam.

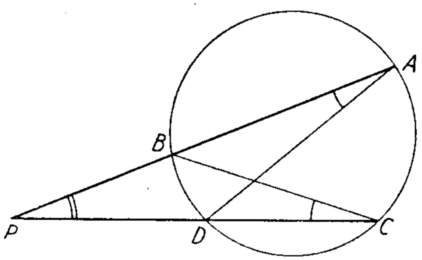


Bild 202

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgt:

$$PA : PD = PC : PB \quad \text{oder} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Das Produkt aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitt heißt die *Potenz des Punktes P* in bezug auf den Kreis.

Beispiel

Vom Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Durchmesser 6 cm liegt in 15 cm Entfernung ein Punkt P. Wie groß ist die Potenz dieses Punktes P in bezug auf den Kreis?

Lösung

Die ganze Sekante beträgt: $15 + 3 = 18$ cm,
der äußere Abschnitt beträgt: $15 - 3 = 12$ cm,
somit beträgt die Potenz des Punktes P: $18 \times 12 = 216$ cm^2. Die Potenz eines Punktes P in bezug auf einen gegebenen unveränderlichen Kreis ändert sich mit der Lage des Punktes. Nähert sich der Punkt der Kreisperipherie, so nimmt die Potenz ab. Im Grenzfall, wenn der Punkt auf der Peripherie liegt, beträgt die Potenz 0. Entfernt sich der Punkt von der Peripherie, so nimmt die Potenz immer mehr und mehr zu.

Dreht man von 2 sich außerhalb eines Kreises schneidenden Sekanten die eine um den gemeinsamen Schnittpunkt so, daß sie allmählich zur Tangente wird, so werden hierbei die beiden Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreise sich mehr und mehr nähern. Der Unterschied zwischen der Länge der ganzen Sekante und der Länge ihres äußeren Abschnittes wird immer kleiner. Im Grenzfall, wenn aus der Sekante die Tangente geworden ist, ist das Produkt: „Ganze Sekante mal äußerem Abschnitt" zum „Quadrat der Tangente" geworden. Aus dem Sekantensatz folgt als Grenzfall der

d) *Sekanten-Tangentensatz*

> Schneiden sich eine Sekante und eine Tangente eines Kreises, so ist das Quadrat der Tangentenlänge gleich dem Produkt aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitt.

(Oder geometrisch ausgedrückt: Das Quadrat mit der Tangente als Seite ist gleich dem Rechteck, das aus der ganzen Sekante und dem äußeren Abschnitt gebildet wird.)

Behauptung: $PC^2 = AP \cdot BP$ (Bild 203).

Beweis

Dreht man (Bild 202) die Sekante PC um P im Uhrzeigersinn, so rücken D und C einander immer näher, bis sie schließlich in der Grenzlage zusammenfallen (Bild 203). Aus der Sekante ist dann eine Tangente geworden, die man auffassen kann als Sekante mit gleichgroßen Abschnitten ($CP = CP$). Nach dem Sekantensatz ist dann $AP \cdot BP = CP \cdot CP = (CP)^2$.

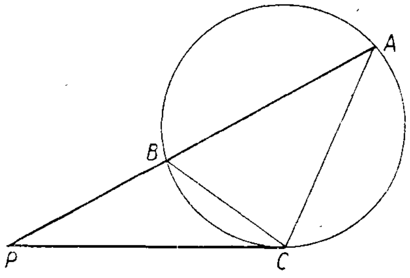


Bild 203

Anmerkung: Die Potenz eines Punktes P in bezug auf einen Kreis ist nach dem letzten Satz das Quadrat der Tangentenlänge.

e) *Der goldene Schnitt oder die stetige Teilung*

Erklärung: Eine Strecke AB heißt im Punkte C stetig oder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn sich die ganze Strecke AB zu ihrem größeren Abschnitt AC verhält wie der größere Abschnitt AC zu dem kleineren Abschnitt CB.

In Buchstaben drückt sich dieser Satz nach Bild 204 aus:

$$a : x = x : b \quad \text{oder} \quad x^2 = a \cdot b.$$

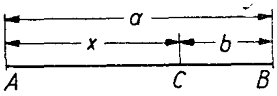


Bild 204

Macht man als Sonderfall des Sekanten-Tangentensatzes die Tangente PC gleich dem Kreisdurchmesser und legt die Sekante durch den Kreismittelpunkt M, so ist (Bild 205)

$$PC^2 = BA^2 = PA \cdot PB$$

oder $PA : BA = BA : PB$; d. h. die Sekante PA ist durch B stetig geteilt. Macht man ferner $PD = PB$, so lautet die letzte Gleichung: $PA : BA = BA : PD$ oder nach den Regeln der korrespondierenden Subtraktion:

$$(PA - BA) : BA = (BA - PD) : PD$$
$$\text{oder } PB : BA = DC : PD$$
$$\text{oder } PD : PC = DC : PD;$$

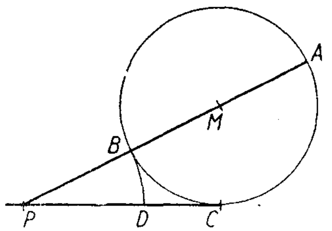


Bild 205

d. h. PD ist die mittlere Proportionale zu der ganzen Strecke PC und ihrem kleineren Abschnitt DC.

Um eine Strecke PC stetig zu teilen, errichtet man nach Bild 206 in dem einen Endpunkt das Lot MC und macht es gleich der halben Strecke PC, zieht PM und beschreibt um M und P die Kreisbogen CB und BD. Dann ist D der gesuchte Punkt, der die Strecke PC stetig teilt.

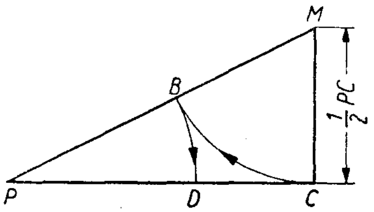


Bild 206

Ist eine Strecke a stetig geteilt und beträgt der größere Abschnitt x, so ist die Länge des kleineren Abschnittes $(a - x)$. Die Länge des größeren Abschnittes bestimmt man aus der Gleichung:

$$x^2 = a \cdot (a - x).$$

Unter Anwendung der Regeln für das Lösen quadratischer Gleichungen (Band 1) erhält man

$$x^2 = a^2 - ax \quad \text{oder} \quad x^2 + ax - a^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(\pm\sqrt{5} - 1$$

Das negative Vorzeichen vor der Wurzel ist nicht zu verwenden, da sich mit ihm für die Länge des größeren Abschnittes x ein negativer Wert ergeben würde, was unmöglich ist; man erhält also für die Länge des größeren Abschnittes der stetig geteilten Strecke a den Wert:

$$\boxed{x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

f) *Satz des Ptolemäus*

In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den Gegenseiten.

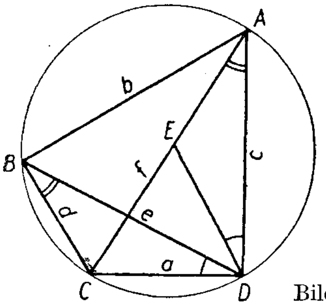


Bild 207

Behauptung

$ef = ab + cd$ (Bild 207).

Beweis

Man mache $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CDB$. Dann ist $\triangle AED \sim \triangle BCD$, weil $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CDB$ und $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ (als Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen DC) sind. Aus der Ähnlichkeit folgt:

$c : AE = e : d$ oder $cd = e \cdot AE$.

Da aber auch $\triangle DEC \sim \triangle DAB$ ist, erhält man $a : EC = e : b$ oder $ab = e \cdot EC$. Durch Addition folgt: $ab + cd = e \cdot (AE + EC) = e \cdot f$.

Aufgaben

153) Ein Turm wirft einen 30 m langen Schatten. Ein ebenfalls senkrecht stehender 15 cm langer Bleistift hat zu gleicher Zeit einen Schatten von 9 cm. Wie hoch ist der Turm?

154) Der Transversalmaßstab (Bild 208) oder verjüngte Maßstab, der in der Zeichentechnik gern gebraucht wird, ermöglicht das Abgreifen von Strecken im Maßstab 1 : 500.

Wie lang sind die stark ausgezogenen Strecken AB, CD und EF?

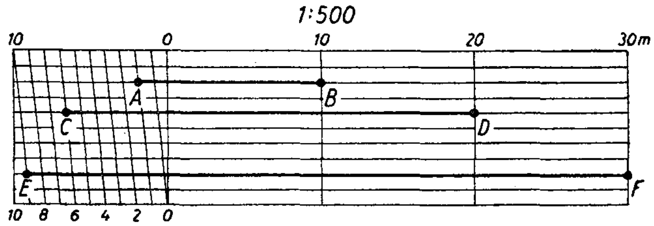


Bild 208

155) Eine vereinfachte Form des **Transversalmaßstabes** der vorhergehenden Aufgabe zeigt Bild 209.
Wie lang sind hier die Strecken AB, CD und EF?

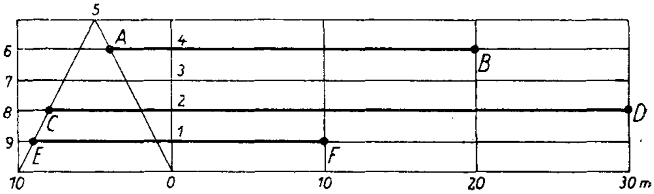


Bild 209

156) Für den **Dachbinder** (Bild 210) sind die Längen der 4 Obergurtstäbe
(1), (2), (3) und (4);
3 Vertikalstäbe
(5), (6) und (7);
3 Diagonalstäbe
(8), (9) und (10)
zu berechnen!

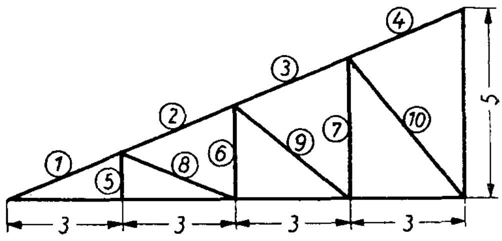


Bild 210 *Maße in m*

157) Um den Endpunkt B einer 13 cm langen Strecke AB ist ein Kreis zu beschreiben, für den A die Potenz $e^2 = 25\ \text{cm}^2$ besitzt. Man berechne die Länge des Kreisradius!

158) Es ist zu zeigen, daß jedes rechtwinklige Dreieck durch die Höhe in 2 einander ähnliche Dreiecke zerlegt wird, die auch zu dem ganzen Dreieck ähnlich sind.
a) Welcher Lehrsatz folgt aus der Ähnlichkeit der beiden entstehenden Teildreiecke?
b) Welcher Lehrsatz folgt aus der Ähnlichkeit eines Teildreiecks zu dem ganzen rechtwinkligen Dreieck?

159) Auf 2 Wellen, die sich im Punkte S senkrecht schneiden, sitzen zwei **Kegelräder** mit den gegebenen Teilkreisdurchmessern $2\,r_1$ und $2\,r_2$. Wie groß sind R_1 und R_2, und wie verhalten sich diese zueinander (Bild 211)?

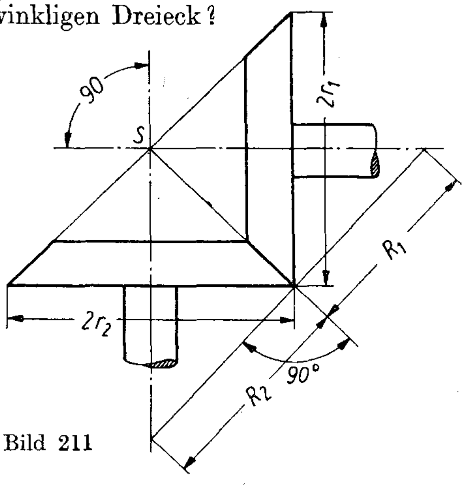


Bild 211

160) In einem Dreieck ABC sind durch den Halbierungspunkt der Seite AC die Parallelen zu den Seiten AB und BC gezogen. Hierdurch entstehen 2 Teildreiecke und ein Parallelogramm.
a) Wie verhält sich der Inhalt f des Dreiecks ABC zu dem Inhalt f_1 eines der beiden entstandenen Teildreiecke?
b) Wie verhält sich der Inhalt f zu dem Inhalt f_2 des Parallelogrammes?

161) Für ein Rechteck mit den Seiten a und b und der Diagonale c ist der Satz des Ptolemäus anzusetzen!
Wie lautet er mit diesen Buchstaben?

162) In einem Dreieck ABC wird der Mittelpunkt D der Seite BC mit A verbunden. Der Mittelpunkt E von AD wird mit B verbunden. Die Verlängerung von BE schneidet die Seite AC in F. Wie groß ist AF im Verhältnis zu FC?

Anleitung: Die Parallele zu AD durch B schneidet die Verlängerung von CA in G. Man untersuche das Dreieck GBF!

163) Wie lautet der Satz des Ptolemäus für das gleichschenklige Trapez mit den parallelen Seiten a und 2a und den Schenkeln b? Die Länge der Diagonale betrage c.

164) Die Höhe eines rechtwinkligen Fensters beträgt 1 m. Seine Breite ist gleich dem größeren Abschnitt der stetig geteilten Höhe. Wie groß ist die Fensterfläche?

165) Man bestimme die mittlere Proportionale x zu den beiden Strecken $a + b$ und $a - b$, wenn $a = 10$ und $b = 6$ ist!
a) rechnerisch,
b) mit Hilfe des Euklid,
c) mit Hilfe des Höhensatzes.

166) Folgende Gleichungen sind geometrisch (d. h. mit Zirkel und Lineal) zu lösen:
a) $x^2 = 3a^2$ b) $x^2 = 2ab$ c) $3ax = b^2$

Anleitung: Man benutze zur Lösung von
a) den Lehrsatz des Euklid,
b) den Höhensatz
c) Sekanten-Tangentensatz!

167) Von 2 ähnlichen Dreiecken ist die Fläche des einen 2,25mal so groß wie die des anderen.
a) In welchem Verhältnis stehen die Flächen zueinander?
b) In welchem Verhältnis stehen die Dreiecksseiten zueinander?

168) Wie verhält sich der Flächeninhalt des aus der Diagonale d gebildeten Quadrates zum ursprünglichen Quadrat?

169) Durch den Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ist zu einer Dreiecksseite die Parallele gezogen.
   a) Wie verhalten sich die Seiten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks zu denen des entstandenen Teildreiecks?
   b) Wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke zueinander?

170) Welchen Abstand vom Mittelpunkt M des Kreises mit dem Radius $r = 6$ cm haben alle Punkte, die in bezug auf diesen Kreis die Potenz 64 cm^2 haben?

171) Ein kugelförmiger Schwimmer von 300 mm ∅ taucht bis zu einem Fünftel seines Durchmessers in Wasser ein. Wie groß ist der Durchmesser des größten von Wasser benetzten Kugelkreises?

172) Eine 15 cm lange Strecke AB ist im Verhältnis 3 : 2 harmonisch zu teilen. Der innere Teilpunkt heiße C, der äußere D. Wie groß sind die Teilstrecken AC und CB sowie AD und DB?

173) Wie lautet das harmonische Mittel zu 4 und 8?

I. Regelmäßige Vielecke

1. Grundbegriffe

Ein beliebiges Vieleck, oder auch n-Eck genannt, entsteht dadurch, daß man n in einer Ebene liegende Punkte der Reihe nach durch Geraden verbindet. Von diesen n-Punkten dürfen keine 3 aufeinander folgenden in einer Geraden liegen. Das entstehende Vieleck hat n-Ecken und n-Seiten. Zwei aufeinander folgende Seiten des Vielecks schließen einen Winkel des Vieleckes ein.

Ein Vieleck mit n-Seiten läßt sich dadurch in Teildreiecke zerlegen, daß man von einer Ecke aus die Diagonalen zieht und $(n - 2)$ Teildreiecke erhält. Als Summe der Vieleckswinkel erhält man:

$$(n - 2) \cdot 180°.$$

Ein Vieleck, in dem sämtliche Seiten und Winkel gleich groß sind, heißt regelmäßig. In jedem regelmäßigen Vieleck gibt es einen Punkt, der von allen Ecken und allen Seiten gleich weit entfernt ist. Man braucht nur auf 2 Seiten die Mittellote zu errichten. Ihr Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des dem regelmäßigen Vieleck eingeschriebenen und umbeschriebenen Kreises. Verbindet man ihn mit sämtlichen Ecken des regelmäßigen Vielecks, so entstehen n gleichschenklige kongruente Dreiecke, die sogenannten Bestimmungsdreiecke.

Das Bestimmungsdreieck ABM (Bild 212) eines regelmäßigen Vielecks ist stets gleichschenklig. Seine Basis ist die n-Eckseite s_n, seine Schenkel sind gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises. Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks heißt der Zentriwinkel φ des regelmäßigen Vielecks; er beträgt:

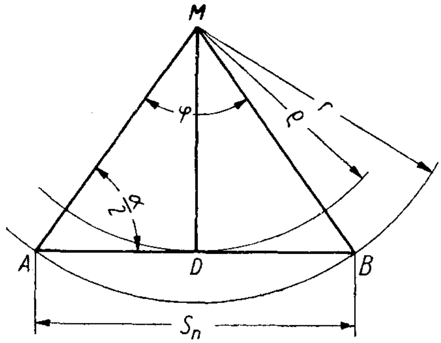


Bild 212

$$\boxed{\varphi = \frac{360^\circ}{n}}$$

Das Lot MD von der Spitze auf die Basis ist der Radius ϱ des dem Vieleck eingeschriebenen Kreises.

Die beiden Basiswinkel des Bestimmungsdreiecks, von denen jeder $\frac{\alpha}{2}$ beträgt, betragen zusammen soviel wie der Winkel α des regelmäßigen n-Ecks. Jeder Winkel im regelmäßigen n-Eck beträgt:

$$\boxed{\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}$$

Beispiel

Für ein regelmäßiges 5-Eck ist zu bestimmen

1) der Zentriwinkel φ und
2) der Vieleckswinkel α!

1) $\varphi = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

2) $\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$.

In nachstehender Tabelle sind die Zentriwinkel und die Winkel der bekanntesten regelmäßigen Vielecke zusammengestellt:

Seitenzahl n	3	4	5	6	8	10	12	15	20
Zentriwinkel φ	120°	90°	72°	60°	45°	36°	30°	24°	18°
Vieleckswinkel α	60°	90°	108°	120°	135°	144°	150°	156°	162°

Hat man irgendein beliebiges regelmäßiges Vieleck mit der Seite s_n gezeichnet (Bild 213), so kann man anschließend konstruieren:

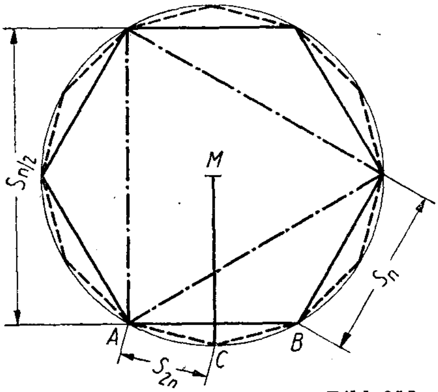


Bild 213

1) Falls n gerade ist, das Vieleck, dessen Seitenzahl nur halb so groß ist. Seine Seite wird mit $s_{n/2}$ bezeichnet.

Man hat bei dem gegebenen Vieleck eine Ecke über die andere zu verbinden, indem man also immer eine Ecke überspringt.

Es läßt sich auf diese Weise zum Beispiel aus dem 10-Eck das 5-Eck konstruieren.

2) Bei beliebigem n das Vieleck, dessen Seitenzahl doppelt so groß ist. Seine Seitenzahl wird mit s_{2n} bezeichnet. Man hat in dem Bestimmungsdreieck ABM von M auf AB das Lot zu fällen, dessen Verlängerung die Peripherie des umbeschriebenen Kreises in C schneidet. AC ist die gesuchte Seite s_{2n}. Auf diese Weise läßt sich zum Beispiel aus dem regelmäßigen 6-Eck das regelmäßige 12-Eck konstruieren.

2. Konstruktion regelmäßiger Vielecke

Zum Konstruieren regelmäßiger Vielecke gibt es 3 verschiedene Verfahren:

a) Technische Verfahren der Praxis
  α) mit Hilfe einer Kreisteilungstabelle,
  β) mit Hilfe einer Zeichenmaschine mit Teilkopf.
b) Mathematische Konstruktionsverfahren für eine begrenzte Zahl von Vielecken.
c) Näherungskonstruktionsverfahren für alle Vielecke.
  Von diesen 3 Verfahren wird von dem Techniker und Ingenieur das erste bevorzugt.

a) Man benötigt zu diesem Verfahren eine sogenannte **Kreisteilungstabelle**, wie man sie in allen technischen Hilfs- und Tabellenbüchern findet[1]).

Diese Tabellen sind folgendermaßen aufgebaut: In ihrer ersten senkrechten Spalte sind die Werte für n angegeben, wobei man unter n die Seitenzahl eines regelmäßigen n-Ecks versteht. In einer danebenstehenden senkrechten Spalte stehen die Werte für die Längen der Seiten der regel-

[1]) Siehe: „Tafelsammlung und Hilfsbuch“ sowie „Hilfsbuch für Betrieb und Konstruktion“.

mäßigen Vielecke, die man dem Kreis mit dem Durchmesser 1 einbeschreiben kann. Hat man beispielsweise einem Kreise mit dem Durchmesser 6 cm ein regelmäßiges 10-Eck einzubeschreiben, so hat man den neben $n = 10$ stehenden Wert 0,30902 mit der Durchmesserlänge 6 zu multiplizieren; man erhält $0{,}30902 \cdot 6 = 1{,}85412$. Dieser Wert ist die Seitenlänge des regelmäßigen 10-Ecks in dem Kreis mit dem Durchmesser $d = 6$ cm. Trägt man also in den Kreis mit 6 cm ⌀ zehnmal hintereinander die Strecke 1,85 cm als Sehne ein, so kommt man auf den Anfangspunkt zurück und erhält die Ecken des regelmäßigen 10-Ecks.

Beispiel

Wie groß ist die Seite des regelmäßigen 8-Ecks in dem Kreise mit dem Durchmesser $d = 250$ mm?

Laut Kreisteilungstabelle gehört zu $n = 8$ die Sehnenlänge 0,38268 mm in einem Kreise mit dem Durchmesser $d = 1$ mm. Zum Kreise mit dem Durchmesser $d = 250$ mm gehört die Sehne: $0{,}38268 \cdot 250 = 95{,}67$ mm. Trägt man diese Länge 8mal hintereinander als Sehne in den Kreis mit 250 mm ⌀ ein, so kommt man auf den Anfangspunkt zurück.

Besitzt man an seinem Reißbrett eine **Zeichenmaschine mit Teilkopf,** mit deren Hilfe man das Zeichenlineal unter jedem beliebigen Winkel einstellen kann, so bestimmt man zum Zeichnen irgendeines regelmäßigen n-Ecks die Größe des Zentriwinkels $\varphi = \frac{360°}{n}$, stellt diesen Winkel am Teilkopf ein und zeichnet ihn in dem gegebenen Kreis als Zentriwinkel ein. Die Länge der dazu gehörenden Sehne ist die gesuchte n-Ecksseite.

Beispiel

Im regelmäßigen 12-Eck beträgt der Zentriwinkel $\varphi = \frac{360°}{12} = 30°$. Die Sehne zum Zentriwinkel 30° ist die Seite des regelmäßigen 12-Ecks.

b) Von den **mathematischen Konstruktionsverfahren,** die nur mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden, interessieren besonders die Konstruktionen der Vielecke, die den sogenannten Dreier-, Vierer- und Fünfer-Reihen angehören.

Erklärung: Ein regelmäßiges n-Eck gehört der Dreier-, Vierer- oder Fünfer-Reihe an, wenn n von der Form $2^p \cdot 3$ oder $2^p \cdot 4$ oder $2^p \cdot 5$ ist. Hierin ist p eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, 3, 4 usw.

Die regelmäßigen n-Ecke der Dreierreihe erhält man, indem man in $2^p \cdot 3$ der Reihe nach für p die Werte 0, 1, 2, 3, 4 usw. einsetzt. Man erhält die Dreierreihe: 3, 6, 12, 24, 48 usw.

Aus $2^p \cdot 4$ folgt die Viererreihe: 4, 8, 16, 32 usw.
Aus $2^p \cdot 5$ folgt die Fünferreihe: 5, 10, 20, 40 usw.

Man sieht, daß die Seitenzahlen der n-Ecke einer dieser 3 Reihen aus der vorhergehenden bzw. nachfolgenden Zahl der Reihe durch Verdoppeln bzw. Halbieren entstehen.

Ausgangsvielecke der vorstehenden Reihen sind in
der Dreierreihe: Das regelmäßige Sechseck,
der Viererreihe: Das regelmäßige Viereck und
der Fünferreihe: Das regelmäßige Zehneck.

Das regelmäßige Sechseck hat den Zentriwinkel: $\varphi = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Sein Bestimmungsdreieck ist gleichseitig; d. h.

Die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Kreisradius.

Man zeichnet das regelmäßige Sechseck, indem man sechsmal den Radius als Sehne in den Kreis einzeichnet.

Aus dem Sechseck findet man sämtliche anderen Vielecke der Dreierreihe. Das *regelmäßige Dreieck* findet man durch Verbinden des 1., 3. und 5. Eckpunktes des Sechsecks.

Die Seite des *regelmäßigen 12-Ecks* findet man, indem man vom Mittelpunkt das Lot auf die Sechsecksseite fällt und es bis zum Schnitt mit der Peripherie bringt. Die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit der danebenliegenden Ecke des Sechsecks ist die Seite des regelmäßigen Zwölfecks.

Das regelmäßige Viereck ist ein Quadrat. Sein Zentriwinkel beträgt: $\varphi = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht. Das Bestimmungsdreieck ist rechtwinklig-gleichschenklig. Man hat 2 aufeinander senkrecht stehende Durchmesser zu zeichnen und deren Endpunkte miteinander zu verbinden.

Aus dem regelmäßigen Viereck findet man das 8-, 16-, 32-Eck.

Das regelmäßige Zehneck hat den Zentriwinkel $\varphi = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Sein Bestimmungsdreieck ABM (Bild 214) ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel $\varphi = 36^\circ$ an der Spitze. Die Basiswinkel betragen je 72°. Die Halbierungslinie des Basiswinkels MAB schneidet MB in C. $\triangle$ ACM ist gleichschenklig, weil in ihm die Basiswinkel 36° betragen; d. h. AC = MC. $\triangle$ ABC ist ebenfalls gleichschenklig, weil die Basiswinkel 72° betragen. $\triangle ABC \sim \triangle ABM$, da beide Dreiecke gleichschenklig sind und in den Winkeln übereinstimmen.

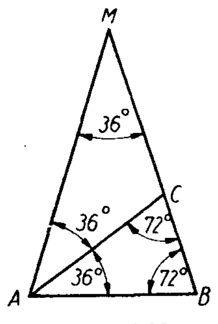


Bild 214

Aus der Ähnlichkeit folgt: $MB : AB = AC : CB$. Da aber $AB = AC = MC$ ist, erhält man $MB : MC = MC : CB$; d. h. MB ist durch C stetig geteilt, oder anders ausgedrückt:

Die Seite des regelmäßigen Zehnecks ist gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius.

Aus dem regelmäßigen Zehneck kann man das regelmäßige Fünfeck durch Überspringen je einer Ecke zeichnen. Das regelmäßige 20-Eck findet man durch die Mittellote von M auf die 10-Ecksseiten.

Aus der Konstruktion des regelmäßigen 6- und 10-Ecks ergibt sich die Konstruktion für

Das *Regelmäßige 15-Eck.* Sein Zentriwinkel beträgt $\frac{360°}{15} = 24°$. Diesen Winkel erhält man als Differenz der Zentriwinkel des regelmäßigen 6- und 10-Ecks: $60° - 36° = 24°$. Man konstruiert also (nach Bild 215) $s_6 = AB$ und $s_{10} = AD$. Dann ist DB die Seite des regelmäßigen 15-Ecks.

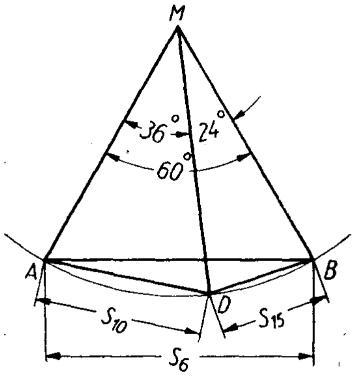


Bild 215

Aus der Konstruktion des regelmäßigen 15-Ecks findet man die Seiten des regelmäßigen 30- und 60-Ecks usw.

Über die bisher angeführten mathematischen Konstruktionsmöglichkeiten hinausgehend, ist — wie Gauß im Jahre 1796 gefunden hat —, falls n eine Primzahl bedeutet, die Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks im Kreise nur dann ausführbar, wenn (n — 1) eine Potenz von 2 ist; so ist beispielsweise die Seite des regelmäßigen 17-Ecks konstruierbar. Auf diese Konstruktion kann aber hier verzichtet werden.

c) *Näherungskonstruktionsverfahren für alle n-Ecke*

Neben den bisher behandelten geometrischen und somit genau stimmenden Konstruktionen regelmäßiger Vielecke gibt es eine Reihe brauchbarer Näherungskonstruktionen, von denen nachstehend einige besonders einfache aufgeführt werden.

Regelmäßiges 7-Eck. Seine Seite ist annähernd so groß wie die halbe Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks[1]. Um den Endpunkt A des Halbmessers AM beschreibt man den Kreis mit AM (Bild 216). Er schneidet die Peripherie in C und D. Man verbinde C mit D. CE ist annähernd gleich der 7-Ecksseite.

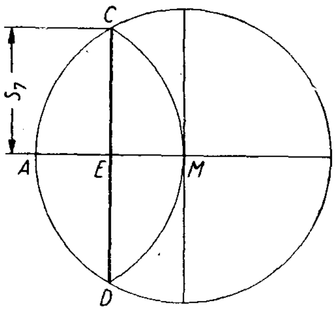


Bild 216

Die durch diese Näherungskonstruktion gefundene Seite des regelmäßigen 7-Ecks ist gegenüber ihrer wirklichen Länge nur um ca. 0,1% kleiner.

[1]) Diese Tatsache war schon dem deutschen Maler Albrecht Dürer (1471 bis 1528) bekannt.

Regelmäßiges 9-Eck. Auf dem Durchmesser AB (Bild 217) errichtet man in M die Senkrechte MC.

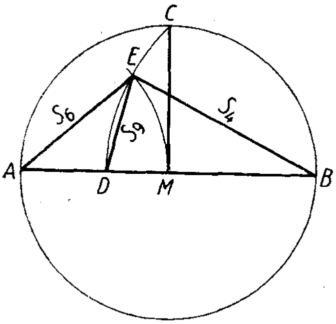


Bild 217

Um A beschreibt man den Kreis mit $AM = r = s_6$.

Um B beschreibt man den Kreis mit $BC = s_4$. Man erhält die Schnittpunkte E und D.

ED ist die gesuchte Seite s_9 des regelmäßigen 9-Ecks.

Sie ist 0,2% kleiner als die wirkliche 9-Ecksseite.

Regelmäßiges 11-Eck. Von 4 hintereinander liegenden Ecken A, B, C und D des regelmäßigen Sechsecks werden A mit C und B mit D verbunden (Bild 218).

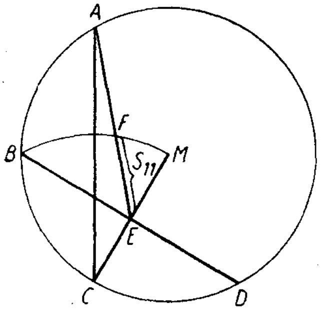


Bild 218

Man verbindet ferner M mit C und erhält auf BD den Punkt E. Um C beschreibt man mit CB den Kreis. Er schneidet AE in F.

Dann ist EF die gesuchte Seite s_{11} des regelmäßigen 11-Ecks.

Die durch diese Näherungskonstruktion gefundene Seite des regelmäßigen 11-Ecks ist 0,3% größer als die sich durch Rechnung ergebende wirkliche 11-Ecksseite.

Abschließend noch 2 Näherungskonstruktionen für

Beliebige regelmäßige Vielecke.

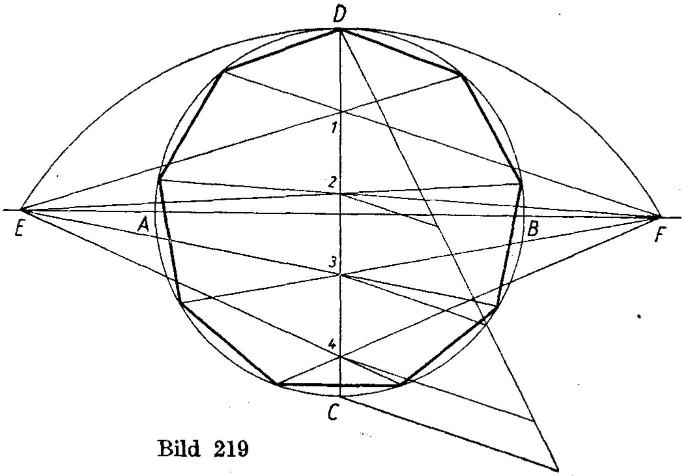


Bild 219

Man teilt den Durchmesser CD (Bild 219) in halb soviele gleiche Teile, als das Vieleck Seiten haben soll. Beim 9-Eck z. B. wird man CD in $4^1/_2$ gleiche Teile teilen. Um C beschreibt man mit CD den Kreisbogen, bis der auf CD senkrechte Durchmesser AB in E und F geschnitten wird. Von diesen Punkten aus zieht man durch die erhaltenen Teilpunkte 1, 2, 3, 4 usw. des Durchmessers CD Strahlen. Ihre Verlängerungen schneiden die Peripherie in den gesuchten Ecken des regelmäßigen n-Ecks.

Eine weitere Konstruktion ermöglicht in einfacher Weise die näherungsweise Bestimmung der Seite eines beliebigen n-Ecks, wobei $n > 5$ sein muß.

Man teilt den Durchmesser AB (Bild 220) in n (z. B. = 7) gleiche Teile und verlängert ihn über B hinaus, ebenso den auf ihm senkrechten Durchmesser MD über D hinaus um je einen Teil bis C und E. Man verbindet C mit E. Verbindet man den Schnittpunkt G mit dem 3. (von B aus gerechnet) Teilpunkt F, so ist FG fast genau die Seite des regelmäßigen n-Ecks.

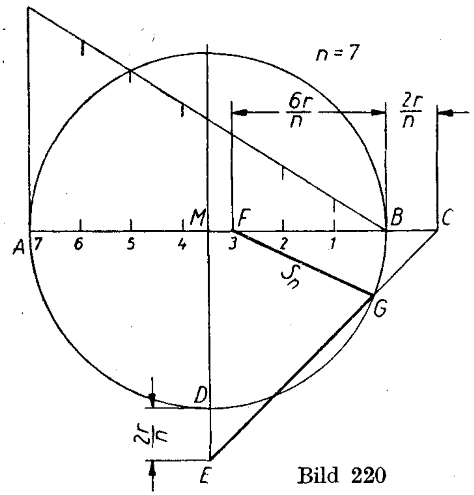


Bild 220

3. Berechnung regelmäßiger Vielecke

a) Beziehung zwischen s_n und s_{2n}

Im Bild 221 ist $\triangle$ ABM das Bestimmungsdreieck irgendeines regelmäßigen Vielecks. $\triangle$ ADM ist das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Vielecks mit doppelter Seitenzahl.

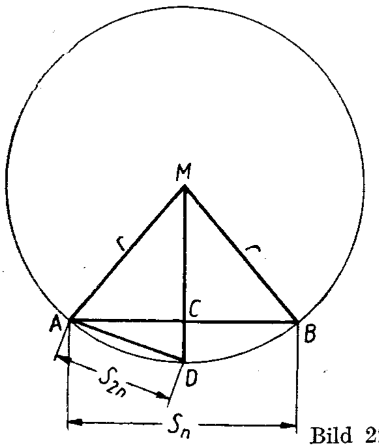


Bild 221

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist im $\triangle$ ACM:

$$MC^2 = AM^2 - AC^2 \qquad \text{oder}$$

$$MC^2 = r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 \qquad \text{oder}$$

$$MC = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Ebenso ergibt der Lehrsatz des Pythagoras im Dreieck ADC:

$$DC^2 = AD^2 - AC^2 \qquad \text{oder}$$

$$DC = \sqrt{s_{2n}^2 - \frac{s_n^2}{4}}.$$

Da aber $DC = r - MC$ ist, erhält man:

$$\sqrt{s_{2n}^2 - \frac{s_n^2}{4}} = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Beide Seiten der letzten Gleichung quadriert, ergibt:

$$s_{2n}^2 - \frac{s_n^2}{4} = r^2 + r^2 - \frac{s_n^2}{4} - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}$$

oder nach s_{2n} aufgelöst:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}} \quad \text{oder} \quad \boxed{s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}}$$

Kennt man die Länge der Seite s_n eines regelmäßigen Vielecks, so kann man mit Hilfe dieser Gleichung die Seitenlänge s_{2n} des regelmäßigen Vielecks mit doppelter Seitenzahl berechnen.

b) Berechnung der Seitenlängen und Umfänge

regelmäßiger Vielecke aus dem Radius des umbeschriebenen Kreises.

Regelmäßiges Sechseck

Das Bestimmungsdreieck ist gleichseitig mit der Seite: $s_6 = r$.

Der Umfang berechnet sich als die Summe der 6 gleichlangen Seiten s_6.

Umfang: $u_6 = 6r$.

Regelmäßiges Viereck (Quadrat)

Das Bestimmungsdreieck ist rechtwinklig-gleichschenklig mit den Katheten r und der Hypotenuse s_4.

Es ist also: $s_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$.

Hieraus Seite: $s_4 = r\sqrt{2}$.

Viermal so lang ist der Umfang: $u_4 = 4r\sqrt{2}$.

Anmerkung: Die Seitenlänge eines regelmäßigen Vierecks bezeichnet man in der Technik als Schlüsselweite. Der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist das sog. Eckenmaß.

Regelmäßiges Zehneck

Wie auf Seite 120 gezeigt wurde, ist die Zehnecksseite gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Radius. Es beträgt also nach Seite 113:

$$\text{Seite: } s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{und der}$$

$$\text{Umfang: } u_{10} = 5r(\sqrt{5} - 1).$$

Regelmäßiges Dreieck

Im Bild 222 liegen die beiden Bestimmungsdreiecke des regelmäßigen Sechsecks ABM und BCM nebeneinander. AC ist die Seite des regelmäßigen Dreiecks; d. h. $AC = s_3$.

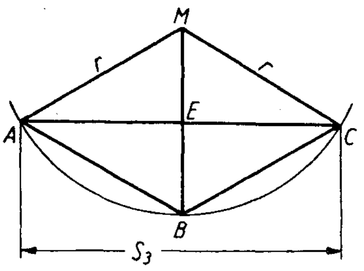


Bild 222

$$AM = BM = CM = r.$$

Es ist $AE^2 = AM^2 - ME^2$

oder $\left(\frac{s_3}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2; \quad \frac{s_3^2}{4} = \frac{3}{4} r^2.$

Man erhält die

Seite: $s_3 = r \cdot \sqrt{3}$ und den

Umfang: $u_3 = 3r \cdot \sqrt{3}$.

Regelmäßiges Zwölfeck

In die Gleichung

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

setze man für $s_n = s_6 = r$ und für s_{2n} das gesuchte s_{12} ein. Man erhält:

$$s_{12} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = r\sqrt{2 - 1{,}73} = r\sqrt{0{,}27} = 0{,}52 \cdot r,$$

Seite: $s_{12} = 0{,}52\,r$

Umfang: $u_{12} = 6{,}24\,r$.

Unter Anwendung der auf Seite 124 abgeleiteten Gleichung

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}$$

kann man nunmehr, da man die Größen von s_4, s_6 und s_{10} kennt, die Seiten sowie Umfänge sämtlicher regelmäßiger Vielecke der Dreier-, Vierer- und Fünferreihe bestimmen.

c) Berechnung der Inhalte

regelmäßiger Vielecke aus dem Radius des umbeschriebenen Kreises.

Den Inhalt regelmäßiger Vielecke bestimmt man als Summe der Inhalte ihrer n Bestimmungsdreiecke. Man berechnet also zunächst den Inhalt f eines Bestimmungsdreiecks aus dem halben Produkt von Grundlinie (= Vielecksseite) mal Höhe (= Inkreisradius); sodann nimmt man diesen Inhalt n mal und erhält den Flächeninhalt F des regelmäßigen n-Ecks:

$$F = n \cdot f$$

Regelmäßiges Sechseck

$$F_6 = 6 \cdot f_6$$

f_6 ist der Inhalt des gleichseitigen Bestimmungsdreieckes des regelmäßigen Sechsecks mit der Seite r. Er beträgt nach Aufgabe 132) S. 94: $f = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$,

somit ist $F_6 = 6 \cdot \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = 1{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot r^2 = \underline{2{,}6\, r^2}$.

Regelmäßiges Viereck (Quadrat)

$$F_4 = 4 \cdot f_4$$

Die Grundlinie des Bestimmungsdreiecks ist $s_4 = r \cdot \sqrt{2}$. Die Höhe beträgt:

$$\frac{s_4}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Der Inhalt des Bestimmungsdreiecks ist:

$$f_4 = \frac{1}{2} r\sqrt{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} r^2.$$

Der gesamte Flächeninhalt beträgt:

$$F_4 = 4 \cdot \frac{1}{2} r^2 = \underline{2\, r^2}.$$

An Hand einer Skizze überzeuge man sich davon, daß der Inhalt des regelmäßigen Vierecks doppelt so groß ist wie der des Quadrates, dessen Seite gleich dem Radius des dem regelmäßigen Viereck umbeschriebenen Kreises ist.

Regelmäßiges Zehneck

$$F_{10} = 10 \cdot f_{10}$$

Die Seite des regelmäßigen Zehnecks beträgt nach Seite 124:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{r}{2}(2{,}24 - 1) = \frac{r}{2} \cdot 1{,}24 = 0{,}62\, r.$$

Nach dem für das halbe Bestimmungsdreieck angesetzten Lehrsatz des Pythagoras erhält man, wenn h die Höhe auf der Basis s_{10} ist:

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{s_{10}}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{0{,}62\, r}{2}\right)^2 = r^2 - 0{,}0961\, r^2 = 0{,}9039\, r^2,$$

$$\text{also: } h = \sqrt{0{,}9039\, r^2} = 0{,}951\, r.$$

Mit den vorstehend berechneten Werten für s_{10} und h ergibt sich:

$$f_{10} = \frac{1}{2} s_{10} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 0{,}62\, r \cdot 0{,}951\, r = 0{,}295\, r^2.$$

Der Gesamtinhalt des regelmäßigen Zehnecks beträgt:

$$F_{10} = 10 \cdot f_{10} = 10 \cdot 0{,}295\, r^2 = \underline{2{,}95\, r^2}.$$

Regelmäßiges Dreieck

$$F_3 = 3 \cdot f_3$$

f_3 ist der Inhalt des gleichschenkligen Bestimmungsdreieckes des regelmäßigen Dreiecks. Es hat den Schenkel r und die Grundlinie $s_3 = r\sqrt{3}$.

Die Höhe dieses Dreiecks beträgt $\frac{r}{2}$; somit ist:

$$f_3 = \frac{1}{2} r \sqrt{3} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{4} \sqrt{3}.$$

Als Gesamtflächeninhalt des regelmäßigen Dreiecks erhält man

$$F_3 = 3 \cdot f_3 = 3 \cdot \frac{r^2}{4} \sqrt{3} = 0{,}75\, r^2 \sqrt{3} = \underline{1{,}3\, r^2}.$$

Der Inhalt des einem Kreise mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks beträgt die Hälfte des regelmäßigen Sechsecks. — Man überzeuge sich durch eine Skizze von der Richtigkeit dieses Ergebnisses!

d) Regelmäßige Sehnen- und Tangentenvielecke

Ein regelmäßiges Vieleck (Bild 223), um das man den Kreis beschrieben hat, ist bezüglich des Kreises ein Sehnenvieleck. Seine Seiten AB, BC, CD usw. sind untereinander gleich lang, nämlich s_n. Sie sind S e h n e n des Kreises mit dem Radius MA = r. Die Lote von M auf AB, BC, CD usw. werden bis zu ihren Schnittpunkten mit der Peripherie verlängert. Durch diese Schnittpunkte werden die Parallelen zu den Seiten des einbeschriebenen Vielecks gezogen. Man erhält das regelmäßige Vieleck mit den Seiten A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 usw. Diese Seiten sind untereinander gleich lang; nämlich S_n. Sie sind T a n g e n t e n an den Kreis mit dem Radius r. Die Teildreiecke des einbeschriebenen Vielecks sind denen des umbeschriebenen Vielecks ähnlich. Somit ergibt sich: D a s S e h n e n v i e l e c k i s t d e m T a n g e n t e n v i e l e c k ä h n l i c h.

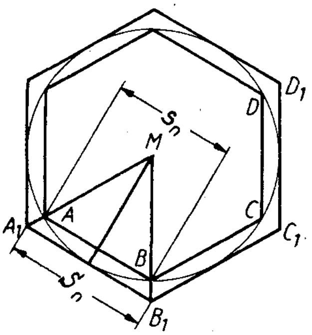


Bild 223

Im Bild 224 sind die beiden Bestimmungsdreiecke ABM und A_1B_1M herausgezeichnet. Die Lote von M auf die beiden zueinander parallelen Vielecksseiten AB und A_1B_1 sind ML = ϱ und ML_1 = r. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist:

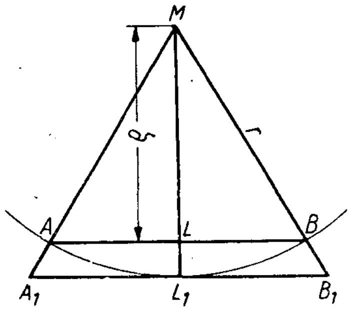


Bild 224

$$ML^2 = AM^2 - AL^2$$

$$ML = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = r \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}.$$

Nach dem 2. Strahlensatz ist:

$$A_1B_1 : AB = ML_1 : ML$$

$$\text{oder } S_n : s_n = r : r\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$s_n = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}} \cdot S_n .$$

Beide Seiten der letzten Gleichung mit n multipliziert, ergibt:

$$u_n = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}} \cdot U_n .$$

Läßt sich die Seite s_n des einem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks berechnen, so kann man auch die Seite S_n des umbeschriebenen Vielecks sowie seinen Umfang U_n berechnen.

Der Inhalt des Sehnenvielecks setzt sich aus der Summe der Flächeninhalte der Bestimmungsdreiecke zusammen. Er beträgt:

$$f_n = \frac{s_n \cdot \varrho}{2} + \frac{s_n \cdot \varrho}{2} + \frac{s_n \cdot \varrho}{2} + \cdots = n \cdot \frac{s_n}{2} \cdot \varrho = \frac{u_n}{2} \cdot \varrho .$$

Der Inhalt des Tangentenvieleckes setzt sich aus der Summe von n Flächeninhalten des Bestimmungsdreiecks A_1B_1M zusammen. Er beträgt:

$$F_n = \frac{S_n \cdot r}{2} + \frac{S_n \cdot r}{2} + \frac{S_n \cdot r}{2} + \cdots = n \cdot \frac{S_n}{2} r = \frac{U_n}{2} \cdot r$$

Beispiele

1) Wie groß muß man den Durchmesser des Rundstahles wählen, aus dem sich ein gleichseitiges Dreikant mit 10 cm Kantenlänge fräsen läßt?

Lösung

Nach Seite 125 ist $s_3 = r \cdot \sqrt{3}$ oder mit dem Durchmesser d ausgedrückt: $s_3 = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Hieraus bestimmt sich $d = \frac{2}{3} s_3 \sqrt{3} = \frac{20}{3}\sqrt{3} = 11{,}5$.

2) Bei einer Vierkantmutter beträgt die Schlüsselweite 17 mm. Wie groß ist das Eckenmaß?

Lösung

Die Schlüsselweite s ist gleich der Seite des regelmäßigen Viereckes s_4. Das Eckenmaß ist gleich dem Durchmesser d des umbeschriebenen Kreises. Es ist also: $d = s_4 \cdot \sqrt{2}$ oder mit den gegebenen Zahlen: Eckenmaß $= 17 \cdot \sqrt{2} = 24$ mm

3) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Eckenmaß e und der Schlüsselweite s einer Sechskantschraube (Bild 225)?

Lösung

Das Eckenmaß e ist nach Bild 225 gleich dem Durchmesser des Umkreises $d = 2r$; also $e = 2r$. Die Höhe in dem Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Sechsecks ist gleich der halben Schlüsselweite.

Das schraffiert gezeichnete halbe Bestimmungsdreieck ist nochmals vergrößert herausgezeichnet. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ergibt sich in ihm:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \left(\frac{e}{4}\right)^2$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{16} = \frac{3}{16}e^2;$$

$$s = \frac{e}{2}\sqrt{3} = 0{,}87\,e$$

$$e = 1{,}15\,s.$$

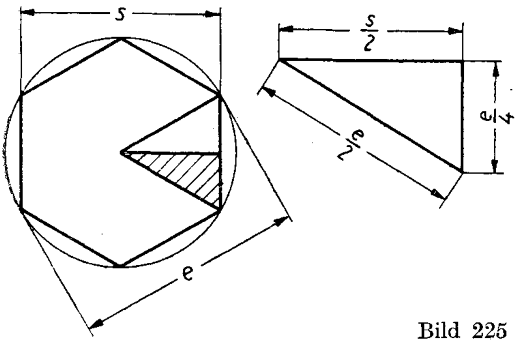


Bild 225

Die Zusammenstellung in der nachstehenden Tabelle über die Flächeninhalte und Radien der meist verwendeten regelmäßigen n-Ecke möge neben ihrer Bedeutung als leicht übersichtliche Nachschlagetabelle für den einen oder anderen Leser der Anreiz zum Lösen selbst gestellter Aufgaben sein.

Tabelle Regelmäßige Vielecke

	F	r	$h = \varrho$
Dreieck	$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$	$\frac{a}{3}\sqrt{3}$	$\frac{a}{6}\sqrt{3}$
Quadrat	a^2	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
Fünfeck	$\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$\frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
Sechseck	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$	a	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$
Achteck	$2a^2(\sqrt{2}+1)$	$\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}(\sqrt{2}+1)$
Zehneck	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
n-Eck	$\frac{a \cdot n}{2}\,r\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$	r	$r\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$

a = Vielecksseite
h = Höhe des Teildreiecks
r und ϱ = Radien des Um- und Inkreises
F = Flächeninhalt

K. Kreisberechnungen

1. Kreisumfang

Beschreibt man in und um einen Kreis mit bestimmtem Halbmesser regelmäßige Vielecke, deren Seitenzahlen immer größer und größer werden, so werden die Seiten dieser Vielecke immer kleiner. Bei einer ins Unendliche wachsenden Seitenzahl wird die Seitenlänge s_n sich dem Wert 0 unbegrenzt nähern. In der auf Seite 128 abgeleiteten Gleichung:

$$u_n = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}\, U_n$$

wird für diesen Grenzfall, wenn s_n gegen 0 geht, der Radikand gleich 1 und somit $u_n = U_n$; d. h. der Umfang des einem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks mit unendlich großwerdender Seitenzahl wird gleich dem Umfang des umbeschriebenen Vielecks mit unendlich großwerdender Seitenzahl. Aus den beiden Vielecken ist ein und dieselbe geometrische Figur, nämlich der Kreis, geworden. Wir fassen diese Erkenntnis in der nachfolgenden Erklärung zusammen:

Der Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich großer Seitenzahl aufgefaßt werden.

Berechnet man die Umfänge u_n bzw. U_n der ein- bzw. umbeschriebenen 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 ... usw. = Ecke für den Einheitskreis mit dem Radius $r = 1$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
u_6 &= 6{,}00000 &\quad\text{und}\quad U_6 &= 6{,}92920\\
u_{12} &= 6{,}21166 & U_{12} &= 6{,}43078\\
u_{24} &= 6{,}26526 & U_{24} &= 6{,}31932\\
u_{48} &= 6{,}27870 & U_{48} &= 6{,}29218\\
u_{96} &= 6{,}28206 & U_{96} &= 6{,}28543\\
u_{192} &= 6{,}28291 & U_{192} &= 6{,}28375\\
u_{384} &= 6{,}28311 & U_{384} &= 6{,}28333.
\end{aligned}$$

Der Mittelwert zu den beiden letzten Umfängen ist 6,28322.

Für einen beliebigen Kreis mit dem Radius r oder dem Durchmesser d erhält man

$$\begin{aligned}
u_{384} &= 6{,}28311 \cdot r &\quad\text{und}\quad U_{384} &= 6{,}28333 \cdot r\\
&= 3{,}14156 \cdot d & &= 3{,}14167 \cdot d.
\end{aligned}$$

Der Mittelwert beträgt: 3,1416 d.

Man bezeichnet diese vorstehend berechnete Zahl, mit der man den Kreisdurchmesser multiplizieren muß, um den Kreisumfang (-peripherie) zu erhalten, mit dem griechischen Buchstaben π (sprich: pi). π entspricht dem deutschen p, dem Anfangsbuchstaben von Peripherie. Die Zahl gibt an, wie oft der Durchmesser eines Kreises in seinem Umfang enthalten ist. Es beträgt der

$$\text{Kreisumfang: } U = \pi d = 2\pi r.$$

Die Zahl π

Über die größenmäßige Bestimmung der Zahl π ließe sich ein kleines mathematisches Geschichtswerk, angefangen bei den alten Ägyptern bis ins vorige Jahrhundert, schreiben. Große Mathematiker und unermüdliche Rechner bemühten sich zu allen Zeiten um eine möglichst genaue Festlegung der Zahl π. Nachstehend einige Näherungswerte und die Namen der Urheber hierfür:

$\pi \approx \frac{22}{7} = 3{,}1428$ (Archimedes, † 212 v. Chr.)

$\pi \approx 3\frac{17}{120} = 3{,}1417$ (Ptolemäus, 100—178 n. Chr.)

$\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}141592$ (Petrus Metius, 1571—1635)

$\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}1623$ (Brahmagupta).

Im 16. Jahrhundert bestimmte Ludolf van Ceulen (1540—1610) die Zahl π auf 35 Stellen. Ihm zu Ehren wird π die Ludolfsche Zahl genannt. Auf seinem Grabstein in der Peterskirche in Leiden waren die von ihm berechneten 35 Dezimalstellen von π angegeben. Später wurde π mittels Reihenentwicklung der höheren Mathematik von Vega auf 140, von Dahse auf 200 und von Richter in Elbing auf 500 Dezimalstellen berechnet. Einen lange Jahre bewunderten Stellenrekord stellte W. Shanks mit sogar 707 Stellen auf. Im Jahre 1950 wurde selbst dieser „Rekord" noch dadurch überboten, daß man mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen π auf 2400 Stellen nach dem Komma berechnete. Diese Rechnungen haben aber weder praktische noch theoretische Bedeutung.

In der Praxis setzt man für π mit ausreichender Genauigkeit den Wert: $\boxed{\pi = 3{,}142}$

Die Zahl π ist, wie der deutsche Mathematiker Lindemann im Jahre 1882 bewiesen hat, ein unendlicher, nicht periodischer Dezimalbruch. Sie gehört zu den irrationalen Zahlen (vgl. Band I: Irrationale Zahlen) und ist außerdem noch transzendent. Transzendente Zahlen, zu denen außer π beispielsweise auch die Basis e des natürlichen Logarithmensystems sowie log 2, sin 1 usw. gehören, stehen im Gegensatz zu den algebraischen Zahlen. Alle Zahlen, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung — dies sind Gleichungen, bei denen x nicht unter log, lg, ln, sin, cos, tg, ctg oder als Exponent vorkommt — mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ sind, nennt man algebraische Zahlen. Zu ihnen gehören alle rationalen, aber nicht alle irrationalen Zahlen. Beispielsweise ist die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ eine algebraische Gleichung und hat die Wurzeln $\pm\sqrt{2}$. Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ ist also eine algebraische Zahl. Für die irrationale Zahl π aber, die obendrein noch transzendent ist, läßt sich keine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten angeben, für die die Ludolfsche Zahl π eine Wurzel ist.

2. Kreisinhalt

Um den Flächeninhalt eines Kreises zu bestimmen, beschreibe man in den Kreis ein beliebiges regelmäßiges n-Eck mit der Seite s. Der Flächeninhalt eines Bestimmungsdreiecks beträgt $\frac{s \cdot h}{2}$. Der Flächeninhalt des gesamten n-Ecks ist bei n Seiten:

$$n \cdot \frac{s \cdot h}{2} = n \cdot s \cdot \frac{h}{2}.$$

Je größer die Eckenzahl des n-Eckes wird, um so größer wird die Anzahl der Bestimmungsdreiecke und um so genauer wird der Kreisinhalt erhalten. Dabei wird sich h immer mehr der Größe des Halbmessers r nähern und $n \cdot s$ wird immer genauer gleich dem Kreisumfang U. Im Grenzfall bei unendlicher Seitenzahl des n-Ecks wird der Inhalt des n-Eckes gleich dem Kreisinhalt. Es wird also: $n \cdot s \cdot \frac{h}{2} = U \cdot \frac{r}{2}$.

Setzt man für U den vorher bestimmten Wert

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

ein, so erhält man den Kreisinhalt

$$F = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2.$$

In der Technik pflegt man den Kreisinhalt durch den Durchmesser $d = 2r$ auszudrücken, weil sich der Durchmesser einfacher messen läßt als der Radius. Man hat also in die letzte Gleichung für $r = \frac{d}{2}$ zu setzen und erhält $F = \frac{\pi d^2}{4}$.

Zusammenstellung

Kreisumfang oder -peripherie: $U = 2\pi r = \pi \cdot d$

Kreisinhalt: $F = \pi r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

Quadratur des Kreises

Mit Zirkel und Lineal läßt sich weder der Kreisumfang genau auf eine gerade Linie übertragen, noch läßt sich der Kreisinhalt in ein Quadrat gleichen Flächeninhaltes umzeichnen. Die Aufgabe, mit Zirkel und Lineal eine Strecke von der Länge der Kreisperipherie zu konstruieren[1]), kann nicht genau, sondern nur angenähert gelöst werden. Eine solche Näherungskonstruktion, von der man im technischen Zeichnen gern Gebrauch macht, stammt von Kochansky (1685). Nachstehend ihre Beschreibung und Beweis.

Konstruktionsbeschreibung (Bild 226): Im Endpunkt A des Durchmessers $AB = 2r$ zieht man die Tangente an den Kreis. Man zeichnet die Sehne $AC = r$ und fällt auf sie von M aus das Lot, das die Tangente in D schneidet. Von D aus trägt man auf der Tangente den Radius r 3mal hintereinander bis E ab.

Die Verbindungslinie BE ist mit sehr großer Annäherung gleich dem halben Umfang des gezeichneten Kreises.

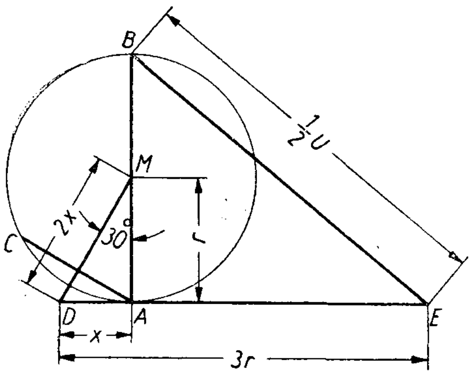


Bild 226

[1]) Die Bestimmung der Länge einer Kurve nennt man Rektifikation der Kurve.

Beweis

Da $\sphericalangle$ AMC $= 60°$ ist, ist $\sphericalangle$ AMD $= 30°$ und $\sphericalangle$ MDA $= 60°$. $\triangle$ DAM ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite DM $= 2x$. Es ist dann DA $= x$. Im $\triangle$ DAM ist nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$4x^2 - x^2 = r^2; \quad 3x^2 = r^2; \quad x = \frac{r}{3}\sqrt{3}.$$

Es ist ferner: $AE = 3r - x = 3r - \frac{r}{3}\sqrt{3}$. Im Dreieck AEB ergibt der Lehrsatz des Pythagoras:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4r^2 + \left(3r - \frac{r}{3}\sqrt{3}\right)^2$$

$$BE = \sqrt{4r^2 + 9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3}} = r\sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} =$$

$$BE = 3{,}1415r.$$

Aufgaben

174) Wieviel cm² beträgt die Querschnittsfläche F eines Rundstahles von 8 mm ⌀?

175) Der Durchflußquerschnitt F eines Rohres mit der lichten Weite d = 200 mm ist in m² zu berechnen!

176) Ein Glasrohr hat 1 cm² Querschnitt. Wie groß ist seine lichte Weite?

177) Mit wieviel kg Zugbelastung kann ein Kreisquerschnitt von
a) 10 mm ⌀ und
b) 20 mm ⌀ beansprucht werden, wenn 1 cm² 1600 kg tragen kann?

178) Eine Nut nach Bild 227 soll mit dem Nutenmeißel ausgemeißelt werden!
Wie groß ist der Spanquerschnitt?

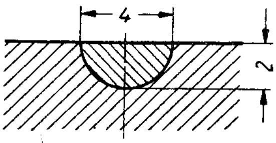


Bild 227

179) Wie groß ist der Umfang und die Fläche des Einheitskreises mit dem Radius r = 1?

180) Aus einem 12 m langen Faden wird
a) ein Quadrat,
b) ein gleichseitiges Dreieck,
c) ein regelmäßiges Sechseck und
d) ein Kreis gebildet. Für jede dieser 4 Flächen ist der Flächeninhalt zu berechnen. Welche Fläche hat den größten Flächeninhalt?

181) Wie breit muß das Blech für ein kreisrundes Ofenrohr geschnitten werden, wenn es 15 cm lichte Weite haben soll und für den Falz 3 cm zugegeben werden?

182) Wieviele Tonnen kann ein runder Pfeiler von 54 cm ⌀ tragen, wenn 8,5 kg auf 1 cm² zugelassen sind?

183) 4 Abflußrohre von je 10 cm lichter Weite münden in ein gemeinsames Rohr. Welchen Durchmesser muß dieses Rohr haben, damit sein Querschnitt ebenso groß wird wie die Querschnitte der 4 einmündenden Rohre zusammen?

184) Der Kolben eines Kraftfahrzeugmotors hat einen Durchmesser von
a) 50 mm und
b) 100 mm.
Wie groß ist seine Kolbenfläche in cm²? Wie verhalten sich die Ergebnisse von a) und b) zueinander?

185) Wievielmal so groß wird die Querschnittsfläche eines Rundstahles bei Verdoppelung des Durchmessers?

186) Wieviele cm² beträgt die schraffierte Fläche der nebenstehenden Vierkantmutter? (Bild 228).

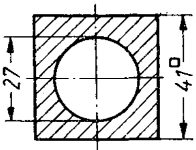


Bild 228

187) Wieviele dm² beträgt der Flächeninhalt F des gelochten Bleches für d = 2a = 60 mm? (Bild 229).

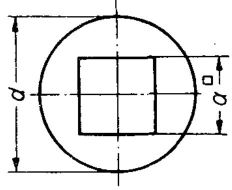


Bild 229

188) Wie drückt sich die Grundfläche F der nebenstehenden Ankerplatte durch L, R und d aus? (Bild 230).

189) Für eine Verbindungslasche ist nach Bild 230: L=350 mm; d=R=100 mm.
Wieviel cm² beträgt die Fläche der Lasche?

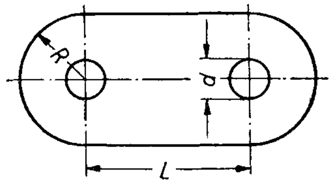


Bild 230

190) Wieviel cm² beträgt der Kernquerschnitt eines 10 mm starken Bolzens, auf den das metrische Gewinde M 10 geschnitten ist, dessen Kern ⌀ 7,916 mm beträgt?

191) Die in kg gemessene Kraft P der Kolbenstange eines Zylinders bestimmt man dadurch, daß man den in atü (Atmosphäre-Überdruck) gemessenen Dampfdruck p mit der in cm² berechneten Kolbenfläche F (= Zylinder-Querschnittsfläche) multipliziert. Also: $P = p \cdot F$. — Wie groß ist die Kolbenstangenkraft P bei 7 atü und dem Zylinderdurchmesser D = 250 mm?

192) Aus einem Blechstreifen von 50 mm Breite und 2 m Länge sollen Scheiben vom Durchmesser d = 50 mm gestanzt werden. Wieviel Stück lassen sich herausstanzen? Wie groß ist der Materialabfall in cm² und in %?

193) Aus einem Quadratstahl mit der Kantenlänge s soll die größtmögliche Welle gedreht werden. Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

194) Wie groß ist der Durchmesser d und die Querschnittsfläche F eines Baumes, dessen Umfang mit einem Bandmaß mit 2,23 m bestimmt wurde?

195) Wie lang ist der Weg s, den die Spitze eines 10 cm langen Minutenzeigers einer Uhr am Tage zurücklegt?

196) Auf eine Seiltrommel vom Durchmesser $D = 400$ mm sind 30 Windungen eines Seiles nebeneinander aufgewickelt. Wieviel m Seil sind dies?

197) Aus einer Welle vom Durchmesser d soll das größtmögliche Sechskant gefräst werden. Wie groß ist der Werkstoffabfall?

198) Der alte indische Näherungswert für $\pi = \sqrt{10}$ ist zeichnerisch mittels des pythagoreischen Lehrsatzes darzustellen!

199) Wie groß ist der Inhalt des Kreises mit d mm ⌀ im Vergleich zu dem des Quadrates mit der Seite $s = \frac{8}{9} d$? Man setze $d = 9$ mm!

200) Welchen Weg s hat ein Rad mit dem Außendurchmesser $d = 700$ mm nach $n = 1000$ Umdrehungen zurückgelegt?

201) Wieviel Umdrehungen hat ein Rad mit dem Außendurchmesser $d = 1$ m nach Zurücklegen eines Weges $s = 10$ km gemacht?

202) Wieviele Umdrehungen in der Minute macht das Rad eines Eisenbahnwagens mit dem Durchmesser 850 mm, wenn der Zug 80 km in der Stunde zurücklegt?

203) 2 Rohrleitungen mit dem Durchmesser d_1 und d_2 sollen durch eine einzige mit dem Durchmesser D ersetzt werden, deren Durchflußquerschnitt gleich dem der Summe der beiden ursprünglichen ist.
   a) Wie groß ist D auszuführen?
   b) Welchen geometrischen Lehrsatz benutzt man zur konstruktiven Ermittelung des Durchmessers D?
   c) Wie groß ist D, wenn $d_1 = 40$ mm und $d_2 = 30$ mm beträgt?

3. Kreisring

Beschreibt man um einen Punkt M zwei konzentrische Kreise mit den Radien R und r, so entsteht eine Kreisringfläche. Die im Bild 231 schraffiert gezeichnete Kreisringfläche wird als Differenz der Kreisflächen mit den Radien R und r berechnet.

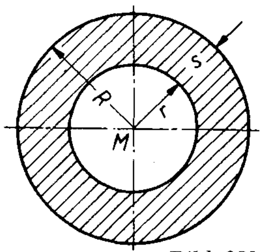


Bild 231

Kreisringfläche: $F = \pi R^2 - \pi r^2$

oder: $F = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$

Hierin ist $D = 2R$ und $d = 2r$.

Zu demselben Ergebnis kommt man auf folgende Weise:

Denkt man sich die Kreisringfläche gerade ausgestreckt, so entsteht ein Trapez mit der Höhe $(R - r)$ und den parallelen Seiten $2\pi R$ und $2\pi r$. Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist:

$$F = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)(R - r) = \pi(R + r)(R - r) = \pi R^2 - \pi r^2.$$

In der Technik benutzt man für den Flächeninhalt des Kreisringes gern folgende Gleichung:

$$\boxed{F = \pi \cdot d_m \cdot s}$$

Hierin ist s = Kreisringstärke $= (R - r)$ und d_m = mittlerer Kreisringdurchmesser $= \frac{D + d}{2}$.

Beweis

Durch Umformen der Gleichung für die Kreisringfläche

$F = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$ erhält man:

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(D + d)(D - d) = \pi \cdot \frac{D + d}{2} \cdot \frac{D - d}{2} = \pi \cdot d_m \cdot s.$$

Beispiele

1) Um einen Kreis mit dem Radius R ist ein Kreisring zu legen, der dem gegebenen Kreise flächengleich ist!

Lösung

Die Kreisringstärke möge x betragen. Der mittlere Kreisringdurchmesser beträgt dann $d_m = 2R + x$. Der Inhalt des Kreisringes beträgt:

$$F = \pi\, d_m\, s = \pi(2R + x)\, x.$$

Er soll gleich dem Inhalt der gegebenen Kreisfläche: πR^2 sein. Durch Auflösen der quadratischen Gleichung

$$\pi R^2 = \pi(2R + x)\, x$$

erhält man: $R^2 = (2R + x)\, x$; $x^2 + 2Rx - R^2 = 0$;

$$x = R(\sqrt{2} - 1) = R\sqrt{2} - R.$$

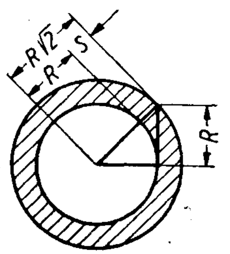


Bild 232

Zeichnerische Darstellung:

Der innere Kreis (Bild 232) mit dem Radius R ist gegeben. Die schraffierte Kreisringfläche ist gleich der Fläche des inneren Kreises.

2) Wie groß ist der Querschnitt des Rohres mit der lichten Weite $d = 250$ mm und der Wandstärke $s = 10$ mm?

Lösung

Der mittlere Kreisringdurchmesser ist:

$$d_m = d + s = (250 + 10) = 260 \text{ mm}$$

und die Fläche $F = \pi d_m \cdot s = \pi \cdot 260 \cdot 10 = 8164 \text{ mm}^2 = 81{,}6 \text{ cm}^2$.

3) Der äußere Umfang eines Kreisringes ist um 10 mm größer als der innere. Wie groß ist die Kreisringstärke?

Lösung

x sei die Kreisringstärke, dann ist $D = d + 2x$. Diesen Wert setzt man ein in die Gleichung: $\pi D - \pi d = 10$ und erhält $\pi d + 2\pi x - \pi d = 10$ oder $2\pi x = 10$.

Man erhält $x = \frac{10}{2\pi} = 1{,}6$ mm.

4) Eine Stahlwelle 100 mm ⌀ ist konzentrisch so ausgebohrt, daß die ursprüngliche Querschnittsfläche um 16% geschwächt ist. Wie groß ist der innere Bohrungsdurchmesser?

Lösung

Querschnitt der Vollwelle: $F = \frac{\pi \cdot 100^2}{4}$.

Der Bohrungsdurchmesser sei x. Es soll sein: $\frac{\pi x^2}{4} = 0{,}16 \cdot \frac{\pi\, 100^2}{4}$.

Man erhält hieraus: $x = 0{,}4 \cdot 100 = 40$ mm.

4. Kreisausschnitt oder -sektor

Ein Kreisausschnitt, auch Kreissektor genannt, entsteht, wenn man aus einer Kreisfläche durch 2 radiale Schnitte AM und BM einen Teil herausschneidet. Diese Teilfläche ist begrenzt durch 2 Radien, die einen bestimmten Zentriwinkel α einschließen, und durch einen Teil AB des Kreisumfanges. Dieser Teil des Kreisumfanges heißt Kreisbogen. Er wird im folgenden mit b bezeichnet (Bild 233).

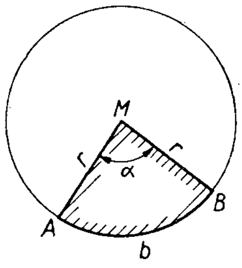


Bild 233

Schneidet man aus einem Kreise mit dem Radius r einen Ausschnitt heraus, bei dem die Radien aufeinander senkrecht stehen, so erhält man einen sogenannten Quadranten. Bei ihm beträgt der Zentriwinkel 90°. Die Länge des Bogens ist gleich dem 4. Teil der Kreisperipherie, also: $\frac{\pi r}{2}$. Zum Zentriwinkel 180° gehört der halbe Kreisumfang als Bogen.

Allgemein findet man die Bogenlänge eines Kreisausschnittes mit dem Zentriwinkel α nach dem Dreisatz:

Zum Zentriwinkel 360° gehört die Bogenlänge: $2\pi r$,

Zum Zentriwinkel 1° gehört die Bogenlänge: $\frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{\pi r}{180^\circ}$,

Zum Zentriwinkel α° gehört die Bogenlänge: $\frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$.

Bogenlänge $\boxed{b = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}}$

Aufgaben

204) Wie groß ist beim Einheitskreise ($r = 1$) der Bogen zum Zentriwinkel
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°?

205) Welcher Zentriwinkel gehört zu dem Bogen
a) $b = r$ b) $b = 2r$ c) $b = \frac{1}{4}r$,
wenn $r = 3$ cm ist?

206) Der Korbbogen (Bild 234) setzt sich aus 4 Viertelkreisen mit den Mittelpunkten A, B, C und D zusammen, die die Ecken des Quadrates ACBD bilden. Wie groß ist der Umfang des Korbbogens für $r = 10$ mm?

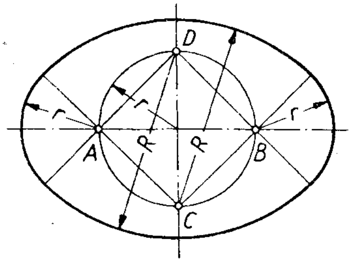


Bild 234

207) Wie groß sind die Umfänge der Rosetten (Bild 235a und b).

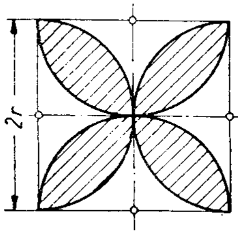
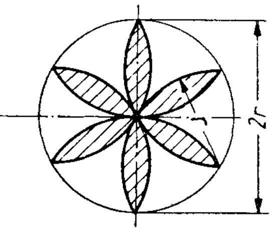


Bild 235a



b

208) Wie lang ist die Abwickelung der ersten 4 Gänge der in der Zeichnung aus Kreisbogen zusammengesetzten Spiralfeder (Bild 236) $r = 5$ mm. Ganghöhe: $h = r$.

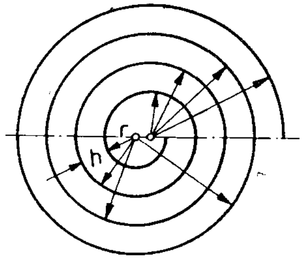


Bild 236

209) Ein Zahnrad mit $z = 60$ Zähnen hat den Teilkreisdurchmesser $d_0 = 360$ mm. Wie groß ist die Teilung t und der Modul m?

Anleitung: Unter der Teilung eines Zahnrades versteht man den auf dem Teilkreisbogen gemessenen Abstand von Zahnmitte zu Zahnmitte. Der Modul ist $m = \frac{d_0}{z}$.

210) Die in nachstehender Tabelle fehlenden Zahlenwerte sind zu berechnen.

		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Zähnezahl des Zahnrades .	z	40			20	36
Teilkreisdurchmesser . . .	d_0		210	500		90
Modul	m		7		12	
Teilung	t	4π		10π		

211) Wie groß ist die gestreckte Länge L des Ausgleichrohres Bild 237?

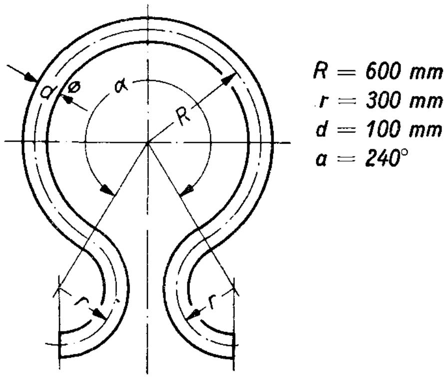


Bild 237

Inhalt des Kreissektors

Der Flächeninhalt des Kreissektors mit dem Zentriwinkel α verhält sich zur ganzen Kreisfläche wie $\alpha°$ zu 360°. Als Gleichung geschrieben:

$$f : \pi r^2 = \alpha° : 360°.$$

Hieraus ergibt sich die

Sektorfläche $\boxed{f = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}}$

oder, indem man die Bogenlänge $b = \frac{\pi r \alpha}{180}$ in diese Gleichung einsetzt:

$$\boxed{f = \frac{b \cdot r}{2}}$$

Aufgaben

212) Wie groß ist die Kreissektorfläche f und die Bogenlänge b, wenn gegeben ist der Kreisdurchmesser d $= 20$ cm und der Zentriwinkel $\alpha = 36°$?

213) Wie groß sind für einen Flansch mit ellipsenähnlicher Form (Bild 238) die Radien r und R. Die Achsen 2a und 2b sowie sein Umfang U und Inhalt F, wenn die Länge s gegeben ist?

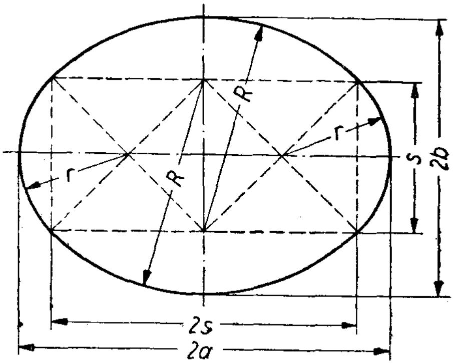


Bild 238

214) Wie groß ist a) der Umfang und b) der Inhalt des Ovales, dessen Konstruktion aus dem Bilde 239 erkennbar ist?
2 r $=$ 20 mm.

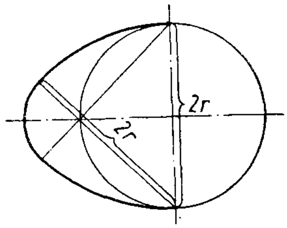


Bild 239

215) Um jede Ecke eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite r ist ein Kreisbogen durch die beiden anderen Ecken beschrieben (Bild 240). Wie groß ist der Umfang U und der Inhalt F des entstehenden Bogendreiecks?

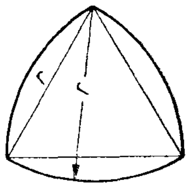


Bild 240

Anmerkung: Das Bogendreieck möge der senkrechte Achsschnitt eines Stabes sein, der trotz seiner 3 vorhandenen Ecken als Walze verwendet werden kann. Bei einer Umdrehung dieser Walze legt das Fördergut den Weg U zurück, der gleich dem zurückgelegten Weg bei einer kreisrunden Walze vom Durchmesser r ist.

216) Wie groß sind der Umfang U und der Querschnitt F des Kanalquerschnittes (Bild 241), wenn der Radius gleich der Seite a des gezeichneten gleichseitigen Dreiecks ist?

a $=$ 600 mm

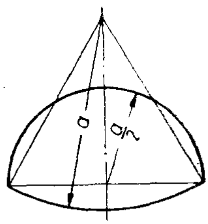


Bild 241

217) Der ellipsenähnliche Flansch (Bild 242) setzt sich aus je 2 Kreisbogen mit den Radien r und R zusammen ($R = 2r$).

Es sind die beiden Achsen 2a und 2b sowie der Umfang U und der Inhalt F aus dem Radius r zu berechnen!

$r = 100$ mm

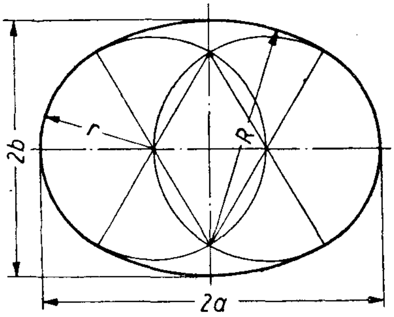


Bild 242

218) Wie groß ist der Flächeninhalt F des mit 4 Bohrungen versehenen Flansches (Bild 243)?

$r = 10$ mm

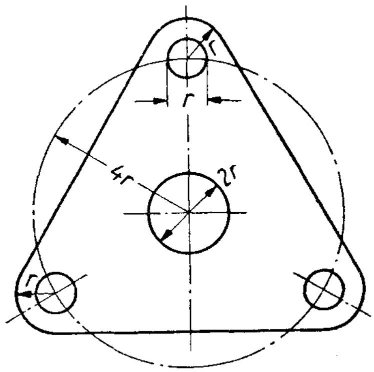


Bild 243

219) Wie groß ist der Umfang U und der Inhalt F der Stopfbüchsenbrille (Bild 244), die sich aus 4 Geraden und je 2 gleichgroßen Kreisbogen zusammensetzt?

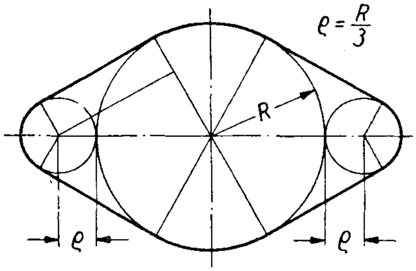


Bild 244

220) Man zeichne einen Kreis mit dem Radius R und in ihm einen waagerechten Durchmesser, den man in 3 gleiche Teile teilt. Über dem ersten Drittel dieses Durchmessers konstruiere man einen Halbkreis nach oben und über dem Rest des Durchmessers einen Halbkreis nach unten, ferner über dem letzten Drittel des Durchmessers nach unten und über dem Rest des Durchmessers einen Halbkreis nach oben. Wie groß ist der Umfang und Inhalt der 3 Figuren, in die dadurch der Kreis zerlegt wird?

221) Um welchen Betrag unterscheiden sich die Umfänge der beiden Kreise bei allen Kreisringen mit derselben Wandstärke s?

222) Wie groß ist der Radius ϱ des Kreises, den man dem Kreissektor mit dem Zentriwinkel 60° und dem Radius r einbeschreiben kann?

5. Kreisabschnitt oder -segment

Unter einem Kreisabschnitt, auch Kreissegment genannt, versteht man den Teil der Kreisfläche, der durch eine Sehne s und durch den zu dieser Sehne gehörenden Bogen b umschlossen wird. Im Bild 245 ist die Fläche des Kreissegmentes schraffiert gezeichnet. Man bestimmt sie als Differenz der Fläche des Kreissektors, der von den Radien AM und BM und dem Bogen b umschlossen wird, minus dem Inhalt des Dreiecks AMB;

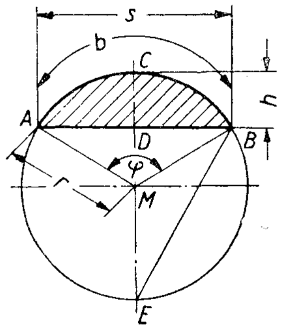


Bild 245

Kreisabschnitt = Kreisausschnitt — Dreieck.

$$ABC = AMBC - AMB$$

$$F = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s}{2} \cdot (r - h)$$

$$\boxed{F = \frac{r \cdot (b - s) + s \cdot h}{2}}$$

In einer weiteren Gleichung für den Inhalt des Kreissegmentes wird dieser in Abhängigkeit von der Größe des Zentriwinkels φ ausgedrückt. Diese Gleichung lautet:

$$\boxed{F = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{180°} - \sin\varphi\right).}$$

Auf ihre Ableitung muß hier noch wegen Fehlens der grundlegenden erst im Teil III vermittelten Kenntnisse der Trigonometrie verzichtet werden.

In der Praxis verwendet man zur Bestimmung der Bogenlänge b, der Sehnenlänge s, der Bogen- oder Pfeilhöhe h sowie des Inhaltes des Segmentes F für den Einheitskreis mit dem Radius r = 1 Tabellen, die man in der Mehrzahl technischer Taschenbücher findet[1]).

Nachstehend noch einige Ableitungen für die Sehne s, die Bogenhöhe h und den Radius r:

S e h n e s: Für das Dreieck DMB ergibt sich nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$DB^2 = MB^2 - DM^2 \text{ oder } \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - (r - h)^2 = h\,(2\,r - h)$$

$$\text{oder} \quad s = 2\sqrt{h\,(2\,r - h)}.$$

[1]) Hilfsbuch für Betrieb und Konstruktion.

Bogenhöhe h: Nach dem Lehrsatz des Pythagoras für das Dreieck DMB ist:

$$MD^2 = MB^2 - DB^2;$$

$$(r - h)^2 = r^2 - \frac{s^2}{4};$$

$$r^2 - 2rh + h^2 = r^2 - \frac{s^2}{4};$$

$$h^2 - 2rh + \frac{s^2}{4} = 0;$$

$$h = r \pm \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = r \pm \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}.$$

Das $+$-Zeichen gilt für $h > r$;
Das $-$-Zeichen gilt für $h < r$.

Radius r: Die 2. Gleichung der vorhergehenden Ableitung nach r aufgelöst, ergibt:

$$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}.$$

Zum Abschluß dieses Kapitels möge folgender Hinweis auf die

Flächeninhaltsbestimmung beliebig krummlinig begrenzter Figuren

gegeben werden.

1) Verwendung von Millimeterpapier.
Die Figur wird auf Millimeterpapier aufgetragen und die Anzahl der umschlossenen mm^2 (bzw. cm^2) festgestellt.

2) Wägung.
Die Figur wird auf Pappe aufgezeichnet, ausgeschnitten und gewogen. Aus dem Gewicht kann man den Flächeninhalt bestimmen, wenn man vorher ein Stück der verwendeten Pappe mit bekanntem Inhalt (etwa 10 cm^2) ausgewogen hat, wobei vorausgesetzt ist, daß die Pappe überall gleich stark ist.

3) Trapezmethode.
Die Fläche wird in eine Anzahl Parallelstreifen zerlegt, die man annähernd als Trapeze ansehen kann. Mißt man jeweils Mittellinie und Höhe, so läßt sich der Inhalt berechnen.

Aufgaben

223) Wie groß ist der Kreisabschnitt des Einheitsquadranten? ($r = 1$) Wieviel % von der Quadrantenfläche beträgt er?

224) Ein zylindrischer Schwimmer vom Durchmesser $d = 400$ mm taucht bis zu $\frac{3}{4}$ seines Durchmessers in Wasser ein. Im Achsschnitt ragt also aus dem Wasser ein Kreissegment heraus. Von ihm sind zu berechnen:

a) Bogenhöhe h, b) Sehne s und c) Flächeninhalt F!

225) Eine Welle mit dem Durchmesser d ist in Längsrichtung abgefräst. Der Querschnitt der abgefrästen Welle ist ein Kreisabschnitt mit der Bogenhöhe $h = \frac{1}{4}d$. Wie groß sind für diesen Abschnitt:

a) die Länge der Sehne s,
b) der zu s gehörende Zentriwinkel,
c) der Inhalt des abgefrästen Segmentes?

226) Aus einer Welle vom Durchmesser d ist ein Vierkantstahl größtmöglicher Schlüsselweite zu hobeln. Wie groß sind:

a) die Schlüsselweite,
b) die Querschnittsfläche des Vierkantstahles,
c) der Materialabfall?

227) Einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seite c ist der Kreis mit dem Mittelpunkt M eingeschrieben. Er berührt die 3 Seiten in den Punkten D, E und F. Wie groß sind:

a) die Höhe des gegebenen gleichseitigen Dreieckes,
b) der Radius des Inkreises,
c) der Flächeninhalt des Inkreises,
d) der Inhalt des Dreiecks DEF,
e) der Inhalt der 3 Kreisabschnitte, die durch die Seiten des Dreiecks DEF vom Inkreise abgeschnitten werden?

228) Die fehlenden Zahlenwerte der zum Bild 246 gehörenden Maßtabelle sind zu ergänzen!

	r	α	φ	b
a)	10	90°		5π
b)	20		36°	4π
c)	30	120°	60°	
d)		108°	72°	6π
e)	45		40°	10π

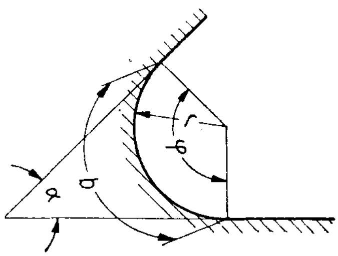


Bild 246

229) Um jede Ecke eines gleichseitigen Dreiecks sind mit der Dreiecksseite s Kreisbogen von einer Ecke zur anderen geschlagen. Welchen Inhalt hat die durch die 3 Kreisbogen entstehende Figur?

230) Von 2 gleichgroßen Kreisen liegt der Mittelpunkt des einen auf der Peripherie des anderen.

Wie groß ist das gemeinsame Flächenstück?

L. Schwerpunktsberechnungen

Weder Linien, noch Flächen besitzen eine räumliche Ausdehnung. Sie haben somit auch keine Schwere. Man kann also eigentlich nicht von einem Schwerpunkt von Linien oder Flächen sprechen. Wir stellen uns aber zur Verdeutlichung eine Linie als einen sehr dünnen Draht vor, dessen Masse gleichmäßig über seine ganze Länge verteilt ist. Ebenso kann man eine Fläche als eine sehr dünne Blechplatte mit gleichmäßig verteilter Masse ansehen. So betrachtet, ist der Schwerpunkt der Punkt, in dem man einen solchen Draht bzw. eine solche Fläche unterstützen müßte, damit sie sich in jeder Lage im Gleichgewicht befinden.

Nachstehend werden die für die technische Praxis wichtigsten Schwerpunktslagen angegeben und, soweit erforderlich, etwas eingehender behandelt:

1) Der *Schwerpunkt einer Strecke* ist ihr Mittelpunkt.

2) Der *Schwerpunkt eines Dreiecks* ist der Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden.

Denkt man sich ein Dreieck ABC durch sehr viele parallel zu Seite AB gezogene Geraden zerlegt, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Parallelen auf ihren Mitten. Die Verbindungslinie dieser Mittelpunkte ist eine Schwerlinie des Dreiecks. Zerlegt man das Dreieck aber durch parallele Geraden zur Seite BC, so liegen in diesem Falle die Mittelpunkte auf der Schwerlinie von der Ecke A aus. Wie im Schwerliniensatze auf Seite 106 gezeigt wurde, schneiden sich die 3 Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1. Bezeichnet man die Höhe eines Dreiecks von irgendeiner Ecke auf die gegenüberliegende Seite mit h, so liegt der Schwerpunkt auf der im Abstande $\frac{h}{3}$ zur Grundlinie gezogenen Parallelen, wie man mittels des 2. Strahlensatzes leicht zeigen kann.

3) Der *Schwerpunkt regelmäßiger Vielecke* ist der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises.

4) Der *Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks* wird zeichnerisch dadurch bestimmt, daß man es durch eine Diagonale in 2 Dreiecke zerlegt und deren Schwerpunkte S_1 und S_2 bestimmt. Der Schwerpunkt S des Vierecks liegt auf der Verbindungslinie $S_1 S_2$. Dieselbe Konstruktion wiederholt man mittels der anderen Diagonale. Man findet die Schwerpunkte S_3 und S_4. Auf $S_3 S_4$ liegt ebenfalls der Schwerpunkt S. Somit ist der Schnittpunkt von $S_1 S_2$ mit $S_3 S_4$ der Schwerpunkt der Gesamtfläche. Nach dieser Konstruktion hat man also 4 einzelne Schwerpunkte zu bestimmen.

Einfacher ist die folgende Konstruktion: Im Bild 247 ist E der Diagonalenschnittpunkt. Man trägt ED von B aus auf BD ab und erhält F. F verbindet man mit A und C. Der Schwerpunkt S des Dreiecks FCA ist der gesuchte Schwerpunkt S des Vierecks.

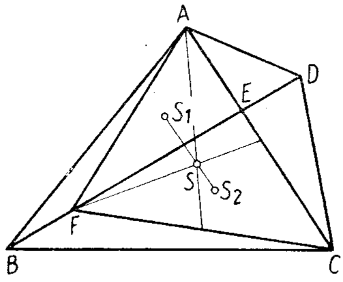


Bild 247

Beweis

FEA hat den Schwerpunkt S_1
EFC „ „ „ S_2

S liegt somit auf S_1S_2. S_1 ist aber auch der Schwerpunkt des Dreiecks BDA, da die Dreiecke BFA und EDA flächengleich sind. Ebenso ist S_2 der Schwerpunkt des Dreiecks DBC.

5) Der *Schwerpunkt der Trapezfläche*: Zur Berechnung der Schwerpunktslage irgendeiner beliebigen Fläche wird in der Mechanik der Satz von den statischen Momenten verwendet. Unter dem **statischen Moment** einer Fläche, bezogen auf eine beliebige Achse, versteht man das Produkt aus dem Inhalt der Fläche mal dem Abstand des Flächenschwerpunktes von der Bezugsachse. Entsprechend versteht man unter dem statischen Moment einer Kurve in bezug auf eine Achse das Produkt aus der Länge der Kurve und dem Abstand des Kurvenschwerpunktes von der Achse.

Der Satz von den statischen Momenten lautet:

Das statische Moment einer aus mehreren Einzelflächen (-kurven) zusammengesetzten Fläche (Kurve) ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelflächen (-kurven).

Es seien a und b die beiden parallelen Trapezseiten und h die Höhe des Trapezes. Dann beträgt der Abstand y des Trapezschwerpunktes von der Seite a:

$$\boxed{y = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}}$$

Beweis

Die Trapezfläche ABCD (Bild 248) sei durch die zu CB gezogene Parallele DE in das Dreieck AED und das Parallelogramm EBCD zerlegt. Der Schwerpunkt des Dreiecks AED ist von der Grundlinie $\frac{h}{3}$ entfernt, der des Parallelogramms EBCD aber $\frac{h}{2}$. Es beträgt das statische Moment

des Dreiecks AED: $M_1 = \frac{AE \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{3} = AE \cdot \frac{h^2}{6} = (a-b) \cdot \frac{h^2}{6}$

des Parallelogramms EBCD: $M_2 = EB \cdot h \cdot \frac{h}{2} = EB \cdot \frac{h^2}{2} = b \cdot \frac{h^2}{2}$

des Trapezes ABCD: $$M = \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot y,$$

wobei y der gesuchte Schwerpunktsabstand von der Grundlinie sei. Nach dem Satz von den statischen Momenten beträgt: $M = M_1 + M_2$. Es ist also:

$$\frac{a+b}{2} h \cdot y = (a-b)\frac{h^2}{6} + b \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{6}(a+2b)$$

oder:

$$y = \frac{\frac{h^2}{6}(a+2b)}{\frac{a+b}{2} \cdot h} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}.$$

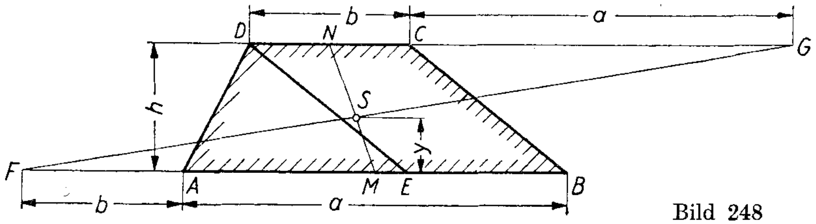


Bild 248

Auf dieser soeben durchgeführten Berechnung beruht der Beweis für die nachstehende **Schwerpunktskonstruktion** der Praxis:

Man verlängert die Trapezseite a um b und die Seite b um a nach entgegengesetzten Richtungen und zieht die Gerade FG. Diese schneidet die Verbindungslinie MN der Mitten der beiden parallelen Seiten im Schwerpunkt S.

Beweis

Nach dem Strahlensatz für die beiden Strahlen FG und MN mit dem Strahlenpunkt S gilt:

$$\frac{SN}{SM} = \frac{NG}{MF} = \frac{a + \frac{b}{2}}{\frac{a}{2} + b}$$

oder nach den Regeln der korrespondierenden Addition:

$$\frac{SN + SM}{SM} = \frac{\left(a + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{2} + b\right)}{\frac{a}{2} + b} = \frac{3(a+b)}{a+2b}$$

Es verhält sich ferner:

$$\frac{SN + SM}{SM} = \frac{h}{y}$$

Somit ist:

$$\frac{h}{y} = \frac{3(a+b)}{a+2b} \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$$

6) Berechnung der *Schwerpunkte beliebiger Vielecke*

Ein Vieleck mit n-Ecken wird von einer Ecke aus in (n — 2) Dreiecke mit den Flächeninhalten f_1, f_2, f_3 usw. zerlegt, deren Schwerpunkte S_1, S_2, S_3 usw. zeichnerisch bestimmt werden. Darauf wählt man 2 beliebige zueinander senkrechte Achsen X und Y. Die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3 haben von der X-Achse die Abstände y_1, y_2, y_3 usw., von der Y-Achse aber x_1, x_2, x_3 usw. Der Satz von den statischen Momenten lautet für diese so unterteilte n-Ecksfläche in Buchstaben:

$$F \cdot y_0 = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \text{usw.}$$

Hierin ist y_0 der Abstand des Gesamtschwerpunktes S von der X-Achse und $F = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$

Also:

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \cdots}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots}.$$

Ebenso findet man den Abstand x_0 des Schwerpunktes S von der Y-Achse:

$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdots}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots}.$$

7) Der *Schwerpunkt eines Kreises* ist sein Mittelpunkt.

8) Der *Schwerpunkt eines Kreisbogens*

Der Kreisbogen AB (Bild 249) sei in sehr viele kleine Bogen b_1, b_2, b_3 usw. zerlegt, die man im Grenzfall als kleine gerade Linien betrachten kann. Es ist dann $AB = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ usw. Ist S der Schwerpunkt des Kreisbogens (er liegt nicht auf dem Bogen, sondern außerhalb von ihm), so ist das Moment des gesamten Bogens AB bezogen auf eine Achse x:

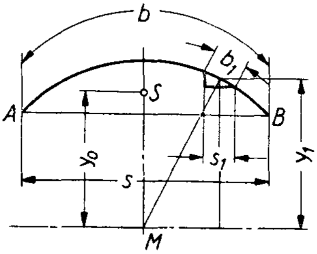


Bild 249

$$M = AB \cdot y_0 = (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) \cdot y_0.$$

Das Moment eines Teilbogenteilchens b_1 ist $b_1 \cdot y_1$. Die Summe der Momente der einzelnen Bogenteilchen beträgt:

$$M = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + \cdots$$

Ähnliche Dreiecke ergeben: $b_1 : s_1 = r : y_1$ oder $b_1 y_1 = s_1 r$. Dies in die letzte Gleichung für das Moment M eingesetzt, ergibt:

$$M = s_1 r + s_2 r + s_3 r + \cdots = r \cdot (s_1 + s_2 + s_3 + \cdots) = r \cdot s.$$

Durch Gleichsetzen des statischen Momentes der Gesamtfläche und der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächen erhält man

$$(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots)\, y_0 = r \cdot s \quad \text{oder} \quad y_0 = \frac{r \cdot s}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots}.$$

Für $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = b$ gesetzt, erhält man den Schwerpunktsabstand vom Mittelpunkt:

$$\boxed{y_0 = \frac{r \cdot s}{b} = \frac{\textbf{Radius} \times \textbf{Sehne}}{\textbf{Bogen}}}$$

Wird die Sehne s zum Durchmesser 2 r und der Bogen b zum Umfang des Halbkreises $\pi \cdot r$, so erhält man als

Schwerpunkt des Halbkreises: $y_0 = \frac{r \cdot 2r}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}$.

$$\boxed{y_0 = \frac{2r}{\pi}}$$

9) Der *Schwerpunkt eines Kreissektors*

Man denke sich den gesamten Sektor MBA (Bild 250) in sehr viele Sektorteilchen MBC zerlegt, die im Grenzfall als kleine Dreiecke zu betrachten sind. Ihre Schwerpunkte sind sämtlich $^2/_3$ r vom Mittelpunkt M entfernt. Die Schwerpunkte aller Sektorteilchen liegen also auf dem Bogen DE vom Halbmesser $^2/_3$ r. Schwerpunkt S dieses Bogens ist der Schwerpunkt des gesamten Sektors und hat von M den Abstand:

$$y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\text{Sehne DE}}{\text{Bogen DE}} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\text{Sehne AB}}{\text{Bogen AB}}$$

Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche wird, da die Sehne AB in den Durchmesser 2r und der Bogen AB in den halben Umfang πr übergeht:

$$y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{2r}{\pi r} = \frac{4r}{3\pi}$$

Schwerpunkt der Halbkreisfläche:

$$\boxed{y_0 = \frac{4r}{3\pi}}$$

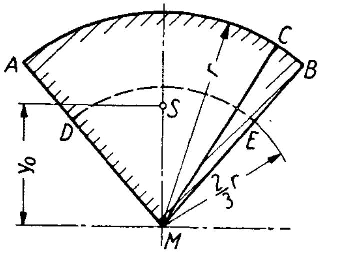


Bild 250

Teil II

Die Geometrie des Raumes oder die Stereometrie

A. Die stereometrischen Grundbegriffe und die verschiedenen Körper

Die Stereometrie befaßt sich mit der räumlichen Form oder Gestalt der Körper. Unter einem Körper versteht man einen allseitig begrenzten Teil des Raumes. Die Begrenzungsflächen können ebene oder krumme Flächen sein. Man unterscheidet somit zwischen

1) ebenflächig-begrenzten oder kurz ebenflächigen Körpern (auch Polyeder oder Vielflache genannt) und
2) krummflächig-begrenzten oder kurz krummflächigen Körpern.

1. Ebenflächige Körper

Die ebenflächigen Körper werden, wie schon der Name sagt, von ebenen Flächen begrenzt. Die Summe aller Begrenzungsflächen nennt man die *Oberfläche.* Die Schnittlinien der Flächen heißen *Kanten.* Diese wiederum schneiden sich in den *Ecken* der Körper. Eine Körperecke heißt 3, 4 oder n-seitig, je nachdem in ihr 3, 4 ... oder n Flächen zusammenstoßen. Für die Anzahl der Ecken, der Flächen und der Kanten irgendeines beliebigen Vielflaches ohne einspringende Körperecken (man nennt es auch konvexes Vielflach) gilt der von Euler bewiesene Satz: Eckenzahl + Flächenzahl = Kantenzahl + 2. In Worten lautet der **Eulersche Satz:**

Bei jedem ebenflächigen konvexen Körper ist die Summe aller Ecken (e) vermehrt um die Zahl der Flächen (f) um 2 größer als die Zahl der Kanten (k).

$$e + f = k + 2$$

Beispiel

Beim Würfel beträgt: $e = 8$, $f = 6$, $k = 12$; also: $8 + 6 = 12 + 2$.
Die bekanntesten ebenflächigen Körper sind: Prismen, Pyramiden, Pyramidenstumpfe, Obeliske, Prismatoide und die Platonischen Körper.

a) Prismen

Ein Prisma wird begrenzt durch eine Grund- und eine Deckfläche, die beide einander kongruent sind und in parallelen Ebenen liegen, sowie durch n Parallelogramme oder Rechtecke, wobei n die Anzahl der Ecken der Grundfläche ist. Stehen die Schnittkanten der Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche, so hat man ein **gerades Prisma**; bilden sie einen von 90^0 verschiedenen Winkel mit der Grundfläche, sind aber parallel zueinander, so liegt ein **schiefes Prisma** vor. Jeder Querschnitt durch ein Prisma parallel zur Grund- bzw. Deckfläche ist kongruent der Grundfläche. Jeder Längsschnitt parallel einer Seitenkante ist ein Parallelogramm, beim geraden Prisma ein Rechteck. Die Prismen teilt man nach folgenden Gesichtspunkten ein:

α) **n-seitige Prismen** sind Körper, die von 2 kongruenten n-Ecken als Grundflächen und n Parallelogrammen als Seitenflächen begrenzt werden. Die Grundkanten sind die Seiten der Grundflächen. Die Seitenkanten sind die anderen Seiten der Seitenflächen. Die Seitenkanten sind einander parallel.

β) **Gerade Prismen** sind Prismen, deren Seitenflächen Rechtecke sind Die Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche.

γ) **Regelmäßige Prismen** sind gerade Prismen, deren Grundflächen regelmäßige Vielecke sind.

Beispiel

Sechskantstahl (Bild 271 Seite 160).

δ) **Die Quader** (auch Rechtkante genannt) sind Körper, die von 6 Rechtecksflächen begrenzt werden. Quader sind vierseitige gerade Prismen. Je 2 einander gegenüberliegende Rechtecke sind kongruent.

Beispiel

Ziegelsteine (Bild 267 Seite 159).

ε) **Die Würfel** (auch Kuben oder Hexaeder genannt) sind Spezialquader, bei denen alle Rechtecke untereinander flächengleich und deckungsgleich sind. Würfel werden also von 6 Quadraten eingeschlossen (Bild 268 Seite 159).

ζ) **Schief abgeschnittene Prismen** entstehen aus geraden Prismen, wenn man deren Enden durch Ebenen abschneidet, die nicht zur Grundfläche parallel sind. Beim schief abgeschnittenen Prisma sind die Grundflächen nicht kongruent. Die Seitenflächen sind keine Parallelogramme, sondern Trapeze.

b) Pyramiden

Eine Pyramide ist ein Körper, der von einem n-Eck als Grundfläche und von n-Dreiecken als Seitenflächen begrenzt wird. Die Seiten der Grundfläche heißen **Grundkanten**, die anderen Seiten sind die **Seitenkanten**. Der Schnittpunkt der Seitenkanten heißt die **Spitze der Pyramide**. Das von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Lot heißt die **Höhe der Pyramide**. Man unterscheidet: regelmäßige Pyramiden und Doppelpyramiden.

α) **Regelmäßige Pyramiden** sind Pyramiden, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und deren Spitze senkrecht über dem gemeinsamen Mittelpunkt des Um- und Inkreises der Grundfläche liegt. — Die Mantelfläche einer regelmäßigen Pyramide setzt sich aus kongruenten gleichschenkligen Dreiecken zusammen (Bild 278 Seite 166). Steht die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche auf der Grundfläche nicht senkrecht, so ist die Pyramide schief.

β) **Doppelpyramiden** entstehen dadurch, daß man 2 regelmäßige Pyramiden mit ihren kongruenten Grundflächen aneinanderlegt. Eine Doppelpyramide hat also 2 Spitzen, deren Verbindungslinie senkrecht auf der zusammengelegten Grundfläche liegt (Bild 279 Seite 166).

c) Pyramidenstumpfe

Die Pyramidenstumpfe, auch abgestumpfte Pyramiden genannt, entstehen dadurch, daß man von einer Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene ein Stück abschneidet. Das abgeschnittene Stück ist eine kleine Pyramide, die man Ergänzungspyramide nennt. Ein Pyramidenstumpf wird begrenzt von 2 in parallelen Ebenen liegenden ähnlichen Vielecken, der Grund- und der Deckfläche, sowie von Trapezen als Seitenflächen. Die Verlängerungen der Seitenkanten schneiden sich in einem Punkte, der außerhalb des Pyramidenstumpfes liegt (Bild 281 Seite 168).

d) Obeliske oder Pontone

Diese sind bei oberflächlicher Betrachtung bisweilen von Pyramidenstumpfen kaum zu unterscheiden. Sie werden durch 2 unähnliche Rechtecke als Endflächen begrenzt. Die Endflächen liegen parallel zueinander.

Die Rechteckseiten liegen parallel zueinander. Verlängert man die 4 Seitenkanten, so schneiden sie sich nicht in einem Punkte, wie dies bei der rechteckigen vierseitigen abgestumpften Pyramide der Fall ist. Sie bilden zwei Paare von sich schneidenden Geraden. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte ist eine Kante. (Bild 282 Seite 170).

Der Obelisk ist ein abgestumpfter Keil mit rechteckiger Grundfläche (Bild 282 Seite 170).

e) Prismatoide oder Prismoide

Prismoide sind Körper, die von 2 parallelen Endflächen und dreieckigen Seitenflächen begrenzt werden. Unter ihren Höhen versteht man den Abstand der Endflächen (Bild 280 Seite 167).

f) Die 5 Platonischen Körper[1]

Im Gegensatz zu der Geometrie der Ebene, bei der es unendlich viele regelmäßige Flächen gibt, besitzt die Stereometrie nur 5 regelmäßige Körper, die sogenannten Platonischen Körper. Ein Körper heißt regelmäßig, wenn seine sämtlichen Begrenzungsflächen einander kongruente regelmäßige n-Ecke sind und wenn in jeder Ecke gleich viele Seitenflächen zusammenstoßen. Die Bilder 251 a ··· e zeigen die 5 Platonischen Körper mit ihren charakteristischen Kennzeichen.

[1]) Griechischer Philosoph Platon: 429 bis 348 v. Chr. in Athen.

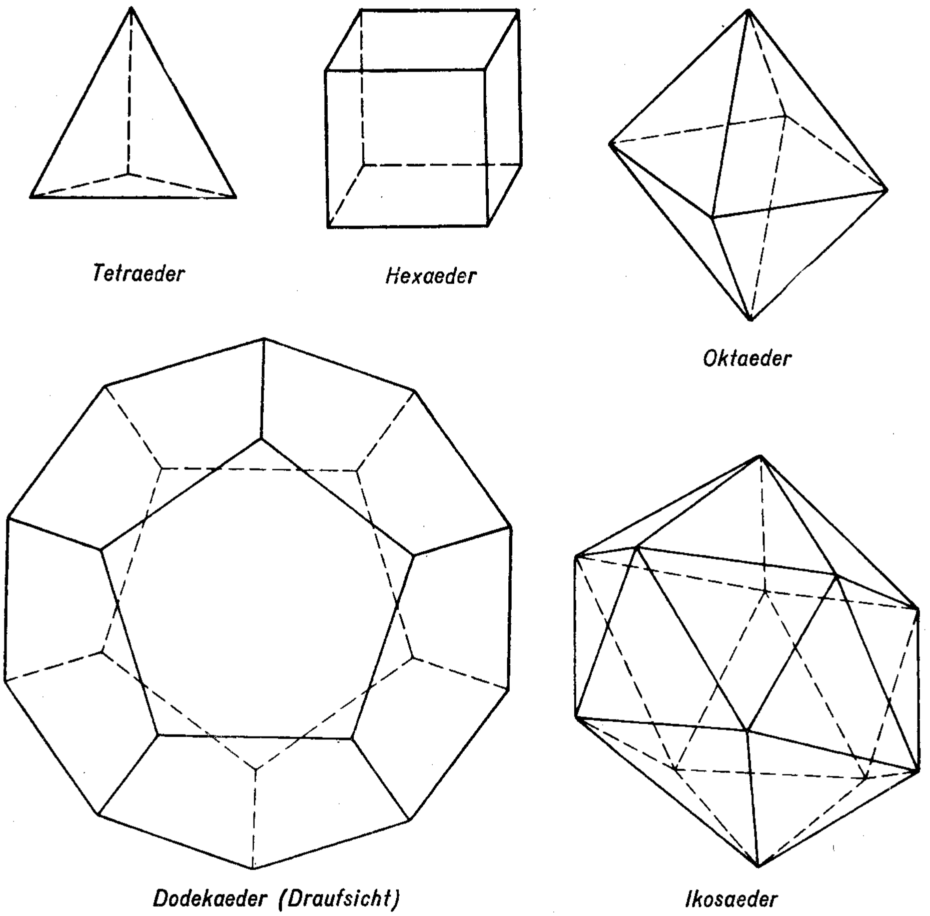


Bild 251 a ... e: Die 5 Platonischen Körper

Bild	Name des Platonischen Körpers		Begrenzungsflächen sind regelmäßige	Anzahl der Ecken	Anzahl der Flächen	Anzahl der Kanten
a	Vierflach	Tetraeder	Dreiecke	4	4	6
b	Sechsflach (Würfel)	Hexaeder (Kubus)	Quadrate	8	6	12
c	Achtflach	Oktaeder	Dreiecke	6	8	12
d	Zwölfflach	Dodekaeder	Fünfecke	20	12	30
e	Zwanzigflach	Ikosaeder	Dreiecke	12	20	30

$$\boxed{E + F = K + 2}$$

2. Krummflächige Körper

Für die Technik sind von den krummflächigen Körpern besonders die von Bedeutung, die durch Drehung von Flächen um eine Achse entstehen. Man nennt sie Drehkörper (oder Rotationskörper).

a) Zylinder oder Walze

Durch Drehen einer Rechtecksfläche ABCD (Bild 252) um eine Seite, z. B. AD, entsteht ein gerader Kreiszylinder. Er wird begrenzt durch 2 ebene parallele kongruente Kreisflächen, die *Grundflächen* mit den Radien

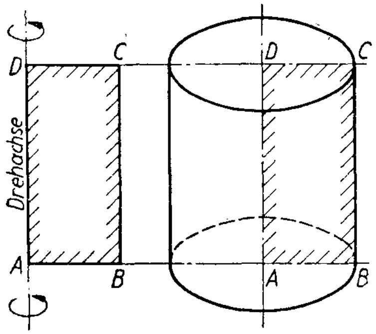


Bild 252

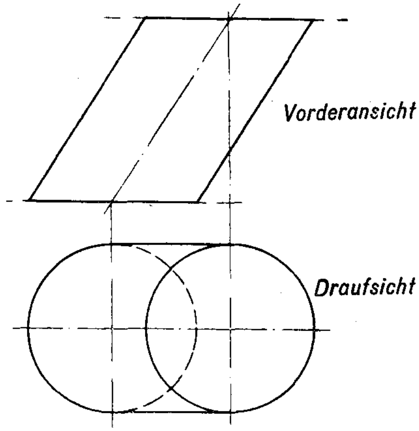


Bild 253
Schiefer Kreiszylinder

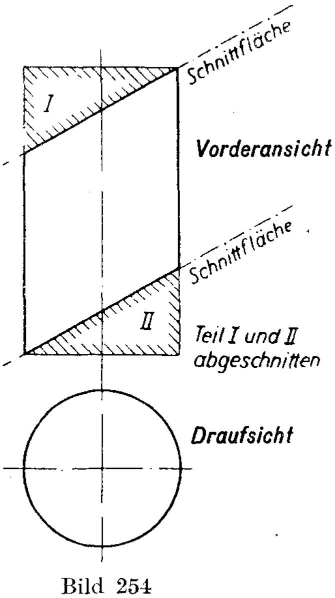


Bild 254
Gerader Kreiszylinder schräg geschnitten

AB und CD, und die krumme Zylinderfläche — auch Mantelfläche oder kurz *Mantel* genannt —, die durch die sich drehende Seite BC beschrieben wird. Die Verbindungslinie AD der Mittelpunkte der Grundflächen heißt die *Achse* des Kreiszylinders. Steht die Achse des Zylinders senkrecht auf den beiden Grundflächen, so heißt der Zylinder *gerade.* — Ein Kreiszylinder heißt *schief,* wenn die Verbindungslinie der Grundflächenmittelpunkte nicht auf den Grundflächen senkrecht steht. Ein solcher schiefer Kreiszylinder kann nicht durch Drehung entstehen (Bild 253). Eine zwischen den Grundflächen liegende und auf diesen senkrecht stehende Strecke heißt Höhe.

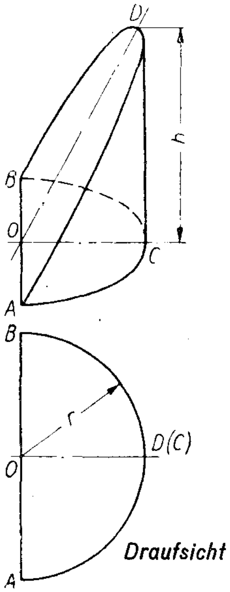


Bild 255

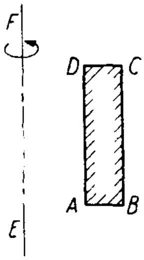


Bild 256

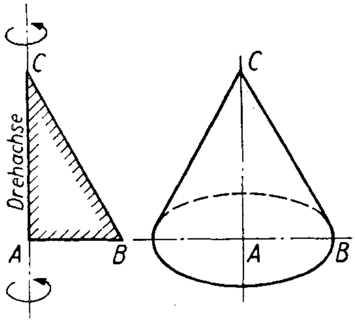


Bild 257

Werden von einem geraden Kreiszylinder durch 2 schräg zur Achse gelegene Schnittflächen die beiden Teile I und II abgeschnitten, so sind die beiden Grundflächen des übrig bleibenden Restkörpers keine Kreise, sondern Ellipsen (Bild 254).

b) Zylinderhuf oder Zylinderstutz

Legt man durch einen schief abgeschnittenen Kreiszylinder den zur Achse senkrechten Schnitt durch die Mitte der schiefen Endflächen (ADB ist die Hälfte der Schnittellipse), so heißt der oberhalb bzw. unterhalb des senkrechten Schnittes (Halbkreis ACB) verbleibende Teil ein Zylinderhuf oder Zylinderstutz (Bild 255).

c) Hohlzylinder oder Rohr

Durch Drehung einer Rechtecksfläche ABCD (Bild 256) um eine zu einer Rechtecksseite parallele außerhalb des Rechteckes liegende Achse EF entsteht ein Hohlzylinder. Man kann sich aber auch einen Hohlzylinder dadurch entstanden denken, daß man einen geraden Kreiszylinder zentrisch ausbohrt.

d) Kegel

Durch Drehen eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (Bild 257) um eine seiner beiden Katheten, z. B. AC, entsteht ein gerader Kreiskegel. Seine Begrenzungsflächen sind: die ebene Kreisfläche oder Grundfläche mit dem Radius AB und die krumme Kegelfläche, auch Mantelfläche oder kurz *Mantel* genannt. Die Verbindungslinie der Spitze C mit der Mitte A der

Grundfläche heißt die *Achse* des Kegels. C ist die *Kegelspitze.* Jede Verbindungslinie der Kegelspitze mit irgendeinem Punkte der Kreisperipherie des Grundkreises heißt eine Seiten- oder *Mantellinie,* z. B. CB. Ein Kegel heißt *gerade,* wenn die Verbindungslinie der Kegelspitze mit dem Grundkreismittelpunkt auf der Grundfläche senkrecht steht. Steht die Verbindungslinie der Kegelspitze mit dem Grundkreismittelpunkt auf der Grundfläche nicht senkrecht, so hat man einen *schiefen Kreiskegel* (Bild 258).

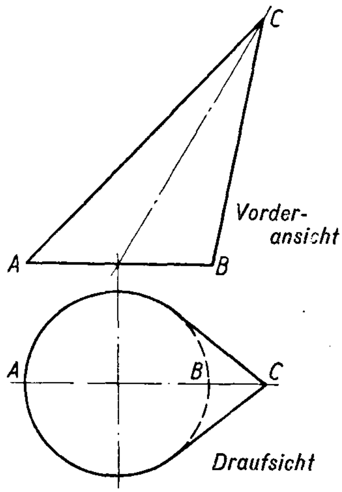


Bild 258

Ein schiefer Kreiskegel kann nicht durch Rotation (= Drehung) eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete entstehen. Unter der Höhe eines Kreiskegels versteht man das von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Lot.

e) Kegelstumpf

Ein Kegelstumpf (Bild 259) entsteht aus einem Kreiskegel dadurch, daß man von diesem durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt ein Stück abschneidet.

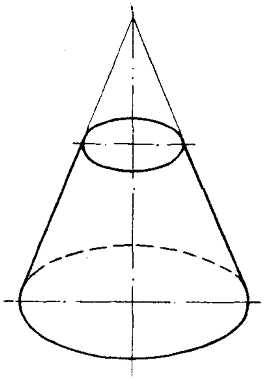


Bild 259

Ein Kegelstumpf wird begrenzt durch 2 parallele Kreisflächen als Grundflächen und eine krumme Fläche, die Kegelmantelfläche oder kurz den Mantel. Die Höhe des Kegelstumpfes ist der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen voneinander.

Der abgeschnittene Kegel heißt der Ergänzungskegel.

f) Kugel

Dreht sich eine Halbkreisfläche (Bild 260) um ihren Durchmesser, so entsteht eine Kugel. Der Durchmesser, um den sich der Halbkreis dreht, heißt die *Achse* der Kugel. Alle Punkte der Halbkreisperipherie beschreiben bei der Drehung Kreise, deren Ebenen parallel sind und auf der Achse senkrecht stehen; sie heißen Parallelkreise oder auch *Breitenkreise*, eine Bezeichnung, die in der Geographie üblich ist. Der größte dieser Breitenkreise heißt der *Äquator*. Wie man auch immer eine Kugel durch einen ebenen Schnitt schneiden mag, als Schnittfläche entsteht jedes Mal eine Kreisfläche. Eine Hohlkugel entsteht dadurch, daß man die Hälfte eines Kreisringes um seinen Durchmesser sich drehen läßt (Bild 261).

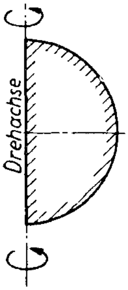


Bild 260

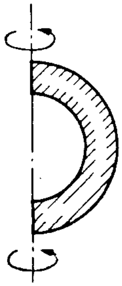


Bild 261

g) Kugelabschnitt oder Kugelsegment

Ein Kugelabschnitt oder -segment ist der Teil einer Kugel, der durch eine sie schneidende Ebene abgeschnitten wird (Bild 262). Der krummflächige Teil seiner Oberfläche heißt *Kugelkappe* oder *Kalotte*. Legt man den ebenen Schnitt durch den Kugelmittelpunkt, so entstehen 2 Halbkugeln. Durch jeden beliebigen anderen Schnitt einer Kugel entstehen 2 verschieden große Segmente und 2 Kalotten. Die Höhe des Kugelsegments bzw. der Kalotte ist der zwischen Schnittebene und Kugelfläche gelegene Teil des Kugelradius, der sich vom Kugelmittelpunkt durch den Mittelpunkt des Schnittkreises ziehen läßt.

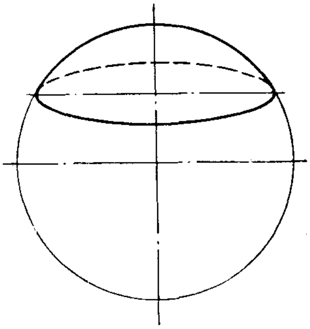


Bild 262

h) Kugelausschnitt oder Kugelsektor

Ein Kugelausschnitt (Bild 263) ist der Raumteil einer Kugel, der durch eine Kalotte und den durch ihren Kugelkreis und den Kugelmittelpunkt bestimmten Kegelmantel begrenzt wird oder anders betrachtet: Ein Kugelausschnitt entsteht durch Drehung eines Kreisausschnittes um den einen seiner beiden ihn begrenzenden Radien (Bild 264).

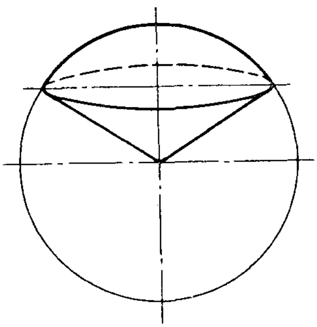


Bild 263

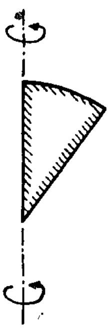


Bild 264

i) Kugelschicht

Eine Kugelschicht (Bild 265) ist der von 2 parallelen Schnittebenen begrenzte Teil einer Kugel. Der krummflächige Teil der Kugelschichtoberfläche heißt die Kugelzone.

Die Höhe einer Kugelschicht ist der zwischen den Mittelpunkten der Schnittkreise gelegene Teil des Kugelradius.

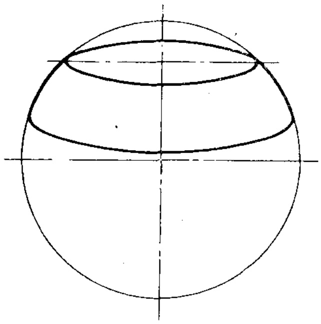


Bild 265

k) Ring

Ein Ring (Bild 266) entsteht durch Drehung einer Kreisfläche um eine außerhalb der Kreisfläche gelegene Achse. Schneidet man einen Ring durch einen zur Rotationsachse senkrechten Schnitt, so entsteht eine Kreisringfläche.

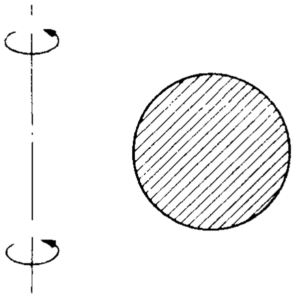


Bild 266

B. Berechnung der Rauminhalte und Oberflächen

Der Rauminhalt oder das Volumen eines Körpers wird als Vielfaches der Raumeinheit angegeben. Als *Raumeinheit* wird der Würfel, dessen Kante die Längeneinheit hat, benutzt.

Der	Würfel	mit	der	Kante	1 m	hat	das	Volumen	1 m^3
,,	,,	,,	,,	,,	1 dm	,,	,,	,,	1 dm^3
,,	,,	,,	,,	,,	1 cm	,,	,,	,,	1 cm^3
,,	,,	,,	,,	,,	1 mm	,,	,,	,,	1 mm^3

Diese 4 Raumeinheiten hängen wie folgt zusammen:

$$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$$
$$= 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3$$
$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000000\ mm^3$$
$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$$

Für Gewichtsberechnungen von Körpern bestimmt man das Körpervolumen in Raumeinheiten und multipliziert dieses mit der Wichte.

$$\boxed{\text{Gewicht} = \text{Volumen} \times \text{Wichte}}$$

Die Wichte (früher: spezifisches Gewicht) hat die Dimension:

$$t/m^3 \quad \text{oder} \quad kg/dm^3 \quad \text{oder} \quad g/cm^3 \quad \text{oder} \quad mg/mm^3$$

Multipliziert man die Wichte mit dem

Körpervolumen	in	m^3,	so	erhält	man	das	Gewicht	in t
,,	,,	dm^3,	,,	,,	,,	,,	,,	,, kg
,,	,,	cm^3,	,,	,,	,,	,,	,,	,, g
,,	,,	mm^3,	,,	,,	,,	,,	,,	,, mg

1. Ebenflächige Körper

Quader

Auf seine Grundfläche (Bild 267) mit den Seiten a und b kann man (ab) Würfel mit der Kante 1 dicht nebeneinander legen. Ist die 3. Seite des Quaders, die auf der Grundfläche (ab) senkrecht steht, c lang, so kann man c-mal übereinander (ab) Würfel legen. Im ganzen ist also der Quader aus (abc) Einheitswürfeln gebildet; d. h. es beträgt das

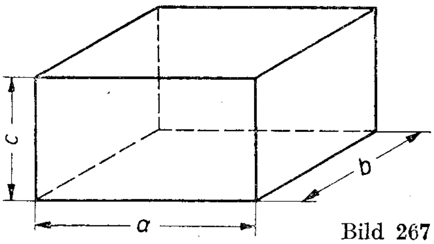


Bild 267

$$\boxed{\textbf{Quadervolumen: } V = a \cdot b \cdot c}$$

wobei a, b, c die 3 in einer Ecke zusammenstoßenden, aufeinander senkrecht stehenden Kanten sind. Die *Oberfläche* des Quaders besteht aus 6 Rechtecken. Die Grund- und Deckfläche betragen je (ab) Flächeneinheiten; zusammen also 2ab Flächeneinheiten. Die 4 anderen Flächen betragen $2ac + 2bc$ Flächeneinheiten.

Es beträgt somit die **Quaderoberfläche:** $\boxed{O = 2\,(ab + ac + bc)}$

Sind die 3 Kanten des Quaders gleich lang, ist also $a = b = c$ (Bild 268), so erhält man den Würfel mit der Kantenlänge a. Unter Benutzung der für den Quader berechneten Formeln findet man das

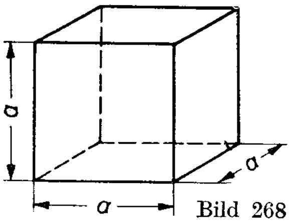


Bild 268

Würfelvolumen: $\boxed{V = a^3}$

und die Oberfläche des Würfels:

$$O = 2\,(aa + aa + aa) = 2 \cdot 3a^2 = 6a^2$$

Würfeloberfläche: $\boxed{O = 6a^2}$

Von Cavalieri (1598 bis 1647 Professor der Mathematik in Bologna) stammt der folgende nach ihm benannte Lehrsatz:

Cavalierische Grundsatz

Liegen Körper zwischen parallelen Ebenen und sind ihre Querschnitte sowohl in diesen beiden Ebenen, als auch in jeder beliebigen, ihnen parallelen Ebene gleich groß, so haben die Körper gleichen Rauminhalt.

Denkt man sich die rechteckige Deckfläche eines Quaders (Bild 269) mit dem Inhalt (ab) parallel zur Grundfläche und parallel zu sich selbst verschoben, so werden die 4 Verbindungskanten der Ecken der Deckfläche mit denen der Grundfläche nicht mehr auf der Grundfläche senkrecht stehen, sondern einen von 90^0 verschiedenen Winkel bilden. Die bisherige Kante c wird nunmehr länger; erhalten aber bleibt die Länge der Höhe, da die Grund- und Deckfläche in parallelen Ebenen liegen. Nach dem Cavalierischen Grundsatz ist das Volumen dieses neu erhaltenen Körpers gleich $V = (ab) \cdot h$, wobei (ab) der Flächeninhalt der Grundfläche und h der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen voneinander ist. Siehe Bild 269!

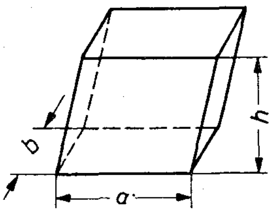


Bild 269

Verwandelt man nun noch die beiden rechteckigen Grund- und Deckflächen des bisherigen Quaders in flächengleiche Parallelogramme (Bild 270), so erhält man ein schiefes 4-seitiges Prisma. Jeder Querschnitt durch dieses Prisma parallel zur Grund- bzw. Deckfläche ist kongruent der Grundfläche und hat den Flächeninhalt $ab = g$. Das Volumen des schiefen vierseitigen Prismas ist: $V = g \cdot h =$ Grundfläche $\times$ Höhe. In der letzten Gleichung ist h der senkrechte Abstand der Grundfläche von der Deckfläche. Aus dem Cavalierischen Grundsatz ergibt sich allgemein das

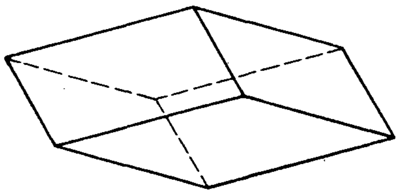


Bild 270

Prismenvolumen:

$$\boxed{V = \text{Grundfläche mal Höhe} = g \cdot h}$$

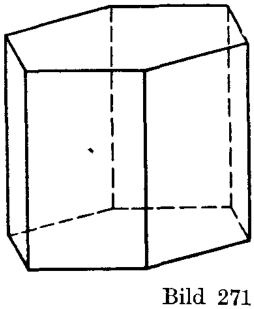


Bild 271

Das regelmäßige 6-seitige Prisma (Bild 271) hat das Volumen $V = g \cdot h$; hierin ist g der Inhalt des regelmäßigen Sechsecks, das die Grundfläche bildet, während h der Länge des sechsseitigen Prismas entspricht.

Das Volumen eines *schiefen Prismas* (Bild 272) leitet sich ohne Zuhilfenahme des Cavalierischen Grundsatzes folgendermaßen ab:

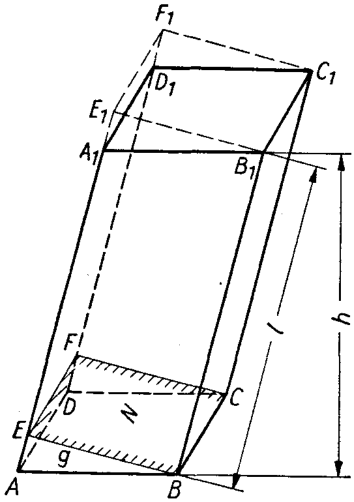


Bild 272

In der nebenstehenden Skizze hat das schiefe Prisma

die Grundfläche ABCD und
die Deckfläche $A_1B_1C_1D_1$.

Es bedeutet ferner:

g = Grundfläche
= Deckfläche,
h = Höhe des schiefen Prismas,
l = Seitenlänge des schiefen Prismas,
N = Die zur Seite l senkrechte Schnittfläche.

Schneidet man von dem gegebenen schiefen Prisma in senkrechter Richtung zur Kante l unten das keilförmige Stück mit den Ecken A, B, C, D, E und F ab und setzt es oben an die Deckfläche $A_1B_1C_1D_1$, so erhält man das gerade Prisma mit der Grundfläche EBCF und der Deckfläche $E_1B_1C_1F_1$. Sein Volumen beträgt: $V = N \cdot l$.

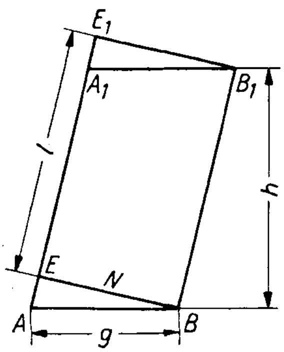


Bild 273

Da sich aber, wie man aus der verkleinerten Vorderansicht (Bild 273) des Prismas ersieht, h zu l wie EB zu AB wie N zu g verhält $(h : l = N : g)$, so ist $N \cdot l = g \cdot h$.

Somit ist das Volumen des schiefen Prismas:

$$V = g \cdot h$$

in Worten:

> Das Volumen eines jeden schiefen Prismas ist gleich dem Produkt aus seiner Grundfläche und der Höhe.

Das *schief abgeschnittene Prisma*

Ein gerades Prisma mit der Grundfläche N sei an seinen beiden Enden schief abgeschnitten (Bild 274). Denkt man sich dieses schief abgeschnittene Prisma oberhalb des Normalschnittes EF in sehr viele dünne Prismen mit den Grundflächen n_1, n_2 und n_3 usw. und den Höhen h_1, h_2 und h_3 usw. zerlegt, so ist das Volumen des oberhalb des Normalschnittes EB gelegenen Prismenteiles:

$$V = n_1 \cdot h_1 + n_2 \cdot h_2 + n_3 \cdot h_3 + \cdots$$

Die Normalschnittfläche N setzt sich aus der Summe aller Flächenteilchen n zusammen. Ebenso besteht die Schnittfläche DC aus der Summe aller kleinen schrägen Schnittflächenteilchen $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \cdots$. Da $n : s = N : S$, ist $n = s \cdot \frac{N}{S}$. Hiermit stellt sich das Volumen V dar:

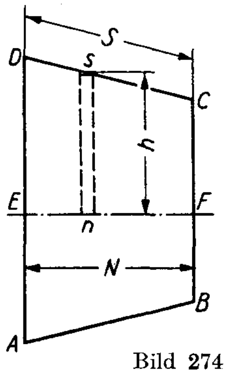


Bild 274

$$V = \frac{N}{S} \cdot (s_1 h_1 + s_2 h_2 + s_3 h_3 + s_4 h_4 + \cdots).$$

Der Klammerinhalt dieser Gleichung ist gleich der Summe der statischen Momente der Flächenteilchen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ bezogen auf die Achse EF; nach dem Satz von den statischen Momenten (Seite 146) ist die Summe der statischen Momente der Einzelflächen gleich dem statischen Moment der Gesamtfläche S. Es ist also: $S h_0 = s_1 h_1 + s_2 h_2 + s_3 h_3 \ldots$, wobei h_0 der Abstand des Schwerpunktes der schiefen Schnittfläche S ist. Man erhält nunmehr als Volumen: $V = \frac{N}{S} S h_0 = N h_0$.

Die vorstehende Überlegung kann man ebenso auf den unterhalb des Normalschnittes EF gelegenen schief abgeschnittenen Prismenteil durchführen und erhält dann folgenden Satz:

Das Volumen eines schief abgeschnittenen geraden Prismas ist das Produkt aus der Normalschnittfläche und dem Abstand der Schwerpunkte der Endflächen.

Anwendungsbeispiele

1) Wie groß ist das Volumen des **schief abgeschnittenen 3-seitigen Prismas** (Bild 275)?

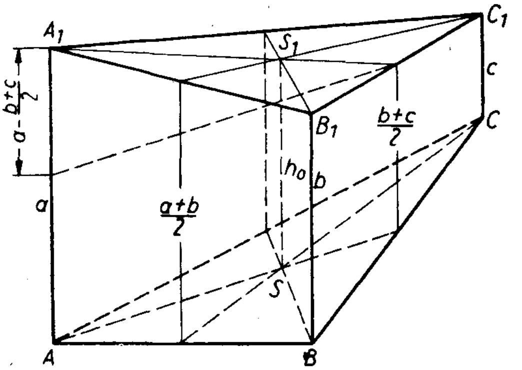


Bild 275

Die auf der Grundfläche ABC senkrecht stehenden Kanten sind a, b und c. Der Schwerpunkt der zu den Kanten schief liegenden Deckfläche $A_1B_1C_1$ ist S_1. Der Schwerpunkt der Grundfläche ABC ist S. Aus der nebenstehenden Zeichnung ersieht man die Konstruktion der Lage der Schwerpunkte S und S_1 (vgl. Seite 145). Die Seitenflächen des schief abgeschnittenen 3-seitigen Prismas sind Trapeze. Unter Benutzung der Mittelliniensätze für das Trapez (Seite 45) bestimmt man, wie aus den Längeneintragungen der Zeichnung ersichtlich ist:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{b+c}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left[a - \frac{b+c}{2}\right] \\ &= \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{6} - \frac{c}{6} \\ &= \frac{1}{3}(a+b+c) \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Inhalt des zu h_0 senkrecht gelegenen Grundflächendreieckes ABC mit G, so ist das gesuchte Volumen:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}(a + b + c) \cdot G}$$

2) Wie groß ist das Volumen des **Keiles** (Bild 276)?

Der untenstehend abgebildete Keil ist ein beidseitig schief abgeschnittenes 3-seitiges Prisma. Der Schnitt senkrecht zur Grundfläche ist ein Dreieck mit der Grundseite b und der Höhe h und hat den Inhalt $G = \frac{1}{2} b \cdot h$. Nach der im Beispiel 1) abgeleiteten Volumengleichung ist:

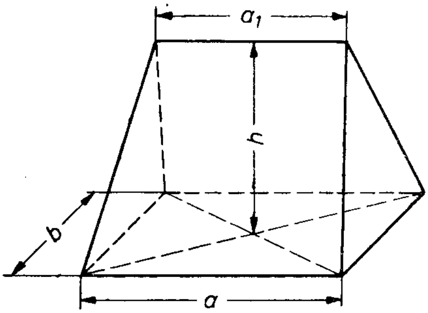


Bild 276

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(a + a + a_1) \cdot G \\ &= \frac{1}{3}(2a + a_1) \cdot \frac{1}{2} b \cdot h \\ &= \mathbf{V = \frac{1}{6} b \cdot h\,(2a + a_1)} \end{aligned}$$

Pyramiden

Bevor wir uns der Volumenbestimmung der Pyramiden zuwenden, wollen wir uns mit 3 Hilfssätzen befassen:

a) Die Schnittfigur, die durch eine zur Grundfläche parallele Ebene aus einer Pyramide herausgeschnitten wird, ist der Grundfläche ähnlich.

Beweis

Nach Bild 281 auf Seite 168 ist zur Grundfläche ABCD der gezeichneten Pyramide mit der Spitze S ein paralleler Schnitt gelegt. Die Schnittfigur ist $A_1B_1C_1D_1$. Ihre Seiten sind parallel zu den entsprechenden Seiten der Grundfläche. Nach dem 2. Strahlensatz (Seite 102) verhält sich somit:

$$\begin{array}{ll} AB : A_1B_1 = BS : B_1S & \text{und} \\ \underline{BC : B_1C_1 = BS : B_1S} & \\ AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 & \text{Ebenso erhält man:} \end{array}$$

$$BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 = DA : D_1A_1,$$

d. h. die entsprechenden Seiten der Schnittfigur und der Grundfläche stehen in demselben Verhältnis zueinander. Die Schnittfigur ist der Grundfläche ähnlich.

b) Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so verhalten sich Querschnittsfläche und Grundfläche zueinander wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.

Beweis

Wie auf Seite 109 bewiesen wurde, verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate gleichliegender Stücke. Desgleichen verhalten sich aber auch die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke wie die Quadrate gleichliegender Stücke, da sich die einander ähnlichen Vielecke aus der Summe ähnlicher Dreiecke zusammensetzen. Nach Bild 281 auf Seite 168 verhält sich also:

$$F : F_1 = a^2 : b^2.$$

Durch 2malige Anwendung der Strahlensätze findet man:

$$a : b = (h + x) : x$$

Hiermit ergibt sich:

$$F : F_1 = (h + x)^2 : x^2 \qquad \text{w. z. b. w.}$$

c) Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe haben dasselbe Volumen.

Beweis

Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe erfüllen die im Cavalierischen Grundsatz (Seite 160) für die Rauminhaltsgleichheit gestellten Voraussetzungen.

1. Sie liegen zwischen parallelen Ebenen, da sie dieselbe Höhe haben.
2. Ihre Grundflächen sind gleich groß. Ihre Deckflächen sind zu einem Punkt, nämlich der Spitze S, zusammengeschrumpft und haben somit den Flächeninhalt 0.
3. Die beiden Querschnitte, die durch Parallelschnitte zur Grundfläche der beiden Pyramiden im Abstand h entstehen, stehen nach dem vorhergehenden Hilfssatz b) zu ihren Grundflächen in folgendem Verhältnis:

$$F_1 : F = x^2 : (h + x)^2 \text{ und}$$
$$G_1 : G = x^2 : (h + x)^2.$$

Hierin bedeuten:

F und G $=$ Die Grundflächen der beiden Pyramiden

F_1 und G_1 $=$ Die Schnittflächen im Abstande h von den Grundflächen

x $=$ der Abstand der Schnittflächen von den Pyramidenspitzen.

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$F_1 : F = G_1 : G.$$

Da aber beide Pyramiden dieselbe Grundfläche haben, also $F = G$, folgt $F_1 = G_1$; d. h. die Querschnittsflächen im gleichen Abstand h sind flächengleich.

Das 3-seitige Prisma ABCDEF (Bild 277) wird durch die beiden Diagonal-Dreiecke CBD und CED in die 3 Pyramiden I: ABCD, II: CBED und III: CEDF zerlegt. Diese 3 Teilpyramiden sind untereinander an Volumen gleich; denn es ist Pyramide I gleich Pyramide III: Beide haben gleich große Grundflächen ($\triangle ABC = \triangle DEF$) und die gleiche Höhe. Ferner ist Pyramide I volumengleich der Pyramide II, weil beide gleichgroße Grundflächen ($\triangle ABD = \triangle BED$) und die gleiche Höhe haben. Da also $I = III$ und $I = II$ ist, so ist $I = II = III$; d. h. die 3 Teilpyramiden sind untereinander volumengleich. Das ungeteilte Prisma ABCDEF hat das Volumen $G \cdot h$ = Grundfläche mal Höhe; folglich hat jede der 3 Teilpyramiden das Volumen $\boxed{V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}}{3}}$. Diese Formel gilt aber nicht nur für 3-seitige Pyramiden, sondern allgemein für jede beliebige Pyramide.

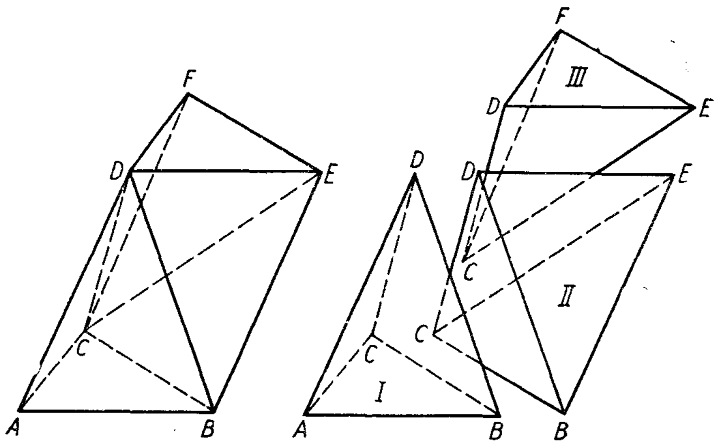


Bild 277

Das Volumen einer Pyramide ist gleich dem 3. Teil eines Prismas, das mit ihr in der Grundfläche und in der Höhe übereinstimmt.

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man an der Zerlegung einer 6seitigen Pyramide in 4 dreiseitige Pyramiden mit den Grundflächen G_1, G_2, G_3, G_4 (Bild 278). Diese 4 Teilpyramiden haben die gleiche Höhe. Die Summe ihrer Volumen beträgt:

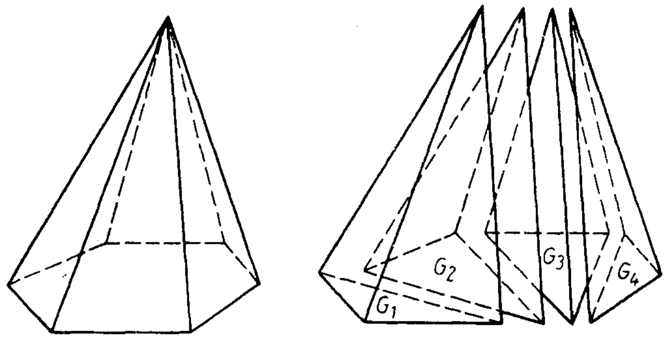


Bild 278

$$V = \frac{1}{3} G_1 h + \frac{1}{3} G_2 h + \frac{1}{3} G_3 h + \frac{1}{3} G_4 h$$
$$= \frac{1}{3} (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \cdot h$$

Da aber $G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = G$ = Grundfläche der sechsseitigen Pyramide ist, beträgt das

Pyramidenvolumen: $\boxed{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$

Das Volumen einer *Doppel-Pyramide* (Bild 279) setzt sich aus den Rauminhalten von 2 Pyramiden zusammen.

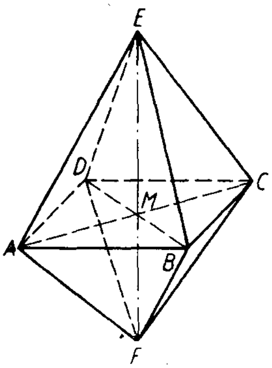


Bild 279

Die Doppelpyramide (Bild 279) setzt sich aus den beiden vierseitigen Pyramiden ABCDE und ABCDF zusammen. Die beiden gemeinsame Fläche ist ABCD = G. Die Gesamthöhe EF = h besteht aus den beiden Teilhöhen $EM = h_1$ und $MF = h_2$.

Die obere Teilpyramide hat das Volumen

$$V_1 = \frac{1}{3} G \cdot h_1,$$

die untere hat das Volumen $V_2 = \frac{1}{3} G \cdot h_2$

Das Gesamtvolumen beträgt $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} G (h_1 + h_2)$

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} G \cdot h.}$$

Prismoid

In dem Prismoid (Bild 280) sind die beiden Endflächen ABCD = F und $A_1B_1C_1 = F_1$. In der beiden Endflächen parallelen Mittelschnittfläche $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2 = M$ wählt man einen beliebigen Punkt S und verbindet ihn mit sämtlichen Ecken der beiden Endflächen. Hierdurch wird das ganze Prismoid in Pyramiden zerteilt, deren Rauminhalte sich folgendermaßen berechnen: Die beiden großen Pyramiden mit den Grundflächen F und F_1 und der Höhe h/2 und der gemeinsamen Spitze S haben zusammen den Rauminhalt:

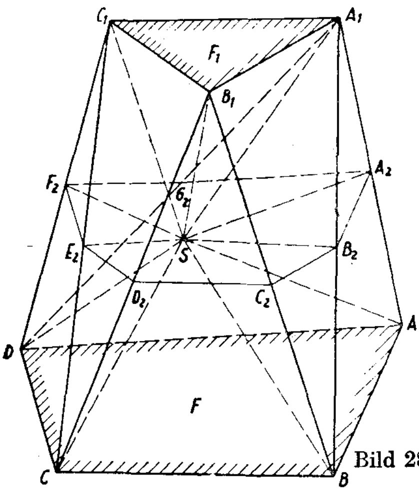


Bild 280

$$\frac{1}{3}F\frac{h}{2}+\frac{1}{3}F_1\cdot\frac{h}{2}=\frac{h}{6}(F+F_1).$$

Die 7 restlichen Pyramiden haben die Spitze S gemeinsam, während ihre Grundflächen die Seitenflächen des Prismoids sind. So hat z. B. die Pyramide $SABA_1$ die Grundfläche ABA_1, die viermal so groß ist wie das Dreieck $A_2B_2A_1$. Die Pyramide $SABA_1$ hat dieselbe Höhe wie die Pyramide $SA_2B_2A_1$, aber eine viermal so große Grundfläche. Folglich hat die Pyramide $SABA_1$ ein viermal so großes Volumen wie die Pyramide $SA_2B_2A_1$. Nimmt man bei der Pyramide $SA_2B_2A_1$ den Punkt A_1 als Spitze und das Dreieck $SB_2A_2 = m_1$ als Grundfläche, so beträgt ihr Rauminhalt:

$$\frac{1}{3}m_1\frac{h}{2}=\frac{m_1 h}{6}.$$

Der Inhalt der ganzen Seitenpyramide $SABA_1$ ist somit $4\cdot\frac{m_1 h}{6}$. Das Volumen jeder anderen der noch übrig bleibenden 6 Seitenpyramiden läßt sich ebenfalls durch eine Grundfläche m_2 bzw. m_3 bzw. m_4 usw. ausdrücken. Das Volumen aller 7 Seitenpyramiden zusammen ist daher gleich: $\frac{4}{6}h(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_7)$.

Da aber der Klammerinhalt gleich M ist, so erhält man als Volumen der 7 Seitenpyramiden: $\frac{4}{6}h\cdot M$.

Das Volumen des gesamten Prismatoids beträgt:

$$V=\frac{h}{6}(F+F_1)+\frac{4}{6}hM=$$

Prismoidvolumen: $\boxed{V=\frac{h}{6}(F+4M+F_1)}$

Hierin bedeutet: F = Grundfläche, F_1 = Deckfläche, h = Höhe und M = Schnittfläche in halber Höhe.

Diese Formel, die als Newton-Simpsonsche Regel bekannt ist, hat große Bedeutung. Sie gilt nicht nur für die eigentlichen Prismoide mit ebenen Begrenzungsflächen, sondern auch für Körper, deren Endflächen in krummlinige Flächen übergehen oder zu geraden Linien oder Punkten zusammenschrumpfen.

Pyramidenstumpf

Das Volumen eines Pyramidenstumpfes (Bild 281) beträgt:

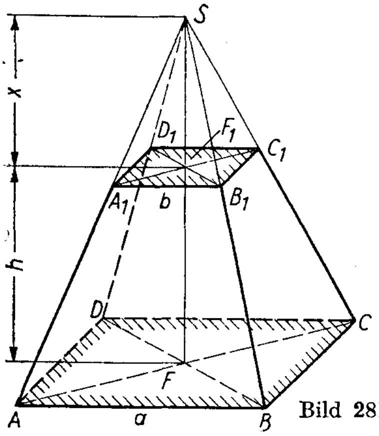


Bild 281

$$\boxed{V = \frac{1}{3} h \left(F + \sqrt{F \cdot F_1} + F_1\right)}$$

Hierin bedeutet: $F =$ Grundfläche, $F_1 =$ Deckfläche und $h =$ Höhe.

Beweis 1

Das Volumen eines jeden Pyramidenstumpfes berechnet man als die Differenz der Volumina zweier Pyramiden.

Der Pyramidenstumpf mit den Ecken $ABCDA_1B_1C_1D_1$ hat die Grundfläche $ABCD = F$, die Deckfläche $A_1B_1C_1D_1 = F_1$ und die Höhe h, gerechnet von F bis F_1. Die Ergänzungspyramide (siehe Seite 152) ist die Pyramide mit der Grundfläche F_1, der Spitze S und der mit x bezeichneten Höhe. Das Volumen des Pyramidenstumpfes beträgt:

$$V = \text{Pyramide } ABCDS - \text{Ergänzungspyramide } A_1B_1C_1D_1S$$

$$V = \frac{1}{3} F (h + x) - \frac{1}{3} F_1 \cdot x = \frac{1}{3} F h + \frac{1}{3} x (F - F_1)$$

Die Höhe x der Ergänzungspyramide drückt sich durch F, F_1 und h folgendermaßen aus: Die einander ähnlichen Flächen F und F_1 verhalten sich zueinander wie die Quadrate gleichliegender Seiten:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Die Seiten aber verhalten sich, wie man durch Anwendung der Strahlensätze leicht ersieht, wie ihre zugehörigen Abstände von der Spitze S; d. h.

$$\frac{a}{b} = \frac{h + x}{x}.$$

Also ist

$$\frac{F}{F_1} = \frac{(h + x)^2}{x^2}$$

oder $$\frac{\sqrt{F}}{\sqrt{F_1}} = \frac{h + x}{x}.$$

Durch Anwendung der Regeln für die korrespondierende Addition (Band 1) ergibt sich:

$$\frac{\sqrt{F} - \sqrt{F_1}}{\sqrt{F_1}} = \frac{h + x - x}{x}$$

oder

$$x = \frac{h\sqrt{F_1}}{\sqrt{F} - \sqrt{F_1}}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung für V ein, so ist

$$V = \frac{1}{3} F h + \frac{1}{3} \frac{h\sqrt{F_1}}{\sqrt{F} - \sqrt{F_1}} \cdot (F - F_1)$$

Da man aber nach der Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ für $F - F_1 = (\sqrt{F} + \sqrt{F_1})(\sqrt{F} - \sqrt{F_1})$ setzen kann, so ist

$$V = \frac{1}{3} F h + \frac{1}{3} h \sqrt{F_1} \cdot (\sqrt{F} + \sqrt{F_1})$$

$$V = \frac{1}{3} h (F + \sqrt{F F_1} + F_1) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Beweis 2

Der Pyramidenstumpf wird als Prismoid mit der Grundfläche F, der Deckfläche F_1, der Höhe h und der Schnittfläche in halber Höhe M aufgefaßt. Wenn 2 entsprechende Seiten der Grund- und Deckfläche wiederum a und b sind, so ist die zu ihnen gleichliegende Seite des Mittelschnittes $\frac{a + b}{2}$. Es verhält sich: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{F_1}}{\sqrt{F}}$
oder nach den Regeln der korrespondierenden Addition:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{\sqrt{F} + \sqrt{F_1}}{\sqrt{F}}.$$

Diese Gleichung durch 2 geteilt, ergibt:

$$\frac{a + b}{2a} = \frac{\sqrt{F} + \sqrt{F_1}}{2\sqrt{F}}.$$

Es verhält sich aber auch

$$\frac{\frac{a + b}{2}}{a} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}} \quad \text{oder} \quad \frac{a + b}{2a} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}}.$$

Da die linken Seiten der Gleichungen für $\frac{a + b}{2a}$ gleich sind, so sind auch die rechten Seiten einander gleich; also:

$$\frac{\sqrt{F}+\sqrt{F_1}}{2\sqrt{F}}=\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat erhoben, ergibt:

$$\frac{(\sqrt{F}+\sqrt{F_1})^2}{4F}=\frac{M}{F}$$

oder $$M=\frac{(\sqrt{F}+\sqrt{F_1})^2}{4}.$$

Diesen Wert für die Größe des Mittelschnittes M in die Volumengleichung für das Prismoid eingesetzt, ergibt:

$$V=\frac{h}{6}(F+4M+F_1)$$

$$=\frac{h}{6}[F+(\sqrt{F}+\sqrt{F_1})^2+F_1]$$

$$=\frac{h}{6}[F+F+2\sqrt{FF_1}+F_1+F_1]$$

$$V=\frac{h}{3}(F+\sqrt{FF_1}+F_1)$$ w. z. b. w.

Obelisk

Das Volumen des Obelisken (Bild 282) berechnet sich nach der Volumengleichung für das Prismoid. Die Grundfläche hat den Inhalt $F=a\cdot b$, die Deckfläche $F_1=a_1\cdot b_1$, die Schnittfläche in halber Höhe

$$M=\frac{a+a_1}{2}\cdot\frac{b+b_1}{2}.$$

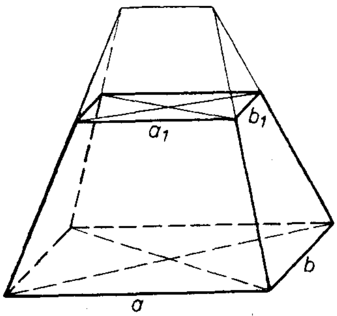


Bild 282

Der Abstand der beiden nicht ähnlichen Flächen F und F_1 ist die Höhe h. Mit diesen Werten erhält man:

$$V=\frac{h}{6}(F+4M+F_1)$$

$$V=\frac{h}{6}\left(ab+4\cdot\frac{a+a_1}{2}\cdot\frac{b+b_1}{2}+a_1b_1\right)$$

$$=\frac{h}{6}(ab+ab+a_1b+ab_1+a_1b_1+a_1b_1).$$

Obeliskvolumen: $$\boxed{V=\frac{h}{6}(2ab+a_1b+ab_1+2a_1b_1)}$$

Das auf Seite 163 berechnete Volumen des **Keiles** bestimmt sich leicht nach der letzten Gleichung, wenn man in ihr $b_1 = O$ setzt, da ja die Deckfläche beim Keil zu der Geraden a_1 zusammenschrumpft:

$$V = \frac{h}{6}(2ab + a_1 b + a \cdot O + 2a_1 \cdot O)$$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\, b \cdot h\,(2a + a_1)}$$

Die Platonischen Körper

Die in der nachstehenden tabellarischen Zusammenstellung angegebenen Oberflächen und Volumen der 5 Platonischen Körper (siehe Seite 153) lassen sich mit Hilfe der bisher abgeleiteten Gleichungen für ebenflächige Körper berechnen.

	O	V	r	ϱ
Tetraeder (Vierflach)	$\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{1}{12}\sqrt{2}\,a^3$	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$
Hexaeder (Würfel)	$6\,a^2$	a^3	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$
Oktaeder (Achtflach)	$2\,a^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}\,a^3$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$
Dodekaeder (Zwölfflach)	$3\,a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$
Ikosaeder (Zwanzigflach)	$5\,a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{12}\sqrt{3}(3+\sqrt{5})$

a = Körperkante   V = Volumen
O = Oberfläche   r und ϱ = Radien der umschriebenen und eingeschriebenen Kugel.

Aufgaben

1) Wieviel Quadratmeter Kistenholz werden zur Herstellung einer würfelförmigen Kiste von 1 m³ Inhalt gebraucht?
2) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 54 cm². Wie groß ist sein Rauminhalt?
3) Wievielmal so groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen Rauminhalt 8 mal so groß wie der eines anderen ist?
4) Wievielmal so groß wird der Rauminhalt eines Würfels, wenn man seine Kante verdoppelt?
5) Die Körperdiagonale (= Verbindungslinie zweier diagonal gegenüberliegender Würfelecken) ist 50 mm lang. Wie groß ist die Oberfläche des Würfels? (Körperdiagonale eines Quaders: Seite 172 Nr. 15)
6) Ein Stahlwürfel wiegt 981 g. Wie lang ist seine Kante, wenn die Wichte des Stahles 7,85 kg/dm³ beträgt?

7) Ein Messingwürfel, dessen Kante 40 mm lang ist, wiegt 550 g. Wie groß ist die Wichte des Messings?

8) Wie schwer ist ein Würfel von der Kantenlänge 50 mm aus
a) Kork (Wichte: 0,24), b) Eichenholz (Wichte: 0,96),
c) Aluminium (Wichte: 2,56) und
d) Stahl (Wichte: 7,86)?

9) Wie groß ist das Volumen eines Ziegelsteines in cm^3 und dm^3? Seine Abmessungen betragen: $25 \times 12 \times 6{,}5$ (cm).

10) Wie schwer ist ein Eichenbalken (Wichte: 0,7 kg/dm^3) von 4 m Länge, 20 cm Breite und 30 cm Stärke?

11) Als Gewicht eines Quadratstahles von der Dicke 80 mm ist 50,240 kg/m angegeben; d. h. 1 m wiegt 50,240 kg. Welche Wichte ist für diesen Stahl der Berechnung zugrunde gelegt?

12) Als Gewicht einer Kupferplatte von 10 mm Stärke sind 89 kg/m^2 angegeben; d. h. 1 m^2 einer solchen 10 mm starken Platte wiegt 89 kg. Wie groß ist die Wichte des Kupfers?

13) Wieviel Liter Wasser enthält ein bis zum Rande gefüllter rechteckiger Wasserkasten, der in seinen lichten Weiten 100 cm lang, 80 cm breit und 50 cm tief ist?

14) Ein rechteckiger Wasserkasten soll 32 l fassen. Seine Grundfläche soll quadratisch, seine Höhe aber nur halb so lang wie die Grundkante sein. Wie groß sind Grundkantenlänge a und Höhe h auszuführen?

15) Wie groß ist die Entfernung zweier diagonal gegenüberliegender Ecken eines Zimmers, das 4 m lang, 3 m breit und 3 m hoch ist?
Anleitung: Man berechne die Diagonale der rechteckigen Fußbodenfläche. Die Entfernung zweier diagonal gegenüberliegenden Zimmerecken ist die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete die Zimmerhöhe und dessen andere Kathete die soeben berechnete Grundflächendiagonale ist.

16) Wie schwer ist eine 1 m lange Eisstange mit quadratischem Querschnitt von 20 cm Kantenlänge? Die Wichte des Eises beträgt 0,917 kg/dm^3.

17) Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Kante a = 600 mm werden an den Ecken Quadrate mit der Seite x herausgeschnitten (Bild 283). Die stehenbleibenden rechteckigen Flächen werden längs der gestrichelten Geraden rechtwinklig umgebogen, so daß ein offener rechtwinkliger Kasten entsteht.

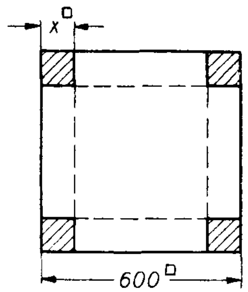


Bild 283

a) Wie groß ist das Kastenvolumen für folgende Werte von x: 50, 100, 150, 200 und 250 mm?

b) Für welchen Wert von x ist das Kastenvolumen am größten?

c) Wie groß ist für diesen größten Kasten die Höhe im Vergleich zu seiner Grundflächenkante?

d) Wie groß ist für diesen größten Kasten die Höhe im Vergleich zur Kante a des gegebenen quadratischen Stückes Blech?

18) Unter der Regenhöhe versteht man die Höhe, mit der das Regenwasser den Boden bedecken würde, wenn es weder abflösse, noch einsickerte, noch verdunstete.

Wieviel Liter Regenwasser fallen bei einer Regenhöhe von 70 mm auf einen Quadratmeter?

19) Nach dem Archimedischen Schwimmerprinzip (Archimedes: 287 bis 212 v. Chr.) ist bei einem im Wasser schwimmenden Körper das Gewicht der verdrängten Wassermenge gleich dem Gewicht des ganzen Körpers.

Ein aus 1 mm starkem Stahlblech (Wichte: 7,86) gefertigter offener rechtwinkliger Kasten (Grundfläche: 200 × 100, Höhe: 50 mm) schwimmt auf Wasser (Wichte: 1). Wie tief taucht dieser Kasten ein?

20) Wieviel Tonnen Kohle faßt ein Wagen, dessen Wagenkasten mit trapezförmigem Querschnitt 3 m lang, 0,9 m tief, 1,4 m oben und 0,6 m unten breit ist? (1 m³ Steinkohle wiegt 1,2 t.)

21) Wie groß sind die Gewichte der 4 Einzelteile Bild 284...287?

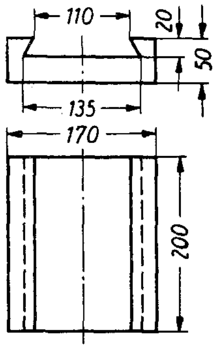


Bild 285
Führungsplatte
GG-18 ($\gamma = 7,3$)

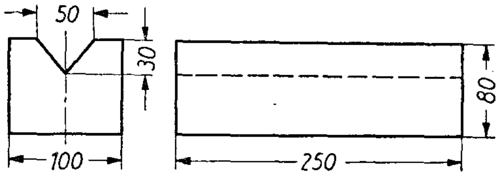
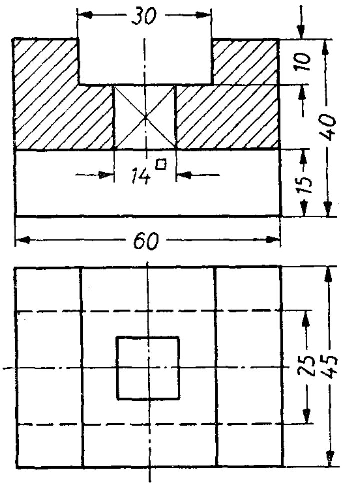


Bild 284 *Prisma* GG-18 ($\gamma = 7,3$)



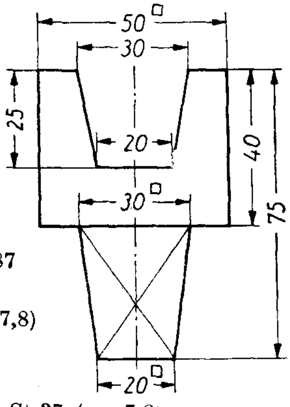


Bild 287
Gesenk
St 37 ($\gamma = 7,8$)

Bild 286
Führungsstück St 37 ($\gamma = 7,8$)

22) Wieviel Kilogramm wiegen 1000 Nasenkeile nach Bild 288? ($\gamma = 7{,}85$.)

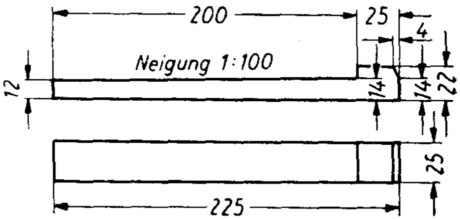


Bild 288 ***Nasenkeil*** St 60

23) Ein Haus mit Satteldach (Bild 289a) hat die in untenstehender Vorder-, Grund- und Seitenansicht (Bild 289) eingetragenen Abmessungen. Wie groß ist der umbaute Raum in m³?

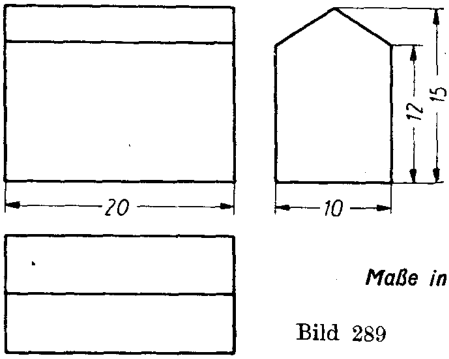


Bild 289

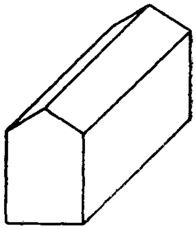


Bild 289a

24) Das Haus der vorhergehenden Aufgabe habe ein Walmdach nach den Abmessungen der Vorder- und Seitenansicht des Bildes 290.

a) Wie groß ist der umbaute Raum?

b) Wie groß ist die Dachfläche? (Ähnliche Aufgabe: Seite 178 Nr. 42)

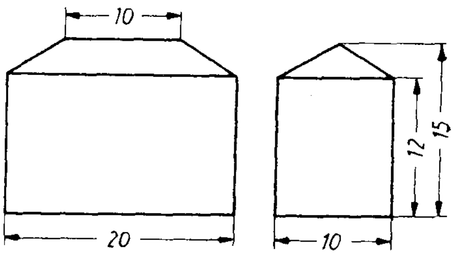


Bild 290

25) Ein Stück Vierkantstahl ist an einem Ende nach Bild 291 keilförmig abgefräst. Die Schneidkante ist a mm breit. Wie groß ist der Materialabfall bei

a) a = 30 mm,
b) a = 18 mm
und
c) a = 0

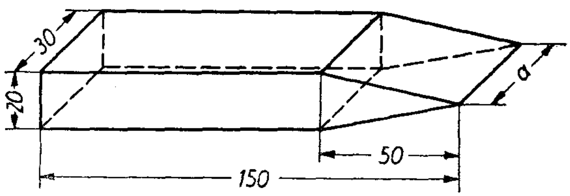


Bild 291

26) Es sind die Rauminhalte der nachstehend in Vorder- und Seitenansicht gegebenen Körper (Bild 292a...i) zu berechnen! Gleichzeitig sind die stereometrischen Bezeichnungen der betreffenden Körper anzugeben!
Sämtliche Maße in cm.

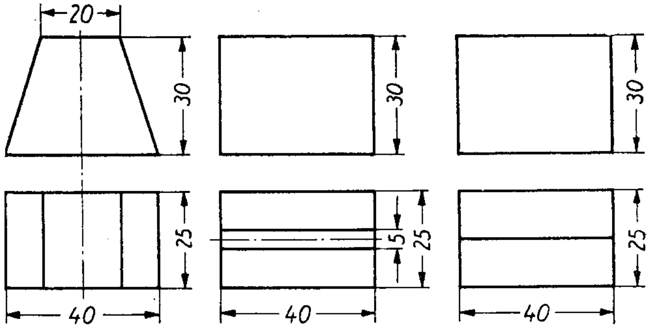


Bild 292 a...c

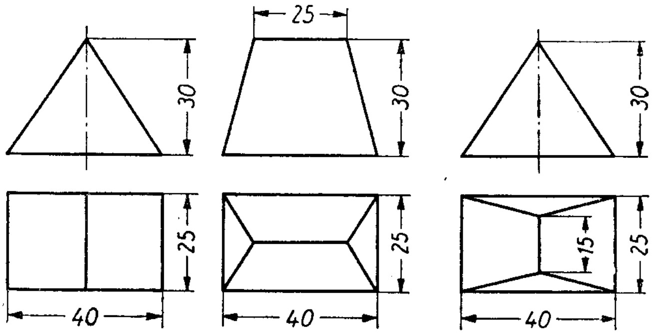


Bild 292 d...f

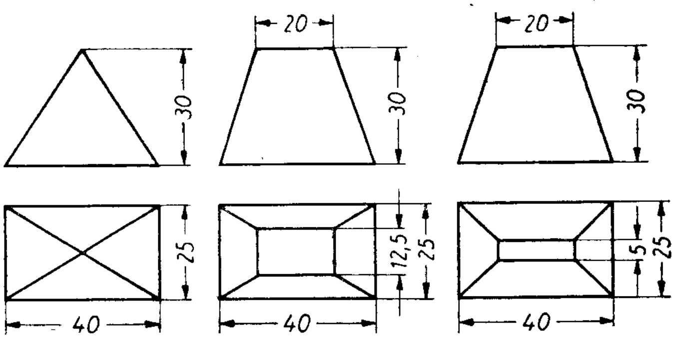


Bild 292 g...i

27) Über jeder der 3 Seiten eines gleichseitigen Dreiecks konstruiere man nach außen ein gleichseitiges Dreieck und biege die 3 nach außen liegenden Dreiecksflächen so auf, daß sich die 3 Dreiecksspitzen in einem Punkt vereinen. Hierdurch entsteht ein Tetraeder (Platonischer Körper). Wie groß ist bei der Kantenlänge a des Tetraeders
   a) die Oberfläche O,
   b) die Höhe H und
   c) das Volumen V?
28) Von einem Würfel werden die 8 Ecken durch ebene Schnitte abgeschnitten, die durch die Mitten dreier in einer Ecke aneinander stoßenden Kanten gehen
   a) Wie groß ist bei dem übrig bleibenden Körper die Eckenzahl e, die Flächenzahl f und die Kantenzahl k?
   b) Man vergleiche die unter a) erhaltenen Ergebnisse mit dem Eulerschen Satz!
   c) Aus welchen Flächen setzt sich die Oberfläche des Restkörpers zusammen?
   d) Wie groß ist die Oberfläche O des Restkörpers?
   e) Wie groß ist das Volumen V des Restkörpers?
29) Der Mittelpunkt eines Würfels (= Schnittpunkt der Raumdiagonalen) wird mit den 8 Würfelecken verbunden. Wie groß ist das Volumen einer Pyramide, die eine Würfelseitenfläche zur Grundfläche hat und deren Spitze der Mittelpunkt des Würfels ist?
30) Man konstruiere ein Quadrat mit 10 cm Seitenlänge und über jeder Seite nach außen ein gleichseitiges Dreieck. Man denke sich die 4 gleichseitigen Dreiecke so nach einer Seite hin aufgebogen, daß sich die 4 Dreiecksspitzen in einem Punkt vereinen. Es entsteht hierdurch eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Wie groß ist für diese Pyramide
   a) die Oberfläche O,
   b) die Höhe h und
   c) das Volumen V?
31) Wie lauten die Ergebnisse der vorhergehenden Aufgabe, wenn die Quadratseite a cm lang ist?
32) Man denke sich 2 volumengleiche Pyramiden der Aufgabe 30 mit ihren quadratischen Grundflächen aneinandergesetzt. Hierdurch entsteht das Oktaeder (Platonischer Körper). Wie groß ist beim Oktaeder
   a) eine Seitenfläche F,
   b) die Oberfläche O und
   c) das Volumen V?

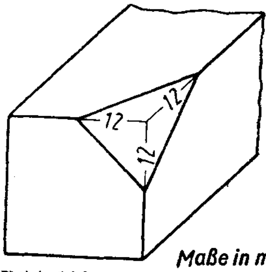


Bild 293

33) Von einem Vierkantstahl nach Bild 293 ist eine Ecke abgefräst. Wie groß ist der Materialabfall in mm^3?

34) Wie groß ist der Materialabfall, wenn die Ecke eines Vierkantstahles nach den Maßen des Bildes 294 abgefräst ist?

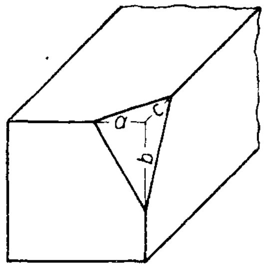


Bild 294

35) Ein Turm, dessen Querschnittsfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Kante a ist, hat ein pyramidenförmiges Dach mit der Höhe h.

a) Wie groß ist die Dachfläche?

b) Wie groß ist der Dachraum?

36) Ein gerades gleichseitiges Prisma (Bild 295) von der Höhe $h = 10$ cm hat als Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln $a = b = 5$ cm und der Basis $c = 6$ cm. Durch die Basis der Grundfläche und die Spitze der Deckfläche wird ein ebener Schnitt gelegt. Wie groß sind die Rauminhalte der beiden entstehenden Schnittkörper?

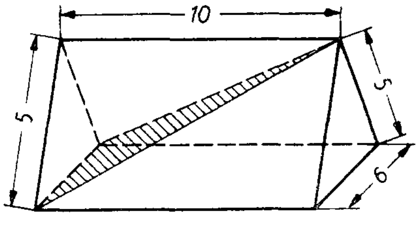


Bild 295

37) Ein Prismoid (Bild 296) hat als Grundflächen 2 Quadrate mit der Seite a. Seine Seitenflächen sind 8 gleichseitige Dreiecke. Wie groß ist

a) die Eckenzahl e, die Kantenzahl k und die Flächenzahl f? (Kontrolle des Eulerschen Satzes!)

b) die Höhe h in einer Seitenfläche?

c) die Höhe H des Prismoides?

d) der Flächeninhalt des Schnittes M in halber Höhe?

e) das Volumen des Prismoides?

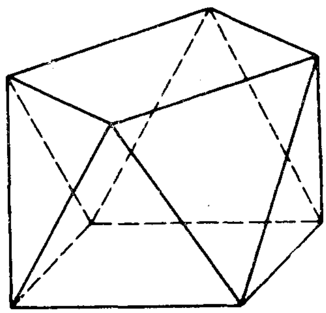


Bild 296

38) Sind die beiden Grundflächen eines Prismoides gleichseitige Dreiecke mit der Seite a und sind die Seitenflächen ebenfalls gleichseitige Dreiecke, so ist ein solches Prismoid ein Oktaeder. Man beantworte die Fragen der Aufgabe 37) für dieses vorliegende Prismoid und überzeuge sich durch Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit denen der Aufgabe 32) von der Richtigkeit der Lösung!

39) Ein Vierkantstahl von 200 mm Kantenlänge und 700 mm Gesamtlänge wird nach Bild 297 schräg durchschnitten. Was wiegen die beiden Teile A und B, wenn das Gewicht des Vierkantstahles 314 kg/m beträgt?

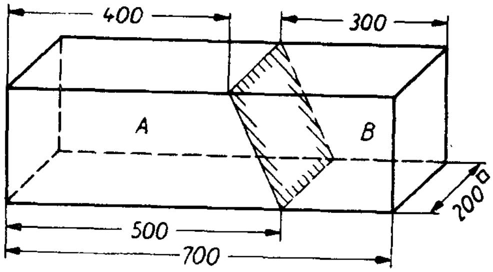


Bild 297

40) Durch einen Bahndamm von h = 4 m Höhe, dessen obere Breite a = 12 m beträgt und der einen Böschungswinkel $\alpha = 45°$ besitzt, soll eine 15 m breite Durchfahrt gelegt werden, die senkrecht zur Schienenrichtung den Bahndamm durchschneidet. Wieviel m^3 Erde sind abzufahren?

Anleitung: Der Querschnitt durch den Bahndamm senkrecht zur Schienenrichtung ist ein gleichschenkliges Trapez. Die Winkel an der Basis betragen 45°. Man bestimme zunächst die untere Breite des Dammes!

41) Eine Baugrube von 3 m Tiefe soll in der Sohle ein Rechteck mit den Seiten 8 m bzw. 25 m und oben ein Rechteck mit den Seiten 12 m bzw. 30 m erhalten. Wieviel Kubikmeter Erde sind auszuschachten?

Anleitung: Man fasse die Baugrube entweder als einen umgekehrten rechteckigen Obelisken oder als Prismoid auf!

42) Wieviel Kubikmeter schließt ein Walmdach ein, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a = 50 m und b = 20 m ist, dessen First c = 30 m und dessen Dreiecksflächen gleichseitig sind? (Vgl. Aufgabe 24).

Anleitung: Man bestimme zunächst die Höhe in den Dreiecksflächen, sodann nach dem Lehrsatz des Pythagoras die Firsthöhe!

2. Krummflächige Körper

Die Rauminhalte, Mantel- und Oberflächen krummflächiger Körper werden durch folgende 3 Verfahren bestimmt:

a) Zylinder, Kegel und Kegelstumpfe werden als Grenzfälle von Prismen, Pyramiden und Pyramidenstumpfen aufgefaßt, deren Grundflächen regelmäßige n-Ecke mit unendlich großer Seitenzahl (also: Kreise) sind. Die für die Rauminhalte von Prismen, Pyramiden und Pyramidenstumpfe abgeleiteten Gleichungen gelten auch für die genannten krummflächigen Körper, wenn man für die Grundflächen πr^2 einsetzt (r = Radius des Grundkreises).

b) Wie auf Seite 154 ff. gezeigt wurde, ist ein großer Teil der krummflächigen Körper als Drehkörper zu betrachten. Für die Bestimmung der Mantelflächen und Rauminhalte von Drehkörpern werden die beiden folgenden Regeln verwendet. Sie heißen die *Guldinschen Regeln*:

1) Die *Mantelfläche eines Drehkörpers* ist gleich dem Produkt aus der Länge l der erzeugenden Linie und dem Wege $2\pi r_{s_1}$, den der Schwerpunkt der rotierenden Linie bei einer Umdrehung um die Achse beschreibt;

oder als Formel:

$$\boxed{M = l \cdot 2\pi r_{s_1}}$$

M = Mantelfläche;
l = Länge der rotierenden Linie;
r_{s_1} = Schwerpunktsabstand der rotierenden Linie

2) Der *Rauminhalt eines Drehkörpers* ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt f der erzeugenden Fläche und dem Wege $2\pi r_{s_2}$, den ihr Schwerpunkt bei einer Umdrehung um die Rotationsachse beschreibt;

oder als Formel:

$$\boxed{V = f \cdot 2\pi r_{s_2}}$$

V = Volumen des Drehkörpers
f = Inhalt der rotierenden Fläche;
r_{s_2} = Abstand des Schwerpunktes der Fläche von der Achse

c) Für die Volumenbestimmung des schiefen Kreiszylinders, schiefen Kegels sowie der Kugel und des Kugelausschnittes benutzt man den auf Seite 160 angeführten

Satz des Cavalieri:

2 Körper von gleicher Höhe und Grundfläche sind inhaltsgleich wenn sie von jeder beliebigen parallel zur Grundfläche liegenden Ebene in flächengleichen Figuren geschnitten werden.

Zylinder (Seite 154)

Volumen: $$\boxed{V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h}$$

r = Grundkreisradius
d = Grundkreisdurchmesser
h = Zylinderhöhe

Beweis 1

Der Zylinder ist ein Prisma, dessen Grundfläche im Grenzfall zu einem Kreis geworden ist. Er hat also das Volumen: V = Grundfläche × Höhe (Seite 160) $= \pi r^2 \cdot h$ oder für $r = \frac{d}{2}$ eingesetzt: $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$.

Beweis 2

Ein gerader Kreiszylinder entsteht durch Rotation eines Rechteckes mit den Seiten AB = r und AD = h (Seite 154) um die Seite AD. Die rotierende Rechtecksfläche hat den Inhalt $f = r \cdot h$.

Ihr Schwerpunktsabstand von der Achse beträgt:

$$r_{s_2} = \frac{r}{2};$$

der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung ist:

$$2\pi r_{s_2} = 2\pi \frac{r}{2} = \pi r$$

Nach der 2. Guldinschen Regel ist:

$$V = f \cdot 2\pi r_{s_2} = r h \cdot \pi r = \pi r^2 \cdot h$$

Mantel: $\boxed{\mathbf{M = 2\pi r h = \pi d h}}$

Beweis 1

Der Mantel eines geraden Kreiszylinders entsteht durch Rotation der Strecke BC = h um die Drehachse AD (Seite 154). Der Schwerpunktsabstand der rotierenden Strecke von der Achse beträgt: $r_{s_1} = r$; der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung ist: $2\pi r_{s_1} = 2\pi r$. Nach der 1. Guldinschen Regel ist: $M = h \cdot 2\pi r$, oder für $r = \frac{d}{2}$ eingesetzt:

$$M = \pi d h$$

Beweis 2

Schneidet man den Zylindermantel längs einer geraden Mantellinie auf und wickelt ihn in die Ebene ab, so entsteht ein Rechteck mit den Seiten h (= Zylinderhöhe) und $2\pi r$ (= Grundkreisumfang). Der Inhalt dieses Rechteckes ist: $M = h \cdot 2\pi r$.

Oberfläche: $\boxed{\mathbf{O = 2\pi r \cdot (r + h)}}$

Beweis

Die Oberfläche O setzt sich aus der Mantelfläche $M = 2\pi r h$ und 2 Kreisflächen (Grund- und Deckkreis) $= 2\pi r^2$ zusammen. Sie beträgt also:

$$O = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (r + h).$$

Schiefer Kreiszylinder (Seite 154)

Volumen: $\boxed{\mathbf{V = \pi r^2 h}}$

r = Grundkreisradius
h = Abstand der beiden Grundflächen voneinander

Beweis

Nach dem Cavalierischen Grundsatz hat der schiefe Kreiszylinder dasselbe Volumen wie ein gerader Kreiszylinder, der dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

Schräg geschnittener gerader Kreiszylinder (Bild 298)

Volumen: $\boxed{\mathbf{V = \pi r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}}}$

r = Grundkreisradius;
h_1 = kurze Zylinderseite;
h_2 = lange Zylinderseite;

Wie beim schief abgeschnittenen Prisma (Seite 161) bestimmt man das Volumen als das Produkt aus der Normalschnittfläche (= Kreisfläche πr^2) und dem Abstande der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Endflächen. Die Schwerpunkte sind die Durchstoßpunkte der Achse durch die elliptischen Endflächen. Ist h_1 die kürzeste und h_2 die längste Zylinderseite, so ist der Abstand der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Endflächen $\frac{h_1 + h_2}{2}$ als Mittellinie des Trapezes. Das Volumen beträgt somit: $V = \pi r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$

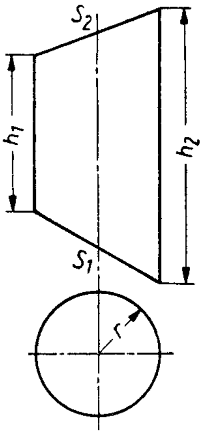


Bild 298

Mantel: $\boxed{M = \pi r (h_1 + h_2)}$

Zum Beweise dieser Gleichung schneide man von dem schräg geschnittenen geraden Kreiszylinder (Bild 298) durch zwei senkrecht zur Achse gelegene ebene Schnitte durch die Punkte S_1 und S_2 zwei Zylinderhufe (Siehe Seite 155, Bild 255) ab und setze diese an den verbleibenden Restkörper so an, daß hierdurch ein gerader Kreiszylinder mit der Höhe $S_1S_2 = \frac{h_1 + h_2}{2}$ entsteht. Der Mantel dieses geraden Kreiszylinders hat dann denselben Flächeninhalt wie der Mantel des ursprünglichen schräg geschnittenen geraden Kreiszylinders. Man erhält also:

$$M = 2\pi r \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi r (h_1 + h_2) .$$

Schneidet man die Mantelfläche längs der kürzesten Zylinderseite auf und wickelt sie in die Ebene ab, so erhält man hier eine nicht geradlinig begrenzte Fläche. Die Abwicklungsfläche ist begrenzt durch 2 gerade Linien (= kürzeste Mantellinie) und durch 2 Kurven (= sog. Sinuslinien).

Zylinderhuf oder Zylinderstutz (Bild 299)

Volumen: $\boxed{V = \frac{2}{3} h \cdot r^2}$ h = Hufhöhe
r = Normalschnitt-Radius

Beweis 1

Sieht man den Zylinderhuf als einen schräg geschnittenen geraden Kreiszylinder mit der Normalschnittfläche $N = \frac{\pi r^2}{2}$ und dem Abstand h_s der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Endflächen an, so ist sein Volumen: $V = N \cdot h_s = \frac{\pi r^2}{2} \cdot h_s$.

Der Abstand y_0 des Schwerpunktes S_1 der Normalschnittfläche (= Halbkreisfläche) von dem Halbkreisdurchmesser AB beträgt: $y_0 = \frac{4r}{3\pi}$ (Seite 149). Nach dem Strahlensatz ist aber: $h_s : h = y_0 : r = \frac{4r}{3\pi} : r$.

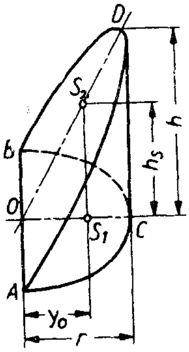


Bild 299

Hieraus folgt: $h_s = \frac{4h}{3\pi}$. Diesen Wert in die Volumengleichung eingesetzt, ergibt: $V = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4h}{3\pi} = \frac{2}{3} h \cdot r^2$.

Beweis 2

Man kann den Zylinderstutz als Prismoid mit der Höhe AB = 2 r auffassen. Sein Mittelschnitt ist das Dreieck OCD mit dem Flächeninhalt: $\frac{r \cdot h}{2}$. Die beiden Grundflächen des Prismoides sind zu den Punkten A und B zusammen geschrumpft und haben den Flächeninhalt 0. Nach der Prismoiden-Volumenformel (Seite 167) ist dann:

$$V = \frac{2r}{6}\left(0 + 4 \cdot \frac{rh}{2} + 0\right) = \frac{2}{3} r^2 h .$$

Mantel: $\boxed{\mathbf{M = 2 \cdot h \cdot r}}$

Beweis

Man denke sich den Huf durch Ebenen, die rechtwinklig zur Grundkreisfläche liegen und durch den Mittelpunkt O gehen, in unendlich viele kleine Pyramiden zerlegt, deren Höhen sämtlich r und deren Grundflächen f_1, f_2, f_3 ... usw. sind. Die Summe aller dieser kleinen Grundflächen $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots +$ usw. ist gleich der gesuchten Mantelfläche M. Die Summe der Volumina dieser kleinen Teilpyramiden ist das soeben berechnete Volumen des Zylinderhufes $V = \frac{2}{3} r^2 h$; also:

$$V = \frac{1}{3} f_1 \cdot r + \frac{1}{3} f_2 \cdot r + \frac{1}{3} f_3 r + \cdots = \frac{1}{3} r (f_1 + f_2 + f_3 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{3} r M = \frac{2}{3} h r^2$$

Hieraus ergibt sich:

$$M = 2 \cdot h \cdot r$$

Das Eigenartige der Gleichungen für das Volumen und die gekrümmte Mantelfläche des Zylinderhufes ist die Tatsache, daß beide Größen von π unabhängig sind, obwohl der Huf von einer Kreisfläche, einer halben Ellipse und einer halbkreisförmig gekrümmten Mantelfläche begrenzt ist.

Hohlzylinder oder Rohr (Seite 155)

Volumen:

$$\boxed{\begin{aligned} &V = \pi h \cdot (R^2 - r^2) \\ \text{oder } &V = \pi h s (2R - s) \\ \text{oder } &V = \pi h s (2r + s) \\ \text{oder } &V = 2\pi h s \varrho \end{aligned}}$$

h = Zylinderhöhe
R = Außenradius
r = Innenradius
s = R — r = Wandstärke
$\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$ = mittl. Halbmesser

Beweis 1

Das Volumen des Hohlzylinders wird als Differenz des Volumens eines Zylinders mit dem Radius R und dem eines Zylinders mit dem Radius r bestimmt.

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h (R^2 - r^2)$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man:

$$V = \pi h (R + r)(R - r)$$

Für (R — r) setze man die Wandstärke s ein:

$$V = \pi h s (R + r)$$

und für $r = R - s$. Man erhält:

$$V = \pi h s (2R - s)$$

Für $R = s + r$ eingesetzt, ergibt:

$$V = \pi h s (2r + s)$$

Setzt man in die Ausgangsgleichung:

$$V = \pi h \cdot (R + r) \cdot (R - r) = 2\pi h \cdot \frac{R + r}{2}(R - r)$$

den Wert $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$ (arithmetisches Mittel zu R und r) ein, so erhält man: $V = 2\pi h \cdot s \cdot \varrho$.

Beweis 2

Nach dem Rotationsverfahren entsteht der Hohlzylinder durch Drehung eines Rechtecks mit den Seiten h und s um eine zur Seite h parallel gelegene Achse. Der Schwerpunkt des Rechtecks hat von der Achse den Abstand ϱ. Folglich ist nach der zweiten Guldinschen Regel das Volumen

$$\begin{aligned} V &= f \cdot 2\pi r_{s_2} = h \cdot s \cdot 2\pi \varrho \\ &= 2\pi h s \varrho \end{aligned}$$

Kegel

Volumen: $$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{12}\pi d^2 \cdot h}$$

r = Grundkreisradius
d = Grundkreisdurchmesser
h = Kegelhöhe

Beweis 1

Ein Kreiskegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche im Grenzfall zu einem Kreis geworden ist. Er hat also das Volumen: $V = \frac{1}{3}$ Grundfläche

$\times$ Höhe (Seite 166) $= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ oder, $r = \frac{1}{2} d$ eingesetzt:

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{d^2}{4} \cdot h = \frac{1}{12} \pi d^2 h.$$

Beweis 2

Ein gerader Kreiskegel entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten r und h um die Kathete h (Seite 155). Die rotierende Dreiecksfläche hat den Inhalt $f = \frac{1}{2} r h$. Ihr Schwerpunktsababstand von der Achse beträgt: $r_{s_2} = \frac{r}{3}$ (Seite 145). Der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung ist: $2 \pi r_{s_2} = 2 \pi \frac{r}{3}$. Nach der zweiten Guldinschen Regel ergibt sich:

$$V = f \cdot 2 \pi r_{s_2} = \frac{1}{2} r h \cdot 2 \pi \frac{r}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Mantel:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{M = \pi r s} \\ &\text{oder } \mathbf{M = \frac{1}{2} \pi d s} \\ &\text{oder } \mathbf{M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}} \end{aligned}}$$

r = Grundkreisradius
d = Grundkreisdurchmesser
s = Mantellinie
h = Kegelhöhe

Beweis 1

Der Mantel eines geraden Kreiskegels entsteht durch Rotation der Strecke $BC = s$ um die Drehachse AC (Seite 155). Der Schwerpunktsabstand der rotierenden Strecke $l = s$ von der Achse beträgt $r_{s_1} = \frac{r}{2}$.

Der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung ist: $2 \pi r_{s_1} = 2 \pi \frac{r}{2} = \pi r$. Nach der ersten Guldinschen Regel ist: $M = l \cdot 2 \pi r_{s_1} = s \cdot \pi r$. Da nach dem Lehrsatz des Pythagoras $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ist, erhält man weiterhin:

$$M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

Beweis 2

Schneidet man den geraden Kreiskegel längs einer Mantellinie auf und wickelt ihn in die Ebene ab, so entsteht ein Kreissektor. Sein Radius ist gleich der Mantellinie s; seine Bogenlänge ist gleich dem Umfang des Grundkreises des Kegels $2 \pi r$. Da aber der Inhalt eines Kreissektors nach Seite 139 gleich $\frac{\text{Bogen} \times \text{Radius}}{2}$ ist, so erhält man hier als Mantelfläche

$$M = \frac{2 \pi r \cdot s}{2} = \pi r s$$

Oberfläche: $\boxed{\mathbf{O = \pi r (r + s)}}$

Beweis

Die Oberfläche setzt sich aus der Mantelfläche $M = \pi r s$ und der Fläche des Grundkreises πr^2 zusammen; also: $O = \pi r s + \pi r^2 = \pi r (r + s)$.

Schiefer Kreiskegel

Nach dem Cavalierischen Satz hat ein schiefer Kreiskegel dasselbe Volumen wie ein gerader Kreiskegel, der dieselbe Grundfläche und Höhe hat; also:

Volumen: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$ r = Grundkreisradius; h = senkrechter Abstand der Spitze von der Grundfläche

Kegelstumpf (= abgestumpfter Kreiskegel)

Volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + R \cdot r + r^2)$$

oder

$$V = \frac{1}{12}\pi h\,(D^2 + D \cdot d + d^2)$$

$\left.\begin{array}{l} R = \\ r = \end{array}\right\}$ Radien der parallelen Endflächen
$\left.\begin{array}{l} D = \\ d = \end{array}\right\}$ Durchmesser der parallelen Endflächen
h = Kegelstumpfhöhe.

Beweis 1

Der Kegelstumpf kann als ein Pyramidenstumpf angesehen werden, dessen Grundflächen regelmäßige n-Ecke mit unendlich großer Seitenzahl (d. h.: Kreise) sind. Das Volumen des Pyramidenstumpfes beträgt nach Seite 168

$$V = \frac{1}{3}h\,(F + \sqrt{F F_1} + F_1)$$

In diese Gleichung hat man einzusetzen für $F = \pi R^2$ und $F_1 = \pi r^2$ und erhält:

$$V = \frac{1}{3}h\,(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2) = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + R r + r^2)$$

Für $R = \frac{D}{2}$ und für $r = \frac{d}{2}$ eingesetzt, ergibt:

$$V = \frac{1}{12}\pi h\,(D^2 + D d + d^2)$$

Beweis 2

Ein Kegelstumpf entsteht durch Rotation eines Trapezes, das man sich aus einem Rechteck mit den Seiten h und r und aus einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten h und $(R - r)$ zusammengesetzt denkt. Das gesamte Rotationsvolumen ist:

$$V = h r \cdot 2\pi \frac{r}{2} + \frac{1}{2}h\,(R - r) \cdot 2\pi \left[r + \frac{R - r}{3}\right]$$

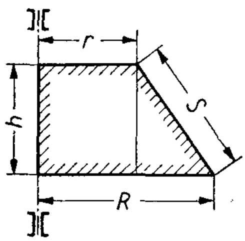


Bild 300

Durch einfache Umformungen erhält man:

$$V = \pi h r^2 + \frac{1}{3}\pi h\,(R - r)(R + 2r)$$

$$= \pi h r^2 + \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + R r - 2r^2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + R r + r^2)$$

Beweis 3

Der Rauminhalt des Kegelstumpfes läßt sich nach der Volumengleichung für das Prismoid (Seite 167) ableiten, indem man in der Gleichung

$$V = \frac{h}{6}(F + 4\,M + F_1)$$

für $F = \pi R^2$ = Inhalt des Grundkreises,

$F_1 = \pi r^2$ = Inhalt des Deckkreises und

$M = \pi \left(\frac{R + r}{2}\right)^2$ = Inhalt des Mittelschnittes einsetzt.

Man erhält:

$$V = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right]$$

$$= \frac{\pi h}{6}[R^2 + R^2 + 2\,R\,r + r^2 + r^2]$$

$$= \frac{\pi h}{3}(R^2 + R\,r + r^2)$$

Als Näherungsformeln für das Kegelstumpfvolumen V werden bisweilen folgende 2 Gleichungen verwendet:

1) V = Höhe $\times$ Mittelschnitt $= h \cdot M = \frac{\pi h}{4}(R + r)^2 = V$

Der Mittelschnitt ist der Kreis mit dem Radius: $\frac{R + r}{2}$

Er hat also den Flächeninhalt: $M = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2$

2) V = Höhe $\times$ arithmetisches Mittel der beiden Grundkreisflächen

$$= h \cdot F_m = \frac{\pi h}{2}(R^2 + r^2) = V$$

$$F_m = \frac{\pi R^2 + \pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2 + r^2)$$

Die nach diesen beiden Näherungsformeln bestimmten Werte für das Kegelstumpfvolumen sind um so genauer, je geringer der Unterschied zwischen r und R ist. Ist $r = R$, dann wird aus dem Kegelstumpf der gerade Kreiszylinder. Nur in diesem Falle geben die beiden Näherungsformeln den genauen Wert, nämlich: $V = \pi h r^2$

Mantel: $\boxed{M = \pi s (R + r)}$ s = Seitenlänge; R =, r = Radien der parallelen Endflächen

Beweis

Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes entsteht durch Rotation der Strecke s um die Drehachse. Der Schwerpunkt der umlaufenden Strecke hat von der Achse den Abstand $\frac{R + r}{2}$. Der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung ist: $2\pi\frac{R + r}{2} = \pi(R + r)$

Nach der ersten Guldinschen Regel ist: $M = s \cdot \pi (R + r)$

Oberfläche: $\boxed{O = \pi\,[R^2 + r^2 + (R + r)\,s]}$

s = Seitenlänge
R = ⎱ Radien der parallelen
r = ⎰ Endflächen

Beweis

Die Oberfläche O setzt sich aus der Mantelfläche $M = \pi\,s\,(R + r)$ und der Fläche der beiden Grundkreise $\pi\,R^2 + \pi\,r^2$ zusammen; also ist:

$$O = \pi\,s\,(R + r) + \pi\,R^2 + \pi\,r^2$$
$$= \pi[R^2 + r^2 + (R + r)\,s].$$

Kugel

Volumen: $\boxed{\begin{array}{l} V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \\ \text{oder}\quad V = \frac{1}{6}\,\pi\,d^3 \end{array}}$

r = Kugelradius
d = Kugeldurchmesser

Beweis 1

Durch Rotation eines Halbkreises um seinen Durchmesser (Seite 157) entsteht eine Kugel. Die rotierende Halbkreisfläche hat den Inhalt $f = \frac{\pi r^2}{2}$.

Ihr Schwerpunktsabstand von der Achse beträgt: $r_{s_2} = \frac{4\,r}{3\,\pi}$ (Seite 149).

Der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung ist: $2\,\pi\,r_{s_2} = 2\,\pi \cdot \frac{4\,r}{3\,\pi}$. Nach der zweiten Guldinschen Regel ist:

$$V = f \cdot 2\pi\,r_{s_2} = \frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\,\pi \cdot \frac{4\,r}{3\,\pi} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

(Als Gedächtnisstütze für diese außerordentlich wichtige Formel kann man sich den folgenden kleinen Scherzvers merken:

„Bedächtig kommt einhergeschritten: 4 Drittel π mal r zur Dritten!")

Setzt man in die Gleichung für das Kugelvolumen für $r = \frac{d}{2}$ ein, so erhält man die in der Technik für das Kugelvolumen übliche Gleichung:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\,\pi\,d^3.$$

Beweis 2

Das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius r ist gleich dem Volumen eines Restkörpers, der dadurch entsteht, daß aus einem Zylinder mit dem Radius r und der Höhe r in Achsrichtung ein gerader Kegel von dem gleichen Radius r und derselben Höhe r ausgebohrt wird. Werden die Halbkugel und der Restkörper durch eine parallele Ebene zur Grundfläche im Abstande h_1 geschnitten, so ist, wie die im Bild 301 gegenübergestellten beiden Achsschnitte zeigen, für die

	Halbkugel:	und den Restkörper:

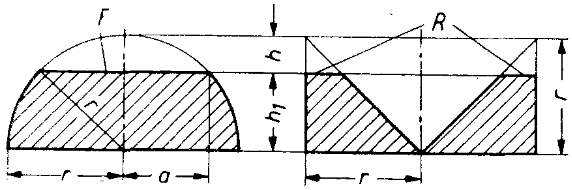


Bild 301

Schnittfläche:	Eine Kreisfläche F	eine Kreisringfläche R
mit dem Radius:	$a = \sqrt{r^2 - h_1^2}$	r und h_1
und dem Inhalt:	$F = \pi (r^2 - h_1^2)$	$R = \pi r^2 - \pi h_1^2$

Die Inhalte der beiden Schnittflächen sind also gleich. Nach dem Cavalierischen Grundsatz haben somit beide Körper denselben Rauminhalt. Das Volumen des Restkörpers bestimmt man als die Differenz der Rauminhalte von Zylinder und Kegel. Es ist:

$$V = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Der Rauminhalt der Halbkugel ist also $\frac{2}{3} \pi r^3$, und somit ist das

$$\text{Kugelvolumen: } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Oberfläche:
$$\boxed{\begin{aligned} O &= 4 \pi r^2 \\ \text{oder} \quad O &= \pi d^2 \end{aligned}}$$

in Worten:

Die Oberfläche einer Kugel ist 4mal so groß wie der Inhalt des größten Kugelschnittkreises

oder:

Die Oberfläche einer Kugel ist ebenso groß wie der Mantel des Zylinders, der sich um sie beschreiben läßt.

Beweis 1

Durch Rotation einer Halbkreisperipherie um ihren Durchmesser entsteht die Kugeloberfläche. Die Länge der rotierenden Linie beträgt: $l = \pi \cdot r$. Der Abstand des Schwerpunktes der Halbkreisperipherie von der Achse beträgt: $r_{s_1} = \frac{2r}{\pi}$ (Seite 149).

Der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung:

$$2 \pi r_{s_1} = 2 \pi \cdot \frac{2r}{\pi} = 4r.$$

Nach der ersten Guldinschen Regel ist

$$O = l \cdot 2 \pi r_{s_1} = \pi r \cdot 4r = 4 \pi r^2$$

Beweis 2

Man stelle sich die Kugel aus unendlich vielen und somit unendlich kleinen Pyramiden zusammengesetzt vor, die ihre Spitzen sämtlich im Kugelmittelpunkt haben. Sodann denke man alle diese Pyramiden zu einer Pyramide vereinigt, so daß dann also die Kugel als eine Pyramide mit der Grundfläche O und der Höhe r aufzufassen ist. Ihr Volumen beträgt somit:

$$V = \frac{1}{3} O\, r$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} O \cdot r; \text{ hieraus: } O = 4 \pi r^2$$

Kugelabschnitt oder -segment

Volumen:

$$\boxed{\begin{aligned} & V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) \\ \text{oder } & V = \frac{\pi h^2}{6}(3d - 2h) \\ \text{oder } & V = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + h^2) \end{aligned}}$$

r = Kugelradius
d = Kugeldurchmesser
h = Höhe des Kugelabschnittes
a = Radius des Grundkreises des Abschnittes

Beweis

Entsprechend dem Beweise 2 für das Kugelvolumen ist hier nach dem Cavalierischen Satz der oberhalb des Schnittkreises F gelegene Kugelabschnitt gleich dem Restkörper, der gebildet wird aus der Differenz des Zylinders von der Höhe h und dem Grundkreisradius r minus dem Kegelstumpf von der Höhe h und den Grundkreisradien r und h_1.

Das Volumen des Restkörpers ist also:

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(r^2 + h_1^2 + r h_1)$$

Da nun aber $h_1 = r - h$ ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}[r^2 + r^2 - 2rh + h^2 + r^2 - rh] \\ &= \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(3r^2 - 3rh + h^2) \\ &= \pi r^2 h - \pi r^2 h + \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} \\ &= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h); \quad \text{Für } r = \frac{d}{2} \text{ eingesetzt:} \end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi h^2}{6}(3d - 2h)$$

Der Radius des Grundkreises des Kugelabschnittes werde mit a bezeichnet. Er ist gleichzeitig die Höhe des rechtwinkligen Dreieckes in dem Halbkreis. Nach dem Höhensatz ist: $a^2 = h(2r - h)$. Nach r aufgelöst, ergibt sich: $r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$. Diesen Wert in die Gleichung für V eingesetzt, ergibt:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}\left(3 \cdot \frac{a^2 + h^2}{2h} - h\right)$$

$$= \frac{\pi h^2}{3}\left(\frac{3a^2 + 3h^2 - 2h^2}{2h}\right)$$

$$= \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2)$$

Kugelausschnitt oder -sektor (Bild 302)

Volumen: $$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi r^2 h \quad \text{oder} \quad V = \frac{1}{6}\pi d^2 h}$$

r = Kugelradius
d = Kugeldurchmesser
h = Höhe des Kugelabschnittes

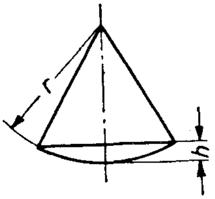


Bild 302

Beweis

Das Volumen des Kugelausschnittes besteht aus dem Volumen des Kugelabschnittes $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ vermehrt um das Volumen des darüber befindlichen Kegels. Es ist also: $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{1}{3}\pi a^2 h_1$. Nach dem Höhensatz ist aber: $a^2 = h(2r - h)$. Ferner ist: $h_1 = r - h$. Mit diesen beiden Werten erhält man:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{1}{3}\pi h(2r - h)(r - h)$$

Durch Auflösen der Klammern und Zusammenfassen folgt:

$$V = \pi h^2 r - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2}{3}\pi r^2 h - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

Für $r = \frac{d}{2}$ eingesetzt, ergibt sich: $V = \frac{1}{6}\pi d^2 h$.

Kugelkappe oder Kalotte (Bild 303)

Wie auf Seite 157 gezeigt wurde, versteht man unter einer Kugelkappe oder Kalotte die krumme Oberfläche eines Kugelsegmentes.

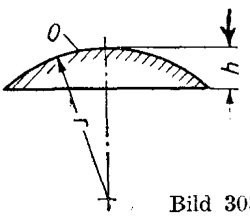


Bild 303

Kalotte: $\boxed{O = 2\pi r h}$

r = Kugelradius
h = Höhe des Kugelsegmentes

Beweis

Die in dem Beweise 2 für die Kugeloberfläche angestellten Betrachtungen gelten auch hier, wo es sich nicht um die ganze Kugel und ihre Oberfläche, sondern nur um eine Kugelkappe und den zugehörigen Kugelausschnitt (= Sektor) handelt.

Es ist also in $V = \frac{1}{3} O \cdot r$ für V der Rauminhalt des zugehörigen Kugelausschnittes einzusetzen. Man erhält:

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} O \cdot r;$$

$$O = 2\pi r h$$

Archimedes hat den Flächeninhalt der Kugelkappe folgendermaßen angegeben:

Der Flächeninhalt einer Kugelkappe ist gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Radius ϱ gleich dem Abstand des Scheitels der Kappe von einem Punkt der Grundkreisperipherie ist (Bild 304).

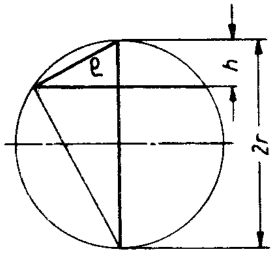


Bild 304

Beweis

Nach dem Lehrsatz des Euklid ist in dem rechtwinkligen Dreieck über dem Halbkreis: $\varrho^2 = h \cdot 2r$. Der Inhalt des Kreises mit dem Radius ϱ ist $\pi\varrho^2 = \pi \cdot h\, 2r = 2\pi r h$. Dieser Wert ist der gleiche wie der oben für die Kalotte abgeleitete.

Kugelschicht (Bild 305)

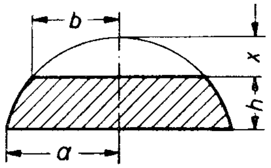


Bild 305

Volumen: $\boxed{V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)}$

a = } Halbmesser der parallelen Endflächen
b = }
h = Höhe der Schicht (Abstand der beiden parallelen Endflächen)

Beweis

Das Volumen einer Kugelschicht berechnet sich als Differenz zweier Kugelabschnitte mit den Grundkreishalbmessern a und b. Der Kugelabschnitt mit dem Halbmesser a habe die Höhe h + x und das Volumen V_1, während der Kugelabschnitt mit dem Halbmesser b die Höhe x und das Volumen V_2 habe:

$$V = V_1 - V_2;$$

Für V_1 und V_2 setze man die Volumen ein:

$$V = \frac{1}{6}\pi(h + x)[3a^2 + (h + x)^2] - \frac{1}{6}\pi x(3b^2 + x^2)$$

$$= \frac{1}{6}\pi[3a^2(h+x)+(h+x)^3-3b^2x-x^3]$$
$$= \frac{1}{6}\pi[3a^2h+3a^2x+h^3+3h^2x+3hx^2+x^3-3b^2x-x^3]$$
$$= \frac{1}{6}\pi[3a^2h+h^3+3x(a^2+h^2+hx-b^2)]$$

Zur Vereinfachung des dritten Gliedes in der eckigen Klammer nimmt man folgende Nebenrechnung vor:
Die zweimalige Anwendung des Höhensatzes für die im Halbkreis gelegenen rechtwinkligen Dreiecke mit den Höhen a und b ergibt:

$$\begin{aligned} a^2 &= (h+x)[2r-(h+x)] \\ &= (h+x)(2r-h-x) \\ \text{und } b^2 &= x(2r-x) \end{aligned}$$

Der aus dieser Gleichung sich ergebende Wert für $2r - x = \frac{b^2}{x}$ wird in die Gleichung für a^2 eingesetzt.

$$a^2 = (h+x)\left(\frac{b^2}{x}-h\right) = (h+x)\left(\frac{b^2-hx}{x}\right)$$
$$a^2x = b^2h + b^2x - h^2x - hx^2;$$
$$a^2x + h^2x + hx^2 - b^2x = b^2h$$

Der dreifache Wert hiervon ist das dritte Glied in der eckigen Klammer für das Volumen. Man erhält durch Einsetzen den Rauminhalt der Kugelschicht:

$$V = \frac{1}{6}\pi(3a^2h + h^3 + 3b^2h)$$
$$= \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$$

Denkt man sich die Endfläche mit dem Radius b parallel mit sich verschoben, so wird allmählich aus der Kugelschicht der Kugelabschnitt. Im Grenzfall für $b = 0$ geht das Volumen für die Kugelschicht über in das Volumen des Kugelabschnittes: $V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$.

Kugelzone

$\boxed{M = 2\pi r h}$ r = Kugelradius, h = Höhe der Schicht

Der krummflächige Teil einer Kugelschicht ist ihre Mantelfläche; man nennt sie Kugelzone. Ihr Flächeninhalt bestimmt sich als Differenz zweier Kugelkappen mit den Höhen $(h + x)$ und x; also:

$$\begin{aligned} M &= 2\pi r(h+x) - 2\pi r x \\ &= 2\pi r h + 2\pi r x - 2\pi r x \\ &= 2\pi r h. \end{aligned}$$

Die Formel für die Kugelzone ist die gleiche wie für die Kugelkappe. In beiden Gleichungen ist r der Kugelradius und h die Höhe der Kappe bzw. der Zone.

Hohlkugel

Volumen: $$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) \quad \text{oder } V = \frac{1}{6}\pi (D^3 - d^3)}$$

R = Außenradius
r = Innenradius
D = Außendurchmesser
d = Innendurchmesser

Beweis

Das Volumen V der Hohlkugel bestimmt man als Differenz des Volumens der Vollkugel $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ minus Volumen des innen liegenden kugelförmigen Hohlraumes $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$; also:

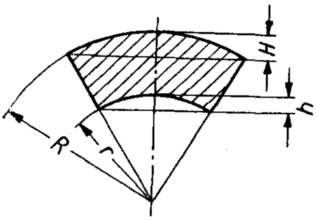
$$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

Setzt man für $R = \frac{D}{2}$ und für $r = \frac{d}{2}$ ein, so erhält man:

$$V = \frac{4}{3}\pi \left[\left(\frac{D}{2}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3\right] = \frac{4}{3}\pi \left[\frac{D^3}{8} - \frac{d^3}{8}\right] = \frac{1}{6}\pi (D^3 - d^3)$$

Hohlkugel-Ausschnitt oder Hohlkugelsektor (Bild 306)

Volumen: $$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi \frac{h}{r}(R^3 - r^3)}$$



R = Außenradius
r = Innenradius
h = Höhe des zum inneren Kugelausschnitt gehörenden Segmentes

Bild 306

Beweis

Das Volumen V des Hohlkugelausschnittes bestimmt sich als die Differenz des Volumens V_1 des Kugelausschnittes mit dem Radius R und der Höhe H minus Volumen V_2 des Kugelausschnittes mit dem Radius r und der Höhe h; also: $V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Wie man aus Bild 306 erkennen kann, verhält sich nach dem Strahlensatz:

$$\frac{R}{r} = \frac{R - H}{r - h}$$

Diese Gleichung nach H aufgelöst, ergibt:

$$\frac{R}{r}(r - h) = R - H; \quad R - \frac{R}{r}h = R - H; \quad H = \frac{R}{r}h$$

Diesen Wert für H setzt man in die letzte Gleichung für das Volumen des Hohlkugelausschnittes ein und erhält:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R}{r} h - \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$$

Zylindrischer Ring

Volumen: $\boxed{V = 2\pi^2 R r^2 \quad \text{oder } V = \frac{\pi^2 D d^2}{4}}$

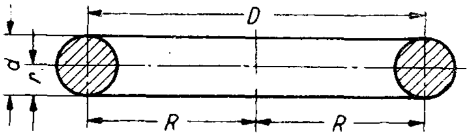


Bild 307

Beweis

Durch Anwendung der zweiten Guldinschen Regel bestimmt man den Rauminhalt $V = f \cdot 2\pi r_{s_2}$; hierin ist f der Flächeninhalt der rotierenden Fläche $f = \pi r^2$. Ferner ist r_{s_2} der Schwerpunktsabstand der rotierenden Fläche von der Achse: $r_{s_2} = R$. Es ist also:

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$$

Setzt man für die Halbmesser die entsprechenden Durchmesser ein, so erhält man:

$$V = 2\pi^2 \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 D d^2}{4}$$

Aufgaben

43) Wieviel wiegen 4 m Rundstahl von 40 mm ⌀? (Wichte: 7,85)

44) Wieviel wiegen 200 m Aluminiumdraht von 3 mm ⌀? (Wichte: 2,8)

45) Eine Rolle Stahldraht von 5 mm ⌀ wiegt 77 kg. Wieviele Meter sind es? (Wichte: 7,85)

46) Hohlmaße sollen nach der Eichordnung doppelt so hoch wie weit sein. Welche Höhe H und Durchmesser D besitzt ein zylindrisches 5 l-Maß?

47) Aus einem 3 m langen Balken von quadratischem Querschnitt (Kantenlänge 80 cm) soll eine Walze von größtmöglichem Durchmesser gedrechselt werden. Wie groß ist der Holzabfall in dm^3 und in %?

48) Ein zylindrischer eiserner Behälter von 20 m ⌀ und 25 m Höhe soll entrostet werden. Wieviel Quadratmeter beträgt die zu entrostende Fläche? (Mantelfläche und 1 Kreisfläche)

49) Ein zylindrischer Wasserbehälter ist 3 m lang und hat 2 m Durchmesser. Wieviele Liter Wasser faßt er und wie groß ist das Wassergewicht? (Wichte: 1)

50) Ein Rechteck mit den Seiten a und b (a > b) rotiert das eine Mal um die Seite a, das andere Mal um die Seite b. Wie verhalten sich a) die Rauminhalte und b) die Mäntel der durch die Drehung entstehenden Zylinder zueinander?

51) Die Teilstrichentfernung eines zylindrischen Meßglases mit der lichten Weite D = 40 mm ist für je 5 cm³ angebracht. Wie groß ist die Entfernung zweier aufeinander folgender Teilstriche?

52) Wieviel wiegt eine Bronzebuchse mit dem Außendurchmesser: 60 mm, Innendurchmesser: 50 mm und Länge: 100 mm? (Wichte: 8,7).

53) Wie schwer ist der nach DIN 322 genormte Schmierring (Bild 308) aus Messing? (Wichte: 8,5)

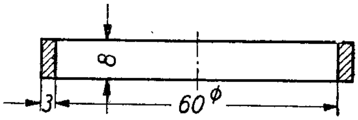


Bild 308

54) Ein 100 mm langes Stück Rundstahl 30 ⌀ ist nach Bild 310 an dem einen Ende abzuschrägen. Das fertige Stück hat eine Kante K (siehe Grundriß)!

Wieviel % beträgt der Materialabfall?

(Anleitung: Es fallen 2 Zylinderhufe fort.)

55) Dasselbe Stück Rundstahl der vorhergehenden Aufgabe ist nach Bild 309 kegelförmig abzudrehen.

Wieviel % beträgt der Materialabfall?

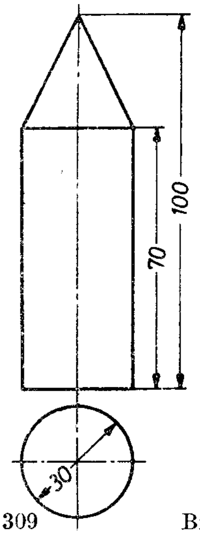


Bild 309

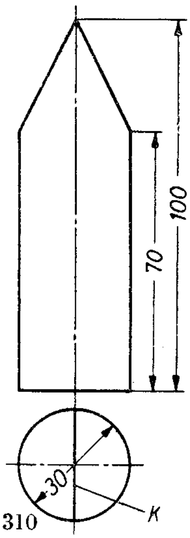


Bild 310

56) Wie schwer ist das nebenstehend skizzierte Schrumpfband? (Bild 311) (Wichte: 7,85)

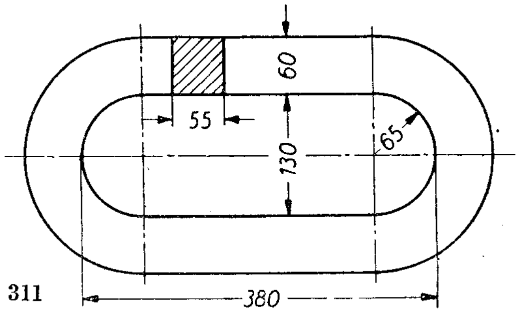


Bild 311

57) Wie schwer ist der nebenstehend skizzierte Schrumpfring? (Bild 312) (Wichte: 7,85)

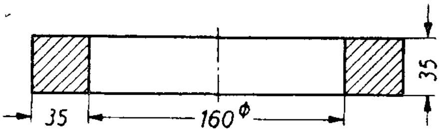


Bild 312

58) Wie groß ist das Volumen des Kreuzstückes? (Bild 313)

(Anleitung: Das Volumen des Kreuzstückes ist gleich der Summe zweier Zylindervolumina, vermindert um die Summe der Volumina von 8 Zylinderhufen!)

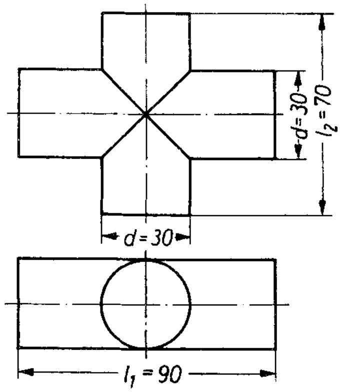


Bild 313

59) Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b (a > b) rotiert das eine Mal um die größere Kathete a, das andere Mal um die kleinere Kathete b. Wie verhalten sich

a) die Rauminhalte,

b) die Mäntel der durch die Drehung entstehenden Körper zueinander?

60) Aus Blech soll ein kegelförmiger Trichter von 60 mm Durchmesser und 40 mm Höhe gefertigt werden. Wie groß sind

a) die Mantellinie,

b) der Flächeninhalt des Trichtermantels,

c) der Radius des Kreisausschnittes, aus dem der Trichter zusammengebogen wird,

d) die Länge des Bogens des Kreisausschnittes,

e) der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnittes?

61) Aus Quadratstahl 50□ soll der Amboßeinsatz nach Bild 314 geschmiedet werden.

Es ist die Länge x des Rohlings zu berechnen, wenn für Abbrand 5% anzunehmen ist.

(Anleitung: Das Volumen des zu berechnenden strichpunktiert gezeichneten Quadratstahles von der Länge x ist gleich dem 1,05fachen Volumen des Kegels vermehrt um das 1,05fache Volumen des Pyramidenstumpfes.)

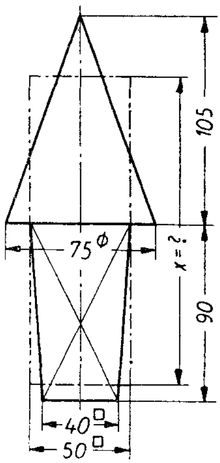


Bild 314

62) Eine Halbkreisfläche wird zu einem **Kegelmantel** zusammengebogen.
   a) Welchem Stück des Kegels entspricht der Radius der Halbkreisfläche? (Grundkreisradius: r, Mantellinie: s, Höhe: h),
   b) Wie drückt sich mit dieser Größe der Umfang des Halbkreises aus?
   c) Welche Gleichung kann man aufstellen unter Berücksichtigung, daß der Halbkreisumfang gleich dem Umfang des Kegelgrundkreises wird?
   d) Welche Beziehung zwischen Kegelmantellinie s und Grundkreisdurchmesser 2 r ergibt sich aus dieser Gleichung?
   e) Wie ist das als Achsschnitt des Kegels sich ergebende Dreieck beschaffen?

63) Eine Viertelkreisfläche vom Radius 40 cm wird zu einem **Kegelmantel** aufgebogen. Wie groß sind
   a) der Grundkreisradius r,
   b) die Höhe h und
   c) der Rauminhalt V des entstehenden Kegels?

64) Ein **Kelchglas** mit dem oberen Durchmesser 2 R und der Höhe H ist bis zur Hälfte seiner Höhe gefüllt. Wie groß sind in diesem Falle im Vergleich zum voll gefüllten Glase
   a) die Flüssigkeitsmenge und
   b) der benetzte Teil des Kelchglases?

65) Wie groß ist der Rauminhalt des nebenstehend skizzierten Körpers? (Bild 315)

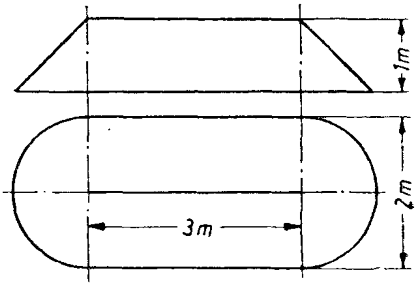


Bild 315

66) Setzt man 2 gerade Kreiskegel mit ihren gleichgroßen Grundflächen G aneinander, so ist die Länge der Verbindungslinie H ihrer Spitzen gleich der Summe der beiden Kegelhöhen H_1 und H_2. Wie drückt sich das Volumen V des so entstandenen **Doppelkegels** durch G und H aus?

67) Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a rotiert um eine Seite. Wie groß ist das Volumen V des dadurch entstehenden **Doppelkegels**?

68) Ein Trapez mit der Höhe $h = 4$ cm und den beiden parallelen Seiten $a = 12$ cm und $b = 6$ cm rotiert um die größere Seite a. Wie groß ist das Volumen V des dadurch entstehenden Rotationskörpers?

69) Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 3$ cm und $b = 4$ cm rotiert
   a) um die Kathete a,
   b) um die Kathete b und
   c) um die Hypotenuse c.

   Wie groß sind die Volumina und die Oberflächen der entstehenden Rotationskörper?

70) Ein Quadrat mit der Seite a rotiert um eine seiner beiden Diagonalen. Wie groß ist das Volumen V und die sich aus 2 Mänteln zusammensetzende Oberfläche O des entstehenden Doppelkegels?

71) Wie groß sind das Volumen und das Gewicht eines Ringes [$\gamma = 7{,}85$], dessen Außendurchmesser $D_a = 4000$ mm, Innendurchmesser $D_i = 3400$ mm und Breite $B = 500$ mm betragen?

72) Wie groß sind für den Radkranz des Schwungrades nach Bild 316

a) das Volumen in dm^3,

b) das Gewicht in kg? ($\gamma = 7{,}3$)

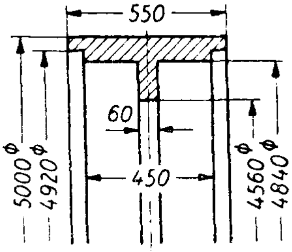


Bild 316 *Schwungrad* GG-18

73) Wieviel wiegt der Zahnradkörper nach Bild 317? ($\gamma = 7{,}3$)

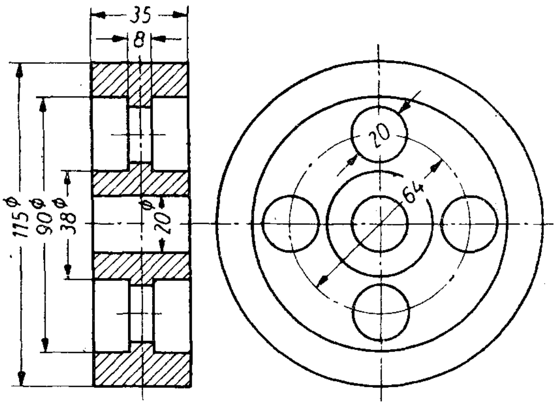


Bild 317 *Zahnrad-Rohling* GS-45

74) Ein **Kegelstumpf** hat die Höhe h = 30 cm und die beiden Grundkreisdurchmesser D = 10 cm und d = 8 cm. Wie groß sind das Volumen V, der Mantel M und die Oberfläche O?

75) Ein kleiner **Haushaltseimer** hat folgende Abmessungen: Oberer Durchmesser d = 23 cm, unterer Durchmesser D = 18 cm und Höhe h = 19 cm.

Wieviel Liter faßt der Eimer?

76) Wieviel Kilogramm wiegt der Rohling des Spannschlosses nach Bild 318? ($\gamma = 7{,}8$)

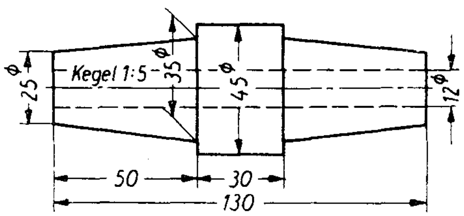


Bild 318 *Spannschloß St 42*

77) Wieviel wiegen 100 Senkniete 22 ⌀ mit den Abmessungen des Bildes 319? (Wichte: 7,86)

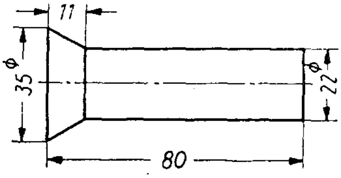


Bild 319

78) Wie groß ist das Volumen der kegelig ausgebohrten Büchse nach Bild 320? (Anleitung: Man bestimme das Volumen als Summe zweier Zylinder vermindert um einen Kegelstumpf!)

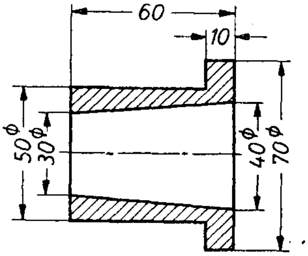


Bild 320

79) Wieviel kg wiegt der Kreuzkopfzapfen? (Bild 321) (Wichte: 7,85)

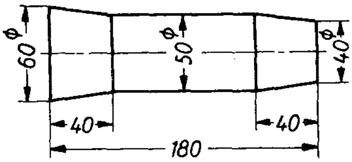
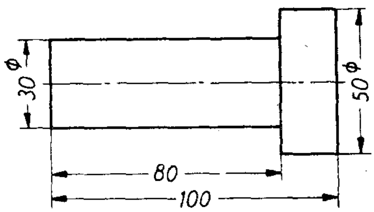


Bild 321

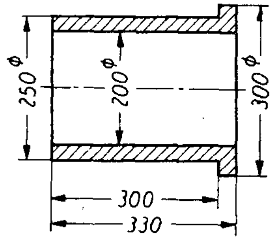
80) Wie groß sind die Gewichte der 8 Einzelteile Bild 322a...h?

a)



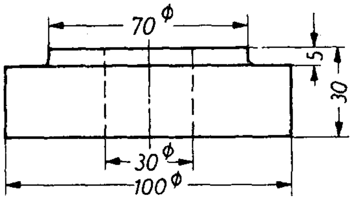
Bolzen St 50 ($\gamma = 7{,}86$)

b)



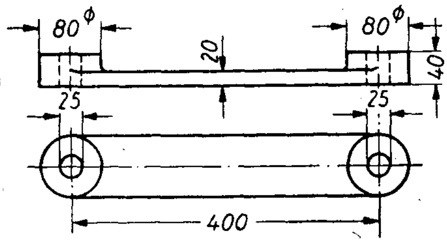
Buchse Ms 58 ($\gamma = 8{,}6$)

c)



Ankerplatte GG-18 ($\gamma = 7{,}3$)

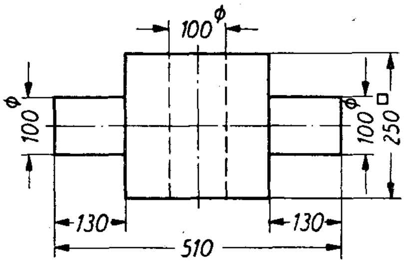
d)



Kurbel GG-18 ($\gamma = 7{,}3$)

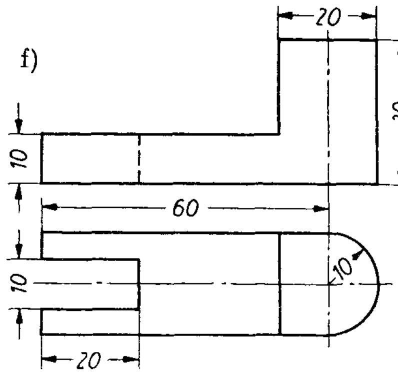
Bild 322a...d

e)



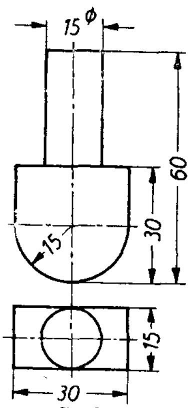
Kreuzkopf St 60 ($\gamma = 7{,}86$)

f)



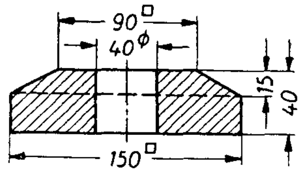
Hebel St 42 ($\gamma = 7{,}8$)

g)



Gelenkbolzen St 34 ($\gamma = 7{,}8$)

h)



Ankerplatte GG-18 ($\gamma = 7{,}3$)

Bild 322 e...h

81) Wie schwer ist eine Korkkugel von 1 m Durchmesser? (Wichte: 0,24)

82) Wieviel wiegt eine Stahlkugel von 5 mm Durchmesser? (Wichte: 7,85)

83) Welchen Durchmesser d hat eine Messingkugel (Wichte: 8,5) von 1 kg Gewicht?

84) Wieviel wiegen 100 Stahlkugeln von 30 mm ⌀? (Wichte: 7,85)

85) Wieviel % beträgt der Materialabfall, wenn aus einem Würfel die größtmögliche Kugel gedreht wird?

86) Wie verhalten sich
   a) die Inhalte,
   b) die Oberflächen zweier Kugeln zueinander, von denen die eine einen doppelt so großen Durchmesser wie die andere hat?

87) Wieviele Kugeln vom Durchmesser d = 10 mm wiegen so viel wie eine Kugel gleichen Werkstoffes vom Durchmesser
   a) D = 20 mm,
   b) D = 30 mm und
   c) $D = n \cdot d$?

88) Eine Holzkugel taucht in Wasser (Wichte 1) schwimmend bis zur Hälfte ein. Wie groß ist die Wichte des Holzes?

(Anleitung: Vgl. Aufgabe 19 auf Seite 173).

89) Einer Halbkugel ist die größte Kugel eingeschrieben. Wie groß ist das Volumen des Restkörpers: Halbkugel minus größte Kugel? Wie verhält sich das Restkörpervolumen zu dem Volumen der eingeschriebenen Kugel?

90) a) Auf die Grundfläche einer Halbkugel vom Radius r ist ein Kegel mit der Höhe r gesetzt. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Körpers? (Bild 323a)

b) Eine Halbkugel mit dem Radius r wird kegelförmig ausgebohrt. Wie groß ist das Volumen des Restkörpers? Wie verhält sich das Volumen des Restkörpers zu dem Volumen der Halbkugel? (Bild 323b)

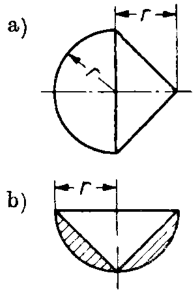


Bild 323

91) Ein Zylinder und eine Kugel haben gleichen Durchmesser und gleiches Volumen. Wie groß ist die Höhe des Zylinders im Vergleiche zum Kugeldurchmesser?

92) Von 2 aus Blech gefertigten Litermaßen hat das eine die Gestalt eines Zylinders, dessen Höhe h doppelt so groß wie sein Durchmesser 2 r ist; das andere ist eine halbkugelförmige Schale.

a) Wie groß muß der Radius ϱ der Schale gewählt werden im Vergleich zum Zylinderhalbmesser r?

b) Wie groß sind die von der Flüssigkeit benetzten Flächen O_1 des Zylinders und O_2 der Schale?

c) In welchem Verhältnis stehen die beiden Flächen zueinander?

93) Einer Halbkugel ist der größte gerade Kegel eingeschrieben. Der Kegel hat die gleiche Grundfläche wie die Halbkugel; seine Höhe ist gleich dem Kugelradius. Wie verhält sich das Kegelvolumen zu dem der Halbkugel?

94) Wie verhalten sich die Rauminhalte eines Kegels, einer Kugel und eines Zylinders zueinander, die demselben Würfel eingeschrieben sind?

(Die Lösung dieser Aufgabe ist als der **Satz des Archimedes** bekannt.)

(Anleitung: Bild 324 mit den eingetragenen Bezeichnungen stellt den gemeinsamen Achsschnitt des Kegels, der Kugel und des Zylinders dar. Die Kegelspitze liegt in der Mitte einer Würfelfläche.)

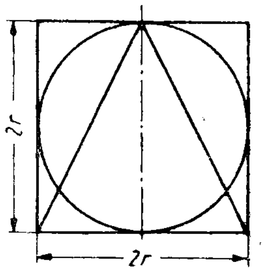


Bild 324

95) Wie schwer ist die im Achsschnitt (Bild 325) gezeichnete plankonvexe Linse aus Flintglas (Wichte: 3) vom Durchmesser $D = 60$ mm und der Stärke $h = 20$ mm?

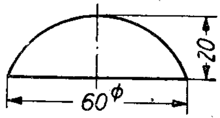


Bild 325

96) Eine bikonvexe Linse (Wichte: 3) mit beiderseitig gleich großer Krümmung ist in der Mitte 20 mm stark und hat 400 mm Durchmesser (Bild 326). Wie groß ist ihr Gewicht?

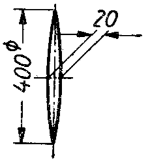


Bild 326

97) Eine Kugel von 170 mm ⌀ ist zentrisch mit einem Bohrer von 80 mm durchbohrt. Wie groß sind

a) das Volumen der Vollkugel,

b) das Volumen der ausgebohrten Kugel und

c) der prozentuale Materialabfall?

98) Ein zylindrischer Stahlblechbehälter (Bild 327) ist an seinen beiden Enden durch Kalotten von derselben Blechstärke abgeschlossen. Wie schwer ist der leere Behälter für $d = 1200$ mm; $L = 2500$ mm und $h = 200$ mm, wenn 1 m² Blech 24 kg wiegt?

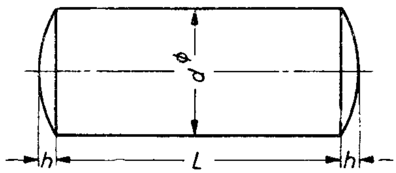


Bild 327

99) Ein zylindrischer Schwimmer mit kugelförmig gewölbten Böden hat die in Bild 328 angegebenen Abmaße.

Wie groß sind sein Volumen und seine Oberfläche?

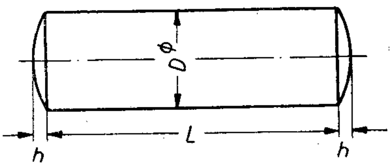


Bild 328

$L = 500$ mm
$D = 400$ mm
$h = 100$ mm

100) Wie groß ist für eine Kugel mit dem Radius $r = 6$ cm das Volumen V des Kugelabschnittes, der die Höhe $h = 3$ cm hat? Wie groß ist die Kalotte O?

101) Eine Kugel vom Radius r (Bild 329) wird von einer punktförmigen Lichtquelle L bestrahlt, die sich im Abstande a) 2 r, b) 3 r und c) $n \cdot r$ vom Mittelpunkt M der Kugel entfernt befindet. Der wievielte Teil der gesamten Kugeloberfläche wird beleuchtet?

Anleitung:

Satz des Euklid: $r^2 = n r \cdot (r - h)$

Hieraus h bestimmen!

Beleuchteter Teil:

$K = 2 \pi r h$

Kugeloberfläche: $O = 4 \pi r^2$

Gefragt nach: $\frac{K}{O} = ?$

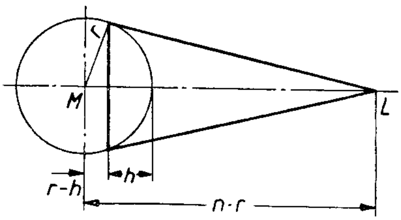


Bild 329

102) Von einer Kugel mit 10 cm ⌀ sind an 2 gegenüberliegenden Stellen durch parallele Schnitte 2 Kugelsegmente von je 1 cm Höhe abgeschnitten. Wie groß sind für die übrig bleibende Kugelschicht

a) die Höhe h,
b) die beiden Halbmesser a und b der Endflächen,
c) das Volumen V und
d) die Oberfläche O?

103) Eine Halbkugel mit dem Radius r ist im Abstande x parallel zur Grundfläche so zu schneiden, daß die abgeschnittene Kugelkappe gleich der Kugelzone ist.
Wie groß muß x sein?

104) Aus einer Holzkugel soll der dritte Teil ihres Gewichtes als Kugelausschnitt gestochen werden (Bild 330). Wie groß ist dann H?

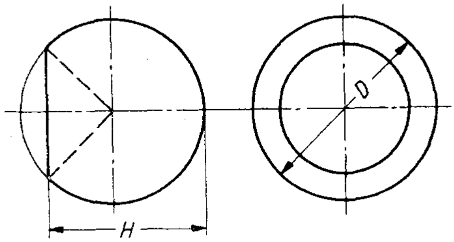


Bild 330

Teil III

Die Trigonometrie

A. Einleitung

Die Trigonometrie — auf deutsch Dreiecksmessung — ist derjenige Teil der Mathematik, der aus Seiten und Winkeln eines Dreiecks, die das Dreieck bestimmen, die übrigen Stücke des Dreiecks durch Rechnung finden läßt. Je nachdem sich die Trigonometrie mit der Berechnung ebener oder sphärischer Dreiecke beschäftigt, heißt sie ebene oder sphärische Trigonometrie. Unter sphärischen Dreiecken versteht man Dreiecke auf der Oberfläche von Kugeln. Sie werden gebildet durch drei größte Kreise einer Kugel, die sich nicht in einem Punkte schneiden; ihre Seiten sind also keine geraden Linien, sondern Teile (und zwar Bogenstücke) größter Kugelkreise. Da aber derartige Dreiecke für den Techniker und Ingenieur von untergeordneter Bedeutung sind, wird im Rahmen dieses Buches nur die ebene Trigonometrie behandelt.

Das Wort **„Trigonometrie"** übersetzt man treffender mit **„Dreiecksberechnung"**. Die Geometrie der Ebene befaßt sich mehr mit der konstruktiven Bestimmung der Dreiecksstücke und nur insoweit mit der Dreiecksberechnung, als es sich nicht um die rechnerische Bestimmung von Dreieckswinkeln handelt. Die beiden einzigen Sätze der Planimetrie, die sich mit der Größe der Dreieckswinkel befassen, sind:

1) „Die Summe der Dreieckswinkel beträgt 180°" und
2) „In jedem Dreieck liegt der längeren Seite der größere Winkel gegenüber".

Mit diesen beiden Sätzen allein kann man aber nicht aus der Länge der Seiten die Größe der Winkel berechnen.

In der ebenen Geometrie werden die Seitenlängen und Winkel eines Dreiecks durch Konstruktion bestimmt. Die Trigonometrie bedient sich hierfür lediglich der Rechnung. Beide vermögen also prinzipiell im Endeffekt dasselbe zu leisten, die eine durch Konstruktion, die andere lediglich durch Rechnung.

Der praktische Wert der Trigonometrie gegenüber der konstruktiven Geometrie besteht jedoch darin, daß sich die Genauigkeit einer Rechnung viel bequemer und weiter vorwärtstreiben läßt als die einer geometrischen Konstruktion.

Das Hilfsmittel der Trigonometrie sind die *trigonometrischen Funktionen*, die man auch goniometrische Funktionen oder einfach „Winkelfunktionen" nennt. Es gibt 6 trigonometrische Funktionen, von denen heute nur noch 4 gebraucht werden, und zwar die Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion. Unter einer Funktion versteht man allgemein die Abhängigkeit einer veränderlichen Größe von einer oder mehreren anderen. **„Funktion"** heißt also **„Abhängigkeit"**. In der Trigonometrie im besonderen versteht man unter einer trigonometrischen Funktion die Abhängigkeit der Größe eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck von dem Verhältnis (= Quotient) zweier Dreiecksseiten.

Bevor wir näher auf die trigonometrischen Funktionen eingehen, wollen wir uns zunächst mit den beiden Arten der Winkelmessung befassen:

a) **Die Winkelmessung im Gradmaß** ist die in der Planimetrie und niederen Mathematik allgemein übliche. Man geht von der Größe des rechten Winkels aus und sagt:

Ein rechter Winkel beträgt 90°.
1° besteht aus $60'$ (= 60 Winkelminuten).
$1'$ besteht aus $60''$ (Winkelsekunden.)
1° besteht also aus $60'' \cdot 60 = 3600''$.

Beispiele

$$0{,}1^\circ = 6' = 360''$$
$$14{,}56^\circ = 14^\circ + 0{,}56^\circ = 14^\circ + 33{,}6' = 14^\circ\, 33'\, 36''$$

oder umgekehrt:

$$10^\circ\, 10'\, 10'' = 10^\circ\, 10{,}167' = 10{,}169^\circ$$
$$8^\circ\, 30'\, 36'' = 8^\circ\, 30{,}6' = 8{,}51^\circ$$

b) **Die Winkelmessung im Bogenmaß** wird bevorzugt in der höheren Mathematik verwendet. Beschreibt man um den Scheitel S (Bild 331) eines Winkels mit einem beliebigen Radius r den Kreisbogen und bezeichnet die Länge des durch die beiden Winkelschenkel begrenzten Kreisbogens mit b, so beträgt die Länge dieses Bogens, wie auf Seite 138 gezeigt wurde,

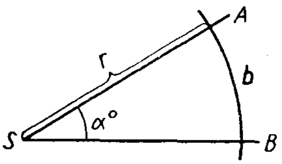


Bild 331

$b = \frac{2\pi r \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$. Dividiert man beide Seiten durch r, so erhält man $\frac{b}{r} = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}$. Das Verhätnis $\frac{b}{r}$ ist eine unbenannte Zahl. Man nennt sie das Bogenmaß des zugehörigen Winkels. Das Bogenmaß gibt an, wie oft der Radius des Kreises in dem Bogen enthalten ist. Der Quotient $\frac{b}{r}$ wird bezeichnet mit Arcus α°, abgekürzt arc α° oder auch $\widehat{\alpha}$ [arcus ist lateinisch und heißt: Bogen].

Zusammenfassung:

$$\frac{\text{Bogen}}{\text{Halbmesser}} = \frac{b}{r} = \operatorname{arc}\alpha^\circ = \boxed{\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ}$$

Wählt man die Länge des Kreisradius gleich der Längeneinheit, also = 1, so geht das Verhältnis $\frac{b}{r}$ über in b, d. h. das Bogenmaß eines Winkels ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis. Das Bogenmaß b eines Winkels gibt an, wie oft in dem mit dem Radius 1 beschriebenen Bogen die Längeneinheit (also der Kreisradius) enthalten ist.

Zwischen der Winkelmessung im Gradmaß und der im Bogenmaß besteht folgende Beziehung:

Dem	Gradmaß	360°	entspricht	das	Bogenmaß	2π
„	„	180°	„	„	„	π
„	„	90°	„	„	„	$\frac{\pi}{2}$
„	„	60°	„	„	„	$\frac{\pi}{3}$
„	„	45°	„	„	„	$\frac{\pi}{4}$
„	„	30°	„	„	„	$\frac{\pi}{6}$

Die vorstehende Umrechnung dieser oft verwendeten 6 Winkel präge man sich als wichtig ein. Die Umrechnung eines im Gradmaß gegebenen Winkels in Bogenmaß und umgekehrt zeigen die nachstehenden Beispiele:

Wie groß ist das Bogenmaß $\widehat{\alpha}$ des Winkels

a) $36° = ?$ *Lösung* $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180°} \cdot 36° = \frac{\pi}{5} = 0{,}628$

b) $42°50' = ?$ $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180°} \cdot 42{,}83° = 0{,}748$

c) $175{,}4° = ?$ $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180°} \cdot 175{,}4° = 3{,}061$

Wie groß ist das Gradmaß $\alpha°$ des im Bogenmaß gegebenen Winkels

a) $0{,}68 = ?$ *Lösung* $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot 0{,}68 = 39°$

b) $1 = ?$ $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot 1 = 57{,}2958° = 57°17'$

c) $30 = ?$ $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot 30 = 1720°$

d) $\frac{2}{5}\pi = ?$ $\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{2}{5}\pi = 72°$.

B. Die 4 trigonometrischen Funktionen für spitze Winkel

1. sin, cos, tg und ctg im rechtwinkligen Dreieck

In dem rechtwinkligen Dreieck ABC des Bildes 332 mit dem rechten Winkel an der Ecke C sind die beiden Katheten a und b und die Hypotenuse c.

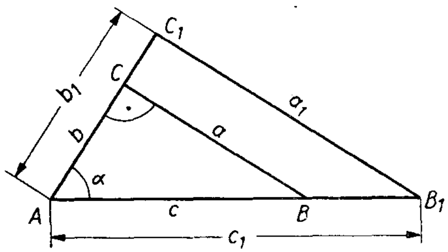


Bild 332

Zieht man zur Kathete a eine beliebige Parallele, die die Schenkel des Winkels α in B_1 und C_1 schneidet, so erhält man das rechtwinklige Dreieck AB_1C_1, das dem ursprünglichen ähnlich ist (Ähnlichkeitslage). In ihm sind die Katheten a_1 und b_1 und die Hypotenuse c_1. Nach dem Strahlensatz verhält sich $a : c = a_1 : c_1$. Wenn auch a_1 von a und c_1 von c verschieden sind, so sind aber doch die aus ihnen gebildeten Quotienten gleich groß. Zu einem bestimmten Winkel α im rechtwinkligen Dreieck gehört stets ein bestimmtes Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse. Kennt man die Größe dieses Verhältnisses, so liegt umgekehrt die Größe des Winkels α fest. Das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete, oder kurz: „Gegenkathete" genannt, zur Hypotenuse nennt man den sinus des Winkels, abgekürzt: sin. also:

$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$ [Lies: Sinus Alpha gleich a durch c]

Unter dem Kosinus des Winkels α, abgekürzt $\cos\alpha$, versteht man das Verhältnis der anliegenden Kathete b zur Hypotenuse c; also:

$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$ [Lies: Kosinus Alpha gleich b durch c]

Unter dem Tangens des Winkels α, abgekürzt $\operatorname{tg}\alpha$, versteht man das Verhältnis der Gegenkathete a zur Ankathete b; also:

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$ [Lies: Tangens Alpha gleich a durch b]

Unter dem Kotangens des Winkels α, abgekürzt $\operatorname{ctg}\alpha$, versteht man das Verhältnis der Ankathete b zur Gegenkathete a; also:

$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}}$ [Kotangens Alpha gleich b durch a]

Zusammenfassung:

Es bedeutet

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Hypotenuse}}\\
\cos\alpha &= \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Hypotenuse}}\\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Ankathete}}\\
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Gegenkathete}}
\end{aligned}$$

Außer diesen vorstehenden 4 trigonometrischen Funktionen gibt es, wie bereits erwähnt, zwei weitere, die aber im allgemeinen nicht verwendet werden. Es sind dies:

Der Sekans $\alpha = \sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}$ und

der Kosekans $\alpha = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}$

Von den 4 trigonometrischen Funktionen sin, cos, tg und ctg haben der $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die Hypotenuse im Nenner, während im Zähler eine Kathete steht. Da aber die Hypotenuse die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck ist, müssen also die Werte der sin- und cos-Funktionen stets kleiner als 1 sein.

$\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sind stets kleiner als 1.

Bei den trigonometrischen Funktionen $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$ kommt die Hypotenuse nicht vor. Sie enthalten nur die Katheten.

$\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$ können jeden beliebigen Wert annehmen.

Ist	$a < b$,	dann ist	$\operatorname{tg}\alpha < 1$
„	$a > b$,	„ „	$\operatorname{tg}\alpha > 1$
„	$a = b$,	„ „	$\operatorname{tg}\alpha = 1$

Wie groß auch immer die Katheten und die Hypotenusen sein mögen, immer erhält man für die 4 trigonometrischen Funktionen dimensionslose Zahlen:

Die 4 trigonometrischen Funktionen sind Verhältniszahlen; als solche besitzen sie keine Dimensionen.

Beispiele

1) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten $a = 5$ cm und $b = 12$ cm lang.

Wie groß sind für den Winkel α die 4 trigonometrischen Funktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$?

Lösung

Die Hypotenuse c läßt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras bestimmen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13\ \text{(cm)}.$$

Aus $a = 5$ cm; $b = 12$ cm und $c = 13$ cm lassen sich die 4 Funktionen bestimmen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} = 0{,}385$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} = 0{,}923$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{12} = 0{,}417$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Die gleichen Zahlenwerte würde man erhalten, wenn $a = 5$ dm oder m oder km und $b = 12$ dm oder m oder km lang wären.

2) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete a halb so groß wie die Hypotenuse c. Wie groß sind die 4 trigonometrischen Funktionen für den Winkel β?

Lösung

Nach der Aufgabe ist c = 2 a. Die Kathete b ist nach dem Lehrsatz des Pythagoras $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Mit diesen durch a ausgedrückten Werten der Katheten und der Hypotenuse erhält man:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} = 1{,}732$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$$

3) Der Tangens des Winkels α beträgt 0,5. Es soll der Winkel α konstruiert werden!

Lösung

In dem Endpunkt C (Bild 333) der beliebigen Strecke AC = b errichtet man die Senkrechte und macht sie gleich $\frac{1}{2}$ b. Man erhält Punkt B. Der Winkel BAC ist der gesuchte Winkel α; denn

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1/2\, b}{b} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

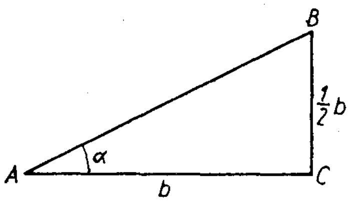


Bild 333

Aufgaben

1) Welche trigonometrischen Funktionen des Winkels α sind in dem Bilde 334:

$$\frac{b}{c};\ \frac{b}{a};\ \frac{a}{c};\ \frac{a}{b}$$

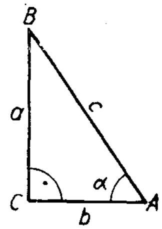


Bild 334

2) Wie groß ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABC (Bild 335)

a) $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{ctg}\beta$

b) $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma$ „ $\operatorname{ctg}\gamma$

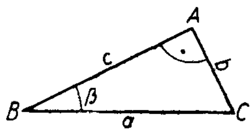


Bild 335

3) Konstruiere den Winkel α, wenn $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ist!

4) Wie groß sind $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$, wenn in dem rechtwinkligen Dreieck ABC die Katheten $a = 15$ cm und $b = 8$ cm lang sind?
5) In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, das den Flächeninhalt $F = 50\ \text{cm}^2$ hat, ist der Winkel $\alpha = 45^\circ$ groß. Wie groß sind die beiden Katheten a und b sowie die Hypotenuse c?

2. Die Funktionswerte der Komplementwinkel

Komplementwinkel sind Winkel, die sich zu 90° ergänzen. In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem rechten Winkel γ sind also die beiden der Hypotenuse c anliegenden Winkel α und β Komplementwinkel; d. h.: $\alpha + \beta = 90^\circ$ oder $\beta = 90^\circ - \alpha$. Die trigonometrischen Funktionen dieser beiden Komplementwinkel stehen in folgendem einfachen Zusammenhang:

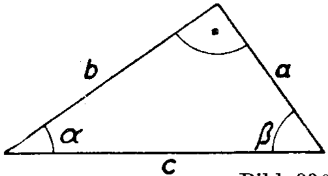


Bild 336

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

Läßt man die Zwischenglieder fort, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos(90^\circ - \alpha)\\ \cos\alpha &= \sin(90^\circ - \alpha)\\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)\\ \operatorname{ctg}\alpha &= \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

Betragen 2 Winkel zusammen 90°, so sind die Funktionen (sin, cos, tg und ctg) des einen Winkels gleich den entsprechenden Ko-Funktionen (cos, sin, ctg und tg) des anderen Winkels.

Der Kosinus ist die Ko-Funktion des Sinus und umgekehrt ist der Sinus die Ko-Funktion vom Kosinus. Entsprechendes gilt vom Tangens und Kotangens.

Beispiele

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 10^\circ = \operatorname{ctg} 80^\circ$

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ$.

3. Die Funktionswerte bestimmter Winkel

a) $\alpha = 45^\circ$.

Im rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck (Bild 337) betragen die Winkel $\alpha = \beta = 45^\circ$. Sind die beiden Katheten 1 cm lang, so ist die Hypotenuse $\sqrt{2} = 1{,}414$ cm. Man erhält:

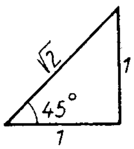


Bild 337

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

b) $\alpha = 30°$ und $60°$.

Fällt man in einem gleichseitigen Dreieck (Bild 338), dessen Seite 1 dm lang ist, die Höhe, so wird es in 2 rechtwinklige Dreiecke zerlegt mit den Winkeln 60° und 30°; die eine Kathete ist $\frac{1}{2}$ dm lang, die andere Kathete ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, also

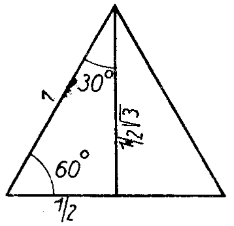


Bild 338

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Man erhält mit diesen Seitenlängen:

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \operatorname{ctg} 30° = \operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

c) $\alpha = 0°$ und $90°$.

Läßt man die Ecke C des rechtwinkligen Dreiecks ABC (Bild 339) mit den Katheten x und y auf der Peripherie des über der Hypotenuse c beschriebenen Halbkreises wandern, so bleibt bei jeder beliebigen Lage des Punktes C der Winkel bei C nach dem Lehrsatz des Thales ein rechter.

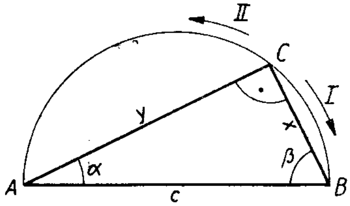


Bild 339

Bewegt sich C in Pfeilrichtung I nach B hin, so werden der Winkel α und die gegenüberliegende Kathete, die hier als veränderliche Größe mit x bezeichnet ist, immer kleiner. Kommt der Punkt C bei dieser Bewegung auf der Peripherie beliebig nahe an B heran, so wird α beliebig klein; d. h. im Grenzfall: $\alpha = 0°$. Die Gegenkathete x wird ebenfalls 0 lang; also wird $\sin \alpha = \frac{x}{c}$ im Grenzfall: $\sin 0° = \frac{0}{c} = 0$. Der Winkel β wird bei dieser Bewegung in Richtung I immer größer und nähert sich im Grenzfall 90°; es wird also $\cos 90° = \frac{x}{c} = \frac{0}{c} = 0$.

Bewegt sich C in Pfeilrichtung II nach A hin, so wird α immer größer. Er wird aber kleiner als 90° bleiben. Geht C beliebig nahe an A heran, so wird $\sphericalangle \alpha$ sich dem Grenzwert 90° und β dem Wert 0° nähern. Für $\beta = 0°$ wird dann die Kathete x ebenso lang wie die Hypotenuse c werden, während die andere Kathete $y = 0$ wird.

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{c} = \frac{c}{c} = 1$$
$$\sin 90^\circ = \frac{x}{c} = \frac{c}{c} = 1.$$

Die Tangens- und Kotangenswerte für 0° und 90° ergeben sich folgendermaßen:

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{c} = 0 \qquad \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{c}{0} = \infty$$
$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{c}{0} = \infty \qquad \operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{c} = 0$$

Wird der Zähler eines Bruches kleiner, so wird der Wert des Bruches kleiner. Ist der Zähler gleich 0, so hat der Bruch den Wert 0.

Wird aber der Nenner eines Bruches kleiner, so wird der Wert des Bruches größer. Wird der Nenner beliebig klein, so wird der Wert des Bruches beliebig groß. Eben das wird symbolisch ausgedrückt durch die oben angegebene Gleichung $\frac{c}{0} = \infty$.

Zusammenstellung der erhaltenen Funktionswerte:

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\widehat{\alpha}$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Aus dieser Tabelle für die 20 Funktionswerte sieht man, daß die sin- und tg-Funktionen bei wachsendem Winkel größer werden.

sin und tg wachsen mit wachsendem Winkel. Die cos- und ctg-Funktion nehmen bei wachsendem Winkel ab.

Die sin- und cos-Funktionswerte liegen zwischen 0 und 1. Die tg- und ctg-Funktionswerte liegen zwischen 0 und ∞.

4. Die trigonometrischen Zahlentafeln

Für beliebige Winkel zwischen 0° und 90° bestimmt man die Werte der 4 trigonometrischen Funktionen (sin, cos, tg und ctg) mit Hilfe von Tafeln der trigonometrischen Zahlen, die in fast allen technischen Taschenbüchern enthalten sind, oder man benutzt die trigonometrischen Skalen am Rechenschieber.

Da der sin irgendeines Winkels gleich dem cos des zu ihm gehörenden Komplementwinkels ist, so sind die trigonometrischen Zahlentafeln so aufgebaut, daß z. B. $\sin 17°$ an derselben Stelle wie $\cos 73°$ abgelesen werden kann. Ebenso findet man den $\operatorname{tg} 38°$ an derselben Stelle wie den $\operatorname{ctg} 52°$. Man hat also in Wirklichkeit nicht 4, sondern nur 2 trigonometrische Zahlentafeln.

Die Sinus- und Kosinuswerte liest man ebenso wie die Tangens- und Kotangenswerte in je einer Tabelle ab. Die Gradzahlen für sin und tg stehen am linken, für cos und ctg am rechten Rande der betreffenden Tafel, während die Minutenzahlen oder (stets vorzuziehen) die Zehntelgrade für sin und tg in der oberen waagerechten Zeile und die für cos und ctg in der unteren Zeile eingetragen sind. Es gehören also für den Funktionswert eines in Grad und Minuten bzw. Zehnteln gegebenen Winkels die Gradzahl am linken Rande und die Minutenzahl in der oberen Zeile oder die Gradzahl am rechten Rande und die Minuten- bzw. Zehntelzahl in der unteren Zeile zusammen.

Beispiele

$\sin 43° 20' = 0{,}68624$	[Gradzahl:	links,	Minuten:	oben]
$\cos 46° 40' = 0{,}68624$	[,,	: rechts,	,,	: unten]
$\operatorname{tg} 14° 10' = 0{,}25242$	[,,	: links,	,,	: oben]
$\operatorname{ctg} 75° 50' = 0{,}25242$	[,,	: rechts,	,,	: unten]

Für Winkel, die auf Minuten oder sogar auf Bruchteile von ihnen angegeben und in den Tafeln nicht unmittelbar enthalten sind, bestimmt man die Funktionswerte durch Dazwischenschalten [= *Interpolieren*]. Da der sin- und tg-Wert eines Winkels mit größer werdenden Winkeln wächst und da umgekehrt der cos- und der ctg-Wert mit wachsenden Winkeln kleiner wird, so hat man zunächst den in der Tafel enthaltenen nächstliegenden kleineren Winkel aufzuschlagen und sodann den für den kleineren Winkel ermittelten Funktionswert um den leicht zu berechnenden Interpolationswert beim sin und tg zu vermehren bzw. beim cos und ctg zu verkleinern.

Beispiele

1. $\sin 37° 14' = ?$

Der Tafel entnimmt man $\sin 37° 20' = 0{,}60645$ und $\sin 37° 10' = 0{,}60414$. Der Winkel wächst um $10'$. Die Differenz der Tafelwerte [= Tafeldifferenz] beträgt: $0{,}60645 - 0{,}60414 = 0{,}00231$ oder 231 Einheiten der letzten Dezimalstellen. Einer Winkeldifferenz von $1'$ entspricht daher eine Tafeldifferenz von 23,1 Einheiten und einer Winkeldifferenz von $4'$ entspricht eine Tafeldifferenz von $23{,}1 \cdot 4 = 92{,}4$ Einheiten. Diese 92,4 Einheiten der letzten Dezimalstellen sind zu 0,60414 hinzuzählen; also $\sin 37° 14' = 0{,}60414 + 0{,}00092 = 0{,}60506$.

2. $\cos 62° 36' = ?$
   $\cos 62° 30' = 0{,}46175$
   $\cos 62° 40' = 0{,}45917$

Tafeldifferenz: 258 Einheiten bei Winkelzunahme um 10′. Für 6′ beträgt der Korrekturwert: $25{,}8 \cdot 6 = 154{,}8 \approx 155$ Einheiten. Dieser Wert ist von 0,46175 abzuziehen; also $0{,}46175 - 0{,}00155 = 0{,}46020$; d. h. $\cos 62°\,36' = 0{,}46020$.

Beispiele

Die nachstehenden Werte sind an Hand einer Tafel zu überprüfen:

$\sin 21°\,40' = 0{,}3692$	$\operatorname{tg} 14°\,40' = 0{,}2617$
$\sin 62°\,50' = 0{,}8897$	$\operatorname{tg} 57°\,20' = 1{,}5597$
$\sin 38°\,42' = 0{,}6252$	$\operatorname{tg} 31°\,\;6' = 0{,}6032$
$\sin 67°\,18' = 0{,}9225$	$\operatorname{tg} 82°\,12' = 7{,}3000$
$\cos 72°\,20' = 0{,}3035$	$\operatorname{ctg} 11°\,10' = 5{,}0658$
$\cos 27°\,40' = 0{,}8857$	$\operatorname{ctg} 88°\,40' = 0{,}0233$
$\cos 37°\,36' = 0{,}7923$	$\operatorname{ctg} 3°\,36' = 15{,}89$
$\cos 51°\,54' = 0{,}6170$	$\operatorname{ctg} 54°\,42' = 0{,}7080$

Neben den trigonometrischen Zahlentafeln gibt es auch noch Tafeln, die die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen angeben. Da man in der Praxis jedoch auch ohne sie auskommt, wird auf ihre Behandlung hier verzichtet.

Bezüglich des Gebrauchs der an Rechenstäben vorhandenen trigonometrischen Skalen wird auf die Gebrauchsanweisung für den betreffenden Stab hingewiesen, zumal die Skalen der einzelnen Systeme unterschiedlich angeordnet sind.

5. Die Beziehungen der Funktionen untereinander

Im Dreieck ABC (Bild 340) ist:

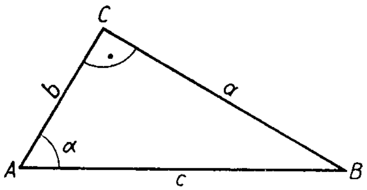


Bild 340

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Das Produkt der beiden Gleichungen ergibt:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

oder die Gleichung

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

nach tg α bzw. ctg α aufgelöst:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \\[2ex] \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \end{array}}$$

In Worten:

„Das Produkt der Tangens- und Kotangensfunktion für einen Winkel ist gleich 1.“ oder
„Die Tangens- und die Kotangensfunktion für den gleichen Winkel sind zueinander reziproke Werte.“

Ebenso liest man am obigen Dreieck ab:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{c \cdot b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

und $$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b \cdot c}{c \cdot a} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned}}$$

Der Tangens eines Winkels ist der Quotient aus dem Sinus und dem Kosinus dieses Winkels. Der Kotangens eines Winkels ist der Quotient aus dem Kosinus und dem Sinus dieses Winkels.

Der *trigonometrische Pythagoras.*

Es ist im obigen Dreieck: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Beide Gleichungen quadriert: $\sin^2\alpha = \frac{a^2}{c^2}$

$$\cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2}$$

Die Summe der beiden letzten Gleichungen:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1; \quad \text{also:}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Die Summe der Quadrate der sin- und cos-Werte eines Winkels ergibt 1.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}} \quad \text{und} \quad \boxed{\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

Diese vorstehend abgeleiteten Formeln für die Zusammenhänge der 4 trigonometrischen Funktionen untereinander ermöglichen es, aus einer einzigen trigonometrischen Funktion eines Winkels alle übrigen Funktionen dieses Winkels zu berechnen. Diese Zusammenhänge sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefaßt. In der oberen Zeile sind 4 rechtwinklige Dreiecke mit ein und demselben Winkel α aufgezeichnet. In den ersten beiden Dreiecken ist die Hypotenusenlänge die Längeneinheit; also gleich 1. Im 3. rechtwinkligen Dreieck ist die waagerechte Kathete gleich 1 und im 4. die senkrechte Kathete gleich 1. An jedem dieser 4 Dreiecke kann man die unter ihm stehenden Werte für die 4 trigonometrischen Funktionen des Winkels α ablesen. Die in der Tafel in den waagerechten Zeilen nebeneinander stehenden Werte sind untereinander gleich.

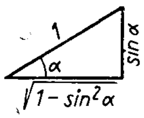


Bild 341

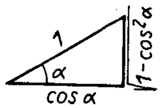


Bild 342

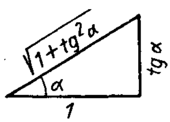


Bild 343

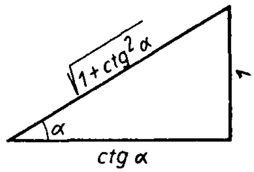


Bild 344

	Bild 341	Bild 342	Bild 343	Bild 344
$\sin\alpha =$	$\sin\alpha =$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} =$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha} =$	$\cos\alpha =$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} =$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} =$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} =$	$\operatorname{tg}\alpha =$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} =$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} =$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Beispiele 1. Wie groß sind $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$, wenn $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ist?

Lösung

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

2. Wie groß sind $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$, wenn $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ist?

Lösung

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{3}{4}$$

3. Wie groß sind $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$, wenn $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ ist?

Lösung

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+0{,}25}} = \frac{1/2}{\sqrt{1+1/4}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}25}} = \frac{1}{\sqrt{5/4}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{0{,}5} = \frac{1}{1/2} = 2$$

4. Wie groß sind $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$, wenn $\operatorname{ctg}\alpha = 1$ ist?

Lösung

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

6. Die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Ein jedes Dreieck läßt sich aus drei voneinander unabhängigen Stücken berechnen. Beim rechtwinkligen Dreieck brauchen nur zwei Stücke gegeben zu sein; denn als drittes Stück ist der rechte Winkel anzusehen. Da man also beim rechtwinkligen Dreieck zu seiner Berechnung entweder nur 2 Seiten, oder 1 Seite und 1 Winkel braucht (zwei Winkel allein sind unzureichend, da sie nicht voneinander unabhängig sind: $\beta = 90° - \alpha$), so ergeben sich die nachfolgenden 4 Grundaufgaben, denen das rechtwinklige Dreieck ABC (Bild 345) zugrundeliegen möge:

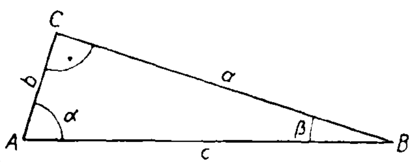


Bild 345

Aufgabe 1

Gegeben: Die beiden Katheten a und b.
Gesucht: Die Hypotenuse c und die Winkel α und β.

Lösung

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Die Winkel ergeben sich aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ und $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$

Zur Kontrolle überzeuge man sich, ob $\alpha + \beta = 90°$ ist.

Zahlenbeispiel

$a = 8$ cm und $b = 15$ cm sind gegeben.

$c = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$ [cm]

Aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} = 0{,}5333$ entnimmt man der Tafel $\alpha = 28° 5'$.

Aus $\operatorname{tg} \beta = \frac{15}{8} = 1{,}875$ erhält man $\beta = 61°55'$.

Probe: $\alpha + \beta = 28° 5' + 61° 55' = 90°$.

Aufgabe 2

Gegeben: Die Hypotenuse c und die Kathete a.
Gesucht: Die andere Kathete b und die Winkel α und β.

Lösung a

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

Probe: $\alpha + \beta = 90°$

Lösung b

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \text{ hieraus: } \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \text{ hieraus: } b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}; \text{ hieraus: } \beta$$

Probe: $\alpha + \beta = 90°$

Zahlenbeispiel

$c = 25$ cm und $a = 7$ sind gegeben.

$b = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$ [cm]

$\sin \alpha = \frac{7}{25} = 0{,}28$ ergibt $\alpha = 16°16'$

$\cos \beta = \frac{7}{25} = 0{,}28$ ergibt $\beta = 73°44'$

Aufgabe 3

Gegeben: Die Hypotenuse c und der Winkel α.
Gesucht: Die Katheten a und b und der Winkel β.

Lösung

$$\text{Aus } \sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ folgt: } a = c \sin\alpha$$

$$\text{Aus } \cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ folgt: } b = c \cos\alpha$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Zahlenbeispiel

$c = 20$ cm und $\alpha = 30^\circ$ sind gegeben.

$$a = 20 \cdot \sin\ 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10\ [\text{cm}]$$

$$b = 20 \cdot \cos\ 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 17{,}32\ \ [\text{cm}]$$

$$\beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Aufgabe 4

Gegeben: Die Kathete a und der Winkel α
Gesucht: Die andere Kathete b, die Hypotenuse c und der Winkel β.

Lösung

$$\text{Aus } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \text{ folgt: } b = a\ \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\text{Aus } \sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ folgt: } c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Zahlenbeispiel

$a = 30$ cm und $\alpha = 30^\circ$ sind gegeben.

$$b = 30 \cdot \operatorname{ctg}\ 30^\circ = 30 \cdot \sqrt{3} = 30 \cdot 1{,}732 = 51{,}96\ [\text{cm}]$$

$$c = \frac{30}{\sin 30^\circ} = \frac{30}{1/2} = 60\ [\text{cm}]$$

$$\beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

7. Anwendungsbeispiele

1) Welchen Winkel bildet eine an eine Gebäudewand anliegende 10 m lange Leiter mit dem Boden, wenn der Leiterfuß 3 m von der Wand entfernt aufsteht? Wieviel Meter über dem Erdboden liegt die Leiter an der Wand an (Bild 346)?

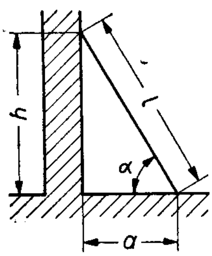


Bild 346

Lösung

Gegeben: $l = 10$ m und $a = 3$ m.

Gesucht: α und h.

$$\cos\alpha = \frac{a}{l} = 0{,}3; \quad \alpha = 72°30'$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{l}; \quad h = l \sin\alpha = 10 \cdot 0{,}954 = 9{,}5\ [\mathrm{m}]$$

2) Unter der Steigung einer Geraden versteht man den $\operatorname{tg}\alpha$, wobei α der Steigungswinkel ist. Der Steigungswinkel α ist der Winkel, den die steigende Gerade mit der Horizontalen bildet (Bild 347).

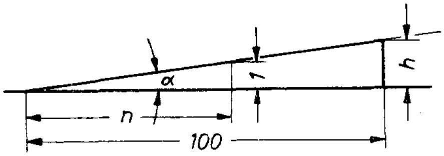


Bild 347

Steigt eine Straße auf 100 m Entfernung, in der Waagerechten gemessen, um h m an, so beträgt die Steigung: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{100}$ oder h%.

Bei dieser Steigung betrage in n Metern waagerechter Entfernung die Erhöhung 1 m; dann beträgt die Steigung: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{n}$.

In der nachstehenden Tabelle sind die in Prozenten gegebene Steigung h und der Steigungswinkel α gegenübergestellt. Man überzeuge sich von der Richtigkeit der Tabelle!

Steigung h in %	10	20	40	60	80	90	100
tg α	1:10 = 0,1	1:5 = 0,2	1:2,5 = 0,4	1:1,67 = 0,6	1:1,25 = 0,8	1:1,11 = 0,9	1:1 = 1
Steigungswinkel α	5° 43′	11° 19′	21° 48′	30° 58′	38° 40′	41° 59′	45°

3) Unter dem Verjüngungsverhältnis eines Kegels versteht man den Quotienten 1 : k, worin k die Länge in mm bedeutet, längs der sich sein Durchmesser um 1 mm vermindert. (Bild 348). Diese Eigenschaft eines solchen Kegels wird auf dem DIN-Blatt DIN 254 kurz folgendermaßen definiert:

„Kegel 1 : k“ bedeutet: Auf die Länge k (mm) verjüngt sich der Kegel im Durchmesser um 1 (mm).

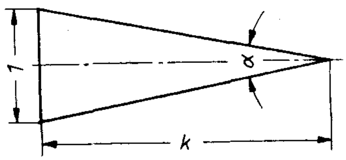


Bild 348

Der Kegelwinkel α berechnet sich aus der Gleichung: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1/2}{k} = \frac{1}{2k}$. D. h.:

Der Tangens des halben Kegelwinkels ist halb so groß wie das Verjüngungsverhältnis 1 : k des gegebenen Kegels.

Zahlenbeispiele

Wie groß ist der Kegelwinkel α bei dem für Ventilkegel verwendeten Verjüngungsverhältnis 1 : 0,5 ?

Lösung $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,5} = 1; \quad \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$ oder $\alpha = 90^\circ$.

Man überprüfe die Angaben der nachstehenden Tabelle für die im Maschinen- und Werkzeugbau bevorzugt verwendeten Kegel:

Verjüngungsverhältnis 1:k	1:0,289	1:0,5	1:0,866	1:1,207	1:1,866	1:5	1:10	1:12	1:20	1:30	1:50
Kegelwinkel α	120°	90°	60°	45°	30°	11° 25,2′	5° 43,5′	4° 46,3′	2° 51,9′	1° 54,6′	1° 8,8′

Beim Drehen eines Kegels auf der Drehbank ist der Support unter dem halben Kegelwinkel α einzustellen (Bild 349).

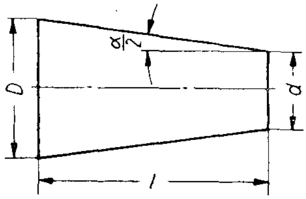


Bild 349

Im allgemeinen versteht man unter dem Verjüngungsverhältnis eines Kegels das Verhältnis: $\frac{D-d}{l}$,

wobei

D = Größtdurchmesser des Kegels
d = Kleinstdurchmesser des Kegels
l = Kegellänge ist.

Unter der **Neigung** eines Kegels versteht man das Verhältnis $\frac{D-d}{2l}$. Die Neigung ist also nur halb so groß wie das obige für den Kegel angegebene Verhältnis $\frac{D-d}{l}$. Die Kegelneigung ist der Tangens des halben Kegelwinkels:

$$\text{Kegelneigung} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2l}.$$

4) Schraubenlinie: Wickelt man das rechtwinklige Dreieck ABC (Bild 350) mit den Katheten AB = πD und BC = h um den Zylinder vom Durchmesser D so, daß die Kathete h in Achsrichtung auf der Mantelfläche liegt, so wird der Punkt B mit A zusammenfallen. Die Hypotenuse AC bildet auf der Zylindermantelfläche eine Schraubenlinie. C liegt auf derselben Mantellinie wie A bzw. B. Der Abstand h zweier auf ein und der-

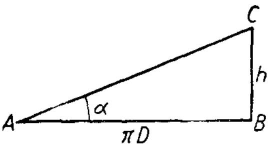


Bild 350

selben Mantellinie des Zylinders liegenden Punkte heißt die **Ganghöhe** der Schraubenlinie. Der Winkel α des aufgewickelten Dreiecks heißt der **Steigungswinkel** α. Zwischen der Ganghöhe h, dem Steigungswinkel α und dem Zylinderdurchmesser D besteht die Beziehung: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi D}$.

Der **Wirkungsgrad einer Schraube** beträgt $\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}$. Diese Formel wird im Kapitel Reibung in der Statik abgeleitet. In ihr bedeuten: α = Steigungswinkel
ϱ = Reibungswinkel, der sich aus der Reibzahl $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ berechnen läßt.

Zahlenbeispiel

Wie groß ist der Wirkungsgrad einer Schraubenwinde mit dem Steigungswinkel $\alpha = 4^\circ\,3'$ und der Reibzahl $\mu = 0{,}1$?

Lösung

$\operatorname{tg}\varrho = \mu = 0{,}1$. Nach Tabelle ist $\varrho = 5^\circ\,43{,}5'$.
Somit: $\alpha + \varrho = 4^\circ\,3' + 5^\circ\,43{,}5' = 9^\circ\,46{,}5'$ und Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} 4^\circ\,3'}{\operatorname{tg} 9^\circ\,46{,}5'} = \frac{0{,}0708}{0{,}1723} = 0{,}41\,.$$

Der Wirkungsgrad beträgt 41%.

5) Dem **Whitworth-Gewinde** (Bild 351) liegt ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Flankenwinkel 55° zugrunde.

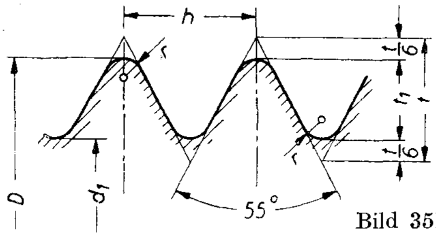


Bild 351

In dem nebenstehenden Bilde sind:

D = Gewindedurchmesser
d_1 = Kerndurchmesser
t_1 = Gewindetiefe
h = Steigung.

Das ursprüngliche gleichschenklige Dreieck hat die Höhe t. Das Gewinde ist an der Spitze und im Kern mit dem Radius r abgerundet. Die Gewindetiefe beträgt: $t_1 = t - 2\frac{t}{6} = \frac{2}{3}t$. Die Steigung h bestimmt sich aus der Anzahl z der Gewindegänge auf 1″. Es ist: $h = \frac{25{,}4}{z}$

Zahlenbeispiel

Das Whitworth-Gewinde $^3/_4$″ hat 10 Gänge auf 1″. Der Außendurchmesser D ist $^3/_4 \cdot 25{,}4 = 19{,}05$ mm. Die Steigung beträgt somit:

$$h = \frac{25{,}4}{10} = 2{,}54 \text{ mm}$$

Die theoretische Gewindetiefe t ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{55}{2}\right) = \operatorname{tg} 27^\circ 30' = \frac{h/2}{t} = \frac{h}{2\,t};$$

hieraus

$$t = \frac{h}{2 \operatorname{tg} 27^\circ 30'} = \frac{h}{2} \operatorname{ctg} 27^\circ 30' = 0{,}96\,049\,h = 0{,}96\,049 \cdot 2{,}54$$
$$= 2{,}44 \text{ [mm]}$$
$$t_1 = \frac{2}{3}\,t = \frac{2}{3} \cdot 2{,}44 = 1{,}627 \text{ [mm]}$$

Der Kerndurchmesser beträgt:

$$d_1 = D - 2\,t_1 = 19{,}05 - 2 \cdot 1{,}627 = 15{,}79 \text{ [mm]}$$

6) Unter der Projektion p einer Strecke s (vgl. Seite 72) auf eine Gerade g versteht man den Abstand der Fußpunkte der von den Endpunkten der Strecke s auf die Gerade g gefällten Lote (Bild 352).

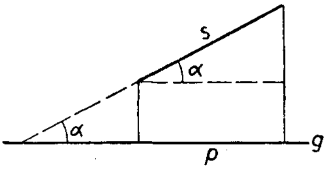


Bild 352

Der Winkel, den s mit g bildet, heißt der Neigungswinkel α. Zwischen der Projektion p einer Strecke s auf eine Gerade und dem Neigungswinkel α besteht die Beziehung: $\cos\alpha = \frac{p}{s}$ oder: $p = s \cdot \cos\alpha$, d. h.:

Die Projektion p einer Strecke s ist gleich der Länge der projizierten Strecke s multipliziert mit dem Kosinus des Neigungswinkels α.

Sonderfälle

a)

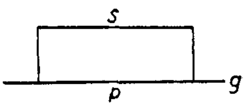


Bild 353

$s \parallel g$

Neigungswinkel $\alpha = 0^\circ$

Projektion $p = s \cdot \cos 0^\circ$

$p = s$

b)

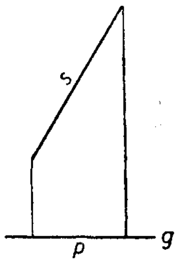


Bild 354

$\alpha = 60^\circ$

$p = s \cdot \cos 60^\circ = s \cdot \frac{1}{2}$

$p = \frac{1}{2}\,s$

c)

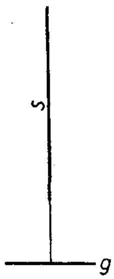


Bild 355

$s \perp g$

$\alpha = 90^\circ$

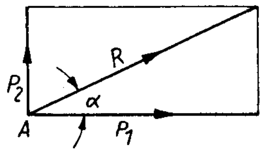
$p = s \cdot \cos 90^\circ$
$= s \cdot 0$

$p = 0$

7) Kräftezerlegung und Kräftezusammensetzung

Eine Kraft wird zeichnerisch durch eine Strecke veranschaulicht, deren Richtung mit der Kraftrichtung übereinstimmt und deren Länge ein Maß für die Größe der Kraft ist. So wird z. B. eine Kraft von 40 kg durch eine 4 cm lange Strecke dargestellt, wenn man eine Kraft von 10 kg durch eine Strecke von 1 cm abbildet. Man spricht in diesem Falle von dem Kräftemaßstab: 1 cm $\triangleq$ 10 kg. [Lies: 1 cm entspricht 10 kg.]

Nach den Lehren der Mechanik lassen sich 2 Kräfte P_1 und P_2, die an einem Punkt angreifen, durch eine Kraft R, die sogenannte Resultierende, ersetzen. Diese **Resultierende** bestimmt man als die Diagonale des aus den beiden Kräften P_1 und P_2 gebildeten Kräfteparallelogramms. Umgekehrt läßt sich eine Kraft R nach 2 verschiedenen Richtungen in 2 Einzelkräfte, die sogenannten **Komponenten**, zerlegen. Stehen die beiden Komponenten aufeinander senkrecht, so ergibt sich das Bild 356.



P_1 und P_2 = Komponenten
R = Resultierende

Bild 356

Beispiele

a) $P_1 = 40$ kg und $P_2 = 30$ kg greifen unter einem rechten Winkel an einem Punkt A an. Wie groß sind die Resultierende R und der Winkel α, den R mit P_1 bildet?

Lösung

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{1600 + 900} = 50 \text{ kg}$$

$$\text{Aus: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{P_2}{P_1} = \frac{30}{40} = 0{,}75 \text{ ergibt sich } \alpha = 36^\circ\,50'.$$

Statt der beiden im Punkte A rechtwinklig angreifenden Kräfte $P_1 = 40$ kg und $P_2 = 30$ kg kann man eine einzige Kraft $R = 50$ kg angreifen lassen, die gegen P_1 um $\alpha^\circ = 36^\circ\,50'$ geneigt ist und auf Punkt A dieselbe Wirkung wie die beiden Kräfte P_1 und P_2 ausübt.

b) Die Kraft $R = 600$ kg soll in 2 gleichgroße Kräfte P (= Komponenten), die miteinander einen Winkel $\alpha = 120^\circ$ einschließen, zerlegt werden (Bild 357). Wie groß sind die Komponenten P?

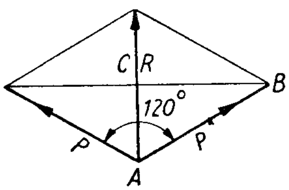


Bild 357

Lösung

$$\text{In } \triangle \text{ ABC ist } \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{R}{2}}{P} \quad \text{oder} \quad P = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{600}{2\cos 60} = \frac{600}{2\cdot\frac{1}{2}} = 600 \text{ [kg]}$$

Die beiden Komponenten, von denen eine jede mit der gegebenen Kraft R einen Winkel von 60° bildet, sind gleich der gegebenen Kraft.

c) Eine schiefe Ebene ist gegen die Horizontalebene unter einem Anstiegswinkel α geneigt (Bild 358). Auf ihr liegt ein Körper vom Gewicht G. Die Kraft G (= Gewicht) kann man in die beiden aufeinander senkrecht stehenden Seitenkräfte (= Komponenten) N und P zerlegen. N ist die Kraft, die von dem Körper in senkrechter Richtung auf die schiefe Ebene ausgeübt wird. Sie heißt die Normalkraft (normal = senkrecht).

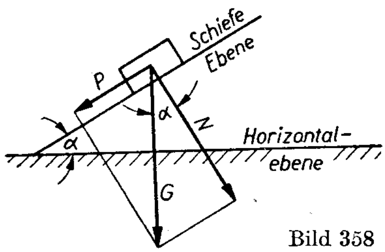


Bild 358

P ist die Kraft, die den Körper nach unten parallel zur schiefen Ebene hinunterzieht, wobei hier die noch auftretende Reibkraft zwischen dem Körper und der schiefen Ebene vernachlässigt werde. P heißt die Hangabtriebskraft. Die Resultierende G und die Komponente N schließen ebenfalls den Winkel α ein, da N senkrecht auf der schiefen Ebene und G senkrecht auf der Horizontalebene stehen. Es bestehen folgende Beziehungen:

(1) $\qquad \sin\alpha = \frac{P}{G} \quad \text{oder} \quad P = G\sin\alpha$

(2) $\qquad \cos\alpha = \frac{N}{G} \quad \text{oder} \quad N = G\cos\alpha$

Aus Gleichung 1 sieht man: Je kleiner der Anstiegswinkel ist, umso kleiner ist die Hangabtriebskraft. Für $\alpha = 0$ ist $P = 0$.

Zahlenbeispiel

Auf einer unter 30° gegen die Waagerechte geneigten Ebene ruht das Gewicht von 1 t. Welchen Druck N übt diese Last auf die Unterlage aus?

Lösung

$$N = G \cdot \cos\alpha = 1000 \cdot \cos 30° = 1000 \cdot 0{,}866 = 866 \text{ [kg]}$$

d) Spaltwirkung eines Keiles:

Wird ein Keil, der den Keilwinkel 2α hat (Bild 359), mit einer Kraft P in einen Baumstamm hineingetrieben, so ergeben sich die beiden gleichgroßen Keilwangendrücke N gegen den Baumstamm. Diese bestimmen sich unter Vernachlässigung der auftretenden Keilreibung aus der Gleichung:

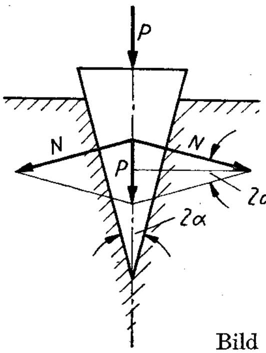


Bild 359

$$\sin\alpha = \frac{\frac{P}{2}}{N} \quad \text{oder} \quad N = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

Man sieht hieraus: Je kleiner man den Keilwinkel 2α macht, um so kleiner wird der Nenner des Bruches und desto größer wird also der Wert des Bruches; d. h. der Keilwangendruck.

Ein Keil mit kleinem Keilwinkel hat große Spaltwirkung.

8) Schubkurbelgetriebe

Die Aufgabe des Kurbeltriebes (Bild 360) besteht darin, die hin- und hergehende Bewegung des Kolbens und des mit ihm durch die Kolbenstange verbundenen Kreuzkopfes in die umlaufende Bewegung der Kurbelwelle umzuwandeln. (Vgl. Seite 65 Aufgabe 100)

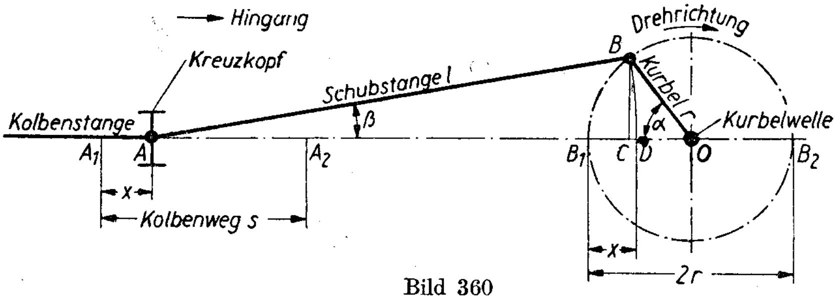


Bild 360

Die Einzelteile des Schubkurbelgetriebes sind: Kolbenstange, Kreuzkopf, Schubstange, Kurbel und Kurbelwelle.

Hat sich die Kurbel um den Winkel α im Sinne der Uhrzeigerbewegung gedreht, so hat der Kreuzkopf von seinem linken Totpunkte A_1 aus den Weg $A_1A = x$ zurückgelegt. Der gesamte Kreuzkopfweg von der linken bis zur rechten Totlage ist $A_1A_2 = s = 2r$.

Im Dreieck ACB ist $\sin\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{l}$ oder $BC = l \cdot \sin\beta$.

Im Dreieck OBC ist $\sin\alpha = \frac{BC}{BO} = \frac{BC}{r}$ oder $BC = r \cdot \sin\alpha$.

Es folgt: $l \cdot \sin\beta = r \cdot \sin\alpha$ oder:

$$\sin\beta = \frac{r}{l} \cdot \sin\alpha.$$

Unter dem Hingang des Kreuzkopfes versteht man die Bewegung des Kreuzkopfes zur Kurbelwelle hin.

Beschreibt man mit der Schubstangenlänge l um A den Kreis, der die waagerechte Mittellinie in D schneidet, und fällt von B das Lot BC, so ist beim Hingange des Kreuzkopfes:

Kreuzkopfweg

$$x = A_1A = B_1D = B_1C + CD = B_1C + AD - AC$$
$$= B_1O - CO + AB - AC$$
$$= r - r\cos\alpha + l - l\cos\beta$$

$$x = r(1 - \cos\alpha) + l(1 - \cos\beta).$$

Aus dieser Gleichung sieht man, daß für $\alpha = 90°$ der Kreuzkopfweg $x > r$ ist; d. h.: Hat die Kurbel eine Viertelumdrehung gemacht, so ist der Kreuzkopf schon über seine Mittelpunktslage hinaus.

Zahlenbeispiel

Die Kurbellänge $r = 300$ mm und die Schubstangenlänge $l = 1500$ mm ergeben das Stangenverhältnis $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$.

Die nachstehende Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen den Winkeln α und β sowie dem zurückgelegten Kolbenweg x in mm beim Hingang: (Man überprüfe die Richtigkeit!)

$\alpha°$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\beta°$	0°	1° 59′	3° 55′	5° 44′	7° 23′	8° 49′	9° 58′	10° 50′	11° 22′	11° 32′
x (mm)	0	5	22	48	83	125	173	224	277	330

Wenn die Schubstange und die Kurbel aufeinander senkrecht stehen (Schubstange liegt tangential am Kurbelkreis), dann sind α und β Komplementwinkel. $\alpha + \beta = 90°$.

Aus der obigen Gleichung:

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha \text{ wird in diesem Falle:}$$

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin(90 - \beta) = \frac{r}{l}\cos\beta$$

oder: $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{r}{l}$ oder $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Hieraus $\beta = 11°\,19'$
und $\alpha = 78°\,41'$.

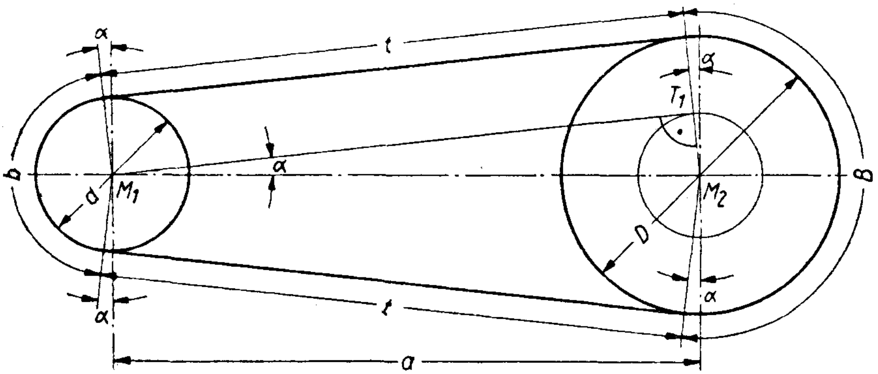


Bild 361

9) Berechnung von Riemenlängen

Als Grundlage wiederhole man das auf Seite 58 über die gemeinsamen äußeren und inneren Tangenten Gesagte! Die hier zu behandelnde Aufgabe ist folgende:

Gegeben sind 2 Riemenscheiben mit den Durchmessern D und d und dem Wellenabstand a. Es ist die Länge des offenen und die des gekreuzten Riemens zu berechnen!

Offener Riementrieb (Bild 361)

Die Gesamtriemenlänge L setzt sich zusammen aus:
1 Kreisbogenlänge B mit dem Zentriwinkel $180° + 2\alpha$,
1 Kreisbogenlänge b mit dem Zentriwinkel $180° - 2\alpha$
2 Tangentenlängen t

Also: $L = B + b + 2t$

In dem rechtwinkligen Dreieck $M_1M_2T_1$ mit dem rechten Winkel bei T_1 ist die Hypotenuse a, die kleinere Kathete $\frac{1}{2}(D - d)$ und die größere Kathete t. Der Winkel α bestimmt sich aus $\sin\alpha = \frac{D-d}{2a}$. Ferner ist: $\cos\alpha = \frac{t}{a}$ oder $t = a\cos\alpha$. Ist der Winkel α im Bogenmaß gemessen, so beträgt: $B = \frac{D}{2}(\pi + 2\widehat{\alpha})$ und

$$b = \frac{d}{2}(\pi - 2\widehat{\alpha}).$$

Die Gesamtriemenlänge beträgt:

$$L = \frac{D}{2}(\pi + 2\widehat{\alpha}) + \frac{d}{2}(\pi - 2\widehat{\alpha}) + 2a\cos\alpha$$

$$L = \frac{\pi}{2}(D + d) + \widehat{\alpha}(D - d) + 2a\cos\alpha.$$

Zahlenbeispiel

$$D = 1000 \text{ mm}; \quad d = 300 \text{ mm}; \quad a = 2200 \text{ mm}$$

$$\sin\alpha = \frac{1000 - 300}{2 \cdot 2200} = 0{,}16; \quad \alpha = 9^\circ\, 15' \text{ oder } \widehat{\alpha} = 0{,}16.$$

$$L = \frac{\pi}{2}(1000 + 300) + 0{,}16\,(1000 - 300) + 2 \cdot 2200 \cdot \cos 9^\circ\, 15'$$
$$= 6495 \text{ [mm]} \approx 6500 \text{ mm}.$$

Gekreuzter Riementrieb

Auch hier (Bild 362) setzt sich die Gesamtriemenlänge L aus 2 Kreisbogenlängen B + b und 2 Tangentenlängen 2 t zusammen; also:

$$L = B + b + 2\,t.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck $M_1M_2T_1$ sind die Hypotenuse a, die kleinere Kathete $\frac{1}{2}(D + d)$ und die größere Kathete t. Den Winkel α bestimmt man aus der Gleichung $\sin\alpha = \frac{D+d}{2a}$. Ferner ist $\cos\alpha = \frac{t}{a}$ oder $t = a \cdot \cos\alpha$. Die Gesamtlänge des gekreuzten Riemens beträgt also:

$$L = \frac{D}{2}(\pi + 2\widehat{\alpha}) + \frac{d}{2}(\pi + 2\widehat{\alpha}) + 2\,a\cos\alpha$$

$$L = (\pi + 2\widehat{\alpha})\,\frac{D+d}{2} + 2\,a\cos\alpha.$$

Zahlenbeispiel

Die Scheibendurchmesser und der Achsabstand sind (wie in dem Beispiel für den offenen Riementrieb)

$$D = 1000 \text{ mm}; \quad d = 300 \text{ mm}; \quad a = 2200 \text{ mm}$$

$$\sin\alpha = \frac{1000 + 300}{2 \cdot 2200} = 0{,}295; \quad \alpha = 17^\circ\, 10' \quad \text{oder} \quad \alpha = 0{,}3$$

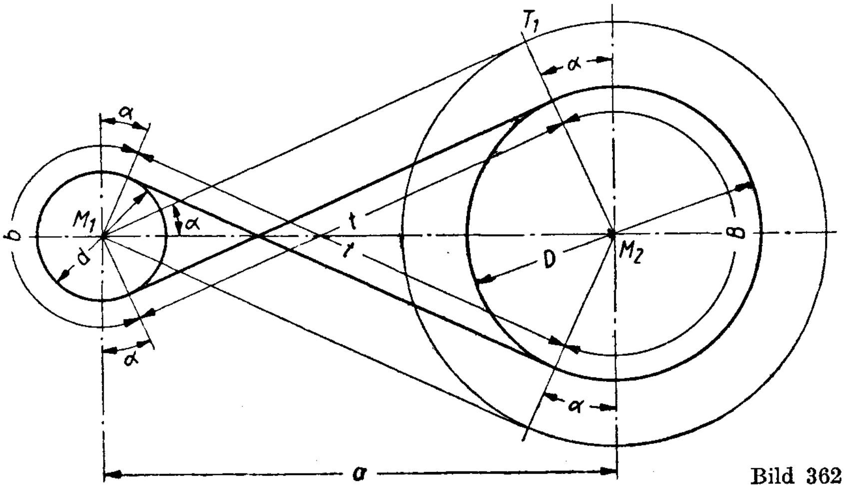


Bild 362

$$L = (\pi + 2 \cdot 0{,}3)\,\frac{1000 + 300}{2} + 2 \cdot 2200 \cdot \cos 17^\circ 10' = 6630\,\text{mm}.$$

Die Riemenlänge ist beim gekreuzten Riementrieb größer als beim offenen Riementrieb.

10. Berechnung von Sehnen und Bogenhöhen.

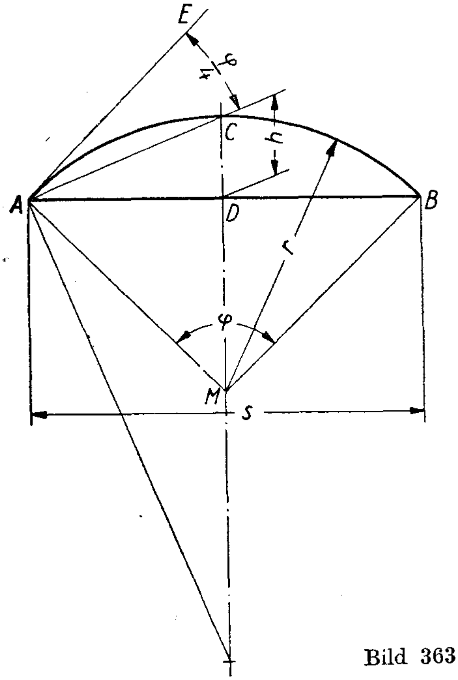


Bild 363

Im Bild 363 sind:

AB = Kreissehne s
AM = BM = Kreisradius r
φ = Zentriwinkel
CD = Bogenhöhe (= Pfeilhöhe) h.

Aus $\triangle$ AMD folgt:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} = \frac{s}{2r} \quad \text{oder}$$

Sehne: $\boxed{s = 2\,r \sin\frac{\varphi}{2}}$

Die Bogenhöhe

$$h = CD = CM - DM$$

$$= r - r\cos\frac{\varphi}{2} \quad \text{oder}$$

Bogenhöhe: $\boxed{h = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)}$

Im Punkte A ist an den Kreisbogen die Tangente AE gelegt. Nach dem Sehnentangentenwinkel-Satz (Seite 60) ist der Sehnentangentenwinkel ($\sphericalangle$ EAC) halb so groß wie der Zentriwinkel ($\sphericalangle$ AMC), der mit ihm auf dem gleichen Bogen steht. Danach sind $\sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMC = \frac{\varphi}{4}$ und $\sphericalangle EAB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB = \frac{\varphi}{2}$. Als Differenz der beiden Winkel ergibt sich: $\sphericalangle EAB - \sphericalangle EAC = \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{4}$ oder $\sphericalangle CAB = \frac{\varphi}{4}$.

Im $\triangle$ ADC ist $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} = \frac{h}{\frac{s}{2}} = \frac{2h}{s}$.

Hieraus bestimmt sich:

$$h = \frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} \quad \text{und}$$

$$s = 2\,h \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}.$$

Das Verhältnis: $\frac{\text{Bogenhöhe}}{\text{Sehne}} = \frac{h}{s}$ nennt man das Spannungsverhältnis.

Zwischen dem Spannungsverhältnis $\frac{h}{s}$ und dem Mittelpunktswinkel φ besteht die Beziehung $2 \cdot \frac{h}{s} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}$, d.h.: Das doppelte Spannungsverhältnis ist gleich dem Tangens des vierten Teiles des Zentriwinkels.

Ferner ersieht man aus der letzten Gleichung, daß das Spannungsverhältnis unabhängig von der Größe des Kreisradius ist. Es hängt nur von der Größe des Zentriwinkels ab.

Man leite die im Abschnitt K 5 Seite 142 für den Inhalt des Kreissegmentes angegebenen Gleichung $F = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\varphi}{180} - \sin\varphi\right)$ ab.

In technischen Handbüchern sind Tabellen für Bogen- und Sehnenlängen, Bogenhöhen und Inhalte der Kreisabschnitte für den Kreis mit dem Halbmesser = 1 (Einheitskreis) angegeben.

Nachstehend ein Auszug aus einer solchen Tabelle.

$\varphi°$	Bogenlänge	Sehne	Bogenhöhe	Inhalt des Kreisabschnittes
20	0,3491	0,3473	0,01 529	0,00 352
21	0,3665	0,3645	0,01 675	0,00 408
22	0,3840	0,3816	0,01 837	0,00 468
23	0,4014	0,3987	0,02 008	0,00 535

Um die Tabelle für jeden beliebigen Kreis mit dem Radius r zu verwenden, hat man die für die Bogenlänge, Sehne und Bogenhöhe angegebenen Tabellenwerte mit r, die für den Inhalt des Kreisabschnittes jedoch mit r^2 zu multiplizieren.

Zur Übung prüfe man die vorstehenden Tabellenwerte unter Zuhilfenahme der angegebenen Formeln auf ihre Richtigkeit.

Aufgaben

6) Welche Steigung hat das Geländer einer Treppe, deren Schwellen a cm breit und b cm hoch sind?

7) Wie verhält sich die Stufenbreite zur -höhe einer Treppe, deren Steigung 60% beträgt?

8) Wie hoch ist ein Mast, von dessen Spitze ein 25 m langes Seil seitwärts zur Erde gespannt ist und mit dem Erdboden den Winkel 60° bildet?

9) Von einem Rhombus mit der Seite a = 5 cm und dem Winkel $\alpha = 60°$ ist zu berechnen: a) die Länge der beiden Diagonalen und b) der Flächeninhalt.

10) 2 Straßen stoßen unter einem Winkel α im Punkte A geradlinig aufeinander. Wie lang ist der kürzeste Weg zwischen 2 Punkten B und C die je a km vor dem gemeinsamen Treffpunkt A auf jeder Straße liegen?

11) Wie groß ist der Flächeninhalt der schraffiert gezeichneten Fläche des Bildes 364?

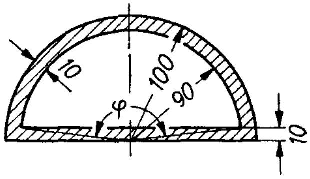


Bild 364

12) Wie groß ist die Querschnittsfläche der bikonvexen Linse (Bild 365)? Vgl. S. 144 Nr. 230

13) Wie groß ist die Querschnittsfläche der konkavkonvexen Linse (Bild 366)?

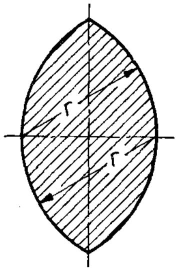


Bild 365

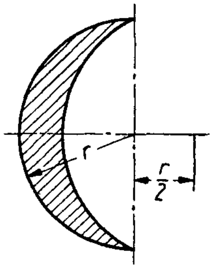


Bild 366

14) Ein Wasserrohr mit kreisförmigem Querschnitt ist bis zu $\frac{3}{4}$ seines Durchmessers mit Wasser gefüllt (Bild 367).
   a) Wie groß ist die schraffiert gezeichnete Querschnittsfläche?
   b) Zu wieviel Prozent ist der Gesamtquerschnitt ausgenutzt?

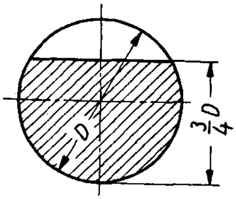


Bild 367

15) a) Wie groß ist der Radius ϱ des Kreises, den man dem Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel α einbeschreiben kann (Bild 368)?

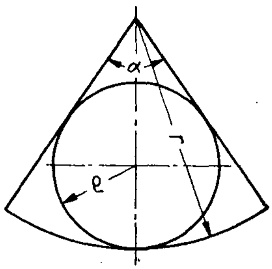


Bild 368

b) In einem Kreis vom Radius r sind von innen n gleich große, sich untereinander berührende Kreise gelegt (Bild 369). Wie groß ist der Radius ϱ eines jeden dieser Kreise?

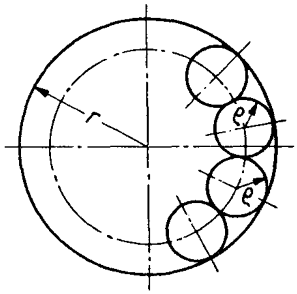


Bild 369

16) Das „Ei-Profil“ (Bild 370) setzt sich aus 4 Kreisbogen zusammen.

Wie groß ist sein Querschnitt?

Anleitung: Man bestimme der Reihe nach: α; M_2M_3; x; Zentriwinkel β für den unteren Kreisausschnitt F_3. Gesamtquerschnitt setzt sich zusammen aus $F_1 + 2\,F_2 + F_3$. F_2 berechne man als Differenz eines Kreissektors minus Fläche des $\Delta\, M_1M_3M_2$!

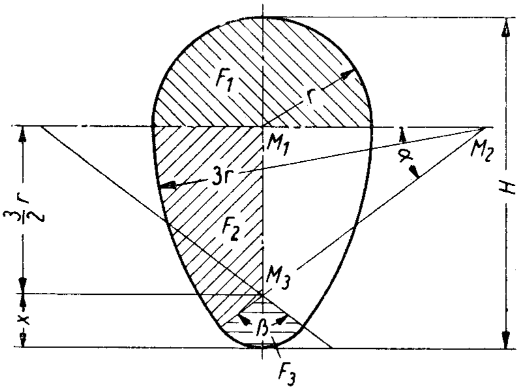


Bild 370

17) Ein Kreis vom Durchmesser D wird außen von n untereinander gleich großen Kreisen vom Durchmesser d berührt (Bild 371).

Welche Beziehung besteht zwischen D, d und n, wenn sich die äußeren Kreise berühren?

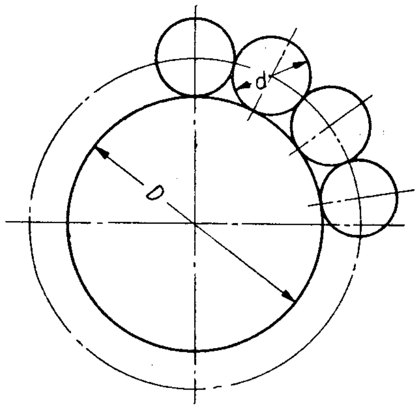


Bild 371

18) 2 Kreise, deren Durchmesser sich wie 1:3 verhalten, berühren einander von außen. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden äußeren Tangenten?

19) Eine Walze vom Durchmesser d ist durch ein Seil S, das an den Punkten A und B befestigt ist, verspannt (Bild 372). Wie lang ist das Seil, wenn $AB = 3\,d$ ist?

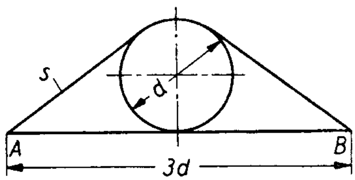


Bild 372

20) Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite s wird an seinen 3 Ecken mit dem Radius $r = \frac{s}{8}$ abgerundet (Bild 373). Wie groß ist die schraffiert gezeichnete Abfallfläche, ausgedrückt durch s und in Prozenten?

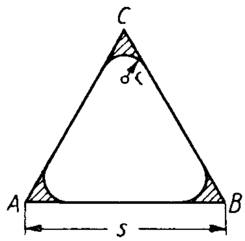


Bild 373

21) 2 Punkte A und B sind c = 13 cm voneinander entfernt und haben von einem Spiegel die Abstände a = 4 cm und b = 9 cm (Bild 374). Wie groß ist der Einfallswinkel α des Lichtstrahles, der von dem einen zum anderen Punkt reflektiert (= zurückgeworfen) wird?

Anleitung: Das Spiegelbild A_1 des Punktes A erscheint um a cm hinter dem Spiegel liegend. Der von A nach B gehende Lichtstrahl legt den Weg A – C – B zurück. A_1 liegt auf der Verlängerung von BC.

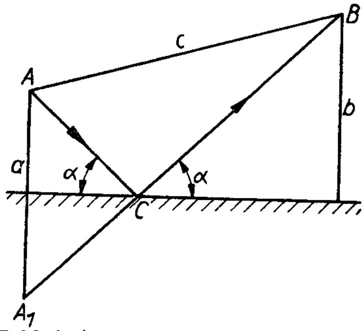


Bild 374

22) Wie groß ist die gestreckte Länge eines gewellten Bleches, das aus 10 vollen Wellen besteht? Die Abmessungen einer aus 2 kongruenten Kreisbogen bestehenden Welle sind nach dem nebenstehenden Bilde 375: Wellenlänge 60 cm; Bogenhöhe 3 cm.

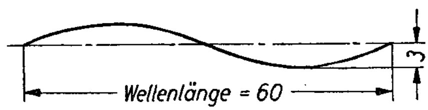


Bild 375

23) Eine Kraft R = 1810 kg soll in die beiden aufeinander senkrecht stehenden Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegt werden, so daß P_1 mit R den Winkel $\alpha = 20°$ bildet (Bild 376). Wie groß muß P_1 und P_2 werden?

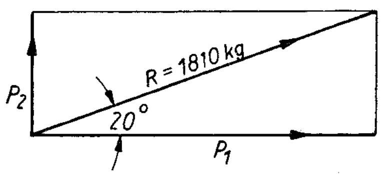


Bild 376

24) Zwei gleichgroße Kräfte P bilden miteinander den Winkel φ (Bild 377). Wie groß ist die Resultierende R?

Anleitung: Man projiziere P auf R. Wie lang ist R im Verhältnis zu dieser Projektion?

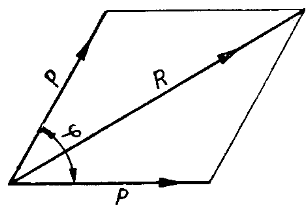


Bild 377

25) Von einer Welle mit dem Durchmesser $D = 80$ mm wird das schraffierte Stück abgefräst, so daß $h = 70$ mm ist (Bild 378). Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

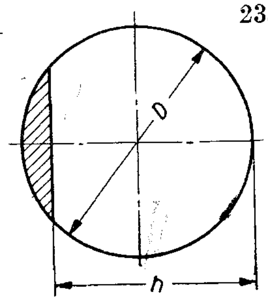


Bild 378

C. Die 4 trigonometrischen Funktionen für sämtliche Winkel

Die trigonometrischen Tabellen technischer Hilfsbücher oder ähnlicher Tafelsammlungen enthalten die Werte für die 4 trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0° bis 90°. Man kann sie also benutzen, wenn von einem Winkel, der kleiner als 90° ist, eine der 4 Funktionen bestimmt werden soll. Rechtwinklige Dreiecke haben nur Winkel, die kleiner als 90° sind. Daher können sie, wie im vorhergehenden Abschnitte behandelt wurde, ohne weiteres mit Hilfe trigonometrischer Tabellen berechnet werden.

Die Funktionswerte wurden als Verhältniszahlen der Katheten und der Hypotenuse am rechtwinkligen Dreieck erklärt und hatten somit nur einen Sinn für spitze Winkel. Um aber auch die 4 trigonometrischen Funktionen für Winkel, die größer als 90° sind, verwenden zu können, bedarf es einer weiteren Erklärung der Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion

1. Einheitskreis und Koordinatenkreuz

Man beschreibe einen Kreis, dessen Radius gleich der Längeneinheit ist, den man daher den Einheitskreis nennt, um den Schnittpunkt zweier sich rechtwinklig schneidenden Geraden (Bild 379). Die horizontal (= waagerecht) gelegene Gerade heißt die x-Achse oder A b s z i s s e n a c h s e.

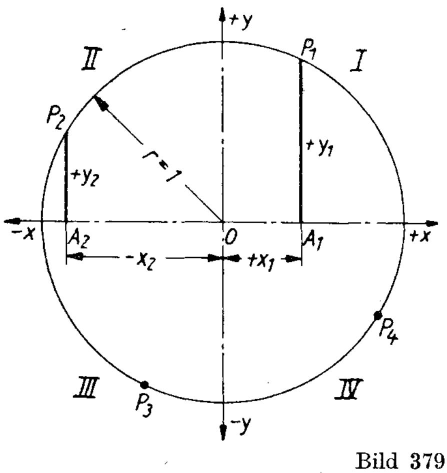


Bild 379

Die vertikal (= senkrecht) gelegene Gerade ist die y-Achse oder O r d i n a t e n a c h s e.

Beide Achsen, die das rechtwinklige oder C a r t e s i s c h e[1]) K o o r d i n a t e n k r e u z bilden, nennt man die Koordinatenachsen. Ihr Schnittpunkt O heißt der Koordinatenursprungspunkt oder auch Nullpunkt. 0 kann also entweder Null bedeuten oder auch

---

[1]) René Descartes (1596 bis 1650) oder Renatus Cartesius = französischer Mathematiker. Schöpfer der analytischen Geometrie.

den Buchstaben O als Antangsbuchstaben des lateinischen Wortes Origo = Ursprung. [Vergleiche: Original = Ursprungszeichnung]. Von diesem Punkte O aus erstrecken sich nach rechts bzw. nach oben hin die positiven Teile der x- bzw. y-Achse; nach links bzw. nach unten hin dagegen die negativen Teile dieser Achsen. Die beiden Koordinatenachsen zerlegen den Einheitskreis in 4 Felder oder Quadranten (= Viertel), die in der der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Drehrichtung mit Quadrant I, II, III und IV bezeichnet werden. Ein auf der Kreisperipherie im I. Quadranten gelegener Punkt P_1 hat von der x-Achse den Abstand $P_1A_1 = + y_1$ und von der y-Achse den Abstand $OA_1 = + x_1$. Man nennt $+ x_1$ und $+ y_1$ die Koordinaten des Punktes P_1. Sie sind beide positiv, wenn P_1 im Quadrant I liegt.

Liegt ein Punkt P_2 auf der Einheitskreisperipherie im Quadranten II, so hat er die Koordinaten: $- x_2$ und $+ y_2$. Entsprechend sind die Koordinaten der Punkte P_3 im III. Quadranten: $- x_3$ und $- y_3$ und P_4 im IV. Quadranten: $+ x_4$ und $- y_4$.

Im I. und III. Quadranten haben beide Koordinaten das gleiche Vorzeichen; sie sind beide entweder positiv oder negativ. Im II. und IV. Quadranten haben beide Koordinaten entgegengesetztes Vorzeichen; die eine ist positiv, die andere negativ oder umgekehrt.

Verbindet man einen Punkt P, der sich auf der Peripherie des Einheitskreises (Bild 380) im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers [= mathematisch positive Drehrichtung] bewegt, mit dem Ursprungspunkt O, so bildet diese Verbindungslinie mit der positiven [nach rechts gerichteten] Richtung der x-Achse einen Winkel α[1]. Dieser Winkel α ist kleiner als 90°, also spitz, solange P_1 im I. Quadranten liegt. Befindet sich P im II. Quadranten, dann ist $\alpha > 90°$ aber $< 180°$. Im III. Quadranten hat α einen Wert, der zwischen 180° und 270° liegt, während im IV. Quadranten α größer als 270°, jedoch kleiner als 360° ist. Nach einem vollen Umlauf des Punktes P auf der Kreisperipherie wiederholt sich das Spiel. Ein Winkel α ist deckungsgleich mit einem Winkel $(360° + \alpha)$ oder allgemein nach n Umdrehungen mit $(\alpha + n \cdot 360°)$, wobei n eine positive ganze Zahl ist und die Anzahl der Umläufe angibt.

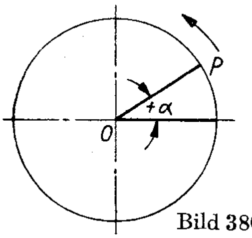


Bild 380

Läßt man P auf der Einheitskreisperipherie (Bild 381), im Sinne des Uhrzeigers [= negativer Drehsinn] umlaufen und verbindet ihn in seiner jeweiligen Lage mit dem Ursprungspunkt O, so entstehen wiederum Winkel, die man jetzt im Gegensatz zu den bisherigen positiven Winkeln als negativ bezeichnet.

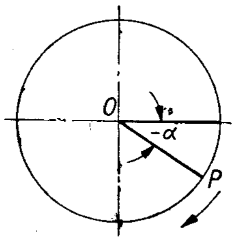


Bild 381

[1]) Als der mathematisch positive Drehsinn wird der bezeichnet, durch den die positive (nach rechts gerichtete) x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes auf kürzesten Wege in die Lage der positiven (nach oben gerichteten) y-Achse gebracht wird.

Beispiele

In welchem Quadranten liegt P, wenn

$\alpha = 150°$	ist?	Antwort:	Im	Quadrant	II
$\alpha = 260°$	,,	,,	,,	,,	III
$\alpha = 290°$	,,	,,	,,	,,	IV
$\alpha = -40°$	,,	,,	,,	,,	IV
$\alpha = -80°$	,,	,,	,,	,,	IV
$\alpha = -150°$	,,	,,	,,	,,	III.

α sei ein spitzer Winkel, wie groß ist der Winkel:

$(180° - \alpha)$?	Antwort:	Stumpfer Winkel
$(180° + \alpha)$?	,,	Überstumpfer Winkel
$(360° - \alpha)$?	,,	Überstumpfer Winkel.

2. Die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreise

In dem Einheitskreise $[r = 1]$ sei irgendein Zentriwinkel $POA = \sphericalangle \alpha$ gezeichnet (Bild 382). Der eine Schenkel OA dieses Winkels fällt mit der positiven Richtung der x-Achse zusammen. Der andere Schenkel OP verbindet einen irgendwo auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Punkt P mit dem Koordinatenursprungspunkt O.

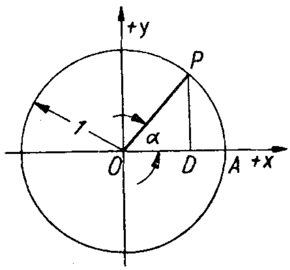


Bild 382

Liegt P im I. Quadranten, dann ist α ein spitzer Winkel. α liegt im I. Quadranten.

Liegt P im II. Quadranten, dann ist α ein stumpfer Winkel. α liegt im II. Quadranten.

Liegt P im III. oder IV. Quadranten, dann ist α ein überstumpfer Winkel. α liegt im III. oder IV. Quadranten.

In Verallgemeinerung des bisherigen Begriffes der trigonometrischen Funktionen versteht man unter dem

$$\sin\alpha = \frac{\textbf{Ordinate}}{\textbf{Einheitskreisradius}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{\textbf{Abszisse}}{\textbf{Einheitskreisradius}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textbf{Ordinate}}{\textbf{Abszisse}} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\textbf{Abszisse}}{\textbf{Ordinate}} = \frac{x}{y}.$$

Durch diese 4 Gleichungen werden die trigonometrischen Funktionen durch die Ordinaten und Abszissen eines auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Punktes erklärt, wobei die Lage des Punktes von der Größe des jeweiligen Winkels α abhängt. Diese Definition ist gegenüber der auf Seite 207 gegebenen weitgehender und stellt etwas völlig Neues dar. Dort wurden die 4 trigonometrischen Funktionen lediglich als Verhältniszahlen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks erklärt und hatten nur für Winkel, die kleiner als 90° sind, einen Sinn. Unsere jetzige Erklärung aber gilt für die trigonometrischen Funktionswerte sämtlicher Winkel. Sie ist aus Zweckmäßigkeitsgründen so gefaßt, daß die bisherige Definition in ihr als Sonderfall eingeschlossen ist und zwar für das im I. Quadranten gelegene rechtwinklige Dreieck ODP, wobei $\alpha < 90°$ ist.

Da die Koordinaten [Ordinate und Abszisse] des Punktes P entsprechend seiner Lage positiv oder negativ sind und da der Einheitskreisradius stets als positiv betrachtet wird, so bekommen auch die 4 Funktionswerte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$ je nach der Größe des Winkels α entweder positive oder negative Werte. Der Sinus hat das Vorzeichen der Ordinate y; der Kosinus hat das Vorzeichen der Abszisse x. Der Tangens und der Kotangens haben immer bei dem gleichen Winkel das gleiche Vorzeichen. Im einzelnen aber ist der Tangens bzw. der Kotangens eines Winkels positiv, wenn der Sinus und der Kosinus dieses Winkels das gleiche Vorzeichen haben. Dies ist im I. und III. Quadranten der Fall. Sind aber der Sinus positiv und der Kosinus negativ oder umgekehrt, dann sind der Tangens- und der Kotangenswert dieses Winkels negativ. Dies ist im II. und IV. Quadranten der Fall.

Zusammenfassung

Liegt P im Quadranten:	I	II	III	IV
Dann ist α	spitz	stumpf	überstumpf	
und $\sin\alpha$	+	+	—	—
$\cos\alpha$	+	—	—	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	—	+	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	—	+	—

Man präge sich folgende

3 Vorzeichenbilder der trigonometrischen Funktionen ein.

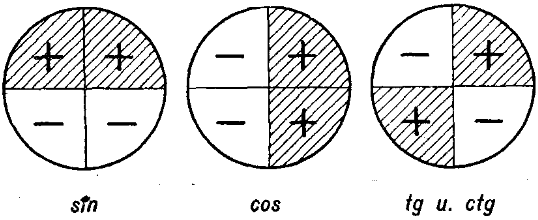


Bild 383

Diese 3 Bilder sagen folgendes: Der Sinus ist positiv, wenn der Winkel im I. oder II. Quadranten liegt; d. h. für spitze und stumpfe Winkel. Der Sinus für überstumpfe Winkel ist negativ.

Der Kosinus ist positiv für spitze Winkel und für überstumpfe Winkel, die größer als 270° sind.

Der Tangens und der Kotangens sind positiv im I. und III. Quadranten, negativ aber im II. und IV. Quadranten.

Beispiele

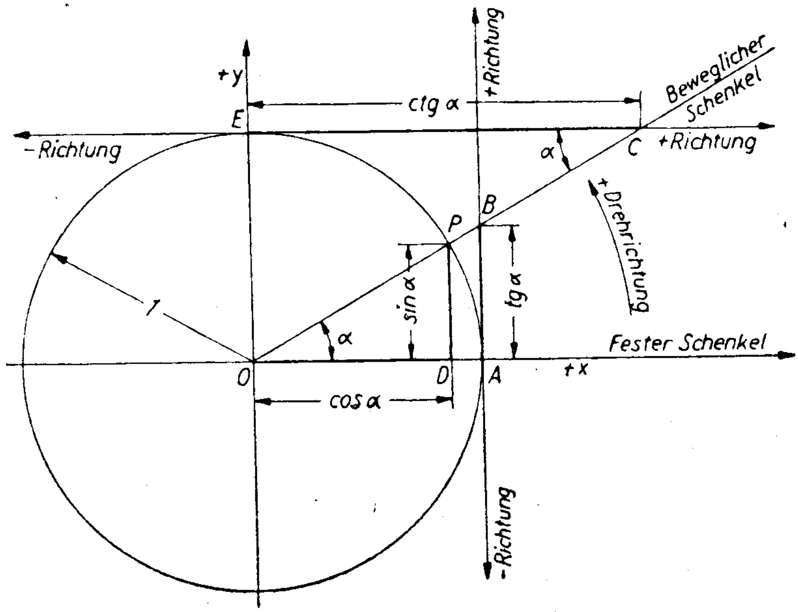
sin 35°	ist positiv,	da	$\sphericalangle \alpha = 35°$	im	I.	Quadranten liegt.
sin 140°	„ „	„	$\sphericalangle \alpha = 140°$	„	II.	„ „
sin 210°	„ negativ,	„	$\sphericalangle \alpha = 210°$	„	III.	„ „
sin 330°	„ „	„	$\sphericalangle \alpha = 330°$	„	IV.	„ „
cos 20°	„ positiv,	„	$\sphericalangle \alpha = 20°$	„	I.	„ „
cos 150°	„ negativ,	„	$\sphericalangle \alpha = 150°$	„	II.	„ „
cos 200°	„ „	„	$\sphericalangle \alpha = 200°$	„	III.	„ „
cos 300°	„ positiv,	„	$\sphericalangle \alpha = 300°$	„	IV.	„ „

$\operatorname{tg} 80° > 0$	$\operatorname{ctg} 10° > 0$
$\operatorname{tg} 170° < 0$	$\operatorname{ctg} 100° < 0$
$\operatorname{tg} 190° > 0$	$\operatorname{ctg} 200° > 0$
$\operatorname{tg} 350° < 0$	$\operatorname{ctg} 300° < 0$

3. Der Funktionsverlauf und die 4 trigonometrischen Kurven

Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir geklärt, für welche Winkelgrößen die trigonometrischen Funktionen positive oder negative Werte haben. Nunmehr wollen wir uns an Hand einfacher Bilder über das Wachsen bzw. Kleinerwerden der trigonometrischen Funktionen in Abhängigkeit von der Größe des Winkels α Klarheit verschaffen.

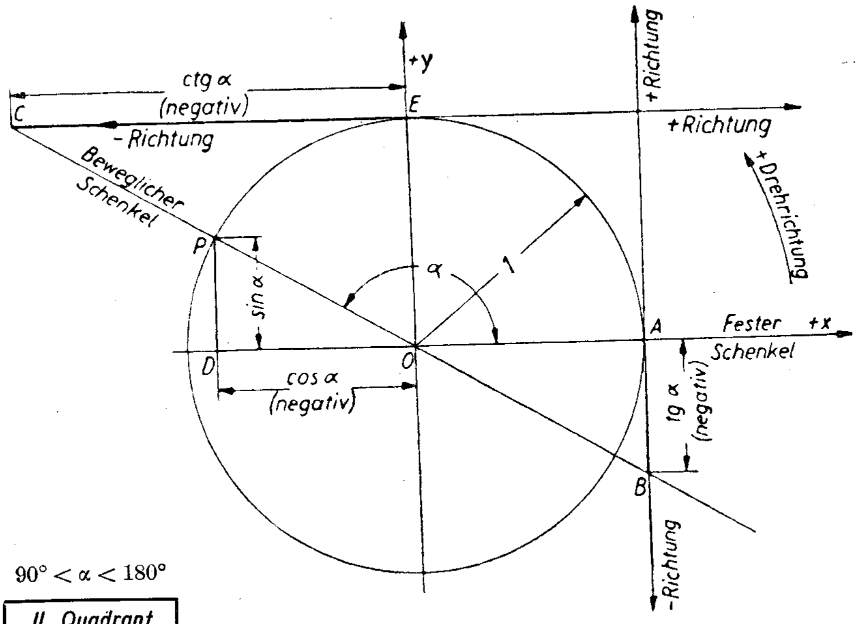
Der eine Schenkel des Winkels α, und zwar OP, sei beweglich (Bild 384). Er möge sich im entgegengesetzten Uhrzeigersinn drehen, so daß also $\sphericalangle \alpha$ hierbei größer wird. Im Bild 384 für den I. Quadranten ist $0° < \alpha < 90$ [d. h. α ist spitz]. Im Bild 385 für den II. Quadranten ist $90° < \alpha < 180°$ [d. h. α ist stumpf].



$0° < \alpha < 90°$

I. Quadrant

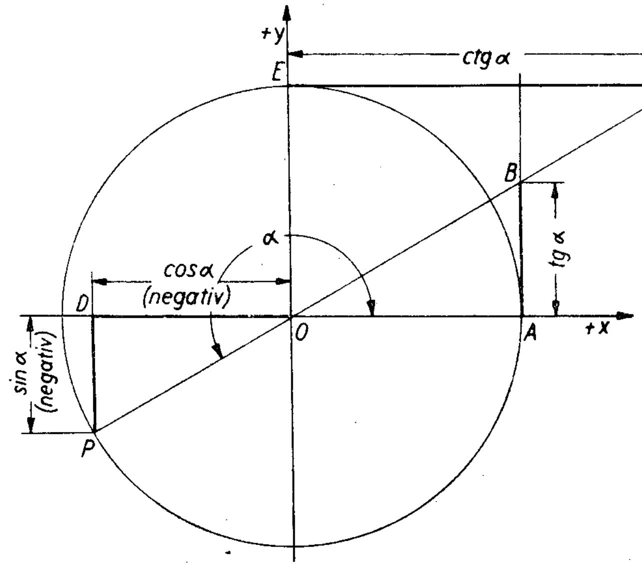
Bild 384



$90° < \alpha < 180°$

II. Quadrant

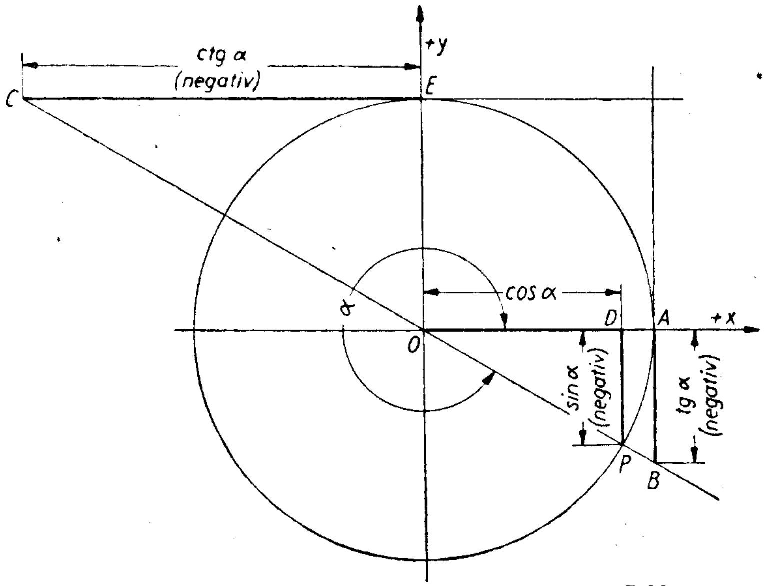
Bild 385



$180° < \alpha < 270°$

Bild 386

III. Quadrant



$270° < \alpha < 360°$

Bild 387

IV. Quadrant

Die Maßzahl der Projektion OD des beweglichen Schenkels OP ist gleich dem $\cos\alpha$. Die Maßzahl der Projizierenden PD ist gleich dem $\sin\alpha$; also:

$$OD = \cos\alpha \quad \text{und} \quad PD = \sin\alpha.$$

Die Tangente an den Einheitskreis in A schneidet den beweglichen Schenkel oder seine rückwärtige Verlängerung in B. Die Maßzahl der Länge dieser Strecke AB ist gleich dem $\operatorname{tg}\alpha$; denn $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB = \operatorname{tg}\alpha$. Ist AB nach oben gerichtet (Bild 384), so ist $\operatorname{tg}\alpha$ positiv. Ist α ein stumpfer Winkel in dem Bilde des II. Quadranten, so ist AB nach unten gerichtet (Bild 385). $\operatorname{tg}\alpha$ ist dann negativ.

Der $\operatorname{ctg}\alpha$ stellt sich als die Längenmaßzahl der Strecke EC dar. C ist der Schnittpunkt des in E auf OE errichteten Lotes mit dem beweglichen Schenkel des Winkels α. Ist EC nach rechts gerichtet, so ist $\operatorname{ctg}\alpha$ positiv (Bild 384). Für den II. Quadranten ist EC nach links gerichtet und somit negativ.

$$EC = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Die Bilder für den III. und IV. Quadranten (Bilder 386 und 387) zeigen unter Verwendung derselben Streckenbezeichnungen die Funktionswerte für überstumpfe Winkel α.

An Hand der Bilder 384 ... 387 können wir das Größer- und Kleinerwerden der Funktionswerte in Abhängigkeit vom Winkel α erkennen:

Der größte [bzw. kleinste] Wert, den $\sin\alpha$ annehmen kann, ist $+1$ [bzw. -1], und zwar dann, wenn PD gleich der Länge des Einheitskreisradius wird. Dies tritt ein bei $\alpha = 90°$ [bzw. 270°]

$$\sin 90° = +1 \qquad \sin 270° = -1$$

$\sin\alpha$ wird gleich 0, wenn $PD = 0$ wird. Dies ist der Fall, wenn $\alpha = 0°$ oder 180° oder 360° ist.

Für die Feststellung der Größt- und Kleinstwerte der Funktion $\cos\alpha$ ist die Länge der Projektion OD maßgebend, es ist:

$$\cos 0° = +1; \quad \cos 90° = 0; \quad \cos 180° = -1;$$
$$\cos 270° = 0; \quad \cos 360° = +1.$$

Zusammenfassung:
Die Werte der sin- und cos-Funktion sämtlicher Winkel liegen entweder zwischen $+1$ und -1 oder sind gleich $+1$ bzw. -1.

Anders verhalten sich aber die tg- und ctg-Funktionswerte, die sich als die Tangentenlängen AB und EC darstellen. Wächst $\sphericalangle\alpha$ von kleinen Werten bis 90°, so wird die Tangente AB immer größer und größer. Im Grenzfall, wenn $\alpha = 90°$ wird, wird der Tangenswert $+\infty$. Betrachtet man jedoch die Veränderlichkeit der tg-Funktion für α-Werte zwischen 180° und 90° [II. Quadrant], so sieht man, daß $\operatorname{tg} 180° = 0$ ist und daß bei kleiner werdenden α-Werten $\operatorname{tg}\alpha$ immer kleiner wird oder, anders ausgedrückt, ins Negative hin wächst. Im Grenzfall, wenn α sich dem Wert 90° nähert, wird $\operatorname{tg} 90° = -\infty$. Man sieht also, daß $\operatorname{tg}\alpha$ sowohl positiv, als auch nega-

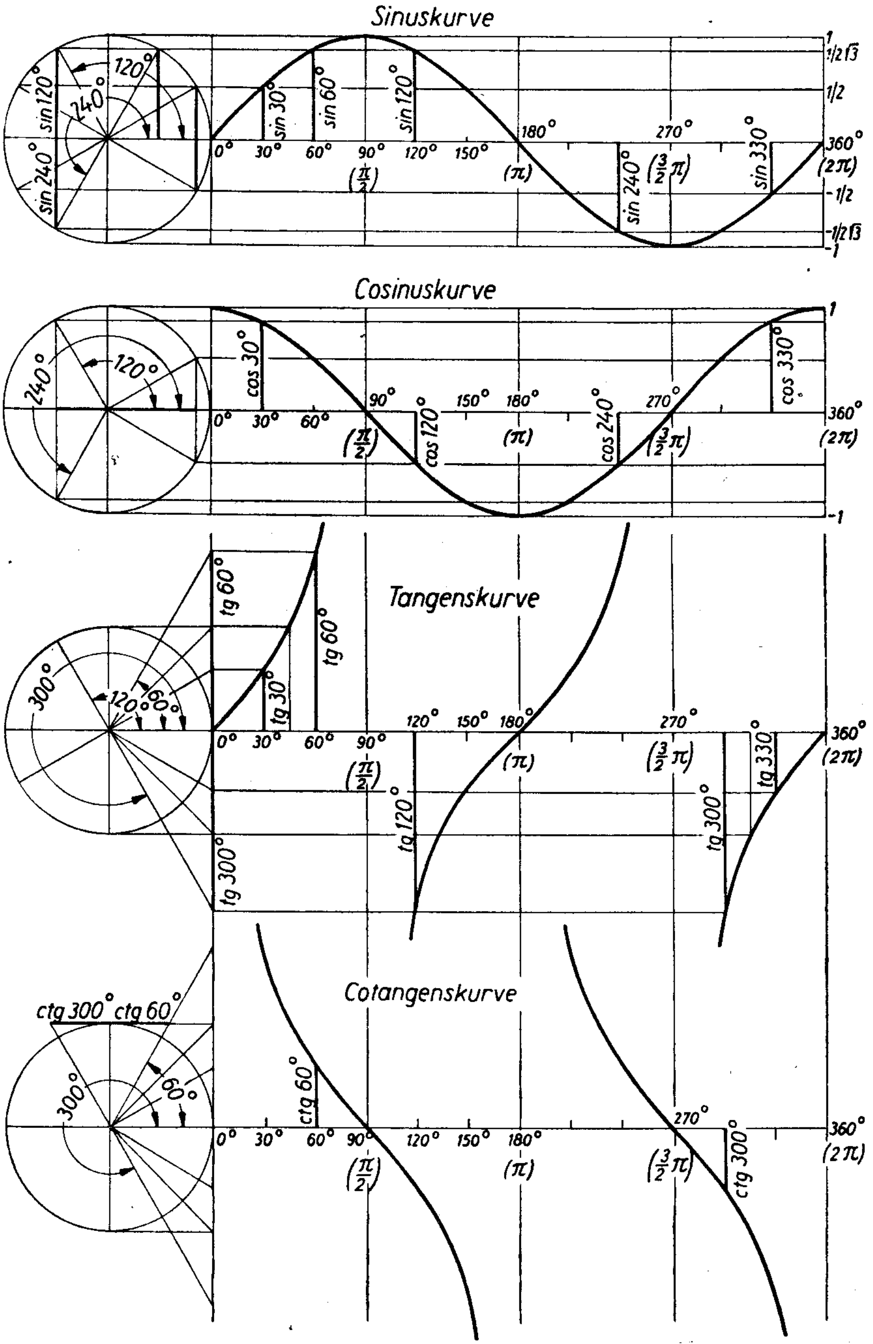

Sinuskurve
sin 120°
sin 240°
120°
240°
sin 30°
sin 60°
sin 120°
sin 240°
sin 330°
0°
30°
60°
90°
120°
150°
180°
270°
360°
$(\frac{\pi}{2})$
(π)
$(\frac{3}{2}\pi)$
(2π)
1
$1/2\sqrt{3}$
1/2
-1/2
$-1/2\sqrt{3}$
-1
Cosinuskurve
240°
120°
cos 30°
cos 120°
cos 240°
cos 330°
0°
30°
60°
90°
150°
180°
270°
360°
$(\frac{\pi}{2})$
(π)
$(\frac{3}{2}\pi)$
(2π)
1
-1
Tangenskurve
300°
120°
60°
tg 60°
tg 30°
tg 120°
tg 300°
tg 330°
0°
30°
60°
90°
120°
150°
180°
270°
360°
$(\frac{\pi}{2})$
(π)
$(\frac{3}{2}\pi)$
(2π)
Cotangenskurve
ctg 300°
ctg 60°
300°
60°
ctg 60°
ctg 300°
0°
30°
60°
90°
120°
150°
180°
270°
360°
$(\frac{\pi}{2})$
(π)
$(\frac{3}{2}\pi)$
(2π)

Bild 388

tiv unendlich groß werden kann; und zwar tg $90° = \pm\infty$ [lies: plus oder minus unendlich]. Dasselbe gilt für $\alpha = 270°$. Hier ist tg $270° = \pm\infty$.

Da für die Größe der Funktionswerte der ctg-Funktion die Länge der waagerechten Tangente EC maßgebend ist, so sieht man, daß die Kotangensfunktion für α-Werte, die von 0° bis 90° wachsen, immer kleiner wird. ctg $0° = \infty$ und ctg $90° = 0$.

ctg 0° kann aber auch $-\infty$ sein, wenn man die Veränderlichkeit der Kotangensfunktion im IV. Quadranten betrachtet, in dem die ctg-Werte von 0 bis $-\infty$ abnehmen. Denselben Sprung von $+\infty$ nach $-\infty$ weist die ctg-Funktion bei 180° auf. Es ist also: ctg $0° = \pm\infty$ und ctg $180° = \pm\infty$. Die 4 trigonometrischen Kurven (Bild 388) veranschaulichen den Verlauf der Funktionen:

Der auf dem Einheitskreise mit 0° bezeichnete Punkt ist zum Anfangspunkt eines Koordinatenkreuzes gewählt, auf dessen Abszissenachse die Winkel α von 0° ... 360° aufgetragen sind. Die Entfernung der mit 0° und 90° bezeichneten Punkte auf der Abszissenachse ist gleich einem Viertel des Einheitskreisumfanges. Als Ordinaten des Koordinatenkreuzes sind die entsprechenden Funktionswerte, wie sie sich aus dem Einheitskreise ergeben, gezeichnet. Für irgendeinen Punkt einer dieser 4 Kurven gibt die Abszisse den Winkel im Bogenmaß, die Ordinate aber den zugehörigen Funktionswert an.

Die 4 Kurven kann man nach rechts hin beliebig fortsetzen. Sie wiederholen sich in ihrem Verlaufe, da ja nach einer vollen Umdrehung des beweglichen Schenkels des Winkels α der auf der Kreisperipherie gelegene Punkt P wieder im I. Quadranten angekommen ist. Man sagt:

| Die 4 trigonometrischen Funktionen sind periodisch um 360°.

Bei Betrachtung der tg- und ctg-Funktionskurve sieht man jedoch, daß diese beiden Kurven sich sogar schon nach 180° wiederholen.

| Die Tangens- und Kotangensfunktion sind um 180° periodisch.

Diese soeben gewonnenen Erkenntnisse fassen wir in folgenden 4 Gleichungen zusammen:

$$\sin(\alpha + n \cdot 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + n \cdot 360°) = \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,(\alpha + n \cdot 180°) = \mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{ctg}\,(\alpha + n \cdot 180°) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

4. Die Funktionswerte für stumpfe und negative Winkel

Um die trigonometrischen Tabellen, die nur für spitze Winkel aufgestellt sind, auch für Winkel, die größer als 90° sind, verwenden zu können, zerlegen wir einen gegebenen stumpfen Winkel, für den der Funktionswert durch die trigonometrische Tafel bestimmt werden soll, in ein Vielfaches von 90° plus oder minus einem spitzen Winkel α. Man zerlegt also z. B.

$$\begin{aligned} 140^\circ &= 90^\circ + 50^\circ \quad \text{oder} \\ &= 180^\circ - 40^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 250^\circ &= 180^\circ + 70^\circ \quad \text{oder} \\ &= 270^\circ - 20^\circ \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 300^\circ &= 270^\circ + 30^\circ \quad \text{oder} \\ &= 360^\circ - 60^\circ \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\beta^\circ = \mathrm{n} \cdot 90^\circ \pm \alpha^\circ.$$

Hierin ist β° ein beliebiger nicht spitzer Winkel, n eine ganze Zahl und α° ein spitzer Winkel.

Ist n eine gerade Zahl, z. B. 2 oder 4, so erfolgt die Winkelzerlegung durch den gestreckten Winkel 180° bzw. den Vollwinkel 360°; also:

$\beta = 180^\circ \pm \alpha$ d. h. β ist größer als 90°, aber kleiner als 270°, wenn α ein spitzer Winkel ist

oder

$\beta = 360^\circ \pm \alpha$ d. h. β ist größer als 270°, aber kleiner als 450° [bzw. 90°], wenn α spitz ist.

Zahlenbeispiele:

$$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ; \qquad 275^\circ = 360^\circ - 85^\circ$$
$$205^\circ = 180^\circ + 25^\circ; \qquad 440^\circ = 360^\circ + 80^\circ.$$

Ist n eine ungerade Zahl, z. B. 1 oder 3, so erfolgt die Winkelzerlegung durch den rechten Winkel bzw. den Winkel 270°; also:

$\beta = 90 + \alpha$ d. h. β ist stumpf, wenn α spitz ist

oder

$\beta = 270 \pm \alpha$ d. h. β ist überstumpf, wenn α spitz ist.

Zahlenbeispiele:

$$135^\circ = 90^\circ + 45^\circ \qquad 275^\circ = 270^\circ + 5^\circ$$
$$205^\circ = 270^\circ - 65^\circ \qquad 440^\circ = 450^\circ - 10^\circ$$

Zerlegung eines stumpfen Winkel in 180° $\pm \alpha$ bzw. in 360° $\pm \alpha$

Aus Bild 389 ergibt sich:

$$\begin{array}{llll|l|}
\hline
P_1D_1 & = & PD & = & \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\
D_1O & = & -DO & = & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \\
AB_1 & = & -AB & = & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\
C_1E & = & -CE & = & \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \\
P_2D_1 & = & -PD & = & \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \\
D_1O & = & -DO & = & \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \\
AB & = & AB & = & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \\
CE & = & CE & = & \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \\
P_3D & = & -PD & = & \sin(360^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\
DO & = & DO & = & \cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\
AB_1 & = & -AB & = & \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\
C_1E & = & -CE & = & \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \\
\hline
\end{array}$$

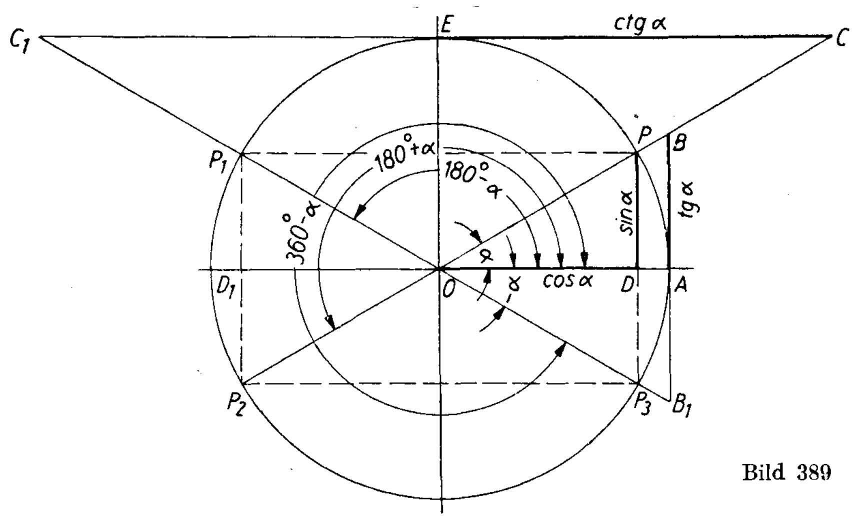


Bild 389

Aus den letzten 4 Gleichungen ergibt sich die

Regel über die Funktionen negativer Winkel

> Der sin, tg und ctg eines negativen Winkels ist gleich dem negativen sin-, tg- und ctg-Wert des positiven Winkels. *Aber!:* Der cos eines negativen Winkels ist gleich dem cos-Wert des positiven Winkels.

Zerlegung eines stumpfen Winkels in 90° ± α bzw. in 270° ± α.

Aus Bild 390 ergibt sich:

$P_1D_1 =$	$OD =$	$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$OD_1 =$	$PD =$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
$AB_1 =$	$EC =$	$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$
$EC_1 =$	$AB =$	$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$P_2D_2 =$	$OD =$	$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$
$OD_2 =$	$-PD =$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$
$AB_2 =$	$-EC =$	$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$EC_2 =$	$-AB =$	$\operatorname{ctg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$P_3D_2 =$	$-OD =$	$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$
$OD_2 =$	$-PD =$	$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$
$AB_1 =$	$EC =$	$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$
$EC_1 =$	$AB =$	$\operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$P_4D_1 =$	$-OD =$	$\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$
$OD_1 =$	$PD =$	$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$
$AB_2 =$	$-EC =$	$\operatorname{tg}(270° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$EC_2 =$	$-AB =$	$\operatorname{ctg}(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

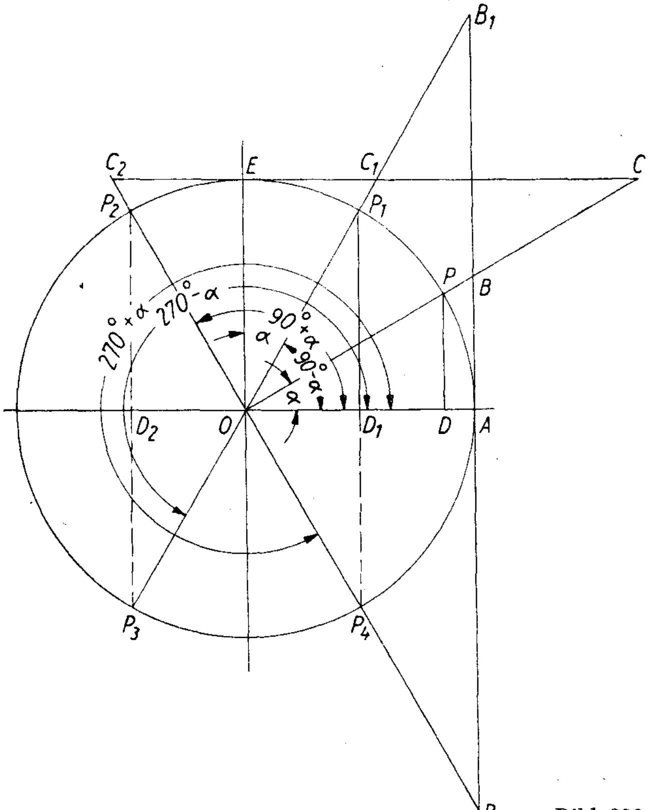


Bild 390

So verwirrend auch die Fülle der stark umrandeten wichtigen Formeln bei oberflächlicher Betrachtung dem Anfänger vielleicht erscheinen mag, so leicht sind diese Formeln jedoch zu merken, sofern man ihren systematischen Aufbau erkannt hat, der zusammengefaßt festgelegt werden möge in folgender

Regel: Jede trigonometrische Funktion von $n \cdot 90° \pm \alpha$ ist, abgesehen vom Vorzeichen, gleich derselben oder der Kofunktion von α, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Das Vorzeichen ist das der ursprünglichen Funktion in dem zu $n \cdot 90° \pm \alpha$ gehörenden Quadranten. (Siehe Vorzeichenbilder auf Seite 239.)

Beispiele

1) Wie groß ist $\sin (180° + \alpha)$?

Der Winkel $(180° + \alpha)$ liegt im III. Quadranten. Der Sinus eines Winkels im III. Quadranten ist lt. Vorzeichenbild negativ. Weil die Zerlegung von 180° aus vorgenommen wurde, bleibt die Funktion erhalten; also:

$$\sin (180° + \alpha) = - \sin \alpha.$$

2) Wie groß ist $\cos(180° - \alpha)$?

Der Winkel liegt im II. Quadranten. Der Kosinus eines Winkels im II. Quadranten ist negativ. Die Funktion bleibt erhalten; also

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$$

3) Wie groß ist $\operatorname{tg}(360° - \alpha)$?

Winkel im IV. Quadranten. Dort ist tg negativ. Funktion bleibt wegen Zerlegung von 360° aus unverändert; also:

$$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

4) Wie groß ist $\operatorname{ctg}(360° - \alpha)$? Genau dieselben Betrachtungen wie im Beispiel 3; also:

$$\operatorname{ctg}(360° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

5) Wie groß ist $\sin(90° + \alpha)$? Winkel liegt im II. Quadranten. Vorzeichen: +. Da die Winkelzerlegung von 90° aus vorgenommen wird, ändert sich die Funktion in die Kofunktion; also:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

6) Wie groß ist $\cos(270° - \alpha)$? Winkel liegt im III. Quadranten. Vorzeichen: —. Umänderung in Kofunktion!

$$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$$

7) Wie groß ist $\operatorname{tg}(270° - \alpha)$? Tangens eines Winkels im III. Quadranten hat Vorzeichen: +. Umwandlung in Kofunktion!

$$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

8) Wie groß ist $\operatorname{ctg}(270° + \alpha)$? Winkel im IV. Quadranten. ctg ist dort negativ. ctg-Funktion geht in tg über; also:

$$\operatorname{ctg}(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

9) Wie groß sind folgende Funktionswerte?

$$\begin{aligned}
\sin 200° &= \sin(180° + 20°) = -\sin 20° = -0{,}342\\
\cos 150° &= \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -0{,}866\\
\operatorname{tg} 300° &= \operatorname{tg}(360° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -1{,}732\\
\operatorname{ctg} 250° &= \operatorname{ctg}(180° + 70°) = +\operatorname{ctg} 70° = +0{,}364
\end{aligned}$$

10) Wie groß sind die 4 trigonometrischen Funktionen des Winkels $\alpha = -45°$?

$$\begin{aligned}
\sin(-45°) &= -\sin 45° = -0{,}707\\
\cos(-45°) &= \cos 45° = 0{,}707\\
\operatorname{tg}(-45°) &= -\operatorname{tg} 45° = -1\\
\operatorname{ctg}(-45°) &= -\operatorname{ctg} 45° = -1
\end{aligned}$$

11) Wie groß ist α, wenn $\sin \alpha = 0{,}643$ ist?

Außer einem spitzen Winkel α_1, den man der Tabelle der trigonometrischen Funktionen entnimmt, gibt es noch einen stumpfen Winkel α_2, der im II. Quadranten liegt; also:

$$\alpha_1 = 40^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

12) Wie groß ist α, wenn $\cos \alpha = -\,0{,}342$ ist?

Die Kosinusfunktion ist negativ, wenn α im II. oder III. Quadranten liegt. Wäre $\cos \alpha = 0{,}342$, dann würde $\alpha = 70^\circ$ lt. Tabelle sein. Wenn aber $\cos \alpha = -\,0{,}342$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} & \alpha_1 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \\ \text{und} \quad & \alpha_2 = 180^\circ + 70^\circ = 250^\circ \end{aligned}$$

13) $\operatorname{tg} \alpha = -\,1$. Wie groß ist α?

Zu $\operatorname{tg} \alpha = 1$ gehört $\alpha = 45^\circ$. Da aber hier $\operatorname{tg} \alpha$ negativ ist, so liegt der gesuchte Winkel im II. oder IV. Quadranten. Zu $\operatorname{tg} \alpha = -\,1$ gehören die Winkel:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \\ \text{und} \quad & \alpha_2 = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ \end{aligned}$$

14) $\operatorname{ctg} x = 1{,}192$. Der Kotangens ist positiv für Winkel im I. und III. Quadranten; d. h. $x_1 = 40^\circ$ und $x_2 = 180^\circ + 40^\circ = 220^\circ$.

15) α, β und γ sind Dreieckswinkel. Die 4 trigonometrischen Funktionen des Winkels α sollen durch β und γ ausgedrückt werden!

Da im Dreieck $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist, so ist $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Somit ist

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin [180^\circ - (\beta + \gamma)] = \sin (\beta + \gamma) \\ \cos \alpha &= \cos [180^\circ - (\beta + \gamma)] = -\cos (\beta + \gamma) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} [180^\circ - (\beta + \gamma)] = -\operatorname{tg} (\beta + \gamma) \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{ctg} [180^\circ - (\beta + \gamma)] = -\operatorname{ctg} (\beta + \gamma) \end{aligned}$$

D. Die 4 trigonometrischen Funktionen im schiefwinkligen Dreieck

Mit den im vorhergehenden Abschnitt behandelten Funktionswerten für stumpfe Winkel kann man jedes beliebige Dreieck berechnen; während bei den rechtwinkligen Dreiecken die beiden der Hypotenuse anliegenden Winkel stets spitz sind, können in einem beliebigen Dreieck auch stumpfe Winkel auftreten.

1. Sinussatz

$$\boxed{\begin{array}{c} a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \\ \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \end{array}}$$

oder:

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die sin-Funktionen der gegenüberliegenden Winkel.

Beweis

Von den beiden Dreiecken (Bilder 391 und 392) hat das zweite bei A einen stumpfen Winkel. Die beiden Dreiecke stimmen überein in b, c und h_c.

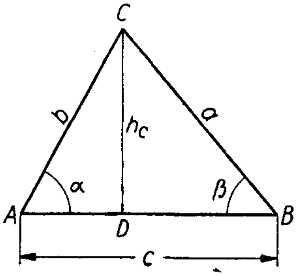


Bild 391

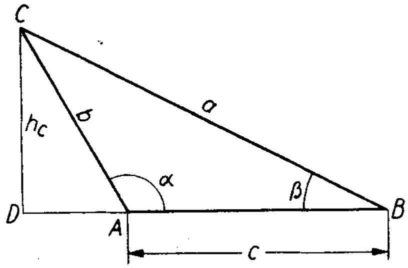


Bild 392

Im Dreieck ADC ist:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \quad \text{oder} \quad h_c = b \cdot \sin\alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_c}{b} = \sin\alpha$$

$$\text{oder} \quad h_c = b \cdot \sin\alpha .$$

Im Dreieck DBC ist:

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \quad \text{oder} \quad h_c = a \sin\beta .$$

Durch Gleichsetzen der beiden Werte für h_c erhält man für beide Dreiecke:

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \quad \text{oder} \quad a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$.

Durch Zusammenfassen der Gleichungen

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta \quad \text{und}$$
$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$$

erhält man $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

oder $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Der Zahlenwert der letzten untereinander gleichen Brüche ist gleich dem Durchmesser des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Beweis

Um das Dreieck ABC (Bild 393) ist der Umkreis mit dem Mittelpunkt M beschrieben. Man verbinde A mit M und verlängere AM über M hinaus bis C_1. C_1B steht senkrecht auf AB (Thales). $\sphericalangle\, BC_1A = \sphericalangle\, BCA$ als Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen $\overset{\frown}{AB}$. Da $AC_1 = d =$ Durchmesser des Umkreises ist, erhält man im $\triangle\, ABC_1 : \sin\gamma = \frac{c}{d}$

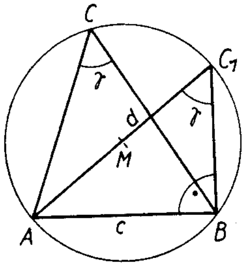


Bild 393

oder $$\boxed{\frac{c}{\sin\gamma} = d}$$

In Worten: Der Durchmesser des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist gleich einer Dreiecksseite, geteilt durch den Sinus des der Dreiecksseite gegenüberliegenden Winkels.

2. Kosinussatz

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus den beiden anderen Seiten mal dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Beweis

In den beiden nachstehenden Dreiecken (Bilder 394 und 395) sind b, c und h_c einander gleich. Der Winkel α ist im 2. Dreieck stumpf. Die Projektion der Seite b auf c ist mit q bezeichnet.

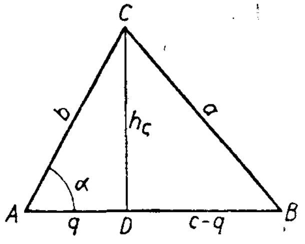


Bild 394

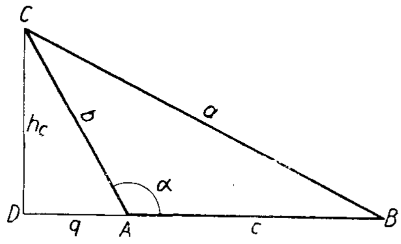


Bild 395

Im △ ADC ist:

$$h_c^2 = b^2 - q^2.$$

Im △ DBC ist

$$h_c^2 = a^2 - (c - q)^2.$$

Durch Gleichsetzen der Werte für h_c^2:

$$b^2 - q^2 = a^2 - (c - q)^2$$

oder:

$$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2\,c\,q - q^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2\,c\,q.$$

Ferner ist

$$q = b \cos \alpha$$

q in die vorletzte Gleichung eingesetzt:

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2\,b\,c \cos \alpha.$$

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$

$$h_c^2 = a^2 - (c + q)^2$$

$$b^2 - q^2 = a^2 - (c + q)^2$$

$$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 - 2\,c\,q - q^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 - 2\,c\,q$$

$$q = b \cos (180 - \alpha) = - b \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2\,b\,c \cos \alpha.$$

Nach a^2 aufgelöst, erhält man für beide Dreiecke:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha.$$

Die beiden anderen Gleichungen für den oben angegebenen Kosinussatz lassen sich entsprechend mit Hilfe der Höhen h_a und h_b beweisen.

Die 3 Gleichungen für den Kosinussatz nach dem Kosinus eines Dreieckwinkels aufgelöst, ergeben:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$$

Mittels dieser Gleichungen können die Winkel eines Dreiecks berechnet werden, sofern die Dreiecksseiten bekannt sind. Einfacher jedoch ist diese Berechnung mit dem nachfolgend abgeleiteten Halbwinkelsatz.

3. Halbwinkelsatz

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-b)}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)}{s\cdot(s-c)}}$$

Hierin bedeutet:

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

= halber Dreiecksumfang.

Beweis

Dem Dreieck ABC (Bild 396) ist der Inkreis mit dem Radius ϱ eingeschrieben. Die von seinem Mittelpunkt M zu den 3 Ecken gehenden Verbindungslinien sind die 3 Winkelhalbierenden.

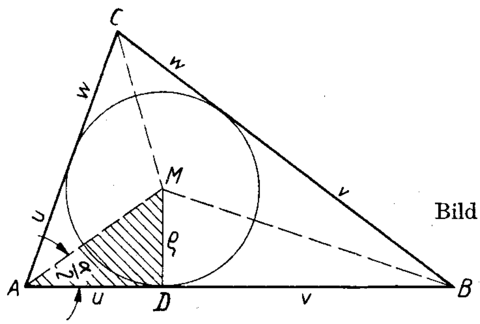


Bild 396

Bezeichnet man den Dreiecksumfang mit 2s, so ist:

$$a + b + c = 2s$$

oder

$$\underbrace{v+w}_{a}+\underbrace{w+u}_{b}+\underbrace{u+v}_{c}=2s$$

oder

$$2u + 2v + 2w = 2s$$
$$u + v + w = s$$
$$u = s-(v+w)$$
$$u = s-a.$$

In dem schraffierten Dreieck ist $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{u}=\frac{\varrho}{s-a}$. Wie auf Seite 76 bewiesen wurde, beträgt der Dreiecksinhalt:

$$f=\varrho\cdot s$$

oder nach der Heronischen Dreiecksformel (Seite 78):

$$f=\sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Werte für den Inhalt ergibt sich:

$$\varrho\cdot s=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

oder

$$\varrho=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Diesen Wert für ϱ in die obige Gleichung: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$ eingesetzt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}{s-a}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\cdot(s-a)}}.$$

Für die Wurzel ist nur der positive Wert zu verwenden; denn $\frac{\alpha}{2}$ kann als Dreieckswinkel stets nur kleiner als 90° sein. Der tg-Wert eines Winkels, der kleiner als 90° ist, ist immer positiv.

4. Dreiecksinhalt

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\,a\,b\cdot\sin\gamma \\ &= \frac{1}{2}\,a\,c\cdot\sin\beta \\ &= \frac{1}{2}\,b\,c\cdot\sin\alpha \end{aligned}}$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten mal dem sinus des eingeschlossenen Winkels.

Beweis

Der Inhalt eines Dreiecks ist: $F = \frac{1}{2}$ Grundlinie $\times$ Höhe

$$= \frac{1}{2}\,c\cdot h_c.$$

Ist der Dreieckswinkel α spitz, dann ist

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \quad \text{(Bild 394).}$$

Für $\alpha > 90°$ ist

$$\sin(180-\alpha) = \frac{h_c}{b} = \sin\alpha \quad \text{(Bild 395).}$$

Sowohl für spitze, als auch für stumpfe Winkel α folgt:

$$h_c = b\cdot\sin\alpha.$$

Diesen Wert in die Dreiecksinhaltsformel $F = \frac{1}{2}\,c\cdot h_c$ eingesetzt, ergibt:

$$F = \frac{1}{2}\,b\cdot c\cdot\sin\alpha \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die beiden anderen Dreiecksinhaltsformeln lassen sich entsprechend durch die Höhen h_a und h_b ableiten.

5. Beispiele und Aufgaben

1) Von einem Dreieck ist gegeben $a = 10$ cm; $b = 5$ cm; $\alpha = 50°$. Wie groß sind die übrigen Dreiecksstücke und der Inhalt?

Lösung

Aus dem Sinussatz $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ folgt:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{5 \cdot \sin 50°}{10} = 0{,}5 \cdot 0{,}766 = 0{,}383;$$

hieraus $\beta = 22°\,30'$.

Die 2. Lösung für β wäre: $\beta_2 = 180° - 22°\,30' = 157°\,30'$. Diese ist jedoch unmöglich, da β kleiner als $\alpha = 50°$ sein muß, weil β der kleineren Seite ($b < a$) gegenüber liegt.

Der Winkel γ folgt aus:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (50° + 22°\,30')$$
$$\gamma = 107°\,30'$$

Die Seite c bestimmt man aus dem Sinussatz:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma};$$

$$c = \frac{\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{10 \cdot \sin 107°\,30'}{\sin 50°} = \frac{10 \cdot \sin 72°\,30'}{\sin 50°} = \frac{10 \cdot 0{,}954}{0{,}766} = 12{,}2 \text{ cm}$$

Der Umkreisdurchmesser beträgt: $d = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{10}{\sin 50°} = \frac{10}{0{,}766} \approx 13$ cm.

Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 107°\,30' \approx 23{,}9 \text{ cm}^2$.

2) Gegeben sind die 3 Seiten: $a = 40$ cm, $b = 50$ cm, $c = 60$ cm. Wie groß sind die 3 Winkel?

Lösung

Halber Dreiecksumfang: $s = \frac{1}{2}(40 + 50 + 60) = 75$ cm

$$s - a = 35 \text{ cm}$$
$$s - b = 25 \text{ cm}$$
$$s - c = 15 \text{ cm}$$

Mit diesen Größen ist nach dem Halbwinkelsatz:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s \cdot (s-a)}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 15}{75 \cdot 35}} = \sqrt{0{,}143} = 0{,}38; \quad \alpha = 41°\,40'$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s \cdot (s-b)}} = \sqrt{\frac{35 \cdot 15}{75 \cdot 25}} = \sqrt{0{,}28} = 0{,}53; \quad \beta = 55°\,40'$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\cdot(s-c)}} = \sqrt{\frac{35\cdot 25}{75\cdot 15}} = \sqrt{0{,}778} = 0{,}88;\ \gamma = 82^\circ\, 40'$$

Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

3) 2 Parallelogramm-Seiten $a = 18$ cm und $b = 12$ cm schließen den Winkel $\alpha = 60^\circ$ ein (Bild 397). Wie groß sind die Diagonalen und der Flächeninhalt?

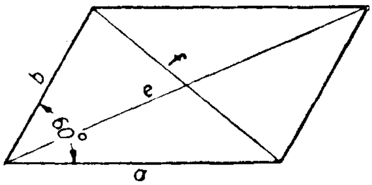


Bild 397

Lösung

Nach dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned} f^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\alpha \\ &= 18^2 + 12^2 - 2\cdot 18\cdot 12\cdot\cos 60^\circ \\ &= 324 + 144 - 216 = 252 \\ f &= 15{,}87 \text{ cm} \\ e^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(180^\circ - \alpha) \\ &= 18^2 + 12^2 - 2\cdot 18\cdot 12\cdot(-\cos 60) \\ &= 324 + 144 + 216 \\ &= 684 \\ e &= 26{,}15 \text{ cm} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt setzt sich aus 2 kongruenten Dreiecken zusammen:

$$F = 2\cdot\frac{1}{2}\,a\,b\sin\alpha = 18\cdot 12\cdot 0{,}866$$

$$F = 187 \text{ cm}^2$$

4) Zwei Kräfte $P_1 = 130$ kg und $P_2 = 70$ kg greifen unter dem Winkel $\alpha = 50^\circ$ an einem Punkt an (Bild 398). Wie groß ist ihre Resultierende R?

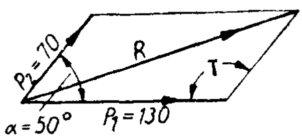


Bild 398

Lösung

In dem nebenstehenden Kräfteparallelogramm ist

$$\gamma = 180^\circ - \alpha = 130^\circ$$

Der Kosinussatz für das halbe Kräfteparallelogramm — es ist das Dreieck mit den Seiten P_1, P_2 und R — ergibt:

$$\begin{aligned} R^2 &= P_1^2 + P_2^2 - 2\,P_1\,P_2\cos\gamma \\ &= 130^2 + 70^2 - 2\cdot 130\cdot 70\cdot\cos 130^\circ \end{aligned}$$

Da $\cos 130° = \cos(180° - 50°) = -\cos 50° = -0{,}643$ ist, so erhält man:

$$R^2 = 16900 + 4900 + 18200 \cdot 0{,}643 = 33500$$
$$R = 183 \text{ kg}$$

5) Eine Kraft $P = 70$ kg soll in zwei Komponenten A und B zerlegt werden, von denen die eine mit P den Winkel $\alpha = 38°\,10'$, die andere den Winkel $\beta = 21°\,50'$ einschließt (Bild 399). Wie groß sind die beiden Komponenten?

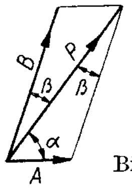


Bild 399

Lösung

Durch zweimalige Anwendung des Sinussatzes erhält man A und B aus:

$$\frac{A}{\sin 21°\,50'} = \frac{P}{\sin 60°} \quad \text{oder} \quad A = \frac{70 \cdot 0{,}372}{0{,}866} = 30 \text{ kg}$$

$$\frac{B}{\sin 38°\,10} = \frac{P}{\sin 60°} \quad \text{oder} \quad B = \frac{70 \cdot 0{,}618}{0{,}866} = 50 \text{ kg}$$

6) Die 3 Seiten eines Dreiecks sind a, b und c. Sein Umkreisradius beträgt r. Wie kann man den Dreiecksinhalt durch diese 4 Größen ausdrücken?

Lösung

Es ist: $F = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma$ und $\frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

oder $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$

Diesen Wert in die Dreiecksinhaltsgleichung eingesetzt, ergibt

$$F = \frac{1}{2}\, a\, b \cdot \frac{c}{2r} = F = \frac{a\,b\,c}{4r}$$

7) Drei Kreise mit den Radien $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 3$ cm und $r_3 = 2$ cm berühren sich gegenseitig von außen (Bild 400). Welche Winkel schließen je 2 Mittelpunktslinien miteinander ein?

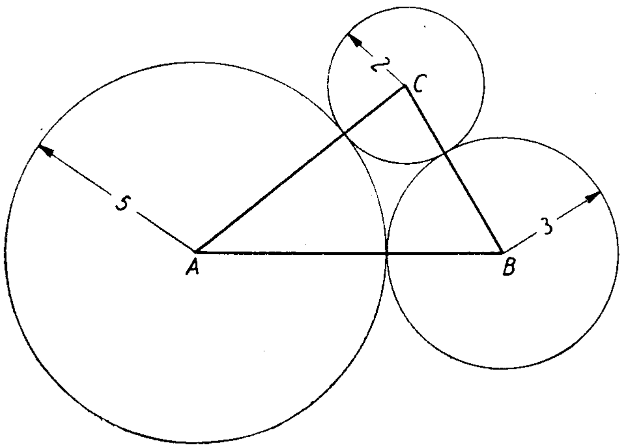


Bild 400

Lösung

Verbindet man die 3 Mittelpunkte A, B und C der 3 Kreise miteinander, so entsteht das vorstehende Dreieck ABC mit den Seiten: $a = 5$ cm, $b = 7$ cm und $c = 8$ cm. Für dieses Dreieck ist:

$$\begin{aligned} s &= 10\text{ cm} \\ s - a &= 5\text{ cm} \\ s - b &= 3\text{ cm} \\ s - c &= 2\text{ cm} \end{aligned}$$

Nach dem Halbwinkelsatz berechnet man:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 5}} = \sqrt{0{,}12} = 0{,}3464;\quad \alpha = 38^\circ\,20'$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{10 \cdot 3}} = \sqrt{0{,}33} = 0{,}5745;\quad \beta = 60^\circ$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{5 \cdot 3}{10 \cdot 2}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}8660;\quad \gamma = 81^\circ\,40'$$

Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

8) Von einem Dreieck kennt man die Grundlinie c und die beiden ihr anliegenden Winkel α und β. Wie drückt sich der Dreiecksinhalt mit diesen 3 Größen aus?

Lösung

Nach dem Sinussatz ist $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ oder $b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$. Diesen Wert in die Flächeninhaltsgleichung $F = \frac{1}{2} b c \sin\alpha$ eingesetzt, ergibt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]}.$$

9) Regelmäßige Vielecke. Von einem regelmäßigen Vieleck kennt man den Radius r des Umkreises. Aus der Seitenzahl n dieses Vieleckes und seinem Umkreisradius r sind zu berechnen:

a) die Seitenlänge s_n

b) der Umfang u_n

c) der Flächeninhalt des Vieleckes F_n und

d) der Radius des Inkreises ϱ_n.

Lösung

Verbindet man 2 aufeinanderfolgende Vielecksecken mit dem Mittelpunkt des Vielecks, so bilden diese beiden Verbindungslinien, deren Länge gleich r ist, den Zentriwinkel $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$, der in dem gleichschenkligen Bestimmungsdreieck an der Spitze liegt.

a) Die Seitenlänge s_n ermittelt man aus diesem Dreieck:

$$s_n = 2 r \sin\frac{\varphi}{2} = \boxed{2 r \sin\frac{180^\circ}{n} = s_n}$$

b) Der Umfang des n-Ecks ist n mal so groß, also:

$$\boxed{u_n = 2\,n \cdot r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

c) Der Flächeninhalt des n-Ecks ist n mal so groß wie der des Bestimmungsdreiecks:

$$F_n = n \cdot \frac{1}{2}\, r^2 \sin \varphi = \boxed{\frac{1}{2}\, n\, r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = F_n}$$

d) Der Radius ϱ_n des dem regelmäßigen n-Eck einbeschriebenen Kreises ist gleich der Höhe des Bestimmungsdreiecks. Aus $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho_n}{r}$ folgt:

$$\boxed{\varrho_n = r \cos \frac{180^\circ}{n}}$$

10) Die kreisbogenförmige Schaufelform einer Schleuderpumpe wird nach Bild 401 folgendermaßen konstruiert:

An den Halbmesser $AC = R$ trägt man in C den Winkel $\sigma = \beta_1 + \beta_2$ an. [β_1 und β_2 sind die Ein- und Austrittswinkel der kreisförmigen Schaufel. R und r sind die Ein- und Austrittsradien des Laufrades]. Der freie Schenkel des Winkels σ schneidet den Eintrittskreis in B. Die Verbindungslinie

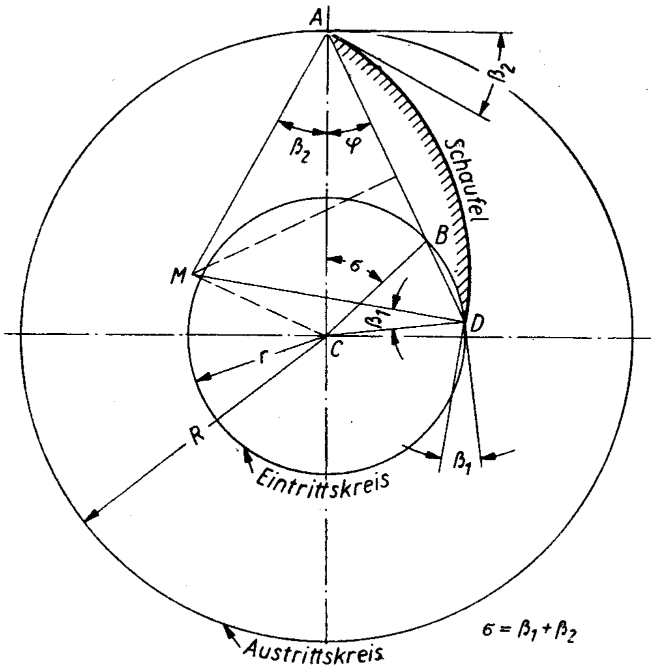


Bild 401

von A mit B bzw. ihre Verlängerung schneidet den Eintrittskreis in D. In A legt man an den Austrittskreis die Tangente und trägt an sie den Austrittswinkel β_2 an. Ebenso legt man an den Eintrittskreis in D die Tangente und trägt an sie in derselben Richtung den Eintrittswinkel β_1 an. Die Senkrechten auf den freien Schenkeln der beiden Winkel β_1 und β_2 in A und D schneiden sich in M. $AM = x$ ist der gesuchte Radius der kreisförmig gekrümmten Schaufel. (M liegt auf der Mittelsenkrechten von AD). Da $\triangle$ AMD gleichschenklig ist, ist $\sphericalangle MDB = \sphericalangle DAM = \beta_2 + \varphi$. Da $\triangle$ CDB gleichschenklig ist, ist $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBC = \sigma + \varphi$ (Außenwinkel). $\sphericalangle CDB - \sphericalangle MDB = (\sigma + \varphi) - (\beta_2 + \varphi) = \sphericalangle CDM = \beta_1$ oder

$$\begin{aligned} \sigma + \varphi - \beta_2 - \varphi &= \beta_1 \\ \sigma - \beta_2 &= \beta_1 \\ \sigma &= \beta_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

Um die Größe des Radius x der Kreisbogenschaufel zu berechnen, denke man sich M mit C verbunden und wende zweimal den Kosinussatz an:

Im $\triangle$ AMC ist: $MC^2 = x^2 + R^2 - 2\,x\,R\cos\beta_2$

Im $\triangle$ DMC ist: $MC^2 = x^2 + r^2 - 2\,x\,r\cos\beta_1$

$$x^2 + R^2 - 2\,x\,R\cos\beta_2 = x^2 + r^2 - 2\,x\,r\cos\beta_1$$
$$R^2 - r^2 = 2\,x\,(R\cos\beta_2 - r\cos\beta_1)$$

Schaufelradius: $x = \dfrac{R^2 - r^2}{2\,(R\cos\beta_2 - r\cos\beta_1)}$.

Aufgaben

26) Von einem Dreieck sind die 3 Seiten $a = 91$ mm; $b = 81$ mm; $c = 71$ mm gegeben. Wie groß sind die Winkel α, β, γ und der Flächeninhalt?

27) Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 24$ mm und die beiden anliegenden Winkel $\beta = 53°$ und $\gamma = 104°$. Wie groß sind b, c, α und F?

Von einem Dreieck sind gegeben:	Es sind zu berechnen:
28) $a = 14$ cm; $c = 13$ cm; $\beta = 67°\,23'$	b; α; γ und F
29) $a = 17$ cm; $b = 25$ cm; $\beta = 59°\,11'$	c; α; γ und F
30) $a = 85$ cm; $b = 73$ cm; $F = 2179{,}2\,\text{cm}^2$.	c; α; β und γ

31) Wie groß sind die Diagonalen c und d und der Inhalt F eines Parallelogramms mit den Seiten $a = 10$ cm, $b = 8$ cm und dem eingeschlossenen Winkel $\alpha = 60°$? Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Seiten und den beiden Diagonalen eines Parallelogramms?

32) Die Diagonalen eines Parallelogramms betragen $e = 20$ cm und $f = 10$ cm. Sie bilden miteinander den Winkel $\alpha = 45°$. Wie groß ist der Parallelogramm-Inhalt F?

33) Wie groß ist der Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks mit den Diagonalen e und f, die sich unter einem Winkel φ schneiden? Was wird aus der Figur und wie ist das Ergebnis zu deuten, wenn man e parallel mit sich soweit verschiebt, daß e und f einen Endpunkt gemeinsam haben?

Anleitung: Durch die Ecken des Vierecks ziehe man die Parallelen zu e und f. Das entstehende Parallelogramm ist doppelt so groß wie das Viereck.

34) Wie groß ist die Resultierende R zu den beiden Kräften A = 70 kg und B = 20 kg, die unter dem Winkel $\alpha = 150°$ an einem Punkte angreifen?

35) Unter welchem Winkel greifen die beiden Kräfte $P_1 = 30$ kg und $P_2 = 40$ kg an einem Punkte A an, wenn ihre Resultierende 50 kg beträgt?

E. Die trigonometrischen Funktionen zusammengesetzter Winkel

1. Additionstheoreme

Um den Scheitel M des Winkels $(\alpha + \beta)$ ist der Einheitskreis beschrieben (Bild 402); er schneidet den einen Schenkel des Winkels $(\alpha + \beta)$ in E. Von E werden auf die Schenkel des Winkels α die beiden Lote EA und ED gefällt. Schließlich fällt man noch von D auf AE das Lot DC und auf die Verlängerung von MA das Lot DB.

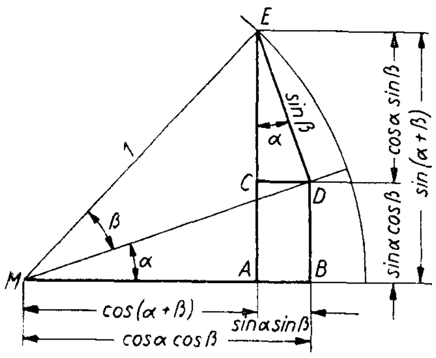


Bild 402

Aus dem Bilde 402 sieht man, daß $\sphericalangle DEC = \sphericalangle \alpha$ ist; denn die Schenkel des Winkels DMB und die des Winkels DEA stehen paarweise aufeinander senkrecht. Ferner erhält man:

im $\triangle$ MAE:	$AE = \sin(\alpha + \beta)$
im $\triangle$ MDE:	$ED = \sin\beta$
und	$MD = \cos\beta$
im $\triangle$ ECD:	$EC = \cos\alpha \sin\beta$
im $\triangle$ MBD:	$DB = AC = \sin\alpha\cos\beta$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen:

$$AC + EC = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = AE = \sin(\alpha+\beta)$$

also: $\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Ebenfalls liest man aus dem vorstehenden Bilde:

$$MA = MB - AB$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Setzt man in die beiden letzten Gleichungen für β den Wert $(-\beta)$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sin[\alpha + (-\beta)] &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)\\ \cos[\alpha + (-\beta)] &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der auf Seite 245 abgeleiteten Funktionswerte für negative Winkel erhält man:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Ein anderer recht leichter und anschaulicher Beweis für die Richtigkeit der vorstehenden Gleichungen ist folgender:

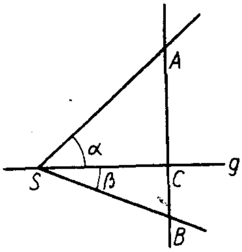


Bild 403

An eine Gerade g (Bild 403) trägt man in einem beliebigen Punkt S nach verschiedenen Seiten die Winkel α und β an. Ferner errichtet man in einem beliebigen Punkt C der Geraden g auf dieser die Senkrechte, die die freien Schenkel der Winkel α und β in A und B schneidet. Wie aus dem nebenstehenden Bilde zu ersehen ist, ist

$$\triangle SBA = \triangle SCA + \triangle SBC$$

oder nach Seite 254

$$\frac{1}{2}SB\cdot SA\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}SC\cdot SA\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}SC\cdot SB\cdot\sin\beta$$

Nach Division durch $\frac{1}{2}SB\cdot SA$ erhält man:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{SC}{SB}\cdot\sin\alpha + \frac{SC}{SA}\cdot\sin\beta$$

Da aber $\frac{SC}{SB} = \cos\beta$ und $\frac{SC}{SA} = \cos\alpha$ ist, erhält man somit:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Trägt man die Winkel α und β (Bild 404) an die Gerade g im Punkte S nach derselben Seite an und errichtet wiederum auf g in C die Senkrechte, so ergibt sich nach nebenstehendem Bilde:

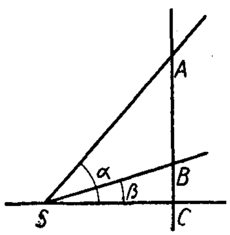


Bild 404

$$\triangle SBA = \triangle SCA - \triangle SCB$$

oder

$$\frac{1}{2}SB\cdot SA\sin(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{1}{2}SC\cdot SA\cdot\sin\alpha - \frac{1}{2}SC\cdot SB\cdot\sin\beta$$

Nach Division durch $\frac{1}{2}\,\mathrm{SB} \cdot \mathrm{SA}$ erhält man:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{SC}}{\mathrm{SB}} \cdot \sin\alpha - \frac{\mathrm{SC}}{\mathrm{SA}} \sin\beta$$

Setzt man wiederum $\frac{\mathrm{SC}}{\mathrm{SB}} = \cos\beta$ und $\frac{\mathrm{SC}}{\mathrm{SA}} = \cos\alpha$, so erhält man:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Durch Division der oben abgeleiteten Gleichungen erhält man:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind gleich der tg-Funktion der Winkel $(\alpha + \beta)$ bzw. $(\alpha - \beta)$. Die Brüche auf den rechten Seiten der beiden Gleichungen werden gekürzt mit $\cos\alpha\cos\beta$. Man erhält:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Die Richtigkeit der vorstehend abgeleiteten Gleichungen, die als die Additionstheoreme bezeichnet werden, wurde bisher nur für spitze Winkel bewiesen.

Die Additionstheoreme gelten aber auch für beliebige Winkel. Dies wird nachstehend für einige beliebige Fälle bewiesen.

1) α liege im II. und β im I. Quadranten. Man hat in die Gleichungen der Additionstheoreme für $\alpha = 90° + \alpha'$ einzusetzen, wobei α' ein spitzer Winkel ist; es ergibt sich in diesem Falle beispielsweise für

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(90° + \alpha' + \beta) = \sin[90° + (\alpha' + \beta)] = \\ &= \cos(\alpha' + \beta) = \cos\alpha'\cos\beta - \sin\alpha'\sin\beta = \\ &= \cos(-\alpha')\cos\beta + \sin(-\alpha')\sin\beta = \\ &= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \sin(90° - \alpha)\sin\beta =\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Für das Additionstheorem der cos-Funktion ergibt sich:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(90° + \alpha' - \beta) = \cos[90° + (\alpha' - \beta)] = \\ &= -\sin(\alpha' - \beta) = -\sin\alpha'\cos\beta + \cos\alpha'\sin\beta = \\ &= \sin(-\alpha')\cos\beta + \cos(-\alpha')\sin\beta = \\ &= \sin(90° - \alpha)\cos\beta + \cos(90° - \alpha)\sin\beta =\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Zur Übung führe der Leser entsprechende Ableitungen für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ durch!

2) α liege im III. und β im II. Quadranten. Man setze in die Gleichungen der Additionstheoreme für $\alpha = 270° - \alpha'$ und für $\beta = 90° + \beta'$ ein, wobei α' und β' spitze Winkel sind. Es ergibt sich z. B.:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \sin(270° - \alpha' - [90° + \beta']) = \\
&= \sin(180° - [\alpha' + \beta']) = \\
&= \sin(\alpha' + \beta') = \\
&= \sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta' = \\
&= \sin\alpha' \cos(-\beta') - \cos\alpha' \sin(-\beta') = \\
&= \sin(270° - \alpha)\cos(90° - \beta) - \cos(270° - \alpha)\sin(90° - \beta) = \\
&= -\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta =
\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Für Fall 2) beweise man übungshalber die Additionstheoreme für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ sowie $\cos(\alpha - \beta)$!

3) α liege im IV. und β im III. Quadranten. Man setze in die Gleichungen der Additionstheoreme für $\alpha = 270° + \alpha'$ und für $\beta = 270° - \beta'$ ein, wobei α' und β' spitze Winkel sind. Es ergibt sich z. B.:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(270° + \alpha' + 270° - \beta') = \\
&= \cos(540° + [\alpha' - \beta']) = \\
&= \cos(180° + [\alpha' - \beta']) = \\
&= -\cos(\alpha' - \beta') = \\
&= -\cos\alpha' \cos\beta' - \sin\alpha' \sin\beta' = \\
&= -\cos(-\alpha')\cos\beta' + \sin(-\alpha')\sin\beta' = \\
&= -\cos(270° - \alpha)\cos(270° - \beta) \\
&\qquad + \sin(270° - \alpha)\sin(270° - \beta) = \\
&= -(-\sin\alpha)\cdot(-\sin\beta) + (-\cos\alpha)\cdot(-\cos\beta) = \\
&= -\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta =
\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Für den Fall 3) beweise der Leser die Additionstheoreme für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$ sowie $\cos(\alpha - \beta)$!

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \end{aligned}}$$

2. Funktionen der doppelten und halben Winkel

Setzt man in die Gleichungen der Additionstheoreme an die Stelle von β den Wert α bzw. für α und β je $\frac{\alpha}{2}$, so erhält man die Funktionen der doppelten Winkel:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \end{aligned}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}}$$

Addiert bzw. subtrahiert man die Gleichung für $\cos 2\alpha$ zu der Gleichung des trigonometrischen Pythagoras, so folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 1+\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha \\ 1-\cos 2\alpha &= 2\sin^2\alpha \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} 1+\cos\alpha &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ 1-\cos\alpha &= 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{aligned}}$$

Diese Gleichungen nach

$\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ bzw. $\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\alpha}{2}$ aufgelöst, ergibt

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\\ \sin\alpha &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\ \sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\end{aligned}}$$

Durch Division der letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

3. Beispiele und Aufgaben

Als bekannt werden die Funktionswerte der Winkel 0°, 30°, 45°, 60° und 90° vorausgesetzt (siehe Zusammenstellung: Seite 212).

1) Wie groß ist sin 75°?

Lösung

Man zerlegt 75° in 45° + 30° und erhält:

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = 0{,}966.\end{aligned}$$

2) Wie groß ist nach dem Additionstheorem $\sin(90^\circ + \alpha)$?

Lösung

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ + \alpha) &= \sin 90^\circ \cos\alpha + \cos 90^\circ \sin\alpha\\ &= 1\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha\\ \sin(90^\circ+\alpha) &= \cos\alpha\end{aligned}$$

(Vgl. Formeln für stumpfe Winkel Seite 246.)

3) Es ist zu beweisen: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$!

Lösung

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\\ &= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}\end{aligned}$$

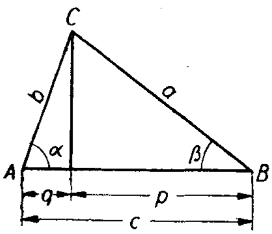


Bild 405

4) Am Bild 405 ist das Additionstheorem der Sinus-Funktion zu beweisen.

Lösung

$$\begin{aligned}c &= q + p\\ &= b\cos\alpha + a\cos\beta\end{aligned}$$

Nach dem Sinussatz ist:

$$c = 2r\sin\gamma \qquad b = 2r\sin\beta \qquad a = 2r\sin\alpha\,.$$

Diese Werte setzt man in $c = b\cos\alpha + a\cos\beta$ ein, und erhält:

$$2r\sin\gamma = 2r\sin\beta\cos\alpha + 2r\sin\alpha\cos\beta$$

Da aber $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ ist, erhält man nach Kürzen mit $2r$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

5) Wie groß ist $\sin 3\alpha$?

Lösung

Man zerlegt $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ und erhält für das Additionstheorem:

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha)\\
&= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha\\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha\\
&= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha\\
\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha
\end{aligned}$$

6) Aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x\sin\alpha - y\sin\beta &= 0\\
x\cos\alpha + y\cos\beta &= 1
\end{aligned}$$

sind x und y zu berechnen.

Lösung

Die 1. Gleichung mit $\cos\beta$ erweitert: $x\sin\alpha\cos\beta - y\sin\beta\cos\beta = 0$

Die 2. Gleichung mit $\sin\beta$ erweitert: $\underline{x\cos\alpha\sin\beta + y\cos\beta\sin\beta = \sin\beta}$

Durch Addition der beiden Gleichungen: $x(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \sin\beta$

oder:

$$x\cdot\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta$$

und hieraus:

$$x = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Erweitert man die 1. der beiden gegebenen Gleichungen mit $\cos\alpha$, die 2. mit $\sin\alpha$ und subtrahiert sodann die beiden erhaltenen Gleichungen, so erhält man:

$$y(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) = \sin\alpha \quad \text{oder:}$$

$$y\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \qquad \text{oder}$$

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

7) Die Funktion $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$ ist durch die Tangensfunktion des Winkels α auszudrücken:

Lösung

$$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$

8) Wie groß ist sin 22°30′, wenn man weiß, daß $\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist?

Lösung

In die Gleichung $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ (Seite 266) setzt man für $\alpha=45^\circ$:

$$\sin 22^\circ 30'=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{0{,}586}=0{,}383\,.$$

9) Mit Hilfe der Formel für sin 2α ist zu zeigen, daß $\sin 90^\circ=1$ ist:

Lösung

In $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ setzt man $\alpha=45^\circ$ ein:

$$\sin 90^\circ=2\sin 45^\circ\cos 45^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\sin 90^\circ=1\,.$$

10) Was erhält man aus dem Additionstheorem der Sinusfunktion, wenn $\beta=-\alpha$ gesetzt wird?

Lösung

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\alpha)&=\sin\alpha\cos(-\alpha)+\cos\alpha\sin(-\alpha)\\ \sin 0&=\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha\end{aligned}$$

Ergebnis: $\sin 0 = 0$

Aufgaben

36) Drücke a) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ und
b) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$

durch ctg α und ctg β aus!

Anleitung: Man benutze die entsprechenden Formeln für $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ bzw. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ und beachte, daß der ctg eines Winkels gleich dem Kehrwert des tg desselben Winkels ist; also

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

37) Drücke ctg 2α durch ctg α aus!

38) Drücke ctg 3α durch ctg α aus!

39) Wie groß ist

a) $\cos 75^\circ=$
b) $\sin 15^\circ=$
c) $\cos 15^\circ=$
d) $\sin 105^\circ=$
e) $\cos 135^\circ=$

40) Mittels der Additionstheoreme ist zu entwickeln:

a) $\cos(90° + \alpha) =$
b) $\sin(90° - \alpha) =$
c) $\cos(90° - \alpha) =$

41) Es ist zu beweisen, daß $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha$ ist!
Anleitung: Siehe Beispiel 3 auf Seite 266!

42) Man beweise, daß $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ ist!
Anleitung: Siehe Beispiel 5 auf Seite 267!

43) Man beweise, daß $\operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$ ist, wenn man unter $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ versteht!

44) Die Funktion $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$ ist durch die Tangensfunktion des Winkels α auszudrücken!
Anleitung: Siehe Beispiel 7 auf Seite 267/268!

45) Unter Benutzung der trigonometrischen Funktionen der doppelten Winkel sind zu berechnen:
a) $\operatorname{tg} 15°$ b) $\cos 67° 30'$ c) $\sin 7° 30'$!

46) Was erhält man, wenn man in das Additionstheorem der cos-Funktion $\alpha = \beta = 45°$ einsetzt?

47) Was erhält man, wenn man in das Additionstheorem der tg-Funktion $\alpha = \beta = 45°$ einsetzt?

48) Unter Benutzung der trigonometrischen Funktionen der doppelten Winkel ist zu beweisen, daß

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \text{ ist.}$$

F. 1. Summen und Differenzen trigonometrischer Funktionen

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}}$$

Beweis 1

Aus den Gleichungen der Additionstheoreme für die Sinusfunktion:

$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\underline{\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y}$$

folgt durch Addition:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$$

und durch Subtraktion:

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$$

Setzt man in diese beiden Gleichungen für $x + y = \alpha$ und $x - y = \beta$ und somit für $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ ein, so gehen diese beiden Gleichungen in die eingangs aufgeführten ersten 2 Gleichungen für die Summe und die Differenz der Sinusfunktionen von 2 verschiedenen Winkeln über.

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen für die Additionstheoreme der Kosinusfunktion folgt:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos x \cos y \\ \cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2\sin x \sin y \end{aligned}$$

Man setzt wiederum: $x + y = \alpha$; $x - y = \beta$; $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ und erhält die eingangs aufgeführten Gleichungen für die Summe und die Differenz der Kosinusfunktionen von 2 verschiedenen Winkeln.

Beweis 2

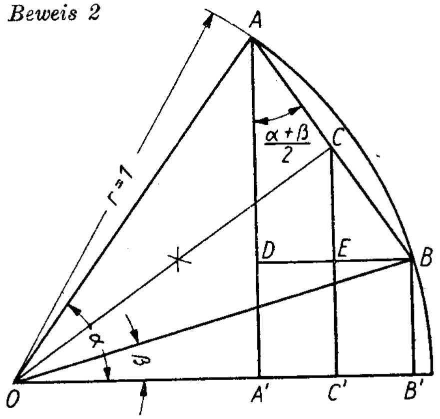


Bild 406

Im Bild 406 ist:

$\sphericalangle BOB' = \beta$;
$\sphericalangle AOB' = \alpha$;
$\sphericalangle AOB = \alpha - \beta$;
$\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB = \frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sphericalangle COB' = \frac{\alpha+\beta}{2}$
$\sphericalangle BAD = \frac{\alpha+\beta}{2}$
$AA' = \sin\alpha$; $OA' = \cos\alpha$
$BB' = \sin\beta$; $OB' = \cos\beta$

Die Halbierungslinie des $\sphericalangle AOB$ schneidet AB in seinem Mittelpunkt C. In dem Trapez AA'B'B ist $AA' + BB' = 2\,CC'$ oder $\sin\alpha + \sin\beta = 2\,OC \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. Da aber $OC = OA\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, so ist

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ferner ist: $AA' - BB' = AA' - DA' = AD$

oder: $\sin\alpha - \sin\beta = AB\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$= 2\,AC \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2 \cdot OA \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

also: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$OA' + OB' = 2 \cdot OC'$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot OC\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2 \cdot OA \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$OA' - OB' = -A'B' = -DB$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -AB\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -2 \cdot AC\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Mit Hilfe der soeben bewiesenen Formeln und der Additionstheoreme kann man oft trigonometrische Ausdrücke auf eine rechnerisch bequeme Form bringen.

2. Beispiele und Aufgaben

1) Wie groß ist $\sin(60° + x) - \sin(60° - x)$?

Lösung a

Man entwickelt die beiden Funktionen nach dem Additionstheorem

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x) = \sin 60°\cos x + \cos 60°\sin x - \sin 60°\cos x + \cos 60°\sin x$$

$$= 2\cos 60°\sin x = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin x =$$

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x) = \sin x$$

Lösung b

Man setze $(60° + x) = \alpha$ und $(60° - x) = \beta$, dann ist $\frac{\alpha+\beta}{2} = 60°$ und $\frac{\alpha-\beta}{2} = x$. Nach der Gleichung:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ erhält man:}$$

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x) = 2\sin x \cdot \cos 60 = \sin x$$

2) Wie groß ist $\sin(45° + x) + \sin(45° - x)$?

Lösung

Man setze: $45° + x = \alpha$ $\qquad 45° - x = \beta$

und somit: $\frac{\alpha+\beta}{2} = 45°$ und $\frac{\alpha-\beta}{2} = x$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(45° + x) + \sin(45° - x) = 2\sin 45° \cos x = \sqrt{2}\cdot\cos x$$

3) Man beweise, daß $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ ist!

Lösung

Man setze $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, addiere diese beiden Gleichungen und bringe die beiden Glieder der rechten Seite auf einen Bruchstrich; also:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

4) Es ist zu beweisen, daß $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ ist.

Lösung

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

5) Man beweise, daß $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ ist, wenn α, β und γ die Winkel eines Dreiecks sind!

Lösung

Da $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist, kann man setzen:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \text{ und } \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta); \text{ also:}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma =$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) =$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Aufgaben

49) Wie groß ist $\sin(30° + x) + \sin(30° - x)$?

50) Wie groß ist $\cos(30° + x) - \cos(30° - x)$?

51) Wie groß ist $\sin(45° + x) - \sin(45° - x)$?

52) Es ist die Differenz der Tangensfunktionen der Winkel α und β umzuformen! $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = ?$

Anleitung: Beispiel 3, Seite 272.

53) α, β und γ sind die 3 Winkel eines Dreiecks. Man beweise, daß $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ ist!

3. Die Mollweideschen Formeln und der Tangenssatz

Als Ergänzung der zur Dreiecksberechnung notwendigen, im Abschnitt D angeführten Formeln werden nachstehend einige weitere Gleichungen abgeleitet. Diese Gleichungen sind bekannt als die sogenannten Mollweideschen Formeln:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \\[2ex] \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \end{aligned}}$$

Durch zyklische Vertauschung der Seiten und Winkel entstehen aus jeder dieser beiden Formeln noch je 2 weitere; also

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{a-c}{b} = \frac{\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

In diesen 6 vorstehenden Gleichungen bedeuten a, b und c die Seiten eines beliebigen Dreiecks, während α, β und γ die ihnen gegenüberliegenden Winkel sind.

Beweis

a) Rechnerisch unter Anwendung der Additionstheoreme, der Summe und Differenzen von Funktionen und des Sinussatzes.

Nach dem Sinussatz ist $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$ oder $a = 2r \sin \alpha$

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2r \quad \text{oder} \quad b = 2r \sin \beta$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2r \quad \text{oder} \quad c = 2r \sin \gamma$$

Setzt man diese Werte für a, b und c in $\frac{a+b}{c}$ bzw. $\frac{a-b}{c}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2r\sin\alpha + 2r\sin\beta}{2r\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2r\sin\alpha - 2r\sin\beta}{2r\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\gamma}$$

Im Nenner setzt man $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$:

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad\qquad = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Da aber in jedem Dreieck: $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, kann man setzen:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\left[90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right] = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\left[90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right] = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

also:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cancel{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\cancel{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cancel{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

b) Geometrisch. Ohne Kenntnis der Additionstheoreme und der Summenformeln der trigonometrischen Funktionen lassen sich die Mollweideschen Formeln mit Hilfe des Sinussatzes folgendermaßen ableiten:

Im gegebenen Dreieck ABC (Bild 407) verlängert man BC über C hinaus um b und erhält D. $\triangle$ ACD ist gleichschenklig, d. h. $\sphericalangle$ CDA $= \sphericalangle$ DAC. $\sphericalangle$ ACD ist als Außenwinkel gleich $\alpha + \beta$;

somit ist:

$\sphericalangle \mathrm{DAC} + \sphericalangle \mathrm{CDA} = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

oder, da die beiden Winkel auf der linken Seite einander gleich sind:

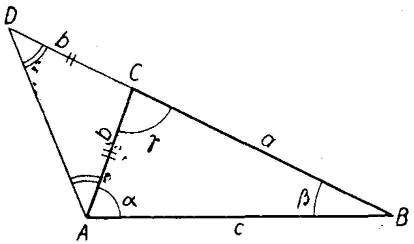


Bild 407

$$\sphericalangle \mathrm{DAC} = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\sphericalangle \mathrm{DAB} = \sphericalangle \mathrm{DAC} + \sphericalangle \mathrm{CAB} = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} + \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Schließlich setzt man im $\triangle$ ABD den Sinussatz an und erhält:

$$\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Im gegebenen Dreieck ABC (Bild 408) trägt man AC auf BC bis E ab. Dann ist BE = a − b.

$\triangle$AEC ist gleichschenklig; somit ist:

$$\sphericalangle \mathrm{CAE} = \sphericalangle \mathrm{AEC} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \text{ und}$$

$$\sphericalangle \mathrm{BEA} = 180^\circ - \left[90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right] = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

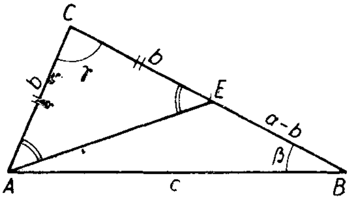


Bild 408

$$\sphericalangle \mathrm{EAB} = \sphericalangle \mathrm{CAB} - \sphericalangle \mathrm{CAE} = \alpha - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{2\alpha - 180^\circ + \gamma}{2} = \frac{\alpha - 180^\circ + 180^\circ - \beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Im $\triangle$ ABE ergibt der Sinussatz:

$$\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Der Tangenssatz:

$$\boxed{\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

Durch zyklische Vertauschung der Seiten und Winkel:

$$\frac{\mathrm{a}+\mathrm{c}}{\mathrm{a}-\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha-\gamma}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{\mathrm{b}-\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\beta+\gamma}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Beweise

a) Durch Division der beiden Mollweideschen Formeln:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ und}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \text{ folgt:}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Da aber $\frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, kann man für $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\left(90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ setzen; also: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

b) Aus dem Sinussatz: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ erhält man nach den Regeln der korrespondierenden Addition:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

c) Durch Vereinigung der beiden letzten Bilder beim Beweise der Mollweideschen Formeln erhält man Bild 409. In ihm ist: $\sphericalangle DAE = 90°$, da $CD = CA = CE = b$ ist oder da A auf dem Halbkreise über DE liegt (Thalessatz). Zieht man durch E zu DA die Parallele EF, so ist nach dem Strahlensatz

$$\frac{EB}{DB} = \frac{EF}{DA} \text{ oder } \frac{a-b}{a+b} = \frac{EF}{DA}.$$

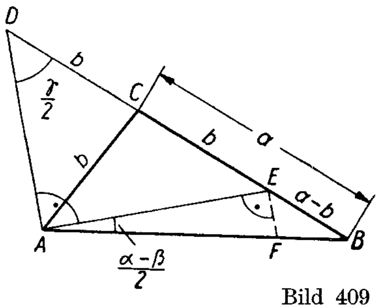


Bild 409

In dem rechtwinkligen Dreieck AFE ist $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{EF}{AE}$; oder $EF = AE\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$. In dem rechtwinkligen Dreieck DAE ist $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{DA}{AE}$; oder $DA = AE\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

Hiermit erhält man:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{AE\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{AE\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Durch die Anwendung der Mollweideschen Formeln oder des Tangenssatzes bei der Berechnung schiefwinkliger Dreiecke kann man den Kosinussatz vermeiden. Der Kosinussatz ist für das Rechnen mit dem Rechenschieber ungeeignet. (Mit dem Rechenschieber kann man nicht addieren und subtrahieren!)

Beispiel

Von einem Dreieck sind gegeben: b, c und $\sphericalangle\,\alpha$. Es sind gesucht: a, $\sphericalangle\,\beta$ und $\sphericalangle\,\gamma$!

Lösung

Nach dem Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$ muß man jedes Glied der rechten Seite für sich berechnen, dann addieren und schließlich die Wurzel ziehen, um a zu erhalten. Aus dem Sinussatz:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}$$

bestimmt man sodann $\sphericalangle\,\beta$ und endlich $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Einfacher rechnet man nach dem Tangenssatz:

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Hieraus erhält man: $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ und somit $\frac{\beta-\gamma}{2}$.

Da aber $\frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ bekannt ist, erhält man durch Addition (bzw. Subtraktion) von $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\beta-\gamma}{2}$ die Winkel β und γ. Die Anwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ ergibt $a=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

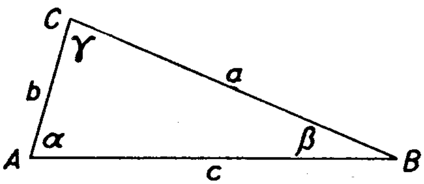
Aufgaben

Mit Hilfe der Mollweideschen Formeln oder des Tangenssatzes sind die fehlenden Seiten und Winkel des skizzierten Dreiecks (Bild 410) zu berechnen:

54) $a = 91$;
$b = 81$;
$\gamma = 48^\circ\,20'$

55) $b = 235$;
$c = 283$;
$\alpha = 43^\circ\,30'$

Bild 410



56) $a + b = 709$;	$c = 465$;	$\gamma = 81^\circ\,34'$
57) $b + c = 119$;	$a = 65$;	$\alpha = 62^\circ\,5'$
58) $b - c = 160$;	$a = 432$;	$\alpha = 39^\circ\,52'$
59) $a - c = 357$;	$b = 634$;	$\beta = 45^\circ\,48'$
60) $a = 660$;	$b = 760$;	$\alpha + \beta = 105^\circ\,50'$
61) $b + c = 187$;	$b - c = 43$;	$\beta - \gamma = 48^\circ\,41'$
62) $a = 679$;	$c = 592$;	$\alpha + \gamma = 100^\circ\,40'$
63) $b = 73$;	$c = 61$;	$\beta + \gamma = 101^\circ\,49'$

G. Goniometrische Gleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte ein Winkel ist und im Zusammenhang mit einer oder mehreren trigonometrischen Funktionen erscheint, nennt man goniometrische Gleichungen; z. B.: $\sin^2\alpha = 0{,}25$ oder $\sin 2\alpha = 0{,}8$ oder $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ oder $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha = 0{,}3$. Wenn auch goniometrische Gleichungen für die Praxis des Maschinentechnikers von geringer Bedeutung sind, so mögen sie nachstehend in ihrer einfachsten Form als Grundlagen für die höhere Mathematik und zur Wiederholung der im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Formeln behandelt werden. Um eine goniometrische Gleichung zu lösen, hat man sie so umzuformen, daß nur noch eine Funktion des unbekannten Winkels in ihr erscheint.

Für die Erklärung der rechnerischen Lösung goniometrischer Gleichungen werden nachfolgend einige einfache Beispiele gelöst:

Beispiele

1) $3\sin\alpha = 2\cos\alpha$

Man dividiert durch $\cos\alpha$:

$$\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$3\operatorname{tg}\alpha = 2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

Ergebnis: $\alpha = 33^\circ\,40'$

2) $2\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$

$$2\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$2\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

$$\sin\alpha\cdot\left(2 - \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 0$$

Ist ein Produkt gleich 0, so muß einer der Faktoren 0 sein; d. h. entweder:

$\sin\alpha = 0$

und somit $\alpha_1 = 0°$

oder $2 - \frac{1}{\cos\alpha} = 0$ oder $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

und somit $\alpha_2 = 60°$

Ergebnisse: $\alpha_1 = 0°$

$\alpha_2 = 60°$

3) $\cos\varphi - 2\sin\varphi = 0$

$\cos\varphi = 2\sin\varphi$

Division durch $\cos\varphi$:

$1 = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi$

$\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}5$

Ergebnis:

$\varphi = 26°\,40'$

4) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 2$

$\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = 2$

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{tg}^2\alpha - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1 = 0$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 1$

Ergebnis: $\alpha = 45°$

5) $\sin x \cdot \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos x$

$1 - \cos^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x$

$\cos^2 x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{1}{8} + 1}$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{2} \pm \frac{3}{4}\sqrt{2}$

$\cos x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; d.h. $x_1 = 45°$

$\cos x_2 = -\sqrt{2}$

Dieser Wert ist unmöglich, da die cos-Funktion niemals kleiner als -1 werden kann.

Ergebnis: $x = 45°$

6) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

$\sin x - \sqrt{2} = -\cos x$

$\sin x - \sqrt{2} = -\sqrt{1-\sin^2 x}$

Durch Quadrieren folgt:

$\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 2 = 1 - \sin^2 x$

$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

$\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$

$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Ergebnis: $x = 45°$

Einfachere Lösung:

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

$\sin x + \sin(90 - x) = \sqrt{2}$

Da $\sin\alpha + \sin\beta$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

hier:

$2\sin\frac{x+90-x}{2}\cos\frac{x-90+x}{2} = \sqrt{2}$

$2\sin 45°\cos(x - 45°) = \sqrt{2}$

$2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x-45°) = \sqrt{2}$

$\cos(x - 45°) = 1$

$x - 45° = 0°$

Ergebnis: $x = 45°$

7) $\sin 2x = \sin x$

$$2 \sin x \cos x = \sin x$$
$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$
$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x_1 = 0° \quad \text{oder} \quad 180° \quad \text{oder} \quad 360°$$
$$2 \cos x - 1 = 0$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = 60° \quad \text{oder} \quad 300°$$

Ergebnisse:

$$x_1 = 0°;\ 180°;\ 360°$$
$$x_2 = 60°;\ 300°$$

8) $\sin 2x = 2 \sin x$

$$2 \sin x \cos x = 2 \sin x$$
$$\sin x \cos x - \sin x = 0$$
$$\sin x (\cos x - 1) = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x_1 = 0° \quad \text{oder} \quad 180° \quad \text{oder} \quad 360°$$
$$\cos x - 1 = 0$$
$$\cos x = 1$$
$$x_2 = 0° \quad \text{oder} \quad 360°$$

Ergebnisse:

$$x = 0°;\ 180°;\ 360°$$

9)
$$\sin(30° + x) = \cos(30° - x)$$
$$\sin 30° \cos x + \cos 30° \sin x = \cos 30° \cos x + \sin 30° \sin x$$
$$\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$
$$(\sqrt{3} - 1) \sin x = (\sqrt{3} - 1) \cos x$$
$$\sin x = \cos x$$
$$\operatorname{tg} x = 1$$

Ergebnis: $x = 45°$

10) $2 \sin x + 3 \cos x = 3$

Lösung a

Man setze $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$2 \sin x + 3\sqrt{1 - \sin^2 x} = 3$$
$$3\sqrt{1 - \sin^2 x} = 3 - 2 \sin x$$
$$9(1 - \sin^2 x) = 9 - 12 \sin x + 4 \sin^2 x$$
$$12 \sin x = 13 \sin^2 x$$
$$\sin x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = 0°$$
$$\sin x_2 = \frac{12}{13} = 0{,}923$$
$$x_2 = 67° 20'$$

Ergebnisse: $x_1 = 0°$; $x_2 = 67° 20'$

Lösung b

Man dividiere durch die Beizahl von sin x; also durch 2:

$$\sin x + \frac{3}{2}\cos x = \frac{3}{2}$$

Für die Beizahl von cos x setze man tg φ; also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad \varphi = 56°20':$$

$$\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cos x = \frac{3}{2}$$

$$\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi = 1{,}5 \cos\varphi$$

$$\sin(\varphi + x) = 1{,}5 \cdot 0{,}554$$

$$= 0{,}831$$

$$\varphi + x = 56°\,20' \quad \text{oder} \quad 123°\,40'$$

$$x_1 = 0°; \quad x_2 = 67°\,20'$$

11) $\quad a \sin x + b \cos x = c$

Man dividiere durch a und setze $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$. Dann kann man den Hilfswinkel φ berechnen.

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

Aus dieser Gleichung kann man $x + \varphi$ bestimmen und hieraus den gesuchten Winkel x.

Aufgaben 12 . . . 15 sind goniometrische Gleichungen mit 2 Unbekannten.

12) $\quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\underline{x + y = 75°}$$

Die 1. der beiden gegebenen Gleichungen formt man nach den Regeln der korrespondierenden Addition um:

$$\frac{\sin y + \sin x}{\sin y - \sin x} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 5{,}85$$

$$\frac{2 \sin\frac{y + x}{2} \cos\frac{y - x}{2}}{2 \cos\frac{y + x}{2} \sin\frac{y - x}{2}} = 5{,}85$$

$$\operatorname{tg}\frac{y + x}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{y - x}{2} = 5{,}85$$

$$\operatorname{tg}\frac{y + x}{2} = \operatorname{tg} 37°\,30' = 0{,}767$$

$$\operatorname{ctg}\frac{y - x}{2} = \frac{5{,}85}{0{,}767} = 7{,}6$$

$$\frac{y - x}{2} = 7°\,30'$$

$$y - x = 15°$$

$$y + x = 75°$$

Ergebnis: $x = 30°$; $\quad y = 45°$

13) Dieselbe Aufgabe wie die vorhergehende mit allgemeinen Zahlen:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a}{b}$$
$$\underline{x + y = c}$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{a + b}{a - b}$$

Nach der Summen- und Differenzenformel der sin-Funktion umgeformt:

$$\frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = \frac{a+b}{a-b}$$

Aus dieser Gleichung kann $\frac{x-y}{2}$ berechnet werden.

Da $(x + y)$ gegeben und $(x - y)$ soeben berechnet worden ist, so kann man x und y als die halbe Summe und die halbe Differenz von $(x + y)$ und $(x - y)$ berechnen.

14) $\sin x + \sin y = 1{,}366$
$$\underline{x + y = 90^\circ}$$

Die 1. Gleichung nach der Summenformel umgeformt:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1{,}366$$
$$2 \sin 45^\circ \cos \frac{x-y}{2} = 1{,}366$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 1{,}366$$
$$\sqrt{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 1{,}366$$
$$\cos \frac{x-y}{2} = 0{,}9659$$
$$\frac{x-y}{2} = 15^\circ$$
$$x - y = 30^\circ$$
$$\underline{x + y = 90^\circ}$$

Ergebnis: $x = 60^\circ$; $y = 30^\circ$

15) $\sin x - \sin y = 0{,}5$
$$\underline{x - y \quad = 60^\circ}$$

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0{,}5$$
$$2 \cdot \sin 30^\circ \cos \frac{x+y}{2} = 0{,}5$$
$$\cos \frac{x+y}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{x+y}{2} = 60^\circ$$
$$x + y = 120^\circ$$
$$\underline{x - y = 60^\circ}$$

Ergebnisse:
$x = 90^\circ$; $y = 30^\circ$

Aufgaben

64) $2 \sin x = 3 \cos x$

65) $\sqrt{2} \sin x = \operatorname{tg} x$

66) $\cos x - 3 \sin x = 0$

67) $3 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x = 1$

68) $\cos x \operatorname{ctg} x = 1{,}5$

69) $\sin x - \cos x = 1$

70) $\sin 2x - \sqrt{2} \sin x = 0$

71) $\sin 2x = 2 \cos x$

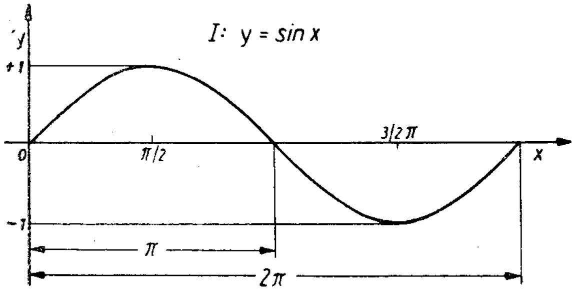
72) $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3$

73) $\sin x = \sqrt{2} \cos^2 x$

H. Die Sinusschwingung

In der Technik wird die Sinuskurve als Schaubild gewisser periodisch sich wiederholender Vorgänge benutzt (z. B.: Pendelschwingungen, Schubkurbelgetriebe, Wechselstrom usw.). Die Gleichung $y = \sin x$ stellt sich zeichnerisch als Sinuskurve in einem Koordinatenkreuz dar, auf dessen Abszissenachse die Winkel x entweder im Grad- oder im Bogenmaß aufgetragen sind und dessen Ordinatenachse die zugehörigen y-Werte enthält. (Siehe S. 243.)

1. Die Amplitude oder Schwingungsweite (Bild 411)



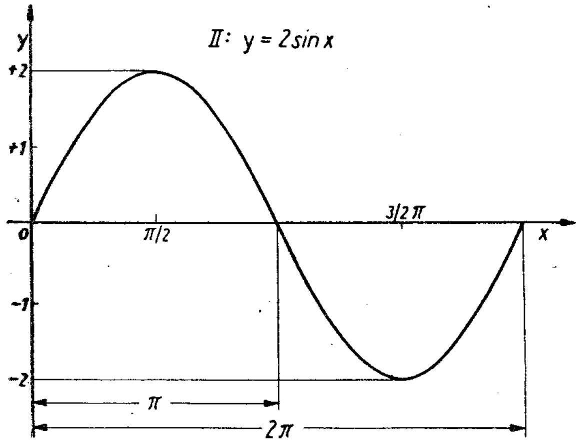


Bild 411

Der größte Wert, den y in der Gleichung $y = \sin x$ annehmen kann, ist gleich $+1$; und zwar ist dies der Fall bei $x = 90°$ oder, im Bogenmaß ausgedrückt, $x = \frac{\pi}{2}$. Der kleinste Wert für y ist -1; und zwar bei $x = \frac{3}{2}\pi$.

Die Kurve für $y = 2 \sin x$ unterscheidet sich von der vorstehenden dadurch, daß die Größt- und Kleinstwerte von y, die zwar an denselben Stellen $\left[\text{bei } x = \frac{\pi}{2} \text{ und } x = \frac{3}{2}\pi\right]$ liegen, aber doppelt so groß sind.

Die Größt- bzw. Kleinstwerte, die eine Sinuskurve annehmen kann, nennt man die *Scheitelwerte oder auch die Amplitude* oder auf deutsch: Die **Schwingungsweite.**

Allgemein ist in der Gleichung $y = A \cdot \sin x$ der Faktor A die Amplitude. Sie gibt an, wie groß y maximal werden kann; denn der Größtwert von sin x ist 1.

2. Die Periode und die Frequenz (Bild 412)

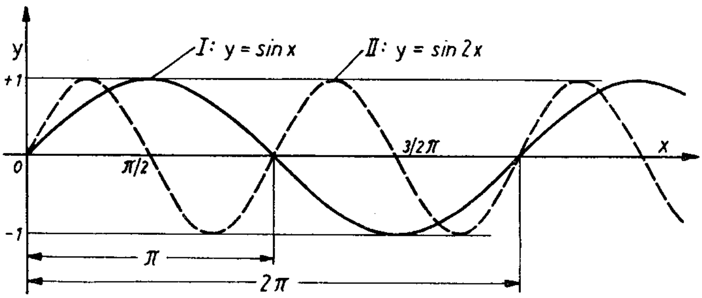


Bild 412

Das vorstehende Bild zeigt 2 Sinusschwingungen mit den Gleichungen:

$$\text{I)}\ y = \sin x \quad \text{und}$$
$$\text{II)}\ y = \sin 2\,x.$$

Die Kurve I hat in dem Bereich von $x = 0$ bis $x = 2\,\pi$ einen Berg und ein Tal. Der 1. Teil der Kurve liegt oberhalb, der 2. Teil unterhalb der x-Achse. In dem Bereiche ist eine volle Sinusschwingung vorhanden.

Die Kurve II dagegen hat in demselben Bereiche 2 Berge und 2 Täler. Es sind also 2 Schwingungen vorhanden. Man sagt: Kurve II hat eine doppelt so große Frequenz wie Kurve I. Die Periode der Kurve II ist nur halb so groß wie die der ersten; d. h. die Kurve II wiederholt sich in ihrem Verlaufe doppelt so oft wie die Kurve I.

Würde die Gleichung irgendeiner Sinusschwingung lauten: $y = \sin a\,x$, so würde sich diese Sinusfunktion in dem Bereiche von $x = 0$ bis $x = 2\,\pi$ a-mal wiederholen. Ihre Periode würde der a-te Teil der Periode der Funktion $y = \sin x$, also $\frac{2\pi}{a}$, sein, während ihre Frequenz a-mal so groß ist.

Die Zahl a ist ein Maß für die Größe der Periode bzw. der Frequenz. Sie heißt der Frequenzfaktor. Je größer der Frequenzfaktor ist, um so kleiner ist die Periode, um so öfter wiederholt sich die Sinusschwingung.

Die Sinusfunktion $y_1 = A \sin a\,x$ unterscheidet sich von der Funktion $y_2 = \sin a\,x$ durch die Größe der Amplitude A. Beide Funktionen haben aber die gleiche Periode, nämlich $\frac{2\pi}{a}$.

3. Die Phasenverschiebung (Bild 413)

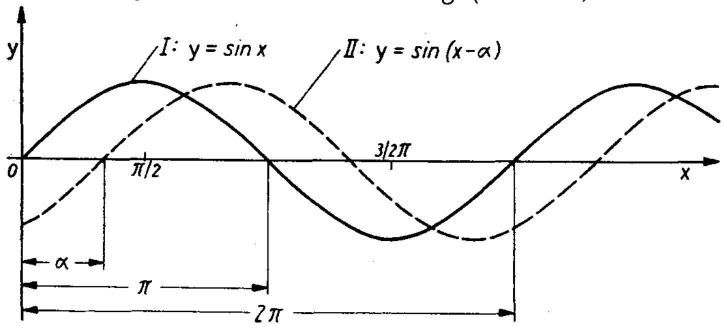


Bild 413

Das vorstehende Bild zeigt 2 Sinusschwingungen I und II, die miteinander zur Deckung gebracht werden können, und zwar dadurch, daß man die Kurve II um die Strecke α entgegengesetzt der Richtung der positiven x-Achse [also nach links] parallel zur x-Achse verschiebt. Die Gleichungen dieser beiden Sinusschwingungen lauten:

$$\text{I} \quad y = \sin x$$
$$\text{II} \quad y = \sin(x - \alpha)$$

Die Kurve II ist eine **„phasenverschobene Sinusschwingung"**. Die Größe α heißt die Phasenverschiebung der Schwingung. Lautet die Gleichung der phasenverschobenen Sinusschwingung $y = \sin(x + \alpha)$, so ist die ursprüngliche Sinuskurve $y = \sin x$ um die Strecke α parallel zur x-Achse nach links zu schieben.

Beispiel

Die Kurve $y = \cos x$ ist eine um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinusschwingung. Nach der vorstehenden Betrachtung lautet die Gleichung einer derartig phasenverschobenen Sinusschwingung: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ oder, den Winkel im Gradmaß ausgedrückt: $y = \sin(x + 90°)$.

Nach der auf Seite 246 abgeleiteten Formel ist aber:

$$y = \sin(x + 90°) = \cos x.$$

Zusammenfassung:

Die Gleichung für eine Sinusschwingung in allgemeiner Form lautet:

$$y = A \sin(a\,x + \alpha) = A \sin a\left(x + \frac{\alpha}{a}\right) = A \sin a\,(x + \varphi)$$

In dieser Gleichung ist

A = Amplitudenfaktor. Er gibt an, wie groß der größte Ausschlag der Sinuswelle nach oben oder unten hin ist.

a = Frequenzfaktor. Er gibt an, wie oft sich die Sinuswelle in dem Bereiche von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ wiederholt.

$\varphi = \frac{\alpha}{a}$ = Phasenverschiebung. Sie gibt an, um welchen Betrag die Sinusschwingung nach rechts ($\alpha < 0$) oder links ($\alpha > 0$) hin parallel zur x-Achse verschoben ist.

4. Zusammengesetzte Sinusschwingungen

a) Die Summe zweier Sinusfunktionen

Die Gleichung: $y = A \sin(x + a) + B \sin(x + b)$ läßt sich durch eine Kurve darstellen, die sich aus der Summe zweier Kurven mit den Gleichungen: $y_1 = A \sin(x + a)$ und $y_2 = B \sin(x + b)$ zusammensetzt; also: $y = y_1 + y_2$. Die beiden Sinusfunktionen y_1 und y_2 unterscheiden sich durch ihre Amplituden A und B sowie durch die Phasenverschiebungen a und b. Beide Funktionen aber haben die gleiche Wellenlänge, nämlich 2π. Die y-Werte der gesuchten Summenkurve erhält man, indem man die beiden Gleichungen für y_1 und y_2 als Sinuskurven darstellt und sodann für eine Anzahl von x-Werten die dazu gehörenden y-Werte addiert.

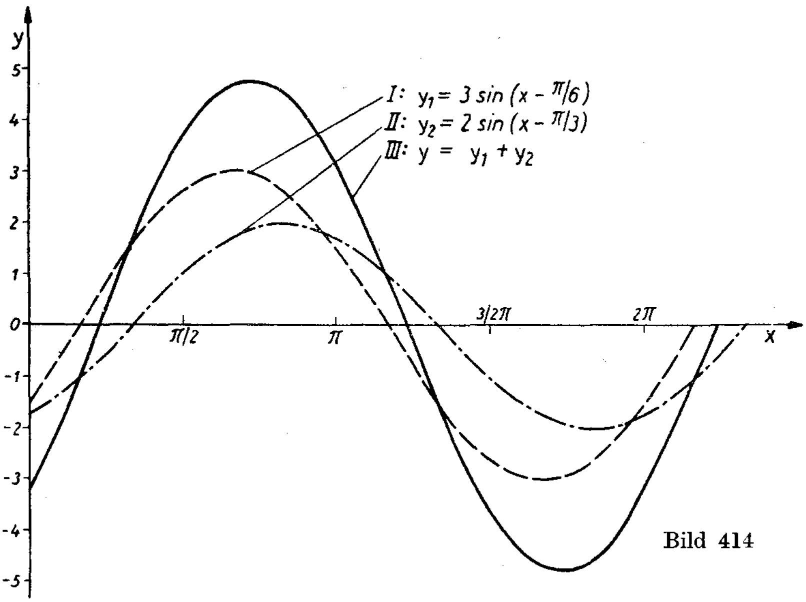


Bild 414

Aus der vorstehenden Zeichnung (Bild 414) sieht man, daß die gefundene Summenkurve III wiederum eine Sinuskurve ist. Daß dies im vorliegenden Beispiel nicht etwa nur ein Zufall ist, möge nunmehr rechnerisch für alle Fälle allgemein bewiesen werden:

Setzt man $A \sin(x + a) + B \sin(x + b) = C \sin(x + c)$, dann ist zu beweisen, daß man die Größen C und c so berechnen kann, daß immer die letzte Gleichung für irgendwelche beliebigen x-Werte gültig ist. Unter Anwendung der Formeln für das Additionstheorem der Sinusfunktion erhält man:

$$A \sin x \cos a + A \cos x \sin a + B \sin x \cos b + B \cos x \sin b =$$
$$C \sin x \cos c + C \cos x \sin c$$

oder die Glieder mit sin x und die mit cos x auf der linken Seite zusammengefaßt,

$$(A \cos a + B \cos b) \sin x + (A \sin a + B \sin b) \cos x = C \cos c \cdot \sin x + C \sin c \cdot \cos x$$

Will man es nun aber so einrichten, daß die beiden Seiten dieser Gleichung für jeden beliebigen x-Wert übereinstimmen, so müssen die einander entsprechenden Vorzahlen von sin x bzw. cos x auf beiden Seiten einander gleich sein. Es muß also sein:

$$C \cos c = A \cos a + B \cos b \quad \text{und}$$
$$C \sin c = A \sin a + B \sin b$$

Aus diesen beiden Gleichungen bestimmt man C und c: Man erhebt zunächst beide Gleichungen ins Quadrat und addiert sie. Man erhält:

$$C^2 \cos^2 c = A^2 \cos^2 a + B^2 \cos^2 b + 2\,AB \cos a \cos b$$
$$C^2 \sin^2 c = A^2 \sin^2 a + B^2 \sin^2 b + 2\,AB \sin a \sin b$$

$$C^2 (\cos^2 c + \sin^2 c) = A^2 (\cos^2 a + \sin^2 a) + B^2 (\cos^2 b + \sin^2 b) + 2\,AB (\cos a \cos b + \sin a \sin b)$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB \cos (a - b)$$
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB \cos (a - b)}$$

Sodann dividiert man beide Gleichungen. Es ergibt sich:

$$\operatorname{tg} c = \frac{A \sin a + B \sin b}{A \cos a + B \cos b}$$

Hierdurch ist der Lehrsatz bewiesen:

Die algebraische Summe zweier Sinuswellen mit beliebigen Amplituden und Phasenverschiebung, aber von gleicher Wellenlänge, ergibt wiederum eine Sinuswelle von der gleichen Wellenlänge.

Haben die ursprünglichen gegebenen Sinuswellen die Amplituden A und B, so hat die aus ihnen additiv gebildete Sinuswelle die Amplitude:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB \cos (a - b)},$$

wobei a und b die Phasenverschiebungen der ursprünglichen Sinuswellen sind. Die Phasenverschiebung der sich ergebenden Sinuswelle ist zu bestimmen aus:

$$\operatorname{tg} c = \frac{A \sin a + B \sin b}{A \cos a + B \cos b}$$

Beispiel

Es ist für die Kurve $y = \sin x + \cos x$ die Größe der Amplitude und die Phasenverschiebung rechnerisch zu bestimmen. Die Ergebnisse sind durch eine Zeichnung zu überprüfen.

Lösung

Die zu untersuchende Kurve setzt sich aus den beiden Sinuskurven $y_1 = \sin x$ und $y_2 = \cos x = \sin(x + 90°)$ zusammen. Die erste hat die Amplitude $A = 1$ und die Phasenverschiebung $a = 0°$. Die zweite hat die Amplitude $B = 1$ und die Phasenverschiebung $b = +90°$. Für die y-Kurve bestimmt man mit diesen Werten:

die Amplitude:

$$C = \sqrt{1 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(0° - 90°)} = \sqrt{2}$$

und die Phasenverschiebung c aus

$$\operatorname{tg} c = \frac{1 \cdot \sin 0° + 1 \sin(+90°)}{1 \cdot \cos 0° + 1 \cos(+90°)} = \frac{+1}{1} = +1$$

d. h. $\quad c = +45°$.

Die y-Kurve hat also die Amplitude $C = \sqrt{2}$ und die Phasenverschiebung $c = +45°$, oder mit anderen Worten: Die y-Kurve ist eine Sinuskurve mit der Amplitude $\sqrt{2}$ und ist um $\frac{\pi}{4}$ in Richtung der negativen x-Achse verschoben. Rechnerisch kommt man auf dasselbe Ergebnis durch Umformen der Gleichung für die y-Kurve:

$$\begin{aligned} y &= \sin x + \cos x \quad \text{oder da } \cos x = \sin(90 + x) \text{ ist:} \\ &= \sin x + \sin(90° + x) \quad \text{oder nach Abschnitt F 1) [Seite 269]} \\ &= 2 \sin(45° + x) \cdot \cos(-45°). \quad \text{Da } \cos(-x) = +\cos x \text{ ist,} \\ &= 2 \sin(x + 45°) \cos 45° \\ &= 2 \sin(x + 45°) \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ y &= \sqrt{2} \sin(x + 45°). \end{aligned}$$

Kontrollzeichnung: Bild 415.

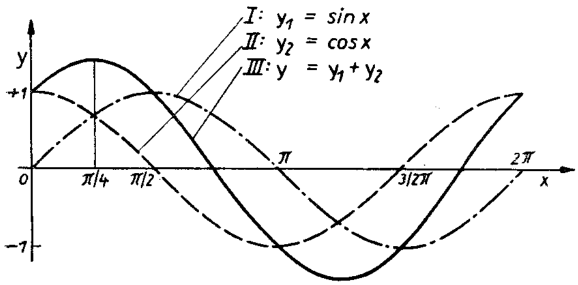


Bild 415

Die algebraische Summe zweier Sinuswellen mit ungleichen Perioden [d. h. die Frequenzen sind verschieden] ergibt keine Sinuswelle. Dies möge der Einfachheit halber an folgendem Beispiel gezeigt werden (Bild 416):

Beispiel: Es ist die Summenkurve

$$y = 3 \sin x + \sin 3x \quad \text{zu zeichnen.}$$

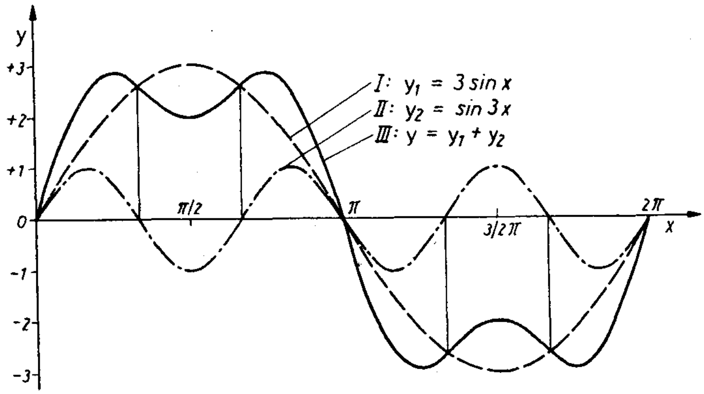


Bild 416

Die Summenkurve $y = 3 \sin x + \sin 3x$ ist keine Sinuswelle. Sie ist periodisch um 2π; sie stimmt mit der Sinuswelle $y_1 = 3 \sin x$ überein in der Periode, während $y_2 = \sin 3x$ die Periode $\frac{2}{3}\pi$ hat.

b) Das Produkt zweier Sinusfunktionen

Die Gleichung

$$y = A \sin(x + a) \cdot B \sin(x + b)$$

läßt sich als eine Kurve darstellen.

Auf Seite 286 wurden die beiden Sinusfunktionen $y_1 = A \sin(x + a)$ und $y_2 = B \sin(x + b)$ durch Addition zu einer dritten Kurve $y = y_1 + y_2 = A \sin(x + a) + B \sin(x + b)$ zusammengesetzt. Hier sollen dieselben beiden Sinusfunktionen y_1 und y_2 multiplikativ zu einer 3. Kurve zusammengesetzt werden, so daß

$$y = y_1 \cdot y_2 = A \sin(x + a) \cdot B \sin(x + b) \text{ ist.}$$

Die Ordinaten y dieser gesuchten 3. Kurve findet man, indem man die entsprechenden zur gleichen Abszisse x gehörenden Ordinaten y_1 und y_2 miteinander multipliziert. Führt man dies für eine Reihe von Punkten aus und verbindet die neu erhaltenen Punkte, so erhält man eine Sinuskurve. Im Bilde 417 sind durch Multiplikation der Ordinaten der Kurve I und II an beliebigen Stellen die Ordinatenwerte der Kurve III berechnet. Man sieht, daß an allen den Stellen, an denen entweder die Kurve I oder die Kurve II die x-Achse schneiden (wo also y_1 bzw. $y_2 = 0$ sind), auch die gesuchte Kurve y die x-Achse schneidet.

Daß nun aber ganz allgemein die erhaltene III. Kurve für irgendwelche Werte von A, B, a und b stets eine Sinuskurve ist, möge nachstehend rechnerisch bewiesen werden. Gleichzeitig sollen die Eigenschaften der sich ergebenden Sinuskurve untersucht werden.

Nach Seite 269 ist:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{oder:}$$

$$\cos\beta - \cos\alpha = \quad 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Setzt man in diese Gleichung folgende Werte ein:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = x + a;\quad \frac{\alpha-\beta}{2} = x + b\,.\quad \text{Und somit:}$$

$$\alpha = 2x + a + b\,,$$
$$\beta = a - b,$$

so erhält man:

$$\cos(a-b) - \cos(2x+a+b) = 2\sin(x+a)\sin(x+b)\,.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{AB}{2}$ und nach Seitenvertauschung erhält man:

$$A\cdot\sin(x+a)\cdot B\sin(x+b) = \frac{AB}{2}\cos(a-b) - \frac{AB}{2}\cos(2x+a+b)$$

Da aber ferner:

$$\cos\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\ \text{[Siehe Seite 246] oder}$$

$$-\cos\gamma = \sin\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)\ \text{ist, so kann man setzen:}$$

$$-\frac{AB}{2}\cos(2x+a+b) = \frac{AB}{2}\sin\left(2x+a+b-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{AB}{2}\sin 2\left[x+\frac{1}{2}\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Setzt man schließlich noch: $\frac{AB}{2}\cos(a-b) = c$ [= constanter Wert], so ist:

$$A\sin(x+a)\cdot B\sin(x+b) = c + \frac{AB}{2}\sin 2\left[x+\frac{1}{2}\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Der Inhalt dieser Gleichung drückt sich folgendermaßen aus:

Das Produkt der beiden Sinusfunktionen $y_1 = A\sin(x+a)$ und $y_2 = B\sin(x+b)$, die die gleiche Periode aber verschiedene Amplituden (nämlich A und B) haben, ergibt wiederum eine Sinuskurve, deren Wellenlänge halb so groß ist wie die der einzelnen Sinusfunktionen. Die als Produkt sich ergebende Sinuskurve ist um den Betrag $c = \frac{AB}{2}\cos(a-b)$ parallel zur y-Achse nach oben oder unten verschoben, je nachdem c größer oder kleiner als 0 ist. Ihre Amplitude ist $\frac{AB}{2}$. In waagerechter Richtung ist die Produkt-Sinuskurve um den Wert $\frac{1}{2}\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right)$ gegenüber der Sinuskurve mit der Gleichung $y = \frac{AB}{2}\sin 2x$ verschoben.

Beispiele

1. Die beiden bereits auf Seite 286 behandelten Sinusfunktionen

$$y_1 = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{und}$$

$$y_2 = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

sollen multiplikativ zu der Kurve

$$y = 6 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

zusammengesetzt werden.

Zeichnerische Lösung: Bild 417

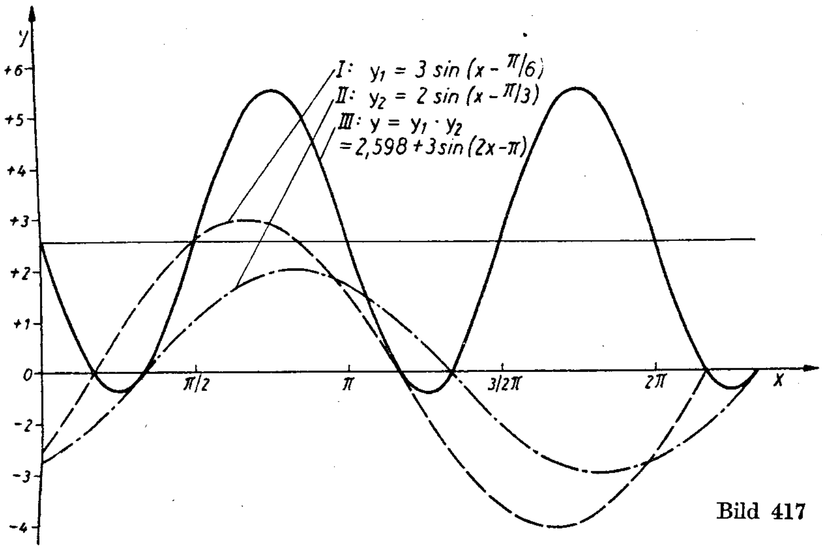


Bild 417

Im vorliegenden Zahlenbeispiel ist:

$$A = 3; \quad a = -\frac{\pi}{6}; \quad a + b - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$B = 2; \quad b = -\frac{\pi}{3}; \quad c = \frac{AB}{2} \cos(a - b) = 3 \cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Mit diesen Werten ist:

$$y = 6 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} + 3 \sin(2x - \pi)$$

$$= 2{,}598 + 3 \sin(2x - \pi)$$

2. Es soll die Kurve $y = \sin^2 x$ gezeichnet werden.

Lösung

Die gesuchte Kurve läßt sich als Produkt der beiden untereinander gleichen Sinuskurven $y_1 = \sin x$ und $y_2 = \sin x$ darstellen. Hier ist $A = B = 1$ und $a = b = 0$. Setzt man diese Werte in die Gleichung:

$$y = \frac{AB}{2} \cos(a - b) + \frac{AB}{2} \sin\left(2x + a + b - \frac{\pi}{2}\right)$$

ein, so ist

$$y = \frac{1}{2} \cos 0 + \frac{1}{2} \sin\left(2x + 0 + 0 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ergebnis: Die gesuchte Kurve $y = \sin^2 x$ (Bild 418) ist eine Sinuskurve mit der Amplitude $\frac{1}{2}$. Ihre Frequenz ist doppelt so groß (oder ihre Wellenlänge ist halb so groß) wie die der Sinuskurve $y = \sin x$. Um die Kurve $y = \sin^2 x$ zu zeichnen, hat man die Kurve $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ zu zeichnen und diese dann um die Strecke $\frac{1}{2}$ in Richtung der positiven y-Achse und um die Strecke $\frac{\pi}{4}$ in Richtung der positiven x-Achse zu verschieben.

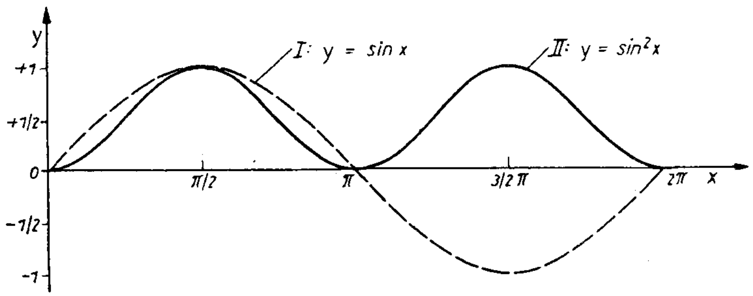


Bild 418

Zusammenstellung der Lehrsätze und Formeln

Die halbfetten Zahlen weisen auf die Seiten hin, auf der die betreffenden Lehrsätze bzw. Formeln bewiesen bzw. abgeleitet sind.

Teil I. Geometrie

Dreieck: Die Summe zweier Dreiecksseiten ist stets größer als die dritte Dreiecksseite:

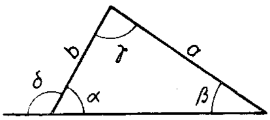


Bild 419

$$a + b > c$$ **18**

Die Differenz zweier Dreiecksseiten ist stets kleiner als die dritte Dreiecksseite:

$$c - a < b$$ **18**

Die Winkelsumme in einem jeden Dreieck beträgt 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$ **18**

Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel:

$$\delta = \beta + \gamma$$ **20**

Thalessatz: Der Peripheriewinkel über dem Halbkreis beträgt 90° **21**

Die 4 **Kongruenzsätze:**

2 Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in **25**

1) 3 Seiten:
   SSS-Satz
2) 2 Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel:
   SWS-Satz
3) 2 Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel:
   SsW-Satz
4) 1 Seite und 2 gleichliegenden Winkeln:
   WSW- oder WWS-Satz

Das **gleichschenklige Dreieck:**

1) In jedem gleichschenkligen Dreieck teilt die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze die Basis in 2 gleiche Teile und steht auf ihr senkrecht. **27**
2) In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.
3) In jedem gleichschenkligen Dreieck geht die Mittelsenkrechte auf der Basis durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.
4) In jedem gleichschenkligen Dreieck wird die Basis und der Winkel an der Spitze von dem Lot von der Spitze auf die Basis halbiert.

Die **Vierecke:**

In jedem Viereck beträgt die Winkelsumme 360°. **42**

Im Trapez beträgt die Summe der beiden Winkel, die einer der nicht parallelen Seiten anliegen, 180°.

Im Trapez ist die Mittellinie den beiden parallelen Seiten parallel. **44**

Im Trapez ist die Mittellinie gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten. **45**

In jedem Parallelogramm **42/43**
sind die gegenüberliegenden Winkel gleich,
betragen die einer Seite anliegenden Winkel 180°,
sind die Gegenseiten gleich und
halbieren sich die Diagonalen.

Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. **43**

Im Rechteck und Quadrat sind die Diagonalen gleich.

Im Sehnenviereck beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180°. **63**

Im Tangentenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der beiden anderen Gegenseiten.

Der Kreis:

Die Mittelsenkrechte auf einer Kreissehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises und halbiert den Zentriwinkel, der aus den beiden nach den Endpunkten der Sehne gezogenen Radien gebildet wird. **54**

Kreissehnen gleicher Länge haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt. **55**

Der Radius des Kreises steht auf der Tangente im Berührungspunkt senkrecht. **56**

Die Senkrechte im Berührungspunkt einer Kreistangente auf der Tangente geht durch den Kreismittelpunkt.

Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen. **59**

Peripheriewinkel über demselben Bogen sind gleich. **60**

Der Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt.

Umkreis: Die Mittelsenkrechten auf den 3 Seiten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises. **61**

Inkreis: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Inkreises.

Ankreis: Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels und der Außenwinkel der beiden anderen Dreieckswinkel schneiden sich im Mittelpunkt eines der drei Ankreise.

Flächeninhalte:

Quadrat:

$f = a^2$ [a = Quadratseite] **68**

Rechteck:

$f = a \cdot b$ [a und b = Rechteckseiten]

Parallelogramm:

$f = a \cdot h_a$ = Seite × Höhe auf diese Seite. **69**

Dreieck:

$f = \frac{1}{2} c\, h_c = \frac{1}{2}$ Seite × Höhe auf diese Seite. **75**

$= \varrho \cdot s$ = Inkreisradius × Halber Dreiecksumfang **76**

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ [Heronische Dreiecksformel]. **78**

Trapez:

$f = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h = m \cdot h$ = Mittellinie × Höhe **79**

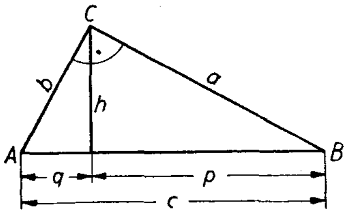
Tangentenviereck:

$f = \varrho \cdot s$ = Kreisradius × halber Vierecksumfang **81**

Beliebige n-Ecke:

f = Summe der Inhalte von $(n-2)$ Teildreiecken **82**

Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck:



Euklid:

$a^2 = c \cdot p$

$b^2 = c \cdot q$ **69**

Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$ **70**

Höhensatz:

$h^2 = q \cdot p$ **71**

Bild 420

Für irgendein beliebiges Dreieck gilt der

Allgemeine Lehrsatz des Pythagoras:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q$, wenn $\alpha < 90°$

$ = b^2 + c^2 + 2\,c\,q$, wenn $\alpha > 90°$

[q ist die Projektion von b auf c] **75**

Verhältnisgleichheit:

Strahlensätze:

1) Werden 2 Strahlen von 2 Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl. **100**
2) Werden 2 Strahlen von 2 Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die zugehörigen vom Scheitel begrenzten Abschnitte eines Strahles. **102**

Die **Winkelhalbierende** im Dreieck teilt die gegenüberliegende Dreiecksseite in dem Verhältnis der anliegenden Seiten. **102**

Die **Schwerlinien** (= Verbindungslinien der Dreiecksseitenmitten mit den gegenüberliegenden Ecken) im Dreieck teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2 : 1. **106**

Harmonische Teilung = Teilung einer Strecke AB innen und außen in demselben Verhältnis. C sei der innere, D der äußere Teilpunkt; dann ist AB durch C und D harmonisch geteilt, wenn:

$AC : CB = AD : DB$ **103**

x ist **harmonisches Mittel** zu a und b, wenn

$$x = \frac{2ab}{a + b}$$ **105**

x ist **geometrisches Mittel** (oder mittlere Proportionale) zu a und b,

wenn $a : x = x : b$

oder $x = \sqrt{a \cdot b}$ **99**

4 Ähnlichkeitssätze:

2 Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

1) im Verhältnis der 3 Seiten oder
2) im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
3) im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel oder **108**
4) in 2 Winkeln.

Die **Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke** verhalten sich wie die **Quadrate gleichliegender Stücke.** **109**

Sehnensatz: Schneiden sich 2 Sehnen innerhalb eines Kreises, so ist das Produkt aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkt aus den Abschnitten der anderen Sehne. **110**

Sekantensatz: Von allen Sekanten durch einen Punkt außerhalb eines Kreises bilden die ganzen Sekanten und ihre äußeren Abschnitte ein und dasselbe Produkt. 110

Sekanten-Tangentensatz: Schneiden sich eine Sekante und eine Tangente eines Kreises, so ist das Quadrat der Tangentenlänge gleich dem Produkt aus der ganzen Sekante mal ihrem äußeren Abschnitt. 111

Goldener Schnitt oder **stetige Teilung:** Eine Strecke a ist stetig geteilt, wenn sich ihre ganze Länge a zu ihrem größeren Abschnitt x verhält wie der größere Abschnitt x zum kleineren Abschnitt (a — x).

$$\frac{\text{Ganze Strecke}}{\text{Größerer Abschnitt}} = \frac{\text{Größerer Abschnitt}}{\text{Kleinerer Abschnitt}}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \qquad 112$$

Hieraus:

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad 113$$

Satz des Ptolemäus: In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den Gegenseiten. 113

Regelmäßige Vielecke

Regelmäßiges **Sechseck:**

$$s_6 = r$$

Sechsecksseite s_6 = Radius des umbeschriebenen Kreises r 120

Regelmäßiges **Viereck:**

$$s_4 = r\sqrt{2} \qquad 124$$

Vierecksseite = Verbindungslinie der Endpunkte zweier aufeinander senkrecht stehender Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

Regelmäßiges **Zehneck:**

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Zehnecksseite = Größerer Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius. 120
Zusammenstellung: Seite 129.

Kreisberechnungen

Ludolfsche Zahl:

$$\pi = 3{,}14159 \ldots \qquad 131$$

Kreisumfang:

$$U = \pi d = 2\pi r \qquad 130$$

Kreisinhalt:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 \qquad 132$$

d = Kreisdurchmesser
r = Kreisradius

Kreisring-Inhalt:

$$F = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$= \pi (R + r)(R - r) \qquad 135$$

$$= \pi d_m s$$

$$d_m = \frac{D + d}{2}; \qquad s = \frac{D - d}{2} \qquad 136$$

Kreisausschnitt oder Sektor:

Bogenlänge: $b = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$ 138

Inhalt: $f = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{b \cdot r}{2}$ 139

Kreisabschnitt oder Segment:

Inhalt: $F = \frac{r(b-s)+sh}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\varphi}{180^\circ} - \sin\varphi\right)$ 142

r = Kreisradius; b = Kreisbogenlänge
s = Sehnenlänge; h = Pfeilhöhe; φ = Zentriwinkel

Schwerpunktslagen:

Der Schwerpunkt einer **Strecke** ist ihr Mittelpunkt.
Der Schwerpunkt eines **Dreiecks** ist der Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden. Er liegt im Abstand $\frac{1}{3}h$ von der Grundlinie. 145

Der Schwerpunkt eines **Trapezes** mit den parallelen Seiten a und b und der Höhe h hat von der Seite a den Abstand:

$y = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ 146

Der Schwerpunkt eines **Kreises** ist der Mittelpunkt. 148

Der Schwerpunkt eines **Kreisbogens** hat vom Mittelpunkt den Abstand

$y_0 = \frac{\text{Radius} \times \text{Sehne}}{\text{Bogen}} = \frac{r \cdot s}{b}$ 149

Halbkreisbogen-Schwerpunkt hat vom Mittelpunkt den Abstand

$y_0 = \frac{2r}{\pi}$

Halbkreisflächen-Schwerpunkt hat vom Mittelpunkt den Abstand

$y_0 = \frac{4r}{3\pi}$ 149

Teil II. Stereometrie

Eulerscher Satz für konvexe Vielflache:

$e + f = k + 2$

Eckenzahl + Flächenzahl = Kantenzahl + 2 150

1) Ebenflächige Körper

V = Volumen; O = Oberfläche.

Quader:

$V = abc$; $O = 2(ab + ac + bc)$ 159

Würfel:

$V = a^3$; $O = 6a^2$

Prismen:

$V = g \cdot h$ = Grundfläche × Höhe 160

Schief abgeschnittene gerade Prismen:

$V = N \cdot h_0$
N = Normalschnittfläche
h_0 = Abstand der Endflächenschwerpunkte 162

Pyramiden:

$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}$ Grundfläche × Höhe 166

Pyramidenstumpf:

$$V = \frac{1}{3} h \left(F + \sqrt{F F_1} + F_1\right) \qquad 168$$

h = Höhe; F = Grundfläche; F_1 = Deckfläche

Prismoide oder Prismatoide:

$$V = \frac{h}{6}(F + 4 M + F_1) \qquad 167$$

h = Höhe; F = Grundfläche; F_1 = Deckfläche
M = Schnittfläche in halber Höhe

Obeliske oder Pontone:

$$V = \frac{h}{6}(2 a b + a_1 b + a b_1 + 2 a_1 b_1) \qquad 170$$

h = Höhe = Rechtecksabstand
a und b = Kanten des Grundflächenrechtecks
a_1 und b_1 = Kanten des Deckflächenrechtecks.

5 Platonische Körper:

Tetraeder
Hexaeder
Oktaeder
Dodekaeder
Ikosaeder — 153 und 171

2) Krummflächige Körper

V = Volumen; O = Oberfläche; M = Mantel.

Guldinsche Regel für Rotationskörper:

$M = l \cdot 2 \pi r_{s_1}$ — l = Länge der rotierenden Linie; r_{s_1} = Schwerpunktsabstand der rotierenden Linie von der Drehachse

$V = f \cdot 2 \pi r_{s_2}$ — f = Inhalt der rotierenden Fläche; r_{s_2} = Schwerpunktsabstand der rotierenden Fläche von der Drehachse. 179

Zylinder:

$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$ — h = Höhe 179
r = Kreisradius
$M = 2 \pi r h = \pi d h$ — d = Kreisdurchmesser. 180
$O = 2 \pi r (r + h)$

Schräg geschnittener gerader Kreiszylinder:

$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$ — h_1 = kurze Zylinderseite; h_2 = lange Zylinderseite 180
$M = \pi r (h_1 + h_2)$ — r = Kreisradius. 181

Zylinderhuf:

$V = \frac{2}{3} h r^2$ — h = Hufhöhe
$M = 2 h r$ — r = Normalschnittradius 181

Hohlzylinder:

$V = \pi h (R^2 - r^2)$ — h = Höhe
$= \pi h s (2 R - s)$ — R = Außenradius
$= \pi h s (2 r + s)$ — r = Innenradius
$= 2 \pi h s \varrho$ — $s = R - r$ = Wandstärke 182
$\varrho = \frac{R + r}{2}$ = mittlerer Radius

Kegel:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h$	h = Höhe	183
$M = \pi r s = \frac{1}{2}\pi d s$	r = Grundkreisradius	
	d = Grundkreisdurchmesser	
$= \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$	s = Mantellinie	184
$O = \pi r (r + s)$		

Kegelstumpf:

$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + R r + r^2)$	R = , r = } Radien der parallelen Endflächenkreise	184
$M = \pi s (R + r)$	h = Kegelstumpfhöhe	186
$O = \pi [R^2 + r^2 + (R + r) s]$	s = Seitenlänge	

Kugel:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$	r = Kugelradius	187
$O = 4\pi r^2 = \pi d^2$	d = Kugeldurchmesser	188

Kugelabschnitt oder Kugelsegment:

$V = \frac{\pi h^2}{3}(3 r - h)$	r = Kugelradius	189
$= \frac{\pi h^2}{6}(3 d - 2 h)$	d = Kugeldurchmesser	
$= \frac{1}{6}\pi h (3 a^2 + h^2)$	h = Höhe des Segments	
	a = Grundkreisradius des Abschnittes	

Kugelausschnitt oder Kugelsektor:

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$	r = Kugelradius	190
$= \frac{1}{6}\pi d^2 h$	d = Kugeldurchmesser	
	h = Höhe des Kugelabschnittes	

Kugelkappe:

$O = 2\pi r h$	r = Kugelradius; h = Höhe des Segmentes	

Kugelschicht:

$V = \frac{\pi h}{6}(3 a^2 + 3 b^2 + h^2)$	a = , b = } Halbmesser der parallelen Endflächen	
	h = Schichthöhe	191

Kugelzone:

$M = 2\pi r h$	r = Kugelradius	
	h = Schichthöhe	192

Hohlkugel:

$V = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$	R = Außenradius	
	r = Innenradius	193
$= \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$	D = Außendurchmesser	
	d = Innendurchmesser	

Hohlkugelausschnitt:

$V = \frac{2}{3}\pi \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$	h = Höhe des zum inneren Kugelausschnitt gehörenden Segmentes	193

Zylindrischer Ring:

$V = 2\pi^2 R r^2$	D = Ringdurchmesser	
$= \frac{\pi^2 D d^2}{4}$	d = Ringwulstdurchmesser	194
	R = Ringradius	
	r = Ringwulstradius	

Teil III. Trigonometrie

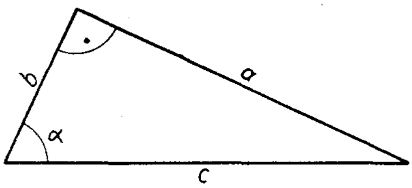


Bild 421

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$ **207**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$ **214**

Trigonometrischer Pythagoras $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ **215**

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$ **210**

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\widehat{\alpha}$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

212

$\sin(180^\circ - \alpha) = +\sin\alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(360^\circ + \alpha) = +\sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(360^\circ - \alpha) = +\cos\alpha$
$\cos(360^\circ + \alpha) = +\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = +\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha) = +\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = +\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha) = +\operatorname{ctg}\alpha$

$\sin(90^\circ - \alpha) = +\cos\alpha$
$\sin(90^\circ + \alpha) = +\cos\alpha$
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(90^\circ - \alpha) = +\sin\alpha$
$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(270^\circ + \alpha) = +\sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = +\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = +\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = +\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ **245**
$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = +\operatorname{tg}\alpha$ **und**
$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ **246**

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ **245 und 246**

Nur der Kosinus eines negativen Winkels ist positiv.

Sinussatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ oder } \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = d = \text{Umkreisdurchmesser}$$

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$ **250**

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

Halbwinkelsatz:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$
$$s = \frac{a+b+c}{2}$$ **251 und 253**

Dreiecksinhalt:

$$F = \frac{1}{2}a\,b\sin\gamma \quad = \frac{1}{2}b\,c\sin\alpha \quad = \frac{1}{2}a\,c\sin\beta$$ **254**

Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$ **265**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$ **269**

Mollweidesche Formeln:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$ **273**

Tangenssatz:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$ **275**

Lösungsergebnisse der Aufgaben

(Die halbfetten Zahlen geben die Seitenzahl an)

Teil

1) a) 2
   b) 4
   c) 3 **13**
2) a) 3
   b) 6
   c) 10
3) a) 3
   b) 6
   c) 10
   d) 15
   e) $\frac{n}{2}(n-1)$
4) 6
   2 n
5) a) 55°
   b) 145°
   c) 35°
6) 135°
   45°
   135°
7) 90°
8) 60°
   120°
9) a) 90°
   b) 180°
   c) 90° oder 270°
   d) 0° oder 360°
10) 135°
11) a) 6°
    b) 30°
12) a) 180°
    b) 75°
    c) 105°
13) 130° **14**
14) a) 20
    b) 9
    c) 5
    d) 3
    e) $\frac{3}{4}$
15) a) 45°
    b) 35°
    c) 30°
    d) $\alpha/2$
16) 8°
17) a) gleich groß
    b) gleich groß
    c) zusammen 180°
18) a) 110°
    b) 130°
    c) $180° - \alpha$
19) 8°
20) nicht
21) Auf der Mittelsenkrechten auf A B **22**
22) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf A B und B C
23) Die 3 Punkte fallen in 1 Punkt zusammen
24) 65°
25) 40°
26) $\alpha = 150°$
    $\beta = 120°$
27) Weil $a + b = c$ ist. Es müßte $a + b > c$ sein
28) a) 80°
    b) 30°
    c) 100°
    d) 70°
    e) 75°
    f) Unmöglich
29) $\alpha = \beta = 45°$
30) $\frac{c}{2}$ **23**
31) $\alpha = \beta = 135°$
32) $\alpha = 30°$
    $\beta = 60°$
    $\gamma = 90°$
    Zeichendreieck
33) $\delta_1 = 45°$
    $\delta_3 = 135°$
    $\delta_2 = 45°$
    $\varepsilon_1 = 105°$
    $\varepsilon_2 = 75°$
    $\zeta_1 = 90°$
    $\zeta_2 = 90°$
34) 80° und 100°
35) Auf der Mitte der Hypotenuse
    $r = \frac{c}{2}$
36) $\alpha_1 = 140°$
    $\beta_1 = 120°$
    $\gamma_1 = 100°$
37) $\frac{c}{2}$
    120° bzw. 60°
38) $\sphericalangle\, A B D = 60°$
    $\sphericalangle\, A C D = 120°$
    $\sphericalangle\, D A C = 30°$
    $\sphericalangle\, C A B = 60°$
40) $\beta = \alpha$ **24**
41) a) 120°
    b) 108°
    c) 135°
    d) 150°
42) $90° + \frac{\gamma}{2}$
43) a) 75°
    b) 55°
    c) 45°
    d) 40°
    e) 10°
    f) $90° - \frac{\gamma}{2}$
44) a) 160°
    b) 140°
    c) 90°
    d) 60°
    e) 20°
    f) $180° - 2\alpha$
45) $\frac{\alpha}{2}$
48) a) 115°, 65°, 115° **45**
    b) 80°, 100°, 80°

c) $(180 - \alpha)$, α, $(180 - \alpha)$
49) a) 140°, 120°
b) 90°, 150°
c) $(180° - \alpha°)$, $(180° - \beta°)$ **46**
50) a) $\delta = 140°$
b) $\gamma = \delta = 140°$
c) $\alpha = 120°$, $\beta = 120°$, $\delta = 60°$
51) a) Beweglich
b) Starr
c) Parallelogramm
d) Nein; allgemein. Viereck
52)

α	β	γ	δ
10	170	10	170
30	150	30	150
50	130	50	130
70	110	70	110
90	90	90	90
110	70	110	70
130	50	130	50
150	30	150	30
170	10	170	10

53) 105°, 75°, 105°, 75°
54) $\sphericalangle$ C A B = 60°
$\sphericalangle$ A B E = 120°
$\sphericalangle$ B E C = 60°
$\sphericalangle$ E C A = 120°
55) 1. Trapez: 10 cm, 9 cm
2. Trapez: 9 cm, 8 cm
3. Trapez: 8 cm, 7 cm
4. Trapez: 7 cm, 6 cm
56) 5 cm
57) 60°, 120°, 60°, 120° **47**
58) 10, 15, 10, 15 [cm]
59) Winkelhalbierende des rechten Winkels
60) 25 ⌀
61) Rhombus
60°, 120°, 60°, 120°
62) $\gamma = \delta = 105°$
63) Rechteck
$\frac{1}{2}(l + l_1)$ und $\frac{b}{2}$
64) 25 mm, 45° u. 135°
65) 60° **48**
66) 4 m
67) a) $\sphericalangle$ B M A = 72°
b) $\sphericalangle$ C M A = 144°
c) $\sphericalangle$ D A C = 36°
d) 180°
e) $\sphericalangle$ A B C = 108°
$\sphericalangle$ B C M = 54°
$\sphericalangle$ C M A = 144°
$\sphericalangle$ M A B = 54°
68) 90°
69) $b = a + c$
70) $x = \frac{1}{2}(a - b)$
71) 60° **53**
72) 72°
73) r
74) a) 0,785 cm²
b) $\frac{2}{3}$
75) 45°
76) a) $d = 33$ mm
b) $d = D - 2\,s$
77) Rhombus
78) 350 mm
79) 5570 mm
80) $a = 300$ mm
81) $\frac{1}{2}(D - d)$
82) 37 mm
83) a) Kreis m. Durchmesser
$D = d_a + d$
b) $D_i = d_a + 2\,d$
84) a) Berühren sich von außen
b) Meiden sich
c) Schneiden sich von außen **54**
d) Berühren sich von innen
e) Schneiden sich von innen
f) Exzentrisch ohne gemeinsam. Punkt
g) Konzentrisch
85) a) T d B : 15 μ
T d W : 14 μ
b) G S : 37 μ
K S : 8 μ
86) $\frac{1}{2}(a - b)$
87) $\approx$ 183 mm **64**
88) a) 20 m
b) 10 m
90) Auf der Verbindungslinie $M M_1$
93) $a = 15$ mm
$b = 45$ mm
94) a) 90°, 120°, 90°, 60°
b) 2 r
c) r
95) $180° - \alpha$; Ja! **65**
96) 120 mm
97) 50 mm
98) 17 m
Auf der Mitte v. AC
99) 6 m
100) a) 2 r
b) $l + r$ und $l - r$
101) 21 cm
102) $\gamma = 150°$
$\delta = 40°$
103) 45° und 135°
104) Halbkreis **66**
105) a) Quadrat und Rechteck
b) Gleichschenkl. Trapez
c) Quadrat u. Rhombus
d) Inkreis
106) 75 mm
107) 35 mm
108) $AD = h_a$, $BE = h_b$
109) $x = 2\,r$
110) 30°
111) 13,6 t **91**
112) 80 cm²
113) 144 cm²
114) a) 105 × 148 [mm]
b) 64 Stck.
115) a) 43 cm²
b) 169 cm²
c) 250 cm²
d) $b\,h - (b - d) \cdot (h - 2\,t)$ oder $d\,h + 2\,t\,(b - d)$
116) a) $d\,(2\,b - d)$
b) $b\,t + d\,(h - t)$
c) $a\,d + 2\,t\,(b - d)$
d) $a\,b - d\,e$
e) $2\,b\,t + d\,(h - 2\,t)$
117) a) $20\,\frac{m}{s}$ oder $72\,\frac{km}{h}$
b) 100 m **92**
118) a) 3 Flächeneinh.
b) 2 Flächeneinh.
c) 4 Flächeneinh.
d) 1 Flächeneinh.
e) 3 Flächeneinh.
f) 2 Flächeneinh.
g) 1 Flächeneinh.
119) a) $c\,d = (a - c) \cdot (b - d)$
b) α) $d = 3$
β) $c = 10$
γ) $b = 20$
δ) $a = 27$
120) a) bleibt derselbe **93**
b) wird kleiner

121) $h_a \approx 3{,}5$ cm
$h_b \approx 5{,}2$ cm
$f \approx 21$ cm²

122) 750 mm²

123) 12 cm²

124) a) 2500 mm
b) 2300 mm
c) 1150 cm²

125) a) 42 cm²
b) 2 cm
c) $\varrho_a = 7$ cm
$\varrho_b = 42$ cm
$\varrho_c = 3$ cm

126) a) 24 cm²
b) 10 cm
c) 4,8 cm
d) 24 cm
e) 3,6 cm
6,4 cm

127) a) = 0,5 Flächeneinheiten
b) = 3 Flächeneinh.
c) = 3 Flächeneinh.
d) = 0,5 Flächeneinheiten
e) = 1 Flächeneinh.
f) = 1,5 Flächeneinheiten
g) = 1 Flächeneinh.
h) = 2 Flächeneinh.
i) = 2 Flächeneinh.
k) = 1 Flächeneinh.
l) = 1,5 Flächeneinheiten

128) $s = \frac{1}{2}\,v\,t$

$v = \sim 59\,\frac{m}{s}$ 94

129) 36,5 cm²

130) 16,5 cm²

131) 156 cm²

132) $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

133) 104 cm² 95

134) a; $a\sqrt{3}$; $0{,}866\ a^2$

135) 13,2 m

136)

	a	b	c
	$f = 6$	84	240 [cm²]
	$h_c = 2{,}4$	6,72	14,1 [cm]
	$s = 6$	28	40 [cm]
	$\varrho = 1$	3	6 [cm]

137) 5 cm

138) 3 cm

139) 2 mm

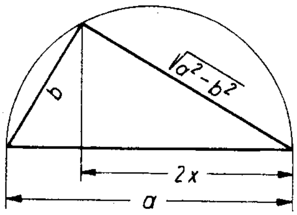


Bild 422

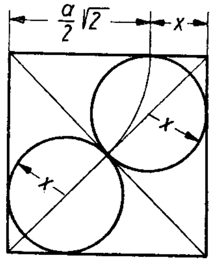


Bild 424

140) AC = B = 7,2 m
AD = BD = 5 m

141) $c^2 = 4\,(a^2 - h^2)$

142) $e^2 + f^2 = 4\,s^2$ [96

143) $a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2\,m_c^2$

144) $d^2 + e^2 = 2\,(a^2 + b^2)$

145) $x = \frac{a^2 - b^2}{2\,a}$
(siehe Bild 422)

146) Aus $(a - x)^2 - x^2 = a\,b$ folgt
$x = \frac{1}{2}(a - b)$
(siehe Bild 423)

147) Aus $x^2 - (a - x)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$ folgt
$x = \frac{3}{4}\,a$

148) $x = a\,(\sqrt{2} - 1)$

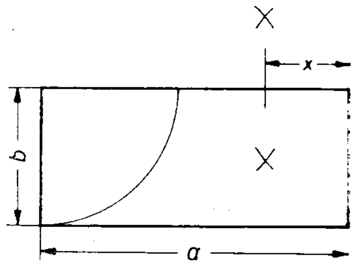


Bild 423

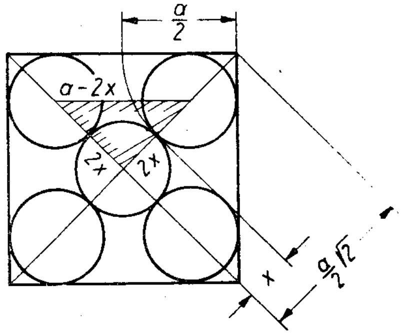


Bild 425

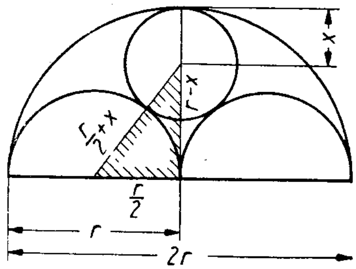


Bild 426

149) $x = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$
(siehe Bild 424)

150) $x = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$
(siehe Bild 425)

151) $x = \frac{1}{3}\,r$ 97
(siehe Bild 426)

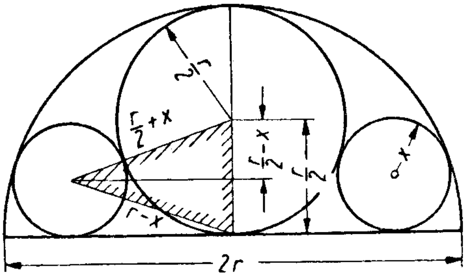


Bild 427

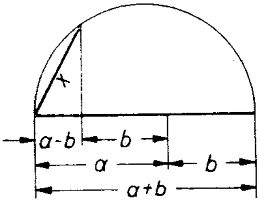


Bild 428

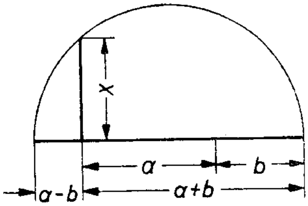


Bild 429

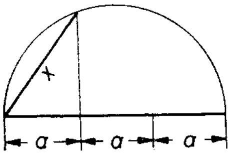


Bild 430

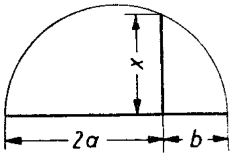


Bild 431

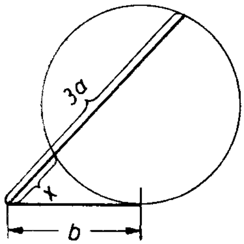


Bild 432

152) $x = \frac{1}{4} r$

(siehe Bild 427)

153) 50 m 113

154) AB = 11,8 m
CD = 26,6 m
EF = 39,2 m

155) AB = 24 m 114
CD = 38 m
EF = 19 m

156) (1) = (2) = (3) = (4) = 3,25 m;
(5) = 1,25 m;
(6) = 2,5 m;
(7) = 3,75 m;
(8) = 3,25 m;
(9) = 3,9 m;
(10) = 4,8 m

157) 12 cm

158) a) Höhensatz
b) Euklid

159) $R_1 = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

$R_2 = \frac{r_2}{r_1}\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

$R_1 : R_2 = r_1^2 : r_2^2$

160) a) 4 : 1 115
b) 2 : 1

161) $a^2 + b^2 = c^2$

162) $AF = \frac{1}{2} FC$

163) $2a^2 + b^2 = c^2$

164) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

165) a) x = 8
b) (siehe Bild 428)
c) (siehe Bild 429)

166)
a) (siehe Bild 430)
b) (siehe Bild 431)
c) (siehe Bild 432)

167) a) 9 : 4
b) 3 : 2

168) 2 : 1

169) a) 3 : 2 116
b) 9 : 4

170) 10 cm

171) 240 mm

172) AC = 9 cm
CB = 6 cm
AD = 45 cm
DB = 30 cm

173) $5^1/_3$

174) 0,5 cm² 133

175) 0,0314 m²

176) 11,3 mm

177) a) 1,3 t
b) 5,02 t

178) 6,3 mm²

179) U = 6,284
F = 3,142

180) a) 9 m²
b) 6,92 m²
c) 10,4 m²
d) 11,4 m²
Kreis

181) 50,1 cm

182) 19,5 t

183) 20 cm 134

184) a) 19,64 cm²
b) 78,54 cm²
1 : 4

185) 4 mal

186) 11,08 cm²

187) 0,1927 dm²

188) $\pi R^2 + 2RL - \frac{\pi d^2}{2}$

189) 857 cm²

190) $0{,}49\ \text{cm}^2$

191) ≈ 3440 kg

192) 40 Stck.; $215\ \text{cm}^2$; 21,5%

193) 21,5%

194) $d = 71$ cm; $F = 0{,}396\ \text{m}^2$ **135**

195) $s \approx 15$ m

196) 37,7 m

197) 17,3%

198)

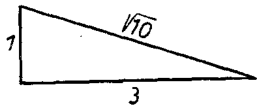


Bild 433

199) Kreis: $63{,}62\ \text{mm}^2$
Quadrat: $64\ \text{mm}^2$

200) $s \approx 2{,}2$ km

201) ≈ 3180 Umdr.

202) 500

203) a) $D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$
b) Pythagoras
c) $D = 50$ mm

204) a) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$ **138**

205) a) $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$
b) $\frac{360°}{\pi} \approx 114{,}6°$
c) $\frac{45°}{\pi} \approx 14{,}3°$

206) $34{,}14\,\pi \approx 107$ [mm]

207) a) $4\,\pi\,r = 12{,}57\,r$
b) $4\,\pi\,r = 12{,}57\,r$

208) $110\,\pi \approx 345{,}6$ [mm]

209) $t = 6\,\pi \approx 18{,}84$ [mm]
$m = 6$ [mm] **139**

210) a) $d_0 = 160$; $m = 4$
b) $z = 30$; $t = 7\,\pi$
c) $z = 50$; $m = 10$
d) $d_0 = 240$; $t = 12\,\pi$
e) $m = 2{,}5$; $t = 2{,}5\,\pi$

211) $1200\,\pi \approx 3770$ [mm]

212) $f = 31{,}4\ \text{cm}^2$
$b = 6{,}28$ cm **140**

213) $r = \frac{s}{2}\sqrt{2} = 0{,}707\,s$
$R = s\sqrt{2} = 1{,}414\,s$
$2a = s\,(1 + \sqrt{2}) = 2{,}414\,s$
$2b = s\,(2\sqrt{2} - 1) = 1{,}828\,s$
$U = \frac{3}{2}\pi\sqrt{2}\cdot s = 6{,}66\,s$
$F = \frac{s^2}{4}(5\,\pi - 2) = 3{,}43\,s^2$

214) a) $U = \pi\,r\left(3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 72$ [mm]
b) $F = r^2\,(3\,\pi - 1 - \pi\sqrt{2}) = 398\ [\text{mm}^2]$

215) $U = \pi\,r = 3{,}142\,r$
$F = \frac{r^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) = 0{,}705\,r^2$

216) $U = \frac{5}{6}\pi\,a = 1{,}57$ [m]
$F = \frac{a^2}{24}(7\,\pi - 6\sqrt{3}) = 0{,}174\ [\text{m}^2]$

217) $2a = 3\,r = 300$ [mm] **141**
$2b = r\,(4 - \sqrt{3}) = 226{,}8$ [mm]
$U = \frac{8}{3}\pi\,r = 838$ [mm]
$F = r^2\left(2\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 541\ [\text{cm}^2]$

218) $F = 3\,r^2\left(8\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 39{,}2\ [\text{cm}^2]$

219) $U = \frac{R}{9}(10\,\pi + 24\sqrt{3}) = 8{,}11\,R$;
$F = \frac{R^2}{27}(11\,\pi + 48\sqrt{3}) = 4{,}36\,R^2$

220) Die 3 Figuren haben gleiche Umfänge und Inhalte

221) $2\,\pi\,s$ **142**

222) $\varrho = \frac{r}{3}$

223) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0{,}286$
36,4% **143**

224) a) $h = 100$ mm
b) $s \approx 346$ mm
c) $F \approx 246\ \text{cm}^2$

225) a) $s = \frac{d}{2}\sqrt{3}$
b) 120°
c) $0{,}15\ d^2$ **144**

226) a) $\frac{d}{2}\sqrt{2}$
b) $\frac{d^2}{2}$
c) $0{,}286\ d^2$

227) a) $\frac{c}{2}\sqrt{3}$
b) $\frac{c}{6}\sqrt{3}$
c) $\frac{\pi\,c^2}{12}$
d) $\frac{c^2}{16}\sqrt{3}$
e) $\frac{c^2}{48}(4\,\pi - 3\sqrt{3})$

228) a) 90°
b) 144°
c) $10\,\pi$
d) 15
e) 140°

229) $\frac{s^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) \approx 0{,}71\,s^2$

230) $\frac{r^2}{6}(4\,\pi - 3\sqrt{3}) \approx 1{,}23\,r^2$

Teil II

1) $6\ \text{m}^2$ **171**

2) $27\ \text{cm}^3$

3) 4 mal

4) 8 mal

5) $50\ \text{cm}^2$

6) 50 mm

7) $8{,}6\ \text{kg/dm}^3$ **172**

8) a) 30 g
b) 120 g
c) 320 g
d) 985 g

9) $1950\ \text{cm}^3$
$1{,}95\ \text{dm}^3$

10) 168 kg

11) $7{,}85\ \text{kg/dm}^3$

12) $8{,}9\ \text{kg/dm}^3$

13) 400 l

14) a) $a = 400$ mm
$h = 200$ mm
15) 5,83 m
16) 36,7 kg
17) a) 12500 cm^3
16000 cm^3
13500 cm^3
8000 cm^3
2500 cm^3
b) 100 mm
c) $1:4$ **173**
d) $1:6$
18) 70 l
19) 19,7 mm
20) 3,24 t
21) Bild 284: 13,2 kg
Bild 285: 8,83 kg
Bild 286: 0,54 kg
Bild 287: 0,71 kg
22) $G = 615$ kg **174**
23) 2700 m^3
24) a) 2650 m^3
b) 233 m^2
25) a) 15000 mm^3
b) 17000 mm^3
c) 20000 mm^3
26) a) Prisma 22500 cm^3 **175**
b) Prisma 18000 cm^3
c) Prisma 15000 cm^3
d) Prisma 15000 cm^3
e) Keil 13125 cm^3
f) Keil 13000 cm^3
g) Pyramide 10000 cm^3
h) Pyramidenstumpf 17500 cm^3
i) Obelisk 14500 cm^3
27) a) $O = a^2 \cdot \sqrt{3}$ **176**
b) $H = \frac{a}{3}\sqrt{6}$
c) $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
28) a) $e = 12$
$f = 14$
$k = 24$
b) $e + f = k + 2$
c) 6 Quadrate + 8 gleichseitige Dreiecke
d) $O = a^2(3 + \sqrt{3})$
$= 4{,}73\ a^2$
e) $V = \frac{5}{6}a^3$
29) $\frac{1}{6}a^3$

30) a) $O = 273\ cm^2$
b) $h = 7{,}1$ cm
c) $V = 236\ cm^3$
31) $O = a^2(1 + \sqrt{3})$
$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$
$V = \frac{a^3}{6}\sqrt{2}$
32) a) $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
b) $O = 2a^2\sqrt{3}$
c) $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
33) 288 mm^3
34) $\frac{1}{6}\,a\,b\,c$ **177**
35) a) $F = \frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 + 4h^2}$
b) $V = \frac{a^2}{2}h\sqrt{3}$
36) 40 cm^3
80 cm^3
37) a) $e = 8$
$k = 16$
$f = 10$
$e + f = k + 2$
b) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
c) $H = \frac{a}{2}\sqrt[4]{8}$
d) $M = \frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2})$
e) $V = \frac{a^3}{3}\sqrt[4]{2}\cdot(1 + \sqrt{2})$
38) a) $e = 6$; $k = 12$; $f = 8$
$6 + 8 = 12 + 2$
b) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
c) $H = \frac{a}{3}\sqrt{6}$
d) $M = \frac{3}{8}a^2\sqrt{3}$
e) $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,a^3$
39) 142 kg **178**
78 kg
40) 960 m^3
41) 830 m^3
42) $\approx$ 6130 m^3
43) 39,5 kg **194**
44) 3,96 kg

45) 500 m
46) $D = 147$ mm
$H = 294$ mm
47) 412 dm^3 21,5%
48) 1885 m^2
49) 9425 l 9,43 t **195**
50) a) $b : a$
b) $1 : 1$
51) $\approx$ 4 mm (3,978 mm)
52) 750 g
53) $\approx$ 40 g
54) 12,7%
55) 20%
56) 28,4 kg
57) 5,9 kg **196**
58) $V = \frac{\pi d^2}{4}(l_1 + l_2) - \frac{2}{3}d^3 = 95{,}1\ cm^3$
59) a) $b : a$
b) $b : a$
60) a) 50 mm
b) 4712 mm^2
c) 50 mm
d) 188,5 mm
e) 216°
61) $x = 142$ mm
62) a) s **197**
b) πs
c) $\pi s = 2\pi r$
d) $s = 2r$
e) gleichseitig
63) $r = 10$ cm
$h = 38{,}7$ cm
$V = 4053\ cm^3$
64) a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{4}$
65) 4,05 m^3
66) $V = \frac{1}{3}G \cdot H$
67) $V = \frac{1}{4}\pi a^3$
68) $V = 402\ cm^3$
69) a) $V = 16\pi\ [cm^3]$
$O = 36\pi\ [cm^2]$
b) $V = 12\pi\ [cm^3]$
$O = 24\pi\ [cm^2]$
c) $V = 9{,}6\pi\ [cm^3]$
$O = 16{,}8\pi\ [cm^2]$
70) $V = \frac{\pi a^3}{6}\sqrt{2}$ **198**
$O = \pi a^2\sqrt{2}$
71) $V = 1{,}744\ [m^3]$
$G = 13{,}69\ [t]$

72) a) $\approx 740\ \text{dm}^3$
b) $\approx 5{,}4\ \text{t}$
73) $\approx 1{,}5\ \text{kg}$
74) $V = 1916\ [\text{cm}^3]$
$M = 850\ [\text{cm}^2]$
$O = 980\ [\text{cm}^2]$
75) 6,3 l
76) 0,81 kg
77) 26,2 kg **199**
78) 78,6 cm^3
79) 2,8 kg
80) a) 0,75 kg
b) 55,7 kg
c) 1,42 kg
d) 6,6 kg
e) 123 kg
f) 0,14 kg
g) 0,14 kg
h) 5,35 kg
81) 125 kg **200**
82) 0,5 g
83) 61 mm
84) 11,1 kg
85) 48%
86) a) 1 : 8
b) 1 : 4
87) a) 8
b) 27
c) n^3
88) 0,5 **201**
89) $\frac{1}{2}\pi r^3$
3 : 1
90) a) πr^3
b) $\frac{1}{3}\pi r^3$
1 : 2
91) $\frac{2}{3}\,d$
92) a) $\varrho = r\sqrt[3]{6} = 1{,}82\,r$
b) $O_1 = 9\pi r^2$
$O_2 = 6{,}6\,\pi r^2$
c) $O_1 : O_2 = 15 : 11$
93) 1 : 2
94) 1 : 2 : 3
95) 97 g **202**
96) 3,8 kg
97) a) $819\,\pi\ [\text{cm}^3]$
b) $563\,\pi\ [\text{cm}^3]$
c) 31%
98) 286,5 kg
99) $V = 24{,}3\,\pi\ [\text{dm}^3]$
$O = 30\,\pi\ [\text{dm}^2]$
100) $V = 45\,\pi\ [\text{cm}^3]$
$O = 36\,\pi\ [\text{cm}^2]$

101) a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{n-1}{2n}$
102) a) $h = 8$ cm **203**
b) $a = b = 3$ cm
c) $V \approx 495\ [\text{cm}^3]$
d) $O \approx 308\ [\text{cm}^2]$
103) $x = \frac{1}{2}\,r$
104) $H = \frac{2}{3}\,D$

Teil III

1) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ **209**
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$
$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}$
2) a) $\sin\beta = \frac{b}{a}$
$\cos\beta = \frac{c}{a}$
$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$
$\operatorname{ctg}\beta = \frac{c}{b}$
b) $\sin\gamma = \frac{c}{a}$
$\cos\gamma = \frac{b}{a}$
$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b}$
$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{b}{c}$
3) $\alpha = 30°$
4) $\sin\alpha = 0{,}88$ **210**
$\cos\alpha = 0{,}47$
$\operatorname{tg}\alpha = 1{,}88$
$\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}53$
5) $a = 10$ [cm]
$b = 10$ [cm]
$c = 14{,}14$ [cm]
6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ **231**
7) 5 : 3
8) ≈ 22 m

9) a) 5 cm, 8,66 cm
b) 21,65 cm^2
10) $2a\sin\frac{\alpha}{2}$
11) 4790 mm^2 **232**
12) $1{,}23\,r^2$
13) $0{,}69\,r^2$
14) a) $0{,}632\,D^2$
b) 81%
15) a) $\varrho = \dfrac{r\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$
b) $\varrho = \dfrac{r\sin\frac{180}{n}}{1+\sin\frac{180}{n}}$
16) $4{,}6\,r^2$ **233**
17) $\sin\frac{180}{n} = \frac{d}{D+d}$
18) 60°
19) 3,64 d
20) $0{,}033\,s^2 \approx 7{,}5\%$ **234**
21) 47° 20′
22) ≈ 620 mm
23) $P_1 = 1700$ kg
$P_2 = 620$ kg
24) $R = 2\,P\cos\frac{\varphi}{2}$
25) 7,3% **235**
26) $\alpha = 73°\,13'$ **260**
$\beta = 58°\,27'$
$\gamma = 48°\,20'$
$F = 2753\ \text{mm}^2$
27) $b = 49$ mm
$c = 59{,}6$ mm
$\alpha = 23°$
$F = 571\ \text{mm}^2$
28) $b = 15$ cm
$\alpha = 59°\,29'$
$\gamma = 53°\,8'$
$F = 84\ \text{cm}^2$
29) $c = 29$ cm
$\alpha = 35°\,44'$
$\gamma = 85°\,5'$
$F = 211{,}7\ \text{cm}^2$
30) $c = 61$ cm
$\alpha = 78°\,10{,}6'$
$\beta = 57°\,12{,}2'$
$\gamma = 44°\,37{,}2'$
31) $c = 9{,}17$ cm
$d = 15{,}62$ cm
$F = 69{,}2\ \text{cm}^2$
$2(a^2+b^2) = c^2+d^2$

32) $F = 70{,}7 \text{ cm}^2$

33) $F = \frac{1}{2} e f \sin \varphi$

Flächengleiches Dreieck

34) $R = 53{,}6$ kg **261**

35) 90°

36) a) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$ **268**

b) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$

37) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\alpha}$

38) $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3 \operatorname{ctg}\alpha}{3 \operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$

39) a) 0,259
b) 0,259
c) 0,966
d) 0,966
e) — 0,707

40) a) $-\sin\alpha$ **269**
b) $\cos\alpha$
c) $\sin\alpha$

44) $\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$

45) a) 0,268
b) 0,383
c) 0,131

46) $\cos 90° = 0$

47) $\operatorname{tg} 90° = \infty$

49) $\cos x$ **272**

50) $-\sin x$

51) $\sqrt{2} \sin x$

52) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$ **273**

54) $c = 71$; $\alpha = 73°13'$; $\beta = 58°27'$ **278**

55) $a = 197$; $\beta = 55°10'$; $\gamma = 81°20'$

56) $a = 382$; $b = 327$; $\alpha = 54°21'$; $\beta = 44°5'$

57) $b = 47$; $c = 72$; $\beta = 39°43'$; $\gamma = 78°12'$

58) $b = 674$; $c = 514$; $\beta = 90°27'$; $\gamma = 49°41'$

59) $a = 875$; $c = 518$; $\alpha = 98°21'$; $\gamma = 35°51'$

60) $c = 860$; $\alpha = 47°35'$; $\beta = 58°15'$; $\gamma = 74°10'$

61) $a = 93$; $b = 115$; $c = 72$; $\alpha = 53°53'$; $\beta = 87°24'$; $\gamma = 38°43'$

62) $b = 814$; $\alpha = 55°3'$; $\beta = 79°20'$; $\gamma = 45°37'$

63) $a = 85$; $\alpha = 78°11'$; $\beta = 57°12'$; $\gamma = 44°37'$

64) $x = 56°\,20'$ **282**

65) $x_1 = 0°$
$x_2 = 45°$

66) $x = 18°\,20'$

67) $x = 45°$

68) $x = 30°$

69) $x = 90°$

70) $x_1 = 0°$
$x_2 = 45°$

71) $x = 90°$

72) $x_1 = 90°$
$x_2 = 30°$

73) $x = 45°$

Sachverzeichnis

(Seitenzahlen mit * weisen auf Übungsaufgaben hin)

Additionstheoreme 261
Ähnlichkeit 106 ff.
Amplitude 283
Analytische Geometrie 1
Ankreis 52, 61, 77
arcus 205
Archimedischer Satz 201*
Archimedisches Prinzip 173*
Außenwinkel 20, 23*

Bestimmungsdreiecke regelmäßiger Vielecke 116
Bewegung, gleichförmig beschleunigte 94*
Brinellsche Kugeldruckprobe 95*
Bogenhöhe 230
Bogenlänge 138, 231

Cartesische[1]) Koordinaten 235
Cavalierischer Grundsatz 160, 179
Cosekans 207
Cosinus 207
Cotangens 207

Dachbinder 95*, 114*
Dachfläche, Neigung 22*
Darstellende Geometrie 1
Deckungsgleichheit 25 ff.
Diagonalen 39
Diagonalensätze 43
Dodekaeder 153, 171
Doppelkegel 197*
Doppelpyramide 166
Drachenviereck 40, 81
Drehsinn, mathematischer 8, 236
Dreiecke, Einteilung 16
—, gleichschenklige 27
—, Inhalt 75 ff., 254
—, Lehrsätze 18
—, Schwerpunkt 145
—, halber Umfang 62

Ebenflächige Körper 150 ff., 159 ff.
Ecken, Bezeichnung 15
Eckenmaß 128*
Einheitskreis 133*, 235 ff.
Eiprofil 233*
Entgegengesetzte Winkel 11
Ergänzungsparallelogramme 83
Euklid, Lehrsatz des 69
Eulerscher Lehrsatz 150, 176*

Flächeninhaltsbestimmung 67 ff.
Funktionen 204 ff.
Funktionswerte, bestimmter Winkel 210
— der Komplementwinkel 210
—, doppelter und halber Winkel 265
—, sämtlicher Winkel 237
—, spitzer Winkel 206
—, stumpfer und negativer Winkel 244
Frequenz 284

Gegenwinkel 11
Geometrie, Einteilung 1
—, geschichtliche Entwicklung 1
Geometrische Konstruktion algebraischer Ausdrücke 89*
Geometrisches Mittel 99, 115*
Gerade 4
Gewichtsberechnungen 159, 172*, 194*
Goldener Schnitt 112, 115*
Goniometrie 1
Goniometrische Gleichungen 278 ff.
Guldinsche Regel 178, 197* ff.

Halbwinkelsatz 253
Harmonische Teilung, — Mittel 105 ff., 116*
Heronische Dreiecksformel 78, 86*
Hexaeder 153, 171
Höhen, Bezeichnung 15
Höhensatz 71
Hohlkugel 193
Hohlkugelausschnitt 193
Hohlzylinder 155, 182

[1]) Fehlende Wörter mit C sind unter K nachzuschlagen.

Homologe Stücke 25
Hypotenuse 17

Ikosaeder 153, 171
Interpolieren 213
Inkreis 52, 61, 76, 144*

Kalotte 190
Katheten 17
Kegel 155, 183 ff., 195* ff.
—, Neigung 221
—, schiefer Kreis- 156, 184
Kegelstumpf 156, 184 ff., 198* ff.
Keil 47*, 163
—, Spaltwirkung des 225
Kernquerschnitt 134*
Kinematik 1
Kochanski 132
Kolbenfläche 134*
Kolbenstangenkraft 134*
Komplementwinkel 9, 210
Komponenten 224, 257*
Kongruenz der Dreiecke 25 ff.
Koordinatenkreuz 235
Korbbogen 66*, 138*
Körperdiagonale 171*
Kosinussatz 251
Kräftezerlegung 224, 234*
Kreis 49 ff.
Kreisberechnungen 130 ff.
Kreisbogenlänge 137
Kreisbogenschwerpunkt 148
Kreisinhalt 131
Kreisring 50, 135 ff.
Kreissegment 142, 231
Kreissehne 49, 54
Kreissektor 137 ff., 140* ff.
Kreisteilungstabelle 118
Kreisumfang 130
Krummflächige Körper 154, 178 ff.
Krümmung 4
Kugel 156, 187, 200* ff.
Kugelabschnitt 157, 189, 202*
Kugelkappe 190
Kugellager 53*
Kugelschicht 158, 191
Kugelsektor 157, 190, 202*
Kugelzone 192
Kurbeltrieb 65*, 226*

Linie 4
Linienschwerpunkt 145
Linsen 202*, 232*
Ludolfsche Zahl π 131
— —, Näherung 131

Mittellinie im Trapez 39, 44
Mittelliniensätze 44
Mittlere Proportionale 99, 115*
Mittelsenkrechte 16, 30, 61
Mollweideschen Formeln 273

Nebenwinkel 9
N-Ecke, Inhalt 82
— —, Näherungskonstruktion 121
— —, Seitenlänge und Umfang 124

Obelisk 152, 170, 178*
Oktaeder 153, 171, 176*
Oval 140*

Papierformat 82*
Parallelenkonstruktion 32 ff.
Parallelogramm 39
—, Flächeninhalt 69
Passungssystem 54*
Pentagramm 48*
Periode 284
Peripheriewinkel 12, 49, 59
Perspektive 1
Phasenverschiebung 285
Planetengetriebe 53*
Planimetrie 1
Planimetrische Grundkonstruktionen 29 ff.
Platonische Körper 153, 171
Ponton 152, 170, 178*
Potenz eines Punktes 110 ff., 116*
Prismen 150, 160
—, schief abgeschnittene 161
Prismoide 152, 166, 177*
Projektionen 72, 223
Proportionale, mittlere 99
—, vierte 101
Ptolemäischer Lehrsatz 113, 115*
Punkt 4
Pyramiden 151, 166, 176 ff.
Pyramidenstumpf 152, 168 ff.
Pythagoras, allgemeiner 75
—, Lehrsatz des 70
—, trigonometrischer 215

Quader 151, 159
Quadrant 53*, 137
Quadrat, Flächeninhalt 40, 68
Quadratstabl 134*, 172*
Quadratur des Kreises 132

Raute 40
Rechteck, Flächeninhalt 40, 68
Rechtwinkliges Dreieck, Berechnung 217 ff.
Reflektion eines Lichtstrahles 234*
Regenhöhe 173*
Rektifikation 132
Resultierende 22*, 224*, 234*, 256*
Rhomboid 39
Rhombus 40, 80, 231*
Reibräder 53*

Riemenlänge 228*
Riemenscheiben 53*
Riementrieb, offener und gekreuzter 228*
Ring 158, 194
Rohr 155, 182
Rohrquerschnitt 133*, 232*

Satteldach 22*, 174*
Schaufelform für Schleuderpumpen 259*
Scheitelwert 284
Scheitelwinkel 10
Schiefe Ebene 225*
Schlüsselweite 128*, 144*
Schnittwinkel, -punkt 4, 7, 13*
Schraubenlinie 221
Schubkurbelgetriebe 226
Schwalbenschwanzführung 84*
Schwerlinien 16
Schwerlinien im Dreieck 106
Schwerpunktsberechnungen 145 ff.
Schwingungsweite 283
Sechskantstahl 47*
Sehnen 49, 230
Sehnensatz 110
Sehnentangentenwinkel 49, 60
Sehnenvieleck, regelmäßige 127 ff.
Sehnenviereck 52, 63
Seiltrommel 135*
Seitenbezeichnung 15
Seitensatz für Parallelogramme 43
Sekans 207
Sekantensatz 110
Sekanten-Tangentensatz 111
Sektorfläche 139
Senkrechtenkonstruktionen 29
Senkwinkel für Kegelsenkungen 23*
Sextant 53*
Sinus 207
Sinussatz 250
Sinusschwingung 283
—, zusammengesetzte 286 ff
Spannungsverhältnis 231
Sphärische Geometrie 1
Spiel 54*
Steigung 220
Stereometrie 1, 150 ff.
Stereometrische Grundbegriffe 150 ff.
Stetige Teilung 112, 115*
Stopfbüchsenbrille 141*
Strahl 5
Strahlensätze 100 ff.
Strecke 5
Streckenteilung 34
Stumpfe Winkel, trigonometrische Funktionen 244
Supplementwinkel 9
Symmetrie 28

Tangens 207
Tangenten, äußere und innere 58, 65*
Tangentenviereck 52, 63, 81
Tangentenvielecke, regelmäßige 127 ff.
Tangenssatz 275
Teilkopf 119
Teilung, innere und äußere 98
Tetraeder 153, 171
Thalessatz 21, 61
Transzendente Zahlen 131
Trapez 39
Trapezinhalt 79
Trapezschwerpunkt 146
Trichter, kegelförmiger 196*
Trigonometrie 1, 204 ff.
Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis 237
— — spitzer Winkel 206 ff.
— — Summen und Differenzen 269
Trigonometrische Kurven 243
— Zahlentafeln 212 ff.

Uhrzeiger, Winkel der 13*
Umdrehungszahl eines Rades 135*
Umkreis 52, 61, 251, 257*
Umschlingungswinkel 14*, 48*

Vielecke 116 ff.
—, Konstruktion regelmäßiger 118
—, Schwerpunkt 145
Vierecke, Einteilung 39 ff.
—, Inhalt 79 ff.
—, Schwerpunkt 145
—, Seitensatz 43
—, Winkelsätze 42
Vierte Proportionale 99
Vollwinkel 9

Walmdach 174* 178*
Wasserkasten, Volumen 172*
Wechselwinkel 11
Whitworth-Gewinde 222*
Winkelbezeichnung 15
Winkel, Übersicht 6
—, Konstruktion und Teilung 35
Winkelhaken 57*
Winkelhalbierende im Dreieck 16, 102
Winkelmessung 205
Winkelsumme im Dreieck 18
Wirkungsgrad einer Schraube 222*
Würfel 151, 159

Zahnrad 14*
Zeichenmaschine 118
Zentriwinkel 12, 49, 59
Ziegelstein 172*
Zugbelastung 133*
Zylinder 154, 179
Zylinderhuf 155, 181
Zylinder, schiefer Kreis- 154, 180
—, schräg geschnittener 154, 180