3D-Transformationen

Allgemeine Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{z}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k} & 1 & \mathbf{m} & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verschiebung um Vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung mit den Faktoren s_x , s_y , s_z und Zentrum (0,0,0)

$$\text{Matrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \end{pmatrix}$$

Skalierung an Zentrum (a,b,c)

- 1. Verschiebung um (-a,-b,-c)
- 2. Skalierung an (0,0,0)
- 3. Verschiebung um (a,b,c)

Rotation um die z-Achse mit Winkel a **Matrix**

$$\begin{pmatrix}
\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\
\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Rotation um die x-Achse mit Winkel β Matrix

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\
0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Matrix Rotation um die y-Achse mit Winkel γ

$$\begin{cases} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{cases}$$

Rotation um eine beliebige Achse mit Winkel σ

... wird beschrieben durch Gerade der Form
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Algorithmus:

1. Verschiebung aller Punkte, so dass Rotationsachse durch Ursprung verläuft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -R_x \\ 0 & 1 & 0 & -R_y \\ 0 & 0 & 1 & -R_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Rotation um x-Achse, so dass Drehachse in xz-Ebene liegt

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & -\frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\
0 & \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

3. Rotation um y-Achse, so dass Drehachse mit z-Achse übereinstimmt

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 & -\frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Rotation des Objektes um die z-Achse

$$\begin{pmatrix}
\cos \sigma & -\sin \sigma & 0 & 0 \\
\sin \sigma & \cos \sigma & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

5. Rücktransformationen

... bei den Drehungen 2 und 3 sind die Cosinus-Terme unverändert, da $cos(\alpha)=cos(-\alpha)$, die Sinus-Terme, da $sin(\alpha)=-sin(-\alpha)$, durch die negativen zu ersetzen