HOCHSCHULBÜCHER FÜR MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON
H. GRELL, K. MARUHN UND W. RINOW

BAND 10

ENZYKLOPÄDIE DER ELEMENTARMATHEMATIK

REDAKTION:
P. S. ALEXANDROFF
A. I. MARKUSCHEWITSCH
A. J. CHINTSCHIN

BAND IV
GEOMETRIE

Mit 558 Abbildungen

Zweite, berichtigte Auflage

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN 1980

Академия педагогических наук РСФСР

Энциклопедия элементарной математики

Главная редакция
П. С. Александров, А. П. Маркушевич, А. Я. Хинчин

Редакторы книги четвертой
В. Г. Болтянский, И. М. Яглом

Книга четвертая
Геометрия

Гостехиздат, Москва 1963

Aus inhaltlichen Gründen wurde der Artikel „Kegelschnitte" aus Band V der russischen Ausgabe in diesen Band übernommen

Übersetzung: Dipl.-Math. H. Antelmann, Dr. J. Flachsmeyer, Dr. B. Frank, Dr. H. Frank, Dr. H. Poppe

Wissenschaftliche Redaktion der deutschen Ausgabe: Prof. Dr. G. Asser

Verantwortliche Verlagslektoren:
Dipl.-Math. E. Arndt, Dipl.-Math. B. Mai

© der deutschsprachigen Ausgabe
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969
Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206·435/105/80
Satz: Graphischer Großbetrieb INTERDRUCK Leipzig – III/18/97
Offsetdruck und buchbinderische Verarbeitung: VEB Druckerei Thomas Müntzer, Bad Langensalza
LSV 1044
Bestellnummer: 569 481 9
DDR 35,– M

AUS DEM VORWORT ZUR RUSSISCHEN AUSGABE

Die ersten drei Bände der „Enzyklopädie der Elementarmathematik" (kurz EdEM genannt), die sich mit Arithmetik, Algebra und Analysis befassen, erschienen vor mehr als zehn Jahren. Inzwischen erlitt unser Mitarbeiterkollektiv schmerzliche Verluste. Im Jahre 1959 verstarb nach langer Krankheit A. J. CHINTSCHIN; kurz vorher war auch D. I. PEREPELKIN verstorben, der an den Bänden über Geometrie mitgearbeitet hatte. Daß es trotzdem gelang, die EdEM weiter fortzusetzen, ist wesentlich W. G. BOLTJANSKI und I. M. JAGLOM zu verdanken.

Aus dem Vorwort zum ersten Band, in dem die Besonderheiten dieses Werkes zum Ausdruck gebracht werden, möchten wir folgende Stelle zitieren: „Es [das Werk] kann nicht als Einführung in den behandelten Stoff dienen, sondern ist für Leser bestimmt, die die Elementarmathematik bereits studiert haben und schon Lehrer der Elementarmathematik sind oder es werden wollen. Die ‚Enzyklopädie' hält sich in der Regel weder an die Reihenfolge noch an die Methode der Darstellung der Mathematik in der Oberschule, da beide durch die Entwicklung des Auffassungsvermögens der Schüler und die allgemeinbildenden Ziele der Oberschule bedingt sind, d. h. durch Erwägungen, die für den ausgebildeten Fachmann ohne Belang sind. Grundsatz unseres Aufbaus ist es vielmehr, jene Fragen der Mathematik, aus denen die Schulmathematik besteht, in systematischer und möglichst einfacher und zugänglicher Form darzulegen. Daneben sollen auch Fragen angeschnitten werden, die zwar nicht direkt im Unterricht behandelt werden, die aber für das richtige und bewußte Verständnis der Schulmathematik notwendig sind oder Perspektiven auf eine weitere Entwicklung ihres Inhalts und ihrer Methoden eröffnen."

Diese unsere ursprüngliche Absicht hat sich nicht geändert. Auch blieben wir bei unserem Entschluß, der Geometrie zwei aufeinanderfolgende Bände zu widmen. Hinsichtlich des Inhalts dieser beiden Bände haben wir jedoch Änderungen vorgenommen, die in der Hauptsache von dem Wunsch diktiert waren, Bemerkungen von Rezensenten und Lesern zu den ersten drei Bänden zu berücksichtigen. Über die jetzt vorgenommene Auswahl der Themen und deren Reihenfolge kann sich der Leser anhand des Inhaltsverzeichnisses informieren.

Der vierte und fünfte Band der EdEM bilden zusammen ein einheitliches Ganzes, so daß sie unabhängig von den früher herausgegebenen Bänden, die ebenfalls einen abgeschlossenen Zyklus bilden, benutzt werden können.

Im Jahre 1951, als der erste Band der EdEM erschien, konnte kaum jemand vorhersehen, daß sich neue mathematische Berufe (wie z. B. der des Programmierers) entwickeln würden; auf diese Berufe sollte schon in der Oberschule vorbereitet werden. Diese neuen Aufgaben erfordern eine Überprüfung und Erweiterung des Begriffes „Elementarmathematik". Die diesbezüglichen

Fragen wollen wir in den letzten Bänden behandeln (es sind insgesamt sieben Bände geplant), die somit in vielem von dem abweichen werden, was wir im Vorwort zum ersten Band umrissen hatten.

Würden wir heute noch einmal von vorn anfangen, so würden wir vor allen Dingen die Struktur und die Art der Darlegung in den früher erschienenen Bänden ändern, aber wir denken, daß sie trotz allem sehr nützlich sind. Wir hoffen, daß dieser und der folgende Band der EdEM ihren Leserkreis finden und nicht nur Mathematiklehrern an Oberschulen sowie Studenten an Universitäten, Hochschulen und Pädagogischen Instituten wertvolle Dienste leisten, sondern auch alle mathematisch Interessierten ansprechen werden.

Die Redaktion

Die deutsche Ausgabe der ersten drei Bände der EdEM hat, wie die gute Resonanz und die mehrfachen Nachauflagen beweisen, ihren Platz in unserer mathematischen Literatur gefunden und sich viele Freunde erworben. Die Bände über Geometrie wurden lange erwartet. Wir dürfen daher annehmen, daß auch dieser vierte Band und der in Vorbereitung befindliche fünfte Band ebenfalls auf großes Interesse stoßen werden.

Herausgeber und Verlag
der deutschen Ausgabe

INHALTSVERZEICHNIS

B. A. Rosenfeld

Axiome und Grundbegriffe der Geometrie

§ 1. Das Entstehen grundlegender Begriffe der Geometrie

1.1. Die Begriffe der Geometrie als Resultate von Abstraktionen 3
1.2. Die Entstehung der Geometrie in der alten Welt 4

§ 2. Die „Elemente" des EUKLID

2.1. EUKLID und seine Vorgänger 5
2.2. Die „Postulate" EUKLIDS 8
2.3. Der Begriff der Stetigkeit bei EUKLID und seinen Vorgängern 9
2.4. Bewegungen 10

§ 3. Die Herausbildung der axiomatischen Methode

3.1. Die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie 11
3.2. Die axiomatische Methode in der Mathematik 12

§ 4. Modelle

4.1. Modelle der euklidischen Ebene 15
4.2. Axiomatische Systeme in der Algebra 20

§ 5. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit eines Axiomensystems

5.1. Die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems 21
5.2. Die Vollständigkeit eines Axiomensystems 23

§ 6. Die Axiomatik der Geometrie

6.1. Die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie 25
6.2. Die Inzidenzaxiome 26
6.3. Die Axiome der Anordnung 27
6.4. Axiome der Bewegung 30
6.5. Die Stetigkeitsaxiome 30
6.6. Das Parallelenaxiom 33

§ 7. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie

7.1. Die Einführung von Koordinaten 34
7.2. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Ebene 37

§ 8. Die Unabhängigkeit der Axiome

8.1. Die Unabhängigkeit eines Axiomensystems 38
8.2. Über die Unabhängigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie 39
8.3. Abschließende Bemerkungen 40

Literatur 42

I. M. Jaglom und L. S. Atanasjan

Geometrische Transformationen

§ 1. Der Begriff der Transformation. Beispiele

1.1. Geometrische Abbildungen 45
1.2. Geometrische Transformationen 47
1.3. Einige Typen geometrischer Transformationen 54

§ 2. Die Anwendung von Transformationen bei der Lösung geometrischer Aufgaben

2.1. Einige Beispiele 57
2.2. Anwendung der Spiegelung 60
2.3. Die Anwendung geometrischer Transformationen auf die „Symmetrisierung" von Figuren 63

§ 3. Die analytische Beschreibung geometrischer Transformationen

3.1. Die Beschreibung geometrischer Transformationen durch Koordinaten 66
3.2. Analytische Methoden zum Studium von Transformationen 68
3.3. Lineare Transformationen 70
3.4. Komplexe Koordinaten der Punkte der geschlossenen Ebene 72
3.5. Birationale Transformationen 73

§ 4. Das Produkt von Abbildungen und Transformationen

4.1. Die Definition des Produktes von Abbildungen. Beispiele 74
4.2. Einige allgemeine Eigenschaften des Produktes von Transformationen 79
4.3. Produkte von Bewegungen. Klassifizierung der Bewegungen 80
4.4. Anwendungen 83
4.5. Weitere Beispiele für Produkte von Transformationen 86

§ 5. Die inverse Transformation

5.1. Die Definition der inversen Transformation 90
5.2. Die Involutionen 91

§ 6. Der allgemeine Begriff der Geometrie. Gruppen von geometrischen Transformationen

6.1. Der Gegenstand der Geometrie 92
6.2. Geometrie und Transformationsgruppen 95
6.3. Verschiedene Geometrien. Die affine Geometrie 97
6.4. Transformationsgruppen in der Physik 102

§ 7. Die Gruppe der projektiven Transformationen

7.1. Die Homologie 104
7.2. Die projektive Ebene 107
7.3. Die Anwendung von Homologien bei der Lösung von Aufgaben 109
7.4. Projektive Transformationen und projektive Geometrie 111
7.5. Koordinaten in der projektiven Ebene 112
7.6. Birationale Transformationen der projektiven Ebene 113

§ 8. Allgemeinere Arten von geometrischen Abbildungen
8.1. Beispiele für allgemeinere geometrische Abbildungen 115
8.2. Allgemeine Transformationen in der Kreisgeometrie 117
8.3. Polaritäten. Das Dualitätsprinzip in der projektiven Geometrie 122
8.4. Die Fußpunkttransformation 127
8.5. Gruppen von allgemeinen Transformationen 130

§ 9. Das Übertragungsprinzip
9.1. Einführung 133
9.2. Das Übertragungsprinzip der Kontraktionen in bezug auf eine Gerade 134
9.3. Das Übertragungsprinzip der Inversion 137
9.4. Das Übertragungsprinzip der Polarität 140
9.5. Das Übertragungsprinzip und Modelle für geometrische Systeme 149

Literatur 151

N. M. Beskin, W. G. Boltjanski, G. G. Maslowa, N. F. Tschetweruchin, I. M. Jaglom

Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen

§ 1. Einige Fragen der praktischen Verwendung geometrischer Konstruktionen
1.1. Einleitung 155
1.2. Instrumente für die praktische Durchführung von geometrischen Konstruktionen 155
1.3. Die Genauigkeit einer Konstruktion 159

§ 2. Über die Lösung von Konstruktionsaufgaben in Abhängigkeit von gebräuchlichen Instrumenten
2.1. Konstruktion mit Lineal, Zirkel, Zeichendreieck und Winkelmesser 162
2.2. Konstruktionen allein mit Hilfe des Zirkels (Konstruktionen von Mohr-Mascheroni) 164
2.3. Konstruktionen allein mit Hilfe des Lineals (Konstruktionen von Poncelet-Steiner) 167
2.4. Über Konstruktionen mit Hilfe anderer Instrumente 171

§ 3. Über Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene
3.1. Konstruktionen mit Hilfe eines Lineals beschränkter Länge 173
3.2. Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene 175

§ 4. Einige allgemeine Methoden zur Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene
4.1. Die Aufspaltung der Bedingungen einer Aufgabe (die Methode der „geometrischen Örter") 178
4.2. Ein allgemeines Lösungsschema für Konstruktionsaufgaben 180
4.3. Die algebraische Methode 181

§ 5. Die Anwendung von geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene
5.1. Allgemeine Bemerkungen 185
5.2. Beispiele 186

§ 6. Näherungsmethoden für geometrische Konstruktionen und ihre Anwendung in der Praxis
6.1. Exakte und angenäherte Lösungen von Konstruktionsaufgaben 189
6.2. Die Rektifizierung eines Kreisbogens 190
6.3. Die graphisch-analytische Methode und die Methode der sukzessiven Approximationen 193

§ 7. Geometrische Konstruktionen im Raum
7.1. Das System der Postulate für Konstruktionen in der Ebene 196
7.2. Ein Postulatensystem für „imaginäre Konstruktionen" im Raum 198
7.3. Ein Beispiel 199
7.4. Abschließende Bemerkung 199

Literatur 201

J. I. Manin

Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal

Einleitung 205

§ 1. Der geometrische Teil der Theorie
1.1. Problemstellung 206
1.2. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal 208

§ 2. Die Übertragung der Aufgabe in die Sprache der Algebra
2.1. Ein grundlegendes Lemma 210
2.2. Folgerungen 215
2.3. Algebraische Betrachtungen 216
2.4. Der Fall der Polynome dritten Grades 217
2.5. Der Satz von Gauss 219

§ 3. Klassische Probleme
3.1. Die Verdoppelung eines Würfels 220
3.2. Die Dreiteilung eines Winkels 221
3.3. Die Konstruktion eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden 224
3.4. Die Konstruktion von regelmäßigen Vielecken 225
3.5. Die Quadratur des Kreises 226

Literatur 228

N. M. Beskin

Abbildungsverfahren

§ 1. Aufgabenstellung
1.1. Abbildungen des Raumes auf die Ebene 231
1.2. Die Zyklographie 231

1.3. Das Verfahren von Fedorow 232
1.4. Grundforderungen an ein Abbildungsverfahren 233
1.5. Nichteindeutigkeit der inversen Abbildung 234
1.6. Projektive Abbildungsverfahren 235

§ 2. Parallelprojektionen
2.1. Die Eigenschaften der Parallelprojektion 236
2.2. Das Verfahren der Eintafel-Parallelprojektion 238
2.3. Gebundene und freie Bilder 240
2.4. Die Abbildung ebener Figuren 242
2.5. Beispiele 246

§ 3. Schiefe Axonometrie
3.1. Der Satz von Pohlke und Schwarz 250
3.2. Vollständige und unvollständige Bilder 254
3.3. Der Begriff der schiefen Axonometrie 258
3.4. Bedingte Bilder 261
3.5. Beispiele für die Konstruktion axonometrischer Bilder 261
3.6. Allgemeine Konstruktionsmethoden axonometrischer Bilder 264
3.7. Die Axonometrisierung einer Zeichnung 270
3.8. Orthogonale (rechtwinklige) Axonometrie 274

§ 4. Das Verfahren von Monge
4.1. Kombinierte Bilder 279
4.2. Das Wesen des Verfahrens von Monge 279

§ 5. Zentralprojektionen
5.1. Die Eigenschaften der Zentralprojektion 280
5.2. Projektive Koordinaten 283
5.3. Die Verwendung projektiver Koordinaten bei der Konstruktion von Bildern 284
5.4. Der Begriff der zentralen Axonometrie 287

§ 6. Die Konstruktion von Zeichnungen
6.1. Die Konstruktion von Projektionszeichnungen 291
6.2. Beispiele 291

Literatur 294

W. G. Boltjanski und I. M. Jaglom

Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie

§ 1. Definition des Vektors
1.1. Die Parallelverschiebung 297
1.2. Der Vektor 298
1.3. Antragen eines Vektors an einen Punkt 300
1.4. Vektoren und gerichtete Strecken 301

§ 2. Addition von Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl
2.1. Addition von Vektoren 303
2.2. Entgegengesetzte Vektoren. Der Nullvektor 306
2.3. Eigenschaften der Summe von Vektoren 306
2.4. Subtraktion von Vektoren 309
2.5. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl 311
2.6. Eigenschaften des Produktes von Vektor und Zahl 313
2.7. „Arithmetik der Figuren" 314
2.8. Das Teilen einer Strecke im gegebenen Verhältnis 316
2.9. Die Koordinaten eines Vektors 318
2.10. Lineare Abhängigkeit von Vektoren 320
2.11. Beispiele 321

§ 3. Das Skalarprodukt von Vektoren
3.1. Die Projektion eines Vektors auf eine Achse 326
3.2. Eigenschaften der Projektion 327
3.3. Der Zusammenhang zwischen der Projektion und den Koordinaten 328
3.4. Der Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen 329
3.5. Beispiele 331
3.6. Definition und Eigenschaften des Skalarproduktes 335
3.7. Beispiele und Aufgaben 337
3.8. Die Eindeutigkeit des Skalarproduktes 343

§ 4. Das Schiefprodukt von Vektoren der Ebene
4.1. Orientierte Flächeninhalte und das Schiefprodukt von Vektoren 345
4.2. Die Analogie zwischen Schief- und Skalarprodukt 350
4.3. Weitere Eigenschaften des Schiefproduktes 351
4.4. Beispiele und Aufgaben 353
4.5. Über die Eindeutigkeit des Schiefproduktes 357

§ 5. Das Spatprodukt und das Vektorprodukt von Vektoren im Raum
5.1. Orientierte Rauminhalte und das Spatprodukt 359
5.2. Das Vektorprodukt und sein Zusammenhang mit dem Spatprodukt 360
5.3. Die Eigenschaften des Vektorproduktes und des Spatproduktes 363
5.4. Das zweifache Vektorprodukt 368
5.5. Beispiele 369
5.6. Über die Eindeutigkeit des Spat- und des Vektorproduktes 372

§ 6. Anwendung der Vektorrechnung auf die sphärische Geometrie und Trigonometrie
6.1. Untersuchung sphärischer Dreiecke mit Hilfe von Vektoren 374
6.2. Der sphärische Kosinus- und Sinussatz 376

§ 7. Der Begriff des Vektorraumes
7.1. Axiomatische Definition des Vektorraumes 377
7.2. Das arithmetische Modell des Vektorraumes 378
7.3. Die Vollständigkeit des Axiomensystems 380
7.4. Ein Axiomensystem der Elementargeometrie 384
7.5. Einige Typen mehrdimensionaler Räume 385

Literatur 390

W. G. Aschkinuse

Vielecke und Vielflache

§ 1. Die grundlegenden Definitionen. Der EULERsche Satz
1.1. Ebene Vielecke ... 393
1.2. Vielflache ... 394
1.3. Der EULERsche Satz ... 396
1.4. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielflachs vom Geschlecht größer als Null ... 401
1.5. Ein anderer Beweis des EULERschen Satzes ... 404

§ 2. Der kombinatorische (topologische) Typ eines Vielflachs. Der Satz von STEINITZ
2.1. Kombinatorische Eigenschaften der Vielflache. Isomorphie ... 409
2.2. Das abstrakte Vielflach ... 411
2.3. Der Satz von STEINITZ ... 413
2.4. Dualität ... 417

§ 3. Das Netz eines Vielflachs. Der Satz von CAUCHY
3.1. Das Netz eines Vielflachs. Die Existenz eines Vielflachs mit gegebenem Netz 420
3.2. Der Satz von CAUCHY. Grundlegende Hilfssätze ... 422
3.3. Der Beweis des CAUCHYschen Satzes ... 426
3.4. Einige Verallgemeinerungen für gekrümmte Flächen ... 428

§ 4. Regelmäßige Vielecke und Vielflache und ihre Verallgemeinerungen
4.1. Topologisch regelmäßige Vielflache ... 430
4.2. Regelmäßige Vielecke und Vielflache ... 433
4.3. Eckengleiche halbregelmäßige Vielflache ... 438
4.4. Flächengleiche halbregelmäßige Vielflache ... 447
4.5. Regelmäßige Vielecke und Vielflache mit Selbstüberschneidungen ... 450

Literatur ... 456

I. M. Jaglom

Geometrie der Kreise

Einleitung ... 459

A. Der Kreis als Punktmenge

§ 1. Verallgemeinerung des Kreisbegriffs
1.1. Die orientierte Strecken- und Winkelmessung ... 459
1.2. Verschiedene Definitionen des Kreises. Das Berühren von Kreisen ... 461

§ 2. Potenzlinie und Potenzpunkt
2.1. Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis ... 464

2.2. Die Potenzlinie zweier Kreise 465
2.3. Der Potenzpunkt dreier Kreise 468

§ 3. Kreisbüschel und Kreisbündel
3.1. Kreisbüschel 471
3.2. Kreisbündel 476

§ 4. Die Inversion
4.1. Definition der Inversion 477
4.2. Eigenschaften der Inversion 480
4.3. Der Satz von PASCAL 484

§ 5. Punktgeometrie der Kreise
5.1. Die Kreisebene 485
5.2. Die Kreistransformationen 487
5.3. Der Begriff der Kreisgeometrie 487

B. Der Kreis als Menge von Geraden

§ 6. Gerichtete Kreise
6.1. Die Analogie zwischen den Eigenschaften der Punkte und der Geraden 488
6.2. Eine neue Ausweitung des Kreisbegriffs 489
6.3. Die Tangentenentfernung zweier Kreise 493

§ 7. Ähnlichkeitspunkt und Ähnlichkeitsachse
7.1. Die Potenz einer Geraden in bezug auf einen Kreis 494
7.2. Der Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise 497
7.3. Die Ähnlichkeitsachse dreier Kreise 499

§ 8. Kreisreihen und Kreisnetze
8.1. Kreisreihen 500
8.2. Kreisnetze 502

§ 9. Die Speerinversion
9.1. Definition der Speerinversion 504
9.2. Die entartete Inversion und die spezielle Inversion 505
9.3. Eigenschaften der Speerinversion 508
9.4. Der Satz von BRIANCHON 512

§ 10. Speergeometrie der Kreise
10.1. Speer-Kreistransformationen 513
10.2. Der Begriff der Speer-Kreisgeometrie 517

C. Der Kreis als Menge von Linienelementen

§ 11. Der Kreis unter einem neuen Gesichtspunkt
11.1. Die Ebene als Menge von Linienelementen 517
11.2. Eine neue Definition des Kreises 519

§ 12. Berührungsgeometrie der Kreise
12.1. Berührungs-Kreistransformationen 520

12.2. Die Berührungsaufgabe von Apollonios 522
12.3. Der Begriff der Berührungsgeometrie der Kreise 524

Literatur 526

B. A. Rosenfeld

Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie und Trigonometrie

§ 1. Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie
1.1. Die Entstehung der sphärischen Geometrie 529
1.2. Punkte, Großkreise und Kleinkreise 530
1.3. Die Bewegungen einer Sphäre 532
1.4. Der Gegenstand der sphärischen Geometrie 534
1.5. Das Dualitätsprinzip 536
1.6. Winkel auf der Sphäre 537

§ 2. Sphärische Dreiecke
2.1. Dreiecke und Zweiecke auf der Sphäre 539
2.2. Polardreiecke 540
2.3. Die Kongruenz sphärischer Dreiecke 542
2.4. Der Großkreis als Kürzeste 544
2.5. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks 546

§ 3. Kleinkreise
3.1. Kreise und Winkel auf der Sphäre 549
3.2. Die geodätische Krümmung eines Kleinkreises 551
3.3. Die Gauss-Bonnetsche Formel 553

§ 4. Trigonometrische Beziehungen im sphärischen Dreieck
4.1. Der Seitenkosinussatz 555
4.2. Der Sinussatz 558
4.3. Die Fünf-Elemente-Formeln 559
4.4. Der Winkelkosinussatz 561
4.5. Die Kotangensformeln 562
4.6. Das rechtwinklige sphärische Dreieck 563
4.7. Die Berechnung sphärischer Dreiecke 565

Literatur 569

S. A. Skopez

Kegelschnitte

§ 1. Verschiedene Definitionen der Kegelschnitte
1.1. Kegelschnitte als Schnitte eines geraden Kreiskegels 573
1.2. Die Leitlinieneigenschaft der Kegelschnitte 575
1.3. Die Brennpunkteigenschaften der Ellipsen und Hyperbeln 578

1.4. Kegelschnitte und das Problem des Apollonios 580
1.5. Die analytische Definition der Kegelschnitte 583

§ 2. Die Ellipse
2.1. Die Form der Ellipse 584
2.2. Lagebeziehungen von Ellipse und Gerade. Tangenten an die Ellipse 588
2.3. Eigenschaften der Brennpunkte der Ellipse 590
2.4. Mit der Ellipse verbundene Kreise. Zwei Sätze von Poncelet 592
2.5. Die Ellipse als Bild des Kreises bei einer Stauchung 595

§ 3. Die Hyperbel
3.1. Die Form der Hyperbel 603
3.2. Eigenschaften der Brennpunkte der Hyperbel 606
3.3. Die Gleichung der Hyperbel 607
3.4. Lagebeziehungen von Hyperbel und Gerade. Tangenten an die Hyperbel ... 609
3.5. Eigenschaften der Asymptoten 612

§ 4. Die Parabel
4.1. Die Form der Parabel. Die Gleichung der Parabel 614
4.2. Lagebeziehungen von Parabel und Gerade. Tangenten an die Parabel 616

§ 5. Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte
5.1. Polargleichung der Kegelschnitte 620
5.2. Konfokale Kegelschnitte 622

Literatur 625

Namenverzeichnis 626

Sachverzeichnis 627

B. A. ROSENFELD

AXIOME UND GRUNDBEGRIFFE DER GEOMETRIE

§ 1. Das Entstehen grundlegender Begriffe der Geometrie

1.1. Die Begriffe der Geometrie als Resultate von Abstraktionen. Die Geometrie ist die allgemeine Wissenschaft von den räumlichen Formen. Mit komplizierteren räumlichen Formen kam in der Vorzeit der Mensch vor allem bei der Vermessung von Ländereien in Beziehung, und so kommt es, daß die Bezeichnung *Geometrie* von dem griechischen Wort γεωμετρία herrührt, das „Erdmessung" bedeutet. Mit weiteren räumlichen Formen wurde der Mensch bei der Errichtung von Gebäuden, der Herstellung von Gefäßen usw. bekannt.

Die Geometrie, wie auch die gesamte Mathematik, untersucht bestimmte Gesetzmäßigkeiten der realen Welt. Dabei unterscheiden sich jedoch die mathematischen Wissenschaften in einem charakteristischen Punkte von anderen Wissenschaften, die spezielle physikalische, chemische, biologische, ökonomische oder andere Gesetzmäßigkeiten studieren. Im Gegensatz zu anderen Wissenschaften untersucht nämlich die Mathematik die Objekte der realen Welt auf eine sehr abstrakte Weise, wobei sie grundsätzlich von deren konkreter Natur absieht. Insbesondere beschäftigt sich die Geometrie z. B. mit der äußeren Form der Gegenstände und abstrahiert dabei von ihrer stofflichen Beschaffenheit und ihren physikalischen Eigenschaften gerade so, wie sich beispielsweise die Arithmetik nur mit Anzahlen von Gegenständen und zwischen Anzahlen bestehenden Beziehungen befaßt. Dieser abstrakte Charakter der Mathematik ermöglicht es andererseits, ja macht es in einem gewissen Sinne sogar erforderlich, in hohem Maße die deduktive Methode anzuwenden, d. h. die mathematischen Gesetzmäßigkeiten aus einer kleinen Zahl von grundlegenden Annahmen (Definitionen, Axiomen) durch logische Schlüsse abzuleiten. Dagegen arbeiten die meisten anderen Wissenschaften überwiegend induktiv, d. h. stellen ihre allgemeinen Gesetzmäßigkeiten auf der Grundlage einzelner empirischer Beobachtungen auf.

Allerdings spielten empirische Beobachtungen und praktische Versuche bei der Entstehung der ersten mathematischen Begriffe und der Aufstellung der ersten mathematischen Sätze ebenfalls eine wichtige Rolle. Gerade weil die Menschen millionenfach auf solche arithmetischen Gesetzmäßigkeiten stießen, wie z. B. die Unabhängigkeit des Resultates eines Zusammenzählens von Steinen oder Fingern von der Reihenfolge der gezählten Objekte, oder auf solche geometrischen Gesetzmäßigkeiten, wie z. B. die Eindeutigkeit der Linie, die von einem gespannten, zwei Pflöcke verbindenden Seil gebildet wird, konnten sie die entsprechenden grundlegenden Sätze der Arithmetik und der Geometrie aufstellen (wie das Kommutativgesetz der Addition und das Axiom von der Eindeutigkeit der zwei Punkte verbindenden Geraden). Ferner zeugt die gesamte in der Geometrie verwendete Terminologie mit äußerster Anschaulichkeit davon, daß die geometrischen Begriffe durch Abstraktion von realen Gegenständen verschiedener Art entstanden sind.

So stammt z. B. das deutsche Wort „Punkt" von dem lateinischen Wort „punctum", das sich seinerseits von dem lateinischen Wort „pungere" (stechen) herleitet. Das Wort „Linie" kommt von dem lateinischen Wort „linea", welches auf das lateinische Wort „linum" (Bindfaden aus Flachs) zurückgeht, was zeigt, daß der Begriff der Linie die Abstraktion von einer dünnen Schnur ist. Häufig wird das Wort „Linie" im Sinne von „gerader Linie" gebraucht (woraus sich z. B. der Begriff „Lineal" herleitet). Der Begriff der geraden Linie ist offensichtlich die Abstraktion von einer gespannten Schnur.

Ähnlich liegen die Dinge auch bei den geometrischen Termini griechischen Ursprungs: Das Wort „Sphäre" stammt von dem griechischen „*σφαῖρα*" (Ball), „Kubus" von „*κύβος*" (Spielwürfel), „Zylinder" von „*κύλινδρος*" (kleine Walze), „Konus" von „*κῶνος*" (Fichtenzapfen), „Prisma" von „*πρίσμα*" (abgefeilter Balken), „Rhombus" von „*ῥόμβος*" (Schellentrommel), „Trapez" von „*τραπέζιον*" (Tischchen) usw. Hiernach leuchtet ein, daß die erwähnten geometrischen Begriffe Figuren bezeichnen, die Abstraktionen von den Formen der entsprechenden realen Objekte (Ball, Würfel, Walze, Fichtenzapfen, abgefeilter Balken, viereckige Schellentrommel, Tischchen mit schrägen Beinen usw.) sind. Das Wort „Pyramide" ist abgeleitet von dem griechischen Wort „*πυραμίς*" und geht zurück auf das altägyptische Wort „purama", womit die alten Ägypter ihre Pyramiden bezeichneten.

Der Faden, das Seil war nicht nur das Urbild der geometrischen Linie, sondern auch das erste geometrische Instrument: Das gespannte Seil spielte die Rolle eines Lineals. Hielt man das eine Ende des Seils fest, so beschrieb das andere Ende wie ein Zirkel einen Kreis. Teilte man ein geschlossenes Seil durch Markierungen in zwölf gleiche Teile und formte man daraus ein Dreieck, dessen Seiten aus 3, 4 und 5 Teilen bestanden, so erhielt man ein *rechtwinkliges* Dreieck, und auf diese Weise konstruierte man tatsächlich einen rechten Winkel. Die Griechen nannten die altägyptischen Geometer, bei denen sie die Geometrie studierten, „*ἀρπεδόναπται*", d. h. „Seilspanner". Die älteste geometrische Abhandlung aus Indien, die sich mit Regeln zur Konstruktion von Altären befaßt, heißt „Sulvasutra", d. h. „Regeln des Seils". Zirkel und Lineal wurden sehr früh vor allem auch in China benutzt: Hieroglyphen zur Bezeichnung von Zirkel und Lineal finden sich im chinesischen Schrifttum aus der Mitte des 2. Jahrtausends v. u. Z. Die alten Griechen schrieben die Erfindung dieser Instrumente THALES VON MILET (6. Jahrhundert v. u. Z.) zu; anscheinend benutzten die ägyptischen „Seilspanner", von denen THALES gelernt hat, diese Instrumente noch nicht. Mit dem Zirkel hängt die Prägung des Wortes „Zentrum" zusammen, das sich von dem griechischen Wort „*κέντρον*" (zugespitzter Stab zum Ochsentreiben) herleitet und durch welches später derjenige Schenkel des Zirkels bezeichnet wird, der im Mittelpunkt eines zu zeichnenden Kreises steht.

1.2. Die Entstehung der Geometrie in der alten Welt. Die Herausbildung der abstrakten geometrischen Begriffe war das Resultat eines langwierigen historischen Prozesses des Sammelns geometrischer Erfahrungen. Anfangs stellte

man geometrische Tatsachen auf experimentellem Wege fest, d. h. anhand einer großen Zahl spezieller Beispiele, wobei die in diesen Sonderfällen erhaltenen Resultate auf andere Fälle verallgemeinert wurden. Dies geht z. B. aus uns überlieferten Regeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Vierecken hervor, die von den Ägyptern und Indern verwandt wurden, aber nur in Spezialfällen eine genaue, im allgemeinen Fall dagegen bloß eine angenäherte Lösung der Aufgabe liefern: Die Ägypter definierten den Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks mit den aufeinanderfolgenden Seiten a, b, c, d durch das Produkt $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ und die Inder durch $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ mit $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Die erste Definition ist nur für Rechtecke und die zweite nur für einem Kreis einbeschriebene Vierecke richtig.

Soweit bekannt ist, war THALES der erste, der *Beweise* für einfachste geometrische Behauptungen aufstellte. Vor ihm sah man also die Notwendigkeit, geometrische Tatsachen zu „beweisen", augenscheinlich nicht ein. Die Beweise des THALES sind uns nicht bekannt, aber es dürfte feststehen, daß diese Beweise sich nicht auf andere geometrische Fakten (Axiome, früher bewiesene Sätze) gründeten, so wie das bei unseren heutigen geometrischen Beweisen der Fall ist. Aus der Art der von THALES aufgestellten Sätze läßt sich jedoch auf seine Beweisführungen schließen. Fast in allen Sätzen des THALES wird die Gleichheit irgendwelcher geometrischer Figuren behauptet: die Gleichheit der beiden Teile einer Kreisfläche, in die sie durch einen Durchmesser geteilt wird; die Gleichheit von Scheitelwinkeln; die Gleichheit der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks; die Gleichheit zweier Seiten in einem Dreieck mit zwei gleichen Winkeln; die Gleichheit zweier Dreiecke, die in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Die Beweise dieser Sätze führte THALES zweifellos so, daß er die Figuren, deren Gleichheit er beweisen wollte, durch eine passende Transformation miteinander zur Deckung brachte. Der bekannte Satz des THALES, daß jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser eines Kreises ein rechter Winkel ist, wurde von ihm höchstwahrscheinlich so bewiesen: Durch eine Drehung der Figur um 180° entsteht ein dem Kreis einbeschriebenes Viereck, von dem zu zeigen ist, daß es ein Rechteck ist, und dies wurde wahrscheinlich durch Umklappen des Vierecks um seine Mittellinien bewiesen.[1])

§ 2. Die „Elemente" des Euklid

2.1. Euklid und seine Vorgänger. Nachdem eine Reihe von geometrischen Behauptungen exakt formuliert vorlagen, ergab sich die Möglichkeit, mit ihrer Hilfe weitere Behauptungen (als Theoreme) zu beweisen. Die ersten derartigen

[1]) Eine Variante eines solchen Beweises findet sich in dem Artikel „Geometrische Transformationen"; vgl. S. 62.

Beweise vieler geometrischer Sätze schreibt man PYTHAGORAS und DEMOKRIT (V. Jahrhundert v. u. Z.) zu.

Man hält HIPPOKRATES VON CHIOS (um 440 v. u. Z.) für den ersten Verfasser eines systematischen, auf Definitionen und Axiomen aufgebauten Geometriekurses. Dieser Kursus und seine späteren Bearbeitungen wurden als „Στοιχεῖα" (Elemente, d. h. Urstoffe) bezeichnet, weil in diesen Kursen die Geometrie mit Hilfe von Definitionen und Axiomen so aufgebaut wurde, wie man sich einen physikalischen Körper aus den „Elementen" (Urstoffen, d. h. aus Feuer, Luft, Wasser und Erde) zusammengesetzt vorstellte. Die weitere Vervollkommnung dieser Kurse führte schließlich zum Erscheinen der berühmten Bücher EUKLIDS im III. Jahrhundert v. u. Z. in Alexandria. Diese Bücher wurden ebenso bezeichnet wie das (überholte) Buch des HIPPOKRATES und dessen spätere Bearbeitungen. Eine wesentliche Rolle für die Ausarbeitung der „Elemente" EUKLIDS spielten die im IV. Jahrhundert v. u. Z. durch PLATON und insbesondere durch ARISTOTELES geschaffene Beweistheorie und die von beiden ausgearbeiteten allgemeinen Prinzipien über den deduktiven Aufbau einer Wissenschaft (d. h. den Aufbau einer Wissenschaft mit Hilfe von Ableitungen, Beweisen). Von der lateinischen Bezeichnung der „Elemente" EUKLIDS („elementa") rührt die Bezeichnung *Elementargeometrie* her. Die Elementargeometrie beinhaltet demgemäß die Gesamtheit der geometrischen Resultate, die bei EUKLID dargelegt sind oder die man durch analoge Methoden erhalten kann.

Die „Elemente" EUKLIDS bestehen aus 13 „Büchern". Das 1. bis 6. Buch enthalten die Planimetrie, das 7. bis 10. Buch die Arithmetik und die nichtkommensurablen Größen, die man mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren kann, und das 11. bis 13. Buch die Stereometrie. Das 1. Buch beginnt mit einer Darlegung von 23 Definitionen (ὅροι) und 10 Axiomen, wobei die ersten 5 dieser Axiome als „Postulate" (αἰτήματα) und die übrigen als „allgemeine Abfassungen" (κοιναὶ ἔννοιαι) bezeichnet werden. Weitere Definitionen sind in den Einführungen zu den anderen Büchern enthalten.

Ungeachtet dessen, daß die Werke der Vorgänger EUKLIDS uns nicht überliefert sind, können wir doch eine gewisse Vorstellung von diesen Werken über die „Elemente" EUKLIDS gewinnen. In den „Elementen" EUKLIDS gibt es nämlich Teile, die logisch nur in sehr geringem Maße mit den anderen Teilen zusammenhängen, und ihr Vorhandensein läßt sich nur so erklären, daß sie aus Tradition hineingebracht und von den „Elementen" der Vorgänger EUKLIDS kopiert worden sind. Hierzu gehört vor allem die Einleitung zum 1. Buch.

Die Einleitung zum 1. Buch der „Elemente" beginnt mit der Definition des Punktes: „Ein Punkt ist, was keinen Teil hat". Eine solche Definition, die im gesamten Text der „Elemente" nirgends verwendet wird, trat zweifellos in allen vorhergehenden Varianten der „Elemente" auf. Der Inhalt dieser Definition besteht darin, daß ein Punkt ein unteilbarer Bestandteil (ein Atom) des Raumes ist. Eine solche Vorstellung war bei THALES noch nicht vorhanden, sie erschien zuerst bei PYTHAGORAS und DEMOKRIT. Der Begriff des Punktes hat bei diesen beiden Denkern jedoch einen ganz unterschiedlichen Charakter: Bei PYTHAGORAS, einem Idealisten und Mystiker, der alle Gesetzmäßigkeiten

der Welt mit Hilfe von Beziehungen zwischen Zahlen zu erklären versuchte, haben die Punkte keine Ausdehnung, sondern nur eine Lage im Raum; PYTHAGORAS identifizierte die Punkte mit Zahleneinheiten sowie entsprechend seinem philosophischen System mit den Seelen ungeborener oder gestorbener Menschen. Im Gegensatz dazu besitzen bei DEMOKRIT, dem Schöpfer einer atomistischen Theorie in der Physik, die Punkte – analog den Atomen der Materie – eine endliche, wenn auch „übersinnlich kleine" Ausdehnung. Beide Denker nahmen aber an, daß in einem endlichen Körper stets eine endliche, wenn auch sehr große Anzahl von Punkten vorhanden ist. Die Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten führten PYTHAGORAS und DEMOKRIT auf das Zählen der Punkte in den Figuren zurück. Dieser Gesichtspunkt veranlaßte die Pythagoräer zum Studium sogenannter „figurierter Zahlen": „Rechteckszahlen", „Quadratzahlen", „Dreieckszahlen", „Polygonalzahlen", „Quaderzahlen", „Kubikzahlen", „Pyramidalzahlen" usw.; das sind die Elementanzahlen endlicher Mengen von Punkten, die in Form von Dreiecken, Quadraten und anderen Figuren angeordnet sind (Abb. 1). „Rechteckszahlen" sind also Zahlen, die sich als Produkt zweier ganzzahliger Faktoren größer als 1 darstellen lassen; „Quaderzahlen" sind Produkte aus drei Faktoren. Die Bezeichnungen „Quadrat-" und „Kubikzahlen" verwenden wir auch heute noch. Durch Aufsummation der endlich vielen Atome in verschiedenen ebenen Figuren und in Körpern fand DEMOKRIT mit Hilfe einer originellen näherungsweisen Integration Formeln für den Flächeninhalt des Kreises sowie für den Rauminhalt der Pyramide, des Kegels und der Kugel.

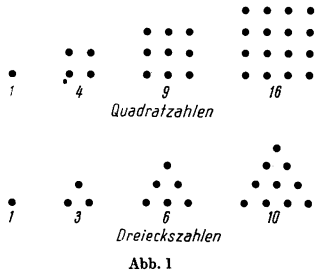


Abb. 1

Die folgenden Definitionen EUKLIDS: „Eine Linie ist eine Länge ohne Breite", „eine Fläche ist, was Länge, Breite, aber keine Tiefe hat" haben ebenfalls in atomistischen Vorstellungen ihren Ursprung. Eine Linie, die sich PYTHAGORAS und DEMOKRIT als eine Kette von Punkten vorstellten, galt als teilbar in ihrer Richtung, aber als nicht teilbar „in der Breite"; entsprechend wurde eine Fläche in zwei Richtungen (nämlich in „Länge" und „Breite") als teilbar angesehen, nicht aber als teilbar „in der Tiefe".

Sehr alt sind offensichtlich auch die bei EUKLID angegebenen Definitionen der Geraden und der Ebene. „Eine Gerade ist eine Linie, die gleichförmig zu den in ihr enthaltenen Punkten liegt" und „eine Ebene ist eine Fläche, die gleichförmig zu den in ihr enthaltenen Geraden liegt." Weiterhin werden Definitionen des Winkels, des Polygons, des Dreiecks und Vierecks und ihrer speziellen Formen, des Kreises und seiner Teile sowie der parallelen Linien angeführt. Parallelen werden dabei folgendermaßen definiert: „Parallelen

sind gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert auf keiner Seite miteinander zusammentreffen".

2.2. Die „Postulate" Euklids. Die Postulate EUKLIDS sind im wesentlichen Regeln für Konstruktionen mit Hilfe eines idealen Lineals und eines idealen Zirkels. Die ersten beiden Postulate: „Es soll gefordert werden, daß man von jedem Punkte zu jedem Punkt eine Gerade ziehen kann" und „daß man jede begrenzte Gerade ununterbrochen verlängern kann" beschreiben Konstruktionen mit Hilfe eines idealen Lineals. Das dritte Postulat, „daß man um jeden Mittelpunkt mit jedem Halbmesser einen Kreis beschreiben kann" legt die Konstruktion mit einem idealen Zirkel fest.[1]) Das vierte Postulat, „daß alle rechten Winkel einander gleich sind", ist überflüssig; wie später bemerkt wurde, läßt es sich unschwer aus den übrigen Axiomen ableiten. Das letzte Postulat EUKLIDS, sein berühmtes V. Postulat, lautet: „Wenn eine Gerade zwei andere Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sollen jene beiden Geraden, unbegrenzt verlängert, auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die kleiner als zwei Rechte sind".

In den Formulierungen der Postulate begegnen wir der „Gleichheit" von Winkeln und der Beziehung, daß die Summe zweier Winkel „kleiner" als ein dritter ist. Diese Begriffe werden durch die „Axiome"[2]) EUKLIDS näher festgelegt, die im wesentlichen Prinzipien des Längen-, Winkel-, Flächeninhalts- und Volumenvergleichs sind. Es sind ebenfalls fünf Prinzipien: „Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind auch einander gleich", „Wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, dann sind auch die Summen gleich", „Wenn von Gleichem Gleiches abgezogen wird, dann sind auch die Reste gleich", „Dinge, die einander decken, sind einander gleich", „Das Ganze ist größer als sein Teil". Das vierte Axiom ist ein Kriterium für die Gleichheit von Strecken und Winkeln, das — wie wir oben erwähnten — bereits von THALES verwendet wurde. Ferner liefert es eine hinreichende (jedoch keine notwendige) Bedingung für die Gleichheit des Flächeninhalts von komplizierteren Figuren, d. h., bei der Anwendung auf den Flächeninhalt muß man dieses vierte Axiom folgendermaßen auffassen: „Figuren, die sich miteinander zur Deckung bringen lassen, haben den gleichen Flächeninhalt (sind einander in bezug auf den Flächeninhalt gleich)". Die Gleichheit des Flächeninhalts von Polygonen verschiedener Form wird bei EUKLID dadurch bewiesen, daß man neben dem vierten Axiom auch die ersten drei Axiome verwendete.[3]) Das fünfte Axiom ergibt zusammen

[1]) Ein vollständiges System von „Postulaten" für die Lösung von Konstruktionsaufgaben mit Hilfe von Zirkel und Lineal findet der Leser in dem Artikel „Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal" auf S. 208.

[2]) Im Original steht „allgemeine Begriffe"; wir folgen hier C. THAER: „Die Elemente von Euklid", Leipzig 1933. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[3]) Ein vollständiges System von „Postulaten" für die Flächeninhaltsberechnungen und eine Darlegung der modernen Untersuchungen über den Flächeninhalt findet der Leser am Anfang des Artikels über Flächen- und Rauminhalt in Band V der EdEM.

mit den anderen ein Kriterium dafür, daß eine Figur (in irgendeinem Sinne) größer als eine andere ist. Um beispielsweise nachzuweisen, daß die Summe zweier Winkel größer als ein dritter Winkel ist, mußte man sich davon überzeugen, daß sich der dritte Winkel in den von den ersten beiden Winkeln gebildeten Winkelraum hineinlegen läßt.

Unter der Lösung einer Aufgabe verstand EUKLID stets eine Konstruktion mit Hilfe eines idealen Zirkels und eines idealen Lineals. Insbesondere bestand die Bestimmung eines Flächeninhalts oder eines Volumens für EUKLID in der Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein Quadrat bzw. einen Würfel zu konstruieren, dessen Flächeninhalt bzw. Volumen gleich dem der gegebenen Figur ist, d. h. wie man sagt, in einer Quadratur oder einer Kubatur der betreffenden Figur. Da die Quadratur des Kreises und die Kubatur der Kugel mit Hilfe von Zirkel und Lineal nicht gelang (und, wie später von LINDEMANN bewiesen wurde, unmöglich ist), betrachtete EUKLID weder den Flächeninhalt eines Kreises noch das Volumen einer Kugel. Mit der Lösung solcher Aufgaben beschäftigte sich (bald nach EUKLID) vor allem ARCHIMEDES, der für zahlreiche ebene Figuren den Flächeninhalt und für viele Körper das Volumen mit Hilfe von Methoden, die auf DEMOKRIT zurückgehen, bestimmte.

Einen wesentlichen Bestandteil der „Elemente" EUKLIDS bilden Konstruktionen mit Hilfe von Zirkel und Lineal für die Netze der fünf regelmäßigen Polyeder, die einer Kugel von gegebenem Radius einbeschrieben sind, und Untersuchungen über die dabei erhaltenen inkommensurablen Größen.

2.3. Der Begriff der Stetigkeit bei Euklid und seinen Vorgängern. Zwar weisen die ersten Definitionen EUKLIDS noch Spuren der atomistischen Vorstellungen des PYTHAGORAS und des DEMOKRIT auf, jedoch wurde diese Vorstellung von EUKLID selbst nicht geteilt. Zum Beispiel nahm EUKLID an, daß sich eine gegebene Strecke mit Hilfe seiner idealen Instrumente unbeschränkt oft unterteilen läßt. Kurven, Flächen und Körper stellt sich EUKLID stetig vor, und er benutzte z. B. häufig die Tatsache, daß zwei Geraden oder Kreise sich schneiden, wenn zwei Punkte einer dieser Geraden bzw. eines dieser Kreise auf verschiedenen Seiten der anderen Geraden bzw. des anderen Kreises liegen. PYTHAGORAS und DEMOKRIT kannten den Begriff der stetigen Größe nicht; für sie waren Kurven, Flächen und Körper Mengen von einzelnen, diskreten Punkten. Schon ARISTOTELES definierte eine stetige Größe als eine Größe mit der Eigenschaft, daß bei jeder Zerlegung in zwei Teile diese Teile stets eine gemeinsame Begrenzung haben (man vergleiche hierzu die Ausführungen auf S. 31). Bei EUKLID findet man diese bemerkenswerte Definition nicht aufgeführt, weil seine Definitionen – wie wir oben erwähnt haben – aus älteren voraristotelistischen Darstellungen übernommen sind. Trotzdem faßte EUKLID Kurven, Flächen und Körper als stetig im Sinne von ARISTOTELES auf.

Im Anschluß an seine Definition der stetigen Größe argumentiert allerdings ARISTOTELES folgendermaßen: Während man eine diskrete Größe als Menge von Punkten auffassen kann, darf man eine stetige Größe in keinem Fall als eine Menge von unteilbaren Elementen ansehen. Er ging dabei offensichtlich

davon aus, daß zwei Punkte, die stetig aneinanderstoßen, zu einem einzigen Punkt verschmelzen und somit keine Ausdehnung besitzen, da ja ein einzelner Punkt, wie er annahm, keine Ausdehnung hat. Das gleiche müsse dann auch mit einer beliebigen Gesamtheit von Punkten geschehen, wobei ARISTOTELES diese für eine endliche Anzahl von Punkten sicher richtige Behauptung auch auf unendliche Punktmengen übertrug. Deshalb stellte sich ARISTOTELES eine Kurve nicht wie PYTHAGORAS und DEMOKRIT als eine Menge von Punkten vor, sondern als einen „Ort", an dem sich Punkte „befinden können". Hiervon rührt der heute noch verwendete Terminus „geometrischer Ort von Punkten" her, den man bei Kurven oder Flächen anwendet, deren Punkte durch konkrete Bedingungen festgelegt sind: ARISTOTELES und die nachfolgenden Mathematiker konnten sich indes diese Kurven oder Flächen nicht als *Mengen* von Punkten vorstellen.[1]) Auch EUKLID vertrat den Standpunkt des ARISTOTELES, daß eine stetige Größe nicht aus unteilbaren Größen bestehen kann.

Wir bemerken zum Abschluß folgendes: Während bei PYTHAGORAS und DEMOKRIT noch die Arithmetik mit der Geometrie vereint war, betont EUKLID ständig, daß es sich hierbei um prinzipiell verschiedene Wissenschaften handle. Beispielsweise behandelt er in den „Elementen" die Theorie der Proportionen stetiger Größen im 5. Buch und beweist dann die gleichen Sätze für ganzzahlige Proportionen nochmals im 7. Buch.

2.4. Bewegungen. Die Bewegungen (als starre Verschiebungen von Figuren) und insbesondere das Zur-Deckung-Bringen, die grundlegende Beweismethode des THALES, spielen auch bei EUKLID eine wesentliche Rolle. Wir erwähnten bereits, daß EUKLID Figuren genau dann als gleich ansieht, wenn man sie durch eine Bewegung zur Deckung bringen kann. Zur Übertragung einer Strecke verwendet EUKLID ständig den Zirkel, und selbst die Erzeugung einer Geraden und eines Kreises mittels Lineal und Zirkel geschieht durch eine Bewegung. Im 11. Buch der „Elemente" definiert EUKLID die Sphäre direkt als das Resultat der Drehung eines Halbkreises um einen Durchmesser. In allen Fällen jedoch, in denen EUKLID ohne Verwendung von Bewegungen auskommen kann, verfährt er auch so. Wir finden bei ihm weder eine Definition der allgemeinen Bewegung noch eine solche der Drehung um einen Punkt oder um eine Achse.

Wir sehen also, daß EUKLID für einige grundlegende Begriffe der Geometrie (z. B. Punkt, Linie, Fläche) im wesentlichen traditionelle Definitionen wieder-

[1]) Diese falschen Vorstellungen des ARISTOTELES und der in diesem Zusammenhang entstandene inhaltsleere Terminus „geometrischer Ort von Punkten" lastet bis heute als schwere Bürde auf der Methodik der Schulmathematik. In Wirklichkeit stimmt der Begriff „geometrischer Ort von Punkten" vollständig mit dem Begriff „Menge von Punkten" (die eine gegebene Eigenschaft besitzen) überein: Eine beliebige Punktmenge ist zugleich auch ein „geometrischer Ort von Punkten" (und zwar insbesondere der geometrische Ort aller Punkte, die die Eigenschaft haben, zu dieser Menge zu gehören). Vgl. im Zusammenhang hiermit den § 4 des Artikels „Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen" auf S. 178f.

gibt, sie aber gar nicht anwendet, da er die Vorstellungen, in deren Zusammenhang diese Definitionen entstanden sind, nicht mehr teilt. Für andere grundlegende Begriffe der Geometrie, wie Stetigkeit und Bewegung, die er ständig verwendete, gibt er keine Definitionen. Trotzdem findet man in der Geometrie EUKLIDS bereits die genaue Vorstellung vom Punkt, der keine Ausdehnung, aber eine bestimmte Lage hat, von der Linie als dem Ergebnis der Bewegung eines Punktes und insbesondere von der Geraden und dem Kreis als Linien, die durch eine mittels des idealen Lineals und des idealen Zirkels erzeugten Bewegung entstehen. Schließlich findet man die Betrachtung von Flächen, die man als Ergebnis der Bewegung von Linien erhält, insbesondere der Rotationsflächen, die sich als Resultat der Drehung einer Linie um eine Achse ergeben.

§ 3. Die Herausbildung der axiomatischen Methode

3.1. Die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie. Die stärksten Impulse für die weitere Entwicklung der Geometrie waren die verschiedenen Kritiken am Werk des EUKLID. Eine Reihe von Mathematikern kritisierten bei EUKLID, daß er sich auf die Betrachtung nur solcher geometrischer Größen beschränkte, die man mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren kann, und daß er daher viele praktisch wichtige Aufgaben, wie z. B. die Ermittlung des Flächeninhalts des Kreises und des Volumens der Kugel, nicht behandelte. Diese Lücken bei EUKLID wurden, wie wir bereits erwähnten, in gewissem Umfang durch ARCHIMEDES geschlossen. Andere Mathematiker kritisierten an EUKLID, daß er die Geometrie und die Arithmetik trennte und überflüssigerweise für ganze Zahlen aufs neue das bewies, was er früher schon für geometrische Größen gezeigt hatte. Dritte übten Kritik an den Axiomen des EUKLID, d. h. an seinen „Postulaten" und „allgemeinen Abfassungen", und schlugen vor, einige Axiome wegzulassen oder, im Gegenteil, neue hinzuzufügen. Besonders große Meinungsverschiedenheiten rief das verwickeltste und am wenigsten anschauliche Postulat EUKLIDS – sein V. Postulat – hervor. Viele Mathematiker glaubten, daß dieses Postulat überflüssig sei und daß man es als Theorem aus den übrigen Axiomen beweisen könne. Andere vermuteten, daß man das Postulat EUKLIDS durch ein einfacheres und anschaulicheres Postulat ersetzen könne. Ein einfacheres Postulat, das dem V. Postulat äquivalent ist, ist z. B. das folgende: „Durch jeden nicht auf einer gegebenen Geraden liegenden Punkt kann man in der durch die Gerade und den Punkt bestimmten Ebene nicht mehr als eine Gerade legen, die die gegebene Gerade nicht schneidet".

Diese Kritik an EUKLID, die sich über 2000 Jahre hinzog, führte zu zwei besonders wichtigen Entdeckungen. Die Kritik an der Trennung zwischen Geometrie und Arithmetik, wie man sie bei EUKLID findet, führte zur Schaffung des umfassenden Begriffs der reellen Zahl, mit dessen Hilfe man jetzt nicht nur die Verhältnisse kommensurabler geometrischer Größen, sondern auch die Verhältnisse inkommensurabler Größen charakterisieren kann; einen reellen Wert kann man außerdem stetig ändern. Damit war die Einführung der reellen

Zahlen in die Mathematik gleichbedeutend der Einführung stetig veränderlicher Größen in die Mathematik. Diese Umwälzung in der Mathematik, die in erster Linie mit dem Namen RENÉ DESCARTES (XVII. Jahrhundert) verbunden ist, führte kurz darauf zum systematischen Ausbau der Differential- und Integralrechnung, dem mathematischen Apparat der Mechanik und der klassischen Physik.[1])

Der Meinungsstreit über die Gültigkeit des V. Postulats führte schließlich dazu, daß zu Beginn des XIX. Jahrhunderts N. I. LOBATSCHEWSKI, J. BOLYAI und C. F. GAUSS eine neue Geometrie schufen[2]), in der alle Axiome der Euklidischen Geometrie erfüllt sind, mit Ausnahme des V. Postulats, dessen Gegenteil richtig ist: „In einer Ebene kann man durch jeden Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden mehr als eine Gerade legen, die die gegebene Gerade nicht schneidet." Diese Geometrie erwies sich als ebenso widerspruchsfrei wie die Geometrie EUKLIDS. Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie widerlegte die Meinung vieler Gelehrter, die fest davon überzeugt waren, daß die Geometrie EUKLIDS die einzig dankbare Geometrie sei, die bereits vor jeder Erkenntnis der realen Welt in unserem Bewußtsein vorhanden ist. Nach Herausbildung der neuen Geometrie ergab sich die Frage, welche Geometrie in der Wirklichkeit gültig ist: die Geometrie EUKLIDS oder die Geometrie LOBATSCHEWSKIS. Eine unwiderrufliche Feststellung, daß die euklidische Geometrie die richtige Widerspiegelung der Wirklichkeit sei, beantwortet diese Frage nicht, weil die Widerspiegelung immer nur näherungsweise erfolgt: So sind beispielsweise Experimente in kleinen Bereichen der Erdoberfläche mit der Voraussetzung verträglich, daß die Oberfläche der Erde eine Ebene ist, und es sind Experimente in großen Bereichen nötig, um zu beweisen, daß man sich diese Fläche richtiger als Kugel vorstellen muß. Analog hierzu unterscheidet sich die Geometrie LOBATSCHEWSKIS in kleinen Bereichen fast nicht von der Geometrie EUKLIDS, und der Unterschied zwischen ihnen zeigt sich erst in großen Raumbereichen. Damit ergab sich sofort nach der Begründung der LOBATSCHEWSKIschen Geometrie die Frage nach naturwissenschaftlichen Experimenten in großen Bereichen des realen Raumes, die die geometrische Struktur der Welt, in der wir leben, klären sollten.[3])

3.2. Die axiomatische Methode in der Mathematik. Wie die Konzeption des DESCARTES von einer Mathematik mit festen Größen zu einer Mathematik mit veränderlichen Größen führte, so führte die Entdeckung LOBATSCHEWSKIS von einer Mathematik mit konstanten Beziehungen (z. B. zwischen Punkten, Geraden und Ebenen in der Geometrie EUKLIDS) zu einer Mathematik mit ver-

[1]) Die Integralrechnung ermöglicht es insbesondere auch, die Methoden des DEMOKRIT und des ARCHIMEDES zur Bestimmung des Flächeninhalts von krummlinig begrenzten Figuren zu einer allgemeinen Theorie auszubauen (vgl. den Artikel „Ableitungen, Integrale, Reihen" in Band III der EdEM). — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Vgl. den Artikel über Nichteuklidische Geometrien in Band V der EdEM.

[3]) In der Folge führte die Frage nach den geometrischen Eigenschaften der realen Welt zu Beginn des XX. Jahrhunderts zur Entdeckung der Relativitätstheorie EINSTEINS, die radikal mit gewohnten geometrischen Vorstellungen brach.

änderlichen Beziehungen, indem nämlich die Beziehungen der euklidischen Geometrie durch Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen einer anderen Geometrie, zunächst der Geometrie LOBATSCHEWSKIS ersetzt wurden. Im Anschluß an die LOBATSCHEWSKIsche Geometrie entstanden zahlreiche andere widerspruchsfreie Geometrien. Später wurden ähnliche Veränderungen an gewohnten Beziehungen auch in anderen mathematischen Disziplinen vorgenommen. So entwickelten sich neben der üblichen Algebra viele neue Zweige der Algebra. Es entstanden eine ganze Reihe völlig neuer mathematischer Systeme, die keine Analoga in der klassischen Mathematik haben, von denen ein großer Teil in verschiedenen Gebieten der modernen Physik oder anderer Wissenschaften bereits Anwendungen gefunden hat.

Zu diesen bedeutenden mathematischen Entdeckungen gelangten die Forscher durch die Ausdehnung der Kritik von LOBATSCHEWSKI, BOLYAI und GAUSS am V. Postulat des EUKLID auf das gesamte Axiomensystem der euklidischen Geometrie und später durch Übertragung der in diesem Zusammenhang entstandenen axiomatischen Methode auf andere mathematische Disziplinen. Im Endergebnis entstand jene axiomatische Methode in der Mathematik, die heute die echte Grundlage sowohl der Geometrie als auch anderer Teile der modernen Mathematik ist.

Um das Wesen dieser axiomatischen Methoden zu erkennen, betrachten wir erneut die Geometrie. Bis zur Entdeckung der LOBATSCHEWSKIschen Geometrie, durch die die Auffassung von der Alleingültigkeit der Geometrie EUKLIDS beseitigt wurde, nahm man an, daß die euklidische Geometrie den realen physikalischen Raum genau beschreibe. Dadurch war der Versuch gerechtfertigt, die grundlegenden geometrischen Begriffe durch ihre realen Urbilder zu definieren. So verfuhren EUKLID und seine Vorgänger, beginnend mit PYTHAGORAS und DEMOKRIT. Wir sahen, daß allerdings die Vorstellungen über Punkte, Linien und Flächen und ihre Beziehungen untereinander bei den einzelnen Denkern völlig unterschiedlich waren und ein und dieselbe Definition „Ein Punkt ist, was keinen Teil hat" von den verschiedenen Denkern auf ganz verschiedene Weise gedeutet wurde. Wir sahen ferner, daß das System der Definitionen und Axiome des EUKLID, das traditionelle Vorbilder wiedergab, nicht die eigenen Vorstellungen EUKLIDS widerspiegelte und die wichtigsten Begriffe, die er benutzte, nicht umfaßte.

Aber erst nach der Entdeckung der Geometrie LOBATSCHEWSKIS wurde klar, daß EUKLIDS Vorgehen, die grundlegenden Begriffe definieren zu wollen, prinzipiell unmöglich ist. Wenn viele Geometrien denkbar sind, muß jede dieser Geometrien ihre eigenen grundlegenden Begriffe haben, und es kann keine einheitliche allgemeine Definition der grundlegenden Begriffe geben. Mit anderen Worten, die Definitionen der grundlegenden Begriffe müssen von den Axiomen des betrachteten geometrischen Systems abhängen. Die Definitionen der grundlegenden Begriffe eines bestimmten geometrischen Systems dürfen sich nur auf das gegebene geometrische System beziehen, und man darf sie nicht zur Definition der Grundbegriffe des physikalischen Raumes verwenden, der nur mit verschiedener Approximationsgenauigkeit durch die verschiedenen Schemata geometrischer Räume widergespiegelt wird.

Da es nicht möglich ist, eine einheitliche Definition der Grundbegriffe für alle möglichen Geometrien anzugeben, muß man die grundlegenden Begriffe einer Geometrie als Objekte beliebiger Natur interpretieren, die die Axiome dieser Geometrie erfüllen. Nur eine solche Festlegung der Grundbegriffe einer Geometrie entspricht dem abstrakten Charakter dieser Begriffe. In diesem Fall sagt man, daß das geometrische System axiomatisch charakterisiert wird.

Man geht also beim axiomatischen Aufbau eines gewissen geometrischen Systems (oder allgemeiner beim axiomatischen Aufbau einer gewissen mathematischen Theorie) von einem *Axiomensystem* oder, wie man sagt, von einer *Axiomatik* aus. In diesen Axiomen werden die Eigenschaften der Grundbegriffe der betrachteten geometrischen Systeme beschrieben, und wir können uns die grundlegenden Begriffe als Objekte beliebiger Natur vorstellen, die die in den Axiomen angegebenen Eigenschaften besitzen. Von den Grundbegriffen (z. B. den geometrischen Begriffen „Punkt", „Gerade" usw.) selbst kann man sagen, daß sie durch die Axiome indirekt festgelegt werden. Das ist ein Beispiel einer *deskriptiven „Definition"* mathematischer Objekte, d. h. einer Festlegung der Objekte durch Beschreibung ihrer Eigenschaften. Keine andere Definition der Grundbegriffe eines geometrischen Systems ist möglich. Aus den Axiomen leitet man sodann die ersten Sätze her, und aus den Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen leitet man nach und nach weitere Sätze ab, deren Gesamtheit den Inhalt des betrachteten geometrischen Systems bilden. *Die Axiome sind also ursprüngliche Aussagen über die grundlegenden Begriffe einer Geometrie, die dem betrachteten geometrischen System ohne Beweis zugezählt werden und auf deren Basis alle weiteren Sätze des betrachteten geometrischen Systems bewiesen werden.* Die gleiche Rolle spielen die Axiome auch in anderen mathematischen Theorien.

Ähnlich verstanden auch EUKLID und seine Vorgänger die Rolle der Axiome. Da der Beweis eines beliebigen Satzes der Geometrie seine Ableitung aus gewissen anderen (in der Regel einfacheren) Aussagen bedeutet, kristallisierten sich im Ergebnis einer Jahrhunderte währenden Entwicklung der Geometrie ihre ursprünglichen Aussagen heraus, auf deren Grundlage sich die übrigen Sätze beweisen ließen. Diese ursprünglichen Aussagen („Axiome" und „Postulate" bei EUKLID) wurden gerade als Axiome gewählt. Aus dem Gesagten ist klar, daß die Axiome der Geometrie einen experimentellen Ursprung haben, d. h., daß sie gewisse einfache Eigenschaften des realen Raumes widerspiegeln. Aus dem Gesagten ergibt sich ferner, daß im Prozeß der historischen Entwicklung der Geometrie verhältnismäßig einfache, anschaulich klare Aussagen als Axiome gewählt wurden. Jedoch darf man nicht annehmen, daß ein Axiom eine einfache Wahrheit ist, die wegen ihrer Offensichtlichkeit keines Beweises bedarf. „Offensichtlichkeit" ist ein der axiomatischen Methode fremder Begriff; Einfachheit von Axiomen ist das Resultat einer historischen Entwicklung der Wissenschaft und eine Frage der Bequemlichkeit. Gewisse Sätze können sich als „einfacher" als gewisse Axiome erweisen. Beispielsweise ist das V. Postulat EUKLIDS zweifellos „schwerer" zu verstehen als gewisse andere Sätze der Geometrie.

§ 4. Modelle

4.1. Modelle der euklidischen Ebene. Wir nehmen an, daß ein gewisses geometrisches System (etwa die Geometrie EUKLIDS) mit Hilfe einer Axiomatik (d. h. durch ein Axiomensystem) gegeben ist. Die Objekte, die den Axiomen eines solchen geometrischen Systems genügen, gestatten ganz verschiedene konkrete Deutungen. Diese Deutungen heißen *Interpretationen* oder *Modelle* des betrachteten geometrischen Systems.

Wir führen einige einfache Beispiele von Interpretationen an. Dabei setzen wir voraus, daß wir bereits über eine gewisse Interpretation der Geometrie EUKLIDS verfügen (beispielsweise können wir unter der euklidischen Geometrie das verstehen, was wir uns seit der Schule unter ihr vorstellen). Mit Hilfe dieser Interpretation konstruieren wir nun eine andere Interpretation der Geometrie EUKLIDS.

Gegeben sei eine feste Strecke der Länge r. Jede Kugel vom Radius r nennen wir einen „Punkt", jeden unendlichen Kreiszylinder vom Radius r „Gerade" und jede unendliche Schicht der Dicke $2r$, d. h. jeden Teil des Raumes, der sich zwischen zwei parallelen Ebenen vom Abstand $2r$ befindet, eine „Ebene". Weiter sagen wir, daß ein „Punkt" auf einer „Geraden" liegt, wenn die entsprechende Kugel innerhalb des entsprechenden Zylinders liegt. Als Abstand zwischen zwei „Punkten" bezeichnen wir den Abstand der Mittelpunkte der entsprechenden Kugeln. In naheliegender Weise kann man ferner „Winkel", „Strecken", „Dreiecke" usw. definieren. Man sieht sofort, daß man auf diese Weise eine neue Interpretation der euklidischen Geometrie erhält: Alle Axiome (und damit auch alle Sätze) bleiben bei dieser Interpretation richtig; beispielsweise gilt auch jetzt, daß durch zwei beliebige voneinander verschiedene „Punkte" stets genau eine „Gerade" hindurchgeht (Abb. 2).

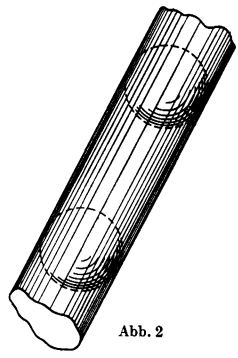


Abb. 2

Eine andere Interpretation der euklidischen Geometrie[1]) erhalten wir mittels der sogenannten *stereographischen Projektion*. Wir beschränken uns hier auf den Fall der Geometrie der Ebene. Es sei Π eine gewisse Ebene und S eine Sphäre, die sie nicht schneidet. Mit N bezeichnen wir den am weitesten von der Ebene Π entfernten Punkt der Sphäre S. Ist A ein beliebiger Punkt der Ebene Π, so sei A' der Schnittpunkt der Sphäre S mit der Strecke AN (Abb. 3). Den Übergang von den Punkten A, B, ... der Ebene Π zu den entsprechenden

[1]) Zwei weitere Modelle in Zusammenhang mit der darstellenden Geometrie findet der Leser im Artikel „Abbildungsverfahren" auf S. 231 ff.

Punkten A', B', ... der Sphäre S bezeichnet man als stereographische Projektion. Durch die stereographische Projektion wird der Ebene Π die Menge Π' zugeordnet, die man erhält, wenn man aus der Sphäre S den Punkt N entfernt („herausstieht").

Ist jetzt l eine gewisse Gerade auf der Ebene Π, so geht sie bei der stereographischen Projektion in einen durch den Punkt N gehenden Kreis l' (aus

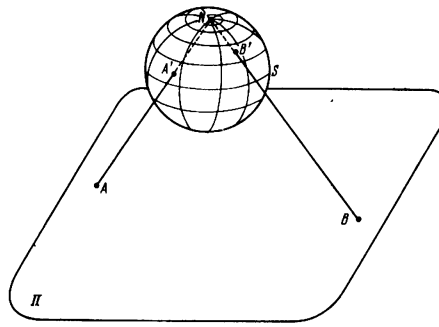


Abb. 3

dem der Punkt N entfernt worden ist) über. Durchläuft nämlich der Punkt A die Gerade l, so liegen alle Strecken AN in einer Ebene, deren Schnitt mit der Sphäre S gerade den Kreis l' liefert (Abb. 4). Die Menge Π' nennen wir jetzt

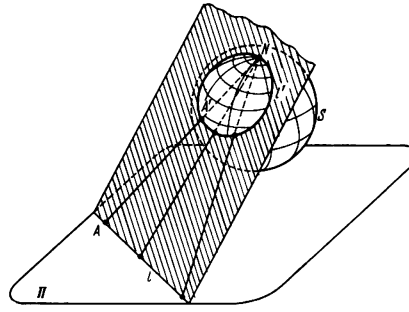


Abb. 4

„Ebene", und jeden Punkt von Π' (d. h. jeden von N verschiedenen Punkt der Sphäre S) nennen wir „Punkt"; jeden durch den Punkt N gehenden Kreis auf der Sphäre S (aus dem der Punkt N entfernt worden ist) bezeichnen wir als „Gerade". Als „Abstand" zwischen den „Punkten" A' und B' definieren wir den gewöhnlichen Abstand zwischen den ihnen entsprechenden Punkten A und B auf der Ebene Π. Mit anderen Worten, wir übertragen alle geometrischen Objekte der Ebene Π mittels der stereographischen Projektion auf die „Ebene" Π'. Es ist klar, daß hierbei alle Axiome und Sätze der euklidischen Geometrie

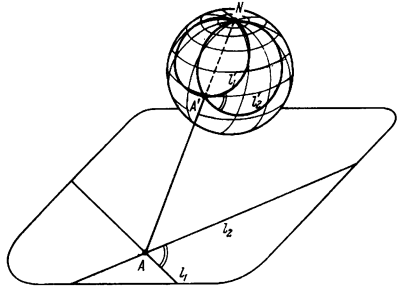


Abb. 5

erhalten bleiben, d. h., die „Ebene" Π' stellt ein Modell (oder eine Interpretation) der euklidischen Ebene dar. Man kann beweisen, daß in dieser Interpretation der „Winkel" zwischen zwei sich schneidenden „Geraden" l_1' und l_2' mit dem gewöhnlichen Winkel zwischen den Tangenten an die Kreise l_1' und l_2' in deren Schnittpunkt übereinstimmt (Abb. 5). Ferner sind zwei „Geraden" dann und nur dann parallel, wenn die sie darstellenden Kreise außer N keinen Punkt gemeinsam haben, d. h., wenn sie sich im Punkte N berühren. Hieraus ergibt sich anschaulich, daß in unserem Modell das V. Postulat Euklids erfüllt ist.

Aus dem eben konstruierten Modell kann man leicht noch ein weiteres Modell der euklidischen Ebene erhalten. Wir bezeichnen mit P den Punkt der Sphäre S, der von der Ebene Π den kürzesten Abstand hat. Ferner bezeichnen wir für einen beliebigen „Punkt" A' der „Ebene" Π' mit A'' den Schnittpunkt der Ebene Π mit der Geraden PA'. Dieser Schnittpunkt ist eindeutig definiert, falls der Punkt A' von P verschieden ist. Fällt der Punkt A' mit P zusammen, so nehmen wir an, daß der entsprechende Punkt A'' „sich im Unendlichen befindet", indem wir uns zur Ebene Π einen „unendlich fernen" Punkt hinzugefügt denken.[1])

[1]) Das hierbei erhaltene Bild (die Ebene mit einem zu ihr hinzugefügten „unendlich fernen" Punkt) heißt *erweiterte* oder *geschlossene* Ebene. Sie wird auch im Artikel „Geometrische Transformationen" (vgl. S. 51ff.) und im Artikel „Geometrie der Kreise" (vgl. S. 457–526) betrachtet.

Mit O bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden NP mit der Ebene Π. Ferner bezeichnen wir mit Π'' die Ebene Π, aus der der Punkt O entfernt worden ist, aber zu der ein „unendlich ferner" Punkt hinzugefügt wurde. Durchläuft nun der „Punkt" A' auf der „Ebene" Π' eine gewisse „Gerade" l', so beschreibt der entsprechende Punkt A'' auf

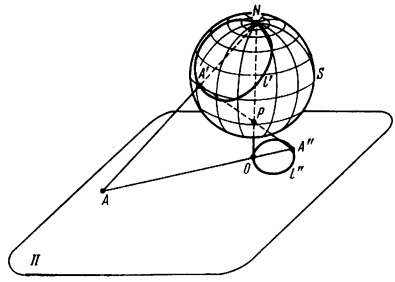


Abb. 6

der Ebene Π einen gewissen durch O hindurchgehenden Kreis, aus dem der Punkt O entfernt worden ist (Abb. 6). Geht die „Gerade" l' durch den Punkt P (Abb. 7), so artet der durch den Punkt A'' beschriebene Kreis in eine Gerade aus, die durch den Punkt O geht

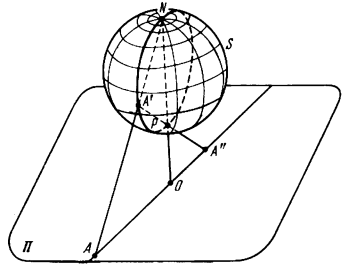


Abb. 7

(Abb. 7; aus dieser Geraden ist der Punkt O entfernt worden, aber der „unendlich ferne" Punkt gehört ihr an).

Aus dem Gesagten ist klar, daß wir folgende Interpretation der euklidischen Ebene erhalten. Wir bezeichnen die Menge Π'' als „Ebene", alle ihre Punkte (einschließlich des „unendlich fernen") als „Punkte" und definieren als „Geraden" sämtliche Kreise durch

den Punkt O (aus denen der Punkt O entfernt wurde) und sämtliche Geraden durch O (aus denen der Punkt O entfernt, zu denen aber der „unendlich ferne" Punkt hinzugefügt wurde). In Abb. 8 sind einige „Geraden" in diesem Modell angegeben. Man kann zeigen,

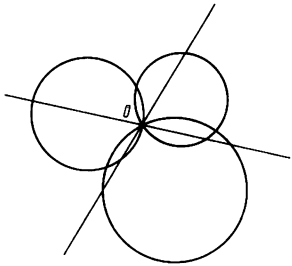


Abb. 8

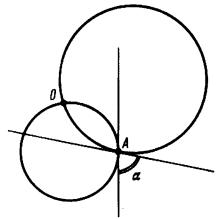


Abb. 9

daß in diesem Modell der „Winkel" zwischen zwei sich schneidenden „Geraden" mit dem gewöhnlichen Winkel zwischen den Tangenten im Schnittpunkt der Kreise übereinstimmt (Abb. 9). Ferner sind „Geraden" genau dann „parallel", wenn die sie darstellenden Kreise sich im Punkt O berühren (Abb. 10). Hieraus ergibt sich anschaulich, daß in dem betrachteten Modell das V. Postulat erfüllt ist. In diesem Modell gelten auch die übrigen Axiome

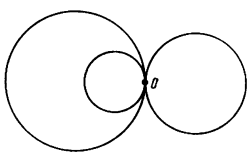


Abb. 10

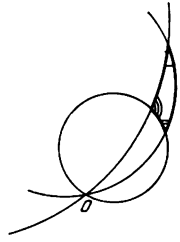


Abb. 11

und die Sätze der euklidischen Planimetrie. Beispielsweise ist die Summe der „Winkel" eines beliebigen „Dreiecks" gleich π (was man auch unmittelbar beweisen kann; vgl. Abb. 11).

Der Leser, der mit den als *Inversionen*[1]) bezeichneten Transformationen vertraut ist, kann sich leicht klarmachen, wie das Modell Π'' und die Ebene Π miteinander zusammenhängen. Die Inversion mit dem Zentrum O führt nämlich jede Gerade der Ebene Π in

[1]) Vgl. die Artikel „Geometrische Transformationen" (S. 50–54, 68–70) und „Geometrie der Kreise" (S. 477–485).

einen Kreis bzw. eine Gerade durch den Punkt O, d. h. in eine „Gerade" des Modells Π'' über. Das Modell Π'' entsteht also aus dem Modell Π durch Anwendung der Inversion mit dem Zentrum O.

Unter Verwendung der komplexen Zahlen kann man noch zwei weitere Modelle der euklidischen Ebene erhalten.

Offensichtlich sind alle Axiome und Sätze der euklidischen Geometrie in der Ebene erfüllt, wenn man unter „Punkten" komplexe Zahlen („Punkte der sogenannten GAUSSschen Zahlenebene") versteht und unter „Geraden" sämtliche Mengen von komplexen Zahlen, die durch eine Gleichung der Form $z = z_0 + lt$ beschrieben werden, wobei z_0 und $l\,(l \neq 0)$ gegebene komplexe Zahlen sind und t ein reeller Parameter ist. Als „Abstand" zwischen den „Punkten", die durch die komplexen Zahlen z und w repräsentiert werden, hat man die Zahl $|z - w|$ zu nehmen. Ferner zeigt man leicht, daß auch alle Axiome und Sätze der Planimetrie EUKLIDS gelten, wenn man in der durch eine „Zahl" ∞ erweiterten komplexen Zahlenebene unter „Punkten" alle komplexen Zahlen außer der Zahl 0 (aber einschließlich der „Zahl" ∞) und unter „Geraden" alle Kreise und Geraden der Ebene versteht, die durch den Punkt 0 gehen. Beispielsweise geht durch zwei beliebige voneinander verschiedene „Punkte" A und B eine eindeutig bestimmte „Gerade": Sind nämlich A und B gewöhnliche Punkte, so ist diese „Gerade" der Kreis bzw. die gewöhnliche Gerade durch die Punkte A, B und 0, und ist B der unendlich ferne Punkt, so ist diese „Gerade" die gewöhnliche Gerade, die die Punkte A und 0 verbindet. Der „Abstand" zwischen den „Punkten", die durch die komplexen Zahlen z und w dargestellt sind, ist hier gleich $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right|$ $\left(\text{wobei } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ gesetzt wird}\right)$. Offensichtlich erhält man dieses Modell (das im wesentlichen mit dem oben beschriebenen Modell Π'' übereinstimmt) aus der gewöhnlichen komplexen Ebene, indem man jede komplexe Zahl z durch die Zahl $\frac{1}{z}$ ersetzt $\left(\text{mit der Festsetzung } \frac{1}{0} = \infty\right)$.

4.2. Axiomatische Systeme in der Algebra. Beispielen von axiomatischen Systemen und ihren Interpretationen begegnet man nicht nur in der Geometrie, sondern auch in anderen Teilen der Mathematik. In den Gebieten der Mathematik, in denen algebraische Operationen betrachtet werden, ist einer der wichtigsten Begriffe der Begriff der „Gruppe". Unter einer Gruppe versteht man ein System von beliebigen Objekten (den „Elementen der Gruppe"), in welchem jedem geordneten Paar von Elementen a, b in eindeutiger Weise ein gewisses Element $c = ab$ als *Produkt* zugeordnet ist, wobei folgende Axiome gelten sollen:

1. Die Operation der Multiplikation genügt dem Assoziativgesetz, d. h., es gilt $a(bc) = (ab)\,c$ für beliebige Elemente a, b, c des Systems.
2. Für beliebige Elemente a, b des Systems sind die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ lösbar, d. h., es existieren stets Elemente c und d des Systems, für die $ac = b$ und $da = b$ ist (Gesetz der Invertierbarkeit).

Eine (konkrete) Gruppe ist dann nichts anderes als eine Interpretation (ein Modell) dieser Axiomatik.

Eine Gruppe heißt *kommutativ*, wenn sie zusätzlich folgendes Axiom erfüllt:

3. Die Multiplikation ist kommutativ, d. h., für beliebige Elemente a, b des Systems ist $ab = ba$.

In kommutativen Gruppen bezeichnet man die Operation meistens nicht als „Multiplikation", sondern als „Addition" (und schreibt dementsprechend statt „ab" auch „$a + b$").

Als ein Beispiel für eine kommutative Gruppe kann die Menge aller ganzen Zahlen mit der üblichen Addition dienen. Weitere Beispiele sind: die Menge aller reellen Zahlen, die Menge aller komplexen Zahlen, die Menge aller Vektoren[1]) mit der für sie in üblicher Weise erklärten Addition, aber auch die Menge aller von Null verschiedenen reellen oder komplexen Zahlen mit der üblichen Multiplikation. Alle diese Gruppen sind kommutativ. Andere Beispiele für Gruppen und die einfachsten Sätze über Gruppen (die aus den obigen Axiomen abgeleitet werden können), kann der Leser im Band I der EdEM (S. 83–90) finden.

Die rationalen, die reellen und die komplexen Zahlen liefern uns Beispiele für ein komplizierteres algebraisches System, den sogenannten *Körper*. In einem Körper werden jedem geordneten Paar zwei Elemente $c = a + b$ und $d = ab$ desselben Systems zugeordnet, wobei folgende Axiome (vgl. EdEM Band I, S. 95–101) gelten sollen:

1. Die Elemente des Systems bilden bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe.
2. Die Elemente des Systems außer der Null[2]) bilden bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe.
3. Addition und Multiplikation sind durch das *Distributivgesetz* miteinander verknüpft: $a(b + c) = ab + ac$.

Auch die Körperaxiome gestatten eine große Anzahl verschiedenartiger Interpretationen (Modelle).

In den ersten Bänden dieser Enzyklopädie kann der Leser eine Reihe weiterer Axiomensysteme finden: die Axiome für die natürlichen Zahlen (EdEM Band I, S. 112), die Axiome für einen metrischen Raum (EdEM Band III, S. 252) usw.

§ 5. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit eines Axiomensystems

5:1. Die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems. Eine sehr wichtige Frage bei der Betrachtung eines Axiomensystems ist die Untersuchung seiner *Widerspruchsfreiheit*. Wir wollen erklären, was man darunter versteht. Es sei ein gewisses Axiomensystem gegeben, z. B. das System der Gruppenaxiome. Aus diesen Axiomen können wir immer neue Sätze ableiten. Wenn man hier-

[1]) Vgl. den Artikel „Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie" in diesem Band der EdEM.

[2]) Unter der Null (bzw. dem Nullelement) einer kommutativen Gruppe versteht man das (auf Grund der Gruppenaxiome eindeutig existierende) Element 0 des Systems, für das $a + 0 = a$ bei beliebigem a gilt.

bei zwei Sätze erhält, die einander widersprechen, d. h. von denen der eine die Negation des anderen ist, so heißt das Axiomensystem *widerspruchsvoll*. Es ist selbstverständlich, daß ein Axiomensystem nur dann als Grundlage für eine inhaltsreiche mathematische Theorie dienen kann, wenn es nicht widerspruchsvoll ist. Es entsteht damit naturgemäß die Frage, auf welche Weise man sich davon überzeugen kann, ob ein vorgelegtes Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Ist z. B. das Axiomensystem für Gruppen widerspruchsfrei? Die Tatsache, daß die Gruppenaxiome vor vielen Jahrzehnten formuliert wurden und daß sich bis heute aus ihnen keine Widersprüche ergeben haben, kann uns natürlich nicht von der Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems überzeugen; denn wer kann garantieren, daß nicht solche Widersprüche in einigen Jahren entdeckt werden! Mit anderen Worten, wie weit auch eine Theorie auf der Grundlage eines bestimmten Axiomensystems entwickelt sein mag, strenggenommen können wir niemals endgültig davon überzeugt sein, daß das gewählte Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Es zeigt sich nun, daß es unmöglich ist, innerhalb einer Theorie ihre Widerspruchsfreiheit nachzuweisen (ein strenger Beweis für diese Behauptung wurde 1931 von dem bekannten Logiker KURT GÖDEL gegeben).

Trotzdem gibt es ein allgemeines Verfahren, das es bis zu einem gewissen Grade gestattet, die Widerspruchsfreiheit eines axiomatischen Systems zu zeigen. Dieses Verfahren besteht in folgendem: Wir nehmen an, daß uns eine bestimmte mathematische Theorie – wir nennen sie die „Theorie A" – zur Verfügung steht, an deren Widerspruchsfreiheit wir nicht zweifeln. Wir setzen weiter voraus, daß uns ein Axiomensystem vorgegeben ist, das als Grundlage für eine andere mathematische Theorie – die „Theorie B" – dient. Können wir nun unter Benutzung der Begriffe der „Theorie A" ein „Modell" konstruieren, in dem alle der „Theorie B" zugrunde liegenden Axiome erfüllt sind, so ist dadurch die Widerspruchsfreiheit des der „Theorie B" zugrunde liegenden Axiomensystems gesichert. *Wenn wir also vereinbaren, die „Theorie A" als „gesichert" anzusehen, und wenn wir unter Benutzung des „Materials" dieser Theorie ein Modell (eine Interpretation) für das Axiomensystem der „Theorie B" konstruieren können, dann haben wir dadurch die Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems gezeigt.*

Oben (S. 13) sprachen wir davon, daß die Geometrie LOBATSCHEWSKIS „ebenso widerspruchsfrei sei wie die Geometrie EUKLIDS". Welchen Sinn hat nun diese Behauptung? Es zeigt sich, daß man unter Benutzung des „Materials" der euklidischen Geometrie ein Modell der LOBATSCHEWSKIschen Geometrie konstruieren kann (ein erstes derartiges Modell wurde 1865 von dem italienischen Geometer E. BELTRAMI und ein anderes 1871 von dem deutschen Mathematiker F. KLEIN angegeben). Umgekehrt kann man auch mittels des „Materials" der Geometrie LOBATSCHEWSKIS ein Modell der Geometrie EUKLIDS konstruieren (ein solches Modell wurde von LOBATSCHEWSKI angegeben). Folglich ergibt sich aus der Widerspruchsfreiheit einer dieser Geometrien die Widerspruchsfreiheit der anderen.[1])

[1]) Vgl. den Artikel über Nichteuklidische Geometrien in Band V der EdEM.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Widerspruchsfreiheit nur einen relativen Charakter hat: Für den Beweis der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems müssen wir ein Modell konstruieren, aber zur Konstruktion des Modells benötigen wir irgendein „Konstruktionsmaterial", d. h., wir brauchen eine gewisse Theorie, an deren Richtigkeit wir nicht zweifeln. Die einfachste mathematische Theorie ist die *Arithmetik der rationalen*[1]) *Zahlen*. Auf die Widerspruchsfreiheit dieser Theorie werden wir uns hier vorbehaltlos berufen, und mit ihrer Hilfe werden wir Modelle anderer Theorien konstruieren. Das heißt, *wir betrachten ein Axiomensystem als widerspruchsfrei, wenn man mittels der Arithmetik der rationalen Zahlen ein Modell für dieses System konstruieren kann.*

Damit ist z. B. klar, daß die Gruppenaxiomatik widerspruchsfrei ist: Die Menge aller ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfungsoperation ist ein Modell dafür; ein anderes Modell bildet die Menge aller rationalen Zahlen mit der Addition als Verknüpfungsoperation. Widerspruchsfrei ist auch das Axiomensystem für Körper: Ein Modell bildet die Menge aller rationalen Zahlen mit den üblichen Verknüpfungen.

5.2. Die Vollständigkeit eines Axiomensystems. Eine weitere wichtige Eigenschaft eines Axiomensystems ist seine *Vollständigkeit*. Zur Definition der Vollständigkeit eines Axiomensystems benötigen wir den Begriff der *Isomorphie* von Modellen. Wir nehmen an, daß uns ein Axiomensystem vorgegeben ist, durch welches gewisse Eigenschaften und Beziehungen der in ihm auftretenden Grundbegriffe beschrieben werden. Ferner seien zwei Modelle dieses Axiomensystems gegeben. Diese Modelle heißen *isomorph*, wenn man die Elemente des einen Modells derart eineindeutig auf die Elemente des anderen Modells abbilden kann, daß die durch die Axiome beschriebenen grundlegenden Beziehungen zwischen den Elementen erhalten bleiben. Zum Beispiel bilden die Menge aller ganzen Zahlen und die Menge aller rationalen Zahlen hinsichtlich der Addition von Zahlen Modelle für die Gruppenaxiome, die zueinander nicht isomorph sind. Betrachtet man dagegen die Gruppe der ganzen Zahlen und die Gruppe aller ganzen Zahlen, die durch 10 teilbar sind (Gruppenoperation sei in beiden Fällen wieder die Addition), so erweisen sich diese Gruppen als isomorph. Ordnet man nämlich einer ganzen Zahl n die Zahlen $10n$ zu, so erhält man eine eineindeutige Abbildung dieser Modelle aufeinander, wobei die durch die Gruppenaxiome beschriebene Beziehung erhalten bleibt (d. h., die Summe der Elemente geht in die Summe über). Zueinander isomorph sind auch die im vorigen Paragraphen erwähnten Modelle der euklidischen Ebene.[2])

Ein Axiomensystem heißt *vollständig*[3]), wenn je zwei seiner Interpretationen isomorph sind. Zum Beispiel ist das Axiomensystem der Gruppen nicht voll-

[1]) Die Widerspruchsfreiheit der Axiomatik des Körpers der rationalen Zahlen kann man übrigens auf die Widerspruchsfreiheit der Axiomatik der natürlichen Zahlen zurückführen (vgl. EdEM, Band I, S. 148ff.).

[2]) Bezüglich des Isomorphiebegriffs verweisen wir auf EdEM, Band I, S. 101ff.

[3]) Diese Art von Vollständigkeit bezeichnet man meistens als *Kategorizität*. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

ständig (weil Gruppen existieren, die zueinander nicht isomorph sind), und auch das Axiomensystem für Körper ist nicht vollständig.

Als Beispiel für ein vollständiges Axiomensystem führen wir ein Axiomensystem für den Körper der reellen Zahlen an. Den Körper der reellen Zahlen kann man definieren als eine Menge von Objekten beliebiger Natur („Zahlen" genannt), die folgenden Axiomen genügen.

1. (Körperaxiome). In der Menge sind zwei Operationen („Addition" und „Multiplikation" genannt) definiert, bezüglich der die Menge einen Körper bildet.

2. (Anordnungsaxiome). In der betrachteten Menge ist eine zweistellige Relation „$>$" definiert, so daß folgendes gilt:
   a) Für je zwei voneinander verschiedene Zahlen a und b gilt genau eine der Beziehungen $a > b$ oder $b > a$ (Trichotomie der $>$-Beziehung).
   b) Wenn $a > b$ und $b > c$, so $a > c$ (Transitivität der $>$-Beziehung).
   c) Wenn $a > b$, so $a + c > b + c$ (Monotonie der Addition).
   d) Wenn $a > b$ und $c > 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$ (Monotonie der Multiplikation).

3. (Stetigkeitsaxiom). Teilt man alle Zahlen so in zwei (nichtleere) Klassen A, B, daß jede Zahl der Klasse B größer als jede Zahl der Klasse A ist, so existiert entweder eine Zahl in der Klasse A, die größer als alle übrigen Zahlen dieser Klasse ist, oder eine Zahl in der Klasse B, so daß alle übrigen Zahlen dieser Klasse größer als diese Zahl sind.

Wir bemerken, daß das von uns angegebene Stetigkeitsaxiom eine genaue mathematische Formulierung der Stetigkeitsdefinition von ARISTOTELES ist (vgl. 2.3.). Das Stetigkeitsaxiom in dieser Form stammt von R. DEDEKIND.

Es läßt sich beweisen, daß man das DEDEKINDsche Axiom (bei Beibehaltung der ersten beiden Axiome) gleichwertig durch das ARCHIMEDische Axiom (EdEM Band I, S. 111) und das Vollständigkeitsaxiom (EdEM Band I, S. 172) ersetzen kann.[1]) Das Stetigkeitsaxiom (in jeder seiner Formen) ermöglicht den Aufbau einer Grenzwerttheorie, das Studium stetiger Funktionen usw.

Die Widerspruchsfreiheit der Axiome des Körpers der reellen Zahlen kann man mit Hilfe von Modellen dieses Körpers beweisen, die aus dem „Material" des Körpers der rationalen Zahlen konstruiert sind. Gewöhnlich geschieht das mit Hilfe von *Schnitten* im Körper der rationalen Zahlen. Wir führen diese Konstruktion hier nicht durch, sondern verweisen auf die Lehrbücher der Analysis.[2])

Wir skizzieren einen Beweis dafür, daß das angegebene Axiomensystem *vollständig* ist: Um zu zeigen, daß je zwei Modelle des Axiomensystems isomorph sind, genügt es zu zeigen, daß man jedes Modell so umkehrbar eindeutig auf die unendlichen Dezimalbrüche abbilden kann, daß bei dieser Zuordnung die arithmetischen Operationen und die Relation „$>$" erhalten bleiben. In der Tat: In jedem Modell der Körperaxiome sind Elemente 0 und 1 ausgezeichnet. Mittels der Addition kann man aus ihnen die „natürlichen Zahlen" und die zu ihnen hinsichtlich der Addition inversen Elemente, d. h. die „negativen ganzen Zahlen" gewinnen; die damit erhaltenen „ganzen Zahlen" sind alle untereinander verschieden. Wir betrachten jetzt eine beliebige „Zahl" x unseres Modells. Stimmt die „Zahl" x

[1]) Aus dem DEDEKINDschen Axiom folgen also unter Verwendung der Körper- und Anordnungsaxiome die genannten beiden Axiome, und aus beiden Axiomen zusammen kann man mittels der Körper- und Anordnungsaxiome das DEDEKINDsche Axiom beweisen. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Vgl. etwa G. M. FICHTENHOLZ, Differential- und Integralrechnung I, 3. Aufl., Berlin 1968, § 2. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

mit einer „ganzen Zahl" n_0 überein, so ordnen wir x den unendlichen Dezimalbruch $(n_0 - 1), 999\ldots$ zu. Ist x nicht „ganz", so findet man nach Axiom 2 und nach dem ARCHIMEDischen Axiom (das aus dem Axiom 3 folgt) eine „ganze Zahl" n_0 mit $n_0 + 1 > x > n_0$. Weiter erhalten wir, indem wir 1 durch 10 teilen, die „Zahl" $\frac{1}{10}$ und konstruieren mittels der Addition die „Zahlen" $n_0 + \frac{1}{10}, n_0 + \frac{2}{10}, \ldots, n_0 + \frac{9}{10}$. Stimmt die „Zahl" x mit keiner dieser Zahlen überein, so findet man nach Axiom 2 eine solche „natürliche Zahl" $n_1 < 10$, daß $n_0 + \frac{n_1 + 1}{10} > x > n_0 + \frac{n_1}{10}$ gilt. Fahren wir entsprechend fort, so erhalten wir, daß unsere „Zahl" x entweder mit einem gewissen „endlichen Dezimalbruch" $n_0, n_1 n_2 \ldots n_k$ übereinstimmt — dann ordnen wir x den unendlichen Dezimalbruch

$$n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k - 1)\,999\ldots$$

zu —, oder es gibt einen unendlichen Dezimalbruch $n_0, n_1 n_2 n_3 \ldots$, so daß für beliebige k

$$n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k + 1) > x > n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k$$

gilt, — und in diesem Fall wird der Zahl x der angegebene unendliche Dezimalbruch zugeordnet. Diese Zuordnung liefert einen Isomorphismus des betrachteten Modells auf das Modell, das von den unendlichen Dezimalbrüchen gebildet wird.

§ 6. Die Axiomatik der Geometrie

6.1. Die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie. Wir kommen jetzt zur axiomatischen Festlegung des „euklidischen Raumes", d. h. zur Angabe eines mathematischen Systems, das als Widerspiegelung des realen physikalischen Raumes aufgefaßt werden kann und das in seinen wesentlichen Grundzügen in den „Elementen" EUKLIDS ausgearbeitet wurde. Diese Festlegung des euklidischen Raumes besteht, wie wir jetzt wissen, in der Angabe eines Axiomensystems, d. h. eines Systems von grundlegenden Aussagen, die in der Geometrie EUKLIDS richtig sind und aus denen man mit Hilfe der Logik alle übrigen Aussagen dieser Geometrie erschließen kann. Das System dieser Axiome muß widerspruchsfrei und vollständig sein (d. h., es muß ein Modell besitzen, und alle Modelle dieses Axiomensystems müssen untereinander isomorph sein). Den euklidischen Raum kann man definieren als eine Gesamtheit von drei Arten von Objekten, die „Punkte", „Geraden" und „Ebenen" genannt werden, und einer Gesamtheit von Transformationen der Gesamtheit aller Punkte in sich, die „Bewegungen" heißen. Zwischen diesen Objekten sind folgende Beziehungen definiert: „ein Punkt liegt auf einer Geraden" (oder „eine Gerade geht durch einen Punkt"), „ein Punkt liegt auf einer Ebene", „eine Gerade liegt auf einer Ebene", „ein Punkt liegt zwischen zwei anderen Punkten", wobei die angegebenen Objekte und Beziehungen den im folgenden angeführten Axiomen genügen sollen. Im Verlauf der Angabe der Axiome werden wir einige neue Begriffe einführen und einige einfache Sätze beweisen, da sonst die Formulierung der Axiome zu kompliziert würde.

6.2. Die Inzidenzaxiome.

1. *Durch je zwei verschiedene Punkte geht eine und nur eine Gerade.*
2. *Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.*
3. *Es existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*
4. *Durch je drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht eine und nur eine Ebene.*
5. *Auf jeder Ebene liegt mindestens ein Punkt.*
6. *Liegen zwei Punkte auf einer Ebene, so liegt auch die durch sie hindurchgehende Gerade auf dieser Ebene.*
7. *Haben zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam, dann haben sie mindestens noch einen weiteren Punkt gemeinsam.*
8. *Es existieren vier Punkte, die nicht auf einer Ebene liegen.*

Im folgenden bezeichnen wir die (nach Axiom 1 eindeutig existierende) Gerade, die durch die beiden Punkte A und B geht, als die Gerade AB und die (nach Axiom 4 eindeutige existierende) Ebene, die durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B und C geht, als die Ebene ABC.

Aus den formulierten Axiomen lassen sich sofort weitere Sätze der Geometrie folgern. Wir geben ein Beispiel an.

Satz 1. *Auf jeder Ebene kann man drei Punkte finden, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Beweis. Es sei α eine gewisse Ebene und A ein auf dieser Ebene liegender Punkt (Axiom 5). Weiterhin seien M, N, P drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen (Axiom 3). Weil die Punkte M, N, P voneinander verschieden sind, findet man unter ihnen einen Punkt, der von A verschieden ist. Es sei etwa $M \neq A$. Da die Punkte M, N, P nicht auf einer Geraden liegen, liegt mindestens einer der Punkte N, P nicht auf der Geraden MA. Es liege z. B. der Punkt N nicht auf der Geraden MA. Dann liegen die Punkte A, M, N nicht auf einer Geraden; denn lägen die Punkte A, M, N auf einer Geraden, dann müßte dies die Gerade MA sein (nach Axiom 1), aber der Punkt N liegt nicht auf dieser Geraden.

Weil die Punkte A, M, N nicht auf einer Geraden liegen, geht durch sie (nach Axiom 4) eine eindeutig bestimmte Ebene. Stimmt die Ebene AMN mit der gegebenen Ebene α überein, so haben wir in den Punkten A, M, N drei Punkte der Ebene α gefunden, die nicht auf einer Gerade liegen. Stimmt die Ebene AMN nicht mit α überein, so haben diese Ebenen (nach Axiom 7) noch einen von A verschiedenen Punkt B gemeinsam. Das heißt, auf der Ebene α existieren zwei verschiedene Punkte A, B.

Es seien jetzt T, U, V, W vier Punkte, die nicht auf einer Ebene liegen (Axiom 8). Von diesen Punkten liegt mindestens einer nicht auf der Geraden AB; denn lägen die Punkte T, U, V, W auf der Geraden AB, so lägen sie alle auf der Ebene α (Axiom 6), was nicht der Fall ist. Es liege z. B. der Punkt T nicht auf der Geraden AB. Dann geht durch die Punkte A, B, T eine eindeutig bestimmte Ebene (Axiom 4). Von den Punkten U, V, W liegt mindestens einer nicht auf der Ebene ABT; denn sonst lägen T, U, V, W auf der Ebene ABT,

was nicht der Fall sein sollte. Es liege z. B. der Punkt U nicht auf der Ebene ABT. Dann liegen die Punkte A, B, T, U nicht auf einer Ebene; denn lägen A, B, T, U auf einer Ebene, so müßte dies (Axiom 4) die Ebene ABT sein, aber der Punkt U sollte nicht auf der Ebene ABT liegen.

Wir bemerken noch, daß die Punkte A, T, U nicht auf einer Geraden liegen; denn lägen die Punkte A, T, U auf einer Geraden, so müßte dies die Gerade AT sein (Axiom 1), und dann läge der Punkt U auf der Ebene ABT (Axiom 6), was nicht der Fall sein sollte.

Da die Punkte A, T, U nicht auf einer Geraden liegen, geht durch sie eine eindeutig bestimmte Ebene (Axiom 4). Die Ebene ATU kann nicht mit der Ebene α übereinstimmen, weil sonst alle vier Punkte A, B, T, U auf der einen Ebene α lägen. Nach Axiom 7 haben die Ebenen α und ATU einen von A verschiedenen Punkt C gemeinsam. In A, B, C haben wir dann drei Punkte der Ebene α. Wir zeigen, daß diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Wäre das nämlich der Fall, so müßte dies die Gerade AC sein (Axiom 1), und diese läge folglich nach Axiom 6 auf der Ebene ATU (da die Ebene ATU die Punkte A und C enthält), d. h., der Punkt B läge auf der Ebene ATU. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß die Punkte A, B, T, U nicht auf einer Ebene liegen.

6.3. Die Axiome der Anordnung.

9. *Von drei beliebigen paarweise verschiedenen Punkten einer Geraden liegt einer und nur einer zwischen den beiden anderen.*
10. *Zu je zwei Punkten einer Geraden existiert auf dieser Geraden ein solcher dritter Punkt, daß der zweite Punkt zwischen dem ersten und dem dritten liegt.*

Vor der Formulierung des dritten Anordnungsaxioms (Axiom 11) führen wir den Begriff der *Strecke* ein. Sind A und B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnen wir als *Strecke mit den Endpunkten A und B* (oder kurz Strecke $\overline{AB}$) die Menge, die aus den Punkten A, B und allen den Punkten der Geraden AB besteht, die zwischen A und B liegen.

11. *Die Gerade l liege auf der Ebene ABC (wobei A, B, C drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte seien), gehe durch keinen der Punkte A, B, C und enthalte einen Punkt der Strecke $\overline{AB}$. Dann hat l mit mindestens einer der Strecken $\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$ einen Punkt gemeinsam.*

Dieses Axiom heißt das *Axiom von* PASCH, nach dem deutschen Mathematiker MORITZ PASCH, der es zuerst formulierte.

Unter Benutzung der Axiome der Anordnung kann man einige weitere Sätze beweisen.

Satz 2. *Zu je zwei verschiedenen Punkten A, B existiert ein Punkt, der zwischen ihnen liegt.*

Beweis. Es sei C ein Punkt, der nicht auf der Geraden AB liegt (ein solcher existiert nach Axiom 3). Nach Axiom 10 existiert auf der Geraden AC ein Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt. Der Punkt D fällt nicht mit B

zusammen, weil sonst die beiden verschiedenen Geraden AB und AC die beiden Punkte A, B gemeinsam hätten, was nicht möglich ist (Axiom 1). Nach Axiom 10 existiert auf der Geraden BD ein Punkt E, so daß B zwischen D und E liegt. Die Gerade CE geht durch keinen der Punkte A, B, D. (Ginge z. B. die Gerade CE durch A, so fiele sie mit der Geraden AC zusammen; folglich lägen die Punkte A, C, D, E auf einer Geraden; auf dieser Geraden DE läge auch der Punkt B, d. h., die Punkte A, B, C lägen auf einer Geraden, was nicht der Fall sein soll.) Da die Gerade CE mit der Strecke $\overline{AD}$ den Punkt C gemeinsam hat, hat sie mit einer der Strecken $\overline{AB}$ oder $\overline{BD}$ einen Punkt gemeinsam (Axiom 11). Weil der Punkt B zwischen D und E liegt, kann der Punkt E nicht auf der Strecke $\overline{BD}$ liegen (Axiom 9). Wenn wir also annehmen, daß die Gerade CE mit der Strecke $\overline{BD}$ einen Punkt F gemeinsam hat, muß $F \neq E$ sein (denn E liegt nicht auf der Strecke $\overline{BD}$), und die Geraden CE und BD würden die beiden Punkte E und F gemeinsam haben. Dann müßten aber die Geraden CE und BD gleich sein (Axiom 1), was unmöglich ist. Also kann die Gerade CE mit der Strecke $\overline{BD}$ keinen Punkt gemeinsam haben und muß folglich wegen des oben Gesagten einen Punkt H mit der Strecke $\overline{AB}$ gemeinsam haben. Dieser Punkt H ist von A und B verschieden (weil die Gerade CE nicht durch die Punkte A, B geht), d. h., auf der Strecke $\overline{AB}$ existiert ein von A und B verschiedener Punkt H, d. h., es existiert ein Punkt H, der zwischen A und B liegt.

Aus den angegebenen Beweisen der Sätze 1 und 2 ist klar ersichtlich, daß sie nur auf den Axiomen basieren. Diese Beweise benötigen keine erläuternden Zeichnungen, und sie setzen auch nicht voraus, daß wir uns dabei ein gewisses Modell der euklidischen Geometrie vorstellen. Das ist verständlich, denn in den Axiomen ist ja alles, was wir über die Grundbegriffe der Geometrie wissen müssen, ausgesagt. Ebenso sieht man, daß das Verzeichnis der Axiome bei EUKLID nicht sehr vollständig ist (ganz abgesehen davon, daß der Sinn seiner ersten Definitionen recht unklar ist): EUKLID benutzt bei seinen Beweisen Zeichnungen, und eine solche Aussage wie das Axiom 11 war für ihn offensichtlich. (Eine Gerade, die in ein Dreieck durch eine der Seiten hineingeht, muß aus dem Dreieck durch die zweite oder dritte Seite wieder heraustreten.) Obgleich man also bei EUKLID einerseits Ansätze der axiomatischen Methode findet, benutzt er doch andererseits in den Beweisen Tatsachen, die er als „offensichtlich" ansieht und die nicht in seinen Axiomen aufgeführt sind.

Wir setzen voraus, daß der Leser bereits eine klare Vorstellung von dem Charakter der auf Grundlage von Axiomen durchgeführten Beweisen besitzt, und wollen daher auf weitere Ableitungen aus den Axiomen verzichten. Wir beschränken uns auf die Formulierung einiger weiterer Sätze, die man nach dem Muster der Sätze 1 und 2 mit Hilfe der Axiome 1 bis 11 beweisen kann.

Satz 3. *Die Gerade l liege auf der Ebene ABC und gehe durch keinen der Punkte A, B, C. Dann hat l mit mindestens einer der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ oder $\overline{AC}$ keine Punkte gemeinsam.*

Satz 4. *Zu n verschiedenen Punkten einer Geraden kann man stets eine solche Numerierung mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ finden, daß aus $i < j < k$ (oder*

$i > j > k$) folgt, daß der j-te Punkt zwischen dem i-ten und dem k-ten Punkt liegt.

Zur bequemeren Formulierung von Satz 5 definieren wir den Begriff des Halbstrahls. Dazu seien O und A zwei voneinander verschiedene Punkte; als *Halbstrahl* $\overrightarrow{OA}$ bezeichnen wir die Menge aller der Punkte M der Geraden OA, für die O nicht zwischen A und M liegt (die Punkte O und A gehören damit ebenfalls dem Halbstrahl $\overrightarrow{OA}$ an).

Satz 5. *Jeder Punkt O einer Geraden l zerlegt diese Gerade in zwei Halbstrahlen; genauer: auf der Geraden l gibt es Punkte A und B, so daß die Halbstrahlen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ nur den Punkt O gemeinsam haben und zusammen die gesamte Gerade l ergeben.*

Als nächstes definieren wir den Begriff der Halbebene. Es sei l eine Gerade auf der Ebene α und A ein Punkt der Ebene α, der nicht auf der Geraden l liegt. Als *Halbebene lA* bezeichnen wir die Menge aus allen Punkten der Geraden l, dem Punkt A und allen den Punkten M der Ebene α, für die die Strecke $\overline{AM}$ mit l keine Punkte gemeinsam hat.

Satz 6. *Jede Gerade l einer Ebene α zerlegt diese Ebene in zwei Halbebenen; genauer: auf der Ebene α gibt es Punkte A und B (die nicht auf der Geraden l liegen), so daß die Halbebenen lA und lB zusammen die gesamte Ebene α ergeben und ihr Durchschnitt die Gerade l ist (d. h., ein Punkt N gehört dann und nur dann beiden Halbebenen lA und lB an, wenn er auf der Geraden l liegt).*

Analog wird schließlich der Begriff des *Halbraumes* definiert und gezeigt, daß jede Ebene den Raum (d. h. die Menge aller Punkte) in zwei Halbräume zerlegt.

Schließlich führen wir noch den Begriff des Grundgebildes ein, den wir zur Formulierung eines der folgenden Axiome benötigen. Es sei O ein beliebiger Punkt, l eine durch ihn gehende Gerade und α eine Ebene, die die Gerade l enthält. Wir wählen einen der beiden Halbstrahlen aus, in die die Gerade l durch den Punkt O zerlegt wird (Satz 5), und bezeichnen ihn mit l'. Weiter wählen wir eine der beiden Halbebenen aus, in die die Ebene α durch die Gerade l zerlegt wird (Satz 6), und bezeichnen sie mit α'. Schließlich wählen wir einen der beiden Halbräume aus, in die der Raum durch die Ebene α zerlegt wird, und bezeichnen ihn mit Γ'. Das Quadrupel $(O, l', \alpha', \Gamma')$ bezeichnen wir als ein *Grundgebilde*.

Man sieht leicht, daß jedes (geordnete) Quadrupel (O, A, B, C) von Punkten O, A, B, C, die nicht auf einer Ebene liegen, ein bestimmtes Grundgebilde festlegt (wenn man nämlich als Halbstrahl l' den Halbstrahl $\overrightarrow{OA}$ der Geraden $l = OA$, als α' die Halbebene lB der Ebene $\alpha = OAB$ und als Halbraum Γ' den Halbraum αC bezüglich α nimmt, der den Punkt C enthält). Das so erhaltene Grundgebilde $(O, l', \alpha', \Gamma')$ nennen wir das *durch das Quadrupel* (O, A, B, C) *definierte* Grundgebilde.[1])

[1]) Wir merken an, daß man natürlich auch jedes Grundgebilde $(O, l', \alpha', \Gamma')$ mittels geeigneter Punkte A, B, C definieren kann, die jedoch durch l', α', Γ' nicht eindeutig bestimmt sind. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

6.4. Axiome der Bewegung.[1])

12. *Jede Bewegung ist eine eineindeutige Abbildung des Raumes auf sich; genauer: ist f eine beliebige Bewegung, so werden verschiedene Punkte durch die Bewegung f in verschiedene Punkte übergeführt (d. h., aus $A \neq B$ folgt $f(A) \neq f(B)$), und zu jedem Punkt M gibt es einen Punkt N, so daß $f(N) = M$ gilt.*
13. *Es sei f eine beliebige Bewegung. Liegen die Punkte A, B, C auf einer Geraden und dabei C zwischen A und B, so liegen auch die Punkte $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ auf einer Geraden und der Punkt $f(C)$ zwischen $f(A)$ und $f(B)$.*

Mit Hilfe dieser Axiome lassen sich folgende Sätze beweisen.

Satz 7. *Ist f eine beliebige Bewegung und sind A, B, C, D vier beliebige Punkte, so liegen die Punkte $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ dann und nur dann auf einer Ebene, wenn die Punkte A, B, C, D auf einer Ebene liegen.*

Satz 8. *Ist f eine beliebige Bewegung und sind A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so liegen die Punkte $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ ebenfalls nicht auf einer Geraden.*

Satz 9. *Jede Bewegung führt Geraden in Geraden, Ebenen in Ebenen, Halbstrahlen in Halbstrahlen, Halbebenen in Halbebenen, Halbräume in Halbräume und folglich jedes Grundgebilde in ein Grundgebilde über.*

Wir formulieren schließlich noch zwei Axiome.

14. *Die Hintereinanderausführung von Bewegungen ist wiederum eine Bewegung.*
15. *Zu je zwei Grundgebilden gibt es eine und nur eine Bewegung, die das erste Grundgebilde in das zweite Grundgebilde überführt.*

Mit Hilfe der Bewegungen ist es möglich, die „Gleichheit" (Kongruenz) geometrischer Figuren zu definieren: Figuren sind *gleich*, wenn man die eine von ihnen mittels einer Bewegung in die andere überführen kann. Damit erhalten wir die Möglichkeit, von „gleichen" Strecken, „gleichen" Dreiecken usw. zu sprechen.

6.5. Die Stetigkeitsaxiome.

16. (ARCHIMEDisches Axiom)
Es seien A_0, A_1, B drei Punkte einer Geraden, wobei der Punkt A_1 zwischen A_0 und B liege. Es sei ferner f eine Bewegung, die den Punkt A_0 in den Punkt A_1 sowie den Halbstrahl $\overrightarrow{A_0B}$ in den Halbstrahl $\overrightarrow{A_1B}$ überführt, und es sei

$$f(A_1) = A_2,\ f(A_2) = A_3,\ \ldots$$

gesetzt. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß der Punkt B auf der Strecke $\overline{A_{n-1}A_n}$ liegt.

---

[1]) Über die Rolle der Bewegungen in der Geometrie verweisen wir auch auf den Artikel „Geometrische Transformationen" in diesem Band der EdEM (S. 92ff.).

17. (Axiom von CANTOR)

Es seien A_1, A_2, ... und B_1, B_2, ... Folgen von Punkten einer Geraden l, so daß für jedes n die Punkte A_n und B_n voneinander verschieden sind und auf der Strecke $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$ liegen. Dann gibt es auf der Geraden l einen Punkt C, der für jedes n auf der Strecke $\overline{A_nB_n}$ liegt.

Mit Hilfe von Axiom 16 (und den vorher angeführten Axiomen) kann man folgenden wichtigen Satz beweisen:

Satz 10. *Es sei $\overline{MN}$ eine beliebige Strecke und $\overrightarrow{OA}$ ein beliebiger Halbstrahl. Dann gibt es auf dem Halbstrahl $\overrightarrow{OA}$ einen und nur einen Punkt P, so daß die Strecke $\overline{MN}$ gleich der Strecke $\overline{OP}$ ist.*

Dieser Satz gestattet es, Strecken „abzutragen". Weiter gestattet er es, die Begriffe „größer" und „kleiner" für Strecken einzuführen, so daß für zwei beliebige Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eine und nur eine der Beziehungen

$$\overline{AB} < \overline{CD}, \quad \overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}$$

erfüllt ist.

Den folgenden Satz bezeichnen wir als *Satz von* DEDEKIND. Wegen seiner Wichtigkeit geben wir ihn mit Beweis wieder.

Satz 11. *Sind alle Punkte einer Geraden l so in zwei (nichtleere) Klassen eingeteilt, daß zwischen zwei Punkten ein und derselben Klasse kein Punkt der anderen Klasse liegt, so gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt C, der auf jeder Strecke liegt, deren Endpunkte verschiedenen Klassen angehören.*

Beweis. Es seien A_1 und B_1 Punkte der Geraden l, die verschiedenen Klassen angehören; die Klasse die den Punkt A_1 enthält, bezeichnen wir mit dem Symbol I und die Klasse, zu der der Punkt B_1 gehört, mit dem Symbol II. Es sei C ein beliebiger Punkt zwischen A_1 und B_1 (Satz 2). Auf dem Halbstrahl $\overrightarrow{B_1A_1}$ tragen wir die Strecke $\overline{B_1D}$ ab, die gleich der Strecke $\overline{A_1C}$ ist (Satz 10). Wegen $\overline{A_1C} < \overline{A_1B_1}$ ist auch $\overline{B_1D} < \overline{A_1B_1}$, d. h., der Punkt D liegt auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ (Axiom 13). Es sind nun drei Fälle möglich: Der Punkt C fällt mit D zusammen, der Punkt C liegt zwischen A_1 und D, der Punkt D liegt zwischen A_1 und C. Im ersten Fall ist $\overline{A_1C} = \overline{CB_1}$, d. h., die Strecke $\overline{A_1C}$ läßt sich zweimal auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ abtragen. Im zweiten Fall ist $\overline{A_1C} = \overline{DB_1} < \overline{CB_1}$, und die Strecke $\overline{A_1C}$ läßt sich mindestens zweimal auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ abtragen. Im dritten Fall läßt sich entsprechend die Strecke $\overline{A_1D}$ mindestens zweimal auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ abtragen. Es gibt also in jedem Fall eine Strecke, die sich mindestens zweimal auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ abtragen läßt. Wir wählen nun eine solche Strecke und tragen sie auf dem Strahl $\overrightarrow{A_1B_1}$ vom Punkt A_1 aus fortlaufend ab, wobei die Strecken $\overline{A_1M_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, ... entstehen mögen. Nach Axiom 16 gibt es eine Zahl $k \geqq 3$, so daß der Punkt B_1

auf der Strecke $\overline{M_{k-1}M_k}$ liegt, d. h., es wird

$$\overline{A_1M_1} = \overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \cdots = \overline{M_{k-2}M_{k-1}} \geqq \overline{M_{k-1}B_1}.$$

Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt leicht, daß es eine Zahl i mit $1 \geqq i \geqq k-1$ gibt, so daß in der Folge der Punkte $A_1, M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}, B_1$ die Punkte $A_1, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}$ zur Klasse I und die übrigen zur Klasse II gehören.

Es liegt also der Punkt M_{i-1} in der Klasse I, aber der Punkt M_i in der Klasse II. Den Punkt M_{i-1} bezeichnen wir mit A_2 und den Punkt M_i mit B_2 (gehört schon der Punkt M_1 zur Klasse II, so nehmen wir als A_2 den Punkt A_1 und als B_2 den Punkt M_1; falls der Punkt M_{k-1} noch zur Klasse I gehört, nehmen wir als A_2 den Punkt M_{k-1} und als B_2 den Punkt B_1).

Insgesamt erhalten wir zwei Punkte A_2, B_2, die auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ liegen, wobei der Punkt A_2 zur Klasse I und der Punkt B_2 zur Klasse II gehört und die Strecke $\overline{A_2B_2}$ sich auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ mindestens zweimal abtragen läßt. Auf die gleiche Weise können wir auf der Strecke $\overline{A_2B_2}$ zwei Punkte A_3, B_3 konstruieren, so daß A_3 zur Klasse I und B_3 zur Klasse II gehört und sich die Strecke $\overline{A_3B_3}$ auf der Strecke $\overline{A_2B_2}$ mindestens zweimal, also auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ mindestens viermal, d. h. mehr als dreimal abtragen läßt.

Durch Fortsetzung dieser Konstruktion finden wir Punkte $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$, so daß für beliebiges n der Punkt A_n zur Klasse I und der Punkt B_n zur Klasse II gehört, die Punkte A_n und B_n auf der Strecke $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$ liegen und sich die Strecke $\overline{A_nB_n}$ auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ mindestens n-mal abtragen läßt. Nach Axiom 17 gibt es dann einen Punkt C, der für beliebiges n der Strecke $\overline{A_nB_n}$ angehört. Wir zeigen, daß C der gesuchte Punkt ist.

Zunächst zeigen wir, daß man für jeden von C verschiedenen Punkt D der Geraden l eine natürliche Zahl n finden kann, so daß die Strecke $\overline{A_nB_n}$ den Punkt D nicht enthält (so daß für $m \geqq n$ die Strecke $\overline{A_mB_m}$ ebenfalls den Punkt D nicht enthält). Hierzu bezeichnen wir mit n eine solche natürliche Zahl, daß die Strecke $\overline{CD}$ sich weniger als n-mal auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ abtragen läßt (d. h. beim fortlaufenden Abtragen der Strecke $\overline{CD}$ auf dem Halbstrahl $\overrightarrow{A_1B_1}$ Strecken $\overline{A_1P_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \cdots$ erhalten werden, so daß der Punkt B_1 zwischen A_1 und P_n liegt; die Existenz eines solchen n folgt aus Axiom 16). Läge nun der Punkt D auf der Strecke $\overline{A_nB_n}$, so wäre $\overline{CD} < \overline{A_nB_n}$ (weil $\overline{A_nB_n}$ auch den Punkt C enthält), und es könnte die Strecke $\overline{A_nB_n}$ ebenfalls nicht n-mal auf der Strecke $\overline{A_1B_1}$ abgetragen werden, was der Wahl der Punkte A_n und B_n widerspricht. Dieser Widerspruch zeigt, daß der Punkt D nicht der Strecke $\overline{A_nB_n}$ angehört.

Es sei jetzt M ein beliebiger, von C verschiedener Punkt der Klasse I und N ein beliebiger von C verschiedener Punkt der Klasse II. Wir wählen die Zahl n so groß, daß keiner der Punkte M, N zur Strecke $\overline{A_nB_n}$ gehört. Dann liegt der Punkt M nicht zwischen A_n und B_n (nach Wahl von n) sowie der Punkt B_n

nicht zwischen A_n und M (weil die Punkte A_n, M zur Klasse I und der Punkt B_n zur Klasse II gehörten). Folglich liegt der Punkt A_n zwischen M und B_n (nach Axiom 9). Entsprechend findet man, daß der Punkt B_n zwischen A_n und N liegt. Hieraus folgt, daß die Punkte A_n, B_n auf der Strecke $\overline{MN}$ liegen und somit der Punkt C zur Strecke $\overline{MN}$ gehört (siehe Satz 4), d. h., C liegt zwischen M und N.

Schließlich zeigen wir, daß C der einzige Punkt ist, der zwischen je zwei von C verschiedenen Punkten liegt, die zu verschiedenen Klassen gehören. Dazu sei D ein von C verschiedener Punkt, M ein beliebiger Punkt zwischen D und C und N ein Punkt, der nicht in der Klasse liegt, in der der Punkt M liegt. Weil M zwischen D und C liegt, kann die Strecke $\overline{MN}$ nicht beide Punkte C, D enthalten. Den Punkt C enthält diese Strecke (denn M und N gehören verschiedenen Klassen an); folglich enthält die Strecke $\overline{MN}$ den Punkt D nicht. Der Punkt D besitzt also nicht die angegebene Eigenschaft.

Es gibt mithin unter der Voraussetzung von Satz 11 einen und nur einen Punkt C, so daß jede Strecke, deren Endpunkte verschiedenen Klassen angehören, den Punkt C enthält, was zu beweisen war.

Mitunter verwendet man anstelle der Axiome von ARCHIMEDES und CANTOR den Satz 11 als Stetigkeitsaxiom. Aus ihm lassen sich die Axiome 16 und 17 als Sätze ableiten. Man bezeichnet es dann als Axiom von DEDEKIND, weil es im wesentlichen mit der Aussage des DEDEKINDschen Stetigkeitsaxioms für den Körper der reellen Zahlen übereinstimmt (vgl. S. 24).

6.6. Das Parallelenaxiom.

18. *Durch jeden nicht auf einer gegebenen Geraden l liegenden Punkt A gibt es in der durch A und l bestimmten Ebene höchstens eine Gerade l', die mit der Geraden l keinen Punkt gemeinsam hat.*

Zwei Geraden l und l', die in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben, bezeichnet man als *parallel*. Allein mit Hilfe der anderen Axiome kann man den folgenden Satz beweisen:

Satz 12. *Durch jeden nicht auf einer gegebenen Geraden l liegenden Punkt A gibt es immer wenigstens eine Gerade l', die zu l parallel ist.*

Damit folgt aus dem Parallelenaxiom, daß *es durch jeden nicht auf einer gegebenen Geraden liegenden Punkt genau eine zu dieser Geraden parallele Gerade gibt.*

Das Parallelenaxiom ist uns schon in § 3 als ein Axiom begegnet, das dem V. Postulat EUKLIDS äquivalent ist.

Mit dem Parallelenaxiom ist die Liste der Axiome der euklidischen Geometrie vollständig. Mit Hilfe dieser Axiome und der oben formulierten (ihrerseits aus den Axiomen herleitbaren) Sätze kann man alle weiteren Sätze der euklidischen Geometrie beweisen: die Kriterien für die Kongruenz von Dreiecken (ein Winkel wird als ein Paar von einem gemeinsamen Punkte ausgehender Halbstrahlen definiert), die Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln

eines Dreiecks, den Satz über die Winkelsumme im Dreieck usw. Die Beweise sind im wesentlichen die gleichen wie im Geometrieunterricht in der Schule, jedoch müssen sie meistens folgerichtiger durchgeführt werden (weil bei den Beweisen in der Schule nicht nur auf die Axiome und bereits bewiesene Sätze zurückgegriffen wird, sondern nicht selten Hinweise aus Zeichnungen entnommen werden).

Das von uns behandelte Axiomensystem für den euklidischen Raum ist eine Modifikation eines Axiomensystems, das im Jahre 1899 von dem deutschen Mathematiker D. HILBERT angegeben wurde. Das System HILBERTS unterscheidet sich von dem hier betrachteten System vor allem darin, daß HILBERT anstelle des Begriffs „Bewegung" den Begriff „Kongruenz" („Gleichheit") als Grundbegriff wählt, d. h. einen Begriff, den man von unserem Stand als Invarianz gegenüber Bewegungen definieren kann. Das Axiom von CANTOR formuliert HILBERT als „Vollständigkeitsaxiom", welches besagt, daß man den Raum nicht so durch neue Punkte erweitern kann, daß im erweiterten System alle Axiome gültig bleiben. Die Axiome der Bewegung wurden im Jahre 1909 von F. SCHUR angegeben.

In dem von uns betrachteten Axiomensystem sind Punkt, Gerade, Ebene und Bewegung Grundbegriffe, die nicht definiert werden und deren gegenseitige Beziehungen durch unsere Axiome festgelegt werden. Es sind jedoch auch andere Axiomensysteme des euklidischen Raumes möglich, in denen andere Grundbegriffe verwendet werden; so wird bei HILBERT anstelle des Begriffs „Bewegung" der nicht definierte Begriff „Kongruenz" gewählt. In einer Axiomatik des bekannten russischen Geometers W. F. KAGAN wird statt dessen der Begriff „Abstand" als Grundbegriff verwendet usw. Ein Beispiel für ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie, das von dem hier behandelten verschieden ist, findet sich in dem Artikel über Vektoren in diesem Band der EdEM (S. 384). Selbstverständlich sind die verschiedenen Axiomensysteme der euklidischen Geometrie äquivalent, d. h., aus den Axiomen des einen Systems lassen sich die Axiome der anderen Systeme als Sätze beweisen und umgekehrt.

Wir bemerken abschließend, daß man durch Fortlassen der sich auf den Raum beziehenden Axiome 4 bis 8 aus dem oben angegebenen Axiomensystem ein solches für die euklidische Ebene erhält (wenn man in einigen Axiomen naheliegende Änderungen vornimmt; z. B. muß man den Begriff des Grundgebildes dadurch abändern, daß man aus ihm den Halbraum streicht).

§ 7. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie

7.1. Die Einführung von Koordinaten. Nachdem wir das volle System der Axiome der euklidischen Geometrie entwickelt haben, wollen wir die Frage nach seiner Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit erörtern. Für den Be-

weis der Widerspruchsfreiheit müssen wir mit den Mitteln der Arithmetik (etwas anderes steht uns bis jetzt nicht zur Verfügung) ein Modell der euklidischen Geometrie konstruieren. Der Beweis der Vollständigkeit erfordert den Nachweis, daß zwei beliebige Modelle der euklidischen Geometrie *isomorph* sind. Sowohl die Widerspruchsfreiheit als auch die Vollständigkeit lassen sich mit Hilfe des gleichen Verfahrens – der Konstruktion eines Koordinatensystems – beweisen. Der Einfachheit halber führen wir diese Konstruktion nicht für den Raum, sondern nur für die euklidische Ebene durch, wobei wir uns auf die Darlegung der wichtigsten Punkte beschränken.

Zunächst stellen wir eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten einer Geraden und den reellen Zahlen her. Dazu seien O und A_1 zwei verschiedene Punkte einer Geraden. Auf dem Halbstrahl $\overrightarrow{OA_1}$ tragen wir fortlaufend die zur Strecke $\overline{OA_1}$ gleichen Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... ab. Auf dem anderen der beiden durch den Punkt O auf der Geraden OA_1 definierten Halbstrahlen (vgl. Satz 5) tragen wir fortlaufend die zur Strecke $\overline{OA_1}$ gleichen Strecken $\overline{OB_1}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, ... ab. Sodann teilen wir die Strecke $\overline{OA_1}$ durch Punkte $O, C_1, C_2, \ldots, C_9, A_1$ in zehn gleiche Teile.[1]) Man zeigt leicht, daß sich auf jeder der Strecken

$$\ldots, \overline{B_3B_2}, \overline{B_2B_1}, \overline{B_1O}, \overline{OA_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots \qquad (*)$$

die Strecke $\overline{OC_1}$ ebenfalls genau 10mal abtragen läßt. Anschließend können wir jeden zehnten Teil wieder in zehn Teile teilen usw. Wir ordnen dem Punkt O die Zahl 0, den Punkten A_i ($i = 1, 2, \ldots$) die entsprechende Zahl i und den Punkten B_i ($i = 1, 2, \ldots$) die entsprechende Zahl $-i$ zu. Weiterhin ordnen wir den Punkten $C_1, C_2, \ldots, C_9$, die die Strecke $\overline{OA_1}$ in zehn gleiche Teile teilen, der Reihe nach die Zahlen $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$ zu. Durch Teilung der übrigen Strecken (*) in zehn gleiche Teile ergeben sich die Punkte, denen die übrigen Zahlen der Form $\frac{n}{10}$ entsprechen, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Durch die weitere Zerlegung der Strecken in jeweils 10 Teile werden allgemein die Punkte konstruiert, denen die Brüche der Form $\frac{n}{10^k}$ zugeordnet werden.

Ist nun M ein beliebiger Punkt unserer Geraden, so können wir mit Hilfe des ARCHIMEDischen Axioms eine ganze Zahl n finden, so daß der Punkt M sich auf der Strecke befindet, deren Endpunkte den Zahlen n und $n + 1$ entsprechen, dabei aber nicht mit dem Punkt zusammenfällt, dem die Zahl $n + 1$ zugeordnet ist. Weiterhin können wir eine solche Zahl a_1 ($= 0, 1, 2, \ldots, 9$)

[1]) Wir bemerken, daß man dies mittels des folgenden Satzes durchführen kann: Auf einer Geraden seien zueinander gleiche Strecken abgetragen und durch die Endpunkte dieser Strecken zueinander parallele Geraden gezogen, die eine andere Gerade schneiden. Dann sind auf dieser Geraden die Strecken zwischen den Schnittpunkten der Parallelen gleich. Der Beweis dieses Satzes wird genauso wie in der Schule geführt.

finden, daß der Punkt M auf der Strecke liegt, deren Endpunkten die Zahlen $n + \frac{a_1}{10}$ bzw. $n + \frac{a_1+1}{10}$ zugeordnet sind, dabei aber nicht mit dem zweiten dieser Endpunkte zusammenfällt. Durch unbeschränkte Fortsetzung dieses Prozesses ordnen wir dem Punkt M schließlich eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots$ zu.

Man kann zeigen, daß die konstruierte Zuordnung eineindeutig ist und jede reelle Zahl einem Punkt entspricht.[1]) Außerdem besitzt sie zwei weitere wichtige Eigenschaften:

a) Sind x, y, z drei reelle Zahlen, die der Ungleichung $x < y < z$ oder $x > y > z$ genügen, und sind M, N, P die Punkte, die den Zahlen x, y, z entsprechen, so liegt der Punkt N zwischen den Punkten M und P.

b) Besteht zwischen den Zahlen x, x', y, y' die Beziehung $x - x' = y - y'$, so sind für die entsprechenden Punkte M, M', N, N' die Strecken $\overline{MM'}$ und $\overline{NN'}$ einander gleich.

Hieraus ist die Analogie zwischen den Axiomen der Anordnung und der Stetigkeit für den Körper der reellen Zahlen einerseits und für den euklidischen Raum andererseits ersichtlich.

Wir bemerken noch folgendes: Während EUKLID unter einer „geraden Linie" eine geradlinige Strecke verstand, für die er die Möglichkeit der unbeschränkten Fortsetzung forderte, verstehen wir hier unter einer „Geraden" sofort die ganze Gerade; entsprechend steht es mit dem Begriff der Ebene.

Wir führen jetzt auf der Ebene ein *Koordinatensystem* ein. Dazu betrachten wir zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden l und l', die sich in einem Punkt O schneiden, und wählen auf ihnen gleiche Strecken $\overline{OA_1}$ und $\overline{OA_1'}$. Für jede dieser Geraden stellen wir die oben beschriebene eineindeutige Zuordnung zwischen ihren Punkten und den reellen Zahlen her. Damit sind wir in der Lage, jedem Punkt der Ebene in bekannter Weise ein Paar von Zahlen x, y (die Koordinaten dieses Punktes) zuzuordnen, wodurch die Gesamtheit aller Punkte der Ebene eineindeutig auf die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen abgebildet wird.

Für die Punkte einer gegebenen Geraden genügen die Koordinaten einer bestimmten Gleichung ersten Grades

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \qquad (**)$$

wobei mindestens einer der Koeffizienten α oder β von 0 verschieden ist, und umgekehrt liegen sämtliche Punkte, deren Koordinaten einer derartigen Gleichung (**) genügen, auf einer bestimmten Geraden. Liegen drei Punkte M, N, P auf einer Geraden, so liegt der Punkt M dann und nur dann zwischen

[1]) Letzteres folgt aus dem Axiom von CANTOR. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

N und P, wenn er mit keinem der Punkte N, P zusammenfällt und wenn die x-Koordinaten dieser Punkte durch eine der Beziehungen

$$x_N \leqq x_M \leqq x_P \quad \text{oder} \quad x_N \geqq x_M \geqq x_P$$

verknüpft sind und dasselbe für die y-Koordinaten gilt.

Schließlich entsprechen die Bewegungen der Ebene, wenn man sie in den Koordinaten ausdrückt, genau den Transformationen der Form

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

wobei (a_1, a_2) und (b_1, b_2) orthogonale Einheitsvektoren sind (d. h. $a_1^2 + a_2^2 = 1$, $b_1^2 + b_2^2 = 1$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ gilt).

7.2. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Ebene. Die angegebenen Tatsachen gestatten es, sowohl die Widerspruchsfreiheit als auch die Vollständigkeit der Axiome der Geometrie zu beweisen. Zunächst läßt sich unschwer zeigen, daß alle Axiome der euklidischen Ebene in dem folgenden *arithmetischen Modell* erfüllt sind: „Punkte" sind die Paare (x, y) von reellen Zahlen, eine „Gerade" besteht aus der Menge aller der „Punkte", die einer Gleichung der Form (**) mit gegebenem α, β, γ genügen, und die Begriffe „zwischen" und „Bewegung" werden auf die oben angegebene Weise definiert. Wir wollen nicht die Gültigkeit aller Axiome in diesem arithmetischen Modell verifizieren. Wir erwähnen als Beispiel, daß in der Tat zu zwei verschiedenen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) genau eine Gerade existiert, die durch diese beiden Punkte hindurchgeht, nämlich die Gerade, die z. B. durch die Gleichung

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

beschrieben wird (wir bemerken, daß sich die Gerade nicht ändert, wenn man alle Koeffizienten einer sie beschreibenden Gleichung (**) mit der gleichen Zahl multipliziert). Hierdurch ist gezeigt, daß in unserem Modell das Axiom 1 gilt. Ebenso einfach verifiziert man die übrigen Axiome, wodurch zugleich die Widerspruchsfreiheit der Axiome der euklidischen Geometrie bewiesen ist.

Die zu Beginn dieses Paragraphen durchgeführten Überlegungen zeigen ferner, daß ein beliebiges Modell der euklidischen Ebene zum arithmetischen Modell isomorph ist (der Isomorphismus wird durch die Einführung eines Koordinatensystems vermittelt). Daher sind zwei beliebige Modelle der euklidischen Ebene zum arithmetischen Modell und damit untereinander isomorph. Hierdurch ist die Vollständigkeit unserer Axiome bewiesen.

Abschließend bemerken wir, daß sich analog ein arithmetisches Modell für den euklidischen Raum konstruieren läßt, indem man nämlich als „Punkte" die *Tripel* (x, y, z) von reellen Zahlen wählt und die anderen Grundbegriffe in der aus der analytischen Geometrie bekannten Weise interpretiert.

§ 8. Die Unabhängigkeit der Axiome

8.1. Die Unabhängigkeit eines Axiomensystems. Die Entdeckung LOBATSCHEWSKIS, die zur Entwicklung der axiomatischen Methode beitrug, ist unmittelbar mit der Frage nach der *Unabhängigkeit der Axiome* verbunden. Dabei heißt ein Axiom *unabhängig* von den übrigen Axiomen eines gewissen Axiomensystems, wenn es sich nicht aus diesen übrigen Axiomen als Satz beweisen läßt.

Beim axiomatischen Aufbau einer mathematischen Theorie bemüht man sich naturgemäß darum, daß sich unter den Axiomen keine „überflüssigen" Axiome befinden, d. h. keine Axiome, die als Sätze aus den übrigen Axiomen abgeleitet werden können. Historisch war eines der ersten Ergebnisse dieser Bestrebungen die Ausmerzung des IV. Postulates EUKLIDS (über die Gleichheit aller rechten Winkel, vgl. S. 8) aus dessen Axiomen. Die folgerichtige Weiterführung dieses Gesichtspunktes führt schließlich zum Aufbau einer „minimalen" Axiomatik, d. h. zu einem Axiomensystem, in dem alle Axiome von den übrigen unabhängig sind. Man muß jedoch bedenken, daß die Forderung nach der Unabhängigkeit eines Axiomensystems, so logisch befriedigend und ästhetisch sie auch sein mag, keinerlei grundsätzliche Bedeutung besitzt. Vielmehr ist es vom Standpunkt der leichteren Handhabung einer axiomatischen Theorie aus häufig zweckmäßig, bewußt ein mit überflüssigen Axiomen angefülltes Axiomensystem zu verwenden, da man mit seiner Hilfe meistens einfacher und schneller zu den wirklich interessanten Folgerungen gelangt.

Für den Beweis der Unabhängigkeit eines Axioms von anderen kann man wie folgt vorgehen: Man ersetzt im gegebenen Axiomensystem das als unabhängig nachzuweisende Axiom durch seine Negation und beweist die Widerspruchsfreiheit des dabei entstehenden neuen Axiomensystems. Die Widerspruchsfreiheit des neuen Axiomensystems zeigt man, wie üblich, durch Konstruktion eines Modells, in dem alle Axiome dieses Systems gelten. So sind z. B. die Gruppenaxiome (d. h. die Axiome 1 und 2 auf S. 20) voneinander unabhängig. Als Modell, in dem das Axiom 1, aber nicht das Axiom 2 erfüllt ist, kann beispielsweise die Menge aller ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Multiplikation als Gruppenoperation dienen: Die Gleichung $mx = n$, wobei m und n ganze Zahlen sind, besitzt nicht stets eine ganzzahlige Lösung. Ein Modell, in dem das Axiom 2, aber nicht das Axiom 1 erfüllt ist, bilden z. B. die drei Elemente a, b, c mit der folgenden „Multiplikationstabelle":

$$aa = bb = cc = a, \quad ab = bc = ca = b, \quad ac = ba = cb = c.$$

Man verifiziert leicht, daß in diesem Modell das Axiom 2 tatsächlich erfüllt ist; z. B. haben die Gleichungen

$$ax = b, \quad ya = b$$

die (eindeutigen) Lösungen $x = b$ und $y = c$. Andererseits ist das Axiom 1 nicht erfüllt, denn es ist

$$(bb)\,b = ab = b, \quad b(bb) = ba = c.$$

8.2. Über die Unabhängigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie. Es ist verständlich, daß bei der relativ großen Anzahl der Axiome der Geometrie der Nachweis ihrer Unabhängigkeit sehr kompliziert ist. Die Existenz der nicht-euklidischen Geometrie LOBATSCHEWSKIS beweist die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie, da man das Axiomensystem der LOBATSCHEWSKIschen Geometrie dadurch erhält, daß man in dem von uns behandelten Axiomensystem für die euklidische Geometrie das Axiom 18 durch das folgende Axiom von LOBATSCHEWSKI ersetzt: „Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es in der durch den Punkt und die Gerade bestimmten Ebene mehr als eine Gerade, die die gegebene Gerade nicht schneidet". Die Widerspruchsfreiheit der Geometrie LOBATSCHEWSKIS kann man mit Hilfe von Modellen führen, deren wichtigste in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts von E. BELTRAMI, F. KLEIN und H. POINCARÉ konstruiert wurden (vgl. hierzu den Artikel „Nichteuklidische Geometrie" in Band V der EdEM).

Die Unabhängigkeit der Stetigkeitsaxiome kann man mit Hilfe von Modellen beweisen, die ähnlich wie das obige Modell für die euklidische Geometrie aufgebaut sind, nur daß man an die Stelle des Körpers der reellen Zahlen einen geeigneten anderen Körper setzt. So erhält man eine sogenannte „nichtarchimedische" Geometrie, in der alle Axiome mit Ausnahme des ARCHIMEDischen Axioms gelten, wenn man von einem vollständigen nichtarchimedisch angeordneten Körper[1]) ausgeht, als Punkte alle Tripel (x, y, z) von Elementen dieses Körpers nimmt und die übrigen Grundbegriffe ähnlich wie in dem obigen Modell der euklidischen Geometrie interpretiert.

Die Unabhängigkeit des Axioms von CANTOR läßt sich mit Hilfe einer „nichtcantorschen Geometrie" beweisen. Eine derartige Geometrie erhält man, wenn man von dem Körper aller der reellen Zahlen ausgeht, die sich aus der Zahl Eins durch endlich viele Anwendungen der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Ausziehen der Quadratwurzel erzeugen lassen, als Punkte alle Tripel (x, y, z) von Elementen dieses Körpers nimmt und die übrigen Grundbegriffe ähnlich wie im obigen Modell der euklidischen Geometrie interpretiert.[2]) Sind nämlich $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, ... Strecken der Geraden $y = z = 0$, die den Voraussetzungen des CANTORschen Axioms genügen, wobei jedoch die x-Koordinaten der Punkte A_1, B_1, A_2, B_2, ... rationale Zahlen sind, die gegen eine reelle Zahl konvergieren, welche nicht zu dem betrachteten Körper gehört, so existiert in unserem Modell kein Punkt C, der die Behauptung des CANTORschen Axioms erfüllt. EUKLID selbst betrachtete im wesentlichen nicht das, was wir „euklidischen Raum" nennen, sondern eben diesen nichtcantorschen Raum (vgl. die Ausführungen auf S. 9).

[1]) Vgl. § 24 und § 28 des Artikels von I. W. PROSKURJAKOW in Band I der EdEM; für die Konstruktion eines solchen Körpers verweisen wir z. B. auf Kap. IV, § 3, des im Literaturverzeichnis angegebenen Buches [4] von N. W. EFIMOW. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Die Betrachtung dieses Modells wird durch allgemeine Resultate über geometrische Konstruktionen nahegelegt, die im Artikel „Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal" hergeleitet werden.

Eine besondere Rolle in der Axiomatik der Geometrie spielt das Axiom 8, dessen Inhalt im wesentlichen in der Behauptung besteht, daß *der Raum dreidimensional ist*. Die Unabhängigkeit dieses Axioms von den übrigen kann man z. B. durch die Konstruktion eines *vierdimensionalen euklidischen Raumes* beweisen. Eine Beschreibung sowohl des vierdimensionalen Raumes als auch von Räumen einer höheren (endlichen) Anzahl von Dimensionen findet der Leser im Artikel „Mehrdimensionale Räume" im Band V der EdEM. In der modernen Mathematik betrachtet man übrigens auch unendlichdimensionale Räume, die für viele Anwendungen z. B. auch in der Physik von grundlegender Bedeutung sind.

8.3. Abschließende Bemerkungen. Wir haben gesehen, daß die Frage nach der Unabhängigkeit des Axiomensystems der euklidischen Geometrie zur Betrachtung von vielen Arten „geometrischer Räume" führt, die in ihren Eigenschaften z. T. erheblich von den uns gewohnten Raumvorstellungen der Geometrie EUKLIDS abweichen.

Sehr interessant sind z. B. die „endlichen Räume", die man erhält, wenn man den Körper der reellen Zahlen durch einen endlichen Körper, etwa den Restklassenkörper der ganzen Zahlen modulo einer Primzahl, ersetzt. In einem „endlichen Raum" gibt es auf jeder Geraden, auf jeder Ebene und im ganzen Raum nur endlich viele Punkte und damit auch nur endlich viele Geraden und Ebenen. Die „endlichen Räume" sind zugleich die einfachsten Beispiele für „diskrete Räume", in denen Grenzwerte und Stetigkeit fehlen.

Mittels der durch Axiome festgelegten abstrakten Räume, die sich ihrerseits durch verschiedenartige mathematische Methoden realisieren lassen, kann man räumliche Schemata schaffen, die uns die Möglichkeit bieten, den realen physikalischen Raum besser widerzuspiegeln als mittels des Schemas des euklidischen Raumes. Zudem treten diese abstrakten Räume in steigendem Maße in den verschiedensten Gebieten der Mathematik auf, wodurch sich neue Anwendungen auf die reale Welt ergeben.

Sowohl LOBATSCHEWSKI als auch C. F. GAUSS stellten bereits die Aufgabe, experimentell zu prüfen, welche Geometrie in der realen Welt wirklich gilt: die Geometrie EUKLIDS oder eine andere (z. B. die von LOBATSCHEWSKI). In der allgemeinen Relativitätstheorie wurde gezeigt, daß sich Raum (und Zeit) der realen Welt in sehr guter Näherung durch die sogenannte RIEMANNsche Geometrie beschreiben lassen, die in der Mitte des vorigen Jahrhunderts durch den deutschen Mathematiker B. RIEMANN geschaffen wurde (vgl. dazu den Artikel „Nichteuklidische Geometrie" im Band V der EdEM). Jedoch dürfte auch dieses räumliche Schema bei weitem nicht die beste Approximation sein. Viele Physiker nehmen z. B. an, daß eine ganze Reihe von Schwierigkeiten und Unstimmigkeiten im mathematischen Apparat der heutigen Quantenphysik ihre Ursache darin haben, daß quantenhafte, diskrete Erscheinungen in einem stetigen Raum beschrieben werden und man zur Überwindung dieser Schwierigkeiten zu einem diskreten, gequantelten Raum übergehen muß. Dem widerspricht keineswegs die Tatsache, daß der stetige Raum

die Bedürfnisse der klassischen Physik befriedigt, obgleich etwa eine Flüssigkeit aus diskreten Molekülen und das elektromagnetische Feld aus diskreten Quanten besteht; denn der klassischen Hydrodynamik und Elektrodynamik liegt die Vorstellung zugrunde, daß eine Flüssigkeit und das elektromagnetische Feld stetige Medien sind. Es ist daher durchaus möglich, daß die Geometrie eines Tages zu den Vorstellungen DEMOKRITS über die diskreten Atome des Raumes zurückkehrt, selbstverständlich nicht in derselben naiven Form. In diesem Fall müssen die grundlegenden Begriffe der Geometrie eine wesentlich neue Auffassung erhalten.

Wir haben gesehen, daß sich die Ansichten über die Grundbegriffe der Geometrie und deren gegenseitigen Beziehungen im Verlaufe der Entwicklung der Wissenschaft wiederholt gewandelt haben, und so werden in Zukunft neue wissenschaftliche Entdeckungen sicher auch einen weiteren Wandel in unseren geometrischen Vorstellungen bewirken.

Literatur

[1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 11. Aufl., Stuttgart 1972.

[2] Рашевский, П. К., Геометрия и ее аксиоматика, Сборник „Математическое просвещение" (Raschewski, P. K., Die Geometrie und ihre Axiomatik, Artikelsammlung „Mathematische Bildung"), Heft 5, Moskau 1960, S. 73–98.

[3] Каган, В. Ф., Очерки по геометрии (Kagan, W. F., Skizzen über die Geometrie), Moskau 1963.

[4] Efimow, N. W., Höhere Geometrie, Berlin 1960 (Übersetzung aus dem Russischen).

[5] Костин, В. И., Основания геометрии (Kostin, W. I., Grundlagen der Geometrie), Moskau 1948.

[6] Трайнин, Я. Л., Основания геометрии (Trainin, J. L., Grundlagen der Geometrie), Moskau 1961.

[7] Euklid, Elemente. Nach Heibergs Text übersetzt von Cl. Thaer. Leipzig 1933 bis 1937.

[8] van der Waerden, B. L., Erwachende Wissenschaft, Basel-Stuttgart 1956 (Übersetzung aus dem Holländischen).

Man vergleiche ferner das am Schluß des Artikels „Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen" zitierte Lehrbuch [3] von D. I. Perepelkin, das eine vollständige Geometrievorlesung enthält, die auf einem geschickt und absichtlich nicht unabhängig gewählten Axiomensystem beruht.

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

Böhm, J., u.a., Geometrie I, 3. Aufl., Berlin 1979.

Efimow, N. W., Über die Grundlagen der Geometrie (Höhere Geometrie, Teil I), 2. Aufl., Berlin 1973; vgl. auch [4].

Klotzek, B., Geometrie, Berlin 1971.

Lenz, H., Grundlagen der Elementarmathematik, 3. Aufl., Berlin 1975.

I. M. JAGLOM UND L. S. ATANASJAN

GEOMETRISCHE TRANSFORMATIONEN

§ 1. Der Begriff der Transformation. Beispiele

1.1. Geometrische Abbildungen. Einer der grundlegenden Begriffe der modernen Mathematik ist der Funktionsbegriff[1]). Eine Veränderliche y heißt *Funktion* einer Veränderlichen x (es wird $y = f(x)$ geschrieben), wenn jedem Element x einer gegebenen Menge (des *Definitionsbereiches der Funktion*) ein eindeutig bestimmter Wert y entspricht. Dabei kann die Vorschrift, nach welcher für ein gegebenes x das zugehörige y bestimmt wird, in analytischen Formeln oder einfach in einer Tabelle, in welcher alle Werte x und die ihnen entsprechenden y aufgeführt sind, bestehen. (Die zuletzt genannte Art der Festlegung einer Funktion ist insbesondere dann anwendbar, wenn x nur endlich viele Werte annehmen kann.) Auch andere Arten der Festlegung einer Funktion sind möglich (z. B. die Beschreibung in Worten, wie sie bei der bekannten Dirichletschen Funktion erfolgt: *Jedem rationalen Wert x entspricht der Wert $y = 1$, und jedem irrationalen Wert x entspricht der Wert $y = 0$*).

Wir bemerken, daß in der Definition der Funktion keineswegs verlangt wird, daß die Veränderlichen unbedingt reelle Zahlen sind. Man läßt im Gegenteil in der modernen Mathematik zu, daß x und y Elemente vollkommen beliebiger (auch unterschiedlicher!) Natur sein können, etwa komplexe Zahlen[2]), Punkte der Ebene oder des Raumes, irgendwelche geometrischen Figuren, Geraden oder beliebige Linien usw. So sind der Mittelpunkt und auch der Radius eines Kreises Funktionen dieses Kreises (hier besteht der Definitionsbereich aus allen Kreisen; die zugeordneten Werte sind Punkte bzw. Zahlen). In neuer Zeit nimmt in der Mathematik das Studium solcher Funktionen $y = f(x)$ einen großen Raum ein, bei denen x oder sogar x und y Funktionen im alten Sinne dieses Wortes, d. h. Zahlenfunktionen sind.[3])

In der Geometrie spielen eine wichtige Rolle Funktionen $y = \Phi(x)$, bei denen x und y Punkte der Ebene oder des Raumes sind. In diesem Fall wird das

[1]) Vgl. § 46 und § 54 des Artikels „Elementare Funktionen einer reellen Veränderlichen. Grenzwerte von Folgen und Funktionen. Der allgemeine Funktionsbegriff" in Band III der EdEM.

[2]) Den Funktionen einer komplexen Veränderlichen ist der Artikel „Elementare Funktionen einer komplexen Veränderlichen" in Band III der EdEM gewidmet.

[3]) Mit dem Studium der Funktionen dieser Art beschäftigt sich in der modernen Mathematik eine umfangreiche Spezialwissenschaft, die *Funktionalanalysis*. Funktionen $y = f(x)$, bei denen $x = x(t)$ eine Funktion irgendeiner Veränderlichen t und y eine Zahl ist, etwa $y = \int_a^b x(t)\,dt$, heißen *Funktionale*. Funktionen $y = F(x)$, bei denen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ Zahlenfunktionen sind, etwa $y(t) = x'(t)$ oder $y(t) = \int_a^t x(t)\,dt$, heißen *Funktionaloperatoren*. In der Funktionalanalysis spielen die Funktionale dieselbe Rolle wie die Zahlenfunktionen (einer oder mehrerer Veränderlicher) in der gewöhnlichen Analysis; die Rolle der Funktionaloperatoren ähnelt der Rolle der geometrischen Transformationen.

Wort „Funktion" gewöhnlich durch die Bezeichnung „geometrische (Punkt-) Abbildung" ersetzt. Eine geometrische Abbildung ist daher nichts anderes als eine bestimmte Art von funktionaler Abhängigkeit $y = f(x)$, bei der nämlich als „Argumente" x und als „Funktionswerte" y Punkte auftreten.

Zur Festlegung einer *geometrischen (Punkt-) Abbildung* Φ sind also folgende Bestimmungsstücke nötig: 1. eine gewisse Figur (Punktmenge) $\mathscr{A}$ als sogenannter *Definitionsbereich der Abbildung* Φ; 2. eine gewisse Figur $\mathscr{A}'$ als sogenannter *Wertebereich der Abbildung* Φ; 3. eine gewisse *Vorschrift*, durch welche jedem Punkt A des Bereiches $\mathscr{A}$ eindeutig ein Punkt $A' = \Phi(A)$ des Bereiches $\mathscr{A}'$ zugeordnet wird. Wenn die gegebene Abbildung Φ den Punkt A in den Punkt A' überführt, d. h. $\Phi(A) = A'$ ist, heißt der Punkt A' das *Bild des Punktes A bei der Abbildung* Φ. Es sei jetzt L eine gewisse Linie (oder Figur), die ganz im Bereich $\mathscr{A}$ liegt. Durchläuft der Punkt A diese Linie (oder Figur) L, so durchläuft das Bild $A' = \Phi(A)$ dieses Punktes eine gewisse Punktmenge L' des Bereiches $\mathscr{A}'$. Diese Menge L' heißt das *Bild der Menge L bei der Abbildung* Φ, und man schreibt $L' = \Phi(L)$.[1])

Beispiel 1. Die Abbildung Φ definieren wir folgendermaßen: Als Definitionsbereich $\mathscr{A}$ nehmen wir die ganze Ebene und als Wertebereich $\mathscr{A}'$ eine gewisse Gerade der Ebene $\mathscr{A}$. Wir ordnen einem beliebigen Punkt A als Bild

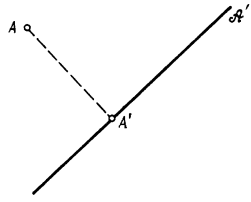


Abb. 1

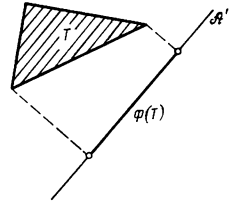


Abb. 2

denjenigen Punkt A' zu, der sich durch orthogonale Projektion von A auf die Gerade $\mathscr{A}'$ ergibt (Abb. 1). Ist L eine Gerade, die nicht senkrecht auf $\mathscr{A}'$ steht, so fällt ihr Bild $L' = \Phi(L)$ offenbar mit der ganzen Geraden $\mathscr{A}'$ zusammen; das Bild $\Phi(L_1)$ einer zu $\mathscr{A}'$ senkrechten Geraden L_1 ist ein einziger Punkt auf $\mathscr{A}'$; das Bild $\Phi(S)$ eines beliebigen Kreises S (oder eines beliebigen Dreiecks; Abb. 2) ist eine Strecke.

Beispiel 2. In der Ebene führen wir ein gewisses (rechtwinkliges) Koordinatensystem ein. Wir definieren eine Abbildung Φ, indem wir als Definitionsbereich und Wertebereich die ganze Ebene nehmen und einem belie-

[1]) Bei der vorangehenden Definition ist nicht vorausgesetzt, daß alle Punkte von $\mathscr{A}'$ als Bilder von Elementen der Punktmenge $\mathscr{A}$ auftreten. Meistens bezeichnet man als Wertebereich die Gesamtheit aller Bilder, d. h., man setzt $\mathscr{A}' = \Phi(\mathscr{A})$. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

bigen Punkt A mit den Koordinaten (x, y) den Punkt $A' = \Phi(A)$ mit den Koordinaten $(\sin x, \sin y)$ zuordnen.

Beispiel 3. Als letztes Beispiel nennen wir die Drehung der Ebene $\mathscr{A}$ um den Punkt O mit dem Winkel α. Für diese Abbildung bestehen der Definitionsbereich und der Wertebereich aus allen Punkten der Ebene $\mathscr{A}$; als Bild eines Punktes A wird derjenige Punkt A' der Ebene definiert, für den $|OA'| = |OA|$ und $\sphericalangle AOA' = \alpha$ ist, wobei zusätzlich die Drehrichtung (entweder „im Uhrzeigersinn" oder „entgegen dem Uhrzeigersinn") im voraus festgelegt werden muß (Abb. 3).

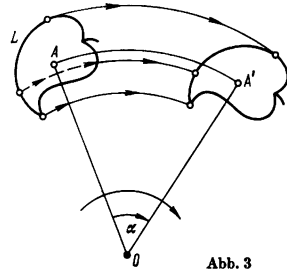


Abb. 3

1.2. Geometrische Transformationen. Zwischen den oben betrachteten Beispielen 1 und 2 einerseits und dem Beispiel 3 andererseits besteht ein wesentlicher Unterschied. Bei den in den Beispielen 1 und 2 betrachteten Abbildungen existieren verschiedene Punkte, deren Bilder zusammenfallen, d. h. Punkte $A \neq B$, für welche $\Phi(A) = \Phi(B)$ ist. So ist bei der im Beispiel 1 betrachteten Abbildung $\Phi(A) = \Phi(B)$, wenn man als B einen beliebigen Punkt der Geraden AA' nimmt (Abb. 1). Durch die Abbildung Φ des Beispiels 2 werden z. B. jeweils die Punkte $A(x, y)$ und $B(x + 2\pi, y - 4\pi)$ in ein und denselben Punkt übergeführt. Diesen Sachverhalt drückt man folgendermaßen aus: Die in den Beispielen 1 und 2 betrachteten Abbildungen sind nicht eineindeutig. Bei der in Beispiel 2 betrachteten Abbildung Φ ist außerdem nicht jeder Punkt des Wertebereiches $\mathscr{A}'$ $(= \mathscr{A})$ Bild eines gewissen Punktes; z. B. ist der Punkt $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ kein Bild eines Punktes (denn es existiert keine reelle Zahl x mit $\sin x = 2$).

Eine Abbildung Φ mit dem Definitionsbereich $\mathscr{A}$ und dem Wertebereich $\mathscr{A}'$ heißt *eineindeutige Abbildung* von $\mathscr{A}$ auf $\mathscr{A}'$, wenn 1. für keine zwei verschiedenen Punkte A und B des Bereiches $\mathscr{A}$ ihre Bilder $\Phi(A)$ und $\Phi(B)$ zusammenfallen und 2. bei der Abbildung jeder Punkt des Bereiches $\mathscr{A}'$ Bild eines gewissen Punktes aus $\mathscr{A}$ ist.

Grob gesprochen ist eine eineindeutige Abbildung Φ von $\mathscr{A}$ auf $\mathscr{A}'$ dadurch charakterisiert, daß keine zwei verschiedenen Punkte durch die Abbildung Φ „zusammengeklebt" werden und außerdem Φ den Bereich $\mathscr{A}$ nicht nur auf einen Teil des Bereiches $\mathscr{A}'$, sondern auf den ganzen Bereich $\mathscr{A}'$ abbildet.

Eine wesentliche Rolle spielen in der Geometrie diejenigen eineindeutigen Abbildungen, für welche der Definitionsbereich $\mathscr{A}$ mit dem Wertebereich $\mathscr{A}'$ zusammenfällt. Solche Abbildungen heißen *Transformationen* der Menge $\mathscr{A}$.

Die Menge $\mathfrak{A}$ selbst werden wir den *Operationsbereich* der Transformation Φ nennen.

Die im Beispiel 3 betrachtete Abbildung Φ (die Drehung der Ebene um den Punkt O mit dem Winkel α) ist offenbar ein Beispiel einer Transformation der Ebene (d. h. einer Transformation, deren Operationsbereich die ganze Ebene ist).

In diesem Artikel werden wir uns im weiteren auf die Betrachtung von Transformationen[1]) beschränken, und zwar auf solche Transformationen, deren Operationsbereich die Ebene oder „annähernd die Ebene" ist.[2]) Genauer gesagt werden wir in einer Reihe von Fällen gezwungen sein, als Operationsbereich der betrachteten Transformation Φ nicht die ganze Ebene anzusehen, sondern die Ebene mit „herausgestochenen" (d. h. entfernten) Punkten oder Linien. Andererseits werden wir manchmal zur Ebene neue („uneigentliche", d. h. vom Standpunkt der Schulgeometrie nicht existierende) Punkte oder Linien hinzufügen. Weil aber in allen Fällen für die Konstruktion des Operationsbereiches der Transformation Φ als Grundlage die Ebene dient, wollen wir – indem wir eine gewisse Ungenauigkeit zulassen – alle betrachteten Transformationen unter der gemeinsamen Bezeichnung *Transformationen der Ebene* zusammenfassen.

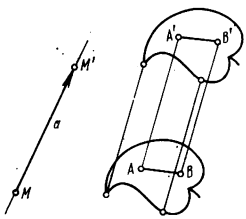


Abb. 4

Wir geben noch einige Beispiele für Transformationen der Ebene an.

Beispiel 4. In der Ebene wählen wir eine feste Richtung MM' (sie kann z. B. durch eine Gerade mit einem Pfeil angegeben werden); außerdem geben wir eine bestimmte Länge a vor (Abb. 4). Einem beliebigen Punkt A der Ebene ordnen wir als Bild denjenigen Punkt A' zu, für den die Strecke AA' die Richtung von MM' und die Länge a hat. Die konstruierte Abbildung Φ heißt die *Parallelverschiebung* der Ebene in Richtung MM' um die Größe a (oder Verschiebung um den Vektor $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$ [3])).

Beispiel 5. In der Ebene wählen wir einen bestimmten Punkt O aus und ordnen einem beliebigen von O verschiedenen Punkt A denjenigen Punkt A' als Bild zu, für den die Strecke AA' durch den Punkt O hindurchgeht und von

---

[1]) In einigen Gebieten der Geometrie spielen auch Abbildungen, die keine Transformationen sind, eine bedeutende Rolle. Zum Beispiel sind die verschiedenen Arten von Projektionen des dreidimensionalen Raumes auf die Ebene keine Transformationen; sie werden ausführlich im Artikel „Abbildungsmethoden" studiert.

[2]) Im vorliegenden Artikel werden wir fast nichts über Transformationen des Raumes sagen, weil der einfachere Fall der Ebene bereits dafür ausreicht, alle prinzipiellen Momente der Theorie der geometrischen Transformationen zu erläutern.

[3]) Vgl. den Artikel „Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie".

ihm halbiert wird (Abb. 5); als Bild des Punktes O wählen wir den Punkt O selbst. Die auf diese Weise definierte Transformation heißt die *Spiegelung der Ebene am Punkt O*. Es ist leicht zu sehen, daß die Spiegelung am Punkt O ein Spezialfall der Drehung ist; sie stimmt nämlich mit der Drehung um den Punkt O mit dem Winkel 180° überein.

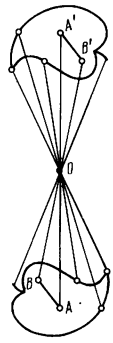


Abb. 5

Beispiel 6. Wir geben in der Ebene eine gewisse Gerade o vor und ordnen einem beliebigen nicht auf o gelegenen Punkt A denjenigen Punkt A' als Bild zu, für den die Strecke AA' orthogonal zu o ist und von dieser Geraden halbiert wird (Abb. 6); die Punkte der Geraden o ordnen wir sich selbst zu. Die erhaltene Transformation der Ebene wird die *Spiegelung an der Geraden o* genannt.

Beispiel 7. In der Ebene wählen wir einen Punkt O aus und ordnen einem beliebigen von O verschiedenen Punkt A denjenigen Punkt A' des Strahls $\overrightarrow{OA}$ als Bild zu, für den $\frac{|OA'|}{|OA|} = k$ ist, wobei k eine gegebene positive Zahl bedeutet (Abb. 7); der Punkt O wird sich selbst zugeordnet. Diese Transformation heißt die *Kontraktion* oder *zentrale Ähnlichkeitstransformation zum Punkt O mit dem Koeffizienten k*[1]) oder auch *Homothetie*[2]) (mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten k).

Häufig läßt man auch negative Zahlen als Homothetiekoeffizienten k zu; in diesem Fall nimmt man als Bild A' denjenigen Punkt der Geraden OA, für den $\frac{|OA'|}{|OA|} = |k|$ ist und die Richtungen der Strecken OA' und OA (von O zu

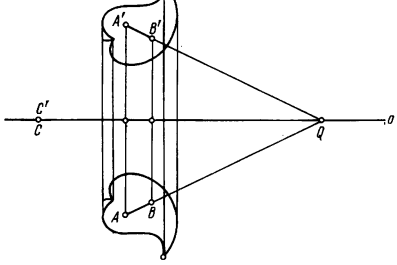


Abb. 6

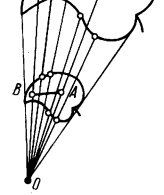


Abb. 7

[1]) Wenn der Koeffizient k größer als 1 und demnach $|OA'| > |OA|$ ist, wäre es angebrachter, die Transformation nicht Kontraktion, sondern *Dehnung* zu nennen.

[2]) Von den griechischen Wörtern ὁμός (gleich) [oder ὅμοιος (ähnlich)] und θετος (gelegen).

A' und von O zu A) entgegengesetzt sind. Wenn man sich auf diesen Standpunkt stellt, kann man die Spiegelung an einem Punkt (Beispiel 5) als Spezialfall der Homothetie ansehen, nämlich als eine Homothetie mit dem Koeffizienten $k = -1$.

Beispiel 8. Wir geben eine gewisse Gerade o der Ebene vor und ordnen einem beliebigen, nicht auf o gelegenen Punkt A denjenigen Punkt A' als Bild zu, für den A und A' auf der gleichen Seite von o liegen, die Gerade AA' senkrecht auf o steht und die Abstände $|AO|$ und $|A'O|$ der Punkte A und A' von o durch die Relation $\frac{|OA'|}{|OA|} = k$ zusammenhängen, wobei k eine gegebene positive Zahl ist (Abb. 8); wenn der Punkt A zu o gehört, ordnen wir A als

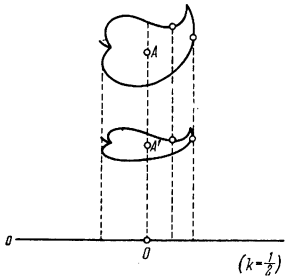


Abb. 8

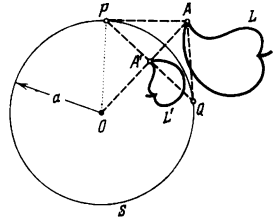


Abb. 9

Bild sich selbst zu. Die auf diese Weise definierte Transformation heißt naturgemäß die *Kontraktion in bezug auf die Gerade o mit dem Koeffizienten k*, und die Gerade o heißt die *Achse der Kontraktion*.

Man kann auch hier negative Werte als Koeffizienten k einer Kontraktion zulassen (in diesem Fall haben die Strecken OA' und OA entgegengesetzte Richtung, d. h., die Punkte A und A' liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden o). Die Kontraktion in bezug auf die Gerade o mit dem Kontraktionskoeffizienten $k = -1$ stellt dann offenbar die Spiegelung an der Geraden o dar (Beispiel 6).

Beispiel 9. Die Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten k (Beispiel 7) wurde als die Transformation definiert, die den Punkt A in den Punkt A' des Strahls $\overrightarrow{OA}$ überführt, für den das Verhältnis $\frac{|OA'|}{|OA|}$ gleich k ist. Jetzt betrachten wir die Transformation, die den Punkt A in denjenigen Punkt A' des Strahls $\overrightarrow{OA}$ überführt, für den das Produkt $|OA| \cdot |OA'|$ einen gegebenen Wert k hat, also $|OA'| \cdot |OA| = k$, wobei k eine gegebene posi-

tive Zahl ist (Abb. 9). Diese Transformation heißt die *Inversion*[1]) *mit dem Zentrum O und dem Grad k*. Wenn $k = a^2$ ist, gehen die Punkte des Kreises S mit dem Mittelpunkt O und dem Radius a bei der Inversion in sich über. Die außerhalb des Kreises S gelegenen Punkte gehen in innere Punkte und die innerhalb des Kreises gelegenen Punkte in äußere Punkte über. Dieser Umstand erklärt auch eine andere Bezeichnung für die betrachtete Transformation: *Spiegelung am Kreis S*. Die Spiegelung am Kreis S kann man auch geometrisch beschreiben. Bei dieser Transformation geht ein außerhalb von S gelegener Punkt A in den Schnittpunkt A' der Geraden OA (wobei O der Mittelpunkt des Kreises ist) mit der Geraden PQ über, wobei P und Q die Berührungspunkte der von A ausgehenden Tangenten an S sind. Umgekehrt geht der Punkt A' in den Punkt A über, was daraus folgt, daß in dem rechtwinkligen Dreieck OPA (Abb. 9) PA' die Höhe ist und daher $|OA| \cdot |OA'| = |OP|^2 = a^2 = k$ gilt.

Man kann auch zulassen, daß der Grad k einer Inversion negativer Werte fähig ist. In diesem Fall sind die Strecken OA und OA' entgegengerichtet, und es gilt $|OA'| \cdot |OA| = |k|$.

Wir bemerken, daß wir genau genommen keine exakte Definition der Inversion gegeben haben, denn die oben beschriebene Abbildung ist im Punkt O nicht definiert. Diesem Punkt entspricht bei der Inversion kein Punkt der Ebene. Eine Möglichkeit zur Beseitigung dieser Inkorrektheit besteht darin, daß man als Operationsbereich der Inversion nicht die ganze Ebene ansieht, sondern als Operationsbereich $\mathscr{A}$ die Ebene unter Ausschluß des („herausgestochenen") Punktes O nimmt, weil dieser Punkt bei der Inversion kein Bild hat. Es ist klar, daß die Inversion eine eineindeutige Abbildung dieses Bereiches $\mathscr{A}$ (der „gelochten" Ebene) auf sich darstellt. Wir begegnen hier also erstmalig einer „Transformation der Ebene", deren Operationsbereich sich von der ganzen Ebene unterscheidet.

Man kann sich aber auch auf einen anderen Standpunkt stellen. Weil der Punkt O kein Bild bei der Inversion hat, kann man verabreden, daß der Punkt O bei der Inversion in einen „uneigentlichen" (nicht auf der gewöhnlichen Ebene vorhandenen) Punkt Ω und umgekehrt der Punkt Ω bei der Inversion in den Punkt O übergeht. Bei einer solchen Betrachtung wird eine Inversion also eine eineindeutige Abbildung („Transformation") der „erweiterten" Ebene $\mathscr{A}^*$, die man aus der gewöhnlichen Ebene durch Hinzufügen eines neuen Punktes Ω erhält. Bei der Inversion entfernt sich der Bildpunkt A' eines sich dem Punkt O nähernden Punktes A unbeschränkt von O (denn es ist $|OA'| = \frac{k}{|OA|}$); daher bezeichnet man das Bild Ω des Punktes O manchmal als *unendlich fernen Punkt* der „erweiterten" Ebene $\mathscr{A}^*$. Die durch Adjunktion eines „unendlich fernen" Punktes Ω aus der gewöhnlichen Ebene $\mathscr{A}$ entstandene Ebene $\mathscr{A}^*$ wird häufig *erweiterte Ebene*[2]) genannt. Weil wir im folgenden jedoch auch anderen Arten der „Erweiterung" der gewöhnlichen Ebene be-

[1]) Von dem lateinischen Wort inversio (Umkehrung).

[2]) Diese Bezeichnung ist z. B. in der Funktionentheorie üblich.

gegnen werden, ist hier der Terminus *geschlossene Ebene* passender. Die Gründe für eine solche Bezeichnung werden später auseinandergesetzt.[1])

Wir können also als Operationsbereich der Inversion entweder die gelochte Ebene oder die durch Adjunktion eines „uneigentlichen" Punktes „erweiterte" Ebene ansehen. Im folgenden wird es sich zeigen, daß es bei einer Reihe von Fragen wesentlich bequemer ist, die erweiterte Ebene als Operationsbereich der Inversion zu betrachten.

Wir möchten hier betonen, daß eine Aussage der Form „die Inversion führt den Punkt O in den unendlich fernen Punkt über" kein eigentliches Theorem ist, sondern nur eine andere Formulierung für die Tatsache darstellt, daß der Punkt O bei der Inversion auf der gewöhnlichen Ebene kein Bild hat. Die Einführung des Begriffes der geschlossenen Ebene bedeutet ein rein terminologisches

[1]) Wir bemerken noch, daß die geschlossene Ebene $\mathfrak{A}^*$, die der Operationsbereich der Inversion ist, eineindeutig (mit Hilfe der stereographischen Projektion; vgl. S. 17ff.) auf die Oberfläche S einer Kugel abgebildet werden kann, so daß also die Kugeloberfläche als *Modell* (vgl. S. 15ff.) der geschlossenen Ebene angesehen werden kann. Der Punkt Ω geht bei der stereographischen Projektion in den „Nordpol" N der Sphäre S über. Wenn dabei der Radius der Sphäre S so ausgewählt wird, daß der Kreis der Inversion bei der stereographischen Projektion in den Äquator der Sphäre S übergeht, entspricht der Inversion der geschlossenen Ebene $\mathfrak{A}^*$ die Spiegelung der Sphäre S an der Äquatorebene.

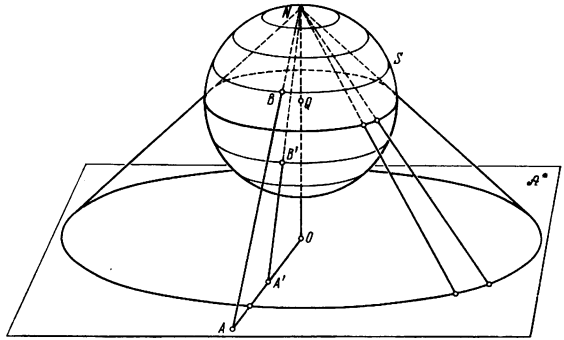


Abb. 10

Anders ausgedrückt: Sind B und B' zwei bezüglich der Äquatorebene symmetrisch gelegene Punkte auf der Sphäre und werden sie von N aus auf die Ebene in die Punkte A und A' projiziert (Abb. 10), so geht A in A' über bei der Inversion bezüglich desjenigen Kreises, in welchen der Äquator der Sphäre projiziert wird (vgl. in diesem Zusammenhang auch S. 477–485).

Übereinkommen: Wir machen hier einen neuen Schritt der mathematischen Abstraktion, indem wir ein vollkommen neues Gebilde betrachten, nämlich eine Ebene, die außer den Punkten, welche in der Schulgeometrie auftreten, noch einen neuen (mit den übrigen gleichberechtigten!) „unendlich fernen" Punkt enthält. Hierbei ist die geschlossene Ebene ein ebenso berechtigter mathematischer Begriff wie die gewöhnliche „euklidische" Ebene. Ist doch auch die Vorstellung einer (unbeschränkten) Ebene, in welcher jede Gerade unbegrenzt nach beiden Seiten fortgesetzt werden kann, nur eine mathematische Abstraktion. Eine genaue Beschreibung dieser Ebene wird lediglich durch die Axiome gegeben, welche die Geometrie der Ebene charakterisieren.[1]) Dabei bedingen unterschiedliche Axiomensysteme eine unterschiedliche Festlegung des Gebrauchs des Wortes „Ebene". So ist etwa auf der geschlossenen Ebene das folgende Axiom nicht erfüllt: „Durch zwei Punkte geht eine einzige Gerade". Es gehen nämlich durch einen „gewöhnlichen" Punkt A und den „unendlich fernen" Punkt Ω unendlich viele Geraden hindurch (denn alle Geraden der geschlossenen Ebene gehen durch den „unendlich fernen" Punkt Ω, so daß die Bilder der Geraden bei der Inversion alle durch das Inversionszentrum O gehen; vgl. S. 69). Die unterschiedlichen Auffassungen des Begriffs der Ebene, die durch die verschiedenen Axiomensysteme charakterisiert werden, sind alle gleich zulässig. In Abhängigkeit von den jeweiligen Aufgaben wird es nötig sein, das Wort „Ebene" in dem einen oder anderen Sinne zu deuten. Vollkommen gegenstandslos wäre auch der Streit, ob die Ebene einen oder mehrere „unendlich ferne" Punkte besitzt. Das hängt allein vom eingenommenen Standpunkt ab, der durch die vorgelegten Aufgaben bedingt ist. In manchen Fällen (z. B. im Zusammenhang mit Homologiebetrachtungen — vgl. S. 104ff. — oder mit der hyperbolischen Inversion — vgl. Beispiel 10) können wir vor die Notwendigkeit gestellt werden, eine gänzlich andere Vervollständigung der Ebene durch „ideale" oder „unendlich ferne" Elemente zu betrachten. Die hierbei erhaltene „Ebene" wird sich von der gewöhnlichen und der geschlossenen Ebene unterscheiden, aber sie wird weder „schlechter" noch „besser" sein als diese.

Beispiel 10. Es sei o eine gegebene Gerade und k eine feste positive Zahl. Die Abbildung Φ führe einen Punkt A in denjenigen Punkt A' über, der auf der gleichen Seite der Geraden o wie A liegt und wobei AA' senkrecht auf o steht und $|OA'| \cdot |OA| = k$ gilt, wenn O den Schnittpunkt der Geraden AA' mit o bezeichnet (Abb. 11). Diese Transformation heißt die *hyperbolische Inversion*[2]) *mit der Achse o und dem Grad k*. Wenn $k = a^2$ ist, gehen bei unserer Transformation die Punkte der zu o im Abstand a parallel verlaufenden Geraden l und l_1 in sich über. Die inneren Punkte des von l und l_1 begrenzten Streifens gehen in äußere Punkte und die äußeren Punkte in innere über. Hiermit hängt die Bezeichnung *Spiegelung an einem Paar paralleler Geraden* zusammen, die man manchmal der betrachteten Transformation gibt. Es ist klar, daß die Bildpunkte einer zu l senkrechten Geraden n bei der Spiegelung an den parallelen Geraden l und l_1 mit den Bildpunkten dieser Geraden bei der Spiegelung an dem Kreis S zusammenfallen, dessen Mittelpunkt

[1]) Vgl. den Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie" in diesem Band der EdEM.

[2]) Die Gründe für diese Bezeichnung werden später erklärt (vgl. S. 70).

der Schnittpunkt O der Geraden o und n und dessen Radius a ist. Diese Tatsache kann zur Konstruktion des Bildes A' eines Punktes A bei der hyperbolischen Inversion benutzt werden (Abb. 11). Häufig läßt man auch negative Werte als Grad der hyperbolischen Inversion zu. In diesem Fall ist $|OA'| \cdot |OA| = |k|$, und die Strecken OA' und OA sind entgegengesetzt gerichtet.

Als Operationsbereich der hyperbolischen Inversion kann man die um die Gerade o verminderte gewöhnliche Ebene ansehen, weil die Punkte dieser Geraden bei unserer Transformation in keine Punkte der Ebene übergeführt werden. Man kann aber auch einen

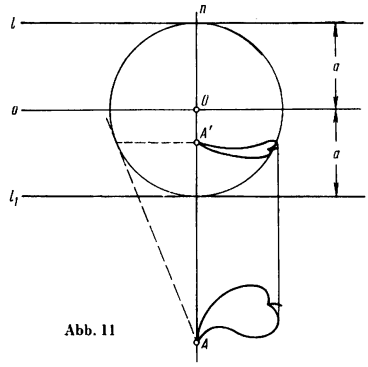


Abb. 11

anderen Operationsbereich der hyperbolischen Inversion konstruieren. Dazu entfernt man keine „überflüssigen" Punkte, sondern adjungiert im Gegenteil neue „uneigentliche" Punkte zur Ebene. Darauf wollen wir hier jedoch nicht weiter eingehen.

Bemerkung. Alle bisher betrachteten Punkttransformationen sind *stetig*, d. h., sie besitzen die folgende Eigenschaft: Wenn eine Punktfolge A_n aus dem Operationsbereich der Transformation Φ gegen einen Punkt A aus dem Operationsbereich der Transformation konvergiert (wenn also die Abstände $|A_nA|$ mit wachsendem n gegen Null streben), konvergieren die den Punkten A_n zugeordneten Punkte $A'_n = \Phi(A_n)$ gegen den Bildpunkt $A' = \Phi(A)$ von A. Man kann auch leicht Beispiele für unstetige Transformationen angeben (z. B. ist die Transformation unstetig, bei der alle zu einer gegebenen Geraden l parallelen Geraden in sich verschoben werden, und zwar um die Strecke $a \neq 0$, wenn ihr Abstand von l rational ist, und um die Strecke $2a$, wenn ihr Abstand von l irrational ist). Weil aber in der Geometrie fast ausschließlich stetige Transformationen untersucht werden, beschränken wir unsere Betrachtung hier auf solche Transformationen. Übrigens werden wir nirgends die Stetigkeit der zu betrachtenden Transformationen ausnutzen.

1.3. Einige Typen geometrischer Transformationen. Es ist unschwer zu sehen, daß die in den Beispielen 3 bis 6 beschriebenen Transformationen die folgende bemerkenswerte Eigenschaft besitzen: Zwei beliebige Punkte A und B

gehen stets in solche Punkte A' und B' über, deren Abstand $|A'B'|$ gleich dem Abstand $|AB|$ ist (Abb. 12 bis 15). Transformationen, die den Abstand zwischen den Punkten invariant lassen, heißen *Bewegungen*. Die *Drehungen*, die *Parallelverschiebungen*, die *Spiegelungen an einem Punkt* und die *Spiegelungen an einer Geraden* sind also Bewegungen der Ebene.

Für die in Beispiel 7 beschriebene Transformation (die Homothetie) folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $OA'B'$ und OAB (Abb. 16), daß der Abstand der Bildpunkte A' und B' proportional dem Abstand der Punkte A und B

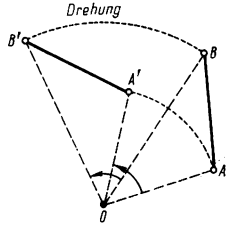


Abb. 12

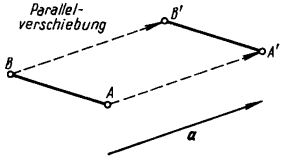


Abb. 13

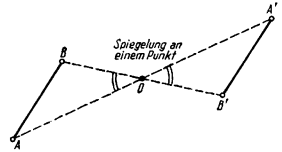


Abb. 14

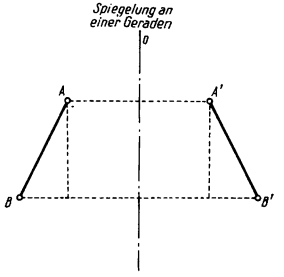


Abb. 15

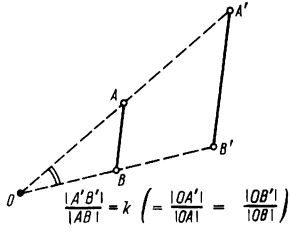


Abb. 16

ist (der Proportionalitätsfaktor k hängt dabei nur von der Transformation und nicht von der Wahl der Punkte A und B ab). Transformationen, die die Abstände der Punkte im gleichen Verhältnis k ändern (oder anders gesagt, die das Abstandsverhältnis invariant lassen, d. h., bei denen für Punkte A, B, C, D

und ihre Bilder A', B', C', D' stets $\frac{|A'B'|}{|C'D'|} = \frac{|AB|}{|CD|}$ gilt), heißen *Ähnlichkeitstransformationen* (mit dem Ähnlichkeitskoeffizienten k). Die Bewegungen kann man als Ähnlichkeitstransformationen mit dem Ähnlichkeitskoeffizienten 1 ansehen. Jede Homothetie ist damit eine Ähnlichkeitstransformation.[1])

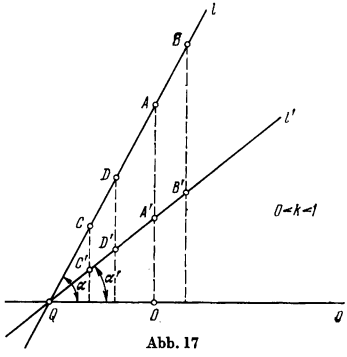


Abb. 17

Die in Beispiel 8 beschriebene Transformation (die Kontraktion in bezug auf eine Gerade) besitzt die folgende wichtige Eigenschaft: Jede Gerade l wird durch sie in eine gewisse Gerade l' übergeführt. Diese Behauptung ist offensichtlich, wenn l eine zu der Kontraktionsachse o parallele oder orthogonale Gerade ist (insbesondere geht jede zur Kontraktionsachse orthogonale Gerade in sich über). Bildet die Gerade l mit o einen spitzen Winkel α, so geht sie in die Gerade l' über, welche die Kontraktionsachse o in demselben Punkt Q wie l schneidet und mit der Geraden o einen solchen Winkel α' bildet, daß $\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = k$ ist. Denn wenn die Senkrechte zu o im Punkt O die Gerade l im Punkt A schneidet und A' auf der Senkrechten derjenige Punkt mit $\tan (\sphericalangle A'QO) = k \cdot \tan \alpha$ ist, gilt (Abb. 17)

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OQ| \cdot \tan (\sphericalangle A'QO)}{|OQ| \cdot \tan \alpha} = k.$$

Folglich geht der Punkt A in den Punkt A' über. Transformationen der Ebene, welche jede Gerade in eine Gerade überführen, heißen *affine*[2]) *Transformationen*. Die Kontraktionen in bezug auf eine Gerade sind also affine Transformationen. Jede Kontraktion in bezug auf eine Gerade besitzt noch folgende Eigenschaften: Sie führt parallele Geraden in parallele Geraden über, und sie läßt das Verhältnis zweier auf einer Geraden liegenden Strecken invariant. Diese Eigenschaften der Kontraktion in bezug auf eine Gerade kann man unschwer aus ihrer Definition ableiten. Wir werden diese Ableitung jedoch nicht

[1]) Es ist leicht einzusehen, daß eine Homothetie mit dem (positiven oder negativen) Homothetiekoeffizienten k eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Ähnlichkeitskoeffizienten $|k|$ darstellt.

[2]) Von dem lateinischen Wort affinitas (Verwandtschaft).

durchführen, da wir später sehen werden, daß sogar jede affine Transformation diese Eigenschaften besitzt (vgl. S. 71).

Die in Beispiel 9 angeführte Transformation (die Inversion) ist keine affine Transformation, da sie, wie wir später sehen werden (S. 69), Geraden in Geraden oder in Kreise überführt. Weiterhin werden bei einer Inversion auch Kreise entweder in Kreise oder in Geraden übergeführt. Transformationen, die jeden Kreis und jede Gerade in einen Kreis oder in eine Gerade überführen, heißen *Kreistransformationen*[1]). Jede Inversion ist also eine Kreistransformation.[2])

Es ist leicht einzusehen, daß jede Bewegung und jede Ähnlichkeitstransformation Geraden in Geraden und Kreise in Kreise transformiert. Denn ein Kreis ist die Menge aller von einem Punkt O gleich weit entfernten Punkte, während eine Gerade als Menge aller von zwei verschiedenen Punkten gleich weit entfernten Punkte charakterisiert werden kann. Weil nun eine Bewegung die Abstände überhaupt nicht und eine Ähnlichkeitstransformation alle Abstände um ein und denselben Faktor verändert, gehen Kreise in Kreise und Geraden in Geraden über. Man kann auch umgekehrt beweisen, daß jede Transformation der Ebene, die Geraden in Geraden und Kreise in Kreise überführt, eine Ähnlichkeitstransformation (und in Spezialfällen eine Bewegung) ist. Auf den Beweis dieser Behauptung wollen wir hier nicht eingehen.[3]) Wir können jedenfalls feststellen: Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen sind sowohl affine Transformationen als auch Kreisverwandtschaften.

§ 2. Die Anwendung von Transformationen bei der Lösung geometrischer Aufgaben

2.1. Einige Beispiele. Schon die oben aufgezählten einfachen geometrischen Transformationen können effektiv für die Lösung wichtiger geometrischer Aufgaben benutzt werden. Weithin bekannt sind z. B. die Anwendungen der geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben. Wenn etwa eine Strecke AA' der Länge a zu konstruieren ist, deren einer Endpunkt auf einem gegebenen Kreis S und deren Endpunkt auf einer gegebenen Geraden L liegen sollen und die ferner zu einer gegebenen Geraden l parallel sein soll, erhält man die Lösung unmittelbar mit Hilfe der Parallelverschiebung Φ des Kreises S um die Strecke a in Richtung l. Bei dieser Verschiebung

[1]) In der deutschsprachigen Literatur ist hierfür auch die Bezeichnung *Kreisverwandtschaft* üblich. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Eine ausführliche Theorie der Kreistransformationen wird in dem Artikel „Geometrie der Kreise" in diesem Band der EdEM dargelegt. Dort findet sich ebenfalls ein Beweis dafür, daß eine Inversion eine Kreistransformation ist. Dieser unterscheidet sich von dem von uns auf S. 68f. ausgeführten Beweis.

[3]) Vgl. z. B. Band II des im Literaturverzeichnis am Schluß dieses Artikels zitierten Buches von I. M. JAGLOM [2].

geht nämlich der eine Endpunkt der gesuchten Strecke in den anderen Endpunkt über, woraus folgt, daß der eine Endpunkt der gesuchten Strecke der Schnittpunkt des Kreises $S' = \Phi(S)$ mit der Geraden L ist

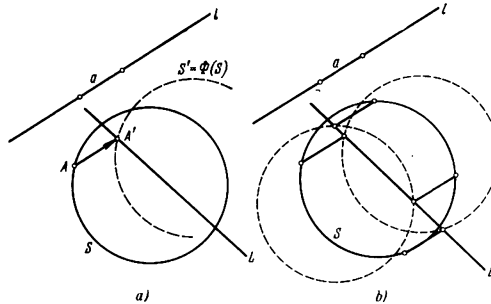


Abb. 18

(Abb. 18a). Weil man die Verschiebung in zwei zueinander entgegengesetzten Richtungen vornehmen kann, kann die Aufgabe bis zu vier Lösungen besitzen (Abb. 18b).

Die Konstruktion einer Strecke, die zwischen zwei gegebenen Geraden l und l_1 eingespannt ist und von einem gegebenen Punkt O halbiert wird, ist z. B. mit Hilfe der Spiegelung am Punkt O lösbar (Abb. 19); die Aufgabe hat im allgemeinen eine einzige Lösung.

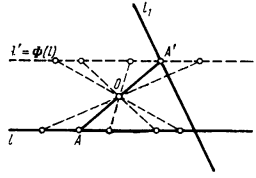


Abb. 19

Die Aufgabe, in einem gegebenen Kreis S eine Sehne AB zu konstruieren, die durch einen gegebenen Punkt A des Kreises S geht und von einem zweiten Kreis S_1 halbiert wird, kann mit Hilfe der Homothetie mit dem Koeffizienten $\frac{1}{2}$ und dem Zentrum A gelöst werden (Abbildung 20; die Aufgabe kann bis zu zwei Lösungen haben)[1]).

Am interessantesten sind jedoch die Anwendungen von geometrischen Transformationen beim Beweis von Theoremen.

[1]) Weitere Beispiele für die Anwendung von geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben kann der Leser im Artikel „Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen" finden.

Betrachten wir etwa ein Dreieck ABC. Bei der Homothetie mit dem Zentrum B und dem Koeffizienten $\frac{1}{2}$ geht die Grundlinie AC in die Mittellinie C_1A_1 über (Abb. 21), d. h., es ist $C_1A_1 \| AC$ und $|C_1A_1| = \frac{1}{2}|AC|$. Hieraus folgt wiederum, daß bei der Homothetie mit dem Koeffizienten $-\frac{1}{2}$, welche A in A_1 transformiert, das Dreieck ABC in das Dreieck $A_1B_1C_1$ übergeht, welches von den Mittellinien des Dreiecks ABC gebildet wird. Das bedeutet also, daß *sich die Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 (die Seitenhalbierenden des Dreiecks) in einem Punkt M (dem Zentrum der zuletzt betrachteten Homothetie) schneiden und durch M, von den Ecken aus gerechnet, im Verhältnis 2 : 1 geteilt werden.* Weiterhin gehen bei dieser Homothetie die Höhen des Dreiecks ABC in die Höhen des Dreiecks $A_1B_1C_1$ über. Die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC, d. h. die in den Mittelpunkten der Dreiecksseiten errichteten Senkrechten, schneiden sich in dem Zentrum O des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises S. Hieraus folgt, daß *die Höhen des Dreiecks ABC sich in einem Punkt H schneiden; dabei liegen die Punkte H, O und der Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden (das Homothetiezentrum der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$) auf einer Geraden*[1]), *und es ist* $|HM| : |MO| = 2$. Es sei noch bemerkt, daß bei der betrachteten Homothetie der Kreis S in den dem Dreieck $A_1B_1C_1$ umbeschriebenen Kreis S_1 übergeht

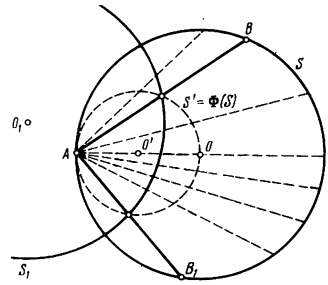


Abb. 20

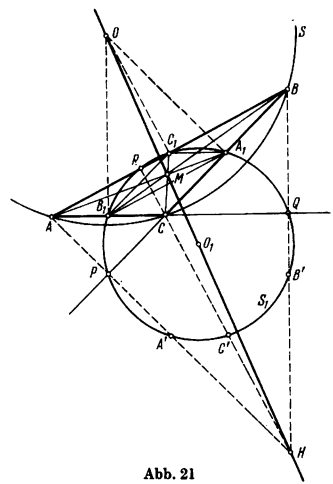


Abb. 21

[1]) Diese Gerade HMO heißt die EULERsche *Gerade* des Dreiecks ABC.

(d. h. in den Kreis, welcher durch die Mittelpunkte der Dreiecksseiten ABC geht); der Radius R_1 dieses Kreises ist offenbar gleich der Hälfte des Radius R von S, und sein Mittelpunkt O_1 liegt auf der Geraden MO, dabei ist $|OM| : |MO_1| = 2$ (denn M ist das Zentrum einer Homothetie mit dem Koeffizienten $-\frac{1}{2}$, die S in S_1 überführt). Hieraus ergibt sich, daß *der Punkt O_1 der Mittelpunkt der Strecke HO ist.* Das bedeutet, daß der Kreis S_1 auch dem Kreis S bei der Homothetie mit dem Zentrum H und dem Koeffizienten $+\frac{1}{2}$ entspricht. *Also halbiert der Kreis S_1 die Höhenabschnitte HA, HB und HC des Dreiecks ABC in den Punkten A', B', C'.*[1])

2.2. Anwendung der Spiegelung. Wenn man über die Anwendung geometrischer Transformationen für Beweiszwecke spricht, muß man in erster Linie auf die Benutzung von Symmetrieüberlegungen zum Auffinden der Eigenschaften „symmetrischer" Figuren hinweisen. Sehr häufig deutet das Eigenschaftswort „symmetrisch" bei geometrischen Figuren das Vorhandensein einer „Symmetrieachse" an, d. h. einer Geraden l, so daß die Spiegelung an dieser Geraden die Figur in sich überführt (Abb. 22). Symmetrische Figuren sind etwa: die Strecken (eine Strecke hat zwei Symmetrieachsen, nämlich die Mittelsenkrechte der Strecke und die Gerade, auf welcher die Strecke liegt; die Winkel (die Symmetrieachse ist die Winkelhalbierende); die gleichseitigen Dreiecke (Symmetrieachsen sind die drei Winkelhalbierenden); die gleichschenkligen Trapeze (Symmetrieachse ist die Gerade, welche die Grundlinien halbiert); die Rhomben (Symmetrieachsen sind die Diagonalen); die Rechtecke (Symmetrieachsen sind die Mittellinien); die Kreise (Symmetrieachsen sind die Geraden durch den Mittelpunkt) usw.

Mitunter wird das Eigenschaftswort „symmetrisch" auch bei geometrischen Figuren beim Vorhandensein eines „Symmetriezentrums" angewendet, d. h. eines Punktes O, so daß die Spiegelung an diesem Punkt die Figur in sich überführt (Abb. 23). Zentralsymmetrische Figuren sind z. B. die Parallelogramme (Symmetriezentrum ist der Schnittpunkt der Diagonalen) und die Kreise (Symmetriezentrum ist der Kreismittelpunkt). Wir bemerken noch, daß eine

[1]) Der Kreis S_1 heißt Eulersc*her Kreis* des Dreiecks ABC. Häufig nennt man diesen Kreis auch *Neun-Punkte-Kreis*, weil er durch die neun „bemerkenswerten" Punkte des Dreiecks geht, und zwar durch die Mittelpunkte A_1, B_1, C_1 der Seiten, durch die Mittelpunkte A', B', C' der Höhenabschnitte und durch die Fußpunkte P, Q, R der Höhen. Letzteres folgt daraus, daß etwa die Punkte A_1 und A' des Kreises S_1 Diametralpunkte sind (oder daß die Tangenten an S_1 in den Punkten A_1 und A' aus der Tangente S im Punkt A durch die Homothetie mit dem Zentrum M und dem Koeffizienten $-\frac{1}{2}$ bzw. durch die Homothetie mit dem Zentrum H und dem Koeffizienten $+\frac{1}{2}$ hervorgehen, was bedeutet, daß diese Tangenten zueinander parallel sind). Daher ist der rechte Winkel A_1PA' dem Kreis S_1 einbeschrieben, und der Punkt P liegt auf S_1.

Zentralsymmetrie mit dem Zentrum O mit der Drehung um den Punkt O um $180° = \frac{360°}{2}$ zusammenfällt. Dies erlaubt es, den Begriff der Zentralsymmetrie zu verallgemeinern, indem man nämlich bei einer gewissen Figur M von einer *Symmetrie der Ordnung k mit dem Zentrum O* spricht, wenn die Figur

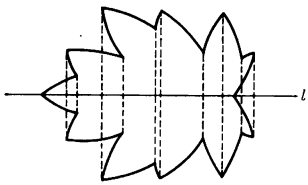


Abb. 22

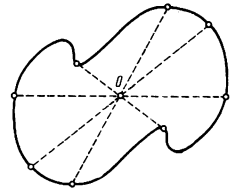


Abb. 23

bei einer Drehung um den Punkt O (das Zentrum der Symmetrie der Ordnung k) um den Winkel $\frac{360°}{k}$ in sich übergeht (Abb. 24). So besitzt ein gleichseitiges Dreieck eine Symmetrie dritter Ordnung (in bezug auf den Mittelpunkt des Dreiecks), ein regelmäßiges n-Eck besitzt eine Symmetrie n-ter Ordnung.

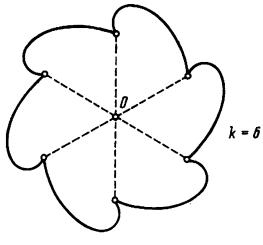


Abb. 24

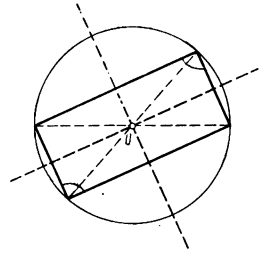


Abb. 25

Es ist klar, daß sich die bekannten Eigenschaften der Mittelsenkrechten einer Strecke oder die Eigenschaften der Winkelhalbierenden eines Winkels unmittelbar aus der Tatsache ergeben, daß die betrachtete Gerade Symmetrieachse der entsprechenden Figur ist. Genauso folgen auch alle Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks aus seiner Symmetrie. Aus der Symmetrie

des Kreises ergibt sich, daß der auf einer Sehne senkrecht stehende Durchmesser diese Sehne halbiert. Aus dem Vorhandensein des Symmetriezentrums O beim Kreis S schließt man, daß ein über einem Durchmesser dem Kreis S einbeschriebener Winkel als Winkel eines dem Kreis einbeschriebenen Parallelogramms betrachtet werden kann (Abb. 25). Andererseits folgt aus dem Vorhandensein von Symmetrieachsen beim Kreis S, daß die vom Mittelpunkt ausgehenden Senkrechten auf die Seiten des Parallelogramms Symmetrieachsen sind. Somit gelangen wir zu der Erkenntnis, daß *jeder einem Kreis über einem Durchmesser einbeschriebene Winkel ein rechter Winkel ist.* Da die Verbindungslinie q der Mittelpunkte zweier Kreise S_1 und S_2 eine Symmetrieachse der aus diesen beiden Kreisen gebildeten Figur ist, liegt der Schnittpunkt der beiden äußeren Tangenten m_1 und m_2 (oder der beiden inneren Tangenten n_1 und n_2) an die Kreise S_1 und S_2 auf der Geraden q (Abb. 26). Der Mittelpunkt O

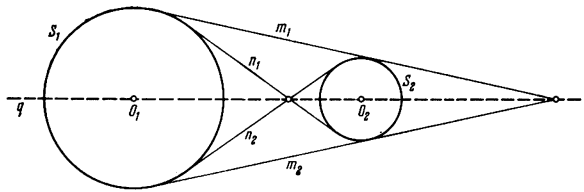


Abb. 26

eines gleichseitigen Dreiecks T (oder eines Quadrates Q) ist Zentrum einer Symmetrie dritter (entsprechend vierter) Ordnung. Hieraus ergibt sich z. B., daß die von den Ecken des Dreiecks T ausgehenden Geraden, die von der gegenüberliegenden Seite $\frac{1}{3}$ abschneiden (Abb. 27a), ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkt O bilden. Analoges gilt für die Geraden, welche durch die Ecken des Quadrates Q hindurchgehen und die gegenüberliegenden Seiten halbieren (Abb. 27b); sie bilden ein Quadrat mit dem Mittelpunkt O.

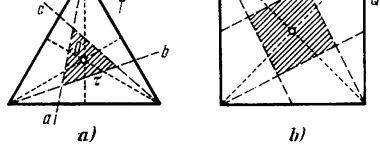


Abb. 27

Alle diese Aussagen beweist man fast gleichartig: Bei der Spiegelung an der Verbindungslinie Q der Mittelpunkte O_1, O_2 der in Abb. 26 abgebildeten Kreise S_1 und S_2 gehen diese Kreise in sich über; daraus folgt, daß auch die beiden Tangenten m_1 und m_2 dieser Kreise durch diese Spiegelung ineinander übergeführt werden (genauer gesagt: m_1 geht in m_2 über, und m_2 geht in m_1 über). Hieraus folgt weiter, daß die Gerade q Symmetrieachse des durch die Geraden m_1 und m_2 gebildeten Winkels ist, d. h., sie fällt mit der Winkelhalbierenden dieses Winkels zusammen. Genauso ergibt sich aus der Tatsache, daß bei der Drehung mit dem Zentrum O und dem Winkel 120° das gleichseitige Dreieck T in sich übergeht, daß das in Abb. 27a dargestellte „innere" Dreieck τ bei dieser Drehung in sich übergeht (die Gerade a geht in b über, die Gerade c in a). Daher hat auch das Dreieck τ den Punkt O als Zentrum einer Symmetrie dritter Ordnung, was nur möglich ist, wenn dieses Dreieck gleichseitig ist.

2.3. Die Anwendung geometrischer Transformationen auf die „Symmetriesierung" von Figuren. Die Verwendung von anderen Transformationen als Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen gestattet es manchmal, einfache Symmetrieerwägungen bei komplizierten Verhältnissen anzuwenden. Wir bemerken z. B., daß eine Kontraktion in bezug auf eine Gerade (Beispiel 8 auf S. 50) gestattet, jedes Dreieck ABC in ein gleichschenkliges Dreieck $A'B'C'$ überzuführen. Dieses erreicht man leicht mit Hilfe einer Kontraktion in bezug auf die Seite BC, wenn man den Kontraktionskoeffizienten so wählt, daß $|A'B| = |BC|$ wird (Abb. 28; für BC kann man z. B. die größere der beiden Seiten AB, BC nehmen). Hieraus und aus der Tatsache, daß parallele Geraden bei einer Kontraktion in parallele Geraden übergehen (S. 56), folgt, daß jedes Trapez $ABCD$ durch eine Kontraktion in ein gleichseitiges Trapez $AB'C'D$ übergeführt werden kann (Abb. 29; es genügt, das Dreieck ABF in das gleichschenklige Dreieck $AB'F$ überzuführen). Es bezeichne nun E' den Schnittpunkt der Diagonalen des gleichschenkligen Trapezes $AB'C'D$ und F den Schnittpunkt der Verlängerungen der Schenkel dieses Trapezes. Die Gerade $E'F$ geht durch die Mittelpunkte der Grundlinien AB' und $C'D$ und ist die Symmetrieachse dieses Trapezes. Daraus kann man schließen, daß *in einem beliebigen Trapez ABCD der Schnittpunkt der Diagonalen, der Schnittpunkt der Schenkel und die Mittelpunkte der Grundlinien dieses Trapezes auf ein und derselben Geraden liegen* (hierbei ist benutzt worden, daß eine Kontraktion in bezug auf eine Gerade das Längenverhältnis von Strecken einer Geraden nicht ändert; vgl. S. 56). Anders ausgedrückt besagt dies, daß die Verbindungsgerade des Schnittpunktes der Diagonalen eines Trapezes und des Schnittpunktes der Schenkel dieses Trapezes die Grundlinien dieses Trapezes halbiert.

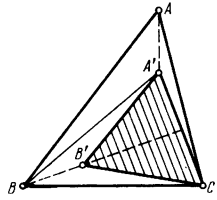


Abb. 28

Durch zwei Kontraktionen kann ein beliebiges Dreieck in ein gleichseitiges Dreieck übergeführt werden. Tatsächlich geht das gleichschenklige Dreieck $A'BC$ (in Abb. 28) durch eine Kontraktion in bezug auf die Gerade $A'C$ in

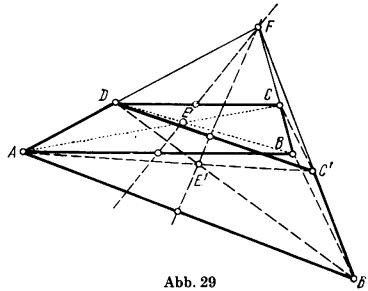


Abb. 29

das gleichseitige Dreieck $A'B'C$ über. Daher braucht man für den Beweis, daß sich die Seitenhalbierenden eines beliebigen Dreiecks in einem Punkt schneiden, nur den Fall eines gleichseitigen Dreiecks zu behandeln. Das folgt jedoch sofort aus Symmetriegründen (oder daraus, daß die Seitenhalbierenden eines gleichseitigen Dreiecks zugleich Winkelhalbierende der Dreiecke sind). Hieraus ergibt sich auch noch folgendes: Zieht man in einem beliebigen Dreieck ABC die von den Ecken ausgehenden Geraden, die die gegenüberliegenden Dreiecksseiten im Verhältnis 2 : 1 teilen (Abb. 30), so fällt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des von den gezogenen Geraden gebildeten Dreiecks mit dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Ausgangsdreiecks zusammen (denn es fallen die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden — die Mittelpunkte — der in Abb. 27a dargestellten gleichseitigen Dreiecke T und τ zusammen). Der Beweis hierfür wäre ohne Benutzung von Symmetrieargumenten und den Eigenschaften der Kontraktion in bezug auf eine Gerade recht kompliziert.

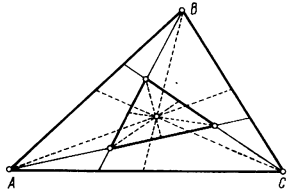


Abb. 30

Eine analoge Anwendung läßt auch die Inversion zu (vgl. das auf S. 50 angeführte Beispiel 9). So kann man z. B. zeigen, daß man je zwei Kreise durch eine geeignete Inversion in zwei kongruente Kreise überführen kann. Als Anwendung hiervon betrachten wir die in Abb. 31a dargestellten vier Kreise S_1, S_2, S_3 und S_4, wobei jeder Kreis den folgenden berührt und S_4 wieder S_1 berührt. Die Berührungspunkte seien A, B und C und D. Mittels

einer Inversion führen wir die beiden „gegenüberliegenden" Kreise S_1 und S_3 in kongruente Kreise S_1' und S_3' über. Dadurch entsteht aus der Figur in Abb. 31a die symmetrische Figur in Abb. 31b (ihre Symmetrieachse ist die Verbindungslinie p der Mittelpunkte der

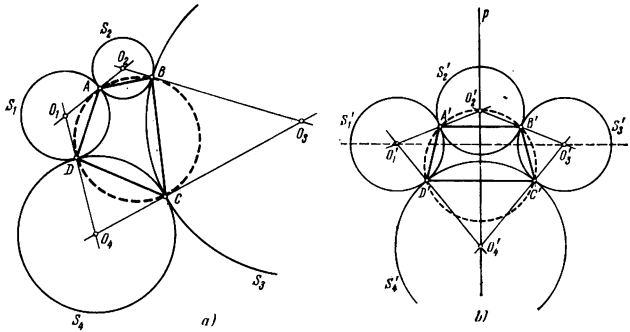


Abb. 31a und b

Kreise S_2' und S_4'). Es ist klar, daß die Gerade $O_2'O_4'$ auch Symmetrieachse des durch die Berührungspunkte A', B', C', D' der Kreise gebildeten Vierecks ist. Hiernach muß dieses Viereck $A'B'C'D'$ ein gleichschenkliges Trapez sein; das führt uns zu der Feststellung, daß die Punkte A', B', C' und D' auf einem Kreis liegen.[1]) Weil nun aber eine Inversion einen Kreis stets in einen Kreis abbildet, liegen auch die Punkte A, B, C und D auf einem gemeinsamen Kreis.

Bei einer Inversion ist ein Punkt der Ebene — das Inversionszentrum — besonders ausgezeichnet. Dieser Punkt geht bei der Inversion in einen (im Sinne der Elementarmathematik nicht existierenden) unendlich fernen Punkt über. Dieser Umstand eröffnet neue Möglichkeiten der Anwendung einer solchen Abbildung in der Elementarmathematik. Oben sprachen wir über den Nutzen, welchen man daraus ziehen kann, daß durch eine Kon-

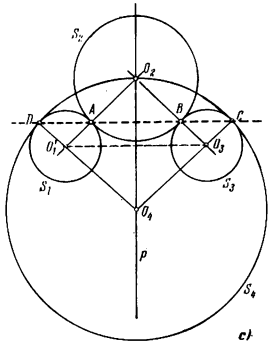


Abb. 31c

[1]) Oder auf einer Geraden (vgl. Abb. 31c). Allgemein wollen wir in allen Fragen, die mit der Anwendung von Inversionen zusammenhängen, verabreden, daß Kreis und Geraden als gleichberechtigt gelten (denn eine Inversion kann einen Kreis in eine Gerade überführen). In solchen Fällen hat also das Wort „Kreis" die Bedeutung von „Kreis oder Gerade".

traktion in bezug auf eine Gerade geometrische Sachverhalte in „symmetrische" übergeführt werden können (vgl. S. 64). Eine Inversion verändert nun eine Zeichnung weitaus stärker als eine Kontraktion. Das macht die Inversionen auch für Anwendungen geeigneter.

Wir betrachten z. B. noch einmal das dargelegte Theorem: *Berühren sich die Kreise S_1, S_2, S_3, S_4 in der angegebenen Reihenfolge und berührt S_4 wieder S_1* (Abb. 31 a), *so liegen die vier Berührungspunkte auf einem gemeinsamen Kreis* (*oder auf einer gemeinsamen Geraden*). Oben bewiesen wir dieses Theorem, indem wir die Figur in eine symmetrischere Figur der gleichen Art überführten. Aber man kann diese Figur noch stärker abändern, indem man sie einer Inversion in bezug auf den Berührungspunkt A der Kreise S_1 und S_2 unterwirft. Hierbei geht der Punkt A in den „unendlich fernen" Punkt Ω über; aus den Kreisen S_1 und S_2 werden Geraden S_1' und S_2'. Diese Geraden müssen parallel sein, weil sie außer dem Punkt Ω keinen weiteren Punkt gemein haben (S_1 und S_2 haben nämlich als einzigen gemeinsamen Punkt den Punkt A!). Die Figur geht damit in eine ganz andere über (vgl. Abb. 32). Die Punkte B', C' und D' in Abb. 32 liegen nun auf einer Geraden (denn für die Winkel gilt $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ und $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 3$, folglich ist $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$). Daraus ergibt sich aber weiter, daß die Urbilder B, C und D dieser Punkte B', C' und D' auf einem Kreis (oder einer Geraden) durch den Punkt A (das Inversionszentrum) liegen.

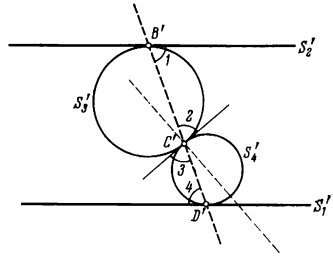


Abb. 32

§ 3. Die analytische Beschreibung geometrischer Transformationen

3.1. Die Beschreibung geometrischer Transformationen durch Koordinaten. Für das Studium von Transformationen und Punktabbildungen ist die Koordinatenmethode sehr nützlich. Wir setzen dazu voraus, daß in der Ebene ein gewisses Koordinatensystem x, y eingeführt ist. Der Einfachheit halber betrachten wir ein kartesisches Koordinatensystem, obgleich sich prinzipiell nichts ändern würde, wenn wir etwa ein Polarkoordinatensystem betrachten würden. Es sei Φ eine gewisse Abbildung, deren Definitionsbereich $\mathscr{A}$ und deren Wertebereich $\mathscr{A}'$ in der Ebene liegen bzw. die ganze Ebene sind. Jeder Punkt A des Definitionsbereiches $\mathscr{A}$ ist dann durch ein Zahlenpaar (x, y) charakterisiert. Die Transformation Φ ordnet nun diesem Zahlenpaar ein gewisses neues Zahlenpaar (x', y') zu, nämlich die Koordinaten des Punktes $A' = \Phi(A)$. Mit anderen Worten sind also die Koordinaten (x', y') des Bildpunktes A' Funktionen des Zahlenpaares (x, y):

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y), \\ y' &= \psi(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Auf diese Weise ist also die Angabe einer Punktabbildung mit der Angabe eines Paares von Zahlenfunktionen zweier Veränderlicher gleichbedeutend; umgekehrt wird auch durch jedes Paar von Funktionen zweier Veränderlicher eine bestimmte Abbildung[1]) *beschrieben.* Insbesondere kann man durch Formeln der Gestalt (1) die Transformationen der Ebene beschreiben.

Wir werden jetzt die analytischen Formeln für gewisse von uns betrachtete Transformationen angeben. Vor allem ist klar, daß sich in einem kartesischen Koordinatensystem jede Parallelverschiebung wie folgt darstellt:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hierbei sind (x, y) die Koordinaten des Punktes A und (x', y') die Koordinaten des Bildpunktes A' sowie (a, b) die Koordinaten des konstanten Vektors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$ [des Verschiebungsvektors[2])].

Weiter schreibt sich die Spiegelung in bezug auf den Koordinatenursprung $O(0, 0)$ in Formeln so:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= -y, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

während die Formeln für die Spiegelung an der x-Achse wie folgt lauten:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Als Verallgemeinerung der Formeln (3) und (4) erhalten wir Formeln für die Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten k

$$\left.\begin{aligned} x' &= kx, \\ y' &= ky. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und Formeln für die Kontraktion in bezug auf die x-Achse mit dem Koeffizienten k

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= ky. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Für $k = -1$ gehen die Formeln (5) und (6) in die entsprechenden Formeln (3) und (4) über.

In allen bisher betrachteten Fällen haben die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ aus (1) ein sehr einfaches Aussehen, sie sind lineare Funktionen. In anderen Fällen erweisen sich diese Funktionen schon als komplizierter. So wird z. B.

---

[1]) Hierbei entsprechen stetige Abbildungen (vgl. S. 54) stetigen Funktionen.

[2]) Vgl. S. 75.

die Inversion mit dem Zentrum O und dem Grad k beschrieben durch

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{kx}{x^2 + y^2}, \\ y' &= \frac{ky}{x^2 + y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die *hyperbolische Inversion* vom Grad k (vgl. S. 53) mit der x-Achse als Inversionsachse wird dargestellt durch

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \frac{k}{y}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

In der Tat zeigen z. B. die Formeln (7), daß $x' : y' = x : y$ gilt, d. h. der Bildpunkt A' und der Ausgangspunkt A auf einer Geraden durch den Ursprung O des Koordinatensystems liegen. Außerdem ist $x'^2 + y'^2 = \frac{k^2}{x^2 + y^2}$, d. h.

$$|OA'|^2 = \frac{k^2}{|OA|^2}.$$

3.2. Analytische Methoden zum Studium von Transformationen. Die analytische Beschreibung der geometrischen Transformationen gestattet es, die Eigenschaften der Transformationen mit Methoden der analytischen Geometrie zu studieren. Wir beweisen etwa, daß *eine Inversion jeden Kreis in einen Kreis oder in eine Gerade und jede Gerade in eine Gerade oder in einen Kreis überführt.* Man sieht leicht, daß die Gleichung für einen Kreis mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius r die Form $x^2 + y^2 = r^2$ hat. Demnach lautet die Gleichung für den Kreis mit dem Mittelpunkt $Q(a, b)$ und dem Radius r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

oder

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \tag{9}$$

mit

$$\frac{B}{A} = -a, \quad \frac{C}{A} = -b, \quad \frac{D}{A} = a^2 + b^2 - r^2, \quad A \neq 0. \tag{9a}$$

Dieser Kreis geht genau dann durch den Koordinatenursprung, wenn der Koeffizient D in (9) gleich Null ist. (Bei $D = 0$ erfüllt der Punkt mit den Koordinaten (0, 0) die Gleichung (9); bei $D \neq 0$ erfüllt der Punkt mit den Koordinaten (0, 0) diese Gleichung nicht). Die Gleichung (9) erfaßt auch die Geraden. Eine Gerade erhalten wir, indem wir in (9) den Koeffizienten A gleich Null setzen. Wenn in (9) $A = 0$ und $D = 0$ sind, so bekommen wir eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht.

Wir klären jetzt, in welche Punktmengen bei einer Inversion die Menge der Punkte, deren Koordinaten die Gleichung (9) erfüllen (d. h. Kreise oder Geraden), übergehen. Zunächst lassen sich die Formeln (7) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{kx'}{x'^2 + y'^2}, \\ y &= \frac{ky'}{x'^2 + y'^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Wenn wir nun in (9) für x und y die Ausdrücke gemäß der Formel (7a) einsetzen, erhalten wir

$$Ak^2 + 2Bkx' + 2Cky' + D(x'^2 + y'^2) = 0. \tag{9'}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

A. *Eine Gerade, die durch das Inversionszentrum geht (das ist der Fall $A = 0$, $D = 0$), wird bei der Inversion in sich übergeführt.*

B. *Eine Gerade, die nicht durch das Inversionszentrum geht ($A = 0$, $D \neq 0$), wird in einen Kreis übergeführt, der durch das Inversionszentrum geht.*

C. *Ein Kreis, der durch das Inversionszentrum geht ($A \neq 0$, $D = 0$), wird in eine Gerade übergeführt, die nicht durch das Inversionszentrum geht.*

D. *Ein Kreis, der nicht durch das Inversionszentrum geht ($A \neq 0$, $D \neq 0$), wird in einen Kreis übergeführt, der nicht durch das Inversionszentrum geht.*

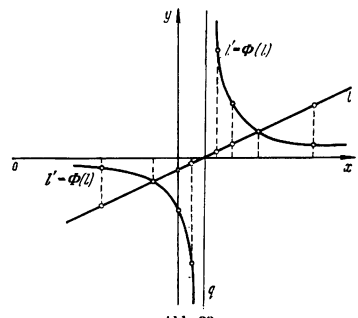


Abb. 33

Analog hierzu beweist man für die hyperbolische Inversion (8):

A. *Eine Gerade $y = a$, die parallel zur Achse $y = 0$ der hyperbolischen Inversion ist, geht in die Gerade $\frac{k}{y'} = a$ $\left(\text{oder } y' = \frac{k}{a}\right)$ über, die ebenfalls parallel zur Achse der Inversion verläuft.*

B. *Eine Gerade $x = b$, die senkrecht auf der Inversionsachse steht, geht in sich über.*

C. *Eine Gerade l, die durch die Gleichung*

$$x = ay + b \quad (a \neq 0) \tag{10}$$

gegeben wird und die Inversionsachse $y = 0$ unter einem von 90° verschiedenen Winkel schneidet, geht in die Hyperbel

$$x' = \frac{ak}{y'} + b \quad (\text{oder } (x' - b)\, y' = ak) \tag{10'}$$

über, deren Asymptoten die Inversionsachse o und deren Senkrechte q sind, die durch den Schnittpunkt der Geraden l und o geht (Abb. 33; in kartesischen Koordinaten mit den

Achsen o und q schreibt sich die Gleichung (10′) in der Form $XY = ak$; das Bild dieser funktionalen Abhängigkeit ist bekanntlich eine Hyperbel).

Umgekehrt gehen bei einer hyperbolischen Inversion nur die Parallelen zur Inversionsachse und deren Senkrechte sowie die Hyperbeln (10′), deren eine Asymptote die Inversionsachse ist, in Geraden über. Dieser Umstand erklärt die Bezeichnung „hyperbolische Inversion" für diese Transformation.

3.3. Lineare Transformationen. Häufig ist die analytische Angabe einer Transformation der Ausgangspunkt zur Definition dieser Transformation. In diesen Fällen ist man gezwungen, die geometrischen Eigenschaften der Transformation aus ihren analytischen Formeln abzuleiten.

Wir betrachten folgendes Beispiel: Unter einer *linearen Abbildung* der Ebene versteht man eine Abbildung, die in irgendeinem kartesischen Koordinatensystem durch Formeln (1) beschrieben wird, in denen die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ linear sind:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Spezialfälle von linearen Abbildungen sind, wie wir gesehen haben, die Parallelverschiebungen (2), die Spiegelungen an einem Punkt (3) und an einer Geraden (4), die Kontraktionen in bezug auf einen Punkt (Homothetie) (5) und die Kontraktionen in bezug auf eine Gerade (6).

Wenn in den Formeln (11) $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ ist, führt die Abbildung offensichtlich alle Punkte der Ebene in den Punkt (c_1, c_2) über. Wenn die Koeffizienten von x und y in den beiden Gleichungen (11) proportional sind, d. h. $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, so haben wir bei beliebigem x und y

$$y' = \lambda x' + c \quad \text{mit} \quad c = c_2 - \lambda c_1. \tag{12}$$

Das bedeutet, daß die Ebene in die Gerade (12) übergeht. Sind schließlich die Koeffizienten a_2, b_2 nicht proportional zu a_1, b_1, d. h. ist $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, so kann man die Gleichungen (11) in der folgenden Form schreiben:

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 \tag{11′}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \beta_1 = \frac{-b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \gamma_1 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ \alpha_2 &= \frac{-a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \beta_2 = \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \gamma_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \end{aligned}\right\} \tag{11″}$$

(Hierzu genügt es, die Gleichungen (11) nach den Unbekannten x', y' aufzulösen.) Daher führt die Abbildung (11) nur den durch die Formeln (11′) eindeutig bestimmten Punkt (x, y) in den Punkt (x', y') über, d. h., die Abbildung ist eine *lineare Transformation*.

Wir zeigen, daß *jede lineare Transformation eine Gerade der Ebene wieder in eine Gerade der Ebene überführt*. Jede lineare Transformation ist also eine affine

Transformation.[1]) Um nämlich die Gerade zu finden, in welche die Transformation (11) die Gerade

$$AX + BY + C = 0 \tag{13}$$

überführt, brauchen wir nur in die Gleichung (13) für x und y die Werte aus (11′) einzusetzen. Wir erhalten hierbei

$$(A\alpha_1 + B\alpha_2)\,x' + (A\beta_1 + B\beta_2)\,y' + (A\gamma_1 + B\gamma_2 + C) = 0, \tag{13′}$$

wobei die Koeffizienten $A\alpha_1 + B\alpha_2$ und $A\beta_1 + B\beta_2$ nicht beide Null sind, denn die Abbildung (11′) ist ebenfalls eine Transformation mit $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Wir erhalten also wieder die Gleichung einer Geraden.

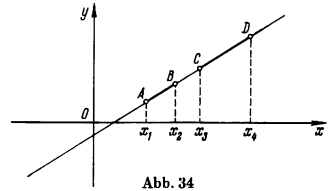


Abb. 34

Sehr einfach überzeugt man sich auch davon, daß *eine lineare Transformation das Längenverhältnis zweier Strecken einer Geraden invariant läßt.* Hierzu bemerken wir, daß für die vier Punkte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ einer Geraden $y = kx + b$ (Abb. 34) $\dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3}$ ist. Gehen nun bei der Transformation (11) die Punkte $A(x_1, y_1)$, ..., $D(x_4, y_4)$ in die Punkte $A'(x_1', y_1')$, ..., $D'(x_4', y_4')$ über, so ist

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= (a_1x_2 + b_1y_2 + c_2) - (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) \\ &= a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) \\ &= a_1(x_2 - x_1) + b_1[(kx_2 + b) - (kx_1 + b)] \\ &= (a_1 + b_1k)\,(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

und analog $x_4' - x_3' = (a_1 + b_1k)\,(x_4 - x_3)$.

Hieraus folgt

$$\frac{|A'B'|}{|C'D'|} = \frac{x_2' - x_1'}{x_4' - x_3'} = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Der Leser möge selbständig bestätigen, daß *jede lineare Transformation der Ebene parallele Geraden in parallele Geraden überführt.*

[1]) Man kann auch das Umgekehrte zeigen: *Jede affine Transformation der Ebene ist eine lineare Transformation*, d. h. läßt sich in Koordinaten durch lineare Gleichungen beschreiben. Der Beweis hierfür ist jedoch recht kompliziert [vgl. etwa Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия (B. N. Delaunay und D. A. Raikow, Analytische Geometrie), Teil I, Moskau-Leningrad 1948, S. 152, oder И. М. Яглом и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффиной и проективной геометрии (I. M. Jaglom und W. G. Aschkinuse, Ideen und Methoden der affinen und projektiven Geometrie), Teil I, Moskau 1962, S. 78, oder, für den n-dimensionalen Fall, O.-H. Keller, Analytische Geometrie und lineare Algebra, 2. Aufl., Berlin 1963, S. 159–161].

3.4. Komplexe Koordinaten der Punkte der geschlossenen Ebene. Da die geschlossene Ebene einen völlig neuen geometrischen Begriff darstellt, der sich von dem der gewöhnlichen Ebene unterscheidet, ist für sie auch die bei der Ebene übliche Art der Einführung von Koordinaten unbrauchbar und zunächst eine analytische Untersuchung der Inversion (und anderer Kreistransformationen) als Transformationen der geschlossenen Ebene unmöglich. Aus diesem Grunde ergibt sich die überaus wichtige Aufgabe, für die geschlossene Ebene ein Koordinatensystem einzuführen, in dem auch dem „unendlich fernen" Punkt der geschlossenen Ebene Koordinaten zukommen. Wir gehen hier nicht auf Einzelheiten ein, sondern skizzieren nur einen Weg zur Lösung dieser Aufgabe. Zunächst bemerken wir, daß man häufig bequemer verfährt, wenn man statt der Paare (x, y) reeller Zahlen die entsprechenden komplexen Zahlen $z = x + iy$ als Koordinaten der Punkte wählt (wobei also jeder Punkt eine einzige „komplexe Koordinate" erhält). In diesem Fall wird eine geometrische Transformation der Ebene nicht durch ein Paar von Funktionen zweier Veränderlicher (vgl. die Formeln (1) auf S. 66) beschrieben, sondern durch eine Funktion einer komplexen Veränderlichen[1]):

$$z' = F(z). \tag{14}$$

Wir erweitern jetzt den Bereich der komplexen Zahlen, indem wir zu den „gewöhnlichen" Zahlen noch eine „ideale" Zahl ∞ (Unendlich) hinzunehmen. Hierbei definieren wir den Quotienten aus einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl und Null (im Bereich der gewöhnlichen Zahlen existiert dieser Quotient nicht) als ∞. Diese „erweiterte" komplexe Ebene fällt im wesentlichen mit der geschlossenen Ebene zusammen (hierbei entspricht der „idealen" Zahl ∞ der „uneigentliche" Punkt Ω).

Eine Inversion vom Grad k mit dem Zentrum O, das die komplexe Koordinate 0 hat, wird analytisch — wie wir jetzt sehen — durch die Formel

$$z' = \frac{k}{\bar{z}}, \tag{15}$$

beschrieben, wobei $\bar{z} = x - iy$ die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl ist. Aus (15) folgt sofort, daß das Inversionszentrum O in den „idealen" Punkt ∞ übergeht und umgekehrt. Ein vom Zentrum verschiedener Punkt $z = x + iy$ geht in den Punkt

$$z' = x' + iy' = \frac{k}{x - iy} = \frac{k(x + iy)}{x^2 + y^2} = \frac{kx}{x^2 + y^2} + \frac{ky}{x^2 + y^2}\, i \tag{15a}$$

über, was zeigt, daß die Transformation (15) mit der Inversion zusammenfällt (vgl. Formel (15a) mit den Formeln (7) auf S. 68). Analoge Eigenschaften wie die Inversion haben die Transformationen der geschlossenen Ebene, die

[1]) Vgl. den Artikel „Elementare Funktionen einer komplexen Veränderlichen" in Band III der EdEM.

sich durch gebrochene lineare Funktionen

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{bzw.} \quad z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \tag{16}$$

(a, b, c und d sind komplexe Zahlen) beschreiben lassen. Die Transformation (16) führt denjenigen Punkt der geschlossenen Ebene in den „unendlich fernen" Punkt Ω über, für dessen komplexe Koordinate $cz + d = 0$ bzw. entsprechend $c\bar{z} + d = 0$ ist $\left(\text{d. h. } z = -\frac{d}{c} \text{ bzw. } \bar{z} = -\frac{d}{c}\right)$; sie führt den Punkt Ω in den Punkt $z' = \frac{a}{c}$ über. Das letzte folgt daraus, daß (16) auch in der Form

$$z' = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \quad \text{bzw.} \quad z' = \frac{a + \frac{b}{\bar{z}}}{c + \frac{d}{\bar{z}}}$$

geschrieben werden kann. Die „gebrochenen-linearen Transformationen" (16) der komplexen Ebene stehen in einem engen Zusammenhang mit den Inversionen.[1])

3.5. Birationale Transformationen. Vom analytischen Standpunkt sind die linearen Transformationen (11) die einfachsten, weil hierbei die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, die bei der analytischen Beschreibung auftreten, das einfachste Aussehen haben. Überdies kann man in diesem Fall auch die Koordinaten x, y des Ausgangspunktes durch die Koordinaten x', y' des Bildpunktes mittels eines linearen Ausdruckes widergeben [vgl. die Formeln (11')]. Eine Verallgemeinerung dieser Transformationen bilden die Transformationen, bei denen sowohl die Koordinaten x' und y' durch gewisse rationale (aber nicht notwendig lineare!) Funktionen φ und ψ von x und y [vgl. (1)] als auch umgekehrt x und y durch rationale Funktionen von x' und y' beschrieben werden. Transformationen dieser Art heißen *birationale Transformationen*. Sie spielen in der modernen Geometrie eine überaus wichtige Rolle.[2]) Die nichtentarteten linearen Transformationen bilden das einfachste Beispiel für birationale Transformationen. Als weitere Beispiele können die Inversion (7), die hyperbolische Inversion (8) und die folgende Transformation dienen:

$$x' = \frac{y(x + y - 1)}{x(x - 1) + y(y - 1)}, \quad y' = \frac{x(x + y - 1)}{x(x - 1) + y(y - 1)}. \tag{17}$$

Betrachtet man die Formeln (17) als Gleichungen in den Unbekannten x und y und löst sie nach x und y auf, so erhalten wir genau die obigen Ausdrücke für x und y in den Unbekannten x' und y':

$$x = \frac{y'(x' + y' - 1)}{x'(x' - 1) + y'(y' - 1)}, \quad y = \frac{x'(x' + y' - 1)}{x'(x' - 1) + y'(y' - 1)}. \tag{17a}$$

[1]) Die Menge der Transformationen (16) der geschlossenen Ebene stimmt mit der Menge aller Kreistransformationen überein (vgl. den Artikel „Geometrie der Kreise", S. 487).

[2]) Der Begriff der birationalen Transformationen ist grundlegend für die sogenannte „algebraische Geometrie", die gegenwärtig zu einem umfassenden Wissenschaftsgebiet angewachsen ist.

Die Transformation (17) hat eine interessante geometrische Interpretation. Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt $A(x, y)$ der Ebene mit den Ecken $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ des „Koordinatendreiecks" OE_1E_2 und spiegelt man jede der Geraden AO, AE_1, AE_2 an der entsprechenden Winkelhalbierenden des Koordinatendreiecks, so schneiden sich die drei entstehenden Geraden in dem Punkt A', dessen Koordinaten x' und y' durch die Formeln (17) gegeben werden (Abb. 35). Ebenso erhalten wir eine gewisse birationale Transformation der Ebene, wenn in dieser Konstruktion das Dreieck OE_1E_2 durch ein beliebiges Dreieck PQR ersetzt wird.

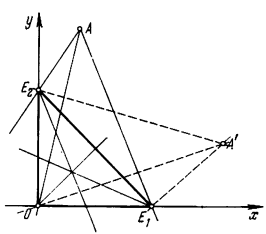


Abb. 35

Die angeführten Beispiele zeigen, daß die birationalen Transformationen, die sehr wichtig für die höhere Geometrie sind, auch in der Elementargeometrie eine Rolle spielen.

§ 4. Das Produkt von Abbildungen und Transformationen

4.1. Die Definition des Produktes von Abbildungen. Beispiele. Wir erwähnten bereits, daß die Punktabbildungen Funktionen sind, die sich von den gewöhnlichen Funktionen nur darin unterscheiden, daß hier das Argument und auch der Funktionswert keine Zahlen, sondern Punkte sind. In diesem Paragraphen erklären wir, welchen Sinn der Begriff der *zusammengesetzten Funktion* (das ist eine Funktion von einer Funktion) für Abbildungen und Transformationen hat.

Wenn $y = f(x)$ und $z = g(y)$ ist, wird vermöge

$$z = g(f(x))$$

z auch eine Funktion des Argumentes x. Zum Beispiel ist für $f(x) = a^x$ und $g(y) = \sqrt{y}$ dann $z = \sqrt{a^x}$; für $f(x) = \sin x$ und $g(y) = \log y$ ist $z = \log \sin x$ usw.

Analog wird auch die *zusammengesetzte Abbildung* (die Abbildung von einer Abbildung) erklärt. Es sei Φ eine Abbildung mit dem Definitionsbereich $\mathscr{A}$ und dem Wertebereich $\mathscr{A}_1$; außerdem sei eine andere Abbildung Ψ mit dem Definitionsbereich $\mathscr{A}_1$ gegeben, der also gleich dem Wertebereich der ersten Abbildung ist. Den Wertebereich von Ψ bezeichnen wir mit $\mathscr{A}_2$. Weil für jeden Punkt A des Bereiches $\mathscr{A}$ sein Bild $A' = \Phi(A)$ im Bereich $\mathscr{A}_1$ – dem Definitionsbereich von Ψ – liegt, ist auch der Punkt $A'' = \Psi(A') = \Psi(\Phi(A))$ definiert und gehört zum Bereich $\mathscr{A}_2$. Auf diese Weise entspricht jedem Punkt A des Bereiches $\mathscr{A}$ ein Punkt A'' des Bereiches $\mathscr{A}_2$. Wir erhalten also eine gewisse Abbildung mit dem Definitionsbereich $\mathscr{A}$ und dem Wertebereich $\mathscr{A}_2$. Diese Abbildung, die den Punkt A in den Punkt A'' überführt, heißt das

Produkt[1]) der Abbildungen Φ und Ψ und wird einfach durch $\Psi\Phi$ (ohne Klammern) bezeichnet. Für sie ist

$$\Psi\Phi(A) = \Psi(\Phi(A)).$$

Diese Formel bildet gerade die Definition des Produktes von Abbildungen.

Wenn Φ und Ψ Transformationen mit demselben Operationsbereich $\mathfrak{A}$ sind, ist offensichtlich auch ihr Produkt $\Psi\Phi$ eine Transformation mit dem Operationsbereich $\mathfrak{A}$.

Wir führen einige Beispiele an:

1. Es sei Φ die Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$ und Ψ die Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{M'M''} = \boldsymbol{b}$ (vgl. das Beispiel 4 auf S. 48). Offenbar ist bei $AA' \parallel MM'$ und $A'A'' \parallel M'M''$ auch $AA'' \parallel MM''$, mit anderen Worten, aus $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$ und $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{M'M''}$ folgt $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{MM''}$

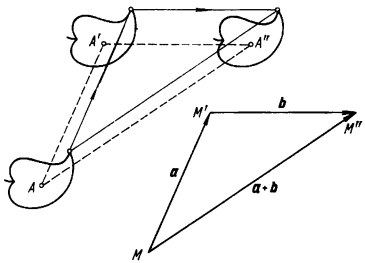


Abb. 36

(Abb. 36). *Daher stellt also das Produkt $\Psi\Phi$ zweier Parallelverschiebungen (um die Vektoren $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$ und $\overrightarrow{M'M''} = \boldsymbol{b}$) ebenfalls eine Parallelverschiebung (um den Vektor $\overrightarrow{MM''} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$[2])) dar.*

2. *Wenn Φ die Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{MM'}$ ist und Ψ die Spiegelung am Punkt O, so stellt $\Psi\Phi$ die Spiegelung am Punkt O_1 dar, für den $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M}$ ist* (Abb. 37a). Das ergibt sich daraus, daß bei $\Phi(A) = A'$ und $\Psi(A') = A''$ die Gerade OO_1 Mittellinie des Dreiecks $AA'A''$ ist und daß *daher die Strecke AA'' durch den Punkt O_1 halbiert wird* (wenn die Punkte A, A' und O

[1]) Mitunter wird sie auch *Summe* der Abbildungen Φ und Ψ genannt.

[2]) Vgl. den Artikel „Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie", S. 303.

auf einer Geraden liegen, artet das Dreieck $AA'A''$ in eine Strecke aus; wir überlassen es dem Leser, wie man hierbei zu argumentieren hat).

Analog ist das Produkt $\Psi\Phi$ aus der Spiegelung Φ an dem Punkt O und der Parallelverschiebung Ψ um den Vektor $\overrightarrow{MM'}$ ebenfalls eine Spiegelung, und zwar an dem Punkt O_1, für den $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$ ist (Abb. 37b).

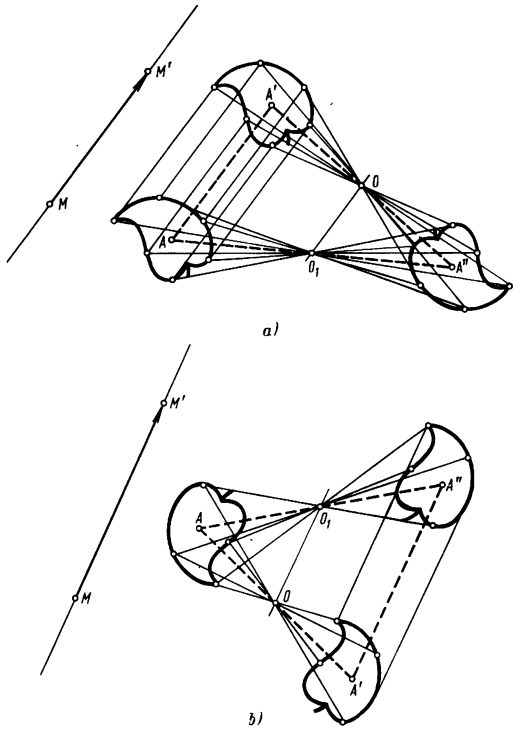


Abb. 37

3. *Es sei Φ die Spiegelung am Punkt O und Ψ die Spiegelung an einem (anderen) Punkt O_1* (Abb. 38). Es ist klar, daß die Gerade OO_1 eine Mittellinie des Dreiecks $AA'A''$ ist, wenn hierbei $A' = \Phi(A)$ und $A'' = \Psi(A')$ gilt. Folglich ergibt sich $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO_1}$. *Daher stellt hier das Produkt $\Psi\Phi$ der Transformationen eine Parallelverschiebung* (um den Vektor $2\overrightarrow{OO_1}$) *dar.*

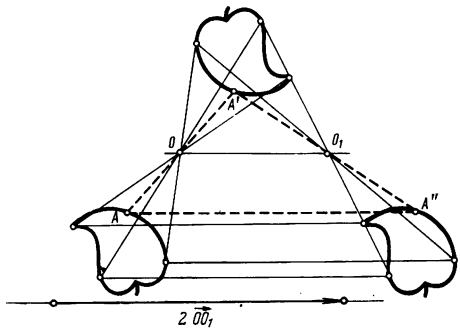
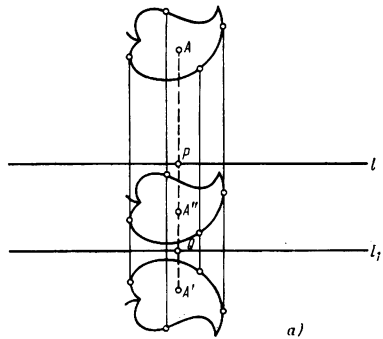


Abb. 38

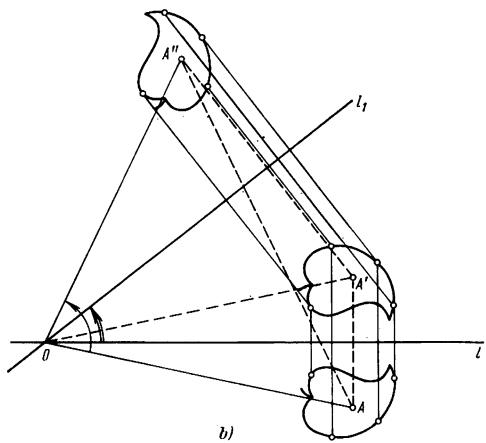
4. *Wir untersuchen nun, was für eine Transformation das Produkt zweier Spiegelungen Φ und Ψ an Geraden l und l_1 ist.* Hier muß man zwei Fälle unterscheiden:

a) Wenn die Geraden l und l_1 parallel sind, ist $AA' \perp l$ und $A'A'' \perp l_1$, wobei $A' = \Phi(A)$ und $A'' = \Psi(A')$ gilt. Der Schnittpunkt P der Geraden AA' mit l halbiert die Strecke AA', ebenso halbiert der Schnittpunkt Q der Geraden $A'A''$ mit l_1 die Strecke $A'A''$. Hieraus liest man leicht die Relation $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{PQ}$ ab (Abb. 39a). *Folglich ist das Produkt $\Psi\Phi$ eine Parallelverschiebung in Richtung der Senkrechten zu den Geraden l und l_1* um einen Betrag, der doppelt so groß ist wie der Abstand von l und l_1 (der Verschiebungsvektor ist von l nach l_1 gerichtet).

b) Schneiden sich die Geraden l und l_1 in einem Punkt O und ist $A' = \Phi(A)$ und $A'' = \Psi(A')$, so wird $|OA'| = |OA|$ und $|OA''| = |OA'|$. Außerdem sind die von den Vektoren $\overrightarrow{OA'}$ und $\overrightarrow{OA}$ mit der Geraden l gebildeten Winkel gleich, ebenso die von den Vektoren $\overrightarrow{OA''}$ und $\overrightarrow{OA'}$ mit der Geraden l_1 gebildeten Winkel (Abb. 39b). Hieraus ergibt sich, daß $|OA''| = |OA|$ gilt und daß der Winkel $\sphericalangle AOA''$ gleich dem Doppelten des Winkels zwischen den Geraden l und l_1 ist. *Das Produkt $\Psi\Phi$ stellt also die Drehung um den Schnittpunkt O der*



a)



b)

Abb. 39

Geraden l und l_1 um das Doppelte des von der Geraden l und l_1 eingeschlossenen Winkels dar (die Drehrichtung verläuft von l nach l_1).

Wir bemerken, daß in den Beispielen 3 und 4 die Punkte O und O_1 bzw. die Geraden l und l_1 der Spiegelungen Φ und Ψ als voneinander verschieden angenommen wurden. Man kann natürlich auch nach dem Produkt zweier Spiegelungen Φ an ein und demselben Punkt O oder an ein und derselben Geraden l fragen (dieses Produkt kann man mit $\Phi\Phi$ oder Φ^2 bezeichnen). Weil die Spiegelung Φ den Bildpunkt A' des Punktes A wieder in A überführt, *führt das Produkt Φ^2 jeden Punkt A in sich über*, d. h., kein Punkt der Ebene verändert seine Lage. Diese „Transformation" I (hier wird eigentlich gar nichts transformiert) heißt die *identische Transformation* der Ebene; sie entspricht der Zahlenfunktion $f(x) = x$, die jedes Argument x auf sich selbst abbildet.

Das Quadrat einer Spiegelung an einem Punkt oder an einer Geraden (d. h. das zweifache Produkt ein und derselben Spiegelung) *stellt also die identische Transformation dar* (vgl. S. 91).

4.2. Einige allgemeine Eigenschaften des Produktes von Transformationen. Aus unseren Beispielen folgt, daß *im allgemeinen das Produkt zweier Transformationen* (im Unterschied zum Produkt von Zahlen) *von der Reihenfolge abhängt, in welcher diese Transformationen ausgeführt werden*: Bedeutet z. B. Φ die Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$ und Ψ die Spiegelung am Punkt O, so ist $\Psi\Phi$ die Spiegelung am Punkt O_1 mit $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M}$, aber $\Phi\Psi$ die Spiegelung am Punkt O_2 mit $\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$ (vgl. Beispiel 3, insbesondere Abb. 37a, b). Übrigens darf uns dieser Umstand nicht weiter wundern, denn das Produkt von Transformationen ist dem Begriff der zusammengesetzten Funktionen verwandt, für welche ja die Reihenfolge der einzelnen Funktionen überaus wesentlich ist (durchaus nicht gleich sind z. B. die Funktionen $\sin^2 x$ und $\sin(x^2)$ oder a^{-x} und $-a^x$).

Im Unterschied zur Produktbildung von Zahlen ist also für die Produktbildung von geometrischen Transformationen nicht das Kommutativgesetz erfüllt: *Die Transformation $\Psi\Phi$ unterscheidet sich im allgemeinen von der Transformation $\Phi\Psi$.* Man könnte nun auch denken, daß das Assoziativgesetz der gewöhnlichen Zahlenarithmetik in der „Arithmetik der Transformationen" verletzt ist, d. h., daß sich die Produkte $X(\Psi\Phi)$ und $(X\Psi)\Phi$ aus den einzelnen Transformationen unterscheiden. Jedoch sieht man leicht, daß *die Produktbildung von Transformationen immer assoziativ ist.* Es sei etwa $\Phi(A) = A_1$, $\Psi(A_1) = A_2$ und $X(A_2) = A_3$, dann ist

$$(\Psi\Phi)(A) = \Psi(A_1) = A_2 \quad \text{und} \quad X(\Psi\Phi)(A) = X(A_2) = A_3.$$

Zum anderen gilt

$$\big((X\Psi)\Phi\big)(A) = (X\Psi)(A_1) = X\big(\Psi(A_1)\big) = X(A_2) = A_3.$$

Es ist somit für einen beliebigen Punkt A

$$(X(\Psi\Phi))(A) = ((X\Psi)\Phi)(A).$$

Also besteht für drei Transformationen Φ, Ψ und X stets die Beziehung

$$X(\Psi\Phi) = (X\Psi)\Phi.$$

Diese letzte Transformation bezeichnet man einfach mit $X\Psi\Phi$ (ohne Klammern).

4.3. Produkte von Bewegungen. Klassifizierung der Bewegungen. Die betrachteten einfachen Beispiele für Produkte von Transformationen lassen interessante und wichtige Anwendungen zu. So kann das Beispiel 4 dazu benutzt werden, das Produkt aus einer Parallelverschiebung Φ (um einen Vektor $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$) und einer Drehung Ψ (um einen Punkt O mit einem Winkel α) oder das Produkt aus zwei Drehungen Ψ_1 und Ψ_2 (im Punkte O_1 bzw. O_2 mit den Winkeln α_1 bzw. α_2) ausfindig zu machen.

Die Parallelverschiebung kann zunächst dargestellt werden als Produkt zweier Spiegelungen Σ und Σ_1 an Geraden l und l_1, die auf der Geraden MM' senkrecht stehen und den Abstand $\frac{1}{2}|MM'|$ voneinander haben. Wir wählen nun diese Gerade so, daß l_1 durch den Punkt O (Abb. 40a) geht. Analog stellen

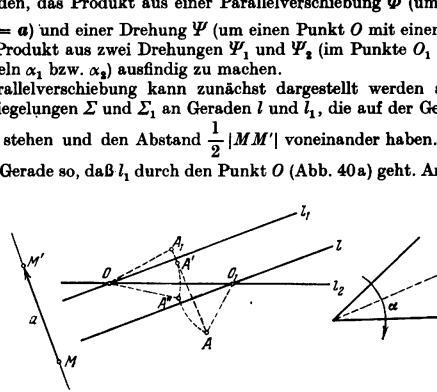


Abb. 40a

wir Ψ als Produkt der Spiegelung Σ_1 an der Geraden l und der Spiegelung Σ_2 an der Geraden l_2 dar, die l_1 im Punkt O unter dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ schneidet. In diesem Fall ist das Produkt $\Psi\Phi$ mit dem Produkt (d. h. mit der aufeinanderfolgenden Ausführung) der vier Spiegelungen $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_1$ und Σ_2 gleichbedeutend; das kann man so schreiben: $\Psi\Phi = (\Sigma_2\Sigma_1)(\Sigma_1\Sigma)$. Indem wir das Assoziativgesetz der Produktbildung ausnutzen, schreiben wir $\Psi\Phi$ nicht in der Form $(\Sigma_2\Sigma_1)(\Sigma_1\Sigma)$, sondern in der Form $\Sigma_2(\Sigma_1\Sigma_1)\Sigma$; beide Schreibweisen unterscheiden sich nur in der Anordnung der Klammern. Das Produkt der Spiegelungen Σ_1 und Σ_1 stellt die identische Transformation I dar, die keinen Punkt

in seiner Lage auf der Ebene verändert. Damit erhalten wir $\Psi\Phi = \Sigma_2\Sigma$, und daraus folgt, daß $\Psi\Phi$ die Drehung um den Schnittpunkt O_1 der Geraden l und l_2 mit dem Winkel α ist.

Analog stellen wir zur Ermittlung des Produktes $\Phi\Psi$ die Transformation Ψ als Produkt von Spiegelungen Σ' und Σ_1 an Geraden l' und l_1 dar. Die Geraden müssen durch den Punkt O gehen und den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließen. Wir wählen wieder wie vorher $l_1 \perp MM'$. Weiterhin stellen wir die Transformation Φ als

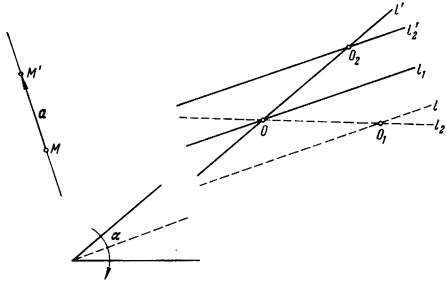


Abb. 40b

Produkt von Spiegelungen Σ_1 und Σ_2' an Geraden l_1 und l_2' dar, deren Abstand $\frac{1}{2}|MM'|$ (Abb. 40b) beträgt. Damit haben wir

$$\Phi\Psi = \Sigma_2'\Sigma_1'\Sigma_1\Sigma' = \Sigma_2' I \Sigma' = \Sigma_2'\Sigma'.$$

Folglich wird $\Phi\Psi$ eine Drehung um den Schnittpunkt O_2 der Geraden l' und l_2' (und zwar mit dem Winkel α).

Zur Ermittlung von $\Psi_2\Psi_1$ stellen wir die beiden Drehungen Ψ_1 und Ψ_2 um die Punkte O_1 und O_2 mit den Drehwinkeln α_1 und α_2 als Produkte von Spiegelungen dar, und zwar Ψ_1 als Produkt aus einer Spiegelung an einer Geraden m_1 und der Spiegelung an der Geraden O_1O_2, wobei sich m_1 und O_1O_2 im Punkt O_1 schneiden und den Winkel $\frac{1}{2}\alpha_1$ einschließen, und Ψ_2 als Produkt aus der Spiegelung an der Geraden O_1O_2 und der Spiegelung an der Geraden m_2, welche sich mit O_1O_2 im Punkt O_2 unter dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha_2$ schneidet. Hiermit ergibt sich $\Psi_2\Psi_1$ als Produkt der Spiegelungen an m_1 und m_2, woraus folgt, daß die Transformation $\Psi_2\Psi_1$ mit der Drehung um den Schnittpunkt Q von m_1 und m_2 mit dem Drehwinkel $\alpha_1 + \alpha_2$ übereinstimmt (vgl. Abb. 41a). Eine

Ausnahme bildet hierbei der Fall $\alpha_1 + \alpha_2 = k \cdot 360°$, d. h. $\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = k \cdot 180°$, wobei k eine ganze Zahl ist. In diesem Fall sind nämlich die Geraden m_1 und m_2 parallel, und dann wird die Transformation $\Psi_2\Psi_1$ eine Parallelverschiebung (Abb. 41b).

Bisher sprachen wir ausschließlich über Produkte von Bewegungen. Wir bemerken, daß aus dem oben Gesagten leicht eine vollständige Klassifizierung aller Bewegungen der Ebene abgeleitet werden kann. Es ist klar, daß jede

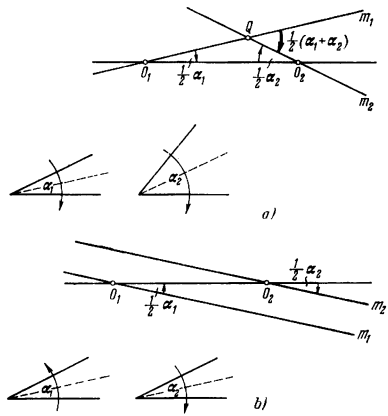


Abb. 41

Bewegung der Ebene vollständig durch die Angabe charakterisiert ist, in welche Punkte A', B' und C' drei fest vorgegebene, nicht auf einer Geraden gelegene Punkte A, B, C der Ebene übergehen. Denn jeder Punkt M der Ebene geht in einen Punkt M' über, für welchen die Abstände $|M'A'|$, $|M'B'|$ und $|M'C'|$ gleich den entsprechenden Abständen $|MA|$, $|MB|$ und $|MC|$ sind. Es gibt aber nur jeweils einen einzigen solchen Punkt M'.[1]) Offenbar kann man

[1]) Die Bedingungen $|M'A'| = |MA|$ und $|M'B'| = |MB|$ bestimmen auf der Ebene zwei Punkte M' und M'', die sich in ihren Abständen vom Punkt C' unterscheiden (denn C' liegt nicht auf der Geraden $A'B'$). Deshalb ist durch die dritte Forderung $|M'C'| = |MC|$ der Punkt M' eindeutig festgelegt (Abb. 42).

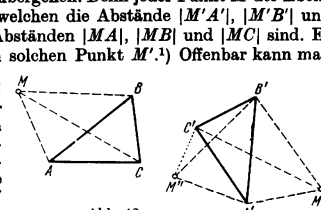


Abb. 42

nun die Punkte A, B, C mit Hilfe von höchstens drei Spiegelungen an gewissen Geraden in die Punkte A', B', C' überführen. Ist nämlich der Punkt A von A' verschieden, so entsprechen sich diese Punkte bei der Spiegelung Σ_1 an der Mittelsenkrechten l_1 der Strecke AA'. Das Dreieck ABC geht bei der Spiegelung Σ_1 in das Dreieck $A'B_1C_1$ über (Abb. 43). Wenn nun der Punkt $B_1 = \Sigma_1(B)$ nicht mit B' zusammenfällt, entsprechen sich B_1 und B' bei der Spiegelung Σ_2 an der Mittelsenkrechten l_2 der Strecke B_1B' (wegen $|A'B'| = |AB| = |A'B_1|$ folgt $\Sigma_2(A') = A'$, d. h., die Gerade l_2 geht durch A'). Wenn das mit Hilfe der Spiegelung Σ_2 aus $A'B_1C_1$ erhaltene Dreieck $A'B'C_2$ noch nicht mit dem Dreieck $A'B'C'$ zusammenfällt, liegt es zu ihm bezüglich der Geraden $A'B'$ spiegelbildlich. Deshalb kann man mit Hilfe einer weiteren Spiegelung Σ_3 an der Geraden $A'B' = l_3$ das Dreieck $A'B'C'$ aus $A'B'C_2$ erhalten (Abb. 43).

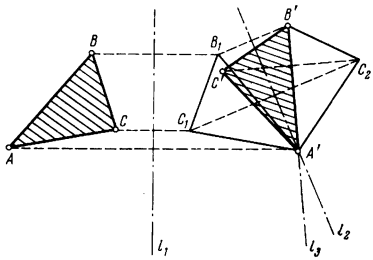


Abb. 43

Zwei beliebige kongruente Dreiecke kann man also durch Anwendung von höchstens drei Spiegelungen an passend gewählten Geraden zur Deckung bringen. Hieraus folgt (vgl. Beispiel 4 auf S. 77): *Jede Bewegung der Ebene ist entweder eine Spiegelung an einer Geraden oder eine Parallelverschiebung oder eine Drehung um einen Punkt (welche insbesondere eine Spiegelung an einem Punkt sein kann), oder aber sie ist darstellbar als Produkt einer Parallelverschiebung oder einer Drehung mit einer Spiegelung an einer Geraden.*[1])

4.4. Anwendungen. Die erhaltenen Resultate können zur Lösung vieler Konstruktionsaufgaben herangezogen oder für Beweiszwecke verwendet werden. Wir betrachten als

[1]) Das Produkt *dreier* Spiegelungen an Geraden kann auch in Form einer sogenannten *Gleitspiegelung* dargestellt werden, d. h. als Produkt einer Spiegelung an einer Geraden und einer Parallelverschiebung in Richtung dieser Geraden (vgl. die am Schluß dieses Artikels zitierten Bücher von I. M. JAGLOM [2] und von D. I. PEREPELKIN [3]). *Folglich ist jede Bewegung der Ebene entweder eine Parallelverschiebung oder eine Drehung oder eine Gleitspiegelung* (ein Spezialfall der Gleitspiegelung ist die gewöhnliche Spiegelung an einer Geraden).

Beispiel die Aufgabe, *mit gegebenen Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ und gegebenen Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ein Vieleck $A_1A_2 \ldots A_n$ zu konstruieren, so daß über seinen Seiten gleichschenklige Dreiecke stehen, deren Winkel in den Punkten $Q_1, \ldots, Q_n$ die Winkel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind* (Abb. 44). Diese Aufgabe umfaßt die bekannten Aufgaben über die Konstruktion eines Dreiecks bei gegebenen Mittelpunkten der über den Seiten des gesuchten Dreiecks errichteten Quadrate ($n = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90°$) oder die Aufgabe, ein Dreieck bei gegebenen Spitzen der über dem gesuchten Dreieck errichteten gleichseitigen Dreiecke zu konstruieren ($n = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 60°$), oder die Aufgabe, ein Vieleck bei bekannten Mittelpunkten der Seiten zu konstruieren (*n* beliebig, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 180°$), usw.

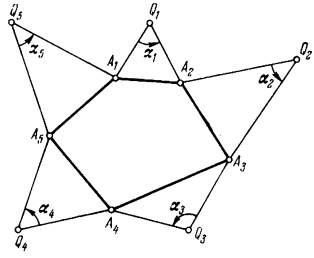


Abb. 44

Zur Lösung dieser Aufgabe bemerken wir, daß eine aufeinanderfolgende Anwendung von Drehungen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ um die Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ mit den Drehwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zunächst den Punkt A_1 in A_2, darauf diesen Punkt in A_3, ..., und schließlich A_n wieder in A_1 überführt (Abb. 44). Demnach ist der Punkt A_1 für das Produkt $B = B_nB_{n-1} \cdots B_2B_1$ der betrachteten Drehungen ein Fixpunkt. Aus dem oben Bewiesenen folgt, daß das Produkt $B = B_nB_{n-1} \cdots B_2B_1$ von Drehungen selbst eine Drehung, und zwar mit dem Drehwinkel $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ darstellt. Das Zentrum dieser „resultierenden" Drehung ist leicht zu finden, denn es ist klar, daß der einzige Punkt, der bei einer Drehung um einen Winkel $\neq k \cdot 360°$ invariant bleibt, das Drehzentrum ist. *Folglich ist die gesuchte Ecke A_1 des Vielecks das Zentrum Q der resultierenden Drehung B und kann deshalb konstruiert werden.* Es ist weiterhin klar, wie bei bekanntem Punkt A_1 (und bekannten Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ und bekannten Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) das ganze n-Eck konstruiert wird.

Unsere Überlegung erweist sich jedoch als unbrauchbar, wenn die Winkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ ein Vielfaches von 360° ist. In diesem Fall können wir im allgemeinen die Spitzen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ der auf den Seiten des gesuchten Vielecks zu konstruierenden Dreiecke nicht beliebig vorgeben, denn das Produkt der Drehungen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ um die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (wobei $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k \cdot 360°$ ist) stellt eine Parallelverschiebung dar, welche bei einem von Null verschiedenen Verschiebungsvektor keinen einzigen Punkt der Ebene festläßt. Daher hat die entsprechende Konstruktionsaufgabe bei $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k \cdot 360°$ keine Lösung. Nur bei gewissen speziell gelegenen Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ ist die resultierende Transformation $B = B_nB_{n-1} \cdots B_2B_1$ eine „Parallelverschiebung um den Nullvektor". Jeder beliebige Punkt der Ebene kann hier als Ecke A_1 des gesuchten n-Ecks angenommen werden, denn die identische Transformation läßt alle Punkte der Ebene fest. Daher ist hierbei die Konstruktionsaufgabe uninteressant. Interessant ist jedoch die Aufgabe, alle möglichen Punkte-Konfigurationen (Lage der Punkte auf der Ebene) von $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ festzustellen, die diesem Fall entsprechen.

Das Gesagte läßt sich schon gut an der erwähnten Aufgabe über die Konstruktion eines n-Ecks $A_1A_2 \ldots A_n$ bei gegebenen Mittelpunkten $Q_1, \ldots, Q_n$ seiner Seiten illustrieren. Unter der Bedingung, daß das betrachtete n-Eck eine ungerade Seitenanzahl $n = 2k + 1$

hat, ist die Aufgabe immer eindeutig lösbar. In diesem Fall ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (2k+1)\cdot 180°$, d. h., die resultierende Transformation ist eine Drehung um den Winkel $(2k+1)\cdot 180°$, also um 180°, oder, anders gesagt, eine Spiegelung an einem gewissen Punkt. Das Zentrum Q dieser Spiegelung (d. h. die Ecke A_1 des Vielecks) ist leicht zu finden, wenn man von den obigen Beispielen 1 bis 3 (vgl. S. 75ff.) Gebrauch macht. Ist dagegen $n = 2k$ gerade, so ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2k \cdot 360°$, und die Transformation $B = B_n B_{n-1} \cdots B_2 B_1$ wird eine Parallelverschiebung oder die identische Transformation. Daher können die Mittelpunkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ der Seiten des $2k$-Ecks $A_1 A_2 \ldots A_n$ nicht willkürlich gewählt werden. Zum Beispiel ist bekannt, daß *bei $n = 4$ diese Punkte, d. h. die Mittelpunkte eines beliebigen Vierecks, immer die Ecken eines Parallelogramms bilden*[1]) (Abb. 45). Es ist vollkommen klar, womit das zusammenhängt: Das Produkt aus den Spiegelungen Σ_1 und Σ_2 an den Punkten Q_1 und Q_2 stellt eine Parallelverschiebung Π_1 um den Vektor $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$ dar (vgl. Beispiel 3 auf S. 77), und das Produkt aus den Spiegelungen Σ_3 und Σ_4 an den Punkten Q_3 und Q_4 stellt eine Parallelverschiebung Π_2 um den Vektor $2\overrightarrow{Q_2Q_3}$ dar. Deshalb wird nur im Fall $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_4Q_3}$ das Produkt $\Sigma_4\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1 = \Pi_2\Pi_1$ der vier Spiegelungen die identische Abbildung, d. h. aber, daß das Viereck $Q_1Q_2Q_3Q_4$ ein Parallelogramm sein muß. Nur dann ist die Aufgabe, ein Viereck bei gegebenen Mittelpunkten der Seiten zu konstruieren, lösbar (wobei die Ecke A_1 beliebig vorgegeben werden kann).

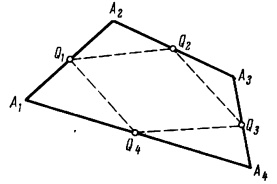


Abb. 45

Hier noch zwei Aufgaben ähnlicher Art: *Was kann man über die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke aussagen, die über den Seiten eines beliebigen Dreiecks errichtet sind?* Zum anderen: *Was kann man über die Mittelpunkte der Quadrate aussagen, die über den Seiten eines beliebigen Vierecks errichtet sind?*

Wir nehmen hierbei zur eindeutigen Festlegung an, daß die konstruierten gleichseitigen Dreiecke und Quadrate außerhalb des Ausgangsdreiecks bzw. Vierecks liegen. Im ersten Fall besitzen die drei gesuchten Punkte R_1, R_2 und R_3 die Eigenschaft, daß das Produkt der Drehungen B_1, B_2, B_3 um diese Punkte mit dem Drehwinkel 120° die identische Transformation ergibt, denn es ist $3 \cdot 120° = 360°$. Das Produkt B_2B_1 der ersten beiden Drehungen stellt eine Drehung B mit dem Winkel 240° um den Punkt R dar, in welchem sich die Geraden schneiden, die durch R_1 und R_2 hindurchgehen und mit der Geraden R_1R_2 jeweils einen Winkel von $\frac{120°}{2} = 60°$ einschließen (Abb. 46; vgl. auch S. 77). Weiterhin

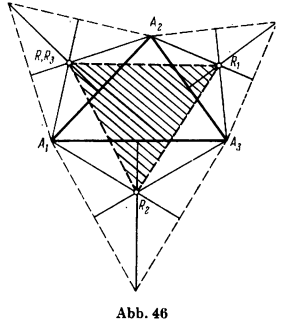


Abb. 46

[1]) Vgl. S. 321.

ist klar, daß das Produkt aus den Drehungen B und B_3 um die Punkte R und R_3 mit dem Drehwinkel 240° und 120° genau dann die identische Transformation ist, wenn R_3 mit R zusammenfällt. Damit erhalten wir, daß die Geraden R_1R_3 und R_2R_3 mit der Geraden R_1R_2 einen Winkel von 60° bilden, und daß also — unabhängig von der Form des Ausgangsdreiecks $A_1A_2A_3$ — das Dreieck $R_1R_2R_3$ gleichseitig ist.

Im zweiten Fall (Abb. 47) müssen die Mittelpunkte T_1, T_2, T_3, T_4 der Quadrate so liegen, daß das Produkt $B_4B_3B_2B_1$ der Drehungen um diese Punkte mit dem Drehwinkel 90° gleich der identischen Transformation wird. Das Produkt B_2B_1 der Drehungen um T_1 und T_2 ist nichts anderes als die Spiegelung (d. h. Drehung um 180°) Σ_1 an dem Schnittpunkt U der Geraden, die durch T_1 und T_2 gehen und mit der Geraden T_1T_2 jeweils einen Winkel von $\frac{90°}{2} = 45°$ einschließen. Analog ist das Produkt B_4B_3 der Drehungen um T_3 und T_4 die Spiegelung Σ_2 an dem Punkt V, für den die Geraden T_3V und T_4V mit der Geraden T_3T_4 einen Winkel von 45° bilden. Weiterhin ist klar, daß das Produkt $\Sigma_2\Sigma_1$ dieser Spiegelungen dann und nur dann die identische Transformation darstellt, wenn die Punkte U und V zusammenfallen. Aus dem Zusammenfallen der Punkte U und V folgt aber seinerseits, daß das Dreieck UT_2T_4 aus dem Dreieck UT_1T_3 durch eine Drehung von 90° um den Punkt $U = V$ hervorgeht, daß *also die Strecken T_1T_3 und T_2T_4 gleich lang sind und senkrecht aufeinander stehen*. Wir bemerken, daß auch umgekehrt aus den Beziehungen $|T_1T_3| = |T_2T_4|$ und $T_1T_3 \perp T_2T_4$ für die vier Punkte T_1, T_2, T_3, T_4 folgt, daß die Ecken U und V der gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke T_1T_2U und T_3T_4V zusammenfallen. Genau in diesem Fall existiert also ein Viereck $A_1A_2A_3A_4$, für welches T_1, T_2, T_3, T_4 die Zentren der über seinen Seiten errichteten Quadrate sind, d. h., die Bedingungen $|T_1T_3| = |T_2T_4|$ und $T_1T_3 \perp T_2T_4$ charakterisieren die Vierecke $T_1T_2T_3T_4$, welche den möglichen Vierecken $A_1A_2A_3A_4$ entsprechen können.

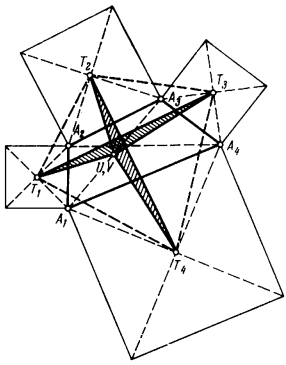


Abb. 47

4.5. Weitere Beispiele für Produkte von Transformationen. Wir wollen hier nicht ausführlich auf Fragen über das Produkt von Ähnlichkeitstransformationen eingehen. Wir bemerken nur, daß die von uns vorgenommene Klassifizierung der Bewegungen (d. h. die Aufzählung aller möglichen Bewegungstypen) gleichzeitig zu einer Klassifizierung der Ähnlichkeitstransformationen führt, denn *offenbar ist jede Ähnlichkeitstransformation Π mit einem Ähnlichkeitskoeffizienten k darstellbar als Produkt einer Homothetie Γ mit dem Koeffizienten k und einer darauffolgenden Bewegung Δ*. In der Tat: Es sei $\Pi = \Delta\Gamma$, wobei Δ eine geeignete Transformation ist. Dann verändert Δ keine Abstände, weil sowohl die Homothetie Γ als auch die Ausgangstransformation Π alle Abstände um das k-fache verändert, d. h., Δ ist eine Bewegung.

Damit reduziert sich das Studium der Ähnlichkeitstransformation auf das der Homothetien (Kontraktionen in bezug auf Punkte). Man kann dann (in einem analogen Sinne) das Studium der affinen Transformationen auf das der Kontraktionen in bezug auf Geraden zurückführen. Genauer bedeutet dies: *Jede affine Transformation A kann in der Form $\Pi\Lambda$ dargestellt werden, wobei Λ eine Kontraktion in bezug auf eine Gerade l und Π eine Ähnlichkeitstransformation ist.* Analog kann man das Studium der Kreisverwandtschaften der Ebene auf das der Inversionen zurückführen: *Jede Kreisverwandtschaft K kann als Produkt $\Pi\Omega$ aus einer Inversion Ω und einer Ähnlichkeitstransformation Π dargestellt werden.* Die Beweise dieser tieferliegenden Theoreme lassen wir aus.[1])

Zum Abschluß führen wir noch drei Beispiele für Produkte von Transformationen an, die keine Bewegungen sind.

5. *Es sei Φ_1 eine Homothetie mit dem Zentrum O_1 und dem Koeffizienten k_1 und Φ_2 eine Homothetie mit dem Zentrum O_2 und dem Koeffizienten k_2.* Wir wählen auf der Ebene beliebige Punkte A und B und setzen $\Phi_1(A) = A'$, $\Phi_2(A') = A''$, $\Phi_1(B) = B'$, $\Phi_2(B') = B''$. Wegen $A'B' \parallel AB$ und $A''B'' \parallel A'B'$ ist auch $A''B'' \parallel AB$; hierbei ist die Strecke $A''B''$ mit AB gleich gerichtet, wenn die Zahlen k_1 und k_2 entweder beide positiv oder beide negativ sind; andernfalls ist $A''B''$ zu AB entgegengesetzt gerichtet. Weiterhin gilt wegen

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = |k_1| \quad \text{und} \quad \frac{|A''B''|}{|A'B'|} = |k_2|$$

die Beziehung

$$\frac{|A''B''|}{|AB|} = |k_1| \cdot |k_2|.$$

Hieraus folgt, daß bei $|k_1| \cdot |k_2| = 1$ die Transformation $\Phi_2\Phi_1$ eine *Parallelverschiebung* um den Vektor $\overrightarrow{AA''}$ darstellt (Abb. 48a; in diesem Fall haben wir $BB'' \parallel AA''$ für einen beliebigen Punkt B); bei $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ ist die Transformation $\Phi_2\Phi_1$ eine *Homothetie mit dem Koeffizienten k_1k_2* (Abb. 48b; in diesem Fall schneiden sich für einen beliebigen Punkt B die Geraden $B''B$ und $A''A$ in dem Punkt O, für den

$$\frac{|OA''|}{|OA|} = \frac{|A''B''|}{|AB|} = \frac{|OB''|}{|OB|} = |k_1 \cdot k_2|$$

gilt).

Wir bemerken noch folgendes: *Ist $\Phi_2\Phi_1$ eine Parallelverschiebung, so erfolgt sie parallel zur Geraden O_1O_2; ist $\Phi_2\Phi_1$ eine Homothetie, so liegt ihr Zentrum auf der Geraden O_1O_2.* Das folgt daraus, daß die Transformationen Φ_1 und Φ_2 die Gerade O_1O_2 in sich überführen und daß folglich diese Gerade auch bei der Transformation $\Phi_2\Phi_1$ (die eine Homothetie oder Parallelverschiebung ist) invariant bleibt. Nun führt eine Homothetie nur die durch ihr Zentrum verlaufenden Geraden in sich über, und eine Parallelverschiebung führt nur die

[1]) Vgl. z. B. die auf S. 71 zitierten Bücher von Delaunay und Raikow oder von Jaglom und Aschkinuse sowie den § 5 im Artikel „Geometrie der Kreise".

Geraden in sich über, die zur Verschiebungsrichtung parallel sind. Damit ergibt sich insbesondere das bekannte Theorem über drei Homothetiezentren: *Die*

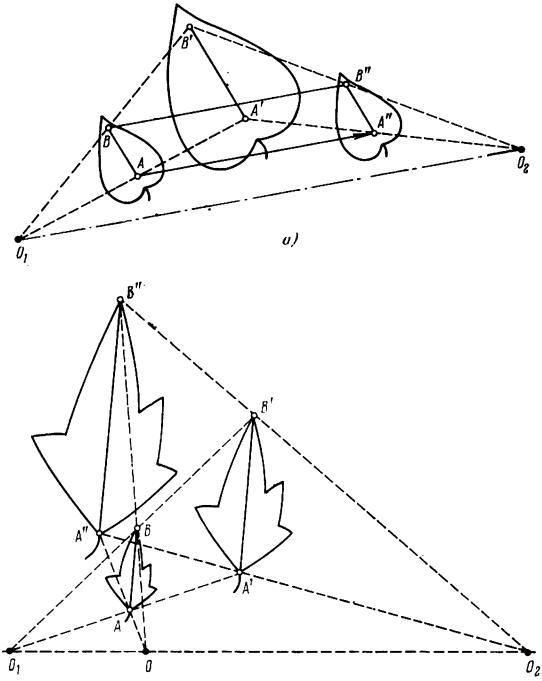


Abb. 48

Homothetiezentren dreier paarweise homothetischer Figuren liegen auf einer Geraden, der sogenannten *Homothetieachse* (Abb. 48b).

Zu einem interessanten Spezialfall des letzten Satzes gelangen wir, wenn die betrachteten Figuren Kreise sind. Bekanntlich haben zwei verschiedene Kreise S_1 und S_2 zwei Homothetiezentren. Es sind dies, sofern diese Kreise

außerhalb voneinander liegen, die Schnittpunkte der beiden inneren bzw. äußeren Tangenten (Abb. 49). Hieraus folgt wegen des oben gezeigten Theo-

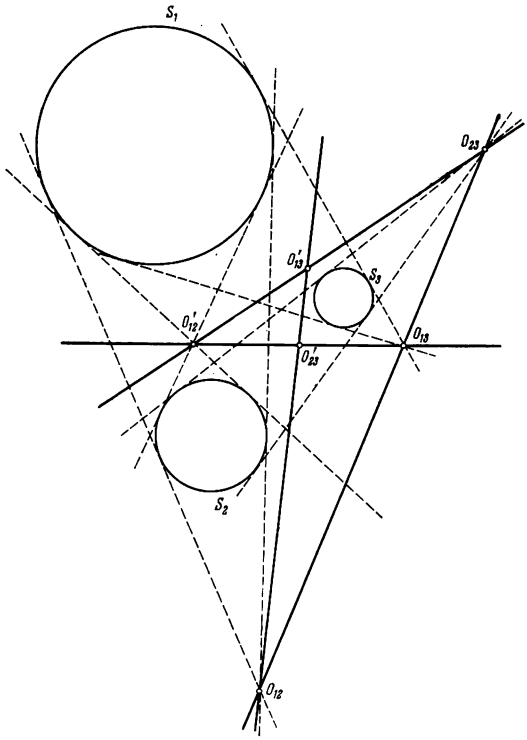


Abb. 49

rems, daß die drei Schnittpunkte der äußeren Tangenten (d. h. die drei äußeren Ähnlichkeitszentren) von drei paarweise verschiedenen Kreisen auf einer Gera-

den liegen. Man kann auch die anderen Kombinationen von äußeren und inneren Ähnlichkeitszentren betrachten: *Die sechs Ähnlichkeitszentren der Kreispaare von drei paarweise verschiedenen Kreisen liegen zu je dreien auf insgesamt vier Geraden* (den *Ähnlichkeitsachsen* der drei betrachteten Kreise; Abb. 49).

6. *Es seien Φ_1 eine Inversion vom Grad k_1 mit dem Zentrum O und Φ_2 eine Inversion von einem anderen Grad k_2, aber mit demselben Zentrum O.* Wenn $\Phi_1(A) = A'$ und $\Phi_2(A') = A''$ gesetzt wird, liegt in diesem Fall der Punkt A'' auf der Geraden OA, denn A' liegt auf der Geraden OA und A'' auf der Geraden OA'. Außerdem ist $\frac{|OA''|}{|OA|} = \frac{k_2}{k_1}$, denn es gilt $|OA'| = \frac{k_1}{|OA|}$ und $|OA''| = \frac{k_2}{|OA'|}$. Hieraus folgt, wie leicht bewiesen werden kann, daß *die Transformation $\Phi_2\Phi_1$ eine Homothetie Γ mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten $\frac{k_2}{k_1}$ ist.* Es ist jedoch zu beachten, daß hierbei der Punkt O auszunehmen ist, denn der Definitionsbereich von $\Phi_2\Phi_1$ ist entweder die Ebene mit Ausnahme des Punktes O, der nicht im Definitionsbereich der Transformationen Φ_1 und Φ_2 vorkommt, oder der Definitionsbereich von $\Phi_2\Phi_1$ ist die erweiterte (geschlossene) Ebene.

7. Genauso liegen die Verhältnisse bei dem *Produkt $\Psi_2\Psi_1$ zweier hyperbolischer Inversionen mit gemeinsamer Achse o* und (verschiedenen) Koeffizienten k_1 und k_2. Dieses Produkt $\Psi_2\Psi_1$ unterscheidet sich nur dadurch von der Kontraktion in bezug auf die Gerade o und mit dem Koeffizienten $\frac{k_2}{k_1}$, daß der Definitionsbereich der Transformation $\Psi_2\Psi_1$ nicht die ganze Ebene ist, sondern die um die Gerade o verringerte Ebene (oder die um gewisse „uneigentliche" Elemente erweiterte Ebene).

§ 5. Die inverse Transformation

5.1. Die Definition der inversen Transformation. Nachdem wir den Begriff der zusammengesetzten Funktionen auf geometrische Transformationen übertragen haben, ist es natürlich, Entsprechendes auch für den Begriff der inversen Funktionen vorzunehmen. Bekanntlich heißen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ *zueinander invers*, wenn aus $f(x) = y$ die Beziehung $g(y) = x$ folgt. So sind etwa die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ oder $f(x) = a^x$ und $g(x) = \log_a x$ oder $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \arcsin x$ zueinander invers. Mitunter wird für die zu $f(x)$ inverse Funktion die Bezeichnung $f^{-1}(x)$ verwendet. Es ist wichtig zu beachten, daß *die zu $f(x)$ inverse Funktion $f^{-1}(x)$ nur dann eindeutig definiert werden kann, wenn bei der Funktion $f(x)$ je zwei verschiedenen x-Werten stets verschiedene Funktionswerte entsprechen.* Aus diesem Grunde muß man bei der Definition der inversen Funktion von x^2 oder $\sin x$ den Bereich der Veränderlichen x auf $x \geqq 0$ oder entsprechend z. B. auf $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ einschränken.

Ersetzen wir in der Definition der inversen Funktion die Zahlenveränderlichen x und y durch Punkte, wobei die Rolle der Ausgangsfunktion $f(x)$ durch

eine geometrische Abbildung übernommen wird, so kommen wir zum Begriff der inversen Abbildung. Es sei also Φ eine gewisse eineindeutige Abbildung mit dem Definitionsbereich $\mathscr{A}$ und dem Wertebereich $\mathscr{A}'$. Dann wissen wir, daß man zu jedem Punkt A' des Wertebereiches $\mathscr{A}'$ genau einen Punkt A des Bereiches $\mathscr{A}$ finden kann, für welchen $\Phi(A) = A'$ gilt (das besagt nämlich die Eindeutigkeit der Abbildung). Diesen Punkt A nennt man das *Urbild* des Punktes A' bei der Abbildung Φ und bezeichnet ihn mit $\Phi^{-1}(A')$. Auf diese Weise wird jedem Punkt A' des Bereiches $\mathscr{A}'$ ein bestimmter Punkt $A = \Phi^{-1}(A')$ des Bereiches $\mathscr{A}$ zugeordnet, d. h., wir erhalten eine neue Abbildung Φ^{-1} mit dem Definitionsbereich $\mathscr{A}'$ und dem Wertebereich $\mathscr{A}$. Diese Abbildung wird die zu Φ *inverse Abbildung* genannt. So ist z. B. die Funktion $y = \sin x$ eine eineindeutige Abbildung der Strecke $\mathscr{A} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ der reellen Achse auf die Strecke $\mathscr{A}' = [-1, 1]$; die zugehörige inverse Abbildung ist dann eine Abbildung der Strecke $\mathscr{A}'$ auf $\mathscr{A}$, die durch das Symbol arcsin bezeichnet wird.

In der Geometrie ist besonders der Fall von Interesse, daß Φ eine Transformation mit dem Operationsbereich $\mathscr{A}$ ist. Weil dann Φ eineindeutig ist, ist ihre Abbildung Φ^{-1} definiert, und es handelt sich dabei offenbar ebenfalls um eine Transformation mit dem Operationsbereich $\mathscr{A}$. Diese Transformation Φ^{-1} heißt die zur Transformation Φ *inverse Transformation*. So ist z. B. die zur Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{MM'}$ inverse Transformation gerade die Parallelverschiebung um den entgegengesetzten Vektor $\overrightarrow{M'M}$. Die inverse Transformation zur Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten k ist die Homothetie mit demselben Zentrum und dem Koeffizienten $\frac{1}{k}$; denn wenn $\frac{|OA'|}{|OA|} = k$ ist, gilt $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{1}{k}$. Die zur Kontraktion mit dem Koeffizienten k in bezug auf die Gerade o inverse Transformation ist die Kontraktion mit dem Koeffizienten $\frac{1}{k}$ in bezug auf dieselbe Gerade.

5.2. Die Involutionen. Eine besondere Rolle spielen in der Geometrie diejenigen Transformationen, die *zu sich selbst invers* sind, mit anderen Worten, die Transformationen Φ, die die Plätze zweier Punkte vertauschen, d. h., für die aus $\Phi(A) = A'$ stets $\Phi(A') = A$ folgt. Beispiele für solche Transformationen sind die Inversionen (insbesondere die Kreisspiegelungen; vgl. S. 51) und die hyperbolischen Inversionen (insbesondere die Spiegelungen an einem Paar paralleler Geraden; vgl. S. 53). Diese Transformationen heißen *involutorische Transformationen* oder *Involutionen*[1]) (manche Autoren nennen sie auch *Symmetrien*).

[1]) Der lateinische Terminus „involutio" bezeichnet den eingerollten Zustand junger Blätter. Das ist ein naturwissenschaftlicher Terminus. Er stammt in der Geometrie von dem bedeutenden Mathematiker des 17. Jahrhunderts, dem Begründer der projektiven Geometrie, G. Desargues, der in einem Traktat eine Menge neuer Termini benutzte, die vielfach aus der Botanik entlehnt waren.

Die zueinander inversen Transformationen Φ und Φ^{-1} kann man auch als diejenigen Transformationen definieren, deren Produkt, unabhängig von ihrer Reihenfolge, die identische Transformation ihres gemeinsamen Definitionsbereiches darstellt. Insbesondere ist die identische Transformation gleich dem Quadrat Φ^2 einer beliebigen involutorischen Transformation Φ. In der Tat folgt für Φ und Φ^{-1} aus $\Phi(A) = A'$ stets $\Phi^{-1}(A') = A$. Deshalb ist

$$\Phi\Phi^{-1}(A') = \Phi(A) = A', \quad \Phi^{-1}\Phi(A) = \Phi^{-1}(A') = A,$$

d. h., weder die Transformation $\Phi^{-1}\Phi$ noch die Transformation $\Phi\Phi^{-1}$ verändert die Lage der Punkte ihres gemeinsamen Definitionsbereiches $\mathscr{A}$.

§ 6. Der allgemeine Begriff der Geometrie. Gruppen von geometrischen Transformationen

6.1. Der Gegenstand der Geometrie. Die geometrischen Transformationen spielen eine bedeutende Rolle bei der Formulierung unserer Auffassung vom Gegenstand der Geometrie. Sie bilden die Grundlagen einer der verbreitetsten allgemeinen Definitionen der Geometrie; außerdem erlauben sie es, sich Klarheit über das Wesen der Ähnlichkeit oder der Verschiedenheit zwischen den verschiedenen Zweigen dieser umfassenden mathematischen Disziplin zu verschaffen. Um zu einer brauchbaren Definition des Begriffes „Geometrie" im umfassenden Sinne des Wortes zu gelangen, müssen wir zuerst bei der Frage nach dem Inhalt der gewöhnlichen Geometrie EUKLIDS verweilen.

In der Schule sagt man, daß der Gegenstand der Geometrie in der Lehre von den Eigenschaften geometrischer Figuren besteht. Hierbei kann man unter einer „geometrischen Figur" irgendeine Gesamtheit von Punkten verstehen. Schwieriger ist schon die Antwort auf die Frage nach den „Eigenschaften", welche die Geometrie interessieren. Es ist klar, daß hier nicht die Rede von allen nur denkbaren Eigenschaften von Figuren sein kann. So wird die Farbe von Figuren, d. h. die Frage, ob ein Dreieck weiß auf schwarz (etwa mit Kreide auf eine Tafel) oder schwarz auf weiß (etwa mit einem Bleistift in ein Heft) gezeichnet ist, in den Geometriestunden völlig außer acht gelassen. Daher muß man zur Präzisierung der oben gegebenen Beschreibung der Geometrie notwendigerweise erklären, wodurch geometrische Eigenschaften von Figuren charakterisiert sind.

Um diese Frage zu beantworten, sehen wir uns die Aufgaben an, die in der Geometrie gelöst werden. Vor allem sind Konstruktionsaufgaben für diesen Bereich typisch. Aus dem Schulunterricht ist bekannt, daß für eine eindeutig bestimmte Lösung (oder auch mehrerer Lösungen, etwa zwei oder vier) von Dreieckskonstruktionsaufgaben drei unabhängige Elemente des Dreiecks gegeben werden müssen, wie z. B. die drei Seiten oder zwei Seiten und ein Winkel. Zwei Größen bestimmen im allgemeinen unendlich viele Dreiecke, dagegen legen vier vorgegebene Größen im allgemeinen kein einziges Dreieck fest. Die Aussage, daß ein einziges Dreieck mit vorgegebenen Seitenlängen

a, b, c existiert, ist strenggenommen auch nicht richtig, denn solcher Dreiecke kann man unendlich viele finden, jedoch werden alle diese Dreiecke untereinander gleich sein[1]) (Abb. 50). Wenn wir dennoch sagen, daß die Aufgabe, ein Dreieck aus drei Seiten zu konstruieren, eine einzige Lösung hat, so meinen wir damit, daß alle Dreiecke mit den Seiten a, b, c gleich ausfallen.

Was bedeutet aber in der Geometrie das Wort „gleich"? Unter „gleichen" Figuren verstehen wir zwei solche Figuren F_1 und F_2, welche sich nur durch ihre Lage (aber nicht in ihren Formen und Ausmaßen) voneinander unterscheiden, d. h. mit anderen Worten: *Als gleich gelten zwei Figuren, wenn man*

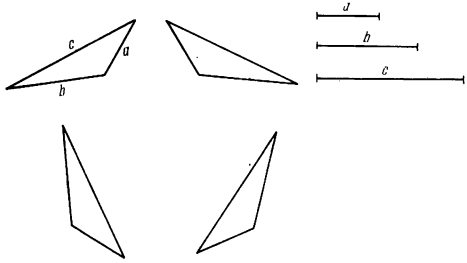


Abb. 50

die eine aus der anderen mit Hilfe einer gewissen Bewegung erhalten kann (vgl. S. 55). Wenn also in der Geometrie Dreiecke (oder andere Figuren) als gleich angesehen werden, sobald sie durch eine Bewegung auseinander hervorgehen, muß man sie auch hinsichtlich aller betrachteten Eigenschaften als gleich ansehen. Damit gelangen wir zu der Einsicht, daß in der Geometrie nur solche Eigenschaften von Figuren betrachtet werden, die nicht von der Lage der Figuren abhängen, die sich also bei Bewegungen nicht ändern: *Die Geometrie untersucht diejenigen Eigenschaften der Figuren, die bei Bewegungen der Figuren invariant bleiben.*

Wir erinnern daran, daß wir eine Bewegung als eine geometrische Transformation definierten, die die Abstände zwischen zwei beliebigen Punkten (vgl. S. 55) erhält. Demnach sind bei gleichen Figuren auch alle einander entsprechenden Strecken einander gleich[2]) (so sind z. B. bei gleichen Dreiecken

[1]) Vgl. die Ausführungen auf S. 302f.

[2]) Eine genauere Formulierung ist die folgende: Sind F_1 und F_2 zwei gleiche Figuren, so existiert eine Bewegung Φ, die die Figur F_1 in F_2 überführt, d. h. $F_2 = \Phi(F_1)$. Der Punkt A_2 der Figur F_2 heißt der dem Punkt A_1 der Figur F_1 *zugeordnete* Punkt, wenn $\Phi(A_1) = A_2$ ist. Aus der Definition der Bewegung folgt, daß der Abstand zwischen zwei Punkten A_1 und B_1 der Figur F_1 gleich dem Abstand zwischen den ihnen zugeordneten Punkten $A_2 = \Phi(A_1)$ und $B_2 = \Phi(B_1)$ der Figur F_2 ist: $|A_1B_1| = |A_2B_2|$.

nicht nur die entsprechenden Seiten gleich, sondern auch die sich entsprechenden Winkelhalbierenden, die sich entsprechenden Seitenhalbierenden, die sich entsprechenden Höhen, usw.). Die oben formulierte Definition der Geometrie kann man jetzt auch wie folgt ausdrücken: *Die Geometrie studiert diejenigen Eigenschaften der Figuren, die bei allen Transformationen erhalten bleiben, welche die Abstände zwischen den Punkten invariant lassen.*

Diese Definition der Geometrie läßt die Vermutung aufkommen, daß die Haupteigenschaft geometrischer Figuren der Abstand zwischen ihren Punkten ist. Aber genau besehen ist dem nicht so; in den geometrischen Theoremen erscheint nämlich im allgemeinen der Abstand zwischen den einzelnen Punkten (d. h. die Länge der Strecken) gar nicht. Denn die Länge einer Strecke wird durch Vergleich mit einer gewissen, ein für allemal fixierten Strecke, einer sogenannten Einheitsstrecke, festgestellt. Deshalb bedeutet in der Formulierung oder im Beweis irgendeines Theorems die Aussage, daß die Länge einer Strecke etwa gleich zwei ist, daß in dieser Strecke die gewählte Einheitsstrecke zweimal Platz findet. Damit wird man also zur Auswahl einer Einheitsstrecke gezwungen. Alle Strecken sind aber dafür vom Standpunkt der Geometrie aus vollständig gleichberechtigt, und es besteht im Rahmen der Geometrie selbst keine Möglichkeit (und Notwendigkeit) eine Strecke besonders auszuzeichnen. Alle Festlegungen einer Einheitslänge fußen nämlich auf einer Definition, die nicht zur Geometrie gehört. So ist z. B. das Meter definiert als Abstand zwischen zwei Markierungen auf dem sogenannten Pariser Urmeter, einem Platin-Iridium-Stab, der im Pariser Amt für Maße und Gewichte aufbewahrt wird. Weniger genau ist das Meter als 40000000-ster Teil des Pariser Erdmeridians festgesetzt (vgl. hierzu die „rein geometrische" Definition eines rechten Winkels als Winkel, welcher mit seinem Nebenwinkel übereinstimmt, oder die Definition eines Winkels mit dem Bogenmaß 1 als Winkel, für den der Kreisbogen mit dem Radius des Kreises übereinstimmt). Deshalb kann in einem geometrischen Theorem nicht die Länge irgendeiner Strecke vorkommen, sondern es kann nur das Längenverhältnis zweier Strecken auftreten, das ja nicht von der Wahl einer Einheitsstrecke abhängt (z. B. behauptet ein Theorem über die Beziehung zwischen den Winkeln und den Seiten eines Dreiecks, daß bei $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ stets $\frac{a}{b} > 1$ ist, und ein Theorem über ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von 30° besagt, daß bei $\sphericalangle A = 90°$ und $\sphericalangle B = 30°$ stets $\frac{a}{b} = 2$ ist).

Alle diese Erwägungen führen uns dazu, daß die (euklidische) Geometrie eigentlich als *die Wissenschaft zu charakterisieren ist, die diejenigen Eigenschaften der Figuren studiert, welche bei allen Transformationen invariant bleiben, die das Abstandsverhältnis zwischen den Punkten ungeändert lassen, d. h. die gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invariant bleiben* (vgl. S. 56). Diese Definition war allerdings durch Erwägungen motiviert, die sich auf die geometrischen Theoreme bezogen. Aber beim Übergang zu Konstruktionsaufgaben verliert sie schon ihre Gültigkeit. Tatsächlich ist bei diesen Aufgaben nicht die Länge einer Strecke als eine Zahl gegeben, die das Verhältnis dieser Strecke zu einer Einheitsstrecke ausdrückt, sondern sie ist geometrisch als ein

Hinweis auf eine Strecke aufzufassen, die mit der uns interessierenden Strecke übereinstimmt (vgl. Abb. 50). Wenn also in geometrischen Theoremen ähnliche Figuren nicht voneinander unterschieden werden, weil sie ein und dieselben geometrischen Eigenschaften besitzen, ist bei Konstruktionsaufgaben ein Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Seiten alle zweimal so groß sind wie die des gegebenen Dreiecks ABC, schon wesentlich verschieden von ABC. Nur eines dieser beiden Dreiecke kann man als Lösung der Dreieckskonstruktionsaufgabe zulassen, aber nicht alle beide zugleich!

Die auseinandergesetzte Situation mag im ersten Augenblick reichlich seltsam erscheinen. Je nachdem, ob wir es mit Konstruktionsaufgaben oder mit Beweisen von Theoremen zu tun haben, müssen wir zwei unterschiedlich bestimmte Gegenstände der Geometrie und folglich zwei verschiedene (wenn auch einander sehr verwandte) „Geometrien" unterscheiden. Diese Situation verlangt von uns, der Geometrie eine neue Definition zu geben, welche beide Fälle umfassen müßte, auf die wir oben gestoßen sind. Nur wenn wir eine brauchbare „allgemeine" Definition der Geometrie besitzen, können wir davon sprechen, daß die Geometrie eine einheitliche Wissenschaft ist und nicht in zwei verschiedene Wissenschaften zerfällt, welche nur durch Zufall einen gemeinsamen Namen erhalten haben.

6.2. Geometrie und Transformationsgruppen. Es ist leicht einzusehen, wie man unsere beiden Definitionen der Geometrie vereinigen kann. Anstelle von Bewegungen oder von Ähnlichkeitstransformationen werden wir allgemein von irgendeiner Gesamtheit $\mathfrak{G}$ von geometrischen Transformationen ausgehen, ohne daß wir zunächst präzisieren, von welchen Transformationen die Rede ist. Wir erklären nun Figuren als „gleich", d. h. als Figuren, denen die gleichen Eigenschaften zukommen, wenn sie sich vermittels einer Transformation aus der Gesamtheit $\mathfrak{G}$ ineinander überführen lassen. Damit gelangen wir zu der Definition der Geometrie als *der Wissenschaft, die diejenigen Eigenschaften der Figuren studiert, welche bei allen Transformationen aus einer gegebenen Gesamtheit von Transformationen invariant bleiben.*

Definiert man die Geometrie als Wissenschaft, die diejenigen Eigenschaften der Figuren studiert, welche bei Bewegungen invariant bleiben, so erweist sich diese Definition als zu eng. Demgegenüber ist aber die letzte Definition der Geometrie zu weit und daher ebenfalls unbefriedigend. Denn nach dieser Definition sehen wir zwei Figuren F_1 und F_2 schon als „gleich" an, wenn man die eine aus der anderen vermöge einer Transformation aus $\mathfrak{G}$ erhalten kann. Damit sich unser neuer Begriff „Gleichheit" nicht zu sehr vom intuitiven entfernt, ist es natürlich, noch die folgenden drei Forderungen zu stellen. Diese Bedingungen werden von allen Typen von „Gleichheit" erfüllt, die wir in der Mathematik und im Leben antreffen[1]) (nämlich z. B. von der Gleichheit von Zahlen, von algebraischen Ausdrücken, von Vektoren, von geometrischen Figuren, von physikalischen Größen, wie Kräften oder Geschwindigkeiten,

[1]) Vgl. die Ausführungen auf S. 302f.

außerdem bei der Gleichheit von Fähigkeiten, von Erfolgen, vom Wert zweier Kunstwerke usw.). Diese Bedingungen lauten:

1. *Jede Figur F ist zu sich selbst „gleich"* (Reflexivität).

2. *Ist die Figur F_1 der Figur F_2 „gleich", so ist auch die Figur F_2 der Figur F_1 „gleich"* (Symmetrie).

3. *Ist die Figur F_1 der Figur F_2 „gleich" und ist die Figur F_2 der Figur F_3 „gleich", so ist auch die Figur F_1 der Figur F_3 „gleich"* (Transitivität).

Es ist klar, daß die „Gleichheit", die mittels der Transformationen eines völlig beliebigen Systems $\mathfrak{G}$ definiert ist, nicht notwendig die Eigenschaften 1 bis 3 besitzt. Um zu gewährleisten, daß diese drei Eigenschaften erfüllt sind, ist es naturgemäß, folgendes zu verlangen:

1. *Das System $\mathfrak{G}$ der Transformationen enthält die identische Transformation I, welche jede Figur in sich überführt.*

2. *Ist Φ eine Transformation, die die Figur F_1 in die Figur F_2 überführt, und gehört sie zum System $\mathfrak{G}$, so gehört auch die inverse Transformation Φ^{-1} zu $\mathfrak{G}$; diese führt dann die Figur F_2 in die Figur F_1 über.*

3. *Gehören die beiden Transformationen Φ und Ψ zum System $\mathfrak{G}$, wobei Φ die Figur F_1 in die Figur F_2 und Ψ die Figur F_2 in die Figur F_3 überführt, so gehört auch das Produkt $\Psi\Phi$ zu $\mathfrak{G}$; dieses Produkt führt dann die Figur F_1 in die Figur F_3 über.*

Ein System von Transformationen, das die Eigenschaften 1 bis 3 besitzt, heißt eine *Gruppe von Transformationen*[1]).

Auf diese Weise gelangen wir zu der folgenden allgemeinen Definition der Geometrie: *Die Geometrie ist die Wissenschaft, die diejenigen Eigenschaften der Figuren studiert, welche bei allen Transformationen aus einer gewissen Gruppe $\mathfrak{G}$ von Transformationen invariant bleiben.*

Diese Definition formulierte als erster der bekannte deutsche Mathematiker Felix Klein in seiner Antrittsvorlesung anläßlich der Übernahme eines Lehrstuhls an der Universität Erlangen.[2])

---

[1]) Vgl. auch S. 20.

[2]) In Deutschland bestand lange Zeit der Brauch, daß ein Kandidat für die Besetzung eines Professorenamtes vor der Fakultät eine Vorlesung über ein von ihm frei gewähltes Thema halten mußte. Auf Grund dieser Vorlesung faßte die Fakultät ihren Beschluß über die Möglichkeit der Zulassung des Kandidaten zur Professur.

Im Jahre 1854 hielt in der gleichen Weise der hervorragende deutsche Mathematiker Bernhard Riemann vor der Fakultät der Göttinger Universität eine Vorlesung „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen". Hierin legte er seine Konzeption von der Geometrie dar, die ihrem Wesen nach eine erste allgemeine Definition der geometrischen Wissenschaft war (sie unterscheidet sich von der späteren Kleinschen Definition). Die Riemannsche Auffassung der Geometrie hängt nicht unmittelbar mit dem Begriff der geometrischen Transformation zusammen. Wir können das hier jedoch nicht weiter ausführen (vgl. dazu den Artikel über Nichteuklidische Geometrien in Band V der EdEM).

In der Folgezeit erhielt diese Auffassung die Bezeichnung *Erlanger Programm* von FELIX KLEIN.[1])

6.3. Verschiedene Geometrien. Die affine Geometrie. Aus der oben angegebenen Definition der Geometrie geht hervor, daß man sehr viele verschiedene „Geometrien" aufbauen kann, nämlich so viele, wie es verschiedene Transformationsgruppen gibt. Die gewöhnliche Geometrie EUKLIDS, die in der Schule gelehrt wird, ist nur eine von ihnen. Wir sprachen schon am Anfang dieses Paragraphen davon, daß die gewöhnliche euklidische Geometrie diejenigen Eigenschaften der Figuren studiert, welche bei Bewegungen erhalten bleiben. Dieser Standpunkt stimmt völlig mit der oben angeführten KLEINschen Definition der Geometrie überein, denn *das System $\mathfrak{D}$ aller Bewegungen der Ebene bildet eine Gruppe*. In der Tat ist das Produkt zweier beliebiger Bewegungen wieder eine Bewegung, die inverse Transformation einer Bewegung ist wieder eine Bewegung, und außerdem ist natürlich auch die identische Transformation eine Bewegung (alles dieses folgt unmittelbar aus der Definition der Bewegungen). Ein anderes Beispiel einer Transformationsgruppe erhalten wir, wenn wir die Gesamtheit $\mathfrak{E}$ aller *Ähnlichkeitstransformationen* betrachten. Wie wir schon oben bemerkt haben, unterscheidet sich die durch die Bewegungsgruppe $\mathfrak{D}$ definierte Geometrie von der, die durch die Gruppe $\mathfrak{E}$ der Ähnlichkeitstransformation bestimmt wird, obgleich diese beiden Geometrien sehr benachbart sind. Man kann sagen, daß der Gegenstand des Schulunterrichts in Geometrie eine „Verflechtung" dieser beiden verwandten Geometrien, nämlich der Geometrie der Bewegungsgruppe $\mathfrak{D}$ und der Geometrie der Gruppe $\mathfrak{E}$ der Ähnlichkeitstransformationen ist. Wenn wir für die Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$ eine Gruppe wählen, die von der Bewegungsgruppe oder von der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen verschieden ist, gelangen wir zu einer neuen Geometrie, und zwar einer „nichteuklidischen".[2])

Es ist leicht einzusehen, daß *die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ aller affinen Transformationen der Ebene* (vgl. S. 56) *eine Gruppe bildet*. In der Tat sind alle Forderungen erfüllt: 1. Die identische Transformation der Ebene führt offenbar jede Gerade in eine Gerade (nämlich in sich selbst) über, also ist sie eine affine Transformation. 2. Wenn die Transformation Φ jede Gerade l in eine Gerade l' überführt, führt die inverse Transformation Φ^{-1} jede Gerade in eine Gerade (nämlich l' in l) über, d. h., die inverse Transformation einer affinen Transformation ist selbst affin. 3. Wenn die Transformation Φ jede Gerade l in eine Gerade l' überführt und die Transformation Ψ auch jede Gerade in eine Gerade überführt (z. B. l' in l''), dann führt das Produkt $\Psi\Phi$ jede Gerade in eine Gerade (nämlich l in l'') über, d. h., das Produkt zweier affiner Transformationen ist selbst wieder eine affine Transformation. Demgemäß kann man also die „Geo-

[1]) Vgl. das am Schluß dieses Artikels zitierte Werk [1] von FELIX KLEIN.

[2]) Eine sehr wichtige Kategorie dieser „nicht euklidischen" Geometrien bilden die sogenannten *nichteuklidischen* Geometrien, insbesondere die nichteuklidische LOBATSCHEWSKIsche Geometrie (vgl. hierzu den Artikel über Nichteuklidische Geometrien in Band V der EdEM).

metrie" betrachten, welche die affinen Eigenschaften der Figuren studiert, d. h. die Eigenschaften, die gegenüber affinen Transformationen invariant bleiben (die Geometrie der Gruppe $\mathfrak{A}$). Diese Disziplin heißt die *affine Geometrie*. Sie ist heute eine große, selbständige Wissenschaft. In der affinen Geometrie kann man von Punkten und Geraden sprechen, denn diese Objekte bleiben bei affinen Transformationen ungeändert (Punkte gehen in Punkte über und Geraden in Geraden). Jedoch kommt z. B. der Begriff des Kreises in der affinen Geometrie nicht mehr vor, denn affine Transformationen können Kreise in Figuren überführen, die keine Kreise mehr sind. Deshalb hat hier der Begriff Kreis „keinen geometrischen Sinn" mehr, ähnlich wie z. B. in der gewöhnlichen (euklidischen) Geometrie der Begriff „horizontale Richtung" keinen Sinn hat.[1]) Des weiteren hat es in der affinen Geometrie einen Sinn, von parallelen Geraden zu reden, aber nicht von zueinander senkrechten Geraden. Ebenso hat es einen Sinn, das Verhältnis der Längen zweier Strecken zu bilden, die auf einer Geraden liegen, aber keinen, das Verhältnis der Längen von Strecken auf verschiedenen (genauer: nicht parallelen) Geraden (vgl. die in § 3.3, S. 70, gezeigten Eigenschaften affiner Transformationen). Ein typisch affines Theorem ist z. B. der folgende Satz: *Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der die Seitenhalbierenden, von den Ecken aus gerechnet, im Verhältnis* 2 : 1 *teilt.* Alle in diesem Theorem vorkommenden Begriffe haben nämlich affinen Charakter. Demgegenüber ist z. B. das Theorem über den gemeinsamen Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks an den Begriff der senkrechten Geraden gebunden, und deshalb gehört dieses Theorem nicht in die affine Geometrie, d. h., in dieser ist es unmöglich, dieses Theorem über die Höhenschnittpunkte zu formulieren.[2])

Analog zu den affinen Transformationen bilden auch die Kreisverwandtschaften der (geschlossenen) Ebene (vgl. S. 57) eine Gruppe: Dieser Gruppe entspricht eine Geometrie, die man *Kreisgeometrie* nennen könnte (häufiger sagt man allerdings *konforme Geometrie*).[3]) Die angeführten Überlegungen

[1]) Demgegenüber gibt es jedoch in der affinen Geometrie den Begriff der Ellipse (vgl. den Artikel „Kegelschnitte" in diesem Band der EdEM); denn jede affine Transformation führt eine Ellipse in eine Ellipse über.

[2]) Die affine Geometrie kann auch auf axiomatischem Wege aufgebaut werden (vgl. den Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie" in diesem Band der EdEM). Dazu muß man gewisse undefinierte Begriffe als Grundbegriffe der affinen Geometrie zugrunde legen und in Axiomen die grundlegenden Eigenschaften dieser Begriffe formulieren, so daß alle übrigen Theoreme der affinen Geometrie auf rein deduktivem Wege daraus erhalten werden können. Die Axiomatik der affinen Geometrie ist der Axiomatik der euklidischen Geometrie eng verwandt, nur hat der Begriff der „Gleichheit" von Strecken oder von Winkeln in ihr keinen Sinn; daher muß man die mit diesem Begriff verknüpften Axiome fortlassen bzw. durch andere ersetzen (vgl. z. B. das in der Fußnote auf S. 71 erwähnte Buch von JAGLOM und ASCHKINUSE, in dem die affine Geometrie ausführlich behandelt wird). Eine andere Variante der Axiomatik der affinen Geometrie ist in dem Artikel „Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie" in diesem Band der EdEM zu finden.

[3]) Eine gewisse Vorstellung vom Inhalt dieser interessanten Geometrie kann man durch den Artikel „Geometrie der Kreise" in diesem Band der EdEM erhalten.

liefern auch eine zusätzliche Motivierung für die Zweckmäßigkeit der Einführung solcher Begriffe wie des Begriffs der geschlossenen Ebene, denn nur bei der in entsprechender Weise „erweiterten" Ebene kann man von der Gruppe der Kreisverwandtschaften sprechen. Das bedeutet, daß nur die geschlossene Ebene, nicht aber die euklidische Ebene als Operationsbereich der Kreisverwandtschaften dienen kann. Auch eine andere wichtige Transformationsgruppe — die der projektiven Transformationen — macht eine Erweiterung der Ebene durch Einführung „uneigentlicher Elemente" erforderlich. Diese Gruppe werden wir im folgenden Paragraphen betrachten.

Die affine Geometrie und die Kreisgeometrie stellen ausgedehnte Gebiete der Geometrie dar. Ihnen (wie auch der noch im folgenden Paragraphen zu betrachtenden projektiven Geometrie) ist eine bedeutende Literatur gewidmet, und alle diese Geometrien haben wichtige Anwendungen. Es existieren jedoch darüber hinaus noch viele andere „Geometrien", die anderen Transformationsgruppen entsprechen.

Als weiteres Beispiel vermerken wir hier eine „Geometrie", welche *diejenigen Eigenschaften der Figuren studiert, die bei Parallelverschiebungen erhalten bleiben*; das ist eine Geometrie, in welcher nur solche Figuren als „gleich" gelten, welche im gewöhnlichen Sinne gleich sind und die außerdem parallel gelegen sind. Es ist leicht einzusehen, daß *die Gesamtheit $\mathfrak{P}$ aller Parallelverschiebungen der Ebene eine Gruppe bildet*. Denn in der Tat gilt:

1. Die identische Transformation I kann als eine Parallelverschiebung (in beliebiger Richtung) um den Betrag Null angesehen werden.

2. Die zu einer Parallelverschiebung inverse Transformation ist eine Parallelverschiebung (vgl. S. 91).

3. Das Produkt zweier Parallelverschiebungen ist ebenfalls eine Parallelverschiebung (vgl. S. 75).

Daher ist das Studium derjenigen Eigenschaften der Figuren, die gegenüber Parallelverschiebungen invariant sind, wirklich sinnvoll, obgleich es nicht sehr interessant ist. Die entsprechende „Geometrie" — die Geometrie der Gruppe $\mathfrak{P}$ — muß vom logischen Standpunkt aus als genauso berechtigt angesehen werden wie die euklidische Geometrie, sie ist lediglich hinsichtlich der Wichtigkeit ihrer Anwendung mit der letzten kaum zu vergleichen.[1])

In dieser Geometrie verliert eine ganze Reihe von Begriffen der gewöhnlichen (euklidischen) Geometrie ihren Sinn, so z. B. die Länge einer Strecke oder die Größe eines Winkels; denn zwei verschieden gerichtete Strecken sind hier „unvergleichbar", weil sie durch keine „Bewegung" zur Deckung gebracht werden können (ein ähnliches Argument gilt für die Winkel). Desgleichen ist es hier unmöglich, einen Kreis zu definieren. Denn die Definition eines Kreises als geometrischer Ort aller von einem festen Punkt gleich weit entfernten Punkte ist hier inhaltslos. Jedoch behält der Begriff der Geraden in dieser neuen Geometrie seinen Sinn. Hieraus folgt, daß in unserer „Geometrie" nach wie vor von Dreiecken, Vierecken usw. gesprochen werden kann und deren Eigenschaften untersucht werden können. Eine wichtige Rolle spielt in dieser „Geometrie" der Begriff des Verhältnisses der Längen

[1]) Diese „Geometrie" kann auch dadurch definiert werden, daß in ihr solche Figuren als gleich gelten, bei denen die Verbindungsstrecken der Punktepaare und die der entsprechenden Punkte nicht nur im gewöhnlichen Sinne des Wortes gleich sind, sondern auch parallel und gleichgerichtet sind (vgl. Band I des am Schluß dieses Artikels zitierten Buches [2] von I. M. JAGLOM, S. 22–23).

zweier Strecken einer Geraden (oder paralleler Geraden), für deren Definition es nur des Begriffes der Gleichheit von Strecken einer gemeinsamen Richtung bedarf: Diese Gleichheit im neuen Sinne stimmt mit der im alten Sinne, d. h. im Sinne der euklidischen Geometrie, überein. Wir können daher auch für Strecken einer festen Richtung den Begriff der „Länge" einführen, jedoch haben wir keine Möglichkeit, die „Länge" von Strecken verschiedener Richtung miteinander zu vergleichen. Erhalten bleibt in der neuen „Geometrie" auch der Begriff des Flächeninhalts einer ebenen Figur. Denn die euklidische Definition des Flächeninhalts geht von der Anzahl der die Figur überdeckenden Quadrate eines Quadratnetzes aus, so daß zur Definition des Flächeninhalts nur die Gleichheit der Quadrate eines Quadratnetzes benötigt wird. Derartige Quadrate sind aber auch im Sinne der hier betrachteten „Geometrie" gleich.[1])

Es versteht sich, daß alle Theoreme der euklidischen Geometrie, die man mit den Termini der „Geometrie der Parallelverschiebungen" formulieren kann, auch in dieser neuen Geometrie richtig bleiben. Wenn nämlich alle Bewegungen der Ebene gewisse Eigenschaften von Figuren der Ebene invariant lassen, bleiben diese Eigenschaften auch bei allen Parallelverschiebungen erhalten. So können wir wie vorher behaupten, daß sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, der die Seitenhalbierenden, von den Ecken aus gerechnet, im Verhältnis 2 : 1 teilt (es ist klar, daß alle in diesem Theorem auftretenden Begriffe auch in der neuen „Geometrie" einen Sinn haben). Weiterhin gilt z. B.: Zwei Dreiecke ABC und ABC_1, für die $CC_1 \| AB$ ist, haben den gleichen Flächeninhalt (Abb. 51). Im Gegensatz dazu verlieren hier die Theoreme, daß sich die Höhen eines Dreiecks und seine Winkelhalbierenden in je einem gemeinsamen Punkt schneiden, ihren Sinn, denn jetzt kann keine Rede mehr von zueinander senkrechten Geraden (und folglich von Höhen) und von der Gleichheit nicht paralleler Geraden (und folglich von Winkelhalbierenden) sein.

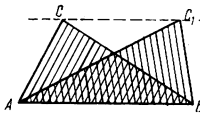


Abb. 51

Theoreme der euklidischen Geometrie, in denen Begriffe auftreten, die in der hier betrachteten „Geometrie" einen neuen Sinn erhalten, können in dieser „Geometrie" eine andere Fassung haben. Bezeichnen wir etwa die Gleichheit in der neuen „Geometrie" durch das Wort Gleichheit in Anführungsstrichen (also „Gleichheit"), um hervorzuheben, daß sie jetzt nicht so wie in der euklidischen Geometrie zu verstehen ist, dann können wir wie früher sagen: Aus der „Gleichheit" zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ folgt die „Gleichheit" ihrer entsprechenden Seiten, aber jetzt folgt schon umgekehrt aus der „Gleichheit" zweier Paare von Seiten (etwa AB und $A'B'$ sowie AC und $A'C'$) die „Gleichheit" der Dreiecke.

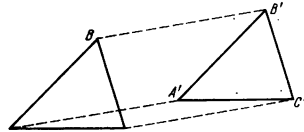


Abb. 52

Man kann noch eine ganze Reihe von Sätzen angeben, welche in der hier betrachteten Geometrie Gültigkeit haben, während sie in der euklidischen Geometrie nicht richtig sind.

[1]) Daran wird auch nichts durch den Umstand geändert, daß zur Definition des Flächeninhalts einer ebenen Figur nicht von einem einzigen Quadratnetz ausgegangen wird, sondern von einer immer feiner werdenden Folge von Quadratnetzen (vgl. hierzu den Artikel über Flächen- und Rauminhalt in Band V der EdEM).

So hat man z. B.: Für die „Gleichheit" zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ist hier die „Gleichheit" der drei Strecken AA', BB', CC' notwendig und hinreichend (vgl. Abb. 52). Außerdem folgt etwa für ein Viereck $ABCD$ aus der „Gleichheit" der gegenüberliegenden Seiten AB und DC, daß auch die Seiten AD und BC „gleich" sind und sich die Diagonalen AC und BD in ihrem Schnittpunkt halbieren (Abbildung 53).[1])

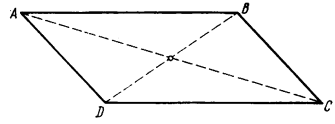


Abb. 53

Eine Variante der betrachteten „Geometrie" der Gruppe $\mathfrak{P}$ ist eine andere *„Geometrie", die von Figuren diejenigen Eigenschaften studiert, welche bei allen möglichen Parallelverschiebungen und bei Spiegelungen an beliebigen Punkten der Ebene erhalten bleiben.* Diese Eigenschaften bilden ebenfalls den Gegenstand einer gewissen „Geometrie", denn auch die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ aller Parallelverschiebungen und Spiegelungen an Punkten bildet eine Gruppe.

1. Die identische Transformation I kann man als eine Parallelverschiebung um den Betrag Null ansehen.

2. Die inverse Transformation zu einer Parallelverschiebung oder einer Spiegelung an einem Punkt ist wieder eine Parallelverschiebung oder eine Spiegelung an einem Punkt (sogar am gleichen).

3. Das Produkt zweier Parallelverschiebungen ist eine Parallelverschiebung; das Produkt einer Parallelverschiebung mit einer Spiegelung an einem Punkt ist $\overline{-}$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren — eine Spiegelung an einem Punkt (vgl. S. 75); das Produkt aus zwei Spiegelungen an Punkten ist eine Parallelverschiebung (vgl. S. 77; wenn die beiden Spiegelungszentren zusammenfallen, stellt ihr Produkt die Parallelverschiebung um den Betrag Null dar).

Demnach kann die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ aller Parallelverschiebungen und aller Spiegelungen an Punkten tatsächlich zur Definition einer neuen „Geometrie" dienen.[2]) Diese Geometrie ist in gewissem Sinne ein Zwischending zwischen der oben betrachteten Geometrie der Gruppe $\mathfrak{P}$ und der euklidischen Geometrie; denn die Gruppe $\mathfrak{S}$ liegt zwischen der Gruppe $\mathfrak{P}$ der Parallelverschiebungen und der Gruppe $\mathfrak{D}$ der Bewegungen (die Gruppe $\mathfrak{S}$ umfaßt die Gruppe $\mathfrak{P}$ und ist in der Gruppe $\mathfrak{D}$ enthalten). Dementsprechend ist diese neue „Geometrie" der euklidischen Geometrie verwandter als die von uns oben betrachtete „Geometrie" der Guppe $\mathfrak{P}$. Das kommt z. B. darin zum Ausdruck, daß hier schon die Gleichheit von Winkel und Gegenwinkel bestätigt werden kann, denn diese Winkel können durch eine Spiegelung an ihrem gemeinsamen Eckpunkt zur Deckung gebracht werden (in der Geometrie der Gruppe $\mathfrak{P}$ ist dieses Theorem nicht gültig). Weiterhin reicht in der neuen

---

[1]) Zu der hier betrachteten „Geometrie" steht in enger Beziehung das Studium der Vektoren (vgl. den Artikel „Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie" in diesem Band der EdEM), denn die Gleichheit von Vektoren (d. h. von gerichteten Strecken) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kann man wie folgt definieren: Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind *gleich*, wenn sie durch eine Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden können (vgl. S. 301).

[2]) In dieser Geometrie gelten solche Figuren als „gleich", bei denen die Verbindungsstrecken einander entsprechender Punktepaare dieser Figuren nicht nur im gewöhnlichen Sinne gleich, sondern auch noch parallel sind. Die Richtung dieser Verbindungsstrecken kann sich aber umdrehen (vgl. Band I des Buches [2], S. 22–23 und 27).

Geometrie die „Gleichheit" zweier Seitenpaare der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ noch nicht für die „Gleichheit" der Dreiecke selbst aus (Abb. 54), während natürlich die „Gleichheit" aller dreier Seitenpaare schon unbedingt die „Gleichheit" der Dreiecke selbst zur Folge hat. Schließlich gibt die folgende Aussage ein interessantes Beispiel für ein Theorem, das zwar in der euklidischen Geometrie und der „Geometrie" der Gruppe $\mathfrak{S}$ gültig ist, während es in der „Geometrie" der Gruppe $\mathfrak{P}$ verletzt ist. Es handelt sich um das sogenannte Theorem von BOLYAI und GERVIN: *Je zwei inhaltsgleiche Vielecke sind zerlegungsgleich, d. h. lassen sich so in Vielecke unterteilen, daß jedes Teilvieleck des einen Vielecks einem bestimmten Teilvieleck des anderen Vielecks „gleich" wird.*[1])

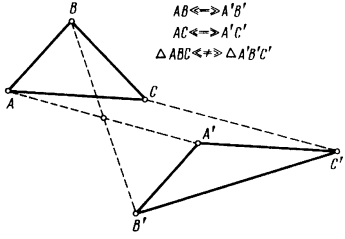


Abb. 54

6.4. Transformationsgruppen in der Physik. Die Definition der Geometrie nach KLEIN hebt in erster Linie den Begriff der geometrischen Transformationen hervor. Durch die geometrischen Transformationen werden dann die jeweils interessierenden invarianten Eigenschaften der Figuren festgelegt, d. h., die Transformationen spielen in der entsprechenden „Geometrie" die Rolle der „Bewegungen". Zum Abschluß des vorliegenden Paragraphen möchten wir bemerken, daß diese Auffassung der Geometrie auch ein Gegenstück in der Physik hat. Zunächst erinnern wir an das sogenannte *Relativitätsprinzip von* GALILEI. Es spielt eine fundamentale Rolle in der Mechanik und lautet wie folgt:

Durch keinerlei physikalische Experimente, die innerhalb eines physikalischen Systems ausgeführt werden, kann man eine gleichförmige und geradlinige Bewegung dieses Systems feststellen.

Nach diesem Prinzip können wir z. B. auf einem Schiff, das sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in konstanter Richtung fortbewegt, durch keinerlei interne, d. h. nicht die Umgebung des Schiffes einbeziehende Experimente irgendwelche Ergebnisse erhalten, die die Fortbewegung des Schiffes betreffen. Aus dem GALILEIschen Relativitätsprinzip folgt also, daß alle in der Physik studierten Eigenschaften auch in „transformierten" physikalischen Systemen erhalten bleiben, wenn die Transformation nur in einer nach

[1]) Vgl. den Artikel über die Zerlegungsgleichheit bei Polygonen und Polyedern in Band V der EdEM. Die Tatsache, daß dieses Theorem in der Geometrie der Gruppe $\mathfrak{S}$ richtig bleibt, ist der Inhalt des sogenannten Theorems von HADWIGER und GLUR. In der „Geometrie" der Gruppe $\mathfrak{P}$ nimmt das Theorem von BOLYAI und GERVIN die folgende Form an: *Für die Zerlegungsgleichheit zweier inhaltsgleicher Vielecke M und M' ist notwendig und hinreichend, daß jeweils die Summe der Längen der (orientierten) Seiten von M, die zu einer Geraden l der Ebene parallel sind, mit der Summe der Längen der (orientierten) Seiten von M', die ebenfalls zu l parallel sind, übereinstimmt* [vgl. В. Г. Болтянский, Равновеликие и равноставленные фигуры (W. G. BOLTJANSKI, Inhaltsgleiche und zerlegungsgleiche Figuren), Moskau 1956]; hierbei wird also davon Gebrauch gemacht, daß in der Geometrie der Gruppe $\mathfrak{P}$ für Strecken einer beliebigen festen Richtung l der Begriff der „Länge von Strecken" eingeführt werden kann.

Größe und Richtung konstanten Änderung der Geschwindigkeit besteht. Die zuletzt genannten „Transformationen" heißen GALILEI-*Transformationen*. Es werden also, mit anderen Worten, als „physikalische Eigenschaften" von Körpern solche Eigenschaften angesehen, die gegenüber GALILEI-Transformationen invariant bleiben (vgl. hierzu die Definition der „geometrischen Eigenschaften" als solche, die bei „Bewegungen" erhalten bleiben; S. 93).

Dem GALILEIschen Relativitätsprinzip kann man auch eine „geometrische" Fassung geben, so daß unmittelbar sein Zusammenhang mit der KLEINschen Definition der Geometrie in Erscheinung tritt. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß wir uns auf physikalische Prozesse beschränken, welche in einer Ebene vor sich gehen. Zum Beispiel studieren wir die Bewegung physikalischer Körper auf einem beschränkten Teil der Erdoberfläche, welchen wir uns als eben denken. In der betrachteten Ebene führen wir rechtwinklige kartesische Koordinaten (x, y) ein. Eine mechanische Bewegung eines materiellen Punktes wird dann durch Formeln gegeben, welche das Gesetz der Ortsveränderung des Punktes im Verlauf der Zeit beschreiben:

$$x = f(t), \quad y = g(t).$$

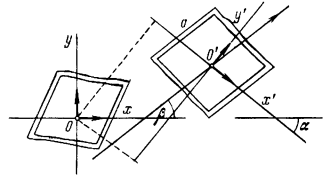


Abb. 55

Es ist völlig klar, daß der Übergang zu einem anderen Koordinatensystem sich nicht auf den Inhalt der physikalischen Gesetze auswirken kann: Folglich müssen sich diese Gesetze gleichartig in den Koordinaten (x, y) und etwa in den Koordinaten (x', y') beschreiben, die man durch eine beliebige Drehung der Koordinatenachsen und eine Verschiebung des Koordinatenursprungs erhält (Abb. 55). Man überlegt sich leicht, daß der Übergang von den Koordinaten (x, y) zu den Koordinaten (x', y') durch die folgenden Formeln beschrieben wird:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha + a, \\ y' &= x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha + b; \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

dabei ist α der von der x-Achse mit der x'-Achse gebildete Winkel, und a, b sind die Koordinaten des Koordinatenursprungs O von (x, y) im System (x', y').[1]) Daher muß eine beliebige Aussage, die einen physikalischen Sinn hat, ihre Form auch nach der Transformation $(*)$ beibehalten. Das GALILEIsche Relativitätsprinzip behauptet nun sogar noch mehr, daß nämlich auch dann, wenn sich das Koordinatensystem (x', y') gleichförmig und geradlinig zum System (x, y) bewegt, alle physikalischen Prozesse in beiden Systemen vollkommen gleichartig beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatensystemen (x, y) und (x', y') wird dann durch die folgenden Formeln beschrieben:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha + \cos\beta \cdot vt + a, \\ y' &= x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot vt + b. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Hierbei bedeutet v die Geschwindigkeit, mit der sich der Koordinatenursprung O' des Systems (x', y') gleichförmig entlang der Geraden bewegt, die mit der x-Achse den Winkel β einschließt (vgl. dazu Abb. 55).

[1]) Vgl. ein beliebiges Lehrbuch der analytischen Geometrie.

Alle physikalischen Aussagen müssen demnach auch ihre Form nach irgendwelchen Transformationen (**) beibehalten. Zieht man noch in Betracht, daß in den letzten Formeln auch die Zeit t vorkommt und daß man ohne Änderung des physikalischen Charakters eines Prozesses auch einen anderen Anfang der Zeitmessung wählen kann, so können wir die Formeln (**) auf die vollständige Form

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha + \cos\beta \cdot vt + a, \\ y' &= x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot vt + b, \\ t' &= t + d \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

bringen. Hierin bezeichnet d den Anfang der alten Zeitmessung im neuen System der Zeitmessung. Durch die Formeln (***) werden die GALILEI-Transformationen mathematisch beschrieben. Das GALILEIsche Relativitätsprinzip behauptet dann, daß die Physik (genauer gesagt die Mechanik) der ebenen Bewegungen als *die Wissenschaft definiert werden kann, welche diejenigen Eigenschaften der dreidimensionalen „Raum-Zeit-Welt" (x, y, t) studiert, die gegenüber allen Transformationen (***) invariant bleiben.* Man bestätigt leicht, daß die GALILEI-Transformationen eine Gruppe bilden. Daher ist bei dieser Auffassung die Mechanik der ebenen Bewegungen mit derjenigen „Geometrie" des dreidimensionalen Raumes identisch, die durch die Gruppe der „Bewegungen" (***) gegeben wird.

Wir bemerken noch, daß in der modernen Physik das GALILEIsche Relativitätsprinzip durch das sogenannte *EINSTEINsche Relativitätsprinzip* ersetzt wird, das der (speziellen) *Relativitätstheorie* zugrunde liegt. An die Stelle der GALILEI-Transformation treten dann kompliziertere Transformationen, die sogenannten LORENTZ-*Transformationen*. Die LORENTZ-Transformationen hängen von einem gewissen physikalischen Parameter c ab (der physikalische Sinn von c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Bei $c \to \infty$ gehen die LORENTZ-Transformationen in die GALILEI-Transformationen über. Die LORENTZ-Transformationen bilden ebenfalls eine Gruppe. Auf diese Weise ist der Übergang von der klassischen Mechanik GALILEIS und NEWTONS zur Relativitätstheorie EINSTEINS und POINCARÉS gleichbedeutend mit einer Änderung der Ansicht über die „Geometrie" der uns umgebenden Welt. Hierbei ist die „Geometrie" völlig im Sinne von KLEIN zu verstehen, d. h., sie wird durch eine Transformationsgruppe definiert, die alle physikalischen Gesetze invariant läßt.[1])

§ 7. Die Gruppe der projektiven Transformationen

7.1. Die Homologie. Unsere Ausführungen über geometrische Transformationen wären unvollständig, wenn wir nicht noch – obgleich nur kurz – die projektiven Transformationen erörtern würden. Die Gesamtheit dieser Trans-

[1]) Die „Geometrie" der Raum-Zeit-Welt, in der wir leben, gehört zu den sogenannten nichteuklidischen Geometrien, die wir in der Fußnote auf S. 97 erwähnten. Diese Geometrie unterscheidet sich sowohl von der gewöhnlichen euklidischen Geometrie als auch von der nichteuklidischen LOBATSCHEWSKIschen Geometrie. Das gilt unabhängig davon, ob die GALILEI-Transformationen oder die sogenannten LORENTZ-Transformationen zum Ausgangspunkt der Geometrie genommen werden. Man vergleiche hierzu die Ausführungen im Artikel über Nichteuklidische Geometrien in Band V der EdEM. Dort wird ausführlicher die Frage nach der geometrischen Deutung physikalischer Gesetze behandelt.

formationen bildet die *Gruppe der projektiven Transformationen*. Diese Gruppe ist eine der wichtigsten Gruppen der Geometrie und definiert eine bemerkenswerte „Geometrie", die den Namen *projektive Geometrie* trägt. Diese Geometrie hängt sowohl eng mit der euklidischen und affinen Geometrie zusammen als auch mit den nichteuklidischen Geometrien. Der projektiven Geometrie sind viele ausführliche Lehrbücher gewidmet.[1]) Wir wollen hier nur flüchtig ihren Gegenstand skizzieren.

Unsere Einführung in die projektive Geometrie beginnen wir mit einer interessanten Transformation, der Homologie, welche wir zunächst absichtlich etwas ungenau definieren. Eine *Homologie*[2]) *mit der Achse o und dem Zentrum O* ist eine Transformation der Ebene, *die Geraden in Geraden überführt, und zwar so, daß jede Gerade, die durch den Punkt O geht, auf sich abgebildet wird und die Punkte der Geraden o in sich übergeführt werden*. Hieraus folgt, daß eine Gerade l, die die Achse o in einem Punkt Q schneidet, durch die Homologie Γ in eine Gerade l' übergeht, welche wegen $\Gamma(Q) = Q$ die Achse ebenfalls in Q schneidet. Außerdem wird eine zur Achse o parallel verlaufende Gerade m durch die Homologie in eine Gerade m' übergeführt, die ebenfalls zur Geraden o parallel verläuft, denn in den eventuellen Schnittpunkt der Geraden m' und o könnte nur dieser Schnittpunkt selbst übergehen, und das kann nicht eintreten, da m und o sich nicht schneiden.

Kennt man den Bildpunkt $M' = \Gamma(M)$ eines einzigen Punktes M, der nicht auf der Geraden o liegt, so kann man daraus für jeden anderen Punkt A der Ebene seinen Bildpunkt A' konstruieren: Der Punkt M' muß zunächst auf der Geraden OM liegen, denn diese Gerade geht bei der Homologie in sich über (Abb. 56). Wenn nun die Gerade AM die Achse o der Homologie im Punkt Q trifft, geht die Gerade AM bei Γ in die Gerade QM' über. Wenn die Gerade AM zur Achse o der Homologie parallel ist, geht die Gerade AM in die zu o parallel verlaufende Gerade durch M' über. Weil weiterhin der gesuchte Punkt A' (bzw. A_1') außerdem auf der Geraden OA (bzw. OA_1) liegt, kann man also diesen Punkt als Schnittpunkt der Geraden OA und QM' (bzw. OA_1 und RM') erhalten. Diese Konstruktion versagt nur in dem Fall, daß der Ausgangspunkt B auf der Geraden OMM' liegt. Aber in diesem Fall können wir zuerst das Bild $A' = \Gamma(A)$ für einen beliebigen anderen, nicht auf OM gelegenen

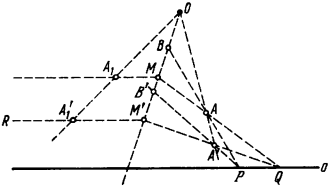


Abb. 56

[1]) Vgl. etwa Г. Б. Гуревич, Проективная геометрия (G. B. Gurewitsch, Projektive Geometrie), Moskau 1960, oder H. C. Coxeter, The real projective plane, Cambridge 1955.

[2]) Von den griechischen Wörtern ὁμός (gleichartig) und λόγος (Sinn).

Punkt A konstruieren, und dann konstruiert man das Bild $B' = \Gamma(B)$ nicht mittels des Paares M, M', sondern mittels des Paares A, A'. Andererseits kann man bei Vorgabe eines Punktes O und einer Geraden o und nach Wahl eines Punktepaares M, M' gemäß Abb. 56 eine bestimmte Abbildung Γ konstruieren, und diese hat alle Eigenschaften, welche wir von einer Homologie verlangten (insbesondere führt Γ Geraden wieder in Geraden über). Wir überlassen den Beweis hierfür dem Leser.

Wir bemerken, daß bei $\frac{|MA|}{|MQ|} = \frac{|MO|}{|MM'|}$ und nur in diesem Fall die Dreiecke MOA und $MM'Q$ ähnlich werden und daß dann die Gerade QM' die Gerade OA nicht schneidet (Abb. 57). In diesem Fall liegt der Punkt A auf der Geraden q,

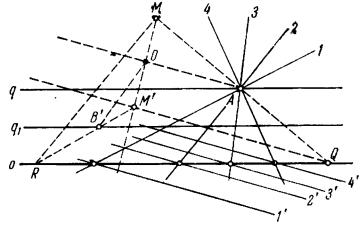


Abb. 57

welche sich homothetisch zur Geraden o bezüglich der Homothetie mit dem Zentrum M und dem Koeffizienten $\frac{|MO|}{|MM'|}$ verhält. Dem Punkt A entspricht also kein Punkt der Ebene. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß man als Definitionsbereich der Homologie Γ die um die Gerade q verminderte Ebene nehmen muß. Alle Geraden, die sich in einem gewissen auf der Geraden q liegenden Punkt A schneiden, werden durch die Homologie in zueinander parallele Geraden überführt. Man sagt, daß die Gesamtheit aller durch A hindurchgehenden Geraden in ein Büschel paralleler Geraden übergeht (vgl. Abb. 57).

Andererseits ist für jeden Punkt B', für den die Relation $\frac{|M'B'|}{|M'R|} = \frac{|M'O|}{|M'M|}$ besteht (mit R als Schnittpunkt der Geraden $M'B'$ und o), OB' parallel zu RM. Folglich existiert für diese Punkte B' kein Punkt B, der bei der Abbildung Γ in B' übergeht. Hieraus ergibt sich, daß als Wertebereich der Homologie Γ die Ebene unter Ausschluß der genannten Punkte B' genommen werden muß, d. h., als Wertebereich von Γ fungiert die um eine gewisse Gerade q_1 verminderte Ebene, nämlich die zu o homothetische Gerade bei der Homothetie mit dem Zentrum M' und den Koeffizienten $\frac{|M'O|}{|M'M|}$. Demzufolge ist

eine Homologie überhaupt keine Transformation der Ebene, denn ihr Definitionsbereich und ihr Wertebereich sind nicht identisch. Hierin äußert sich die anfänglich erwähnte Ungenauigkeit der Definition der Homologie.

7.2. Die projektive Ebene. Die Schwierigkeiten, die damit zusammenhängen, daß die Homologie keine Transformation ist, können beseitigt werden, wenn man jedem Punkt A der Geraden q vermöge der Homologie einen „idealen" oder „uneigentlichen" Punkt A' zuordnet und hierbei gleichzeitig annimmt, daß alle parallelen Geraden, die den sich im Punkt A schneidenden Geraden entsprechen, sich in dem fiktiven Punkt A' „schneiden". Solch ein Punkt A' wird häufig auch ein „unendlich ferner" Punkt[1]) genannt. Außerdem legt man fest, daß alle „uneigentlichen" oder „unendlich fernen" Punkte der Ebene eine „uneigentliche" oder „unendlich ferne" Gerade q' bilden. In diese Gerade q' soll bei der Homologie die Gerade q übergeführt werden. Zu diesen „uneigentlichen" Punkten der Ebene muß man schließlich noch einen „uneigentlichen" Punkt Z hinzufügen, in welchem sich alle zu o und q parallel verlaufenden Geraden „schneiden", für den dann $\Gamma(Z) = Z$ gesetzt wird.

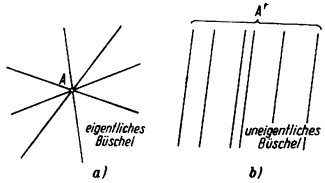


Abb. 58

Die auf diese Weise um die fiktiven „unendlich fernen" Punkte erweiterte Ebene heißt die *projektive Ebene*[2]). Wir bemerken, daß jedem Punkt der projektiven Ebene ein Geradenbüschel der gewöhnlichen Ebene entspricht, und zwar besteht das Büschel im Fall eines „eigentlichen" Punktes aus allen Geraden, die sich in diesem Punkt schneiden. Wenn der Punkt „uneigentlich" ist, besteht das Büschel aus allen zu einer Geraden parallelen Geraden (Abb. 58). Außerdem heben wir noch hervor, daß *sich auf der projektiven Ebene je zwei Geraden in genau einem Punkt schneiden (dieser ist eigentlich oder uneigentlich).*

---

[1]) Dies hängt mit folgendem zusammen: Nähert man sich mit dem Punkt A hinreichend der Geraden q, so entfernt sich sein Bildpunkt $\Gamma(A)$ unbeschränkt.

[2]) Diese Bezeichnung hängt damit zusammen, daß die durch Einführung dieser „unendlich fernen" Punkte und einer „unendlich fernen" Geraden erweiterte Ebene in natürlicher Weise bei Problemen auftaucht, die mit den *Zentralprojektionen* einer Ebene π auf eine andere Ebene π' in Verbindung stehen (wobei das Projektionszentrum O weder auf π noch auf π' liegen möge). Auch hierbei gibt es auf der Ebene π eine Gerade q, deren Punkte in keine Punkte der Ebene π' projiziert werden. Diese Gerade ist der Schnitt der Ebene π mit der zu π' parallelen Ebene, die durch den Punkt O geht. Zum anderen gibt es auch auf der Ebene π' eine Gerade, in deren Punkte kein Punkt der Ebene π projiziert wird. Es ist dies die Schnittgerade der Ebene π' mit der zu π parallelen Ebene, die durch den Punkt O geht.

Nach einer solchen Erweiterung der Ebene wird nun tatsächlich jede Homologie eine Transformation, deren Operationsbereich die gesamte projektive Ebene ist. Die Punkte der Geraden q gehen bei der Homologie Γ in „unendlich ferne" Punkte über, d. h., es ist $\Gamma(q) = q'$. Umgekehrt geht jeder „unendlich ferne" Punkt B', der etwa durch ein Büschel paralleler Geraden gegeben wird, in einen gewissen Punkt B der Geraden q_1 über, d. h., es ist $\Gamma(q') = q_1$. Man überlegt sich leicht, daß das Produkt einer beliebigen Anzahl von Homologien wieder eine Homologie ist und daß Entsprechendes für die zu einer Homologie inverse Transformation gilt. Beispielsweise ist die inverse Transformation zu der Homologie Γ mit dem Zentrum O und der Achse o, die den Punkt M in den Punkt M' überführt, die Homologie mit demselben Zentrum O und derselben Achse o, die M' in M abbildet (vgl. Abb. 56).

Man kann jetzt natürlich auch Homologien betrachten, die sich ergeben, wenn die Homologieachse oder das Zentrum oder auch beide „unendlich fern"

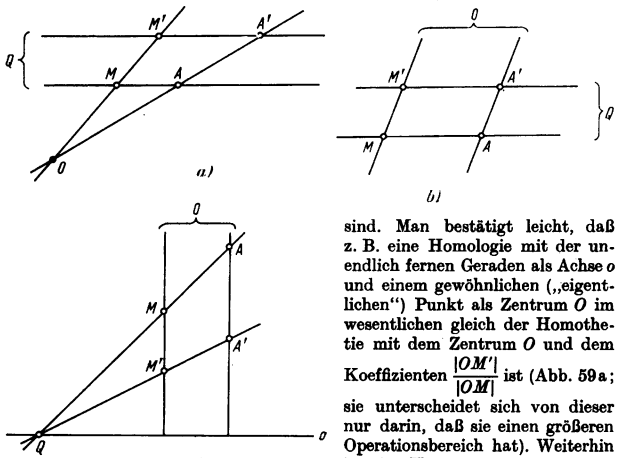


Abb. 59

sind. Man bestätigt leicht, daß z. B. eine Homologie mit der unendlich fernen Geraden als Achse o und einem gewöhnlichen („eigentlichen") Punkt als Zentrum O im wesentlichen gleich der Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten $\frac{|OM'|}{|OM|}$ ist (Abb. 59a; sie unterscheidet sich von dieser nur darin, daß sie einen größeren Operationsbereich hat). Weiterhin ist eine Homologie mit einem uneigentlichen Zentrum und einer uneigentlichen Achse im wesentlichen eine Parallelverschiebung in Richtung der Geraden, die „durch das Zentrum O gehen". Der Betrag der Verschiebung ist $|MM'|$, d. h., die Parallelverschiebung erfolgt um den Vektor $\overrightarrow{MM'}$ (Abb. 59b). Die Homologien mit einem uneigentlichen Zentrum O und einer eigentlichen Achse o sind schließlich im wesentlichen die Kontraktion in bezug auf die Gerade o (Abb. 59c).

7.3. Die Anwendungen von Homologien bei der Lösung von Aufgaben. Die Tatsache, daß eine Homologie gewisse sich schneidende Geraden in parallele Geraden überführt, kann für die Lösung vieler geometrischer Konstruktionsaufgaben und für Beweiszwecke benutzt werden.

Als Beispiel betrachten wir folgendes Theorem[1]): *Es seien zwei Geraden l_1 und l_2 und ein nicht auf ihnen liegender Punkt Q gegeben. Für ein beliebiges Geradenpaar a, b, das durch den Punkt Q geht, bezeichne A_1, A_2 und B_1, B_2 die*

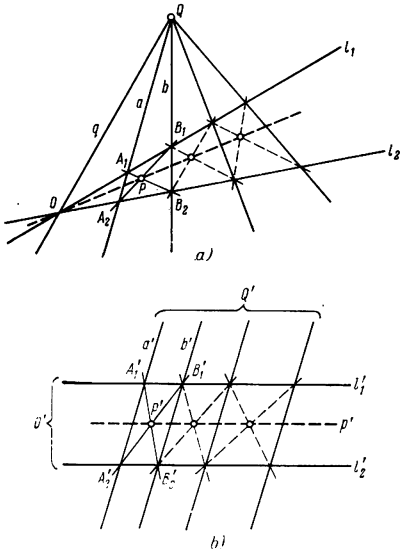
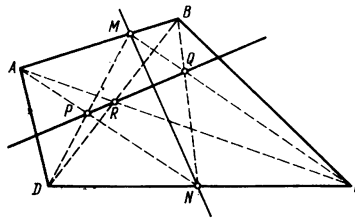


Abb. 60

Schnittpunkte von a und b mit l_1 bzw. l_2 (Abb. 60a). *Der Schnittpunkt P der Verbindungsgeraden A_1B_2 und A_2B_1 liegt dann für alle solche Geradenpaare auf einer gemeinsamen Geraden p, die durch den Schnittpunkt O der Geraden l_1 und l_2 verläuft. Im Fall, daß l_1 und l_2 parallel sind, ist auch p zu ihnen parallel.*

[1]) Man bezeichnet dieses Theorem häufig als *Satz von* PAPPOS. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Zum Beweis ziehen wir die Homologie Γ heran, deren Achse, Zentrum und sie bestimmendes Punktepaar M, M' mit $M' = \Gamma(M)$ so gewählt seien, daß die Gerade OQ die Rolle der Geraden q aus Abb. 57 spielt (man kann leicht bestätigen, daß die Wahl einer solchen Homologie stets möglich ist). Hierbei geht Abb. 60a in Abb. 60b über. Alle Vierecke $A_1'B_1'B_2'A_2'$ sind dann Parallelogramme, und der geometrische Ort der Mittelpunkte P dieser Parallelogramme ist die Mittellinie p' des durch die Geraden l_1' und l_2' gebildeten Streifens. Weil nun eine Homologie Geraden in Geraden überführt und parallele Geraden – also Geraden, die sich in einem uneigentlichen Punkt schneiden – in Geraden, die sich in einem eigentlichen Punkt schneiden, gehen bei der Homologie Γ^{-1} (vgl. S. 105) die parallelen Geraden l_1', l_2' und p' in die sich im Punkt O schneidenden Geraden l_1, l_2 und p über.



a)

Hier noch ein weiteres Beispiel. Wir beweisen: *Eine Gerade MN schneide die Seiten AB und CD eines Vierecks ABCD und zerlege damit das Viereck in die beiden Teilvierecke AMND und BMNC.*

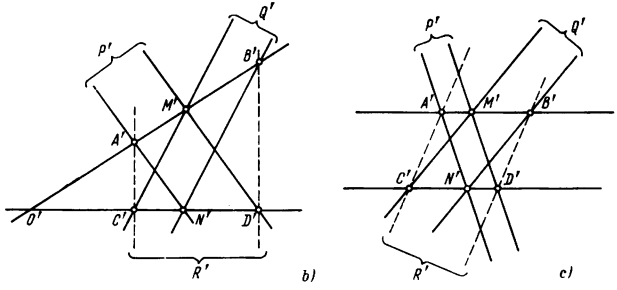


Abb. 61

Dann liegen alle drei Schnittpunkte P, Q, R der Diagonalen dieser drei Vierecke AMND, BMNC und ABCD auf einer Geraden (Abb. 61a).[1])

[1]) Wenn sich die Geraden AD, BC und MN in einem Punkt schneiden, folgt unsere Behauptung offenbar aus dem zuvor bewiesenen Theorem. In diesem Spezialfall geht die Gerade PRQ durch den Schnittpunkt der Geraden AB und CD.

Ein elementarer Beweis dieses interessanten Theorems ist sehr schwierig. Wenn man jedoch eine homologische Transformation benutzt, so ist der Beweis einfach. Wir transformieren nämlich die Abb. 61a mit Hilfe einer Homologie Γ, die wir so wählen, daß die Gerade PQ die Rolle der Geraden q in der Abb. 57 übernimmt (von der wir bisher noch nicht wissen, ob der Punkt R auf ihr liegt). Damit erhalten wir Abb. 61b; in ihr ist $A'N' \| D'M'$ (weil der Schnittpunkt P der Geraden AN und DM in einen „unendlich fernen" Punkt übergeht) und $B'N' \| C'M'$ (weil der Punkt Q ebenfalls in einen „unendlich fernen" Punkt übergeht). Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $O'A'N'$, $O'M'D'$ und $O'C'M'$, $O'N'B'$ (O' bezeichnet den Schnittpunkt[1]) der Geraden $A'B'$ und $C'D'$) gelten die Relationen $\frac{|O'A'|}{|O'N'|} = \frac{|O'M'|}{|O'D'|}$ und $\frac{|O'N'|}{|O'B'|} = \frac{|O'C'|}{|O'M'|}$. Durch Multiplikation dieser Gleichungen erhalten wir $\frac{|O'A'|}{|O'B'|} = \frac{|O'C'|}{|O'D'|}$. Hieraus folgt $A'C' \| B'D'$. Demnach geht bei Γ der Schnittpunkt R der Geraden AC und BD (Abb. 61a) in einen „unendlich fernen" Punkt über, und das bedeutet aber, daß R auf der Geraden PQ liegt.

7.4. Projektive Transformationen und projektive Geometrie. Die Homologien bilden einen Spezialfall der projektiven Transformationen, das sind die *Transformationen der projektiven Ebene, bei denen jede Gerade wieder in eine Gerade übergeht* (das bezieht sich also auch auf die uneigentliche Gerade).[2]) Demnach unterscheidet sich die Definition der projektiven Transformationen nur dadurch von der Definition der affinen Transformation, daß ihr Operationsbereich nicht die gewöhnliche (euklidische) Ebene ist, sondern die projektive Ebene[3]). Es ist klar, daß *die Gesamtheit aller projektiven Transformationen der projektiven Ebene eine Gruppe bildet.* Der Beweis hierzu unterscheidet sich faktisch nicht von dem auf S. 97 angegebenen Beweis dafür, daß die affinen Transformationen eine Gruppe bilden. Der Zweig der Geometrie, der diejenigen Eigenschaften von Figuren studiert, welche gegenüber projektiven Transformationen invariant bleiben, heißt *projektive Geometrie.* Als Beispiele für Theoreme der projektiven Geometrie können die von uns mit Hilfe von Homologien bewiesenen Theoreme dienen. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß die Behauptungen dieser Theoreme ihre Gültigkeit behalten, wenn man die dort dargestellten Lagebeziehungen einer beliebigen projektiven Transformation unterwirft. Hierauf beruhte im Grunde auch schon die Heranziehung der Homologien zum Beweis dieser Theoreme. Nachdem wir nämlich den geometrischen Sachverhalt mittels einer in geeigneter Weise gewählten Homologie transformiert hatten, vereinfachte er sich wesentlich. Wir folgerten dann die Behauptung des betrachteten Theorems in diesem einfacheren Spezialfall, was auf Grund unserer allgemeinen Überlegungen zum Beweis der ursprünglichen Behauptung völlig ausreichte.

---

[1]) Wir überlassen es dem Leser, sich über den Fall $A'B' \| C'D'$ (Abb. 61c) klar zu werden.

[2]) Man kann beweisen, daß *jede projektive Transformation der Ebene mit Hilfe einer in geeigneter Weise gewählten Homologie und einer gewissen Ähnlichkeitstransformation erzeugt werden kann* (vgl. dies mit den Ausführungen über affine Transformationen auf S. 87).

[3]) Zum Begriff der projektiven Ebene kann man fast alles wiederholen, was oben (S. 51–53) zum Begriff der geschlossenen Ebene gesagt wurde.

7.5. Koordinaten in der projektiven Ebene. Weil die projektive Ebene von völlig anderer geometrischer Struktur ist als die gewöhnliche (euklidische) Ebene, ist in ihr die übliche Art der Einführung von Koordinaten nicht anwendbar. Jedoch kann man auch für die projektive Ebene ein brauchbares Koordinatensystem erhalten, wenn man die übliche Art der Zuordnung der Koordinaten zu den Punkten etwas abändert. Es genügt nämlich, die kartesischen Koordinaten x, y der „eigentlichen" Punkte durch sogenannte *homogene Koordinaten* x_1, x_2, x_0 zu ersetzen, die mit x, y durch die folgenden Beziehungen verknüpft sind:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}. \tag{18}$$

Multipliziert man hierbei alle drei Koordinaten x_1, x_2, x_0 mit derselben Zahl $\varrho \neq 0$, so erhält man Koordinaten desselben Punktes, denn die kartesischen Koordinaten x und y ändern sich dabei nicht. Daher sind also — wie man sagt — die homogenen Koordinaten nur „bis auf einen multiplikativen Faktor ϱ bestimmt". Solange x_0 ungleich Null ist, entspricht dem Zahlentripel (x_1, x_2, x_0) ein „eigentlicher" Punkt A der Ebene, dessen kartesische Koordinaten durch die Formeln (18) festgelegt sind. Für $x_0 = 0$ verlieren dagegen die Formeln (18) ihren Sinn. In diesem Fall wird, sofern wenigstens eine der Zahlen x_1 und x_2 von Null verschieden ist, dem Zahlentripel $(x_1, x_2, 0)$ ein bestimmter „unendlich ferner" Punkt A' der projektiven Ebene zugeordnet, und zwar so, daß das Verhältnis $\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}$ den Anstiegskoeffizienten der „durch diesen Punkt A' gehenden Geraden" angibt. Den Koordinaten $x_1 = x_2 = x_0 = 0$ entspricht kein Punkt der projektiven Ebene, d. h., diese Koordinatenwerte werden nicht zugelassen (denn es ist unmöglich, über einen „Anstiegskoeffizienten" $\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}$ zu reden, der dem Zahlentripel (0, 0, 0) entspricht).

Die eingeführten homogenen Koordinaten erlauben es nun, eine beliebige Abbildung mit einem Definitionsbereich und Wertebereich aus der projektiven Ebene durch Gleichungen zu beschreiben:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \varphi(x_1, x_2, x_0), \\ x_2' &= \psi(x_1, x_2, x_0), \\ x_0' &= \chi(x_1, x_2, x_0). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Genauer gesagt, muß man Gleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} \varrho x_1' &= \varphi(x_1, x_2, x_0), \\ \varrho x_2' &= \psi(x_1, x_2, x_0), \\ \varrho x_0' &= \chi(x_1, x_2, x_0) \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

betrachten, wobei $\varrho \neq 0$ eine beliebige Zahl ist und die Funktionen $\varphi(x_1, x_2, x_0)$, $\psi(x_1, x_2, x_0)$ und $\chi(x_1, x_2, x_0)$ so geartet sein müssen, daß sich ihre Funktionswerte beim Ersetzen von (x_1, x_2, x_0) durch $(\sigma x_1, \sigma x_2, \sigma x_0)$ $(\sigma \neq 0)$ alle um einen gemeinsamen Faktor $\tau \neq 0$ ändern, der nur von σ abhängt.

Eine besondere Rolle unter allen Abbildungen (19) oder (19a) spielen die *linearen Abbildungen der projektiven Ebene*

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_0, \\ x_2' &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_0, \\ x_0' &= a_0 x_1 + b_0 x_2 + c_0 x_0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Wenn diese Abbildung eineindeutig ist, d. h. wenn aus den Formeln (20) durch x_1', x_2', x_0' auch x_1, x_2, x_0 bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, so stellt sie eine projektive Transformation dar. Der Beweis hierzu unterscheidet sich kaum vom Beweis dafür, daß eine lineare Transformation der gewöhnlichen Ebene eine affine Transformation darstellt (vgl. S. 70ff.). Er benutzt nur die Tatsache, daß jede Gerade der projektiven Ebene in homogenen Koordinaten durch eine lineare Gleichung

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_0 = 0 \tag{21}$$

beschrieben wird. Denn eine Gerade

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{21a}$$

mit dem Anstiegskoeffizienten $k = -\dfrac{A}{B}$ wird in homogenen Koordinaten (18) durch die Gleichung (21) beschrieben. Dieser Gleichung genügt auch der „unendlich ferne" Punkt $(x_1, x_2, 0) = (B, -A, 0)$, durch den die Gerade (21a) hindurchgeht. Die „unendlich ferne" Gerade der projektiven Ebene wird einfach durch die Gleichung $x_0 = 0$ beschrieben.

Umgekehrt kann man auch beweisen, daß *sich jede projektive Transformation der projektiven Ebene in homogenen Koordinaten durch Formeln des Typs* (20) *beschreiben läßt.*

7.6. Birationale Transformationen der projektiven Ebene. Verallgemeinert man die hier angestellten Überlegungen in der am Schluß von § 3 angegebenen Richtung, so kann man auch birationale Transformationen der projektiven Ebene definieren. Diese Transformationen sind dadurch charakterisiert, daß die in ihrer analytischen Beschreibung (19) auftretenden Funktionen $\varphi(x_1, x_2, x_0)$, $\psi(x_1, x_2, x_0)$, $\chi(x_1, x_2, x_0)$ nebst ihren Umkehrungen rationale Funktionen ihrer Argumente sind (vgl. S. 73). Hierbei kann man jetzt die Funktionen φ, ψ, χ als ganze rationale Funktionen annehmen, denn diese drei Funktionen kann man gleichzeitig mit einem beliebigen Ausdruck multiplizieren und so von ihrem gemeinsamen Hauptnenner befreien. Das läßt eine Klassifizierung der birationalen Transformationen der projektiven Ebene nach dem Grad der Funktionen φ, ψ, χ zu. Die einfachsten birationalen Transformationen sind die linearen (hierbei sind die Funktionen φ, ψ, χ vom Grad 1). Dann kommen die quadratischen Transformationen (hierbei sind die Funktionen φ, ψ, χ vom Grad 2) und die kubischen Transformationen (hierbei sind die Funktionen φ, ψ, χ vom Grad 3) usw.[1])

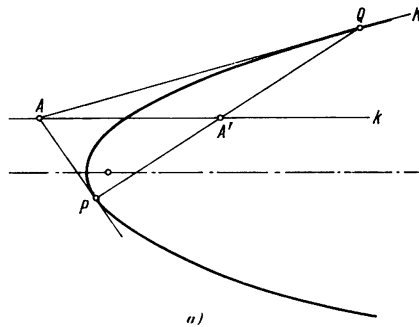
Die geometrische Bedeutung der linearen (projektiven) Transformationen haben wir schon erläutert. Als Beispiele für quadratische Transformationen mögen die Inversion (7) und die hyperbolische Inversion (8) dienen. In homogenen Koordinaten kann man die beiden genannten Transformationen wie folgt beschreiben:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= kx_1x_2, \\ x_2' &= kx_2x_0, \\ x_0' &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

und entsprechend

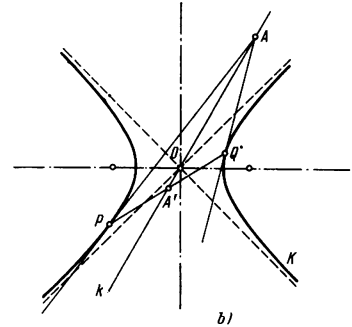
$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1x_2, \\ x_2' &= kx_0^2, \\ x_0' &= x_2x_0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

[1]) Der Grad der Funktionen φ, ψ und χ kann nicht verschieden sein, da sich die Funktionen bei Multiplikation von x_1, x_2, x_0 mit einer gemeinsamen Zahl $\sigma \neq 0$ notwendigerweise um ein und denselben Faktor $\tau\ (= \tau(\sigma))$ ändern müssen.



a)

(man vergleiche diese Formeln mit den Formeln (7) und (8) auf S. 68).[1]) Diese Beispiele sind hinreichend charakteristisch. Man kann nämlich beweisen, daß *jede quadratische Trans-*



b)

Abb. 62

[1]) Genaugenommen sind weder die Inversion noch die hyperbolische Inversion Transformationen der projektiven Ebene. Die Inversion (22) führt nämlich alle Punkte der „unendlich fernen" Geraden $x_0 = 0$ in das Inversionszentrum $O(0, 0, 1)$ über, und die hyperbolische Inversion (23) führt alle Punkte der „unendlich fernen" Geraden $x_0 = 0$ in den einen „unendlich fernen" Punkt $A_1(1, 0, 0)$ über (der der Inversionsachse o entspricht), und alle Punkte der Inversionsachse o, die die Gleichung $x_2 = 0$ hat, gehen in den anderen „unendlich fernen" Punkt $A_2(0, 1, 0)$ über (der den Senkrechten zur Inversionsachse entspricht). Wie wir schon früher bemerkten, bedingt der Wunsch, die Inversion bzw. die hyperbolischen Inversionen als Transformationen der Ebene zu betrachten, eine Erweiterung der Ebene durch „ideale" Elemente, die sich von der projektiven Ebene wesentlich unterscheidet. Man kann beweisen, daß *die linearen Transformationen* (20) *die einzigen birationalen Transformationen sind, deren Operationsbereich die gesamte projektive Ebene ist.* In Analogie hierzu gilt, daß *die einzigen Transformationen* (14), *deren Operationsbereich die gesamte geschlossene Ebene ist und bei denen die Funktion* $F(z)$ *durch eine rationale Funktion der komplexen Veränderlichen* z *gegeben wird, die gebrochenen linearen Transformationen* (16) *sind* (vgl. S. 72).

formation der projektiven Ebene in der Form $A\Sigma$ darstellbar ist, wobei A eine lineare Transformation bedeutet (die sich, wie wir wissen, auf eine Homologie zurückführen läßt[1]) *und Σ eine Kreisspiegelung* (Inversion) *oder eine Spiegelung an einem Paar paralleler Geraden* (hyperbolische Inversion) *oder eine Spiegelung an einer Hyperbel oder Parabel ist.* Die Spiegelungen an einer Hyperbel oder Parabel werden genauso definiert wie die Spiegelung an einem Kreis: Ein „im Äußeren" der entsprechenden Kurve K liegender Punkt A geht über in den Schnittpunkt A' des durch A gehenden Durchmessers der Kurve K (das ist die Verbindungsgerade von A mit dem Mittelpunkt O der Hyperbel oder die entsprechende Parallele zur Parabelachse) mit der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte P und Q der von A ausgehenden Tangenten an die Kurve, während der Punkt A' umgekehrt in A übergeht; die Punkte der Kurve K bleiben bei der Spiegelung an K fest (vgl. Abb. 62a, b mit Abb. 9 auf S. 50). Eine analoge geometrische Beschreibung aller kubischen Transformationen der Ebene (und allgemeinerer birationaler Transformationen) ist bisher noch unbekannt.

§ 8. Allgemeinere Arten von geometrischen Abbildungen

8.1. Beispiele für allgemeinere geometrische Abbildungen. Zum Begriff der Punktabbildung gelangten wir, indem wir als Argumente x und Funktionswerte y einer Funktion $y = f(x)$ statt Zahlen, wie dieses häufig betrachtet wird, Punkte zugelassen haben. Ebenso ist es dann aber auch berechtigt, daß bei einer Zuordnung $y = f(x)$ an die Stelle der Punkte andere geometrische Objekte, sogar Objekte unterschiedlicher Natur, treten können. Auf diese Weise gelangen wir zum allgemeineren Begriff der (nicht notwendig punkthaften) geometrischen Abbildung. Beispielsweise kann eine solche Abbildung $a' = \Phi(a)$ in einer Menge von Geraden erklärt sein, d. h., die Zuordnung führt eine Gerade a in eine neue (oder auch dieselbe) Gerade a' über. Oder man kann eine Abbildung $\Sigma' = \Phi(\Sigma)$ in einer Menge von Kreisen betrachten, d. h., Σ' und Σ sind jetzt Kreise. Zum anderen sind auch Abbildungen möglich, die Kreise in Punkte überführen (z. B. $O = \Phi(S)$, wobei O der Mittelpunkt des Kreises S ist) oder die Punkte in Geraden (vgl. S. 121) oder Kreise in Dreiecke überführen. Wir geben hier einige Beispiele solcher Transformationen und Abbildungen genauer an.

1. Es ist klar, daß *man eine affine Transformation der Ebene,* die ja Geraden in Geraden überführt, *auch als eine Transformation in der Menge aller Geraden ansehen kann.* So kann man beispielsweise die Kontraktion in bezug auf den Punkt O mit dem Koeffizienten k als die Geradentransformation $a' = \Phi(a)$ ansehen, welche eine beliebige Gerade a in die Gerade a' transformiert, die die gleiche Richtung wie a hat, aber von O den k-fachen Abstand wie die Ausgangsgerade besitzt (Abb. 63). Hierbei geht jede durch O verlaufende Gerade in sich über. Desgleichen kann man die Kontraktion in bezug auf eine Gerade o mit dem Koeffizienten k als Geradentransformation

[1]) Vgl. die Fußnote 2 auf S. 111.

$a' = \Phi(a)$ ansehen. Diese ordnet jeder zu o parallelen Geraden a_1 ebenfalls eine zu o parallele Gerade a_1' (mit dem k-fachen Abstand von o wie a_1) zu; die Gerade o wird in sich übergeführt, und jede Gerade a_2, die o schneidet,

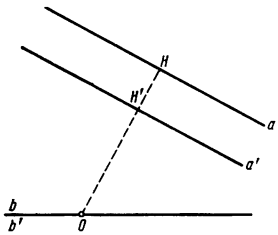


Abb. 63

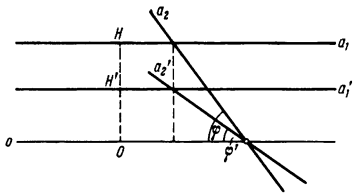


Abb. 64

geht in eine Gerade a_2' über, die o im gleichen Punkt wie a_2 schneidet und bei der der Tangens des Schnittwinkels mit o gleich dem k-fachen des Tangens des Schnittwinkels von a_2 mit o ist (Abb. 64). Wenn wir früher die affinen Transformationen als diejenigen (Punkt-) Transformationen charak-

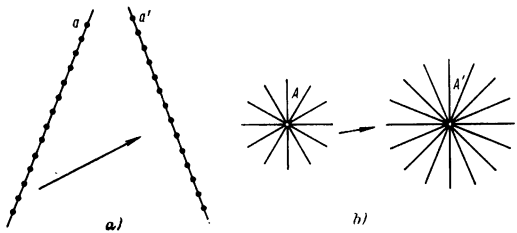


Abb. 65

terisierten, bei denen Geraden (welche wir als geradlinige Punktreihen betrachteten, Abb. 65a) wieder in Geraden übergingen, so können wir sie jetzt als diejenigen Geradentransformationen der Ebene beschreiben, bei denen jeder Punkt (worunter wir jetzt ein Büschel von sich in einem Punkt schneidenden Geraden verstehen, Abb. 65b) wieder in Punkte überführen (d. h. mit anderen Worten, die affinen Transformationen transformieren Geradenbüschel in Geradenbüschel).

2. *Auch jede Homologie Γ* (vgl. S. 105) *kann als eine Transformation in der Menge der Geraden der Ebene aufgefaßt werden.*

Die Homologie mit der Achse o und dem Zentrum O, welche eine gegebene Gerade m in eine gewisse Gerade m' überführt, die o im gleichen Punkt wie m schneidet, kann man nämlich in folgender Weise als eine Geradentransformation definieren: Sie führt eine beliebige Gerade a der Ebene in diejenige Gerade a' über, welche die Achse o im gleichen Punkt wie a schneidet (oder bei $a \| o$ zu o parallel ist) und die durch den Schnittpunkt A' der Geraden m' mit der Geraden OA hindurchgeht, wobei A den Schnittpunkt von a und m bedeutet (Abb. 66; wenn eine Gerade b die Achse o im gleichen Punkt wie m schneidet,

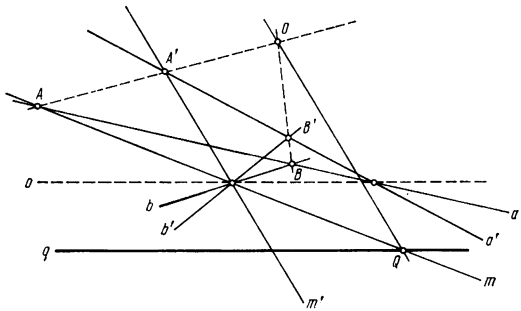


Abb. 66

so ersetzen wir bei der Konstruktion der Geraden $b' = \Gamma(b)$ die Geraden m und m' durch Geraden a und a', die schon in der angegebenen Weise konstruiert wurden und die die Achse o in einem anderen Punkt schneiden). Damit wird die Homologie Γ eine Transformation der Menge aller Geraden der projektiven Ebene. Die in Abb. 66 abgebildete Gerade q wird in die uneigentliche Gerade übergeführt. Die Homologie besitzt (als Geradentransformation) die folgende Eigenschaft: *Jedes Büschel von sich in einem Punkt schneidenden Geraden* (der Punkt kann eigentlich sein oder nicht) *wird in ein Büschel von sich in einem Punkt schneidenden Geraden übergeführt.*

8.2. Allgemeine Transformationen in der Kreisgeometrie. Analog zu dem über affine Transformationen Bewiesenen *kann man jede Kreisverwandtschaft in der Ebene als eine Transformation in der Menge aller Kreise und Geraden ansehen, die jeden Kreis und jede Gerade* (welche man auch als einen Kreis mit „unendlich großem" Radius ansehen kann) *in einen Kreis oder in eine Gerade transformiert.* So folgt etwa aus den Formeln (9) und (9′) von § 3, daß die Inversion vom Grad 1 mit dem Ursprung O eines rechtwinkligen

kartesischen Koordinatensystems als Inversionszentrum in folgender Weise als Transformation in der Menge der Kreise und Geraden der Ebene beschrieben werden kann:

a) Jede Gerade $ax + by = 0$, die durch O geht, wird in sich übergeführt.

b) Jede Gerade $2ax + 2by = 1$, die nicht durch O geht, geht in den entsprechenden Kreis $(x^2 + y^2) - 2ax - 2by = 0$ über, der durch O geht (sein Mittelpunkt $Q(a, b)$ liegt auf der von O ausgehenden Senkrechten auf die Ausgangsgerade, wobei $|OQ| = \frac{1}{2|OP|}$ ist; der Radius des Kreises ist $|QO| = \frac{1}{2|PO|}$).

c) Jeder durch O gehende Kreis $(x^2 + y^2) - 2ax - 2by = 0$ geht in die entsprechende Gerade $2ax + 2by = 1$ über, die nicht durch O geht (das von O auf diese Gerade gefällte Lot OP liegt auf der Geraden OQ, wobei $Q(a, b)$ der Kreismittelpunkt ist; außerdem ist $|OP| = \frac{1}{2|OQ|}$).

d) Jeder nicht durch O gehende Kreis $(x^2 + y^2) - 2ax - 2by + c = 0$ geht in den entsprechenden ebenfalls nicht durch O gehenden Kreis $x^2 + y^2 - 2\frac{a}{c}x - 2\frac{b}{c}y + \frac{1}{c} = 0$ über (die Mittelpunkte $Q(a, b)$ und $Q'\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ dieser Kreise Σ und Σ' liegen auf einer gemeinsamen Geraden durch den Punkt O, hierbei ist das Verhältnis der Radien $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ und $r' = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{1}{c}}$ dieser Kreise gleich dem Verhältnis der Strecken $\overline{OQ}$ und $\overline{OQ'}$; hieraus folgt, daß O das Zentrum einer Homothetie der Kreise Σ und Σ' vom Grad c und $\frac{1}{c}$ ist, bezüglich der Σ und Σ' invers sind[1]).

Man kann also einerseits die Kreisverwandtschaften als Transformationen in der Menge der Punkte der Ebene auffassen, die jeden Kreis (hierzu rechnen wir auch die Kreise mit unendlich großen Radien, d. h. die Geraden), wenn wir ihn als Punktgesamtheit auffassen, in einen Kreis überführen (Abbildung 67a). Andererseits kann man sie als Transformationen in der Menge aller Kreise und Geraden auffassen, welche jede Gesamtheit von allen sich in einem Punkt schneidenden Kreisen wiederum in eine solche Gesamtheit von Kreisen überführen (Abb. 67b). Es versteht sich, daß wir hierbei die Kreistransformationen als Punkttransformationen der „erweiterten" (geschlossenen) Ebene betrachten müssen.

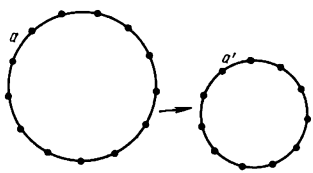


Abb. 67a

Bisher erörterten wir nur solche allgemeinen Transformationen, die wir auch als Punkttransformationen deuten konnten. Man kann aber natürlich auch Transformationen in der Menge aller Geraden oder in der Menge aller Kreise der Ebene betrachten, welche nicht stets die Gesamtheit aller sich in einem Punkt schneidenden Geraden (Geradenbüschel) oder die Gesamtheit aller sich in einem Punkt schneidenden Kreise wieder in eine ebensolche Gesamtheit von Geraden oder Kreisen überführen. Derartige Transformationen

[1]) Vgl. § 2 des Artikels „Geometrie der Kreise".

kann man dann unmöglich als Transformationen in der Menge der Punkte der Ebene auffassen. Interessante Beispiele für solche Transformationen liefert die sogenannte *Kreisgeometrie.*[1]) In dieser Theorie untersucht man z. B. sogenannte Kreisachsentransformationen, das sind Transformationen in der Menge der orientierten Geraden der Ebene,

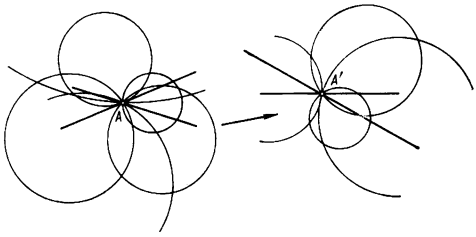


Abb. 67b

welche die Gesamtheit aller Tangenten eines (orientierten) Kreises Σ in die Gesamtheit aller Tangenten eines im allgemeinen von Σ verschiedenen (orientierten) Kreises Σ' überführen. Die Menge der sich in einem Punkt schneidenden Geraden geht bei einer solchen Transformation in die Gesamtheit aller Tangenten eines gewissen Kreises über (d. h., diese Transformationen transformieren im übertragenen Sinne „Punkte" in „Kreise"). Man betrachtet in der Geometrie der Kreise auch noch allgemeinere *Berührungstransformationen*, welche Kreise in Kreise überführen und die Berührung von Kreisen invariant lassen. Jede Gesamtheit aller Kreise, die durch einen Punkt gehen, und jede Gesamtheit aller Kreise, die eine Gerade berühren, können dabei in eine Gesamtheit aller Kreise abgebildet werden, welche einen gewissen Kreis berühren (im übertragenen Sinne führen diese Kreistransformationen also „Punkte" in „Kreise" und „Geraden" in „Kreise" über).

Das einfachste Beispiel für eine Kreisachsentransformation bildet die sogenannte *Paralleltransformation.* In der Menge aller Geraden wird die Paralleltransformation P um die Größe d wie folgt definiert: *Jeder Geraden a wird vermöge der Transformation P diejenige Gerade a' zugeordnet, die parallel zu a ist und von ihr den Abstand d hat.* Weil in dieser Definition nicht gesagt ist, in welche der beiden zu a parallelen Geraden, die den Abstand d von a haben, a' übergehen soll, ist noch eine gewisse zusätzliche Übereinkunft notwendig. Es erweist sich dabei als zweckmäßig, die Geraden mit einer Richtung (Orientierung) auszustatten, d. h., man läßt mit einer gewöhnlichen Geraden a in bezug auf ihre Lage zwei „Geraden" a_1 und a_2 zusammenfallen, welche sich durch ihre Richtungen voneinander unterscheiden sollen (in Abbildungen kennzeichnet man die Richtung meistens durch einen Pfeil). Die „Geraden" a_1 und a_2 werden dann durch die Paralleltransformation P

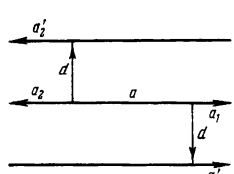


Abb. 68

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrie der Kreise" in diesem Band der EdEM.

in verschiedene Geraden a_1' und a_2' übergeführt, indem man nämlich jede der Geraden a_1 und a_2 (in Richtung ihrer Orientierung gesehen) nach rechts um den Betrag d verschiebt (Abb. 68). Eine Paralleltransformation ist demgemäß also nicht als eine Transformation in der Menge der gewöhnlichen Geraden aufzufassen, sondern als eine Transformation in der Menge der orientierten Geraden (die man auch als Achsen bezeichnet). Analog verhält sich die Sache auch bei der Betrachtung allgemeinerer Kreisachsentransformationen, woraus sich übrigens auch ihre Bezeichnung erklärt.

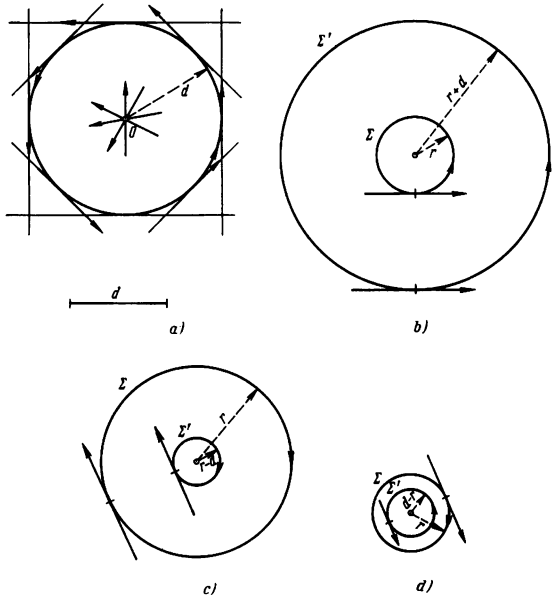


Abb. 69

Es ist leicht einzusehen, daß bei einer Paralleltransformation P jedes Geradenbüschel in die Gesamtheit aller Tangenten eines gewissen Kreises übergeht. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist das ursprüngliche Büschelzentrum; und sein Radius hat die Größe d (Abb. 69a). Diesem Kreis kann man in natürlicher Weise eine bestimmte Orientierung (Durchlaufrichtung) zuschreiben, nämlich die der Richtung aller seiner Tangenten entsprechende Durchlaufrichtung (in Abbildungen wird die Orientierung eines Kreises durch einen Pfeil auf

der Peripherie des Kreises angegeben). In diesem Sinne kann man dann von einer Paralleltransformation P *vom Betrag d behaupten, daß sie Punkte in Kreise vom Radius d überführt.* Ein orientierter Kreis Σ der Ebene, der als Gesamtheit seiner gerichteten Tangenten aufgefaßt wird, wird durch die Transformation P in einen zu Σ konzentrischen Kreis Σ' transformiert, dessen Radius gleich $r + d$ oder $r - d$ bzw. $d - r$ ist (Abb. 69b–d). Es erweist sich als zweckmäßig, den Kreisradien positive und negative Werte beizulegen. Hierbei soll ein positiver Radius bedeuten, daß der Kreis entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert ist. Ein negativer Radius soll dagegen die Orientierung des Kreises im Uhrzeigersinn bezeichnen. Demnach ist ein orientierter Kreis also vollständig durch Angabe seines Mittelpunktes und durch die mit Vorzeichen versehene Größe seines Radius bestimmt. Bei dieser Übereinkunft geht bei der Paralleltransformation vom Betrag d ein Kreis vom Radius r jeweils in einen Kreis mit dem Radius $r + d$ über (vgl. Abb. 69b–d; einen negativen Radius haben hier die Kreise Σ und Σ' in Abb. 69c und der Kreis Σ in Abb. 69d).

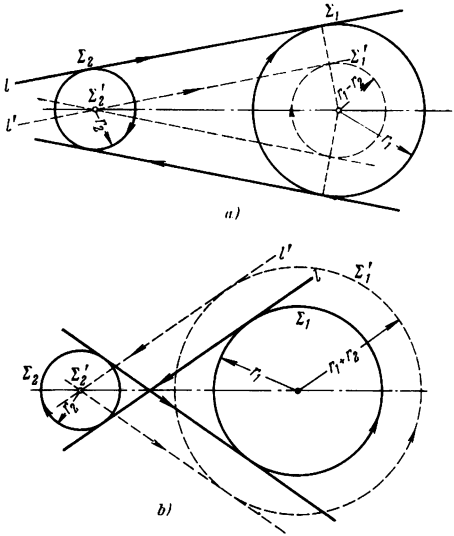


Abb. 70

Eine Paralleltransformation P kann man einerseits also als eine Transformation in der Menge aller orientierten Geraden der Ebene ansehen, die jede Gerade um den Abstand d verschiebt. Hierbei geht die Menge aller Tangenten eines orientierten Kreises Σ (ein Büschel orientierter Geraden, die durch einen Punkt gehen, wollen wir als Menge der Tangenten

an einen orientierten Kreis vom Radius Null ansehen) in die Menge aller Tangenten eines orientierten Kreises Σ' über, d. h., es werden Kreise in Kreise transformiert. *Damit kann man andererseits eine Parallelтransformation auch als eine Transformation in der Menge aller orientierten Kreise auffassen, die jeden Kreis vom Radius r (mit positivem oder negativem Vorzeichen) in einen zum Ausgangskreis konzentrischen Kreis vom Radius r + d überführt.* Jede solche Transformation transformiert umgekehrt die Gesamtheit aller Kreise, die eine orientierte Gerade l berühren, in die Gesamtheit der Kreise, die eine (im allgemeinen andere) Gerade l' berühren, d. h., bei ihr gehen stets Geraden in Geraden über. Jedoch ist es unmöglich, diese Transformation als eine Punkttransformation zu deuten.

Allgemeine geometrische Transformationen der hier betrachteten Art erweisen sich häufig ebenfalls bei der Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben oder für Beweiszwecke als nützlich. Wir betrachten hier als Beispiel für den ersten Fall die bekannte Aufgabe über die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise Σ_1 und Σ_2 mit den Radien r_1 und r_2, wobei $r_1 \geqq r_2$ sein möge. Zur Lösung dieser Aufgabe verwenden wir die Parallelтransformation P vom Betrag r_2 (Abb. 70). Hierbei sehen wir den Kreis Σ_2 als im Uhrzeigersinn orientiert an, d. h., der Kreis hat den Radius $-r_2$. Demnach führt die Transformation P den Kreis Σ_2 in einen Punkt über, nämlich in den Mittelpunkt von Σ_2 (hierin besteht der Sinn der Benutzung einer Parallelтransformation). Der Kreis Σ_1 geht in einen Kreis Σ_1' über, der zu Σ_1 konzentrisch ist. Je nachdem, welche Orientierung der Kreis Σ_1 hatte, ob im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn, ist der Radius von Σ_1' gleich $r_1 - r_2$ (Abb. 70a) oder gleich $r_1 + r_2$ (Abb. 70b). Die gemeinsamen Tangenten der Kreise Σ_1' und Σ_2 gehen dabei in die Tangenten des Kreises Σ_1' über, welche den Punkt Σ_2' enthalten. Letztere kann man leicht konstruieren (die Konstruktion der Tangenten von einem Punkt an einen Kreis setzen wir also als bekannt voraus). Die gesuchte Tangente l an die Kreise Σ_1 und Σ_2 ergibt sich als diejenige Gerade, welche bei der Transformation P in die durch den Punkt Σ_2' verlaufende Tangente l' an Σ_1' übergeführt wird, d. h., sie ist parallel zu l' und von l' um den Betrag r_2 entfernt (hinsichtlich ihrer Richtung liegt l' rechts von l).

8.3. Polaritäten. Das Dualitätsprinzip in der projektiven Geometrie. Ein wichtiges und interessantes Beispiel für eine Abbildung, die Punkte in Geraden und Geraden in Punkte überführt, liefern die sogenannten Polaritäten. Unter der *Polarität* mit dem Zentrum O versteht man diejenige Abbildung Π, die einem gegebenen Punkt A der Ebene diejenige Gerade a zuordnet, welche auf OA senkrecht steht und durch den Punkt A' geht, der dem Punkt A bei der Inversion mit dem Zentrum O und dem Grad 1 entspricht, d. h., die Gerade a geht durch den Punkt A' des Strahles $\overrightarrow{OA}$, für den $|OA'| = \dfrac{1}{|OA|}$ ist. Umgekehrt soll die Abbildung Π der Geraden a den Punkt A zuordnen (Abb. 71a).

Es ist klar, daß der Definitionsbereich einer Polarität aus Punkten und Geraden der Ebene besteht. Für die vollständige Betrachtung einer Polarität ist es zweckmäßig, daß nicht die Punkte und Geraden der gewöhnlichen (euklidischen) Ebene zugrunde gelegt werden, sondern die Punkte und Geraden der projektiven Ebene. Hierbei muß man dann die Definition der Polarität dahingehend ergänzen, daß man dem Zentrum O die „unendlich ferne" Gerade der projektiven Ebene zuordnet und jedem uneigentlichen Punkt A, der durch eine ihn enthaltene Gerade l (bzw. ein Büschel paralleler Geraden) bestimmt ist, die durch O gehende Senkrechte zu l entsprechen läßt. Bei Beschränkung

auf die gewöhnliche Ebene müßten wir nämlich den Punkt O und alle durch ihn gehenden Geraden von der Betrachtung ausschließen. Diese Variante der Polarität wäre aber weniger bequem als die Benutzung der uneigentlichen Elemente der projektiven Ebene.

Eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften der Polaritäten zeigen wir später. An dieser Stelle bemerken wir nur folgende Eigenschaft, die ohne Zweifel die wichtigste unter ihnen ist: *Wenn $\Pi(A) = a$ ist und B einen Punkt der Geraden a bezeichnet, geht die Gerade $b = \Pi(B)$ durch A.* Denn bezeichnet etwa B' den Schnittpunkt der Geraden OB mit der Geraden $b = \Pi(B)$, so gilt $|OB| \cdot |OB'| = |OA| \cdot |OA'|$ $(= 1)$, d. h.

$$\frac{|OA'|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA|}.$$

Hieraus folgt, daß die Dreiecke $OA'B$ und $OB'A$ ähnlich sind. Insbesondere ist $\sphericalangle\, OB'A = \sphericalangle\, OA'B = 90°$. Daher liegt der Punkt A auf der zu OB senk-

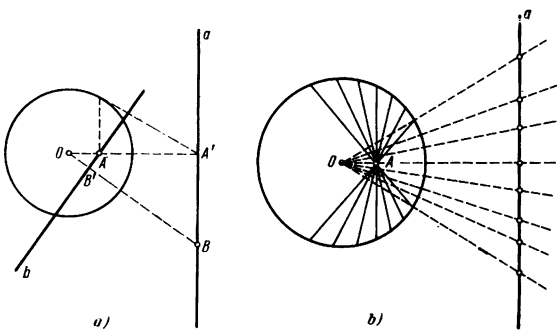


Abb. 71

rechten Geraden b (Abb. 71a). Den Nachweis für den Fall, daß A (oder B) mit O zusammenfällt oder ein uneigentlicher Punkt ist, überlassen wir dem Leser.

Diese Eigenschaft einer Polarität bedeutet, daß *eine Gerade a — als Punktreihe betrachtet — vermöge der Abbildung Π in einen Punkt A übergeht, den wir auch als Geradenbüschel auffassen können; andererseits führt dann Π ein Geradenbüschel in eine geradlinige Punktreihe über* (Abb. 71b).

Die wichtigste Folgerung aus der Definition der Polarität in der projektiven Ebene ist das sogenannte *Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie.*[1]) Dieses Prinzip beinhaltet, daß *man in der Formulierung eines beliebigen Theo-*

[1]) Vgl. die in Fußnote 1 auf S. 105 zitierten Lehrbücher der projektiven Geometrie.

rems der projektiven Geometrie der projektiven Ebene überall das Wort „Punkt" durch das Wort „Gerade" und umgekehrt, außerdem den Ausdruck „liegt auf" durch den Ausdruck „geht durch" und umgekehrt ersetzen kann und auf diese Weise wieder ein richtiges Theorem der projektiven Geometrie erhält.

Denn gehen wir etwa von einem gewissen Theorem der projektiven Geometrie aus, das eine Lagebeziehung von Punkten und Geraden ausdrückt, so geht bei einer Polarität die dem Theorem entsprechende Figur in eine neue Figur über, in welcher die Geraden die Rolle der Punkte übernehmen. Den auf einer Geraden l liegenden Punkten entsprechen hierbei die sämtlichen Geraden, die durch den Punkt L gehen, welcher der Geraden l zugeordnet ist. Die neue Figur spiegelt ein anderes Theorem wider, welches man das zu dem Ausgangstheorem „duale" Theorem nennen kann. Dieses allgemeine Schema erläutern wir unten durch ein konkretes Beispiel.

Durch geeignete Anwendung einer Polarität gelangen wir zum sogenannten

Satz von Desargues. *Wenn die Verbindungsgeraden AA_1, BB_1 und CC_1 zweier Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sich in einem Punkt O schneiden, liegen die Schnittpunkte K, L und M der Dreiecksseiten dieser Dreiecke auf einer Geraden* (Abb. 72a).

Zum Beweis betrachten wir die Polarität Π mit dem Zentrum O. Bei ihr gehen die Punkte A und A_1 in Geraden a und a_1 über, die senkrecht auf der Geraden OAA_1 stehen, also zueinander parallel sind. Die Punkte B und B_1 und entsprechend C und C_1 gehen ebenfalls in zueinander parallele Geraden $b \| b_1$ und $c \| c_1$ über. Aus den Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ gehen also neue Dreiecke hervor, bei denen die entsprechenden Seiten a, b, c und a_1, b_1, c_1 parallel sind. Die Ecken dieser neuen Dreiecke bezeichnen wir mit A', B', C' und A_1', B_1', C_1'. Wegen $\Pi(A) = a$ und $\Pi(B) = b$ geht die Gerade AB bei der Polarität in den Schnittpunkt der Geraden a und b über, d. h., es ist $\Pi(AB) = C'$. Analog erhält man $\Pi(A_1B_1) = C_1'$. Folglich wird der Schnittpunkt K der Geraden AB und A_1B_1 in die Gerade $C'C_1'$ transformiert: $\Pi(K) = C'C_1'$. Ebenso ergibt sich $\Pi(L) = A'A_1'$ und $\Pi(M) = B'B_1'$. Daher genügt zum Beweis dafür, daß die Punkte K, L, M auf einer Geraden liegen, der Nachweis eines gemeinsamen Schnittpunktes der Geraden $A'A_1'$, $B'B_1'$ und $C'C_1'$. Wegen der Parallelität der Geraden a und a_1, b und b_1, c und c_1 sind zwei Fälle möglich: 1. Die Dreiecke $A'B'C'$ und $A_1'B_1'C_1'$ sind kongruent, und man kann sie durch eine Parallelverschiebung auseinander erhalten (Abb. 72b); dann sind die Geraden $A'A_1'$, $B'B_1'$ und $C'C_1'$ untereinander parallel, d. h., sie schneiden sich in einem uneigentlichen Punkt. 2. Die Dreiecke $A'B'C'$ und $A_1'B_1'C_1'$ sind homothetisch. Auch dann schneiden sich die Geraden $A'A_1'$, $B'B_1'$ und $C'C_1'$ in einem Punkt, nämlich im Homothetiezentrum (Abb. 72c). In jedem Fall liegen also die Punkte K, L, M auf einer Geraden. Wir bemerken, daß unter Umständen einer der Punkte K, L, M oder auch die ganze Gerade KLM uneigentlich sein können (Abb. 72d und e).

Der Satz von Desargues ist ein typischer Satz der projektiven Geometrie. Wir wollen nun auf dieses Theorem das Dualitätsprinzip anwenden. In der Formulierung des Satzes müssen wir dazu überall das Wort „Punkt" durch

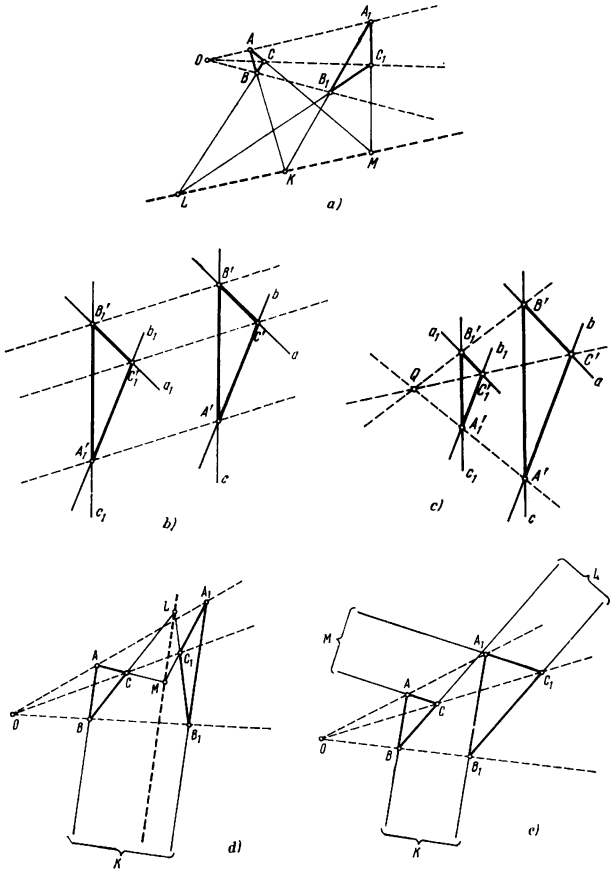


Abb. 72

das Wort „Gerade" und umgekehrt ersetzen, außerdem ist der Ausdruck „liegen auf" überall durch „gehen durch" und umgekehrt zu ersetzen. Wir erhalten dann die folgende Behauptung: *Wenn die Schnittpunkte $a \cdot a_1$, $b \cdot b_1$ und $c \cdot c_1$ zweier „Dreiseite" abc und $a_1b_1c_1$ auf einer Geraden o liegen, gehen die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken dieser Dreiseite durch einen Punkt.* Die Abb. 73b stellt die Aussage dieses Theorems dar. Diese Abbildung unterscheidet sich offenbar überhaupt nicht von der Abb. 73a, welche den Desarguesschen Satz widergibt, obwohl der Inhalt des Theorems ein anderer ist (die Voraussetzungen und die Behauptungen sind nämlich gegenüber dem Satz von Desargues vertauscht). Auf diese Weise gelangten wir also zu einem Theorem, das gerade die Umkehrung des von uns formulierten Satzes von Desargues ist (dieses umgekehrte Theorem wird gewöhnlich auch nach Desargues

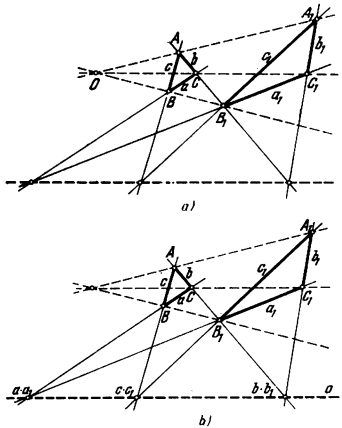


Abb. 73

benannt). Das umgekehrte Theorem brauchen wir indes nicht mehr zu beweisen. Seine Gültigkeit folgt aus der des Desarguesschen Satzes und dem Dualitätsprinzip. Das Zusammenfallen des zum Desarguesschen Satz „dualen" Theorems mit dessen Umkehrung ist allerdings ein Zufall.

Abschließend geben wir noch ein weiteres Beispiel für die Anwendung einer Polarität beim Beweis eines geometrischen Theorems. *Es sei σ der einem Dreieck ABC einbeschriebene Kreis. Eine Tangente l an σ möge die Dreiecksseiten in den Punkten M, N und P schneiden. Die im Mittelpunkt O des Kreises σ errichteten Senkrechten auf OM, ON und OP mögen entsprechend die Dreiecksseiten in den Punkten M_1, N_1 und P_1 schneiden. Dann liegen die Punkte M_1, N_1 und P_1 ebenfalls auf einer Tangente l_1 des Kreises σ* (Abb. 74). Wir nehmen an, daß der Radius des Kreises σ gleich 1 ist, und führen die Polarität Π mit dem Zentrum O aus. Hierbei gehen die Geraden AB, BC, CA und l in ihre Kreisberührungspunkte C_1, A_1 B_1 und L_1 über. Aus den Punkten M, N und P werden die Geraden $L_1C_1 \perp OM$, $L_1A_1 \perp ON$ und $L_1B_1 \perp OP$, und die Punkte M_1, N_1 und P_1 werden in die Geraden $m_1 \perp OM_1$, $n_1 \perp ON_1$ und $p_1 \perp OP_1$ übergeführt, die durch die Punkte C_1, A_1 und B_1 hindurchgehen. Die Geraden m_1, n_1 und p_1 sind offenbar zu OM, ON und OP parallel, d. h., sie stehen auf den Geraden L_1C_1, L_1A_1 und L_1B_1 senkrecht. Hieraus folgt, daß die Geraden m_1, n_1 und p_1 den Kreis σ im Punkt L schneiden, der zu L_1 diametral liegt. Diesem Punkt entspricht eine zu l parallele Gerade l_1, welche den Kreis σ im Punkt L berührt und auf der die Punkte M_1, N_1 und P_1 liegen.

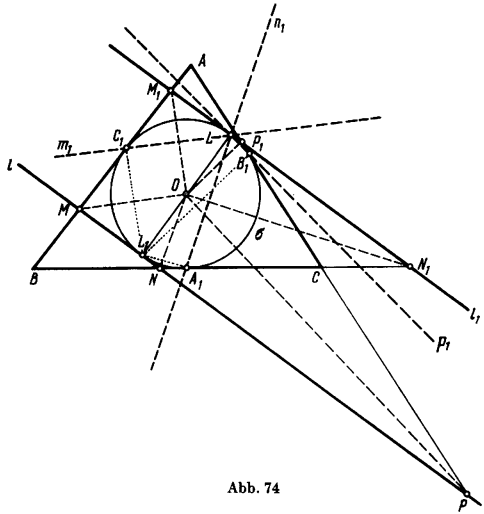


Abb. 74

8.4. Die Fußpunkttransformation. Als letztes Beispiel einer allgemeinen Transformation der Ebene betrachten wir die sogenannte Fußpunkttransformation Δ, die jede Kurve der Ebene in eine andere Kurve überführt, die aber im allgemeinen die Punkte, Geraden und Kreise nicht invariant läßt. Diese Transformation wird auf folgende reichlich komplizierte Weise definiert. Wir wählen einen festen Punkt O der Ebene als Zentrum der Fußpunkttransformation Δ. Es sei dann γ eine beliebige Kurve in der Ebene. Einem beliebigen Punkt A der Kurve γ ordnen wir jetzt den Fußpunkt des von O auf die Kurventangente[1]) in A gefällten Lotes zu. Wenn der Punkt A die Kurve γ durchläuft, beschreibt der Punkt A' eine neue Kurve γ', die sogenannte *Fußpunktkurve* von γ bezüglich O, welche wir als Bild der Kurve γ bei der Transformation Δ ansehen

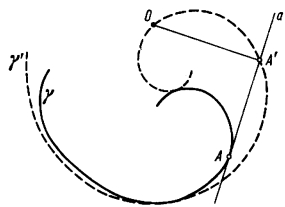


Abb. 75

[1]) Als *Tangente* der Kurve γ im Punkt A bezeichnen wir wie üblich die Grenzlage der Sekante AB, wenn der Punkt B der Kurve γ gegen A strebt (vgl. den Artikel „Ableitungen, Integrale und Reihen" in Band III der EdEM. S. 289).

(Abb. 75). Es ist leicht einzusehen, daß bei einer Fußpunkttransformation jede Gerade a in einen Punkt A übergeht, nämlich den Fußpunkt des von O auf a gefällten Lotes (Abb. 76). Dagegen geht ein Punkt A, wenn wir ihn als Geradenbüschel auffassen (das zugleich die Rolle aller „Tangenten" an den Punkt spielt), in den Kreis Σ über, welcher die Strecke $\overline{OA}$ als Durchmesser besitzt (Abb. 77). Ein Kreis, dessen Mittelpunkt das

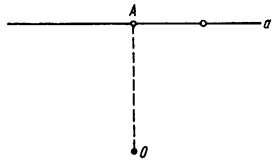


Abb. 76

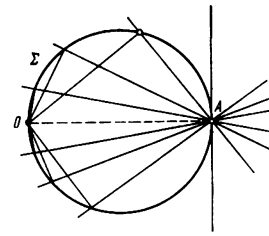
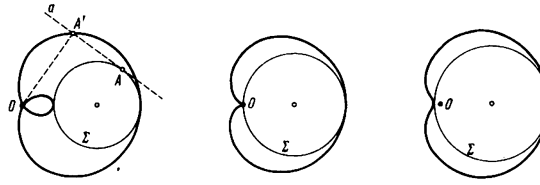


Abb. 77

Zentrum O der Fußpunkttransformation Δ ist, wird in sich übergeführt. Wenn dagegen der Kreismittelpunkt von O verschieden ist, wird aus dem Kreis Σ vermöge der Transformation Δ eine kompliziertere Kurve, nämlich eine sogenannte *Pascalsche Schnecke* (Abb. 78a–c; die in Abb. 78b angegebene „herzförmige" Pascalsche Schnecke heißt



a) b) c)

Abb. 78

auch *Kardioide*). Die Pascalschen Schnecken sind sehr interessante Kurven, die man (sogar auf mehrere Arten) auch ganz unabhängig von der Fußpunkttransformation definieren kann.

Die Fußpunkttransformation definierten wir als eine Transformation in der Menge der ebenen Kurven (zu denen wir auch die Geraden und die Punkte rechnen), die jeder Kurve γ eine gewisse neue Kurve γ' zuordnen. Es gibt auch einen anderen Zugang zu dieser Transformation, der sich für gewisse Untersuchungen als geeigneter erweist. Aus der Definition der Transformation Δ folgt nämlich, daß der Punkt A' der Bildkurve γ', der einem Punkt A der Kurve γ entspricht, vollkommen durch die Angabe des Punktes A und der Tangente a an die Kurve γ im Kurvenpunkt A bestimmt ist. Keine weiteren Angaben über die Kurve γ

sind zur Bestimmung des Punktes A' notwendig (A' ist der Fußpunkt des von O auf a gefällten Lotes). Man kann nun aber mittels des Punktes A und der Tangente a nicht nur den Punkt A' bestimmen, sondern auch die Tangente a' an die Kurve γ' im Kurvenpunkt A'. Ist nämlich B ein anderer Punkt der Kurve γ und b die Tangente an γ im Punkt B, so entspricht dem Punkt B der Punkt B' der Kurve γ', den man als Fußpunkt des von O auf b gefällten Lotes erhält (Abb. 79). Die Tangente a' an die Kurve γ' im Punkt A' kann man daher als Grenzlage der Sekanten $A'B'$ finden, wenn B' gegen A' strebt oder, was dasselbe bedeutet, wenn B gegen A strebt. Wenn nun B gegen A strebt, strebt auch der Schnittpunkt Q der Geraden a und b gegen den Punkt A. Hieraus folgt, daß die Gerade $A'B'$ als Sehne des über $\overline{OQ}$ geschlagenen Kreises Σ_1 gegen diejenige Gerade a' strebt, welche den über $\overline{OA}$ geschlagenen Kreis Σ im Punkt A' tangiert (Abb. 80).

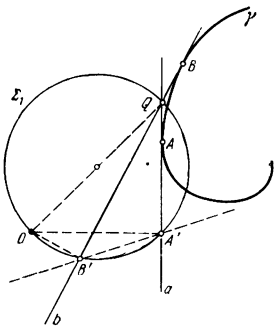


Abb. 79

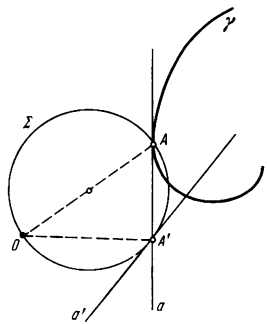


Abb. 80

Aus dem eben Bewiesenen ergibt sich, daß zwei sich im Punkt A berührende Kurven durch jede Fußpunkttransformation Δ in Kurven übergeführt werden, die sich in dem A entsprechenden Punkt A' berühren (Abb. 81 a). Mit anderen Worten kann man also sagen, daß jedes Paar (A, a) aus einem Punkt A und einer in A gegebenen Richtung a durch die Transformation Δ in ein Paar (A', a') aus einem Punkt A' und einer in A' gegebenen Richtung a' übergeführt wird. Ein aus einem Punkt A und einer durch A gehenden Geraden a bestehendes Paar nennt man in der Geometrie gewöhnlich ein *Linienelement*. Daher kann man die Fußpunkttransformationen auch als *Transformationen in der Menge der Linienelemente der Ebene* ansehen. Eine Kurve γ, die man auch als Gesamtheit ihrer Linienelemente aus den Kurvenpunkten von γ und den Tangenten in diesen Punkten auffassen kann, wird durch Δ in diejenige Kurve übergeführt, die von allen Linienelementen gebildet wird, die die Bilder der Linienelemente von γ sind (Abb. 81 b). Transformationen dieser Art heißen *Berührungstransformationen*.[1]) Demnach ist Δ eine Berührungstransformation.

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrie der Kreise" in diesem Band der EdEM, insbesondere S. 520–522.

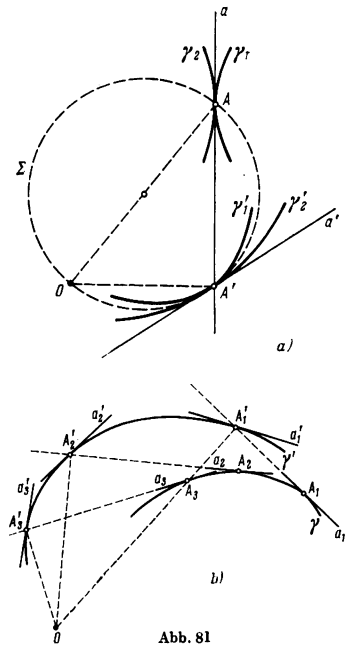


Abb. 81

8.5. Gruppen von allgemeinen Transformationen. Vieles von dem, was wir oben über Punktabbildung und Punkttransformationen der Ebene gesagt haben, kann man auf beliebige (also nicht notwendig punkthafte) geometrische Abbildungen und Transformationen übertragen. So kann man etwa das Produkt $\Psi\Phi$ zweier Abbildungen Φ und Ψ als Hintereinanderausführung der Abbildungen Φ und Ψ definieren. Es versteht sich, daß dabei der Wertebereich von Φ mit dem Definitionsbereich der Abbildung Ψ zusammenfallen muß. Insbesondere hat der Begriff des Produktes von Transformationen einen Sinn. Es kann sich also etwa auch um das Produkt zweier Transformationen handeln, die in der Menge der Geraden oder in der Menge der Kreise definiert sind.

Ein einfaches Beispiel eines Produktes zweier allgemeiner Transformationen liefert das Produkt P_2P_1 der Paralleltransformation P_1 um die Größe d_1 mit der Paralleltransformation um die Größe d_2. Es ist klar, daß es sich bei P_2P_1 ebenfalls um eine Paralleltransformation handelt, nämlich die um die Größe $d_1 + d_2$. Denn P_1 bildet eine beliebige gerichtete Gerade l in die Gerade $l_1 \parallel l$ ab, die die gleiche Richtung wie l hat und rechts von l in der Entfernung d_1 liegt, und P_2 führt dann l_1 in die Gerade $l' \parallel l_1$ über, die mit l_1 gleichgerichtet ist und von l_1 die Entfernung d_2 hat. Demnach wird also l' aus l durch Paralleltransformation um die Größe $d_1 + d_2$ erhalten (Abb. 82). (Man kann sich dasselbe auch wie folgt überlegen: P_1 führt einen beliebigen Kreis Σ vom Radius r in einen zu Σ konzentrischen Kreis Σ_1 vom Radius $r + d_1$ über, der dann durch P_2 in einen zu Σ_1 konzentrischen Kreis Σ' vom Radius $(r + d_1) + d_2 = r + (d_1 + d_2)$ übergeführt wird, und folglich ergibt sich Σ' aus Σ durch die Paralleltransformation um die Größe $d_1 + d_2$).

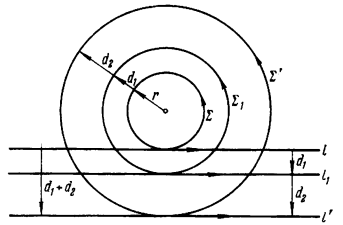


Abb. 82

Entsprechend kann man auch das Produkt $\Delta_2\Delta_1$ zweier Fußpunkttransformationen Δ_1 und Δ_2 bilden. Wenn nämlich Δ_1 einer gegebenen Kurve γ die Kurve γ_1 und Δ_2 der Kurve γ_1 die Kurve γ' zuordnet, dann wird γ durch $\Delta_2\Delta_1$ in γ' übergeführt.[1])

Ebenso hat der Begriff des Produktes $\Pi_2\Pi_1$ zweier Polaritäten Π_1 und Π_2 einen Sinn. Der Definitionsbereich von $\Pi_2\Pi_1$ wird die Menge aller Punkte und Geraden der projektiven Ebene. Die Punkte werden durch $\Pi_2\Pi_1$ in Punkte und die Geraden in Geraden übergeführt. Demnach zerfällt $\Pi_2\Pi_1$ in zwei einzelne Transformationen, von denen die eine eine Punkttransformation ist und die andere eine Transformation in der Menge aller Geraden der projektiven Ebene. Die erste dieser Transformationen, die Punkttransformation, ist — wie man leicht sieht — eine projektive Transformation. Insbesondere ist das „Quadrat" $\Pi\Pi = \Pi^2$ jeder Polarität Π gleich der identischen Transformation, denn sie führt jeden Punkt und jede Gerade in sich über. Folglich ist jede Polarität eine Involution (vgl. S. 91), d. h. zu sich selbst invers.

Ebenso hat auch für allgemeine Abbildungen und Transformationen der Begriff der zu einer gegebenen Abbildung oder Transformation *inversen* Abbildung oder Transformation Φ^{-1} einen Sinn. Diese Abbildung Φ^{-1} wird wie folgt definiert: Wenn Φ das geometrische Gebilde α in das geometrische Gebilde α' überführt (α und α' können Punkte, Geraden, Kreise oder andere geometrische Objekte sein, wobei nicht verlangt wird, daß sie von gleicher Natur sind), soll Φ^{-1} das Gebilde α' in das Gebilde α überführen. Der Definitionsbereich von Φ^{-1} fällt dann mit dem Wertebereich von Φ zusammen. Zum Beispiel ist die inverse Abbildung der Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten k, wenn wir sie als Transformation in der Menge der Geraden

[1]) Faßt man die Transformationen Δ_1 und Δ_2 als *Transformationen in der Menge der Linienelemente der Ebene* auf (vgl. S. 129), so ist auch das Produkt $\Delta_2\Delta_1$ der beiden Transformationen als eine Transformation in der Menge der Linienelemente anzusehen.

der Ebene angesehen, die Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten $\frac{1}{k}$, und zwar ebenfalls als Transformation in der Menge der Geraden angesehen. Die Transformation Δ^{-1}, die zu einer Fußpunkttransformation Δ invers ist, führt z. B. die Pascalschen Schnecken in Kreise über usw.

Damit ist es möglich, auch für allgemeine Transformationen den Begriff der Gruppe von solchen Transformationen zu erklären. Darunter wird wieder eine Gesamtheit $\mathfrak{G}$ von Transformationen verstanden, welche 1. die identische Transformation (des entsprechenden Grundbereichs) enthält, 2. mit einer Transformation Φ auch die zu ihr inverse Transformation Φ^{-1} enthält und 3. mit je zwei Transformationen Φ und Ψ auch deren Produkt $\Psi\Phi$ enthält. Dann ist z. B. klar, daß etwa die affinen Transformationen, wenn man sie als Transformationen in der Menge aller Geraden der Ebene betrachtet, eine Gruppe bilden und daß auch die Kreisverwandtschaften, als Transformationen in der Menge der Kreise betrachtet, eine Gruppe bilden.

Neuartig sind für uns die Gruppe der Kreisachsentransformationen oder die Gruppe der Kreisberührungstransformationen. In der Tat bilden die Kreisachsentransformationen eine Gruppe; denn es gilt:

1. Die identische Transformation ist, wenn man sie als eine Transformation in der Menge aller gerichteten Geraden ansieht, eine Kreisachsentransformation, die jeden Kreis in sich überführt.

2. Ist Φ eine Transformation in der Menge der gerichteten Geraden, die jeden Kreis in sich überführt, so ist auch die zu ihr inverse Transformation Φ^{-1} eine solche Transformation. Diese ordnet nämlich einem beliebigen Kreis Σ den Kreis Σ' zu, für den $\Phi(\Sigma') = \Sigma$ ist.

3. Sind Φ und Ψ Transformationen, die in der Menge der gerichteten Geraden definiert sind und Kreise in Kreise überführen, so gilt dasselbe auch für $\Psi\Phi$. Geht nämlich der Kreis Σ bei Φ in den Kreis Σ_1 über und geht Σ_1 bei Ψ in den Kreis Σ' über, so wird dem Kreis Σ durch die Transformationen $\Psi\Phi$ der Kreis Σ' zugeordnet.

Eine Teilmenge der Gruppe der Kreisachsentransformationen bildet die *Gruppe der Paralleltransformationen*. Dazu muß man neben den Paralleltransformationen um einen Betrag $d > 0$ die Paralleltransformation um den Betrag 0 betrachten (das ist die identische Transformation), und außerdem muß man auch Paralleltransformationen um einen negativen Betrag $-d$ zulassen (diese soll jede gerichtete Gerade um den Betrag d nach links verschieben und führt dann einen (orientierten) Kreis vom Radius r in den zum Ausgangskreis konzentrischen Kreis vom Radius $r - d$ über; Abb. 83, vgl. auch S. 119). Hiernach ist die zur Paralleltransformation um die (positive oder negative) Größe d inverse Transformation die Paralleltransformation um die Größe $-d$. Das Produkt der Paralleltransformationen um die Größen d_1 bzw. d_2 ist die Paralleltransformation um die Größe $d_1 + d_2$.

Der Begriff der Gruppe von allgemeinen Transformationen ist deshalb sehr wichtig, weil er es erlaubt, *auch Geometrien zu betrachten, deren Grundelemente keine Punkte, sondern andere geometrische Objekte, wie Geraden, Kreise usw. sind*. Es ist klar, daß die in § 6 dargelegte KLEINsche Definition der Geometrie auch in diesem Fall gültig bleibt, nur muß man hierbei unter einer „geometrischen Figur" nicht eine Punktmenge verstehen, sondern z. B. eine Menge von Geraden. In diesem Fall sind dann als „Bewegungen" der entsprechenden

„Geometrie" gewisse Transformationen in der Geradenmenge der Ebene anzusehen. Damit jedoch die durch diese „Bewegungen" definierte „Gleichheitsbeziehung" für Figuren reflexiv, symmetrisch und transitiv ausfällt (vgl. S. 96), ist wieder zu fordern, daß die Gesamtheit aller dieser „Bewegungen" eine Gruppe bildet. Diese Forderung umgrenzt den Bereich der „Nichtpunktgeometrien". Zu diesen Geometrien gehören z. B. die „Liniengeometrie" (d. h. die Geometrie der Geraden) und die „Kreisgeometrie". Sie bilden wichtige und gut erforschte Disziplinen der Geometrie. Es ist klar, daß jede derartige „Geometrie" durch die Angabe einer Gruppe von Nichtpunkttransformationen bestimmt wird. Diese Transformationen spielen dann in dieser „Geometrie" die Rolle der „Bewegungen".

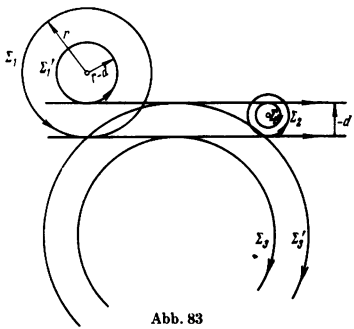


Abb. 83

Die grundlegenden Gebiete der Kreisgeometrie sind heutzutage die „Punktgeometrie der Kreise", die auf der Gruppe der Punkttransformationen der Kreise basiert, die „Kreisachsengeometrie", der die Gruppe der Kreisachsentransformationen zugrunde liegt, und die „Berührungsgeometrie der Kreise", die durch die Kreisberührungstransformationen festgelegt wird.[1]) Hierbei führt unser neuer (umfassender) Standpunkt von der Geometrie notwendig zu einer Präzisierung der im vorangegangenen Paragraphen dargelegten KLEINschen Konzeption. Jetzt muß man nämlich annehmen, daß sich verschiedene „Geometrien" nicht nur in ihren Transformationsgruppen, den Bewegungsgruppen, unterscheiden, sondern auch in der Wahl der der Geometrie zugrunde liegenden Elemente. So kann die Gruppe der affinen Transformationen den Ausgangspunkt für die „affine Punktgeometrie" und für die „affine Liniengeometrie" bilden, andererseits kann die Gruppe der Kreisverwandtschaften sowohl der „anallagmatischen Punktgeometrie" als auch der „anallagmatischen Kreisgeometrie" zugrunde liegen usw.

§ 9. Das Übertragungsprinzip

9.1. Einführung. Wir kehren nun zur KLEINschen Definition der gewöhnlichen (euklidischen) Geometrie zurück. Diese Definition behauptet, daß die Bewegungen (bzw. die Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen) den

[1]) Diesen drei Geometrien entsprechen die drei Teile des Artikels „Geometrie der Kreise" in diesem Band der EdEM.

Inhalt von Theoremen der euklidischen Geometrie ungeändert lassen, d. h., die Bewegungen führen jeden geometrischen Sachverhalt in einen vollkommen gleichartigen über, so daß man also aus dem letzten nur dieselbe Schlußfolgerung ziehen kann wie aus dem ursprünglichen.

Das hängt damit zusammen, daß unsere Transformationen alle Begriffe und Größen, die einen geometrischen Sinn haben, ungeändert lassen. So werden parallele Geraden in parallele Geraden, zueinander senkrechte Geraden in ebensolche übergeführt, außerdem werden die Längenverhältnisse, die Winkelgrößen, die Flächenverhältnisse zweier Figuren usw. festgelassen. Eine Transformation π dagegen, die keine Ähnlichkeitstransformation ist, besitzt diese Eigenschaften nicht mehr, d. h., sie verändert den Inhalt geometrischer Begriffe. Aus einem gegebenen geometrischen Theorem wird durch Anwendung von π eine vollkommen neue Behauptung.

Diese Tatsache ist früher häufig so formuliert worden, daß man sagte, jeder von einer Ähnlichkeitstransformation verschiedenen Transformation entspreche ein gewisses Übertragungsprinzip, welches es gestattet, geometrische Theoreme in neue umzuwandeln. Wir wollen auch hier den bequemen und aussagekräftigen Terminus „Übertragungsprinzip" beibehalten. Dieser Terminus hat folgenden Sinn: Bei einer Transformation π, die keine Ähnlichkeitstransformation ist, bleiben nicht alle geometrischen Begriffe invariant, d. h., die Transformation führt geometrische Figuren in neue über, die vom Standpunkt der euklidischen Geometrie von den ursprünglichen im allgemeinen wesentlich verschieden sind, wobei wir aber angeben können, wie die geometrischen Objekte bei der Transformation π abgeändert werden. Wir können also eine Art „Wörterbuch" der betrachteten Transformation aufstellen, das alle „Übersetzungen" der geometrischen Begriffe in die neue „Sprache" enthält. Das kann z. B. so geschehen, daß in einer Tabelle die geometrischen Objekte angegeben werden, in welche gegebene Objekte durch die Transformation π übergeführt werden. Gemäß einem solchen „Wörterbuch" können dann alle geometrischen Theoreme abgewandelt werden („sie können in die neue Sprache übersetzt werden"). Tatsächlich können wir aus einem beliebigen Satz, der in Begriffen der gewöhnlichen euklidischen Geometrie formuliert ist, einen neuen Satz erhalten, wenn wir alle geometrischen Begriffe des Ausgangstheorems durch deren Bilder ersetzen, in welche sie durch die Abbildung π übergeführt werden. Um das zuletzt Gesagte genauer zu erläutern, illustrieren wir es durch eine Reihe hinreichend verschiedenartiger Beispiele. Dadurch zeigen wir zugleich, zu welch einer reichen Quelle von neuen geometrischen Fakten und Theoremen die geometrischen Transformationen führen.

9.2. Das Übertragungsprinzip der Kontraktionen in bezug auf eine Gerade. Die einfachste der uns bekannten geometrischen Transformationen, die keine Ähnlichkeitstransformation ist, ist die *Kontraktion in bezug auf eine Gerade* (§ 1, S. 50). Es sei Σ eine solche. Die Transformation Σ führt jeden Punkt in einen Punkt und jede Gerade in eine Gerade über. Jedoch wird ein Kreis Ω durch sie nicht in einen Kreis, sondern in eine Ellipse E übergeführt, deren

eine Achse zur Kontraktionsachse o parallel und deren andere Achse dazu senkrecht ist. Das Achsenverhältnis der Ellipse ist gleich dem Kontraktionskoeffizienten k (Abb. 84).[1]) Alle diese Ellipsen sind homothetisch zu einer festen Ellipse E_0 mit den Halbachsen 1 und k, die einem bestimmten Einheitskreis Ω_0 (einem Kreis mit dem Radius 1) entspricht, oder zu einer Ellipse, die aus E_0 durch eine Parallelverschiebung erhalten werden kann. Aus der Tatsache, daß die Kontraktion Σ das Streckenverhältnis auf jeder Geraden erhält (vgl. S. 56), folgt, daß eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge d bei dieser Transformation in eine Strecke $\overline{A'B'}$ der Länge $d \cdot |O'K'|$ übergeht, wobei $\overline{O'K'}$ der zu $\overline{A'B'}$ parallele Halbmesser der Ellipse E_0 ist. Parallele Geraden werden durch die Transformation Σ in parallele Geraden übergeführt (vgl. S. 56), zueinander senkrechte Geraden gehen bei der Transformation Σ in bezüglich der Ellipse E konjugierte Geraden l und m über, d. h. in Geraden, so daß der zu l parallele Durchmesser der Ellipse E jede zur Geraden m parallele Sehne der Ellipse halbiert (Abb. 85); das folgt daraus, daß jeder Durchmesser des Kreises Ω alle dazu senkrechten Sehnen des Kreises Ω halbiert.

Damit entspricht der Transformation Σ das folgende „Wörterbuch":

Ausgangsbegriffe	Transformierte Begriffe
Punkt	Punkt
Gerade	Gerade
Kreis Ω	Ellipse E
Einheitskreis Ω_0	„Einheitsellipse" E_0
Parallele Geraden	Parallele Geraden
Senkrechte Geraden	Bezüglich der Ellipse E konjugierte Geraden
Länge $\|AB\|$ einer Strecke	Verhältnis $\frac{\|AB\|}{\|OK\|}$, wobei $\overline{OK}$ der zu $\overline{AB}$ parallele Halbmesser der Ellipse E_0 ist
Mittelpunkt einer Strecke	Mittelpunkt einer Strecke

Dieses Wörterbuch kann man selbstverständlich beliebig verlängern. Aus einem Theorem der euklidischen Geometrie können wir nun ein neues Theorem dadurch erhalten, daß wir alle im Ausgangstheorem vorkommenden Begriffe mit Hilfe des angegebenen „Wörterbuchs" übersetzen. Diese Behauptung bildet den Inhalt des „Übertragungsprinzips", welches der Kontraktion Σ in bezug auf eine Gerade entspricht.

Zum Beispiel ergibt sich damit aus dem Theorem, daß die Seitenhalbierende der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks zugleich eine Höhe ist, das folgende Theorem: *Sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ eines Dreiecks ABC proportional zu den ihnen parallelen Halbmessern einer Ellipse E, so ist die Seitenhalbierende $\overline{AD}$ des Dreiecks ABC in bezug auf die Ellipse E zur Grundlinie $\overline{BC}$ konjugiert* (Abb. 86).

---

[1]) Vgl. den Artikel „Kegelschnitte" in diesem Band der EdEM.

Aus dem Theorem über die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis ergibt sich folgendes Theorem: *Zieht man von einem festen Punkt M aus eine Sekante MAB zu einer*

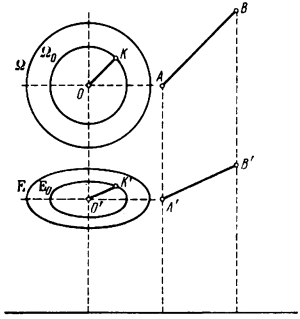


Abb. 84

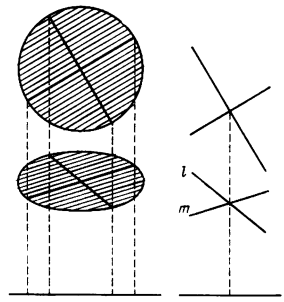


Abb. 85

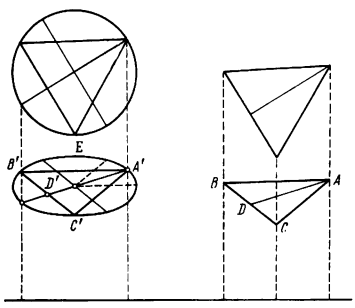


Abb. 86

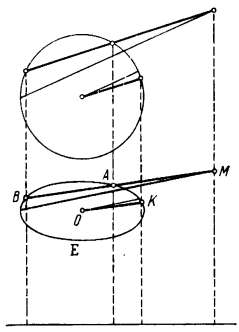


Abb. 87

Ellipse E (hierbei sind also A und B die beiden Punkte auf der Ellipse E), *so ist das Produkt* $|MA| \cdot |MB|$ *proportional dem Quadrat der Länge* $|OK|^2$ *des zu MAB parallelen Halbmessers der Ellipse E*, d. h., das Verhältnis $\dfrac{|MA| \cdot |MB|}{|OK|^2}$ ist bei allen Sekanten von M aus dasselbe (Abb. 87).

Ferner ergibt sich aus der Definition und den Eigenschaften der Inversion (S. 51 und 69), daß *die Transformation I, die einem Punkt A der Ebene denjenigen Punkt A' des Strahles* $\overrightarrow{OA}$ *zuordnet, für den* $|OA| \cdot |OA'| = |OK|^2$ *ist,* wobei K der Schnittpunkt der Geraden OAA' mit einer festen Ellipse E mit dem Mittelpunkt O bedeutet, *jede nicht durch O gehende Gerade in eine Ellipse überführt, die zu einer aus E durch eine Parallelverschiebung hervorgehenden Ellipse homothetisch ist* (Abb. 88).

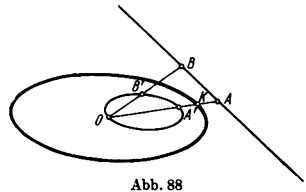


Abb. 88

9.3. Das Übertragungsprinzip der Inversion. Als zweites Beispiel betrachten wir eine Inversion I (§ 1, S. 51). Diese Transformation führt zunächst Punkte in Punkte über. Die Geraden, die durch das Inversionszentrum O gehen, werden in Geraden transformiert, während eine Gerade l, die nicht durch das Zentrum O geht, durch die Inversion I in einen durch O verlaufenden Kreis Ω_0 übergeführt wird und dann auch umgekehrt Ω_0 in l übergeht. Ein Kreis Ω, der nicht durch O geht, wird durch die Transformation I auf einen Kreis Ω' abgebildet, der ebenfalls nicht durch O verläuft (wobei unter Umständen

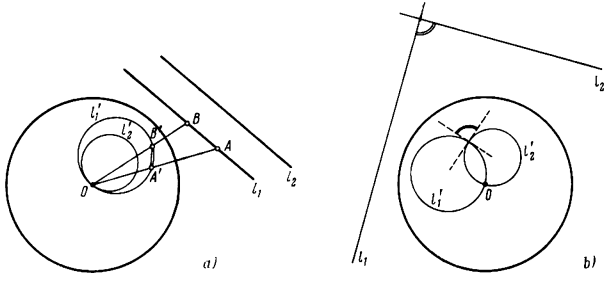


Abb. 89

$\Omega = \Omega'$ sein kann). Parallele Geraden gehen bei der Transformation I in zwei Kreise (oder eine Gerade und einen Kreis) über, die sich im Punkt O berühren, d. h., die außer O keinen weiteren Punkt gemeinsam haben (Abb. 89a). Zueinander senkrechte Geraden werden durch I in zwei zueinander senkrechte Kreise oder zwei zueinander senkrechte Geraden oder eine Gerade und einen dazu senkrechten Kreis übergeführt; allgemein läßt I die Größe beliebiger

Winkel invariant (Abb. 89b).[1]) Schließlich gehen Punkte A und B, deren Abstand gleich d ist, bei der Inversion vom Grad k mit dem Zentrum O in solche Punkte A' und B' über, für die $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|OB|}$, d. h. $|A'B'| = d \cdot \frac{|OA'|}{|OB|}$ gilt (das folgt aus der Ähnlichkeit der in Abb. 89a dargestellten Dreiecke OAB und $OB'A'$ mit dem gemeinsamen Winkel bei O und proportionalen Seiten: $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$, also $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$). Weil nun $|OA'| = \frac{k}{|OA|}$ ist, erhalten wir aus der letzten Formel $|A'B'| = d \cdot \frac{k}{|OA| \cdot |OB|}$, d. h., der Abstand zwischen den Bildpunkten A' und B' ist proportional der Größe $\frac{|AB|}{|OA| \cdot |OB|}$.

Jetzt können wir das der Inversion I entsprechende „Wörterbuch" zusammenstellen:

Ausgangsbegriffe	Transformierte Begriffe
Punkt	Punkt
Durch O verlaufende Gerade	Durch O verlaufende Gerade
Nicht durch O verlaufende Gerade	Durch O verlaufender Kreis
Durch O verlaufender Kreis	Nicht durch O verlaufende Gerade
Nicht durch O verlaufender Kreis	Nicht durch O verlaufender Kreis
Parallele Geraden	Sich im Punkt O berührende Kreise (oder ein Kreis und eine Gerade, die sich im Punkt O berühren)
Senkrechte Geraden	Senkrechte Kreise (oder ein Kreis und eine dazu senkrechte Gerade, oder zwei senkrechte Geraden)
Winkel zwischen zwei Geraden	Winkel zwischen zwei Kreisen oder einem Kreis und einer Geraden oder zwei Geraden
Abstand $\|AB\|$ zwischen zwei Punkten A und B	Größe $\frac{\|AB\|}{\|OA\| \cdot \|OB\|}$
Kreise (oder Kreis und Gerade), die sich berühren	Kreise (oder Kreis und Gerade), die sich berühren, oder parallele Geraden

usw. Mit diesem „Wörterbuch" kann man aus bekannten Theoremen der euklidischen Geometrie vollkommen neue, teilweise überaus interessante Aussagen erhalten.

---

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrie der Kreise", S. 483. (Unter dem Schnittwinkel zweier Kreise im Schnittpunkt versteht man den Winkel zwischen den beiden Kreistangenten im Schnittpunkt; analog ist unter dem Schnittwinkel einer Geraden und eines Kreises in ihrem Schnittpunkt der Winkel dieser Geraden mit der Kreistangente im Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis zu verstehen.)

Wir betrachten folgende Beispiele: Aus dem bekannten Theorem, daß die Winkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt, ergibt sich, daß auch *ein „Dreieck", welches von drei sich in einem Punkt O schneidenden Kreisen gebildet wird, eine Winkelsumme von* 180° *hat* (Abb. 90a).

Daraus, daß die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks gleich sind, erhält man folgendes: *Gegeben seien drei Kreise, die durch einen Punkt O verlaufen und sich außer-*

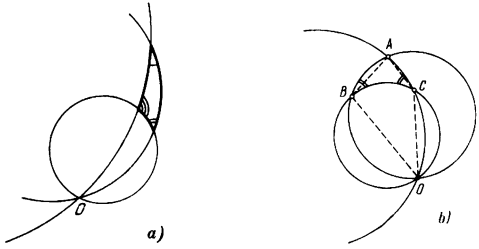


Abb. 90

dem in Punkten A, B, C schneiden; sind dabei die Längen der Kreissehnen $\overline{AB}$ *und* $\overline{AC}$ *den Längen der Sehnen* $\overline{OB}$ *und* $\overline{OC}$ *proportional* (d. h. sind die Größen $\frac{|AB|}{|OA| \cdot |OB|}$ und $\frac{|AC|}{|OA| \cdot |OC|}$ gleich), *so schließen die Kreise OAB und OAC mit dem Kreis OBC denselben Winkel ein* (Abb. 90b; umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Winkel, daß $\frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|OC|}$ gilt).

Aus dem Satz, daß die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten nicht kleiner als die Länge der dritten Seite ist, kann man folgende Aussage ableiten: *Für vier beliebige Punkte A, B, C, D der Ebene* (*D* soll dabei die Rolle des Inversionszentrums spielen) *gilt*

$$\frac{|AB|}{|DA| \cdot |DB|} + \frac{|BC|}{|DB| \cdot |DC|} \geqq \frac{|AC|}{|DA| \cdot |DC|}$$

oder

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geqq |AC| \cdot |BD|.$$

Hierbei gilt in der letzten Beziehung genau dann das Gleichheitszeichen, wenn die Punkte *A*, *B* und *C* auf einem Kreis (oder einer Geraden) liegen, der durch den Punkt *D* verläuft (Abb. 91a; dieser Fall entspricht dem, daß die drei Ausgangspunkte auf einer Geraden liegen). Demnach erhält man: *Die Summe der Produkte der Gegenseiten eines einem Kreis einbeschriebenen Vierecks ABCD ist gleich dem Produkt seiner Diagonalen.* Dieses wichtige Theorem der Elementargeometrie bezeichnet man als *Satz von* Ptolemaios.

Analog hierzu können wir aus dem Satz von Pythagoras folgendes erschließen: *Liegen die Punkte A, B, C und D der Ebene so, daß die Kreise DAB und DBC zueinander senkrecht sind, so gilt*

$$\left(\frac{|AB|}{|DA| \cdot |DB|}\right)^2 + \left(\frac{|BC|}{|DB| \cdot |DC|}\right)^2 = \left(\frac{|AC|}{|DA| \cdot |DC|}\right)^2$$

oder

$$|AB|^2 \cdot |CD|^2 + |BC|^2 \cdot |AD|^2 = |AC|^2 \cdot |BD|^2.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Bedingung der Orthogonalität der Kreise DAB und DBC' gleichbedeutend damit ist, daß die Summe der Winkel bei B und D (oder der bei A und C) des Vierecks $ABCD$ 90° beträgt. In der Tat geht aus Abb. 91b hervor, daß $\sphericalangle ABD = \sphericalangle UDA$, $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CDV$ und daß die Summe

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D = \sphericalangle UDA + \sphericalangle ADC + \sphericalangle CDV$$

gleich dem Winkel UDV zwischen den Kreisen DAB und DCB ist.

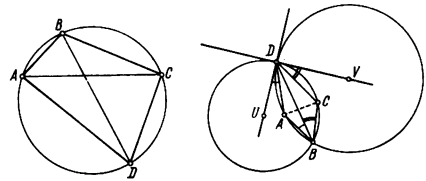


Abb. 91

Damit kann man die letzte Aussage folgendermaßen formulieren: *Wenn die Summe zweier Gegenwinkel eines Vierecks $ABCD$ 90° beträgt, ist die Summe der Quadrate der Produkte der Gegenseiten gleich dem Quadrat des Produktes der Diagonalen* (vgl. hierzu das Theorem von Ptolemaios, welches man wie folgt formulieren kann: *Wenn die Summe der Gegenwinkel eines Vierecks 180° beträgt, ist die Summe der Produkte der Gegenseiten des Vierecks gleich dem Produkt der Diagonalen*).

Es ist klar, daß man die Aufzählung von Beispielen für Theoreme, die aus Theoremen der euklidischen Geometrie mittels des den Inversionen I entsprechenden „Übertragungsprinzips" abgeleitet werden können, beliebig fortsetzen könnte.

Auch die Anfertigung eines „Wörterbuchs" für die hyperbolische Inversion (§ 1, S. 53) bereitet keine Schwierigkeiten. Insbesondere sind hierbei die Geraden durch Hyperbeln zu ersetzen (vgl. S. 69). Die Anwendung des Übertragungsprinzips, das auf diesem „Wörterbuch" beruht, führt zu einer Reihe von interessanten Theoremen über Hyperbeln.

9.4. Das Übertragungsprinzip der Polarität. Auch jeder allgemeinen geometrischen Transformation, wie z. B. der Polarität Π, kommt ein bestimmtes „Übertragungsprinzip" zu.

Die Abbildung Π führt zunächst Geraden in Punkte und Punkte in Geraden über. Dabei gehen parallele Geraden in Punkte über, die auf einer Geraden durch das Zentrum O der Abbildung liegen, und umgekehrt gehen Punkte, die auf einer durch O verlaufenden Geraden liegen, in parallele Geraden über (Abb. 92). Geraden a und b, welche miteinander den Winkel α einschließen, werden durch die Abbildung Π in Punkte A und B abgebildet, für die $\sphericalangle OAB = \alpha$ ist (denn es ist $OA \perp a$ und $OB \perp b$, so daß die in Abb. 92 markierten

Winkel paarweise senkrechte Schenkel haben). Ferner werden Punkte A und B, die voneinander den Abstand d haben, in Geraden a und b übergeführt, für die $|A'B'| = \dfrac{d}{|OA| \cdot |OB|} = d \cdot |OA'| \cdot |OB'|$ gilt, wenn A' und B' die Projektionen des Punktes O auf die Geraden a und b sind (vgl. Abb. 92; das folgt daraus, daß die Punkte A' und B' aus den Punkten A und B durch die Inversion am Einheitskreis mit dem Zentrum O hervorgehen). Ein Punkt A und eine Gerade b (Abb. 93), die so gelegen sind, daß der Abstand $|AP|$ von A zu b

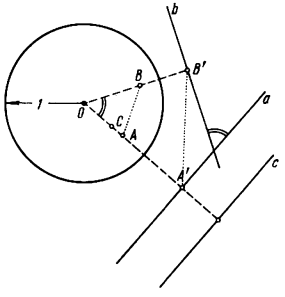


Abb. 92

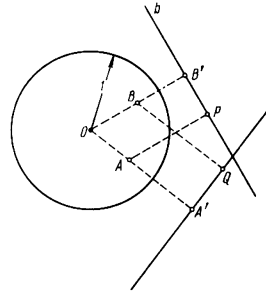


Abb. 93

gleich d ist, werden durch die polare Abbildung Π in eine Gerade a und einen Punkt B übergeführt, für die der Abstand $|BQ|$ von B zu a gleich $d \cdot \dfrac{|OB|}{|OA|} = d \cdot |OB| \cdot |OA'|$ ist. Der Beweis hierfür ergibt sich aus der Ähnlichkeit der in Abb. 93 abgebildeten rechtwinkligen Trapeze $OAPB'$ und $OBQA'$; denn diese Trapeze haben den Winkel bei O gemeinsam, und die diesen Winkel einschließenden Seiten der Trapeze sind wegen $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$ einander proportional; aus der Ähnlichkeit der Trapeze folgt jedoch $\dfrac{|OA|}{|AP|} = \dfrac{|OB|}{|BQ|}$.

Wir wollen nun noch erklären, worin ein Kreis S bei der Polarität Π übergeht. Zunächst ist klar, daß der Kreis S, dessen Mittelpunkt mit O zusammenfällt und dessen Radius gleich r ist, in den Kreis S' abgebildet wird, der ebenfalls O zum Mittelpunkt hat und dessen Radius r' zu r reziprok ist, d. h., für den $r' = \dfrac{1}{r}$ gilt. Hierbei ist natürlich der zweite Kreis als „Einhüllende" einer Gesamtheit von Geraden (den Kreistangenten) anzusehen, sofern der erste Kreis als Punktgesamtheit verstanden wird und umgekehrt (Abb. 94). Es sei jetzt S ein Kreis, dessen Kreismittelpunkt D vom Punkt O verschieden ist und dessen Radius wir wie vorher mit r bezeichnen. Den Kreis S wollen wir

dabei als Gesamtheit aller Geraden a auffassen, die vom Punkt D den Abstand r besitzen. Ist nun d das Bild des Punktes D bei der Polarität Π, so geht eine gegebene Gerade a in denjenigen Punkt A über, dessen Abstand $|AP|$ von der Geraden d gleich $r \cdot \frac{|OA|}{|OD|}$ ist. Damit geht also der Kreis S in die Menge aller Punkte A über, die durch

$$\frac{|AO|}{|AP|} = \frac{|OD|}{r} \text{ (const)}$$

beschrieben wird, d. h., *es handelt sich um die Menge aller Punkte, deren Abstandsverhältnis von einem gegebenen Punkt O und einer gegebenen Geraden d gleich einer konstanten Größe* $\frac{|OD|}{r} = \varepsilon$ *ist.* Man kann zeigen[1]), daß diese Menge ein *Kegelschnitt* S' (eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel) mit dem Brennpunkt O und der Leitlinie d ist; die Größe ε bezeichnet man als *Exzentrizität* der Kurve S'. Hierbei wird S' eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem, ob der Abstand $|OD|$ kleiner als r, gleich r oder größer als r ist, und das tritt genau dann ein, wenn das Zentrum O der Abbildung Π im Innern von S oder auf S oder außerhalb von S liegt (Abb. 95a bis c). Andererseits geht jeder Punkt des Kreises S (d. h. jeder Punkt, der auf genau einer der betrachteten Geraden a liegt) bei der Transformation Π in eine Tangente an den Kegelschnitt S' über (d. h. in eine Gerade, auf der genau einer der erhaltenen Punkte A liegt).

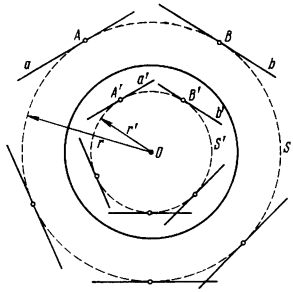


Abb. 94

Damit gelangen wir zu folgendem „Wörterbuch“:

Ausgangsbegriffe	Transformierte Begriffe
Punkt A	Gerade a
Gerade a	Punkt A
Punkt A, der auf der Geraden b liegt	Gerade a, die durch den Punkt B geht
Abstand $\|OA\|$ des Punktes A vom Zentrum O	Größe $\frac{1}{\|OA'\|}$, die reziprok zum Abstand $\|OA'\|$ des Zentrums O von der Geraden a ist
Parallele Geraden	Punkte, die auf einer Geraden durch O liegen
Winkel zwischen den Geraden a und b	Winkel AOB

[1]) Vgl. den Artikel „Kegelschnitte“ in diesem Band der EdEM.

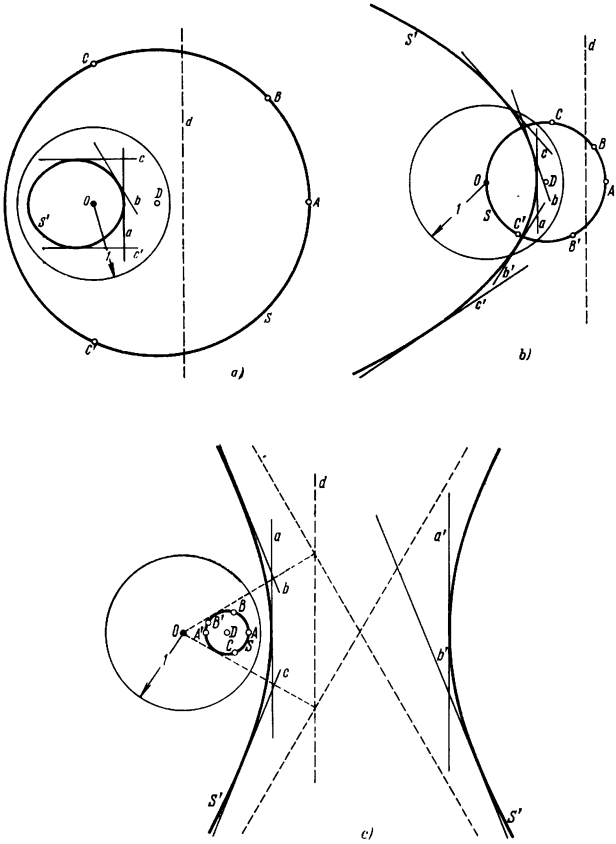


Abb. 95

Abstand $\|AB\|$ zwischen den Punkten A und B	Größe $\frac{\|A'B'\|}{\|OA'\| \cdot \|OB'\|}$, wobei A' und B' die Projektionen des Punktes O auf die Geraden a und b sind
Abstand $\|AP\|$ des Punktes A von der Geraden b	Größe $\frac{\|BQ\|}{\|OB\| \cdot \|OA'\|}$, wobei Q und A' die Projektionen der Punkte B und A auf die Gerade a sind
Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r	Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $\frac{1}{r}$
Kreis mit einem von O verschiedenen Mittelpunkt D und dem Radius r	Kegelschnitt mit dem Brennpunkt O der Leitlinie d und der Exzentrizität $\frac{\|OD\|}{r}$
Kreise, die sich berühren	Kegelschnitte, die sich berühren

usw.

Wir geben ein Beispiel einer Anwendung des einer Polarität entsprechenden „Übertragungsprinzips". Dazu gehen wir von dem Theorem aus, daß sich die Höhen eines Dreiecks in einem Punkt H schneiden. Es ist leicht einzusehen, daß z. B. die Höhe A_1D_1 des Ausgangsdreiecks $A_1B_1C_1$ durch die polare Abbildung Π in einen Punkt M der Seite BC des Bilddreiecks übergeführt wird, für den der Winkel MOA ein rechter ist. Daher geht aus dem Theorem vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks folgendes Theorem hervor: *Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Errichtet man in einem beliebigen Punkt O der Ebene die Senkrechten auf den Geraden OA, OB und OC, so liegen die Schnittpunkte M, N und P dieser Senkrechten mit den entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC auf einer Geraden h* (Abb. 96).

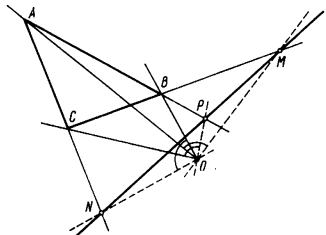
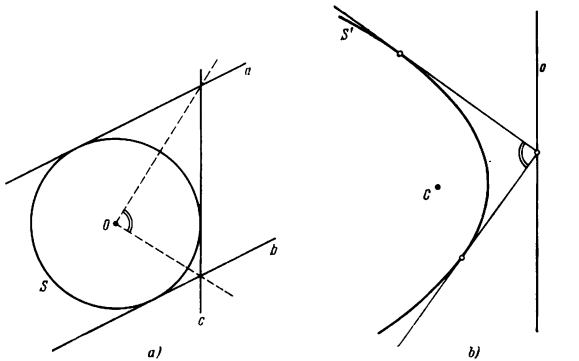


Abb. 96

Auf das erhaltene Theorem kann man noch einmal eine Polarität (mit einem neuen Zentrum Q) anwenden und erhält dann eine noch kompliziertere Aussage, die man ihrerseits wiederum mit Hilfe unseres „Übertragungsprinzips" transformieren kann, usw. Auf diese Weise kann man mit Hilfe unseres Verfahrens aus einem einzigen Theorem beliebig viele neue Theoreme erhalten.

Wir bringen noch einige Beispiele für Anwendungen unseres „Übertragungsprinzips" auf Sätze über den Kreis. Wir beginnen mit dem Satz, daß *jeder in einen Kreis S über einem Durchmesser $\overline{AB}$ einbeschriebene Winkel ABC ein rechter Winkel ist.* Fällt das Zentrum O

der betrachteten Polarität Π mit dem Mittelpunkt des Kreises S zusammen, so führt das „Übertragungsprinzip" diesen Satz in das folgende Theorem über: *Wenn von drei Tangenten a, b, c an einen Kreis S die Tangente a parallel zur Tangente b ist (das entspricht dem*



Fall, daß die Gerade AB durch O verläuft), erscheint die von a und b auf c ausgeschnittene Strecke von O aus unter einem rechten Winkel (Abb. 97a).

Wählt man dagegen den Scheitel C des rechten Winkels als Zentrum der Polarität Π, so geht der Kreis S in eine Parabel über, deren Brennpunkt C und deren Leitlinie o die dem Kreismittelpunkt O durch Π zugeordnete Gerade ist. Da nun die Endpunkte A, B eines beliebigen Durchmessers AOB des Ausgangskreises in zwei Parabeltangenten a, b transformiert werden, die sich in einem Punkt der Leitlinie o schneiden, und sich die Orthogonalität der Geraden AC und BC in der Orthogonalität von a und b widerspiegelt, erhalten wir damit folgendes Theorem: *Die beiden Tangenten von einem Punkt der Leitlinie o einer Parabel S' an die Parabel S' schneiden sich unter einem rechten Winkel* (Abb. 97b; beachtet man, daß in einem Kreis auch nur die Umfangswinkel über einem Durchmesser rechte Winkel sind, so kann man dieses Theorem auf folgende Weise verschärfen: *Der geometrische Ort der Scheitel aller einer Parabel umbeschriebenen rechten Winkel ist die Leitlinie der Parabel*).

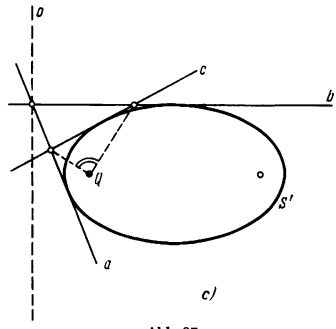


Abb. 97

Wählen wir schließlich als Zentrum der Abbildung Π einen beliebigen Punkt Q der Ebene, so gelangen wir zu nachstehendem Theorem: *Zwei Tangenten a und b eines beliebigen Kegelschnitts S', die sich auf der Leitlinie o des Kegelschnitts schneiden* (dies entspricht dem, daß die Gerade AB durch O verläuft), *schneiden auf einer beliebigen anderen Tangente des Kegelschnitts eine Strecke aus, die vom Brennpunkt aus unter einem rechten Winkel erscheint* (Abb. 97c).[1])

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Theorem, daß *eine Tangente t an einen Kreis S in ihrem Berührungspunkt A auf dem Radius OA senkrecht steht.* Aus ihm folgt: *Auf einer beliebigen Tangente a an einen Kegelschnitt S_1 erscheint die Tangentenstrecke zwischen der Leitlinie o und dem Berührungspunkt T der Geraden a mit S_1 vom Brennpunkt Q aus unter einem rechten Winkel* (Abb. 98).

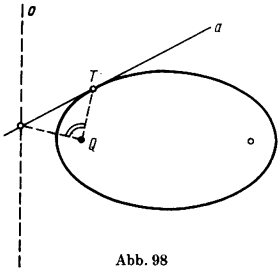


Abb. 98

Interessante Folgerungen kann man auch aus dem bekannten Theorem über die Simson*sche Gerade* erhalten. Dieses Theorem besagt, daß *die Fußpunkte der von einem beliebigen Punkt P des Kreises S auf die Seiten eines dem Kreis S einbeschriebenen Dreiecks ABC gefällten Lote auf einer Geraden liegen.*[2]) Wählen wir als Zentrum O einer Polarität den Kreismittelpunkt O, so geht der Kreis S in einen anderen Kreis S_1 mit demselben Mittelpunkt O über (Abb. 99a). Dem in S einbeschriebenen Dreieck ABC entspricht dabei ein S_1 umbeschriebenes Dreieck $A_1B_1C_1$, und dem Punkt P des Kreises S entspricht eine Tangente p an den Kreis S_1. Der Fußpunkt K des Lotes von P auf die Seite AB geht in die Gerade C_1D über, wobei D derjenige Punkt der Tangente p ist, für den $\sphericalangle C_1OD = 90°$ ist, d. h., es handelt sich bei D um den Schnittpunkt von p mit der Geraden γ', die zur Winkelhalbierenden γ des Außenwinkels bei C_1 parallel ist (denn OC_1 ist die Winkelhalbierende des Innenwinkels). Insgesamt erhalten wir folgendes Theorem: *Es sei S_1 der einem Dreieck $A_1B_1C_1$ einbeschriebene Kreis und p eine beliebige Tangente an S_1. Dann schneiden sich die Geraden, welche die Eckpunkte des Dreiecks mit den Schnittpunkten von p mit den durch O verlaufenden Parallelen zu den Winkelhalbierenden der Außenwinkel des Dreiecks verbinden, in einem gemeinsamen Punkt* (Abb. 99a).

Wählt man als Zentrum der Polarität den Punkt P, so wird aus dem Kreis S eine Parabel S_1 mit dem Brennpunkt P. Das dem Kreis S einbeschriebene Dreieck ABC geht in ein der Parabel S_1 „umbeschriebenes" Dreieck $A_1B_1C_1$ über, d. h. in ein Dreieck, dessen Seiten Tangenten der Parabel sind. Die Fußpunkte der von P auf die Seiten BC, AC und AB gefällten Lote werden in Senkrechten zu den Geraden PA_1, PB_1 und PC_1 übergeführt, die durch die Ecken des Dreiecks gehen (wir bemerken, daß der Punkt P in die „uneigentliche" Gerade übergeht). Damit können wir behaupten, daß *die drei Geraden, die durch die Ecken eines einer Parabel umbeschriebenen Dreiecks $A_1B_1C_1$ gehen und jeweils auf der Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken A_1, B_1, C_1 mit dem Brennpunkt P der Parabel senkrecht stehen, sich in einem Punkt R schneiden* (Abb. 99b; hieraus folgt insbesondere,

[1]) Falls Q der Mittelpunkt des Kreises ist, entartet die Leitlinie in die „unendlich ferne" Gerade (der projektiven Ebene), und wir erhalten den in Abb. 97a dargestellten Sachverhalt. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Vgl. z. B. Aufgabe 72 im 1. Teil des am Schluß dieses Artikels zitierten Buches von Hadamard.

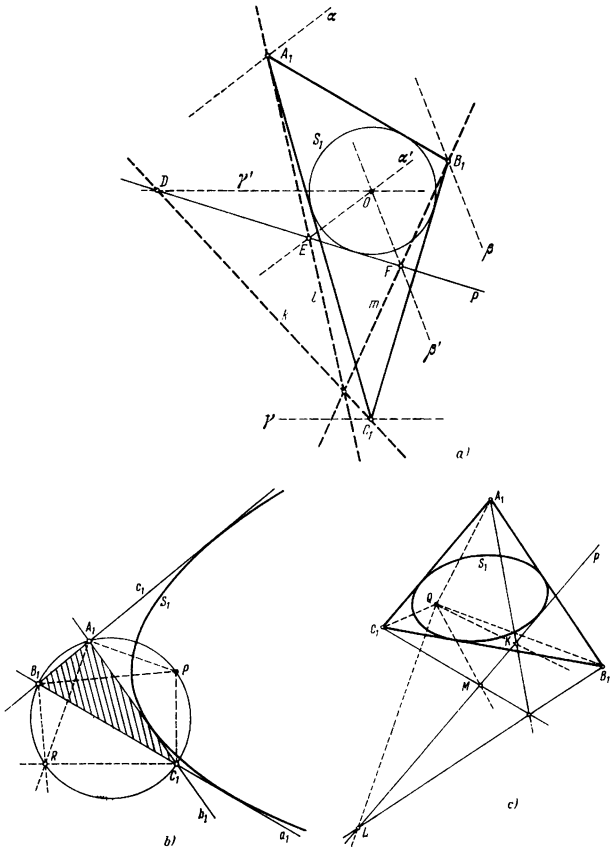

α
A1
S1
α'
B1
D
γ'
O
E
F
β
p
l
m
k
β'
γ
C1
a)
c1
S1
A1
B1
P
Q
C1
b1
a1
b)
A1
p
S1
Q
C1
K
M
B1
L
c)

Abb. 99

daß der Kreis mit dem Durchmesser PR durch die Punkte A_1, B_1 und C_1 geht, d. h., *der dem Dreieck $A_1B_1C_1$ umbeschriebene Kreis geht durch den Brennpunkt der Parabel*).

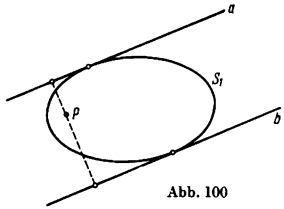


Abb. 100

Nehmen wir schließlich als Zentrum der Polarität einen beliebigen Punkt Q, so erhalten wir das folgende Theorem: *Es sei $A_1B_1C_1$ ein beliebiges Dreieck, das einem Kegelschnitt S_1 umbeschrieben ist* (d. h., die Seiten des Dreiecks seien Tangenten an den Kegelschnitt S_1). *Außerdem seien QK, QL, QM durch den Brennpunkt Q von S_1 verlaufende Geraden, die senkrecht zu den Geraden QA_1, QB_1 und QC_1 sind und die eine beliebige Tangente p an S_1 in den Punkten K, L und M schneiden. Dann gehen die Geraden A_1K, B_1L und C_1M durch einen Punkt* (Abb. 99c).

Wir betrachten schließlich noch das Theorem über die *Potenz eines Punktes P in bezug auf einen Kreis S*. Dieses Theorem besagt, daß für einen gegebenen Punkt P und einen gegebenen Kreis S bei einer beliebigen Geraden durch P, die den Kreis S in den Punkten A und B schneidet, das Produkt $|PA| \cdot |PB|$ konstant ist (d. h. nur von S und P, nicht

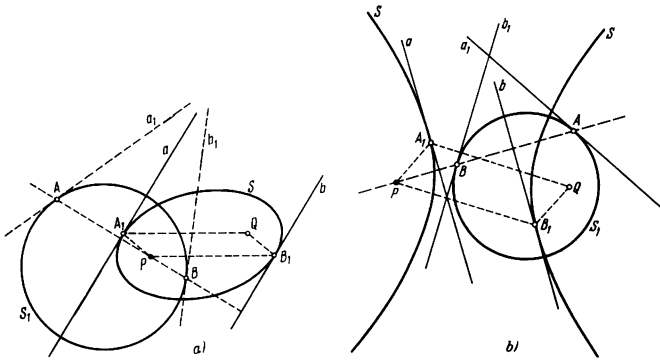


Abb. 101

aber von der jeweiligen Sekante PAB abhängt). Wählen wir den Punkt P als Zentrum einer Polarität, so erhalten wir aus diesem Theorem den folgenden Satz: *Das Produkt der Abstände des Brennpunktes P eines Kegelschnitts S_1 von zwei parallelen Tangenten a und b ist konstant*, d. h. hängt nur von S_1, nicht aber von der Wahl der Tangenten ab (Abb. 100) (die Parallelität der Tangenten a und b entspricht dem, daß die Gerade AB durch P verläuft).

Manchmal erlauben es auch umgekehrt die Eigenschaften der Kegelschnitte, neue Theoreme über Kreise zu beweisen. Als Beispiel mögen hier die sogenannten Brenn-

punkteigenschaften der Kegelschnitte dienen. *Danach ist die Summe (Differenz) der Abstände eines beliebigen Punktes A_1 einer Ellipse (Hyperbel) S von den beiden Brennpunkten P und Q konstant.*[1]) Infolge der Symmetrie der Kurve S ergibt sich hieraus, daß *die Summe (Differenz) der Abstände eines Brennpunktes P einer Ellipse (Hyperbel) von irgend zwei Punkten A_1 und B_1 der Kurve, in denen die Tangenten parallel verlaufen, konstant ist* (d. h. $|PA_1| \pm |PB_1| = |PA_1| \pm |QA_1| = \text{const}$; Abb. 101 a, b). Gehen wir nun mittels der Polarität mit dem Zentrum P vom Kegelschnitt S zu dem entsprechenden Kreis S_1 über, so erhalten wir folgenden Satz: *Durch einen inneren (oder äußeren) Punkt P eines Kreises S_1 seien alle möglichen Sekanten AB gezogen. Dann ist die Summe (Differenz) der reziproken Werte der Abstände von P zu den in den Punkten A und B angetragenen Kreistangenten a_1 und b_1 konstant.*

Der Leser kann mühelos noch viele weitere interessante Anwendungsbeispiele des einer Polarität Π entsprechenden „Übertragungsprinzips" finden. Eine inhaltsreiche Anwendung hat auch das den Fußpunkttransformationen Δ entsprechende „Übertragungsprinzip", dessen Studium wir jedoch dem Leser überlassen wollen.

9.5. Das Übertragungsprinzip und Modelle für geometrische Systeme. Das „Übertragungsprinzip" (genauer gesagt: ein beliebiges aus der Vielzahl der „Übertragungsprinzipien") gestattet es, jedem geometrischen Theorem ein anderes, vollkommen neues Theorem gegenüberzustellen. Diese neue Aussage kann unter Umständen einfacher als die ursprüngliche ausfallen. In diesem Fall können wir uns von der Richtigkeit der ursprünglichen Aussage zweckmäßigerweise durch einen Beweis der neuen Aussage überzeugen. Aber auch in dem Fall, daß sich die neue Aussage nicht einfacher als die ursprüngliche beweisen läßt, erleiden wir keinen Verlust, denn wir brauchen ja diesen neuen Satz nicht gesondert zu beweisen, sondern wir brauchen ihn nur zu formulieren und haben dann durch einen Beweis des Ausgangssatzes gewissermaßen „gratis" noch ein weiteres geometrisches Theorem erhalten. Jedoch hat das „Übertragungsprinzip" auch noch einen anderen Wert: Es wirft nämlich ein ergänzendes Licht auf das eigentliche Wesen der Geometrie (oder der verschiedenen „Geometrien", von denen, wie wir jetzt wissen, viele existieren). Das einem „Übertragungsprinzip" entsprechende „Wörterbuch" kann nämlich zur „Übersetzung" aller geometrischen Tatsachen und Theoreme „in eine neue Sprache" verwendet werden. Dabei kann sich die durch die „Übersetzung" erhaltene Aussage überaus stark vom Ausgangstheorem unterscheiden. Weil jedoch ihre Gültigkeit automatisch aus der Gültigkeit des Ausgangstheorems folgt, kann man die „übersetzte" Aussage im gewissen Sinne als nur eine andere Form desselben Satzes ansehen. Wenn wir also unser „Übertragungsprinzip" auf alle geometrischen Tatsachen und Theoreme anwenden, erhalten wir eine gewisse Variante der uns bekannten Geometrie, die sich von ihr zwar äußerlich unterscheidet, die aber in ihrer logischen Struktur vollkommen mit ihr übereinstimmt. Wir können beispielsweise in der gewöhnlichen euklidischen Geometrie alle Kreise, die durch einen festen Punkt O gehen, in „Geraden" umtaufen und als Abstand zwischen zwei Punkten A und B den Ausdruck

[1]) Vgl. den Artikel „Kegelschnitte" in diesem Band der EdEM.

$\frac{|AB|}{|OA| \cdot |OB|}$ nehmen (vgl. das „Wörterbuch" auf S. 138). Hierbei bleiben alle geometrischen Theoreme gültig, d. h., wir bekommen damit ein neues „Modell" der euklidischen Geometrie.[1]) So kann man wie früher bestätigen, daß etwa die Summe der Quadrate der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem Quadrat der Hypotenuse ist oder daß die Menge aller Punkte, die von zwei festen Punkten gleichen Abstand besitzen, eine Gerade bilden, und dies alles, obgleich alle in diesen Theoremen vorkommenden geometrischen Begriffe einen neuen Sinn haben, der von dem uns geläufigen Sinn verschieden ist. Weiterhin kann man auch die Geraden als „Punkte" und umgekehrt die Punkte als „Geraden" ansehen (vgl. das „Wörterbuch" auf S. 142, 144). Bei geeigneter Interpretation des Abstandsbegriffs bleiben alle bekannten geometrischen Theoreme gültig, d. h., wir erhalten ein weiteres Modell der euklidischen Geometrie. Damit wird die überaus wichtige Schlußfolgerung bestätigt, daß *für eine Geometrie die Bedeutung der ihr zugrunde liegenden Begriffe vollkommen unwesentlich ist, wichtig sind nur die Eigenschaften der Begriffe.*[2]) Gerade dadurch wird es möglich, neue Modelle für ein geometrisches System zu erhalten, indem man in geeigneter Weise die Bedeutung der grundlegenden Begriffe abwandelt. Ein anfängliches Modell und alle daraus hergeleiteten unterscheiden sich nur in ihrer Form. Hierbei muß man alle auseinander herleitbaren Modelle als vollkommen gleichberechtigt ansehen, denn wir haben keinerlei ernsthaften Grund, eines von ihnen den übrigen vorzuziehen, denn eigentlich veranlaßt uns nur die Gewohnheit, z. B. unter dem Wort „Gerade" etwa die Bahn eines Lichtstrahls und nicht irgendein anderes geometrisches Gebilde zu verstehen.[3]) Wir bemerken noch, daß sich selbstverständlich auch in allen von der euklidischen Geometrie verschiedenen „Geometrien" vielerlei „Übertragungsprinzipien" und mit ihrer Hilfe ganz unterschiedliche Modelle bilden lassen. Um zu derartigen „Übertragungsprinzipien" zu kommen, braucht man nur alle Begriffe der betrachteten „Geometrie" einer Transformation zu unterwerfen, die nicht zur Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$ der betrachteten „Geometrie" gehört. Beispiele hierfür können nach dem Gesagten leicht konstruiert werden; wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen.

---

[1]) Zum Modellbegriff vgl. den Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie". S. 15–20.

[2]) Vgl. S. 14ff.

[3]) Vom Standpunkt der Anwendungen der geometrischen Resultate auf Fragen des praktischen Lebens kann es sich sogar als vorteilhaft erweisen, als „Punkt" einen kleinen Kreis und als „Gerade" einen schmalen Streifen anzusehen. Das „Modell" der gewöhnlichen Geometrie, das man mit Hilfe einer Paralleltransformation (vgl. S. 118ff.) erhält, ist mit dem landläufigen „Modell" vollkommen gleichwertig.

Literatur

[1] KLEIN, F.. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. 1, Berlin 1921, S. 460ff.

[2] Яглом, И. М., Геометрические преобразования, т. I—II (JAGLOM, I. M., Geometrische Transformationen, Bd. I–II), Moskau 1955, 1956.

[3] Перепелкин, Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1—2 (PEREPELKIN, D. I., Lehrgang der Elementargeometrie, Bd. 1–2), Moskau-Leningrad 1948, 1949.

[4] HADAMARD, J., Leçons de géométrie élémentaire I, II, 7. Aufl., Paris 1937.

[5] ALEXANDROFF, P. S., Einführung in die Gruppentheorie, 9. Aufl., Berlin 1975 (Übersetzung aus dem Russischen).

[6] Мальцев, А. И., Группы и другие алгебраические системы, в книге „Математика, ее содержание, методы и значение", т. III (MALZEW, Gruppen und andere algebraische Systeme, aus „Mathematik, ihr Inhalt, ihre Methoden und ihre Bedeutung", Bd. III), Moskau 1956, S. 248–331.

[7] KLEIN, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil II (Geometrie), 2. Aufl., Leipzig 1914.

[8] KLEIN, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., Berlin 1926.

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

BÖHM, J., u. a., Geometrie II, 3. Aufl., Berlin 1980.

N. M. BESKIN, W. G. BOLTJANSKI, G. G. MASLOWA,
N. F. TSCHETWERUCHIN, I. M. JAGLOM

ALLGEMEINE PRINZIPIEN GEOMETRISCHER KONSTRUKTIONEN

§ 1. Einige Fragen der praktischen Verwendung geometrischer Konstruktionen

1.1. Einleitung. Bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene hat man mit Hilfe von Zeicheninstrumenten gewisse Operationen auszuführen. Die Lösung einer Konstruktionsaufgabe besteht darin, daß man aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Elementen (Punkten, Geraden, Kreisen usw.) mit Hilfe bestimmter Konstruktionsmittel (die entweder in der Aufgabenstellung vorgeschrieben sind oder noch vom Ausführenden gewählt werden können) diejenigen Elemente findet, die den in der Aufgabenstellung formulierten Forderungen genügen. Meistens verlangen diese Forderungen, daß zwischen den gesuchten Elementen untereinander und zwischen den gesuchten und den gegebenen Elementen gewisse Beziehungen erfüllt sein sollen.

Geometrische Konstruktionen werden in den verschiedensten Bereichen der Praxis verwendet. Daher halten wir es für notwendig, daß wir vor der mathematischen Behandlung der geometrischen Konstruktionen einigen grundsätzlichen Fragen, die mit der praktischen Anwendung geometrischer Konstruktionen verknüpft sind, unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Wir geben einige allgemeine Richtlinien für die Durchführung von Konstruktionen, einen Überblick über die wichtigsten Instrumente und einige ihrer Anwendungen bei der Lösung von sehr häufig auftretenden Konstruktionsaufgaben und erörtern Fragen der Genauigkeit bei geometrischen Konstruktionen.

1.2. Instrumente für die praktische Durchführung von geometrischen Konstruktionen. In fast allen Zweigen der Volkswirtschaft werden geometrische Konstruktionen der verschiedensten Art verwendet. Die Anfertigung von Konstruktionsunterlagen und graphischen Darstellungen, die Anwendung graphischer Berechnungsmethoden, das Anreißen von Werkstücken und vieles andere erfordern geometrische Konstruktionen. Bei der Einschätzung der Brauchbarkeit einer geometrischen Konstruktion für eine bestimmte Anwendung in der Praxis spielen vielfach insbesondere ihre Aufwendigkeit und die Genauigkeit des mit ihrer Hilfe gewonnenen Resultats eine große und manchmal sogar die entscheidende Rolle. Daher werden in der Produk-

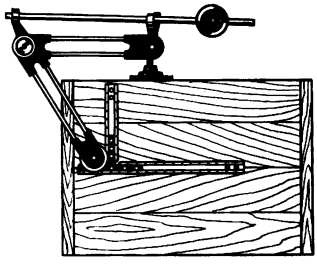
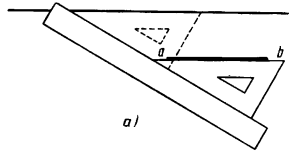
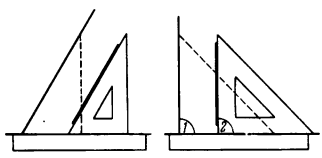


Abb. 1

tion, in den Konstruktionsbüros und überall dort, wo man es sonst mit einer größeren Anzahl von Konstruktionen zu tun hat, die unterschiedlichsten Instrumente und Konstruktionsverfahren benutzt, die diesen Forderungen gerecht werden. So findet z. B. in der zeichnerisch-konstruktiven Praxis die Zeichenmaschine (Abb. 1) eine breite Verwendung. Mit ihrer Hilfe lassen sich einfach und mit großer Genauigkeit zueinander parallele und zueinander orthogonale Geraden ziehen und Winkel gegebener Größe zeichnen. Die Zeichenmaschine faßt in sich zusammen die bereits dem Schüler bekannten Zeicheninstrumente: Reißschiene, Lineal, Zeichendreieck und Winkelmesser. Wir



a)



b)

Abb. 2

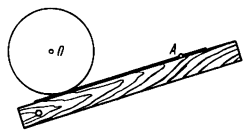


Abb. 3

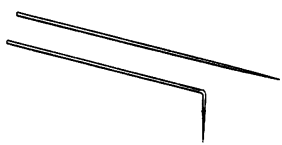


Abb. 4

merken an, daß sich bereits mit Hilfe dieser Instrumente (und des Zirkels) die bei der Lösung praktischer Konstruktionsaufgaben benötigten grundlegenden geometrischen Konstruktionen nach sehr zweckmäßigen Verfahren durchführen lassen. So läßt sich z. B. die Konstruktion paralleler und zueinander orthogonaler Geraden mittels eines Zeichendreiecks und eines Lineals durchführen (Abb. 2a und b); die Konstruktion der Tangente an einen Kreis, die durch einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt geht, mittels eines Lineals (Abb. 3) usw.

Da jedoch der übliche Instrumentensatz (Zirkel, Lineal, Zeichendreieck, Winkelmesser und auch die Zeichenmaschine) nicht immer eine genügend einfache und hinreichend genaue Lösung einer Aufgabe gewährleistet, verwendet man bei komplizierteren Konstruktionen, insbesondere wenn sie in größerem Umfang benötigt werden, eine Vielzahl weiterer Instrumente und Geräte (z. T. Präzisionsinstrumente sehr komplizierter Art). Es seien hier z. B. der Pantograph (Instrument für die ähnliche Abbildung von Figuren), der Ellipsenzirkel (Instrument zum Zeichen von Ellipsen mit gegebenen Achsen) und der

Koordinator (Instrument zur Konstruktion paralleler und zueinander senkrechter Geraden und zum Einzeichnen von Punkten mit gegebenen Koordinaten) genannt. Sehr vielfältig ist die Auswahl der Instrumente, die beim An-

Abb. 5

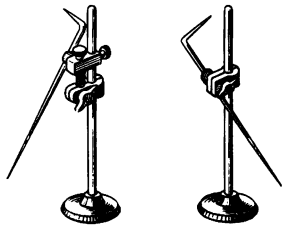


Abb. 6

reißen[1]) verwendet werden. Im einfachsten Fall werden die Rißlinien mit Stahlnadeln (Abb. 4) auf die Metalloberfläche aufgetragen (die häufig zur besseren Sichtbarmachung der Linien mit einem speziellen Anstrich versehen ist). Die Schnittpunkte von Linien und manchmal auch die Linien selbst

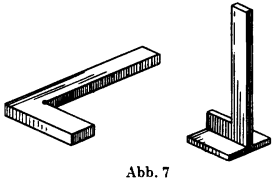


Abb. 7

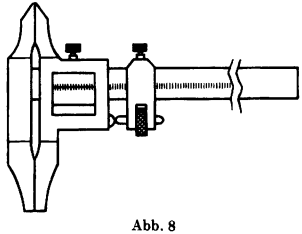


Abb. 8

werden mit einem Körner gekennzeichnet (Abb. 5). Zum Ziehen horizontaler Linien auf Werkteilen benutzt man spezielle Reißnadeln (Abb. 6). Zur Durchführung von geometrischen Konstruktionen und von Messungen werden Winkeleisen (Abb. 7), Lineale, Schiebelehren (Abb. 8) und andere Geräte verwendet. Sind Konstruktionen mit großer Genauigkeit erforderlich, so verwendet man Meßplättchen, Zirkel und Reißnadeln mit Mikrometerschrauben. Hierbei läßt

[1]) Als *Anreißen* bezeichnet man die Tätigkeit, bei der durch Punkte oder Linien diejenigen Stellen auf der Oberfläche eines Werkstücks markiert werden, die entsprechend einer vorliegenden Werkzeichnung mechanisch bearbeitet werden sollen.

sich beim Abtragen und Messen von Strecken eine Genauigkeit von der Ordnung 0,02 mm erreichen.

Wir zeigen beispielsweise, wie auf einer bearbeiteten ebenen Fläche eines Werkstücks einige Konstruktionen, die in der zeichnerisch-konstruktiven Praxis Verwendung finden, durchgeführt werden, insbesondere die Konstruktion zueinander paralleler bzw. aufeinander senkrechter Geraden. Der einfachste Fall liegt vor, wenn die begrenzenden ebenen Flächen (*1, 2, 3* in Abb. 9) des Werkstücks bereits bearbeitet sind und miteinander

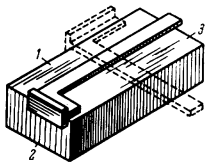


Abb. 9

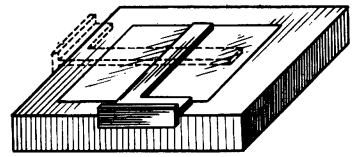


Abb. 10

rechte Winkel bilden. Ist das Werkstück dünn oder ist sein Rand uneben, so wird das Anreißen auf einer Anreißplatte durchgeführt (Abb. 10) oder so, wie es in Abb. 11 dargestellt ist. Bei nicht genügend glatter Oberfläche des Werkstückes werden mitunter parallele und aufeinander senkrechte Geraden nach den üblichen Verfahren mittels Zirkel und Lineal konstruiert. Häufig verwendet man beim Anreißen auch spezielle kom-

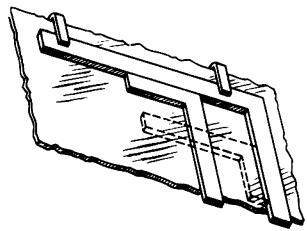


Abb. 11

binierte Instrumente; beispielsweise gibt es eine große Anzahl von Vorrichtungen zum Auffinden des Mittelpunktes einer Bohrung bzw. eines zylindrischen Vorsprunges, zur Konstruktion von Kreisen mit unzugänglichen Mittelpunkten u. a.

In neuerer Zeit benutzt man beim Anreißen auch optische Methoden. So werden z. B. beim Anreißen der Umrisse von Schablonen im Schiffsbau zunächst auf einem Zeichenbogen mit großer Sorgfalt Muster des Werkstückes angefertigt; diese Zeichnungen werden dann fotografiert, und die Negative werden unter entsprechender Vergrößerung auf den Anreißtisch projiziert. Beim Anreißen verbleibt die Aufgabe, die Umrisse des Werkstückes anzukörnen. Hierbei hängt die Genauigkeit des Anreißens nicht nur von der richtigen

Wahl des Vergrößerungsmaßstabes und der Genauigkeit des Ankörnens der Linien ab, sondern auch davon, mit welcher Genauigkeit die Zeichnungen für die Fotoaufnahmen angefertigt wurden.

1.3. Die Genauigkeit einer Konstruktion. Die geometrischen Konstruktionen kann man entsprechend den Bedürfnissen nach Genauigkeit ihrer Durchführung in zwei Gruppen einteilen:

1. Geometrische Konstruktionen, deren Ausführung ohne besondere Genauigkeit erfolgt. Sie werden z. B. bei der Herstellung von Werkzeichnungen für Werkteile, bei Montagezeichnungen usw. verwendet. Auf diesen Zeichnungen werden, soweit das erforderlich ist, die genauen Maßzahlen in Ziffern eingetragen.
2. Geometrische Konstruktionen, an deren Ausführung hinsichtlich Genauigkeit erhöhte Anforderungen gestellt werden. Solche Konstruktionen sind z. B. erforderlich bei der Anfertigung von Zeichnungen, nach denen die Bearbeitung von Werkteilen auf Optik-Schleifmaschinen erfolgt, beim Anreißen der Kontrollschablonen, nach denen die Konturen der Fertigungsschablonen überprüft werden, usw. Eine große Konstruktionsgenauigkeit ist auch bei der numerischen Lösung algebraischer oder analytischer Aufgaben durch graphische Methoden erforderlich.

Bei der graphischen Lösung von Aufgaben kann man folgende Fälle unterscheiden:

a) Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt ausschließlich von der Genauigkeit ab, mit der die Konstruktion ausgeführt wird (wie z. B. die Bestimmung des Mittelpunktes einer gegebenen Strecke mittels Zirkel und Lineal), weil die Lösung der betrachteten Aufgabe theoretisch mit beliebiger Genauigkeit erhalten werden kann.
b) Die Konstruktionsgenauigkeit vermag die Genauigkeit des Resultats nur bis zu einem gewissen Grade zu beeinflussen; dies ist z. B. dann der Fall, wenn in die Aufgabe Ausgangsdaten eingehen, die nur angenähert sind (z. B. Meßwerte) und deren Genauigkeit geringer ist als die der Konstruktion selbst.
c) Die Konstruktionsgenauigkeit hängt wesentlich von dem verwendeten Konstruktionsverfahren ab; das ist z. T. dann wichtig, wenn eine Konstruktion grundsätzlich nur ein angenähertes Resultat zu liefern vermag, selbst wenn man voraussetzt, daß die Ausgangsdaten genau gegeben sind und eine ideal exakte Konstruktion durchgeführt wird (wenn es also nur sogenannte Näherungskonstruktionen gibt, wie z. B. für die Konstruktion einer Strecke, deren Länge gleich dem Umfang eines gegebenen Kreises ist, für die Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile mittels Lineal und Zirkel u. a.).

Wir beschäftigen uns hier nur mit den Faktoren, die die Konstruktionsgenauigkeit beeinflussen; die Problematik der Näherungskonstruktionen bleibt einem besonderen Paragraphen vorbehalten.

Obwohl graphische Methoden zur Lösung von Aufgaben bereits lange angewendet werden, begann man erst in den letzten 50 Jahren sich ausführlicher mit Fragen der Genauigkeit dieser Konstruktionen zu beschäftigen. Das hat seinen hauptsächlichen Grund darin, daß die Untersuchung der Genauigkeit graphischer Konstruktionen vorher nicht so nachdrücklich durch die Praxis gefordert wurde.

Als Ergebnis der theoretischen Erarbeitung der Lösung einer Konstruktionsaufgabe (es wird der Fall betrachtet, daß die Aufgabe eine Lösung besitzt und ihre Konstruktion exakt ausführbar ist) entsteht eine Figur, die alle in der Aufgabenstellung angegebenen Forderungen erfüllt. Allerdings wird sich die Figur, die man bei der tatsächlichen Durchführung der Konstruktion erhält, im allgemeinen wegen unvermeidlicher Fehler während des Konstruktionsprozesses von der gesuchten (exakten) Figur mehr oder minder unterscheiden. Diese Fehler lassen sich in drei Gruppen einteilen:

1. *Systematische Fehler*; sie sind unter anderem bedingt durch Ungenauigkeiten in der Graduierung der verwendeten Konstruktionsgeräte, etwa durch Verwendung von Zeichendreiecken, deren Winkel ungenau ausgeführt sind, usw. Die systematischen Fehler beeinflussen natürlich die Genauigkeit des Konstruktionsergebnisses; sie können manchmal in einem gewissen Maße berücksichtigt werden. Zur Verkleinerung ihres Einflusses ist z. B. eine sorgfältige Prüfung und Auswahl der verwendeten Zeicheninstrumente erforderlich.

2. *Zufällige Fehler*; sie hängen, wie schon aus ihrer Bezeichnung ersichtlich ist, von einer Reihe von Faktoren ab, die einer Analyse nur schwer zugänglich, aber stets in einem gewissen Maße wirksam sind. Ihre Größe kann nicht genau bestimmt, sondern nur abgeschätzt werden.[1])

Die zufälligen Fehler lassen sich nach dem Charakter ihres Ursprungs einteilen in

a) objektive Fehler, die nicht von dem Ausführenden abhängen;

b) subjektive Fehler.

Die objektiven Fehler entstehen dadurch, daß in Wirklichkeit keine ideal genauen Instrumente existieren, daß z. B. die verwendeten Bleistifte, Zirkel usw. keine idealen Spitzen haben, daß es kein ideal glattes Papier gibt und anderes mehr. Daher kann man in einer Zeichnung keine Linien in der exakten mathematischen Bedeutung diese Wortes (eine Linie „besitzt keine Breite") ziehen, sondern erhält statt dessen Streifen mit im allgemeinen unterschiedlicher Breite (wegen der unvermeidlichen Abnutzung des Zeichenstiftes), statt Schnittpunkten von Geraden (im mathematischen Sinne) erhält man einen krummlinig begrenzten Fleck usw.

Ebenso erhält man bei der Festlegung eines Punktes durch die Spitze eines Zeichenstiftes oder eines Zirkels anstelle eines Punktes einen Fleck oder ein Loch. Bei wiederholten Einstichen mit der Zirkelspitze an derselben Stelle

[1]) Vgl. die Tabelle auf S. 161, die der Kandidaten-Dissertation von A. A. Мироновичъ, Анализ точности графических расчетов (A. A. Mironowitsch, Analyse der Genauigkeit graphischer Berechnungen), Leningrad 1950, entnommen ist.

„arbeitet sich das Loch aus", d. h. vergrößert seinen Durchmesser, was natürlich eine Vergrößerung des Fehlers bei der Konstruktion bewirkt.

Außerdem beeinflussen Faktoren subjektiven Charakters die Konstruktionsgenauigkeit. Der Einfluß einiger von ihnen läßt sich verringern (z. B. erhöht die Aufmerksamkeit des Zeichners die Konstruktionsgenauigkeit), jedoch lassen auch sie sich nicht völlig beseitigen.

Tabelle der mittleren Fehlerwerte bei einigen elementaren Operationen

Nr.	Elementare Operationen	Fehler
1	Durchmesser des „kreisförmigen Punktes" bei Einstich einer Zirkelspitze	0,20 mm
2	Durchmesser des „kreisförmigen Punktes" beim Einstich der Spitze eines Bleistiftes	0,25–0,30 mm
3	Mittlere Breite einer dünnen Linie	0,15 mm
4	Fehler beim Einstechen mit der Spitze eines Zirkels oder eines Bleistifts in einen gegebenen Punkt	0,08 mm
5	Zusätzlicher Fehler beim wiederholten Einstechen (2 bis 9)	0–0,25 mm
6	Fehler beim Einstechen eines Zirkels in einen beliebigen Punkt einer Geraden	0,03 mm
7	Fehler beim Einstechen mit der Spitze eines Bleistiftes in einem beliebigen Punkt einer Geraden	0,05 mm
8	Fehler bei der Festlegung des Schnittpunktes von Geraden	0,08 mm
9	Fehler beim Ziehen einer Geraden durch einen Punkt	0,08 mm
10	Genauigkeit der Festlegung eines Winkels mit dem Winkelmesser (r = 100 mm)	4′
11	Genauigkeit beim Ziehen paralleler und aufeinander senkrecht stehender Geraden mit dem Zeichendreieck und mit dem Lineal	16″ auf 100 mm
12	Genauigkeit beim Anlegen eines Lineals an zwei Punkte	0,03 mm
13	Genauigkeit beim Anlegen eines Lineals an eine Gerade	0,002 mm
14	Winkelgenauigkeit beim Anlegen eines Lineals an zwei Punkte	0,05 : 2
15	Winkelgenauigkeit beim Anlegen eines Lineals an eine Gerade	0,03 : 1

3. *Versehen und Fehler*, die zur Unbrauchbarkeit des Ergebnisses führen, weil falsche Konstruktionen benutzt werden.

Auf der Grundlage unserer Analyse der systematischen und zufälligen Fehler kann man einige elementare Richtlinien für das Konstruieren aufstellen, deren Einhaltung die Genauigkeit erhöht. Wir formulieren einige dieser Richtlinien.

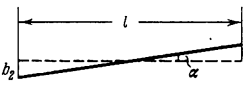


Abb. 12

Zur Erhöhung der Konstruktionsgenauigkeit muß man möglichst dünne Linien ziehen. Zur Verkleinerung des Fehlers muß man Punkte, die eine Gerade bestimmen, möglichst weit voneinander entfernt wählen, weil der Winkelfehler $\left(\sin\alpha \approx \frac{b_1 + b_2}{l}\right)$ sich bei Vergrößerung von l verringert (Abb. 12). Die Radien von Hilfskreisen muß man so wählen, daß die Kreise sich möglichst unter Winkeln schneiden, die nahe bei $\frac{\pi}{2}$ liegen, usw.

Schließlich sollte man beim Konstruieren beachten, daß alle auftretenden Streckenlängen annähernd von gleicher Größenordnung sind; in der Praxis nimmt man meist als Richtzahl, daß die Streckenverhältnisse 20 nicht übersteigen.

§ 2. Über die Lösung von Konstruktionsaufgaben in Abhängigkeit von gebräuchlichen Instrumenten

2.1. Konstruktion mit Lineal, Zirkel, Zeichendreieck und Winkelmesser. Es ist allgemein bekannt, daß sich nicht jede Konstruktionsaufgabe konstruktiv lösen läßt; mit anderen Worten: nicht jede geometrische Figur, die mathematisch eindeutig definiert ist, kann man theoretisch genau mit Hilfe eines vorgegebenen Instrumentensatzes konstruieren. Ist z. B. eine Einheitsstrecke vorgegeben, so läßt sich mittels Zirkel und Lineal kein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist.[1]) Ebenso ist es unmöglich, mit Hilfe nur dieser Instrumente die Verdoppelung eines beliebigen Würfels (vgl. S. 220), die Dreiteilung eines beliebigen Winkels (vgl. S. 221), die Konstruktion eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden (vgl. S. 224), die Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks oder Neunecks (vgl. S. 225) usw. durchzuführen. Es ist selbstverständlich, daß sich eine gegebene Konstruktionsaufgabe bei einer Wahl eines Instrumentensatzes als lösbar und bei einer anderen Wahl als unlösbar erweisen kann.

Wir wollen annehmen, daß für die Konstruktionen nicht nur Zirkel und Lineal, sondern auch Zeichendreieck und Winkelmesser verwendet werden dürfen. Diese Erweiterung der zugelassenen Instrumente erfolgt mit dem Ziel, die theoretischen Betrachtungen über die konstruierbaren Elemente in engeren Zusammenhang zur üblichen Zeichenpraxis zu setzen.

---

[1]) Vgl. den Artikel „Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal" in diesem Band der EdEM.

Wir beschreiben zunächst die charakteristischsten Konstruktionen, die sich durch einmalige Benutzung der oben angeführten Instrumente durchführen lassen.

Der Zirkel. Die für den Zirkel charakteristische Operation besteht im Ansetzen der Zirkelspitze in einem gewissen (vorgegebenen oder beliebigen) Punkt und im Ziehen eines Kreises (oder eines Kreisbogens) mit vorgegebenem oder beliebigem Radius; der Radius kann durch zwei Punkte gegeben sein.

Das Lineal. Die charakteristische Operation für das Zeichenlineal besteht im Anlegen des Randes des Lineals an zwei Punkte und im Ziehen der Geraden längs dieses Randes.[1]) Man kann also mit Hilfe des Lineals eine Gerade (oder einen Strahl oder eine Strecke der Geraden) konstruieren, die durch zwei vorgegebene (oder beliebige) Punkte hindurchgeht.

Das Zeichendreieck. Es besitzt zunächst alle Eigenschaften des einfachen Lineals, so daß man mit ihm die charakteristische Operation des Lineals ausführen kann. Darüber hinaus besteht die charakteristische Operation für das Dreieck darin, daß man es so auf eine Zeichnung legt, daß eine seiner Seiten mit einer gegebenen Geraden zusammenfällt, und längs einer der beiden anderen Seiten die Gerade zieht. Folglich läßt sich mittels eines Zeichendreiecks die gleiche Konstruktion wie mittels eines Lineals durchführen, und ferner kann man eine Gerade konstruieren, die durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen Geraden durch diesen Punkt einen Winkel einschließt, der mit einem der Dreieckswinkel übereinstimmt.

Der Winkelmesser. Die für den Winkelmesser charakteristische Operation besteht im Anlegen des geraden Randes des Winkelmessers an eine gegebene Gerade, so daß der Markierungspunkt dieses Randes an einem gegebenen Punkt der Geraden zu liegen kommt, und in der anschließenden Konstruktion eines Punktes auf dem Strahl, der von dem Markierungspunkt ausgeht und mit der gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel einschließt. Die Verwendung des Winkelmessers gestattet also die Konstruktion eines Punktes, so daß der von einem gegebenen Punkt einer gegebenen Geraden ausgehende Strahl durch diesen Punkt mit der Geraden einen vorgegebenen Winkel bildet.

Wir bemerken, daß alle die genannten Operationen auch mit Zirkel und Lineal allein durchgeführt werden können, also bei der angegebenen Verwendung[2]) der betrachteten Instrumente die Klasse der damit lösbaren Kon-

[1]) In der Praxis benutzt man das Lineal auch zur Konstruktion der Tangente an einen gegebenen Kreis durch einen Punkt außerhalb des Kreises (vgl. Abb. 3) und zur Konstruktion der äußeren und inneren Tangenten an zwei Kreise.

[2]) Damit ist gemeint, daß das Antragen eines vorgegebenen Winkels allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal möglich ist. Dagegen ist die Konstruktion von Winkeln gegebener Größe mit Hilfe von Zirkel und Lineal im allgemeinen nur näherungsweise möglich. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

struktionsaufgaben mit der Klasse der Aufgaben übereinstimmt, die sich allein mittels Zirkel und Lineal lösen lassen (wobei die Benutzung des größeren Instrumentensatzes natürlich in den meisten Fällen zu einer Vereinfachung der Konstruktion führt).

Die Frage, welche Konstruktionsaufgaben sich mit Hilfe des betrachteten Instrumentensatzes oder, was dasselbe ist, mit Zirkel und Lineal durchführen lassen, wird im Artikel „Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal" (S. 205ff.) erörtert. Dort wird auch die Frage nach der Rolle beliebiger Elemente in geometrischen Konstruktionen behandelt.

2.2. Konstruktionen allein mit Hilfe des Zirkels (Konstruktionen von Mohr-Mascheroni). Wir erwähnen nun einige Ergebnisse über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben bei einer anderen Wahl des Instrumentensatzes.

Zunächst sei bemerkt, daß der Satz, der aus einem Zirkel und einem Lineal besteht, in einem gewissen Sinne dem „Satz" äquivalent ist, der nur aus einem Zirkel besteht: *Jede Konstruktionsaufgabe die mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösbar ist, läßt sich auch mit Hilfe des Zirkels allein lösen.*

Allerdings gestattet es die Verwendung des Lineals, die geradlinigen Strecken, die in einer gesuchten Figur enthalten sind, wirklich zu ziehen (wenn die Lösung einer Aufgabe die Angabe dieser Strecken verlangt), während die entsprechende Konstruktion mit dem Zirkel allein nur die Endpunkte dieser Strecken liefert. In diesem Sinne erweitert also die Hinzunahme des Lineals nicht den Kreis der Aufgaben, die man mit Hilfe nur des Zirkels lösen kann. Dieses Ergebnis wurde erstmalig in dem Buch „Euclides Danicus" des dänischen Mathematikers Georg Mohr aus dem Jahre 1672 erwähnt und findet sich neuerlich in dem 1797 erschienenen Buch „La geometrica del compasso" des italienischen Ingenieures Lorenzo Mascheroni. Ein anderer Beweis dieser Behauptung wurde 1890 von A. Adler angegeben.

Für den Beweis des Satzes von Mohr-Mascheroni genügt es zu zeigen, daß man mit Hilfe allein des Zirkels den Schnittpunkt zweier Geraden (deren jede durch zwei ihrer Punkte gegeben ist) und den Schnittpunkt einer Geraden mit einem Kreis bestimmen kann. Wir verwenden hierzu die Transformation der Inversion (vgl. S. 50), indem wir den Beweis des Satzes von Mohr-Mascheroni in die Lösung der folgenden sechs Aufgaben zerlegen.

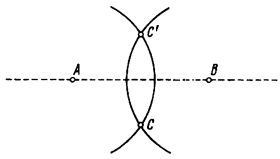


Abb. 13

Aufgabe 1. *Gegeben seien drei Punkte A, B, C. Man konstruiere den Punkt C', der bezüglich der Geraden AB symmetrisch zum Punkt C liegt.*

Die Lösung erhält man unmittelbar durch Ziehen zweier Kreise (Abb. 13).

Aufgabe 2. *Gegeben seien ein Kreis L, sein Mittelpunkt O und ein beliebiger Punkt A. Man konstruiere den Punkt M, in den der Punkt A bei der Inversion am Kreis L übergeht.*

Lösung. Wir ziehen durch den Punkt O den Kreis mit dem Mittelpunkt A und bezeichnen mit B und C die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Kreis L (Abb. 14).[1]) Weiter ziehen wir durch den Punkt O die beiden Kreise mit den Mittelpunkten B und C. Der zweite Schnittpunkt M dieser beiden Kreise ist der gesuchte Punkt. Der Beweis hierfür folgt daraus, daß die gleichschenkligen Dreiecke OBM und OBA mit dem gemeinsamen Winkel bei O ähnlich sind und folglich

$$\frac{|OB|}{|OM|} = \frac{|OA|}{|OB|}, \quad \text{d. h.} \quad |OA| \cdot |OM| = |OB|^2$$

gilt.

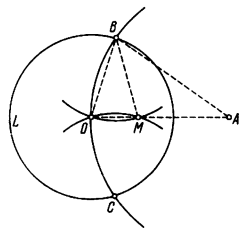


Abb. 14

Aufgabe 3. *Gegeben seien ein Kreis L, sein Mittelpunkt O und zwei Punkte A, B. Man konstruiere den Mittelpunkt des Kreises, in den die Gerade AB bei der Inversion am Kreis L übergeht.*[2])

Lösung. Wir konstruieren zunächst den Punkt C, der bezüglich der Geraden AB symmetrisch zum Punkt O liegt (Aufgabe 1). Dann ist der Punkt M, in den der Punkt C bei der Inversion am Kreis L übergeht (Aufgabe 2), der gesuchte Punkt. Zum Beweis dieser Behauptung bezeichnen wir mit D den Fußpunkt des Lotes vom Punkt O auf die Gerade AB und mit E den Schnittpunkt der Geraden OD mit dem Kreis L', in den die Gerade AB bei der Inversion an L übergeht (Abb. 15). Dann gilt

$$|OM| \cdot |OC| = |OD| \cdot |OE| \quad (= r^2)$$

---

[1]) Die geschilderte Konstruktion setzt voraus, daß die Punkte B und C existieren und voneinander verschieden sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Abstand des gegebenen Punktes A vom Punkt O größer ist als der halbe Radius von L. Für den Fall, daß der Abstand $|OA|$ kleiner ist als $\frac{r}{2}$, führt folgende Konstruktion zum Ziel: Zunächst zeigt man, daß man allein mit Hilfe des Zirkels zu zwei beliebigen Punkten X, Y denjenigen Punkt Z des Halbstrahls $\overrightarrow{XY}$ konstruieren kann, für den $|XZ| = 2 \cdot |XY|$ gilt (Verdoppelung einer Strecke). [Dazu schlägt man um X und Y die Kreise L_1 und L_2 mit dem Radius $\varrho = |XY|$ und erhält die Schnittpunkte X_1, X_2 dieser beiden Kreise; sodann schlägt man um X_1, X_2 die Kreise L_3, L_4 mit dem Radius ϱ, die den Kreis L_2 im Punkt X und je einem weiteren Punkt Y_1 bzw. Y_2 schneiden; schließlich schlägt man um Y_1 und Y_2 Kreise mit dem Radius ϱ und erhält als Schnittpunkte dieser beiden Kreise den Punkt Y und den gesuchten Punkt Z.] Ist nun $0 < |OA| < \frac{r}{2}$, so konstruiert man durch sukzessive Verdoppelung der Strecke $\overline{OA}$ zunächst einen Punkt A' des Halbstrahls $\overrightarrow{OA}$, für den $|OA'| = 2^k \cdot |OA|$ und $|OA'| > \frac{r}{2}$ gilt, und zu dem Punkt A' sein Bild bei der Inversion an L nach obigem Verfahren, so daß also M' auf dem Halbstrahl $\overrightarrow{OA}$ liegt und $|OM'| \cdot |OA|' = r^2$, d. h. $|OM'| \cdot 2^k \cdot |OA| = r^2$ gilt. Konstruiert man nun noch durch k-faches Verdoppeln der Strecke $\overline{OM'}$ denjenigen Punkt M des Halbstrahls $\overrightarrow{OA}$, für den $|OM| = 2^k \cdot |OM'|$ gilt, so wird $|OM| \cdot |OA| = r^2$, d. h., man erhält in M den gesuchten Punkt. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Diese Aufgabe hat natürlich nur dann eine Lösung, wenn die Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden liegen. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Weil ferner (nach Definition des Punktes C) $|OC| = 2 \cdot |OD|$ gilt, ist mithin $|OM| = \frac{1}{2}|OE|$ und folglich M der Mittelpunkt des Kreises L' (denn $|OE|$ ist sein Durchmesser).

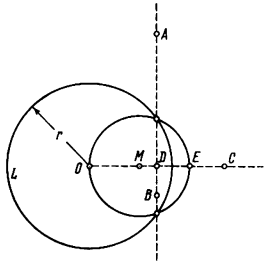


Abb. 15

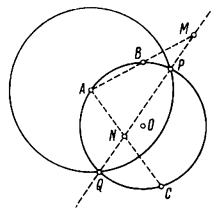


Abb. 16

Aufgabe 4. *Gegeben seien drei Punkte A, B, C. Man bestimme den Mittelpunkt des Kreises, der durch diese Punkte geht.*[1])

Lösung. Wir schlagen um den Punkt A einen beliebigen Kreis L. Mit M und N bezeichnen wir die Bildpunkte der Punkte B und C bei der Inversion an L (Aufgabe 2). Dann wird der Kreis durch die Punkte A, B, C bei der Inversion an L in die Gerade MN übergeführt (Abb. 16). Also brauchen wir nur noch den Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, in den die Gerade MN bei der Inversion an L übergeht (Aufgabe 3).

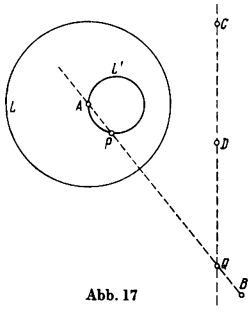


Abb. 17

Aufgabe 5. *Man bestimme den Schnittpunkt eines gegebenen Kreises L mit einer gegebenen Geraden MN.*

Lösung. Wir bemerken zunächst, daß wir auf Grund von Aufgabe 4 den Mittelpunkt des Kreises L als bekannt ansehen können; er werde mit A bezeichnet. Wir bestimmen jetzt den Mittelpunkt O des Bildkreises der Geraden MN bei der Inversion L (Aufgabe 3). Sodann schlagen wir den Kreis um den Mittelpunkt O, der durch den Punkt A geht (d. h. den Bildkreis der Geraden MN bei der Inversion). Die beiden Schnittpunkte P, Q dieses Kreises mit dem Kreis L sind die gesuchten Punkte (Abb. 16).

Aufgabe 6. *Gegeben seien vier Punkte A, B, C, D. Man bestimme den Schnittpunkt der Geraden AB und CD.*

Lösung. Wir schlagen einen beliebigen Kreis L um den Punkt A als Mittelpunkt. Bei der Inversion am Kreis L geht die Gerade AB in sich über und die Gerade CD in einen

[1]) Diese Aufgabe hat natürlich nur dann eine Lösung, wenn die Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden liegen. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

gewissen Kreis L', der durch A geht. Den Mittelpunkt dieses Kreises können wir konstruieren (Aufgabe 3). Als nächstes konstruieren wir den (von A verschiedenen) Schnittpunkt P des Kreises L' mit der Geraden AB (Aufgabe 5). Der Bildpunkt Q des Punktes P bei der Inversion am Kreis L (Aufgabe 2) ist dann der gesuchte Schnittpunkt der Geraden AB und CD (Abb. 17).

Aus der Möglichkeit, die Aufgaben 5 und 6 allein mittels des Zirkels zu lösen, folgt die Gültigkeit des Satzes von MOHR-MASCHERONI.

2.3. Konstruktionen allein mit Hilfe des Lineals (Konstruktionen von Poncelet-Steiner). Der Schweizer Geometer JAKOB STEINER, der das Lineal für das genaueste Instrument hielt, zeigte 1833, daß *jede mittels Zirkel und*

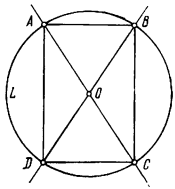


Abb. 18

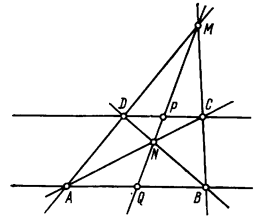


Abb. 19

Lineal lösbare Konstruktionsaufgabe sich auch durch alleiniges Ziehen von geradlinigen Linien lösen läßt, sobald nur ein Kreis und sein Mittelpunkt in der Zeichenebene vorgegeben sind. (Hierbei sieht man einen Kreis als konstruiert an, wenn sein Mittelpunkt und sein Radius bestimmt sind.) Etwas früher wurde dieser Satz mit einer völlig anderen Methode von dem französischen Mathematiker J. PONCELET erhalten.

Zum Beweis des Satzes von PONCELET-STEINER lösen wir allein mit Hilfe des Lineals folgende neun Konstruktionsaufgaben, wobei wir annehmen, daß in der Ebene ein Kreis L gezeichnet und sein Mittelpunkt O gegeben ist.

Aufgabe 1. *Man konstruiere ein Rechteck.*

Lösung. Durch den Punkt O ziehen wir zwei beliebige Geraden (Abb. 18). Die Punkte A, B, C, D, in denen diese Geraden den Kreis L schneiden, bilden die Eckpunkte eines Rechtecks.

Aufgabe 2. *Es seien zwei parallele Geraden und auf einer von ihnen zwei Punkte A, B gegeben. Man halbiere die Strecke $\overline{AB}$.*

Lösung. Wir bezeichnen die zu AB parallele Gerade mit l, wählen auf ihr einen beliebigen Punkt C, ziehen die Gerade BC und fixieren darauf einen beliebigen Punkt M (Abb. 19). Sodann ziehen wir die Gerade AM und bezeichnen mit D den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden l. Schließlich ziehen wir die Geraden AC und BD und

bezeichnen ihren Schnittpunkt mit N. Dann geht die Gerade MN durch den Mittelpunkt Q der Strecke $\overline{AB}$.

Der Beweis der Richtigkeit dieser Konstruktion folgt leicht aus der Betrachtung der ähnlichen Dreiecke (mit P bzw. Q bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden MN mit der Geraden l bzw. AB) in Abb. 19:

$$\frac{|AQ|}{|PC|} = \frac{|QN|}{|NP|} = \frac{|QB|}{|DP|},$$

$$\frac{|AQ|}{|DP|} = \frac{|QM|}{|PM|} = \frac{|QB|}{|PC|}.$$

Durch gliedweise Multiplikation erhält man die Gleichungen

$$|AQ| \cdot |DP| = |PC| \cdot |QB|,$$

$$|AQ| \cdot |PC| = |DP| \cdot |QB|,$$

woraus

$$|AQ|^2 = |QB|^2, \quad \text{d. h.} \quad |AQ| = |QB|$$

folgt.[1])

Aufgabe 3. *Man konstruiere ein Quadrat.*

Lösung. Wir konstruieren zunächst ein Rechteck $ABCD$, das dem Kreis L einbeschrieben ist (Aufgabe 1). Wegen $AB \| CD$ können wir die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ halbieren (Aufgabe 2). Ebenso kann man die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ halbieren (Abb. 20). Als Mitten der Seiten des Rechtecks $ABCD$ erhalten wir vier Punkte M, N, P, Q. Die Geraden MP und NQ gehen durch den Punkt O (der Mittelpunkt des Rechtecks und Mittelpunkt des Kreises L ist) und sind zu Seiten des Rechtecks parallel. Folglich sind MP und NQ zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden, die durch den Mittelpunkt des Kreises L gehen. Dann bilden aber die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Geraden mit dem Kreis L die Eckpunkte eines Quadrates.

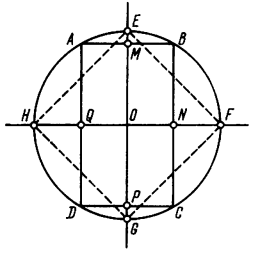


Abb. 20

Aufgabe 4. *Gegeben seien eine Gerade l und ein Punkt E, der nicht auf l liegt. Man konstruiere die zu l parallele Gerade durch E.*

Lösung. Wir konstruieren ein Rechteck $ABCD$ (Aufgabe 1) und bestimmen die Mitten M, N, P, Q seiner Seiten (Aufgabe 2). Sodann ziehen wir die Geraden MP und NQ (Abb. 21a). Die Gerade l kann nicht zu allen Seiten des Rechtecks $ABCD$ parallel sein. Es sei etwa die Seite AB nicht zur Geraden l parallel. Dann schneiden sich die Geraden AB, NQ und CD mit der Geraden l in gewissen Punkten R, S, T. Da die Gerade NQ von den zu ihr parallelen Geraden AB und CD den gleichen Abstand besitzt, ist $|RS| = |ST|$, d. h., S ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{RT}$. Die weitere Konstruktion stellt eigentlich die Lösung der Umkehrung von Aufgabe 2 dar. Wir ziehen nämlich die Gerade TE (Abb. 21b) und wählen auf ihr einen beliebigen Punkt U. Dann ziehen wir die Geraden US, UR, ER und bezeichnen mit G den Schnittpunkt der

[1]) Ein anderer Beweis findet sich auf S. 63.

Geraden ER und US. Wir ziehen schließlich die Gerade TG und bezeichnen mit F den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden UR. Dann ist EF die gesuchte Parallele zur Geraden l.

Um die Richtigkeit dieser Konstruktion nachzuweisen, bezeichnen wir mit F' denjenigen Punkt der Geraden UR, für den $EF' \| TR$ ist und mit G' den Schnittpunkt der

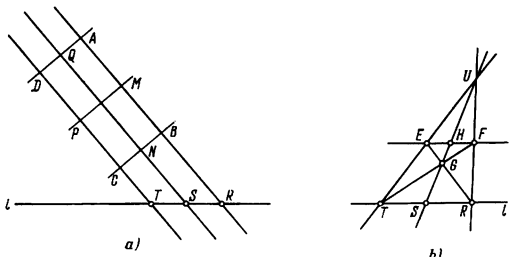


Abb. 21

Geraden ER und TF'. Dann geht die Gerade UG' durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{TR}$ (vgl. Aufgabe 2 und Abb. 19), d. h., sie fällt mit der Geraden US zusammen. Folglich liegt der Punkt G' auf der Geraden US; weil er aber außerdem auf der Geraden ER liegt, fällt er mit dem Schnittpunkt der Geraden US und ER, d. h. mit G zusammen. Also stimmt die Gerade TG' mit der Geraden TG überein, und daher liegt der Punkt F' auf der Geraden TG. Ferner liegt F' auf der Geraden UR. Mithin fällt der Punkt F' mit dem Schnittpunkt der Geraden TG und UR, d. h. mit dem Punkt F zusammen. Dann stimmen aber die Geraden EF und EF' überein, d. h., es ist $EF \| TR$.

Aufgabe 5. *Gegeben seien eine Gerade l und ein Punkt M. Man konstruiere die Gerade durch M, die auf l senkrecht steht.*

Lösung. Wir konstruieren zunächst ein Quadrat $EFGH$ (Aufgabe 3). Sodann ziehen wir durch den Mittelpunkt O (d. h. durch den Schnittpunkt der Diagonalen EG und FH) die zu l parallele Gerade (Aufgabe 4). Es sei P einer der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Quadrat (Abb. 22) und es liege P z. B. auf der Seite FG. Dann ziehen wir durch P die zu EG parallele Gerade (Aufgabe 4) und bezeichnen mit Q den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Seite EF. Offensichtlich ist $|FP| = |FQ|$. Nun ziehen wir durch den Punkt Q die Parallele zu FG (Aufgabe 4), die im Punkt R die Seite GH schneiden möge. Dann ist $|RG| = |QF| = |FP|$. Nun folgt aus der Kongruenz der Dreiecke OPF und ORG (wegen $|RG| = |PF|$, $|OG| = |OF|$ und der Gleichheit der von ihnen eingeschlossenen Winkel), daß $\sphericalangle POF = \sphericalangle ROG$ und folglich $\sphericalangle ROP = \sphericalangle GOF = 90°$ ist. Daher steht OR senkrecht auf

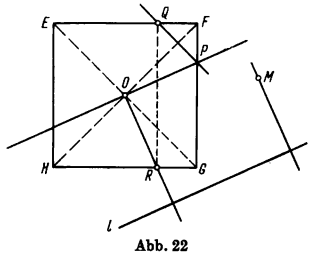


Abb. 22

der Geraden OP und damit auch auf der Geraden l. Es bleibt somit nur noch die zu OR parallele Gerade durch M zu ziehen (Aufgabe 4).

Aufgabe 6. *Gegeben seien eine Strecke $\overline{AB}$, eine Gerade l und auf l ein Punkt C. Man konstruiere auf der Geraden l einen Punkt E, für den $|CE| = |AB|$ gilt.*

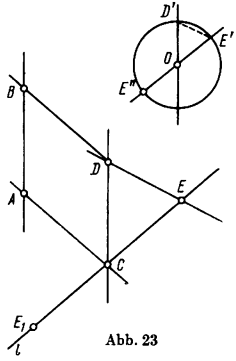


Abb. 23

Lösung. Wir ziehen durch den Punkt B die zu AC parallele Gerade und durch den Punkt C die zu AB parallele Gerade (Aufgabe 4) und erhalten ein Parallelogramm $ABCD$ (Abb. 23).[1]) Sodann ziehen wir durch den Mittelpunkt O des Kreises L die zu CD parallele Gerade sowie die zu l parallele Gerade (Aufgabe 4) und bezeichnen mit D' bzw. E' die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis L. Dann ist das Dreieck $E'D'O$ gleichschenklig. Ziehen wir nun durch den Punkt D die zu $D'E'$ parallele Gerade (Aufgabe 4) und bezeichnen wir mit E den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden l, so erhalten wir auch in EDC ein gleichschenkliges Dreieck, und folglich ist $|CE| = |CD| = |AB|$. (Wir bemerken folgendes: Nimmt man statt des Punktes E' den diametral gegenüber liegenden Punkt E'' des Kreises L, so erhält man den anderen Punkt E_1 der Geraden l, der von C den Abstand $|AB|$ hat.)

Aufgabe 7. *Man bestimme die Potenzlinie[2]) zweier Kreise, die durch ihre Mittelpunkte O_1, O_2 und Radien r_1, r_2 gegeben sind.*

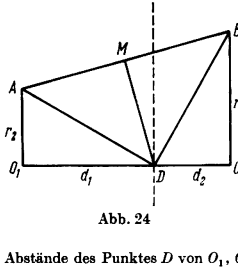


Abb. 24

Lösung. Wir ziehen die Gerade O_1O_2 und errichten in den Punkten O_1, O_2 die Senkrechten auf dieser Strecke (Aufgabe 5). Auf diesen Senkrechten tragen wir die Strecken $|O_1A| = r_2$ und $|O_2B| = r_1$ ab (Aufgabe 6). Sodann ziehen wir die Gerade AB (Abb. 24) und halbieren die Strecke $\overline{AB}$ (Aufgabe 2 und 4). Schließlich ziehen wir durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ die Senkrechte zur Geraden AB (Aufgabe 5) bis zum Schnitt im Punkt D mit der Geraden O_1O_2. Es ist leicht einzusehen, daß der Punkt D auf der gesuchten Potenzlinie liegt. Bezeichnen wir nämlich mit d_1 und d_2 die Abstände des Punktes D von O_1, O_2, so finden wir

$$d_1^2 + r_2^2 = |DA|^2 = |DB|^2 = d_2^2 + r_1^2,$$

d. h.

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2,$$

[1]) Diese Konstruktion versagt, wenn der Punkt C auf der Geraden AB liegt. In diesem Fall kann man jedoch zunächst die Strecke $\overline{AB}$ durch Konstruktion eines Parallelogramms auf eine Gerade übertragen, die C nicht enthält, und dann mit der übertragenden Strecke $\overline{A'B'}$ die angegebene Konstruktion durchführen. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Bezüglich der Definition und der Eigenschaften der Potenzlinie verweisen wir auf den Artikel „Geometrie der Kreise", S. 464–468.

was gerade bedeutet, daß der Punkt D auf der Potenzlinie liegt. Wir brauchen also nur noch durch den Punkt D die Senkrechte zur Geraden O_1O_2 zu ziehen (Aufgabe 5), um die gesuchte Potenzlinie zu erhalten.

Aufgabe 8. *Gegeben seien eine Gerade l, ein Punkt M und eine Strecke r. Man konstruiere die Schnittpunkte der Geraden l mit dem Kreis, der den Mittelpunkt M und den Radius r hat.*

Lösung. Wir wählen auf der Geraden l einen beliebigen Punkt H und ziehen die Gerade MH. Auf der Geraden MH tragen wir vom Punkt M die Strecke $\overline{MP}$ mit $|MP| = r$ ab (Aufgabe 6). Sodann ziehen wir durch den Mittelpunkt O des Kreises L die Parallele zu MH (Aufgabe 4) und bezeichnen mit P' einen ihrer Schnittpunkte mit dem Kreis L. Als nächstes ziehen wir die Geraden MO und PP' und bezeichnen mit A ihren Schnittpunkt (Abb. 25). Sodann konstruieren wir den Schnittpunkt H' der Geraden AH und OP' und anschließend die Parallele zu l durch H'. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Kreis L bezeichnen wir mit B' und C' und ziehen die Geraden AB' und AC'. Wir behaupten, daß die Schnittpunkte B, C dieser beiden Geraden mit der Geraden l die gesuchten Schnittpunkte der Geraden l mit dem Kreis um M vom Radius r sind. Zum Beweis dieser Behauptung bemerken wir, daß aus den Beziehungen $OP' \| MP$, $B'C' \| l$ die Ähnlichkeit einer Reihe von Dreiecken mit einer gemeinsamen Ecke im Punkt A folgt. Insbesondere ist

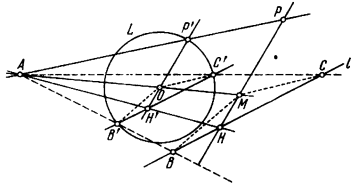


Abb. 25

$$\frac{|MA|}{|OA|} = \frac{|HA|}{|H'A|} = \frac{|CA|}{|C'A|};$$

daher sind auch die Dreiecke MAC und OAC' ähnlich, und folglich ist

$$\frac{|MC|}{|OC'|} = \frac{|MA|}{|OA|} = \frac{|MP|}{|OP'|}.$$

Wegen $|OC'| = |OP'|$ folgt hieraus $|MC| = |MP| = r$, d. h., C ist einer der gesuchten Punkte. Analog beweist man, daß $|MB| = r$ gilt.

Aufgabe 9. *Man bestimme die Schnittpunkte zweier Kreise, die durch ihre Mittelpunkte O_1, O_2 und ihre Radien r_1, r_2 gegeben sind.*

Lösung. Wir konstruieren zunächst die Potenzlinie l dieser Kreise (Aufgabe 7). Schneiden sich die Kreise, so ist die Potenzlinie die Fortsetzung ihrer gemeinsamen Sehne, d. h., so geht die Gerade l durch die Schnittpunkte der Kreise, und es genügt, die Schnittpunkte der Geraden l mit einem der Kreise zu konstruieren (Aufgabe 8). Aus der Möglichkeit, die Aufgaben 8 und 9 allein mit Hilfe des Lineals zu lösen (unter der Voraussetzung, daß in der Ebene ein Kreis L und sein Mittelpunkt O gezeichnet vorliegen), folgt sofort die Gültigkeit des Satzes von PONCELET-STEINER.

2.4. Über Konstruktionen mit Hilfe anderer Instrumente. Zum Abschluß dieses Paragraphen erwähnen wir noch einige Ergebnisse über die Verwendung anderer Sätze von Instrumenten.

Im Jahre 1890 bewies AUGUST ADLER, daß alle mit Zirkel und Lineal lösbaren Konstruktionsaufgaben auch unter Verwendung des sogenannten zweiseitigen Lineals (d. h. eines Lineals mit zwei parallelen Kanten) oder mittels eines rechten oder spitzen Winkels (und folglich auch mittels Lineal und Winkelmesser) gelöst werden können. Daher reicht zur Lösung jeder mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionsaufgabe eines der folgenden Instrumente aus: der Zirkel, das zweiseitige Lineal, ein rechter oder spitzer Winkel, der Winkelmesser (in Verbindung mit dem Lineal). Es ist klar, daß man in der Regel technisch leichter durchführbare Lösungen erhält, wenn man gewisse der genannten Instrumente kombiniert.

Es gibt auch Instrumentensätze, mit deren Hilfe sich Aufgaben höheren Grades lösen lassen, die mittels Zirkel und Lineal allein nicht lösbar sind. Hierfür ist es manchmal nötig, daß in der Zeichenebene noch eine besondere Figur vorgegeben ist. So läßt sich beispielsweise jede Konstruktionsaufgabe dritten und vierten Grades mittels Zirkel und Lineal lösen, wenn in der Zeichenebene ein vom Kreis verschiedener Kegelschnitt gegeben ist.

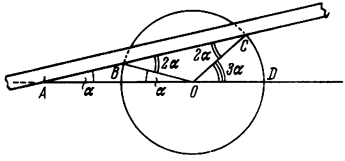


Abb. 26

Als Beispiel betrachten wir die Lösung der Aufgabe der Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Hilfe eines sogenannten „Abtragers". Es sei in Abb. 26 $|AB| = |BO| = |OC| = |OD|$. Dann ist $\sphericalangle BAO = \sphericalangle BOA = \alpha$; ferner ist der Winkel CBO gleich 2α (Außenwinkel des Dreiecks ABO); ebenso ist auch der zweite Winkel BCO des gleichschenkligen Dreiecks OBC gleich 2α; schließlich ist der Winkel COD (als Außenwinkel des Dreiecks OAC) gleich $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$. Hieraus ergibt sich ein einfaches Verfahren zur Dreiteilung eines beliebigen Winkels mittels eines Zirkels und eines Abtragers, d. h. eines Lineals mit zwei Markierungen A und B. Wir schlagen dazu um den Scheitel O des gegebenen Winkels den Kreis mit dem Radius $|AB|$ und bezeichnen mit C und D die Schnittpunkte des Kreises mit den Schenkeln dieses Winkels, der in drei Teile geteilt werden soll (Abb. 26). Wir legen nun das Lineal so auf die Zeichnung, daß der auf dem Lineal fixierte Punkt A auf der Garaden OD liegt, die Kante des Lineals durch den Punkt C geht und die Markierung B des Lineals auf dem Kreis liegt, also das Lineal die in Abb. 26 angegebene Lage hat. Der Winkel BAO ist dann genau der dritte Teil des gegebenen Winkels COD.

Diese Beschreibung mag den Anschein erwecken, daß die Aufgabe der Dreiteilung eines beliebigen Winkels doch mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösbar ist; denn man kann doch, wenn man einen Bleistift und ein Lineal hat, auf der Kante des Lineals zwei Marken anbringen. Wenn man jedoch von der Lösung einer Konstruktionsaufgabe mit Hilfe gegebener Instrumente spricht, ist dabei nicht an eine spezielle physikalische Realisierung dieser Instrumente gedacht, mit deren Hilfe die Konstruktionen durchgeführt werden, sondern

nur an ein Verzeichnis derjenigen „elementaren" Operationen, die sich mittels dieser „idealen" Instrumente ausführen lassen.[1]) Die auf S. 208 aufgezählten, mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchführbaren „elementaren" Operationen schließen eine solche Verwendung des Lineals, wie sie in der beschriebenen Konstruktion erfolgte, nicht ein. Gerade deshalb nannten wir ein Lineal, auf dem zwei Punkte markiert sind, einen „Abtrager", um zu betonen, daß dieses Instrument vom Lineal verschieden ist.

Wie steht es nun mit der Lösung von sogenannten transzendenten Aufgaben? Als klassisches Beispiel hierfür kann die Aufgabe der Rektifizierung des Kreises dienen, d. h. der Konstruktion einer Strecke, deren Länge gleich $2\pi r$ ist, wobei r der Radius eines Kreises und π (das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser) eine transzendente Zahl ist. Diese Aufgabe läßt sich weder mit Hilfe des gewöhnlichen Zirkels und des Lineals noch mittels eines Ellipsenzirkels noch ganz allgemein mittels irgend eines Instruments zum Zeichnen algebraischer Kurven lösen.[2])

§ 3. Über Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene

3.1. Konstruktionen mit Hilfe eines Lineals beschränkter Länge. Bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben unterliegen die verwendeten Konstruktionsmittel stets gewissen Beschränkungen. Bisher haben wir nur Beschränkungen betrachtet, die sich aus der Wahl eines bestimmten Satzes von „Zeicheninstrumenten" ergaben. In der Praxis treten jedoch daneben noch Beschränkungen völlig anderen Charakters auf. Es ist z. B. klar, daß die in der klassischen Aufgabenstellung der Konstruktionen mit „Zirkel und Lineal" postulierte Möglichkeit, unbegrenzt Gerade und Kreise zu ziehen, sich praktisch nicht verwirklichen läßt. Denn wir verfügen stets nur über „Lineale" beschränkter Länge, die es lediglich gestatten, zwei Punkte durch eine Strecke zu verbinden, deren Abstand eine gewisse Schranke nicht übertrifft. Ebenso verfügen wir nur über „Zirkel" begrenzter Spannweite, also zum Zeichnen von Kreisen mit nicht zu kleinen und nicht zu großen Radien (d. h. Kreisen, deren Radius r einer Bedingung $a \leqq r \leqq b$ genügt, wobei a und b den Anwendungsbereich der „Zirkel", der durch die Länge ihrer Schenkel usw. bedingt ist, charakterisieren). Damit besteht aus durchaus praktischen Gründen ein Interesse an der Frage nach den Konstruktionen, die man mit einem „kurzen" Lineal und einem Zirkel mit (evtl. nach oben und unten) beschränkter Spannweite durchführen kann.

---

[1]) Nicht umsonst fehlen z. B. bei EUKLID, von dem die Aufgabenstellung der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal stammt, sogar die Worte „Zirkel" und „Lineal"; auch er *postuliert* nur die Möglichkeit, gerade Linien und Kreise zu ziehen (vgl. den Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie" in diesem Band der EdEM).

[2]) Die Lösung dieser Aufgabe kann man nur mit Hilfe eines Instruments erhalten, das transzendente Kurven zu zeichnen erlaubt. Diesem Zweck kann insbesondere ein Gerät zum Zeichnen der Kurven $y = \arccos x$, $\varrho = a\varphi$ (archimedische Spirale) u. a. dienen.

Wir behandeln hier als Beispiel die Frage, welche Konstruktionen mittels eines Lineals beschränkter Länge möglich sind, und beweisen, daß ***die konstruktiven Möglichkeiten eines Lineals beschränkter Länge in keiner Weise geringer sind als die Konstruktionsmöglichkeiten eines idealen Lineals unbeschränkter Länge.*** Mit anderen Worten: Ersetzt man in einem Instrumentensatz, der ein ideales unbeschränktes Lineal (und möglicherweise noch andere Instrumente, z. B. einen Zirkel) enthält, das ideale Lineal durch ein Lineal der beschränkten Länge l, so erhält man einen neuen Instrumentensatz, der zu dem ursprünglichen äquivalent ist, d. h. der alle Konstruktionen erlaubt, die mit dem ersten Instrumentensatz durchführbar sind. Dazu müssen wir zunächst die konstruktiven Möglichkeiten eines idealen Lineals und des Lineals der Länge l präzisieren: Beim idealen Lineal nehmen wir insbesondere an, daß man mit seiner Hilfe die Gerade durch zwei Punkte ziehen kann, die einen beliebigen (beliebig großen) Abstand voneinander haben, d. h., daß man einerseits je zwei Punkte durch eine Strecke verbinden kann und daß man andererseits jede Strecke in beiden Richtungen über ihre Endpunkte hinaus unbegrenzt fortsetzen kann. Welche Operationen sollen sich demgegenüber mit einem Lineal der Länge l ausführen lassen? Natürlich wird man erstens fordern, daß man mit Hilfe eines solchen Lineals je zwei Punkte, deren Abstand l nicht überschreitet, durch eine Strecke verbinden kann; zweitens fordern wir, daß man durch fortgesetztes Anlegen des Lineals eine gegebene Strecke in beiden Richtungen unbegrenzt verlängern kann (Abb. 27). Beides zusammen besagt,

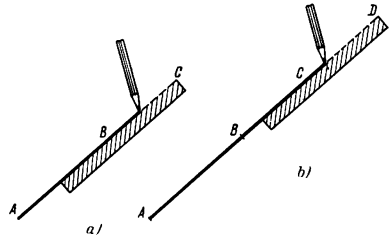


Abb. 27

daß man mittels eines Lineals der Länge l die (unbegrenzte!) Gerade durch je zwei gegebene Punkte ziehen kann, deren gegenseitiger Abstand l nicht übersteigt.

Für den Nachweis, daß ein Lineal der Länge l dem idealen (unbeschränkten) Lineal äquivalent ist, genügt es also zu zeigen, daß man mittels eines Lineals der Länge l auch die Gerade durch zwei Punkte A und B ziehen kann, deren Abstand größer als l ist. Dazu benötigen wir folgenden Satz, dessen Beweis der Leser im Artikel „Geometrische Transformationen“ auf S. 110 findet.

Satz. *Gegeben seien ein Winkel MAN und ein Punkt Q außerhalb des Winkelraumes dieses Winkels. Durch den Punkt Q gehen drei Geraden, die die Schenkel des Winkels in den Punkten D_1, D_2, D_3 bzw. E_1, E_2, E_3 schneiden* (Abb. 28). *Ferner sei B der Schnittpunkt der Geraden E_1D_2 und E_2D_1 und C der Schnittpunkt der Geraden E_2D_3 und E_3D_2. Dann liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden.*

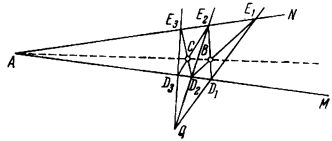


Abb. 28

Aus diesem Satz folgt fast unmittelbar die gesuchte Konstruktion der Geraden AB. Dazu braucht man nur durch den Punkt A zwei Geraden AM und AN zu ziehen, die ganz „nahe" am Punkt B vorbeigehen, d. h., deren Abstand von B wesentlich kleiner als l ist (wir erinnern daran, daß man mit Hilfe eines Lineals der Länge l Strecken beliebig großer Länge ziehen kann). Weiter ziehen wir durch B zwei Strecken, die die Geraden AM und AN in den Punkten D_1, E_2 bzw. D_2, E_1 schneiden mögen, und zeichnen die Strecken $\overline{D_1E_1}$ und $\overline{D_2E_2}$, die wir bis zu ihrem Schnittpunkt Q fortsetzen (Abb. 28). Nunmehr ziehen wir durch Q noch eine Gerade, die AM und AN in den Punkten D_3 und E_3 trifft, und bestimmen den Schnittpunkt C der Strecken $\overline{D_2E_3}$ und $\overline{D_3E_2}$; C liegt dann nach obigem Satz auf der Geraden AB. Wir brauchen dann nur noch die Punkte B und C durch eine Strecke zu verbinden und die Strecke $\overline{BC}$ bis zum Punkt A fortzusetzen. Für diese Konstruktion ist notwendig, daß die Länge jeder der Strecken $\overline{D_1E_1}$, $\overline{D_2E_2}$, $\overline{D_3E_2}$, $\overline{D_2E_3}$ und $\overline{BC}$ kleiner als l ist, was leicht zu erreichen ist.

3.2. Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene. Beschränkungen etwas anderen Charakters rühren daher, daß praktisch die Konstruktionen stets in einem beschränkten Teil der Ebene (etwa auf einem Blatt Papier, auf einer Wandtafel usw.) durchgeführt werden müssen. Diese reale Situation machen die sogenannten *Konstruktionen mit unzugänglichen Elementen* interessant und wichtig. Wir nehmen dazu an, daß uns ein begrenzter Teil der Ebene, z. B. ein Rechteck Π, gegeben ist und sich die erforderlichen Konstruktionen nur innerhalb von Π durchführen lassen. Sind innerhalb von Π zwei Strecken gegeben und schneiden sich die ihnen entsprechenden Geraden außerhalb von Π, so heißt dieser Schnittpunkt ein *unzugänglicher Punkt*. Analog kann man von unzugänglichen (d. h. außerhalb von Π liegenden) Schnittpunkten einer Geraden und eines Kreises bzw. zweier Kreise sprechen (der Kreis selbst kann dabei z. B. durch einen Teilbogen gegeben sein, der innerhalb von Π liegt).

Man kann auch unzugängliche Geraden (die durch zwei unzugängliche Punkte bestimmt sind), Kreise mit unzugänglichem Mittelpunkt und ge-

gebenem Radius (der seinerseits als Länge der Verbindungsstrecke zwischen zugänglichen oder auch unzugänglichen Punkten festgelegt ist), Kreise durch drei unzugängliche Punkte usw. betrachten.

Als Beispiel behandeln wir folgende Aufgabe.

Aufgabe 1. *Man konstruiere die Gerade durch einen gegebenen Punkt B und einen unzugänglichen Punkt A, der seinerseits als Schnittpunkt zweier gegebener Geraden l_1 und l_2 erklärt ist.*

Lösung. Eine Lösung dieser Aufgabe erhält man sofort mit Hilfe des auf S. 175 angegebenen Satzes, wobei man nur die oben zum Ziehen der Strecke $\overline{AB}$ mittels eines kurzen Lineals verwendete Konstruktion zu wiederholen braucht (Abb. 29; man vergleiche auch Abb. 28).

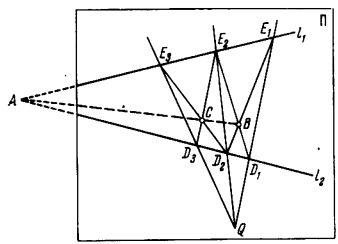


Abb. 29

Man kann noch eine andere Lösung dieser Aufgabe angeben, die auf der Verwendung einer Ähnlichkeitstransformation beruht. Wir wählen nämlich in dem Rechteck Π einen Punkt O als Ähnlichkeitszentrum und eine Zahl k, die wesentlich kleiner als 1 ist, als Ähnlichkeitskoeffizienten und wenden die Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten k an.[1]) Bei dieser Homothetie gehen die Geraden l_1 und l_2 in gewisse Geraden l_1' und l_2' und der Punkt B in einen Punkt B' über (Abb. 30). Wenn der Koeffizient k der Homothetie hinreichend klein ist, schneiden sich die Geraden l_1' und l_2' innerhalb des Rechtecks Π in einem gewissen Punkt A'. Folglich ist die Gerade $A'B'$ das Bild der Geraden AB bei der betrachteten Homothetie, und insbesondere gilt $AB \parallel A'B'$. Man braucht also nur noch die Parallele zu $A'B'$ durch den Punkt B zu ziehen.

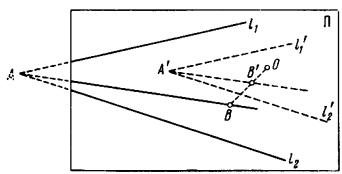


Abb. 30

Diese zweite Lösung nutzt die Tatsache aus, daß man mittels einer Homothetie mit genügend kleinem Koeffizienten die zur Lösung der Aufgabe in der unbeschränkten Ebene gehörige Zeichnung so abbilden kann, daß ihr Bild

[1]) Bezüglich der Definition und den Eigenschaften der Homothetie verweisen wir auf S. 49 und 55–56.

sich ganz innerhalb des Rechtecks Π befindet. Dadurch wird die Konstruktion sozusagen „in verkleinertem Maßstab" wiedergegeben. Diese Überlegung bezieht sich natürlich nicht nur auf die betrachtete Aufgabe, sondern ganz allgemein auf jede Konstruktionsaufgabe, die unzugängliche Elemente enthält. Es gilt – mit anderen Worten – die folgende Behauptung, deren ausführlichen Beweis wir dem Leser überlassen: *Jede Konstruktionsaufgabe, die mit Zirkel und Lineal in der unbeschränkten Ebene lösbar ist, läßt sich auch dann lösen, wenn nur Konstruktionen zugelassen werden, die innerhalb eines gegebenen Rechtecks Π durchführbar sind.* (Fordert die Lösung einer Aufgabe z. B. die Konstruktion eines Punktes, der außerhalb des Rechtecks Π liegt, so muß man natürlich die Aufgabe dann als gelöst ansehen, wenn z. B. in Π zwei Geraden konstruiert sind, die durch diesen Punkt gehen; wird die Konstruktion einer Strecke gefordert, die sich nicht in Π befindet, so ist die Aufgabe z. B. dann als gelöst anzusehen, wenn innerhalb von Π drei Strecken gefunden sind, für welche die gesuchte Strecke die vierte Proportionale ist, usw.)

Wir bemerken, daß die erste Lösung der Aufgabe 1 Interesse für die Geodäsie besitzt. Befindet sich der Schnittpunkt A zweier im Gelände gekennzeichneter Geraden l_1 und l_2 an einem unzugänglichen Ort (etwa in einem Sumpf), so kann man zum Ziehen der Geraden durch den Punkt A und einen gegebenen Punkt B die in Abb. 29 (vgl. Abb. 31) angegebene Konstruktion benutzen. Ihre Bedeutung liegt darin, daß zu ihrer Durchführung nur das Ziehen von geraden Linien erforderlich ist (was sich auch in größeren Geländebereichen durchführen läßt, wogegen es z. B. praktisch unmöglich ist, einen Zirkel mit einer Öffnung von 100 m herzustellen). Diese Bemerkung zeigt zugleich die praktische Bedeutung auch derjenigen Konstruktionen, die sich in einem beschränkten Teil der Ebene allein mit Hilfe des Lineals durchführen lassen. Hier liegen also gleichzeitig zwei Beschränkungen verschiedenen Charakters vor.

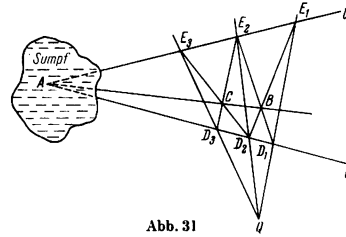


Abb. 31

Das zuletzt Gesagte macht auch Konstruktionen bedeutungsvoll, bei denen der Konstruktionsbereich statt auf ein Rechteck auf einen Teil der Ebene irgendeiner anderen Form eingeschränkt ist. Zum Beispiel kann die Durchführung einer Konstruktion verlangt werden, bei der in gewissen verbotenen Gebieten (Seen, Sümpfe, Wälder) keinerlei Linien gezogen werden dürfen. Wir können hier die Frage nach der Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben in beliebigen Bereichen der Ebene nicht allgemein behandeln, sondern beschränken uns auf die Betrachtung einer weiteren Aufgabe.

Aufgabe 2. *Gegeben seien zwei Punkte A und B sowie ein Gebiet Φ, in dem keinerlei Konstruktionen ausgeführt werden können, wobei die Gerade AB in das Gebiet Φ hineinführt. Man konstruiere auf der anderen Seite des Gebietes Φ die Fortsetzung der Geraden AB.*

Das Gebiet Φ kann z. B. ein Wald sein, der es nicht gestattet, eine Gerade (z. B. den Verlauf einer zu projektierenden Straße) visuell abzustecken, oder ein Berg, durch den ein geradliniger Tunnel geführt werden soll, usw.

Lösung. Eine Lösung dieser Aufgabe kann wieder mit Hilfe des auf S. 175 formulierten Satzes erhalten werden (die genauen Überlegungen überlassen wir dem Leser). Eine zweite Lösung verläuft folgendermaßen: Man zieht durch den Punkt A eine Gerade, die mit der Geraden AB einen gewissen Winkel $\alpha < 90°$ einschließt und die das Gebiet Φ nicht trifft, und wählt auf dieser Geraden einen solchen Punkt C, daß der von C unter dem Winkel $180° - 2\alpha$ ausgehende Strahl das Gebiet Φ ebenfalls nicht trifft (Abb. 32). Trägt man von C aus auf diesem Strahl die Strecke AC ab, so erhält man einen Punkt D, der auf der Fortsetzung der Strecke $\overline{AB}$ liegt. Natürlich lassen sich auch noch zahlreiche weitere Konstruktionen zur Lösung unserer Aufgabe angeben.

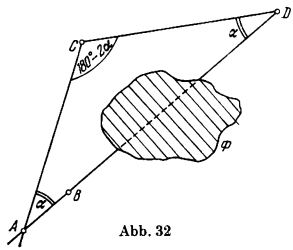


Abb. 32

§ 4. Einige allgemeine Methoden zur Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene

4.1. Die Aufspaltung der Bedingungen einer Aufgabe (die Methode der „geometrischen Örter"). Die Lösung einer Konstruktionsaufgabe läßt sich in der Regel auf das Aufsuchen eines oder mehrerer Punkte zurückführen, die den in der Aufgabe gestellten Bedingungen genügen. Zum Beispiel besteht die Konstruktion eines Dreiecks (oder eines Polygons) im Aufsuchen seiner Ecken, die Konstruktion eines Kreises im Aufsuchen seines Mittelpunktes und eines auf seiner Peripherie liegenden Punktes, usw. Andererseits verwendet man jedoch die üblichen Zeichengeräte (Lineal, Winkelmesser, Zirkel, Kurvenlineal usw.) ihrer Natur nach zum Zeichnen von Linien. Es wird also bei der Lösung einer Konstruktionsaufgabe in den meisten Fällen ein Punkt (außer evtl. unmittelbar gegebener) als Schnittpunkt gewisser Linien erhalten. So bestimmt man bei der Konstruktion eines Dreiecks ABC aus den drei Seiten a, b und c die Ecke C als Schnittpunkt zweier Kreise (z. B. des Kreises um den Mittelpunkt A mit dem Radius $|AC| = b$ und des Kreises um den Mittelpunkt B mit dem Radius $|BC| = a$); den Mittelpunkt des einem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Kreises erhält man als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender des Dreiecks, usw. Wenn aber ein gesuchter Punkt als Schnittpunkt zweier Linien erhalten wird, kann man die in der Aufgabe an den gesuchten Punkt gestellten Forderungen in zwei Einzelbedingungen zerlegen, nämlich die Bedingung „μ", daß der Punkt auf der einen der beiden Linien liegt, und die Bedingung „ν", daß er auf der anderen der beiden Linien liegt. Weder die erste noch die zweite Bedingung bestimmen für sich allein den gesuchten

Punkt. Alle Punkte, die der Bedingung „μ" bzw. „ν" genügen, bilden eine Menge von Punkten, die wir mit M bzw. N bezeichnen. In der Schule bezeichnet man solche Mengen in einer veralteten Terminologie des ARISTOTELES[1]) als „geometrischen Ort der Punkte, die der betreffenden Bedingung genügen"; wir benutzen hier den modernen Begriff „Menge", d. h., wir bezeichnen mit M bzw. N die Menge aller Punkte, die der Bedingung „μ" bzw. „ν" genügen. Im betrachteten Fall erhalten wir den gesuchten Punkt, indem wir den sogenannten *Durchschnitt* der Mengen M und N bilden, d. h. die Menge aller Punkte, die beiden Mengen M und N angehören, denn das sind gerade alle diejenigen Punkte, die beiden Bedingungen „μ" und „ν" genügen.

Wir erläutern das Gesagte durch einige Beispiele:

Aufgabe 1. *Man konstruiere den Kreis, der die Schenkel eines gegebenen Winkels (ABC) berührt, wobei der eine Berührungspunkt vorgegeben ist (E).*

Zur Lösung dieser Aufgabe genügt es, den Mittelpunkt des gesuchten Kreises S zu finden. Weil der Kreis S beide Schenkel des Winkels berühren soll (Bedingung „μ"), muß der Mittelpunkt des Kreises S auf der Winkelhalbierenden des Winkels ABC liegen (Abb. 33, Menge M). Da ferner der Kreis S den Schenkel AB in dem gegebenen Punkt E berühren soll (Bedingung „ν"), muß der Mittelpunkt des Kreises S auch auf der Senkrechten zum Schenkel AB im Punkt E liegen (Abb. 33, Menge N). Der gesuchte Mittelpunkt O ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden M und N. Aus dem Gesagten ist ferner ersichtlich, daß die Aufgabe stets eine eindeutig bestimmte Lösung hat.

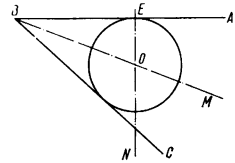


Abb. 33

Aufgabe 2. *In der Ebene seien drei Punkte A, B, C gegeben. Gesucht ist ein Punkt, der vom Punkt A einen gegebenen Abstand a hat und der von den Punkten B und C gleich weit entfernt ist* (Abb. 34).

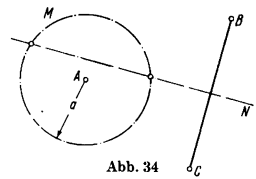


Abb. 34

Der in der Aufgabe gesuchte Punkt läßt sich ebenfalls durch zwei Bedingungen charakterisieren, die wir zunächst ermitteln. Der gesuchte Punkt muß erstens von dem gegebenen Punkt A den Abstand a haben (Bedingung „μ"). Die Menge M aller Punkte, die dieser Bedingung genügen, bildet den Kreis um den Punkt A mit dem Radius a (Abb. 34, Menge M). Der gesuchte Punkt muß sich zweitens in ein und demselben Abstand von den Punkten B und C befinden (Bedingung „ν"). Bekanntlich bildet die Menge aller Punkte, die dieser Bedingung genügen, die Senkrechte zur Strecke $\overline{BC}$ durch den Mittel-

[1]) Vgl. S. 10.

punkt dieser Strecke (Abb. 34, Menge N). Lösungen der Aufgabe sind genau die Punkte, die sowohl der ersten als auch der zweiten Menge, d. h. die dem Durchschnitt der Mengen M und N angehören. Je nach der Lage der Geraden N und des Kreises M hat die Aufgabe zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung.

4.2. Ein allgemeines Lösungsschema für Konstruktionsaufgaben. Bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben empfiehlt es sich häufig, in folgenden vier Etappen vorzugehen:

1. Analyse. Da in komplizierteren Fällen die Aufspaltung der an einen zu konstruierenden Punkt gestellten Forderungen in „hinreichend einfache" Bedingungen „μ" und „ν" (d. h. seine Gewinnung als Schnittpunkt von zwei einfach zu konstruierenden Linien M und N) nicht ohne weiteres zu erkennen ist, beginnt man die Lösung mit einer sogenannten Analyse, in deren Verlauf die gegenseitigen Verhältnisse zwischen gesuchten und gegebenen Elementen geklärt werden und ein Plan für die Lösung der Aufgabe festgelegt wird.

Die Analyse einer Aufgabe besteht in folgendem: Man nimmt an, die Aufgabe sei bereits gelöst, und fertigt eine grobe Skizze der Verhältnisse an. An Hand dieser Skizze studiert man eingehend die Aufgabenstellung. Das Ziel der Analyse ist es, für jeden gesuchten Punkt zwei einzelne Bedingungen „μ" und „ν" herauszufinden, die diesen Punkt bestimmen. Häufig gelingt es nicht, diese Bedingungen sofort anzugeben, und dann muß versucht werden, eine Folge von Punkten zu finden, von denen jeder aus den gegebenen Elementen der Aufgabe und vorhergehenden Punkten der Folge konstruiert werden kann, wobei am Ende der Folge sich der gesuchte Punkt ergibt. Für jeden Punkt einer solchen Folge hat man dann zwei Bedingungen „μ" und „ν", die den Punkt festlegen. In der Skizze entspricht dem das Aufsuchen von geeigneten Hilfslinien, und in vielen Fällen bildet gerade das Auffinden von geeigneten Hilfslinien die Hauptschwierigkeit bei der Lösung einer Aufgabe. In Fällen, in denen die Lösung keiner Hilfslinien bedarf oder die benötigten Bedingungen „μ" und „ν" sich unmittelbar auffinden lassen, kann auf eine Analyse verzichtet werden.

2. Konstruktion. Nach dem durch die Analyse aufgestellten Lösungsplan werden nunmehr (mit Hilfe vorher festgelegter Instrumente oder vorher festgelegter elementarer Operationen) die gesuchten geometrischen Elemente (Punkte, Linien oder Figuren) tatsächlich konstruiert.

3. Beweis. Durch einen Beweis wird gezeigt, daß die konstruierte Figur tatsächlich die gesuchte ist, d. h., daß diese Figur allen Bedingungen genügt, die in der Aufgabenstellung gefordert wurden. Ein solcher Beweis ist in allen den Fällen unerläßlich, in denen bei der Analyse in irgendeiner Weise die ursprünglichen Bedingungen durch andere Bedingungen ersetzt wurden, die erst die Durchführung der Konstruktion ermöglichten. Durch den Beweis ist genau genommen zu zeigen, daß die neuen Bedingungen mit den ursprünglichen Bedingungen äquivalent sind. Falls bei der Analyse die ursprünglichen

Bedingungen der Aufgaben nicht geändert wurden, kann auf den Beweis verzichtet werden.

4. Diskussion. Durch eine Diskussion der Lösung wird geklärt, in welchen Fällen eine Lösung der Aufgabe überhaupt möglich ist und wie viele Lösungen die Aufgabe in Abhängigkeit von den gegebenen Elementen (ihrer Anzahl, ihrer gegenseitigen Lage, ihrer Größe usw.) haben kann.[1])

Die Lösung von Konstruktionsaufgaben nach diesem Schema erläutern wir weiter unten an einigen Beispielen.

4.3. Die algebraische Methode. Sind die Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Elementen einer Konstruktionsaufgabe in analytischer Form ausdrückbar, so lassen sich die Bedingungen, die an die gesuchten Elemente gestellt sind, vielfach ebenfalls analytisch ausdrücken.

Es sei z. B. die folgende Aufgabe zu lösen: *Man konstruiere ein Quadrat, dessen Flächeninhalt dreimal so groß ist wie der Flächeninhalt eines gegebenen Quadrats.*

Bezeichnen wir die Seitenlänge des gesuchten Quadrats mit x und die des gegebenen Quadrats mit a, so wird die zu lösende Konstruktionsaufgabe analytisch durch die Gleichung $x^2 = 3a^2$ beschrieben. Ihre Lösung

$$x = a\sqrt{3}$$

(der negative Wert der Wurzel der Gleichung genügt nicht der Bedingung der Aufgabe) ergibt den analytischen Ausdruck für die Seitenlänge des zu konstruierenden Quadrats. Die analytische Beschreibung einer Konstruktionsaufgabe (z. B. durch eine Gleichung) und die analytische Charakterisierung ihrer Lösung (z. B. als Wurzel dieser Gleichung) gestatten es häufig, einfach eine geometrische Lösung zu finden, und geben dann auch Aufschluß darüber, mittels welcher Instrumente man sie durchführen kann (oft kann man das sofort aus dem erhaltenen analytischen Ausdruck ablesen); ebenso erleichtern sie die Diskussion der Lösung.[2])

Diese Methode ist voll ausgebaut in der analytischen Geometrie, in der geometrische Untersuchungen mit den Mitteln der Algebra durchgeführt werden.

Im Geometrieunterricht der Schule lernt man schon früh die Konstruktionen von Strecken, deren Länge gleich der Summe oder der Differenz der Längen gegebener Strecken sind, wie z. B. von $x = a \pm b$; $x = a + b - c + d$; $x = 3a \pm 2b$ usw.

---

[1]) Als Beispiel erwähnen wir die bekannte Aufgabe der Konstruktion eines n-Ecks, wenn in der Ebene die Mittelpunkte seiner Seiten gegeben sind [vgl. etwa И. М. Яглом, Геометрические преобразования (I. M. Jaglom, Geometrische Transformationen). Band I, Moskau 1957, Aufgabe 13), die für ungerades n stets eine eindeutig bestimmte Lösung und für gerades n keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

[2]) Vgl. den Artikel „Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal", S. 203–227.

Später lernt man die Konstruktion der vierten Proportionalen zu drei gegebenen Strecken, die der Gleichung

$$x = \frac{bc}{a}$$

genügt, die Konstruktion der mittleren Proportionalen zweier gegebener Strecken, d. h. von

$$x = \sqrt{ab},$$

die Konstruktionen nach der Formel

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

usw. Gerade auf diese Konstruktionen lassen sich viele andere Konstruktionen durch Anwendung der algebraischen Methode zur Lösung von Konstruktionsaufgaben zurückführen.

Wir veranschaulichen das Gesagte durch Beispiele.

Aufgabe 1. *Gegeben sei ein Dreieck ABC. Man konstruiere eine Gerade, die parallel zu seiner Grundlinie ist und seinen Flächeninhalt halbiert.*

Lösung. Analyse. Wir zeichnen das Dreieck ABC und nehmen an, daß PQ die gesuchte Gerade ist (Abb. 35). Dann gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke PAQ und BAC für ihre Flächeninhalte die Beziehung

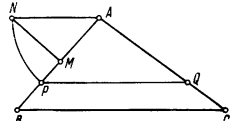


Abb. 35

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{|AB|^2}{|AP|^2} = \frac{2}{1},$$

woraus

$$|AP| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}}$$

folgt.

Diese Beziehung liefert uns sofort eine sehr einfache Konstruktion für die gesuchte Gerade: Wir halbieren die Strecke $\overline{AB}$ (Mittelpunkt M) und konstruieren das rechtwinklige und gleichschenklige Dreieck AMN ($\sphericalangle AMN = 90°$). Für die Hypotenuse $\overline{AN}$ dieses Dreiecks gilt

$$|AN| = \sqrt{|MN|^2 + |MA|^2} = \frac{|AB|}{\sqrt{2}},$$

d. h., ihre Länge ist gleich der der gesuchten Strecke $\overline{AP}$. Wir brauchen also nur noch im Punkt A auf der Strecke $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{AN}$ abzutragen und durch P die Parallele zur Geraden BC zu ziehen.

Der Beweis für die Richtigkeit der beschriebenen Konstruktion wiederholt in umgekehrter Reihenfolge die in der „Analyse" durchgeführten Überlegungen. Die Diskussion bietet ebenfalls keine Schwierigkeiten; aus den analytischen Überlegungen folgt, daß die Aufgabe stets eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Wir behandeln jetzt eine etwas kompliziertere Aufgabe.

Aufgabe 2. *Gegeben seien ein Winkel LMN (kleiner als 180°) und ein Punkt A auf seiner Winkelhalbierenden MP. Man konstruiere durch den gegebenen Punkt A eine Gerade, so daß die Strecke $\overline{BC}$ eine gegebene Länge a hat, wenn B und C die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Schenkeln des gegebenen Winkels sind.*

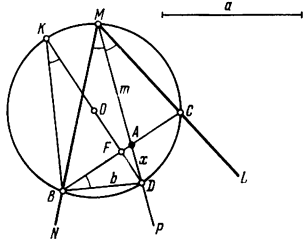


Abb. 36

Analyse. Wir nehmen an, die Aufgabe sei gelöst (Abb. 36). Dann konstruieren wir den Umkreis des Dreiecks MBC. Seinen Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden MP bezeichnen wir mit D und verbinden die Punkte B und D. Es ist leicht zu sehen, daß die Dreiecke BMD und BAD ähnlich sind. Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgt

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|DM|}{|BD|}$$

oder

$$|AD| \cdot |DM| = |BD|^2.$$

Wir setzen $|MA| = m$, $|BD| = b$, $|AD| = x$ und stellen fest, daß es zur Lösung unserer Aufgabe ausreicht, eine Strecke zu finden, deren Länge der Gleichung

$$b^2 = (x + m)\, x$$

genügt. Die Strecke b kann dabei als Hypotenuse des Dreiecks BDF erhalten werden, dessen eine Kathete ($\overline{BF}$) die Länge $\frac{a}{2}$ hat und dessen dieser Kathete anliegende spitze Winkel ($\sphericalangle FBD$) gleich $\frac{\alpha}{2}$ ist, wenn α die Größe des Ausgangswinkels LMN (Abb. 36) bezeichnet (denn $\overline{KD}$ ist ein Durchmesser des Kreises, halbiert also die Sekante $\overline{BC}$, und wegen $\alpha < 180°$ ist $\frac{\alpha}{2} < 90°$).

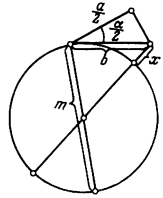


Abb. 37

Konstruktion. Zunächst konstruieren wir wie beschrieben die Hilfsstrecke b und anschließend eine Strecke, deren Länge x der Formel

$$x(x + m) = b^2$$

genügt. Offenbar kann man eine solche Strecke als äußeren Teil einer von einem gewissen Punkt durch einen Kreis vom Durchmesser m gezogenen Sekante der Länge $x + m$ erhalten, sofern die vom gleichen Punkt an diesen Kreis gezogene Tangente die Länge b hat. Diese Konstruktion ist in Abb. 37 dargestellt.

Die gesuchte Gerade BC läßt sich dann auf folgende Weise konstruieren: Im Punkt A wird auf der Winkelhalbierenden des Winkels LMN als Fortsetzung der Strecke $\overline{MA}$ die Strecke $\overline{AD}$ der Länge x abgetragen (Abb. 36); sodann schlägt man um den Punkt D den Kreis vom Radius b und erhält als Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden MN den Punkt B; der Punkt C ergibt sich schließlich als Schnittpunkt der Geraden BA und ML.

Der Beweis folgt wiederum leicht aus der oben durchgeführten Analyse.

Wir kommen nun zur Diskussion der erhaltenen Lösung unserer Aufgabe. Zunächst erkennt man leicht, daß sich für beliebiges a, m und $\alpha < 180°$ die Strecken b und x stets konstruieren lassen, und zwar in eindeutiger Weise. Falls die Gerade MN und der Kreis um den Punkt D mit dem Radius b sich nicht schneiden (Abb. 38), d. h., wenn

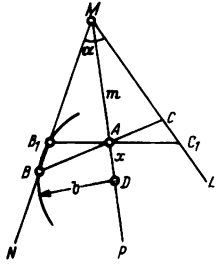


Abb. 38

$$b < (x + m) \sin \frac{\alpha}{2} \qquad (*)$$

gilt, besitzt die gestellte Aufgabe keine Lösung. Ist

$$b = (x + m) \sin \frac{\alpha}{2}, \qquad (**)$$

so existiert genau eine Lösung (der Kreis um D vom Radius b hat dann die Gerade MN als Tangente), während im Fall

$$b > (x + m) \sin \frac{\alpha}{2} \qquad (***)$$

die Aufgabe zwei Lösungen besitzt, wobei die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{B_1C_1}$, wie man leicht sieht, symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden MP liegen.

Die Bedingungen (*) bis (***) kann man noch so umformen, daß sie nur die ursprünglich gegebenen Größen m, a, α enthalten. Wegen $x(x + m) = b^2$, d. h.

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{x + m},$$

ist nämlich die Bedingung (*) äquivalent mit

$$\frac{x}{b} < \sin \frac{\alpha}{2}$$

oder

$$x < b \sin \frac{\alpha}{2};$$

aus dieser Ungleichung und der Beziehung $x(x + m) = b^2$ erhält man

$$b \sin \frac{\alpha}{2} \left(b \sin \frac{\alpha}{2} + m \right) > b^2$$

oder

$$m > \frac{b^2 - b^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{b \sin \frac{\alpha}{2}} = b \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

was wegen $b = \frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ mit

$$m > \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

äquivalent ist; die Aufgabe besitzt also genau dann keine Lösung, wenn zwischen den gegebenen Größen m, a, α die zuletzt genannte Beziehung besteht. Analog besitzt die Aufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung im Fall

$$m = \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

und zwei Lösungen im Fall

$$m < \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}.$$

§ 5. Die Anwendung von geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene

5.1. Allgemeine Bemerkungen. In manchen Fällen kann man bei der Umformung einer gegebenen Aufgabe mit Vorteil geometrische Transformationen benutzen. Am häufigsten finden folgende Transformationen Verwendung:

1. Spiegelungen an einer Achse,
2. Drehungen (insbesondere Spiegelungen an einem Punkt),
3. Parallelverschiebungen,
4. Ähnlichkeitstransformationen (insbesondere Homothetien),
5. Inversionen.

Jedoch kann sich in anderen Fällen auch die Verwendung anderer Transformationen, z. B. affiner oder projektiver Transformationen[1]), als nützlich erweisen. Dabei ist zu beachten, daß für die Anwendung von geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten bestehen.

Einerseits kann man nämlich die gesamte (im Verlauf der Analyse angefertigte) Zeichnung einer gewissen geometrischen Transformation unterwerfen und dadurch unter Umständen die Zeichnung so vereinfachen, daß die Lösung der Aufgabe wesentlich erleichtert wird. So führt z. B. eine Inversion gewisse Geraden in Kreise und gewisse Kreise in Geraden über, was sich als wesentliche Vereinfachung bei der Lösung einer Aufgabe erweisen kann; ein Beispiel für eine solche Anwendung einer Inversion findet der Leser im folgenden Abschnitt (Aufgabe 5).[2]) In entsprechender Weise können auch affine Transformationen verwendet werden, mit deren Hilfe man z. B. ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges (bzw. sogar ein gleichseitiges) Dreieck überführen kann, was in einem konkreten Fall die Lösung einer Konstruktionsaufgabe außerordentlich vereinfachen kann. Es ist klar, daß die Verwendung von Bewegungen in dieser Weise sinnlos ist, weil eine Bewegung eine Zeichnung in eine ihr gleiche Zeichnung überführt, wodurch keinerlei Vereinfachung erzielt wird.

Die zweite Möglichkeit einer Anwendung von geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben (die mit Erfolg auch Bewegungen auszunutzen gestattet) besteht darin, daß man die Transformation nicht auf die gesamte Zeichnung, sondern nur auf einen geeigneten Teil von ihr anwendet. Dadurch kann man in einer Reihe von Fällen die in den Bedingungen einer Aufgabe gegebenen geometrischen Elemente in eine übersichtlichere

---

[1]) Bezüglich der Definitionen und der einfachsten Eigenschaften der erwähnten Transformationen verweisen wir auf den Artikel „Geometrische Transformationen" in diesem Band der EdEM.

[2]) Weitere interessante Beispiele hierfür bieten die Lösungen der Aufgaben 4 bis 6 in Abschnitt 2.2 dieses Artikels. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Lage zueinander bringen und auf diese Weise zu einer Idee für die Durchführung der geforderten Konstruktion gelangen. Beispiele für eine solche Anwendung geometrischer Transformationen findet der Leser in den Aufgaben 1 bis 4 im folgenden Abschnitt.

5.2. Beispiele. Wir behandeln nun einige Aufgaben, zu deren Lösung wir geometrische Transformationen heranziehen.

Aufgabe 1. *Man konstruiere ein Dreieck ABC mit gegebener Grundlinie* $|BC| = a$, *gegebener Höhe* h *und gegebener Differenz* φ *der Basiswinkel* (d. h. für das $\sphericalangle B - \sphericalangle C = \varphi$ ist).

Lösung. Hier ist es zweckmäßig, die Spiegelung an einer Geraden zu verwenden. Wir setzen zunächst voraus, die Aufgabe sei bereits gelöst, und bezeichnen mit B' den Punkt, der zum Punkt B symmetrisch bezüglich der Geraden l liegt, die durch den Punkt A geht und zur Seite BC parallel ist (Abb. 39). Offenbar gilt dann $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 1 = \sphericalangle B$, und folglich ist $\sphericalangle 3 = 180° - \sphericalangle B$. Ferner ist $\sphericalangle 4 = \sphericalangle C$ und folglich $\sphericalangle B'AC = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 180° + \sphericalangle C - \sphericalangle B = 180° - \varphi$. Hieraus ergibt sich folgende Lösung der Aufgabe. Wir zeichnen in der Ebene eine Strecke $\overline{BC}$ der Länge a und ziehen im Abstand h von der Geraden BC die zu BC parallele Gerade l. Sodann konstruieren wir den bezüglich der Geraden l zum Punkt B symmetrisch gelegenen Punkt B'. Den gesuchten Punkt A gewinnen wir schließlich als Schnittpunkt der Geraden l mit dem Kreisbogen über der Sehne $\overline{B'C}$, dem der Winkel $180° - \varphi$ einbeschrieben ist.

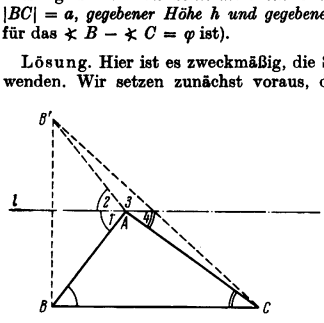


Abb. 39

Die betrachtete Aufgabe hat stets genau eine Lösung (sofern $|\varphi| < 180°$ ist).

Aufgabe 2. *Gegeben seien zwei Kreise* S_1, S_2, *ein Punkt* A *und ein Winkel* φ. *Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck* ABC ($|AB| = |AC|$), *das bei* A *den Winkel* φ *hat und bei dem* B *auf* S_1 *und* C *auf* S_2 *liegt.*

Lösung. Wir setzen zunächst wieder voraus, die Aufgabe sei schon gelöst (Abb. 40), und unterwerfen den Kreis S_1 der Drehung um den Punkt A mit dem Winkel φ. Dadurch geht S_1 in einen Kreis S_1' und der Punkt B des Kreises S_1 in den Punkt C des Kreises S_2 über. Andererseits muß der Punkt C als Bild von B dem Kreis S_1' angehören. Der gesuchte Punkt C ist also der Schnittpunkt der Kreise S_2 und S_1'. Für die Lösung der Aufgabe genügt es somit, den Kreis S_1' zu konstruieren (seinen Mittelpunkt erhält man als Ecke O_1'

des gleichschenkligen Dreiecks $AO_1'O_1$ mit dem Winkel φ im Eckpunkt A) und seine Schnittpunkte mit dem Kreis S_2 zu bestimmen.

Da zwei verschiedene Kreise entweder keinen oder genau einen oder genau zwei Punkte gemeinsam haben können und man die Drehung um den Winkel φ

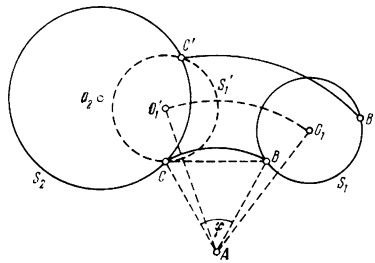


Abb. 40

entweder im Uhrzeigersinn oder entegegen dem Uhrzeigersinn ausführen kann, besitzt die Aufgabe bei Kreisen S_1 und S_2 mit verschiedenem Radius bis zu vier Lösungen. Falls dagegen S_1 und S_2 denselben Radius haben, kann die Aufgabe auch unendlich viele Lösungen besitzen (wenn nämlich S_1 mit S_2 zusammenfällt).

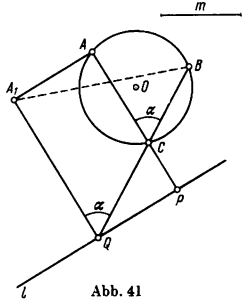


Abb. 41

Aufgabe 3. *Gegeben seien ein Kreis S, zwei seiner Punkte A, B und eine Gerade l. Man konstruiere einen Punkt C, so daß die Geraden AC und BC auf der Geraden l eine Strecke $\overline{PQ}$ gegebener Länge m ausschneiden.*

Analyse. Wir setzen voraus, die Aufgabe sei bereits gelöst (Abb. 41), und verschieben den Punkt A in Richtung der Geraden l um eine Strecke der Länge m. Den dabei erhaltenen Punkt A_1 verbinden wir mit dem Punkt Q. Dann ist AA_1QP ein Parallelogramm (denn es ist $|AA_1| = |PQ|$ und $AA_1 \parallel PQ$) und folglich $\sphericalangle A_1QB = \sphericalangle ACB = \alpha$, wobei α der dem Kreis S über der Sehne $\overline{AB}$ einbeschriebene Winkel ist.

Hiermit erhalten wir folgende

Konstruktion. Wir verschieben den Punkt A parallel zu der gegebenen Geraden l um eine Strecke der Länge m. Den so erhaltenen Punkt bezeichnen

wir mit A_1. Über der Strecke $\overline{A_1B}$ konstruieren wir den Kreisbogen, in den sich der Winkel α einbeschreiben läßt. Den Schnittpunkt dieses Bogens mit der gegebenen Geraden bezeichnen wir mit Q und erhalten schließlich den gesuchten Punkt C als Schnittpunkt des Kreises S mit der Geraden BQ.

Wir überlassen es dem Leser, den Beweis zu führen und die erhaltene Lösung zu diskutieren. Wir merken an, daß in Abhängigkeit von der Größe und der

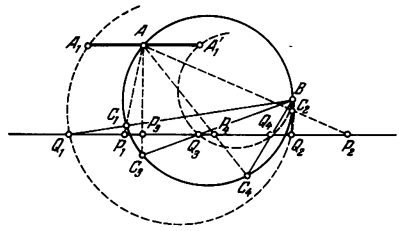


Abb. 42

gegenseitigen Lage der gegebenen Elemente die Aufgabe bis zu vier Lösungen haben kann (denn die Parallelverschiebung des Punktes A um die Strecke m kann in zwei Richtungen erfolgen; vgl. Abb. 42).

Aufgabe 4. *Gegeben seien ein Punkt A und zwei sich schneidende Geraden f und g. Man konstruiere eine Gerade durch den Punkt A, so daß die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{AG}$ zwischen A und den Schnittpunkten F und G der gesuchten Geraden mit den gegebenen Geraden f und g ein gegebenes Verhältnis k besitzen:* $\dfrac{|AG|}{|AF|} = k$.

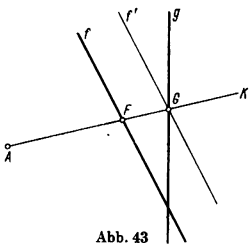


Abb. 43

Wir setzen zunächst wieder voraus, die Aufgabe sei bereits gelöst (Abb. 43), und unterwerfen die Gerade f der Homothetie mit dem Zentrum A und dem Koeffizienten k. Dabei geht die Gerade f in eine Gerade f' und der Punkt F in den Punkt G über. Der Punkt G gehört also sowohl der Geraden f' als auch der Geraden g an, d. h., er ist ihr Schnittpunkt. Hiermit erhält man leicht die gesuchte Konstruktion. Sind die Geraden f und g nicht parallel, so besitzt die Aufgabe stets genau eine Lösung. Ist dagegen $f \parallel g$, so hat die Aufgabe entweder keine Lösung (falls f' nicht mit g zusammenfällt) oder unendlich viele Lösungen (falls f' mit g zusammenfällt).

Aufgabe 5. *Man konstruiere einen Kreis, der durch zwei gegebene Punkte A und B geht und eine gegebene Gerade l als Tangente besitzt.*

Analyse. Zur Lösung dieser Aufgabe genügt es, den Berührungspunkt C des gesuchten Kreises mit der gegebenen Geraden zu finden. Es sei S der gesuchte Kreis (Abb. 44). Wir wenden eine Inversion[1]) an, wobei wir als Inversionszentrum einen der gegebenen Punkte (etwa B) und als Radius des Inversionskreises den Abstand der Punkte A und B wählen.

Bei dieser Inversion geht die Gerade l in einen Kreis L über, der durch das Zentrum B der Inversion geht, und der Kreis S in eine Gerade m, die durch den Punkt A verläuft (der Punkt A geht nämlich bei der Inversion in sich über) und die den Kreis L in demjenigen Punkt C_1 berührt, in den der Punkt C bei der Inversion abgebildet wird.

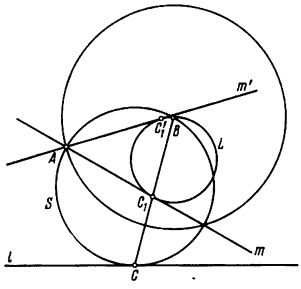


Abb. 44

Konstruktion. Wir ziehen vom Punkt A die Tangente m an den Kreis L und erhalten den Berührungspunkt C_1. Die Gerade BC_1 schneidet dann die gegebene Gerade l im gesuchten Punkt C.

Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion folgt unmittelbar aus der vorangehenden Analyse.

Diskussion. In Abhängigkeit von der Lage der Punkte A, B und der Geraden l kann die Aufgabe zwei, eine oder keine Lösung haben.

§ 6. Näherungsmethoden für geometrische Konstruktionen und ihre Anwendung in der Praxis

6.1. Exakte und angenäherte Lösungen von Konstruktionsaufgaben. Neben theoretisch exakten Lösungen betrachtet man in der Theorie der geometrischen Konstruktionen auch Näherungslösungen von Konstruktionsaufgaben. Darunter versteht man das Ergebnis einer gewissen Konstruktion, das mit der gesuchten Lösung nur bis auf einen bewußt zugelassenen Fehler übereinstimmt. Die Konstruktion selbst heißt in diesem Fall eine *Näherungskonstruktion.*

[1]) Bezüglich der Definitionen und der Eigenschaften der Inversion verweisen wir auf den Artikel „Geometrie der Kreise", S. 477–485.

Solche Näherungskonstruktionen verwendet man schon lange bei der Durchführung ganz verschiedenartiger graphischer Arbeiten, insbesondere auch bei der graphischen Lösung numerischer Aufgaben. Das erklärt sich daraus, daß der technische Aufwand bei einer Näherungskonstruktion in vielen Fällen wesentlich geringer ist als bei einer theoretisch genauen Konstruktion und trotzdem die für die Praxis erforderliche Genauigkeit gewährleistet ist, was insbesondere dann wichtig ist, wenn hinsichtlich der Genauigkeit nur geringe Anforderungen gestellt sind. Häufig spielen Näherungskonstruktionen auch dann eine Rolle, wenn die dem Zeichner zur Verfügung stehenden Instrumente keine exakte Lösung einer gestellten Aufgabe zulassen. Mit näherungsweisen graphischen Methoden lassen sich viele Typen von Gleichungen lösen, für die eine exakte analytische Lösung entweder unmöglich oder mit großer Schwierigkeit numerischer Art verbunden ist. Bei einer Näherungskonstruktion beeinflussen nicht nur die unvermeidlichen Fehler bei der Ausführung der elementaren Operationen den Gesamtfehler der tatsächlich angefertigten Konstruktion, sondern auch der Fehler des gewählten Verfahrens zur näherungsweisen Lösung der Aufgabe. Daher ist zur Beurteilung der Brauchbarkeit einer bestimmten Näherungskonstruktion eine Abschätzung ihrer theoretischen Genauigkeit erforderlich.

Theoretisch läßt sich jede Konstruktionsaufgabe näherungsweise mit beliebigem Genauigkeitsgrad lösen. Dies folgt z. B. aus dem folgenden Satz, den wir hier ohne Beweis anführen: *Die Menge aller der Punkte, die man ausgehend von irgend zwei verschiedenen Punkten unter alleiniger Verwendung des Zirkels konstruieren kann, liegt in der Ebene überall dicht.* Wenn also die verlangte exakte Lösung einer Aufgabe in der Ermittlung eines bestimmten Punktes M (oder mehrerer Punkte) aus gegebenen Elementen besteht, unter denen sich mindestens zwei verschiedene Punkte befinden, so kann man allein mit Hilfe eines Zirkels (und folglich erst recht mittels Zirkel, Lineal und evtl. weiterer Instrumente) einen Punkt M_k konstruieren, der entweder mit dem Punkt M zusammenfällt oder zumindest ihm beliebig nahe kommt.

Das praktische Auffinden eines geeigneten Näherungsverfahren zur Lösung einer gegebenen Konstruktionsaufgabe ist dagegen vielfach sehr schwierig.

Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe, einen gegebenen Kreisbogen zu „rektifizieren", d. h. eine Strecke zu konstruieren, deren Länge gleich der Länge des gegebenen Bogens ist. Diese Aufgabe tritt in der Ingenieurpraxis häufig auf.

6.2. Die Rektifizierung eines Kreisbogens. Wegen der Transzendenz der Zahl π ist, wie aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen bekannt ist, eine exakte Lösung dieser Aufgabe mittels Zirkel und Lineal unmöglich. Daher wurde der Suche nach hinreichend einfachen und hinreichend genauen graphischen Verfahren zur näherungsweisen Rektifizierung eines Kreisbogens viel Aufmerksamkeit geschenkt. Viel Interesse wurde auch der allgemeineren Aufgabe der Rektifizierung von Bögen der anderen Kurven zweiter Ordnung zuteil. Wir geben einige Verfahren zur näherungsweisen Lösung dieser Aufgaben an.

1. Es ist graphisch die Länge eines Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ (Abb. 45) zu bestimmen.

Dazu bezeichne C bzw. D den Mittelpunkt des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ bzw. seiner Sehne $\overline{AB}$. Vom Punkt C aus ziehen wir die Senkrechte CE zur Sehne $\overline{AC}$ bis zum Schnittpunkt E mit der Sehne $\overline{AB}$. Es sei F der Punkt auf $\overline{AB}$, für den $|DF| = \frac{2}{3}|DE|$ gilt. Dann ist die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ ungefähr gleich der doppelten Länge der Strecke $\overline{AF}$.

Wir bestimmen den Fehler dieser Konstruktion. Wie man leicht sieht, gilt

$$|DE| = R \sin\frac{\alpha}{2} \tan^2\frac{\alpha}{4},$$

$$\frac{2}{3}|DE| = \frac{2}{3} R \sin\frac{\alpha}{2} \tan^2\frac{\alpha}{4},$$

$$|AF| = |AD| + \frac{2}{3}|DE| = R \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\tan^2\frac{\alpha}{4}\right).$$

Die Bogenlänge wird exakt durch die Formel $|\overset{\frown}{AB}| = \alpha R$ gegeben, wobei R den Radius des Bogens und α seinen Winkel im Bogenmaß bezeichnet. Wir haben nun näherungsweise die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ durch $|\overset{\frown}{AB}| \approx 2\,|AF| = 2R \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\tan^2\frac{\alpha}{4}\right)$ wiedergegeben. Der absolute Fehler Δ ist dabei gleich dem absoluten Betrag der Differenz zwischen dem wirklichen Wert und dem gefundenen Näherungswert der gesuchten Größe, d. h.

$$\Delta = R\left|2 \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\tan^2\frac{\alpha}{4}\right) - \alpha\right|,$$

während der relative Fehler δ als Quotient von absolutem Fehler und wirklichem Wert durch

$$\delta = \frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\tan^2\frac{\alpha}{4}\right) - 1$$

gegeben wird.

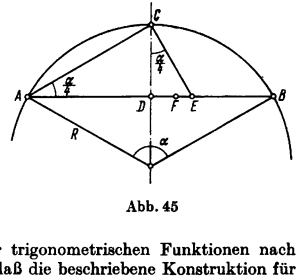


Abb. 45

Durch Entwicklung der trigonometrischen Funktionen nach Potenzen von α verifiziert man leicht, daß die beschriebene Konstruktion für nicht zu große Winkel α den verhältnismäßig kleinen relativen Fehler von ungefähr $\frac{1}{1920}\alpha^4$ aufweist. Für große Bögen ist der Fehler dieser Konstruktion dagegen groß; so erhält man für $\alpha = \pi$ z. B. $\delta = \frac{10}{3\pi} - 1 \approx 0{,}061$.

2. Ein anderes Verfahren zur Rektifizierung von Kreisbögen ist weitgehend brauchbar für Bögen, die kleiner als 40° sind (für größere Bögen wird der Fehler erheblich). Bei diesem Verfahren (Abb. 46) zieht man durch den Mit-

telpunkt O des Kreises die Senkrechte zur Sehne $\overline{AB}$ und trägt auf ihr vom Mittelpunkt C des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ aus die Strecke $|CL| = 3R$ ab. Durch den Punkt C zieht man sodann die Tangente an den Bogen bis zu ihren Schnittpunkten mit den Geraden AL und BL in den Punkten M und N. Die Länge der Strecke $\overline{MN}$ ist ungefähr gleich der Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$. Zur Abschätzung des Fehlers, den man bei diesem Verfahren begeht, berechnen wir zunächst die Länge der Strecke $\overline{MN}$.

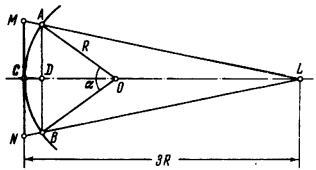


Abb. 46

Aus $|AB| = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ und der Ähnlichkeit der Dreiecke ABL und MNL erhält man

$$|MN| = R \frac{6 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 + \cos \frac{\alpha}{2}},$$

d. h., der absolute Fehler wird durch

$$\Delta = ||MN| - |\overset{\frown}{AB}|| = R \left| \frac{6 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 + \cos \frac{\alpha}{2}} - \alpha \right|$$

und der relative Fehler durch

$$\delta = \left| \frac{6 \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha \left(2 + \cos \frac{\alpha}{2}\right)} - 1 \right|.$$

gegeben. Für kleine α ist der relative Fehler ungefähr gleich $\frac{\alpha^4}{2880}$.

3. Zur näherungsweisen Rektifizierung eines Halbkreises können die folgenden beiden einfachen Verfahren benutzt werden:

Die Konstruktion des ersten Verfahrens ist vollständig aus Abb. 47 ersichtlich, in der a_3 bzw. a_4 die Seiten des dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks bzw. Quadrats bedeuten. Wir behaupten, daß die Länge der Strecke $\overline{BC}$ ungefähr gleich der Länge des Bogens des Halbkreises ist. In der Tat ist

$$|BC| = |BO| + |OC| = a_3 + a_4 = R(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = R(1{,}732 + 1{,}414) = 3{,}146R,$$

d. h., der relative Fehler der Konstruktion beträgt ungefähr 0,15%.

Beim zweiten Verfahren (Abb. 48) konstruiert man auf dem Durchmesser $\overline{AB}$ zunächst den Winkel COA von 30°. Vom Punkt C aus trägt man sodann

auf dem Strahl $\overrightarrow{CA}$ die Strecke $|CD| = 3R$ ab und verbindet die Punkte B und C. Die Länge der Strecke $\overline{BD}$ ist ungefähr gleich der Länge des Bogens des Halbkreises. In der Tat entnimmt man aus der Abbildung sofort

$$|AC| = R \cdot \tan 30° = \frac{R\sqrt{3}}{3}, \qquad |AD| = 3R - \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{3}(9 - \sqrt{3}),$$

$$|BD| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} \quad \text{oder} \quad |BD| = \frac{R}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} \approx 3{,}14 \cdot R.$$

Der relative Fehler ist hierbei ungefähr 0,002%.

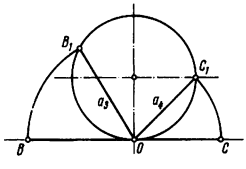


Abb. 47

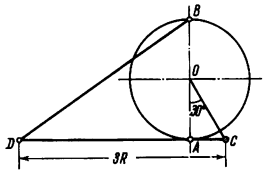


Abb. 48

6.3. Die graphisch-analytische Methode und die Methode der sukzessiven Approximationen. Bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben verwendet man häufig auch Angaben, die mit Hilfe vorangehender Berechnungen gewonnen wurden. Diese Methode der näherungsweisen Lösung von Konstruktionsaufgaben bezeichnet man als *graphisch-analytische Methode*.

Zum Beispiel läßt sich die Aufgabe der Teilung eines Kreises in n gleiche Teile näherungsweise dadurch lösen, daß man (etwa mittels geeigneter Tabellen) die Länge der Sehnen berechnet, und in der Praxis wird sie häufig, insbesondere beim Anreißen, auch so gelöst. Auch die Konstruktion spezieller Kurven durch die Konstruktion von Punkten nach ihren Koordinaten (z. B. beim Anreißen von Schablonen, bei der Anfertigung von Zeichnungen für Kopiervorgänge usw.) erfolgt häufig auf Grund vorausgehender Berechnungen. Die weite Verbreitung dieser Methode erklärt sich daraus, daß man mit ihrer Hilfe vielfach die Konstruktion einfacher durchführen kann als bei einer rein geometrischen Lösung, und oft ist sie der einzig mögliche Weg zur Lösung einer Aufgabe. Theoretisch läßt sich bei dieser Methode der Fehler (der Berechnungen) beliebig klein machen.

Die Anwendung der graphisch-analytischen Methode ist aber keineswegs immer zweckmäßig, weil sich die durchzuführenden Berechnungen oft als sehr umfangreich erweisen.

Eine weitere nützliche Methode zur näherungsweisen Lösung von Konstruktionsaufgaben ist die sogenannte *Methode der sukzessiven Approximationen*.

Diese Methode besteht in der laufenden Wiederholung einer gewissen Grundkonstruktion, die zu Beginn auf gewisse gegebene Elemente und dann jeweils auf eine Figur angewendet wird, die als Ergebnis der vorhergehenden Konstruktion gewonnen wurde. Strebt dabei mit wachsender Zahl von Konstruktionsschritten der absolute Fehler der Ergebnisse gegen Null, so konvergiert die Folge dieser Ergebnisse gegen die gesuchte Lösung, d. h., dann ist theoretisch die Approximation der exakten Lösung mit beliebiger Genauigkeit möglich.

Die Abschätzung der Genauigkeit einer Konstruktion wird bei Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen allerdings gewöhnlich dadurch erschwert, daß bei der Konstruktion häufig eine größere Anzahl von Operationen durchgeführt werden muß. Außerdem bereitet die analytische Bestimmung der Genauigkeit der nullten Näherung oft Schwierigkeiten, weil diese in vielen Fällen mehr oder weniger willkürlich gewählt werden kann. Aus diesem Grunde wird gewöhnlich die Konstruktion solange durchgeführt, bis die Ergebnisse zweier aufeinanderfolgender Grundkonstruktionen praktisch zusammenfallen.

Die Anzahl der Grundkonstruktionen, die zur näherungsweisen Lösung einer Aufgabe erforderlich sind, hängt von der Konvergenzgeschwindigkeit der Approximation ab. Bei einer zweckmäßig gewählten Grundkonstruktion genügen mitunter ein bis zwei Näherungen. Ein einfaches Beispiel für die Methode der sukzessiven Approximationen gibt die folgende näherungsweise Lösung der Aufgabe der Dreiteilung eines Winkels. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

oder

$$\frac{\varphi}{3} = \frac{\varphi}{4} + \frac{\varphi}{4^2} + \cdots + \frac{\varphi}{4^n} + \cdots.$$

Ist also ein Winkel $\varphi = AOB$ gegeben, so kann man mit Hilfe von Zirkel und Lineal näherungsweise seinen dritten Teil dadurch konstruieren, daß man fortlaufend in geeigneter Weise Winkel halbiert und addiert.

Zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels mittels Zirkel und Lineal kann man natürlich auch die alternierende unendliche Reihe

$$\frac{\varphi}{3} = \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{4} + \frac{\varphi}{8} - \frac{\varphi}{16} \pm \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\varphi}{2^n} + \cdots$$

verwenden. Diese Reihe konvergiert jedoch schlechter als die Reihe mit dem allgemeinen Glied $a_n = \frac{1}{4^n}$.

Auch die näherungsweise Rektifizierung eines Kreisbogens läßt sich mit der Methode der sukzessiven Approximationen durchführen. Die Aufgabe besteht in diesem Fall darin, ein hinreichend einfaches Konstruktionsverfahren für eine Folge von Strecken anzugeben, so daß die Länge einer jeder der Strecken

gleich der Länge eines gewissen dem Bogen einbeschriebenen (oder umbeschriebenen) Polygonzuges ist und dabei die Folge der Polygonzüge den Kreisbogen in bekanntem Sinne beliebig genau approximiert. Wir geben hier ein elegantes Verfahren zur Bestimmung der Folge der Längen einer gewissen solchen Folge von einbeschriebenen Polygonzügen.

Es sei $\overset{\frown}{AB}$ ein Bogen des Kreises vom Radius R mit dem Mittelpunkt O, dessen Zentriwinkel gleich α ist (Abb. 49). Als nullte Näherung wählen wir die Sehne $\overline{AB}$. Sodann konstruieren wir die Senkrechte AN auf OA im Punkt A, die Winkelhalbierende AA_1 des Winkels BAN und die Senkrechte auf AB im Punkt B, deren Schnittpunkt mit AA_1 wir mit B_1 bezeichnen. Die Winkelhalbierende AA_1 des Winkels BAN schneidet den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in seinem Mittelpunkt C_1, und daher gilt $|BC_1| = |AC_1| = |B_1C_1|$; folglich ist $|AB_1| = |BC_1| + |C_1A|$, und die erste Näherung (die Länge des Polygons AC_1B) ist

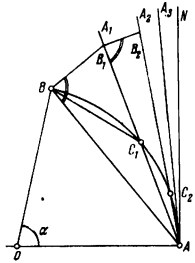


Abb. 49

$$p_1 = |AB_1|.$$

Die zweite Näherung p_2 (die Länge des dem Bogen einbeschriebenen Streckenzuges, der aus vier Strecken gleicher Länge besteht) findet man auf analoge Weise: Wir konstruieren die Winkelhalbierende AA_2 des Winkels A_1AN und im Punkt B_1 die Senkrechte auf AA_1, die AA_2 im Punkt B_2 schneide. Wegen

$$|AC_2| = \frac{1}{4}|AB_2|$$

ist dann

$$|AB_2| = 4\,|AC_2|$$

und

$$p_2 = |AB_2|.$$

Setzen wir diesen Prozeß entsprechend fort, so erhalten wir eine Folge von Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, ..., die gegen eine Strecke konvergiert, deren Länge gleich der Länge des zu rektifizierenden Bogens $\overset{\frown}{AB}$ ist.

Wir schätzen die Konvergenzgeschwindigkeit des Prozesses ab. Der Fehler der i-ten Näherung wird gegeben durch

$$\Delta_i = \alpha R - 2^{i+1}R \sin\frac{\alpha}{2^{i+1}},$$

und folglich ist

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} = \frac{\alpha - 2^{i+2}\sin\dfrac{\alpha}{2^{i+1}}}{\alpha - 2^{i+1}\sin\dfrac{\alpha}{2^{i+1}}}.$$

Man zeigt leicht, daß der Grenzwert

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}$$

gleich $\frac{1}{4}$ ist. Daher verringert sich der Fehler bei jeder Wiederholung der Grundkonstruktion ungefähr auf den vierten Teil.

Aus dieser Konstruktion kann man eine bemerkenswerte Formel herleiten, die zuerst von EULER (auf analytischem Wege) gefunden wurde. Offensichtlich ist

$$|AB| = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ferner ist $\sphericalangle BAN = \frac{\alpha}{2}$, also $\sphericalangle BAB_1 = \frac{\alpha}{4}$, $\sphericalangle B_1AB_2 = \frac{\alpha}{8}$, $\sphericalangle B_2AB_3 = \frac{\alpha}{16}$, ... In den rechtwinkligen Dreiecken BAB_1. B_1AB_2. B_2AB_3. ... ist nun

$$|AB_1| = \frac{|AB|}{\cos\frac{\alpha}{4}} = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}} = \frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}},$$

$$|AB_2| = \frac{|AB_1|}{\cos\frac{\alpha}{8}} = \frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}},$$

$$|AB_3| = \frac{|AB_2|}{\cos\frac{\alpha}{16}} = \frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{16}},$$

usw. Beachten wir, daß $\lim_{n\to\infty}|AB_n|$ gleich der Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$, d. h. gleich αR ist, so erhalten wir (nach Division durch R) die folgende Formel von EULER:

$$\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{16}\cdots}.$$

§ 7. Geometrische Konstruktionen im Raum

7.1. Das System der Postulate für Konstruktionen in der Ebene. Zwischen der Problemstellung bei den geometrischen Konstruktionen im Raum und der analogen Problemstellung für die Ebene besteht ein prinzipieller Unterschied, den wir im vorliegenden Paragraphen herausarbeiten wollen.

Die geometrischen Konstruktionen in der Ebene beruhen auf folgenden Postulaten:

1. Zu zwei gegebenen Punkten läßt sich stets die Gerade konstruieren, die durch diese Punkte hindurchgeht.

2. Es läßt sich der Kreis konstruieren, der einen gegebenen Punkt als Mittelpunkt und eine (durch zwei Punkte) gegebene Strecke als Radius besitzt.
3. Von zwei bereits konstruierten Linien (Geraden bzw. Kreisen) lassen sich die Schnittpunkte konstruieren.
4. Auf einer bereits konstruierten Linie kann man beliebige Punkte wählen.

Wir merken an, daß diese Postulate in keiner Weise die Axiome der Geometrie ersetzen. Sie spielen vielmehr die Rolle von Axiomen für die Theorie der geometrischen Konstruktionen[1]) und legen fest, welche Elemente als konstruierbar gelten. Zum Beispiel besteht der Unterschied zwischen dem ersten Postulat und dem Axiom „zu zwei Punkten gibt es genau eine Gerade, die durch diese Punkte hindurchgeht" darin, daß dieses Axiom die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Geraden festlegt, während durch das Konstruktionspostulat ergänzt wird, daß nach Angabe zweier Punkte die durch sie bestimmte Gerade als konstruierbar betrachtet wird. Die hier angegebenen Postulate entsprechen der praktischen Anwendung der Zeicheninstrumente Zirkel und Lineal. Das Lösen einer Konstruktionsaufgabe (in der Ebene) läßt damit zwei verschiedene Auffassungen zu:

A. Die Lösung einer Konstruktionsaufgabe besteht in der Angabe einer Folge von Grundkonstruktionen, deren Ausführbarkeit durch die Konstruktionspostulate gesichert ist.

Ist z. B. verlangt, den Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$ zu finden, so besteht eine Lösung in der folgenden Folge von Grundkonstruktionen:

1. Man konstruiere den Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $|AB|$,
2. man konstruiere den Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $|AB|$,
3. man bestimme die beiden Schnittpunkte dieser Kreise,
4. man bestimme die Gerade durch diese beiden Punkte,
5. man bestimme den Schnittpunkt M dieser Geraden mit der Geraden AB.

Der Beweis, daß im betrachteten Fall M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist, sowie die Diskussion der Lösung, daß es im betrachteten Fall stets eine und nur eine Lösung M gibt, erfolgen auf der Basis der Axiome der Geometrie. Die Konstruktion als Zeichenprozeß wird nicht durchgeführt, sondern nur in Worten beschrieben. Wir ersetzen ihn durch eine mündliche Beschreibung.

Wir merken an, daß zur Lösung der Grundaufgaben keine Erläuterungen gegeben werden. Zum Beispiel wird nicht erklärt, wie man die Gerade durch zwei Punkte wirklich konstruiert. Es handelt sich hierbei um eine Grundaufgabe, deren Lösung sich nicht in kleinere Schritte zerlegen läßt, und daß man sie lösen kann, ist durch ein Postulat festgelegt. Die Frage, wie sie sich lösen läßt, wird nicht betrachtet.

B. Die Lösung einer Konstruktionsaufgabe besteht in der Angabe einer Konstruktion auf einem Zeichenblatt (oder einer anderen materiellen Ebene), die mit Hilfe der zugelassenen Zeicheninstrumente hergestellt wird.

---

[1]) Vgl. dazu die Ausführungen im Artikel „Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal", S. 208–209.

In der Geometrie der Ebene besteht zwischen den Auffassungen A und B kein prinzipieller Unterschied, weil die Postulate die Grundkonstruktionen mittels der Zeicheninstrumente genau widerspiegeln. Wenn ein Lehrer einem Schüler eine Konstruktionsaufgabe stellt, wird er, wenn nicht gerade der Zeichenprozeß geübt werden soll, durchaus mit einer in Worten gefaßten Lösung zufrieden sein und keine Zeichnung verlangen. Die eigentliche mathematische Schwierigkeit besteht nämlich im Auffinden einer die Lösung liefernden Folge von Grundkonstruktionen; wenn eine in Worten formulierte Lösung gefunden ist, bereitet ihre zeichnerische Realisierung keinerlei Schwierigkeiten.

7.2. Ein Postulatensystem für „imaginäre Konstruktionen" im Raum. In der Theorie der geometrischen Konstruktionen im Raum geht man von einem analogen System von Postulaten aus:

1. Zu zwei gegebenen Punkten läßt sich stets die Gerade konstruieren, die durch diese Punkte hindurchgeht.
2. Zu drei gegebenen Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, läßt sich stets die Ebene konstruieren, die durch diese Punkte hindurchgeht.
3. Es läßt sich die Kugel konstruieren, die einen gegebenen Punkt als Mittelpunkt und eine (durch zwei Punkte) gegebene Strecke als Radius besitzt.
4. Von zwei bereits konstruierten Flächen (Ebenen bzw. Kugeln) läßt sich die Schnittlinie konstruieren.
5. Auf einer bereits konstruierten Fläche oder Linie kann man beliebige Punkte wählen.
6. In einer konstruierten Ebene lassen sich alle Konstruktionen ausführen, die in der Geometrie der Ebene erlaubt sind.

Dieses Postulatensystem ist nicht minimal. So ist z. B. das Postulat 3 entbehrlich,[1]) das wir nur aufgenommen haben, um eine möglichst weitgehende Analogie zu den Postulaten für Konstruktionen in der Ebene zu erhalten.

Wie in der Geometrie der Ebene besteht die Lösung einer Konstruktionsaufgabe im Raum in ihrer Zurückführung auf die Grundkonstruktionen. Hierbei besteht aber ein wesentlicher Unterschied zur Geometrie der Ebene. Die sechs angeführten Postulate wurden in Analogie zu den Postulaten für geometrische Konstruktionen in der Ebene aufgestellt, spiegeln jedoch im Unterschied von diesen keine Eigenschaften realer Instrumente wider, d. h., bei den geometrischen Konstruktionen im Raum ist nur die Auffassung A vertretbar. Eine Konstruktionsaufgabe im Raum läßt sich nur in Worten lösen, ist aber kaum durch Instrumente realisierbar. In dieser Weise (in Worte) gefaßte Konstruktionen heißen imaginäre Konstruktionen.

---

[1]) Allerdings wiederum nur in dem Sinn, daß man ohne Verwendung des Postulats 3 genau dieselben Punkte, Geraden, Ebenen und Kreise (im Raum) konstruieren kann wie mit seiner Hilfe (vgl. hierzu die Ausführungen über Konstruktionen allein mit Hilfe des Zirkels in der Ebene auf S. 164). — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Wozu sind diese imaginären Konstruktionen erforderlich? Erstens benutzt man sie mitunter zum Nachweis der Existenz gewisser Objekte. Zweitens stellen imaginäre Konstruktionen eine nützliche Übung dar und unterstützen die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Damit ist klar, daß ihre Bedeutung geringer ist als die Bedeutung der Konstruktionen in der Ebene. Allerdings ist noch eine andere Deutung der Konstruktionsaufgaben im Raum möglich, auf die im Artikel „Abbildungsverfahren" auf S. 291 eingegangen wird.

7.3. Ein Beispiel. Wir betrachten eine sehr einfache Aufgabe zur Erläuterung der imaginären Konstruktionen.

Aufgabe. *Man fälle von einem gegebenen Punkt des Raumes aus das Lot auf eine gegebene Ebene.*

Lösung. Wir bezeichnen die gegebene Ebene mit α und den gegebenen Punkt mit M, wobei wir annehmen, daß M nicht auf der Ebene α liegt. Auf der Ebene α wählen wir einen beliebigen Punkt P und konstruieren die Kugel mit dem Mittelpunkt M, die durch P hindurchgeht. Hat diese Kugel außer P keinen anderen Punkt mit der Ebene α gemeinsam, so ist die Gerade MP das gesuchte Lot. Schneidet dagegen die Kugel die Ebene α in einem Kreis, so konstruieren wir seinen Mittelpunkt O und erhalten in der Geraden MO das gesuchte Lot.

Wir erwähnten oben, daß das dritte Postulat überflüssig ist. Wir zeigen noch, wie man ohne seine Benutzung dieselbe Aufgabe lösen kann: In der Ebene α wählen wir zwei beliebige Punkte A und B und konstruieren die Gerade a durch die Punkte A und B. Ferner konstruieren wir die Ebene β durch die Punkte M, A, B. In der Ebene β fällen wir das Lot von M auf a und bezeichnen den Fußpunkt dieses Lotes mit N. In der Ebene α konstruieren wir sodann im Punkt N die Senkrechte auf a und wählen auf ihr einen beliebigen Punkt L. Sodann konstruieren wir die Ebene γ durch die Punkte L, M, N. In der Ebene γ fällen wir das Lot vom Punkt M auf die Gerade NL. Dieses Lot ist dann zugleich das gesuchte Lot von M auf α.

7.4. Abschließende Bemerkung. Die Theorie der Konstruktionen im Raum kann man völlig analog zur Theorie der Konstruktionen in der Ebene entwickeln. Eine wichtige Frage bildet das Problem einer Charakterisierung aller derjenigen Konstruktionsaufgaben im Raum, die sich auf der Grundlage der Postulate 1 bis 6 lösen lassen. Dieses Problem kann mit den Methoden der analytischen Geometrie des Raumes gelöst werden. Man gelangt zu ähnlichen Ergebnissen wie bei den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der Ebene (man vgl. den folgenden Artikel in diesem Band der EdEM). Man kann auch im Raum die Frage nach „Konstruktionen mit beschränkten Hilfsmitteln" stellen. Wir haben bereits oben bemerkt, daß unser Postulat 3 überflüssig

ist und weggelassen werden kann. Andererseits kann man beweisen, daß jede imaginäre, auf der Grundlage der Postulate 1 bis 6 durchführbare Konstruktion sich auch ausführen läßt, wenn man nur das Postulat 3 und die Möglichkeit der Verwendung eines Zirkels zum Zeichnen von Kreisen auf Sphären benutzt (Analogon zu den Konstruktionen von MOHR-MASCHERONI in der Ebene). Alle diese Ergebnisse sind jedoch von geringerer Bedeutung als die entsprechenden Ergebnisse der Theorie der Konstruktionen in der Ebene.

Literatur

[1] A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen, Leipzig 1906.

[2] Аргунов, Б. И., и М. Б. Балк, Геометрические построения на плоскости (Argunow, B. I., und M. B. Balk, Geometrische Konstruktionen in der Ebene), Moskau 1957.

[3] Перепелкин, Д. И., Геометрические построения в средней школе (Perepelkin, D. I., Geometrische Konstruktionen in der Oberschule), Moskau 1953.

[4] Четверухин, Н. Ф., Методы геометрических построений (Tschetweruchin, N. F., Methoden der geometrischen Konstruktionen), Moskau 1952.

[5] Четверухин, Н. Ф., Геометрические построения и приближения (Tschetweruchin, N. F., Geometrische Konstruktionen und ihre Anwendungen), Moskau 1935.

[6] Александров, И. И., Сборник геометрических задач на построение (Alexandrow, I. I., Sammlung geometrischer Konstruktionsaufgaben), Moskau 1950.

[7] Petersen, J., Methoden und Theorien zur Lösung geometrischer Constructionsaufgaben, Kopenhagen 1879.

[8] Steiner, J., Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Ges. Werke I, Berlin 1833.

[9] Zühlke, P., Konstruktionen in begrenzter Ebene, Leipzig und Berlin 1913.

[10] Наумович, Н. В., Геометрические места в пространстве и задачи на построение (Naumowitsch, N. W., Geometrische Örter im Raum und Konstruktionsaufgaben), Moskau 1956.

Наумович, Н. В., Простейшие геометрические преобразования в пространстве и задачи на построение (Naumowitsch, N. W., Einfachste geometrische Transformationen im Raum und Konstruktionsaufgaben), Moskau 1959.

[11] Bieberbach, L., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel 1952.

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

Böhm, J., u. a., Geometrie II, 3. Aufl., Berlin 1980.

Hameister, E., Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. 3. Aufl., Leipzig 1970.

Klotzek, B., Geometrie, Berlin 1971.

Schreiber, P., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Berlin 1975.

J. I. MANIN

ÜBER DIE LÖSBARKEIT VON KONSTRUKTIONSAUFGABEN MIT ZIRKEL UND LINEAL

Einleitung

Die Theorie der geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal verdankt ihr Entstehen den vielen erfolglosen Versuchen, mit Hilfe derartiger Konstruktionen drei Aufgaben zu lösen, die bereits im Altertum gestellt wurden, nämlich die Dreiteilung eines Winkels, die Verdoppelung eines Würfels und die Quadratur eines Kreises. In historischer Hinsicht ist interessant, daß sie einen der ersten *Unmöglichkeitsbeweise* in der Mathematik lieferte, und zwar dadurch, daß durch sie eine genaue Übersicht über die Gesamtheit aller der Objekte gewonnen wurde, deren Konstruktion bei alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal möglich ist. Beide mathematischen Resultate werden also in der Theorie der geometrischen Konstruktionen gleichzeitig erhalten. Analoge Probleme spielen in den verschiedensten Bereichen der modernen Mathematik eine besondere Rolle und bedürfen zu ihrer Lösung im allgemeinen sehr unterschiedlicher Methoden. Der Gegenstand eines neuen Zweiges der Mathematik, der sogenannten *Metamathematik*, besteht in hohem Maße im Studium des Problems, welche Ableitungen bei vorgegebenen Hilfsmitteln im Prinzip möglich und welche unmöglich sind.

Die Lösung dieses grundlegenden Problems erfolgt in der Theorie der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durch eine genaue Beschreibung der Gesamtheit der durchführbaren Konstruktionen und in der Angabe eines Algorithmus, welcher für jede konkrete Konstruktionsaufgabe entweder eine Lösung liefert oder die Unlösbarkeit der Aufgabe darlegt. Diese Lösung ist im wesentlichen algebraischer Natur und konnte erst erreicht werden, als die dazu benötigten algebraischen Hilfsmittel entwickelt waren. Erstmalig finden sich diese algebraischen Hilfsmittel in einer berühmten Arbeit des jungen GAUSS aus dem Jahre 1796 über die mit Zirkel und Lineal konstruierbaren regelmäßigen Vielecke. Diese Arbeit enthält nämlich bereits im Keim die Grundlagen einer neuen algebraischen Theorie für gewisse spezielle Körper, die später von dem bedeutenden französischen Mathematiker EVARISTE GALOIS entwickelt wurde und nach ihm als GALOISsche Theorie bezeichnet wird. Gerade die algebraischen Betrachtungen bilden den tiefliegenden Teil der GAUSSschen Arbeit.

Nach den bisherigen Ausführungen können wir sagen, daß die Theorie der Konstruktionen im wesentlichen aus drei Teilen bestehen wird.

Der erste (rein geometrische) Teil muß eine Analyse des Begriffes der Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal enthalten, denn dieser Begriff muß exakt und unzweideutig definiert werden. Beispielsweise ist bekannt, daß die Behauptung über die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal nicht richtig bleibt, wenn man eine gewisse erweiterte Benutzung des Lineals gestattet.[1]) Dieser erste Teil bereitet den

[1]) Vgl. S. 172.

zweiten Teil vor, in welchem das Problem in die Sprache der Algebra übersetzt, d. h. in Begriffen der Algebra formuliert wird. Diese Übersetzung ist keine rein mechanische Umformulierung. Vielmehr führt sie zu neuen mathematischen Objekten, welche sich nur schwierig und zum Teil gar nicht in der Sprache der Geometrie ausdrücken lassen. Gerade diese neuen mathematischen Objekte erlauben schließlich eine Lösung des Problems, die im dritten Teil der Theorie erfolgt. Der dritte Teil der Theorie ist der eigentlich algebraische und zugleich der tiefliegendste und schwierigste Teil. In ihm wird nämlich das algebraische Problem gelöst, auf das das ursprüngliche geometrische Problem, die Frage nach den mit Zirkel und Lineal durchführbaren Konstruktionen, geführt hat.

§ 1. Der geometrische Teil der Theorie

1.1. Problemstellung. Bei einer strengen Beschreibung des Begriffs der „Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal" muß man eine klare Antwort auf folgende drei Fragen geben:

a) Was wollen wir konstruieren?
b) Welche Ausgangsstücke sind gegeben?
c) Welche Hilfsmittel können wir benutzen?

Vor allem wollen wir annehmen, daß sich alle unsere Konstruktionen in einer fest gewählten Ebene abspielen.

Um eine Antwort auf die erste Frage zu erhalten, muß man vorgelegte konkrete Konstruktionsaufgaben daraufhin analysieren. Eine derartige Analyse zeigt, daß das Hauptziel bei der Lösung einer Konstruktionsaufgabe stets in der Konstruktion einer *endlichen Anzahl von bestimmten Punkten* der Ebene besteht. Natürlich ist die Aufgabenstellung selbst nicht immer in dieser Art abgefaßt. Jedoch kann man leicht bestätigen, daß sich jede Aufgabe darauf zurückführen läßt.

Beispielsweise reicht es zum Auffinden eines bestimmten Kreises aus, den Kreismittelpunkt und einen Punkt auf der Peripherie des Kreises zu konstruieren. Für das Auffinden einer Geraden braucht man nur zwei beliebige ihrer Punkte zu konstruieren. Die Lösung der Aufgabe der Dreiteilung eines Winkels reduziert sich auf die Konstruktion zweier Punkte (P, Q in Abb. 1), durch welche die Geraden gehen, die den Winkel in drei gleiche Teile zerlegen. Die Lösung der Aufgabe, ein bestimmtes Dreieck zu konstruieren, besteht bei beliebig gegebenen Bestimmungsstücken stets in der Konstruktion seiner drei Ecken. Allgemein besteht die Konstruktion eines Vielecks (z. B. die eines Quadrates, das einem gegebenen Kreis flächengleich ist) in der Konstruktion seiner Ecken. Hierbei ist allerdings noch die Mitteilung nötig, welche der Verbindungsstrecken der Punktepaare Seiten des Vielecks sind. (In Abb. 2 sind zwei verschiedene Vielecke mit den gleichen Ecken dargestellt, d. h., ohne

einen solchen Hinweis ist die Lösung nicht eindeutig.) Die Lösung der Aufgabe der Verdoppelung eines Würfels reduziert sich auf die Konstruktion zweier Punkte mit einem bestimmten Abstand (nämlich von der Länge der Kante eines Würfels, der den doppelten Inhalt eines Würfels gegebener Kantenlänge hat). Das Auffinden weiterer Beispiele sei dem Leser überlassen. Natürlich könnte man im Prinzip auch Aufgaben betrachten, welche die Konstruktion von unendlich vielen Punkten erfordern (wie z. B. die Konstruktion einer Ellipse mit gegebenen Halbachsen). Sofern sich diese Aufgaben nicht auf die

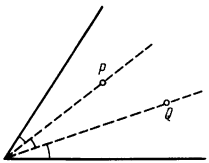


Abb. 1

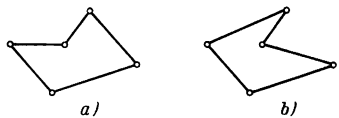


Abb. 2

Konstruktion endlich vieler Punkte zurückführen lassen, werden wir sie jedoch nicht erörtern. Außerdem werden wir uns, wenn das gesuchte endliche System von Punkten konstruiert ist, nicht weiter mit der Frage nach zusätzlichen Angaben über dieses Punktesystem befassen, die z. B. bei einem zu konstruierenden Vieleck darin besteht, welche Ecken der gefundenen Menge von Eckpunkten durch Seiten zu verbinden sind. Meistens erhält man diese Angaben durch eine direkte geometrische Betrachtung der Lageverhältnisse.

Damit gelangen wir zu folgender Antwort auf die Frage a): Das Ziel bei der Lösung einer beliebigen Konstruktionsaufgabe besteht im Aufsuchen endlich vieler Punkte der Ebene.

Damit wird aber auch eine Antwort auf die Frage b) nahegelegt: Als Ausgangsstücke werden endlich viele Punkte der Ebene genommen. So ist z. B. ein Winkel durch seinen Scheitelpunkt und je einen Punkt auf jedem Schenkel gegeben; ein Kreis ist durch drei seiner Punkte oder durch seinen Mittelpunkt und einen Punkt auf der Peripherie gegeben; zur Festlegung eines Quadrates genügt die Angabe seiner Ecken usw.[1])

Die Antwort auf die Frage b) formulieren wir somit folgendermaßen: Als Ausgangsstücke sind bei jeder Konstruktionsaufgabe endlich viele Punkte der Ebene gegeben.

---

[1]) Läßt man als Ausgangsstücke auch unendlich viele Punkte zu, die sich nicht auf die Punkte eines endlichen Systems von Geraden und Kreisen zurückführen lassen, so erweitert sich der Bereich der lösbaren Aufgaben erheblich. Zum Beispiel wird bei Vorgabe der durch die Funktion $y = x^3$ definierten Kurve (oder auch nur eines beliebigen Bogens dieser Kurve) die Aufgabe der Verdoppelung eines Würfels mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösbar.

1.2. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Wir kommen jetzt zur Frage c). Die Antwort auf diese Frage ist bereits im Titel dieses Artikels gegeben worden: Die Konstruktion soll mit Hilfe von Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Wir müssen allerdings noch präzisieren, was wir genau darunter verstehen wollen.

Am einfachsten kann man den Konstruktionsprozeß induktiv beschreiben. Wir gehen von endlich vielen Punkten der Ebene aus und wollen aus ihnen endlich viele weitere Punkte konstruieren. Der Konstruktionsprozeß besteht darin, daß wir dem gegebenen System von Punkten nach gewissen Regeln neue Punkte hinzufügen. Zum Abschluß wählen wir unter allen erhaltenen Punkten diejenigen aus, welche die Lösung unserer Aufgabe bilden. Dieser Abschluß ist natürlich eine ganz spezifische Aufgabe. Uns interessiert nur, nach welchen Regeln man die Punkte hinzufügt.

Unter einem *Konstruktionsschritt* verstehen wir das Hinzufügen eines einzigen neuen Punktes zu schon vorhandenen. Dabei wird dieser neue Punkt als Resultat bestimmter Operationen erhalten, die als Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal bezeichnet werden und ausschließlich in folgendem bestehen (wobei bei einem einzelnen Konstruktionsschritt die Operationen 1 und 2 verschiedene Male angewendet werden können, dagegen die Operation 3 genau einmal angewendet wird):

1. Durch zwei Punkte des vorhandenen Systems von Punkten wird die Gerade gelegt (dabei besteht das „vorhandene System von Punkten" aus den als Ausgangsstücken der Konstruktion gegebenen Punkten sowie allen den Punkten, die in den vorangehenden Konstruktionsschritten hinzugefügt wurden).

2. Durch einen gewissen Punkt des vorhandenen Systems von Punkten wird ein Kreis gezogen, dessen Mittelpunkt ebenfalls ein Punkt dieses Punktesystems ist.

(Von den nach 1. und 2. gewonnenen Geraden und Kreisen sagen wir auch, daß sie auf Grund des vorhandenen Systems von Punkten *konstruiert worden sind.*)

3. Unter den Schnittpunkten der auf Grund des vorhandenen Systems von Punkten konstruierten Geraden und Kreise wird einer ausgewählt und diesem Punktesystem hinzugefügt.

Manchmal erweist es sich als zweckmäßig, neben der Operation 3, die in der Auswahl eines wohlbestimmten Punktes besteht, die folgende Operation zu benutzen:

3a. Es wird ein Punkt „willkürlich" ausgewählt und zum vorhandenen System von Punkten hinzugefügt.

Dabei wird der Gebrauch des Wortes „willkürlich" in folgender Weise präzisiert: Bei dem „willkürlich" ausgewählten Punkt handelt es sich entweder um einen beliebigen Punkt, der auf einer bestimmten Strecke einer Geraden liegt, oder um einen beliebigen Punkt, der auf einem bestimmten Kreisbogen liegt, oder um einen beliebigen Punkt, der in einem bestimmten Gebiet der Ebene liegt, das durch endlich viele Strecken und Kreisbögen begrenzt

wird. (Die „Strecken" bzw. die genannten „Gebiete" der Ebene dürfen sich dabei auch ins Unendliche erstrecken.) Voraussetzung ist jedoch, daß die Geraden und Kreise, auf denen die auftretenden Strecken und Kreisbögen liegen, bei früheren Konstruktionsschritten angefallen sind und auch die Endpunkte der Strecken und Kreisbögen dem vorhandenen System von Punkten angehören (d. h. entweder zu den ursprünglich gegebenen Punkten gehören oder bei einem vorangehenden Konstruktionsschritt erhalten wurden). Offenbar darf dabei angenommen werden, daß der „willkürlich" gewählte Punkt nicht Endpunkt der betrachteten Strecke bzw. des Bogens ist bzw. nicht auf der Begrenzung des betrachteten Gebietes der Ebene liegt.

Unter einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal verstehen wir eine endliche Folge von Konstruktionsschritten der beschriebenen Art.

Wir betonen noch einmal, daß bei dieser Definition der rein geometrische Inhalt der gestellten Aufgabe unberücksichtigt bleibt. Zum Beispiel bleibt die Frage nach der geometrischen Bedeutung der gestellten Aufgabe und der erhaltenen Antwort bei der Konstruktion der endlich vielen Punkte ganz außer acht. Insbesondere wird die Frage, welche Punkte aus der konstruierten Gesamtheit von Punkten die endgültige Lösung der Aufgabe ergeben, nicht erörtert. Es wird auch keine Antwort auf Fragen der folgenden Art gegeben: Welche der konstruierten Punkte sind benachbarte Eckpunkte eines gesuchten Vielecks usw.? Diese Fragen betreffen gewissermaßen die „Analyse" der Konstruktion und nicht das Problem ihrer Ausführbarkeit.

Es sei nun eine gewisse endliche Menge von Punkten der Ebene vorgegeben. Wir sagen, daß der Punkt A aus den gegebenen Punkten mit Hilfe von Zirkel und Lineal *konstruiert* werden kann, wenn es eine Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) gibt, so daß der Punkt A zum System der Punkte gehört, die am Ende der Konstruktion vorliegen, und zwar unabhängig von der speziellen Lage der im Verlauf der Konstruktion „willkürlich" ausgewählten Hilfspunkte. Eine Konstruktionsaufgabe heißt *lösbar* mit Zirkel und Lineal, wenn die Menge der Punkte, die man zur Lösung der Aufgabe zu finden hat, nur aus Punkten besteht, die aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Punkten mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

Jetzt können wir das Hauptproblem der Theorie der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal wie folgt formulieren: *Gegeben seien endlich viele Punkte der Ebene; genau welche Punkte kann man aus diesen gegebenen Punkten mit Zirkel und Lineal konstruieren?*

Wir erwähnten schon, daß es eine präzise Antwort auf diese Frage gibt, d. h., es können notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ausführbarkeit einer Konstruktion angegeben werden. Eine besondere Rolle spielt hierbei die Teilantwort, die notwendige Bedingungen dafür aufstellt, daß ein Punkt konstruierbar ist.

§ 2. Die Übertragung der Aufgabe in die Sprache der Algebra

2.1. Ein grundlegendes Lemma. Wir benötigen einige Kenntnisse aus der Körpertheorie, wie die Definition eines Zahlkörpers, den Begriff der endlichen Körpererweiterung und den des Grades einer endlichen Körpererweiterung. Alle diese Dinge kann man im Artikel „Der Ring der Polynome und der Körper der rationalen Funktionen" in Band II der EdEM nachlesen.

Außerdem setzen wir voraus, daß der Leser mit der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte der Ebene vertraut ist. Die Zahl $a + bi$ (a, b reelle Zahlen) entspreche dabei dem Punkt (a, b) in einem festen Koordinatensystem. Diese Darstellung wird im weiteren eine fundamentale Rolle spielen. Wir identifizieren nämlich die Ebene, in der alle unsere Konstruktionen ausgeführt werden, mit dem Körper der komplexen Zahlen. Wenn wir also bei Punkten von Addition, Multiplikation oder anderen algebraischen Operationen sprechen, meinen wir stets die entsprechenden Operationen für die Zahlen, die den Punkten zugeordnet sind.

Die Beschreibung aller derjenigen Punkte, welche aus gegebenen Punkten mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden können, ist dann gleichbedeutend mit einer Beschreibung der diesen Punkten entsprechenden Zahlen. In diesem Zusammenhang werden wir auch davon sprechen, daß ein Punkt einem gewissen Zahlkörper angehört.

Als Ausgangsstücke einer Konstruktion seien wenigstens zwei Punkte gegeben.[1]) Einen dieser Punkte wählen wir als Koordinatenursprung, d. h., wir identifizieren ihn mit der Zahl 0, und dem zweiten schreiben wir die Koordinaten (1, 0) zu, d. h., ihm wird die Zahl 1 zugeordnet. (Außer diesen beiden Punkten können noch weitere Punkte zu den Ausgangsstücken der Konstruktion gehören.) Im Punkt 0 errichten wir die Senkrechte zur Verbindungsgeraden von 0 und 1 und tragen auf ihr vom Koordinatenursprung die Einheitsstrecke ab. Diese Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal ausführbar. Wir erhalten damit ein kartesisches Koordinatensystem, welches wir zur Beschreibung der Punkte durch komplexe Zahlen benutzen können.

Nun betrachten wir eine beliebige Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Als Resultat der Konstruktion wird eine endliche Menge von Punkten gewonnen, und wir nehmen an, daß nach einer bestimmten Anzahl von Konstruktionsschritten eine Menge A_n von n Punkten vorliegt.[2]) Sofern damit die Konstruktion nicht beendet ist, wird im folgenden Schritt zu A_n ein bestimmter Punkt hinzugefügt, d. h., der Schritt besteht im Übergang von A_n zu A_{n+1}. Mit K_n bezeichnen wir den kleinsten Unterkörper des Körpers der komplexen Zahlen, der die Zahl i und alle Zahlen aus A_n sowie deren konjugiert komplexe

[1]) Falls nur ein Punkt gegeben ist, läßt sich kein weiterer Punkt konstruieren. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Die Konstruktion beginnt also mit der Menge A_k ($k \geqq 2$), die aus den als Anfangsstücken der Konstruktion gegebenen Punkten besteht. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Zahlen enthält. Als erstes wichtiges Resultat wird das folgende grundlegende Lemma bewiesen, das einen Zusammenhang zwischen den geometrischen Operationen an den Punkten und den algebraischen Operationen an den entsprechenden Zahlen herstellt.

Lemma. a) *Jeder Punkt des Körpers K_n kann aus den Punkten der Menge A_n mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.*

b) Besteht der Übergang von der Menge A_n zur Menge A_{n+1} in der Adjunktion eines Punktes, den man als Schnittpunkt eines Paares von Geraden bzw. Kreisen oder einer Geraden und eines Kreises aus der Gesamtheit der auf Grund von A_n konstruierbaren Geraden und Kreise erhält, so ist entweder $K_{n+1} = K_n$ oder $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$. Im zweiten Fall gehört die Zahl z zum Körper K_n und ist in ihm kein Quadrat. Für eine solche Zahl z aus K_n, die kein Quadrat in K_n ist, kann man die Zahl $\sqrt{z}$ stets mit Zirkel und Lineal konstruieren.

c) *Besteht der Übergang von der Menge A_n zur Menge A_{n+1} in der Adjunktion eines „willkürlichen" Punktes, der auf einer gegebenen Strecke einer Geraden oder auf einem gegebenen Bogen eines Kreises oder in einem gegebenen Gebiet der Ebene liegt, so kann man diesen Punkt stets derart auswählen, daß $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$ ist, wobei z zu K_n gehört.*

Beweis. Wir beginnen mit der Behauptung a). Es seien $z_1, \ldots, z_n$ die Punkte der Menge A_n. Diese identifizieren wir wie vorher mit den entsprechenden komplexen Zahlen. Nach Definition des Körpers K_n erhält man ein beliebiges Element aus K_n aus den Zahlen $i, z_1, \ldots, z_n$ durch endlich viele Anwendungen der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie Bildung der konjugiert komplexen Zahl. Daher genügt es, folgendes zu beweisen: Aus gegebenen Punkten x, y kann man die Punkte $-x$, $x + y$, $\bar{x}$, x^{-1} mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren. (Die Möglichkeit der Konstruktion der Zahl i erwähnten wir bereits, denn nach dem Gesagten befinden sich unter den Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ die Zahlen Null und Eins, die ja gewissen Anfangsstücken zugeordnet waren.)

Die vorstehende Behauptung läßt sich vollkommen elementar beweisen. Zur Konstruktion von $-x$ braucht man nur auf der Geraden durch 0 und x mit Hilfe des Zirkels im Punkt 0 die Strecke $0x$ nach der anderen Seite abzutragen (Abb. 3). Zur Konstruktion von $x + y$ legt man durch den Punkt x die Parallele zu $0y$ und durch den Punkt y die Parallele zu $0x$ (Abb. 4). Falls diese beiden Parallelen nicht zusammenfallen, d. h. die Punkte x, y und 0 nicht auf einer Geraden liegen, ergibt ihr Schnittpunkt den Punkt $x + y$. Liegen diese drei Punkte jedoch auf einer Geraden, so reduziert sich die Konstruktion von $x + y$ auf das mittels des Zirkels ausführbare Aneinanderfügen zweier Strecken einer Geraden. Zur Konstruktion des Punktes x^{-1} konstruieren wir zunächst sein Argument und dann seinen Betrag. Die Konstruktion des Arguments geschieht wie folgt: Um den Koordinatenursprung 0 schlägt man den Kreis durch x, bestimmt die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden 01 und trägt den von einem dieser Punkte und x gebildeten Kreisbogen zur anderen Seite ab (das liefert den Punkt $\bar{x}$; vgl. Abb. 5). Die Kon-

struktion von $|x^{-1}|$ ist gleichbedeutend der Konstruktion der vierten Proportionalen zu den Strecken $|x|$, 1, 1, und es ist allgemein bekannt, wie diese mittels Zirkel und Lineal konstruiert wird. Trägt man schließlich die erhaltene

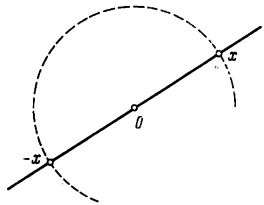


Abb. 3

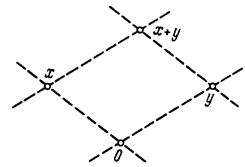


Abb. 4

Strecke $|x^{-1}|$ auf der Geraden $0\bar{x}$ vom Punkt 0 aus nach der durch $\bar{x}$ bestimmten Seite ab (Abb. 6), so erhält man den Punkt x^{-1}. Die Konstruktion von $x \cdot y$ wird in analoger Weise auf die Konstruktion der Summe zweier Winkel, nämlich der Argumente der Punkte x und y, und auf die Konstruktion der

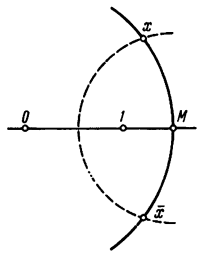


Abb. 5

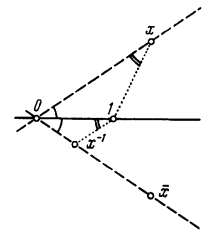


Abb. 6

Strecke $|x \cdot y|$, d. h. auf die Konstruktion der vierten Proportionalen zu den Strecken 1, $|x|$ und $|y|$ (Abb. 7), zurückgeführt. Damit haben wir die Behauptung a) des Lemmas bewiesen.

Aus Gründen der Zweckmäßigkeit beginnen wir den Beweis der Behauptung b) mit dem zweiten Teil. Wir bestätigen also, daß bei Vorgabe des Punktes z (und selbstverständlich des Punktes 1) mit Hilfe von Zirkel und Lineal beide Werte von $\sqrt{z}$ konstruiert werden können. Dem Leser ist diese Konstruktion geläufig. Man halbiert nämlich das Argument des Punktes z und trägt auf der Geraden, deren Neigungswinkel zur reellen Achse 01 die Hälfte des Argu-

mentes von z ist, die Strecke der Länge $\sqrt{|z|}$ vom Punkt 0 nach beiden Seiten ab (vgl. die Punkte M und N in Abb. 8). Die Größe $\sqrt{|z|}$ ist als mittlere Proportionale zu $|z|$ und 1 mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Schon schwieriger ist der Beweis des ersten Teils der Behauptung b). Vor allem müssen wir studieren, durch welche Art von Gleichungen sich Geraden und Kreise in der komplexen Ebene beschreiben lassen. Wir zerlegen zunächst die komplexen Zahlen in ihren Real- und Imaginärteil X und Y (wobei X

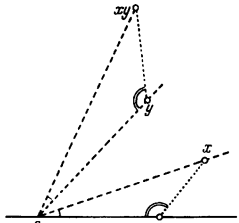


Abb. 7

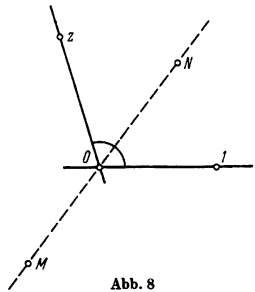


Abb. 8

und Y die Koordinaten des der Zahl zugeordneten Punktes sind). Die Gerade, die durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Menge A_n hindurchgeht, wird dann durch die Gleichung

$$(X - x_1) \cdot (y_2 - y_1) - (Y - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

beschrieben, die wir auch als

$$aX + bY + c = 0 \tag{1}$$

schreiben können, wobei die Koeffizienten a, b, c sich leicht aus den Koordinaten der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) berechnen lassen. Die Gleichung eines Kreises, der durch den Punkt (x, y) der Menge A_n geht und als Mittelpunkt den Punkt (d, e) der Menge A_n besitzt, hat die Form

$$(X - d)^2 + (Y - e)^2 = r^2, \tag{2}$$

wobei $r^2 = (x - d)^2 + (y - e)^2$ ist.

Die Koeffizienten der Gleichungen (1) und (2) sind reelle Zahlen. Wir bestätigen zunächst, daß sie dem Körper K_n angehören. Zum Beweis hierfür genügt es zu bemerken, daß mit einer Zahl x $\left(\text{wegen } \operatorname{Re} x = \frac{x + \bar{x}}{2} \text{ und } \operatorname{Im} x = \frac{x - \bar{x}}{2i}\right)$ auch der Realteil $\operatorname{Re} x$ und der Imaginärteil $\operatorname{Im} x$ zu K_n gehören. Die Zahlen a, b, c, d, e, r^2 in den Gleichungen (1) und (2) sind aber offenbar rationale Ausdrücke der Real- und Imaginärteile von Punkten aus A_n.

Die Koordinaten der Schnittpunkte der auf Grund von A_n konstruierbaren Geraden und Kreise genügen also reellen Gleichungssystemen einer der Formen

$$aX + bY + c = 0 \qquad aX + bY + c = 0 \quad (X-d)^2 + (Y-e)^2 = r^2$$
$$a'X + b'Y + c' = 0 \quad (X-d)^2 + (Y-e)^2 = r^2 \; (X-d')^2 + (Y-e')^2 = r'^2$$

mit Koeffizienten aus K_n. Man erhält also den Körper K_{n+1} dadurch, daß man eine Lösung eines bestimmten Systems der genannten Art auswählt und die betreffenden Zahlen X und Y zum Körper K_n adjungiert. Dies ergibt sich sofort aus der Definition des Körpers K_{n+1} und der Tatsache, daß mit reellen Zahlen a und b auch die Zahl $a + bi$ zum Körper K_{n+1} gehört und umgekehrt K_{n+1} mit einer Zahl $a + bi$ auch die Zahlen a und b enthält.

Die Lösung des ersten Gleichungssystems gehört (falls sie existiert) offenbar stets zum Körper K_n, in diesem Fall ist also $K_{n+1} = K_n$. Die Lösung der beiden anderen Systeme läßt sich auf die Lösung einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten aus dem Körper K_n zurückführen.[1]) Die Adjunktion einer Wurzel dieser Gleichung zum Körper K_n ist gleichbedeutend der Adjunktion der Wurzel aus der Diskriminate dieser Gleichung. Wenn die Diskriminate z ein Quadrat in K_n ist, wird also $K_{n+1} = K_n$, andernfalls wird $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$. Hiermit ist die Behauptung b) bewiesen.[2])

Es gilt jetzt, die Behauptung c) zu bestätigen. Wir zeigen sogar, daß die Punkte, die der Bedingung c) genügen, auf den entsprechenden Strecken und Bögen bzw. in den betreffenden Gebieten überall dicht liegen.

Es werde zunächst die Strecke betrachtet, die die beiden Punkte x und y aus dem Körper K_n verbindet. Dann gehört der Mittelpunkt dieser Strecke ebenfalls zum Körper K_n; denn er wird durch den Punkt $\frac{x+y}{2}$ dargestellt. Wendet man dieselbe Überlegung auf die entstehenden beiden Hälften der Strecke und sodann auf die Viertel usw. an, so erhält man, daß im Innern jeder zwischen x und y gelegenen Strecke Punkte aus K_n liegen. Damit ist zugleich gezeigt, daß die Auswahl eines willkürlichen Punktes auf einer Strecke, die von zwei Punkten aus K_n begrenzt wird, immer innerhalb des Körpers K_n erfolgen kann.

Es werde jetzt ein Kreis C betrachtet, der auf Grund der Menge A_n konstruierbar ist. Auf diesem Kreis sei ein Bogen L gegeben, dessen Endpunkte zu A_n gehören. Wie wir oben gesehen haben, wird der Kreis C durch eine Formel (2) beschrieben, wobei d, e und r^2 reelle Zahlen sind, die dem Körper K_n angehören. Des weiteren gehören natürlich alle rationalen Zahlen zu K_n. Wir

[1]) Beim dritten System empfiehlt es sich, zunächst das System umzuformen, nämlich neben der ersten Gleichung des Systems die durch gliedweise Subtraktion aus beiden Gleichungen entstehende (lineare!) Gleichung zu betrachten.

[2]) Wir weisen darauf hin, daß das Nichtvorhandensein einer reellen Lösung beim entsprechenden Gleichungssystem bedeutet, daß der zugehörige Konstruktionsschritt wegen gewisser Beschränkungen der Größen nicht ausführbar ist. Als Beispiel kann etwa die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks dienen, bei dem eine Seite größer als die Summe der beiden anderen Seiten ist.

betrachten jetzt alle möglichen Schnittpunkte des Kreises C mit Geraden, die parallel zur Abszissenachse verlaufen und von dieser einen rationalen Abstand haben. Diese Geraden haben die Darstellung $Y = k$, wobei k eine rationale Zahl ist. Es ist klar, daß diese Schnittpunkte auf dem Kreis C und auch auf dem Bogen L überall dicht liegen. Jeder solche Schnittpunkt hat als Koordinaten X und Y eine Lösung des Gleichungssystems

$$(X - d)^2 + (Y - e) = r^2, \quad Y = k.$$

Damit gehört, wie wir oben gesehen haben, dieser Schnittpunkt zu einem Körper $K_n(\sqrt{z})$ mit $z \in K_n$. Demnach kann auch die Auswahl eines willkürlichen Punktes auf dem Bogen L stets so getroffen werden, daß er zu einem Körper $K_n(\sqrt{z})$ mit $z \in K_n$ gehört.

Auch der Fall, daß man einen Punkt aus dem Innern eines von Strecken und Bögen begrenzten Gebietes auswählt, bietet keine Schwierigkeiten. Wir bemerken, daß es sogar stets möglich ist, im Innern eines solchen Gebietes einen Punkt mit rationalen Koordinaten zu finden. Das Lemma ist damit bewiesen.

2.2. Folgerungen. Das bewiesene Lemma löst nun in gewissem Sinne das in § 1 formulierte Grundproblem der Theorie der Konstruktionen mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Für eine genaue Formulierung der Antwort führen wir einige neue Begriffe ein.

Das System der gegebenen Punkte bezeichnen wir mit A und den diesem System entsprechenden Körper mit K. Wir erinnern daran, daß der Körper K die gegebenen Punkte, die Zahl i und mit einer Zahl die zu ihr konjugiert komplexe Zahl enthält, und zwar ist K der kleinste Körper mit dieser Eigenschaft. Für einen beliebigen Körper L verstehen wir unter einer *quadratischen Erweiterung* von L einen Körper der Form $L(\sqrt{z})$, wobei $z \in L$ und z in bezug auf L kein Quadrat ist. Eine endliche Erweiterung K' des Körpers K nennen wir *zulässig*, wenn sie aus K durch eine endliche Kette von quadratischen Erweiterungen hervorgeht:

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n = K';$$

$$K_{i+1} = K_i(\sqrt{z_i}), \quad z_i \in K_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Damit kann die Antwort auf das Grundproblem der Theorie der Konstruktionen wie folgt formuliert werden:

Ein Punkt z kann aus den Punkten des Systems A dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn er in einer gewissen zulässigen Erweiterung des Körpers K enthalten ist.

Dieses Resultat ist im wesentlichen nur eine andere Formulierung des oben bewiesenen grundlegenden Lemmas.

Jetzt gilt es herauszuarbeiten, wie dieser Satz auf konkrete geometrische Aufgaben anzuwenden ist. Hierfür muß zunächst die algebraische Formulie-

rung der Aufgabe gefunden werden. Das geschieht dadurch, daß wir die gesuchten Punkte (also die, deren Konstruierbarkeit uns interessiert) als Unbekannte betrachten und durch Gleichungssysteme beschreiben, die in algebraischer Form die Bedingungen der Aufgabe wiedergeben (die Koeffizienten der Gleichungen sind Zahlen, die durch die gegebenen Punkte bestimmt werden). Danach müssen wir untersuchen, ob die Wurzeln der Gleichungen (d. h. die gesuchten Punkte) durch Ausdrücke dargestellt werden können, bei deren Bildung nur endlich oft die Operationen Addition, Multiplikation, Division und Ausziehen der Quadratwurzel auf die zu Anfang gegebenen Zahlen anzuwenden sind, wir müssen also entweder eine solche Darstellung angeben, oder wir müssen beweisen, daß derartige Ausdrücke für die Wurzeln nicht existieren. Im ersten Fall können wir eine geometrische Lösung der gestellten Aufgabe sofort erhalten, da ja dann die Wurzeln unseres Gleichungssystems mit Zirkel und Lineal effektiv konstruierbar sind.

Weitaus interessanter ist der zweite Fall, weil wir hier auf eine Frage ganz neuer Art stoßen: Wie kann man nämlich beweisen, daß die Wurzeln eines gegebenen Gleichungssystems keiner zulässigen Erweiterung des gegebenen Körpers angehören?

2.8. Algebraische Betrachtungen.[1]) Die Antwort auf die gestellte Frage ist nicht einfach, und falls man dem Gleichungssystem keine einschränkenden Bedingungen auferlegt, sind allgemeine Einsichten der gewünschten Art nicht zu erhalten. Wir betrachten daher lediglich geometrische Aufgaben, deren Lösung sich zurückführen läßt auf die Lösung eines Gleichungssystems

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ die unbekannten Punkte bedeuten und $F_1, \ldots, F_m$ Polynome in den Veränderlichen x_i mit Koeffizienten aus dem Körper K sind, der von den anfänglich gegebenen Punkten erzeugt wird. Die Aufgabe der Dreiteilung eines Winkels und die der Verdoppelung eines Würfels gehören diesem Aufgabentyp an. Hingegen ist die Aufgabe der Quadratur eines Kreises nicht von diesem Typ. Hierüber wird später noch zu sprechen sein.

Wenn die geometrische Aufgabe sinnvoll gestellt ist, wenn also insbesondere hinlänglich viele Ausgangspunkte gegeben sind, besitzt das System (3) nur endlich viele Wurzeln. In der Algebra wird bewiesen, daß dann das Gleichungssystem (3) bedeutend vereinfacht werden kann. Durch Elimination gelangt man nämlich zu einem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1) &= 0, \\ \Phi_2(x_2) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n(x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

[1]) Wir empfehlen, diesen Abschnitt bei der ersten Lektüre des Artikels zu übergehen und sogleich mit Abschnitt 2.4. fortzufahren. Für das Verständnis der geometrischen Problematik des Artikels dürften dabei keine Schwierigkeiten entstehen.

bei dem die Polynome Φ_i nur von einer Veränderlichen abhängen (die Koeffizienten der Polynome Φ_i gehören ebenfalls zu K). Natürlich kann hierbei der Grad der Polynome Φ_i im Vergleich zu dem der Polynome F_i sehr stark anwachsen, und ferner können bei dem Gleichungssystem (4) weitere Lösungen auftreten. Die erste Schwierigkeit macht sich nur bei der praktischen Berechnung bemerkbar, und der zweiten Schwierigkeit brauchen wir in unserem Zusammenhang keine Beachtung zu schenken. Wenn wir nämlich annehmen, daß uns eine Konstruktion der Wurzeln des Systems (4) gelingt, kann auch eine solche der Lösungen, die eine Antwort auf die geometrische Aufgabe geben, erreicht werden.

Die Konstruktion der Wurzeln des Systems (4) besteht aber im Prinzip in der Konstruktion der Nullstellen eines Polynoms einer Veränderlichen mit Koeffizienten aus dem Körper K. Es sei $\Phi(x)$ ein solches Polynom. Läßt sich dieses Polynom so in zwei Faktoren zerlegen, daß keiner der Faktoren konstant ist ($\Phi(x) = \Phi_1(x)\,\Phi_2(x)$), so können wir uns bei der Frage nach der Konstruierbarkeit der Nullstellen auf die Betrachtung der einzelnen Faktoren beschränken. Ein Polynom $\Phi(x)$, das man nicht in solche Faktoren zerlegen kann, heißt *irreduzibel über dem Körper K*. (Wenn es klar ist, welcher Körper betrachtet wird, nennen wir $\Phi(x)$ kurz ein irreduzibles Polynom). Man muß beachten, daß die Irreduzibilität eines Polynoms wesentlich von dem Körper abhängt, über dem es betrachtet wird. Zum Beispiel ist jedes Polynom höheren als ersten Grades über dem Körper der komplexen Zahlen reduzibel. Dieses Resultat wird häufig als „Fundamentalsatz der Algebra" bezeichnet.

Aus dem bisher Gesagten folgt, daß wir unter den angenommenen Einschränkungen zu der folgenden Frage kommen: *Gegeben sei ein irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus dem Körper K; wann sind seine Nullstellen in einer gewissen zulässigen Erweiterung des Körpers K enthalten?*

Die Frage scheint noch nicht völlig exakt gestellt zu sein, denn zunächst wäre es denkbar, daß gewisse Nullstellen des Polynoms in zulässigen Erweiterungen liegen, während das für gewisse andere Nullstellen nicht der Fall ist. Für irreduzible Polynome trifft dies jedoch nicht zu, da für sie das folgende wichtige Resultat gilt:

Satz 1. *Wenn nur eine Nullstelle eines über dem Körper K irreduziblen Polynoms in einer zulässigen Erweiterung von K liegt, liegen sämtliche Nullstellen des Polynoms in zulässigen Erweiterungen des Körpers K.*

(Hieraus folgt, daß keine Nullstelle eines irreduziblen Polynoms in einer zulässigen Erweiterung liegt, wenn nur von irgendeiner Nullstelle des Polynoms bekannt ist, daß sie zu keiner zulässigen Erweiterung gehört.)

Wir können hier keinen Beweis dieses Satzes in seiner allgemeinen Formulierung erbringen, da er die Einführung recht schwieriger algebraischer Begriffe aus der Galoisschen Theorie erfordert. Bei der Untersuchung konkreter Beispiele werden wir jedoch in der Hauptsache irreduziblen Polynomen dritten Grades begegnen, und für diesen Spezialfall werden wir unten den Satz 1 beweisen. Damit sind dann unsere späteren Anwendungen des Theorems gerechtfertigt.

Der Leser muß sich sehr aufmerksam die logische Sturktur der Überlegungen klarmachen, die mit diesem Satz zusammenhängen. Als Folgerung werden wir im Abschnitt 2.5. ein wichtiges Resultat erhalten, welches unmittelbar zum Beweis der Unlösbarkeit von gewissen geometrischen Aufgaben herangezogen wird.

2.4. Der Fall der Polynome dritten Grades. Es sei $\Phi(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ ein irreduzibles Polynom dritten Grades mit Koeffizienten aus einem Körper K. Dieses Polynom kann dann nicht als Produkt eines Polynoms ersten Grades und eines Polynoms zweiten Grades mit Koeffizienten aus dem Körper K

dargestellt werden. Wir zeigen unten, daß keine Nullstelle des betrachteten Polynoms in einer zulässigen Erweiterung des Körpers K liegen kann. Zunächst beweisen wir jedoch den folgenden

Satz 1'. *Gehört eine der Nullstellen des (irreduziblen) Polynoms $\Phi(x)$ zu einer zulässigen Erweiterung des Körpers K, so liegen auch die beiden anderen Wurzeln in zulässigen Erweiterungen von K.*[1])

Unter allen Ketten quadratischer Erweiterungen von K, die zu zulässigen Erweiterungen K' des Körpers K führen, welche eine Nullstelle des Polynoms $\Phi(x)$ enthalten, sei $K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K'$ eine Kette minimaler Längen. Aus der Irreduzibilität von $\Phi(x)$ folgt, daß $n \geqq 1$ gilt. Die in dem Körper K' enthaltene Nullstelle von $\Phi(x)$ bezeichnen wir mit $x_1 = a + b\sqrt{z}$, wobei $a, b, z \in K_{n-1}$ und $K_n = K_{n-1}(\sqrt{z})$ ist. Wegen $x_1 \notin K_{n-1}$ muß $b \neq 0$ sein. Wir haben jetzt

$$0 = \Phi(a + b\sqrt{z}) = \Phi_1(a, b, z) + \Phi_2(a, b, z)\sqrt{z},$$

$$\Phi(a - b\sqrt{z}) = \Phi_1(a, b, z) - \Phi_2(a, b, z)\sqrt{z},$$

wobei Φ_1 und Φ_2 gewisse Polynome in drei Veränderlichen mit Koeffizienten aus K sind, so daß die Zahlen $\Phi_1(a, b, z)$ und $\Phi_2(a, b, z)$ im Körper K_{n-1} liegen. Daher folgt aus der ersten Gleichung, daß $\Phi_1(a, b, z) = \Phi_2(a, b, z) = 0$ sein muß, denn sonst wäre $\sqrt{z} \in K_{n-1}$. Auf Grund der zweiten Gleichung ist dann aber $\Phi(a - b\sqrt{z}) = 0$, d. h., die Zahl $x_2 = a - b\sqrt{z} \in K_n$ ist ebenfalls eine Wurzel der Gleichung $\Phi(x) = 0$. Diese Wurzel ist wegen $b \neq 0$ von x_1 verschieden. Die dritte Wurzel der Gleichung läßt sich schließlich sehr leicht bestimmen, es ist nämlich

$$x_3 = -p - (x_1 + x_2) = -p - 2a.$$

Offenbar gehört damit auch x_3 zur Erweiterung K_n. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wir brauchen diesen Beweis nur noch um eine kleine Überlegung zu ergänzen, um die Richtigkeit der folgenden Aussage zu bestätigen:

Satz 2'. *Für ein irreduzibles Polynom $\Phi(x)$ dritten Grades mit Koeffizienten aus einem Körper K liegt keine seiner Nullstellen in einer zulässigen Erweiterung des Körpers K.*

Im vorangehenden Beweis von Satz 1' ist nämlich $x_3 = -p - 2a$ ein Element von K_{n-1}, und dieses widerspricht der Definition der Zahl n (wir er-

[1]) In dem einfachsten, aber wichtigen Fall $p = q = 0$ kann man das sehr leicht einsehen: Dann bestehen nämlich zwischen den Nullstellen x_1, x_2, x_3 des Polynoms die Beziehungen $x_2 = \varepsilon \cdot x_1$, $x_3 = \varepsilon^2 \cdot x_1$, wobei $\varepsilon = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ eine Einheitswurzel dritten Grades bedeutet. Offenbar gehört die Zahl ε zu einer zulässigen Erweiterung des Körpers K, und folglich gilt das gleiche auch von den Zahlen $\varepsilon \cdot x_1$ und $\varepsilon^2 \cdot x_1$, sofern x_1 zu einer zulässigen Erweiterung von K gehört. Im allgemeinen Fall ist der Beweis etwas schwieriger.

innern, daß sich aus der Irreduzibilität $n \geqq 1$ ergab und demzufolge K_{n-1} definiert ist).

Die Ausführungen im Beweis zu Satz 1′ operieren also mit der leeren Menge von Objekten, weil nämlich irreduzible Polynome dritten Grades, die den Bedingungen des Satzes 1′ genügen, gar nicht existieren. Trotzdem enthalten unsere Betrachtungen keinen logischen Fehler. Der „hypothetische" Satz 1′ bleibt nämlich unabhängig von dem negativen Resultat in Satz 2′ gültig. Wir haben den Beweis von Satz 1′ vor allem deswegen herausgehoben, weil er zeigt, welche Überlegungen man zum Beweis des Satzes 1 im allgemeinen Fall anzuwenden hat. Der Satz 2′ läßt sich dagegen nicht unmittelbar auf den Fall eines beliebigen Grades verallgemeinern; vielmehr ist Satz 2′ Spezialfall eines ganz anderen Theorems, das unter dem Namen von GAUSS bekannt ist.

2.5. Der Satz von Gauß. Als „Satz von GAUSS" bezeichnen wir das folgende Theorem:

Satz 2. *Wenn eine Nullstelle eines über K irreduziblen Polynoms $\Phi(x)$ einer zulässigen Erweiterung von K angehört, ist der Grad dieses Polynoms gleich 2^n wobei $n \geqq 1$ eine gewisse ganze Zahl bedeutet.*

Aus diesem Satz ergibt sich sofort, daß die Nullstellen eines irreduziblen Polynoms dritten Grades zu keiner zulässigen Erweiterung gehören können, denn es ist für jede ganze Zahl n stets $3 \neq 2^n$.[1])

Obwohl in die Formulierung des Satzes 2 nur Begriffe eingehen, die einer unmittelbaren Berechnung zugänglich sind (wie Polynom und Nullstelle eines Polynoms), empfiehlt es sich für seinen Beweis, anstelle der einzelnen Zahlengrößen gewisse von ihnen erzeugte Körper zu betrachten. Es bestehen hier ähnliche Verhältnisse wie beim Beweis des grundlegenden Lemmas in Abschnitt 2.1.

Zur Übersetzung der Bedingungen des Satzes in die Sprache der Körpertheorie nehmen wir irgendeine Wurzel θ des Polynoms $\Phi(x)$ und betrachten die Erweiterung $K(\theta)$ des Körpers K. Es ist klar, daß für $\theta \in K'$ stets $K(\theta) \subset K'$ gilt. Die umgekehrte Behauptung ist offenbar ebenfalls richtig. Der Begriff des „Grades des Polynoms $\Phi(x)$" läßt sich auch in Begriffen des Körpers $K(\theta)$ ausdrücken: Der Grad des Polynoms $\Phi(x)$ stimmt mit dem Grad $(K(\theta):K)$ der endlichen Körpererweiterung überein. (Wir erinnern noch einmal daran, was der letzte Begriff bedeutet: Jede endliche Erweiterung L des Körpers K ist ein linearer Raum endlicher Dimension[2]) über diesem Körper, d. h., es existieren n Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$, so daß sich jedes Element λ des Körpers L eindeutig darstellen läßt in der Form $\lambda = k_1 \cdot \lambda_1 + \cdots + k_n \cdot \lambda_n$ mit $k_1, \ldots, k_n \in K$. Ein solches System $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heißt eine *Basis* des Körpers L über K, und die Zahl n wird der *Grad der Erweiterung* genannt und mit $(L:K)$ bezeichnet. Im Fall $L = K(\theta)$ kann man als Elemente λ_i die Potenzen von θ wählen, d. h. die Elemente $1 = \theta^0, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$, wobei n der Grad des Polynoms $\Phi(x)$ ist.)

---

[1]) Bei der ersten Lektüre dieses Artikels empfehlen wir, von hier sofort zu den geometrischen Folgerungen in § 3 überzugehen.

[2]) Vgl. den Artikel „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM.

Wir können jetzt den Satz 2 folgendermaßen umformulieren: *Ist die Erweiterung $L \supset K$ des Körpers K in einer zulässigen Erweiterung des Körpers K enthalten, so gilt für den Grad von L in bezug auf K die Beziehung $(L:K) = 2^n$, wobei $n \geqq 1$ eine ganze Zahl bedeutet.*[1])

Wir benötigen dazu folgendes einfache Resultat. Es sei $K \subset L \subset M$ eine Kette endlicher Körpererweiterungen, und es sei $l = (L:K)$, $m = (M:K)$ und $n = (M:L)$ gesetzt, dann gilt

$$m = l \cdot n. \tag{5}$$

Man beweist diese Gleichung meistens auf folgende Art: Es sei $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ eine Basis des Körpers L über dem Körper K, und es sei $\mu_1, \ldots, \mu_n$ eine Basis des Körpers M über dem Körper L. Dann bildet die Gesamtheit $(\lambda_1\mu_1, \lambda_1\mu_2, \ldots, \lambda_1\mu_n; \ldots; \lambda_l\mu_1, \ldots, \lambda_l\mu_n)$ aller möglichen Produkte $\lambda_i\mu_j$ eine Basis des Körpers M über dem Körper K. Weil jedoch die Anzahl der Elemente einer Basis mit dem Grad $(M:K) = m$ übereinstimmt, ist m gleich $l \cdot n$.

Aus der Gleichung (5) ergibt sich aber mühelos Satz 2. Es sei dazu $L = K(\sqrt{z})$ eine quadratische Erweiterung des Körpers K. Dann ist ihr Grad gleich 2, denn als Basis von L über K kann man die Elemente 1 und $\sqrt{z}$ wählen. Daher ist der Grad einer beliebigen zulässigen Erweiterung $K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m = K'$ mit $K_i = K_{i-1}(\sqrt{z_{i-1}})$, $z_{i-1} \in K_{i-1}$, infolge von (5) gleich 2^m. Folglich muß der Grad $(L:K)$ einer beliebigen Erweiterung L des Körpers K, die in einer zulässigen Erweiterung K' enthalten ist, ein Teiler von 2^m sein, was wiederum aus (5) folgt. Wir erhalten also $(L:K) = 2^n$ mit $0 \leqq n \leqq m$. Hiermit ist Satz 2 bewiesen.

§ 3. Klassische Probleme

3.1. Die Verdoppelung eines Würfels. Wir wollen nun die entwickelte allgemeine Theorie auf eine Reihe geometrischer Probleme anwenden. Unser Hauptziel besteht im Nachweis der Unlösbarkeit gewisser Aufgaben. Wir beweisen genauer gesagt, daß eine Reihe geometrischer Objekte unmöglich allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

Unser Haupthilfsmittel wird dabei der Satz 2 sein. Bei jeder der als Beispiel betrachteten Aufgaben wird die Untersuchung wie folgt verlaufen: Wir übertragen die Aufgabe in die Sprache der Algebra, stellen also Gleichungen für den gesuchten Punkt auf, bestimmen sodann deren Grad und untersuchen sie auf Irreduzibilität. Wenn der Grad ungleich 2^n ist und das Polynom irreduzibel ausfällt, ist es nach Satz 2 unmöglich, den gesuchten Punkt mittels Zirkel und Lineal zu konstruieren. In diesem Fall ist die entsprechende Konstruktionsaufgabe also unlösbar.[2])

[1]) In dieser Formulierung erscheint dieses Resultat sogar schärfer als das frühere, denn es ist nicht offensichtlich, daß *jede* endliche Erweiterung $L \supset K$ von der Form $L = K(\theta)$ ist, wobei θ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms ist. Jedoch kann man dies beweisen. Wir benötigen diese Aussage aber nicht. Aus dem umformulierten Satz folgt jedoch sofort der Satz 2.

[2]) Ein Leser, der sich früher auf das Studium der Sätze 1′ und 2′ beschränkte, hat das wie folgt zu verstehen: Ist das Polynom irreduzibel und sein Grad gleich 3, so ist es wegen Satz 2′ unmöglich, den gesuchten Punkt mittels Zirkel und Lineal zu konstruieren. Die entsprechende Konstruktionsaufgabe ist dann also unlösbar. Allein hiermit kann man die im Text angegebenen Aufgaben 1 bis 3 verstehen.

Aufgabe 1. *Es sei ein Würfel durch seine Kantenlänge gegeben. Man konstruiere die Kante eines anderen Würfels, der den doppelten Inhalt des gegebenen Würfels hat.*

Der Anfang der Untersuchung ist offensichtlich. Gegeben sind zwei Punkte, nämlich die Endpunkte der Kante des gegebenen Würfels. Wie üblich ordnen wir ihnen die Punkte 0 und 1 der komplexen Ebene zu. Die Länge der Kante des Würfels mit doppeltem Inhalt ist dann gleich dem reellen Wert von $\sqrt[3]{2}$. Für die Konstruktion des Punktes $\sqrt[3]{2}$ müssen wir das Polynom $x^3 - 2$ untersuchen. Der Grad dieses Polynoms ist gleich 3. Wenn es irreduzibel über dem Grundkörper $K = Q(i)$ ist, wobei Q den Körper der rationalen Zahlen bezeichnet, ist die Aufgabe der Verdoppelung eines Würfels unlösbar. Wir beweisen, daß das Polynom $x^3 - 2$ tatsächlich irreduzibel ist.

Wäre das Polynom $x^3 - 2$ reduzibel über dem Körper $Q(i)$, so wäre einer seiner Faktoren von erstem Grad. Ist dessen Nullstelle w nicht reell, so wäre der andere Faktor durch ein Polynom ersten Grades mit der zu w konjugierten Nullstelle $\overline{w}$ teilbar. Dann müßte der dritte Faktor ebenfalls linear sein und außerdem eine reelle Nullstelle haben. Diese Überlegung ist auf beliebige Polynome dritten Grades mit reellen Koeffizienten anwendbar: Ist ein solches Polynom über $Q(i)$ reduzibel, so ist einer der Faktoren linear, und wenigstens einer der linearen Faktoren hat außerdem eine reelle und folglich sogar rationale Nullstelle.

Das Polynom $x^3 - 2$ hat nun aber keine rationale Nullstelle, denn der reelle Wert von $\sqrt[3]{2}$ ist irrational.

Wir erinnern an den Beweis der letzten Tatsache: Angenommen, es gibt eine Darstellung $\sqrt[3]{2} = p/q$, wobei p, q teilerfremde ganze Zahlen sind. Dann ist $p^3 = 2q^3$, folglich muß die Zahl p gerade sein. Dann gilt $p = 2p_1$, also $4p_1^3 = q^3$. Demnach wäre auch die Zahl q gerade. Das widerspricht aber der Teilerfremdheit von p und q.

Es ist interessant, daß wir beim letzten Schritt der Lösung der geometrischen Aufgabe sogar rein arithmetische Überlegungen benutzt haben, die allerdings nicht sehr kompliziert waren.

3.2. Die Dreiteilung eines Winkels.

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein Winkel φ. Man konstruiere den Winkel $\frac{1}{3}\varphi$.*

Die Angabe des Winkels φ ist gleichbedeutend der Angabe von drei Punkten, nämlich dem Scheitelpunkt des Winkels, den wir als Punkt 0 wählen, und je einem Punkt auf den Schenkeln des Winkels; einen davon wählen wir als Punkt 1 auf der reellen Achse, und den anderen Punkt z wählen wir so, daß er den Betrag $|z| = 1$ hat (Abb. 9). Offenbar gilt $z = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$. Den gegebenen Punkten entspricht also der Körper $K = Q(i, \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Die Kon-

struktion des Winkels $\frac{\varphi}{3}$ besteht in der Konstruktion der Zahl $\cos\frac{\varphi}{3} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{3}$, und diese ist gleichbedeutend der Konstruktion der Zahl $\cos\frac{\varphi}{3}$. Nach bekannten trigonometrischen Formeln gilt

$$\cos\varphi = \cos\left(2 \cdot \frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = \cos^2\frac{\varphi}{3} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} - \sin^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$$

$$= \left(2\cos^2\frac{\varphi}{3} - 1\right) \cdot \cos\frac{\varphi}{3} - 2\sin\frac{\varphi}{3} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$$

$$= 2\cos^3\frac{\varphi}{3} - \cos\frac{\varphi}{3} - 2\left(1 - \cos^2\frac{\varphi}{3}\right)\cos\frac{\varphi}{3}$$

und damit

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Demnach ist die Zahl $\cos\frac{\varphi}{3}$ Wurzel der Gleichung

$$4x^3 - 3x - \cos\varphi = 0. \tag{6}$$

Diese Wurzel der Gleichung (6) ist also zu konstruieren. Wiederum haben wir ein Polynom dritten Grades vor uns. Wir müssen herausfinden, ob es über dem

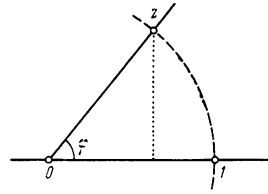


Abb. 9

Körper $K = Q(i, \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ reduzibel ist. Bei speziellen Werten von φ ist das tatsächlich der Fall; z. B. ist für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ einerseits $K = Q(i)$ und andererseits

$$4x^3 - 3x - \cos\frac{\pi}{2} = 4x^3 - 3x = x(4x^2 - 3).$$

Das entspricht der wohlbekannten Tatsache, daß man einen rechten Winkel mittels Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen kann (notfalls kann der Leser diese Konstruktion rein „algebraisch" ausführen, indem er die Gleichung $4x^2 - 3 = 0$ löst und ihre Wurzeln konstruiert).

Man kann auch ein Resultat erhalten, das in einem gewissen Sinne hierzu entgegengesetzt ist, daß nämlich bei allgemeinem Wert von φ das Polynom $4x^3 - 3x - \cos\varphi$ über dem Körper $K = Q(i, \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ irreduzibel ist. Dazu wäre allerdings der genaue Sinn dieser Behauptung herauszuarbeiten, wobei man im vorliegenden Zusammenhang den Gebrauch des Wortes „allgemein" auf verschiedene Weisen definieren kann; eine Erörterung dieser Möglichkeiten und der Beweis würden hier zu weit führen.

Wir beschränken uns auf die Angabe eines konkreten Winkels, den man unmöglich mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zerlegen kann, und zwar zeigen wir dies für den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Für den Unmöglichkeitsbeweis muß man beweisen, daß bei $\varphi = \frac{\pi}{3}$ das durch die linke Seite von (6) gegebene Polynom über dem Körper

$$Q\left(i, \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) = Q\left(i, \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = Q(i, \sqrt{3})$$

irreduzibel ist, d. h., wir müssen zeigen, daß das durch die linke Seite der Gleichung

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \tag{7}$$

gegebene Polynom irreduzibel über dem Körper $Q(i, \sqrt{3})$ ist. Wenn wir zeigen können, daß das Polynom $8x^3 - 6x - 1$ über dem Körper Q der rationalen Zahlen irreduzibel ist, dann folgt hieraus auch seine Irreduzibilität über dem Körper $Q(i, \sqrt{3})$; denn jede zulässige Erweiterung des Körpers $Q(i, \sqrt{3})$ ist auch eine zulässige Erweiterung des Körpers Q.

Im Zusammenhang mit der Verdoppelung des Würfels hatten wir bereits festgestellt, daß für den Nachweis der Irreduzibilität eines kubischen Polynoms über dem Körper der rationalen Zahlen der Nachweis ausreicht, daß das Polynom keine rationalen Nullstellen besitzt. Angenommen, das Polynom besäße eine rationale Nullstelle x. Wir setzen $2x = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen bedeuten. Aus der Gleichung (7) ergibt sich $p^3 - 3pq^2 = q^3$. Demnach wäre q^3 durch p teilbar, was $p = \pm 1$ zur Folge hat. Dann müßte q der Gleichung $q^3 + 3q^2 \mp 1 = 0$ genügen, und weil q eine ganze Zahl ist, müßte q das absolute Glied der Gleichung teilen. Also blieben auch für q nur die Werte ± 1. Offenbar sind aber die entsprechenden Werte $x = \pm\frac{1}{2}$ keine Lösung der Gleichung (7). Demnach hat (7) überhaupt keine rationalen Lösungen.

Damit haben wir erhalten, daß es unmöglich ist, den Winkel $\frac{\pi}{3} = 60°$ mittels Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu zerlegen, oder anders ausgedrückt, daß es unmöglich ist, den Winkel $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = 20°$ mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

3.3. Die Konstruktion eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden. Wir kommen jetzt zu einer weniger bekannten Aufgabe. Ein Dreieck ist durch drei seiner Liniengrößen, wie den drei Seiten, den drei Höhen, den drei Seitenhalbierenden oder den drei Winkelhalbierenden, eindeutig bestimmt. Die Konstruktion eines Dreiecks mittels Zirkel und Lineal bei gegebenen Seiten, Höhen oder Seitenhalbierenden ist nicht weiter schwierig. Anders verhält es sich bei gegebenen Winkelhalbierenden. Es zeigt sich nämlich, daß *die Aufgabe, ein Dreieck mit gegebenen Längen der Winkelhalbierenden mittels Zirkel und Lineal zu konstruieren, unlösbar ist.*

Wie schon bei der Aufgabe über die Dreiteilung eines Winkels werden wir nicht die Frage der Unlösbarkeit „im allgemeinen Fall" erörtern, sondern die Überlegungen nur für einen speziellen Wert der Längen der Winkelhalbierenden durchführen. Wir werden annehmen, daß zwei der gegebenen Winkelhalbierenden gleich lang sind; denn dann gelingt es, die Aufgabe auf die Untersuchung eines kubischen Polynoms zurückzuführen. Wird diese Voraussetzung nicht gemacht, so muß eine Gleichung 16. Grades betrachtet werden. Wir werden uns auf den folgenden Satz stützen:[1]) *Sind in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende gleich groß, so sind es auch die beiden entsprechenden Winkel, d. h., so ist das Dreieck gleichschenklig.* (Ein geometrischer Beweis dieses Theorems ist nicht einfach!)

Aufgabe 3. *Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkelhalbierenden gegebener Länge.*

Wir benutzen eine allgemeine Formel, deren Herleitung wir dem Leser überlassen.

Für ein Dreieck mit dem Inkreishalbmesser p und den Winkeln α, β, γ wird die Länge l_α der Winkelhalbierenden des Winkels α durch

$$l_\alpha = 2p \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \tag{8}$$

gegeben. Entsprechende Formeln gelten natürlich für l_β und l_γ.

In unserem Fall sei $\beta = \gamma$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $l_\beta = l_\gamma = 1$, während wir statt l_α einfach l schreiben. Wäre nun das gesuchte Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruierbar, so wäre es auch die Strecke der Länge $\sin \frac{\beta}{2}$. Aus der Formel (8) wollen wir nun erschließen, daß die Zahl $\sin \frac{\beta}{2}$ Nullstelle eines kubischen Polynoms über dem Körper $Q(l)$ ist und dieses Polynom bei gewissen rationalen Werten für l irreduzibel ausfällt. Damit ist

[1]) Vgl. etwa Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики (D. O. Schkljarski, N. N. Tschenzow, I. M. Jaglom, Ausgewählte Aufgaben und Sätze der Elementarmathematik), Teil 2, Moskau 1952, Aufgabe 96 und ihre Lösung.

dann die entsprechende Aufgabe als unlösbar erkannt. (Man überzeugt sich aber, daß bei allen l mit $0 < l < \infty$ das gesuchte Dreieck existiert!)

Wir wenden die Formel (8) auf l_α und l_β an und berechnen die Größe $\frac{l_\alpha}{l_\beta} = l$, wobei wir beachten, daß $\beta = \gamma$ ist. Dann erhalten wir

$$l = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\sin\frac{3\beta}{2}}{2\cos\beta}, \tag{9}$$

wobei wir abermals die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ausnutzten, indem wir nämlich $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta$ verwendeten. Setzen wir nun $\sin\frac{\beta}{2} = x$, so wird $\sin\frac{3\beta}{2} = 3x - 4x^3$ und $\cos\beta = 1 - 2x^2$. Aus der Gleichung (9) folgt somit, daß x Wurzel der Gleichung

$$4x^3 - 4lx^2 - 3x + 2l = 0 \tag{10}$$

ist. Wir betrachten nun den Fall $l = 3$ und führen die Variablensubstitution $y = 2x - 2$ durch. Dann ist die Zahl y eine Wurzel der Gleichung

$$y^3 - 15y - 10 = 0.$$

Wie früher genügt für den Beweis der Irreduzibilität des links stehenden Polynoms der Nachweis, daß es keine rationale Nullstelle besitzt. Wäre nämlich y eine solche Nullstelle, so hätte sie eine Darstellung $y = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen sind; dann wäre $p^3 = 5q^2(3p + 2q)$ und demnach $p = 5r$, wobei r eine ganze Zahl mit $25r^3 = q^2(15r + 2q)$ bedeutet; das ist aber unmöglich, weil q nicht durch 5 teilbar ist.

Zum Abschluß erörtern wir noch kurz zwei klassische Aufgaben, für deren vollständige Untersuchung allerdings die oben dargelegte Theorie nicht ausreicht, so daß wir einige weitere Resultate ohne Beweis benutzen werden.

3.4. Die Konstruktion von regelmäßigen Vielecken.

Aufgabe 4. *In einen Kreis mit dem Radius* 1 *sei ein regelmäßiges Vieleck mit gegebener Seitenzahl einzubeschreiben.*

Ist die Seitenzahl gleich n, so führt die Aufgabe in einem passenden Koordinatensystem auf die Konstruktion der n-ten Einheitswurzeln, d. h. der Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$. Dieses Polynom ist ohne Frage reduzibel, es ist nämlich stets durch $z - 1$ und bei geradem n sogar durch $z^{\frac{n}{2}} + 1$ teilbar. Nach der allgemeinen Regel müssen wir $z^n - 1$ in irreduzible Faktoren zerlegen. Wir vereinfachen jedoch zunächst die Aufgabe, indem wir ihre geometrische Deutung heranziehen.

Es sei $n = pq$, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen ungleich 1 sind. Wir beweisen: *Kann man das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren, so kann man auch das*

regelmäßige p-Eck und das regelmäßige q-Eck konstruieren. Kann man das regelmäßige p-Eck und das regelmäßige q-Eck konstruieren, so kann man auch das regelmäßige n-Eck konstruieren.

Die erste Behauptung ist offensichtlich. Die zweite Behauptung ist eine unmittelbare Konsequenz aus der folgenden evidenten Tatsache: Sind ε_i ($i = 1, \ldots, p$) bzw. η_j ($j = 1, \ldots, q$) die sämtlichen Einheitswurzeln p-ten Grades bzw. q-ten Grades, so erhält man in den Produkten $\varepsilon_i \cdot \eta_j$ die sämtlichen pq-ten Einheitswurzeln.

Hieraus folgt, daß man nur die Frage nach der Konstruierbarkeit der regelmäßigen Vielecke mit p^k Seiten zu behandeln braucht, wobei p eine Primzahl und $k \geqq 1$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Bei $p = 2$ und beliebigem k liegen alle Nullstellen des Polynoms $x^{2^k} - 1$ in einer zulässigen Erweiterung von Q. Dem Leser empfehlen wir, diese Behauptung rein algebraisch zu beweisen. Geometrisch folgt sie daraus, daß ein beliebiger Kreisbogen mit Zirkel und Lineal in 2^k gleiche Teile geteilt werden kann (nämlich durch sukzessive Halbierung seiner Sehne). Es sei jetzt $p \geqq 3$. Dann ist zunächst

$$x^{p^k} - 1 = (x^{p^{k-1}} - 1)\,(x^{p^{k-1}(p-1)} + x^{p^{k-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{k-1}} + 1).$$

Die Nullstellen des zweiten Faktors sind gerade die primitiven Einheitswurzeln p^k-ten Grades. Zur Konstruktion des p^k-Ecks ist es also notwendig, die Konstruktion wenigstens einer primitiven Einheitswurzel zu kennen. Das ist aber auch hinreichend, da die übrigen Nullstellen Potenzen einer beliebigen primitiven Einheitswurzel sind. Es bleibt also zu klären, ob die Nullstellen des Polynoms $x^{p^{k-1}(p-1)} + x^{p^{k-1}(p-2)} + \cdots + 1$ in einer zulässigen Erweiterung von Q liegen.

Eine Antwort, zumindest eine teilweise, erhalten wir sofort, wenn wir ohne Beweis annehmen, daß dieses Polynom irreduzibel ist. (Es gibt eine Reihe von Beweisen für diese Aussage; sie alle benutzen aber tieferliegende arithmetische Überlegungen. Auch hier beruht also die Unlösbarkeit einer geometrischen Aufgabe auf gewissen Eigenschaften der ganzen Zahlen!) Dann folgt aus Satz 2 (S. 219), daß es bei $p^{k-1}(p-1) \neq 2^n$ unmöglich ist, das p^k-Eck mittels Zirkel und Lineal zu konstruieren. Das p^k-Eck ist also im Fall $p > 2$ höchstens dann konstruierbar, wenn $k = 1$ und $p - 1 = 2^n$ ist. Aus dem Bewiesenen folgt jedoch noch nicht, daß für jede Primzahl der Form $p = 2^n + 1$ das regelmäßige p-Eck wirklich mittels Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Letzteres ist jedoch in der Tat der Fall, wie zuerst von Gauss im Alter von noch nicht 20 Jahren bewiesen wurde. Für $n = 1$ erhält man die Zahl $p = 2^1 + 1 = 3$, für $n = 2$ erhält man die Zahl $p = 5$, und für $n = 3$ wird $2^3 + 1 = 9$, also $2^n + 1$ keine Primzahl, für $n = 4$ erhält man $p = 17$. Die Möglichkeit der Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks mit Hilfe von Zirkel und Lineal war bis zu der Arbeit von Gauss nicht bekannt. Eine solche Konstruktion nur auf Grund geometrischer Intuitionen zu finden, ist auch sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich. In algebraischer Formulierung führt die Aufgabe auf die Feststellung, daß die Einheitswurzeln 17-ten Grades durch Quadratwurzelausdrücke über $Q(i)$ dargestellt werden können. Diese Darstellung ist zwar recht kompliziert, aber mit dem hier Dargelegten vollständig erreichbar, d. h., zusätzliche Kenntnisse sind dazu nicht erforderlich. Wir gehen jedoch auf diese Frage nicht weiter ein.

3.5. Die Quadratur des Kreises.

Aufgabe 5. *Man konstruiere zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat, dessen Flächeninhalt mit dem des Kreises übereinstimmt.*

Wir haben bereits erwähnt, daß diese Aufgabe ebenfalls nicht mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann. Jedoch ist diese Unlösbarkeit ganz anderer Natur als die der von uns bisher behandelten Aufgaben.

Wie üblich kann man den Radius des Kreises als 1 annehmen. Die Aufgabe führt dann auf die Konstruktion eines Quadrates vom Inhalt π, d. h., es ist eine Strecke der Länge $\sqrt{\pi}$ zu konstruieren. Wenn es möglich wäre, eine Strecke der Länge π zu konstruieren, könnten wir auch eine der Länge $\sqrt{\pi}$ konstruieren und umgekehrt. Daher liegt das eigentliche Problem bei der Aufgabe der Quadratur des Kreises in der Aufgabe der Rektifikation eines Halbkreisbogens, d. h. in der Konstruktion einer Strecke der Länge π.

Wir wenden uns demgemäß der Frage zu, ob die Zahl π zu einer zulässigen Erweiterung des Körpers Q gehört.

Bei den vorangehenden Aufgaben ergaben sich die negativen Antworten auf derartige Fragen in folgender Weise: Die gesuchte Zahl erwies sich als Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten, und auf dieses Polynom oder einen seiner Teiler war der Satz 2′ (oder der Satz 2) anwendbar. An dieser Stelle sei erwähnt, daß auch ein umgekehrtes Resultat gilt: Wenn eine Zahl x in einer zulässigen Erweiterung eines Körpers K liegt, ist sie in jedem Fall Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten aus dem Körper K (dieses Resultat ist für jede endliche Erweiterung von K richtig, und jede zulässige Erweiterung ist eine endliche Erweiterung).

Es zeigt sich nun aber, daß die Zahl π Nullstelle keines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. Dafür sagt man auch, die Zahl π sei *transzendent*.[1])

Der Beweis der Transzendenz von π verlangt tieferliegende analytische und arithmetische Hilfsmittel. Aus diesem Beweis folgt nicht nur die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal, sondern auch die mit Hilfe anderer Zeichengeräte, wie z. B. Kurvenlinealen, deren Berandungen Bögen von algebraischen Kurven über dem Körper der rationalen Zahlen sind. Mittels geeigneter solcher Kurvenlineale ist natürlich die Würfelverdoppelung und die Winkeldreiteilung möglich.

[1]) Vgl. den Artikel „Elemente der Zahlentheorie" in Band I der EdEM, Kap. VI, insbesondere § 17.

Literatur

[1] Klein, F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert, Leipzig 1895.

[2] Weber, H., und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, Bd. I. 4. Aufl., Leipzig und Berlin 1922.

[3] Постников, М. М., Теория Галуа (Postnikow, M. M., Galoistheorie), Moskau 1963.

[4] Школьник, А. Г., Задача деления круга (Schkolnik, A. G., Das Problem der Kreisteilung), Moskau 1961.

[5] Дринфельд, Г. И., Трансцендентность чисел π и e (Drinfeld, G. I., Die Transzendenz der Zahlen π und e), Charkow 1952.

Man vergleiche ferner die am Schluß des Artikels „Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen" angegebenen Bücher von A. Adler [1] und L. Bieberbach [11].

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

Böhm, J., u.a., Geometrie II. 3. Aufl., Berlin 1980.

N. M. BESKIN

ABBILDUNGSVERFAHREN

§ 1. Aufgabenstellung

1.1. Abbildungen des Raumes auf die Ebene. Während es Instrumente gibt, die auf dem Papier eine Spur hinterlassen (z. B. ein Bleistift oder ein Pinsel), gibt es kein Zeicheninstrument, das bei einer Bewegung im Raum Spuren hinterläßt. Man kann also jeden ebenen Gegenstand genau auf dem Papier abbilden, und es besteht hier nicht die Frage nach geeigneten Abbildungsverfahren (außer evtl. der ähnlichen Veränderung der Abmessungen). Ist dagegen ein räumlicher (dreidimensionaler) Gegenstand abzubilden, so kann man ihn aus dem erwähnten Grund niemals genau kopieren. Wir schließen hier die Anfertigung von Modellen aus, da dieser Prozeß in der Regel zu kompliziert ist und nur in Ausnahmefällen benutzt werden kann. In der täglichen Praxis ist man daher gezwungen, sich mit der Abbildung von räumlichen Gegenständen in die Ebene zu begnügen.

Wir vereinbaren hier die folgende Terminologie: Einen abzubildenden Gegenstand bezeichnen wir als das *Original*, eine ebene Figur, die das Original wiedergibt oder abbildet, als *Bild*. Ein System von Regeln, durch das beschrieben wird, wie man aus der Kenntnis des Originals sein Bild finden kann, nennen wir ein *Abbildungsverfahren*. Aus Gründen, die weiter unten erläutert werden, können von Fall zu Fall ganz verschiedene Abbildungsverfahren in Betracht kommen.

1.2. Die Zyklographie. Bei jedem Abbildungsverfahren werden die Punkte des Raumes auf bestimmte Objekte der Ebene abgebildet. Dabei braucht das Bild eines Punktes durchaus nicht unbedingt ein Punkt zu sein. Es gibt z. B. ein Abbildungsverfahren, die sogenannte *Zyklographie*, bei dem die Bilder der Raumpunkte orientierte Kreise[1]) der Ebene sind.

Es sei α die *Bildebene* und M' ein beliebiger Raumpunkt (Abb. 1). Wir fällen von M' das Lot auf die Ebene α, bezeichnen den Fußpunkt dieses Lotes mit M_0 und konstruieren den Kreis um M_0 mit dem Radius $|M'M_0|$; auf diesem Kreis wählen wir einen solchen Umlaufsinn, daß er für einen Beobachter, der sich im Punkt M' befindet, entgegen dem Uhrzeigersinn erscheint. Den so erhaltenen orientierten Kreis sehen wir als Bild des Punktes M' an. Bei diesem Abbildungsverfahren werden die Punkte der Ebene α auf sich selbst abgebildet, d. h., das Bild eines solchen Punktes ist ein Kreis mit dem Radius Null. Die Zyklographie vermittelt eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten des Raumes und den orientierten Kreisen in der Ebene. Zwei Punkte, die bezüglich der Ebene α spiegelbildlich liegen, werden auf Kreise abgebildet, die sich nur durch ihre Orientierung unterscheiden.

[1]) Das heißt Kreise, auf denen ein bestimmter Umlaufsinn festgelegt ist; er wird auf der Zeichnung durch einen Pfeil gekennzeichnet.

In Abb. 2 sind die Bilder zweier Geraden des Raumes angedeutet, und zwar in Abb. 2a einer Geraden, die mit der Ebene α einen Winkel kleiner als 45° einschließt und in Abb. 2b einer Senkrechten auf der Ebene α.

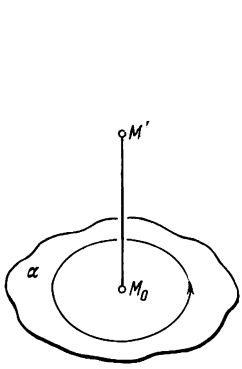


Abb. 1

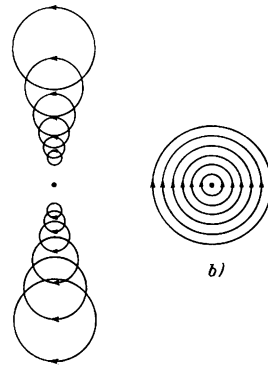


Abb. 2

1.3. Das Verfahren von Fedorow. Dieses Verfahren besteht darin, daß den Raumpunkten parallele Vektoren der Ebene zugeordnet werden. In der Ebene α zeichnen wir auf einer Geraden a eine bestimmte Richtung als „positiv" aus und nennen die entgegengesetzte Richtung auf dieser Geraden „negativ". Von den beiden durch die Ebene α bestimmten Halbräumen sehen wir ebenfalls den einen als „positiv" und den anderen als „negativ" an. Ist dann M' irgendein Punkt des Raumes, so fällen wir von ihm aus das Lot auf die Ebene α und bezeichnen den Fußpunkt des Lotes mit M_0; durch M_0 ziehen wir die zu a parallele Gerade und tragen auf ihr vom Punkt M_0 aus die Strecke (den Vektor) $\overrightarrow{M_0M'}$ ab, deren Länge gleich dem Abstand des Punktes M' von der der Ebene α ist und die in die „positive" („negative") Richtung von a weist, wenn M' im „positiven" („negativen") Halbraum bezüglich α liegt. Der auf diese Weise konstruierte (gebundene!) Vektor[1]) $\overrightarrow{M_0M'}$ sei das Bild des Punktes M'. Die Punkte der Ebene α werden bei dem geschilderten Verfahren auf sich selbst abgebildet; man kann als Bild eines Punktes der Ebene α den „an diesen Punkt gebundenen Nullvektor" auffassen.

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 300.

In Abb. 3 sind die Bilder zweier Punkte des Raumes dargestellt, die bezüglich der Ebene α symmetrisch liegen. Abb. 4a deutet das Bild einer Geraden an, die die Ebene α schneidet, Abb. 4b das Bild einer zur Ebene α parallelen Geraden.

Die angeführten Beispiele zeigen, daß bei einem Abbildungsverfahren das Bild eines Punktes kein Punkt zu sein braucht. Derartige Abbildungsverfahren

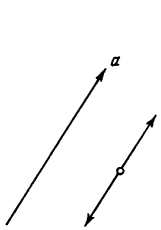


Abb. 3

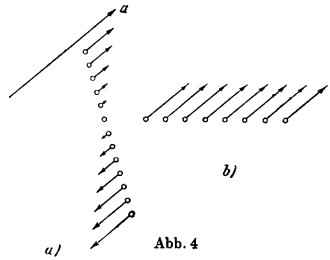


Abb. 4

sind allerdings nicht anschaulich, und sie sind wenig verbreitet. Deshalb wollen wir uns mit ihrer Erwähnung begnügen und uns im folgenden nur mit Verfahren beschäftigen, bei denen *jedem Punkt des Raumes ein Punkt der Ebene* zugeordnet wird.

1.4. Grundforderungen an ein Abbildungsverfahren. An ein Abbildungsverfahren sind zwei grundlegende Forderungen zu stellen:

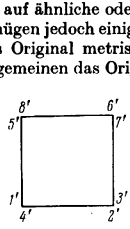
1. Anschaulichkeit,
2. Maßtreue.

Als *Anschaulichkeit* bezeichnen wir die Eigenschaft des Bildes, möglichst denselben visuellen Eindruck hervorzurufen, wie es das Original tut. Das Bild soll ja in einem gewissen Sinne das Original ersetzen. Es ist selbstverständlich, daß wir dabei nur an die geometrische Form des Originals denken. Der vom Original hervorgerufene visuelle Eindruck hängt von vielen seiner Eigenschaften ab, in starkem Maße z. B. auch von der Farbe, die natürlich nicht in den Zuständigkeitsbereich der Geometrie fällt. Unterwirft man ein Werk der Malerei einer geometrischen Analyse, so betrachtet man es lediglich unter dem Gesichtspunkt einer Zeichnung, indem man nämlich von Farbe, Faktur und anderen Besonderheiten absieht.

Die Anschaulichkeit kann man auch etwa so charakterisieren: Jeder Mensch, der die Abbildung betrachtet, sollte wissen, was sie darstellen soll. Hierfür sollte keinerlei spezielle Vorbildung oder die Kenntnis irgendwelcher Formalitäten nötig sein. Die in den Abb. 1 bis 4 gezeigten Bilder besitzen keine An-

schaulichkeit. Ohne die im Text angegebene Beschreibung kann man niemals verstehen, was auf diesen Zeichnungen abgebildet sein soll.

Unter *Maßtreue* versteht man folgendes: Aus der Abbildung kann man, und zwar möglichst einfach, das Original als festen Körper rekonstruieren, d. h. in seinen sämtlichen Abmessungen bestimmen. Wir bemerken, daß ein Bild nicht unbedingt das Original metrisch genau festzulegen braucht. Im allgemeinen wird bei einem Abbildungsverfahren das Original ohnehin nur bis auf ähnliche oder affine Abbildungen usw.[1]) definiert sein. In diesen Fällen genügen jedoch einige ergänzende Vereinbarungen (Maßstabsangaben u. ä.), um das Original metrisch zu definieren. Eine Ingenieurzeichnung z. B. muß im allgemeinen das Original, das gebaut werden soll (ein Gebäude, ein Maschinenteil usw.), metrisch genau bestimmen.



Die Darstellungen in den Abb. 1 bis 4 sind in diesem Sinne maßtreu.

Die Forderungen der Anschaulichkeit und der Maßtreue widersprechen allerdings einander. Bei der Konstruktion von Abbildungen für künstlerische Zwecke wird die Anschaulichkeit bevorzugt. Daher verwenden Künstler stets ein Abbildungsverfahren (man bezeichnet es als *Zentralprojektion*), das im Vergleich mit anderen Verfahren die größte Anschaulichkeit gewährleistet. Die Maßtreue ist dagegen bei diesem Verfahren nur gering: Die Bestimmung der Abmessungen des Originals ist zwar möglich, jedoch sind hierfür verhältnismäßig komplizierte Konstruktionen erforderlich.

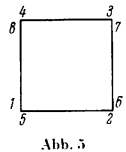


Abb. 5

Die Konstrukteure im Maschinenbau und in einigen anderen Spezialgebieten benutzen ein Verfahren von MONGE (siehe weiter unten). Es ist bezüglich der Maßtreue das beste Verfahren, seine Anschaulichkeit ist jedoch nur gering. Ein Mensch, der keine spezielle Vorbildung besitzt, begreift z. B. nicht, daß in Abb. 5 ein Würfel dargestellt ist.

Am weitesten sind die Abbildungsverfahren verbreitet, bei denen ein gewisser Kompromiß zwischen den Forderungen nach Anschaulichkeit und nach Maßtreue geschlossen wird. Beispielsweise unterscheidet sich das Verfahren der *Parallelprojektion* hinsichtlich Anschaulichkeit nur unwesentlich von dem Verfahren der Zentralprojektion, dafür sind jedoch bei diesem Verfahren die Konstruktionen zur Bestimmung der Abmessungen wesentlich einfacher. Nach dem Verfahren der Parallelprojektion werden die meisten Abbildungen räumlicher Figuren in Geometriebüchern konstruiert.

1.5. Nichteindeutigkeit der inversen Abbildung. Ein Punkt im Raum ist durch drei Koordinaten festgelegt, ein Punkt in der Ebene dagegen durch

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", S. 55–57.

zwei.[1]) Man kann zeigen, daß es aus diesem Grunde unmöglich ist, den Raum (oder auch nur ein kleines Gebiet des Raumes) eineindeutig und stetig auf die Ebene abzubilden. Das bedeutet, daß für eine stetige Abbildung des Raumes in die Ebene die inverse Abbildung nicht eindeutig sein kann. Mithin kann man durch alleinige Angabe eines Bildpunktes den zugehörigen Originalpunkt nicht eindeutig festlegen. Bei jedem Abbildungsverfahren muß man zum Bildpunkt noch einen Parameter hinzufügen; erst dann ist der Originalpunkt vollständig bestimmt. Dieser zusätzliche Parameter tritt bei den verschiedenen Abbildungsverfahren in ganz verschiedener Weise auf.

Beispielsweise geht man bei der *kotierten Projektion* (dem *Eintafelverfahren*) so vor: Ist M' ein Originalpunkt im Raum, so fällt man von M' aus das Lot auf die Bildebene α und bringt neben dem Fußpunkt M des Lotes eine Zahlenmarkierung (Kote, von franz. coté = beziffert) an, die den Abstand des Punktes M' von der Ebene α angibt (d. h. die Länge des Lotes $\overline{M'M}$). Zusätzlich versieht man diesen Abstand mit dem Zeichen „+“ oder „−“, je nachdem, in welchem der beiden durch α bestimmten Halbräume sich der Punkt M' befindet. Der Punkt M zusammen mit der Zahlenmarke ist der Bildpunkt des Punktes M'.

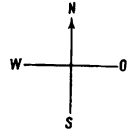


Abb. 6

Bei der Abbildung komplizierter Originale vermerkt man die Kote nicht neben jedem einzelnen Punkt, sondern verbindet alle Punkte mit gleicher Kote durch eine Linie und schreibt diese gemeinsame Kote an diese Linie. Eine Linie, die aus Punkten mit gleicher Kote besteht, heißt *Höhenlinie* (*Isohypse*). Abb. 6 zeigt die kotierte Projektion eines Berges. Der Südwesthang fällt am schwächsten, der Südosthang am stärksten ab.

Bei diesem Verfahren ist die Kote derjenige Parameter, von dessen Notwendigkeit oben gesprochen wurde. Zusammen mit der Kote legt der Bildpunkt den Originalpunkt vollständig fest. Bei der Zyklographie (Abb. 1) wird der fehlende Parameter durch den Kreisradius, bei dem Verfahren von Fedorow (Abb. 3) durch die Länge des Vektors gegeben.

1.6. Projektive Abbildungsverfahren. Am weitesten verbreitet sind projektive Abbildungsverfahren. Grund hierfür ist, daß bei den Projektionsverfahren das Bild in einer ähnlichen Weise konstruiert wird wie beim Sehprozeß im Auge auf der Netzhaut (wir denken dabei natürlich nur an die geometrische und nicht an die physiologische Seite des Sehprozesses). Deshalb sind auch die

[1]) Der Raum hat — mathematisch ausgedrückt — die Dimension 3, die Ebene die Dimension 2 (vgl. S. 378 und 385).

Projektionsmethoden am anschaulichsten. Im weiteren betrachten wir nur projektive Abbildungsverfahren.

Alle Verfahren, bei denen der Bildpunkt entweder unmittelbar durch Projektion des Originalpunktes gewonnen wird oder nach der Projektion noch eine gewisse projektive Abbildung[1]) (z. B. eine ähnliche Abbildung, d. h. eine Maßstabsänderung) ausgeführt wird, heißen *projektiv*. Die Projektionen werden durch Geraden realisiert, wobei in den meisten Fällen diese Geraden (Projektionsstrahlen) ein Bündel bilden.[2]) Wir erinnern daran, daß man zwei Arten von Bündeln unterscheidet, nämlich die *eigentlichen* (zentralen) *Bündel*, die aus allen denjenigen Geraden bestehen, die durch einen gegebenen Punkt (das Zentrum des Bündels) gehen, und die *uneigentlichen Bündel*, die von allen zu einer gegebenen Geraden parallelen Geraden gebildet werden (in diesem Fall sagt man auch, daß das Zentrum des Bündels uneigentlich oder ein „unendlich ferner" Punkt[3]) ist). Man kann also sagen, daß ein Bündel die Menge aller der Geraden ist, die durch einen gegebenen Punkt gehen, und zwar durch einen endlichen oder durch einen „unendlich fernen" Punkt.

Wir betrachten also Abbildungen des dreidimensionalen Raumes auf die Ebene mittels Projektionsverfahren, bei denen die Projektion durch Geradenbündel (zentrale Bündel oder Bündel paralleler Geraden) *realisiert wird.*

Die Gebiete der *darstellenden Geometrie*, wie man die Abbildungslehre auch nennt, die bei Beschränkung auf Projektionsverfahren außerhalb der Betrachtung bleiben, haben einen relativ geringen Umfang und spielen nur bei gewissen selten auftretenden Spezialfragen eine Rolle (z. B. benutzt man in der Chemie der mehrkomponentigen Legierungen gelegentlich eine mehrdimensionale darstellende Geometrie).

§ 2. Parallelprojektionen

2.1. Die Eigenschaften der Parallelprojektion. Wir wählen eine gewisse Ebene α als Bildebene (d. h. eine Ebene, auf der das Bild konstruiert wird). Ferner wählen wir im Raum eine (nicht zur Ebene α parallele) Gerade a, die die *Projektionsrichtung* angibt. (Genau genommen betrachten wir nicht eine feste Gerade – denn bei der Beschreibung der Parallelprojektion kann die Gerade a durch eine beliebige zu ihr parallele Gerade ersetzt werden –, sondern ein Bündel paralleler Geraden; die Gerade a dient nur als Repräsentant dieses Bündels.)

Es sei M' ein beliebiger Punkt des Raumes. Durch M' legen wir die zu a parallele Gerade, die *Projektionsgerade* (den *Projektionsstrahl*). Den Schnittpunkt M dieser Geraden mit der Ebene α wählen wir als Bild des Punktes M'.

[1]) Vgl. S. 104–115.

[2]) Es gibt auch Projektionsmethoden, bei denen nicht Bündel zur Projektion benutzt werden, sondern gewisse andere zweiparametrige Geradenscharen (Kongruenzen). Wir werden derartige Methoden hier nicht betrachten.

[3]) Vgl. S. 107.

Wir machen eine Bemerkung zu der von uns verwendeten Bezeichnungsweise: Alle Symbole, die sich auf das Original beziehen, versehen wir mit Strichen, und für das Bild verwenden wir die gleichen Buchstaben ohne Strich. So hat der Punkt M' als Bild den Punkt M, die Gerade m' als Bild die Gerade m usw. Diese Bezeichnungsweise wird durch die Tatsache nahegelegt, daß wir in der darstellenden Geometrie, in der die Abbildungsverfahren der Untersuchungsgegenstand sind, gleichzeitig Original und Bild zu betrachten haben. In allen anderen Fällen haben wir es eigentlich nur mit dem Bild zu tun. Betrachten wir z. B. die Zeichnungen in einem Geometrielehrbuch, so sagen wir „das ist ein Würfel", „das ist eine Kugel". Tatsächlich stellen diese Zeichnungen jedoch „das Bild eines Würfels" und „das Bild einer Kugel" dar. (Ebenso ist das Werk eines Malers nicht ein Mensch, sondern dessen Porträt.) In der darstellenden Geometrie müssen wir also sowohl das Original (Punkt M' in Abb. 7) als auch das Bild (Punkt M auf der gleichen Abbildung) bezeichnen. Würden wir nun vereinbaren, das Original durch Buchstaben ohne Striche und das Bild durch Buchstaben mit Strichen zu bezeichnen, so müßten wir in allen Zeichnungen Buchstaben mit Strichen benutzen, und nur in der darstellenden Geometrie würden uns einige Buchstaben ohne Strich begegnen.

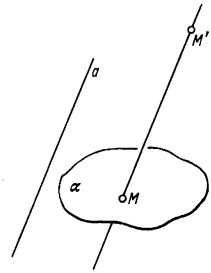


Abb. 7

Wir führen einige für das Verfahren der Parallelprojektion charakteristische Eigenschaften an. Die Beweise überlassen wir in allen Fällen dem Leser.

1. *Jedem Punkt des Raumes entspricht eindeutig ein Punkt auf der Ebene* α. Natürlich ist diese Zuordnung nicht eineindeutig. Alle Punkte, die derselben Projektionsgeraden angehören, haben das gleiche Bild.

Bei allen Abbildungsverfahren heißen Punkte, die das gleiche Bild haben, *konkurrierende Punkte*. Bei der Parallelprojektion sind konkurrierende Punkte genau diejenigen, die auf der gleichen Projektionsgeraden liegen.

2. *Geraden, die nicht projizierend sind, haben als Bilder wieder Geraden; jede Projektionsgerade wird auf einen Punkt abgebildet.*

Wir bemerken, daß wir uns alle geometrischen Figuren aus Punkten zusammengesetzt denken. Mithin ist das Bild einer Geraden die Menge der Bilder ihrer einzelnen Punkte.

3. *Parallele Geraden, die nicht projizierend sind und die nicht in einer projizierenden Ebene* (d. h. einer zur Geraden a parallelen Ebene) *liegen, werden auf parallele Geraden abgebildet.* Hieraus folgt, daß das Bild eines Parallelogramms wieder ein Parallelogramm ist (das in eine Strecke ausgeartet sein kann).

4. *Gehören Punkte A', B', C' der gleichen Geraden an* (die nicht projizierend ist), *so gilt*

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}.$$

Sind $\overline{A'B'}$ und $\overline{C'D'}$ Strecken, die auf parallelen (nicht projizierenden) *Geraden liegen, so gilt*

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}.$$

Die Aussagen 2 bis 4 kann man noch etwas anders formulieren. Dazu bemerken wir zunächst, daß jedes zu projizierende Original verschiedene Eigenschaften besitzt. Bei einer Parallelprojektion werden diese Eigenschaften im allgemeinen verlorengehen, d. h., sie werden nicht auf das Bild übertragen werden; einige Eigenschaften werden dagegen erhalten bleiben. Die letzten Eigenschaften nennt man *invariant* gegenüber Parallelprojektion.[1]) Ein Parameter, der das Original charakterisiert und dessen Wert bei keiner Parallelprojektion geändert wird, heißt eine *Invariante* der Parallelprojektionen. Unter Benutzung dieser Begriffe kann man die Eigenschaften 2 bis 4 nun so formulieren:

2'. *Die Eigenschaft dreier* (oder mehrerer) *Punkte, „ein und derselben Geraden anzugehören", ist invariant gegenüber Parallelprojektionen*, d. h., besitzen drei Originalpunkte diese Eigenschaften, so besitzen auch ihre Bilder diese Eigenschaft.[2])

3'. *Die Eigenschaft zweier Geraden, „parallel zu sein", ist invariant gegenüber Parallelprojektionen.*

4'. *Das Teilverhältnis dreier Punkte einer Geraden ist eine Invariante der Parallelprojektionen. Eine Invariante ist ebenso das Verhältnis der Längen zweier Strecken, die auf der gleichen Geraden oder auf parallelen Geraden liegen.*

Nach den bisherigen Darlegungen ist es klar, daß die Parallelprojektion eine *affine Abbildung*[3]) ist, jedoch ist diese Abbildung ausgeartet, weil sie die Dimension des Originals verkleinert: Die Punkte des dreidimensionalen Raumes werden auf die Punkte der Ebene abgebildet.

2.2. Das Verfahren der Eintafel-Parallelprojektion. Für die Herstellung von Zeichnungen treffen wir zunächst folgende Vereinbarung. Schneiden sich die Bilder zweier Kurven, so kennzeichnen wir entweder diesen Schnittpunkt durch einen kleinen Kreis (Abb. 8a), oder wir unterbrechen eine der Kurven. Die erste Kennzeichnung verwenden wir, wenn sich die Originale l' und m' schneiden; in diesem Fall ist der Schnittpunkt A der Bilder das Bild des Schnittpunktes A' der Originale. Die zweite Kennzeichnung wird benutzt, wenn sich die Originale nicht schneiden. Der Schnittpunkt der Bilder ist in diesem Fall nicht das Bild eines beiden Originalkurven gemeinsamen Punktes, sondern das Bild zweier verschiedener (konkurrierender) Punkte: des Punktes A' auf der Kurve l' und des Punktes B' auf der Kurve m'. Hierbei bedeutet die

[1]) Vgl. S. 93–95.

[2]) Wir erwähnen jetzt nicht jedes Mal die offensichtlichen Ausnahmen bei den Projektionsgeraden.

[3]) Vgl. S. 56.

Unterbrechung der Kurve m (Abb. 8b), daß der Punkt B' der Bildebene *näher* als der Punkt A' ist. Wir stellen uns dabei einen Beobachter vor, der sich bezüglich der Bildebene α auf derselben Seite wie die Kurve l' und dabei hinreichend weit von der Bildebene entfernt befindet. Blickt dieser Beobachter längs der Projektionsgeraden auf die Ebene α, so trifft sein Blick zuerst auf

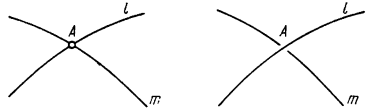


Abb. 8

die Kurve l' und dann auf m', d. h., er sieht, daß l' beim Schnitt mit m' die Kurve m' verdeckt.[1])

Bei der Konstruktion der Bilder begegnen wir vielen Vereinbarungen dieser Art. Man darf dabei nicht meinen, daß es das Ziel dieser Vereinbarungen ist, eine Zeichnung zu stilisieren oder ihr Eleganz zu verleihen. Sie spielen vielmehr eine wichtige geometrische Rolle, indem sie die Gefahr verringern, beim Lesen einer Zeichnung zu verschiedenen Deutungen zu kommen. Hätten wir z. B. die obigen Vereinbarungen nicht eingeführt, wie würden wir dann auf die Frage

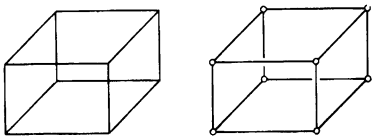


Abb. 9

antworten: Was ist in Abb. 9a abgebildet? Auf diese Frage sind unter anderem die folgenden Antworten möglich:

1. In Abb. 9a ist ein Parallelepiped abgebildet. Es ist möglich, daß wir es von oben rechts sehen, aber es ist auch möglich, daß wir es von unten links sehen.

2. In Abb. 9a ist eine ebene Figur zu sehen.

[1]) Diese Vereinbarung bedeutet streng genommen, daß wir die Abstände der Punkte A' und B' von der Bildebene α als „orientiert" ansehen, d. h., für Punkte im „positiven" Halbraum (in dem sich der Beobachter befindet) werden die Abstände mit dem Pluszeichen, für Punkte im anderen, „negativen" Halbraum werden die Abstände mit dem Minuszeichen versehen.

3. In Abb. 9a sind zwölf Strecken abgebildet, die im Raum verstreut sind und paarweise keine gemeinsamen Punkte haben.

In Abb. 9b sind diese Vieldeutigkeiten beseitigt. Es besteht kein Zweifel, daß dort ein Parallelepiped abgebildet ist, das von rechts oben betrachtet wurde. Die metrischen Parameter dieses Parallelepipeds können wir bis jetzt natürlich nicht bestimmen. Auf diese Frage kommen wir später zurück.

Wir erwähnten bereits, daß bei einem Projektionsverfahren außer der Projektion noch eine beliebige projektive Transformation ausgeführt werden kann. Wir vereinbaren, daß wir von nun an eine zusätzliche Ähnlichkeitstransformation zulassen werden. Auf diese Weise kommen wir zu einem Abbildungsverfahren, das man als *Eintafel-Parallelprojektion* bezeichnet. Dieses Verfahren besteht darin, daß *die Punkte des Raumes zunächst parallel auf eine Ebene projiziert werden und anschließend das in dieser Ebene entstandene Bild einer Ähnlichkeitstransformation unterworfen wird.*[1])

Wir betonen, daß der Leser von jetzt an beim Betrachten eines Punktes M einer Zeichnung nicht mehr annehmen darf, daß M die unmittelbare Projektion des Punktes M' ist.

Die Eigenschaften 1 bis 4 bleiben bei der neuen Auffassung des Begriffs „Parallelprojektion" richtig.

2.3. Gebundene und freie Bilder. Beim Studium der Eintafel-Parallelprojektion und allgemein beim Studium eines beliebigen Abbildungsverfahrens entstehen folgende Fragen:

1. Wie kann man bei gegebenem Original das Bild konstruieren?
2. Was kann man bei gegebenem Bild über das Original aussagen?

Hierbei ist es keineswegs offensichtlich, ja sogar (bei einem beliebigen Abbildungsverfahren) nicht immer richtig, daß man aus der Kenntnis des Bildes heraus jede Frage, die sich auf das Original bezieht, beantworten kann. Bevor wir zur Behandlung dieser Fragen übergehen, bemerken wir, daß sie zwei Deutungen zulassen, in Abhängigkeit davon, ob es sich um

a) gebundene Bilder oder
b) freie Bilder

handelt. Ein Bild heißt *gebunden*, wenn alle Parameter bekannt sind, die zur eindeutigen Konstruktion des Bildes aus dem Original und zur eindeutigen Rekonstruktion des Originals aus dem Bild erforderlich sind.

Es sei z. B. das Bild eines Würfels mit der Kantenlänge 1 m zu konstruieren. Jede Eintafel-Parallelprojektion auf eine Ebene wird durch zwei Parameter charakterisiert, nämlich

[1]) Die bei der Ersetzung des Originals durch das Bild auftretende Verzerrung bleibt qualitativ dieselbe, wenn wir allgemein eine erhaltene Projektion nicht einer Ähnlichkeitstransformation, sondern einer beliebigen affinen Abbildung unterwerfen, weil die Parallelprojektionen selbst affine Abbildungen sind. Wir beschränken uns auf Ähnlichkeitstransformationen insbesondere deshalb, weil der Unterschied unwesentlich ist.

1. den Neigungswinkel σ der Projektionsstrahlen gegen die Bildebene;[1])
2. den Ähnlichkeitskoeffizienten k, d. h. die Zahl, mit der alle Streckenlängen, die man in der Bildebene durch die Projektion erhält, multipliziert werden.

Die relative Lage des Würfels zur Zeichenebene wird im Fall orthogonaler Projektion durch zwei Parameter bestimmt. Man kann z. B. die Winkel α, β, γ des Projektionsstrahls mit den Kanten des Würfels, die von einer Ecke ausgehen, zugrunde legen. Diese Winkel genügen der Beziehung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

und liefern mithin zwei unabhängige Parameter.

Man kann die Angelegenheit auch von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachten: Die Lage eines starren Körpers im Raum wird durch sechs Parameter bestimmt. Jedoch beeinflußt eine beliebige Parallelverschiebung des Körpers das Bild nicht (sie bewirkt lediglich eine Parallelverschiebung des Bildes in der Bildebene); eine solche Verschiebung hängt von drei Parametern ab. Ebenso beeinflußt eine Drehung des Körpers um eine Achse, die mit einer Projektionsgeraden zusammenfällt (im Fall einer orthogonalen Projektion) das Bild nicht (sie bewirkt lediglich eine Drehung des Bildes); eine solche Drehung hängt von einem Parameter ab. Es verbleiben also $6 - 3 - 1 = 2$ Parameter. Bei einer schrägen Projektion verändert dagegen eine Drehung des Körpers um eine Projektionsgerade die Gestalt des Bildes, und die Lage des Körpers hängt in diesem Fall von drei Parametern ab. Bei einer gebundenen Projektion setzen wir also voraus, daß alle diese Parameter gegeben sind.

Mit den Parametern

$$\sigma = 61°, \quad k = 0{,}04, \quad \alpha = 45°,$$
$$\beta = 61°, \quad \gamma = 59°$$

wird ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m so abgebildet, wie es in Abb. 10 dargestellt ist.

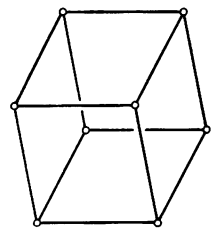


Abb. 10

Bei der Konstruktion gebundener Bilder bestimmt also das Original eindeutig das Bild und auch das Bild eindeutig das Original. Auch das Umgekehrte ist richtig. Kennen wir die Parameter, die die Projektion und die Lage des Originals charakterisieren, so können wir z. B. die metrischen Parameter des Parallelepipeds, das in Abb. 9b dargestellt ist, eindeutig bestimmen. Gebundene Bilder werden in der Ingenieurpraxis angewandt. Die Verfahren zur Konstruktion derartiger Bilder werden in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie ausführlich behandelt. Die Parameter werden dabei meistens nicht analytisch, sondern graphisch angegeben.

[1]) Für $\sigma = 90°$ heißt die Projektion *rechtwinklig* oder *orthogonal*, für $\sigma \neq 90°$ *schiefwinklig* oder *schräg*.

Eine unvergleichlich größere Bedeutung haben die sogenannten *freien* Bilder. Ein Bild heißt frei, wenn die bei seiner Konstruktion verwendeten Parameter, die den Projektionsmechanismus und die Lage des Originals festlegen, „willkürlich gewählt" sind. Die Konstruktion des freien Bildes eines Würfels besteht darin, den Würfel (durch eine Parallelprojektion) in die Ebene abzubilden, wobei es gleichgültig ist, welche Lage er hat, unter welchem Winkel er auf die Ebene projiziert wird und welche nachfolgende Veränderungen der Abmessungen vorgenommen werden. Es versteht sich, daß der Unterschied zwischen einem gebundenen und einem freien Bild nicht in der Gestalt dieser Bilder zu suchen ist, sondern in dem Verfahren, diese Bilder herzustellen. So ist das Bild des Würfels in Abb. 10 nach gegebenen Parametern konstruiert worden, d. h., es ist gebunden. Würden wir aber, wenn es irgendwie gewünscht würde, einen Würfel abzubilden, die Abb. 10 zeichnen, so wäre das für uns ein freies Bild des Würfels.

Die Konstruktionsverfahren für gebundene und für freie Bilder sind ganz unterschiedlich. In allen den Fällen, in denen Abbildungen zu Zwecken der Illustration zu konstruieren sind, konstruiert man freie Bilder. Will ein Mathematiklehrer zur Illustration irgendeines Theorems an der Tafel das Bild eines Würfels mit gegebener Kantenlänge zeichnen, so ist es ihm weitgehend gleichgültig, welche Lage das Original im Raum hat und welchen Winkel die Projektionsgeraden mit der Tafelebene bilden. Für ihn ist nur wichtig, daß sein Bild den Würfel „darstellt". Was bedeutet das aber? Es bedeutet, daß es ein solches System von Parameterwerten σ, k und Parameterwerten für die Lage des Würfels geben muß, bezüglich derer das (gebundene) Bild des Würfels gleich dem gezeichneten Bild wird.

Wir wollen uns im vorliegenden Artikel nicht mit Problemen bei der Herstellung von gebundenen Bildern befassen, da diese für die Mathematik nur eine beschränkte spezielle Bedeutung haben. Wir verweisen den Leser auf die Lehrbücher der darstellenden Geometrie. Dagegen ist die Kenntnis der Theorie der freien Bilder für jeden Mathematiklehrer unbedingt notwendig, so daß wir sie hier ausführlich behandeln wollen.

2.4. Die Abbildung ebener Figuren. Zur Vorbereitung beginnen wir mit Bildern von im Raum gelegenen ebenen Figuren. Man kann sich etwa vorstellen, daß diese ebenen Figuren Teile von abzubildenden räumlichen Gebilden sind (z. B. zu deren Begrenzung gehören). Sind nämlich nur in einer festen Ebene des Raumes liegende Figuren in die Zeichenebene abzubilden, so kann dies ohne jegliche Verzerrung geschehen.

Die Abbildungsvorschrift für ebene Figuren beruht auf dem folgenden Satz:

Satz 1. *Jedes Dreieck ABC der Zeichenebene kann als Bild*[1]) *eines beliebigen Dreiecks $A'B'C'$ des Raumes dienen.*

[1]) Wenn wir hier und im folgenden von Bildern sprechen, so meinen wir stets Bilder, die nach dem Verfahren der Eintafel-Parallelprojektion gewonnen werden. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Zunächst geben wir hierzu einige präzisierende Erläuterungen: In der Bildebene α sei ein beliebiges Dreieck ABC und im Raum ein beliebiges Dreieck $A'B'C'$ gegeben. Wir setzen dabei voraus, daß das Dreieck $A'B'C'$ im Raum frei bewegt werden kann. Es ergibt sich dann die Frage, ob man eine solche Lage des Dreiecks $A'B'C'$ im Raum und eine geeignet gewählte Projektionsrichtung finden kann, so daß bei Projektion von $A'B'C'$ auf α nach dieser Richtung ein zu ABC ähnliches Dreieck entsteht. Ist dies möglich, so kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation der Projektion ein zu ABC kongruentes Dreieck erhalten, d. h., in diesem Sinn kann das Dreieck ABC als Bild des Dreiecks $A'B'C'$ angesehen werden. Satz 1 behauptet nun, daß die genannte Frage positiv zu beantworten ist.

Beweis. Wir konstruieren in der Ebene α ein Dreieck $A_1B_1C_1$, das die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ ist dem Dreieck ABC ähnlich;
2. $|A_1B_1| = |A'B'|$.

Sodann bringen wir das Dreieck $A'B'C'$ in eine solche Lage, daß die Seite $A'B'$ mit der Seite A_1B_1 zusammenfällt und die Ebene des Dreiecks $A'B'C'$ mit der Ebene α einen beliebigen Winkel einschließt (Abb. 11). Verbinden wir die Punkte C' und C_1 durch eine Gerade und benutzen wir diese Gerade als Projektionsgerade, so wird das Dreieck $A'B'C'$ auf das zu ABC ähnliche Dreieck $A_1B_1C_1$ projiziert. Damit ist der Satz bewiesen.

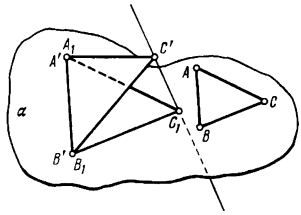


Abb. 11

Aus dem angegebenen Beweis ist ersichtlich, daß die Vorgabe des Originals und des Bild-Dreiecks nicht vollständig den Projektionsmechanismus festlegt. Der Winkel zwischen den Ebenen $A'B'C'$ und α kann beliebig gewählt werden, und folglich wird auch der Neigungswinkel σ der Projektionsgeraden $C'C_1$ gegen die Ebene α nicht eindeutig festgelegt. Außerdem kann man statt der Seiten A_1B_1 und $A'B'$ die Seiten B_1C_1 und $B'C'$ oder C_1A_1 und $C'A'$ zusammenfallen lassen.

Obwohl der Projektionsmechanismus nicht eindeutig bestimmt ist, wird durch die Lage der Punkte A, B, C die Lage aller weiteren Punkte des Bildes eindeutig festgelegt. Dies ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Satz 2. *Sind für drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A', B', C' einer ebenen Figur des Raumes ihre Bilder A, B, C in der Zeichenebene bekannt, so sind die Bilder aller weiteren Punkte dieser Figur vollständig bestimmt.*

Diesen Satz kann man auch so ausdrücken: Es seien A', B', C', M' vier Punkte des Originals (das eine ebene Figur ist), wobei A', B', C' nicht auf

einer Geraden liegen; dann ist es unmöglich, daß bei einer Abbildung des Originals diese Punkte die Bilder A, B, C, M und bei einer anderen Abbildung des Originals die Bilder A, B, C, M_1 haben, wobei $M \neq M_1$ ist.

Die Idee des Beweises hierfür ist folgende: Die vier Punkte A', B', C', M' bestimmen ein Viereck, dessen Diagonalen sich in bestimmten Verhältnissen teilen. Diese Verhältnisse müssen mit den entsprechenden Verhältnissen im Viereck $ABCM$ übereinstimmen, und daraus folgt, daß bei Vorgabe der Punkte A, B, C der Punkt M eindeutig bestimmt ist. Wir entwickeln jetzt diese Idee ausführlich.

Beweis. Wir verbinden den Punkt M' mit einem beliebigen der Punkte A', B', C', etwa mit A'. Die Gerade $A'M'$ schneidet die Gerade $B'C'$ in einem bestimmten Punkt X' (Abb. 12a). Das Bild des Punktes X' ist dabei eindeutig

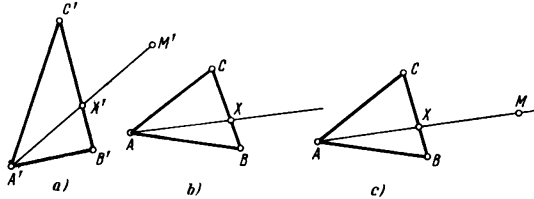


Abb. 12

bestimmt, es muß nämlich auf der Geraden BC liegen und die Strecke $\overline{BC}$ im gleichen Verhältnis teilen, in welchem der Punkt X' die Strecke $\overline{B'C'}$ teilt, d. h., es muß

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|B'X'|}{|X'C'|}$$

gelten.[1]) Nach Konstruktion des Punktes X können wir die Gerade AX ziehen (Abb. 12b). Der Punkt M muß auf dieser Geraden liegen; seine genaue Lage wird durch die Proportion

$$\frac{|AM|}{|AX|} = \frac{|A'M'|}{|A'X'|}$$

bestimmt (Abb. 12c).

Falls die Gerade $A'M'$ parallel zur Geraden $B'C'$ ist, verläuft die Gerade AM parallel zu BC, und die Lage des Punktes M läßt sich aus der Proportion

$$\frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|A'M'|}{|B'C'|}$$

bestimmen.

[1]) Genau genommen hat man es hier und im folgenden mit dem orientierten Teilverhältnis zu tun. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Die angegebene Methode zum Auffinden des Punktes M ist gleichbedeutend dem Auffinden eines Punktes mit gegebenen affinen Koordinaten. Bekanntlich definiert jedes Dreieck ein *affines Koordinatensystem*, d. h., jedes Tripel von nicht auf einer Geraden liegenden Punkten ist ein minimales System von Punkten mit folgender Eigenschaft: *Die einzige affine Abbildung, die diese drei Punkte festläßt, ist die identische Abbildung der Ebene dieses Dreiecks.* Man sagt dafür auch, daß *alle Punkte der Ebene mit dem gegebenen Punktetripel affin verknüpft sind* oder daß verschiedene Punkte bezüglich des gegebenen Punktetripels verschiedene affine Lage haben.

Ein affines Koordinatensystem kann natürlich auch auf andere Weise gegeben sein, d. h., es braucht nicht in jedem Fall durch ein Dreieck mit einem geordneten System von Eckpunkten festgelegt zu sein. Zum Beispiel sehen wir

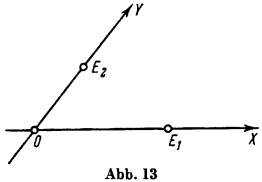


Abb. 13

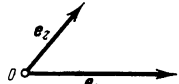


Abb. 14

in Abb. 13 die übliche Darstellung eines affinen Koordinatensystems durch Achsen OX und OY, auf denen die Maßeinheiten $|OE_1|$ und $|OE_2|$ eingetragen sind. Dieses System ist allerdings vollständig durch das geordnete Punktetripel O, E_1, E_2 bestimmt. Ein Dreieck kann daher in ein System nach Abb. 13 umgewandelt werden, wenn man vereinbart, daß A der Koordinatenursprung, AB (in der Richtung von A nach B) die X-Achse, AC (in der Richtung von A nach C) die Y-Achse bedeuten sollen und die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ die Maßeinheiten auf den Achsen festlegen.

Manchmal denkt man sich ein affines Koordinatensystem auch durch zwei nicht parallele Vektoren e_1 und e_2, die von einem Punkt O ausgehen, gegeben (Abb. 14). Eine solche Figur bezeichnet man als ein *affines Zweibein* (O, e_1, e_2); wir können es als ein Dreieck auffassen, dessen dritte Seite nicht gezeichnet wurde. Schließlich können wir die Abb. 13 und 14 ganz leicht zu einem *affinen Netz* vervollständigen. Hierfür trägt man auf jeder Achse die Einheitsstrecken nacheinander beliebig oft ab und zieht durch die so erhaltenen Punkte die Parallelen zu den Achsen (Abb. 15). Es ist klar, daß dieses Netz aus kongruenten Parallelogrammen vollständig durch die Vorgabe der drei Punkte O, E_1, E_2 bestimmt ist.

Wir kehren jetzt nochmals zu Satz 2 zurück und betrachten ihn unter einem etwas anderen Gesichtspunkt. Ausgehend von dem Dreieck $A'B'C'$ (Abb. 12a) konstruieren wir in der Ebene dieses Dreiecks ein affines Netz. Ebenso konstruieren wir in der Bildebene ein affines Netz, wobei wir vom Dreieck ABC

ausgehen. Ein beliebiger Punkt M muß dann bezüglich des zweiten Netzes die gleiche[1]) Lage haben, die der Punkt M' bezüglich des ersten Netzes besitzt. Diese Auffassungsweise ist insbesondere geeignet, wenn man das Bild einer ebenen Figur mit unregelmäßiger Gestalt zu konstruieren hat.

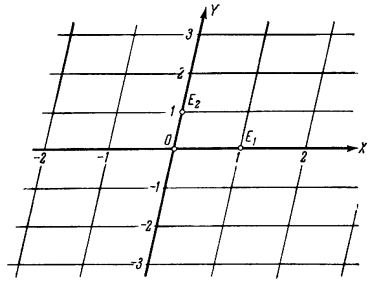


Abb. 15

Das bisher Gesagte kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Die Bilder von drei Punkten A', B', C' einer abzubildenden ebenen Figur, die nicht auf einer Geraden liegen, seien die drei Punkte A, B, C, die ebenfalls nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist das Bild eines beliebigen Punktes M' dieser Figur derjenige Punkt M, der bezüglich des Zweibeins $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ die gleichen Koordinaten hat wie der Punkt M' bezüglich des Zweibeins $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

2.5. Beispiele. Wir betrachten jetzt einige Beispiele für die Konstruktion der Bilder ebener Figuren. Die allgemeinen Betrachtungen (z. B. die in Abb. 12 gezeigte Konstruktion) erübrigen eigentlich die Angabe weiterer Beispiele. Jedoch ist es manchmal zweckmäßig, anstelle der Verwendung des allgemeinen Verfahrens von individuellen Eigenschaften der abzubildenden Figur auszugehen. Hierbei wird man stets auf eine der beiden folgenden Situationen geführt:

1. Man wählt auf dem Original drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und bildet diese auf drei nicht auf einer Geraden liegende beliebig gewählte Punkte ab. Anschließend läßt sich kein Punkt mehr beliebig abbilden: Das Bild jedes weiteren Punktes wird konstruiert.
2. Man sucht Eigenschaften des Originals, die bei Parallelprojektion invariant bleiben, und überträgt diese Eigenschaften von dem Original auf das Bild.

[1]) Wir setzen voraus, daß dem Leser die Bedeutung dieses Ausdrucks klar ist.

Finden wir z. B. auf dem Original zwei parallele Geraden, so können wir bei der Konstruktion des Bildes ausnutzen, daß auch die Bildgeraden parallel sein müssen (demgegenüber schneiden sich die Bildgeraden zweier aufeinander senkrechter Geraden im allgemeinen nicht unter einem rechten Winkel).

Wir beginnen die Betrachtung der ebenen Figuren mit den Polygonen.

Das Dreieck. Ein beliebiges Dreieck kann auf ganz beliebige Weise abgebildet werden. Wird z. B. gefordert, ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 cm abzubilden, so kann man ein beliebiges Dreieck zeichnen und dieses als Bild des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1 cm ansehen.

Beispiel. *Man konstruiere das Bild eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und 2a, in dem die von der Ecke des rechten Winkels ausgehende Seitenhalbierende und Höhe eingezeichnet sind.*

In Abb. 16a sei das Original ohne Verzerrung dargestellt. Wir zeichnen ein beliebiges Dreieck ABC (Abb. 16b) und sehen es als Bild des Dreiecks $A'B'C'$

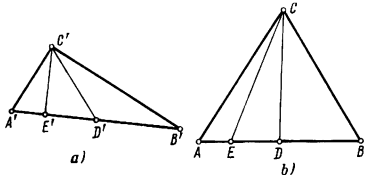


Abb. 16

an. Jede Seitenhalbierende des Originals wird auf die entsprechende Seitenhalbierende des Bildes abgebildet. Ist nämlich D' der Mittelpunkt der Seite $\overline{A'B'}$, so ist D der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Zur Abbildung der Höhe ziehen wir zunächst im Original die „wahre" Höhe $A'E'$ und bestimmen, in welchem Verhältnis der Punkt E' die Hypotenuse $A'B'$ teilt. Bekanntlich verhalten sich die Hypotenusenabschnitte (in die die Hypotenuse durch die Höhe geteilt wird) wie die Quadrate der Katheten, d. h., es gilt $\frac{|A'E'|}{|E'B'|} = \frac{1}{4}$. Folglich muß man auf $\overline{AB}$ denjenigen Punkt E finden, für den $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{4}$ ist; dann ist $\overline{CE}$ das Bild der Höhe.

Es ist wichtig zu bemerken, daß zur Konstruktion des Bildes die Abmessungen des Originals keineswegs analytisch gegeben zu sein brauchen. Das Original kann graphisch gegeben sein. In diesem Fall ziehen wir im Original die Höhe $C'E'$ und konstruieren dann den Punkt E, der die Bedingung

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|A'E'|}{|E'B'|}$$

erfüllt. Das Analoge gilt z. B. auch für die Winkelhalbierenden.

Das Viereck. Aus den Überlegungen zu Abb. 12 folgt, daß man bei der Abbildung eines Vierecks $A'B'C'D'$ drei Bildpunkte (etwa A, B, C) beliebig wählen kann und daß der vierte Punkt D so konstruiert werden muß, daß die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ durch ihren Schnittpunkt in den gleichen Verhältnissen geteilt werden, in welchen die Diagonalen von $A'B'C'D'$ durch deren Schnittpunkt geteilt werden. Auch die Umkehrung hiervon ist richtig, d. h., *als Bild eines gegebenen Vierecks kann man jedes Viereck ansehen, das die gleichen Diagonalenverhältnisse wie das Original hat.* Beispielsweise kann man als Bild eines beliebigen Parallelogramms jedes beliebige Parallelogramm ansehen.

Beispiel. *Man konstruiere das Bild eines regelmäßigen Sechsecks.*

In Abb. 17a ist ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ in natürlicher Form (ohne Verzerrung) gezeichnet. Als Bild des Dreiecks $A'B'C'$ wählen wir

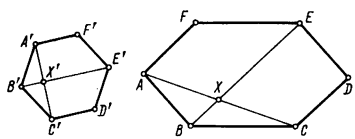


Abb. 17

ein beliebiges Dreieck ABC (Abb. 17b). Die Diagonale $\overline{B'E'}$ des Sechsecks halbiert die Diagonale $\overline{A'C'}$ im Punkt X'. Mithin muß X der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ sein. Wir ziehen dann die Gerade BX. Wegen $A'F' \| B'E'$ und $C'D' \| B'E'$ gilt $AF \| BX$ und $CD \| BX$. Offensichtlich ist $|B'E'| = 4 \cdot |B'X'|$, so daß auch $|BE| = 4 \cdot |BX|$ gelten muß. Damit erhalten wir zunächst den Punkt E. Den Punkt D können wir entweder als Schnittpunkt der Parallelen zu BX durch C mit der Parallelen zu AB durch E oder gemäß $|CD| = 2 \cdot |BX|$ erhalten. Analog konstruiert man den Punkt F.

Der Kreis. Das Bild eines Kreises ist eine *Ellipse.* Hat man die Ellipse bereits auf andere Weise definiert, so muß man natürlich beweisen, daß das Bild eines Kreises eine Ellipse ist. Aber man kann dies auch als Definition der Ellipse benutzen. Das Bild eines Kreises heißt Ellipse. Aus dieser Definition kann man leicht die Eigenschaften der Ellipse ableiten. Im folgenden setzen wir die wichtigsten Eigenschaften der Ellipse als bekannt voraus.[1])

Wir betrachten in einem Kreis zwei zueinander orthogonale Durchmesser $A'B'$ und $C'D'$ (Abb. 18). Die Eigenschaft dieser Durchmesser, daß sie zueinander orthogonal sind, ist nicht invariant; invariant ist jedoch eine andere ihrer Eigenschaften, daß nämlich jeder dieser Durchmesser jede Sehne halbiert,

[1]) Vgl. den Artikel „Kegelschnitte" in diesem Band der EdEM.

die parallel zum anderen Durchmesser ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Konjugiertheit*. Wir kommen damit zu folgender Aussage:

1. *Zueinander orthogonale Durchmesser eines Kreises werden auf konjugierte Durchmesser der Bildellipse abgebildet.*

Da die Methode, analoge Eigenschaften zu erhalten, bekannt ist (auf das Bild lassen sich alle Eigenschaften übertragen, die invariant gegenüber Parallelprojektion sind), formulieren wir noch einige weitere Eigenschaften, ohne sie abzuleiten.

2. *Der Mittelpunkt des Kreises wird auf den Mittelpunkt der Ellipse abgebildet.*

3. *Die Tangente an den Kreis im Punkt A' wird auf die Tangente an die Ellipse im Punkt A abgebildet. Diese Bildtangente ist parallel zu demjenigen Ellipsendurchmesser, der konjugiert ist zu dem Durchmesser, der durch den Berührungspunktgeht.*

4. *Ein dem Kreis umbeschriebenes Quadrat wird auf ein Parallelogramm abgebildet, das der Bildellipse umbeschrieben ist, wobei die Seiten dieses Parallelogramms konjugierte Richtungen haben. Die Mittellinien dieses Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser der Ellipse.*

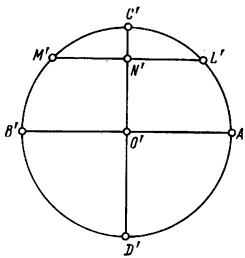


Abb. 18

Beispiel. Man bilde einen Kreis mit einem einbeschriebenen gleichseitigen Dreieck ab.

In Abb. 19a ist das Original gezeichnet. Offensichtlich gilt $C'O' \perp A'B'$, $|O'E'| = |E'D'|$. Wir bilden den Kreis auf eine beliebige Ellipse (Abb. 19b) mit dem Mittelpunkt O ab. Als Bild C von C' wählen wir einen beliebigen Punkt der Ellipse. Wir ziehen den Durchmesser CD; es sei E der Mittelpunkt

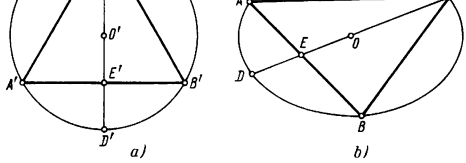


Abb. 19

von $\overline{OD}$. Wir ziehen durch E die Gerade, deren Richtung konjugiert zu CD ist (hierfür muß man eine beliebige zu CD parallele Seite ziehen, diese halbieren und den Mittelpunkt mit O verbinden; diese Verbindungsgerade hat eine zu CD konjugierte Richtung). Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ellipse sind die gesuchten Punkte A und B.

§ 3. Schiefe Axonometrie

3.1. Der Satz von Pohlke und Schwarz. Die Abbildung räumlicher Figuren nach der Eintafel-Parallelprojektion ist in vielem analog der Abbildung ebener Figuren. Zunächst entsteht die Frage, ob sich ein affines Dreibein in beliebiger Weise abbilden läßt. Ein *affines Dreibein* ist ein geordnetes Tripel von Vektoren des Raumes, die nicht in einer Ebene liegen und von einem Punkt ausgehen (Abb. 20; man vergleiche sie mit Abb. 14).

Zunächst ist klar, daß die Vorgabe eines Dreibeins gleichbedeutend der Vorgabe eines affinen räumlichen Koordinatensystems ist (Abb. 21; man vergleiche Abb. 13), d. h. eines geordneten Tripels von Achsen $O'X'$, $O'Y'$ und

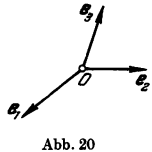


Abb. 20

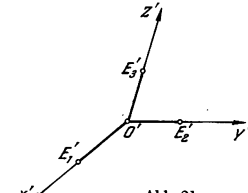


Abb. 21

$O'Z'$, auf denen Maßeinheiten $|O'E_1'|$, $|O'E_2'|$ und $|O'E_3'|$ vermerkt sind. Abb. 20 oder 21 kann man zu einem räumlichen affinen Netz ergänzen (Abb. 22; man vgl. Abb. 15). Schließlich ist klar, daß jeder dieser Figuren in Abb. 20, 21 und 22 ein Tetraeder mit einem geordneten System von Eckpunkten zugrunde liegt, welches die ganze Figur bestimmt (z. B. das Tetraeder $O'E_1'E_2'E_3'$ in Abb. 21). Ein Tetraeder $A'B'C'D'$ (Abb. 23; man vgl. Abb. 12a) läßt sich in ein System der Abb. 21 umwandeln, wenn man vereinbart, daß A' der Ursprung des Koordinatensystems werden soll, $A'B'$ (in Richtung von A' noch B') die X'-Achse usw.

Der Leser mache sich klar, daß die Abb. 20 bis 23 verschiedene Verfahren zur Festlegung eines affinen Koordinatensystems darstellen. Beispielsweise kann man sich das affine Dreibein von Abb. 20 als Tetraeder vorstellen, in dem nur die von einer Ecke ausgehenden Kanten „gezogen" sind.

Die grundlegende Frage bei der Abbildung räumlicher Figuren besteht ebenso wie bei der Abbildung ebener Figuren in der Frage nach dem Bild eines beliebigen affinen Dreibeins. Kennen wir dieses, so können wir jede beliebige Figur abbilden, da jeder Punkt des Raumes in invarianter Weise mit den

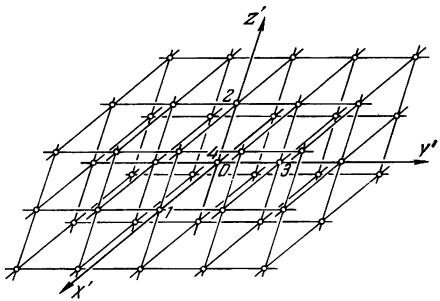


Abb. 22

vier Grundpunkten des Dreibeins verknüpft ist (eine bestimmte Lage in dem Netz der in Abb. 22 gezeichneten Parallelepipede besitzt).

Das Bild des in Abb. 20 gezeichneten affinen Dreibeins besteht aus drei Strecken, die von einem Punkt ausgehen. Folglich kann man die oben gestellte

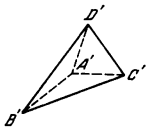
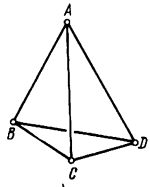


Abb. 23



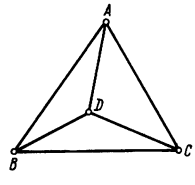


Abb. 24

Frage auch so formulieren: Kann man als Bild dreier gegebener Strecken des Raumes, die von einem Punkt des Raumes ausgehen, drei beliebige, ebenfalls von einem Punkt ausgehende Strecken der Ebene wählen? Ergänzen wir die Figur in Abb. 20 zu einem Tetraeder, so hat das Bild die Form eines Vierecks mit Diagonalen. Eine solche Figur bezeichnet man auch als ein *vollständiges Viereck*: Vier Punkte der Ebene in allgemeiner Lage, d. h. von denen

keine drei auf einer Geraden liegen, bilden zusammen mit den sechs durch sie bestimmten Strecken ein vollständiges Viereck. In Abb. 24a ist ein *konvexes* und in Abb. 24b ein *nichtkonvexes* Viereck $ABCD$ mit den Diagonalen AC und BD dargestellt.

Die oben gestellte Frage kann man mithin auch so formulieren: Kann man ein beliebiges vollständiges Viereck als Bild eines vorgegebenen Tetraeders ansehen? Diese Frage kann man positiv beantworten, d. h., es gilt der folgende, zu Satz 1 analoge Satz:

Satz 3 (Satz von POHLKE und SCHWARZ). *Als Bild eines beliebigen Tetraeders kann man ein beliebiges vollständiges Viereck wählen.*

Dieser Satz wurde zum ersten Mal 1853 von dem deutschen Geometer KARL POHLKE in folgender Fassung ausgesprochen: Drei von einem Punkt ausgehende Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ können, wenn O, A, B, C nicht in einer Geraden liegen, stets als Parallelprojektionen dreier paarweise orthogonaler, gleichlanger Strecken $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$, $\overline{O'C'}$ (eines orthogonalen Dreibeins) angesehen werden.

Der ursprüngliche Beweis von POHLKE war außergewöhnlich kompliziert und keineswegs elementar und wurde nicht publiziert, jedoch ist uns sein Inhalt überliefert. Im Jahre 1864 bemerkte der bekannte deutsche Mathematiker HERMANN AMANDUS SCHWARZ (ein Schüler POHLKES), daß die Orthogonalität und die Gleichheit der Strecken $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$ und $\overline{O'C'}$ unwesentlich sind, d. h., daß sich der Satz von POHLKE in folgender Weise verallgemeinern läßt: *Sind $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$ und $\overline{O'C'}$ drei beliebige Strecken im Raum, die von einem Punkt ausgehen, und $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OC}$ drei beliebige Strecken in der Ebene, die ebenfalls von einem Punkt ausgehen, so kann man die Figur ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$) als Parallelprojektion einer Figur auffassen, die ähnlich zu ($\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$, $\overline{O'C'}$) ist.* Das bedeutet, daß man die Figur ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$) dadurch aus der Figur ($\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$, $\overline{O'C'}$) erhalten kann, daß man

1. die Figur ($\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$, $\overline{O'C'}$) einer Ähnlichkeitstransformation mit einem geeigneten Ähnlichkeitskoeffizienten unterwirft,

2. die dabei erhaltene Figur in geeigneter Weise im Raum bewegt,

3. die sodann erhaltene Figur mit einer geeigneten Projektionsrichtung auf die Bildebene projiziert.

Die Ähnlichkeitstransformation des Originals kann man auch durch eine Ähnlichkeitstransformation der Projektion ersetzen. Wir wollen hier nicht die Frage untersuchen, ob die einzelnen Schritte eindeutig festgelegt sind. Wir erwähnen nur, daß für den ersten Schritt „ja" und für den zweiten und dritten „nein" gilt.

Den zuletzt angegebenen Satz kann man auch so formulieren:

Jedes beliebige vollständige Viereck kann man als Parallelprojektion eines Tetraeders ansehen, das einem vorgegebenen Tetraeder ähnlich ist.

Oder:

Ein beliebiges Tetraeder kann man so parallel auf die Ebene projizieren, daß sich ein vollständiges Viereck ergibt, das einem vorgegebenen vollständigen Viereck ähnlich ist.

Dieser Satz (in einer beliebigen der angegebenen Formulierungen) heißt der Satz von POHLKE und SCHWARZ. Wir verdanken H. A. SCHWARZ nicht nur die angegebene Verallgemeinerung des ursprünglichen Satzes von POHLKE, sondern auch einen einfachen und elementaren Beweis für diesen. Wir wollen hier keinen Beweis dieses Satzes angeben, da Beweise in den meisten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie zu finden sind (z. B. in den am Ende dieses Artikels zitierten Büchern [1, 2])[1].

In den ursprünglichen Formulierungen des Satzes von POHLKE und SCHWARZ finden wir den Begriff der Ähnlichkeit. Dieses hat seinen Grund darin, daß man ein gegebenes vollständiges Viereck im allgemeinen nicht durch *unmittelbare* Projektion eines gegebenen Tetraeders erhalten kann. (Beispielsweise erhält man aus einem großen Tetraeder niemals ein kleines Viereck.) Demgegenüber tritt in der Formulierung des Satzes von POHLKE und SCHWARZ, die wir als Grundlage nahmen (Satz 3), der Begriff der Ähnlichkeit nicht auf. Grund hierfür ist natürlich, daß das von uns benutzte Abbildungsverfahren aus einer Parallelprojektion und einer (anschließenden) Ähnlichkeitstransformation besteht. Wir erläutern noch einige Situationen, die man bei der Konstruktion von Bildern ausnutzen kann und die nur verschiedene Aspekte des Satzes von POHLKE und SCHWARZ darstellen.

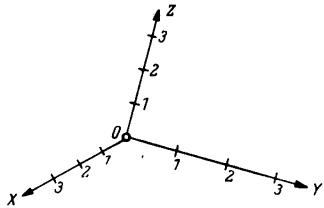


Abb. 25

1. *Im Bild eines gegebenen affinen Koordinatensystems im Raum kann man die Achsen so zeichnen, daß sie beliebige Winkel miteinander einschließen, und auf den Bildachsen kann man beliebige Strecken als Bilder der Maßeinheiten abtragen* (Abb. 25). Wir erinnern daran, daß bei einem affinen Koordinatensystem die Maßeinheiten auf den verschiedenen Achsen verschieden sein können.

Abbildung 25 kann man insbesondere als Bild eines kartesischen Koordinatensystems auffassen. Ein affines Koordinatensystem heißt *kartesisch*, wenn

[1] Mit der Geschichte dieses Satzes kann man sich in dem Artikel von Н. М. Бескин, Основное предложение аксонометрии, in „Вопросы современной начертательной геометрии" (N. M. BESKIN, Grundbegriffe der Axiometrie, im Sammelband „Fragen der modernen darstellenden Geometrie"), Moskau-Leningrad 1947, S. 55–126, vertraut machen.

seine Achsen zueinander orthogonal sind und wenn

$$|O'E_1'| = |O'E_2'| = |O'E_3'|$$

gilt.

2. *Abb. 9 kann man als Bild eines beliebigen Parallelepipeds ansehen*, insbesondere als Bild eines Würfels mit gegebener Kantenlänge.

3. *Abb. 24 läßt sich als Bild eines beliebigen Tetraeders auffassen.*

3.2. Vollständige und unvollständige Bilder. Bei der Abbildung einer beliebigen räumlichen Figur kann man zunächst vier zu dieser Figur gehörige Punkte in allgemeiner Lage wählen (d. h. vier Punkte, die nicht alle in einer Ebene liegen) und sie in beliebiger Weise abbilden. Die übrigen Punkte der Figur können dann im allgemeinen nicht mehr beliebig abgebildet werden. Wir kommen nun zu der Frage, wie man sie abbilden muß.

Die analoge Frage bei der Abbildung ebener Figuren wurde durch den Satz 2 beantwortet (vgl. Abb. 12). Bei der Abbildung räumlicher Figuren herrschen dagegen andere Verhältnisse, und wir wollen vor allem klären, worin der Unterschied besteht.

Ist das Original eine ebene Figur und sind A', B', C' drei Punkte dieser Figur und A, B, C ihre Bilder, so schneiden sich für einen vierten Punkt M' des Originals die Geraden $A'M'$ und $B'C'$ (im allgemeinen) in einem gewissen Punkt X', und das Bild dieses Punktes läßt sich konstruieren (Abb. 12).

Ist das Original dagegen eine räumliche Figur, sind A', B', C', D' vier Punkte dieser Figur, die nicht auf einer Ebene liegen, und A, B, C, D ihre Bilder, so schneidet für einen fünften Punkt M' des Originals die Gerade $A'M'$ im allgemeinen keine der Geraden $B'C'$, $C'D'$ und $D'B'$, sondern nur die Ebene $B'C'D'$ in einem gewissen Punkt X'. Das Bild X dieses Punktes läßt sich aber *nicht konstruieren*, wenn nur die Punkte A, B, C, D bekannt sind. Allgemeiner können wir folgendes feststellen: Es sei uns ein gewisses Original gegeben, d. h. ein System von Punkten, Geraden, Ebenen, Strecken, Dreiecken usw. Aus den Elementen, die Bestandteile des Originals sind, kann man in eindeutiger Weise noch eine Reihe weiterer Elemente gewinnen, die „starr mit dem Original verbunden sind". Sind z. B. im Original zwei Punkte vorhanden, so können wir ihre Verbindungsgerade bestimmen; haben wir drei Punkte, so können wir die durch sie hindurchgehende Ebene bestimmen; haben wir eine Gerade und eine Ebene, so können wir deren Schnittpunkt finden usw. Ausgehend von den Elementen, die im angegebenen Sinn starr mit dem Original verbunden sind, können wir diejenigen Elemente gewinnen, die mit den Elementen des Originals und den schon erhaltenen Elementen starr verbunden sind, usw. Beispielsweise können wir durch starr mit dem Original verbundene Punkte Geraden und Ebenen legen, die Schnittgeraden von Ebenen bestimmen, die Bestandteile des Originals oder starr mit diesem verbunden sind, usw. Alle auf diesem Wege ermittelten neuen Elemente (Geraden, Punkte, ...) nennen wir „mit dem Original *verbundene* Elemente". Sie sind durch das Original *eindeutig* bestimmt.

Es ergibt sich dann naturgemäß die Frage, ob sich alle mit einem Original verbundenen Elemente im Bild auffinden lassen, genauer, ob man in eindeutiger Weise die Bilder der mit einem Original verbundenen Elemente konstruieren kann, sobald man die Zeichnung (d. h. das Bild) des Originals kennt? Hierbei sind natürlich nur die Bilder von Punkten, Geraden und deren Kombinationen gemeint; denn Ebenen können in der Zeichnung nur durch die Bilder von auf ihnen liegenden Punkten und Geraden angegeben werden.

Wir stoßen hier auf den folgenden Sachverhalt, der wichtige Folgerungen für die Theorie der Abbildungen hat: *Bei der Abbildung ebener Figuren ist jedes Element (Punkt, Gerade oder eine Kombination daraus), das mit dem Original verbunden ist, im Bild (in der Zeichnung) eindeutig bestimmt* (vgl. hierzu Abb. 13 und den begleitenden Text). Bei Bildern räumlicher Figuren ist das dagegen im allgemeinen nicht der Fall.

Wir erläutern das Gesagte durch Beispiele:

Zwei Geraden a' und b' seien Bestandteile einer ebenen Figur, a und b seien ihre Bilder in einer Zeichnung. Schneiden sich die Geraden a' und b', so bestimmen sie eindeutig ihren Schnittpunkt. Ihre Bilder a und b schneiden sich dann ebenfalls, und man kann den Bildpunkt des Schnittpunktes von a' und b' nicht beliebig wählen, sondern er ist eindeutig bestimmt, nämlich als Schnittpunkt der Geraden a und b.

Das folgende Beispiel zeigt, daß für räumliche Figuren die Verhältnisse anders liegen: In Abb. 26 erkennt man ein Bild der Figur, von der auf S. 254 die Rede war, nämlich eines Tetraeders $A'B'C'D'$ und eines fünften Punktes M'; die Strecken $\overline{B'M'}$, $\overline{C'M'}$, $\overline{D'M'}$ gehören ebenfalls zu dieser Figur. Die Gerade

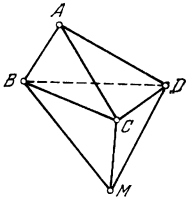


Abb. 26

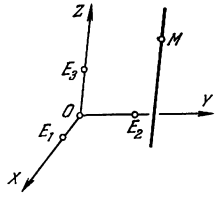


Abb. 27

$A'M'$ (die mit dem Original verbunden, deren Bild aber nicht eingezeichnet ist) schneidet die Ebene $B'C'D'$ in einem gewissen Punkt X'. Im Original ist dieser Punkt völlig festgelegt, aber sein Bild X ist in der Zeichnung nicht festgelegt; man kann den Punkt X auf der Geraden AM beliebig wählen.

Abbildung 27 zeigt das Bild eines Koordinatensystems und eines gewissen Punktes M'. Legt man durch M' eine zur z'-Achse parallele Gerade, so wird diese auf eine Gerade abgebildet, die parallel zur z-Achse (dem Bild der z'-Achse) ist. Im Original schneidet die Gerade durch M' die Ebene $O'X'Y'$ in

einem wohlbestimmten Punkt. In der Zeichnung können wir jedoch das Bild dieses Punktes nicht konstruieren; dieses Bild kann an einer beliebigen Stelle eingezeichnet werden.

Die angegebene Eigenschaft bezeichnen wir als *Unvollständigkeit* der Zeichnung (des Bildes). Ein Bild heißt also *vollständig*, wenn für jedes Element (Punkt, Gerade oder eine Kombination solcher Elemente), das mit dem Original verbunden ist, die Lage seines Bildes in der Zeichnung eindeutig bestimmt ist. Gemäß dieser Definition sind also Abb. 26 und 27 unvollständig. Wir werden uns im folgenden vorwiegend mit vollständigen Bildern beschäftigen.[1])

Das Bild von vier (oder weniger) Punkten in allgemeiner Lage ist stets vollständig.

Das Original enthalte jetzt mehr als vier Punkte in allgemeiner Lage, und wir wählen davon vier Punkte A', B', C', D' (deren Bilder A, B, C, D in einer gegebenen Zeichnung vorliegen) als *Basis*. Für die Vollständigkeit des betrachteten Bildes des Originals ist dann notwendig und hinreichend, daß *sich alle übrigen Elemente des Originals, deren Bilder zur Zeichnung gehören, als mit der Basis affin verknüpft nachweisen lassen.*

Dabei sehen wir zunächst die Punkte A', B', C', D', die sie verbindenden Geraden $A'B'$, $B'D'$ usw. sowie die Ebenen $A'B'C'$, $A'C'D'$ usw. als affin mit der Basis *verknüpft* an. Ist bereits für ein gewisses System von Punkten, Geraden und Ebenen gezeigt, daß sie affin mit der Basis verknüpft sind, so nennen wir neue Punkte, Geraden und Ebenen in genau den folgenden Fällen mit der Basis verknüpft (kurz: verknüpft): Ein Punkt, dessen Bild (in der Zeichnung) gegeben ist, heißt verknüpft, wenn er auf einer schon als verknüpft erkannten Geraden oder Ebene liegt. Ferner heißt ein Punkt verknüpft, wenn er Schnittpunkt von schon als verknüpft erkannten Elementen ist.

Eine Gerade, deren Bild gegeben ist, heißt verknüpft, wenn sie in einer schon als verknüpft erkannten Ebene enthalten ist oder wenn schon als verknüpft erkannt sind: zwei ihrer Punkte, ein Punkt der Geraden und eine zu ihr parallele Gerade oder zwei sie enthaltende Ebenen.

Schließlich heißt eine Ebene verknüpft, wenn schon als verknüpft erkannt sind: drei ihrer Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, ein auf ihr liegender Punkt und eine auf ihr liegende Gerade oder ein Punkt der Ebene und eine zu ihr parallele Ebene.

Wir erläutern dies an einigen Beispielen:

In Abb. 28 sei A, B, C, D das Bild einer Basis A', B', C', D'. Die Gerade $X'Y'$ ist mit dieser Basis verknüpft, weil in der Zeichnung die Bilder ihrer Spurpunkte auf den Ebenen $D'B'C'$ und $D'C'A'$ (die Punkte X und Y) vermerkt sind. Der Punkt M' ist verknüpft, weil sein Bild gegeben ist und er auf einer bereits als verknüpft erkannten Geraden (nämlich $X'Y'$) liegt.

Die Abb. 28 ist vollständig. Zum Beispiel existiert im Original der Schnittpunkt Z' der Geraden $X'Y'$ mit der Ebene $A'B'C'$. Die Lage des Bildes die-

[1]) Bezüglich unvollständiger Bilder vergleiche man das Buch [4] von N. F. Tschetweruchin sowie seinen Artikel „Полные и неполные изображения (Vollständige und unvollständige Bilder)" in dem in der Fußnote auf S. 253 erwähnten Sammelband.

ses Punktes ist offenbar eindeutig bestimmt. Die Konstruktion dieses Bildes Z ist in der Zeichnung angegeben.

In Abb. 29 ist der Punkt M' (durch Angabe des Bildes X des Schnittpunktes der Geraden $A'M'$ mit der Ebene $B'C'D'$) in einfacher Weise mit dem Basistetraeder $A'B'C'D'$ affin verknüpft.

In Abb. 30 ist ein Achsensystem $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ dargestellt. Die Maßeinheiten auf den Achsen sind nicht abgebildet, d. h., in dieser Zeichnung ist

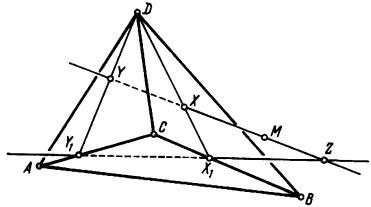


Abb. 28

das Basistetraeder nicht abgebildet. Durch den Punkt M' sind die Parallelen zu den Achsen $O'X'$, $O'Y'$ und $O'Z'$ gelegt. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Ebenen $Z'Y'$, $Z'X'$ und $X'Y'$ haben wir mit M_1', M_2' bzw. M_3' bezeichnet. Ihre Bilder M_1, M_2 und M_3 nennt man im vorliegenden Fall (d. h., wenn

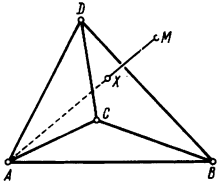


Abb. 29

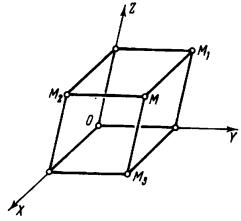


Abb. 30

die Konstellation der Abb. 30 vorliegt) *sekundäre Projektionen* des Punktes M'. Diese Bezeichnung stammt daher, daß im Original zunächst die Projektion des Punktes M' auf die Ebenen $Y'Z'$, $Z'X'$ und $X'Y'$ vorgenommen wird und anschließend die so erhaltenen Projektionen M_1', M_2' und M_3' zusammen mit dem Originalpunkt auf die Bildebene projiziert werden.

Für die Vollständigkeit der Zeichnung in Abb. 30 reicht es hin, daß außer M noch eine seiner sekundären Projektionen angegeben ist. Die beiden anderen lassen sich dann leicht konstruieren.

Aus der Tatsache, daß in Abb. 30 keine affine Basis dargestellt ist, ergibt sich ein gewisser Mangel dieser Zeichnung: Sie legt das Original nicht metrisch fest (vgl. 3.7.).

3.3. Der Begriff der schiefen Axonometrie. Der Sinn eines jeden Bildes ist es, vom Original eine möglichst genaue Vortsellung zu vermitteln. Im günstigsten Fall stellt das Bild das Original in erschöpfender Weise dar, d. h., *auf Grund des Bildes läßt sich jede (geometrische) Frage, die sich auf das Original bezieht, beantworten; durch das Bild ist das Original metrisch (also bis auf Bewegungen im Raum) eindeutig bestimmt.* Häufig legt jedoch ein Bild das zugehörige Original nur mit einer geringeren Genauigkeit fest, d. h., *aus dem Bild lassen sich nur gewisse und nicht alle das Original betreffenden geometrischen Fragen beantworten.*

Wir behandeln jetzt die Frage, in welchem Maße es verschiedene Abbildungsverfahren erlauben, das Original zu beurteilen.

Aus einem vollständigen Bild kann man das Original eindeutig bis auf eine affine Transformation rekonstruieren, d. h., aus einem vollständigen Bild läßt sich jede das Original betreffende Frage beantworten, die affinen Charakter hat. Sind beispielsweise in einer vollständigen Zeichnung die Bilder dreier Punkte einer Geraden gegeben, so läßt sich beantworten, welches Teilverhältnis diese Punkte (im Original) miteinander bilden. Dagegen können wir z. B. nicht die Frage beantworten, ob ein in einer gewissen Zeichnung abgebildetes Dreieck gleichseitig ist (wenn uns außer der Vollständigkeit keine weitere Eigenschaft des Bildes bekannt ist). Wir merken an, daß unvollständige Bilder das Original nicht mit einer Genauigkeit bis auf eine affine Transformation festlegen.

Wir wollen die vorangehenden Ausführungen noch etwas näher präzisieren: In Abb. 24 ist das Bild eines Tetraeders dargestellt. Nach dem Satz von POHLKE und SCHWARZ kann diese Zeichnung das Bild eines beliebigen Tetraeders sein. Wenn uns also nur Abb. 24 gegeben ist, können wir nichts über das Originaltetraeder aussagen. Da sich jedes Tetraeder $A'B'C'D'$ vermöge einer eindeutig bestimmten affinen Transformation in ein beliebiges anderes Tetraeder $A_1'B_1'C_1'D_1'$ überführen läßt, bestimmt Abb. 24 das Original nur bis auf eine affine Transformation.

Wir betrachten jetzt Abb. 29. In ihr ist neben dem Basistetraeder noch ein Punkt M' gemäß der für vollständige Bilder aufgestellten Regel abgebildet. Das Bild kann sich auf ein beliebiges Tetraeder, z. B. auf $A'B'C'D'$ oder auf $A_1'B_1'C_1'D_1'$ beziehen. Welches dieser beiden Tetraeder wir auch wählen, stets gibt es im Raum einen eindeutig bestimmten Punkt, der so mit dem betreffenden Tetraeder affin verknüpft ist, wie es die Zeichnung darstellt. Im ersten Fall ist es der Punkt M', im zweiten ein bestimmter anderer Punkt M_1'. Die affine Transformation, die das Tetraeder $A'B'C'D'$ in das Tetraeder $A_1'B_1'C_1'D_1'$ überführt, bildet zugleich den Punkt M' auf den Punkt M_1' ab, d. h., das

Punktesystem $A'B'C'D'M'$ läßt sich aus dem System $A_1'B_1'C_1'D_1'M_1'$ durch eine ganz bestimmte affine Transformation erhalten. Diese Überlegung läßt sich auf jedes Element anwenden, das affin mit der Basis verknüpft ist. Damit gilt der folgende (zum Satz 2 analoge)

Satz 4. *Ist ein Bild vollständig und ist in ihm das Bild eines Basistetraeders ausgezeichnet, so bestimmt es das Original eindeutig bis auf eine affine Transformation, d. h., aus dem Bild läßt sich jede Frage beantworten, die sich auf affine Eigenschaften des Originals bezieht.*

Wie kann man nun erreichen, daß eine Zeichnung das Original vollständig bestimmt, d. h., daß es das Original metrisch festlegt? Eine spezielle Variante der Eintafelprojektion, die das leistet, ist die sogenannte *schiefe Axonometrie*, die wir einstweilen kurz als *Axonometrie* bezeichnen wollen.

Das Wesen dieser Axonometrie besteht darin, daß einer vollständigen Zeichnung, in der das Bild eines Basistetraeders ausgezeichnet ist, noch Angaben über die metrischen Parameter dieses Tetraeders hinzugefügt werden (d. h., es wird, wie man gewöhnlich in der darstellenden Geometrie sagt, die *Rekonstruktion* dieses Tetraeders angegeben).

Wir erwähnten bereits, daß man die Zeichnung eines Tetraeders als Bild eines ganz beliebigen Tetraeders ansehen kann. Zur Beseitigung dieser Unbestimmtheit wählen wir ein festes Tetraeder aus und *vereinbaren*, daß wir das in der Zeichnung vorliegende Bild eines Basistetraeders gerade als das Bild dieses ausgewählten Tetraeders ansehen wollen.

Nach Auswahl eines Tetraeders $A'B'C'D'$ mit vorgeschriebenen Abmessungen ist die identische Transformation die einzige affine Transformation, die die Punkte A', B', C', D' festläßt, d. h. eine affine Transformation, die diese vier Punkte festläßt, läßt alle Punkte des Raumes fest. Mit den Punkten A', B', C', D' haben also alle übrigen Elemente des Originals eine feste Lage im Raum, d. h., das Original ist metrisch bestimmt.

Ergänzen wir z. B. Abb. 29 durch die Rekonstruktion

$$\begin{aligned} \sphericalangle\, BAC &= 50°, \quad |AB| = 52\text{ cm}, \\ \sphericalangle\, CAD &= 60°, \quad |AC| = 40\text{ cm}, \\ \sphericalangle\, DAB &= 90°, \quad |AD| = 58\text{ cm} \end{aligned}$$

des Basistetraeders, so ist sie metrisch bestimmt. Sie legt das Original metrisch vollständig fest, d. h., man kann dann aus Abb. 29 alle sich auf das Original beziehenden geometrischen Fragen beantworten, z. B. also die Frage, unter welchem Winkel sich die Gerade $A'M'$ und die Ebene $B'C'D'$ schneiden.

Die Axonometrie ist somit ein Abbildungsverfahren, das durch folgende vier Bedingungen charakterisiert ist:

1. *Das Bild wird nach dem Verfahren der Eintafel-Parallelprojektion*[1]) *konstruiert*;

[1]) Wir behandeln hier zunächst die sogenannte *parallele Axonometrie*. Daneben gibt es noch die *zentrale Axonometrie*, der wir uns später (S. 287ff.) zuwenden.

2. *das Bild ist vollständig*;
3. *das Bild enthält das Bild eines ausgezeichneten Basistetraeders*;
4. *das Bild wird durch eine Rekonstruktion des Basistetraeders ergänzt.*

Ein axonometrisches Bild ist ein *metrisch bestimmtes* Bild, d. h., es legt das Original metrisch vollständig fest.

In den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie wird die Axonometrie meistens unter einem etwas anderen Gesichtspunkt behandelt: Man betrachtet neben dem Original noch ein bestimmtes Koordinatensystem und projiziert das Original zusammen mit diesem Koordinatensystem auf die Bildebene. Hierbei muß man sich natürlich davon überzeugen, daß alle Elemente des Originals mit dem gewählten Koordinatensystem affin verknüpft sind. Auf diese Auffassung deutet auch das Wort „Axonometrie" hin, das soviel wie „Messung bezüglich Achsen" bedeutet (von dem Griechischen ἄξων = Achse und μετρέω = ich messe). Das Bild in Abb. 31 ist axonometrisch, wenn beispielsweise vermerkt wird, daß das Koordinatensystem rechtwinklig und die

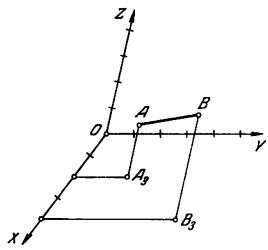


Abb. 31

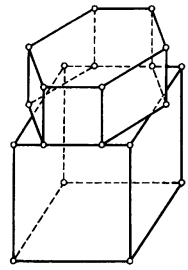


Abb. 32

Maßeinheiten auf allen drei Achsen gleich 1 cm sein sollen. Ohne Schwierigkeiten kann man die Länge der Strecke $\overline{A'B'}$ ermitteln; denn in der Zeichnung kann man die Koordinaten der Punkte A' und B' ausmessen:

$$A' = (2, 2, 2), \quad B' = (4, 5, 4).$$

Es ist klar, daß diese Auffassung der Axonometrie im wesentlichen mit der angegebenen Definition übereinstimmt, da die Angabe des Bildes eines Koordinatensystems äquivalent der Angabe des Bildes eines Basistetraeders ist.

Das Koordinatensystem in einer axonometrischen Zeichnung wird häufig nicht durch Achsen OX, OY, OZ angegeben, sondern mit Hilfe des Bildes eines anderen Gegenstandes (etwa eines Würfels), dessen Abmessungen bekannt sind. Ist z. B. bekannt, daß in Abb. 32 unten ein Würfel der Kantenlänge 1 m dargestellt ist, so kann man behaupten, daß auf ihm ein regelmäßiges

sechseckiges Prisma steht, dessen Höhe 50 cm beträgt und dessen Seitenflächen Quadrate sind. (Man beachte, in welchen Verhältnissen die Ecken des Sechsecks die Seiten des Quadrates teilen!)

3.4. Bedingte Bilder. Bilder, für deren Deutung gewisse zusätzliche Angaben nötig sind, nennt man *bedingte Bilder*.[1]) Zu ihnen gehören also insbesondere die axonometrischen Bilder.

Die überwiegende Mehrheit aller Bilder ist bedingt, z. B. sind alle künstlerischen Zeichnungen bedingt. Diese Bedingtheit ist vielfach dadurch verborgen, daß die zusätzlichen Angaben nicht so explizit formuliert werden, wie wir das oben für Abb. 31 und 32 getan haben.

Betrachten wir z. B. irgendein Werk der Malerei.[2]) Auf ihm kommen die Abbildungen von Gegenständen vor, deren Form und Abmessungen wir kennen. Wenn wir auf einem Bild einen Menschen sehen, so wissen wir ohne spezielle Angaben, daß seine Länge etwa 160 bis 180 cm beträgt, und wenn wir Telegraphenmasten und Eisenbahnschienen sehen, so wissen wir, daß die Masten zu den Schienen senkrecht stehen. Das sind gerade solche Angaben, die nicht explizit formuliert worden sind.

Es gibt viele Bilder, bei denen ein Teil der Gegenstände bekannt ist und auf denen daneben unbekannte Gegenstände dargestellt sind. Die unbekannten Gegenstände stehen dann zu den bekannten in einer gewissen Beziehung, so etwa, wie in Abb. 32 die Abmessungen und die Form des rechteckigen Prismas durch seine Beziehung zu dem Würfel, auf dem das Prisma steht, festgelegt sind. Werden z. B. in einem Prospekt eine neue Maschine und neben ihr auch Menschen abgebildet, so erhalten wir eine Vorstellung von den Abmessungen der Maschine. Stellen wir uns dagegen ein Werk der Malerei vor, auf dem kein einziger markanter Gegenstand dargestellt ist, so können wir weder über die genauen Formen noch erst recht über die Abmessungen des Originals etwas aussagen.

3.5. Beispiele für die Konstruktion axonometrischer Bilder. Wir betrachten einige typische Beispiele für die Konstruktion von axonometrischen Bildern.

Beispiel 1. *Die regelmäßige viereckige Pyramide.* Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat. Dieses kann man durch ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ abbilden (Abb. 33). Hierbei verwenden wir einen Teil des Satzes von Pohlke und Schwarz, indem wir nämlich die beiden einander gleich langen und orthogonalen Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{A'D'}$ durch zwei willkürlich gewählte

[1]) Vgl. den Artikel von Н. Ф. Четверухин, Условные изображения и параметрический метод их построения (N. F. Tschetweruchin, Bedingte Bilder und parametrische Methoden ihrer Konstruktion) in dem in der Fußnote auf S. 253 zitierten Sammelband.

[2]) Natürlich sind hier Kunstwerke der realistischen Malerei gemeint, d. h. Kunstwerke, die Anspruch auf eine verhältnismäßig genaue Darstellung wirklicher Gegenstände erheben.

Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ abbilden. Hierdurch ist die Metrik in der Ebene $ABCD$ vollständig festgelegt, in ihr kann man nichts mehr willkürlich abbilden.

Nach dem Satz von POHLKE und SCHWARZ können wir noch eine Strecke, die nicht in der Ebene $A'B'C'D'$ liegt, in beliebiger Weise abbilden. Zum Beispiel können wir noch die Höhe der Pyramide (selbst wenn wir voraussetzen, daß ihre Länge gegeben ist) beliebig abbilden. Die Willkür besteht genauer darin, daß wir als Bild der Höhe eine Strecke wählen können, die eine beliebige Länge hat und einen beliebigen Winkel mit der Geraden AB einschließt.

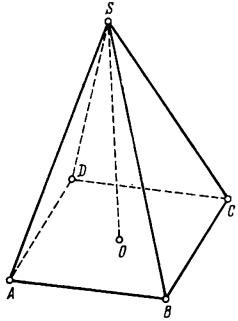


Abb. 33

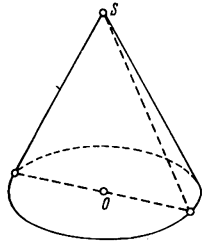


Abb. 34

Allerdings können wir das Bild des Fußpunktes O' der Höhe nicht beliebig annehmen, da in der Ebene der Grundfläche die gesamte Metrik festgelegt ist; als Bild O des Fußpunktes der Höhe muß der Schnittpunkt der Diagonalen des Basisparallelogramms gewählt werden. Uns bleibt also nur die Möglichkeit, das Bild S der Spitze S' beliebig zu wählen. In Abb. 33 haben wir die Höhe parallel zum Rand der Buchseite abgebildet. Das hat seinen Grund darin, daß man gewöhnlich die Höhe einer Pyramide als vertikal annimmt, so daß, wenn wir das Buch in üblicher Weise vor uns liegen haben, der richtige Eindruck von einer Pyramide vermittelt wird.

Beispiel 2. *Der gerade Kreiskegel.* Zunächst wird die Grundfläche durch eine beliebige Ellipse abgebildet (Abb. 34). Die Spitze S' wird durch einen beliebig gewählten Punkt S abgebildet. Umrißlinien sind dann die Tangenten von Punkt S an die Ellipse (als *Umriß* bezeichnet man kurz die Begrenzung des Bildes einer Figur).[1]) Es ist klar, daß diese Linien die Ellipse nicht in zwei „Ecken" berühren, wie man dies häufig auf schlechten Zeichnungen sieht. Das Bild eines Achsenschnittes erhält man, wenn man einen beliebigen Durchmesser

[1]) Wird der Punkt S im Innern der als Bild der Grundfläche gewählten Ellipse angenommen, so reduziert sich der Umriß auf die Ellipse. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

der Ellipse zieht und dessen Endpunkte mit S verbindet. Wir merken an (vgl. Abb. 34), daß die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte der Umrißlinien im allgemeinen kein Durchmesser der Ellipse ist.

Beispiel 3. *Die Kugel.* Bei Parallelprojektion einer Kugel erhält man als Bild entweder einen Kreis oder eine Ellipse mit verschiedenen Achsen, und zwar ist bei orthogonaler Projektion der Umriß einer Kugel ein Kreis und bei schräger Projektion eine Ellipse. Das Bild einer Kugel in Form einer Ellipse ist allerdings nicht anschaulich (Bedingungen für die Anschaulichkeit von Bildern werden auf S. 274f. erörtert); daher bildet man meistens eine Kugel durch orthogonale Projektion ab.

Zunächst zeichnen wir den Kreis, der den Umriß darstellt. Dann zeichnen wir die Bildellipse des Schnittes der Kugel mit einer beliebigen Ebene durch den Mittelpunkt, d. h. das Bild eines beliebigen Großkreises (Abb. 35); zur

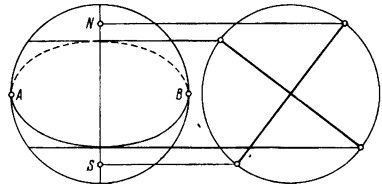


Abb. 35

Abkürzung bezeichnen wir diesen Großkreis als *Äquator*. Die im Mittelpunkt der Kugel errichtete Senkrechte zur Ebene des Großkreises schneidet die Sphäre in zwei Punkten, den zu diesem Großkreis gehörigen *Polen*. Zur Abkürzung bezeichnen wir sie als *Nord-* und *Südpol*.

Ein weit verbreiteter Fehler bei der Darstellung einer Kugel ist es, die Bilder der Pole auf dem Umriß einzuzeichnen. Bei einer Abbildung des Äquators wie in Abb. 35 befindet sich das Auge des Betrachters oberhalb der Äquatorebene. Mithin sieht der Betrachter den Nordpol auf der ihm zugewandten Seite der Oberfläche der Kugel innerhalb des Umrisses, während sich der Südpol auf der dem Betrachter abgewandten Seite der Kugeloberfläche befindet, also für ihn nicht sichtbar ist. Nur, wenn die Projektionsstrahlen parallel zur Äquatorebene verlaufen, befinden sich die Bilder der Pole auf dem Umriß, aber in diesem Fall wird der Äquator nicht auf eine Ellipse, sondern auf eine Strecke abgebildet. Je breiter die den Äquator darstellende Ellipse ist, desto weiter vom Umriß entfernt liegen die Pole.

In Abb. 35 ist angegeben, wie die Pole zu konstruieren sind, wenn das Bild des Äquators gegeben ist: Es sei $\overline{AB}$ der große Durchmesser der den Äquator darstellenden Ellipse und $\overline{A'B'}$ der zugehörige Durchmesser der Kugel. Ferner sei $\overline{N'S'}$ die Senkrechte auf der Äquatorebene durch den Mittelpunkt der

Kugel (N' sei der Nordpol, S' der Südpol). Wir denken uns dann neben die „Vorderansicht" der Kugel, in der die Punkte N und S zu konstruieren sind (Abb. 35, linke Hälfte), die „Seitenansicht" der Kugel, d. h. ihre Projektion auf eine zum Durchmesser $\overline{A'B'}$ senkrechte Ebene, gezeichnet (Abb. 35, rechte Hälfte). In der Seitenansicht erscheinen der Äquator und der Durchmesser $\overline{N'S'}$ als zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Umrißkreises der Kugel. Damit können wir unmittelbar die folgende Konstruktion verstehen: Wir „übertragen" die kleine Achse der gegebenen Ellipse auf den rechten Kreis und ziehen im rechten Kreis den entsprechenden Durchmesser; dieser Durchmesser ist das Bild des Äquators in der Seitenansicht. Wir zeichnen sodann den dazu senkrechten Durchmesser; dieser ist das Bild des Durchmessers $\overline{N'S'}$ in der Seitenansicht. Wir übertragen schließlich die Endpunkte dieses Durchmessers in der in Abb. 35 angegebenen Weise in die Vorderansicht. Die erhaltenen Punkte N und S sind die gesuchten.

3.6. Allgemeine Konstruktionsmethoden axonometrischer Bilder. Nachdem wir einige spezielle Konstruktionsbeispiele für axonometrische Bilder kennengelernt haben, kommen wir jetzt zur Behandlung allgemeiner Methoden. Wir erläutern hier zwei von ihnen, die ihrer Idee nach besonders einfach sind:

1. die Methode der Koordinatennetze;
2. die numerische Methode.

Der Methode der Koordinatennetze liegt folgendes zugrunde: Ist das Bild eines Koordinatensystems gegeben, so kann man das Bild eines jeden Punktes konstruieren, dessen Koordinaten bekannt sind. Diese Koordinaten werden (ohne Rechnung!) parallel zu den axonometrischen Achsen abgetragen, wobei auf jeder dieser Achsen ihre spezielle axonometrische Einheit benutzt wird.

Wir konstruieren als Beispiel das Bild eines geraden regelmäßigen sechseckigen Prismas, aus dem ein koaxialer gerader Kreiszylinder ausgeschnitten ist. Die Länge der Seiten des Grundsechsecks sei e und der Radius der Grundfläche des Zylinders $\frac{e}{2}$, die Höhe beider Körper betrage $2e$. Wir denken uns das Original mit einem Koordinatensystem $X'Y'Z'$ derart verbunden, daß die Grundfläche des Prismas auf der X', Y'-Ebene liegt, die gemeinsame Achse des Prismas und des Zylinders auf der Z'-Achse liegt und ein Paar gegenüberliegender Ecken der Grundfläche des Prismas auf die X'-Achse fallen. Dann haben die Eckpunkte der Grundfläche des Prismas die Koordinaten

$$(1, 0, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad (-1, 0, 0),$$
$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

(hierbei ist $e = 1$ gesetzt).

In Abb. 36 sind diese Punkte in einem axonometrischen Koordinatennetz konstruiert.[1]) Natürlich wurden hier nur die ersten beiden Punkte wirklich konstruiert, während die übrigen durch Ausnutzung von Symmetrien gewonnen sind. Die Eckpunkte der oberen Grundfläche erhält man durch

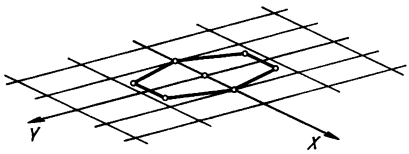


Abb. 36

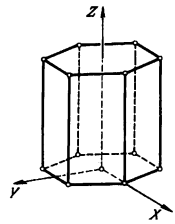
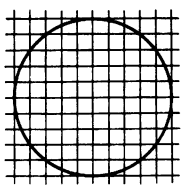


Abb. 37

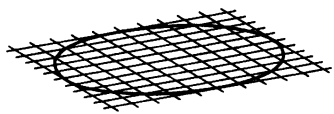
Translation der gewonnenen Punkte parallel zur Z-Achse um die Strecke $2e$ (Abb. 37).

Wir weisen darauf hin, daß es bei der Konstruktion eines Bildes mittels eines Koordinatennetzes oft nicht nötig ist, die Koordinaten aller Punkte des Originals zu kennen. Man kann häufig das Original einfach „graphisch kopieren".

Wir kommen nun zur Konstruktion des Kreiszylinders. In Abb. 38a ist dazu ein Kreis in einem orthogonalen Netz dargestellt, dessen Maschenweite



a)



b)

Abb. 38

gleich 1/10 des Durchmessers des Kreises ist. In Abb. 38b ist das Bild dieses Netzes und des Kreises in der X, Y-Ebene der Abb. 37 angegeben (der Anschaulichkeit halber um das Dreifache vergrößert). Dazu wurden (in Abb. 38b)

[1]) Abb. 36 ist in *orthogonaler Dimetrie* (vgl. S. 276) dargestellt. Für die folgenden Überlegungen ist das allerdings ohne Belang.

auf der X- und der Y-Achse die Strecken $\frac{e_1}{2}$ und $\frac{e_2}{2}$ abgetragen (wobei e_1, e_2 die Maßeinheiten auf den Achsen bezeichnen) und die Punkte des Kreises in diejenige Lage bezüglich des neuen Netzes übertragen, die sie in Abb. 38a bezüglich des alten Netzes einnehmen. Das neue Netz läßt sich sofort in Abb. 37 auf die obere und die untere Grundfläche des Prismas übertragen. Man erhält Abb. 39; die Koordinatenachsen sind hier nicht mehr eingezeichnet.

Die Koordinatennetzmethode besitzt die Unbequemlichkeit, daß man zunächst ein Netz zu konstruieren hat, das die Zeichnung mit zahlreichen überflüssigen Linien bedeckt, die man anschließend ausradieren muß, was die Genauigkeit erheblich vermindert.

Von diesen Mängeln ist die numerische Methode frei. Bei ihr werden die Koordinaten der Bildpunkte in bezug auf ein gegebenes rechtwinkliges Koordi-

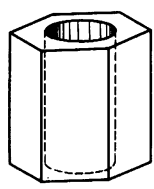


Abb. 39

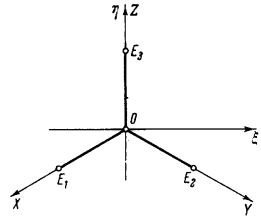


Abb. 40

natensystem der Bildebene berechnet und anschließend das Bild (z. B. auf Millimeterpapier) nach den Koordinaten gezeichnet. Da das Bild durch eine affine Abbildung des Originals gewonnen wird, sind die Koordinaten jedes Punktes des Bildes lineare Funktionen der Koordinaten des zugehörigen Punktes des Originals[1]). Führen wir in der Bildebene ein (z. B. rechtwinkliges) kartesisches Koordinatensystem ein, so gilt

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ \eta &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \end{aligned} \tag{1}$$

wenn x', y', z' die Koordinaten eines Punktes des Originals und ξ, η die Koordinaten seines Bildes sind. Die freien Glieder haben wir gleich Null gesetzt, d. h., wir nehmen an, daß als Ursprung des Koordinatensystems (ξ, η) das Bild des Punktes $x' = y' = z' = 0$ gewählt wurde.

Die Koeffizienten in den Formeln (1) lassen sich bestimmen, wenn das Bild eines Basistetraeders gegeben ist. Als Beispiel wählen wir die *orthogonale*

[1]) Vgl. § 3 des Artikels „Geometrische Transformationen", S. 70–71.

Isometrie.[1]) Legen wir das entsprechende Dreibein auf das System (ξ, η), so erhalten wir Abb. 40. Wir bezeichnen die axonometrischen Maßeinheiten mit

$$|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = e.$$

Dann hat der Punkt E_1 im System (ξ, η) die Koordinaten $\xi = -\frac{e\sqrt{3}}{2}$, $\eta = -\frac{e}{2}$. Sein Original E_1' hat die Koordinaten $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = 0$. Wiederholen wir diese Überlegung für die Punkte E_2 und E_3, so erhalten wir:

Der Punkt (1, 0, 0) geht über in den Punkt $\left(-\frac{e\sqrt{3}}{2}, -\frac{e}{2}\right)$,

der Punkt (0, 1, 0) geht über in den Punkt $\left(\frac{e\sqrt{3}}{2}, -\frac{e}{2}\right)$,

der Punkt (0, 0, 1) geht über in den Punkt (0, e).

Setzen wir diese Koordinaten in die Gleichungen (1) ein, so finden wir ein System von sechs Gleichungen für die sechs Unbekannten a_{ij}, woraus sich sämtliche Koeffizienten bestimmen lassen:

$$a_{11} = -\frac{e\sqrt{3}}{2}, \quad a_{12} = \frac{e\sqrt{3}}{2}, \quad a_{13} = 0,$$

$$a_{21} = -\frac{e}{2}, \quad a_{22} = -\frac{e}{2}, \quad a_{23} = e.$$

Folglich haben die Formeln (1) für die orthogonale Isometrie die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{e\sqrt{3}}{2}(y' - x'), \\ \eta &= \frac{e}{2}[2z' - (x' + y')]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Als Beispiel wollen wir den in Abb. 39 dargestellten Körper abbilden. Dazu müssen wir zunächst den gewünschten Maßstab des Bildes wählen; wir setzen beispielsweise $e = 25$ mm. Dann lauten die Formeln (2):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 21{,}65(y' - x'), \\ \eta &= 12{,}5[2z' - (x' + y')]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) Vgl. S. 277f. Die orthogonale Isometrie hat ein axonometrisches Dreibein, wie es in Abb. 40 und 50 angegeben ist.

Die Formeln (3) geben ξ und η direkt in Millimetern an. Die Koordinaten der Ecken des Prismas (zunächst nur die der unteren Fläche) lauten:

Nr. des Punktes	x'	y'	z'
1	1,000	0,000	0
2	0,500	0,866	0
3	−0,500	0,866	0
4	−1,000	0,000	0
5	−0,500	−0,866	0
6	0,500	−0,866	0

Setzen wir diese Koordinaten in die Formeln (3) ein, so erhalten wir die folgende Tabelle (darin sind ξ und η bis auf ein Zehntel eines Millimeters genau angegeben; das ist die maximale Genauigkeit, die ein erfahrener Zeichner nach Augenmaß bei der Arbeit auf Millimeterpapier erreichen kann):

Nr. des Punktes	ξ	η	Nr. des Punktes	ξ	η
1	−21,7	−12,5	4	21,7	12,5
2	7,9	−17,1	5	− 7,9	17,1
3	29,6	− 4,6	6	−29,6	4,6

Die Ecken der Deckfläche unterscheiden sich von den Ecken der Grundfläche nur dadurch, daß für sie $z' = 2$ ist. Aus den Formeln (3) ist ersichtlich, daß für die Bilder die ξ-Werte dieselben sind und sich die η-Werte um 50 mm erhöhen. Wir führen die entsprechende Tabelle nicht an.

Zur Abbildung der Aussparung wählen wir auf dem Kreis Punkte in einem Abstand von 30°. In der Praxis unterteilt man meistens bedeutend weiter, uns geht es hier jedoch nur darum, das Wesen der numerischen Methode zu veranschaulichen. Die Koordinaten der Punkte der Grundfläche des Zylinders lassen sich nach den Formeln

$$x' = \frac{1}{2}\cos t, \qquad y' = \frac{1}{2}\sin t, \qquad z' = 0$$

berechnen. Für $t = 0°, 30°, 60°, \ldots, 330°$ ergeben sich die in den linken Spalten der folgenden Tabelle angegebenen Werte. Die rechten Spalten geben die Koordinaten der Bildpunkte an; η_1 gehört dabei zur Grundfläche des Zylinders, η_2 zur Deckfläche. Die Größen η_1 und η_2 sind durch die Beziehung

$$\eta_2 = \eta_1 + 50$$

t	x'	y'	z'	ξ	η_1	η_2
0°	0,500	0,000	0	−10,8	−6,3	43,7
30°	0,433	0,250	0	− 4,0	−8,5	41,5
60°	0,250	0,433	0	4,0	−8,5	41,5
90°	0,000	0,500	0	10,8	−6,3	43,7
120°	−0,250	0,433	0	14,8	−2,3	47,7
150°	−0,433	0,250	0	14,8	2,3	52,3
180°	−0,500	0,000	0	10,8	6,3	56,3
210°	−0,433	−0,250	0	4,0	8,5	58,5
240°	−0,250	−0,433	0	− 4,0	8,5	58,5
270°	0,000	−0,500	0	−10,8	6,3	56,3
300°	0,250	−0,433	0	−14,8	2,3	52,3
330°	0,433	−0,250	0	−14,8	−2,3	47,7

verknüpft. Überträgt man die Punkte entsprechend ihren Koordinaten (ξ, η) auf Millimeterpapier, so erhält man Abb. 41.[1])

Der Leser möge beachten, daß wir bewußt ein sehr einfaches Beispiel ausgewählt haben, da wir nur die Methode der Koordinatennetze und die numerische Methode veranschaulichen wollten. Diese Verfahren, insbesondere das numerische, kommen erst richtig bei komplizierteren Originalen zum Tragen. Das in unserem Beispiel betrachtete Original läßt sich durch wesentlich elementarere Mittel abbilden. Ist insbesondere das Bild der Grundfläche des Prismas schon konstruiert, so kann man den Mittelpunkt des erhaltenen Sechsecks mit dessen Ecken verbinden und diese Verbindungsstrecken halbieren. Es ist dann klar, daß die als Bild der Grundfläche des Zylinders erscheinende Ellipse durch die Mittelpunkte dieser Strecken geht. Sodann kann man die zu den konstruierten Strecken in bezug auf die Ellipse konjugierten Halbmesser der Ellipse konstruieren (sie liegen auf den Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Seiten des als Bild der Grundfläche des Prismas erhaltenen Sechsecks). Mit Hilfe dieser und ähnlicher Überlegungen kann die Ellipse bedeutend einfacher, als das im Text geschehen ist, konstruiert werden.

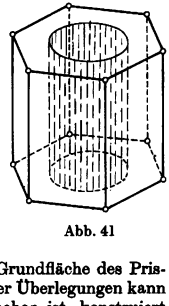


Abb. 41

[1]) Eine eingehendere Erörterung der numerischen Methode findet der Leser in dem Artikel von Н. М. Бескин, Вычислительный метод построения изображений (N. M. Beskin, Die numerische Methode zur Konstruktion von Bildern) im Sammelband „Методы начертательной геометрии и ее приложения (Methoden der darstellenden Geometrie und ihre Anwendungen)" unter der Redaktion von N. F. Tschetweruchin, Moskau 1955, S. 83–99.

3.7. Die Axonometrisierung einer Zeichnung. Als *Axonometrisierung einer Zeichnung* bezeichnet man die Hinzunahme von solchen sich auf das Original beziehenden Angaben zu einer vollständigen Zeichnung, daß anschließend die Zeichnung metrisch vollständig festgelegt ist.

Wir wollen dies zunächst durch ein Beispiel erläutern: In Abb. 42 sind drei Koordinatenachsen und eine durch ihre Spurpunkte gegebene Ebene dargestellt. Diese Zeichnung legt das Original nur bis auf eine affine Transformation fest. Es sei nun zusätzlich angegeben, daß das abgebildete Koordinatensystem orthogonal ist:

$$\sphericalangle X'O'Y' = \sphericalangle Y'O'Z' = \sphericalangle Z'O'X' = 90°.$$

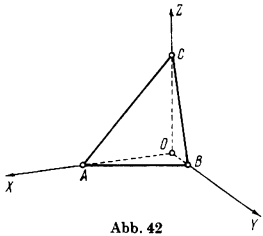


Abb. 42

Diese Angabe allein macht die Zeichnung auch noch nicht axonometrisch, weil die Längen der Strecken $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$, $\overline{O'C'}$ nicht bekannt sind.

Wir nehmen nun an, daß das Lot vom Ursprung O' auf die Ebene $A'B'C'$ abgebildet werden soll; der Fußpunkt dieses Lotes sei mit P' bezeichnet. Das Bild P des Punktes P' kann noch ein beliebiger Punkt innerhalb des Dreiecks ABC sein, was die metrische Unbestimmtheit unserer Zeichnung bestätigt. Ist das Dreibein $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})$ bekannt (um dessen Rekonstruktion aus der Zeichnung es gegenwärtig geht!), so kann die Gerade OP keineswegs in beliebiger Weise abgebildet werden; die Lage des Punktes P ist dann vollständig festgelegt.

Bilden wir nun umgekehrt in Abb. 42 noch zusätzlich das Lot ab, d. h., wählen wir einen Punkt P im Innern des Dreiecks ABC als Bild des Fußpunkts des Lotes von O' auf die Ebenen $A'B'C'$, so werden dadurch, wie wir zeigen wollen, die Verhältnisse $|O'A'| : |O'B'| : |O'C'|$ festgelegt, die Zeichnung wird metrisch bis auf den Maßstab bestimmt. Wir zeigen also, daß man durch die Vorgabe eines Punktes P der genannten Art das Tetraeder $O'A'B'C'$ (bis auf den Maßstab) rekonstruieren kann, und zwar in eindeutiger Weise.

Zunächst ist klar, daß der Punkt P innerhalb des Dreiecks ABC liegen muß; denn die Höhe eines Tetraeders, dessen Ebenenwinkel an der Spitze rechte Winkel sind, geht durch den Schnittpunkt der Höhen der Grundfläche, und dieser Schnittpunkt muß im betrachteten Fall innerhalb des Dreiecks liegen, da es sich bei $A'B'C'$ um ein spitzwinkliges Dreieck handelt. Aus

$$|A'B'|^2 = |O'A'|^2 + |O'B'|^2,$$
$$|B'C'|^2 = |O'B'|^2 + |O'C'|^2,$$
$$|C'A'|^2 = |O'C'|^2 + |O'A'|^2$$

folgt nämlich, daß im Dreieck $A'B'C'$ die Summe der Quadrate der Längen zweier Dreiecksseiten stets größer ist als das Quadrat der Länge der dritten

Dreiecksseite (also z. B. $|A'B'|^2 + |B'C'|^2 > |C'A'|^2$ usw.), und das besagt gerade, daß $A'B'C'$ spitzwinklig ist.

In Abb. 43a ist das Spurdreieck ABC aus Abb. 42 für sich dargestellt, und in seinem Innern ist ein beliebiger Punkt P gewählt. Durch ihn sind die Geraden AL, BM und CN gezogen. Da $\overline{O'P'}$ die Höhe des Tetraeders $O'A'B'C'$ sein soll, *ist der Punkt P' Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks $A'B'C'$*. Das bedeutet, daß $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CN}$ die Bilder dieser Höhen sind. Die Aufgabe, die vor uns steht, kann also jetzt so formuliert werden: Gegeben ist das affine Bild eines Dreiecks mit Höhen (Abb. 43a), aus ihm ist das Original (bis auf den Maßstab genau) zu rekonstruieren.

Die Unbestimmtheit des Maßstabes gestatte es uns, eine Strecke beliebig zu wählen; wir wählen die Seite $\overline{A'B'}$ (Abb. 43b). Auf ihr konstruieren wir den Punkt N', der der Bedingung

$$\frac{|A'N'|}{|N'B'|} = \frac{|AN|}{|NB|}$$

genügt. Im Punkt N' errichten wir die Senkrechte auf $A'B'$; der Punkt C' muß dann auf dieser Senkrechten liegen. Als nächstes konstruieren wir den Halbkreis über der Strecke $\overline{A'B'}$. Die Punkte L' und M' müssen auf diesem Halbkreis liegen, da

$$\sphericalangle A'L'B' = \sphericalangle B'M'A' = 90°$$

gilt. Da die Punkte L' und C' der Bedingung

$$\frac{|B'C'|}{|B'L'|} = \frac{|BC|}{|BL|}$$

genügen, muß der Punkt C' auf dem Halbkreis liegen, der aus dem soeben konstruierten Halbkreis durch die Homothetie[1]) mit dem Zentrum B' und dem Koeffizienten $\frac{|BC|}{|BL|}$ hervorgeht. (Das Verhältnis $\frac{|BC|}{|BL|}$ ist uns aus Abb. 43a bekannt.) Diesen Halbkreis erhält man z. B. dadurch, daß man auf der Geraden $A'B'$ den Punkt S' bestimmt, für den

$$\frac{|B'S'|}{|B'A'|} = \frac{|BC|}{|BL|}$$

gilt, und $\overline{B'S'}$ als Durchmesser nimmt. Den Punkt C' erhält man schließlich als Schnittpunkt dieses Halbkreises mit der Senkrechten zur Geraden $A'B'$ im Punkt N'. Damit ist das Dreieck $A'B'C'$ konstruiert.

Um die Zeichnung nicht zu überladen, führen wir die Rekonstruktion des Tetraeders $O'A'B'C'$ getrennt in Abb. 43c fort. Wir nehmen hierbei das bereits konstruierte Dreieck $A'B'C'$ mit den Höhen $\overline{A'L'}$, $\overline{B'M'}$ und $\overline{C'N'}$ als Ausgangspunkt.

[1]) Bezüglich der Definition der Homothetie vgl. S. 49.

Nach dem oben erwähnten Satz über diese drei Höhen ist der Punkt L' nicht nur Fußpunkt der Höhe $\overline{A'L'}$, sondern zugleich auch Fußpunkt der Höhe $\overline{O'L'}$ der Begrenzungsfläche $O'B'C'$ des Tetraeders. Zur Rekonstruktion

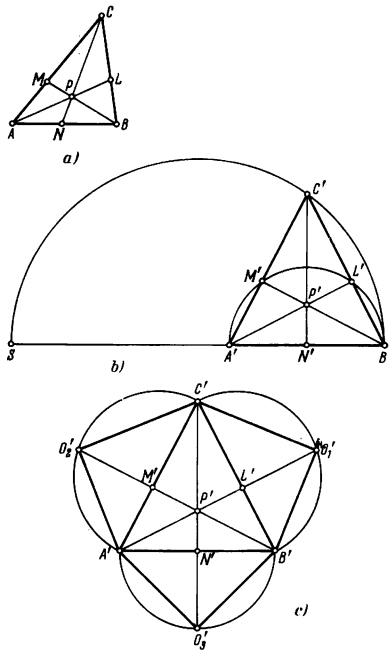


Abb. 43

des Tetraeders wollen wir dessen Netz konstruieren, d. h., wir denken es uns z. B. an den Kanten $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$ und $\overline{O'C'}$ aufgetrennt und die Begrenzungsflächen in die Ebene der Grundfläche umgeklappt. Dann fällt der Punkt O' auf die Fortsetzung der Höhe $\overline{A'L'}$; ferner muß dieser Punkt auf dem über $\overline{B'C'}$ errichteten Halbkreis liegen. In Abb. 43c ist die Konstruktion der

Punkte O'_1, O'_2 und O'_3 angegeben, in die die gemeinsame Ecke O' der drei Begrenzungsflächen bei der geschilderten Netzbildung übergeht.

Liegen nur einige metrische Angaben über ein Original vor, die aber nicht ausreichen, um es auf Grund einer Zeichnung metrisch festzulegen, so wollen wir von einer *teilweisen Axonometrisierung der Zeichnung* sprechen. Ist z. B. bekannt, daß die in Abb. 44 eingezeichneten Punkte P' und Q' auf der unteren bzw. oberen Begrenzungsfläche des dargestellten Parallelepipeds liegen und die Gerade $P'Q'$ auf diesen Flächen senkrecht steht, so ist Abb. 44 dadurch teilweise axonometrisiert. Zum Beispiel kann die vom Punkt A' ausgehende Höhe des Parallelepipeds nicht mehr in beliebiger Weise abgebildet werden, sie muß parallel zu PQ gezeichnet werden. Dagegen kann man z. B. die vom Punkt A' ausgehende Höhe der Begrenzungsfläche $A'B'C'D'$ noch in ganz beliebiger Weise abbilden.

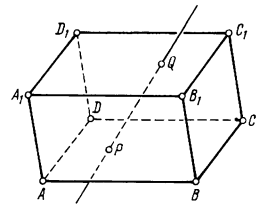


Abb. 44

Die Anfertigung einer teilweise axonometrisierten Zeichnung erfordert ganz besondere Aufmerksamkeit, weil man in ihr manches beliebig und anderes nicht beliebig abbilden kann. Wir führen hier ein lehrreiches Beispiel für einen häufig gemachten Fehler an:

Viele Jahrhunderte hindurch war es üblich, eine Ebene in einer Zeichnung durch ein Parallelogramm abzubilden. Hierbei wurde stillschweigend angenommen, daß dieses Parallelogramm ein rechteckiges Ebenenstück abbildet. Dadurch wurde eine teilweise Axonometrisierung der Zeichnung vorgenommen. (Die Bilder zweier zueinander orthogonaler Richtungen waren festgelegt.) Eine solche teilweise Axonometrisierung schränkt aber die Freizügigkeit der Darstellung in der betreffenden Ebene ein. Wenn man hierauf nicht achtet, kommt es sehr leicht zu Fehlern. Aus diesem Grund hat sich in den letzten Jahren immer stärker die Gewohnheit herausgebildet, ein gezeichnetes Ebenenstück durch einen krummlinigen Rand zu begrenzen.

Es sei z. B. eine auf einer horizontalen Ebene stehende regelmäßige viereckige Pyramide zu zeichnen. Das Quadrat, das die Grundfläche der Pyramide bildet, kann durch ein beliebiges Parallelogramm abgebildet werden. Diese Regel ist jedoch auf Abb. 45a wegen ihrer teilweisen Axonometrisierung nicht anwendbar. Abb. 45a ist sogar falsch; denn auf ihr sind zwei verschiedene Richtungen (AD und LO) als senkrecht zu derselben Richtung ($AB \parallel LM$) dargestellt. In Abb. 45b ist das Bild einer regelmäßigen viereckigen Pyramide auf einer durch einen krummlinigen Rand angedeuteten Ebene gezeichnet; diese Zeichnung ist „richtig".

In Abb. 46a ist ein gerader Kreiskegel dargestellt. Abbildung 46a ist falsch. Die Fehlerhaftigkeit erkennt man, wenn man zwei zueinander konjugierte Ellipsendurchmesser betrachtet, von denen der eine parallel zu einem der „Ränder" der Ebene ist. In Abb. 46a ist CD parallel zu LO, aber AB nicht parallel zu LM. Abb. 46b ist „richtig".

Wir wollen den Leser aber sogleich auf eine weitere Fehlermöglichkeit aufmerksam machen: Jede der Abb. 45b und 46b ist für sich genommen richtig. Wollten wir aber beide Körper, die regelmäßige viereckige Pyramide und den

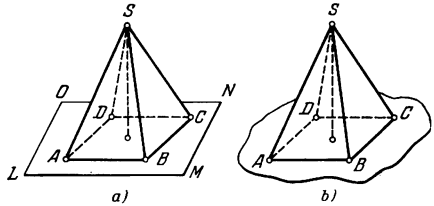


Abb. 45

Kegel, auf ein und derselben Ebene stehend darstellen, so erhielten wir bei Kombination der Abb. 45b und 46b eine fehlerhafte Zeichnung (auch wenn wir die Ebene durch eine krummlinige Berandung andeuten). Sowohl die

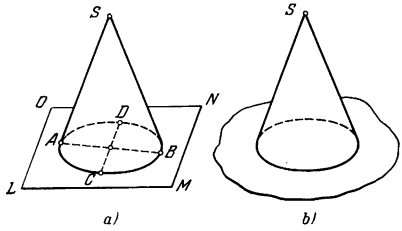


Abb. 46

Pyramide (Abb. 45b) als auch der Kegel legen nämlich bereits die Metrik in der Basisebene weitgehend fest, und diese Metriken stimmen bei Abb. 45b und 46b nicht überein.

3.8. Orthogonale (rechtwinklige) Axonometrie. Bisher haben wir ausschließlich freie Darstellungen betrachtet. In der Ingenieurpraxis ist daneben die Axonometrie mit vorgegebenen Parametern sehr verbreitet.

Nach dem Satz von POHLKE und SCHWARZ kann man z. B. einen Würfel in weitgehend beliebiger Weise abbilden, etwa auch so, wie das in Abb. 47 geschehen ist. Jedoch wird ein Mensch, der sich nicht mit darstellender Geometrie befaßt hat, kaum erkennen, daß dies das Bild eines Würfels sein kann, weil die Darstellung einem Würfel nicht sehr „ähnlich" sieht. Das stellt uns

vor die Frage, wovon eigentlich die Anschaulichkeit eines Bildes, d. h. dessen „Ähnlichkeit" mit dem Original, noch abhängt.

Bei Parallelprojektionen stellt ein Bild das zugehörige Original in einer solchen Weise dar, wie das Original von einem Beobachter aus sehr großer Entfernung in Richtung der Projektionsstrahlen erblickt wird. Der Projektionsprozeß selbst ist dabei analog dem geometrischen Prozeß des Sehens. Bei der Betrachtung eines beliebigen Gegenstandes befinden wir uns jedoch stets vor ihm, d. h., man muß sich die Bildebene vor (oder hinter) dem Gegenstand vorstellen, wobei bei Betrachtung aus weiter Ferne die Sehstrahlen auf der Bildebene nahezu senkrecht stehen. *Man wird also das anschaulichste Bild eines Originals bei orthogonaler oder nahezu orthogonaler Projektion erhalten.* Im Gegensatz dazu ist z. B. bei dem in Abb. 47 dargestellten Würfel für den Winkel der Projektionsstrahlen mit der Bildebene $\sigma = 14°$,[1]) d. h., diese Projektion unterscheidet sich stark von einer orthogonalen Projektion.

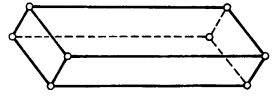


Abb. 47

Neben dem Winkel σ benötigt man zur Festlegung einer Axonometrie die folgenden Parameter:

Die Winkel α, β, γ, die die Projektionsstrahlen mit den natürlichen Achsen einschließen. (In der Axonometrie bezeichnet man gewöhnlich als *natürlich* alles das, was sich auf das Original bezieht, und als *axonometrisch* alles das, was zum Bild gehört. In diesem Sinn sind $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ die natürlichen Achsen und OX, OY, OZ die axonometrischen Achsen.)

Die sogenannten *Verzerrungskoeffizienten* p, q, r. Hierunter versteht man die Verhältnisse der axonometrischen Einheiten $e_1 = |OE_1|$, $e_2 = |OE_2|$, $e_3 = |OE_3|$ zur natürlichen Einheit e (sie sei für alle natürlichen Achsen als gleich vorausgesetzt):

$$p = \frac{e_1}{e}, \quad q = \frac{e_2}{e}, \quad r = \frac{e_3}{e}. \tag{4}$$

Wir warnen den Leser vor einem möglichen Mißverständnis. In Lehrbüchern der darstellenden Geometrie findet man gelegentlich die Behauptung, daß bei orthogonaler Axonometrie (d. h. bei einer Axonometrie mit dem Winkel $\sigma = 90°$) die Verzerrungskoeffizienten durch die Formel

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2$$

[1]) Es entsteht hiermit die interessante Aufgabe, aus einem durch Parallelprojektion gewonnenen Bild die Parameter zu bestimmen, die den Projektionsmechanismus festlegen. Es soll z. B. aus der Kenntnis, daß in Abb. 47 ein Würfel dargestellt ist, der Winkel σ ermittelt werden. Eine graphische Lösung dieser Aufgabe ist in § 9 des Buches [2] von E. A. Glasunow und N. F. Tschetweruchin enthalten, und eine analytische Lösung findet sich in dem Artikel von А. І. Островский, Основные формулы параллельной аксонометрии (A. I. Ostrowski, Grundlegende Formeln der schiefen Axonometrie), Arbeiten des Moskauer Seminars über darstellende Geometrie und Ingenieurgraphik, Moskau 1958, S. 108–110.

miteinander verknüpft sind. Wir machen darauf aufmerksam, daß diese Normierung nur dann richtig ist, wenn das Bild durch *unmittelbare Projektion* des Originals auf die Ebene erhalten wird. Setzt sich die Abbildung aus einer senkrechten Parallelprojektion und einer anschließenden Ähnlichkeitstransformation zusammen, so *können die Verzerrungskoeffizienten bereits weitgehend beliebig gewählt werden*; es muß dabei nur die folgende Bedingung erfüllt sein: *Das Quadrat eines beliebigen Verzerrungskoeffizienten darf nicht größer sein als die Summe der Quadrate der beiden anderen Koeffizienten.*

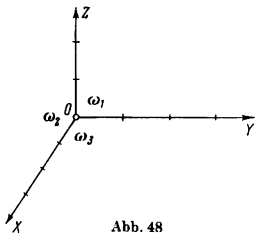


Abb. 48

Weitere wichtige Parameter sind die Winkel zwischen den axonometrischen Achsen (Abb. 48), die man gewöhnlich mit

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle\, XOY &= \omega_3, \\ \sphericalangle\, YOZ &= \omega_1, \\ \sphericalangle\, ZOX &= \omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

bezeichnet, wobei also $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2\pi$ ist.

Die angeführten Parameter sind natürlich nicht voneinander unabhängig. Eine orthogonale axonometrische Projektion ist z. B. vollständig durch ihre Verzerrungskoeffizienten festgelegt. Sind die Verzerrungskoeffizienten alle voneinander verschieden, so bezeichnet man das Bild als *trimetrisch*, sind zwei von ihnen gleich und ist der dritte von diesen beiden verschieden, so nennt man das Bild *dimetrisch*, sind schließlich die Koeffizienten alle drei gleich, so spricht man von einem *isometrischen* Bild.

Die übrigen Parameter lassen sich durch die Verzerrungskoeffizienten folgendermaßen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\sqrt{2}\cdot p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \sin\beta &= \frac{\sqrt{2}\cdot q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \sin\gamma &= \frac{\sqrt{2}\cdot r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega_1 &= \frac{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)\,(-p^2+q^2+r^2)}}{2qr}, \\ \sin\omega_2 &= \frac{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)\,(p^2-q^2+r^2)}}{2rp}, \\ \sin\omega_3 &= \frac{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)\,(p^2+q^2-r^2)}}{2pq}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Geht bei einer orthogonalen Axonometrie der Projektionsstrahl OO' durch den ersten Oktanten des natürlichen Achsensystems[1]), so sind die Winkel ω_1, ω_2 und ω_3 stumpf. Die Herleitung dieser Formeln ist völlig elementar, so daß wir auf sie verzichten wollen.

Die Wahl der Parameter bei der Festlegung einer bestimmten orthogonalen Axonometrie hängt also davon ab, welche Abmessungen die Bilder der Kanten des Basiswürfels haben sollen. Hierbei muß man zwischen zwei Fällen unterscheiden: Im ersten Fall hat der Basiswürfel vorgegebene Abmessungen. Zum Beispiel sei die natürliche Einheit $e = 1$ m, und es sei verlangt, daß die axonometrischen Einheiten $e_1 = 1$ cm, $e_2 = e_3 = 2$ cm betragen sollen. In diesem Fall sind die Verzerrungskoeffizienten eindeutig bestimmt, sie berechnen sich im betrachteten Beispiel zu

$$p = 0{,}01\,, \quad q = r = 0{,}02\,.$$

Der zweite Fall liegt vor, wenn die Abmessungen des Basiswürfels nicht gegeben sind, d. h., wenn nur verlangt ist, daß irgendein Würfel (dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind) so abgebildet wird, daß sich beispielsweise $e_1 = 1$ cm, $e_2 = e_3 = 2$ cm ergibt. In diesem Fall sind die Verzerrungskoeffizienten nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt, d. h., es ist nur ihr Verhältnis gegeben,

$$p : q : r = 1 : 2 : 2\,,$$

so daß man also beispielsweise $p = 1$, $q = r = 2$ setzen kann. Die Wahl dieses Faktors ist in der Tat in vielen Zusamenhängen unwesentlich. Zum Beispiel sind die rechten Seiten der Formeln (6) und (7) in p, q, r homogen, so daß sich dieser Faktor bei der Berechnung von $\alpha, \beta, \gamma, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ herauskürzt. Im Fall $p = 1$, $q = r = 2$ erhalten wir z. B. aus (7)

$$\sin \omega_1 = \frac{3\sqrt{7}}{8} \approx 0{,}99222\,,$$

$$\sin \omega_2 = \sin \omega_3 = \frac{3}{4}\,,$$

und wenn wir berücksichtigen, daß die Winkel ω_1, ω_2 und ω_3 stumpf sind, finden wir

$$\omega_1 \approx 97^\circ\,11' \approx 97^\circ\,, \quad \omega_2 = \omega_3 \approx 131^\circ\,25' \approx 131^\circ$$

(Abb. 49). Wir sehen also, daß bei einer orthogonalen Axonometrie das Verhältnis der Verzerrungskoeffizienten die Winkel zwischen den axonometrischen Achsen vollständig festlegt.

Ein besonders häufig angewandtes Abbildungsverfahren ist die *orthogonale Isometrie*. Nehmen wir an, daß $p = q = r = 1$ ist, so erhalten wir aus (6)

[1]) Diese Forderung kann offenbar stets dadurch erfüllt werden, daß man das natürliche Achsensystem in geeigneter Weise orientiert. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

und (7)

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\sin\omega_1 = \sin\omega_2 = \sin\omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

In diesem Fall wird also $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 120°$. Das Bild des Koordinatensystems ist in Abb. 50 wiedergegeben. Der Basiswürfel ist in Abb. 51 darge-

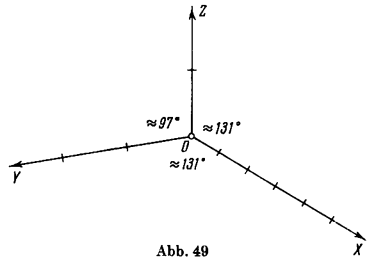


Abb. 49

stellt. Wie zu erkennen ist, gilt $\alpha = \beta = \gamma$, d. h., die Richtung der Projektionsstrahlen fällt in Richtung einer der Würfeldiagonalen. Aus dem Gesagten ergibt sich folgender geometrischer Sachverhalt: Die Bildebene steht senkrecht

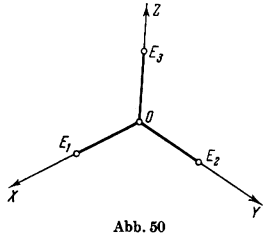


Abb. 50

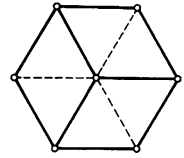


Abb. 51

auf der Diagonalen des Basiswürfels, und die Projektionsstrahlen verlaufen parallel zu dieser Diagonalen. Vom Basiswürfel selbst erhält man dann das in Abb. 51 dargestellte Bild. Von den beiden Ecken des Würfels, die auf der Diagonalen liegen, die in Richtung der Projektionsstrahlen verläuft, verdeckt eine die andere.

§ 4. Das Verfahren von Monge

4.1. Kombinierte Bilder. Die Axonometrie ist nur eines der verschiedenen Verfahren, die metrisch bestimmte Bilder liefern. Unter allen diesen Verfahren spielen die sogenannten kombinierten Bilder eine besondere Rolle. Wir haben bereits oben erläutert, daß wegen Fehlen eines Parameters eine Punktabbildung des Raumes in die Ebene (ohne zusätzliche Angaben) ein Original nicht vollständig festlegen kann. Man behilft sich daher vielfach dadurch, daß man von demselben Original *mehrere* voneinander verschiedene Bilder herstellt. Ein System von mehreren Bildern eines Originals bezeichnet man als ein *kombiniertes Bild* oder eine *komplexe Zeichnung*.

4.2. Das Wesen des Verfahrens von Monge. Ein besonders wichtiges Beispiel für ein Abbildungsverfahren mittels kombinierter Bilder ist das bekannte *Zweitafelverfahren* von GASPARD MONGE.

Beim Verfahren von MONGE wird jeder Punkt M' des Raumes auf zwei gegebene, aufeinander senkrecht stehende Ebenen, eine *Grundrißebene* Π_1 und eine *Aufrißebene* Π_2 projiziert (Abb. 52). Die so erhaltenen Punkte M_1' und M_2' heißen der *Grundriß* bzw. der *Aufriß* des Punktes M'. Wir drehen sodann (in Abb. 52) die Ebene Π_2 in der durch den Pfeil gekennzeichneten Richtung um die Schnittgerade der Ebenen Π_1 und Π_2, die sogenannte *Projektionsachse*, bis sie in der Ebene Π_1 liegt: Dadurch erhalten wir Abb. 53. In ihr ist der

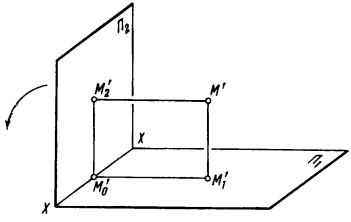


Abb. 52

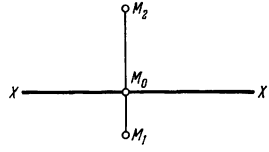


Abb. 53

Punkt M' durch seine beiden Projektionen M_1 und M_2 festgelegt, die wir gleichfalls als Grund- bzw. Aufriß von M' bezeichnen wollen. Diese Projektionen können natürlich in der Zeichenebene nicht beide beliebig gewählt werden; sie müssen auf derselben Senkrechten zur Projektionsachse liegen. Die zur Projektionsachse orthogonalen Geraden bezeichnet man auch als *Ordnungslinien*.

Bekanntlich ist jeder Punkt einer Ebene durch zwei, jeder Punkt des Raumes durch drei Koordinaten festgelegt. Mithin liefert z. B. der Grundriß M_1 eines Punktes M' des Raumes zwei seiner Koordinaten; die Angabe des Aufrisses M_2 von M', der auf der bereits bekannten Ordnungslinie durch M_1 (d. h. der durch den Punkt M_1 gehenden Senkrechten zur Projektionsachse) liegt, ist gleichbedeutend mit der Angabe einer dritten Koordinate.

Durch die Angabe von M_1 und M_2 ist also die Lage des Punktes M' im Raum vollständig festgelegt. Ist nur der Grundriß gegeben, so ist dadurch eine unendliche Menge konkurrierender Punkte bestimmt, die alle auf derselben Senkrechten zur Ebene Π_1 liegen. Diese konkurrierenden Punkte unterscheiden sich untereinander durch ihre Aufrisse. Die Angabe des Aufrisses ist äquivalent der Angabe einer Zahlenmarke, die die Höhe des Punktes über der Grundrißebene festlegt.

Es gibt allerdings einige Ausnahmefälle, in denen die Angabe zweier Projektionen zur Festlegung eines Originals nicht ausreicht. Zum Beispiel haben alle Geraden, die in einer senkrecht auf den Ebenen Π_1 und Π_2 stehenden Ebene α liegen, dieselben Projektionen. In diesen Fällen kann man sich dadurch helfen, daß man noch eine dritte Projektion des Originals, einen *Seitenriß* anfertigt. Ein Abbildungsverfahren dieser Art nennt man eine *Dreitafelprojektion*.

Durch das Verfahren von MONGE werden die Originale metrisch genau festgelegt, d. h., liegt ein Bild eines Originals nach dem Verfahren von MONGE vor, so kann man daraus jede sich auf das Original beziehende geometrische Frage beantworten.

Wir gehen hier nicht ausführlich auf das Verfahren von MONGE ein, da es in allen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie bis in die Einzelheiten hinein behandelt wird. In den Grundzügen werden das Verfahren von MONGE und die Dreitafelprojektion bereits in der polytechnischen Oberschule gelehrt. Wir bemerken, daß die Idee, von einem Original zwei Projektionen herzustellen, nicht von MONGE stammt, sondern bedeutend älter ist. Sie wurde z. B. schon von dem altrömischen Architekten VITRUVIUS benutzt. MONGE entwickelte jedoch als erster dieses Verfahren systematisch und zeigte, daß man damit nicht nur jedes beliebige Original abbilden kann, sondern daß man auch allein aus dem Bild alle geometrischen Fragen beantworten kann, die sich auf das Original beziehen.[1])

§ 5. Zentralprojektionen

5.1. Die Eigenschaften der Zentralprojektion. Die Theorie der Zentralprojektion ist im gleichen Maße komplizierter als die der Parallelprojektion, wie es die projektiven Transformationen gegenüber den affinen Transformationen sind. Wir wollen hier nur einige Probleme der Theorie der Zentralprojektionen

[1]) Vgl. zu dieser Frage die Ausführungen von D. I. KARGIN in der russischen Übersetzung des Buches [3] von G. MONGE.

erörtern, wobei wir von denselben Fragen ausgehen, die wir bei den Parallelprojektionen behandelt haben. Wir wollen insbesondere den Unterschied in den Antworten herausarbeiten.

Eine Zentralprojektion wird auf folgende Weise erhalten: Man fixiert im Raum einen Punkt S als *Projektionszentrum* und eine Ebene α als *Projektionsebene* (Abb. 54). Als Bild eines beliebigen Punktes M' des Raumes, der von S verschieden ist, wird der Schnittpunkt M der Geraden (des *Projektionsstrahls*) SM' mit der Ebene α definiert.

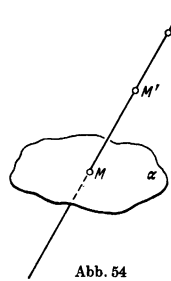


Abb. 54

Die Zentralprojektion kann man in vernünftiger Weise nur im projektiven Raum behandeln. (Die Parallelprojektion studierten wir im affinen Raum.) Führen wir nämlich keine uneigentlichen (unendlich fernen) Elemente[1]) ein, so können wir nicht erwarten, daß jeder Punkt des Raumes ein Bild besitzt (da der Projektionsstrahl SM' parallel zur Ebene α sein kann). Im projektiven Raum besitzt dagegen *jeder* Punkt (außer S) ein Bild. Hierbei kann das Bild eines eigentlichen Punktes ein uneigentlicher Punkt sein, und das Bild eines uneigentlichen Punktes kann sich als eigentlicher Punkt erweisen.

Die Zentralprojektionen besitzen die folgenden Eigenschaften (man vergleiche die Eigenschaften 1 bis 4 der Parallelprojektionen auf S. 237):

1. *Jedem vom Projektionszentrum S verschiedenen Punkt des Raumes entspricht eindeutig ein Punkt in der* (projektiven!) *Ebene α.* Konkurrierende Punkte sind dabei solche, die auf derselben durch S gehenden Geraden liegen.

2. *Jede Gerade, die kein Projektionsstrahl ist, wird auf eine Gerade abgebildet. Jede Projektionsgerade wird auf einen Punkt abgebildet.*

3. *Für beliebige Punkte A', B', C', D' einer Geraden* (die nicht projizierend ist) *gilt*

$$\frac{|AB|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} : \frac{|A'D'|}{|D'C'|}.$$

Mit anderen Worten: *Das Doppelverhältnis von vier Punkten, die auf einer Geraden liegen, ist eine Invariante gegenüber Zentralprojektionen.*

Wir wollen für das Folgende vereinbaren, daß wir beim Abbildungsverfahren durch Zentralprojektion grundsätzlich zulassen, daß das durch eine unmittelbare Zentralprojektion auf die Ebene α gewonnene Bild noch einer beliebigen affinen Transformation[2]) (in der Ebene α) unterworfen werden kann.

[1]) Vgl. § 7 des Artikels „Geometrische Transformationen", S. 107–108.

[2]) Die Verzerrung, die ein Original erleidet, wenn man es durch sein Bild ersetzt, wäre prinzipiell dieselbe, wenn wir die erhaltene Projektion nicht einer affinen, sondern einer beliebigen projektiven Transformation unterwerfen würden, weil die Zentralprojektion selbst eine projektive Transformation ist. Wir können uns (um die Darstellung elementarer zu halten) insbesondere deshalb auf affine Transformationen beschränken, weil dieser Unterschied unwesentlich ist.

Das bedeutet, daß *das Bild eines Punktes bei einem solchen Verfahren nicht die unmittelbare Zentralprojektion dieses Punktes zu sein braucht.*

Wir stellen jetzt ohne Beweise Eigenschaften der Bilder nach dem Verfahren der Zentralprojektion und dem der Parallelprojektion gegenüber:

Bei der Abbildung einer ebenen Figur durch Parallelprojektion kann man in beliebiger Weise ein beliebiges Dreieck abbilden, bei Zentralprojektion dagegen ein *beliebiges vollständiges Viereck*[1]) (d. h. vier Punkte der Originalebene in allgemeiner Lage).

Ist irgendein vollständiges Viereck, das zu einer ebenen Figur gehört, bereits abgebildet, so sind die Bilder aller übrigen Punkte dieser Figur eindeutig festgelegt. (Bei der Parallelprojektion spielte dieselbe Rolle ein Dreieck.)

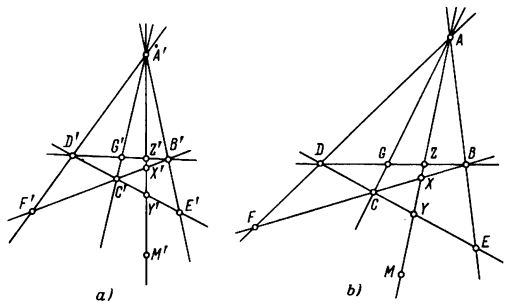


Abb. 55

Zum Beweis dieser Behauptung sei $A'B'C'D'$ das vollständige Viereck im Original (Abb. 55a) und $ABCD$ dessen Bild (Abb. 55b); E', F', G' seien die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $A'B'C'D'$ und E, F, G die entsprechenden Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $ABCD$. Es sei ferner M' ein beliebiger anderer Punkt des Originals. Die Gerade $A'M'$ schneidet dann die Geraden $B'C'$, $C'D'$ und $B'D'$ in bestimmten Punkten X', Y' bzw. Z'. Die Bilder dieser Punkte sind nun durch Doppelverhältnisse, welche im Original und im Bild die gleichen sein müssen, vollständig festgelegt. So ist z. B.

[1]) Wir sprechen hier von einem vollständigen Viereck und nicht von einem Viereck im üblichen Sinne des Wortes (welches vier „Seiten" und zwei „Diagonalen" hat), weil bei einer Zentralprojektion der Unterschied zwischen „Seiten" und „Diagonalen" seinen Sinn verliert. Ein vollständiges Viereck $A'B'C'D'$ hat drei Paare einander gegenüberliegender Seiten: $\overline{A'B'}$ und $\overline{C'D'}$, $\overline{A'C'}$ und $\overline{B'D'}$, $\overline{A'D'}$ und $\overline{B'C'}$ (insgesamt also *sechs* Seiten); jedes Paar einander gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks besitzt (in der projektiven Ebene!) einen Schnittpunkt, der als ein *Diagonalpunkt* bezeichnet wird. Insgesamt existieren also bei einem vollständigen Viereck *drei* Diagonalpunkte.

$(BCFX) = (B'C'F'X')$,[1]) und diese Beziehung gestattet es, den Punkt X zu finden. Analog kann man die Punkte Y und Z erhalten. Übrigens lassen sich die Punkte Y und Z auch als Schnittpunkte der Geraden AX mit den Geraden DE und BD gewinnen. Die Lage des Punktes M auf der Geraden AX läßt sich aus der Beziehung

$$(AXYM) = (A'X'Y'M')$$

bestimmen. (Anstelle des Punktepaares X, Y kann man natürlich auch die Paare Y, Z oder Z, X verwenden.)

5.2. Projektive Koordinaten. Es ist zweckmäßig, das vollständige Viereck noch von einem anderen Gesichtspunkt aus zu betrachten. In Abb. 56 ist das vollständige Viereck OE_1EE_2 durch zwei Diagonalpunkte F_1 und F_2 ergänzt. Offenbar ist die Angabe des Punktes E (in allgemeiner Lage) gleichwertig der Angabe der beiden Punkte F_1 und F_2 auf den Geraden OE_1 und OE_2. Zwei Achsen OX und OY und je zwei (von O verschiedene) Punkte auf jeder von ihnen bilden ein sogenanntes *projektives Koordinatensystem*. In Abb. 57 sind ein affines und ein projektives Koordinatensystem einander gegenübergestellt. In Abb. 57a sind die Achsen OX und OY und auf jeder der Achsen ein Einheitspunkt E_1 bzw. E_2 gezeichnet. Ist M ein beliebiger Punkt der Ebene, so muß man zur Bestimmung seiner affinen Koordinaten durch M die Geraden

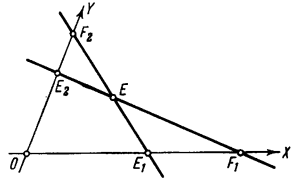


Abb. 56

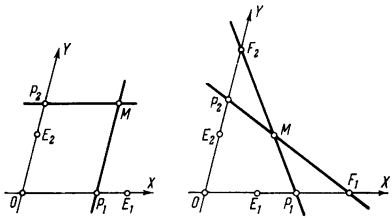


Abb. 57

[1]) Das Symbol $(ABCD)$ bezeichnet das *orientierte Doppelverhältnis*

$$(ABCD) = \frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(AD)}{(DB)}$$

(vgl. S. 460).

ziehen, die parallel zu den Achsen OX und OY sind (d. h. die Geraden, die den Punkt M mit den uneigentlichen Punkten dieser Achsen verbinden). Diese Geraden bestimmen auf den Achsen OX und OY die Punkte P_1 und P_2. Die Verhältnisse

$$x = \frac{(OP_1)}{(OE_1)}, \quad y = \frac{(OP_2)}{(OE_2)}$$

sind dann die *affinen Koordinaten des Punktes* M.

In Abb. 57b sind die Achsen OX und OY und auf jeder Achse je zwei Punkte (verschieden von O) gezeichnet. Ist M ein beliebiger Punkt der Ebene, so muß man zur Bestimmung seiner projektiven Koordinaten durch ihn die Geraden MF_1 und MF_2 legen. Hieraus wird bereits klar, daß die Punkte F_1 und F_2 die gleiche Rolle spielen, die im affinen Koordinatensystem die uneigentlichen Punkte der Achsen spielen. Diese Geraden bestimmen auf den Achsen OX und OY die Punkte P_1 und P_2. Die Doppelverhältnisse

$$x = (OF_1P_1E_1) = \frac{(OP_1)}{(P_1F_1)} : \frac{(OE_1)}{(E_1F_1)},$$

$$y = (OF_2P_2E_2) = \frac{(OP_2)}{(P_2F_2)} : \frac{(OE_2)}{(E_2F_2)}$$

sind dann die *projektiven Koordinaten*[1]) *des Punktes* M. (Hierbei können die Koordinaten x und y auch den „Wert" ∞ annehmen.) Aus diesen Formeln ist ersichtlich, daß z. B. die Punkte O, E_1, F_1 die x-Koordinaten 0, 1, ∞ und die y-Koordinate 0 haben.

Der Punkt E (Abb. 56) hat die Koordinaten $x = 1, y = 1$; er heißt *Einheitspunkt* des betrachteten projektiven Koordinatensystems.

Rücken die Punkte F_1 und F_2 auf den Achsen OX bzw. OY ins Unendliche, so gehen die projektiven Koordinaten in affine Koordinaten über.

5.3. Die Verwendung projektiver Koordinaten bei der Konstruktion von Bildern. Bei der Abbildung ebener Figuren kann man ein vollständiges Viereck $A'B'C'D'$ als Basis wählen, d. h., man kann festsetzen, daß

der Punkt A' Koordinatenursprung,
der Punkt B' Einheitspunkt der Achse X',
der Punkt C' Einheitspunkt der Achse Y',
der Punkt D' Einheitspunkt des Koordinatensystems $X'Y'$
sein soll.

[1]) Es handelt sich hierbei um sogenannte *inhomogene* projektive Koordinaten. Sie besitzen den wesentlichen Nachteil, daß die Punkte der „unendlich fernen" (uneigentlichen) Geraden, die nicht auf den Achsen OX, OY liegen, die Koordinaten $x = \infty$, $y = \infty$ haben und deshalb nicht durch ihre Koordinaten voneinander unterschieden werden können. Zur Beseitigung dieses Mangels benutzt man meistens *homogene* projektive Koordinaten (vgl. S. 112).

Analog wählen wir das vollständige Viereck $ABCD$ als Basisviereck in der Bildebene. *Dann wird jeder Punkt M' des Originals auf denjenigen Punkt M der Bildebene abgebildet, der bezüglich des vollständigen Vierecks $ABCD$ die gleichen projektiven Koordinaten hat wie der Punkt M' bezüglich des vollständigen Vierecks $A'B'C'D'$.*

Ebenso wie bei der Parallelprojektion wäre es natürlich sehr umständlich, die Koordinaten jedes Punktes einzeln zu konstruieren. Viel bequemer ist es, in der Ebene des Originals ein kartesisches rechtwinkliges Netz zu konstruieren und in der Bildebene das Bild dieses Netzes. In Abb. 58a ist ein kartesisches

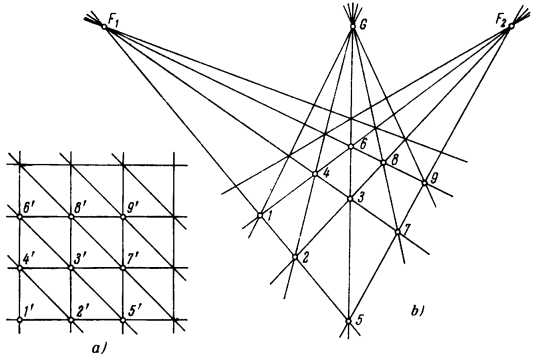


Abb. 58

rechtwinkliges Netz, d. h. ein Netz aus gleichen Quadraten, gezeichnet. Dieses Netz besteht aus zwei Scharen von jeweils einander parallelen Geraden, d. h. von Geraden, die durch den gleichen uneigentlichen Punkt gehen; folglich gehen auch die Bilder dieser Geraden jeweils durch ein und denselben Punkt (der im allgemeinen ein eigentlicher Punkt sein wird). Konstruieren wir die Bilder der uneigentlichen Punkte beider Scharen, so ist die Gerade, die diese Bilder verbindet, das Bild der uneigentlichen Geraden der Ebene des Originals. (Das Bild der uneigentlichen Geraden bezeichnet man auch als *Fluchtlinie*.)

Es sei nun $1'2'3'4'$ eines der Quadrate des kartesischen rechtwinkligen Netzes. Von diesen ausgehend kann man das Netz in affiner Weise konstruieren, d. h. ohne Strecken abzumessen nur durch Ziehen von Parallellen. Zum Beispiel kann man die Konstruktion in folgenden Schritten ausführen:

1. Wir ziehen die Gerade $2'4'$.

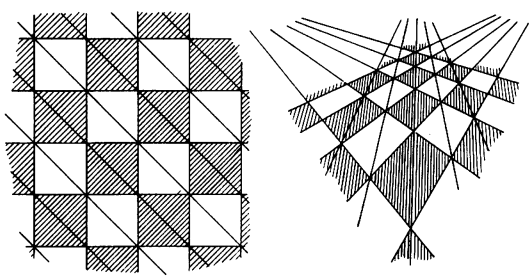
2. Durch den Punkt $3'$ ziehen wir die zu $2'4'$ parallele Gerade. Sie schneidet die Geraden $1'2'$ und $1'4'$ in den Punkten $5'$ bzw. $6'$; das sind zwei neue Knoten des Netzes.

3. Durch $5'$ und $6'$ ziehen wir die Geraden, die parallel zu den Geraden $1'4'$ bzw. $1'2'$ sind. Wir erhalten dadurch drei neue Knotenpunkte: $7'$, $8'$ und $9'$, usw.

Damit ist klar, wie das Bild des Netzes zu konstruieren ist: Das erste Quadrat kann man auf ein beliebiges Viereck abbilden; es sei dies das Viereck 1234 (Abb. 58b). Die Punkte[1]) $F_1 = 12 \times 34$ und $F_2 = 14 \times 23$ sind dann die Fluchtpunkte der Netzgeraden; die Gerade F_1F_2 ist die Fluchtlinie. Geraden, die sich auf der Fluchtlinie schneiden, sind Bilder paralleler Geraden.

Der Punkt $G = F_1F_2 \times 24$ ist der Fluchtpunkt der zu $2'4'$ parallelen Diagonalen des Netzes. Durch den Punkt 3 ziehen wir die Gerade $3G$ und finden die Punkte 5 und 6. Die weitere Konstruktion bedarf keiner Erläuterungen mehr.

Um die Entstehung des in Abb. 58b gezeichneten Bildes bei einer Zentralprojektion klar zu verstehen, stellen wir uns die beiden Geraden vor, die durch



a) b)

Abb. 59

den Punkt S gehen und parallel zu den Geraden des kartesischen Koordinatennetzes sind. Sie schneiden die Bildebene α in den Punkten F_1 und F_2. Die Fluchtlinie F_1F_2 ist die Schnittgerade der durch S gehenden Parallelen zur Ebene des Originals mit der Bildebene. In Abb. 59 ist die Darstellung aus Abb. 58 mit einer zusätzlichen Schraffur versehen; sie wirkt dadurch viel anschaulicher.

[1]) Das Symbol 12 bezeichnet die Gerade, die durch die Punkte 1 und 2 geht; 12×34 bezeichnet den Schnittpunkt der Geraden 12 und 34.

5.4. Der Begriff der zentralen Axonometrie. Das Problem der Abbildung räumlicher Figuren durch Zentralprojektion läßt sich grundsätzlich in der gleichen Weise wie bei den Parallelprojektionen lösen: Man bildet zunächst ein Koordinatensystem ab, wobei man sich nur davon überzeugen muß, daß alle abzubildenden Elemente des Originals mit dem Koordinatensystem projektiv verknüpft sind (um nämlich ein vollständiges Bild erhalten zu können). Der Unterschied besteht also lediglich darin, daß das System der Zuordnung hier ein anderes ist.

Ein projektives Koordinatensystem im dreidimensionalen Raum besteht aus drei nicht in einer Ebene liegenden Achsen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, auf deren jeder zwei (von O' verschiedene) Punkte E_1', E_2', E_3' bzw. F_1', F_2', F_3' ausgezeichnet sind. Verbinden wir die Punkte E_1', E_2', E_3' miteinander und ebenso F_1', F_2', F_3', so können wir ein solches Koordinatensystem so charakterisieren: Gegeben sind zwei in verschiedenen Ebenen liegende Dreiecke $E_1'E_2'E_3'$ und $F_1'F_2'F_3'$, wobei die Geraden, die gleichindizierte Ecken dieser Dreiecke verbinden, durch einen Punkt gehen. (Man sagt dafür auch, daß sich die beiden Dreiecke in *perspektivischer Lage* befinden.) Eine solche Figur (Abb. 60) bezeichnet man auch als eine Desarguessche *Konfiguration*. Eine Desarguessche Konfiguration spielt im projektiven Raum die gleiche Rolle, die das Basistetraeder im affinen Raum spielt.

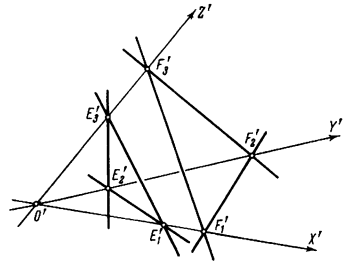


Abb. 60

Von besonderem Interesse sind die Desarguesschen Konfigurationen, bei denen folgendes gilt:

$$\sphericalangle\, X'O'Y' = \sphericalangle\, Y'O'Z' = \sphericalangle\, Z'O'X' = 90°,$$

$$|O'E_1'| = |O'E_2'| = |O'E_3'|;$$

die Punkte F_1, F_2, F_3 sind uneigentlich.

Eine solche Desarguessche Konfiguration wollen wir als *rechtwinklig-gleichschenklig* bezeichnen.

Das Bild einer räumlichen Desarguesschen Konfiguration ist stets eine Desarguessche Konfiguration, deren Achsen OX, OY, OZ in einer Ebene (nämlich der Bildebene) liegen.

Für die Zentralprojektionen gilt nun ein zum Satz von Pohlke und Schwarz für Parallelprojektionen analoger Satz. Wir wollen hier beide Sätze einander gegenüberstellen:

Frage. Kann man durch geeignete Parallelprojektion eines gegebenen Tetraeders ein beliebig vorgegebenes vollständiges Viereck erhalten?

Antwort (Satz von POHLKE und SCHWARZ). Ein vorgegebenes vollständiges Viereck genau zu erhalten ist im allgemeinen nicht möglich; man kann es jedoch stets bis auf eine einparametrige Verzerrung erhalten, d. h. in Form eines vollständigen Vierecks, das dem vorgegebenen Viereck ähnlich ist. Betrachten wir also statt der unmittelbaren Parallelprojektion das in § 2 studierte Abbildungsverfahren durch Parallelprojektion, so kann man jedes vollständige Viereck als Bild eines gegebenen Tetraeders auffassen.

Frage. Kann man durch geeignete Zentralprojektion einer gegebenen räumlichen DESARGUESschen Konfiguration eine beliebig vorgegebene ebene DESARGUESsche Konfiguration erhalten?

Antwort (Analogon des Satzes von POHLKE und SCHWARZ für Zentralprojektion). Eine vorgegebene ebene DESARGUESsche Konfiguration genau zu erhalten ist im allgemeinen nicht möglich; man kann sie jedoch stets bis auf eine zweiparametrige Verzerrung erhalten, genauer: Man kann stets eine ebene DESARGUESsche Konfiguration erhalten, die zur gegebenen unimodular affin[1]) ist. Betrachten wir statt der unmittelbaren Zentralprojektion das Abbildungsverfahren durch Zentralprojektion (s. oben), so kann man jede ebene DESARGUESsche Konfiguration als Bild einer beliebigen räumlichen DESARGUESschen Konfiguration auffassen.[2])

Zur Konstruktion des Bildes einer räumlichen Figur in freier Zentralprojektion muß man im Original zunächst eine räumliche DESARGUESsche Konfiguration ermitteln und kann diese in beliebiger Weise abbilden (d. h. auf eine beliebige ebene DESARGUESsche Konfiguration). Die Konstruktion des Bildes eines beliebigen weiteren Punktes M' ist aus Abb. 61 ersichtlich. Die Gerade $O'M'$ schneide die Ebenen $E_1'E_2'E_3'$ und $F_1'F_2'F_3'$ in den Punkten M_1' bzw. M_2'. Das Bild eines dieser Punkte (etwa M_1) muß vorgegeben werden, das Bild des anderen Punktes läßt sich dann konstruieren. (Später wird erläutert, warum das so ist.) Zur Rekonstruktion des Originals aus Abb. 61 müssen wir aus der Zeichnung die Lage der Punkte M_1' und M_2' ermitteln. Hätten wir nur das Dreieck $E_1'E_2'E_3'$ zur Verfügung, so könnte die Lage des Punktes M_1' in der Ebene dieses Dreiecks nicht projektiv fixiert werden, weil das Dreieck noch kein Koordinatensystem in der projektiven Ebene festlegt. Im betrachteten Fall können wir jedoch die Schnittgerade d' der Ebene $E_1'E_2'E_3'$ und $F_1'F_2'F_3'$ (man bezeichnet sie als DESARGUESsche Gerade) zur Hilfe nehmen. Da sie beiden Ebenen angehört, haben wir in jeder der beiden Ebenen vier Geraden, nämlich die Seiten des Dreiecks $E_1'E_2'E_3'$ (oder $F_1'F_2'F_3'$) und die DESARGUESsche Gerade d'. Diese vier Geraden bilden jeweils ein Koordinatensystem, in dem man die Lage des Punktes M_1' bzw. M_2' projektiv fixieren kann. Das Bild der DESARGUESschen Geraden d' ist die DESARGUESsche Gerade der ebenen Kon-

[1]) Eine *unimodular-affine* (oder *äquiaffine*) Transformation ist eine affine Transformation, die den Flächeninhalt aller Figuren unverändert läßt.

[2]) Vgl. den Artikel von N. M. BESKIN, der in der Fußnote auf S. 253 erwähnt ist.

figuration, d. h. die Gerade d durch die Punkte

$$D_1 = E_2E_3 \times F_2F_3,$$
$$D_2 = E_3E_1 \times F_3F_1,$$
$$D_3 = E_1E_2 \times F_1F_2.$$

(Nach dem bekannten Satz von DESARGUES[1]) liegen diese drei Punkte tatsächlich auf einer Geraden.) Der Punkt M_1 hat nun in bezug auf die vier Geraden (die Seiten des Dreiecks $E_1E_2E_3$ und die DESARGUESsche Gerade d) dieselbe projektive Lage wie der Punkt M_1' bezüglich der entsprechenden vier Geraden (die Seiten des Dreiecks $E_1'E_2'E_3'$ und die DESARGUESsche Gerade d').

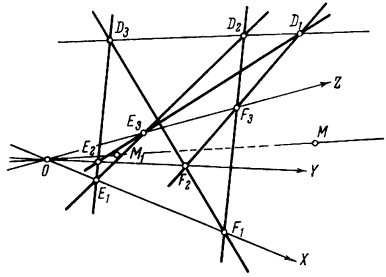


Abb. 61

Damit wird auch klar, warum durch Vorgabe des Punktes M_1 in Abb. 61 der Punkt M_2 eindeutig festgelegt ist. In dem betrachteten projektiven Koordinatensystem in der Ebene $E_1'E_2'E_3'$ hat der Punkt M_1' eine ganz bestimmte Lage. Der Punkt M_2' muß nun bezüglich des entsprechenden Koordinatensystems in der Ebene $F_1'F_2'F_3'$ die gleiche Lage einnehmen, da die beiden Systeme zueinander perspektivisch sind (mit dem Perspektivzentrum O'). Hieraus folgt jedoch, daß auch M_2 bezüglich F_1, F_2, F_3, d dieselbe projektive Lage haben muß wie M_1 bezüglich E_1, E_2, E_3, d. Daher kann man den Punkt M_2 konstruieren, sobald der Punkt M_1 gegeben ist. Auf eine Beschreibung dieser Konstruktion wollen wir hier verzichten.

Eine Gerade im Raum ist bestimmt durch ihre Projektion und die Angabe von zwei auf ihr liegenden Punkten, z. B. ihren beiden Spurpunkten auf den Ebenen der DESARGUESschen Basiskonfiguration. Eine Ebene im Raum ist bestimmt durch ihre Spurgeraden auf den beiden Ebenen der Basiskonfiguration oder auf zwei anderen bereits festgelegten Ebenen. Natürlich kann man

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", S. 124–126.

jedes Element auch projektiv durch Punkte, Geraden oder Ebenen festlegen, die mit ihm inzidieren, also z. B. eine Ebene durch drei ihrer Punkte.

Eine Zeichnung, die unter Beachtung der erwähnten Regeln ausgeführt wurde, bestimmt das Original nur bis auf projektive Transformationen. Bei der Deutung einer Zeichnung kann man nämlich eine in ihr vorhandene ebene DESARGUESsche Konfiguration als Bild einer willkürlich wählbaren räumlichen DESARGUESschen Konfiguration ansehen. Der Übergang von einer räumlichen DESARGUESschen Konfiguration zu einer anderen ist aber gerade einer projektiven Transformation des Raumes gleichbedeutend.

Versehen wir eine Zeichnung mit Angaben, die die vollständige *Rekonstruktion* der Basiskonfiguration erlauben, so erhalten wir ein bedingtes Bild, das das Original metrisch genau festlegt. Ein spezielles derartiges Verfahren ist die *zentrale Axonometrie*. Die zentrale Axonometrie besteht ebenso wie die schiefe Axonometrie darin, daß das Original zusammen mit einem Koordinatensystem abgebildet wird. Der Unterschied zwischen der zentralen und der schiefen Axonometrie besteht in zwei Punkten:

1. Das Koordinatensystem ist nicht affin, sondern projektiv.
2. In der Zeichnung muß die projektive (und nicht die affine) Verknüpftheit aller Elemente mit der Basis gewährleistet sein.

Abbildung 62 gibt ein einfaches Beispiel für eine Darstellung nach dem Verfahren der zentralen Axonometrie. Wenn hier die metrischen Parameter des natürlichen Koordinatensystems bekannt sind (also z. B. bekannt ist, daß dieses System rechtwinklig-gleichschenklig ist, d. h.

$$\sphericalangle\, X'O'Y' = \sphericalangle\, Y'O'Z' = \sphericalangle\, Z'O'X' = 90°,$$

$$|O'E_1'| = |O'E_2'| = |O'E_3'|$$

gilt und die Punkte F_1', F_2', F_3' uneigentlich sind) und ferner bekannt ist, daß M_1' und M_2' die Spurpunkte der gezeichneten Geraden auf den Ebenen $Y'O'Z'$ bzw. $Z'O'X'$ sind, so kann man zunächst den dritten Spurpunkt M_3' konstruieren, und dann ist die Lage des Punktes M' auf der Geraden projektiv durch das Doppelverhältnis $(M_1'M_2'M_3'M')$ fixiert; dieses Verhältnis ist nämlich im Original das gleiche wie im Bild.

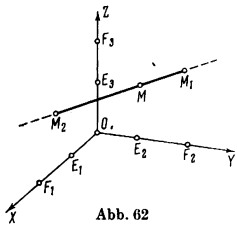


Abb. 62

Die Theorie der freien Bilder spielt z. B. in der Luftbildfotogrammetrie eine wichtige Rolle. Bei einem von einem Flugzeug aufgenommenen Luftbild kennt man gewöhnlich die Parameter des Projektionsmechanismus nicht. Wäre im Moment der Aufnahme die Ebene des Films parallel zur Ebene der Erdoberfläche, so erhielten wir ein dem Original ähnliches Bild. Wir betrachten jetzt den Fall, daß die Ebene des Films gegen die Horizontalebene geneigt ist, wobei der Neigungswinkel und die anderen Parameter des Projektionsmechanismus unbekannt sind. Wie läßt sich dann das Luftbild auswerten (d. h., wie lassen sich aus diesem verzerrten Bild metrisch genau die wirklichen Gelände-

verhältnisse rekonstruieren)? Der einfachste Fall liegt vor, wenn es im Gelände vier Punkte in allgemeiner Lage gibt, deren Lage uns bereits genau bekannt ist. Dann können wir nämlich dieses vollständige Viereck als Basis benutzen, und das Luftbild wird zu einem axonometrischen Bild, durch das sich das Original metrisch genau festlegen läßt.

Die zentrale Axonometrie wird z. B. vom Architekten benutzt, wenn er bei der Projektierung von Gebäuden eine Gesamtansicht der Gebäude zeichnen will. Das erklärt sich daraus, daß man ein Gebäude meistens aus einer Entfernung betrachtet, die klein ist im Verhältnis zu den Abmessungen des Gebäudes selbst. Deshalb würde ein Bild in schiefer Axonometrie unwirklich erscheinen, weil die Parallelprojektion die Ansicht aus einer sehr großen (theoretisch unendlichen) Entfernung vermittelt.

§ 6. Die Konstruktion von Zeichnungen

6.1. Die Konstruktion von Projektionszeichnungen. Die Konstruktion einer Zeichnung unterscheidet sich von einer gedachten Konstruktion[1]) dadurch, daß sie *wirklich* ausgeführt wird. Die Aufgabe, irgend etwas zu konstruieren, besteht also darin, es in einer Zeichnung darzustellen.

Da wir uns im vorliegenden Artikel nur mit projektiven Abbildungsverfahren beschäftigt haben, wollen wir auch in diesem Paragraphen nur die Konstruktion von Projektionszeichnungen[2]) betrachten.

6.2. Beispiele. Wir betrachten zwei Beispiele der Konstruktion von Projektionszeichnungen. Der Einfachheit halber wollen wir uns auf Zeichnungen beschränken, die mit Hilfe des Abbildungsverfahrens der Parallelprojektion (und nicht der Zentralprojektion) konstruiert sind.

Aufgabe 1. *Man konstruiere den Schnitt eines Parallelepipeds mit einer Ebene $L'M'N'$* (Abb. 63), wobei die Punkte L' und M' auf der oberen bzw. hinteren Begrenzungsfläche und der Punkt N' auf der vorderen rechten Kante liegen.

Lösung. Zunächst zeichnen wir unter Beachtung der früher genannten Bedingungen das Bild des Parallelepipeds und markieren im Bild die Punkte L, M, N.

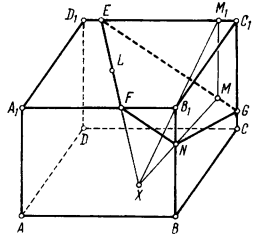


Abb. 63

[1]) Vgl. hierzu auch den Artikel „Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen", S. 197–199.

[2]) Vgl. etwa das Buch [5] von N. F. Tschetweruchin.

Wir ziehen sodann durch M die Parallele zu AA_1 und bezeichnen deren Schnittpunkt mit der Strecke $\overline{C_1D_1}$ mit M_1. Die Punkte B_1 und M_1 können wir dann auch als Bilder der den Punkten N' und M' bei Projektion auf die obere Begrenzungsfläche entsprechenden Punkte auffassen (als Projektionsrichtung die Richtung der Kante $A'A_1'$ genommen). Folglich ist M_1B_1 das Bild der Projektion der Geraden $M'N'$ auf die obere Begrenzungsfläche. Der Schnittpunkt X der Geraden MN und M_1B_1 ist dann das Bild der Spur der Geraden $M'N'$ auf der oberen Begrenzungsfläche. Die Spur der gesuchten Schnittebene der oberen Begrenzungsfläche geht folglich durch X' und L', d. h., die Gerade XL ist das Bild dieser Spur. Wir markieren auf der Geraden XL die Strecke $\overline{EF}$ zwischen den Seitenlinien des Parallelogramms $A_1B_1C_1D_1$. Die Strecke $\overline{FN}$ ist dann offenbar das Bild der Spur der Schnittebene auf der vorderen Begrenzungsfläche. Das Bild der Spur der Schnittebene auf der hinteren Begrenzungsfläche liegt schließlich auf der Geraden EM. Bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser Geraden und der Geraden CC_1 mit G, so finden wir schließlich auch die Spur $\overline{GN}$ der Schnittebene auf der rechten Begrenzungsfläche.

Aufgabe 2. *Der Punkt L' liege in der Basisebene einer regelmäßigen viereckigen Pyramide mit der Grundfläche $A'B'C'D'$ und der Spitze S', deren Höhe gleich der Länge der Basisseiten ist* (Abb. 64). *Man fälle vom Punkt L' aus das Lot auf die Seitenfläche $S'B'C'$, bestimme dessen Fußpunkt M' und ermittle die Länge $|L'M'|$, wenn $|A'B'| = a$ ist.*

Lösung. Wir wählen in der Basisebene anstelle des Punktes L' zunächst irgendeinen anderen Punkt, von dem aus das Fällen des Lotes auf die Begrenzungsfläche $S'B'C'$ keine Schwierigkeiten bereitet. Ein solcher Punkt ist z. B.

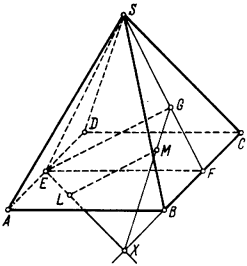


Abb. 64

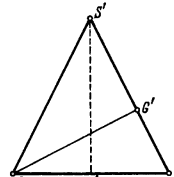


Abb. 65

der Mittelpunkt E' der Seite $\overline{A'D'}$. Der Fußpunkt des Lotes von E' auf die Fläche $S'B'C'$ liegt nämlich auf der Höhe $\overline{S'F'}$ dieser Begrenzungsfläche. In Abb. 65 ist der Schnitt $S'E'F'$ durch die Pyramide in wahrer Gestalt ($|E'F'| = |S'Q'| = a$) gezeichnet und die Höhe $\overline{E'G'}$ gezogen. Damit kann man die

genaue Lage des Punktes G in Abb. 64 aus der Bedingung

$$\frac{|F'S'|}{|F'G'|} = \frac{|FS|}{|FG|}$$

ermitteln, wobei man die Strecken $\overline{F'S'}$ und $\overline{F'G'}$ der Abb. 65 und die Strecke $\overline{FS}$ der Abb. 64 entnimmt.

Ziehen wir nun die Gerade EG, so haben wir damit die Richtung des gesuchten Lotes, da alle Lote auf die Begrenzungsfläche $S'B'C'$ in Abb. 64 durch zu EG parallele Geraden abgebildet werden.

Wir stellen uns jetzt die Ebene α vor, die durch beide (von E' und L' aus gefällten) Lote hindurchgeht. Ihre Spur mit der Basisebene wird durch die Gerade EL abgebildet. Die Spuren der Ebene α mit den Begrenzungsflächen $A'B'C'D'$ und $S'B'C'$ müssen sich ferner auf der Geraden $B'C'$ schneiden. Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion: Wir bestimmen den Schnittpunkt X von EL und BC und zeichnen die Gerade XG. Von L aus ziehen wir die zu EG parallele Gerade bis zum Schnitt mit der Geraden GX. Dann ist M das Bild des Fußpunktes des Lotes von L' auf $S'B'C'$ und die Strecke $\overline{LM}$ das Bild des von L' auf die Begrenzungsfläche $S'B'C'$ gefällten Lotes. Die Bestimmung der wahren Länge der Strecke $\overline{L'M'}$ bereitet keine Schwierigkeiten, da die wahre Länge der Strecke $\overline{E'G'}$ bekannt ist (Abb. 65). Sie ergibt sich aus der Proportion

$$\frac{|L'M'|}{|E'G'|} = \frac{|LM|}{|EG|},$$

wobei die Strecke $\overline{E'G'}$ der Abb. 65 und die Strecken $\overline{LM}$ und $\overline{EG}$ der Abb. 64 zu entnehmen sind.

Literatur

[1] Глаголев, Н. А., Начертательная геометрия (GLAGOLEW, N. A., Darstellende Geometrie), Moskau 1953.

[2] Глазунов, Е. А., и Н. Ф. Четверухин, Аксонометрия (GLASUNOW, E. A., und N. F. TSCHETWERUCHIN, Axonometrie), Moskau 1953.

[3] MONGE, G., Darstellende Geometrie, Leipzig 1900 (Übersetzung aus dem Französischen). Russische Übersetzung: Монж, Г., Начертательная геометрия, Moskau-Leningrad 1947.

[4] Четверухин, Н. Ф., Изображения пространственных фигур в курсе геометрии (TSCHETWERUCHIN, N. F., Abbildungen räumlicher Figuren im Geometriekurs), Moskau 1958.

[5] Четверухин, Н. Ф., Стереометрические задачи на проекционном чертеже (TSCHETWERUCHIN, N. F., Stereometrische Aufgaben bei Projektionszeichnungen), Moskau 1955.

[6] Лоповок, Л. М., Сборник стереометрических задач на построение (LOPOWOK, L. M., Sammlung von stereometrischen Konstruktionsaufgaben), Moskau 1953.

[7] Польский, И. Г., Сборник задач на построение на проекционном чертеже (POLSKI, I. G., Sammlung von Konstruktionsaufgaben für Projektionszeichnungen), Moskau 1958.

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

FUCKE, R., u. a., Darstellende Geometrie, 8. Aufl., Leipzig 1975.

KRAMER, W., Darstellende Geometrie I, Berlin 1959.

Mathematik für die Praxis I, 3. Aufl., Berlin 1966.

PÁL, I., Darstellende Geometrie in Raumbildern, Berlin 1961.

SCHRÖDER, E., Darstellende Geometrie, 4. Aufl., Berlin 1980.

W. G. BOLTJANSKI UND I. M. JAGLOM

VEKTOREN UND IHRE ANWENDUNGEN IN DER GEOMETRIE

§ 1. Definition des Vektors

1.1. Die Parallelverschiebung. Wir knüpfen an den Begriff der Parallelverschiebung an, einer geometrischen Transformation, die in enger Beziehung zum Begriff des Vektors steht.[1])

Unter einer *Parallelverschiebung der Ebene* (oder *des Raumes*) versteht man eine Transformation (Abbildung), die jeden Punkt A der Ebene (bzw. des Raumes) in einen durch ihn eindeutig bestimmten Punkt A' überführt, so daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Strecke $\overline{AA'}$ ist einer gegebenen Geraden l parallel.
2. Die Länge der Strecke $\overline{AA'}$ hat einen gegebenen Betrag a.
3. Die Richtung vom Punkt A zum Punkt A' stimmt mit einer auf der Geraden l vorgegebenen Richtung überein. (Es sei dazu bemerkt, daß man auf jeder Geraden zwei einander entgegengesetzte Richtungen auszeichnen kann.)

Die Abb. 1 erläutert das Wesen der durch die Bedingungen 1 bis 3 beschriebenen Transformation.

Wir wollen zunächst diese Definition der Parallelverschiebung mit den Definitionen geometrischer Transformationen vergleichen, die seit langem in

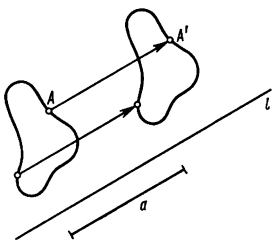


Abb. 1

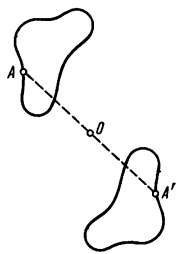


Abb. 2

der Schule untersucht werden und Lehrern wie Schülern wohlbekannt sind, nämlich den verschiedenen Arten von Spiegelungen. Die Spiegelung an einem Punkt (*Zentralsymmetrie*) wird durch die Angabe eines einzigen Punktes, des Symmetriezentrums O festgelegt; bei ihr geht ein gegebener Punkt A in den-

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", insbesondere S. 48.

jenigen Punkt A' über, für den die Strecke $\overline{AA'}$ durch den Punkt O halbiert wird (Abb. 2). Die Spiegelung an einer Geraden (*Axialsymmetrie*) (Abb. 3) wird durch die Angabe einer Geraden, der Symmetrieachse, festgelegt; die *Spiegelung an einer Ebene* (im Raum, Abb. 4) wird ebenfalls durch die Angabe eines einzigen geometrischen Objektes, der Symmetrieebene, festgelegt. Die Parallelverschiebung ist dagegen schwieriger zu definieren als die Spiegelungen: Eine Paralellverschiebung wird festgelegt durch die Angabe einer Geraden, einer Richtung auf derselben und einer Länge a. Die geometrische Vorstellung

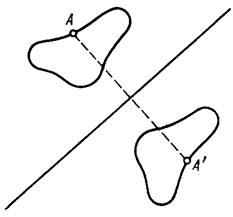


Abb. 3

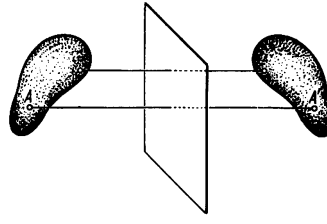


Abb. 4

der Parallelverschiebung ist also „komplizierter" als die der Spiegelungen verschiedener Art. Diese „Kompliziertheit" ist allerdings größtenteils subjektiv bedingt. Sie erklärt sich daraus, daß uns die geometrische Vorstellung der Parallelverschiebung (übrigens könnte man, wie wir gleich sehen werden, den Vektor direkt als Parallelverschiebung auffassen) ungewohnt ist und uns deshalb komplizierter erscheint.

1.2. Der Vektor. Was ist nun ein Vektor? Eigenartigerweise bereitet die Antwort auf diese Frage gewisse Schwierigkeiten. Es gibt nämlich ganz verschiedene Möglichkeiten einer Definition des Vektorbegriffs, und selbst wenn man sich auf den elementargeometrischen Zugang zum Vektorbegriff beschränkt, der für unsere Zwecke am interessantesten ist, gibt es auch dann noch verschiedene Auffassungen dieses Begriffs. Selbstverständlich ist der Vektor, welche Definition man auch zugrunde legen mag, vom elementargeometrischen Standpunkt aus ein geometrisches Objekt, das durch eine Richtung (d. h. durch eine bis auf Parallelität gegebene Gerade und eine ausgezeichnete Richtung auf ihr) und eine Länge charakterisiert wird. Nur ist eine solche Definition ziemlich allgemein und erzeugt keine konkreten geometrischen Vorstellungen. Nach dieser allgemeinen Definition kann man direkt die Parallelverschiebungen als Vektoren auffassen, denn die Bedingungen 1 bis 3 (s. oben) besagen ja gerade, daß jede Parallelverschiebung durch eine Richtung und eine Länge charakterisiert ist. Man könnte in der Tat definieren: „Ein Vektor ist eine Parallelverschiebung." Diese Definition ist logisch einwandfrei, und

auf sie aufbauend kann man die gesamte Vektoralgebra entwickeln und deren Anwendungen darlegen. Aber obwohl diese Definition des Vektors völlig korrekt ist, bleibt sie für den Anfänger unbefriedigend, da die Auffassung des Vektors als geometrische Transformation wenig anschaulich ist und den physikalischen Vorstellungen von vektoriellen Größen nicht gerecht wird.

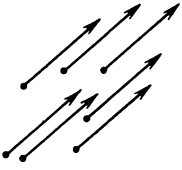


Abb. 5

Wir definieren hier den Vektor folgendermaßen: Unter einem *Vektor* verstehen wir eine Schar aus sämtlichen untereinander parallelen, gleichgerichteten und gleichlangen Strecken (Abb. 5). Damit ist ein Vektor eine unendliche Menge von gerichteten Strecken: Von jedem Punkt der Ebene (bzw. des Raumes) geht genau eine solche Strecke aus, wobei alle diese Strecken untereinander parallel und gleichgerichtet sind und die gleiche Länge besitzen. In Abbildungen wird ein Vektor als eine Strecke mit Pfeilspitze gezeichnet (d. h., man zeichnet nicht die ganze Schar von gerichteten Strecken, die den Vektor darstellen, sondern nur eine dieser Strekken, einen „Repräsentanten"). Zur Bezeichnung von Vektoren verwenden wir, wie vielfach in der Literatur üblich ist, fettgedruckte lateinische Buchstaben $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, usw.[1]) Die *Länge* eines Vektors werden wir mitunter mit dem gleichen Buchstaben wie den Vektor bezeichnen, jedoch ohne Fettdruck. Meistens schreibt man jedoch die Länge wie den Betrag (den Absolutwert) einer Zahl mit senkrechten Strichen, bezeichnet also die Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit $|\boldsymbol{a}|$. Im Zusammenhang mit der Darstellung von Vektoren durch Strecken (Abb. 6) ist zu beachten, daß die Endpunkte der Strecke, die einen Vektor darstellt, nicht gleichberechtigt sind: Der Pfeil (der die Richtung des Vektors angibt) zeigt von einem der Endpunkte der Strecke zum anderen. Man unterscheidet daher genauer zwischen dem *Anfangs-* und dem *Endpunkt* des Vektors (genauer: der „gerichteten" Strecke, die den Vektor darstellt).

Abb. 6

[1]) In der älteren Literatur, insbesondere der deutschsprachigen, ist die Verwendung von kleinen Frakturbuchstaben (deutschen Buchstaben) üblich. Diesem Brauch sind wir in der Übersetzung des zweiten Bandes der EdEM gefolgt. Da man jedoch von ihm immer mehr abkommt, folgen wir hier dem Original. Die Verwendung fetter Buchstaben zur Bezeichnung von Vektoren hat allerdings den großen Nachteil, daß man Schwierigkeiten bei der handschriftlichen Aufzeichnung bekommt. Die Autoren dieses Artikels empfehlen im Original bei handschriftlicher Wiedergabe die Verwendung der entsprechenden überstrichenen lateinischen Buchstaben (sehr verbreitet ist die Verwendung eines Buchstabens mit einem darüber gesetzten Pfeil). Wir würden eher die Verwendung unterstrichener Buchstaben empfehlen. Allerdings muß man auch dies als eine „Notlösung" ansehen, da bei dem immer stärkeren Eindringen der Vektoren in die Elementarmathematik und ihre Anwendungen eine solche Komplikation in der Bezeichnungsweise nicht angemessen erscheint. In zahlreichen neueren Büchern über Vektorrechnung und deren Anwendungen bezeichnet man aus diesem Grunde Vektoren mit gewöhnlichen lateinischen Buchstaben und Skalare mit kleinen griechischen Buchstaben. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

1.3. Antragen eines Vektors an einen Punkt. Da ein Vektor eine Schar aus sämtlichen gleichlangen, parallelen und gleichgerichteten Strecken ist, gibt es in dieser Schar zu jedem Punkt A der Ebene (bzw. des Raumes) genau eine Strecke, die im Punkt A beginnt. Das Auffinden dieser Strecke bezeichnet man als Antragen des Vektors $\boldsymbol{a}$ an den gegebenen Punkt A (Abb. 7). Diese Operation läuft offenbar auf die Konstruktion derjenigen Strecke hinaus, die zu einer gegebenen gerichteten Strecke gleichlang, parallel und gleichgerichtet ist und die im Punkt A beginnt. Auf diese Weise kann man jeden Vektor $\boldsymbol{a}$ an jedem gegebenen Punkt A antragen. Ist B der Endpunkt der auf diese Weise konstruierten Strecke (Abb. 7), so schreibt man

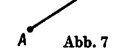


Abb. 7

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Die letzte Gleichung soll besagen, daß man beim Antragen des Vektors $\boldsymbol{a}$ am Punkt A die Strecke $\overrightarrow{AB}$ erhält, die vom Punkt A zum Punkt B gerichtet ist. In diesem Zusammenhang ist es oft üblich, auch Vektoren mit $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OA}$ usw. zu bezeichnen, wobei A, B, O beliebige Punkte sind. Man muß dabei allerdings beachten, daß $\overrightarrow{AB}$ nicht die Streckenschar ist, die den Vektor darstellt, sondern nur eine Strecke dieser Schar. Da aber letztere durch diese Strecke völlig bestimmt wird, sind bei einer solchen Schreibweise Mißverständnisse ausgeschlossen.

Um der mathematischen Strenge voll gerecht zu werden, könnte man vereinbaren, die Bezeichnung $\overrightarrow{AB}$ für die gerichtete Strecke mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B zu verwenden, für den Vektor aber, d. h. für die Schar gerichteter Strecken[1]), die Bezeichnung $\boldsymbol{a}$ beizubehalten. Dann wäre die Schreibweise (1) jedoch nicht korrekt (man kann nicht die ganze unendliche Schar mit einem ihrer Repräsentanten gleichsetzen), und man müßte (1) richtiger

$$\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{a} \tag{2}$$

schreiben, was besagt, daß die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ der Streckenschar (d. h. dem Vektor) $\boldsymbol{a}$ angehört. Da jedoch keine Mißverständnisse auftreten werden, wenn wir die korrekte Schreibweise (2) durch die Schreibweise (1) ersetzen, benutzen wir im weiteren beim Antragen von Vektoren stets die Schreibweise (1).

Nun läßt sich die Parallelverschiebung genau und kurz charakterisieren: Eine *Parallelverschiebung* ist eine Transformation der Ebene (bzw. des Raumes), die einen beliebigen Punkt A in einen solchen Punkt A' überführt, daß $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{a}$ gilt, wobei $\boldsymbol{a}$ ein gegebener Vektor ist. Wir sehen damit, daß ebenso, wie die

[1]) Die gerichtete Strecke nennt man manchmal auch „gebundenen Vektor" (Ortsvektor) im Gegensatz zum „freien Vektor", den wir hier einfach mit dem Wort „Vektor" (Schar gerichteter Strecken) bezeichnen. Im vorliegenden Artikel werden wir jedoch diese Terminologie nicht verwenden.

Spiegelungen verschiedener Art durch ein einziges geometrisches Objekt festgelegt werden, nämlich durch ein Symmetriezentrum, eine Symmetrieachse oder eine Symmetrieebene, auch die Parallelverschiebungen durch ein einziges geometrisches Objekt festgelegt sind, nämlich einen Vektor $\boldsymbol{a}$. Diesen Vektor nennt man den *Vektor der Parallelverschiebung*. Während jedoch die Objekte, die Spiegelungen festlegen (Punkt, Gerade oder Ebene), seit alters her in der Geometrie bekannt sind, ist der die Parallelverschiebungen charakterisierende Vektorbegriff eine Schöpfung der modernen Mathematik, der erst heute in die Elementarmathematik einzudringen beginnt.

1.4. Vektoren und gerichtete Strecken. Meistens geht man bei der Definition des Vektorbegriffs etwas anders vor, indem man sagt: Ein *Vektor* ist eine gerichtete Strecke. Dabei legt man zusätzlich fest, daß Vektoren (d. h. gerichtete Strecken), die die gleiche Länge und dieselbe Richtung haben (Abb. 8), als gleich angesehen werden sollen. Eine solche Definition ist natürlich mathematisch nicht folgerichtig; denn „gleiche Vektoren" bedeutet (nach dem üblichen mathematischen Sprachgebrauch) dasselbe wie „ein und derselbe Vektor" (genau wie „gleiche Zahlen" und „ein und dieselbe Zahl" gleichbedeutend sind), aber die in Abb. 8 dargestellten gerichteten Strecken fallen nicht zusammen (sind nicht „identisch"). Bei einem solchen Vorgehen werden zwei mathematische Begriffe verwechselt, nämlich der Begriff der *Gleichheit* und der Begriff der *Äquivalenz*. Eine Gleichheit mathematischer Objekte liegt dann und nur dann vor, wenn diese Objekte zusammenfallen, d. h., wenn wir ein und dasselbe Objekt zweimal betrachten. Allgemein bezeichnet man eine Beziehung zwischen mathematischen Objekten, die den folgenden drei Bedingungen genügen, als eine *Äquivalenz* (oder als eine *Äquivalenzbeziehung* bzw. *Äquivalenzrelation*[1])):

Abb. 8

I. Jedes Objekt ist sich selbst äquivalent (Reflexivität).

II. Ist ein Objekt einem zweiten äquivalent, so ist das zweite dem ersten äquivalent (Symmetrie).

III. Ist ein Objekt einem zweiten äquivalent und das zweite einem dritten, so ist das erste Objekt dem dritten äquivalent (Transitivität).

Beispielsweise ist die Ähnlichkeit geometrischer Figuren eine Äquivalenzrelation. (Die Bedingungen I bis III sind offensichtlich erfüllt.) Selbstverständlich ist die Gleichheit ein Spezialfall der Äquivalenz; aber nicht jede Äquivalenz ist bereits Gleichheit (wie das Beispiel ähnlicher Figuren zeigt). Wenn wir vereinbaren, daß gleichlange und gleichgerichtete Strecken einander äquivalent sein sollen, so erhalten wir eine Äquivalenzrelation (die Bedingungen I bis III sind erfüllt), die natürlich nicht die Gleichheit ist. Somit muß man die oben angeführte Definition als unkorrekt ansehen: Was man in dieser Definition

[1]) Vgl. hierzu auch EdEM. Band I, S. 136f. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

als „Gleichheit" gerichteter Strecken (Vektoren) ansieht, ist in Wirklichkeit nur eine Äquivalenz.

In der Mathematik gibt es zur Beseitigung derartiger Unkorrektheiten ein Standardverfahren: Alle untereinander äquivalenten Objekte werden zu einer „Äquivalenzklasse" zusammengefaßt, die man als neues Untersuchungsobjekt deklariert. Genauso gehen wir (bewußt oder unbewußt) vor, wenn wir die gemeinen Brüche einführen. Die Verhältnisse $2:3$, $4:6$, $10:15$, $36:54$ usw. haben die Eigenschaft, daß je zwei von ihnen eine „richtige" Proportion ergeben (in dem Sinne, daß in einer solchen Proportion das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder ist); solche Verhältnisse sehen wir als „äquivalent" an, und die auf diese Weise gebildeten Äquivalenzklassen ergeben die rationalen Zahlen. Erst dadurch wird die Gleichheit $2:3=4:6\left(\text{oder}\frac{2}{3}=\frac{4}{6}\right)$ zu einer „echten Gleichheit"; vorher durfte sie, streng genommen, nur als Äquivalenzbeziehung angesehen werden und nicht als Ausdruck dafür, daß auf der linken und der rechten Seite der Beziehung $2:3=4:6$ „ein und dasselbe" steht.

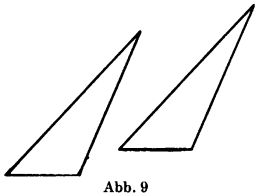


Abb. 9

Analog verhält es sich auch mit der „Gleichheit" von Dreiecken (oder anderer Figuren). Die in Abb. 9 gezeigten Dreiecke sind selbstverständlich nicht gleich, d. h., sie fallen nicht zusammen; es wäre deshalb richtiger, sie als äquivalent statt als gleich anzusehen.[1]) Man pflegt jedoch in der Geometrie deckungsgleiche Dreiecke als ein und dasselbe anzusehen (zu „identifizieren"), d. h., man bezeichnet mit dem Wort „Dreieck" eine ganze Klasse von Dreiecken, nämlich die Klasse aller der Dreiecke, die mit einem beliebigen Dreieck der Klasse durch eine Bewegung zur Deckung gebracht werden können. Erst nach dieser Übereinkunft bekommen solche allgemein anerkannten Behauptungen wie „die Aufgabe, ein Dreieck aus zwei gegebenen Seiten a und b mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ zu konstruieren, besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung" ihren richtigen Sinn.[2]) Ohne die genannte Begriffsbestimmung des Wortes „Dreieck" ist diese Behauptung falsch, und erst die neue Auffassung dieses Wortes (die in der Schule nicht klar herausgearbeitet wird) berechtigt dazu, im Sinne unserer Behauptung von „gleichen Dreiecken" zu sprechen.[3])

Entsprechendes gilt für die gerichteten Strecken: Die in Abb. 8 dargestellten gerichteten Strecken sind als „äquivalent" und nicht als „gleich" anzusehen. Faßt man aber alle äquivalenten gerichteten Strecken zu einer Klasse gerichteter Strecken zusammen,

---

[1]) Mitunter nennt man Dreiecke, die durch eine Bewegung zur Deckung gebracht werden können (wie die in Abb. 9), nicht „gleich", sondern „kongruent", d. h., man führt für die Äquivalenz von Figuren, die die Eigenschaft der „Deckungsgleichheit" ausdrückt, die Bezeichnung *Kongruenz* ein. Diese Terminologie ist logisch einwandfrei, aber in der Schulmathematik noch verhältnismäßig wenig verbreitet.

[2]) Streng genommen bedeutet also die oben ausgesprochene Behauptung über die Aufgabe, ein Dreieck aus den Seiten a und b und dem Winkel γ zu konstruieren: Es existiert eine einzige „Klasse gleicher Dreiecke", so daß alle Dreiecke dieser Klasse die gegebenen Seiten a, b und den gegebenen Winkel γ besitzen (aber natürlich keinesfalls ein einziges Dreieck!).

[3]) Diese Auffassungsweise ist verallgemeinerungsfähig. Vgl. dazu § 6 des Artikels „Geometrische Transformationen", S. 92–102.

so ist eine solche Äquivalenzklasse gerade eine Schar von parallelen und gleichgerichteten Strecken gleicher Länge. Im Ergebnis kommen wir zu der von uns angenommenen Definition des Vektors als Schar gerichteter Strecken. Diese Definition ist korrekter, als wenn man den Vektor als eine gerichtete Strecke definiert.

§ 2. Addition von Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl[1])

2.1. Addition von Vektoren. Allein das bisher Gesagte macht den Vektorbegriff noch nicht sinnvoll und nützlich. Seinen tiefen Gehalt und seine breite Anwendbarkeit erhält der Vektorbegriff erst durch eine sinnreiche „geometrische Arithmetik", die Vektorarithmetik, in der die Addition und die Subtraktion von Vektoren und eine ganze Reihe weiterer Operationen mit Vektoren definiert und behandelt werden. In diesem Zusammenhang sei bemerkt, daß ja auch der Zahlbegriff nicht an und für sich von Interesse ist, sondern erst durch die Einführung der arithmetischen Operationen bedeutungsvoll wird.[2])

Die *Summe von Vektoren* definiert man mit Hilfe der „Summe" der entsprechenden Parallelverschiebungen, wobei man letztere Summe[3]) so zu verstehen hat, daß diese Parallelverschiebungen hintereinander ausgeführt werden. In Abb. 10 ist die Hintereinanderausführung zweier Parallelverschiebungen veranschaulicht. Wenn die erste Verschiebung den Punkt A in den Punkt B überführt, d. h. durch den Vektor $\overrightarrow{AB}$ beschrieben wird, und die zweite

---

[1]) Vgl. den Artikel „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM.

[2]) Die durch die Definition der Vektoren gegebene Verknüpfung des Vektorbegriffs mit der geometrischen Transformation der Parallelverschiebung läßt noch nicht sofort eine gehaltvolle „Vektortheorie" entstehen. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß man z. B. auch der Transformation der Kontraktion in bezug auf eine Gerade (vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", S. 50) rein formal ein „geometrisches Gebilde" zuordnen könnte, das durch eine Gerade (die Kontraktionsachse) und eine Zahl (den Kontraktionskoeffizienten) gegeben ist; dies wäre jedoch ein vollkommen inhaltsloses Verfahren, da sich die gesamte Theorie dieser „Gebilde" auf ihre Definition beschränken würde. Im Gegensatz dazu spielen die den affinen Transformationen (S. 56) entsprechenden Gebilde in der modernen höheren Geometrie eine wesentliche Rolle. Das hängt damit zusammen, daß sich für diese Gebilde (*Affinoren* genannt) in sinnvoller Weise die algebraischen Operationen Addition und Multiplikation definieren lassen. Die Möglichkeit der Einführung einer „Arithmetik der Vektoren" sowie einer „Arithmetik der Affinoren" steht in engem Zusammenhang damit, daß die zugehörigen geometrischen Transformationen — Parallelverschiebungen bzw. affine Transformationen — Gruppen bilden (vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", S. 95f.).

[3]) Im Artikel „Geometrische Transformationen" wird der Terminus „Produkt" (von Transformationen) benutzt. In der wissenschaftlichen Literatur werden die Termini „Summe" und „Produkt" vielfach im gleichen Sinne verwendet.

den Punkt B in den Punkt C, d. h. durch den Vektor $\overrightarrow{BC}$ bestimmt wird, so geht nach der Ausführung beider Verschiebungen der Punkt A in den Punkt C über. Geht man von anderen Punkten A', B', C' aus, die bei diesen Verschiebungen ineinander übergehen (so daß $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$ ist), so geht nach Hintereinanderausführung beider Verschiebungen der Punkt A' in den Punkt C' über. Denn aus Abb. 10 ist ersichtlich, daß $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ ist (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gleich), so daß die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{A'C'}$ gleich lang sind; außerdem sind diese Strecken parallel und gleichgerichtet, da sie mit den gerichteten Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A'B'}$ (oder $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{B'C'}$) gleiche Winkel bilden. Es ist also $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, d. h., die Verschiebung der Ausgangsfigur in ihre endgültige Lage ist so geartet, daß alle Strecken, die zwei einander entsprechende Punkte dieser Figur verbinden, gleichlang und parallel sind. Diese Verschiebung stellt also wieder eine Parallelverschiebung dar, die sogenannte Summe der beiden hintereinander ausgeführten Parallelverschiebungen.

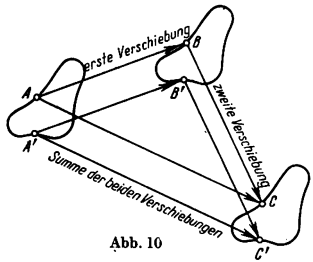


Abb. 10

Wenn wir mit $\boldsymbol{a}$ den Vektor der ersten Parallelverschiebung bezeichnen, d. h.

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'},$$

und mit $\boldsymbol{b}$ den Vektor der zweiten Parallelverschiebung, d. h.

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'},$$

dann wird die resultierende Parallelverschiebung durch den Vektor

$$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$

bestimmt. Diesen Vektor $\boldsymbol{c}$ der resultierenden Parallelverschiebung nennt man die Summe der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und schreibt

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Beschränkt man sich in Abb. 10 auf die Vektoren $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, so erhält man Abb. 11, die veranschaulicht, wie man die Summe zweier Vektoren findet.

Zur Konstruktion der Summe zweier Vektoren sind gerichtete Strecken auszuwählen, die diese Vektoren darstellen und so gelegen sind, daß der Anfangs-

punkt der zweiten Strecke mit dem Endpunkt der ersten Strecke zusammenfällt; dann stellt die gerichtete Strecke, die den Anfangspunkt der ersten Strecke mit dem Endpunkt der zweiten Strecke verbindet, die Summe der beiden Ausgangsvektoren dar.

Aus Abb. 11 und der soeben formulierten Regel für die Bildung der Summe von Vektoren ergibt sich als einfache, aber wichtige Schlußfolgerung: *Für drei beliebige Punkte A, B, C gilt die Gleichung*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \qquad (3)$$

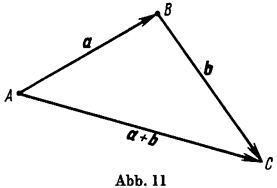


Abb. 11

Es sei bemerkt, daß diese Gleichung bei beliebiger Lage der Punkte A, B, C gilt und keine Zeichnung erfordert, was oft wichtig sein kann.

Aus der Beziehung (3) und aus den bekannten Ungleichungen, durch die die Seiten eines Dreiecks miteinander verknüpft sind, ergibt sich, daß die Länge des Summenvektors niemals größer ist als die Summe der Längen der Vektoren, aus denen die Summe gebildet wird, und nicht kleiner als ihre Differenz:

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|, \quad |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \geqq |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|. \qquad (4)$$

Selbstverständlich gilt in der ersten der Beziehungen (4) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel und nach der gleichen Seite gerichtet sind (Abb. 12a): Die Summe zweier paralleler und

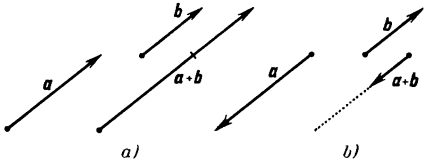


Abb. 12

gleichgerichteter Vektoren ist ein Vektor, der mit den Summanden gleichgerichtet ist; seine Länge ist gleich der Summe der Längen der Summanden (Abb. 12a). In der zweiten Beziehung (4) gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel und entgegengesetzt gerichtet sind und der Vektor $\boldsymbol{a}$ die größere Länge hat (Abb. 12b): Die Summe zweier paralleler und entgegengesetzt gerichteter Vektoren ist ein Vektor, der mit dem Summanden gleichgerichtet ist, der die größere Länge hat; die Länge des Summenvektors ist gleich der Differenz der Längen der Summanden.

2.2. Entgegengesetzte Vektoren. Der Nullvektor. Wir verweilen noch kurz bei dem Fall, daß die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ entgegengesetzt gerichtet sind und die gleiche Länge besitzen (Abb. 13); solche Vektoren nennt man *entgegengesetzte* Vektoren. Ein Beispiel für entgegengesetzte Vektoren sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$, wobei A und B beliebige Punkte sind. Nach unserer Additionsregel für Vektoren ergibt sich als Summe $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ zweier entgegengesetzter Vektoren ein „Vektor" $\overrightarrow{AA}$, der die Länge Null und keine Richtung besitzt; diesen „Vektor" stellt man als „Strecke der Länge Null", d. h. als Punkt dar. Vielleicht erscheint es dem Leser nicht wünschenswert, $\overrightarrow{AA}$ ebenfalls als Vektor anzusehen, aber wir sind dazu gezwungen, da sich sonst ergäbe, daß gewisse Paare von Vektoren (nämlich alle entgegengesetzten Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$) nicht addiert werden könnten.[1])

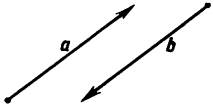


Abb. 13

Wir nehmen also an, daß $\overrightarrow{AA}$ ebenfalls ein Vektor ist; wir nennen diesen Vektor den *Nullvektor* und bezeichnen ihn mit $\boldsymbol{o}$:

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots = \boldsymbol{o}.$$

(A, B, C sind dabei beliebige Punkte der Ebene oder des Raumes.) Für jeden Vektor $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ gilt

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$

oder, anders geschrieben,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}. \tag{5}$$

Diese Gleichheit, die an die aus der Arithmetik bekannte Gleichung $a + 0 = a$ erinnert, ist auch der Grund dafür, den Vektor $\overrightarrow{AA}$ Nullvektor zu nennen. Ferner gilt für beliebige Punkte $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, d. h.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \boldsymbol{o}. \tag{6}$$

2.3. Eigenschaften der Summe von Vektoren. Wir wollen nun weitere Eigenschaften der Addition von Vektoren feststellen. Zunächst soll gezeigt werden, daß die Vektoraddition *kommutativ* ist (die Summanden vertauschbar sind), d. h., daß für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ die Gleichung

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{7}$$

[1]) Wir merken an, daß bei dem Entsprechen von Vektoren und Parallelverschiebungen der Nullvektor der identischen Abbildung zugeordnet ist, für die es aus ähnlichen Gründen zweckmäßig ist, sie als „uneigentliche" Parallelverschiebung anzusehen (vgl. S. 99). — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

gilt. Zum Beweis dieser Gleichung betrachten wir Abb. 14, auf der ein Parallelogramm abgebildet ist, dessen Seiten die Vektoren $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ und $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ bilden. Es ist

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

oder, anders geschrieben,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OC}, \quad \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OC}.$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung (7). Es ist zu bemerken, daß dieser Beweis nur dann Gültigkeit besitzt, wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nicht parallel sind.

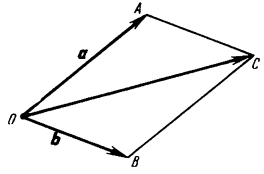


Abb. 14

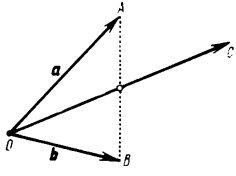


Abb. 15

Sind jedoch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel, so ergibt sich (7) unmittelbar aus der oben gegebenen Beschreibung der Summe gleichgerichteter oder entgegengesetzt gerichteter Vektoren.

In der in Abb. 14 dargestellten Figur erkennt man unschwer die *Parallelogrammregel*, die in der Physik dazu benutzt wird, die Summe von Vektoren zu ermitteln (das „Kräfteparallelogramm"): Die Summe der Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ ist gleich dem Vektor $\overrightarrow{OC}$, der durch die Diagonale des Parallelogramms $OACB$ (das von den Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ „aufgespannt" wird) dargestellt wird. Es ist zu bemerken, daß zur Definition der Summe von Vektoren die „Parallelogrammregel" weniger geeignet ist als die oben benutzte Definition der Summe von Vektoren, die sich auf die Gleichung (3) stützt: Wenn die zu summierenden Vektoren parallel sind, verliert nämlich die „Parallelogrammregel" ihren Sinn und muß dann durch zusätzliche Erklärungen ergänzt werden, während die Gleichung (3) immer gilt. Sind jedoch die zu summierenden Vektoren nicht parallel, so besteht zwischen der Parallelogrammregel und der oben gewählten Definition der Addition nur formal ein Unterschied.

Man kann die Summe von Vektoren übrigens auch folgendermaßen definieren: Der Vektor $\overrightarrow{OC}$ heißt *Summe* der Vektoren $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ und $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, wenn die Mittelpunkte der Strecken $\overline{OC}$ und $\overline{AB}$ zusammenfallen (Abb. 15). Diese Additionsregel ist offensichtlich der oben gegebenen äquivalent; sie ist stets anwendbar (also auch dann, wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel sind).

Ebenso wie in der Arithmetik der Zahlen gilt auch in der „Arithmetik" der Vektoren das *Assoziativgesetz* der Vektoraddition, das durch die Gleichung

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \tag{8}$$

ausgedrückt wird. Zum Beweis tragen wir in einem beliebigen Punkt O den Vektor $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, im Punkt A den Vektor $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$ und im Punkt B den Vektor $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}$ an. Dann ist (vgl. (3))

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

woraus sich (8) ergibt. Es sei bemerkt, daß für den angeführten Beweis keine Zeichnung benötigt wird. Das ist (bei einiger Übung) für das Beweisen von Sätzen und das Lösen von Aufgaben mit Hilfe von Vektoren charakteristisch. Bei Bedarf kann der Leser den Beweis der Beziehung (8) wiederholen und die dabei benutzten Beziehungen in Abb. 16 interpretieren.

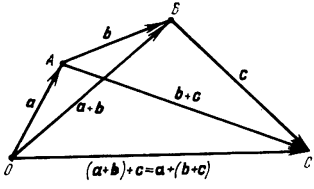


Abb. 16

Die Gleichung (8) erlaubt uns, die Summe dreier Vektoren einfach in der Gestalt $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ (ohne Klammern) zu schreiben, und die Herleitung der Beziehung (8) (oder Abb. 16) zeigt uns, daß diese Summe die „Resultierende" dieser drei hintereinander angetragenen Vektoren ist. Mit anderen Worten, für vier beliebige Punkte O, A, B, C ist

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

Das gleiche gilt für eine beliebige Anzahl von Summanden: Werden mehrere Vektoren so angetragen, daß der Anfangspunkt des zweiten mit dem Endpunkt des ersten, der Anfangspunkt des dritten mit dem Endpunkt des zweiten usw. zusammenfällt, so ist die Resultierende, d. h. der Vektor, der den Anfangspunkt des ersten Vektros mit dem Endpunkt des letzten verbindet, gleich der Summe aller betrachteten Vektoren. Beispielsweise ist

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

(Abb. 17).

Aus dem Sachverhalt, daß die Summe mehrerer Vektoren als Resultierende definiert werden kann, ergibt sich unmittelbar eine Bedingung für die Geschlossenheit eines Vektorenvielecks (Streckenzuges). Es seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ mehrere Vektoren. Wir tragen sie der Reihe nach einen am anderen an (d. h. so, daß der Anfangspunkt des zweiten mit dem Endpunkt des ersten, der An-

fangspunkt des dritten mit dem Endpunkt des zweiten usw. zusammenfällt). Der so aus den Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ gebildete Streckenzug (der nicht konvex zu sein braucht und sich selbst überschneiden kann) ist dann und nur dann geschlossen (d. h., der Endpunkt des letzten Vektors fällt mit dem Anfangspunkt des ersten zusammen, Abb. 18), wenn die Summe aller dieser Vektoren der Nullvektor ist:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \cdots = \boldsymbol{o}.$$

Die Beziehungen (7) und (8), d. h. das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Vektoraddition, sehen als Formeln genauso wie die entsprechenden Gesetze für die Addition von Zahlen aus. Das ist sehr wichtig und günstig,

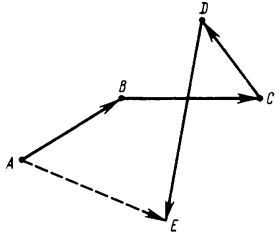


Abb. 17

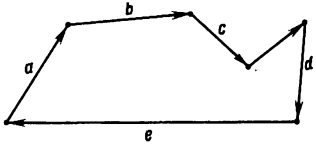


Abb. 18

weil man nicht umzulernen braucht und beim Rechnen mit Gleichungen, die Vektoren enthalten, auf die Fertigkeiten zurückgreifen kann, die man beim Operieren mit Zahlen erworben hat. Diese Analogie zwischen Zahlen und Vektoren erstreckt sich, wie wir gleich sehen werden, auch auf die Subtraktion von Vektoren und das Operieren mit Gleichungen.

2.4. Subtraktion von Vektoren. Wir wenden uns nun der Subtraktion von Vektoren zu. Wie im Fall der Zahlen heißt der Vektor $\boldsymbol{x}$ die *Differenz* der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, in Zeichen

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \tag{9}$$

wenn die Summe von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{x}$ den Vektor $\boldsymbol{a}$ ergibt, d. h.

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}. \tag{10}$$

Mit anderen Worten: Die Gleichung (9) besagt, daß die Beziehung (10) gilt und umgekehrt. Gibt es nun stets einen Vektor $\boldsymbol{x}$, der (bei gegebenen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$) der Beziehung (10) genügt? Abb. 19 veranschaulicht die Beziehung (10); in ihr sind die Vektoren $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ an einem Punkt O angetragen. Aus

Abb. 19 ersieht man, daß als Differenz der Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ der Vektor $\overrightarrow{BA}$ auftritt:

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

Das folgt übrigens auch unmittelbar aus der Beziehung (3), da stets

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$$

ist.

Um die Differenz $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ zu erhalten, genügt es also, die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ an einem Punkt anzutragen und den Vektor aufzusuchen, der vom Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{b}$ zum Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{a}$ reicht. Die Subtraktion von Vektoren ist demnach stets ausführbar. Außerdem ist diese Operation eindeutig (d. h., wenn $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{y}$ ist, dann ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, wovon sich der Leser leicht überzeugen kann).

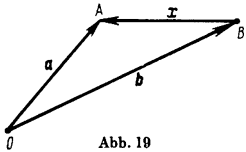


Abb. 19

Offensichtlich ist die Differenz $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}$ stets gleich dem Nullvektor:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}. \tag{11}$$

Ferner ist der Vektor $\boldsymbol{o} - \boldsymbol{a}$ gleich dem zu $\boldsymbol{a}$ entgegengesetzten Vektor: Aus der Konstruktion der Differenz $\boldsymbol{o} - \boldsymbol{a}$ nach der oben angegebenen Regel zur Bestimmung der Differenz ist ersichtlich, daß der Vektor $\boldsymbol{o} - \boldsymbol{a}$ durch die gleiche Strecke wie der Vektor $\boldsymbol{a}$ dargestellt wird, nur daß sie entgegengesetzt gerichtet ist:

$$\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

[vgl. (6)]. Man bezeichnet daher den zum Vektor $\boldsymbol{a}$ entgegengesetzten Vektor $\boldsymbol{o} - \boldsymbol{a}$ auch kurz mit $-\boldsymbol{a}$.

Wir wissen bereits, daß

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$$

ist [siehe (6)], und man prüft leicht nach, daß allgemein die Beziehung

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \tag{12}$$

gilt. Alle diese Beziehungen sind den für Zahlen geltenden Beziehungen völlig analog. Die Formel (12) enthält eine andere Definition der Subtraktion: Um von einem Vektor $\boldsymbol{a}$ einen Vektor $\boldsymbol{b}$ zu subtrahieren, genügt es, zum Vektor $\boldsymbol{a}$ den zu $\boldsymbol{b}$ entgegengesetzten Vektor $-\boldsymbol{b}$ zu addieren.

Die Beziehungen (9) und (10) zeigen, daß (für Gleichungen zwischen Vektoren) die folgende wohlbekannte Regel gilt: Summanden, die auf einer Seite einer Gleichung stehen, kann man bei gleichzeitiger Änderung ihres Vorzeichens auf die andere Seite bringen. Mit anderen Worten: Für die Addition und Subtraktion von Vektoren gelten alle Eigenschaften dieser Operationen, die aus der gewöhnlichen Arithmetik (der Arithmetik der Zahlen) bekannt sind.

Später werden wir zeigen, daß man für Vektoren auch eine Multiplikation einführen kann, für die viele Gesetze der gewöhnlichen Arithmetik gelten.

2.5. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl. Als eine spezielle Art von Multiplikation definieren wir zunächst die *Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl*. Als erstes setzen wir

$$0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}, \quad 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}; \tag{13}$$

sodann definieren wir das Produkt eines Vektors und einer positiven ganzen Zahl n durch

$$n\boldsymbol{a} = \underbrace{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \cdots + \boldsymbol{a}}_{n\text{-mal}}. \tag{14}$$

Unter Berücksichtigung der auf S. 305 für die Addition paralleler Vektoren (vgl. insbesondere Abb. 12a)) angegebenen Regel erhalten wir hieraus, daß

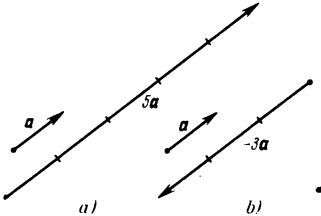


Abb. 20

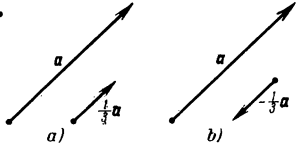


Abb. 21

der Vektor $n\boldsymbol{a}$ die gleiche Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{a}$ hat und daß seine Länge das n-fache der Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ beträgt: $|n\boldsymbol{a}| = n\,|\boldsymbol{a}|$ (Abb. 20a). Setzt man ferner

$$(-1) \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \tag{13a}$$

und

$$(-n)\,\boldsymbol{a} = n[(-1) \cdot \boldsymbol{a}] = n \cdot (-\boldsymbol{a}) = \underbrace{(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}) + \cdots + (-\boldsymbol{a})}_{n\text{-mal}}, \tag{14a}$$

so ist der Vektor $(-n)\,\boldsymbol{a}$ dem Vektor $\boldsymbol{a}$ entgegengesetzt gerichtet, und es gilt $|(-n)\,\boldsymbol{a}| = n\,|\boldsymbol{a}|$ (Abb. 20b). Die Vektoren $\frac{1}{m}\boldsymbol{a}$ und $\left(-\frac{1}{m}\right)\boldsymbol{a}$ (wobei m eine positive ganze Zahl ist) definieren wir durch die Gleichungen

$$m\left[\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right] = 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \quad \text{und} \quad m\left[\left(-\frac{1}{m}\right)\boldsymbol{a}\right] = (-1) \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}. \tag{15}$$

Hieraus und aus der oben für die Multiplikation eines Vektors mit einer positiven ganzen Zahl angegebenen Definition schließen wir, daß der Vektor $\frac{1}{m}\boldsymbol{a}$ die gleiche Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{a}$ hat und seine Länge gleich dem m-ten Teil der Länge von $\boldsymbol{a}$ ist: $\left|\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right| = \frac{1}{m}|\boldsymbol{a}|$ (Abb. 21a); der Vektor $\left(-\frac{1}{m}\right)\boldsymbol{a}$ ist dagegen dem Vektor $\boldsymbol{a}$ entgegengesetzt gerichtet, und seine Länge ist ebenfalls gleich dem m-ten Teil der Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$: $\left|\left(-\frac{1}{m}\right)\boldsymbol{a}\right| = \frac{1}{m}|\boldsymbol{a}|$ (Abb. 21b). Setzen wir schließlich

$$\frac{n}{m}\boldsymbol{a} = n\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{n}{m}\right)\boldsymbol{a} = n\left(\left(-\frac{1}{m}\right)\boldsymbol{a}\right), \tag{16}$$

so erhalten wir, daß *der Vektor $\lambda\boldsymbol{a}$, wenn $\lambda \neq 0$ eine beliebige rationale Zahl ist, für $\lambda > 0$ die gleiche Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{a}$ besitzt, für $\lambda < 0$ dagegen zu $\boldsymbol{a}$ entgegengesetzt gerichtet ist, und daß die Länge des Vektors $\lambda\boldsymbol{a}$ gleich dem Produkt aus dem absoluten Betrag der Zahl λ und der Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ ist* (d. h. $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$ gilt). Der letzte Teil dieser Regel gilt auch für $\lambda = 0$ [vgl. die erste Gleichung (13)], der erste dagegen nicht, denn der Nullvektor besitzt keine Richtung.

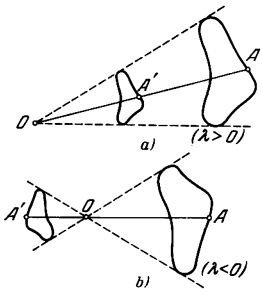


Abb. 22

Wir treffen nun die Vereinbarung, daß die kursiv gedruckte Regel für beliebige reelle (nicht nur für rationale) Zahlen λ gelten soll. Mit anderen Worten, wir vereinbaren, daß das Produkt $\lambda \cdot \overrightarrow{OA}$ der Vektor $\overrightarrow{OA'}$ ist, der durch folgende Bedingungen charakterisiert wird:

1. Der Punkt A' liegt auf der Geraden OA;

2. Das Verhältnis $|OA'| : |OA|$ ist gleich $|\lambda|$, d. h. gleich λ für $\lambda > 0$ und gleich $-\lambda$ für $\lambda < 0$;

3. Die Punkte A und A' liegen (auf der Geraden OA) für $\lambda > 0$ auf derselben Seite des Punktes O und für $\lambda < 0$ auf verschiedenen Seiten des Punktes O.

Aus dieser Definition geht hervor, daß die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl eng mit gewissen Ähnlichkeitstransformationen, nämlich den *Homothetien*[1]) zusammenhängt:

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", S. 49.

Die Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten $\lambda \neq 0$ (Abb. 22) führt einen gegebenen Punkt A in denjenigen Punkt A' über, für den

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$$

gilt.

2.6. Eigenschaften des Produktes von Vektor und Zahl. Die oben angegebenen Eigenschaften (13) bis (16) der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl erinnern an bekannte Eigenschaften der Multiplikation von Zahlen. Die folgenden drei Eigenschaften unterstreichen diese Analogie noch:

$$k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\,\boldsymbol{a}, \tag{18}$$

$$(k + l)\,\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}, \tag{19}$$

$$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}. \tag{20}$$

Die Eigenschaften (18) bis (20) lassen sich leicht beweisen. Wir betrachten z. B. die Beziehung (18). Für $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ ist sie offensichtlich. Ist dagegen $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$,

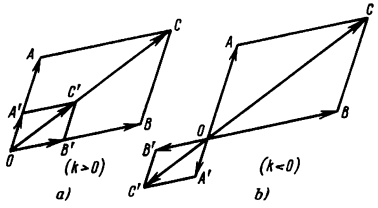


Abb. 23

so ergibt sich zunächst aus der Definition der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl unmittelbar, daß die auf den beiden Seiten der Beziehung (18) stehenden Vektoren dem Vektor $\boldsymbol{a}$ parallel sind und dieselbe Länge haben (sie beträgt $|k| \cdot |l| \cdot |\boldsymbol{a}|$). Es bleibt also nur zu überprüfen, ob die Vektoren, die auf der linken und der rechten Seite der Beziehung (18) stehen, gleichgerichtet sind; das läßt sich aber leicht feststellen, wenn man die Vorzeichen von k und l in Betracht zieht. Weiter erhält man aus der Definition der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl und der Additionsregel für Vektoren, die einer Gerade parallel sind (vgl. S. 305), ohne Schwierigkeiten einen Beweis der Gleichung (19). Die Beziehung (20) erhält man schließlich, wenn man auf ein Parallelogramm mit den Seiten $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ und $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ die Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten k anwendet. Unter Berücksichtigung

von (17) gilt nämlich

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = k\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'} = k\cdot\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$= k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$$

(vgl. Abb. 23a, b, in denen die Fälle $k>0$ und $k<0$ gesondert dargestellt sind). Der angeführte Beweis ist nur dann anwendbar, wenn die Figur $OACB$ ein Parallelogramm ist, d. h., wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nicht zu ein und derselben Geraden parallel sind. Wir empfehlen dem Leser, die Beziehung (20) für parallele Vektoren selbst zu beweisen.

2.7. „Arithmetik der Figuren." Die eingeführten Operationen (Addition von Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl) ermöglichen es, eine „Arithmetik der Figuren" aufzubauen, die in der Geometrie interessante Anwendungsmöglichkeiten findet. Der Einfachheit halber entwickeln wir diese „Arithmetik der Figuren" nur in der Ebene.

Wir wählen in der Ebene einen Punkt O und nennen ihn *Nullpunkt* oder *Ursprung*. Sind nun A und B zwei beliebige Punkte der Ebene, so soll der Punkt C, für den

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \tag{21}$$

ist, die *Summe* der Punkte A und B heißen; wir schreiben in diesem Fall kurz $C = A + B$. (Wenn die Punkte O, A, B nicht auf einer Geraden liegen, ist der Punkt C offensichtlich die vierte Ecke des Parallelogramms, dessen drei andere Ecken die Punkte O, A, B sind; Abb. 24.) Ist A ein beliebiger Punkt der Ebene und λ eine reelle Zahl, so nennen wir analog den Punkt D, für den

$$\overrightarrow{OD} = \lambda\cdot\overrightarrow{OA}$$

ist, das *Produkt* λA und schreiben in diesem Fall einfach $D = \lambda A$.

Aus den oben angeführten Eigenschaften der Addition von Vektoren und der Multiplikation von Vektoren mit Zahlen ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen (A, B sind Punkte der Ebene, λ und μ reelle Zahlen):

$$A+B = B+A,$$
$$(A+B)+C = A+(B+C),$$

(diesen Punkt bezeichnet man einfach mit $A+B+C$);

$$A+O = A,$$
$$1\cdot A = A,\quad 0\cdot A = O,$$
$$(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A,\quad \lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B,$$
$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

Es seien nun Φ_1 und Φ_2 zwei ebene Figuren. Wir betrachten alle möglichen Summen A_1+A_2, wobei A_1 und A_2 beliebige Punkte der Figuren Φ_1 bzw. Φ_2 sind. Diese Punkte A_1+A_2 bilden eine ebene Figur Φ (Abb. 25), die wir die *Summe* der Figuren Φ_1 und Φ_2 nennen und mit $\Phi_1+\Phi_2$ bezeichnen. Besteht jede der Figuren Φ_1 und Φ_2 aus einem Punkt, so ist $\Phi_1+\Phi_2$ die Summe dieser Punkte; die Addition von Figuren ist, mit anderen Worten, eine Verallgemeinerung der Addition von Punkten. Analog definieren wir die Figur $\lambda\Phi$

als diejenige Figur, die aus allen Punkten λA gebildet wird, wenn A ein beliebiger Punkt der Figur Φ ist (Abb. 26). Die Figur $\lambda\Phi$ erhält man offenbar aus der Figur Φ durch Anwendung der Homothetie mit dem Zentrum O und dem Koeffizienten λ.

Aus den Eigenschaften der Addition von Punkten ergeben sich sofort die Beziehungen

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 + \Phi_1,$$

$$(\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3 = \Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3)$$

(diese Summe bezeichnen wir einfach mit $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$) usw.

Wenn beispielsweise Φ_1 und Φ_2 nicht parallele Strecken sind, ist die Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ ein Parallelogramm (Abb. 27).

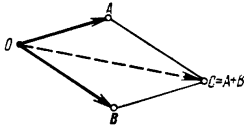


Abb. 24

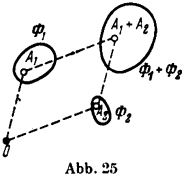


Abb. 25

Die Summe von Figuren hat viele interessante Eigenschaften, die eine nutzbringende Verwendung dieses Begriffs in der Geometrie gestatten. So kann man z. B. zeigen, daß *für konvexe ebene Figuren*[1]) Φ_1 *und* Φ_2 *der Umfang der Figur* $\Phi_1 + \Phi_2$ *gleich der Summe der Umfänge der Figuren* Φ_1 *und* Φ_2 *ist.*

Die Geometrie untersucht die Eigenschaften von Figuren, die nicht von deren Lage abhängen. Die von uns gegebene Definition der Summe von Figuren hängt natürlich von

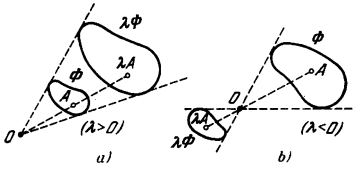


Abb. 26

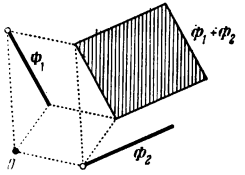


Abb. 27

der Lage der Summanden ab; darüber hinaus hängt sie noch von der Wahl des Ursprungs ab. Dieser Umstand ist unbedingt ein ernster Mangel der Definition. Man kann jedoch leicht zeigen, daß *sich bei Änderung des Ursprungs sowie bei Parallelverschiebung der Summanden die Form der Figur, die die Summe* $\Phi_1 + \Phi_2$ *darstellt, nicht ändert*; diese Summe wird im Endergebnis ebenfalls nur parallel verschoben. Dagegen kann eine Drehung der Sum-

[1]) Ein Spezialfall der konvexen Figuren sind die konvexen Polygone (vgl. den Artikel über konvexe Figuren und Körper in Band V der EdEM).

manden die Summe wesentlich ändern. So ist in Abb. 28a die Summe von zwei einander parallelen Dreiecken abgebildet und in Abb. 28b die Summe derselben Dreiecke, nachdem eines derselben um 180° gedreht wurde.

Es muß bemerkt werden, daß zwischen der „Arithmetik der Figuren" und der Arithmetik der Zahlen wesentliche Unterschiede bestehen. So gibt es beispielsweise im allgemeinen keine „Differenz" $\Phi_1 - \Phi_2$ zweier gegebener Figuren Φ_1 und Φ_2, d. h. keine Figur

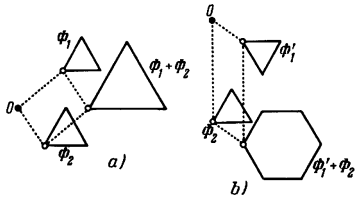


Abb. 28

Φ, für die $\Phi + \Phi_2 = \Phi_1$ ist; man kann insbesondere ohne Schwierigkeiten beweisen, daß es keine Differenz zwischen einem Dreieck und einem Kreis gibt. Ferner sei erwähnt, daß in der „Arithmetik der Figuren" Beziehungen wie

$$\Phi + \Phi = 2\Phi, \quad \Phi + \Phi + \Phi = 3\Phi$$

usw. im allgemeinen keine Gültigkeit mehr haben. Ist z. B. Φ eine Kreislinie vom Radius r, so ist, wie man leicht sieht, die Figur $\Phi + \Phi$ ein Kreis (eine Kreisscheibe) vom Radius $2r$, während die Figur 2Φ eine Kreislinie vom Radius $2r$ ist.

2.8. Das Teilen einer Strecke im gegebenen Verhältnis. Die nachstehenden drei Sätze sind für die Lösung vieler Aufgaben der Geometrie mit Hilfe von Vektoren sehr nützlich.

Satz 1. *Sind die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ parallel und $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, so existiert eine Zahl k, für die $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ist.*

Der Beweis ist trivial.

Satz 2. *Es seien A, B und C drei Punkte (der Ebene oder des Raumes) mit $A \neq B$, und Q sei ein beliebiger vierter Punkt. Der Punkt C liegt dann und nur dann auf der Geraden AB, wenn eine Zahl λ existiert, so daß*

$$\overrightarrow{QC} = \lambda\overrightarrow{QA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{QB} \tag{22}$$

ist (Abb. 29).

In der Tat kann man die Beziehung (22) in der Gestalt

$$\overrightarrow{QC} = \lambda\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} - \lambda\overrightarrow{QB}$$

oder

$$\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QB} = \lambda(\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB})$$

oder auch

$$\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{BA}$$

schreiben. Diese Beziehung ist jedoch dann und nur dann erfüllt, wenn die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BA}$ zu ein und derselben Geraden parallel sind, d. h., wenn der Punkt C auf der Geraden AB liegt.

Satz 3.[1]) *Es sei C der Punkt, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $m : n$ teilt* (d. h. $|AC| : |CB| = m : n$), *und Q ein beliebiger Punkt der Ebene. Dann gilt*

$$\overrightarrow{QC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}. \quad (23)$$

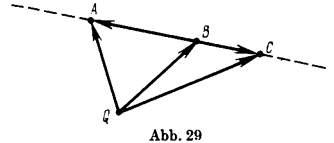


Abb. 29

Wenn umgekehrt die Beziehung (23) *erfüllt ist, teilt der Punkt C die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $m : n$.*

In der Tat kann man für die Beziehung (23) auch

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}$$

oder

$$\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA})$$

oder

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

schreiben, und das bedeutet gerade, daß der Punkt C die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $m : n$ teilt (Abb. 30).

Wir weisen auf einen wichtigen Spezialfall von Satz 3 hin: *Der Punkt C ist dann und nur dann Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, wenn*

$$\overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}) \quad (24)$$

gilt (Q ist dabei ein beliebiger Punkt; Abb. 31). Das ergibt sich aus (23) für $m = n$ (vgl. Abb. 30). Man kann diesen Sachverhalt auch folgendermaßen

---

[1]) Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes, dessen Beweis sich durch dieselben Betrachtungen ergibt: Es sei C derjenige Punkt der Geraden AB, für den bei gegebenem λ und μ die Beziehung $\mu\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ gilt, und Q ein beliebiger Punkt der Ebene. Dann ist

$$\overrightarrow{QC} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{QA} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{QB}. \quad (23')$$

Ist umgekehrt die Beziehung (23') erfüllt, so ist $\mu\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

ausdrücken: *Damit die Punkte A und B bezüglich eines Punktes C symmetrisch liegen, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingung* (24) *erfüllt ist.*

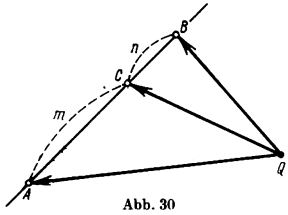


Abb. 30

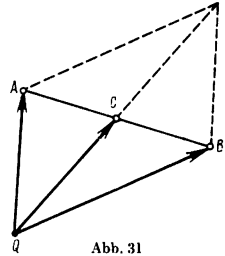


Abb. 31

2.9. Die Koordinaten eines Vektors. Bisher sprachen wir nur über solche Eigenschaften der Vektoren, die gleichermaßen für die Ebene und für den Raum gültig sind. Jetzt werden wir erstmalig auf einen Unterschied zwischen diesen beiden Fällen stoßen.

Gegeben seien zunächst zwei Vektoren $\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OI}$ und $\boldsymbol{j} = \overrightarrow{OJ}$ einer Ebene, die nicht einer Geraden angehören (Abb. 32a). Wie man leicht sieht, läßt sich dann

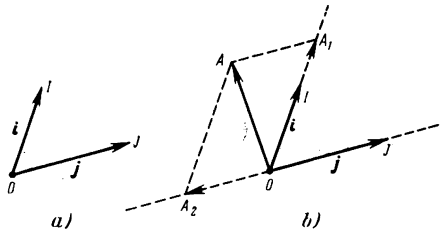


Abb. 32

jeder Vektor $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ der betrachteten Ebene in eine Summe von zwei Vektoren $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ und $\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ zerlegen, die längs derselben Geraden gerichtet sind wie $\boldsymbol{i}$ bzw. $\boldsymbol{j}$: Man braucht dazu nur das Parallelogramm OA_1AA_2 zu konstruieren, von dem zwei Seiten die Richtung der Vektoren $\boldsymbol{i}$ bzw. $\boldsymbol{j}$ haben und dessen Diagonale mit $\overrightarrow{OA}$ übereinstimmt (Abb. 32b); (einer der Sum-

manden $\boldsymbol{a}_1$ oder $\boldsymbol{a}_2$ kann auch fehlen). Nach Satz 1 (S. 316) gilt

$$\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OI} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OA_2} = y\overrightarrow{OJ} = y\boldsymbol{j},$$

wobei x und y gewisse reelle Zahlen sind, und somit wird

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

Sind also in der Ebene zwei Vektoren $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ fest vorgegeben, die vom Nullvektor verschieden und nicht parallel sind, so kann man jeden Vektor $\boldsymbol{a}$ der Ebene als Summe

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \tag{25}$$

darstellen, wobei x und y reelle Zahlen sind (die natürlich vom Vektor $\boldsymbol{a}$ abhängen). Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß *x und y durch den Vektor $\boldsymbol{a}$ eindeutig bestimmt sind.* Gäbe es nämlich für den Vektor $\boldsymbol{a}$ zwei verschiedene Zerlegungen

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{a} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j},$$

so wäre

$$x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$$

oder

$$(x_1 - x_2)\,\boldsymbol{i} = (y_2 - y_1)\,\boldsymbol{j}.$$

Da die beiden Zerlegungen des Vektors $\boldsymbol{a}$ verschieden sein sollen, kann mindestens eine der Beziehungen $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$ nicht gelten. Es sei z. B. $x_1 \neq x_2$. Dann ist

$$\boldsymbol{i} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}\boldsymbol{j},$$

was der Voraussetzung widerspricht, daß die Vektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ nicht parallel und verschieden vom Nullvektor sind.

Die nach der Beziehung (25) eindeutig durch den Vektor $\boldsymbol{a}$ bestimmten Zahlen x und y heißen die *Koordinaten* des Vektors $\boldsymbol{a}$ bezüglich des Vektorpaares $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ (oder bezüglich des Koordinatensystems, das durch die Vektoren $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ bestimmt wird). Man sagt auch: Der Vektor $\boldsymbol{a}$ hat im System $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ die Koordinaten (x, y).

Sind analog dazu $\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OI}$, $\boldsymbol{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{OK}$ drei Vektoren des Raumes, die nicht einer Ebene angehören, so kann man jeden Vektor $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ als Summe $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ darstellen, wobei die Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ den Geraden OI bzw. OJ bzw. OK angehören. Zum Beweis braucht man nur das Parallelepiped $OA_1BA_2A_3CAD$ zu betrachten, dessen drei Kanten $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_2$ und $\overline{OA}_3$ die Richtung der Geraden OI, OJ, OK haben (Abb. 33; einige der Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ können auch gleich dem Nullvektor sein). Daraus ergibt sich, daß *jeder Vektor $\boldsymbol{a}$ des Raumes als Summe*

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{26}$$

dargestellt werden kann, wobei x, y, z reelle Zahlen sind. Auch hier sind die Zahlen x, y, z durch den Vektor $\boldsymbol{a}$ eindeutig bestimmt. Sie heißen die *Koordinaten* des Vektors $\boldsymbol{a}$ im System $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Aus den Beziehungen (25) und (26) ergibt sich:

Haben die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ die Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) [*oder im Raum die Koordinaten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2)*], *so haben die Vektoren $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ bzw. $\lambda\boldsymbol{a}$ die Koordinaten $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ bzw. $(\lambda x_1, \lambda y_1)$* [*oder im Raum $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ bzw. $(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$*].

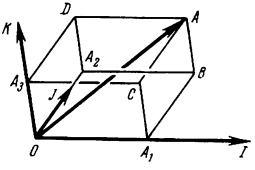


Abb. 33

Aus den Regeln für die Vektoraddition bzw. für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl folgt nämlich: Ist $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$, so ist

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}) + (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}) = (x_1 + x_2)\,\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\,\boldsymbol{j}$$

und

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}) = (\lambda x_1)\,\boldsymbol{i} + (\lambda y_1)\,\boldsymbol{j},$$

was zu zeigen war. Den Beweis für Vektoren des Raumes (d. h. für Vektoren, die drei Koordinaten haben), der sich von dem soeben geführten kaum unterscheidet, überlassen wir dem Leser.

2.10. Lineare Abhängigkeit von Vektoren. Wir führen noch den wichtigen Begriff der linearen Abhängigkeit von Vektoren an, den wir später, in § 7, benutzen werden. Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ heißen *linear abhängig*, wenn Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ existieren – von denen wenigstens eine von Null verschieden ist –, so daß

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$$

ist. Gibt es keine solchen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, so heißen die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *linear unabhängig*. Es gelten die folgenden Sätze:

Sind zwei Vektoren einer Geraden parallel, so sind sie linear abhängig. Sind drei Vektoren einer Ebene parallel, so sind sie linear abhängig. Je vier Vektoren des Raumes sind linear abhängig.

Die Richtigkeit der ersten Behauptung ergibt sich aus Satz 1 auf S. 316. Es seien nun $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ drei einer Ebene parallele Vektoren. Sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ einer Geraden parallel, so besteht zwischen ihnen eine lineare Abhängigkeit $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ und deshalb zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ die lineare Abhängigkeit $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Sind dagegen die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nicht zu einer Geraden parallel, so gilt nach (25) $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$, wobei x, y reelle Zahlen sind, und folglich besteht zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ die lineare Abhängigkeit $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + (-1)\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Schließlich seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ vier Vektoren des Raumes. Sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ einer Ebene parallel, so besteht zwischen

ihnen eine lineare Abhängigkeit $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ und deshalb zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ die lineare Abhängigkeit $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + 0\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$. Sind dagegen die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ keiner Ebene parallel, so gilt nach (26) $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$, wobei x, y, z reelle Zahlen sind, und deshalb ergibt sich auch in diesem Fall die lineare Abhängigkeit $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} + (-1)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$ der Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$.

Offenbar existieren im Raum drei linear unabhängige Vektoren (nämlich drei Vektoren, die keiner Ebene parallel sind), und je vier Vektoren sind linear abhängig. Diesen Sachverhalt hat man gewöhnlich im Auge, wenn man sagt, daß der Raum drei Dimensionen besitzt. Die Ebene hat zwei Dimensionen, da man auf ihr zwei linear unabhängige Vektoren finden kann (zwei Vektoren, die einander nicht parallel sind) und je drei Vektoren linear abhängig sind. Die Gerade hat schließlich eine Dimension. In der Mathematik betrachtet man Räume beliebiger (sogar unendlicher) Dimension. Hierüber wird später, in § 7 dieses Artikels[1]), Weiteres gesagt. Ein ausführlicher Artikel über mehrdimensionale Räume findet sich in Band V der EdEM.

2.11. Beispiele. Zum Abschluß dieses Paragraphen zeigen wir an einigen Beispielen, wie man mit Hilfe von Vektoren geometrische Aufgaben löst. Die hier angeführten Aufgaben haben verschiedenen Schwierigkeitsgrad. Einige von ihnen sind durchaus nicht einfach. Der Leser wird aber sehen, daß bei der Verwendung von Vektoren alle diese Aufgaben zu Rechenaufgaben werden, d. h., es werden geometrische Überlegungen (über Dreiecke, Mittellinien u. ä.) auf Rechnungen mit Vektoren zurückgeführt, die in der Regel nicht schwierig sind. Die angeführten Beispiele zeigen auch andere wichtige Vorzüge der Vektorrechnung, nämlich z. B. die Möglichkeit, grundsätzlich ohne Zeichnungen auszukommen, die fast unvermeidbar immer nur einen Spezialfall der zu untersuchenden Situation veranschaulichen und dadurch Zweifel an ihrer Allgemeingültigkeit entstehen lassen, gemeinsame Beweisführungen für verwandte (und nicht selten ganz anders lautende) planimetrische und stereometrische Behauptungen usw.

Aufgabe 1. *Man zeige, daß die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen* (nicht unbedingt ebenen!) *Vierecks stets Eckpunkte eines Parallelogramms sind.*

Lösung. Es seien M, N, P, Q die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks $ABCD$ (Abb. 34). Dann gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \boldsymbol{o}.\end{aligned}$$

[1]) Vgl. auch den Artikel „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM.

Somit ist $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, d. h., die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $MNPQ$ sind gleich lang und parallel. Folglich ist $MNPQ$ ein Parallelogramm.

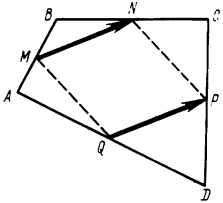


Abb. 34

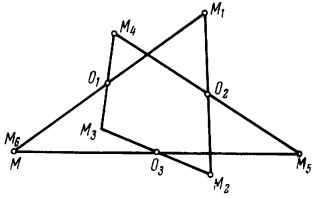


Abb. 35

Aufgabe 2. *Gegeben seien drei Punkte O_1, O_2, O_3 und ein weiterer Punkt M* (diese Punkte brauchen nicht in einer Ebene zu liegen!). *Wir bezeichnen mit M_1 den Punkt, der bezüglich des Punktes O_1 symmetrisch zu M liegt, mit M_2 den Punkt, der bezüglich des Punktes O_2 symmetrisch zu M_1 liegt, mit M_3 den Punkt, der bezüglich des Punktes O_3 symmetrisch zu M_2 liegt, mit M_4 den Punkt, der bezüglich des Punktes O_1 symmetrisch zu M_3 liegt, mit M_5 den Punkt, der bezüglich des Punktes O_2 symmetrisch zu M_4 liegt, mit M_6 den Punkt, der bezüglich des Punktes O_3 symmetrisch zu M_5 liegt. Es ist zu zeigen, daß M_6 mit dem Ausgangspunkt M zusammenfällt* (Abb. 35).

Lösung. Es sei Q ein beliebiger Punkt. Benutzt man die Beziehung (24) (die auch in der Gestalt $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QC}$ geschrieben werden kann), so kann man die Bedingungen der Aufgabe folgendermaßen als Gleichungskette niederschreiben:

$$\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QM_1} = 2\overrightarrow{QO_1}, \quad \overrightarrow{QM_1} + \overrightarrow{QM_2} = 2\overrightarrow{QO_2},$$
$$\overrightarrow{QM_2} + \overrightarrow{QM_3} = 2\overrightarrow{QO_3}, \quad \overrightarrow{QM_3} + \overrightarrow{QM_4} = 2\overrightarrow{QO_1},$$
$$\overrightarrow{QM_4} + \overrightarrow{QM_5} = 2\overrightarrow{QO_2}, \quad \overrightarrow{QM_5} + \overrightarrow{QM_6} = 2\overrightarrow{QO_3}.$$

Da die erste und die zweite dieser Gleichungen den Vektor $\overrightarrow{QM_1}$ enthalten, kann man ihn mit ihrer Hilfe eliminieren; die zweite und die dritte Gleichung ermöglichen es, den Vektor $\overrightarrow{QM_2}$ zu eliminieren usw. Im Endergebnis wird es damit möglich, den Vektor $\overrightarrow{QM_6}$ zu berechnen. Man kann dies erreichen, indem man sukzessive die Werte für die Vektoren $\overrightarrow{QM_1}$, $\overrightarrow{QM_2}$, ... in die nachfolgende Gleichung einsetzt; einfacher ist es jedoch, die erste, dritte und fünfte der obenstehenden Gleichungen zu addieren und die zweite, vierte und sechste davon zu subtrahieren. Dann erhalten wir sofort

$$\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QM_6} = \boldsymbol{o} \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{M_6M} = \boldsymbol{o},$$

was bedeutet, daß die Punkte M und M_6 zusammenfallen.

Beim „üblichen" Lösungsweg dieser Aufgabe (der sich nicht auf Vektoren stützt) muß man eine ganz Reihe von Dreiecken betrachten, was in diesem Fall ziemlich ermüdend ist.

Aufgabe 3. *Man zeige, daß sich die Seitenhalbierenden (Medianen) eines beliebigen Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden und daß sie von diesem Punkt, von den Ecken an gerechnet, im Verhältnis* 2 : 1 *geteilt werden.*

Lösung. Wir bezeichnen die Seitenhalbierenden des Dreiecks mit AD, BE, CF und wählen einen beliebigen Punkt Q (Abb. 36). Nach (24) gilt dann

$$\overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}).$$

Ferner genügt nach (23) der Punkt M_1, der die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis $|AM_1| : |M_1D| = 2 : 1$ teilt (Abb. 37), der Beziehung

$$\overrightarrow{QM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{QD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC})\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}).$$

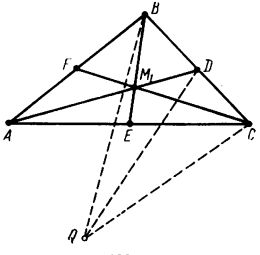


Abb. 36

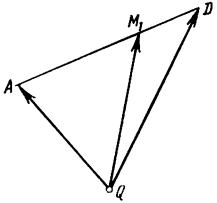


Abb. 37

Sind M_2 und M_3 die Punkte, die die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ im Verhältnis 2 : 1 teilen, so zeigt die gleiche Rechnung, daß

$$\overrightarrow{QM_2} = \overrightarrow{QM_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC})$$

ist. Somit stimmen M_1, M_2 und M_3 überein und bilden zugleich einen Punkt M, durch den alle drei Seitenhalbierenden hindurchgehen.

Die angegebene Lösung dieser Aufgabe liefert überdies den folgenden Sachverhalt, den man mit Vorteil bei der Lösung einer Reihe weiterer Aufgaben verwenden kann:

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck und M der Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden (man nennt M auch den *Schwerpunkt* des Dreiecks). *Dann gilt für*

jeden Punkt Q die Beziehung

$$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}). \tag{27}$$

Aufgabe 4. *Als Medianen eines „Vierecks" ABCD bezeichnet man die Geraden, die eine der Ecken* (z. B. die Ecke *A*) *mit dem Schwerpunkt des von den drei anderen Ecken gebildeten Dreiecks* (z. B. des Dreiecks *BCD*) *verbinden. Man zeige, daß sich die vier Medianen eines „Vierecks" in einem Punkt schneiden und daß die entsprechenden Verbindungsstrecken von diesem Punkt, von den Ecken an gerechnet, im Verhältnis* 3 : 1 *geteilt werden* (Abb. 38a, b).

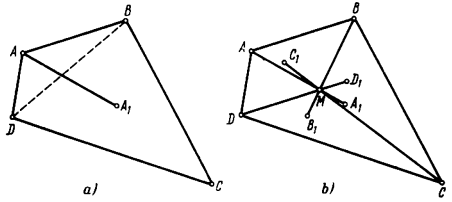


Abb. 38

Das Wort „Viereck" kann hier sowohl ein gewöhnliches ebenes Viereck als auch ein Vierflach (Tetraeder) bezeichnen; wir verwenden diese gemeinsame Bezeichnung, um zu unterstreichen, daß beide Fälle gemeinsam betrachtet werden. Wir haben hier also gleichzeitig zwei verschiedene Sätze vor uns — einen planimetrischen und einen stereometrischen —, die sich im Beweis nicht unterscheiden.

Lösung. Wir bezeichnen die Medianen des „Vierecks" $ABCD$ mit AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 und wählen einen beliebigen Punkt Q. Nach (27) gilt

$$\overrightarrow{QA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}).$$

Ferner genügt nach (23) der Punkt M_1, der die Strecke $\overline{AA_1}$ im Verhältnis $|AM_1| : |M_1A_1| = 3 : 1$ teilt, der Beziehung

$$\overrightarrow{QM_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{QA_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QA} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD})\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}).$$

Eine völlig gleichartige Berechnung zeigt, daß die Punkte M_2, M_3, M_4, die die anderen Medianen im Verhältnis 3 : 1 teilen, der gleichen Beziehung ge-

nügen. Somit stimmen M_1, M_2, M_3, M_4 überein und bilden zugleich einen Punkt M, durch den alle vier Medianen hindurchgehen.

Aufgabe 5. *Es seien E, F, K, L, M, N der Reihe nach die Mittelpunkte der „Seiten" AB, CD, AD, BC, AC, BD eines „Vierecks" $ABCD$. Man zeige, daß sich die Geraden EF, KL und MN in einem Punkt schneiden und daß durch ihn die entsprechenden Strecken halbiert werden* (Abb. 39).

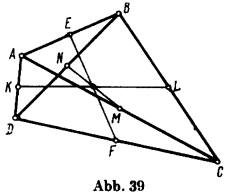


Abb. 39

Auch hier sind zwei auf den ersten Blick verschiedene Sätze zusammengefaßt: 1. Die „Mittellinien" EF und KL eines beliebigen (ebenen) Vierecks $ABCD$ und die Strecke, die die Mittelpunkte seiner Diagonalen verbindet, schneiden sich in einem Punkt und werden durch diesen Punkt halbiert. 2. Die Strecken, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten eines beliebigen Vierflachs (Tetraeders) miteinander verbinden, schneiden sich in einem Punkt und werden durch diesen Punkt halbiert.

Lösung. Es sei Q ein beliebiger Punkt; die Mittelpunkte der Strecken $\overline{EF}$, $\overline{KL}$ und $\overline{MN}$ bezeichnen wir mit S_1, S_2 und S_3 (wir wissen ja vorläufig noch nicht, daß es sich dabei um ein und denselben Punkt handelt). Mit Hilfe der Beziehung (24) erhalten wir

$$\overrightarrow{QE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}), \quad \overrightarrow{QF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD});$$

$$\overrightarrow{QK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QD}), \quad \overrightarrow{QL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC});$$

$$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC}), \quad \overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}).$$

Hieraus ergibt sich wiederum

$$\overrightarrow{QS_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QF}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}),$$

$$\overrightarrow{QS_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QK} + \overrightarrow{QL}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}),$$

$$\overrightarrow{QS_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}).$$

Die letzten drei Beziehungen beweisen, daß die Punkte S_1, S_2 und S_3 zusammenfallen.

§ 3. Das Skalarprodukt von Vektoren

In diesem Paragraphen setzen wir voraus, daß eine Einheit der Längenmessung vorgegeben ist.

3.1. Die Projektion eines Vektors auf eine Achse. Unter einer *Achse* verstehen wir eine Gerade, auf der eine Richtung ausgezeichnet ist (die man gewöhnlich durch einen Pfeil angibt). Es sei nun l eine Achse und $\overrightarrow{AB}$ eine gerichtete Strecke (Abb. 40a, b). Die Projektionen der Punkte A und B auf die Achse l (d. h. die Fußpunkte der von den Punkten A und B auf die Gerade l gefällten Lote, im Fall räumlicher Vektoren die Schnittpunkte der Geraden l mit den

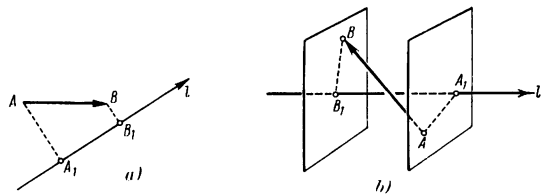


Abb. 40

durch A und B gehenden und zu l senkrechten Ebenen) bezeichnen wir mit A_1 und B_1. Die Länge der Strecke $\overline{A_1B_1}$, versehen mit dem Vorzeichen „+", falls die Richtung des Vektors $\overrightarrow{A_1B_1}$ mit der auf der Achse l gegebenen Richtung übereinstimmt, und versehen mit dem Vorzeichen „−" im entgegengesetzten Fall, nennen wir die *Projektion* der gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB}$ auf die Achse l. Wir bezeichnen diese Projektion mit $\mathrm{pr}_l \overrightarrow{AB}$, so daß also

$$\mathrm{pr}_l \overrightarrow{AB} = \pm |A_1B_1|$$

ist. Steht die Gerade AB auf der Achse l senkrecht, so fallen die Punkte A_1 und B_1 zusammen, und die Projektion $\mathrm{pr}_l \overrightarrow{AB}$ hat den Wert Null. Definieren gerichtete Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ ein und denselben Vektor, so sind, wie man leicht sieht, ihre Projektionen auf die Achse l gleich (vgl. Abb. 41, die sich auf den Fall von Vektoren einer Ebene bezieht; die schraffierten Dreiecke sind offensichtlich gleich). Daher kann man von der Projektion eines Vektors auf eine Achse sprechen. Die Projektion des Vektors $\boldsymbol{a}$ auf die Achse l bezeichnen wir mit $\mathrm{pr}_l \boldsymbol{a}$.

Man kann die Projektion eines Vektors auf eine Achse auch folgendermaßen definieren (die Bezeichnungen A, B, A_1, B_1 sollen dabei die gleiche Bedeutung wie oben haben): Mit $\boldsymbol{l}$ bezeichnen wir den Vektor der Länge 1, der die Richtung der Achse l hat (Abb. 42). Da die Vektoren $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\boldsymbol{l}$ derselben Geraden parallel sind und $\boldsymbol{l} \neq \boldsymbol{o}$ ist, wird nach Satz 1 von S. 316

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\boldsymbol{l}, \tag{28}$$

wobei x eine bestimmte reelle Zahl ist. Man sieht leicht ein, daß die Zahl x gerade die gesuchte Projektion ist:

$$x = \mathrm{pr}_l \overrightarrow{AB}.$$

Aus der Beziehung (28) ergibt sich nämlich, daß der Betrag der Zahl x gleich der Länge der Strecke $\overrightarrow{A_1B_1}$ ist, wobei diese Zahl positiv ist, wenn die Vektoren $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\boldsymbol{l}$ gleichgerichtet sind, und negativ im entgegengesetzten Fall.

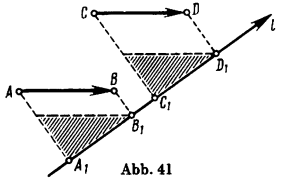


Abb. 41

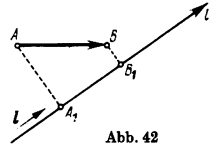


Abb. 42

3.2. Eigenschaften der Projektion. Die grundlegenden Eigenschaften der Projektion lassen sich durch nachstehende Gleichungen ausdrücken, in denen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ beliebige Vektoren sind und λ eine reelle Zahl bedeutet:

$$\mathrm{pr}_l(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{pr}_l\boldsymbol{a} + \mathrm{pr}_l\boldsymbol{b}, \tag{29}$$

$$\mathrm{pr}_l(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \mathrm{pr}_l\boldsymbol{a}. \tag{30}$$

Die Beziehungen (29) und (30) sind sehr leicht zu beweisen. Es sei $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$; dann ist $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$. Wir bezeichnen mit A_1, B_1, C_1 die Projektionen der Punkte A, B, C auf die Achse l. Nach (28) können wir dann schreiben:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x'\boldsymbol{l}, \quad \overrightarrow{B_1C_1} = x''\boldsymbol{l}, \quad \overrightarrow{A_1C_1} = x\boldsymbol{l},$$

wobei

$$x' = \mathrm{pr}_l\boldsymbol{a}, \quad x'' = \mathrm{pr}_l\boldsymbol{b}, \quad x = \mathrm{pr}_l(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

ist. Es gilt aber

$$x\boldsymbol{l} = \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = x'\boldsymbol{l} + x''\boldsymbol{l} = (x' + x'')\,\boldsymbol{l},$$

woraus $x = x' + x''$ folgt und womit die Beziehung (29) bewiesen ist. Ferner sei $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\lambda \boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB'}$. Wir projizieren die Punkte A, B, B' auf die Achse $\boldsymbol{l}$ und erhalten Punkte A_1, B_1, B_1' (Abb. 43a, b für $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$).

Aus der Parallelität der Geraden AA_1, BB_1, $B'B_1'$ ergibt sich $\overrightarrow{A_1B_1'} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$, und nach (28) wird

$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\boldsymbol{l}, \quad \overrightarrow{A_1B_1'} = x'\boldsymbol{l}$$

mit

$$x = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{a}, \quad x' = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{l}}(\lambda \boldsymbol{a}).$$

Somit ist

$$x'\boldsymbol{l} = \overrightarrow{A_1B_1'} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda(x\boldsymbol{l}) = (\lambda x)\,\boldsymbol{l},$$

woraus $x' = \lambda x$ folgt. Damit ist auch die Beziehung (30) bewiesen.

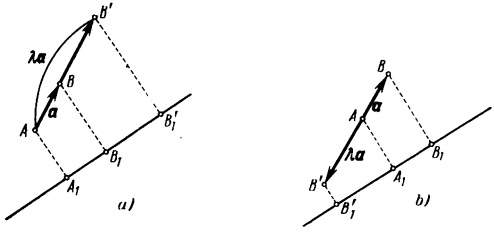


Abb. 43

3.3. Der Zusammenhang zwischen der Projektion und den Koordinaten. Der Zusammenhang zwischen der Projektion und den Koordinaten läßt sich unschwer erkennen. Dazu seien OX und OY zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen in der Ebene (oder OX, OY und OZ drei aufeinander senkrecht stehende Achsen im Raum), die ein *Koordinatensystem* bilden. [Meistens stellt man sich die Achse OX (oder die *Abszissenachse*) als horizontale, nach rechts gerichtete Gerade und die Achse OY (oder *Ordinatenachse*) als dazu senkrechte, nach oben gerichtete Gerade vor, im Raum richtet man die Achsen OX und OY in der Horizontalebene so, daß eine Drehung der Achse OX um O entgegen dem Uhrzeigersinn (von oben gesehen!) um 90° diese in die Achse OY (bei Berücksichtigung der Richtung der Achsen) überführt, und die Achse OZ (*Applikationsachse*) richtet man senkrecht zur Horizontalebene nach oben.] Mit $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ bezeichnen wir die sogenannten *Einheitsvektoren* in Richtung der Achsen OX und OY, d. h. die Vektoren der Länge 1, deren Richtung mit der Richtung der Achsen übereinstimmt (und entsprechend bezeichnen wir im Raum mit $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen OX, OY, OZ).

Ist nun $\boldsymbol{a}$ ein beliebiger Vektor der Ebene und sind (x, y) seine Koordinaten im System $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, so gelten die Beziehungen

$$x = \mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{a}, \quad y = \mathrm{pr}_{OY}\boldsymbol{a}. \tag{31}$$

Analog lassen sich im Raum die Koordinaten (x, y, z) eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{a}$ im System $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ durch Projektionen ausdrücken:

$$x = \mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{a}, \quad y = \mathrm{pr}_{OY}\boldsymbol{a}, \quad z = \mathrm{pr}_{OZ}\boldsymbol{a}. \tag{31a}$$

Es gilt nämlich (im Fall der Ebene)

$$\mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{a} = \mathrm{pr}_{OX}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \mathrm{pr}_{OX}(x\boldsymbol{i}) + \mathrm{pr}_{OX}(y\boldsymbol{j}) = x\,\mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{i} + y\,\mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{j} = x.$$

(da $\mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{i} = 1$, $\mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{j} = 0$ ist). Damit ist gezeigt, daß die erste der Formeln (31) gilt. Die zweite Formel sowie die Formeln (31a) beweist man analog.

3.4. Der Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen. Wir geben noch den Zusammenhang der Projektionen und Koordinaten von Vektoren der Ebene mit den trigonometrischen Funktionen an. Es sei XOY ein rechtwinkliges Koordinatensystem der Ebene. Ferner sei $\boldsymbol{l}$ der Vektor der Länge 1, der mit der Achse OX den Winkel φ bildet. Wie üblich vereinbaren wir, daß Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn angetragen werden (Abb. 44); im Uhrzeigersinn angetragene Winkel gelten als negativ. Dann gelten die Beziehungen

$$\sin\varphi = \mathrm{pr}_{OY}\boldsymbol{l}, \quad \cos\varphi = \mathrm{pr}_{OX}\boldsymbol{l}, \tag{32}$$

d. h., der Vektor $\boldsymbol{l}$ hat die Koordinaten $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Für einen spitzen Winkel φ folgen die Beziehungen (32) sofort aus der Definition der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck (wenn man beachtet, daß

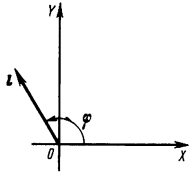


Abb. 44

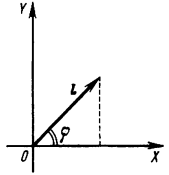


Abb. 45

die Hypothenuse die Länge 1 hat; Abb. 45); für einen beliebigen Winkel φ muß man sie als Erweiterung dieser Definition der Größen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ansehen, und zwar ist sie offenbar der Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis äquivalent; sie ist jedoch in dieser Form, wie wir später sehen werden, bedeutend bequemer.

Es sei nun $\boldsymbol{a}$ ein beliebiger Vektor. Wir bezeichnen seine Länge mit a und den Winkel, den er mit der Achse OX bildet, mit φ. Wie man leicht sieht,

haben dann die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{a}$ die Werte

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi. \tag{33}$$

Bezeichnet man nämlich mit $\boldsymbol{l}$ den Vektor der Länge 1, der dem Vektor $\boldsymbol{a}$ gleichgerichtet ist, so ist $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{l}$. Da der Vektor $\boldsymbol{l}$ die Koordinaten $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ besitzt, hat dann der Vektor $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{l}$ die in (33) angegebenen Koordinaten.

Aus den Beziehungen (33) ergibt sich leicht eine Formel zur Berechnung der Projektion eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{a}$ auf eine beliebige Achse l. Wir wählen die Achse l als Abszissenachse und errichten senkrecht zu ihr eine Ordinatenachse. Dann erhalten wir ein Koordinatensystem XOY, und die Zahl $\mathrm{pr}_l\boldsymbol{a}$ ist wegen (31) in diesem System die Abszisse des Vektors $\boldsymbol{a}$. Nach (33) hat diese Abszisse den Wert $a\cos\varphi$, wobei a die Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ und φ den Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und der Abszissenachse (d. h. der Achse l) bezeichnet. Es ist also

$$\mathrm{pr}_l\boldsymbol{a} = a\cos\varphi. \tag{34}$$

Es sei noch bemerkt, daß sich aus der oben für den Sinus und den Kosinus gegebenen Definition (32) leicht die bekannten Reduktionsformeln

$$\begin{aligned} \cos(-\varphi) &= \cos\varphi, & \sin(-\varphi) &= -\sin\varphi, \\ \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\varphi, & \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\varphi \end{aligned} \tag{35}$$

ergeben. Zwei Vektoren gleicher Länge, von denen der eine mit der Achse OX den Winkel φ und der andere mit OX den Winkel $-\varphi$ bildet, liegen nämlich

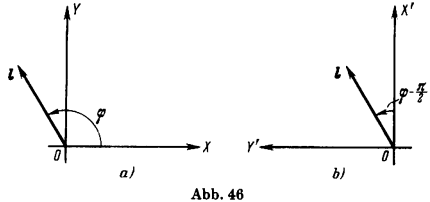


Abb. 46

bezüglich der Abszissenachse symmetrisch, und hieraus folgen bereits die ersten beiden Beziehungen (35). Wir betrachten ferner neben dem Koordinatensystem XOY (Abb. 46a) noch das Koordinatensystem $X'OY'$, das man aus jenem durch Drehung um den Winkel 90° entgegen dem Uhrzeigersinn erhält (Abb. 46b). Der Vektor $\boldsymbol{l}$ der Länge 1, der mit der Achse OX den Winkel φ bildet, bildet dann mit der Achse OX' den Winkel $\varphi - \frac{\pi}{2}$ und hat deshalb im System XOY die Koordinaten

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \tag{36}$$

während er im System $X'OY'$ die Koordinaten

$$x' = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad y' = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{37}$$

besitzt. Aus der Lage der Systeme XOY und $X'OY'$ ist aber ersichtlich, daß

$$x' = y, \quad y' = -x \tag{38}$$

ist (da die Achse OX' mit OY zusammenfällt und die Achse OY' der Achse OX entgegengesetzt ist). Aus (36), (37), (38) ergeben sich unmittelbar die letzten beiden Beziehungen (35).

Aus den Formeln (35) erhält man leicht alle übrigen Reduktionsformeln. Ersetzt man beispielsweise in den letzten beiden Formeln (35) den Winkel φ durch $\varphi + \frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin\varphi = -\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

ferner

$$\sin(\varphi + \pi) = \sin\left[\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi,$$

usw.

3.5. Beispiele. Die vorstehenden Ausführungen gestatten es, Vektoren zum Lösen von trigonometrischen Aufgaben heranzuziehen.

Beispiel 1. *Man zeige, daß in einem beliebigen Dreieck die Beziehung* (Abb. 47)

$$a = b\cos\sphericalangle C + c\cos\sphericalangle B$$

gilt. (Diese Beziehung heißt *Projektionsformel.*)

Lösung. Wir setzen

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{BA}$$

und bezeichnen mit l eine Achse, die mit dem Vektor $\boldsymbol{a}$ gleichgerichtet ist (Abb. 48). Dann bildet der Vektor $\boldsymbol{b}$ mit der Achse l den Winkel $\sphericalangle C$, der Vektor $\boldsymbol{c}$ bildet mit dieser Achse l den Winkel $\sphericalangle B$, und der Vektor $\boldsymbol{a}$ bildet mit der Achse l

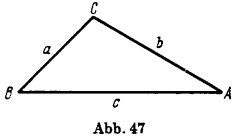


Abb. 47

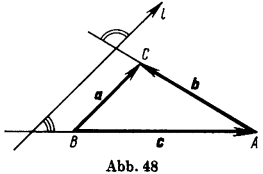


Abb. 48

einen Winkel mit dem Betrag Null. Mithin gilt nach (34)

$$\mathrm{pr}_l \boldsymbol{a} = a, \quad \mathrm{pr}_l \boldsymbol{b} = b \cos \sphericalangle C, \quad \mathrm{pr}_l \boldsymbol{c} = c \cos \sphericalangle B.$$

Weil außerdem $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$ ist, folgt aus (29) die behauptete Beziehung.

Beispiel 2. *Die Ausdrücke* $\cos\alpha \pm \cos\beta$ *und* $\sin\alpha \pm \sin\beta$ *sind als Produkte trigonometrischer Funktionen gewisser Winkel darzustellen.*

Lösung. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{l}_1$ den Vektor der Länge 1, der mit der Achse OX den Winkel α einschließt, und mit $\boldsymbol{l}_2$ den Vektor der Länge 1, der mit der Achse OX den Winkel β bildet. Dann hat der Vektor $\boldsymbol{l}_1$ die Koordinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, der Vektor $\boldsymbol{l}_2$ die Koordinaten $(\cos\beta, \sin\beta)$ und folglich der Vektor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2$ (Abb. 49) die Koordinaten

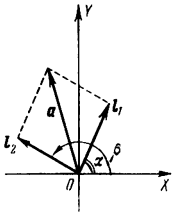


Abb. 49

$$x = \cos\alpha + \cos\beta, \quad y = \sin\alpha + \sin\beta \tag{39}$$

(vgl. S. 327 und S. 329). Weil aber der Vektor $\boldsymbol{a}$ mit den Vektoren $\boldsymbol{l}_1$ und $\boldsymbol{l}_2$ die Winkel $\pm\frac{\alpha-\beta}{2}$ bildet, haben wir

$$a = |\boldsymbol{a}| = \mathrm{pr}_a \boldsymbol{a} = \mathrm{pr}_a(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2) = \mathrm{pr}_a \boldsymbol{l}_1 + \mathrm{pr}_a \boldsymbol{l}_2$$
$$= 1 \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2 \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Mit der Achse OX bildet der Vektor $\boldsymbol{a}$ den Winkel $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Folglich haben die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{a}$ die Werte

$$\begin{aligned} x &= a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ y &= a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Aus (39) und (40) erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \end{aligned} \tag{41}$$

Vertauscht man hier β mit $\beta + \pi$ und benutzt die Reduktionsformeln, so erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Es sei noch bemerkt, daß wir aus (41) und (42), indem wir dort $\alpha = \varphi + \psi$ und $\beta = \varphi - \psi$ setzen, Ausdrücke für $\cos(\varphi \pm \psi)$ und $\sin(\varphi \pm \psi)$ in den trigonometrischen Funktionen der Winkel φ und ψ erhalten (vgl. auch S. 339). Die dargelegte Herleitung zeichnet sich dadurch aus, daß sie für beliebige Winkel $\alpha, \beta, \varphi, \psi$ gilt, unabhängig von deren Größe und Vorzeichen.

Aufgabe 6. *Man berechne die Summen*

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi, \tag{43a}$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi. \tag{43b}$$

Lösung. Wir konstruieren einen Streckenzug $OA_1A_2 \ldots A_{n+1}$, dessen einzelne Strecken die Länge 1 haben und fortlaufend um den äußeren Winkel φ gedreht sind (Abb. 50).

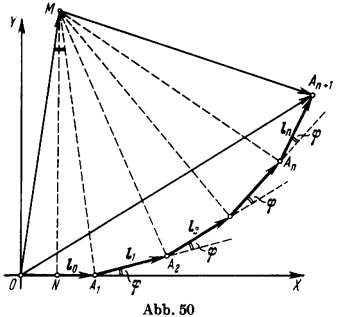


Abb. 50

Sodann wählen wir ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O, dessen Achse OX die Richtung des Vektors $\overrightarrow{OA_1}$ besitzt, und setzen

$$\boldsymbol{l}_0 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \boldsymbol{l}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}, \quad \boldsymbol{l}_2 = \overrightarrow{A_2A_3}, \ \ldots, \ \boldsymbol{l}_n = \overrightarrow{A_nA_{n+1}}.$$

Dann bildet mit der Achse OX der Vektor $\boldsymbol{l}_0$ den Winkel Null, der Vektor $\boldsymbol{l}_1$ den Winkel φ, der Vektor $\boldsymbol{l}_2$ den Winkel 2φ, usw., und schließlich der Vektor $\boldsymbol{l}_n$ den Winkel $n\varphi$. Folglich hat

der Vektor $\boldsymbol{l}_0$ die Koordinaten $(\cos 0, \sin 0)$ (d. h. 1 und 0),
der Vektor $\boldsymbol{l}_1$ die Koordinaten $(\cos\varphi, \sin\varphi)$,
der Vektor $\boldsymbol{l}_2$ die Koordinaten $(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$,
.....
der Vektor $\boldsymbol{l}_n$ die Koordinaten $(\cos n\varphi, \sin n\varphi)$.

Hieraus folgt, daß der Vektor $\boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \cdots + \boldsymbol{l}_n$ die Abszisse (43a) und die Ordinate (43b) hat. Es ist aber

$$\boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_1 + \cdots + \boldsymbol{l}_n = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{OA_{n+1}},$$

so daß die Koordinaten x und y des Vektors $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ die gesuchten Summen (43a) und (43b) ergeben. Zur Berechnung von x und y bezeichnen wir mit M den Mittelpunkt des Kreises, der durch die Punkte $O, A_1, \ldots, A_{n+1}$ geht, und fällen vom Punkt M aus das Lot MN auf die Strecke $\overline{OA_1}$. Dann gilt

$$|ON| = \frac{1}{2}, \quad \sphericalangle\, OMN = \frac{1}{2} \sphericalangle\, OMA_1 = \frac{1}{2}\varphi,$$

also

$$|OM| = \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Der Vektor $\overrightarrow{OM}$ bildet mit der Achse OX den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ und besitzt folglich die Koordinaten

$$x_1 = |OM| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = |OM| \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = |OM| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = |OM| \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2 \sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Ferner ist jeder der Winkel $A_1MA_2, A_2MA_3, \ldots$ gleich φ und deshalb $\sphericalangle\, A_1MA_{n+1} = n\varphi$. Also ist $\sphericalangle\, NMA_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi$, und somit bildet der Vektor $\overrightarrow{MA_{n+1}}$ mit der Achse OX den Winkel $\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{2}$. Weil aber $|MA_{n+1}| = |OM|$ ist, hat der Vektor $\overrightarrow{MA_{n+1}}$ die Koordinaten

$$x_2 = |OM| \cdot \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{2}\right] = |OM| \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$y_2 = |OM| \cdot \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{2}\right] = -|OM| \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi = -\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Schließlich hat der Vektor $\overrightarrow{OA_{n+1}} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_{n+1}}$ die Koordinaten

$$x = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2 \sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin\frac{\varphi}{2}},$$

und das sind die gesuchten Werte der Summen (43a) und (43b).

3.6. Definition und Eigenschaften des Skalarproduktes. Es seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei beliebige Vektoren. Als *Skalarprodukt* $\boldsymbol{ab}$ der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bezeichnet man die Zahl $a \cdot \mathrm{pr}_a \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{ab} = a \cdot \mathrm{pr}_a \boldsymbol{b}. \tag{44}$$

Diese Definition verliert ihren Sinn, wenn $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ ist, da dann die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ nicht definiert ist; in diesem Fall ist jedoch $a = 0$, und man gibt dem Skalarprodukt $\boldsymbol{ab}$ den Wert Null.

Aus (34) folgt, daß man das Skalarprodukt auch mit Hilfe der Beziehung

$$\boldsymbol{ab} = ab \cos \sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{45}$$

definieren kann, wobei $\sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bezeichnet. (Diese Definition setzt allerdings voraus, daß $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ ist.)

Ist $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, so nimmt das Skalarprodukt $\boldsymbol{ab}$ die Gestalt $\boldsymbol{aa}$ an; man spricht dann vom *skalaren Quadrat* des Vektors $\boldsymbol{a}$ und bezeichnet dieses auch mit $\boldsymbol{a}^2$. Aus (45) ergibt sich, daß das skalare Quadrat eines Vektors $\boldsymbol{a}$ gleich dem Quadrat seiner Länge ist:

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2. \tag{46}$$

Ferner folgt aus (45) sofort, daß die skalare Multiplikation kommutativ ist:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}. \tag{47}$$

Schließlich ergibt sich aus (44) leicht das Distributivgesetz für die skalare Multiplikation:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}, \tag{48}$$

und das Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl:

$$(\lambda \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a}(\lambda \boldsymbol{b}). \tag{49}$$

Wegen (29) und (30) gilt nämlich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= a\, \mathrm{pr}_a(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = a(\mathrm{pr}_a \boldsymbol{b} + \mathrm{pr}_a \boldsymbol{c}) \\ &= a\, \mathrm{pr}_a \boldsymbol{b} + a\, \mathrm{pr}_a \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}; \\ \boldsymbol{a}(\lambda \boldsymbol{b}) &= a\, \mathrm{pr}_a \lambda \boldsymbol{b} = a(\lambda\, \mathrm{pr}_a \boldsymbol{b}) = \lambda(a\, \mathrm{pr}_a \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{ab}). \end{aligned}$$

Die Beziehungen (46) bis (49) bilden die wichtigsten Eigenschaften der skalaren Multiplikation. Wir nennen noch eine weitere Eigenschaft: *Sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ verschieden vom Nullvektor, so ist $\boldsymbol{ab} = 0$ dann und nur dann, wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufeinander senkrecht stehen.* Das folgt unmittelbar aus (45).

Die Eigenschaften (47) bis (49) der skalaren Multiplikation sind den bekannten Rechenregeln für Zahlen sehr ähnlich. Daraus ergibt sich, daß man in vielen Fällen mit Vektoren genauso operieren kann wie mit Zahlen. Beispiels-

weise ist

$$(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}) = (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c}) + (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(-\boldsymbol{d})$$
$$= 6\boldsymbol{ac} + 3\boldsymbol{bc} - 2\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bd},$$
$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2,$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

usw. Darin besteht eigentlich auch die Bedeutung des Skalarproduktes: Einerseits ist es *geometrisch* von Interesse, da es die Länge von Strecken und die Größe von Winkeln auszudrücken gestattet; andererseits ist die skalare Multiplikation *algebraisch* vorteilhaft, da Rechnungen, die skalare Produkte enthalten, nach Regeln durchgeführt werden können, die aus der Arithmetik und Algebra wohlbekannt sind.

Es gibt jedoch auch wichtige Unterschiede zwischen der „Arithmetik der Vektoren" und der gewohnten Arithmetik der Zahlen. Vor allem sei bemerkt, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren kein Vektor ist, sondern ein Objekt anderer Art, nämlich eine Zahl (ein „Skalar"). Dieser Umstand unterbindet sogleich die Frage nach der Definition einer „Division von Vektoren" – dem Symbol $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ kann man keinerlei Sinn geben.[1]) Dieser gleiche Umstand hindert uns, das Produkt dreier Vektoren in Betracht zu ziehen; die Formel

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^3 = \boldsymbol{a}^3 + 3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{b}^3$$

läßt sich z. B. in keiner Weise auf das Gebiet der Vektoren übertragen. Während ferner in der gewöhnlichen Arithmetik der Zahlen ein Produkt zweier Zahlen nur dann verschwindet, wenn wenigstens einer der Faktoren verschwindet, ist das in der „Arithmetik der Vektoren" durchaus nicht so: Die Gleichung $\boldsymbol{ab} = 0$ kann auch bei $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ erfüllt sein (wenn nämlich die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zueinander orthogonal sind). Die letzte Bemerkung zieht noch einen wesentlichen Unterschied zwischen der „Arithmetik der Vektoren" und der gewöhnlichen Arithmetik nach sich: Vektorgleichungen dürfen nicht durch einen von Null verschiedenen Faktor dividiert werden. Während aus einer Gleichung $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc}$ für Zahlen a, b und $c \neq 0$ die Gleichheit $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ folgt, ergibt sich aus einer Gleichung

$$\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc} \quad (\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o})$$

lediglich $\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bc} = 0$ und $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = 0$, und dies gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ ist oder wenn der Vektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ auf dem Vektor $\boldsymbol{c}$ senkrecht steht.

Wir leiten noch eine Formel her, mittels der das Skalarprodukt aus den Koordinaten der Faktoren berechnet werden kann.

---

[1]) Man könnte wohl als „Quotienten $\frac{\alpha}{\boldsymbol{a}}$ der Division einer Zahl durch einen Vektor $\boldsymbol{a}$" einen Vektor $\boldsymbol{b}$ definieren, für den das Skalarprodukt $\boldsymbol{ab}$ gleich α ist; aber auch diese Operation „Division einer Zahl durch einen Vektor" hat keine ernsthafte Bedeutung (in erster Linie deshalb, weil der so definierte Vektor $\boldsymbol{b}$ nicht eindeutig bestimmt ist).

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem XOY habe der Vektor $\boldsymbol{a}$ die Koordinaten (x_1, y_1) und der Vektor $\boldsymbol{b}$ die Koordinaten (x_2, y_2). Dann gilt nach (25)

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j},$$

wobei $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ die längs der Koordinatenachsen gerichteten Einheitsvektoren sind. Wegen $\boldsymbol{i}^2 = 1, \boldsymbol{j}^2 = 1$ und $\boldsymbol{ij} = 0$ folgt daraus

$$\boldsymbol{ab} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j})(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}) = x_1x_2\boldsymbol{i}^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\boldsymbol{ij} + y_1y_2\boldsymbol{j}^2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Somit kann das Skalarprodukt zweier Vektoren der Ebene nach der Formel

$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{50}$$

berechnet werden, wobei (x_1, y_1) die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{a}$ und (x_2, y_2) die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{b}$ sind.

Ganz analog stellt man fest, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren des Raumes nach der Formel

$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{50a}$$

berechnet werden kann, wobei (x_1, y_1, z_1) die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{a}$ und (x_2, y_2, z_2) die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{b}$ sind.

Aus den Formeln (50), (50a) (die, wenn man will, auch als Definition des Skalarproduktes genommen werden können) lassen sich unschwer wieder alle seine Eigenschaften herleiten. So ergibt sich aus ihnen offenbar sofort, daß $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$ ist; außerdem ist bei $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, $\boldsymbol{c} = (x_3, y_3)$ (wir beschränken uns hier auf den einfacheren Fall der Ebene)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}) &= x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda x_1x_2 + \lambda y_1y_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\boldsymbol{ab}),\\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3\\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}\end{aligned}$$

usw. (vgl. die Beziehungen (49) und (48), S. 335).

3.7. Beispiele und Aufgaben. Wir zeigen nun an einigen Beispielen die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten des Skalarprodukts.

Beispiel 3. *Man zeige, daß für jedes Dreieck die Beziehung*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle C$$

gilt (*Kosinussatz*).

Lösung. Wir setzen

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CB}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{CA}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$$

(Abb. 51). Dann ist $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, und es gilt (wenn man beachtet, daß $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sphericalangle C$ ist)

$$c^2 = \boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 = a^2 - 2ab\cos\sphericalangle C + b^2.$$

Beispiel 4. *Man zeige, daß für jedes Dreieck die Beziehung*

$$\frac{\sin \sphericalangle A}{a} = \frac{\sin \sphericalangle B}{b} = \frac{\sin \sphericalangle C}{c}$$

gilt (Sinussatz).

Lösung. Wir behalten die Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe bei (Abb. 51). Dann ist

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit dem Vektor $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, so erhalten wir

$$\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ac} = \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}^2$$

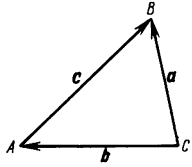


Abb. 51

oder

$$ab \cos \sphericalangle C - ac \cos \sphericalangle B = b^2 - c^2,$$

d. h.

$$a(b \cos \sphericalangle C - c \cos \sphericalangle B) = b^2 - c^2.$$

Setzt man hier für a den Ausdruck aus der Projektionsformel (Beispiel 1, S. 331) ein, so ergibt sich

$$(b \cos \sphericalangle C + c \cos \sphericalangle B)(b \cos \sphericalangle C - c \cos \sphericalangle B) = b^2 - c^2$$

oder

$$b^2 \cos^2 \sphericalangle C - c^2 \cos^2 \sphericalangle B = b^2 - c^2.$$

Wegen $1 - \cos^2 \sphericalangle C = \sin^2 \sphericalangle C$, $1 - \cos^2 \sphericalangle B = \sin^2 \sphericalangle B$ erhalten wir hieraus

$$b^2 \sin^2 \sphericalangle C = c^2 \sin^2 \sphericalangle B.$$

Da aber b, c, $\sin \sphericalangle C$, $\sin \sphericalangle B$ positiv sind, folgt aus der letzten Gleichung

$$b \sin \sphericalangle C = c \sin \sphericalangle B$$

oder

$$\frac{\sin \sphericalangle B}{b} = \frac{\sin \sphericalangle C}{c}.$$

Analog beweist man die Gleichung

$$\frac{\sin \sphericalangle A}{a} = \frac{\sin \sphericalangle C}{c}.$$

Es ist also in der Tat

$$\frac{\sin \sphericalangle A}{a} = \frac{\sin \sphericalangle B}{b} = \frac{\sin \sphericalangle C}{c}.$$

Beispiel 5. *Es sind* $\sin(\alpha \pm \beta)$ *und* $\cos(\alpha \pm \beta)$ *durch die Werte der trigonometrischen Funktionen für die Winkel* α *und* β *auszudrücken.*

Lösung. Es sei $\boldsymbol{l}_1$ der Einheitsvektor, der mit einer Achse OX den Winkel α, und $\boldsymbol{l}_2$ der Einheitsvektor, der mit der Achse OX den Winkel β bildet. Dann

schließen die Vektoren $\boldsymbol{l}_1$ und $\boldsymbol{l}_2$ miteinander den Winkel $\alpha - \beta$ ein, und es gilt [vgl. (45)]

$$\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{l}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Andererseits hat der Vektor $\boldsymbol{l}_1$ die Koordinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ und der Vektor $\boldsymbol{l}_2$ die Koordinaten $(\cos\beta, \sin\beta)$. Folglich gilt nach der Beziehung (50)

$$\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{l}_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Der Vergleich der beiden für $\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{l}_2$ gefundenen Werte ergibt

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Mit Hilfe der Reduktionsformeln (35) lassen sich hieraus die übrigen Beziehungen herleiten.

Aufgabe 7. *Man zeige, daß in einem beliebigen „Viereck" ABCD die „Diagonalen" AC und BD senkrecht aufeinander stehen, falls die gegenüberliegenden „Seiten" AB und CD sowie AD und BC aufeinander senkrecht stehen.*

Hier haben wir wieder in Abhängigkeit davon, ob die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen oder im Raum verteilt sind, zwei völlig verschiedene Aufgaben vor uns. Im ersten Fall lautet unsere Behauptung (Abb. 52): Ist $AB \perp CD$ und $AD \perp BC$ (d. h., sind CD und AD Höhen des Dreiecks ABC),

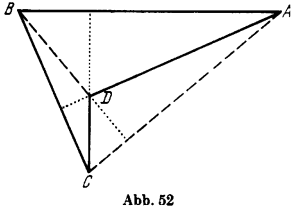


Abb. 52

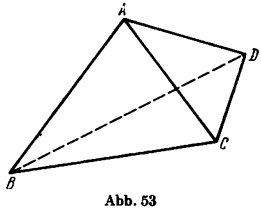


Abb. 53

so ist $BD \perp AC$ (und damit die dritte Höhe des Dreiecks); wir erhalten also den Satz, daß *sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.* Im zweiten Fall dagegen erhalten wir (Abb. 53): *Stehen die gegenüberliegenden Kanten AB und CD sowie AD und BC eines Vierflachs (Tetraeders) ABCD aufeinander senkrecht, so hat auch das dritte Paar gegenüberliegender Kanten AC und BD diese Eigenschaft* (Abb. 53).

Lösung. Es sei Q ein beliebiger Punkt. Nach Voraussetzung ist $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ und folglich $(\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA})\,(\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QC}) = 0$, d. h.

$$\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QC} = 0. \qquad (51)$$

Ebenso ist $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ und folglich $(\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QA})(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QB}) = 0$, d. h.

$$\overrightarrow{QD} \cdot \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD} \cdot \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 0. \tag{52}$$

Durch Addition von (51) und (52) erhalten wir

$$\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QD} = 0,$$

d. h.

$$(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA})(\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QB}) = 0$$

und folglich

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 8. *Man beweise, daß die Summe der Quadrate der „Diagonalen" $|AC|$ und $|BD|$ eines beliebigen „Vierecks" $ABCD$ gleich der Summe der Quadrate seiner „Seiten" $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$ und $|DA|$ vermindert um das Vierfache des Quadrats der die Mittelpunkte E und F der „Diagonalen" verbindenden Strecke ist, d. h.*

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - 4|EF|^2. \tag{53}$$

Mit anderen Worten:

a) Sind die Längen der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ eines (ebenen) Vierecks gleich a, b, c und d und die Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich e und f, so gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4|EF|^2,$$

wobei $\overline{EF}$ die Strecke ist, die die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks verbindet (Abb. 54; vgl. mit dem bekannten Satz, nach dem im Parallelogramm die Summe der Quadrate der Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der Diagonalenlängen ist).

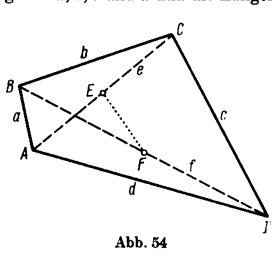


Abb. 54

b) Sind die Längen der gegenüberliegenden Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sowie $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ eines Vierflachs (Tetraeders) $ABCD$ gleich a und a_1, b und b_1 bzw. c und c_1, so wird die Länge der Strecke $\overline{EF}$, die die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ verbindet, durch die Beziehung

$$4|EF|^2 = a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2$$

gegeben (Abb. 55).

Lösung. Wir setzen

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{d}$$

(Abb. 56). Dann ist

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{DC} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b};$$

ferner ist

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

und somit

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}).$$

Damit kann man die Gleichung (53) in der Gestalt

$$\boldsymbol{d}^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b})^2 + \boldsymbol{b}^2 - 4\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}}{2}\right)^2$$

schreiben und braucht zu ihrem Beweis nur noch auf beiden Seiten dieser Vektorgleichung die Klammern aufzulösen.

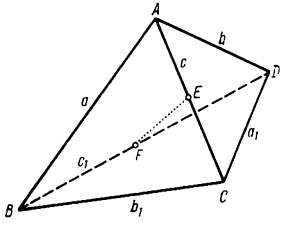


Abb. 55

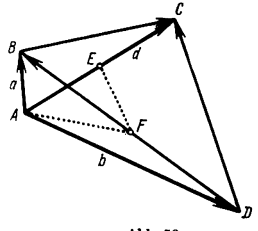


Abb. 56

Aufgabe 9. *Es sei ABCD ein beliebiges „Viereck"; $\overline{KL}$ und $\overline{MN}$ seien seine „Mittellinien", die die Mittelpunkte der „Seiten" $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ miteinander verbinden; φ sei der Winkel zwischen den „Diagonalen" $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Man zeige, daß*

$$(|AB|^2 + |CD|^2) - (|AD|^2 + |BC|^2) = 2(|KL|^2 - |MN|^2) = 2 \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \cos\varphi$$

gilt.

Mit anderen Worten:

a) Sind die Längen der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ des Vierecks *ABCD* gleich a, b, c und d, die Längen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich e und f und

ist der Winkel zwischen den Diagonalen gleich φ, so gilt

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2ef\cos\varphi = 2(|KL|^2 - |MN|^2),$$

wobei $\overline{KL}$ und $\overline{MN}$ die Mittellinien des Vierecks sind (Abb. 57). Hieraus folgt insbesondere, daß die nachstehenden drei Eigenschaften eines Vierecks $ABCD$ einander äquivalent sind (d. h. aus der Gültigkeit einer dieser Eigenschaften stets die Gültigkeit der übrigen beiden folgt):

1. Die Diagonalen eines Vierecks stehen aufeinander senkrecht;
2. die Mittellinien eines Vierecks haben dieselbe Länge;
3. die Summe der Quadrate der Längen zweier gegenüberliegender Seiten eines Vierecks ist gleich der Summe der Längen der Quadrate der beiden anderen Seiten.

b) Sind die Längen der gegenüberliegenden Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sowie $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ eines Vierflachs (Tetraeders) gleich a und a_1, b und b_1

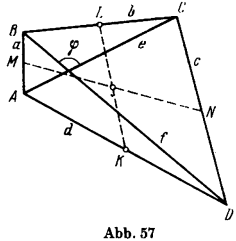


Abb. 57

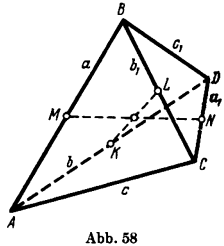


Abb. 58

bzw. c und c_1 und ist der Winkel zwischen den Kanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich φ, so gilt

$$(a^2 + a_1^2) - (b^2 + b_1^2) = 2cc_1\cos\varphi = 2(|KL|^2 - |MN|^2),$$

wobei $\overline{MN}$ und $\overline{KL}$ die Strecken sind, die die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ verbinden (Abb. 58).

Aus diesem Satz folgt insbesondere die Äquivalenz der folgenden drei Eigenschaften eines Tetraeders $ABCD$:

1. Die gegenüberliegenden Kanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sind zueinander senkrecht;
2. die Strecken $\overline{MN}$ und $\overline{KL}$, die die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ miteinander verbinden, haben dieselbe Länge;
3. die Summen der Quadrate der Längen der gegenüberliegenden Kanten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sowie $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind einander gleich.

Lösung. Wir behalten die bei der Lösung der vorhergehenden Aufgabe eingeführten Bezeichnungen bei. Wir haben dann (vgl. Abb. 56, 57)

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}), \quad \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}),$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}), \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}).$$

Somit gilt

$$(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2) - (\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2) = [\boldsymbol{a}^2 + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b})^2] - [\boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a})^2]$$

$$= 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{d} - 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB},$$

$$2(\overrightarrow{KL}^2 - \overrightarrow{MN}^2) = 2\left[\left(\frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}}{2}\right)^2 - \left(\frac{-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}}{2}\right)^2\right] = 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{d} - 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}$$

$$= 2\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

Nunmehr ist nur noch die Beziehung (45) anzuwenden.

3.8. Die Eindeutigkeit des Skalarproduktes. Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir uns noch mit der folgenden Frage beschäftigen: Die Definition (44) oder (45) des Skalarproduktes mag mehr oder weniger zufällig anmuten. Es ist durch keinerlei hinreichend überzeugende Überlegungen motiviert worden, daß sie sich in irgendeiner natürlichen Weise von selbst anbietet. Die einfachen Eigenschaften (47), (48), (49) des Skalarproduktes überzeugen uns davon, daß es sinnvoll ist, diese Operation zu untersuchen. Es ist jedoch von vornherein unklar, ob es nicht ebenso „gute" andere „Produkte von Vektoren" gibt, d. h. andere Verfahren, durch die je zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ eine Zahl $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ zugeordnet wird (hier wird durch den kleinen Kreis eine uns vorläufig unbekannte Operation „Multiplikation von Vektoren" versinnbildlicht), so daß die zu (47) bis (49) analogen Bedingungen

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}, \tag{54}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \circ (\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}), \tag{55}$$

$$\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c} \tag{56}$$

erfüllt sind.

Natürlich ist es wünschenswert, neben der Gültigkeit der Bedingungen (54) bis (56) noch zu fordern, daß die Zahl $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ einen geometrischen Sinn hat, d. h. für Paare von Vektoren $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ und $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \boldsymbol{b}_1$, die einander „gleich" sind (wo also das eine Paar durch eine Bewegung in das andere übergeführt werden kann[1]), stets

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \circ \boldsymbol{b}_1 \tag{57}$$

gilt.

Wir wollen zeigen, daß im Fall der Geometrie des Raumes bereits die Bedingungen (55), (56) und (57) fast eindeutig zum Skalarprodukt von Vektoren führen. In der Ebene sieht es dagegen anders aus: Hier sind zur Auszeichnung des Skalarproduktes von Vektoren alle vier Bedingungen (54) bis (57) wirklich notwendig. Im folgenden Paragraphen werden wir nämlich ein vom Skalarprodukt verschiedenes „Produkt" von Vektoren der Ebene betrachten, das den Bedingungen (55) bis (57), nicht aber der Bedingung (54) genügt.

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", S. 92 ff.

Es ist zunächst klar, daß aus $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{b}^0$, wobei $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{b}^0$ Einheitsvektoren (Vektoren der Länge 1) sind, wegen (55)

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = (a\boldsymbol{a}^0) \circ (b\boldsymbol{b}^0) = ab(\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{b}^0) \tag{58}$$

folgt. Somit braucht man, um $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ allgemein zu kennen, nur alle Produkte von Einheitsvektoren zu kennen. Sind ferner $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{c}^0$ beliebige Einheitsvektoren, die aufeinander senkrecht stehen, so ist in der Geometrie des Raumes das Paar aus den Vektoren $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}^0$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}^0$ „gleich" dem Paar aus den Vektoren $\overrightarrow{OA_1} = -\boldsymbol{a}^0$, $\overrightarrow{OC_1} = \boldsymbol{c}^0$ (denn das eine Paar wird in das andere durch eine Drehung um $\overrightarrow{OC}$ mit dem Winkel 180° übergeführt). Mithin ist in diesem Fall wegen (57) und (55)

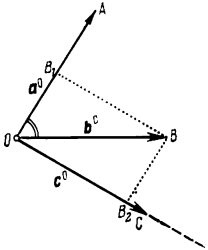


Abb. 59

$$\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{c}^0 = (-\boldsymbol{a}^0) \circ \boldsymbol{c}^0 = -(\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{c}^0)$$

und somit

$$\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{c}^0 = 0. \tag{59}$$

Außerdem haben die „Quadrate" $\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{a}^0$ aller Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}^0$ [ebenfalls wegen (57)] denselben Wert δ:

$$\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{a}^0 = \delta. \tag{60}$$

Es seien nun $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}^0$ und $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}^0$ zwei beliebige Einheitsvektoren, und es sei $\sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)$ der Winkel zwischen ihnen (Abb. 59). Sind B_1 und B_2 die Projektionen des Punktes B auf die Gerade OA und auf die zu ihr senkrechte (und in der Ebene OAB liegende) Gerade OC, so ist offenbar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}^0 &= \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} \\ &= \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot \boldsymbol{a}^0 + \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot \boldsymbol{c}^0,\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{c}^0$ der Einheitsvektor in der Richtung von $\overrightarrow{OC}$ ist. Wegen (56), (55), (60) und (59) erhalten wir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{b}^0 &= \boldsymbol{a}^0 \circ [\cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot \boldsymbol{a}^0 + \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot \boldsymbol{c}^0] \\ &= \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot (\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{a}^0) + \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot (\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{c}^0) = \delta \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0).\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir noch (58), so erhalten wir für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \delta \cdot ab \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Wir sind damit zu einem Ausdruck für $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ gelangt, der sich von dem für das Skalarprodukt (45) zweier Vektoren nur durch einen beliebigen (aber festen) Faktor δ unterscheidet.

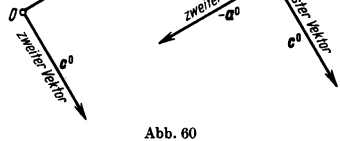


Abb. 60

In unserer Überlegung benutzten wir nirgends die Gleichung (54). Betrachtet man jedoch Vektoren nicht des Raumes, sondern der Ebene und läßt dementsprechend nur die Paare von Vektoren als „gleich" gelten, die durch eine Bewegung in der Ebene ineinander übergeführt werden können, so trifft die Schlußfolgerung, daß die Paare a^0, c^0 und $-a^0, c^0$ (mit $a^0 = c^0 = 1$, $a^0 \perp c^0$) einander „gleich" sind, bereits nicht mehr zu. In diesem Fall sind nur die Paare a^0, c^0 und $c^0, -a^0$ einander gleich (man erhält das eine aus dem andern durch Drehung um den gemeinsamen Anfangspunkt O der Vektoren mit dem Winkel 90°, Abb. 60). Hieraus folgt

$$a^0 \circ c^0 = c^0 \circ (-a^0) = -(c^0 \circ a^0),$$

und wenn nun noch die Bedingung (54) gilt, erhalten wir wieder

$$a^0 \circ c^0 = -(a^0 \circ c^0), \quad \text{d. h.} \quad a^0 \circ c^0 = 0.$$

Wenn man nicht fordert, daß die Bedingung (54) erfüllt ist, läßt sich (59) nicht beweisen (vgl. S. 357–358).

§ 4. Das Schiefprodukt von Vektoren der Ebene

4.1. Orientierte Flächeninhalte und das Schiefprodukt von Vektoren. Bisher betrachteten wir Vektoren der Ebene und Vektoren des Raumes stets nebeneinander; die Unterschiede zwischen diesen beiden Fällen waren für uns ganz unwesentlich. Im weiteren werden wir jedoch die Geometrie der Ebene und die Geometrie des Raumes getrennt voneinander betrachten, da sich in den nun zu untersuchenden Fragen die Unterschiede zwischen beiden sehr stark bemerkbar machen. In diesem Paragraphen soll nur von *Vektoren der Ebene* die Rede sein.

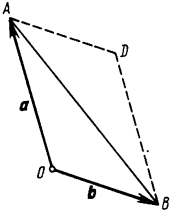


Abb. 61

Rufen wir uns die Definition des Skalarproduktes ins Gedächtnis zurück: Das Skalarprodukt ab zweier Vektoren a und b ist eine Zahl, die diesen zwei Vektoren auf bestimmte Weise zugeordnet wurde. Die geometrische Deutung dieser Zahl ist nicht ganz einfach – sie besteht in der Beziehung (45) oder in der nicht weniger weithergeholten Beziehung (44). Die Bedeutung des Skalarproduktes (sowie die Berechtigung, diese Zahl mit dem Wort „Produkt", das gewöhnlich einen ganz anderen Sinn hat, zu belegen) leitet sich nur aus den Eigenschaften (47), (48) und (49) des Skalarproduktes her, die den gewohnten Eigenschaften der Multiplikation von Zahlen sehr ähnlich sind. Hier definieren wir ein weiteres „Produkt von Vektoren", das fast ebenso einfache Eigenschaften besitzt.

Es versteht sich von selbst, daß man zwei Vektoren auf ganz verschiedene Weise eine Zahl zuordnen kann.

So kann man beispielsweise je zwei Vektoren a, b den Flächeninhalt des von den Vektoren a und b aufgespannten Dreiecks OAB oder Parallelogramms

$OADB$ (Abb. 61) zuordnen. Der Vorschlag, den Flächeninhalt S_{OADB} als neues „Produkt" der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zu definieren, scheint auf den ersten Blick wenig begründet zu sein.

Wir prüfen aber trotzdem einmal nach, ob die Größe S_{OADB} (die wir auch mit $S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ bezeichnen wollen) Eigenschaften besitzt, die den Eigenschaften (47) bis (49) des Skalarproduktes analog sind. Offenbar gilt zunächst

$$S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = S_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}. \tag{61}$$

Aber schon die einfache Eigenschaft (49) des Skalarproduktes gilt für $S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ nur dann, wenn der Faktor λ positiv ist:

$$S_{\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = S_{\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}} = \lambda S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \quad \text{für} \quad \lambda > 0,$$

aber

$$S_{\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = S_{\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}} = |\lambda|\, S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = -\lambda S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \quad \text{für} \quad \lambda < 0 \tag{62}$$

(vgl. Abb. 62).

Um dem abzuhelfen, vereinbaren wir, den Flächeninhalt des „orientierten Parallelogramms", das von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird, zu betrachten, d. h., wir nehmen den Flächeninhalt $OADB$ positiv, wenn der Vektor $\boldsymbol{b}$

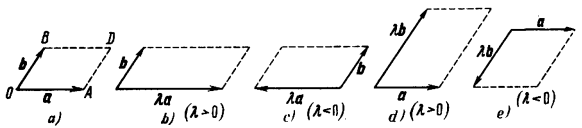


Abb. 62

links vom Vektor $\boldsymbol{a}$ liegt (dabei blicken wir in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$), und negativ im entgegengesetzten Fall. Mit anderen Worten: Der Flächeninhalt $OADB$ wird als positiv angesehen, wenn die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der

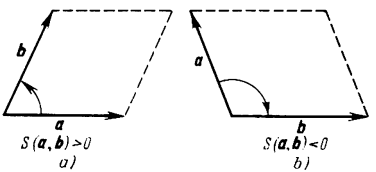


Abb. 63

Richtung des Vektors $\boldsymbol{b}$ durch eine Drehung des Vektors $\boldsymbol{a}$ entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Winkel, der kleiner als 180° ist, zur Deckung gebracht werden kann (Abb. 63a), und als negativ, wenn die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ durch eine Drehung dieses Vektors im Uhrzeigersinn um einen Winkel, der

kleiner als 180° ist, in die Richtung des Vektors $\boldsymbol{b}$ übergeht (Abb. 63b). Gehören schließlich die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ der gleichen Geraden an, so wird der Flächeninhalt des von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten „Parallelogramms" gleich Null gesetzt. Diese neue Größe bezeichnen wir vorläufig mit $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Man sieht leicht, daß für die Größe $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ dann eine der Eigenschaft (49) des Skalarproduktes analoge Regel gilt:

$$S(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b}) = \lambda S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad \text{für beliebiges } \lambda \tag{63}$$

(denn die Orientierung des von den Vektoren $\lambda \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ oder den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\lambda \boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms stimmt für $\lambda > 0$ mit der Orientierung des Ausgangsparallelogramms $OADB$ überein, während sie für $\lambda < 0$ zu dieser

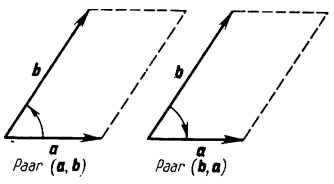


Abb. 64

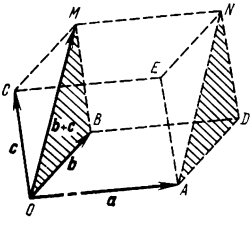


Abb. 65

entgegengesetzt ist; vgl. Abb. 62a–e). An die Stelle der einfachen Beziehung (61) tritt nun jedoch die etwas kompliziertere Beziehung

$$S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{64}$$

(denn die von den Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}$ aufgespannten Parallelogramme sind verschieden orientiert; vgl. Abb. 64).

Wenden wir uns nun der Eigenschaft (48) des Skalarproduktes zu. Wir behaupten, daß auch für die Größe $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ eine analoge Eigenschaft gilt:

$$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}). \tag{65}$$

Den vollständigen Beweis dieser Gleichung stellen wir vorerst zurück; wir wollen sie hier nur für den Spezialfall nachprüfen, daß die Größen $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ und $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ sämtlich positiv sind. Es gilt in der Tat (Abb. 65)

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) &= S_{OADB} + S_{OAEC} = S_{OADB} + S_{BDNM} \\ &= S_{OADNMB} = S_{OANM} = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

(denn es ist $S_{\triangle OBM} = S_{\triangle ADN}$, da die Dreiecke OBM und ADN einander kongruent sind).

Man könnte die Beziehung (65) allgemein beweisen, indem man ganz analog die anderen Möglichkeiten für die Vorzeichen von $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ und $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ betrachtet. Wir wollen das jedoch nicht ausführen, sondern werden später einen völlig anderen Beweis geben.

Die Gleichungen (63), (64) und (65) sehen wir als eine ausreichende Begründung an, der Größe $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ die Bezeichnung „Produkt" zu geben. Wir nennen $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ das *Schiefprodukt*[1]) der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und verwenden dafür die Bezeichnung $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Die Gleichungen (64), (65) und (63) können dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \tag{66}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \tag{67}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{68}$$

Das Schiefprodukt ist also bezüglich der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl assoziativ [vgl. (68)] und bezüglich der Addition von Vektoren distributiv [vgl. (67)], es ist aber nicht kommutativ, sondern antikommutativ (so drückt man die Gleichung (66) in Worten aus). Es sei noch bemerkt, daß sich aus der bekannten Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms die Beziehung

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = ab \sin \sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{69}$$

ergibt, wobei aber unter $\sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ nunmehr der orientierte Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zu verstehen ist, d. h. der Winkel, wie er in der Trigonometrie definiert wird. (Der Winkel $\sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varphi$ ist positiv, wenn die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der Richtung des Vektors $\boldsymbol{b}$ durch eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel φ zur Deckung gebracht werden kann, und negativ, wenn der Vektor $\boldsymbol{a}$ durch eine Drehung im Uhrzeigersinn um den Winkel φ die Richtung des Vektors $\boldsymbol{b}$ einnimmt.) Daß wir in der Beziehung (45) unter $\sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ den nichtorientierten Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ verstanden haben, also in den Beziehungen (45) und (69) verschiedene Größen mit dem gleichen Symbol bezeichnet werden, braucht uns nicht weiter zu stören; denn wir können annehmen, daß auch in der Beziehung (45) unter $\sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ der orientierte Winkel verstanden wird (es ist nämlich $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$).

Aus der Beziehung (69) ergibt sich insbesondere, daß das Schiefprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ dann und nur dann gleich Null ist, wenn einer dieser beiden Vektoren der Nullvektor ist (in diesem Fall kann man nicht von einer Richtung dieses Vektors sprechen) oder wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel sind (und somit der Winkel φ gleich 0° oder 180° ist). Insbesondere ist das „Schiefquadrat" eines Vektors immer gleich Null:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0. \tag{70}$$

[1]) In der Literatur findet man dafür auch die Bezeichnung *Pseudoskalarprodukt*.

Dieser Sachverhalt ist oft von Bedeutung. Es sei noch folgende einfache Beziehung angeführt, die das Skalarprodukt und das Schiefprodukt zweier Vektoren miteinander verknüpft:

$$(\boldsymbol{ab})^2 + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \quad (= a^2b^2); \tag{71}$$

diese Beziehung ergibt sich sofort aus (45) und (69).

Die Rechenregeln (66) bis (68) für das Schiefprodukt gestatten es, bei Multiplikation von Linearkombinationen von Vektoren die Klammern aufzulösen. Zum Beispiel ist

$$(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}) \times (2\boldsymbol{d} \cdot 5\boldsymbol{e})$$
$$= 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} - 5\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e} + 4\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d} - 10\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e} - 6\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} + 15\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{e}.$$

Man muß dabei allerdings beachten, daß bei jeder Vertauschung in der Reihenfolge der zu multiplizierenden Vektoren im Schiefprodukt jedesmal eine Vorzeichenänderung eintritt, da ja hier die Multiplikation nicht kommutativ, sondern antikommutativ ist. Das führt zu einer eigenartigen Entstellung der aus der gewöhnlichen Algebra bekannten Beziehungen; z. B. ist

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$
$$= 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

(denn es ist $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 0$). Abb. 66 veranschaulicht diese letzte Formel: Der Flächeninhalt des Parallelogramms $OEFG$, das von den Diagonalen $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ und $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ eines Parallelogramms $ABCD$ aufgespannt

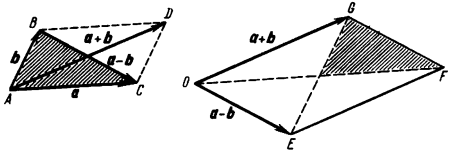


Abb. 66

wird, ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$. Schließlich sei noch bemerkt, daß die Bedingung für das Verschwinden des Schiefproduktes zweier Vektoren die Unzulässigkeit des „Kürzens" in Gleichungen von Schiefprodukten mit gleichen (vektoriellen) Faktoren nach sich zieht: Aus der Gleichung

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

folgt nur $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = 0$, d. h., daß einer der „Faktoren" $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ oder $\boldsymbol{c}$ gleich Null ist oder $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \| \boldsymbol{c}$ gilt.

4.2. Die Analogie zwischen Schief- und Skalarprodukt. Die Analogie zwischen Skalar- und Schiefprodukt, die in der formalen Ähnlichkeit der Beziehungen (48) und (67), (49) und (68) sowie darin zum Ausdruck kommt, daß

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 0 \quad &\text{genau dann, wenn} \quad \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \quad &\text{genau dann, wenn} \quad \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}, \end{aligned}$$ [1])

zieht eine merkwürdige „Dualität" der Begriffe orthogonal (senkrecht) und parallel nach sich, die es gestattet, in manchen Sätzen das Wort „senkrecht" mit dem Wort „parallel" zu vertauschen und umgekehrt, ohne die Gültigkeit der Sätze zu beeinträchtigen. Als Beispiel betrachten wir folgenden einfachen Satz: Sind ABC und $A_1B_1C_1$ zwei Dreiecke, so daß die Geraden, die durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC senkrecht/parallel zu den entsprechenden gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ verlaufen (d. h. durch den Eckpunkt A senkrecht oder parallel zu der Seite B_1C_1 usw.), sich in einem Punkt O schneiden, dann schneiden sich auch die Geraden, die durch die Eckpunkte des Dreiecks

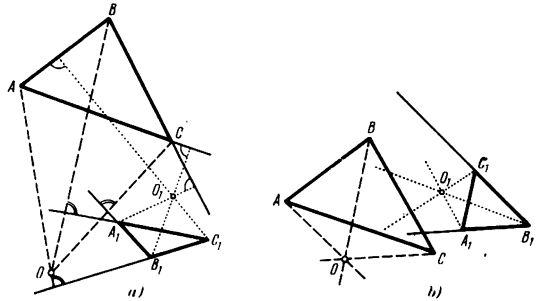


Abb. 67

$A_1B_1C_1$ senkrecht/parallel zu den entsprechenden gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks ABC verlaufen, in einem Punkt O_1 (Abb. 67a, b).

Um nicht ein und dieselben Berechnungen zweimal ausführen zu müssen, vereinbaren wir, mit $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ das Skalar- oder Schiefprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zu bezeichnen.

Wir setzen $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$; $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \boldsymbol{b}_1$, $\overrightarrow{OC_1} = \boldsymbol{c}_1$. Dann folgt aus den Bedingungen des Satzes $\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{c}_1) = 0$, d. h.

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c}_1 \tag{a}$$

[1]) Im Sinne der Elementargeometrie ist diese Feststellung nur dann richtig, wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ beide vom Nullvektor verschieden sind (da der Nullvektor keine Richtung besitzt). Der genannte Sachverhalt wird allgemein richtig, wenn man vereinbart, daß der Nullvektor als zu jedem anderen Vektor senkrecht (orthogonal) und parallel angesehen werden soll. Diese Vereinbarung erweist sich in der Geometrie für viele Betrachtungen als sinnvoll und nützlich und wird daher in der höheren Geometrie meistens getroffen. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

und analog

$$\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}_1, \tag{b}$$

$$\boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{b}_1. \tag{c}$$

Es sei ferner $\overrightarrow{OO_1} = \boldsymbol{r}$, wobei O_1 der Schnittpunkt der Geraden ist, die durch die Eckpunkte A_1 und B_1 senkrecht/parallel zu den Geraden BC bzw. CA verlaufen; wir müssen zeigen, daß $OO_1 \perp\!\!\!\perp AB$ gilt. Aus der Definition des Punktes O_1 folgt

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \circ (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{r}, \tag{d}$$

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \circ (\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{r}) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{r}. \tag{e}$$

Addieren wir nun die Gleichungen (d) und (e) und berücksichtigen wir dabei, daß wegen (a) bis (c) $\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c}_1$ gilt, so finden wir $\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{r}$ oder $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \circ (\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{r}) = 0$, woraus sich die Behauptung des Satzes ergibt.

4.3. Weitere Eigenschaften des Schiefproduktes. Die Beziehung (67) wurde bisher noch nicht vollständig bewiesen. Für diesen Beweis bemerken wir, daß das Schiefprodukt von Vektoren auf ein Skalarpunkt (anderer!) Vektoren zurückgeführt werden kann:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}]\, \boldsymbol{b}, \tag{72}$$

wobei der Vektor $[\boldsymbol{a}]$[1]) aus dem Vektor $\boldsymbol{a}$ durch eine Drehung um 90° im positiven Sinne (also entgegen dem Uhrzeigersinn; Abb. 68) hervorgeht. Das folgt sofort aus den Beziehungen (45) und (69). In der Tat: Bezeichnet $[a]$ die Länge des Vektors $[\boldsymbol{a}]$, so gilt offensichtlich

$$[a] = a \quad \text{und} \quad \sphericalangle([\boldsymbol{a}], \boldsymbol{b}) = \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 90°,$$

$$\cos \sphericalangle([\boldsymbol{a}], \boldsymbol{b}) = \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Hieraus folgt

$$[\boldsymbol{a}]\, \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}]\, b \cos \sphericalangle([\boldsymbol{a}], \boldsymbol{b}) = ab \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= [\boldsymbol{a}]\, (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{a}]\, \boldsymbol{b} + [\boldsymbol{a}]\, \boldsymbol{c} \\ &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

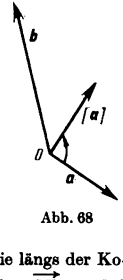


Abb. 68

Wir wollen nun das Schiefprodukt zweier Vektoren durch Koordinaten ausdrücken. Es seien dazu (x, y) und (x_1, y_1) die Koordinaten der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$; dabei wählen wir die längs der Koordinatenachsen gerichteten Einheitsvektoren $\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OE_1}$ und $\boldsymbol{j} = \overrightarrow{OE_2}$ so, daß

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = S(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}) = 1$$

[1]) Die Bezeichnungsweise $[\boldsymbol{a}]$ für den Vektor, den man aus dem Vektor $\boldsymbol{a}$ durch eine Drehung um 90° erhält, mag auf den ersten Blick etwas seltsam erscheinen; sie steht jedoch im Einklang mit später (auf S. 362 und S. 387) eingeführten Bezeichnungen.

ist (Abb. 69; man braucht hier nicht zu verlangen, daß die Koordinatenachsen $\overline{OE_1}$ und $\overline{OE_2}$ unbedingt senkrecht aufeinander stehen oder daß die Strecken $\overline{OE_1}$ und $\overline{OE_2}$ beide die Länge 1 haben). Dann gilt offenbar

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \times (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}) = xx_1(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) + xy_1(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) + yx_1(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}) + yy_1(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}).$$

Da aber $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0$ und nach Voraussetzung $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = 1$ ist, erhalten wir schließlich

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = xy_1 - yx_1. \tag{73}$$

Die Beziehung (73) kann man auch als Definition des Schiefproduktes ansehen. Aus ihr ergibt sich sofort

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = yx_1 - xy_1 = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = x(y_1 + y_2) - y(x_1 + x_2) = (xy_1 - yx_1) + (xy_2 - yx_2)$$

$$= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

(der Vektor $\boldsymbol{c}$ hat hier die Koordinaten (x_2, y_2)) und

$$\boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b}) = x(\lambda y_1) - y(\lambda x_1) = \lambda(xy_1 - yx_1) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

[vgl. (66) bis (68)].

Die Gleichung (73) kann auch in der Gestalt

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} \tag{74}$$

geschrieben werden; in dieser Schreibweise ist sie gleichbedeutend mit der bekannten geometrischen Interpretation der zweireihigen Determinante als Flächeninhalt des orientierten Parallelogramms, das von den Vektoren aufgespannt wird, deren Koordinaten in den Spalten der Determinante stehen.[1]) Man kann dann die Eigenschaften (66) bis (68) als (wohlbekannte) Eigenschaften der Determinanten ansehen:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \quad \text{wegen} \quad \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & x \\ y_1 & y \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \quad \text{wegen} \quad \begin{vmatrix} x & x_1 + x_2 \\ y & y_1 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x_2 \\ y & y_2 \end{vmatrix},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \quad \text{wegen} \quad \begin{vmatrix} \lambda x & x_1 \\ \lambda y & y_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix}.$$

[1]) Vgl. § 1 des Artikels „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM.

Die Beziehung (71) kann man schließlich als Regel für das Quadrieren einer zweireihigen Determinante auffassen[1]):

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & xx_1 + yy_1 \\ xx_1 + yy_1 & x_1^2 + y_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2. \quad (71')$$

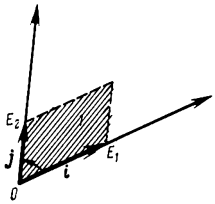


Abb. 69

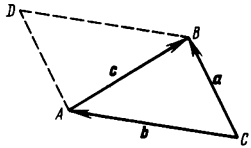


Abb. 70

4.4. Beispiele und Aufgaben. Wir behandeln nun einige Beispiele und Aufgaben, in denen das Schiefprodukt von Vektoren Anwendung findet.

Beispiel 6. *Aus den Seitenlängen eines Dreiecks ABC ist sein Flächeninhalt zu berechnen.*

Lösung. Wir setzen $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$. Dann gilt offenbar (Abb. 70)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{CBDA} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}| = \frac{1}{2} \cdot |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|, \quad (75)$$

woraus sich

$$(S_{\triangle ABC})^2 = \frac{1}{4} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2$$

ergibt. Wegen (71) ist aber

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2$$

und mithin

$$(S_{\triangle ABC})^2 = \frac{1}{4} [\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2].$$

Andererseits ist

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

und folglich

$$\boldsymbol{ab} = \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}^2}{2} = \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}^2}{2}.$$

[1]) Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1c_1 + a_2c_2 & a_1d_1 + a_2d_2 \\ b_1c_1 + b_2c_2 & b_1d_1 + b_2d_2 \end{vmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$(S_{\triangle ABC})^2 = \frac{1}{4}\left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{16}[2ab + (a^2 + b^2 - c^2)]\,[2ab - (a^2 + b^2 - c^2)]$$

$$= \frac{1}{16}[(a + b)^2 - c^2]\,[c^2 - (a - b)^2]$$

$$= \frac{1}{16}(a + b + c)\,(a + b - c)\,(a + c - b)\,(b + c - a)$$

oder, wenn man $a + b + c = 2p$ setzt,

$$S^2 = p(p - a)\,(p - b)\,(p - c).$$

Das ist die bekannte *Heronsche Formel* für den Flächeninhalt eines Dreiecks.

Aufgabe 10. *Es seien L, M, N die Punkte der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC, für die*

$$\overrightarrow{BL} = \lambda_1 \overrightarrow{LC}, \quad \overrightarrow{CM} = \lambda_2 \overrightarrow{MA}, \quad \overrightarrow{AN} = \lambda_3 \overrightarrow{NB}$$

gilt (Abb. 71). *Man bestimme unter der Voraussetzung, daß der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich S ist, den Flächeninhalt des Dreiecks LMN.*

Lösung. Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie in Beispiel 6. Wegen der Beziehung (23) (S. 317) gilt

$$\overrightarrow{CL} = \frac{\boldsymbol{a}}{1 + \lambda_1}, \quad \overrightarrow{CM} = \frac{\lambda_2 \boldsymbol{b}}{1 + \lambda_2}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{\boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{a}}{1 + \lambda_3}.$$

Ferner erhalten wir aus der Beziehung (75)

$$S_{\triangle LMN} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{NL} \times \overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CN}) \times (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CN})|$$

$$= \frac{1}{2}|(\overrightarrow{CL} \times \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{CM} \times \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{CN} \times \overrightarrow{CL})|. \tag{76}$$

Folglich ist

$$S_{\triangle LMN} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\boldsymbol{a}}{1 + \lambda_1} \times \frac{\lambda_2 \boldsymbol{b}}{1 + \lambda_2}\right) + \left(\frac{\lambda_2 \boldsymbol{b}}{1 + \lambda_2} \times \frac{\boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{a}}{1 + \lambda_3}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{a}}{1 + \lambda_3} \times \frac{\boldsymbol{a}}{1 + \lambda_1}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_2}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\right.$$
$$\left. - \frac{1}{(1 + \lambda_3)(1 + \lambda_1)}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\right|$$
$$= \left|\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)}\right| \left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\right|.$$

Damit erhalten wir endgültig (vgl. nochmals (75))

$$S_{\triangle LMN} = \left| \frac{1 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)} \right| \cdot S.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Punkte L, M und N auf einer Geraden liegen. Aus der letzten Beziehung können wir schließen:

Die Punkte L, M und N liegen dann und nur dann auf einer Geraden, wenn

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1 \tag{77}$$

ist (Satz von MENELAOS).

Aufgabe 11. *Wir behalten die Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe bei und bezeichnen mit P, Q, R die Schnittpunkte von jeweils zwei der Geraden*

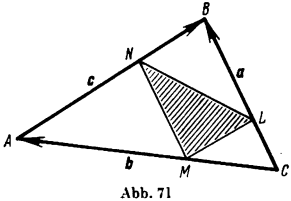


Abb. 71

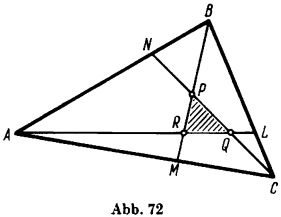


Abb. 72

AL, BM und CN (Abb. 72). *Man bestimme unter der Voraussetzung, daß S der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist, den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.*

Lösung. Wir wenden den Satz von MENELAOS (77) an, und zwar 1. auf die Punkte B, P, M, die auf den Seiten des Dreiecks ACN liegen, und erhalten

$$\frac{CP}{PN}\,\frac{NB}{BA}\,\frac{AM}{MC} = -1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{CP}{PN} = -\frac{CM}{MA}\,\frac{AB}{BN} = \lambda_2(1 + \lambda_3),^{1})$$

also

$$\overrightarrow{CP} = \lambda_2(1 + \lambda_3)\,\overrightarrow{PN};$$

2. auf die Punkte A, Q, L, die auf den Seiten des Dreiecks BCN liegen, und erhalten

$$\frac{CQ}{QN}\,\frac{NA}{AB}\,\frac{BL}{LC} = -1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{CQ}{QN} = -\frac{CL}{LB}\,\frac{BA}{AN} = \frac{1}{\lambda_1}\,\frac{1 + \lambda_3}{\lambda_3},$$

[1]) Hier bezeichnet zum Beispiel $\frac{CP}{PN}$ diejenige Zahl λ, für die $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{PN}$ gilt. Sie stimmt bis höchstens auf das Vorzeichen mit dem Verhältnis der Streckenlängen $|CP|$ und $|PN|$ überein. Die Zahl $-\lambda$ nennt man auch das *Teilverhältnis* der Punkte C, N, P (in dieser Reihenfolge). — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

also

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1 + \lambda_3}{\lambda_3} \overrightarrow{QN};$$

3. auf die Punkte A, R, L, die auf den Seiten des Dreiecks BCM liegen, und erhalten

$$\frac{BR}{RM} \frac{MA}{AC} \frac{CL}{LB} = -1, \quad \frac{BR}{RM} = -\frac{BL}{LC} \frac{CA}{AM} = \lambda_1(1 + \lambda_2),$$

also

$$\overrightarrow{BR} = \lambda_1(1 + \lambda_2) \overrightarrow{RM}.$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir die Beziehung (23) benutzen und die eingeführten Bezeichnungen beibehalten,

$$\overrightarrow{CP} = \frac{\lambda_3(1 + \lambda_3)}{1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_3} \overrightarrow{CN} = \frac{\lambda_3 b + \lambda_3\lambda_3 a}{1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_3};$$

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{\frac{1 + \lambda_3}{\lambda_1\lambda_3}}{1 + \frac{1 + \lambda_3}{\lambda_1\lambda_3}} \overrightarrow{CN} = \frac{b + \lambda_3 a}{1 + \lambda_3 + \lambda_1\lambda_3};$$

$$\overrightarrow{CR} = \frac{\overrightarrow{CB} + \lambda_1(1 + \lambda_3) \overrightarrow{CM}}{1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_3} = \frac{a + \lambda_1\lambda_3 b}{1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_3}.$$

Damit ergibt sich aus (75) [vgl. (76)]

$$\begin{aligned} S_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2} |(\overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CQ}) + (\overrightarrow{CQ} \times \overrightarrow{CR}) + (\overrightarrow{CR} \times \overrightarrow{CP})| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\lambda_3 b + \lambda_3\lambda_3 a}{1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_3} \times \frac{b + \lambda_3 a}{1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_1} \right) + \left(\frac{b + \lambda_3 a}{1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_1} \times \frac{a + \lambda_1\lambda_3 b}{1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a + \lambda_1\lambda_3 b}{1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_3} \times \frac{\lambda_3 b + \lambda_3\lambda_3 a}{1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_3} \right) \right| \\ &= \left| \frac{\lambda_1\lambda_3\lambda_3 - 1}{(1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)(1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_3(1 - \lambda_1\lambda_3\lambda_3)}{(1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_3)(1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_3)} \right| \cdot \left| \frac{1}{2} (a \times b) \right| \end{aligned}$$

oder, in der endgültigen Gestalt,

$$S_{\Delta PQR} = \left| \frac{(1 - \lambda_1\lambda_3\lambda_3)^2}{(1 + \lambda_1 + \lambda_1\lambda_3)(1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_3)(1 + \lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)} \right| \cdot S.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß sich die Geraden AL, BM und CN in einem Punkt schneiden. Aus der letzten Formel folgt:

Die Geraden AL, BM und CN schneiden sich dann und nur dann in einem Punkt, wenn

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{78}$$

ist (Satz von CEVA).[1])

4.5. Über die Eindeutigkeit des Schiefproduktes. Am Schluß des vorangehenden Paragraphen sahen wir, daß das Skalarprodukt von Vektoren durch die Bedingungen (54), (55), (56) und die naheliegende Forderung (57), nach der zwei „gleiche" (d. h. durch eine Bewegung ineinander überführbare) Paare von Vektoren gleiche „Produkte" haben sollen, im wesentlichen (d. h. bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig bestimmt wird. In diesem Paragraphen ersetzten wir die Bedingung (54) durch die Bedingung (66) und gelangten so zum Schiefprodukt von Vektoren, das sich in seinen Eigenschaften vom Skalarprodukt wesentlich unterscheidet. Es ergibt sich jetzt naturgemäß die Frage, ob sich nicht noch andere „Produkte" von Vektoren der Ebene finden lassen, die ebenso einfache Eigenschaften besitzen wie das Skalar- und das Schiefprodukt, mit diesen aber nicht übereinstimmen.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß jedes „Produkt" $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ von Vektoren der Ebene, das die am Schluß des vorangehenden Paragraphen (S. 343) aufgezählten Eigenschaften

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \circ (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}), \tag{55}$$

$$\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c} \tag{56}$$

besitzt und für einander „gleiche" Vektorpaare $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ jeweils denselben Wert hat,

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \circ \boldsymbol{b}_1, \tag{57}$$

in bestimmter Weise auf das Skalar- und das Schiefprodukt führt. Zunächst folgt nämlich aus der Bedingung (55), wie oben dargelegt, daß für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = ab(\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{b}^0) \tag{58}$$

ist, wobei $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{b}^0$ die Einheitsvektoren in Richtung von $\boldsymbol{a}$ bzw. $\boldsymbol{b}$ sind. Ferner gilt für alle Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}^0$

$$\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{a}^0 = \delta = \text{const}. \tag{60}$$

Außerdem nimmt das Produkt $\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{c}^0$ für je zwei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ mit $\sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{c}^0) = +90°$ denselben (d. h. für alle solche Vektorpaare $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ gleichen) Wert ε an:

$$\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{c}^0 = \varepsilon = \text{const}, \tag{79}$$

weil man zwei beliebige solche Paare $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ und $\boldsymbol{a}_1^0$, $\boldsymbol{c}_1^0$ durch eine Bewegung ineinander überführen kann.

Zerlegt man nun einen beliebigen Einheitsvektor $\boldsymbol{b}^0$ nach den Vektoren $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{c}^0$, wobei $\boldsymbol{c}^0 = 1$ und $\sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{c}^0) = +90°$ ist, so ergibt sich (vgl. S. 344)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{b}^0 &= \boldsymbol{a}^0 \circ [\cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\, \boldsymbol{a}^0 + \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\, \boldsymbol{c}^0] \\ &= \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot (\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{a}^0) + \sin \sphericalangle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0) \cdot (\boldsymbol{a}^0 \circ \boldsymbol{c}^0), \end{aligned}$$

[1]) Wir haben bei unseren Überlegungen vorausgesetzt, daß die Punkte P, Q und R *existieren* (die Geraden AL, BM und CN zueinander nicht parallel sind). Der Satz von CEVA muß daher exakter so formuliert werden: *Die Bedingung* (78) *gilt dann und nur dann, wenn sich die Geraden AL, BM und CN in einem Punkt schneiden oder zueinander parallel sind.*

woraus man wegen (58), (60) und (79)

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \delta ab \cos \sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \varepsilon ab \sin \sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \delta(\boldsymbol{ab}) + \varepsilon(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{80}$$

erhält.

Somit läßt sich jedes „Produkt" von Vektoren, das den Eigenschaften (55) bis (57) genügt, als Kombination (80) aus dem Skalar- und dem Schiefprodukt mit gewissen konstanten Koeffizienten δ und ε darstellen (wobei natürlich auch umgekehrt alle diese Kombinationen die Bedingungen (55) bis (57) erfüllen). Selbstverständlich sind unter allen derartigen „Produkten" nur die Vielfachen des Skalarproduktes kommutativ (vgl. S. 345) und die Vielfachen des Schiefproduktes antikommutativ.

Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß wir unsere Überlegungen unter der Voraussetzung durchgeführt haben, daß zwei Paare von Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ der Ebene, die zwar durch eine Bewegung im Raum (durch eine solche führten wir am Schluß des § 3 die Vektorpaare $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ und $-\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ ineinander über), nicht aber durch eine Bewegung in der Ebene ineinander übergeführt werden können, als ungleich angesehen werden. Wir betrachten hier also eine Geometrie, in der z. B. zwei bezüglich einer Geraden spiegelbildliche Figuren (Abb. 73; solche Figuren kann man nicht durch eine Bewegung ineinander überführen, die sie in der Ebene beläßt) als ungleich angesehen werden. Dieser Standpunkt findet seinen Ausdruck darin, daß wir bei unseren Überlegungen ständig den Begriff des Drehsinns verwandten: Ein Winkel $\sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ galt als positiv oder negativ in Abhängigkeit von der Richtung der Drehung um einen Winkel kleiner als 180°, die die Richtung von $\boldsymbol{a}$ in die Richtung von $\boldsymbol{b}$ überführt (vgl. S. 346–347). Es ist einleuchtend, daß der Begriff „Drehsinn" seinen Inhalt verliert, wenn man auch bezüglich einer Geraden spiegelbildliche Figuren (und überhaupt beliebige Figuren, die durch eine Bewegung im Raum ineinander übergeführt werden können) nicht voneinander unterscheidet; denn bei Spiegelungen an einer Geraden geht der Drehsinn eines Winkels in den entgegengesetzten Drehsinn über (Abb. 73). Ist in der Ebene ein bestimmter Drehsinn für Winkel als positiv erklärt, so heißt die Ebene *orientiert*.[1]) Das Skalarprodukt von Vektoren kann also in der nichtorientierten Ebene definiert werden,[2]) das Schiefprodukt von Vektoren dagegen nur in der orientierten Ebene.

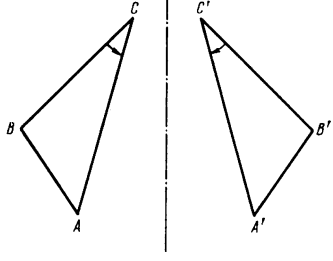


Abb. 73

[1]) Eine orientierte Ebene ist also der Operationsbereich einer „Geometrie", die die Eigenschaften der Figuren untersucht, welche bei Bewegungen erster Art (eigentlichen Bewegungen) erhalten bleiben, während die gewöhnliche oder nichtorientierte Ebene der Operationsbereich einer „Geometrie" ist, welche die bei beliebigen Bewegungen erhalten bleibenden Eigenschaften der Figuren studiert (vgl. § 6 des Artikels „Geometrische Transformationen" und auch S. 534–536).

[2]) Selbstverständlich hindert uns nichts daran, das Skalarprodukt von Vektoren auch in der orientierten Ebene zu betrachten (vgl. dazu die Bemerkung auf S. 348 über den Charakter des Symbols $\sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ in der Definition (45) des Skalarproduktes).

§ 5. Das Spatprodukt und das Vektorprodukt von Vektoren im Raum

5.1. Orientierte Rauminhalte und das Spatprodukt. Wir wenden uns nun den *Vektoren im Raum* zu. In der Geometrie des Raumes spielt die Rolle des Parallelogramms das Parallelflach (oder Parallelepiped); man betrachtet deshalb anstelle des Flächeninhalts $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ des orientierten Parallelogramms, das von zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird, den Rauminhalt $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ des orientierten Parallelflachs $OADBCA_1D_1B_1$, das von drei Vektoren $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ des Raumes aufgespannt wird (Abb. 74). Dabei bedeutet das Adjektiv „orientiert", daß der Rauminhalt des Parallelflachs mit einem Vorzeichen versehen ist. Er wird als positiv angenommen, wenn die Drehung um einen Winkel kleiner als 180°, die die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der Richtung des Vektors $\boldsymbol{b}$ zur Deckung bringt, vom Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{c}$ aus gesehen, entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt (Abb. 75a; Parallelflache dieser Art nennen wir *positiv* orientiert); $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ soll negativ sein, wenn die Drehung um einen Winkel kleiner als 180°, die die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ in die Richtung des Vektors $\boldsymbol{b}$ überführt, vom Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{c}$ aus gesehen, im Uhrzeigersinn erfolgt

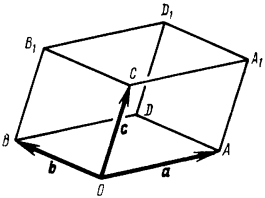


Abb. 74

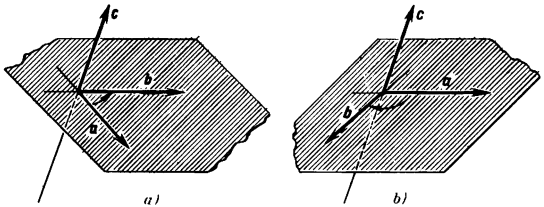


Abb. 75

(Abb. 75b; Parallelflache dieser Art nennen wir *negativ* orientiert). Liegen die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ in einer Ebene, so wird naturgemäß $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ gleich Null gesetzt.

Die auf diese Weise definierte Größe $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ nennen wir das *Spatprodukt* der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$; es wird im folgenden mit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ bezeichnet. Wir begegnen hier also das erste Mal einem vom Üblichen abweichenden „Pro-

dukt": Es besteht nicht aus zwei Faktoren, sondern unbedingt aus drei (vektoriellen) „Faktoren" $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$. Ungeachtet dessen ist es zweckmäßig, die Größe $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ als ein „Produkt" anzusehen, und zwar nicht nur wegen ihrer formalen Ähnlichkeit mit dem Schiefprodukt von Vektoren der Ebene, für das die Bezeichnung „Produkt" bereits als etwas uns Vertrautes angesehen werden kann, sondern in erster Linie deshalb, weil die Größe $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, wie wir bald sehen werden, eine ganze Reihe von Eigenschaften besitzt, die den Eigenschaften der gewöhnlichen Multiplikation von Zahlen (und auch den Eigenschaften des Skalar- und des Schiefproduktes) verwandt sind.

Es ist zweckmäßig, die Herleitung der meisten Eigenschaften des Spatproduktes noch etwas hinauszuschieben. Hier sei nur bemerkt, daß nach Definition *das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ dann und nur dann verschwindet, wenn alle Vektoren einer Ebene angehören* (genauso wie das Schiefprodukt zweier Vektoren dann und nur dann verschwindet, wenn diese Vektoren einer Geraden angehören). Ferner sei bemerkt, daß das Spatprodukt *antikommutativ* ist, d. h.; es wechselt sein Vorzeichen, wenn man die Reihenfolge zweier beliebiger Faktoren vertauscht:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

In der Tat sind die Absolutwerte der niedergeschriebenen Spatprodukte gleich dem Rauminhalt ein und desselben Parallelflachs und deshalb einander gleich. Ferner ist $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$, denn vom Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{c}$ aus gesehen haben die Drehungen vom Vektor $\boldsymbol{a}$ zum Vektor $\boldsymbol{b}$ und vom Vektor $\boldsymbol{b}$ zum Vektor $\boldsymbol{a}$ entgegengesetzten Drehsinn. Weniger offensichtlich ist die Beziehung $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$; zu ihrem Beweis genügt es aber nachzuprüfen, daß die Drehung vom Vektor $\boldsymbol{a}$ zum Vektor $\boldsymbol{c}$ vom Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{b}$ aus gesehen in Abhängigkeit davon, ob $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$ (Abb. 75a) oder $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$ (Abb. 75b) ist, im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt. Ebenso beweist man die Beziehung $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

Die Spatprodukte $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$ und $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ können aus dem Produkt $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ durch zweimaliges Vertauschen zweier „Faktoren" erhalten werden: Zunächst vertauschen wir $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, und dann entweder $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{a}$ oder $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{b}$ miteinander. Hieraus ergibt sich $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ und $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Wir gelangen also zu folgender Beziehung, die vollständig die Eigenschaft des Spatproduktes, antikommutativ zu sein, wiedergibt:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}). \quad (81)$$

5.2. Das Vektorprodukt und sein Zusammenhang mit dem Spatprodukt. Bevor wir die Eigenschaften des Spatproduktes $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ weiter untersuchen, analysieren wir noch etwas genauer seine Struktur. Bisher trat ein Produkt dreier Faktoren (z. B. abc, wobei a, b, c drei Zahlen sind, oder $\alpha(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$, wobei α eine Zahl und $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ Vektoren sind) nur bei wiederholter Multiplikation auf — zuerst multiplizierten wir zwei unserer drei Faktoren miteinander und dann das

Ergebnis mit dem dritten Faktor. Es ergibt sich damit die Frage, ob man nicht auch das Spatprodukt dreier Vektoren als wiederholtes Produkt darstellen kann.

Bisher verfügen wir nur über eine Art von „Produkt" zweier Vektoren des Raumes, das Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ordnet jedoch zwei Vektoren eine Zahl zu; multipliziert man diese Zahl dann mit einem Vektor, dem dritten Faktor, so erhält man einen Vektor, während das Spatprodukt eine Zahl sein muß. Ergäbe dagegen die Multiplikation der beiden ersten Faktoren keine Zahl (keinen Skalar), sondern einen Vektor, dann könnten wir diesen Vektor mit dem letzten Faktor skalar multiplizieren und erhielten eine Zahl, wie wir es benötigen. Wollen wir also das Spatprodukt als wiederholtes Produkt darstellen, dann müssen wir nicht nur das Skalarprodukt von Vektoren benutzen,

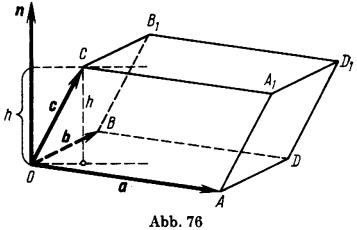


Abb. 76

sondern noch ein gewisses neues „Vektorprodukt", das bei der „Multiplikation" zweier Vektoren wieder einen Vektor ergibt.

Versuchen wir uns einmal vorzustellen, wie ein solches „Vektorprodukt" aussehen könnte. Der Rauminhalt des Parallelflachs $OADBCA_1D_1B_1$, das von den Vektoren $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ aufgespannt wird, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt seiner Grundfläche $OADB$ und seiner Höhe. Die Höhe h des Parallelflachs ist aber nichts anderes als die Projektion des Vektors $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ auf den Vektor $\boldsymbol{n}$, der senkrecht zur Grundfläche steht (Abb. 76). Somit ist der Absolutwert des Produktes $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms $OADB$, multipliziert mit dem Betrag der Projektion des Vektors $\boldsymbol{c}$ auf den Vektor $\boldsymbol{n}$; das Vorzeichen des Produktes $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ hängt davon ab, nach welcher Seite der Ebene $OADB$ der Vektor $\boldsymbol{c}$ gerichtet ist.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $OADB$ sei gleich α; dann gilt

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = \alpha\, |\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{c}|.$$

Richten wir nun den Vektor $\boldsymbol{n}$ nach der Seite der Ebene $OADB$, so daß vom Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{n}$ aus gesehen die Drehung von der Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ zur Richtung des Vektors $\boldsymbol{b}$ (um einen Winkel kleiner als 180°) entgegen

dem Uhrzeigersinn erfolgt, so ist die Größe $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ positiv oder negativ in Abhängigkeit davon, ob die Vektoren $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{n}$ nach derselben oder nach verschiedenen Seiten der (zu $\boldsymbol{n}$ senkrechten) Ebene $OADB$ zeigen. Bei einer solchen Wahl des Vektors $\boldsymbol{n}$ können wir dann in der letzten Gleichung die Absolutzeichen weglassen und

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha \operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c} \tag{82}$$

schreiben (vgl. die Definition der Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor auf S. 327).

Der Form nach erinnert die Beziehung (82) sehr an die Gleichung (44) (S. 335). Wie man, von dieser Gleichung ausgehend, das Spatprodukt $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ als Skalarprodukt von zwei Vektoren darstellt, ist offensichtlich. Bezeichnen wir nämlich mit $\boldsymbol{N}$ den Vektor, der die gleiche Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{n}$ und die Länge $\alpha = S_{OADB}$ hat, dann ist $\alpha = N$, $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c} = \operatorname{pr}_{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{c}$, und (82) kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = N \operatorname{pr}_{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{c},$$

und nach der Definition (44) des Skalarproduktes wird

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{c}.$$

Wir wollen den Vektor $\boldsymbol{N}$ das *Vektorprodukt* der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nennen und mit $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ bezeichnen. Auf Grund des bisher Gesagten wird das Vektorprodukt $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ durch folgende drei Bedingungen bestimmt:

a) *Der Absolutbetrag (die Länge) des Vektors* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren* $\boldsymbol{a}$ *und* $\boldsymbol{b}$ *aufgespannt wird; wenn die Vektoren* $\boldsymbol{a}$ *und* $\boldsymbol{b}$ *einer Geraden angehören, ist* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{o}$;

b) *der Vektor* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *steht auf der durch die Vektoren* $\boldsymbol{a}$ *und* $\boldsymbol{b}$ *definierten Ebene senkrecht* (d. h., er steht auf diesen beiden Vektoren senkrecht);

c) *der Vektor* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *ist nach der Seite der von den Vektoren* $\boldsymbol{a}$ *und* $\boldsymbol{b}$ *aufgespannten Ebene gerichtet, so daß von seinem Endpunkt aus gesehen die Drehung um einen Winkel kleiner als* 180°, *die die Richtung des Vektors* $\boldsymbol{a}$ *in die Richtung des Vektors* $\boldsymbol{b}$ *überführt, entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt.*

Damit können wir dann das Spatprodukt $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ als zweifaches Produkt schreiben:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{c}; \tag{83}$$

d. h., um das Spatprodukt $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ zu erhalten, muß man zunächst das Vektorprodukt $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ der ersten beiden Vektoren bilden und dieses dann skalar mit dem dritten Faktor $\boldsymbol{c}$ multiplizieren.[1])

Wir weisen noch darauf hin, daß wegen (81) und der Gültigkeit des Kommutativgesetzes für die skalare Multiplikation (vgl. Gleichung (47), S. 335)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \tag{84}$$

[1]) In der Literatur wird das Spatprodukt gelegentlich auch *gemischtes Produkt* genannt. Diese Bezeichnung besagt nichts anderes, als daß man zu seiner Bildung zwei Arten der Multiplikation von Vektoren, die vektorielle und die skalare, verwenden muß.

gilt; das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ ist also auch gleich dem skalaren Produkt des ersten Vektors $\boldsymbol{a}$ mit dem Vektorprodukt der beiden letzten Vektoren $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$.

5.3. Die Eigenschaften des Vektorproduktes und des Spatproduktes. Selbstverständlich kann die Bezeichnung „Vektorprodukt" für den Vektor $\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ nicht mit der soeben erhaltenen Darstellungsweise des Spatproduktes als zweifaches Produkt begründet werden; sie wird vielmehr durch gewisse Ähnlichkeiten der Eigenschaften des „Vektorproduktes" $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ mit dem Produkt von Zahlen (oder auch mit dem Skalar- und Schiefprodukt von Vektoren) bedingt.

Wir leiten nun die wichtigsten Eigenschaften des Spatproduktes und des Vektorproduktes her.

Wir sahen bereits, daß das Spatprodukt antikommutativ ist (81). Daraus ergibt sich sofort, daß *auch das Vektorprodukt* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *antikommutativ ist*:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]. \tag{85}$$

Aus (84) und der Gültigkeit des antikommutativen Gesetzes für das Spatprodukt folgt nämlich

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{c}.$$

Die Vektoren $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{N}$ und $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{M}$ haben also die Eigenschaft, daß für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{c}$ stets $\boldsymbol{Nc} = -\boldsymbol{Mc}$ oder, was dasselbe ist, $(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N})\,\boldsymbol{c} = 0$ gilt. Der Vektor $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$ muß also zu jedem beliebigen Vektor $\boldsymbol{c}$ senkrecht stehen, was im Fall $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{o}$ nicht möglich ist. Folglich ist $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{o}$, d. h. $\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{N}$, aber das ist gerade die Beziehung (85).

Wir zeigen nun, daß *das Spatprodukt* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *bezüglich der Multiplikation eines beliebigen seiner vektoriellen Faktoren mit einem Zahlenfaktor „assoziativ" ist*:

$$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \tag{86}$$

Aus (84) und der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes für das Skalarprodukt folgt zunächst

$$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\lambda\boldsymbol{a})\,[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \lambda(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Die Beziehung

$$(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

ergibt sich hieraus auf einfache Weise, wenn man nämlich berücksichtigt, daß das Spatprodukt antikommutativ ist:

$$(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -\lambda(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Analog [oder aus (83)] leitet man die Beziehung $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ her.

Wir können nun zeigen, daß *auch das Vektorprodukt* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *bezüglich der Multiplikation eines beliebigen seiner vektoriellen Faktoren mit einem Zahlenfaktor assoziativ ist*:

$$[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]. \tag{87}$$

Zunächst ist nämlich

$$[\lambda a, b]\, c = (\lambda a, b, c) = \lambda(a, b, c) = \lambda[a, b]\, c.$$

Wenn aber die Vektoren $[a, b] = N$ und $[\lambda a, b] = M_1$ für einen beliebigen Vektor c der Gleichung

$$M_1 c = \lambda N c, \quad \text{d. h.} \quad (M_1 - \lambda N)\, c = 0$$

genügen, muß offenbar (vgl. oben)

$$M_1 = \lambda N, \quad \text{d. h.} \quad [\lambda a, b] = \lambda[a, b]$$

sein. Berücksichtigt man noch, daß das Vektorprodukt antikommutativ ist, so erhält man hieraus sofort die Gleichung $[a, \lambda b] = \lambda[a, b]$.

Wir beweisen schließlich noch, daß für das Spatprodukt das Distributivgesetz gilt:

$$(a, b, c_1 + c_2) = (a, b, c_1) + (a, b, c_2) \tag{88}$$

und analog

$$\begin{aligned} (a, b_1 + b_2, c) &= (a, b_1, c) + (a, b_2, c), \\ (a_1 + a_2, b, c) &= (a_1, b, c) + (a_2, b, c). \end{aligned} \tag{88a}$$

Da für das Skalarprodukt das Distributivgesetz gilt, ist offenbar

$$\begin{aligned} (a, b, c_1 + c_2) &= [a, b]\,(c_1 + c_2) = [a, b]\, c_1 + [a, b]\, c_2 \\ &= (a, b, c_1) + (a, b, c_2). \end{aligned}$$

Die Beziehungen (88a) erhält man aus (88) wieder unter Benutzung der Antikommutativität des Spatproduktes:

$$\begin{aligned} (a, b_1 + b_2, c) &= -(a, c, b_1 + b_2) = -(a, c, b_1) - (a, c, b_2) \\ &= (a, b_1, c) + (a, b_2, c). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß auch für das Vektorprodukt das Distributivgesetz gilt:

$$[a, b_1 + b_2] = [a, b_1] + [a, b_2], \quad [a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]. \tag{89}$$

Offenbar genügt es, die erste der Beziehungen (89) zu beweisen.

Da für jeden Vektor c

$$\begin{aligned} [a, b_1 + b_2]\, c &= (a, b_1 + b_2, c) = (a, b_1, c) + (a, b_2, c) \\ &= [a, b_1]\, c + [a, b_2]\, c = ([a, b_1] + [a, b_2])\, c \end{aligned}$$

ist, muß $[a, b_1 + b_2] = [a, b_1] + [a, b_2]$ sein.

Wir bemerken noch, daß für die vektorielle Multiplikation von drei Vektoren das Assoziativgesetz nicht gilt, d. h., im allgemeinen ist

$$[[a, b], c] \neq [a, [b, c]].$$

Sind z. B. i, j zwei aufeinander senkrecht stehende Vektoren der Länge 1 (Abb. 77), so gilt

$$[[i, j], j] = [k, j] = -i, \quad [i, [j, j]] = [i, o] = o.$$

An die Stelle des Assoziativgesetzes tritt beim Vektorprodukt die originelle Identität

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] + [\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = \boldsymbol{o}, \tag{90}$$

die die verschieden geklammerten Vektorprodukte $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$, $[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]]$ und $[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]]$ von drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ miteinander verknüpft. Die Beziehung (90) heißt die JACOBIsche Identität; wir beweisen sie später.

Man macht sich leicht klar, daß sich die Beziehungen (85), (86) und (87) auch recht einfach direkt aus den Definitionen des Spat- und des Vektorproduktes gewinnen lassen. Anders verhält es sich mit den Beziehungen (88), (88a) und (89); hier läßt sich der von uns angegebene verhältnismäßig komplizierte Beweis dieser Eigenschaften kaum vereinfachen.

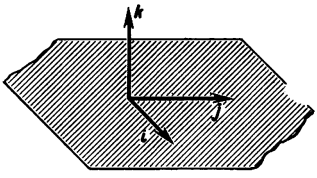


Abb. 77

Aus den bewiesenen Eigenschaften des Spat- und des Vektorproduktes ergeben sich allgemeine Regeln für die Multiplikation von Summen von Vektoren, die den üblichen Klammerregeln verwandt sind:

$$(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} - 5\boldsymbol{e}) = 4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - 20(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}) + 6(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - 30(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{e})$$

oder

$$[4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{d}] = 4[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + 12[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}] - [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] - 3[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}].$$

Jedoch muß dabei berücksichtigt werden, daß das Spat- und das Vektorprodukt antikommutativ sind – insbesondere, daß das Vektorprodukt aus zwei gleichen Faktoren (das „vektorielle Quadrat") immer gleich dem Nullvektor und das Spatprodukt dreier Faktoren, von denen wenigstens zwei einander gleich sind, immer gleich Null ist:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{o}, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0.$$

So ist z. B.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

oder

$$[\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}] = 3[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - 2[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = 5[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Wir berechnen nun das Spat- und das Vektorprodukt aus den Koordinaten der Faktoren. Es seien dazu (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) die Koordinaten der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ in bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, d. h., es sei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{b} &= x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{c} &= x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Von den längs der Koordinatenachsen gerichteten Vektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ fordern wir nur, daß der Rauminhalt des von ihnen aufgespannten Parallelflachs gleich 1 und dieses Parallelflach positiv orientiert ist:

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = +1.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) \\ &= xy_1z_2(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) + xz_1y_2(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) + yx_1z_2(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) + yz_1x_2(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) \\ &\quad + zx_1y_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) + zy_1x_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})\end{aligned}$$

und mithin

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = xy_1z_2 + yz_1x_2 + zx_1y_2 - xz_1y_2 - yx_1z_2 - zy_1x_2. \tag{91}$$

Bei der nun folgenden Herleitung einer entsprechenden Formel für das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ verlangen wir, daß das betrachtete Koordinatensystem ein rechtwinkliges kartesisches und dazu noch positiv orientiert sei, d. h., es soll

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}, \quad [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i}, \quad [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}$$

sein (vgl. Abb. 77). Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] &= [x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}] \\ &= xy_1[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] + xz_1[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] + yx_1[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] + yz_1[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] + zx_1[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] + zy_1[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}]\end{aligned}$$

oder schließlich

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (yz_1 - zy_1)\,\boldsymbol{i} + (zx_1 - xz_1)\,\boldsymbol{j} + (xy_1 - yx_1)\,\boldsymbol{k}. \tag{92}$$

Das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mit den Koordinaten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) hat also die Koordinaten

$$(yz_1 - zy_1,\ zx_1 - xz_1,\ xy_1 - yx_1).$$

Die Beziehung (91) kann man auch als Definition[1]) des Spatproduktes wählen. Schreibt man sie in der Gestalt

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

so erkennt man in ihr die bekannte geometrische Interpretation der dreireihigen Determinanten als Rauminhalt orientierter Parallelflache wieder.[2]) Bei dieser Definition bilden das Antikommutativgesetz $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, das Assoziativgesetz $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ bezüglich der Multiplikation eines

[1]) Der Nachteil einer solchen Definition „mittels Koordinaten" besteht (wie auch bei den Formeln (50) bzw. (50a), (73), (92)) darin, daß sie der geometrischen Bedeutung des Spatproduktes keine Rechnung trägt. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Vgl. den Artikel „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM.

Vektors mit einer Zahl und das Distributivgesetz $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ für das Spatprodukt von Vektoren Folgerungen aus bekannten Eigenschaften der dreireihigen Determinanten:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x^{(1)} + x^{(2)} & y^{(1)} + y^{(2)} & z^{(1)} + z^{(2)} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Aus der bekannten Regel für die Multiplikation von dreireihigen Determinanten[1])

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} \\ x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} \\ x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1x^{(1)} + y_1y^{(1)} + z_1z^{(1)} & x_1x^{(2)} + y_1y^{(2)} + z_1z^{(2)} & x_1x^{(3)} + y_1y^{(3)} + z_1z^{(3)} \\ x_2x^{(1)} + y_2y^{(1)} + z_2z^{(1)} & x_2x^{(2)} + y_2y^{(2)} + z_2z^{(2)} & x_2x^{(3)} + y_2y^{(3)} + z_2z^{(3)} \\ x_3x^{(1)} + y_3y^{(1)} + z_3z^{(1)} & x_3x^{(2)} + y_3y^{(2)} + z_3z^{(2)} & x_3x^{(3)} + y_3y^{(3)} + z_3z^{(3)} \end{vmatrix}$$

erhalten wir ferner

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}. \tag{93}$$

Diese Beziehung ist das „dreidimensionale Analogon" der Beziehung (71′) des vorangehenden Paragraphen.

Die Beziehung (92) kann formal ebenfalls als dreireihige Determinate geschrieben werden:

$$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}. \tag{92a}$$

[1]) Vgl. etwa EdEM, Band II, S. 84.

Entwickelt man die Determinante auf der rechten Seite nach den Elementen der ersten Zeile, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}. \tag{92b}$$

Die Beziehung (92) (oder (92a) oder (92b)) kann als Definition des Vektorproduktes gewählt werden; aus ihr lassen sich seine Eigenschaften leicht herleiten.

5.4. Das zweifache Vektorprodukt. Als Anwendungsbeispiel für die Formel (92) beweisen wir mit ihrer Hilfe die folgende Identität:

$$[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = (\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b}. \tag{94}$$

Wir wählen ein rechtwinkliges positiv orientiertes Koordinatensystem so aus, daß die Richtung der x-Achse mit der Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ übereinstimmt; als Ebene xOy wählen wir die Ebene, die von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird;[1]) die Richtung der z-Achse wird dadurch bereits festgelegt. In diesem Koordinatensystem haben die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ Koordinaten der Form $(x, 0, 0)$, $(x_1, y_1, 0)$ und (x_2, y_2, z_2). Der Vektor $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ hat dann nach (92) die Koordinaten $(0, 0, xy_1)$ und der Vektor $[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]]$, ebenfalls nach (92), die Koordinaten $(y_2(xy_1), -x_2(xy_1), 0)$. Damit haben wir die Koordinaten des auf der linken Seite der Beziehung (94) stehenden Vektors gefunden. Andererseits gilt nach (50a)

$$\boldsymbol{bc} = x_1x_2 + y_1y_2, \qquad \boldsymbol{ac} = xx_2.$$

Somit hat der Vektor $(\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a}$ die Koordinaten $(x(x_1x_2 + y_1y_2), 0, 0)$ und der Vektor $(\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b}$ die Koordinaten $(x_1(xx_2), y_1(xx_2), 0)$. Hieraus folgt schließlich, daß der Vektor $(\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b}$ ebenfalls die Koordinaten $(x(y_1y_2), -y_1(xx_2), 0)$ hat. Also haben die auf der rechten und der linken Seite der Beziehung (94) stehenden Vektoren die gleichen Koordinaten und stimmen deshalb überein.

Durch Vertauschen der Bezeichnungen der Vektoren in (94) erhalten wir

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c}, \tag{94a}$$

$$[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = (\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a}. \tag{94b}$$

Die Addition der drei Beziehungen (94), (94a), (94b) ergibt die Identität (90), die damit ebenfalls bewiesen ist.

---

[1]) Falls die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ in einer Geraden liegen (linear abhängig sind), kann die Richtung der y-Achse beliebig gewählt werden. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Wir beweisen noch die nachstehenden Beziehungen, die wir im nächsten Paragraphen benötigen werden:

$$[[a, b], [c, d]] = (a, c, d)\, b - (b, c, d)\, a, \tag{95a}$$

$$[[a, b], [c, d]] = (a, b, d)\, c - (a, b, c)\, d, \tag{95b}$$

$$[a, b]\,[c, d] = (ac)\,(bd) - (ad)\,(bc). \tag{96}$$

Die Beziehung (95b) ergibt sich leicht aus (94) und (83):

$$[[a, b], [c, d]] = ([a, b]\, d)\, c - ([a, b]\, c)\, d = (a, b, d)\, c - (a, b, c)\, d.$$

Ferner folgt aus (95b) und (85) die Beziehung (95a):

$$\begin{aligned}[[a, b], [c, d]] &= -[[c, d], [a, b]] = -(c, d, b)\, a + (c, d, a)\, b \\ &= (a, c, d)\, b - (b, c, d)\, a.\end{aligned}$$

Schließlich erhält man (96) aus (83), (81) und (94):

$$\begin{aligned}[a, b]\,[c, d] &= (a, b, [c, d]) = (b, [c, d], a) = [b, [c, d]]\, a \\ &= \{(bd)\, c - (bc)\, d\}\, a = (bd)\,(ac) - (bc)\,(ad).\end{aligned}$$

5.5. Beispiele. Wir betrachten nun einige Aufgaben, die die Anwendung des Spat- und des Vektorproduktes in der Geometrie veranschaulichen.

Aufgabe 12. *Man bestimme den Rauminhalt einer Dreieckspyramide (eines Tetraeders) aus den Längen aller ihrer Kanten.*

Lösung. Gegeben sei ein Tetraeder $OABC$ (Abb. 78). Die Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ bezeichnen wir mit a, b, c; c', a', b'. Wir ergänzen das

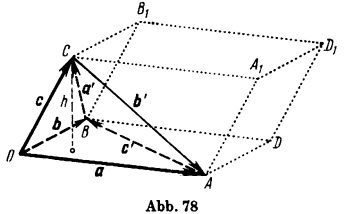


Abb. 78

Tetraeder zum Parallelflach $OADBCA_1D_1B_1$; der Rauminhalt dieses Parallelflachs ist offensichtlich sechsmal größer als der Rauminhalt des Tetraeders (wenn h die von der Ecke C gefällte gemeinsame Höhe des Parallelflachs und

des Tetraeders ist, gilt $V_{\text{Par}} = S_{OADB} \cdot h$, $V_{\text{Tetr}} = \frac{1}{3} S_{OAB} \cdot h$ und $S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OADB}$). Daraus erhalten wir

$$V_{\text{Tetr}} = \frac{1}{6} |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|, \qquad (V_{\text{Tetr}})^2 = \frac{1}{36} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2.$$

Nach der Formel (93) gilt aber

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}.$$

Andererseits ist offenbar

$$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}.$$

Mithin ist

$$\boldsymbol{c}'^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{a}^2, \qquad \boldsymbol{ab} = \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}'^2}{2}$$

und analog dazu

$$\boldsymbol{ac} = \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}'^2}{2}, \qquad \boldsymbol{bc} = \frac{\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}'^2}{2}.$$

Also haben wir endgültig

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}'^2}{2} & \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}'^2}{2} \\ \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}'^2}{2} & \boldsymbol{b}^2 & \frac{\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}'^2}{2} \\ \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}'^2}{2} & \frac{\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}'^2}{2} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 + b^2 - c'^2 & a^2 + c^2 - b'^2 \\ a^2 + b^2 - c'^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - a'^2 \\ a^2 + c^2 - b'^2 & b^2 + c^2 - a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

und somit

$$V_{\text{Tetr}}^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 + b^2 - c'^2 & a^2 + c^2 - b'^2 \\ a^2 + b^2 - c'^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - a'^2 \\ a^2 + c^2 - b'^2 & b^2 + c^2 - a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Beziehung ist der elementaren HERONschen Formel (S. 354) verwandt, die den Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Längen seiner Seiten ausdrückt.

Aufgabe 13. *Man bestimme den Rauminhalt V eines Parallelflachs $OADBCA'D'B'$ aus den Längen der Kanten $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$ und den Winkeln $\sphericalangle AOB = \gamma$, $\sphericalangle AOC = \beta$, $\sphericalangle BOC = \alpha$ zwischen diesen Kanten.*

Lösung. Wir setzen wieder $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$. Uns ist bekannt, daß

$$V = V_{\text{Par}} = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|, \quad V^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$$

gilt. Wegen (93) und der Definition (45) des Skalarprodukts haben wir

$$V^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}.$$

Wir ziehen aus der ersten Zeile der Determinante den Faktor a, aus der zweiten Zeile den Faktor b, aus der dritten Zeile den Faktor c, sodann aus der ersten Spalte den Faktor a, aus der zweiten Spalte den Faktor b und aus der dritten Spalte den Faktor c vor die Determinante und erhalten endgültig

$$V^2 = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix};$$

$$V = abc \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= abc \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

Aufgabe 14. *Gegeben sei eine Dreieckspyramide (ein Tetraeder) $OABC$. Man zeige, daß die Beziehung*

$$|OA|^2 + |BC|^2 = |OB|^2 + |AC|^2$$

gilt, wenn sich die von den Eckpunkten A und B auf die gegenüberliegenden Flächen des Tetraeders gefällten „Höhen" schneiden. Unter welcher Bedingung schneiden sich alle vier Höhen des Tetraeders in einem Punkt?

Lösung. Wir setzen wieder $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$; $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}'$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}'$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}'$ (Abb. 79). Schneiden sich die Höhen AP und BQ des Tetraeders, so liegen die Vektoren $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ und $\overrightarrow{AB}$ in einer Ebene (und liegen umgekehrt diese drei Vektoren in einer Ebene, so schneiden sich die Höhen AP und BQ). Die Bedingung dafür, daß die drei Vektoren $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ und $\overrightarrow{AB}$ in einer Ebene liegen, lautet

$$(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{AB}) = 0.$$

Es ist aber $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$; der Vektor $\overrightarrow{AP}$ ist mit dem zur Ebene OBC senkrechten Vektor

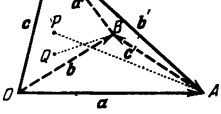


Abb. 79

$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ gleichgerichtet; der Vektor $\overrightarrow{BQ}$ ist mit dem zur Ebene OAC senkrechten Vektor $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ gleichgerichtet. Daher lautet die Bedingung dafür, daß sich die Höhen AP und BQ schneiden

$$([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 0$$

oder [vgl. (83)]

$$[[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]] (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 0.$$

Nach (95a) ist aber der Vektor $[[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]]$ gleich $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{c}$ (wegen $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$), d. h. dem Vektor $\boldsymbol{c}$ parallel (und vom Nullvektor verschieden).

Die letzte Bedingung ist aber der folgenden äquivalent:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{bc} = \boldsymbol{ac}.$$

Ersetzt man hier $\boldsymbol{bc}$ und $\boldsymbol{ac}$ durch $\dfrac{b^2 + c^2 - a'^2}{2}$ und $\dfrac{a^2 + c^2 - b'^2}{2}$ (vgl. die Lösung der Aufgabe 12), so ergibt sich

$$\frac{b^2 + c^2 - a'^2}{2} = \frac{a^2 + c^2 - b'^2}{2} \quad \text{oder} \quad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2,$$

was zu zeigen war.

Eben dieser Gleichung ist aber auch die Forderung äquivalent, daß sich die Höhen CR und OS schneiden. Die Forderung, daß sich die Höhen AP und CR (und auch BQ und OS) schneiden, ist der Beziehung

$$a^2 + a'^2 = c^2 + c'^2$$

äquivalent. Die Höhen BQ und CR (und auch AP und OS) schneiden sich dann und nur dann, wenn

$$b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$$

gilt. Schließlich ist dafür, daß sich alle Höhen eines Tetraeders in einem Punkt schneiden, die Gültigkeit der Gleichungen

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$$

notwendig und hinreichend.

5.6. Über die Eindeutigkeit des Spat- und des Vektorproduktes. Zum Abschluß wenden wir uns wieder der Frage zu, in welchem Maße gerade die von uns gewählten Definitionen des Spat- und des Vektorproduktes zwingend sind; dabei verlangen wir selbstverständlich, daß diese „Produkte" jenen Bedingungen genügen, deren Gültigkeit die Verwendung des Wortes „Produkt" rechtfertigen. Wir betrachten also irgendeine Operation „$*$", die je zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ des Raumes einen dritten Vektor $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ zuordnet. Wir verlangen, daß dieses „Produkt" bezüglich der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl dem Assoziativgesetz

$$(\lambda \boldsymbol{a}) * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) \tag{97}$$

und dem Distributivgesetz

$$\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} * \boldsymbol{c} \tag{98}$$

genügt. Außerdem fordern wir, daß unser „Produkt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ einen geometrischen Sinn hat, d. h., wenn durch eine Bewegung des Raumes (eine Drehung um einen Punkt O) die Vektoren $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ und $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ in die Vektoren $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1$ und $\overrightarrow{OB_1} = \boldsymbol{b}_1$ übergeführt werden können, soll bei dieser Bewegung auch der Vektor $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ in den Vektor $\overrightarrow{OC_1} = \boldsymbol{a}_1 * \boldsymbol{b}_1$ übergehen (vgl. S. 343).

Wir zeigen, daß unter diesen Bedingungen das „Produkt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ zwangsläufig auf das Vektorprodukt $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ zurückgeführt wird.

Wir setzen $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{b}^0$, wobei $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{b}^0$ Einheitsvektoren sind. Aus (97) folgt dann

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = (a\boldsymbol{a}^0) * (b\boldsymbol{b}^0) = (ab)\,(\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{b}^0).$$

Es genügt also auch hier, das „Produkt" von Einheitsvektoren zu bestimmen (vgl. S. 344).

Es sei nun OP eine Gerade, die auf der Ebene der Einheitsvektoren $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}^0$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}^0$ senkrecht steht (Abb. 80). Eine Drehung um die Gerade OP um 180° führt die Vektoren $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{b}^0$ in die Vektoren $-\boldsymbol{a}^0$ und $-\boldsymbol{b}^0$ über; diese Bewegung muß also den Vektor $\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{b}^0$ in den Vektor $(-\boldsymbol{a}^0) * (-\boldsymbol{b}^0) = \boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{b}^0$ [vgl. (97)] überführen, d. h. den Vektor $\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{b}^0$ festlassen. Das ist aber nur dann möglich, wenn der Vektor $\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{b}^0$ der Geraden OP angehört (d. h., der Vektor $\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{b}^0$ muß auf den Vektoren $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{b}^0$ senkrecht stehen).

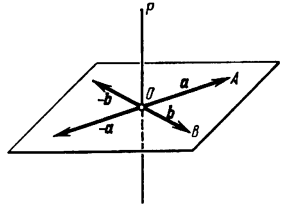


Abb. 80

Hieraus ergibt sich vor allem, daß das „Quadrat" $\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{a}^0$ eines beliebigen (Einheits-) Vektors gleich dem Nullvektor $\boldsymbol{o}$ ist:

$$\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{a}^0 = \boldsymbol{o}. \qquad (99)$$

Fällt nämlich der Vektor $\boldsymbol{b}^0$ mit dem Vektor $\boldsymbol{a}^0$ zusammen, dann gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die Wahl der Geraden OP, und der Vektor $\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{a}^0$, der allen diesen Geraden angehören muß, ist notwendigerweise der Nullvektor.

Es sei nun $\boldsymbol{c}^0 \perp \boldsymbol{a}^0$; dann ist das „Produkt" $\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{c}^0$ gleich $\lambda \boldsymbol{u}^0$, wobei $\boldsymbol{u}^0$ ein zu $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{c}^0$ senkrechter Einheitsvektor ist. Er ist eindeutig bestimmt, wenn wir ihn so wählen, daß von seinem Endpunkt aus gesehen die Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn den Vektor $\boldsymbol{a}^0$ in den Vektor $\boldsymbol{c}^0$ überführt. Der Faktor λ muß dann konstant sein, d. h. derselbe für jedes Paar senkrecht aufeinanderstehender Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{c}^0$: Sind nämlich $\boldsymbol{a}_1^0$ und $\boldsymbol{c}_1^0$ zwei andere aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, so führt die Drehung, die das Paar $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ mit dem Paar $\boldsymbol{a}_1^0$, $\boldsymbol{c}_1^0$ zur Deckung bringt, den Vektor $\lambda \boldsymbol{u}^0$ in den Vektor $\lambda \boldsymbol{u}_1^0$ über, wobei $\boldsymbol{u}_1^0$ genauso bestimmt wird wie der Vektor $\boldsymbol{u}^0$ aus den Vektoren $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{c}^0$. Also ist

$$\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{c}^0 = \lambda \boldsymbol{u}^0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \text{const}. \qquad (100$$

Sind schließlich $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{b}^0$ beliebige Einheitsvektoren und ist $\boldsymbol{c}^0$ ein in der durch die Vektoren $\boldsymbol{a}^0$ und $\boldsymbol{b}^0$ bestimmten Ebene liegender und auf $\boldsymbol{a}^0$ senkrecht stehender Einheitsvektor, so wird

$$\boldsymbol{b}^0 = \cos \sphericalangle (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\, \boldsymbol{a}^0 + \sin \sphericalangle (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\, \boldsymbol{c}^0$$

(vgl. S. 344). Unter Verwendung der Beziehungen (98), (97), (99) und (100) erhalten wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{b}^0 &= \cos \sphericalangle (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\, (\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{a}^0) + \sin \sphericalangle (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\, (\boldsymbol{a}^0 * \boldsymbol{c}^0) \\ &= \lambda \sin \sphericalangle (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\, \boldsymbol{u}^0. \end{aligned}$$

Mithin gilt für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \lambda ab \sin \sphericalangle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{u}^0 = \lambda [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],$$

wobei λ eine Konstante ist.

Ganz analog erkennt man, daß auch das Spatprodukt $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ im wesentlichen durch seine Eigenschaften (86), (88), (88a) festgelegt ist.[1])

Abschließend sei noch folgendes bemerkt: Allein aus der Forderung, daß für das „Vektorprodukt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ das Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (97) und das Distributivgesetz (98) gelten sollte, ergab sich, daß das „Vektorprodukt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ bis auf einen konstanten Faktor mit dem Vektorprodukt $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ übereinstimmt. Daraus folgt, daß wir, wenn wir vom „Produkt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ zusätzlich noch die Gültigkeit des Kommutativgesetzes

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a} \tag{101}$$

oder des Assoziativgesetzes im gewöhnlichen Sinne

$$\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} \tag{102}$$

fordern, kein „Produkt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ außer dem (völlig uninteressanten) „Nullprodukt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ erhalten. Also sind die Forderungen (97), (98) mit jeder der Forderungen (101), (102) unvereinbar (wenn man verlangt, daß das „Produkt" $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ einen geometrischen Sinn haben soll).

§ 6. Anwendung der Vektorrechnung auf die sphärische Geometrie und Trigonometrie

6.1. Untersuchung sphärischer Dreiecke mit Hilfe von Vektoren. Viele Sätze der sphärischen Geometrie und Trigonometrie lassen sich mit Hilfe der Vektorrechnung sehr elegant beweisen.

Wir kennzeichnen dazu jeden Punkt A einer Sphäre mit dem Radius r durch seinen Ortsvektor $\boldsymbol{A}$ mit dem Mittelpunkt O der Sphäre als Anfangspunkt (Abb. 81). Dann ist

$$|\boldsymbol{A}| = r. \tag{103}$$

Offenbar sind die Ortsvektoren zweier sich diametral gegenüberliegender Punkte entgegengesetzt gerichtet und die Ortsvektoren zweier polar konjugierter Punkte[2]) zueinander orthogonal, d. h.,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}$$

ist die Bedingung dafür, daß sich die Punkte A und B diametral gegenüberliegen, und

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = 0 \tag{104}$$

die Bedingung dafür, daß die Punkte A und B polar konjugiert sind.

---

[1]) Vgl. § 2 bis § 6 des Artikels „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM.

[2]) Zu den hier verwendeten Begriffen der sphärischen Geometrie vgl. den Artikel „Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie und Trigonometrie" in diesem Band der EdEM.

Die Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks ABC sind, wie man leicht sieht, mit den Ortsvektoren A, B, C seiner Eckpunkte durch die Beziehungen

$$BC = r^2 \cos\frac{a}{r}, \quad CA = r^2 \cos\frac{b}{r}, \quad AB = r^2 \cos\frac{c}{r}, \tag{105}$$

$$|[B, C]| = r^2 \sin\frac{a}{r}, \quad |[C, A]| = r^2 \sin\frac{b}{r}, \quad |[A, B]| = r^2 \sin\frac{c}{r} \tag{106}$$

verknüpft.

Der Winkel A eines sphärischen Dreiecks, d. h. der Winkel zwischen den im Punkt A an die Seiten b und c gezogenen Tangenten, ist gleich dem Winkel zwischen den Ebenen AOB und AOC (wobei O der Mittelpunkt der Sphäre ist), d. h. gleich dem Winkel zwischen den auf diesen Ebenen senkrecht stehenden Vektoren $[A, B]$ und $[A, C]$. Daraus folgt

$$\cos A = \frac{[A, B]\,[A, C]}{|[A, B]|\,|[A, C]|} \tag{107}$$

und

$$\sin A = \frac{|[[A, B], [A, C]]|}{|[A, B]|\,|[A, C]|}. \tag{108}$$

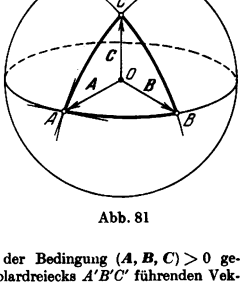


Abb. 81

Aus der Beziehung (104) ergibt sich eine notwendige Bedingung, daß das sphärische Dreieck $A'B'C'$ Polardreieck des sphärischen Dreiecks ABC ist; nämlich

$$AB' = AC' = BA' = BC' = CA' = CB' = 0. \tag{109}$$

Werden die Eckpunkte des sphärischen Dreiecks ABC so numeriert, daß die Vektoren A, B, C ein positiv orientiertes Parallelflach aufspannen, d. h. der Bedingung $(A, B, C) > 0$ genügen, so lassen sich die zu den Eckpunkten des Polardreiecks $A'B'C'$ führenden Vektoren A', B', C' durch die Vektoren A, B, C folgendermaßen ausdrücken:

$$A' = \frac{r[B, C]}{|[B, C]|}, \quad B' = \frac{r[C, A]}{|[C, A]|}, \quad C' = \frac{r[A, B]}{|[A, B]|}. \tag{110}$$

Denn die Vektoren (110) genügen zunächst der Bedingung (109); da außerdem die Vektoren A', B, C und ebenso die Vektoren A, B', C und A, B, C' positiv orientierte Parallelflache aufspannen, befinden sich die Punkte A', B', C' jeweils auf derselben Seite der Großkreise BC, CA und AB wie die Punkte A, B, C. Man prüft leicht nach [z. B. mit Hilfe der Formeln (83) und (95a)], daß die Vektoren A', B', C' ebenfalls ein positiv orientiertes Parallelflach aufspannen.

Aus der Symmetrie der Beziehungen (109) bezüglich der beiden positiv orientierten Tripel von Vektoren A, B, C und A', B', C' ersieht man, daß sich als Polardreieck des Dreiecks $A'B'C'$ das ursprüngliche sphärische Dreieck ABC ergibt.

Für die Seite a' des Polardreiecks $A'B'C'$ gilt nach (105)

$$B'C' = r^2 \cos\frac{a'}{r},$$

aus der wegen (110) und (107)

$$\cos\frac{a'}{r} = \frac{1}{r^2} B'C' = \frac{[C, A]\,[A, B]}{|[C, A]|\,|[A, B]|} = -\frac{[A, B]\,[A, C]}{|[A, B]|\,|[A, C]|}$$
$$= -\cos A = \cos(\pi - A)$$

folgt. Analog erhalten wir

$$\cos\frac{b'}{r} = -\cos B = \cos(\pi - B), \qquad \cos\frac{c'}{r} = -\cos C = \cos(\pi - C).$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Seiten a', b', c' des sphärischen Dreiecks $A'B'C'$ gleich $(\pi - A)\,r$ bzw. $(\pi - B)\,r$ bzw. $(\pi - C)\,r$ sind. Da das sphärische Dreieck ABC Polardreieck des sphärischen Dreiecks $A'B'C'$ ist, finden wir auf die gleiche Weise, daß die Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks ABC gleich $(\pi - A')\,r$ bzw. $(\pi - B')\,r$ bzw. $(\pi - C')\,r$ sind. Daraus folgt, daß die Winkel A', B', C' des sphärischen Dreiecks $A'B'C'$ gleich $\pi - \frac{a}{r}$ bzw. $\pi - \frac{b}{r}$ bzw. $\pi - \frac{c}{r}$ sind.

6.2. Der sphärische Kosinus- und Sinussatz. Für den Beweis des *sphärischen Seitenkosinussatzes*[1]) sei bemerkt, daß man die Formel (107) wegen der Beziehung (96) in der Gestalt

$$\cos A = \frac{A^2(BC) - (AB)(AC)}{|[A, B]|\,|[A, C]|}$$

schreiben kann.

Diese Beziehung kann jedoch nach (103), (105) und (106) auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}},$$

woraus sich unmittelbar der Seitenkosinussatz

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A$$

ergibt.

Für den Beweis des *sphärischen Sinussatzes* sei bemerkt, daß man die Formel (108) wegen (95a) in der Gestalt

$$\sin A = \frac{|(A, A, C)\,B - (B, A, C)\,A|}{|[A, B]|\,|[A, C]|} = \frac{|A|\,|(A, B, C)|}{|[A, B]|\,|[A, C]|}$$

schreiben kann.

Diese Beziehung läßt sich wegen (103) und (106) auch in der Gestalt

$$\sin A = \frac{1}{r^2}\,\frac{|(A, B, C)|}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

schreiben, woraus

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{1}{r^2}\,\frac{|(A, B, C)|}{\sin\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

folgt. Da der erhaltene Ausdruck für $\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}}$ in den Vektoren A, B, C und den Seiten a, b, c

[1]) Vgl. S. 555ff.

symmetrisch ist, muß sich für die Verhältnisse $\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}$ und $\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}$ derselbe Wert ergeben, d. h., es gilt der sphärische Sinussatz

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}.$$

Wendet man den Seitenkosinussatz auf das Polardreieck $A'B'C'$ an und drückt a', b', c' durch A, B, C und A' durch a, b, c aus, so erhält man, wie auf S. 561 f., den Winkelkosinussatz für das sphärische Dreieck ABC.

§ 7. Der Begriff des Vektorraumes

7.1. Axiomatische Definition des Vektorraumes. Wir geben in diesem Paragraphen ein Axiomensystem an, das die Menge aller Vektoren (in der Ebene oder im Raum) beschreibt. Das wird uns unter anderem in die Lage versetzen, auch ein Axiomensystem für die Geometrie angeben zu können, das sich von der im Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie" (S. 25–34) angeführten Axiomatik unterscheidet.

Wir bezeichnen mit R die Menge aller Vektoren des Raumes. In den vorhergehenden Paragraphen wurden viele wichtige Eigenschaften der Menge R festgestellt. Einige dieser Eigenschaften erwähnen wir hier noch einmal.

I. Die Gruppeneigenschaften

Für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (d. h. für je zwei Elemente der Menge R) ist ein Vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ definiert, den man ihre *Summe* nennt. Diese Operation „Addition" hat folgende drei Eigenschaften:

1. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

2. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

3. Für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ besitzt die Gleichung $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eine Lösung, (d. h., es existiert wenigstens ein Vektor $\boldsymbol{x}$, der der Beziehung $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ genügt).

Die Eigenschaften 1 bis 3 besagen, daß die Menge R bezüglich der Addition von Vektoren eine *kommutative Gruppe* bildet (vgl. S. 20).

II. Die Linearitätseigenschaften

Für jeden Vektor $\boldsymbol{a}$ und jede reelle Zahl λ ist ein Vektor $\lambda\boldsymbol{a}$ definiert, den man das *Produkt des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der Zahl λ* nennt. Diese Operation „Multiplikation

eines Vektors mit einer Zahl" hat folgende Eigenschaften:

4. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ für jeden Vektor $\boldsymbol{a}$.
5. $(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.
6. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.
7. $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\,\boldsymbol{a}$.

(In den Eigenschaften 5, 6, 7 sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ beliebige Vektoren und λ, μ beliebige reelle Zahlen.)

III. Die metrischen Eigenschaften

Für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ist eine reelle Zahl $\boldsymbol{ab}$ definiert, die man ihr *Skalarprodukt* nennt. Diese Operation „skalare Multiplikation" hat folgende Eigenschaften:

8. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$ für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.
9. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$ für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.
10. $(\lambda\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$ für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und jede reelle Zahl λ.
11. Für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ ist die Zahl $\boldsymbol{aa}$ nichtnegativ und genau dann gleich Null, wenn $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ ist.

(Der Nullvektor wird durch die Gleichung $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{c}$ definiert, in der $\boldsymbol{c}$ ein beliebiger Vektor ist.)

IV. Die Dimensionseigenschaften

12. In der Menge R gibt es drei linear unabhängige Vektoren.
13. Vier beliebige Vektoren der Menge R sind linear abhängig.

Die angeführten Axiome spielen in der modernen Mathematik eine sehr wichtige Rolle. Wie wir schon wissen, führen die Axiome 1 bis 3 auf den überaus wichtigen Begriff der *Gruppe* (vgl. S. 20). Die Axiome 1 bis 7 definieren den Begriff des *Vektorraumes*, der ebenfalls eine sehr große Rolle spielt. Die Axiome 1 bis 11 definieren schließlich den Begriff des *euklidischen Vektorraumes*, der in der Mathematik vielfach fruchtbringende Anwendung findet. Später werden wir etwas ausführlicher auf Vektorräume (insbesondere euklidische) eingehen. Jetzt wollen wir vor allem erst einmal zeigen, daß *das Axiomensystem* 1 *bis* 13 *widerspruchsfrei und vollständig ist* (vgl. S. 21–25). Das bedeutet, daß man, von den reellen Zahlen ausgehend, für dieses Axiomensystem ein *Modell* konstruieren kann (Widerspruchsfreiheit) und daß zwei beliebige Modelle dieser Art einander *isomorph* sind (Vollständigkeit).

7.2. Das arithmetische Modell des Vektorraumes. Ein Modell läßt sich für das Axiomensystem 1 bis 13 sehr leicht konstruieren. Es sei daran erinnert, daß es nach Festlegung eines Koordinatensystems möglich ist, jeden Vektor

als Zahlentripel (x, y, z) zu schreiben, wobei sich die oben angegebenen Operationen sehr einfach in Koordinaten ausdrücken lassen. Wir stellten diesen Sachverhalt fest, indem wir vom *geometrischen Modell* der Menge der Vektoren ausgingen (vgl. § 1). Jetzt werden wir dagegen die Koordinatenschreibweise der Vektoren als ursprüngliche Definition ansehen. Wir vereinbaren also, daß wir jedes Tripel (x, y, z) reeller Zahlen (in ganz bestimmter Reihenfolge geschrieben) einen „Vektor" nennen und mit R die Menge aller dieser „Vektoren" bezeichnen. Ferner definieren wir die Summe zweier Vektoren, das Produkt eines Vektors mit einer Zahl und das Skalarprodukt von Vektoren durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),\\ \lambda(x, y, z) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z),\\ (x_1, y_1, z_1)\,(x_2, y_2, z_2) &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß in diesem „arithmetischen" Modell der Menge der Vektoren die Axiome 1 bis 13 erfüllt sind. Die Gültigkeit der Axiome 1 bis 11 läßt sich ohne Schwierigkeit nachprüfen. Wir geben nur kurz an, auf welche Weise die Axiome 12 und 13 zu überprüfen sind. Für den Nachweis der Gültigkeit des Axioms 12 sei festgestellt, daß die Vektoren

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

linear unabhängig sind. Eine Linearkombination dieser Vektoren mit Koeffizienten λ, μ, ν hat die Gestalt

$$\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) + \nu(0, 0, 1) = (\lambda, \mu, \nu),$$

und es ist klar, daß diese Linearkombination nur dann gleich dem Nullvektor $(0, 0, 0)$ ist, wenn $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist, und das besagt ja gerade (vgl. S. 320), daß die betrachteten drei Vektoren linear unabhängig sind.

Wenden wir uns schließlich dem Axiom 13 zu. Wir betrachten vier beliebige Vektoren

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), (a_4, b_4, c_4).$$

Um zu zeigen, daß diese vier Vektoren linear abhängig sind, müssen wir Zahlen x, y, z, t finden, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist und die der Bedingung

$$x(a_1, b_1, c_1) + y(a_2, b_2, c_2) + z(a_3, b_3, c_3) + t(a_4, b_4, c_4) = (0, 0, 0)$$

genügen. Diese Beziehung ist, wie man leicht sieht, der Gültigkeit der drei Gleichungen

$$\begin{aligned}a_1x + a_2y + a_3z + a_4t &= 0,\\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4t &= 0,\\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4t &= 0\end{aligned}$$

äquivalent. Also gilt das Axiom 13, wenn das erhaltene Gleichungssystem

wenigstens eine von Null verschiedene Lösung besitzt. Ein homogenes (d. h. keine freien Glieder enthaltendes) lineares Gleichungssystem, das mehr Unbekannte als Gleichungen hat, besitzt jedoch immer eine nichttriviale Lösung (vgl. etwa EdEM, Band II, S. 61).

Also gelten in dem betrachteten Modell die Axiome 1 bis 13, und folglich ist das angeführte Axiomensystem widerspruchsfrei. Das betrachtete Modell nennen wir das *arithmetische Modell* des Vektorraumes.

7.3. Die Vollständigkeit des Axiomensystems. Bevor wir die Vollständigkeit des Axiomensystems 1 bis 13 beweisen, leiten wir aus den Axiomen 1 bis 13 einige Sätze her. Da diese Sätze allein mit Hilfe der Axiome bewiesen werden, gelten sie in jedem Modell dieses Axiomensystems.

Satz 1. *Es existiert ein einziger Vektor* $\boldsymbol{o}$, *der die Beziehung* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$ *für jeden beliebigen Vektor* $\boldsymbol{a}$ *erfüllt.*

Das folgt allein aus den Gruppenaxiomen 1 bis 13 (vgl. etwa EdEM, Band I, S. 87–88).

Satz 2. *Für jeden Vektor* $\boldsymbol{p}$ *gilt die Beziehung*

$$0 \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{o}.$$

In der Tat gilt nach den Axiomen 4 und 5

$$\boldsymbol{p} = 1 \cdot \boldsymbol{p} = (1 + 0) \cdot \boldsymbol{p} = 1 \cdot \boldsymbol{p} + 0 \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} + 0 \cdot \boldsymbol{p},$$

und nach Satz 1 erhalten wir hieraus $0 \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{o}$.

Satz 3. *Sind die Vektoren* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *linear unabhängig, dann ist jeder dieser Vektoren von* $\boldsymbol{o}$ *verschieden.*

Ist nämlich z. B. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, dann ist

$$1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = 1 \cdot \boldsymbol{o} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o},$$

d. h., die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sind linear abhängig, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 4. *Es seien* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *linear unabhängige Vektoren. Wir setzen*

$$\boldsymbol{a}' = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c},$$

wobei λ, μ, ν *reelle Zahlen sind und* $\lambda \neq 0$ *sein soll. Dann sind die Vektoren* $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *ebenfalls linear unabhängig.*

Beweis. Es sei $\alpha \boldsymbol{a}' + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$, d. h.

$$\alpha(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c}) + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}.$$

Zieht man die Axiome 6, 7, 5 (und das Axiom 2) heran, so kann man für diese Gleichung schreiben:

$$(\alpha\lambda) \boldsymbol{a} + (\alpha\mu + \beta) \boldsymbol{b} + (\alpha\nu + \gamma) \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}.$$

Da die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$\alpha\lambda = 0, \quad \alpha\mu + \beta = 0, \quad \alpha\nu + \gamma = 0.$$

Es ist also $\alpha = 0$ (wegen $\lambda \neq 0$) und mithin auch $\beta = 0$ und $\gamma = 0$. Die Gleichung $\alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ gilt also nur dann, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, d. h., die Vektoren $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sind linear unabhängig.

Satz 5. *Für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ und beliebige reelle Zahlen λ, μ gilt* $(\lambda\boldsymbol{a})\,(\mu\boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$.

Nach den Axiomen 8 und 10 ist nämlich

$$(\lambda\boldsymbol{a})\,(\mu\boldsymbol{b}) = \lambda\big(\boldsymbol{a}(\mu\boldsymbol{b})\big) = \lambda\big((\mu\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}\big) = \lambda\mu(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}).$$

Satz 6. *Für jeden vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\boldsymbol{a}$ kann man eine reelle Zahl λ finden, so daß der Vektor $\boldsymbol{a}^* = \lambda\boldsymbol{a}$ der Beziehung $\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a}^* = 1$ genügt.*

Es genügt, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}}$ zu setzen und Satz 5 anzuwenden (die Zahl $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ ist nach Axiom 11 positiv).

Satz 7. *Es gibt drei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, die den Beziehungen*

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c} = 1, \quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} = 0$$

genügen. (Ein solches Tripel von Vektoren nennt man eine *orthonormierte Basis.*)

Beweis. Es seien $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ drei beliebige linear unabhängige Vektoren (Axiom 12). Dann ist der Vektor $\boldsymbol{a}'$ verschieden vom Nullvektor (Satz 3) Wir wählen eine solche Zahl λ (sie ist offenbar von Null verschieden), daß der Vektor $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}'$ der Beziehung $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = 1$ genügt (Satz 6). Nach Satz 4 sind dann auch die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ linear unabhängig. Wir setzen $\boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b}' - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}')\,\boldsymbol{a}$. Aus den Axiomen 8, 9, 10 folgt $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'' = 0$ (durch unmittelbare Berechnung). Nach Satz 4 sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}'', \boldsymbol{c}'$ linear unabhängig. Mithin ist $\boldsymbol{b}''$ verschieden vom Nullvektor (Satz 3), und es gibt somit eine solche Zahl μ, daß der Vektor $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{b}''$ der Beziehung $\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = 1$ genügt (Satz 6). Aus Satz 5 folgt $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \mu(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'') = 0$. Nach Satz 4 sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}$ linear unabhängig. Wir setzen $\boldsymbol{c}'' = \boldsymbol{c}' - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}')\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\,\boldsymbol{b}$. Eine unmittelbare Berechnung unter Zuhilfenahme der Axiome 8, 9, 10 zeigt, daß $\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}'' = 0$ und $\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'' = 0$ ist. Außerdem sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}''$ linear unabhängig (Satz 4), und deshalb ist $\boldsymbol{c}'' \neq \boldsymbol{o}$. Es existiert somit eine solche Zahl ν, daß der Vektor $\boldsymbol{c} = \nu\boldsymbol{c}''$ der Beziehung $\boldsymbol{c}\boldsymbol{c} = 1$ genügt. Nach Satz 5 ist dabei $\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} = \nu(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}'') = 0$, $\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} = \nu(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'') = 0$. Die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ genügen also den gestellten Anforderungen.[1])

[1]) Das zum Beweis dieses Satzes verwendete Konstruktionsverfahren für eine orthonormierte Basis nennt man das *Orthogonalisierungsverfahren von* ERHARD SCHMIDT. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Satz 8. *Sind* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *die Vektoren einer beliebigen orthonormierten Basis, d. h., genügen sie den Bedingungen*

$$\boldsymbol{aa} = \boldsymbol{bb} = \boldsymbol{cc} = 1, \quad \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc} = 0,$$

so sind diese Vektoren linear unabhängig.

Beweis. Es seien λ, μ, ν reelle Zahlen, für die die Beziehung $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ erfüllt ist. Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung skalar mit dem Vektor $\boldsymbol{a}$ und erhalten (mit Hilfe der Axiome 9, 10)

$$\lambda(\boldsymbol{aa}) + \mu(\boldsymbol{ab}) + \nu(\boldsymbol{ac}) = 0,$$

woraus (wegen der im Satz angegebenen Voraussetzungen) $\lambda = 0$ folgt. Analog (nämlich durch Multiplikation mit $\boldsymbol{b}$ bzw. mit $\boldsymbol{c}$) finden wir $\mu = 0$ und $\nu = 0$. Somit sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ linear unabhängig.

Satz 9. *Bilden die Vektoren* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *eine orthonormierte Basis, so gibt es für jeden Vektor* $\boldsymbol{p}$ *reelle Zahlen* α, β, γ, *so daß*

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$$

gilt. Diese Zahlen α, β, γ *sind dabei durch* $\boldsymbol{p}$ *eindeutig bestimmt.* (Man nennt sie die *Koordinaten* des Vektors $\boldsymbol{p}$ bezüglich der Basis $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.)

Beweis. Da vier beliebige Vektoren linear abhängig sind (Axiom 13), existieren Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$, so daß

$$\varkappa\boldsymbol{p} + \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$$

gilt, wobei wenigstens eine der Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ von Null verschieden ist. Wäre die Zahl $\varkappa$ gleich Null, dann nähme diese Beziehung die Gestalt $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ an, was nicht möglich ist, weil die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ linear unabhängig sind (Satz 8). Somit ist $\varkappa \neq 0$. Multipliziert man beide Seiten der betrachteten Beziehung mit $\frac{1}{\varkappa}$, so ergibt sich (wenn man die Gleichheit $\lambda\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ verwendet, die sich ähnlich wie Satz 2 beweisen läßt)

$$\boldsymbol{p} + \frac{\lambda}{\varkappa}\boldsymbol{a} + \frac{\mu}{\varkappa}\boldsymbol{b} + \frac{\nu}{\varkappa}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o},$$

woraus

$$\boldsymbol{p} = \left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right)\boldsymbol{a} + \left(-\frac{\mu}{\varkappa}\right)\boldsymbol{b} + \left(-\frac{\nu}{\varkappa}\right)\boldsymbol{c}$$

folgt. Die Zahlen

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\varkappa}, \quad \beta = -\frac{\mu}{\varkappa}, \quad \gamma = -\frac{\nu}{\varkappa}$$

genügen also der geforderten Beziehung $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$.

Sind α', β', γ' andere Zahlen, die der Beziehung $\boldsymbol{p} = \alpha'\boldsymbol{a} + \beta'\boldsymbol{b} + \gamma'\boldsymbol{c}$ genügen, so erhalten wir durch Subtraktion der beiden für $\boldsymbol{p}$ stehenden Ausdrücke

$$(\alpha - \alpha')\boldsymbol{a} + (\beta - \beta')\boldsymbol{b} + (\gamma - \gamma')\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}.$$

Hieraus ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (Satz 8)

$$\alpha - \alpha' = 0, \quad \beta - \beta' = 0, \quad \gamma - \gamma' = 0.$$

Die Zahlen α, β, γ sind also durch den Vektor $\boldsymbol{p}$ eindeutig bestimmt.

Nunmehr kann man unschwer die Vollständigkeit des Axiomensystems 1 bis 13 beweisen. Dazu sei R' ein beliebiges Modell für dieses Axiomensystem. Wir wählen in R' eine orthonormierte Basis $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (Satz 7). Ferner wählen wir für jeden Vektor $\boldsymbol{p}$ (d. h. jedes Element der Menge R') Zahlen α, β, γ, so daß $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$ gilt (Satz 9), und ordnen dem Vektor $\boldsymbol{p}$ das Zahlentripel (α, β, γ) zu. Damit erhalten wir eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen des Modells R' und den Zahlentripeln (α, β, γ), d. h. den Elementen des arithmetischen Modells. Man kann leicht zeigen, daß diese Zuordnung ein *Isomorphismus* ist. Wenn nämlich dem Vektor $\boldsymbol{p}$ das Tripel (α, β, γ) und dem Vektor $\boldsymbol{p}'$ das Tripel $(\alpha', \beta', \gamma')$ zugeordnet ist, d. h.

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{p}' = \alpha'\boldsymbol{a} + \beta'\boldsymbol{b} + \gamma'\boldsymbol{c}$$

gilt, dann ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' &= (\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) + (\alpha'\boldsymbol{a} + \beta'\boldsymbol{b} + \gamma'\boldsymbol{c}) \\ &= (\alpha + \alpha')\,\boldsymbol{a} + (\beta + \beta')\,\boldsymbol{b} + (\gamma + \gamma')\,\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

und mithin ist dem Vektor $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'$ das Tripel $(\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma')$ zugeordnet, d. h. die Summe der Vektoren (α, β, γ) und $(\alpha', \beta', \gamma')$ im arithmetischen Modell. Analog entspricht dem Vektor $\lambda\boldsymbol{p}$ das Tripel

$$(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda(\alpha, \beta, \gamma).$$

Schließlich ist das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' = (\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c})\,(\alpha'\boldsymbol{a} + \beta'\boldsymbol{b} + \gamma'\boldsymbol{c}),$$

wie man leicht nachprüft (indem man die Beziehungen $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c} = 1$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} = 0$ und die Axiome 8, 9, 10 benutzt), gleich $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$, d. h. gleich dem Skalarprodukt der Vektoren (α, β, γ) und $(\alpha', \beta', \gamma')$ im arithmetischen Modell. Also bleiben bei der angegebenen Zuordnung zwischen den Elementen der Menge R' und den Elementen des arithmetischen Modells die Summe der Vektoren, das Produkt eines Vektors mit einer Zahl und das Skalarprodukt erhalten, d. h., sie ist ein Isomorphismus. Jedes Modell ist also dem arithmetischen isomorph, und folglich ist das Axiomensystem 1 bis 13 vollständig.

Wir kennen schon zwei Modelle dieses Axiomensystems: das arithmetische und das geometrische (d. h. die Menge aller Vektoren des dreidimensionalen euklidischen Raumes; vgl. § 1). Zum Vergleich führen wir noch zwei algebraische Modelle des Axiomensystems 1 bis 13 an, und zwar bezeichnen wir als „Vektor" jedes Polynom zweiten Grades mit reellen Koeffizienten

$$ax^2 + bx + c.$$

Die Summe zweier „Vektoren" und die Multiplikation eines „Vektors" mit einer Zahl definieren wir als gewöhnliche Addition von Polynomen und Multiplikation eines Polynoms

mit einer Zahl. Dann sind die Axiome 1 bis 7 offenbar erfüllt. Das Skalarprodukt von „Vektoren" definieren wir durch die Formel

$$(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') = aa' + bb' + cc'.$$

Es läßt sich mühelos die Gültigkeit der Axiome 8 bis 11 zeigen. Die Überprüfung der Axiome 12 und 13 führt man etwa genauso wie im arithmetischen Modell durch. Auf diese Weise erhalten wir ein neues Modell für das Axiomensystem 1 bis 13.

Aus diesem dritten Modell erhalten wir ein weiteres, ein viertes Modell, wenn wir wieder die Polynome zweiten Grades als „Vektoren" ansehen, die Definition der Summe und der Multiplikation mit einer Zahl im gleichen Sinne beibehalten, die skalare Multiplikation aber wie folgt definieren:

$$(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c')\,dx$$

(unter dem Integral steht das gewöhnliche Produkt von Polynomen). Dieses Skalarprodukt genügt ebenfalls den Axiomen 8 bis 11 (wie man leicht nachprüft), und wir erhalten insgesamt wieder ein Modell des Axiomensystems 1 bis 13.

7.4. Ein Axiomensystem der Elementargeometrie. Mit Hilfe des Axiomensystems 1 bis 13 können wir ein neues Axiomensystem für die Geometrie aufbauen, das sich von dem im Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie" (S. 25–34) angegebenen wesentlich unterscheidet. In diesem Axiomensystem sind Grundbegriffe erstens die *Vektoren* und ihre Rechenoperationen (Addition, Multiplikation mit einer Zahl und skalare Multiplikation) und zweitens die *Punkte* und das *Abtragen von Vektoren*. Die Vektoren und ihre Rechenoperationen werden durch die gleichen vier Axiomgruppen beschrieben wie oben. Die fünfte Axiomgruppe, die sich auf das Abtragen von Vektoren bezieht, lautet folgendermaßen:

V. Punkte und das Abtragen von Vektoren

Neben der Menge R, deren Elemente *Vektoren* heißen und den Axiomen 1 bis 13 genügen sollen, wird eine Menge A (der *Raum*) eingeführt, deren Elemente *Punkte* genannt werden. Es wird angenommen, daß jedem geordneten Punktepaar M, N des Raumes A ein Vektor (d. h. ein Element der Menge R) zugeordnet ist, der mit $\overrightarrow{MN}$ bezeichnet wird, wobei folgende drei Axiome erfüllt sein sollen:

14. Für einen beliebigen Punkt M des Raumes A und einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ existiert ein Punkt N des Raumes A, so daß $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{a}$ gilt.

15. Für drei beliebige (nicht unbedingt verschiedene) Punkte M, N, P des Raumes A gilt die Beziehung $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \boldsymbol{o}$.

16. Ist $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{o}$, dann fallen die Punkte M und N zusammen.

Die Axiome 1 bis 16 bilden das neue Axiomensystem für die Geometrie.

Wie werden nun in diesem Axiomensystem Geraden, Ebenen, Strecken usw. definiert? Sind M und N zwei verschiedene Punkte des Raumes A, dann heißt die Menge aller jener Punkte P, für die die Vektoren $\overrightarrow{PM}$ und $\overrightarrow{PN}$ linear abhängig sind, die *Gerade* MN. Aus den oben angeführten Axiomen kann man herleiten, daß die Gerade MN nicht nur durch die Punkte M und N, sondern durch zwei beliebige verschiedene ihrer Punkte bestimmt wird. Analog definiert man die Ebenen: Sind M, N, P drei Punkte des Raumes A, die nicht auf einer Geraden liegen, dann heißt die Menge aller jener Punkte Q des Raumes A, für die die Vektoren $\overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{QN}$ und $\overrightarrow{QP}$ linear abhängig sind, die *Ebene* MNP. Des weiteren werden wir sagen, daß der Punkt P *zwischen* den Punkten M und N liegt (wobei $M \neq N$ sei), wenn eine Zahl λ zwischen Null und Eins existiert, so daß $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{MN}$ gilt. Schließlich nennen wir eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ des Raumes A auf sich eine *Bewegung*, wenn für zwei beliebige Punkte M, N das skalare Quadrat des Vektors $\overrightarrow{MN}$ gleich dem skalaren Quadrat des Vektors $\overrightarrow{M'N'}$ mit $M' = \varphi(M)$, $N' = \varphi(N)$ ist.

Damit haben wir alle Grundbegriffe beisammen, die in dem auf den S. 25–34 angeführten Axiomensystem beschrieben werden. Es ist nicht sehr schwierig nachzuprüfen, daß alle auf den S. 25–34 angegebenen Axiome hier erfüllt sind, so daß uns das hier angeführte Axiomensystem 1 bis 16 ebenfalls ein Axiomensystem der Geometrie liefert. Umgekehrt kann man aus dem auf den S. 25–34 angeführten Axiomensystem alle Axiome 1 bis 16 herleiten (wenn man die Vektoren so definiert, wie in § 1 angegeben wurde). Also ist das auf den S. 25–34 angeführte Axiomensystem der Geometrie dem hier angegebenen Axiomensystem 1 bis 16 äquivalent.

7.5. Einige Typen mehrdimensionaler Räume. Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß verschiedene Abwandlungen des Axiomensystems 1 bis 16 auf andere „Geometrien" führen, die in der modernen Mathematik und ihren Anwendungen eine sehr wichtige Rolle spielen. Wir wiesen oben schon darauf hin, daß jede Menge, die den Axiomen 1 bis 7 genügt, *Vektorraum* genannt wird. Das Axiomensystem 1 bis 7 ist nicht vollständig, d. h., es gibt verschiedene, untereinander nicht isomorphe Vektorräume. Fügt man zu den Axiomen 1 bis 7 die nachstehend formulierten Axiome 17 und 18 hinzu (die eine Abwandlung der Axiome 12 und 13 darstellen), dann erhalten wir den *n-dimensionalen Vektorraum*. Diese Dimensionsaxiome lauten:

17. Es existieren (in der Menge R) n linear unabhängige Vektoren.

18. Beliebige $n + 1$ Vektoren von R sind linear abhängig.

Als Beispiel für eine Menge, die den Axiomen 1 bis 7, 17, 18 genügt (d. h. als Beispiel für einen n-dimensionalen Vektorraum) kann die Menge aller Polynome vom Grade kleiner n mit reellen Koeffizienten dienen (die Addition

und Multiplikation mit einer Zahl ist im üblichen Sinne aufzufassen). Ein anderes Beispiel ist das „arithmetische" Modell, in dem man beliebige n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n reellen Zahlen als „Vektoren" ansieht und die Addition von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl folgendermaßen definiert: Sind $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\boldsymbol{b} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ zwei beliebige Vektoren und λ eine reelle Zahl, dann soll

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

gelten. Das Axiomensystem 1 bis 7, 17, 18 ist vollständig, d. h., alle n-dimensionalen Vektorräume sind einander isomorph. In der Mathematik betrachtet man auch *unendlichdimensionale Vektorräume* (in einem solchen Raum gibt es für ein beliebiges n stets n linear unabhängige Vektoren). Näheres über Vektorräume findet der Leser in dem Artikel „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM.

Jede Menge R, die den Axiomen 1 bis 11, 17, 18 genügt, heißt *n-dimensionaler euklidischer Vektorraum*. Das Axiomensystem 1 bis 11, 17, 18 ist vollständig, d. h., alle n-dimensionalen euklidischen Vektorräume sind einander isomorph. Die Menge aller Vektoren der Ebene bildet z. B. einen *zweidimensionalen Vektorraum*. Als Modell des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes kann die Menge aller n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n reellen Zahlen dienen, für die das Skalarprodukt durch die Formel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

definiert wird („arithmetisches Modell"). Durch Hinzufügen der Axiome 14 bis 16 zu den Axiomen 1 bis 11, 17, 18 erhält man den Begriff des *n-dimensionalen euklidischen (Punkt-)Raumes*[1]).

Es sei noch der *n-dimensionale affine (Punkt-)Raum* erwähnt, der durch die Axiome 1 bis 7, 14 bis 18 definiert wird. Die Geometrie dieses Raumes heißt *affine Geometrie*.

Im n-dimensionalen euklidischen Raum können für die Vektoren Operationen definiert werden, die den in diesem Artikel betrachteten analog sind. Die Addition von Vektoren, die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl und das Skalarprodukt von Vektoren wird bereits in der Definition des n-dimensionalen euklidischen Raumes wesentlich verwandt; die sich auf diese Operationen beziehenden Axiome fordern, daß die Eigenschaften dieser drei Operationen die gleichen bleiben wie im Fall der Ebene oder des (dreidimensionalen) Raumes. Das Spatprodukt von Vektoren im n-dimensionalen euklidischen Raum ordnet n Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \quad \boldsymbol{a}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}), \ldots, \quad \boldsymbol{a}_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}),$$

[1]) Vgl. den Artikel über mehrdimensionale Räume in Band V der EdEM.

die durch ihre Koordinaten bezüglich einer orthonormierten Basis gegeben sind, die Zahl

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

zu. Aus den Eigenschaften der Determinanten (vgl. den Artikel „Vektorräume und lineare Transformationen" in Band II der EdEM) folgt für das Spatprodukt

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n),$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

sowie der Wechsel seines Vorzeichens beim Vertauschen zweier beliebiger seiner vektoriellen Faktoren:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \cdots.$$

Das *Vektorprodukt im n-dimensionalen euklidischen Raum* wird auf folgende Weise definiert: Je $n - 1$ Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \quad \boldsymbol{a}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}), \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1} = (x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_n^{(n-1)})$$

wird der Vektor

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}] = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \ldots & \boldsymbol{e}_n \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

zugeordnet. Hier sind

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

Vektoren, die eine orthonormierte Basis bilden.[1]) Die auf der rechten Seite

---

[1]) Es sei bemerkt, daß wir hierbei für $n = 2$ (d. h. im Fall der Vektoren der Ebene) ein „Vektorprodukt" erhalten, das jedem Vektor $\boldsymbol{a}$ mit den Koordinaten (x, y), d. h. jedem Vektor $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, wobei $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren sind, einen neuen Vektor

$$[\boldsymbol{a}] = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \\ x & y \end{vmatrix} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

zuordnet, und zwar den Vektor mit den Koordinaten $(-y, x)$. Den Vektor $[\boldsymbol{a}]$ erhält man aus dem Vektor $\boldsymbol{a}$ durch eine Drehung um einen Winkel von 90° von $\boldsymbol{j}$ nach $\boldsymbol{i}$ (vgl. S. 331).

stehende Determinante entwickelt man folgendermaßen nach der ersten Zeile:

$$\boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_3^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_3^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$+ \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_4^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_4^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_4^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \dots .$$

Mittels der Eigenschaften der Determinanten leitet man leicht ab, daß

$$[\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}] + [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}],$$
$$[\lambda \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}] = \lambda [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}]$$

gilt, aber auch, daß das Vektorprodukt beim Vertauschen zweier beliebiger seiner vektoriellen Faktoren in den entgegengesetzten Vektor übergeht; so gilt also z. B.

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}] = -[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}].$$

Es sei erwähnt, daß aus den Definitionen des Spatproduktes, des Vektorproduktes und des Skalarproduktes die Beziehung

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \dots, \boldsymbol{a}_n]$$

folgt (vgl. S. 363).

Alle diese Operationen für Vektoren können zur Herleitung von Sätzen benutzt werden, die sich auf den n-dimensionalen euklidischen Raum beziehen.

Zum Abschluß geben wir noch ein Axiomensystem an, das ebenfalls eng mit dem Begriff des Vektors verknüpft ist und in der modernen Mathematik eine wichtige Rolle spielt. Das Axiomensystem des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes (1 bis 11, 17, 18) erhält man aus dem Axiomensystem des n-dimensionalen Vektorraumes (1 bis 7, 17, 18), indem man die Axiome 8 bis 11, die das Skalarprodukt einführen, hinzufügt. Fügt man jedoch an Stelle der Axiome 8 bis 11 zu den Axiomen des Vektorraumes die nachstehenden Axiome 8a bis 11a, die das Vektorprodukt beschreiben, hinzu, dann kommen wir zu dem wichtigen Begriff der Lieschen Algebra. Als *Liesche Algebra* bezeichnet man eine Menge, die den Axiomen 1 bis 7, 17, 18 und den folgenden vier Axiomen genügt:

VI. Axiome der Lieschen Algebra

Jedem Paar von Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ der Menge R ist ein Vektor $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ zugeordnet, den man das *äußere Produkt* der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ (manchmal auch den *Kommutator* dieser beiden Vektoren) nennt, wobei die nachstehenden Axiome 8a bis 11a erfüllt sind. (Vgl. die Axiome 8a bis 11a mit den Axiomen 8 bis 11 auf S. 378; das neue Axiom 11a beschreibt

jene Eigenschaft des hier betrachteten äußeren Produktes, die an die Stelle des assoziativen Gesetzes für die gewöhnliche Multiplikation von Zahlen tritt.)[1])

8a. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$ für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

9a. $[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

10a. $[\lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \lambda[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und jede reelle Zahl λ.

11a. $[\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] + [\mathfrak{b}, [\mathfrak{c}, \mathfrak{a}]] + [\mathfrak{c}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] = \mathfrak{o}$ für beliebige Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

Die Menge aller Vektoren des dreidimensionalen Raumes bildet also bezüglich der vektoriellen Multiplikation (§ 5) eine LIEsche Algebra.

Die letzten Bemerkungen sollten andeuten, daß die in den vorangehenden Paragraphen beschriebene „Vektorarithmetik" im Mittelpunkt vieler wichtiger Ideen der modernen Mathematik steht.

---

[1]) Man vergleiche sie mit der JACOBIschen Identität, die für die vektorielle Multiplikation der Vektoren des gewöhnlichen Raumes gilt (S. 365).

Literatur

[1] Дубнов, Я. С., Основы векторного исчисления, ч. I (DUBNOW, J. S., Grundzüge der Vektorrechnung, Teil 1), Moskau 1950.

[2] Болтянский, В. Г., и И. М. Яглом, Векторы в курсе геометрии средней школы (BOLTJANSKI, W. G., und I. M. JAGLOM, Vektoren im Geometrieunterricht der Oberschule), Moskau 1962.

[3] Ефимов, Н. В., Краткий курс аналитической геометрия (EFIMOW, N. W., Kurzer Lehrgang der analytischen Geometrie), Moskau 1962.

[4] Лопшиц, А. М., Аналитическая геометрия (LOPSCHIZ, A. M., Analytische Geometrie), Moskau 1948.

[5] Мусхелишвили, Н. И., Курс аналитической геометрии (MUSCHELISCHWILI, N. I., Lehrgang der analytischen Geometrie), Moskau 1947.

[6] LAGALLY, M., Vorlesungen über Vektorrechnung, 7., von W. FRANZ neu bearbeitete Auflage, Leipzig 1964.

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

BELKNER, H., Reelle Vektorräume. Leipzig 1974.

BOSECK, H., Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume. 4. Aufl., Berlin 1980.

KELLER O.-H., Analytische Geometrie und lineare Algebra. 3. Aufl.; Berlin 1968.

PICKERT, G., Analytische Geometrie, 6. Aufl., Berlin 1967.

SPERNER, E., Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra I. II, 7. bzw. 9. Aufl. Göttingen 1969 bzw. 1964.

W. G. ASCHKINUSE

VIELECKE UND VIELFLACHE

§ 1. Die grundlegenden Definitionen. Der Eulersche Satz

1.1. Ebene Vielecke. Unter einem *Vieleck* (*Polygon*), genauer einem ebenen Vieleck, versteht man einen (ebenen) geschlossenen Streckenzug, d. h. eine Menge von Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$, wobei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise verschiedene Punkte der Ebene sind, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen die *Ecken* und die oben aufgezählten Strecken die *Seiten* des Vielecks. Zwei Seiten, die eine gemeinsame Ecke

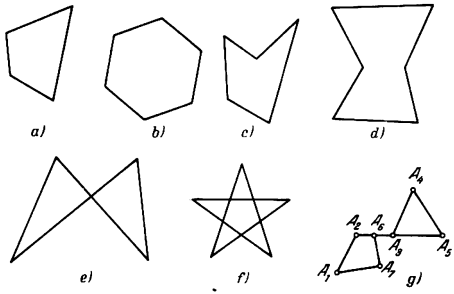


Abb. 1

haben, heißen *benachbarte* Seiten und zwei Ecken, die Endpunkte ein und derselben Seite sind, *benachbarte* Ecken des Vielecks.

Offenbar ist in jedem Vieleck die Anzahl der Ecken gleich der Anzahl der Seiten. Ein Vieleck kann nicht weniger als drei Ecken haben. Ein Vieleck mit drei Ecken nennt man *Dreieck*, ein Vieleck mit vier Ecken *Viereck* usw.

Ein Vieleck heißt *einfach*, wenn je zwei Seiten dieses Vielecks nur dann einen Punkt (inneren Punkt oder Endpunkt) gemeinsam haben, wenn sie benachbart sind, und wenn zwei benachbarte Seiten des Vielecks auch nur den gemeinsamen Endpunkt gemeinsam haben; andernfalls spricht man von einem Vieleck mit Selbstüberschneidungen. In Abb. 1a, b, c, d sind einfache Vielecke und in Abb. 1e, f, g Vielecke mit Selbstüberschneidungen abgebildet. Man kann beweisen, daß jedes einfache Vieleck die Ebene so in zwei Gebiete teilt, daß zwei Punkte dann und nur dann demselben Gebiet angehören, wenn man sie durch eine stetige Kurve verbinden kann, die das gegebene Vieleck nicht schneidet.[1]) Eines dieser Gebiete ist dadurch charakterisiert, daß es

[1]) Vgl. etwa das am Schluß des Kapitels angegebene Buch von A. D. ALEXANDROW [1].

eine Gerade gibt, die ganz in ihm enthalten ist; es heißt das Außengebiet des Vielecks. Das andere Gebiet wird das Innengebiet des Vielecks genannt (Abb. 2a, b; die Innengebiete der Vielecke sind schraffiert). Mitunter bezeichnet man auch das Innengebiet eines Vielecks als Vieleck.[1])

Ein Vieleck heißt *konvex*, wenn bezüglich jeder seiner Seiten alle übrigen Seiten auf ein und derselben Seite der Geraden liegen, auf der die betrachtete Seite liegt. Zum Beispiel sind die in Abb. 1a, b dargestellten Vielecke konvex,

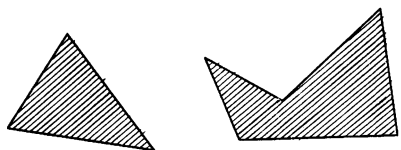


Abb. 2

während die in Abb. 1c, d, e, f, g dargestellten Vielecke nicht konvex sind. Man sieht leicht ein, daß jedes konvexe Vieleck einfach ist; die Umkehrung hiervon gilt selbstverständlich nicht: Es gibt einfache, nicht konvexe Vielecke (vgl. Abb. 1c, d).

1.2. Vielflache. Die Vielflache (Polyeder) sind die einfachsten geometrischen Figuren des Raumes, genauso wie die Vielecke die einfachsten Figuren der Ebene sind.

Unter einem *Vielflach* (*Polyeder*) versteht man eine Figur, die aus einer endlichen Anzahl von Vielecken (*Seitenflächen* oder kurz *Flächen* des Vielflachs genannt) besteht, deren Lage im Raum folgenden Bedingungen unterworfen ist:

1. Jede Seite einer jeden dieser Flächen ist Seite genau einer anderen Fläche (die dann zur ersten Fläche *benachbart* genannt wird).

2. Zu zwei beliebigen Flächen α und β kann eine Kette von Flächen α_1, α_2, ..., α_n gefunden werden, so daß die Fläche α zu α_1, die Fläche α_1 zu α_2, ..., die Fläche α_n zu β benachbart ist.

---

[1]) Der Unterschied zwischen diesen beiden Definitionen des Vielecks besteht darin, daß die erste Definition das Vieleck als *Linie*, die zweite aber als Teil der Ebene (d. h. als *Flächenstück*) auffaßt. Es ist natürlich unsinnig, danach zu fragen, welche dieser beiden Definitionen „richtiger" ist; das hängt ganz davon ab, in welchem Zusammenhang der Begriff „Vieleck" verwendet wird. In diesem Artikel ist es zweckmäßig, das Vieleck als geschlossenen Streckenzug aufzufassen; dagegen werden in den Artikeln „Flächen- und Rauminhalt" und „Zerlegungsgleichheit von Vielecken und Vielflachen" in Band V der EdEM die Vielecke besser als Teile der Ebene aufgefaßt.

3. Haben zwei Flächen α und β eine gemeinsame Ecke A, so kann die Auswahl der Flächen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, deren Existenz im vorangehenden Punkt gefordert wurde, so getroffen werden, daß sie alle die Ecke A besitzen.[1])

Die Seiten und die Ecken der Flächen eines Vielflachs heißen entsprechend die *Kanten* und die *Ecken* des Vielflachs.

Betrachtet man die Seitenflächen eines Vielflachs als ebene Gebiete (das ist dann möglich, wenn alle diese Seitenflächen einfache Vielecke sind), dann ist das Vielflach nach der obigen Definition eine Fläche des Raumes. Dabei besagt die erste Bedingung in der Definition des Vielflachs, daß diese Fläche keinen „Rand" hat, d. h., sie ist geschlossen; die zweite Bedingung besagt, daß die

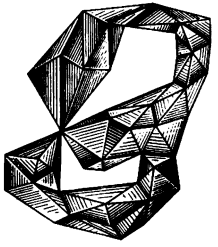


Abb. 3

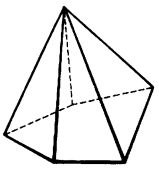


Abb. 4

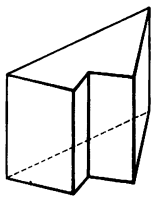


Abb. 5

Fläche „zusammenhängend" ist, d. h., sie zerfällt nicht in mehrere getrennte (geschlossene) Flächen; schließlich werden durch die dritte Forderung als Vielflache solche Flächen ausgeschlossen, wie die in Abb. 3 abgebildeten Flächen, d. h., bei denen in einer Ecke mehrere „richtige" Ecken zusammenstoßen.

Die einfachsten Beispiele für Vielflache sind die Prismen und die Pyramiden. Ein Vielflach heißt eine *n-seitige Pyramide*, wenn eine seiner Seitenflächen (die Grundfläche) ein n-Eck ist und die übrigen Seitenflächen Dreiecke mit einer gemeinsamen Ecke sind, die nicht in der Ebene der Grundfläche liegt (Abb. 4). Die dreiseitige Pyramide nennt man auch *Tetraeder*. Ein Vielflach heißt ein *n-seitiges Prisma*, wenn zwei seiner Seitenflächen (die Grundflächen) kongruente (nicht in einer Ebene liegende) n-Ecke sind, die durch eine Parallelverschiebung miteinander zur Deckung gebracht werden können, und als weitere Seitenflächen die Parallelogramme genommen sind, die durch die einander entsprechenden Seiten der n-Ecke und die Verbindungsstrecken ihrer gegenüberliegenden Eckpunkte gebildet werden (Abb. 5).

[1]) Das Vielflach kann ebenfalls auf verschiedene Weise definiert werden: Man kann es sich als „Fläche" (Oberfläche) vorstellen, während es in anderem Zusammenhang (z. B. in den oben zitierten Artikeln) zweckmäßiger als „Teil des Raumes" (Körper) aufgefaßt wird.

Ein Vielflach heißt *einfach*, wenn

1. alle seine Flächen einfache Vielecke sind;
2. keine zwei nicht benachbarten Flächen des Vielflachs einen Punkt (inneren Punkt oder Randpunkt) gemeinsam haben, außer evtl. einen Eckpunkt des Vielflachs;
3. zwei benachbarte Flächen nur ihre gemeinsame Kante gemeinsam haben.

Jedes einfache Vielflach teilt in dem oben für Vielecke bezüglich der Ebene erklärten Sinn den Raum in zwei Gebiete. Eines dieser Gebiete ist dadurch gekennzeichnet, daß es eine Ebene gibt, die ganz in ihm enthalten ist; es heißt das Außengebiet des Vielflachs. Das andere Gebiet heißt das Innengebiet des Vielflachs. Mitunter bezeichnet man auch das Innengebiet eines Vielflachs als Vielflach.

Ein Vielflach heißt *konvex*, wenn alle seine Ecken, die einer beliebigen seiner Flächen nicht angehören, auf ein und derselben Seite der Ebene dieser Fläche liegen. Man kann leicht zeigen (wir überlassen es dem Leser), daß jedes konvexe Vielflach einfach ist und alle seine Flächen konvexe Vielecke sind.[1])

1.3. Der Eulersche Satz. Wir wollen uns nun der Frage nach der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielflachs zuwenden. Für das Vieleck war diese Frage leicht zu beantworten: Die Anzahl s der Seiten eines Vielecks ist stets gleich der Anzahl e seiner Ecken

$$s = e \quad \text{oder} \quad s - e = 0,$$

wobei es Vielecke mit einer beliebigen Anzahl $n \geqq 3$ von Ecken (und Seiten) gibt. Für Vielflache ist, wie schon die einfachsten Beispiele (Abb. 6a–e) zeigen, die Situation wesentlich komplizierter. Bezeichnen wir die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten eines Vielflachs entsprechend mit f, e und k, so erhalten wir für die in Abb. 6 dargestellten Vielflache die Tabelle 1.

Tabelle 1

Vielflach	f	e	k
dreiseitige Pyramide (Abb. 6a)	4	4	6
vierseitiges Prisma (Abb. 6b)	6	8	12
fünfseitige Doppelpyramide (Abb. 6c)	10	7	15
Elfflach (Abb. 6d)	11	11	20
Zwölfflach (Abb. 6e)	12	18	28

[1]) Es gibt auch andere (den hier angeführten äquivalente) Definitionen für konvexe Vielecke und Vielflache. Man kann z. B. das konvexe Vielflach als eine (beschränkte und innere P nkte enthaltende) Menge definieren, die sich als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von Halbräumen darstellen läßt, oder als „konvexe Hülle" einer endlichen Menge von Punkten (der Ecken). Vgl. hierzu den Artikel „Konvexe Figuren und Körper" in Band V der EdEM.

Um eine allgemeine, die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten eines Vielflachs verknüpfende Gesetzmäßigkeit herauszufinden, betrachten wir die Prismen und die Pyramiden etwas eingehender. Für das n-seitige Prisma ist $f = n + 2$, $e = 2n$, $k = 3n$ und für die n-seitige Pyramide $f = n + 1$,

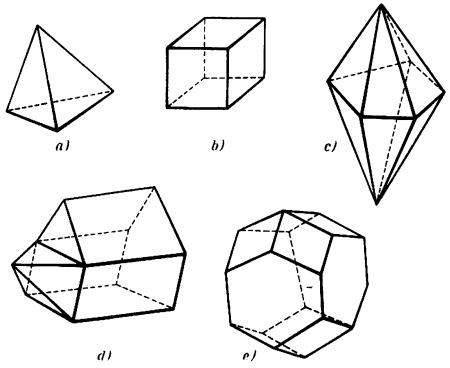


Abb. 6

$e = n + 1$, $k = 2n$. Vergrößert man die Zahl n um 1, dann erhöht sich beim Prisma die Anzahl der Flächen um 1, die Anzahl der Ecken um 2, die Anzahl der Kanten um 3 und bei der Pyramide entsprechend um 1, 1 und 2. Unverändert bleibt dabei die Differenz $(e + f) - k$; sie ist für jedes n gleich 2. Damit ist für Prismen und Pyramiden eine Beziehung zwischen den Zahlen f, e und k gefunden:

$$f + e - k = 2. \tag{1}$$

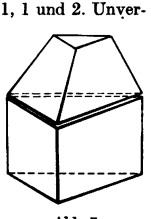


Abb. 7

Der Leser kann unter Verwendung der oben angeführten Tabelle leicht nachprüfen, daß die gleiche Beziehung auch für die in Abb. 6c, d, e dargestellten Vielflache erfüllt ist. Wir zeigen nun, daß sie für eine überaus weite Klasse von Vielflachen gilt.

Zu diesem Zweck sei bemerkt, daß man kompliziertere Vielflache aus einfacheren dadurch erhalten kann, daß man diese an gleichen (kongruenten) Flächen „aneinanderfügt" (vgl. z. B. Abb. 7). Wir klären zunächst, was mit der Größe $f + e - k$ geschieht, wenn wir an ein gegebenes Vielflach irgendein anderes „anfügen". Vorerst beschränken wir uns dabei auf den Fall, daß dieses zweite Vielflach das einfachste aller Vielflache, das Tetraeder ist.

Es sei also eine (dreieckige) Fläche des Vielflachs V mit einer zu ihr gleichen Fläche ABC des Tetraeders $ABCD$ so zur Deckung gebracht (Abb. 8), daß dabei die Ecke D des Tetraeders mit keiner der Ecken des Vielflachs V zusammenfällt. Die Anzahl der Ecken gegenüber der des Vielflachs V erhöht

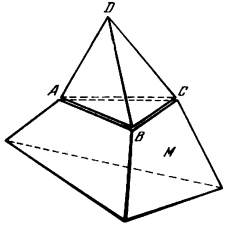


Abb. 8

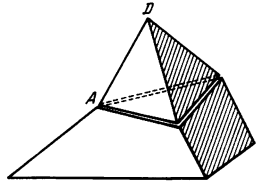


Abb. 9

sich dabei im allgemeinen um 1 (die Ecke D wurde hinzugefügt), die Anzahl der Flächen erhöht sich um 2 (es wurden drei neue Flächen hinzugefügt, aber eine Fläche, nämlich die, die mit der Fläche ABC zur Deckung gebracht wurde, geht verloren), und die Anzahl der Kanten erhöht sich um 3 (die Kanten $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ wurden hinzugefügt). Folglich ändert sich die Größe $f + e - k$ nicht,

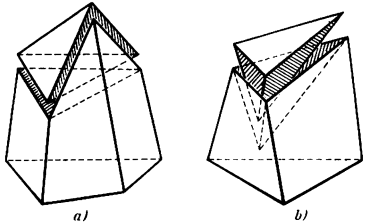


Abb. 10

so daß, falls die Beziehung (1) für das ursprüngliche Vielflach V erfüllt war, diese auch für das erhaltene Vielflach gilt. Unser Ergebnis behält aber seine Gültigkeit auch dann, wenn irgendeine Fläche des Tetraeders mit der benachbarten Fläche des Vielflachs V in eine Ebene zu liegen kommt und zusammen mit dieser Fläche eine Fläche des erhaltenen Vielflachs bildet (Abb. 9). Dann hat das erhaltene Vielflach eine Fläche weniger als oben allgemein angegeben wurde, dafür fällt aber auch eine Kante weg, so daß sich das nicht auf den Wert

der Größe $f + e - k$ auswirkt. Das gleiche darf bei zwei oder sogar drei Flächen des Tetraeders eintreten.

Auf ähnliche Weise kann man leicht nachprüfen, daß man dasselbe Ergebnis erhält, wenn das Tetraeder so angefügt wird, daß nicht eine, sondern zwei (Abb. 10a) oder drei (Abb. 10b) Flächen mit Flächen des Vielflachs V zur Deckung gebracht werden.

Unsere Überlegungen zeigen, daß für eine hinreichend weite Klasse von Vielflachen, auf jeden Fall für alle konvexen Vielflache, die Beziehung (1) gilt. Wenn wir nämlich im Innern eines beliebigen konvexen Vielflachs V

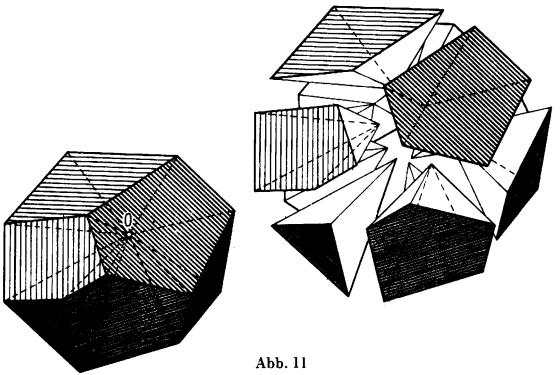


Abb. 11

einen beliebigen Punkt O wählen und diesen mit allen Ecken des Vielflachs verbinden, dann zerlegen wir dieses Vielflach in eine gewisse Anzahl von Pyramiden mit der gemeinsamen Ecke O (Abb. 11), die ihrerseits wiederum leicht in dreiseitige Pyramiden, also Tetraeder, (mit derselben Ecke O) zerlegt werden können. Wir gehen nun von einem der erhaltenen Tetraeder aus und fügen an dieses der Reihe nach die übrigen an,[1]) bis wir das ursprüngliche Vielflach V erhalten. Weil sich bei jedem Schritt die Größe $f + e - k$ nicht ändert, ihr Wert aber für das erste Tetraeder 2 betrug, gilt auch für das Vielflach V

$$f + e - k = 2. \tag{1}$$

[1]) Man muß allerdings bei diesem „Aneinanderfügen" von Tetraedern etwas vorsichtig sein; man muß nämlich darauf achten, daß beim Anfügen des nächsten Tetraeders an eine Seitenfläche die dieser Seitenfläche gegenüberliegende Ecke des Tetraeders nicht dem bereits konstruierten Vielflach angehört. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß man die Tetraeder so nacheinander anfügen kann, daß diese Bedingung jedesmal erfüllt ist; wir überlassen dies dem Leser.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1 (EULERscher Satz). *Für jedes konvexe Vielflach gilt*

$$f + e - k = 2.$$

Wie jedoch aus dem angeführten Beweis des EULERschen Satzes ersichtlich ist, muß seine Gültigkeit auch für viele nichtkonvexe Vielflache bestehen

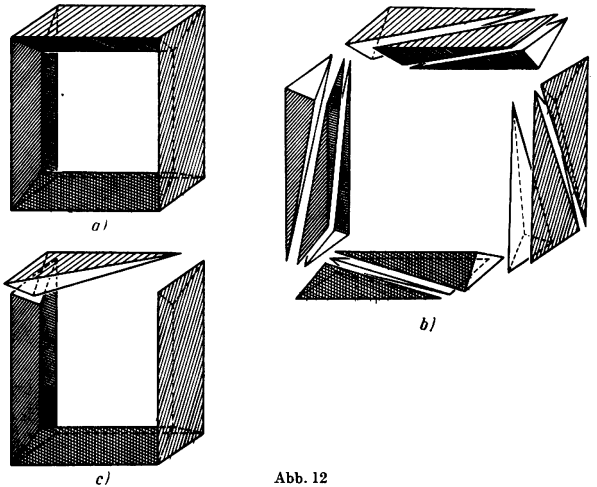


Abb. 12

bleiben. Wir gehen daher etwas ausführlicher auf die Frage nach den natürlichen Grenzen der Gültigkeit der Beziehung (1) ein.

Es ist leicht einzusehen, daß man auch jedes einfache Vielflach in Tetraeder zerlegen kann (genauso, wie man jedes einfache Vieleck in Dreiecke zerlegen kann). Dennoch ist die Beziehung (1) nicht für alle Vielflache erfüllt. Das liegt daran, daß beim Zusammensetzen eines Vielflachs aus Tetraedern für die Unveränderlichkeit der Größe $f + e - k$ notwendig ist, daß jedesmal, wenn ein Tetraeder an eine Fläche angefügt wird, die ihr gegenüberliegende Ecke nicht mit einer der Ecken des bereits konstruierten Teils des Vielflachs zusammenfallen darf. Es gibt aber Vielflache, bei denen beim Zusammensetzen ein derartiges Zusammenfallen von Ecken nicht vermieden werden kann; ein solches Vielflach zeigt die Abb. 12a (vgl. auch Abb. 12b, c). Für dieses Vielflach ist, wie man leicht nachzählt, $e + f - k = 12 + 12 - 24 = 0$.

Es dürfte anschaulich klar sein, daß ein (einfaches) Vielflach dann und nur dann auf die von uns benötigte Weise aus Tetraedern zusammengefügt werden kann, wenn es keine durchgehenden „Löcher" hat, d. h., wenn es nicht „ringförmig" ist wie das Vielflach, das die Abb. 12a zeigt, und auch keine solchen „ringförmigen" Teile besitzt. Solche Vielflache, die keine durchgehenden „Löcher" haben, heißen *Vielflache vom Geschlecht Null*. Der EULERsche Satz kann damit in der nachstehenden allgemeineren Formulierung ausgesprochen werden:[1])

Satz 2. *Für jedes Vielflach vom Geschlecht Null gilt*

$$f + e - k = 2.$$

Die Zahl $f + e - k$ heißt die EULERsche *Zahl* des Vielflachs. Wir haben sie für die Vielflache vom Geschlecht Null gefunden.

1.4. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielflachs vom Geschlecht größer als Null. Wir betrachten nun Vielflache, deren Geschlecht von Null verschieden ist. Jedes einfache Vielflach, das kein Vielflach vom Geschlecht Null ist, hat ein oder mehrere durchgehende „Löcher" (geschlossene „Ringe"). Die Anzahl dieser durchgehenden „Löcher" (oder geschlossenen „Ringe") nennt man das *Geschlecht* des Vielflachs. Die Vielflache vom Geschlecht 0 wurden bereits oben betrachtet; uns begegnete auch schon ein Beispiel für ein Vielflach vom Geschlecht 1 (vgl. Abb. 12a); Beispiele für Vielflache vom Geschlecht 2 und 3 zeigen die Abb. 13a, b, c.

Ein Vielflach vom Geschlecht 1 kann man aus zwei Vielflachen vom Geschlecht 0 erhalten, indem man sie an zwei nichtbenachbarten Flächen aneinanderfügt (Abb. 14a); ein Vielflach vom Geschlecht 2 kann man aus einem Vielflach vom Geschlecht 1 erhalten, indem man ihm in gleicher Weise ein Vielflach vom Geschlecht 0 anfügt (Abb. 14b); ein Vielflach vom Geschlecht 3 kann man auf gleiche Weise aus einem Vielflach vom Geschlecht 2 erhalten (Abb. 14c). Im allgemeinen kann man ein Vielflach vom Geschlecht $p + 1$ aus einem Vielflach vom Geschlecht p erhalten, indem man an zwei nichtbenachbarten Flächen ein Vielflach vom Geschlecht 0 anfügt. Klären wir, wie sich bei dieser Operation die EULERsche Zahl des Vielflachs verändert: An ein beliebiges Vielflach V_1, das f_1 Flächen, e_1 Ecken und k_1 Kanten hat, sei ein Vielflach V_2 vom Geschlecht 0 angefügt, das f_2 Flächen, e_2 Ecken und k_2 Kanten hat (vgl. Abb. 14). Dabei wurde die m-eckige Fläche α_1 des Vielflachs V_1 mit der Fläche α_2 des Vielflachs V_2 und die n-eckige Fläche β_1 von V_1 mit der

[1]) Eigentlich müßte man bei unserer Darlegung die Beziehung $f + e - k = 2$ als *Definition* der Vielflache vom Geschlecht Null auffassen (denn eine Definition, was genau durchgehende „Löcher" sind, und ein Beweis der Beziehung $f + e - k = 2$ für Vielflache, die keine durchgehenden Löcher haben, wurde von uns nicht gegeben). Eine exakte Definition der „Anzahl der durchgehenden Löcher" und Beweise der Sätze 2 und 3 erhält man erst mit den Hilfsmitteln einer höheren mathematischen Disziplin, der sogenannten *Topologie*.

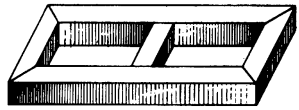
Fläche β_2 von V_2 zur Deckung gebracht. Dann hat das erhaltene Vielflach V

$$f = f_1 + f_2 - 4 \tag{2}$$

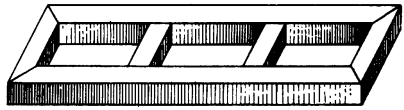
Flächen. (Flächen des Vielflachs V sind die sämtlichen Flächen der Vielflache V_1 und V_2 mit Ausnahme der Flächen α_1, α_2, β_1, β_2.) Die Anzahl der Ecken des Vielflachs V ist gleich

$$e = e_1 + e_2 - m - n. \tag{3}$$

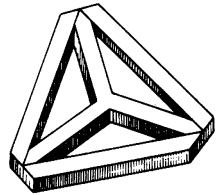
(Ecken des Vielflachs V sind die sämtlichen Ecken des Vielflachs V_1 sowie die sämtlichen Ecken des Vielflachs V_2 mit Ausnahme der m Ecken der Fläche α_2



a)



b)



c)

Abb. 13

und der n Ecken der Fläche β_2.) Schließlich beträgt die Anzahl der Kanten des Vielflachs V

$$k = k_1 + k_2 - m - n. \tag{3'}$$

Aus den Gleichungen (2), (3), (3') findet man leicht die EULERsche Zahl des Vielflachs V:

$$f + e - k = (f_1 + e_1 - k_1) + (f_2 + e_2 - k_2) - 4.$$

Da das Vielflach V_2 vom Geschlecht 0 ist, folgt hieraus nach Satz 2

$$f + e - k = (f_1 + e_1 - k_1) - 2.$$

Die Eulersche Zahl eines Vielflachs verringert sich also um 2, wenn sein Geschlecht um 1 erhöht wird. Beachtet man noch, daß die Eulersche Zahl

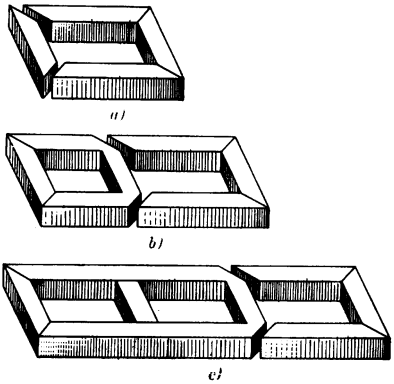


Abb. 14

eines Vielflachs vom Geschlecht 0 gleich 2 ist, so gelangt man zu folgender allgemeinen Schlußfolgerung:

Satz 3. *Für jedes einfache Vielflach beliebigen Geschlechts p gilt die Beziehung*

$$f + e - k = 2 - 2p.$$

Insbesondere gilt für Vielflache vom Geschlecht 1

$$f + e - k = 0;$$

für Vielflache vom Geschlecht 2 gilt

$$f + e - k = -2$$

usw.

Durch unsere Überlegungen kann man natürlich den Satz 3 keinesfalls als vollständig bewiesen ansehen, da nicht bewiesen wurde, daß jedes Vielflach vom Geschlecht p auf die oben angegebene Weise aus einem Vielflach vom Geschlecht $p - 1$ erhalten werden kann. Man kann zeigen, daß dies wirklich zutrifft, falls man eine gewisse Deformation des Vielflachs zuläßt, die die

Anzahl seiner Flächen, Ecken und Kanten nicht ändert; wir können darauf jedoch nicht eingehen.[1])

1.5. Ein anderer Beweis des Eulerschen Satzes. Wir wollen noch einen zweiten („topologischen") Beweis des EULERschen Satzes geben. Dieser Beweis wird uns zu einer Verallgemeinerung des EULERschen Satzes (Satz 5 und die Folgerung daraus) führen, die wir später beim Beweis eines Satzes von CAUCHY verwenden werden.

Es sei V ein konvexes Vielflach. Wir wählen in seinem Inneren einen beliebigen Punkt O und betrachten eine Sphäre S mit dem Mittelpunkt O, die das Vielflach V ganz umschließt. Sodann projizieren wir vom Punkt O aus das Vielflach V auf die Sphäre S. Bei dieser Projektion geht jede Ecke A des Vielflachs V in einen Punkt A' der Sphäre S über; diese Punkte auf S nennen wir gleichfalls „Ecken". Ist $\overline{AB}$ eine Kante des Vielflachs V, so geht sie bei der Projektion in den Bogen $\overset{\frown}{A'B'}$ eines Großkreises auf der Sphäre S über, wobei A' und B' die „Ecken" sind, in die die Punkte A und B bei der Projektion übergehen. Jeden derartigen Bogen $\overset{\frown}{A'B'}$ nennen wir eine „Kante" auf der Sphäre S.

Bei der genannten Projektion des Vielflachs V erhalten wir also auf der Sphäre S ein Netz, das aus „Kanten" und „Ecken" besteht, wobei offensichtlich die Anzahl der „Kanten" und die Anzahl der „Ecken" dieses Netzes entsprechend gleich der Anzahl der Kanten und der Anzahl der Ecken des Vielflachs V ist. Dieses Netz zerlegt die Sphäre S in Teile (sphärische Vielecke), die wir „Flächen" nennen wollen. Jede Fläche des Vielflachs V wird offenbar auf eine „Fläche" auf der Sphäre S projiziert, woraus sich ergibt, daß die Anzahl der „Flächen", in die die Sphäre S durch das Netz der „Kanten" und „Ecken" zerlegt wird, gleich der Anzahl der Flächen des Vielflachs V ist. Auf der Sphäre S haben wir also e „Ecken", k „Kanten" und f „Flächen", und der EULERsche Satz wäre bewiesen, wenn wir zeigen könnten, daß die Beziehung $e - k + f = 2$ für jedes Netz auf einer Sphäre gilt.

Diese Beziehung gilt nun aber gar nicht für jedes auf eine Sphäre S aufgezeichnete Netz von „Kanten" und „Ecken". Sie gilt jedoch für Netze, *die durch Projektion konvexer Vielflache erzeugt werden*, weil solche Netze einige spezielle Eigenschaften besitzen, die die Gültigkeit dieser Beziehung gewährleisten.

Wir geben zunächst eine genaue Definition des Netzes. Unter einem *Bogenzug* auf einer Sphäre S verstehen wir einen nichtgeschlossenen Kurvenzug, der aus Großkreisbögen zusammengesetzt ist und sich nicht selbst überschneidet (Abb. 15). Unter einem *Netz* auf der Sphäre S verstehen wir eine endliche

[1]) Einen anderen Zugang zur Definition des Geschlechts eines Vielflachs und zum Beweis des EULERschen Satzes findet man z. B. in dem Buch von J. HADAMARD [4], das am Schluß dieses Artikels zitiert ist.

Menge von Punkten („Ecken") und Bogenzügen („Kanten") auf S, die folgende Eigenschaften hat:

a) an jede „Ecke" schließt sich wenigstens eine „Kante" an;

b) beide Endpunkte jeder „Kante" sind „Ecken";

c) zwei beliebige „Kanten" haben entweder keinen Punkt gemein, oder sie haben genau einen oder genau zwei gemeinsame Punkte, die zugleich Endpunkte der „Kanten" sind.

Es ist klar, daß wir bei jeder Projektion der Ecken und Kanten eines Vielflachs V vom Punkt O auf die Sphäre S ein Netz auf der Sphäre S erhalten.

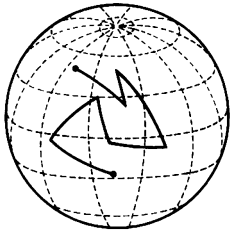


Abb. 15

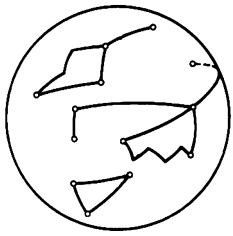


Abb. 16

Dieses Netz hat aber nicht nur die Eigenschaften a), b), c), sondern noch viele andere; z. B. treffen bei ihnen in jeder „Ecke" nicht weniger als drei „Kanten" zusammen. Die für uns wichtigste Eigenschaft des durch Projektion eines Vielflachs erzeugten Netzes ist sein *Zusammenhang*. Das bedeutet, daß man durch Fortbewegung längs der „Kanten" des Netzes von einer beliebigen „Ecke" zu jeder anderen „Ecke" gelangen kann. Das in Abb. 16 abgebildete Netz ist nicht zusammenhängend. Ein nicht zusammenhängendes Netz besteht aus mehreren zusammenhängenden Teilen (Komponenten); so besteht z. B. das in Abb. 16 dargestellte Netz aus drei Komponenten. Wir erhalten also durch Projizieren eines Vielflachs V auf eine Sphäre S stets ein zusammenhängendes Netz auf dieser Sphäre.

Es sei N ein beliebiges Netz auf der Sphäre S. Wir bezeichnen mit e die Anzahl seiner „Ecken", mit k die Anzahl seiner „Kanten" und mit f die Anzahl der Gebiete („Flächen"), in die das Netz N die Sphäre zerlegt. Die Zahl $e - k + f$ nennen wir die *Eulersche Zahl* des Netzes N.

Wir beweisen nun den nachstehenden Satz, aus dem sofort der Eulersche Satz folgt:

Satz 4. *Für jedes zusammenhängende Netz N auf einer Sphäre S ist die Eulersche Zahl gleich zwei.*

Beweis. Wir bezeichnen mit l_1 irgendeine Kante des Netzes N. Mit l_2 bezeichnen wir eine Kante, die mit l_1 wenigstens einen gemeinsamen Endpunkt hat. (Eine solche Kante gibt es, denn wenn es keine gäbe, die an l_1 anschließt, wäre das Netz N nicht zusammenhängend.) Mit l_3 bezeichnen wir eine Kante, die mit mindestens einer der Kanten l_1, l_2 einen gemeinsamen Endpunkt hat. Dann wählen wir eine Kante l_4, die mit wenigstens einer der Kanten l_1, l_2, l_3 einen gemeinsamen Endpunkt hat, usw. Auf diese Weise numerieren wir alle Kanten: $l_1, l_2, \ldots, l_q$.

Das Netz, das aus den Kanten $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ($k \leqq q$) und allen Endpunkten dieser Kanten besteht, bezeichnen wir mit N_k. Damit erhalten wir auf der Sphäre S Netze $N_1, N_2, \ldots, N_q$ (wobei das Netz N_q offenbar mit N übereinstimmt). Wegen des Numerierungsverfahrens für die Kanten ist jedes dieser Netze zusammenhängend.

Durch vollständige Induktion beweisen wir, daß die Eulersche Zahl jedes dieser Netze $N_1, N_2, \ldots, N_q$ gleich 2 ist. Für das Netz N_1 ist das offensichtlich: Es besitzt eine Kante l_1, zwei Ecken und eine Fläche, und deshalb ist

$$e - k + f = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Es sei bereits bewiesen, daß für das Netz N_k ($k < q$) die Eulersche Zahl gleich 2 ist. Man erhält das Netz N_{k+1} aus N_k durch Hinzufügen der einen Kante l_{k+1}. Deshalb erhalten wir, wenn wir mit k_k die Anzahl der Kanten des Netzes N_k und mit k_{k+1} die Anzahl der Kanten des Netzes N_{k+1} bezeichnen,

$$k_{k+1} = k_k + 1.$$

Auf Grund des Numerierungsverfahrens für die Kanten ist wenigstens ein Endpunkt der Kante l_{k+1} Ecke des Netzes N_k. Es können nun folgende beiden Fälle eintreten:

I. Beide Endpunkte der Kante l_{k+1} sind Ecken des Netzes N_k.

II. Nur ein Endpunkt der Kante l_{k+1} ist Ecke des Netzes N_k.

Wir betrachten diese Fälle getrennt.

Fall I. Wenn beide Endpunkte der Kante l_{k+1} Ecken des Netzes N_k sind, ist die Anzahl der Ecken e_{k+1} des Netzes N_{k+1} gleich der Zahl der Ecken e_k des Netzes N_k:

$$e_{k+1} = e_k.$$

Ferner liegt die Kante l_{k+1} ganz in einer Fläche des Netzes N_k (weil diese Kante mit N_k außer den Endpunkten keine anderen Punkte gemeinsam hat). Wir bezeichnen diese Fläche mit F. Es ist klar, daß die von F verschiedenen Flächen des Netzes N_k beim Anfügen der Kante l_{k+1} unverändert bleiben, d. h., sie bleiben auch Flächen für das Netz N_{k+1}. Solcher Flächen gibt es $f_k - 1$, wenn f_k die Anzahl der Flächen des Netzes N_k bezeichnet. Wir zeigen nun, daß die Fläche F beim Anfügen der Kante l_{k+1} in zwei Flächen zerlegt wird, woraus sich ergibt, daß die Anzahl f_{k+1} der Flächen des Netzes N_{k+1} gleich $(f_k - 1) + 2$ ist, d. h.

$$f_{k+1} = f_k + 1.$$

Dazu ziehen wir einen Bogenzug, der die Kante l_{k+1} schneidet, und wählen auf ihm innerhalb F zwei auf verschiedenen Seiten dieser Kante gelegene Punkte P, Q (Abb. 17; auf dieser Zeichnung ist die Fläche F schraffiert). Es sei R ein beliebiger Punkt der Fläche F, der nicht auf der Kante l_{k+1} liegt. Wir ziehen in der Fläche F vom Punkt R zu irgendeinem Punkt T der Kante l_{k+1} einen Bogenzug und wählen auf ihm noch vor dem Punkt T einen nahe bei T gelegenen Punkt T'. Jetzt können wir, vom Punkt T' ausgehend, dicht an der Kante l_{k+1} entlang entweder zum Punkt P oder zum Punkt Q gelangen (Abb. 17, die punktierte Linie). Also kann jeder Punkt R der Fläche F, der nicht auf der Kante l_{k+1} liegt, entweder mit dem Punkt P oder mit dem

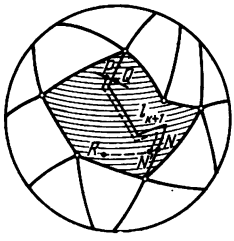


Abb. 17

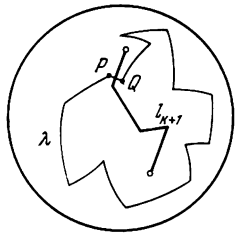


Abb. 18

Punkt Q durch einen Bogenzug verbunden werden, der l_{k+1} nicht schneidet. Also wird F vom Bogenzug l_{k+1} in nicht mehr als zwei Flächen geteilt (in eine, die den Punkt P, und eine, die den Punkt Q enthält).

Ist es aber nicht möglich, daß die Punkte P und Q auf derselben Fläche liegen (d. h. durch einen Bogenzug miteinander verbunden werden können, der das Netz N_{k+1} nicht schneidet) und wir somit beim Anfügen der Kante l_{k+1} aus der Fläche F nur eine Fläche des Netzes N_{k+1} erhalten? Wir wollen zeigen, daß das unmöglich ist: Gäbe es einen Bogenzug, der die Punkte P und Q miteinander verbindet und das Netz N_{k+1} nicht schneidet, so würde dieser Bogenzug mit dem Bogenzug PQ eine geschlossene Linie λ bilden, die das Netz N_k nicht schneidet (Abb. 18). Diese geschlossene Linie zerlegt die Sphäre S in zwei Gebiete,[1]) wobei die Endpunkte der Kante l_{k+1} in verschiedenen Gebieten liegen, da die Kante l_{k+1} die Linie λ einmal schneidet. Weil andererseits die Endpunkte der Kante l_{k+1} dem Netz N_k angehören, ergibt sich, daß das

[1]) Hier benutzen wir den sogenannten JORDANschen Kurvensatz: *Jede geschlossene Kurve, die sich nicht selbst überschneidet und auf einer Sphäre (oder in der Ebene) liegt, zerlegt die Oberfläche der Sphäre (bzw. die Ebene) in zwei Gebiete.* Den Beweis des JORDANschen Satzes findet man für den Spezialfall eines geschlossenen Streckenzuges z. B. im Buch von A. D. ALEXANDROW [1].

Netz N_k Ecken hat, die in verschiedenen Gebieten der Linie λ liegen. Das steht jedoch im Widerspruch dazu, daß das Netz N_k zusammenhängend ist und die geschlossene Linie λ nicht schneidet. Also können die Punkte P und Q nicht durch einen Bogenzug miteinander verbunden werden, der N_{k+1} nicht schneidet. Die Kante l_{k+1} zerlegt also die Fläche F in genau zwei Teile.

Wir kennen nunmehr die Anzahl der Kanten, der Ecken und der Flächen des Netzes N_{k+1} und können seine EULERsche Zahl bestimmen:

$$e_{k+1} - k_{k+1} + f_{k+1} = e_k - (k_k + 1) + (f_k + 1) = e_k - k_k + f_k.$$

Die EULERsche Zahl des Netzes N_{k+1} ist also gleich der EULERschen Zahl des Netzes N_k, d. h. nach Induktionsannahme gleich 2.

Fall II. Wenn nur ein Endpunkt der Kante l_{k+1} dem Netz N_k angehört (Abb. 19), tritt beim Hinzufügen dieser Kante eine neue Ecke auf, d. h., es ist

$$e_{k+1} = e_k + 1.$$

Die Anzahl der Flächen ändert sich nicht:

$$f_{k+1} = f_k,$$

weil die Kante l_{k+1} ganz in einer Fläche F des Netzes N_k liegt und diese Fläche nicht teilt. Somit gilt

$$e_{k+1} - k_{k+1} + f_{k+1} = (e_k + 1) - (k_k + 1) + f_k = e_k - k_k + f_k = 2.$$

Damit ist der Induktionsbeweis vollendet und Satz 4 bewiesen. Gleichzeitig erhielten wir damit einen neuen Beweis des EULERschen Satzes.

Wie aber wird der Sachverhalt für nicht zusammenhängende Netze sein? Eine Antwort auf diese Frage gibt der folgende

Satz 5. *Besteht ein Netz N auf einer Sphäre S aus m Komponenten ($m \geqq 1$), so ist seine* EULERsche *Zahl gleich $m + 1$.*

Beweis. Ist $m = 1$, d. h. das Netz N zusammenhängend, so gilt die Behauptung des Satzes 5 (vgl. Satz 4). Wir nehmen nun an, Satz 5 sei für $m < m_0$ bereits bewiesen, und betrachten irgendein Netz N, das m_0 Komponenten hat. Eine der Komponenten des Netzes bezeichnen wir mit N' und den restlichen Teil des Netzes N mit N''. Dann hat das Netz N'' nur $m_0 - 1$ Komponenten, und seine EULERsche Zahl ist nach Induktionsannahme gleich m_0, d. h.

$$e'' - k'' + f'' = m_0,$$

wenn e'', k'', f'' die Anzahl der Ecken, der Kanten und der Flächen des Netzes N'' bezeichnen. Es seien ferner $l_1, l_2, \ldots, l_k$ die sämtlichen Kanten des Netzes N', und zwar so numeriert, daß die Kanten $l_1, l_2, \ldots, l_k$ bei beliebigem k $(= 1, \ldots, q)$ ein zusammenhängendes Netz bilden (vgl. den Beweis von Satz 4). Wir bezeichnen mit N_k' $(k = 1, \ldots, q)$ das Netz, das aus dem Netz N'' und den Kanten $l_1, \ldots, l_k$ besteht; offenbar stimmt das Netz N_q'' mit N überein.

Ohne jede Änderung kann auch hier der beim Beweis des Satzes 4 angewandte Induktionsschluß durchgeführt werden, und wir erhalten, daß alle Netze $N_1'', \ldots, N_k''$ dieselbe EULERsche Zahl haben. Das Netz N_1'' erhält man aber aus N'' durch Hinzufügen einer Kante l_1, die mit N'' keine gemeinsamen Ecken hat (Abb. 20). Daher ändert sich beim Übergang von N'' zu N_1'' die Anzahl der

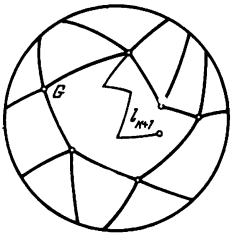


Abb. 19

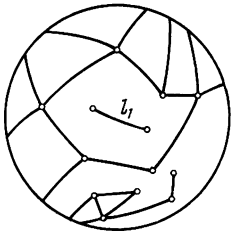


Abb. 20

Flächen nicht, die Anzahl der Kanten erhöht sich um 1 und die Anzahl der Ecken um 2. Folglich wird die EULERsche Zahl des Netzes N_1'' und damit auch die des Netzes $N_0'' = N$ durch

$$(e'' + 2) - (k'' + 1) + f'' = (e'' - k'' + f'') + 1 = m_0 + 1$$

gegeben. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Folgerung. *Für jedes Netz auf einer Sphäre gilt die Ungleichung*

$$e - k + f \geqq 2,$$

d. h., die EULERsche Zahl keines Netzes auf einer Sphäre ist kleiner als 2.

§ 2. Der kombinatorische (topologische) Typ eines Vielflachs. Der Satz von Steinitz

2.1. Kombinatorische Eigenschaften der Vielflache. Isomorphie. Bei vielen Fragen der Theorie der Vielflache sind nicht die Form oder die Ausmaße der Flächen eines betrachteten Vielflachs von Bedeutung, sondern nur die Anzahl der Seiten jeder einzelnen Fläche und das allgemeine Schema der Verheftung der Flächen zum Vielflach. In diesen Bereich als ganzen gehört z. B. die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Anzahl der Flächen, der Ecken und der Kanten eines Vielflachs, die im vorangehenden Paragraphen behandelt wurde. Die Eigenschaften eines Vielflachs, die allein das Verheftungsschema

seiner Flächen betreffen, heißen *kombinatorische* oder *topologische* Eigenschaften des Vielflachs. Die übrigen Eigenschaften eines Vielflachs heißen seine *metrischen* Eigenschaften; in diesem Sinne sind z. B. das Maß der Oberfläche, der Rauminhalt, die Größe der Winkel zwischen den Kanten oder Seitenflächen metrische Eigenschaften.

Exakter können die kombinatorischen Eigenschaften mit Hilfe des Begriffs der Isomorphie charakterisiert werden. Vielflache heißen zueinander *isomorph*, wenn man zwischen den Ecken, Kanten und Flächen des einen Vielflachs und den Ecken, Kanten bzw. Flächen des anderen Vielflachs eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen kann, so daß inzidierenden Ecken, Kanten und Flächen des ersten Vielflachs jeweils inzidierende Ecken, Kanten und Flächen des zweiten Vielflachs entsprechen.[1]) In diesem Sinne sind z. B. das dreisei-

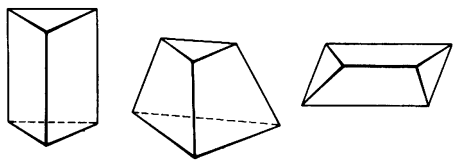


Abb. 21

tige Prisma, der dreiseitige Pyramidenstumpf und das Walmprisma (Abb. 21) einander isomorph. Man sagt von isomorphen Vielflachen auch, daß sie Vielflache desselben kombinatorischen (oder topologischen) Typs sind.

Kombinatorische Eigenschaften eines Vielflachs sind dann genau alle jenen Eigenschaften, die mit einem Vielflach auch jedem zu ihm isomorphen Vielflach eigen sind, d. h. die Eigenschaften eines ganzen kombinatorischen Typs von Vielflachen.

Bei der Untersuchung der kombinatorischen Eigenschaften eines Vielflachs kann man von einem beliebigen zu ihm isomorphen Vielflach ausgehen, d. h., wir brauchen das Vielflach nur bis auf Isomorphie zu charakterisieren. Dazu genügt es, alle seine Ecken $A, B, C, \ldots$, seine Kanten $a, b, c, \ldots$ und seine Flächen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aufzuzählen und die zwischen diesen bestehenden Inzidenzen anzugeben. Dabei müssen natürlich gewisse Bedingungen erfüllt sein, die sich unmittelbar aus den in § 1 angeführten Definitionen des einfachen Vielecks und des einfachen Vielflachs sowie aus der geometrischen Bedeutung der Inzidenzbeziehung ergeben (wir bezeichnen im folgenden die Inzidenzbeziehung mit dem Zeichen $\sim$; z. B. bedeutet also $\alpha \sim A$, daß die Fläche α mit der Ecke A inzidiert):

[1]) Man sagt, daß Ecken, Kanten und Flächen *inzidieren*, wenn sie aneinander angrenzen. Zum Beispiel inzidieren eine Kante und eine Fläche, wenn die Kante eine der Seiten der betrachteten Fläche ist.

I. Die Inzidenzbeziehung (zwischen Flächen und Kanten, zwischen Flächen und Ecken sowie zwischen Kanten und Ecken) ist symmetrisch:

$\alpha \sim a$ genau dann, wenn $a \sim \alpha$,
$\alpha \sim A$ genau dann, wenn $A \sim \alpha$,
$a \sim A$ genau dann, wenn $A \sim a$.

II. Die Inzidenzbeziehung ist transitiv:

Wenn $A \sim a$ und $a \sim \alpha$, so $A \sim \alpha$.

III. Wenn $A \sim \alpha$, so existieren genau zwei Kanten a_1, a_2, die sowohl mit der Ecke A als auch mit der Fläche α inzidieren, d. h., so daß $a_1 \sim A$, $a_2 \sim A$, $a_1 \sim \alpha$, $a_2 \sim \alpha$.

IV. Wenn zwei Flächen mit zwei Ecken inzidieren, gibt es genau eine Kante, die mit beiden Flächen und beiden Ecken inzidiert, d. h., wenn $\alpha_1 \sim A_1$, $\alpha_2 \sim A_1$, $\alpha_1 \sim A_2$, $\alpha_2 \sim A_2$ (und dabei $\alpha_1 \neq \alpha_2$ und $A_1 \neq A_2$), so gibt es genau eine Kante a, so daß $\alpha_1 \sim a$, $\alpha_2 \sim a$, $A_1 \sim a$, $A_2 \sim a$.

Va. Jede Kante inzidiert mit genau zwei Ecken.
Vb. Jede Kante inzidiert mit genau zwei Flächen.

VIa. Zu zwei beliebigen Ecken A und B kann man Kanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und Ecken $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ so wählen, daß in der Kette $A, a_1, A_1, a_2, A_2, \ldots, A_{n-1}, a_n, B$ je zwei benachbarte Elemente inzidieren; inzidieren die Ecken A und B mit ein und derselben Fläche α, so kann man die Ecken A_i ($i = 1, \ldots, n-1$) und die Kanten a_i ($i = 1, \ldots, n$) so wählen, daß sie alle mit der Fläche α inzidieren.

VIb. Zu zwei beliebigen Flächen α und β kann man Kanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und Flächen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ so wählen, daß in der Kette $\alpha, a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, a_n, \beta$ je zwei benachbarte Elemente inzidieren; inzidieren die Flächen α und β mit ein und derselben Ecke A, so kann man die Flächen α_i ($i = 1, \ldots, n-1$) und die Kanten a_i ($i = 1, \ldots, n$) so wählen, daß sie alle mit der Ecke A inzidieren.

2.2. Das abstrakte Vielflach. Da uns nur die kombinatorischen Eigenschaften der Vielflache interessieren, kommen wir so in natürlicher Weise zum Begriff des abstrakten Vielflachs. Unter einem *abstrakten Vielflach* verstehen wir eine (endliche) Menge von beliebigen Elementen, die die Ecken, die Kanten und die Flächen des abstrakten Vielflachs genannt werden, zwischen denen auf irgendeine Weise eine Inzidenzbeziehung definiert ist (und zwar dadurch, daß angegeben ist, welche Ecken, Kanten und Flächen als inzident angesehen werden sollen), wobei nur verlangt wird, daß die oben angegebenen Bedingungen I bis VI erfüllt sind. Der Begriff des abstrakten Vielflachs spiegelt also ausschließlich die Inzidenzen zwischen den Ecken, Kanten und Flächen konkreter räumlicher Vielflache wider. Wir werden im weiteren auch in bezug auf die abstrakten Vielflache ohne besondere Hinweise die übliche geometrische Terminologie

benutzen, indem wir z. B. eine Fläche, die mit genau n Ecken inzidiert, ein n-Eck, und die mit dieser Fläche inzidierenden Kanten seine Seiten nennen, usw. Im Unterschied zu den abstrakten Vielflachen nennen wir die in § 1 behandelten Vielflache *räumliche Vielflache*.

Triviale Beispiele für abstrakte Vielflache bilden eine einzelne Fläche (ohne Kanten und Ecken) oder eine einzelne Ecke (ohne Kanten und Flächen), aber auch ein „Vielflach", das nur aus einer Fläche und einer Ecke besteht, die nicht miteinander inzidieren. Weitere triviale Beispiele sind die abstrakten Vielflache, die realisiert werden durch eine Zerlegung der Kugeloberfläche in zwei Gebiete (Flächen) durch drei Bögen (Kanten), die paarweise drei Punkte (Ecken) miteinander verbinden (Abb. 22a), bzw. durch eine Zerlegung der

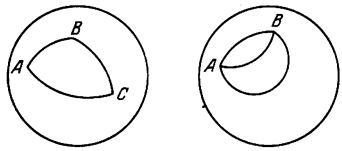


Abb. 22

Kugeloberfläche in drei Gebiete (Flächen) durch drei Bögen (Kanten), die zwei Punkte (Ecken) miteinander verbinden (Abb. 22b).

Im folgenden wollen wir diese Fälle aus unseren Betrachtungen ausschließen, indem wir voraussetzen, daß jedes der betrachteten abstrakten Vielflache mindestens drei Ecken und mindestens drei Flächen hat.

Aus der Definition des abstrakten Vielflachs (und der soeben getroffenen Vereinbarung) ergeben sich die folgenden einfachen Eigenschaften:

1. *Zwei Ecken eines abstrakten Vielflachs gehören nicht mehr als einer Kante an.*

Wir nehmen an, die Ecken A und B gehören zwei verschiedenen Kanten a und b an. Nach der Bedingung Vb muß jede dieser Kanten zwei Flächen angehören; es sei $a \sim \alpha_1$, $a \sim \alpha_2$, $b \sim \beta_1$, $b \sim \beta_2$. Die beiden Flächen α_1 und α_2 können nicht mit den beiden Flächen β_1 und β_2 zusammenfallen, da das der Bedingung IV widerspräche. Würden ferner z. B. α_1 und β_1 zusammenfallen, aber die Flächen α_2 und β_2 verschieden sein, so müssen ebenfalls nach Bedingung IV die Ecken A und B noch einer weiteren Kante c angehören, die mit den Flächen α_2 und β_2 inzidiert, d. h., wir würden das in Abb. 22b abgebildete abstrakte Vielflach erhalten,[1]) das wir aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen hatten. Sind aber die Flächen α_1, α_2, β_1, β_2 alle verschieden,

[1]) Man kann nämlich zeigen, daß das durch Abb. 22b realisierte abstrakte Vielflach das einzige ist, in dem die von uns angenommenen Beziehungen gelten. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

so müssen nach Bedingung IV durch die Ecke A drei Seiten der Fläche α_1 gehen (die außer zu α_1 entsprechend zu α_2, β_1, β_2 gehören), was der Bedingung III widerspricht.

2. *Zwei Flächen eines abstrakten Vielflachs haben nicht mehr als eine Kante gemeinsam.*

Diese Behauptung kann analog der vorangehenden Behauptung bewiesen werden.[1])

3. *Jede Ecke eines abstrakten Vielflachs gehört mindestens drei Flächen (und folglich auch Kanten) an.*

Nach der Bedingung VIa gehört jede Ecke wenigstens einer Kante und mithin (nach Bedingung Vb und II) mindestens zwei Flächen an. Würde aber eine Ecke A genau zwei Flächen angehören, so besäßen diese Flächen (nach Bedingung III) zwei gemeinsame Kanten, was der Eigenschaft 2 widerspricht.

Analog erhält man:

4. *Jede Fläche eines abstrakten Vielflachs hat wenigstens drei Ecken (und folglich auch Seiten).*

2.3 Der Satz von Steinitz. Jedes räumliche Vielflach kann als ein abstraktes Vielflach aufgefaßt werden. Es ergibt sich nun naturgemäß die Frage, ob es auch umgekehrt zu jedem abstrakten Vielflach ein zu ihm isomorphes räumliches Vielflach gibt, d. h., ob man jedes abstrakte Vielflach durch ein räumliches Vielflach realisieren kann. Diese Frage kann in dem wichtigsten Fall, nämlich für abstrakte Vielflache, deren EULERsche Zahl gleich 2 ist, bejaht werden, wobei man sogar eine Realisierung durch konvexe räumliche Vielflache erreichen kann. Dieser Sachverhalt wurde zuerst von dem deutschen Mathematiker E. STEINITZ bewiesen.

Satz von STEINITZ. *Jedes abstrakte Vielflach mit der* EULERschen *Zahl* 2 *kann durch ein konvexes räumliches Vielflach realisiert werden.*

Der Beweis des STEINITZschen Satzes kann nicht allein mit elementargeometrischen Methoden geführt werden; er stützt sich auf einige Hilfssätze (nämlich die folgenden Hilfssätze 1 und 2), die nur mit Hilfe topologischer Überlegungen bewiesen werden können.

Wir geben hier den elementargeometrischen Teil des Beweises des STEINITZschen Satzes wieder, ohne auf die Beweise dieser Hilfssätze einzugehen; dieser ist von selbständigem Interesse.

Die Hauptrolle im Beweis des STEINITZschen Satzes spielt eine gewisse Transformation abstrakter Vielflache, die wir zunächst betrachten wollen.

Es seien α_1 und α_2 zwei Flächen eines abstrakten Vielflachs V, die eine gemeinsame Kante $\overline{AB}$ haben. Wir unterwerfen V folgenden Operationen:

[1]) Die Eigenschaften 2 und 4 kann man auch mit Hilfe des *Dualitätsprinzips* aus den Eigenschaften 1 und 3 erhalten (vgl. S. 417).

1. Wir nehmen $\overline{AB}$ aus der Menge der Kanten der Vielflachs V heraus;

2. wir ersetzen die Flächen α_1 und α_2 durch eine neue Fläche α, für die wir festsetzen, daß alle Seiten und Ecken der Flächen α_1 und α_2 (außer der Seite $\overline{AB}$) mit ihr inzidieren;

3. wenn nach dem Herausnehmen der Kante $\overline{AB}$ an eine der Ecken A oder B, etwa A, nur zwei Kanten $\overline{AA_1}$ und $\overline{AA_2}$ des Vielflachs V angrenzen, nehmen wir A aus der Menge der Ecken heraus und ersetzen diese beiden Kanten durch eine einzige Kante $\overline{A_1A_2}$.

Eine solche Transformation des abstrakten Vielflachs V soll als *Vereinigung* seiner Flächen α_1 und α_2 bezeichnet werden. Vereinigt man z. B. zwei Seitenflächen eines Würfels

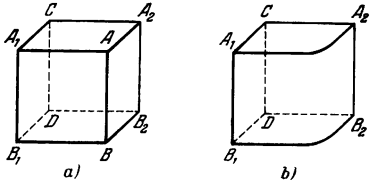


Abb. 23

(Abb. 23a), so ergibt sich ein abstraktes Vielflach, das dem dreiseitigen Prisma isomorph ist (Abb. 23b).

Es ist leicht einzusehen, daß bei der Vereinigung zweier Flächen eines abstrakten Vielflachs alle bei der Definition des abstrakten Vielflachs geforderten Bedingungen erfüllt bleiben, bis evtl. auf die Bedingung IV, die verletzt werden kann. Vereinigt man z. B. bei der (als abstraktes Vielflach angesehenen) Pyramide *SABCDE* die Grundfläche *ABCDE* mit der Seitenfläche *SAB* (Abb. 24), so besitzen die Seitenfläche *SCD* und die neue (vereinigte) Seitenfläche *SCDE* die gemeinsamen Ecken *S* und *D*, aber — entgegen der Bedingung IV — keine gemeinsame Kante, die diese Ecken verbindet. Also wird die Menge der Ecken, Kanten und Flächen, die man nach Vereinigung zweier Flächen eines abstrakten Vielflachs erhält, im allgemeinen kein abstraktes Vielflach mehr bilden. Es gilt jedoch der folgende

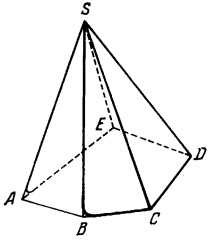


Abb. 24

Hilfssatz 1. *In jedem abstrakten Vielflach mit der* Eulerschen *Zahl 2 (mit Ausnahme der Vielflache, die dem Tetraeder isomorph sind) kann man stets zwei benachbarte Flächen finden, bei deren Vereinigung man wieder ein abstraktes Vielflach erhält.*

Es sei vermerkt, daß sich bei der Vereinigung zweier Flächen eines abstrakten Vielflachs dessen Eulersche Zahl nicht ändert. Diese Operation vermindert nämlich die Anzahl der Flächen um 1 und schließt gleichzeitig eine Kante aus; wird ferner eine Ecke ausgeschlossen, so vermindert sich jeweils auch die Anzahl der Kanten um 1. Folglich bleibt in allen Fällen die Größe $e + f - k$ ungeändert.

Der Beweis des STEINITZschen Satzes wird durch vollständige Induktion über die Anzahl n der Flächen des Vielflachs geführt. Wir betrachten zunächst ein abstraktes Vielflach mit der kleinstmöglichen Anzahl von Flächen. Hat ein abstraktes Vielflach eine k-eckige Fläche, so muß es auch k mit ihr benachbarte Flächen haben, d. h., es kann nicht weniger als $k+1$ Flächen besitzen. Da in jedem Fall $k \geqq 3$ ist (Eigenschaft 4 eines abstrakten Vielflachs), hat jedes abstrakte Vielflach mindestens vier Flächen. Aus dem Gesagten folgt ferner, daß ein Vielflach mit vier Flächen nur dreiseitige Flächen haben kann. Es gibt aber offenbar nur ein Vielflach mit vier dreiseitigen Flächen, und dieses entspricht einem uns bekannten räumlichen Vielflach, nämlich dem Tetraeder. Somit gilt für $n = 4$ der STEINITZsche Satz.

Wir nehmen nun an, daß unser Satz für einen gewissen Wert n bewiesen ist, d. h., daß jedes abstrakte Vielflach mit n Flächen (dessen EULERsche Zahl gleich 2 ist) durch ein konvexes räumliches Vielflach realisiert werden kann.

Wir betrachten sodann ein beliebiges abstraktes Vielflach V mit $n+1$ Flächen. Nach Hilfssatz 1 kann man zwei benachbarte Flächen α und β dieses Vielflachs finden, so daß die Vereinigung dieser Flächen ein abstraktes Vielflach V_0 liefert. Es seien A und B die

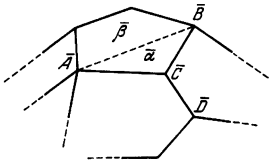


Abb. 25

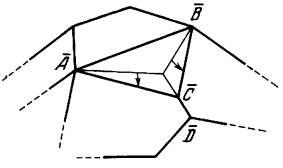


Abb. 26

gemeinsamen Ecken der Flächen α und β sowie γ die durch Vereinigung von α und β gebildete neue Fläche des abstrakten Vielflachs V_0. Das abstrakte Vielflach V_0 hat nur noch n Flächen, also existiert nach Induktionsannahme ein räumliches konvexes Vielflach $\overline{V_0}$ (Abb. 25), das zu V_0 isomorph ist. Es sei $\bar{\gamma}$ die Fläche des Vielflachs $\overline{V_0}$, die der abstrakten Fläche γ entspricht, und es seien $\bar{A}$ und $\bar{B}$ die Ecken der Fläche $\bar{\gamma}$, die den abstrakten Ecken A und B der Fläche γ entsprechen (wenn die Fläche γ z. B. die Ecke A nicht mehr hat, d. h., wenn diese Ecke bei der Vereinigung der Flächen α und β herausgenommen wurde, kann man als $\bar{A}$ einen beliebigen Punkt der entsprechenden Seite des Vielecks $\bar{\gamma}$ wählen). Die Strecke $\overline{\bar{A}\bar{B}}$ zerlegt das konvexe Vieleck $\bar{\gamma}$ in zwei Vielecke $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$, die den abstrakten Flächen α und β entsprechen. Betrachtet man diese Vielecke $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ als neue Flächen (anstelle der einen Fläche $\bar{\gamma}$), so erhalten wir aus dem Vielflach $\overline{V_0}$ ein neues räumliches Vielflach $\overline{V_1}$, das offenbar dem ursprünglichen abstrakten Vielflach V isomorph ist. Das Vielflach $\overline{V_1}$ ist jedoch nicht konvex, da zwei seiner Seitenflächen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ in einer Ebene liegen. Wir deformieren es jetzt so, daß es in ein konvexes Vielflach verwandelt wird.

Um uns vor Augen zu führen, wie man vorzugehen hat, betrachten wir zunächst die einfachsten Fälle: Wir nehmen an, daß die Fläche $\bar{\alpha}$ ein Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ist und an die Ecke $\bar{C}$ außer den Kanten $\overline{\bar{A}\bar{C}}$ und $\overline{\bar{B}\bar{C}}$ nur noch eine Kante $\overline{\bar{C}\bar{D}}$ angrenzt (diesen Fall zeigt die Abb. 26). Wir drehen dann die Ebene der Fläche $\bar{\alpha}$ so um die Gerade $\overline{\bar{A}\bar{B}}$, daß ihre neue Lage die Strecke $\overline{\bar{C}\bar{D}}$ in einem inneren Punkt schneidet, und nehmen diesen

Schnittpunkt als neue Lage der Ecke C an. So erhalten wir ein konvexes Vielflach $\overline{V}$ (Abb. 26), das dem Vielflach $\overline{V_1}$ und damit auch dem abstrakten Vielflach V isomorph ist. Dieses Vielflach $\overline{V}$ ist zugleich die gesuchte Realisierung des abstrakten Vielflachs V.

Die letzte Überlegung benutzt wesentlich, daß die Ecke $\overline{C}$ außer der Fläche $\overline{\alpha}$ nur noch zwei Flächen angehört. Wenn es nämlich wenigstens drei solche Flächen gibt, ist die Lage des Punktes $\overline{C}$ durch sie eindeutig festgelegt, und es gibt keine Drehung der Fläche $\overline{\alpha}$ um die Kante $\overline{AB}$ (falls die Ebenen aller anderen Flächen festbleiben), die die Isomorphie mit dem Vielflach $\overline{V_1}$ nicht zerstört.

Um den Beweis des Steinitzschen Satzes für den allgemeinen Fall zu vollenden, verallgemeinern wir die Schlußetappe der oben durchgeführten Überlegung: Wir zeigen nämlich, daß man stets, ohne die Isomorphie von $\overline{V}$ und $\overline{V_1}$ zu zerstören, die uns interessierende Fläche $\overline{\alpha}$ in der von uns benötigten Weise drehen kann, wenn man dabei gleichzeitig auch die Ebenen der anderen Flächen verlagert. Die Möglichkeit einer solchen Verlagerung aller Flächen (und folglich auch Ecken) des Vielflachs $\overline{V_1}$ gründet sich auf den nachfolgenden Hilfssatz.

Wir betrachten eine ganz beliebige Menge K von Flächen und Ecken eines gegebenen abstrakten Vielflachs; wir wollen eine derartige Menge kurz eine *Komplexion* nennen. Unter der *Ordnung* einer beliebigen Fläche (oder Ecke) der Komplexion K verstehen wir die Anzahl der Ecken (bzw. Flächen), die zu K gehören und mit dieser Fläche (Ecke) inzidieren. Für Vielflache, deren Eulersche Zahl gleich 2 ist, gilt der folgende

Hilfssatz 2. *In jeder Komplexion, die aus mehr als einem Element besteht, gibt es wenigstens zwei Elemente (d. h. zwei Flächen oder zwei Ecken oder eine Fläche und eine Ecke), deren Ordnung nicht größer als drei ist.*

Wir kehren nun zum Beweis des Steinitzschen Satzes im allgemeinen Fall zurück. Wir haben also ein räumliches Vielflach $\overline{V_1}$ vor uns, das dem gegebenen abstrakten Vielflach V isomorph, aber nicht konvex ist, da zwei seiner Flächen $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ in einer Ebene liegen.

Es sei m die Gesamtzahl der Ecken und Flächen des Vielflachs $\overline{V_1}$, $m = e + f$. Wir betrachten die Komplexion K, die aus allen Flächen und Ecken dieses Vielflachs besteht; nach Hilfssatz 2 sind in dieser Komplexion wenigstens zwei Elemente einer Ordnung $\leqq 3$ enthalten. Wir bezeichnen eines dieser Elemente mit a_m, wobei wir es von der Fläche $\overline{\alpha}$ verschieden wählen (falls deren Ordnung $\leqq 3$ ist). Dann betrachten wir die neue Komplexion K_1, die aus allen Flächen und Ecken des Vielflachs V außer der Fläche oder Ecke a_m besteht. Nach Hilfssatz 2 gibt es auch in dieser Komplexion wenigstens zwei Elemente einer Ordnung $\leqq 3$; wir bezeichnen eines davon (das von $\overline{\alpha}$ verschieden ist) mit a_{m-1}. Danach betrachten wir die Komplexion K_2, die man aus K_1 erhält, indem man die Fläche oder Ecke a_{m-1} herausnimmt, und bezeichnen eines ihrer Elemente einer Ordnung $\leqq 3$ (das von der Seitenfläche $\overline{\alpha}$ verschieden ist) mit a_{m-2}. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir schließlich die Komplexion K_{m-1}, die nur aus der Fläche $\overline{\alpha}$ besteht, wobei wir nunmehr $\overline{\alpha}$ auch mit a_1 bezeichnen. In der Folge

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}, a_m \tag{4}$$

sind dann alle Flächen und Ecken des Vielflachs $\overline{V_1}$ so angeordnet, daß jedes Element dieser Folge mit höchstens drei der vorangehenden Elemente inzidiert.

Wir drehen nun mit einem hinreichend kleinen Winkel die Ebene der Fläche $\overline{\alpha} \equiv a_1$ um die Kante $\overline{AB}$ (die gemeinsame Kante der Flächen $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$) nach der ihrer Seiten, auf der die mit der Fläche $\overline{\alpha}$ benachbarten Flächen des Vielflachs $\overline{V_1}$ liegen. Danach wenden wir uns dem Element a_2 der Folge (4) zu. Inzidiert dieses Element mit a_1, d. h., ist es eine

der Ecken der Fläche $\mathfrak{A}$, so nehmen wir als neue Lage dieser Ecke irgendeinen Punkt, der der neuen Lage der Ebene $\mathfrak{A}$ angehört und der alten Lage der Ecke a_2 genügend nahe kommt. Inzidiert dagegen das Element a_2 nicht mit a_1, so soll seine neue Lage mit seiner alten Lage übereinstimmen. Ganz analog bestimmen wir die neue Lage des Elements a_3, sodann die des Elements a_4 usw. Wenn ein Element a_k mit keinem der vorangehenden Elemente der Folge (4) inzidiert, wird seine neue Lage gleich der alten gewählt, wenn a_k mit einem oder mit zwei der vorangehenden Elemente inzidiert, z. B. mit a_{k-2}, wählen wir seine neue Lage nahe bei der alten und inzidieren mit der vorher schon festgelegten neuen Lage der Elemente a_{k-1} und a_{k-2}; wenn schließlich das Element a_k mit drei vorangehenden Elementen inzidiert, ist seine neue Lage durch die neue Lage dieser drei Elemente eindeutig bestimmt. (Die Ebene einer Fläche wird durch die Lage dreier Ecken dieser Fläche bestimmt, eine Ecke wird durch drei an sie angrenzende Flächen bestimmt.)

Als Resultat dieser Verlagerung der Flächen und Ecken des Vielflachs $\overline{V_1}$ erhalten wir ein neues Vielflach $\overline{\mathfrak{V}}$, das konvex (wegen des gewählten Drehsinns der Seitenfläche $\mathfrak{A}$) und isomorph dem Vielflach $\overline{V_1}$ ist (da inzidierenden Ecken und Flächen eines dieser Vielflache inzidierende Ecken und Flächen des anderen entsprechen). Mithin ist das Vielflach $\overline{\mathfrak{V}}$ eine solche Realisierung des abstrakten Vielflachs V, wie im STEINITZschen Satz behauptet wird.

Aus dem STEINITZschen Satz ergibt sich ferner die

Folgerung. *Jedes Vielflach vom Geschlecht Null ist einem konvexen Vielflach isomorph.*

2.4. Dualität. Mit dem Begriff des abstrakten Vielflachs und mit dem Satz von STEINITZ ist ein weiterer interessanter geometrischer Sachverhalt verknüpft. Sieht man sich nochmals die Definition des abstrakten Vielflachs an, so bemerkt man sofort, daß die in dieser Definition geforderten Eigenschaften der Flächen genau dieselben sind wie die Eigenschaften der Ecken, d. h., die Definition ändert sich nicht, wenn wir überall das Wort „Fläche" durch das Wort „Ecke" ersetzen und umgekehrt; die Bedingungen I bis IV erfahren inhaltlich keine Veränderung, die Bedingung Va wird zur Bedingung Vb und die Bedingung Vb zur Bedingung Va. Geht man also von einem abstrakten Vielflach V aus und bezeichnet man dessen Flächen als „Ecken", dessen Kanten wieder als „Kanten" und dessen Ecken als „Flächen", so erhält man eine Menge von „Ecken", „Kanten" und „Flächen", die allen Bedingungen aus der Definition des abstrakten Vielflachs genügt, d. h., wir erhalten ein neues abstraktes Vielflach V_1.

Abstrakte Vielflache V und V_1, zwischen deren Elementen man eine solche eineindeutige Zuordnung treffen kann, daß den Ecken, Kanten und Flächen des einen die Flächen, Kanten und Ecken des anderen zugeordnet sind und dabei inzidierenden Elementepaaren des einen Vielflachs inzidierende Elementepaare des anderen entsprechen, heißen zueinander *dual*. Diese Definition ist der Definition der Isomorphie von Vielflachen äußerst ähnlich; der Unterschied besteht nur darin, daß im Fall der Dualität den Ecken des einen Vielflachs nicht die Ecken, sondern die Flächen des zweiten (und umgekehrt) entsprechen. Wie wir sahen, existiert zu jedem abstrakten Vielflach ein zu ihm duales abstraktes Vielflach.

Der STEINITZsche Satz gestattet es, dieses Ergebnis auf räumliche Vielflache vom Geschlecht Null auszudehnen: *Zu jedem räumlichen Vielflach vom Geschlecht Null gibt es ein zu ihm duales räumliches (sogar konvexes) Vielflach.*

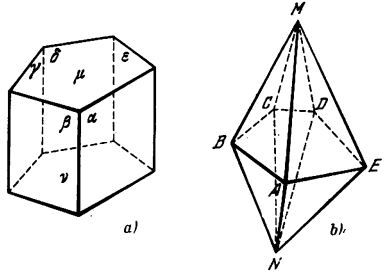


Abb. 27

So ist z. B. zum n-seitigen Prisma (Abb. 27a) ein Vielflach dual, das man als *n-seitige Bipyramide* (*Doppelpyramide*) bezeichnet (Abb. 27b); der n-seitigen Pyramide ist wieder eine n-seitige Pyramide dual (Abb. 28); dem in Abb. 29a dargestellten Vielflach ist das in Abb. 29b dargestellte Vielflach dual. Es ist allerdings zu beachten, daß die Dualität nicht einzelne konkrete Vielflache

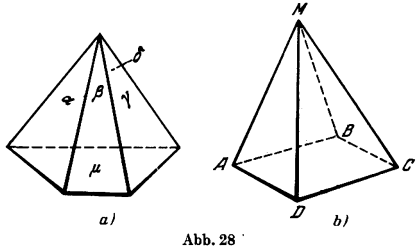


Abb. 28

einander zuordnet, sondern daß es sich um eine Zuordnung zwischen den gesamten kombinatorischen Typen der Vielflache handelt, d. h. also zwischen abstrakten Vielflachen.

Zueinander duale abstrakte Vielflache haben ebenfalls gleichartige kombinatorische Eigenschaften, nur sind die Eigenschaften der Ecken des einen Vielflachs die Eigenschaften der Flächen des anderen Vielflachs. Man kann, mit

anderen Worten, aus jedem Satz, der etwas über eine kombinatorische Eigenschaft eines Vielflachs V aussagt, einen anderen Satz erhalten, der sich auf das zu V duale Vielflach bezieht, indem man im Wortlaut des ersten Satzes überall das Wort „Fläche" durch das Wort „Ecke" ersetzt und umgekehrt. Dieser neue Satz heißt zum ersten *dual*; gleichzeitig mit dem ersten ist er gültig oder ungültig. Drückt ein Satz insbesondere allgemeine Eigenschaften von Vielflachen aus, d. h., bezieht er sich auf ein beliebiges Vielflach, so bezieht sich der zu ihm duale Satz ebenfalls auf ein beliebiges Vielflach.

Als Beispiele für duale Sätze kann man die oben (S. 412–413) bewiesenen Eigenschaften 1 bis 4 abstrakter Vielflache ansehen: Die Eigenschaft 2 ist der Eigenschaft 1 dual und die Eigenschaft 4 der Eigenschaft 3. Daraus ergibt sich unter anderem, wie man die fehlenden Beweise der Eigenschaften 2 und 4 erhalten kann: Um etwa die Eigenschaft 2 zu beweisen, braucht man

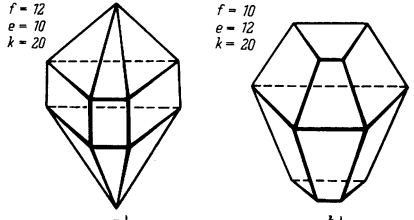


Abb. 29

nur die Überlegungen durchzuführen, die zu den im Beweis der Eigenschaft 1 angegebenen dual sind, d. h. überall in diesem Beweis das Wort „Fläche" durch das Wort „Ecke" und umgekehrt zu ersetzen. Wir empfehlen dem Leser, diese nützliche Übung selbst durchzuführen. Es sei noch bemerkt, daß der oben bewiesene EULERsche Satz ein Beispiel für einen zu sich selbst dualen Satz ist. (Beim dualen Vielflach stehen für die Zahlen f, e, k die Zahlen e, f, k, aber die algebraische Summe $f + e - k$ ist die gleiche.) Insbesondere ist das zu einem Vielflach vom Geschlecht Null duale Vielflach wieder vom Geschlecht Null.

Das genannte Prinzip, das verschiedene kombinatorische Sätze miteinander verknüpft, wird als *Dualitätsprinzip (für Vielflache)* bezeichnet. Es ist zu bemerken, daß dieses Prinzip zunächst nur in bezug auf die kombinatorischen (topologischen) Eigenschaften von Vielflachen aufgestellt wurde. Wir werden später sehen, daß sich die Dualität auch auf einige metrische Eigenschaften der Vielflache ausdehnen läßt.

§ 3. Das Netz eines Vielflachs. Der Satz von Cauchy

3.1. Das Netz eines Vielflachs. Die Existenz eines Vielflachs mit gegebenem Netz. Will man in praxi ein Modell eines Vielflachs anfertigen, so klebt man es häufig aus ebenen Vielecken, nämlich den Flächen des Vielecks, zusammen. Man benötigt dazu einerseits das System der Vielecke, die als Flächen des Vielflachs dienen sollen, und andererseits eine Angabe darüber, welche ihrer Seiten aneinanderzukleben (zu verheften) sind. Beides zusammen bezeichnet man als das *Netz* dieses Vielflachs. So ist z. B. in Abb. 30b das Netz des in Abb. 30a dargestellten Vielflachs gezeigt; hier ist ein Teil der zu verheftenden

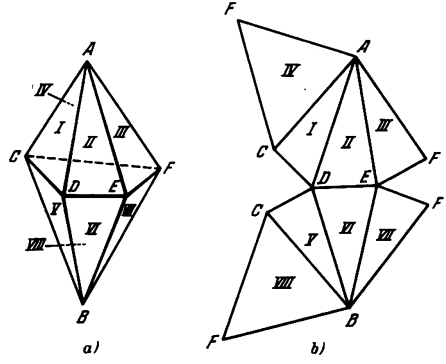


Abb. 30

Seiten bereits miteinander vereinigt, die übrigen Seiten und Ecken, die noch zu verheften sind, haben wir mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

Es ist klar, daß man für ein gegebenes Vielflach stets ein Netz konstruieren kann. Bedeutend weniger klar ist jedoch das Umgekehrte, wann man, wenn ein System von Vielecken und eine Verheftungsvorschrift für deren Seiten und Ecken gegeben ist, sicher sein kann, daß daraus ein Vielflach aufgebaut werden kann, und wenn ja, wieviel verschiedene Vielflache auf diese Weise erhalten werden können. Es ergibt sich also die Frage nach der *Existenz* und der *Eindeutigkeit* eines Vielflachs mit vorgegebenem Netz. Wir befassen uns mit dieser Frage nur in bezug auf konvexe Vielflache.

Eine vorgegebene Menge ebener Vielecke bestimmt (zusammen mit einer Verheftungsvorschrift für deren Seiten und Ecken) den kombinatorischen Typ

des Vielflachs sowie die Form und die Ausmaße seiner Flächen. Nach dem STEINITZschen Satz kann der kombinatorische Typ immer durch ein konvexes Vielflach realisiert werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es müssen die drei in die Definition des Vielflachs eingehenden Forderungen erfüllt sein (vgl. § 1).

2. Die Anzahl der Ecken, der Flächen und der Kanten des Netzes[1]) muß dem EULERschen Satz genügen:

$$e + f - k = 2.$$

Außerdem müssen, damit ein konvexes Vielflach mit dem gegebenen Netz existiert, noch die folgenden metrischen Bedingungen erfüllt sein.

3. Zu verheftende Seiten der Vielecke müssen die gleiche Länge haben.

4. Die Summe der ebenen Winkel muß bei jeder Ecke des Netzes kleiner als 360° sein.

Die Bedingungen 1 bis 4, die offensichtlich notwendig sind, sind jedoch noch nicht hinreichend für die Existenz des gesuchten Vielflachs. Zum Beispiel

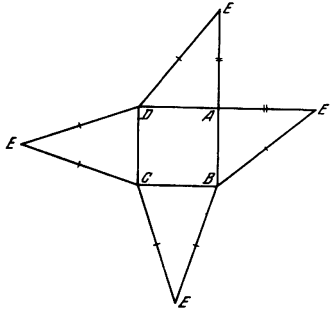


Abb. 31

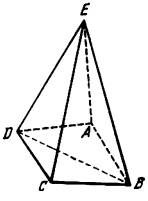


Abb. 32

genügt die in Abb. 31 dargestellte Menge von Vielecken allen diesen Bedingungen, sie ist aber trotzdem kein Netz eines Vielflachs. Würde nämlich ein Vielflach mit diesem Netz existieren, so wäre seine Kante $\overline{EA}$ senkrecht zur Ebene $ABCD$ (da $\overline{EA} \perp \overline{AB}$ und $\overline{EA} \perp \overline{AD}$), woraus nach einem bekannten Satz über drei Senkrechte folgen würde, daß $\overline{BE} \perp \overline{BC}$ sein müßte, entgegen der im Netz angegebenen Größe des Winkels CBE.

[1]) Dabei müssen selbstverständlich der Verheftung unterliegende Seiten (und Ecken) der Vielecke als eine Kante (eine Ecke) des Netzes angesehen werden.

Es erweist sich aber, daß die angeführten Bedingungen 1 bis 4 die Existenz eines (obendrein konvexen) Vielflachs sichern, wenn man nicht verlangt, daß dieses Vielflach ganz genau das gegebene Netz hat, sondern zuläßt, daß einige benachbarte Vielecke des gegebenen Netzes zu einer Fläche vereinigt und einige Vielecke in mehrere Flächen zerlegt werden dürfen. (So braucht man z. B. in Abb. 31 nur das Viereck $ABCD$ durch die Diagonale $\overline{BD}$ in zwei Dreiecke zu zerlegen, um das Netz eines konvexen Vielflachs zu erhalten; vgl. Abb. 32.) Dieser Sachverhalt wurde erstmalig 1942 von dem Leningrader Mathematiker A. D. ALEXANDROW[1]) bewiesen.

3.2. Der Satz von Cauchy. Grundlegende Hilfssätze. Wir wenden uns nun der Frage nach der Eindeutigkeit eines Vielflachs mit gegebenem Netz zu. Jeder, der einmal Vielflache aus Netzen zusammengeklebt hat, weiß aus Erfahrung, daß man aus einem gegebenen Netz bis auf seine Lage im Raum nur ein konvexes Vielflach erhalten kann.[2]) Dieser Sachverhalt war bereits EUKLID (der im 3. Jh. v. u. Z. lebte) bekannt; einen ersten einigermaßen strengen Beweis hierfür lieferte jedoch erst 1813 der berühmte französische Mathematiker A. CAUCHY. Obwohl der von CAUCHY selbst gegebene Beweis eine gewisse Lücke aufweist (auf die wir unten hinweisen werden), die erst später von STEINITZ bemerkt und geschlossen wurde, bezeichnet man den Eindeutigkeitssatz für Vielflache mit gegebenem Netz zu Recht als Satz von CAUCHY.

Satz von CAUCHY. *Sind die einander zugeordneten Flächen zweier isomorpher konvexer Vielflache V und V_1 gleich (kongruent), so sind die Vielflache selbst gleich (kongruent).*

Offenbar genügt es zum Beweis des CAUCHYschen Satzes zu zeigen, daß bei konvexen Vielflachen, die den Voraussetzungen dieses Satzes genügen, die Winkel zwischen den Flächen an einander entsprechenden Kanten einander gleich sind. Der Beweis stützt sich auf folgende Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Wenn man, ohne die Länge der Seiten eines (ebenen) konvexen Streckenzuges $A_1A_2 \dots A_n$ zu verändern, einige seiner Winkel vergrößert und der dabei erhaltene Streckenzug wiederum konvex ist, vergrößert sich der Abstand zwischen den Endpunkten des Streckenzuges.*

---

[1]) Der Beweis des Satzes von A. D. ALEXANDROW ist keineswegs elementar, so daß wir ihn nicht anführen können. Den interessierten Leser, der sich mit diesem Beweis bekannt machen möchte, verweisen wir auf das am Schluß dieses Artikels angegebene Buch von A. D. ALEXANDROW [1].

[2]) Genau genommen kann man aus einem gegebenen Netz zwei verschiedene, bezüglich einer Ebene spiegelbildliche Vielflache erhalten; um diese Mehrdeutigkeit auszuschalten, könnte man auf irgendeiner Fläche des Netzes angeben, welche ihrer „Seiten" zum Außengebiet und welche zum Innengebiet des Vielflachs gehören soll. Im folgenden wollen wir spiegelbildliche Vielflache nicht unterscheiden, indem wir die Symmetrie als Spezialfall der Gleichheit (Kongruenz) von Vielflachen zulassen (obwohl zwei derartige Vielflache im allgemeinen nicht durch eine Verlagerung im Raum ineinander übergeführt werden können).

Beweis. Zur Vereinfachung der Überlegungen führen wir einige Hilfsbezeichnungen ein. Wir bezeichnen die Gerade A_1A_n (und jede zu ihr parallele Gerade) als horizontale Gerade; die Richtung vom Punkt A_1 zum A_n charakterisieren wir mit den Worten „von links nach rechts"; schließlich charakterisieren wir die Richtung, die zur Geraden A_1A_n senkrecht und nach derjenigen Seite dieser Geraden gerichtet ist, auf der der gegebene Streckenzug liegt, mit den Worten „von oben nach unten" (Abb. 33).

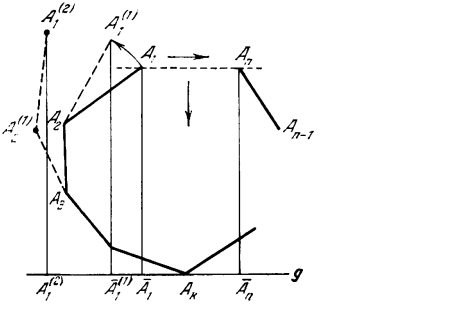


Abb. 33

Wir legen durch die „unterste" Ecke A_k des gegebenen Streckenzuges die horizontale Gerade g. (Es kann zwei solche „unterste" Ecken geben, A_k und A_{k+1}; in diesem Fall liegt die Strecke $\overline{A_kA_{k+1}}$ auf der Geraden g.) Offenbar liegt dann der gesamte Streckenzug $\overline{A_1A_2 \dots A_n}$ in dem Streifen zwischen den Geraden A_1A_n und g. Wir projizieren ferner die Ecken A_1 und A_n senkrecht auf die Gerade g und bezeichnen ihre Projektionen mit $\bar{A}_1$ bzw. $\bar{A}_n$.

Die Winkel des Streckenzuges $\overline{A_1A_2 \dots A_n}$ werden nun auf die vorgegebenen Größen (kleiner als 180°, da der erhaltene Streckenzug konvex bleiben soll) vergrößert. Wir vergrößern zuerst (wenn $2 < k$ ist) den Winkel bei A_2 auf die geforderte Größe (wenn er überhaupt vergrößert werden muß), indem wir die Strecke $\overline{A_2A_1}$ um den Punkt A_2 (entgegen dem Uhrzeigersinn) drehen; dabei gehe der Punkt A_1 in den Punkt $A_1^{(1)}$ und seine Projektion in den Punkt $\bar{A}_1^{(1)}$ über (vgl. Abb. 33). Offensichtlich liegen die Punkte A_1 und $A_1^{(1)}$ beide höher als der Punkt A_2 (da die Strecke $\overline{A_2A_1^{(1)}}$ im Winkelraum zwischen dem Strahl $\overrightarrow{A_2A_1}$ und der Verlängerung der Strecke $\overline{A_3A_2}$ über den Punkt A_2 hinaus liegen muß); mithin verlagert sich bei der angegebenen Drehung die Projektion des Punktes A_1 von rechts nach links, d. h., der Punkt $\bar{A}_1^{(1)}$ liegt links von $\bar{A}_1$. Sodann vergrößern wir den Winkel bei A_3 (wenn $3 < k$ ist) auf die geforderte Größe; zu diesem Zweck drehen wir den Streckenzug $\overline{A_1^{(1)}A_2A_3}$ als starren Körper oder, was dem äquivalent ist, die Strecke $\overline{A_3A_1^{(1)}}$ um den Punkt A_3. Genau wie vorher verlagert sich die Projektion des Punktes A_1 dabei nach links. Gleichermaßen verfahren wir mit den Winkeln bei $A_4, \dots, A_{k-1}$. Danach vergrößern wir in gleicher Weise die Winkel bei $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_{k+1}$ der rechten Hälfte des gegebenen Streckenzuges; dabei kann sich die Projektion der Ecke A_n nur nach rechts verlagern. Schließlich vergrößern wir den Winkel bei A_k, indem wir beide Teile des Streckenzuges so um den Punkt A_k drehen (den linken entgegen dem Uhr-

zeigersinn, den rechten im Uhrzeigersinn), daß beide Teile oberhalb der Geraden g bleiben.

Als Ergebnis erhalten wir den neuen Streckenzug $\overline{A_1'A_2' \dots A_n'}$, wobei die Strecke $\overline{A_1'A_n'}$, die die Projektionen seiner Endpunkte miteinander verbindet, in ihrem Inneren die Strecke $\overline{A_1A_n}$ enthält. Somit ist $|A_1A_n| < |A_1'A_n'|$. Ferner ist $|A_1A_n| = |A_1A_n|$ (wegen $A_1A_n \parallel g$) und $|A_1'A_n'| \leqq |A_1'A_n'|$, und folglich ist $|A_1A_n| < |A_1'A_n'|$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Wir merken an, daß der von CAUCHY gegebene Beweis von Hilfssatz 1 die oben erwähnte Lücke enthält, wodurch der gesamte von ihm gelieferte Beweis des Satzes unvollständig ist. CAUCHYS Beweis stützt sich nämlich wesentlich darauf, daß man bei der sukzessiven Vergrößerung der Winkel eines gegebenen Streckenzuges nach jedem Schritt wieder einen konvexen Streckenzug erhält. Es wird also außer acht gelassen, daß einige der als Zwischenergebnis erhaltenen Streckenzüge auch nicht konvex sein können. Diese Möglichkeit zeigt das in Abb. 34 dargestellte Beispiel eines Streckenzuges $\overline{A_1A_2A_3A_4}$: Wenn die Winkel bei A_2 und bei A_3 zu einem rechten Winkel vergrößert werden sollen (als Resultat ergibt sich offensichtlich wieder ein konvexer Streckenzug), gelangen wir, wenn wir zunächst nur einen dieser Winkel auf die geforderte Größe bringen, zu einem nichtkonvexen Streckenzug. Der oben angeführte Beweis von Hilfssatz 1 benutzt in keiner Weise die Konvexität der als Zwischenergebnis erhaltenen Streckenzüge.

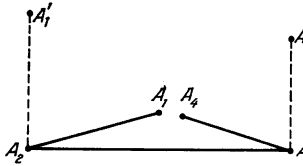


Abb. 34

Hilfssatz 2. *Ein konvexes Vieleck $\overline{A_1A_2 \dots A_n}$ werde in ein anderes konvexes Vieleck deformiert, wobei die Längen seiner Seiten unverändert bleiben mögen, aber wenigstens einer seiner Winkel seine Größe ändert. Wir kennzeichnen mit dem Zeichen „plus" die Ecken derjenigen Winkel des gegebenen Vielecks, die sich bei der Deformation vergrößern, und mit dem Zeichen „minus" die Ecken derjenigen Winkel, die sich bei der Deformation verkleinern. (Die Ecken der Winkel, die ihre Größe nicht ändern, werden nicht gekennzeichnet.) Dann treten bei einem folgerichtigen Umlaufen der Ecken des gegebenen Vielecks nicht weniger als vier Zeichenwechsel auf.* (Die nicht gekennzeichneten Ecken werden beim Zählen der Zeichenwechsel nicht berücksichtigt.)

Beweis. Wir beginnen beim Umlaufen der Ecken des Vielecks bei irgendeiner gekennzeichneten Ecke. Wenn wir erneut bei dieser Ecke anlangen, müssen wir zu demselben Zeichen zurückkehren, mit dem wir begonnen haben; folglich muß die Anzahl der Zeichenwechsel eine gerade Zahl sein. Sie kann nicht gleich Null sein, da sonst alle gekennzeichneten Ecken ein und dasselbe Zeichen trügen (z. B. „+") und nach Hilfssatz 1 eine der Seiten des gegebenen

Vielecks hätte verlängert werden müssen, was den Voraussetzungen des Hilfssatzes widerspricht.

Wir nehmen nun an, es treten nur zwei Zeichenwechsel auf. Das bedeutet, daß beim Umlaufen der Ecken des Vielecks $\overline{A_1A_2 \dots A_n}$ auf einem gewissen Abschnitt, z. B. von der Ecke A_1 bis zur Ecke A_k, alle gekennzeichneten Ecken das Zeichen „+" und weiter von der Ecke A_{k+1} bis zur Ecke A_n alle gekennzeichneten Ecken das Zeichen „−" tragen (Abb. 35). Wir wählen einen beliebigen Punkt C auf der Seite $\overline{A_nA_1}$ und einen beliebigen Punkt D auf der Seite $\overline{A_kA_{k+1}}$ aus. Dann muß sich nach Hilfssatz 1, angewendet auf den Streckenzug $\overline{CA_1 \dots A_kD}$, die Strecke $\overline{CD}$ bei unserer Deformation verlängern und nach dem gleichen Hilfssatz 1, angewendet auf den Streckenzug $\overline{DA_{k+1} \dots A_nC}$, verkürzen. Der erhaltene Widerspruch zeigt, daß die Anzahl der Zeichenwechsel nicht gleich 2 sein kann. Also ist diese Anzahl mindestens gleich 4, was zu zeigen war.

Bemerkung. In den Hilfssätzen 1 und 2 betrachten wir der Einfachheit halber ebene Vielecke. Diese Hilfssätze und ihre Beweise (von denen der erste

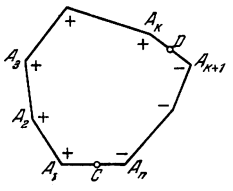


Abb. 35

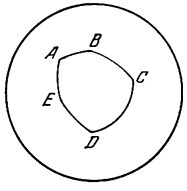


Abb. 36

nur unwesentlich abgeändert werden muß[1]) gelten jedoch ebenso für sphärische Vielecke (d. h. für Vielecke auf einer Sphäre, die von Großkreisbögen gebildet werden). Auf solche Vielecke müssen wir diese Hilfssätze im folgenden anwenden.

Hilfssatz 3. *Eine gegebene konvexe vielkantige Ecke werde in eine andere konvexe vielkantige Ecke deformiert, wobei ihre ebenen Winkel unverändert bleiben mögen, aber von den Flächenwinkeln wenigstens einer seine Größe ändert. Wir kennzeichnen die einzelnen Kanten der gegebenen Ecke mit dem Zeichen „plus" oder „minus" in Abhängigkeit davon, ob bei der Deformation der Flächenwinkel bei dieser Kante vergrößert oder verkleinert wird. Dann treten bei einem*

[1]) Es muß nämlich der Großkreis g (anstelle der Geraden g) so gewählt werden, daß er den Großkreis A_1A_n in Punkten O_1 und O_2 *außerhalb* des Bogens $\widehat{A_1A_n}$ schneidet. Die Projektion auf g muß mit Kreisen ausgeführt werden, die in Ebenen liegen, welche auf dem Durchmesser O_1O_2 der Sphäre senkrecht stehen.

folgerichtigen Umlaufen der Kanten der gegebenen Ecke nicht weniger als vier Zeichenwechsel auf.

Beweis. Wir betrachten eine Sphäre von beliebigem Radius, deren Mittelpunkt die Ecke der gegebenen vielkantigen Ecke ist. Als Schnittfigur dieser Sphäre mit der vielkantigen Ecke erhalten wir ein sphärisches Vieleck (Abb. 36), dessen Seiten durch die entsprechenden ebenen Winkel der vielkantigen Ecke und dessen Winkel durch die Flächenwinkel der vielkantigen Ecke bestimmt werden. Jeder Deformation der vielkantigen Ecke entspricht eine Deformation des sphärischen Vielecks; damit ergibt sich Hilfssatz 3 unmittelbar aus Hilfssatz 2.

3.3. Der Beweis des Cauchyschen Satzes. Es seien zwei isomorphe konvexe Vielflache V und V' gegeben, deren entsprechende Seitenflächen gleich (kongruent) sind. Wir müssen zeigen, daß die Flächenwinkel des einen Vielflachs gleich den entsprechenden Flächenwinkeln des anderen Vielflachs sind.

Wir nehmen an, daß sich unter den einander entsprechenden Flächenwinkeln des gegebenen Vielflachs ungleiche befinden. Wir kennzeichnen jede Kante des Vielflachs V, deren Flächenwinkel größer als der entsprechende Flächenwinkel des Vielflachs V' ist, mit dem Zeichen „plus" und jede Kante, deren Flächenwinkel kleiner als der entsprechende Flächenwinkel ist, mit dem Zeichen „minus"; diejenigen Kanten, deren Flächenwinkel zu den entsprechenden Flächenwinkeln gleich sind, kennzeichnen wir nicht. Nach unserer Annahme gibt es auf dem Vielflach V gekennzeichnete Kanten; an jede Ecke, an die eine gekennzeichnete Kante anschließt, müssen nach Hilfssatz 3 mindestens noch drei solcher Kanten angrenzen. Die gekennzeichneten Kanten bilden auf der Oberfläche des Vielflachs V ein Netz N, das diese Oberfläche in Gebiete aufteilt.[1]) Kanten dieses Netzes sind die gekennzeichneten Kanten des Vielflachs V und Ecken diejenigen der Ecken des Vielflachs V, an die wenigstens eine gekennzeichnete Kante angrenzt.

Wir bezeichnen die Anzahl der durch das Netz N bestimmten Ecken, Flächen und Kanten der Reihe nach mit e, f und k. Wir stellen die Gesamtzahl x der Zeichenwechsel fest, die wir erhalten, wenn wir nacheinander die Kanten umlaufen, die an eine Ecke des Netzes N anschließen, sodann die, die an eine zweite, an eine dritte Ecke usw. anschließen. Nach Hilfssatz 3 treten bei jeder Ecke nicht weniger als vier Zeichenwechsel auf. Folglich ist

$$x \geqq 4e. \tag{5}$$

Wir bestimmen ferner die Gesamtzahl y der Zeichenwechsel, die wir erhalten, wenn wir nacheinander die Konturen jeder Fläche des Netzes N umlaufen. Beim Umlaufen jeder Fläche muß die Anzahl der Zeichenwechsel gerade sein;

[1]) In § 1 betrachten wir Netze auf einer *Sphäre*; die Untersuchung von Netzen auf der Oberfläche eines konvexen Vielflachs unterscheidet sich davon nicht: Es genügt dazu, das Vielflach auf eine Sphäre zu projizieren.

außerdem kann sie die Anzahl der Seiten dieser Fläche nicht überschreiten. Demzufolge ist bei einer dreieckigen Fläche die Anzahl der Zeichenwechsel nicht größer als 2, bei einer viereckigen Fläche nicht größer als 4, bei einer fünfeckigen Fläche nicht größer als 4, bei einer sechseckigen Fläche nicht größer als 6 usw. Bezeichnet man also die Anzahl der dreieckigen, viereckigen, fünfeckigen usw. Flächen des Netzes N entsprechend mit f_3, f_4, f_5, ..., so gilt

$$y \leqq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \cdots. \tag{6}$$

Die Gesamtzahl der Zeichenwechsel hängt aber offenbar nicht davon ab, ob wir sie nach den Ecken oder nach den Flächen des Netzes N bestimmen: Zwei Kanten, die beim Umlaufen einer Ecke benachbart sind, sind auch beim Umlaufen einer Fläche benachbart und liefern uns deshalb gleichzeitig einen oder keinen Zeichenwechsel bei beiden Zählarten. Somit ist $x = y$, und wir erhalten durch Vergleichen von (5) und (6)

$$4e \leqq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \cdots. \tag{7}$$

Wir zeigen nun, daß diese letzte Ungleichung dem EULERschen Satz widerspricht. In der Tat: Nach der Folgerung aus dem EULERschen Satz (S. 409) gilt für das Netz N die Beziehung

$$e + f - k \geqq 2,$$

d. h.

$$4e \geqq 8 + 4k - 4f. \tag{8}$$

Es ist nun offenbar

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + \cdots. \tag{9}$$

Außerdem können wir noch die Zahl k durch die Zahlen f_k ausdrücken. Zu diesem Zweck zählen wir die Kanten des Netzes N, indem wir zunächst die Seiten aller dreieckigen Flächen erfassen, dann die aller viereckigen Flächen, sodann die der fünfeckigen usw. Insgesamt erhalten wir auf diese Weise $3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots$ Kanten; dabei wird jedoch jede Kante doppelt gezählt (da sie zwei Flächen angehört). Folglich gilt

$$2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \cdots. \tag{10}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (9) und (10) kann die Ungleichung (8) in der Gestalt

$$4e \geqq 8 + 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + \cdots \tag{11}$$

geschrieben werden.

Vergleicht man die Ungleichung (11) mit der früher erhaltenen Ungleichung (7), so sieht man, daß sie einander widersprechen, da die rechte Seite der Ungleichung (11) echt größer ist als die rechte Seite der Ungleichung (7).

Die Annahme, daß die Vielflache V und V' ungleiche einander entsprechende Flächenwinkel besitzen, führt also auf einen Widerspruch, und der Satz von CAUCHY ist damit bewiesen.

Aus dem CAUCHYschen Satz folgt, daß ein konvexes Vielflach mit starren (unveränderlichen) Flächen starr ist, d. h. nicht deformiert werden kann, auch dann nicht, wenn seine Flächen miteinander durch Scharniere verbunden sind. Es ist bemerkenswert, daß sich die Vielflache in dieser Beziehung wesentlich von den ebenen Vielecken unterscheiden. Im allgemeinen kann man ein ebenes Vieleck deformieren, ohne die Längen seiner Seiten zu verändern. Zum Beispiel ist ein mit Scharnieren versehenes Quadrat in einen Rhombus deformierbar (Abb. 37); eine Ausnahme bilden hier lediglich die Dreiecke, die bekanntlich starr sind.

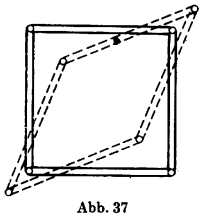


Abb. 37

Es sei noch bemerkt, daß im CAUCHYschen Satz die Voraussetzung der Konvexität der beiden betrachteten Vielflache sehr wesentlich ist. Ein konvexes Vielflach kann Flächen haben, die den entsprechenden Flächen eines ihm isomorphen nichtkonvexen Vielflachs gleich sind. (Zwei solche Vielflache sind in Abb. 38 dargestellt.) Solche Vielflache können allerdings durch keine stetige Deformation (bei der sich Form

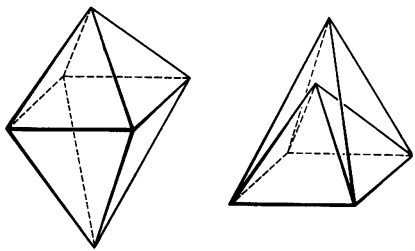


Abb. 38

und Ausmaße der Flächen nicht ändern) ineinander übergeführt werden, da ein konvexes Vielflach im Verlauf einer solchen Deformation noch eine „gewisse" Zeit" konvex bleiben muß, was nach dem CAUCHYschen Satz nicht möglich ist.

8.4. Einige Verallgemeinerungen für gekrümmte Flächen. Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit eines Vielflachs mit gegebenem Netz ist mit einem weiten Kreis mathematischer Fragen verknüpft, die den Inhalt der sogenannten *inneren Geometrie der Flächen* ausmachen. Um sich von diesen Fragestellungen eine klare Vorstellung machen zu können, bedarf es noch einiger zusätzlicher Erläuterungen.

Wir nehmen an, uns sei ein konvexes Vielflach V gegeben und wir könnten geometrische Größen nicht allgemein im Raum messen, sondern nur auf der Oberfläche dieses Vielflachs. In einer solchen Lage befänden sich beispielsweise „zweidimensionale Wesen", die auf der Oberfläche des gegebenen Vielflachs leben und nichts vom dreidimensionalen Raum, in den es eingebettet ist, wüßten. Solche Wesen könnten die Länge von Kurven auf der Oberfläche des Vielflachs messen sowie die Winkel zwischen ihnen[1]) (deren Messung, wie man leicht einsieht, auf das Messen von Längen zurückgeführt werden kann), aber solche Größen, wie z. B. die Winkel zwischen den Flächen, wären ihnen für eine Messung (zumindest für eine unmittelbare) unzugänglich. Der Wissensschatz geometrischer Erkenntnisse, den diese zweidimensionalen Wesen über ihr Vielflach sammeln könnten, macht den Inhalt der inneren Geometrie dieses Vielflachs aus. In diesen Wissensschatz ginge beispielsweise der Begriff „Ecke des Vielflachs" ein: Die gedachten Wesen könnten nämlich bemerken, daß in den „Ecken", im Unterschied zu den anderen Punkten der Oberfläche des Vielflachs, der volle Winkel kleiner als 360° ist.

Zwei verschiedene (zueinander nicht kongruente) Vielflache können dieselbe innere Geometrie haben; als Beispiel können die in Abb. 38 dargestellten Vielflache dienen. Das gilt immer dann, wenn man zwischen den Punkten ihrer Oberflächen eine solche eindeutige Zuordnung treffen kann, daß jeder Kurve auf der Oberfläche des einen Vielflachs eine Kurve auf der Oberfläche des anderen Vielflachs entspricht, welche die gleiche Länge wie die gegebene Kurve hat; in diesem Fall sagt man auch, daß die beiden Vielflache dieselbe *Metrik* besitzen. Die oben genannten zweidimensionalen Wesen könnten zwischen den Oberflächen zweier derartiger Vielflache keinerlei Unterschiede feststellen.

Es ist klar, daß das Netz eines Vielflachs dessen innere Metrik eindeutig bestimmt: Unmittelbar anhand des Netzes eines Vielflachs kann man dieselben Messungen ausführen wie auf dessen Oberfläche. Die Veränderungen eines Netzes, die am Schluß von 3.1. im Zusammenhang mit dem Satz von A. D. ALEXANDROW genannt wurden (nämlich die Vereinigung benachbarter Flächen und die Zerlegung einer Fläche in mehrere), führen ein gegebenes Netz offenbar in ein isometrisches Netz über, d. h., die innere Metrik bleibt erhalten. Also behauptet der Satz von A. D. ALEXANDROW eigentlich nicht die Existenz eines Vielflachs mit gegebenem Netz, sondern die Existenz eines Vielflachs mit einer gegebenen inneren Metrik. Ferner zeigt der CAUCHYsche Satz, daß in der Klasse der konvexen Vielflache jedes Vielflach durch seine innere Metrik eindeutig bestimmt ist.

Der Begriff der Isometrie (und damit auch der inneren Metrik) kann ohne jede Änderung auf beliebige Flächen (die keine Vielflache sind) übertragen werden; in bezug auf diese Flächen ergeben sich die gleichen Fragen der Existenz und der Eindeutigkeit. Diese Fragen wurden über einen ziemlich langen Zeitraum hinweg von vielen Geometern untersucht und erst vor verhältnismäßig kurzer Zeit (für konvexe Flächen) endgültig beantwortet. Das Problem der Existenz einer konvexen Fläche mit gegebener innerer Metrik wurde 1948 von A. D. ALEXANDROW gelöst: Er bewies, daß die gesuchte konvexe Fläche genau

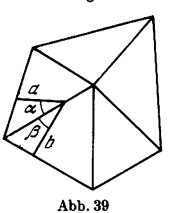


Abb. 39

[1]) Man muß dabei beachten, daß die Größe des Winkels zwischen zwei Kurven, wenn sie auf der Oberfläche eines Vielflachs gemessen wird, im allgemeinen von der Größe des gleichen Winkels verschieden ist, die nach den üblichen Meßvorschriften für Winkel im Raum erhalten wird. So ist z. B. der in Abb. 39 dargestellte Winkel zwischen den Geraden a und b, gemessen auf der Oberfläche des gegebenen Vielflachs, gleich der Summe der dort eingezeichneten Winkel α und β; diese Summe ist größer als der ebene Winkel zwischen den Geraden a und b.

dann existiert, wenn die gegebene Metrik zwei Bedingungen genügt, die den in 3.1. (S. 421) für Vielflache formulierten Bedingungen 2 und 4 analog sind.[1]) Dabei ist interessant, daß A. D. ALEXANDROW beim Beweis seines Satzes den Satz über die Existenz eines konvexen Vielflachs mit gegebenem Netz verwendet: Die gegebene Metrik ersetzt er durch ihr nahekommende Netze von Vielflachen und geht, nachdem er diese Vielflache konstruiert hat, von diesen zur gesuchten Fläche über.

Das Problem der Eindeutigkeit einer konvexen Fläche mit gegebener innerer Metrik wurde 1949 von dem Charkower Geometer A. W. POGORELOW endgültig gelöst. Er bewies folgenden Satz, der den Satz von CAUCHY wesentlich verallgemeinert: *Zwei isometrische konvexe Flächen sind einander gleich.*

§ 4. Regelmäßige Vielecke und Vielflache und ihre Verallgemeinerungen

4.1. Topologisch regelmäßige Vielflache. Ein Vielflach heißt *topologisch regelmäßig* (*regulär*), wenn seine Flächen alle die gleiche Eckenzahl haben und in jeder Ecke die gleiche Anzahl von Flächen zusammentrifft.[2]) Es ist klar, daß die Eigenschaft eines Vielflachs, topologisch regelmäßig zu sein, eine topologische Eigenschaft ist, d. h. jedes zu einem topologisch regelmäßigen Vielflach isomorphe Vielflach ebenfalls topologisch regelmäßig ist. Wir suchen nun alle kombinatorischen Typen von topologisch regelmäßigen Vielflachen vom Geschlecht Null auf.

Es bezeichne e, f und k die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines Vielflachs. Jede Fläche des Vielflachs habe n Ecken, und in jeder Ecke mögen sich s Flächen treffen. Da dann jede Fläche auch n Kanten besitzt, haben die f Flächen zusammen nf Kanten; dabei wird jedoch jede Kante des Vielflachs doppelt gezählt (da sie zwei Flächen angehört). Folglich ist

$$nf = 2k. \tag{12}$$

Durch Abzählen der Kanten, die in jeder Ecke zusammentreffen, erhalten wir ganz analog die Beziehung

$$se = 2k. \tag{13}$$

Die Zahlen e, f und k sind ferner nach dem EULERschen Satz durch die Beziehung

$$e + f - k = 2 \tag{14}$$

miteinander verknüpft.

---

[1]) Die Bedingung 2, die verlangt, daß die EULERsche Zahl des Netzes gleich 2 ist, wird für Flächen dahingehend abgewandelt, daß diese der Sphäre homöomorph sein müssen, und die Bedingung 4, daß ihre Krümmung positiv ist.

[2]) Einen analogen Begriff für Vielecke einzuführen, hat keinen Sinn: Da jede Seite eines Vielecks zwei Ecken hat und in jeder Ecke zwei Seiten zusammentreffen, müßte man *jedes* Vieleck als topologisch regelmäßig ansehen.

Drücken wir mit Hilfe der Beziehungen (12) und (13) die Zahlen e und f durch k aus und setzen sie in (14) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{2k}{s} + \frac{2k}{n} - k = 2$$

oder, nach der Division durch $2k$,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Diese Gleichung ermöglicht es, alle (für ein topologisch regelmäßiges Vielflach) möglichen Werte s, n und k zu ermitteln. Aus (15) ergibt sich nämlich die Ungleichung

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2},$$

aus der ersichtlich ist, daß wenigstens eine der Zahlen $\frac{1}{s}$ oder $\frac{1}{n}$ größer als $\frac{1}{4}$ sein muß, d. h., wenigstens eine der Zahlen s oder n muß kleiner als 4 sein. Da aber keine der Zahlen s und n ihrem geometrischen Sinn nach kleiner als 3 sein kann, muß entweder $s = 3$ oder $n = 3$ sein. Wegen $\frac{1}{s} \leqq \frac{1}{3}$ muß ferner $\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, d. h. $n < 6$ sein; ganz analog findet man, daß auch $s < 6$ sein muß. Also gibt es nur fünf Möglichkeiten: Entweder $n = 3$, $s = 3, 4, 5$ oder $s = 3$, $n = 4, 5$. Eine Probe zeigt, daß in allen diesen Fällen die durch die Gleichung (15) bestimmte Zahl k sowie die durch die Gleichungen (12) und (13) bestimmten Zahlen f und e ganze Zahlen sind. Indem wir in jedem der angegebenen Fälle diese Zahlen berechnen, bestimmen wir alle möglichen „Charakteristiken" von topologisch regelmäßigen Vielflachen:

Tabelle 2

Nr.	n	s	k	e	f
1	3	3	6	4	4
2	3	4	12	6	8
3	3	5	30	12	20
4	4	3	12	8	6
5	5	3	30	20	12

Aus unseren Überlegungen folgt natürlich noch nicht, daß jede Zeile der erhaltenen Tabelle tatsächlich ein Vielflach definiert. Wir zeigen am Beispiel der zweiten Zeile, daß dies wirklich der Fall ist.

Auf Grund der in dieser Zeile enthaltenen Werte für n und s muß das gesuchte Vielflach dreieckige Flächen besitzen, von denen in jeder Ecke je vier zusammentreffen. Es sei $A_1A_2A_3$ eine solche Fläche. Zu ihr müssen drei drei-

eckige Flächen benachbart sein, die in Abb. 40a schematisch angedeutet sind; dabei müssen die Ecken A_4, A_5, A_6 alle verschieden sein, da anderenfalls

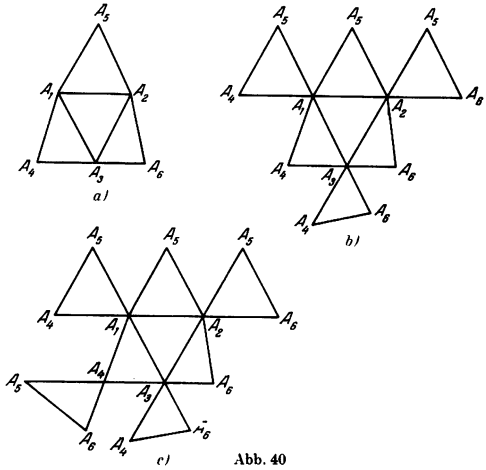


Abb. 40

in der betreffenden Ecke nicht vier, sondern nur drei Flächen zusammentreffen würden. Ferner muß an die Ecken A_1, A_2, A_3 noch je eine Fläche anschließen, wie es in Abb. 40b angegeben ist. Nun treffen in der Ecke A_4 drei Flächen zusammen, wobei die „freien" Kanten $\overline{A_4A_5}$ und $\overline{A_4A_6}$ auftreten; folglich muß an diese Ecke noch eine Fläche angrenzen, die $\overline{A_4A_5}$ und $\overline{A_4A_6}$ als Kanten besitzt (Abb. 40c). Nunmehr treffen in jeder der Ecken A_1, A_2, ..., A_6 je vier dreiseitige Flächen zusammen, wobei bereits keine „freien" Kanten mehr auftreten. Das in Abb. 40c dargestellte Schema ist ein abstraktes Vielflach. Nach dem Steinitzschen Satz kann es durch ein konvexes Vielflach realisiert werden (Abb. 41), und dieses ist das gesuchte topologisch regelmäßige Vielflach (es ist eine vierseitige Doppelpyramide, die auch *Oktaeder* genannt wird); in Übereinstimmung mit den in der zweiten Zeile unserer Tabelle angegebenen Zahlen hat dieses Vielflach 12 Kanten, 6 Ecken und 8 Flächen.

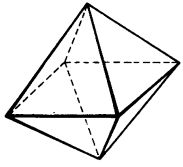


Abb. 41

Wie wir sahen, wird das in Abb. 40c dargestellte Schema durch die Werte $n = 3$, $s = 4$ eindeutig bestimmt. Folglich haben wir nicht nur die Existenz des geforderten Vielflachs nachgewiesen, sondern auch seine Eindeutigkeit (bis auf einen Isomorphismus).

Eine solche Überlegung kann auch bezüglich jeder anderen Zeile der Tabelle 2 angestellt werden. Die erste Zeile bestimmt die uns bereits bekannte dreiseitige Pyramide (*Tetraeder*), die dritte ein Zwanzigflach, das *Ikosaeder* genannt wird

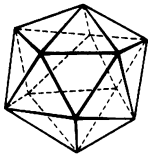


Abb. 42

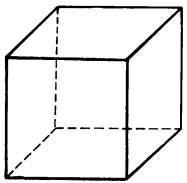


Abb. 43

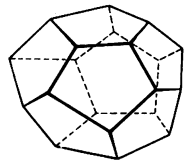


Abb. 44

(Abb. 42), die vierte ein Sechsflach, das dem vierseitigen Prisma isomorph ist und auch *Hexaeder* genannt wird (Abb. 43), die fünfte ein Zwölfflach, das *Dodekaeder* heißt (Abb. 44).

Wir kommen also zu folgendem Ergebnis:

Satz. *Es gibt fünf verschiedene (nicht zueinander isomorphe) Typen topologisch regelmäßiger Vielflache: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.*

Sieht man sich nochmals die Definition des topologisch regelmäßigen Vielflachs an, so bemerkt man, daß die Begriffe Fläche und Ecke in ihr symmetrisch auftreten. Das bedeutet, daß das zu einem topologisch regelmäßigen Vielflach duale Vielflach (vgl. 2.4.) ebenfalls topologisch regelmäßig ist. Hieraus folgt, daß *es zu jedem topologisch regelmäßigen Vielflach ein ihm duales topologisch regelmäßiges Vielflach gibt.* Aus der Tabelle 2 ersieht man, daß das Oktaeder dem Hexaeder und das Dodekaeder dem Ikosaeder dual ist; das Tetraeder ist sich selbst dual.

4.2. Regelmäßige Vielecke und Vielflache. Ein einfaches Vieleck heißt *regelmäßig* oder genauer *metrisch regelmäßig*, wenn alle seine Seiten einander gleich und alle seine Winkel einander gleich sind (Abb. 45). Es ist allgemein bekannt, daß für jedes $n \geq 3$ ein und (bis auf Ähnlichkeit) nur ein regelmäßiges n-Eck existiert. Zu seiner Konstruktion braucht man nur den Umfang irgendeines Kreises in n gleiche Teile zu zerlegen und die Teilpunkte der Reihe nach miteinander zu verbinden.

Eine vielkantige Ecke heißt *regelmäßig*, wenn alle ihre ebenen Winkel einander gleich und alle ihre Flächenwinkel einander gleich sind.

Ein einfaches Vielflach heißt *regelmäßig* (genauer *metrisch regelmäßig*), wenn alle seine Flächen regelmäßige Vielecke und alle seine vielkantigen Ecken einander gleiche regelmäßige vielkantige Ecken sind. Regelmäßige Vielflache nennt man auch *Platonische Vielflache* (*Platonische Körper*). Man kann leicht zeigen, daß diese Vielflache alle konvex sind.

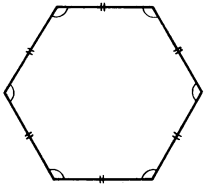


Abb. 45

Jedes regelmäßige Vielflach ist offenbar auch topologisch regelmäßig. Deshalb kann es im Unterschied zu den Vielecken nicht mehr als fünf Typen einander nicht isomorpher regelmäßiger Vielflache geben. Wir zeigen, daß es genau fünf gibt (d. h., daß es in jeder Klasse topologisch regelmäßiger Vielflache metrisch regelmäßige Vielflache gibt) und jedes regelmäßige Vielflach einem dieser fünf Vielflache nicht nur isomorph, sondern sogar ähnlich ist.

Wenn wir den topologischen Typ eines regelmäßigen Vielflachs kennen, können wir sein Netz konstruieren — so wie wir das am Beispiel des Oktaeders in 4.1. ausgeführt haben (vgl. Abb. 40c). Benutzt man in diesem Netz als Flächen gleiche regelmäßige Vielecke, so erhält man das Netz des gesuchten Vielflachs. Also ist das Netz eines regelmäßigen Vielflachs durch dessen topologischen Typ eindeutig bestimmt, sofern man von der Willkür bei der Wahl der Kantenlänge absieht. Bei gegebener Kantenlänge bestimmt das Netz nach dem CAUCHYschen Satz das gesuchte Vielflach eindeutig bis auf seine Lage im Raum. Wir erhalten somit, wenn wir von Kanten verschiedener Länge ausgehen, einander ähnliche Vielflache. Wenn also überhaupt ein regelmäßiges Vielflach eines gegebenen topologischen Typs existiert, so ist es bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt.

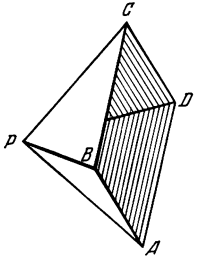


Abb. 46

Es bleibt also zu zeigen, daß für jeden der fünf in 4.1. beschriebenen topologischen Typen wirklich ein metrisch regelmäßiges Vielflach existiert. Wir führen diesen Beweis wieder am Beispiel des Oktaeders.

Wir fügen vier gleichseitige Dreiecke zu einer regelmäßigen vierkantigen Ecke $PABCD$ zusammen (das ist offenbar möglich, und zwar bis auf die Lage dieser vierkantigen Ecken im Raum auf eindeutige Weise; vgl. Abb. 46). Diese bildet eine der Ecken des gesuchten Vielflachs. Wir nehmen nun ein zweites Exemplar derselben vierkantigen Ecke und fügen sie so an die erste, daß ihre Ecke mit dem Punkt A und zwei ihrer Flächen mit den Flächen PAB und PAD zusammenfallen (Abb. 47 und 48); das ist durchführbar, da die Flächen und die Flächenwinkel gleich sind. Im Ergebnis erhalten wir zwei neue Flächen ABQ und ADQ unseres Vielflachs. Wir betrachten nun die vierkantige Ecke

bei B, die die „freie" Fläche CBQ hat. Drei ihrer ebenen Winkel (die in den bereits konstruierten Flächen des Vierflachs liegen) und zwei ihrer Flächenwinkel (die an den Kanten $\overline{BP}$ und $\overline{BA}$) sind drei ebenen Winkeln und zwei

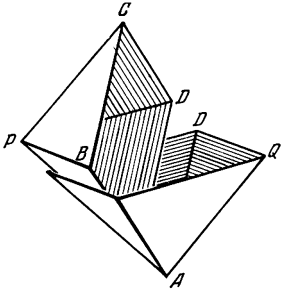


Abb. 47

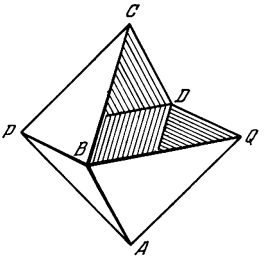


Abb. 48

Flächenwinkeln der ursprünglichen vierkantigen Ecke $PABCD$ entsprechend gleich; folglich ist die gesamte vierkantige Ecke B der vierkantigen Ecke $PABCD$ gleich, und wir können ein weiteres Exemplar der vierkantigen Ecke

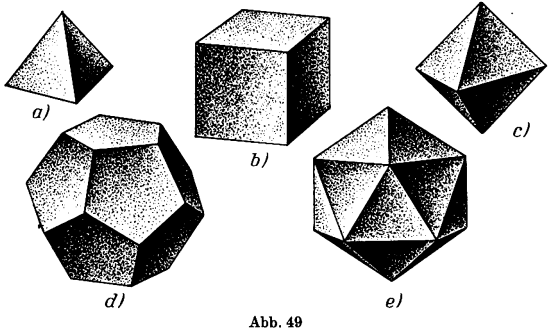


Abb. 49

$PABCD$ an den bereits konstruierten Teil des Vielflachs so anfügen, daß seine Ecke mit B und drei seiner Flächen entsprechend mit den Dreiecken BCP, BPA und BAQ zusammenfallen. Schließlich überzeugen wir uns auf die gleiche

Weise davon, daß man eine ebensolche vierkantige Ecke mit ihrer Ecke in jedem der Punkte C, D und Q anlegen kann. Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß das von uns konstruierte Vielflach $PABCDQ$ metrisch regelmäßig ist. Man bezeichnet es als *regelmäßigen Oktaeder* (Abb. 49c).

Ganz analog weist man die Existenz metrisch regelmäßiger Vielflache in jeder der verbleibenden vier Klassen topologisch regelmäßiger Vielflache nach. Diese metrisch regelmäßigen Vielflache bezeichnet man entsprechend als *regelmäßiges Tetraeder* (Abb. 49a), *regelmäßiges Hexaeder* oder *Würfel* (Abb. 49b), *regelmäßiges Dodekaeder* (Abb. 49d) und *regelmäßiges Ikosaeder* (Abb. 49e).

Wir erhielten also folgenden

Satz. *Es gibt fünf verschiedene (bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmte) metrisch regelmäßige Vielflache: das regelmäßige Tetraeder, das regelmäßige Hexaeder (Würfel), das regelmäßige Oktaeder, das regelmäßige Dodekaeder und das regelmäßige Ikosaeder.*

Gleichzeitig sehen wir, daß zu jedem metrisch regelmäßigen Vielflach ein zu ihm duales metrisch regelmäßiges Vielflach existiert.

Die zueinander dualen regelmäßigen Vielflache kann man durch folgendes einfache Verfahren erzeugen: Es sei ein regelmäßiges Vielflach V gegeben; wir betrachten die Mittelpunkte aller seiner Flächen und nehmen sie als die Ecken eines neuen Vielflachs V'. Die Mittelpunkte benachbarter Flächen des Vielflachs V sollen benachbarte Ecken des Vielflachs V' sein, und die Mittelpunkte derjenigen Flächen von V, die in einer Ecke zusammentreffen (es ist leicht einzusehen, daß diese Mittelpunkte in einer Ebene liegen), sollen die Ecken derselben Fläche von V' sein. Das konstruierte Vielflach V' ist ebenfalls regelmäßig; außerdem entsprechen den Flächen des Vielflachs V die Ecken des Vielflachs V', den Kanten von V die Kanten von V' und den Ecken von V die Flächen von V' (wobei inzidierenden Elementen des Vielflachs V inzidierende Elemente des Vielflachs V' entsprechen), d. h., das Vielflach V' ist zum Vielflach V dual. Die beschriebene Konstruktion ist in den Abb. 50a bis 50e für jedes der fünf regelmäßigen Vielflache dargestellt.

In der angegebenen Konstruktion spielen die Vielflache V und V' nicht die gleiche Rolle (eines ist dem anderen einbeschrieben). Daher verwendet man mitunter besser folgende Konstruktion, die symmetrischer ist: Wir konstruieren die Sphäre, die alle Kanten des gegebenen regelmäßigen Vielflachs V berührt (eine solche Sphäre gibt es stets, und sie berührt jede Kante in deren Mittelpunkt), ziehen zum Mittelpunkt jeder dieser Kanten den Radius der Sphäre und drehen jede Kante (genauer die Gerade, auf der die Kante liegt) um diesen Radius um 90° (Abb. 51). Es ist leicht zu zeigen, daß die zu einer Fläche gehörigen Kanten nach der Drehung durch einen Punkt verlaufen (Abb. 51a) und die Kanten, die durch eine Ecke verlaufen, in eine Ebene zu liegen kommen (Abb. 51b). Somit bestimmen die Kanten des Vielflachs V nach der Drehung ein neues (ebenfalls regelmäßiges) Vielflach V', das zu V dual ist (Abb. 52).

Zwei zueinander duale regelmäßige Vielflache, deren entsprechende, aufeinander senkrecht stehende Kanten gemeinsame Mittelpunkte haben, heißen

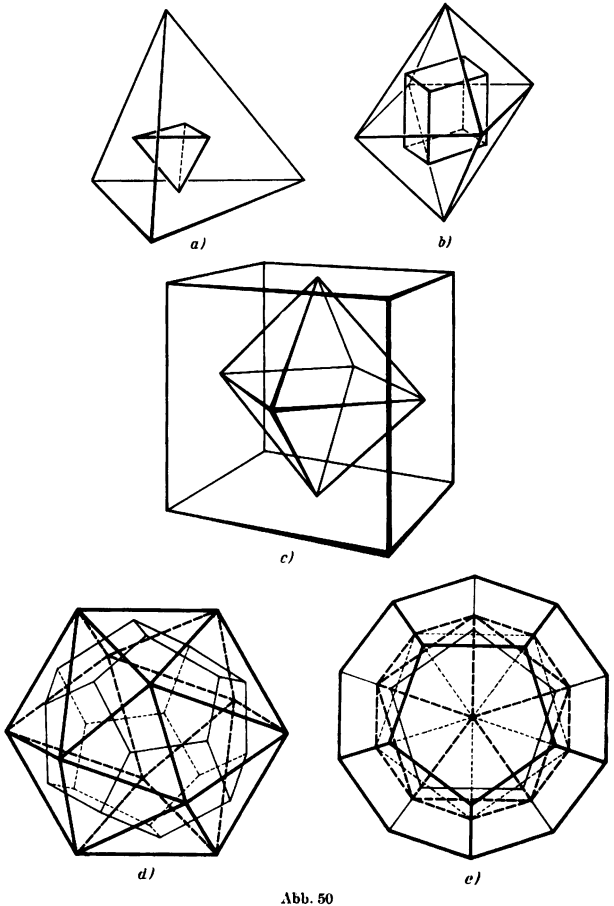


Abb. 50

zueinander *reziprok*. Der Begriff der Reziprozität berücksichtigt im Unterschied zur Dualität nicht nur die topologische Struktur der beiden Vielflache, sondern auch ihre Ausdehnungen und ihre gegenseitige Lage.

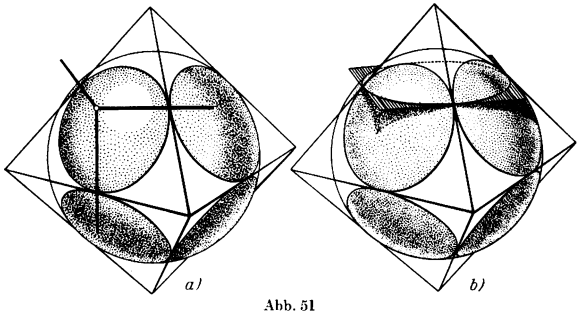


Abb. 51

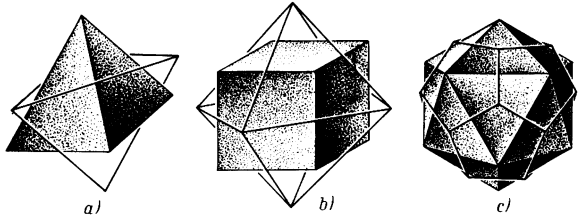


Abb. 52

4.3. Eckengleiche halbregelmäßige Vielflache. Für das Weitere ist es zweckmäßig, einige Hilfsbegriffe einzuführen: Unter dem *Stern einer Ecke A* eines gegebenen Vielflachs verstehen wir die Gesamtheit aller mit ihr inzidierenden Flächen sowie aller Ecken und Seiten dieser Flächen. Dazu dual verstehen wir unter dem *Stern einer Fläche* α eines gegebenen Vielflachs die Gesamtheit aller Ecken der Fläche α sowie aller Flächen und Kanten, die mit diesen Ecken inzidieren. Für Sterne (von Ecken oder von Flächen) werden wir von deren Isomorphie im gleichen Sinne sprechen, wie das oben (vgl. 2.1.) für Vielflache definiert wurde. Um einen Stern (z. B. einer Ecke) bis auf einen Isomorphismus zu bestimmen, genügt es, die Anzahl s der Flächen dieses Sterns sowie die

Anzahl n_1 der Ecken einer dieser Flächen α_1, die Anzahl n_2 der Ecken der mit ihr benachbarten Fläche α_2, die Anzahl n_3 der mit α_2 benachbarten Fläche α_3 usw. anzugeben.

Die topologisch regelmäßigen Vielflache kann man als diejenigen Vielflache charakterisieren, bei denen sowohl die Sterne aller Ecken als auch die Sterne aller Flächen jeweils untereinander isomorph sind. Beschränkt man sich nur auf die erste dieser zwei Forderungen, so kommt man zu einer umfassenderen Klasse von Vielflachen, zu den sogenannten topologisch eckengleichen halbregelmäßigen Vielflachen. Ein Vielflach heißt also *topologisch eckengleich halbregelmäßig*, wenn die Sterne aller seiner Ecken einander isomorph sind.

Wir stellen uns das Ziel, alle Vielflache dieser Art aufzuzählen, wobei wir uns wiederum nur auf Vielflache vom Geschlecht Null beschränken. Ferner werden wir uns dabei nur für Vielflache interessieren, die nicht topologisch regelmäßig sind, d. h. für solche Vielflache, bei denen in jeder ihrer Ecken wenigstens zwei Flächen mit verschiedener Eckenzahl zusammentreffen.

Um alle Typen topologisch eckengleicher halbregelmäßiger Vielflache aufzählen zu können, suchen wir alle möglichen Typen von Sternen ihrer Ecken auf. Für jeden aufgefundenen Sterntyp kann man (und zwar bis auf einen einzigen Fall eindeutig) das Netz des entsprechenden Vielflachs aufbauen — genauso wie das in 4.1. für das Oktaeder durchgeführt wurde. Hieraus folgt nach dem STEINITZschen Satz die Existenz des gesuchten Vielflachs und seine Eindeutigkeit bis auf einen Isomorphismus. Nur einem Sterntyp, den wir noch angeben werden, entsprechen zwei verschiedene Netze und deshalb auch zwei einander nicht isomorphe Vielflache.[1]) Wir werden nicht in jedem Fall die Überlegungen angeben, die zur Konstruktion des Netzes eines Vielflachs führen, dessen Ecken einen bestimmten Sterntyp besitzen; der Leser mag diese Überlegungen selbst durchführen, indem er die in 4.1. durchgeführte Netzkonstruktion für das Oktaeder zum Vorbild nimmt.

Wir führen nun die erforderlichen Bezeichnungen ein. Es bezeichne wieder e, f und k die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten des Vielflachs, f_1 die Anzahl der n_1-eckigen Flächen, f_2 die Anzahl der n_2-eckigen Flächen usw. Ferner sei s die Anzahl der in jeder Ecke des Vielflachs zusammentreffenden Flächen, insbesondere s_1 die Anzahl der n_1-eckigen Flächen, s_2 die Anzahl der n_2-eckigen Flächen usw.

Zunächst zeigen wir, daß in den Ecken eines halbregelmäßigen Vielflachs nicht übermäßig viele Seitenflächen zusammentreffen können, d. h., wir schätzen die Zahl s nach oben ab. Da in jeder Ecke s Kanten zusammentreffen, beträgt die Anzahl der in den verschiedenen Ecken des Vielflachs gezählten Kanten se; weil dabei aber jede Kante zweimal gezählt wird (denn sie verbindet zwei Ecken miteinander), gilt

$$se = 2k. \tag{16}$$

---

[1]) Es ist interessant, daß diese Verletzung der Eindeutigkeit erst vor kurzem bemerkt wurde, obwohl die Theorie der halbregelmäßigen Vielflache bereits mehr als zweitausend Jahre alt ist.

Jede Fläche des Vielflachs hat nicht weniger als drei Seiten; da jede Kante zwei Flächen angehört, ist also $3f \leqq 2k$ oder, wegen (16),

$$3f \leqq se. \tag{17}$$

Aus dem Eulerschen Satz folgt (da wir nur Vielflache vom Geschlecht Null betrachten)

$$e + f > k.$$

Unter Verwendung der Beziehungen (16) und (17) erhält man schließlich

$$e + \frac{s}{3}e \geqq e + f > k = \frac{s}{2}e,$$

woraus sich nach einfachen Umformungen

$$s < 6$$

ergibt.

Somit kann s nur die Werte 3, 4, 5 annehmen.

Wir versuchen nun, alle möglichen Sterntypen für die Ecken eines gegebenen halbregelmäßigen Vielflachs zu bestimmen, d. h. alle möglichen Werte der Zahlen n_k und s_k zu finden.

Die n_1-eckigen Flächen enthalten zusammen einerseits $n_1 f_1$ ebene Winkel und andererseits $s_1 e$ ebene Winkel. Folglich ist $n_1 f_1 = s_1 e$ oder $f_1 = \frac{s_1}{n_1} e$. Genauso ist $f_2 = \frac{s_2}{n_2} e$ und allgemein

$$f_k = \frac{s_k}{n_k} e. \tag{18}$$

Mithin gilt für die Gesamtzahl f der Seitenflächen eines Vielflachs

$$f = \frac{s_1}{n_1} e + \frac{s_2}{n_2} e + \cdots. \tag{19}$$

Wir gehen nun von der Eulerschen Gleichung

$$f = k - e + 2$$

aus und setzen in sie f und k aus den Gleichungen (16) und (19) ein:

$$\frac{s_1}{n_1} e + \frac{s_2}{n_2} e + \cdots = \frac{se}{2} - e + 2$$

oder

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \cdots = \frac{s-2}{2} + \frac{2}{e}. \tag{20}$$

Zur Lösung der uns gestellten Aufgabe müssen wir die Gleichung (20) bezüglich der Unbekannten e; $s_1, s_2; \ldots, n_1, n_2, \ldots$ in positiven ganzen Zahlen lösen.

Wir betrachten die verschiedenen möglichen Werte für s gesondert:

I. $s = 3$, d. h., in jeder Ecke des Vielflachs treffen drei Flächen zusammen. Diese Flächen können entweder zwei oder drei verschiedenen Typen angehören. Im ersten Fall können wir $s_1 = 2$, $s_2 = 1$ setzen, während im zweiten Fall $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ sein muß. Wir betrachten diese Fälle gesondert:

1. $s_1 = 2$, $s_2 = 1$.

Die Gleichung (20) nimmt in diesem Fall die Form

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{e} \tag{21}$$

an. Aus (21) folgt

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} > \frac{1}{2}.$$

Wegen $n_2 \geqq 3$ muß $\frac{1}{n_2} \leqq \frac{1}{3}$ und mithin $\frac{2}{n_1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, d. h. $n_1 < 12$ sein.

Ferner kann man durch geometrische Überlegungen leicht feststellen, daß die Zahl n_1 gerade sein muß. Es sei dazu $A_1A_2 \dots A_{n_1}$ irgendeine n_1-eckige Fläche (Abb. 53). Wegen $s_1 = 2$ muß an die Ecke A_1 noch eine zweite n_1-eckige Fläche anschließen, und zwar z. B. an die Kante $\overline{A_1A_2}$. Dann muß aber in der Ecke A_2 an die Kante $\overline{A_2A_3}$ eine n_2-eckige Fläche angrenzen usw. Setzen wir diese Überlegung in gleicher Weise fort, so müssen wir, wenn wir zur Ecke A_{n_1} gelangen, eine an die Kante $\overline{A_{n_1}A_1}$ anschließende n_2-eckige Fläche erhalten; das ist aber offenbar nur möglich, wenn die Anzahl der Seiten der Fläche $A_1A_2 \dots A_{n_1}$ eine gerade Zahl ist.

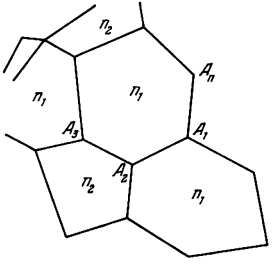


Abb. 53

Somit kann n_1 nur die Werte 4, 6, 8, 10 annehmen. Wir betrachten auch diese Fälle wieder gesondert:

a) $n_1 = 4$. In diesem Fall geht die Gleichung (21) in $e = 2n_2$ über, durch die für beliebiges positives ganzes $n_2 = n$ eindeutig der zugehörige Wert von e bestimmt ist. Aus der Gleichung (18) ergibt sich $f_1 = n$, $f_2 = 2$. Wir erhalten also ein Vielflach mit n viereckigen und zwei n-eckigen Flächen und mit $2n$ Ecken, in denen jeweils zwei viereckige und eine n-eckige Fläche zusammentreffen. Dieses Vielflach ist dem n-seitigen Prisma isomorph (Abb. 54a). Wir erhalten also eine unendliche Folge topologisch halbregelmäßiger Vielflache; aus dieser Folge ist lediglich das Vielflach anzuschließen, das dem Wert $n = 4$ entspricht, da es topologisch regelmäßig ist.

b) $n_1 = 6$. Die Gleichung (21) nimmt in diesem Fall die Gestalt $\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{e}$ an, aus der sich $e = \frac{12n_2}{6 - n_2}$ ergibt. Foglich ist in diesem Fall notwendigerweise $n_2 < 6$.

Für $n_2 = 3$ ist $e = 12$. Wir kommen auf ein Vielflach mit 12 Ecken, in deren jeder zwei sechseckige und eine dreieckige Fläche zusammentreffen (Abb. 54b).

Dem Wert $n_2 = 4$ entspricht das in Abb. 54c und dem Wert $n_2 = 5$ das in Abb. 54d dargestellte Vielflach.

c) $n_1 = 8$. Die Gleichung (21) ergibt $\frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{e}$, woraus $e = \frac{8n_2}{4 - n_2}$ und damit $n_2 < 4$ folgt, d. h., es ist $n_2 = 3$, $e = 24$. Das entsprechende Vielflach ist in Abb. 54e dargestellt.

d) $n_1 = 10$. Es gilt $\frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{e}$, woraus $e = \frac{20n_2}{10 - 3n_2}$ folgt, d. h., es ist wieder $n_2 = 3$. Das entsprechende Vielflach ist in Abb. 54f dargestellt.

2. $s_1 = s_2 = s_3 = 1$. Mit den gleichen geometrischen Überlegungen, die wir im Fall 1 angestellt haben, ergibt sich, daß jetzt alle Zahlen n_1, n_2, n_3 gerade sein müssen.

Die Gleichung (20) nimmt in unserem Fall die Gestalt

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{e} \tag{22}$$

an.

Da wegen dieser Beziehung $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{2}$ ist, muß wenigstens einer der Summanden auf der linken Seite, z. B. der erste, größer als $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$ sein. Folglich ist $n_1 < 6$, d. h. $n_1 = 4$. Damit kann die Gleichung (22) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{e}. \tag{23}$$

Wie oben folgt hieraus, daß z. B. $\frac{1}{n_2} > \frac{1}{8}$, d. h. $n_2 < 8$, sein muß. Also ist $n_2 = 6$ (da $n_2 \neq n_1$ sein muß). Damit reduziert sich die Gleichung (23) auf die einfache Gestalt

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{e},$$

aus der $n_3 < 12$ folgt. Somit gibt es nur zwei Möglichkeiten: $n_3 = 8$ (Abb. 54g) und $n_3 = 10$ (Abb. 54h).

Der Fall $s = 3$ ist damit vollständig erledigt.

II. $s = 4$. Dieser Fall muß ebenfalls untergliedert werden.

1. In jeder Ecke treffen drei Flächen eines ersten Typs und eine Fläche eines anderen Typs zusammen: $s_1 = 3$, $s_2 = 1$.

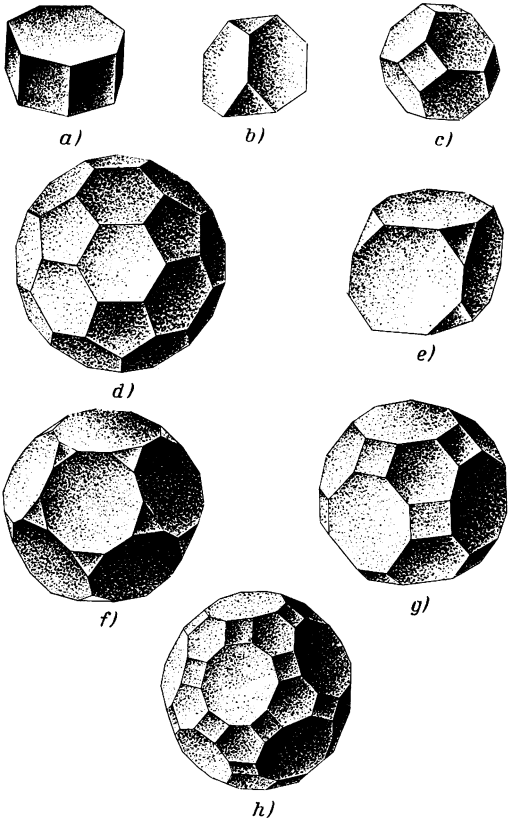


Abb. 54

Die Gleichung (20) nimmt in diesem Fall die Form

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} = 1 + \frac{2}{e} \tag{24}$$

an, und wegen $n_2 \geqq 3$ folgt aus ihr $n_1 \leqq 4$.

Für $n_1 = 3$ reduziert sich (24) auf die Gleichung $\frac{1}{n_2} = \frac{2}{e}$, die unendlich viele ganze Lösungen $n_2 = n, s = 2n$ besitzt. Wir erhalten also noch eine zweite unendliche Folge topologisch halbregelmäßiger Vielflache, die sogenannten *Antiprismen* (oder *Prismatoide*; Abb. 54i). Für $n = 3$ ist das Antiprisma ein topologisch regelmäßiges Vielflach, das Oktaeder.

Der Wert $n_1 = 4$ liefert nur den einen Wert $n_2 = 3$; dieser Lösung der Gleichung (24) entsprechen zwei nicht isomorphe topologisch halbregelmäßige Vielflache (Abb. 54j, k) mit isomorphen Sternen der Ecken.

2. $s_1 = s_2 = 2$. In diesem Fall nimmt die Gleichung (20) die Form

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} = 1 + \frac{2}{e}$$

an, deren einzige positive ganzzahlige Lösungen $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ (Abb. 54l) und $n_1 = 3$, $n_2 = 5$ (Abb. 54m) sind.

3. $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 1$. In diesem Fall erschließen wir mittels geometrischer Überlegungen, daß die Zahl n_1 gerade sein muß, und aus der Gleichung (20), die jetzt die Form

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{e}$$

annimmt, erhalten wir als einzige positive ganzzahlige Lösung $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ (Abb. 54n).

4. $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$. In diesem Fall nimmt die Gleichung (20) die Form

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 + \frac{2}{e} \tag{25}$$

an. Wählt man $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$, so wird $n_1 \geqq 3$, $n_2 \geqq 4$, $n_3 \geqq 5$, $n_4 \geqq 6$ und

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1,$$

was der Gleichung (25) widerspricht. Es zeigt sich also, daß dieser Fall nicht eintreten kann.

III. $s = 5$. Hier ist, wie man sich leicht überzeugt, der einzig mögliche Fall $s_1 = 4$, $s_2 = 1$. In diesem Fall lautet die Gleichung (20)

$$\frac{4}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{e}.$$

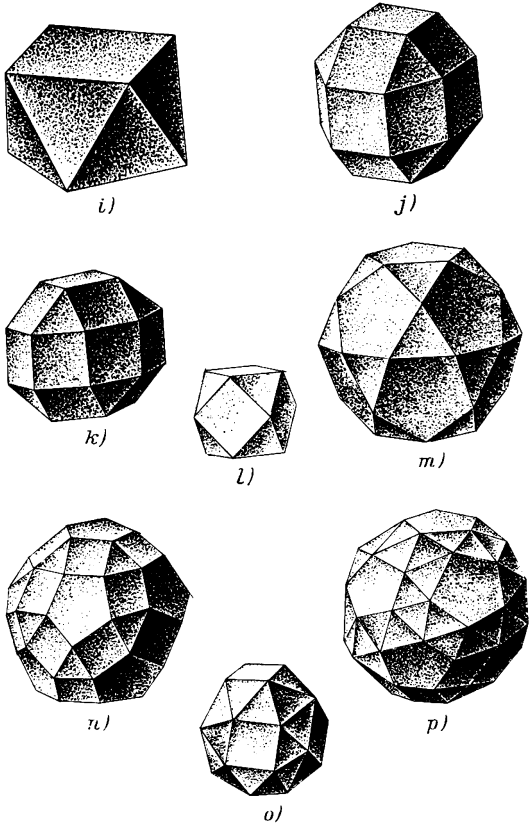


Abb. 54 (Fortsetzung)

Diese Gleichung hat als positive ganzzahlige Lösungen $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ (Abbildung 54o) und $n_1 = 3$, $n_2 = 5$ (Abb. 54p).

Damit haben wir alle topologischen Typen von topologisch eckengleichen halbregelmäßigen Vielflache gefunden, und zwar insgesamt 14 Typen, wenn wir die beiden unendlichen Folgen (und die 5 Typen topologisch regelmäßiger Vielflache) nicht mitzählen.

Ein Vielflach heißt (*metrisch*) *eckengleich halbregelmäßig* oder *Archimedisches Vielflach* (auch *Archimedischer Körper*), wenn alle seine Flächen regelmäßige Vielecke und alle seine vielkantigen Ecken einander gleich (kongruent) sind.

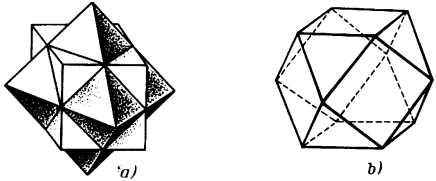


Abb. 55

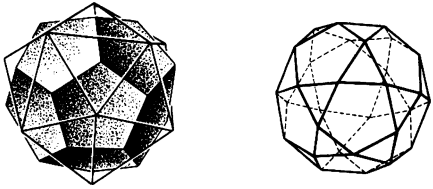


Abb. 56

Wie in 4.2. kann man zeigen, daß jeder der von uns aufgefundenen Typen topologisch eckengleicher halbregelmäßiger Vielflache durch ein Archimedisches Vielflach realisiert werden kann, und zwar bis auf Ähnlichkeit auch nur durch ein einziges.

Diese Archimedischen Vielflache wurden in Abb. 54 bereits als Vertreter der entsprechenden topologischen Typen dargestellt.

Es sei bemerkt, daß zwei der Archimedischen Vielflache (Abb. 54l und 54m) als Schnitte reziproker regelmäßiger Vielflache erzeugt werden können (vgl. auch Abb. 55 und 56); diese Archimedischen Vielflache besitzen zwei Arten von Flächen, und zwar dieselben, wie die ursprünglichen regelmäßigen Vielflache.

Die Charakteristiken der Archimedischen Vielflache (bis auf die regelmäßigen) mit Angabe ihrer Benennung sind in Tabelle 3 aufgeführt.

Tabelle 3

Nr.	s	s_1	s_2	s_3	n_1	n_2	n_3	f_1	f_2	f_3	e	f	k	Abb.	
1	3	2	1	—	4	n	—	n	2	—	$2n$	$n+2$	$3n$	54a	regelmäßiges n-seitiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen ($n = 3, 5, 6, 7, \ldots$)
2	3	2	1	—	6	3	—	4	4	—	12	8	18	54b	abgestumpftes Tetraeder
3	3	2	1	—	6	4	—	8	6	—	24	14	36	54c	abgestumpftes Oktaeder
4	3	2	1	—	6	5	—	20	12	—	60	32	90	54d	abgestumpftes Ikosaeder
5	3	2	1	—	8	3	—	6	8	—	24	14	36	54e	abgestumpfter Kubus
6	3	2	1	—	10	3	—	12	20	—	60	32	90	54f	abgestumpftes Dodekaeder
7	3	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	26	72	54g	abgestumpftes Kuboktaeder
8	3	1	1	1	4	6	10	30	20	12	120	62	180	54h	abgestumpftes Ikosodekaeder
9	4	3	1	—	3	n	—	$2n$	2	—	$2n$	$2n+2$	$4n$	54i	n-eckiges Antiprisma ($n = 4, 5, 6, \ldots$)
10	4	3	1	—	4	3	—	18	8	—	24	26	48	54j	Rhombokubooktaeder
11	4	3	1	—	4	3	—	18	8	—	24	26	48	54k	
12	4	2	2	—	3	4	—	8	6	—	12	14	24	54l	Kubooktaeder
13	4	2	2	—	3	5	—	20	12	—	30	32	60	54m	Ikosododekaeder
14	4	2	1	1	4	3	5	30	20	12	60	62	120	54n	Rhomboikosododekaeder
15	5	4	1	—	3	4	—	32	6	—	24	38	60	54o	abgeflachter Kubus
16	5	4	1	—	3	5	—	80	12	—	60	92	150	54p	abgeflachtes Dodekaeder

4.4. Flächengleiche halbregelmäßige Vielflache. Der Begriff des topologisch flächengleichen halbregelmäßigen Vielflachs ist zum Begriff des topologisch eckengleichen halbregelmäßigen Vielflachs dual: Ein Vielflach heißt *topologisch flächengleich halbregelmäßig*, wenn die Sterne aller seiner Flächen einander isomorph sind.

Man kann die topologisch flächengleichen halbregelmäßigen Vielflache auf die gleiche Weise erfassen wie in 4.3. die topologisch eckengleichen halbregelmäßigen Vielflache. Das Dualitätsprinzip (vgl. 2.4.) gestattet es jedoch, die vorangehenden Resultate unmittelbar zu verwenden, ohne die dort angestellten Überlegungen wiederholen zu müssen. Jedem topologisch eckengleichen halbregelmäßigen Vielflach entspricht ein zu ihm duales topologisch flächengleiches halbregelmäßiges Vielflach und umgekehrt. Folglich gibt es vierzehn

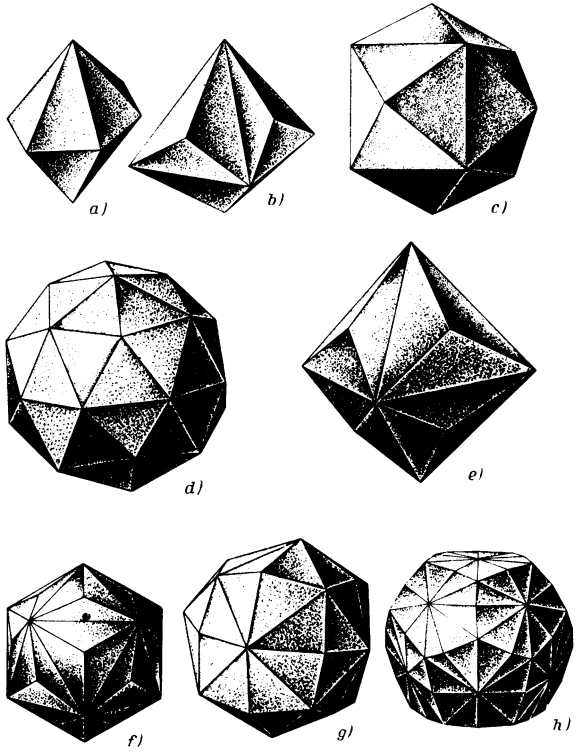


Abb. 57

verschiedene (einander nicht isomorphe) topologisch flächengleiche halbregelmäßige Vielflache und darüber hinaus noch zwei unendliche Folgen derartiger Vielflache (die topologisch regelmäßigen nicht mitgerechnet.) Die Charakteristiken dieser Typen von Vielflachen kann man durch Dualitätsbetrachtun-

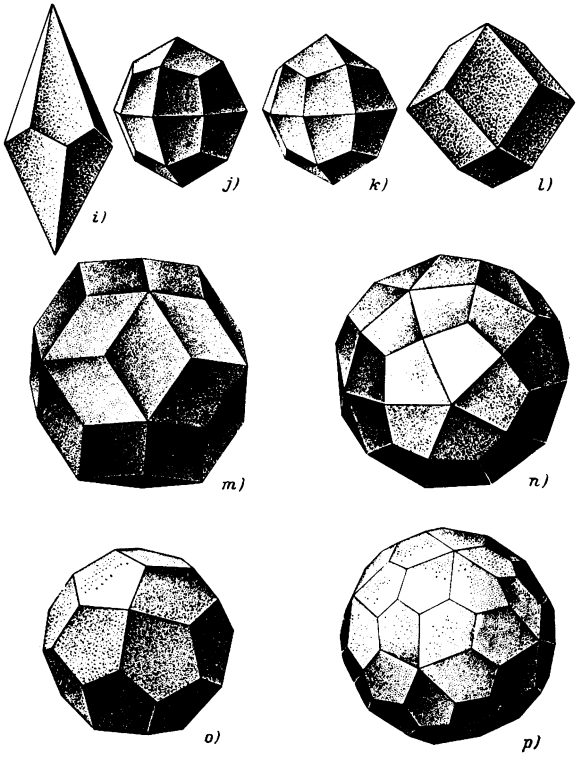


Abb. 57 (Fortsetzung)

gen leicht aus den in Tabelle 3 für die Archimedischen Vielflache angeführten Charakteristiken erhalten.

Ein Vielflach heißt (*metrisch*) *flächengleich halbregelmäßig*, wenn alle seine Flächen einander gleich (kongruent) und alle seine vielkantigen Ecken regel-

mäßig sind. So wie früher existieren in jeder der Klassen topologisch flächengleicher halbregelmäßiger Vielflache metrisch flächengleiche halbregelmäßige Vielflache, aber im Unterschied zu den Archimedischen Vielflachen sind sie im allgemeinen einander nicht ähnlich, da die Form ihrer Flächen nicht durch den topologischen Typ und die Forderung der topologischen Halbregelmäßigkeit bestimmt wird.

Die verschiedenen Typen flächengleicher halbregelmäßiger Vielflache sind in Abb. 57a bis 57p in der gleichen Anordnung dargestellt wie in Abb. 54a bis 54p die ihnen dualen Archimedischen Vielflache.

4.5. Regelmäßige Vielecke und Vielflache mit Selbstüberschneidungen. Verzichtet man bei den regelmäßigen Vielecken auf die Forderung, daß sie einfach sein sollen, so erhält man neben den bereits früher betrachteten regelmäßigen Vielecken die sogenannten *regelmäßigen Vielecke mit Selbstüberschneidungen* oder *regelmäßigen Sternvielecke*. Ein Beispiel eines solchen Vielecks — das regelmäßige Sternfünfeck — ist in Abb. 58 dargestellt.

Es läßt sich leicht zeigen (wir wollen uns damit nicht befassen), daß die Seiten eines regelmäßigen Sternvielecks V immer Diagonalen eines einfachen regel-

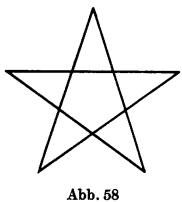


Abb. 58

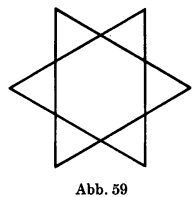
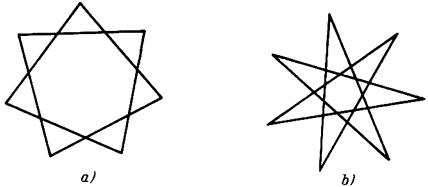


Abb. 59

mäßigen Vielecks V_1 sind, welche die Endpunkte von Streckenzügen verbinden, die aus derselben Anzahl von Seiten von V_1 bestehen. Zur Konstruktion eines regelmäßigen Stern-n-Ecks kann man daher von einem einfachen regelmäßigen n-Eck ausgehen und in diesem alle Diagonalen ziehen, die die Endpunkte der aus je k seiner Seiten bestehenden Streckenzüge miteinander verbinden, wobei $1 < k < \frac{n}{2}$ ist. Ist die Zahl k zu n teilerfremd, dann erhält man auf diese Weise stets ein regelmäßiges Stern-n-Eck; wenn k aber nicht zu n teilerfremd ist, dann zerfällt das Vieleck in mehrere geschlossene Streckenzüge, man erhält ein sogenanntes *zerfallendes Vieleck* (vgl. z. B. Abb. 59, in der der Fall $n = 6$, $k = 2$ dargestellt ist, wobei sich zwei Dreiecke ergeben). Also existieren für jedes n so viele verschiedene (einander nicht ähnliche) regelmäßige Stern-n-Ecke, wie es ganze Zahlen k mit $1 < k < \frac{n}{2}$ gibt, die zu n teilerfremd

sind[1]): Es gibt ein regelmäßiges Sternfünfeck (Abb. 58), zwei regelmäßige Sternsiebenecke (Abb. 60a, b), aber z. B. kein regelmäßiges Sterndreieck, Sternviereck und Sternsechseck.

Man kann die regelmäßigen Sternvielecke auch anders erhalten: Die Geraden, auf denen die Seiten eines beliebigen Stern-n-Ecks V liegen, zerlegen die Ebene in eine gewisse Anzahl von Gebieten, deren eines, der sogenannte *Kern* des gegebenen n-Ecks V, ein einfaches regelmäßiges n-Eck V_0 darstellt.



a) b)

Abb. 60

Man kann daher jedes regelmäßige Stern-n-Eck auch aus einem einfachen regelmäßigen n-Eck V_0 durch Verlängerung jeder Seite von V_0 in beiden Richtungen bis zum Schnitt mit den verlängerten Seiten, die von ihr durch ein und dieselbe Anzahl von $k-1$ Seiten $\left(1 < k < \frac{n}{2}\right)$ getrennt sind, erzeugen; dabei erhalten wir wie oben ein zerfallendes Vieleck, wenn k und n nicht teilerfremd sind.

Wir wenden uns nun den Vielflachen zu. Wenn wir in der Definition des regelmäßigen Vielflachs nicht fordern, daß es einfach sein soll, erhalten wir neben den in 4.2. bereits betrachteten Platonischen Vielflachen die *regelmäßigen Sternvielflache*, die auch Poinsotsche *Vielflache* (Poinsotsche *Körper*) genannt werden. Wir geben in groben Zügen an, wie man alle diese Vielflache auffinden kann.[2])

Die Ebenen der Flächen eines beliebigen regelmäßigen Sternvielflachs V zerlegen den Raum in eine gewisse Anzahl von Gebieten, von denen eines, das man den *Kern* des Vielflachs V nennt, ein einfaches regelmäßiges Vielflach V_0 ist. Das Vielflach V_0 hat genauso viele Flächen wie V; deshalb gibt man dem regelmäßigen Sternvielflach den gleichen Namen wie seinem Kern (Tetraeder, Dodekaeder u. ä.).

[1]) Die Anzahl der verschiedenen regelmäßigen n-Ecke kann also in der Gestalt $\frac{1}{2}\varphi(n)$ geschrieben werden, wobei $\varphi(n)$ die in der Zahlentheorie gebräuchliche Eulersche Funktion bezeichnet (vgl. den Artikel „Die Elemente der Zahlentheorie" in Band I der EdEM, S. 248–251).

[2]) Eine ausführliche Behandlung dieser Frage findet der Leser in dem am Schluß dieses Artikels angegebenen Buch von D. O. Schkljarski, N. N. Tschenzow und I. M. Jaglom [5].

Es sind zwei Fälle möglich: 1. Im Vielflach V_0 sind die gleichen Flächen miteinander benachbart wie in V; in diesem Fall entspricht jeder Fläche α des Vielflachs V (die unbedingt sternförmig sein muß) eine Fläche α_0 des Vielflachs V_0, die zugleich der Kern der Fläche α ist; in diesem Fall erhält man das Vielflach V aus seinem Kern V_0 durch Verlängern dessen Kanten. 2. Die benachbarten Flächen des Vielflachs V sind in V_0 nicht benachbart; dann erhält man das Vielflach V aus V_0 durch Verlängern seiner Flächen.

Wir wollen untersuchen, welche Sternvielflache auf die angegebene Weise aus den uns bekannten einfachen regelmäßigen Vielflachen erzeugt werden können.

1. *Tetraeder.* Alle Flächen des Tetraeders sind miteinander benachbart, mithin kann ein Verlängern der Flächen des Tetraeders nicht zum Ziel führen. Da es kein Sterndreieck gibt, kann man bezüglich des Verlängerns der Kanten des Tetraeders das gleiche sagen. Also existieren keine Sterntetraeder.

2. *Oktaeder.* Da die Flächen eines regelmäßigen Oktaeders Dreiecke sind, führt ein Verlängern der Kanten des Oktaeders nicht zum Ziel. Ein Verlängern

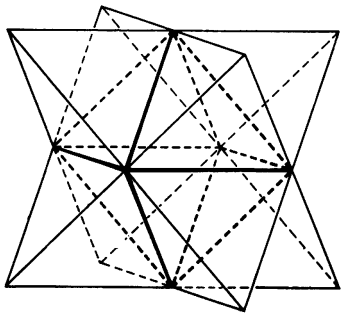


Abb. 61

der Flächen eines regelmäßigen Oktaeders (jede Fläche wird bis zum Schnitt mit den drei nicht mit ihr benachbarten und nicht zu ihr parallelen Flächen verlängert; vgl. Abb. 61) ergibt ein zerfallendes Vielflach, das aus zwei regelmäßigen Tetraedern besteht. Also gibt es auch keine Sternoktaeder.

3. *Hexaeder.* Alle nichtbenachbarten Kanten und Flächen eines regelmäßigen Hexaeders (Würfels) sind einander parallel. Mithin existieren auch keine Sternhexaeder.

4. *Dodekaeder.* Das Verlängern der Kanten eines regelmäßigen Dodekaeders, d. h. das Ersetzen jeder seiner Flächen α durch ein Sternfünfeck mit dem Kern α (Abb. 62a), führt zu einem Vielflach, das als *kleines Sterndodekaeder*

bezeichnet wird (Abb. 63a); es hat 12 Sternfünfecke als Flächen, 30 Kanten und 12 Ecken (konvexe fünfkantige Ecken).

Beim Verlängern der Flächen eines regelmäßigen Dodekaeders (jede Fläche wird bis zum Schnitt mit den fünf nicht mit ihr benachbarten und nicht zu

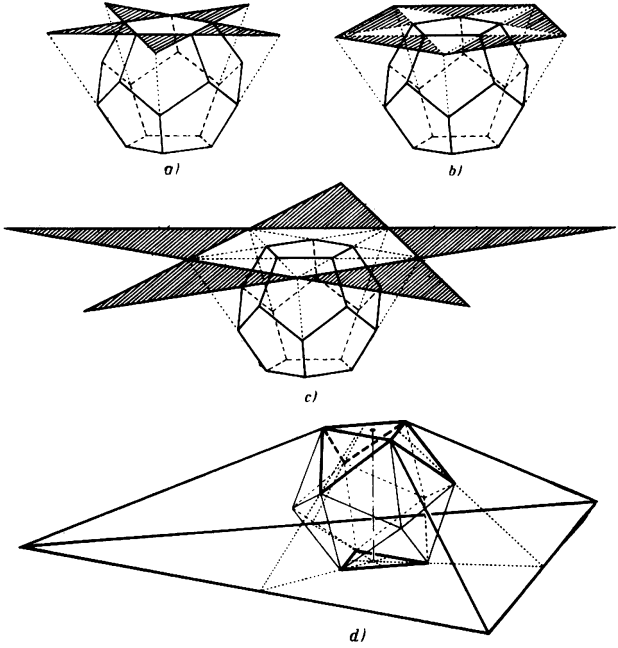


Abb. 62

ihr parallelen Flächen verlängert) gibt es zwei Möglichkeiten. Wenn wir als Flächen des neuen Vielflachs die dabei entstehenden einfachen Fünfecke (Abb. 62b) ansehen, gelangen wir zum *großen Dodekaeder* (Abb. 63b); es hat 12 konvexe fünfeckige Flächen, 30 Kanten und 12 Ecken (sternförmige fünfkantige Ecken). Sehen wir dagegen als Flächen die entsprechenden Sternfünfecke (Abb. 62c) an, so erhalten wir das *große Sterndodekaeder* (Abb. 63c); es

hat 12 Sternfünfecke als Flächen, 30 Kanten und 20 Ecken (dreikantige Ecken).

Wir haben also drei Arten von regelmäßigen Sterndodekaedern gefunden.

5. *Ikosaeder.* Da die Flächen eines regelmäßigen Ikosaeders Dreiecke sind, ergibt sich beim Verlängern der Kanten des Ikosaeders kein neues Vielflach. Beim Verlängern der Flächen eines regelmäßigen Ikosaeders gibt es nur einen Fall, der auf ein nicht zerfallendes Vielflach führt, nämlich den, daß jede Fläche bis zum Schnitt mit den drei Flächen verlängert wird, die mit der zu ihr

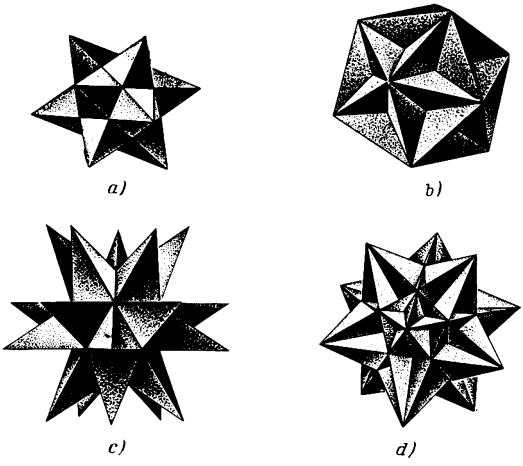


Abb. 63

parallelen Fläche benachbart sind (Abb. 62d). Das dabei entstehende Vielflach heißt *großes Ikosaeder* (Abb. 63d); es hat 20 dreieckige Flächen, 30 Kanten und 12 Ecken (sternförmige fünfkantige Ecken).

Somit gibt es insgesamt vier (bis auf Ähnlichkeit) verschiedene regelmäßige Sternvielflache. Man überzeugt sich leicht, daß diese Vielflache paarweise zueinander dual sind: Das kleine Sterndodekaeder ist dem großen Dodekaeder dual und das große Sterndodekaeder dem großen Ikosaeder.

Analog den Archimedischen Vielflachen (vgl. 4.3.) kann man auch eckengleiche halbregelmäßige Vielflache mit Selbstüberschneidungen untersuchen. Die einfachsten Beispiele solcher Vielflache sind die in Abb. 64 und 65 dargestellten Vielflache, die sich als Schnitt reziproker regelmäßiger Sternvielflache

ergeben. Das erste dieser Vielflache – das *Dodekaedrododekaeder* – hat 24 fünfeckige Flächen: 12 einfache (wie das große Dodekaeder) und 12 sternförmige (wie das kleine Sterndodekaeder). Das zweite dieser Vielflache – das *Dodekaedroikosaeder* – hat 32 Flächen: 20 Dreiecke (wie das große Dodekaeder)

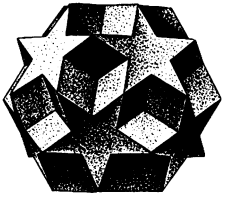


Abb. 64

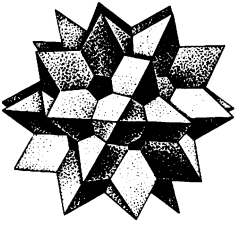


Abb. 65

und 12 Sternfünfecke (wie das große Sterndodekaeder). Gegenwärtig sind insgesamt 51 eckengleiche halbregelmäßige Sternvielflache bekannt; es ist bisher unbekannt. ob damit alle derartigen Vielflache erfaßt sind.

Literatur

[1] Alexandrow, A. D., Konvexe Polyeder, Berlin 1958 (Übersetzung aus dem Russischen).

[2] Люстерник, Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники (Ljusternik, L. A., Konvexe Figuren und Vielflache), Moskau 1956.

[3] Перепелкин, Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 2 (Perepelkin, D. I., Lehrgang der Elementargeometrie, Teil 2), Moskau-Leningrad 1949.

[4] Hadamard, J., Leçons de géométrie élémentaire II, 7. Aufl., Paris 1937.

[5] Шклярский, Д. О., Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3 (Schkljarski, D. O., Tschenzow, N. N., und I. M. Jaglom, Ausgewählte Aufgaben und Sätze der Elementarmathematik, Teil 3), Moskau 1954.

[6] Minkowski, H., Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1897 (abgedruckt in: H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen. Bd. II, Leipzig 1921).
Dehn, M., Über die Starrheit konvexer Polyeder, Math. Ann. 77 (1916), 466–473.

[7] Cauchy, A., Recherches sur les polyèdres, J. Ecole Polytechn. 9 (1813), 68–86.
Cayley, A., On Poinsot's four new regular solids, Philos. Mag. 17 (1859), 123–128.

[8] Аткинузе, В. Г., О числе полуправильных многогранников, сб. „Математическое просвещение", вып. 1 (Aschkinuse, W. G., Über die Anzahl der halbregelmäßigen Vielflache, aus „Mathematische Bildung", Heft 1, Moskau 1957, S. 107–118.
Дорфман, А. Г., Ромбокубооктаэдры и взаимные им многогранники (Dorfman, A. G., Rhombokubooktaeder und die ihnen reziproken Vielflache), ebenda, Heft 6, Moskau 1961, S. 207–208.

[9] Coxeter, H. S. M., Regular polytops, London 1948.

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

Brückner, M., Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900.

Roman, T., Reguläre und halbreguläre Polyeder, Berlin 1968.

Steinitz, E., und H. Rademacher, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934.

I. M. JAGLOM

GEOMETRIE DER KREISE

Einleitung

Die Lehre vom Kreis nimmt in der Elementargeometrie einen bedeutenden Platz ein. Seit EUKLID wird die elementare Planimetrie als die Wissenschaft angesehen, die die Geraden, Kreise und einige einfachste, von Geradenstücken und Kreisbögen begrenzte Figuren (wie z. B. Dreiecke und Kreissektoren) untersucht. Somit ist der Kreis die einzige Kurve, die eingehend in der Elementargeometrie betrachtet wird, was die große Aufmerksamkeit rechtfertigt, die man der Untersuchung der Eigenschaften dieser Kurve widmet. Eine Vielzahl der verschiedensten Eigenschaften des Kreises war schon den altgriechischen Mathematikern bekannt. Besondere Verdienste bei der Untersuchung dieser Eigenschaften erwarben sich jedoch die Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Im 19. Jahrhundert wurde ein überaus reichhaltiges, aus vielen Sätzen speziellen Charakters bestehendes Faktenmaterial zusammengetragen, und, was bedeutend wichtiger ist, es wurden einige grundlegende allgemeine Prinzipien der sogenannten „Geometrie der Kreise" aufgezeigt. Das Ziel dieses Artikels ist es, diese prinzipiellen Grundlagen der Theorie der Kreise darzustellen, die in erster Linie auf den deutschen Mathematiker AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868) (Gegenstand des Teiles A des vorliegenden Artikels), den französischen Mathematiker EDMUND LAGUERRE (1834–1886) (Gegenstand des Teiles B) und den norwegischen Mathematiker SOPHUS LIE (1842–1898) (Gegenstand des Teiles C) zurückgehen. Was die verschiedenartigen speziellen Eigenschaften der Kreise betrifft, so werden wir auf sie in unserer notwendigerweise recht gedrängten Darstellung fast nicht eingehen können.

Es sei bemerkt, daß fast der gesamte Inhalt des vorliegenden Kapitels ohne Schwierigkeiten auch auf die Geometrie des Raumes übertragen werden kann; die Beschränkung des Umfangs läßt uns von einer Darstellung der Geometrie der Kugeln Abstand nehmen, die übrigens fast keine prinzipiell neuen Gesichtpunkte im Vergleich zur Geometrie der Kreise enthält.

A. DER KREIS ALS PUNKTMENGE

§ 1. Verallgemeinerung des Kreisbegriffs

1.1. Die orientierte Strecken- und Winkelmessung. Im vorliegenden Artikel spielt die *orientierte Strecken- und Winkelmessung* eine besondere Rolle. Gibt man auf einer Geraden eine bestimmte Richtung vor (man deutet dies gewöhn-

lich durch einen Pfeil an), so kann man der Länge jeder Strecke dieser Geraden noch ein bestimmtes Vorzeichen zuordnen. So soll z. B. die Länge der Strecke $\overline{AB}$ in Abb. 1a als positiv und die Länge der Strecke $\overline{CD}$ als negativ angesehen werden. Im folgenden bezeichnen wir die auf diese Weise erhaltene orientierte Länge einer Strecke $\overline{AB}$ mit (AB), während wir die gewöhnliche (nicht orientierte) Länge wie üblich mit $|AB|$ bezeichnen. Somit ist also für jede Strecke $\overline{AB}$ stets $|AB| = |BA|$, während $(AB) = -(BA)$ wird. Ferner gilt stets $|AB| = |(AB)|$, wobei auf der rechten Seite der gewöhnliche absolute Betrag von Zahlen steht. Man beachte, daß der Wert des Produktes und des Quotienten zweier orientierter Streckenlängen einer Geraden unabhängig davon ist, welche Richtung auf der betrachteten Geraden ausgezeichnet wurde: Sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Strecken einer Geraden, so sind das Produkt $(AB)\,(CD)$ und der Quotient $\frac{(AB)}{(CD)}$ *unabhängig von der Wahl der Richtung auf der Geraden* positiv, wenn die Richtungen der „gerichteten Strecken" (Vektoren) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ (von A nach B und von C nach D) übereinstimmen, und negativ, wenn diese Richtungen zueinander entgegengesetzt sind (wie z. B. in Abb. 1a).

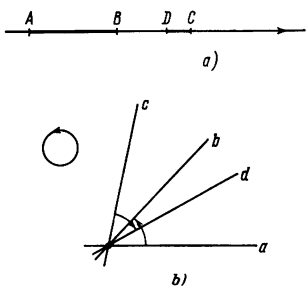


Abb. 1

Entsprechend kann man, wenn in der Ebene ein Drehsinn ausgezeichnet ist (der z. B. durch einen auf einem beliebigen Kreis angebrachten Pfeil gekennzeichnet wird), der Größe des Winkels zwischen (nicht gerichteten!) Geraden ebenfalls ein Vorzeichen zuordnen: Die Größe des Winkels zwischen a und b wird als positiv angesehen, wenn der Drehsinn von der Geraden a zur Geraden b mit dem ausgezeichneten Drehsinn übereinstimmt, und als negativ im entgegengesetzten Fall (so ist in Abb. 1b die Größe des Winkels zwischen den Geraden a und b positiv und die des Winkels zwischen c und d negativ). Im folgenden bezeichnen wir die gewöhnliche Größe eines Winkels mit dem Zeichen $\angle$ und die orientierte Größe mit $\measuredangle$. Demnach ist also $\angle\,(a, b) = \angle\,(b, c)$ und $\measuredangle\,(a, b) = -\measuredangle\,(b, a)$. Ebenso wie die gewöhnliche Größe eines Winkels ist auch die orientierte Größe eines Winkels zwischen zwei Geraden nicht eindeutig bestimmt; so kann für die in Abb. 2 dargestellten Geraden $\measuredangle\,(a, b) = \angle\,AOB$ oder $\measuredangle\,(a, b) = -\angle\,AOC$ sein. Man sieht jedoch leicht ein, daß die orientierte Größe des Winkels zwischen zwei Geraden *bis auf ein beliebiges Vielfaches der Zahl* π bestimmt ist; so ist in den Bezeichnungen der Abb. 2 $\angle\,AOC = \angle\,AOB - \pi$, und für den mit einem Pfeil gekennzeich-

neten überstumpfen Winkel AOC gilt $\angle\, AOC = \angle\, AOB + \pi$. Meistens versteht man unter dem orientierten Winkel zwischen zwei nicht aufeinander senkrecht stehenden Geraden a und b den dem Betrag nach kleineren Winkel zwischen diesen Geraden, so daß für solche Geraden $-\frac{\pi}{2} < \measuredangle\,(a, b) < \frac{\pi}{2}$ gilt, während für aufeinander senkrecht stehende Geraden $\measuredangle\,(a, b) = +\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird. Im folgenden soll das Symbol $\measuredangle\,(a, b)$ stets diesen Sinn haben; insbesondere soll also eine Gleichung $\measuredangle\,(a, b) = \measuredangle\,(c, d)$ bedeuten, daß die dem Betrag nach kleineren der orientierten Winkel zwischen a und b und zwischen c und d in Größe und Drehsinn übereinstimmen. Es sei bemerkt, daß der Wert eines Produktes oder eines Quotienten aus zwei orientierten Winkelgrößen ebenfalls unabhängig davon ist, welcher Drehsinn in der Ebene ausgezeichnet wurde: Zum Beispiel ist der Quotient $\measuredangle\,(a, b) : \measuredangle\,(c, d)$ positiv, wenn die Richtungen der Drehungen um den dem Betrag nach kleineren Winkel, die a in b und c in d überführen, übereinstimmen, und negativ im entgegengesetzten Fall. Insbesondere brauchen wir keinen bestimmten Drehsinn im voraus auszuzeichnen, wenn wir von der Gleichheit oder Ungleichheit der Größe orientierter Winkel sprechen, weil die Behauptung der Gleichheit zweier Größen besagt, daß ihr Quotient gleich Eins ist.

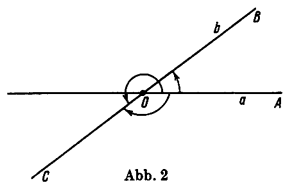


Abb. 2

1.2. Verschiedene Definitionen des Kreises. Das Berühren von Kreisen. Den Hauptgegenstand der Untersuchungen dieses Artikels bilden Kreise. Ein *Kreis* kann definiert werden als Menge aller Punkte der Ebene, die von einem gegebenen Punkt O einen gegebenen Abstand r haben; der Punkt O heißt der *Mittelpunkt* oder das *Zentrum* des Kreises und die Zahl r sein *Radius*. Im Grenzfall kann man auch zulassen, daß der Abstand r – der Radius des Kreises – gleich Null ist; dann besteht der „Kreis" nur aus dem einen Punkt O. Im folgenden ist es für uns oft von Vorteil, auch die Punkte als Kreise aufzufassen, indem wir sie als „Kreise vom Radius Null" ansehen; in diesem Fall nennen wir die gewöhnlichen Kreise „eigentliche Kreise". Die Punkte („Kreise vom Radius Null" oder „Nullkreise") und die „eigentlichen Kreise" fassen wir unter der Bezeichnung „Kreise mit endlichem Radius" zusammen.

Die oben angegebene Definition des Kreises ist natürlich nicht die einzig mögliche. Sehr oft erweist sich z. B. auch die folgende Definition des Kreises als nützlich: Ein *Kreis* ist die Menge aller der Punkte M, von denen aus eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ unter einem konstanten (orientierten!) Winkel erscheint,

oder – kürzer – der Punkte M, für die $\sphericalangle (MA, MB) = \alpha$ gilt (Abb. 3a).[1]) Bei vorgegebener Strecke $\overline{AB}$ hängt der Radius des betrachteten Kreises natürlich von der Größe des Winkels ab (aus der Trigonometrie ist bekannt, daß er gleich dem Betrag des Quotienten $\frac{|AB|}{2 \sin \alpha}$ ist); dieser Radius ist um so größer, je kleiner (dem Betrag nach) der Winkel α ist. Setzen wir $\alpha = 0$, so erhalten wir die Gerade AB (Abb. 3b); neben den eigentlichen Kreisen fallen

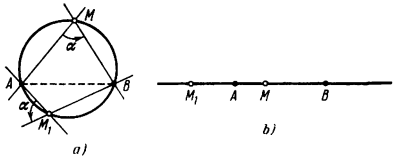


Abb. 3

also auch sämtliche Geraden unter unsere Definition, die man deshalb ebenfalls als Grenzfall des Kreises auffassen kann. Im folgenden wird es häufig von Vorteil sein, die Geraden mit zu den Kreisen zu zählen. Selbstverständlich verlieren für solche „Kreise" die Begriffe Mittelpunkt und Radius ihren Sinn. Wir wollen die Geraden als „Kreise mit unendlichem Radius" und die Gesamtheit der eigentlichen Kreise und der Geraden zusammen als „Kreise mit nicht verschwindendem Radius" bezeichnen; unter der Bezeichnung „Kreis" wollen wir schließlich sowohl die eigentlichen Kreise als auch die Punkte („Kreise vom Radius Null") als auch die Geraden („Kreise mit unendlichem Radius") zusammenfassen. Die Zweckmäßigkeit dieser verhältnismäßig umfangreichen Vereinbarung erweist sich in der weiteren Darlegung.

Der Begriff *„berühren"* hat für zwei eigentliche Kreise und für einen eigentlichen Kreis und eine Gerade eine anschaulich völlig klare Bedeutung (Abb. 4a, b). Im folgenden wollen wir sagen, daß sich ein „Kreis vom Radius Null" S_0 und ein „Kreis mit nichtverschwindendem Radius" S_1 berühren, wenn der Punkt S_0 auf dem Kreis oder der Geraden S_1 liegt (Abb. 4c, d); schließlich sagen wir, daß sich zwei „Kreise mit unendlichem Radius" S_0 und S_1 berühren, wenn die Geraden S_0 und S_1 einander parallel sind (Abb. 4e). Ferner verstehen wir unter dem Winkel zwischen zwei Kreisen S_0 und S_1 mit nichtverschwindendem Radius, die sich in einem Punkt M schneiden, den Winkel zwischen den Tangenten an S_0 und S_1 in diesem Punkt (Abb. 5a, b; unter der „Tangente an eine Gerade" versteht man sinngemäß die Gerade selbst). Dabei kann man

[1]) Diese Definition verliert für diejenigen Punkte A und B, die mit zu dem betrachteten Kreis gehören, offensichtlich ihren Sinn. Genau genommen besteht also der betrachtete Kreis aus allen von A und B verschiedenen Punkten M, die der genannten Bedingung genügen, sowie den Punkten A und B. – *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

den betrachteten Winkel als nichtorientiert oder als orientiert ansehen; wir bemerken nur, daß die orientierten Winkel zwischen S_0 und S_1 in den evtl. vorhandenen beiden Schnittpunkten M und N verschiedenes Vorzeichen

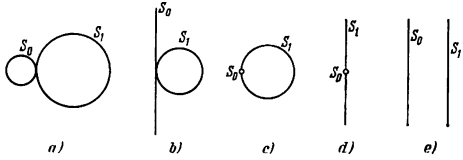


Abb. 4

haben (vgl. Abb. 5a, b). Eine besondere Rolle werden im folgenden *zueinander senkrechte* (oder *orthogonale*) Kreise spielen, d. h. Kreise, die in ihrem Schnittpunkt einen rechten Winkel miteinander bilden; es ist klar, daß bei zwei

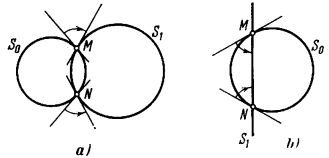


Abb. 5

zueinander senkrechten eigentlichen Kreisen der zum Schnittpunkt gezeichnete Radius des einen Kreises den anderen Kreis berührt (Abb. 6a) und daß eine Gerade S_0, die auf dem eigentlichen Kreis S_1 senkrecht steht, zugleich Durch-

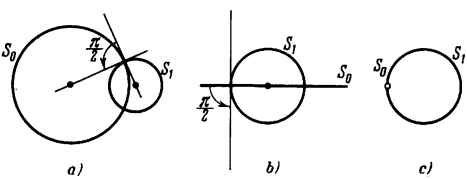


Abb. 6

messer dieses Kreises ist (Abb. 6b). Wir wollen außerdem sagen, daß ein „Kreis vom Radius Null" S_0 auf einem „Kreis mit nichtverschwindendem Radius" S_1 senkrecht steht, wenn der Punkt S_0 auf dem Kreis oder der Ge-

raden S_1 liegt (Abb. 6c). Also haben für solche Kreise die Aussagen „S_0 berührt S_1" und „S_0 steht auf S_1 senkrecht" den gleichen Sinn. Dieser Sachverhalt soll uns nicht verwundern: Denn als „Tangente" an einen Kreis S_0 vom Radius Null kann man jede Gerade ansehen, die durch den Punkt S_0 geht; mithin kann man, wenn der Punkt S_0 auf dem Kreis oder der Geraden S_1 liegt, dem Winkel zwischen S_0 und S_1 jeden beliebigen Wert zuschreiben, insbesondere kann man also sowohl annehmen, daß dieser Winkel gleich 0 ist (d. h., daß sich S_0 und S_1 berühren), als auch, daß er gleich $\frac{\pi}{2}$ ist (d. h., daß S_0 und S_1 aufeinander senkrecht stehen).

§ 2. Potenzlinie und Potenzpunkt

2.1. Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis. Wir erinnern zunächst an folgenden Satz, der aus dem Schulstoff in Geometrie wohlbekannt ist:

Legt man durch einen Punkt M mehrere Geraden, die alle einen gegebenen (eigentlichen) Kreis S schneiden, so hat das Produkt der Abstände des Punktes

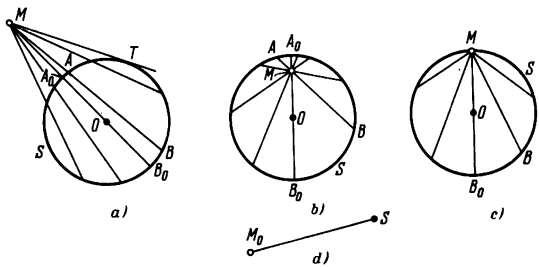


Abb. 7

von den beiden Schnittpunkten einer der Geraden mit dem Kreis (das Produkt $|MA| \cdot |MB|$ in Abb. 7a, b) *für alle betrachteten Geraden den gleichen Wert.*

Dieser Satz gilt sowohl dann, wenn der Punkt M außerhalb des Kreises S liegt (Abb. 7a; in diesem Fall ist das Produkt $|MA| \cdot |MB|$ gleich dem Quadrat der Länge der vom Punkt M an den Kreis S gelegten Tangente), als auch dann, wenn M innerhalb S liegt (Abb. 7b; in diesem Fall ist $|MA| \cdot |MB|$ gleich dem Quadrat der halben Sehne, die durch den Punkt M senkrecht zum Durchmesser $\overline{OM}$ des Kreises verläuft). Liegt der Punkt M auf dem Kreis S (Abb. 7c), so ist die Länge einer der beiden Strecken $\overline{MA}$ oder $\overline{MB}$ gleich Null, und somit

hängt auch in diesem Fall das Produkt $|MA| \cdot |MB|$ nicht von der Wahl der Geraden ab, es ist für jede Gerade gleich Null. Versteht man schließlich unter S einen „Kreis vom Radius Null", d. h. einen Punkt (Abb. 7d), so geht durch jeden nicht mit S zusammenfallenden Punkt M nur eine Gerade, die „S schneidet" (und für diese Gerade sind die beiden Punkte A und B mit dem Punkt S zu identifizieren); unser Satz behält auch in diesem Grenzfall seine Gültigkeit.

Der Satz gilt auch dann, wenn man das Produkt $(MA) \cdot (MB)$ der orientierten Abstände betrachtet (vgl. § 1): Wenn nämlich der Punkt M außerhalb von S liegt, ist das Produkt $(MA) \cdot (MB)$ stets positiv, und im entgegengesetzten Fall ist dieses Produkt stets negativ. Also hängt sowohl der Betrag als auch das Vorzeichen des Produktes $(MA) \cdot (MB)$ nur von der Lage des Punktes M und des Kreises S (mit endlichem Radius) ab und nicht von der Wahl der durch den Punkt M gelegten Geraden. Dieses Produkt nennt man die *Potenz des Punktes M in bezug auf den Kreis S*. Aus den Abb. 7a–d leitet man leicht her, daß *die Potenz eines Punktes M bezüglich eines Kreises S mit dem endlichen Radius r in allen Fällen gleich $d^2 - r^2$ ist, wobei d der Abstand $|OM|$ des Punktes M vom Mittelpunkt O des Kreises ist*. Um das zu beweisen, braucht man nur als Gerade MAB die durch den Mittelpunkt des Kreises S gehende Gerade MA_0B_0 zu wählen.

2.2. Die Potenzlinie zweier Kreise. Mit der Einführung des Begriffs der Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis ergibt sich sofort die Frage nach einer ganzen Reihe von Punktmengen. Zum Beispiel kann man nach der Menge aller der Punkte fragen, die bezüglich eines gegebenen Kreises eine konstante Potenz haben (diese ist ein Kreis, der zu dem gegebenen Kreis konzentrisch ist). Unter diesen Punktmengen spielt für die Geometrie eine besondere Rolle die *Menge aller der Punkte, die bezüglich zweier gegebener Kreise S_1 und S_2 die gleiche Potenz haben*. Diese Punktmenge heißt die *Potenzlinie der Kreise S_1 und S_2*.

Wir beweisen, daß *die Potenzlinie zweier nichtkonzentrischer Kreise S_1 und S_2 mit endlichen Radien eine Gerade o ist, die auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte dieser Kreise senkrecht steht; zu zwei konzentrischen* (nicht zusammenfallenden) *Kreisen gibt es keine Potenzlinie*. (Die Menge aller Punkte, die bezüglich zweier konzentrischer Kreise gleiche Potenz haben, ist leer.)

In der Tat: Damit ein Punkt M der Potenzlinie der beiden Kreise S_1 und S_2 mit den Mittelpunkten O_1 und O_2 und den Radien r_1 und r_2 angehört (Abb. 8), muß auf Grund des oben Gesagten

$$|O_1M|^2 - r_1^2 = |O_2M|^2 - r_2^2 \qquad (*)$$

gelten. Zunächst ist klar, daß diese Gleichung nicht möglich ist, wenn $r_1 \neq r_2$ ist und die Punkte O_1 und O_2 zusammenfallen, woraus sich unsere Behauptung bezüglich konzentrischer Kreise ergibt.

Wir nehmen nun an, daß die Punkte O_1 und O_2 nicht zusammenfallen; es sei $|O_1O_2| = l \neq 0$. Wir wollen zeigen, daß es auf der Geraden O_1O_2 genau einen

Punkt P gibt, der der Potenzlinie angehört. Dazu sei P ein beliebiger Punkt der Geraden O_1O_2 und x sein Abstand von O_1, den wir als positiv ansehen, wenn P und O_2 auf derselben Seite des Punktes O_1 liegen, und als negativ im entgegengesetzten Fall. Dann ist $|O_1P| = |x|$, $|O_2P| = |x - l|$, und die Be-

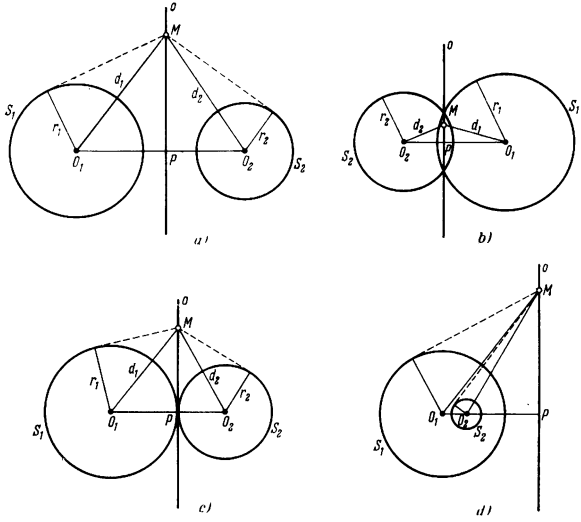


Abb. 8

ziehung (*), die notwendig und hinreichend dafür ist, daß P auf der Potenzlinie liegt, nimmt die Gestalt

$$x^2 - r_1^2 = (x - l)^2 - r_2^2$$

an. Diese Beziehung ist eine lineare Gleichung für die Unbekannte x und hat die einzige Lösung

$$x = \frac{l^2 + r_1^2 - r_2^2}{2l}.$$

Nunmehr sei bemerkt, daß ein Punkt M dann und nur dann der Potenzlinie angehört, wenn seine Projektion P auf die Gerade O_1O_2 ebenfalls der Potenzlinie angehört. Das ergibt sich aus der einfachen Beziehung

$$|O_1M|^2 - |O_2M|^2 = |O_1P|^2 - |O_2P|^2$$

(vgl. Abb. 8) und der Beziehung (*). Hieraus folgt aber, daß die Potenzlinie (zweier nichtkonzentrischer Kreise) eine Gerade ist, die auf der Verbindungsgeraden O_1O_2 der Mittelpunkte senkrecht steht.

Man kann auch folgende „vektorielle" Herleitung des Satzes über die Potenzlinie in Betracht ziehen. Die Beziehung (*) kann in der Gestalt

$$\boldsymbol{x}^2 - r_1^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l})^2 - r_2^2$$

geschrieben werden, wobei $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{O_1M}$, $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{O_1O_2}$ ist. Löst man in dieser Gleichung die Klammern auf, so ergibt sich

$$2\boldsymbol{x}\boldsymbol{l} = l^2 + r_1^2 - r_2^2.$$

Nach der Definition des Skalarproduktes[1]) bedeutet diese Beziehung, daß

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{x} = \frac{l^2 + r_1^2 - r_2^2}{2l}$$

ist, woraus ebenfalls unsere Behauptung folgt.

Die verschiedenen Lagemöglichkeiten der Potenzlinie zweier Kreise sind in Abb. 8a–d gezeigt; man kann diese Fälle leicht analysieren, indem man sich auf die Beziehung (*) stützt. Hier sei nur folgendes vermerkt: Wenn sich die Kreise S_1 und S_2 schneiden, gehören ihre Schnittpunkte offensichtlich der Potenzlinie an (denn diese Punkte haben bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz, und zwar Null), so daß die Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise mit der Geraden zusammenfällt, die ihre gemeinsame Sehne enthält (Abb. 8b); wenn sich die Kreise S_1 und S_2 berühren, geht aus demselben Grund die Potenzlinie durch ihren Berührungspunkt und fällt folglich mit der gemeinsamen Tangente der beiden Kreise zusammen (Abb. 8c).

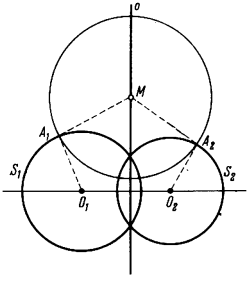


Abb. 9

Wir wissen, daß die Potenz eines außerhalb des Kreises S gelegenen Punktes M gleich dem Quadrat der Länge der von M an S gelegten Tangente ist. Hieraus folgt, daß *die Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreise sowie der Teil der Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise, der außerhalb dieser Kreise liegt, mit der Menge aller der Punkte M zusammenfällt, für die die von M an beide Kreise gelegten Tangenten gleich lang sind* (Abb. 9). Diese Aussage kann man auch anders formulieren: Dazu sei Σ ein Kreis, dessen Mittelpunkt M auf der Potenzlinie zweier Kreise S_1 und S_2 liegt und dessen Radius gleich der gemeinsamen Länge der vom Punkt M an S_1 und S_2 gelegten Tangenten $\overline{MA_1}$ und $\overline{MA_2}$ ist (Abb. 9). Da der zum Schnittpunkt A_1 (entsprechend

[1]) Vgl. S. 355.

A_2) dieses Kreises mit S_1 (mit S_2) gezogene Radius eine Tangente an S_1 (an S_2) ist und folglich senkrecht auf dem zum gleichen Punkt gezogenen Radius des Kreises S_1 (des Kreises S_2) steht, ist der Kreis Σ orthogonal zu den Kreisen S_1 und S_2. Wenn umgekehrt M der Mittelpunkt eines zu den Kreisen S_1 und S_2 orthogonalen Kreises Σ ist, sind die von M an S_1 und S_2 gelegten Tangenten gleich lang, und M liegt auf der Potenzlinie. *Also stimmt die Potenzlinie sich nicht schneidender Kreise und der Teil der Potenzlinie sich schneidender Kreise, der außerhalb dieser Kreise liegt, mit der Menge der Mittelpunkte aller jener Kreise überein, die zu den beiden gegebenen Kreisen orthogonal sind.*

Es sei bemerkt, daß man auch den Teil der Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise, der innerhalb dieser Kreise liegt, unabhängig vom Begriff der Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises geometrisch definieren kann.

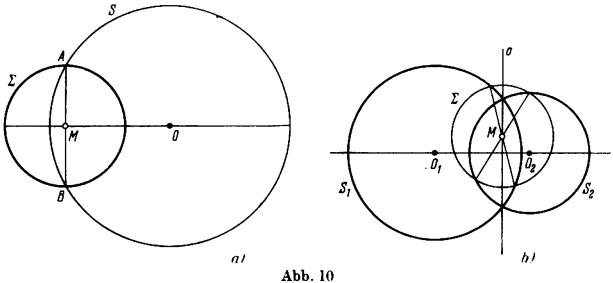


Abb. 10

Wir wollen dazu sagen, daß der Kreis S den Kreis Σ *halbiert* (oder daß Σ vom Kreis S halbiert wird), wenn S den Kreis Σ in diametral gegenüberliegenden Punkten schneidet (Abb. 10a). Aus Abb. 10a ist ersichtlich, daß der Mittelpunkt M eines durch den Kreis S halbierten Kreises Σ innerhalb von S liegt und daß sein Radius gleich der Länge der halben Sehne des Kreises S ist, die durch den Punkt M senkrecht zum Durchmesser $\overline{OM}$ dieses Kreises verläuft, d. h., daß das Quadrat des Radius des Kreises Σ dem Betrag nach gleich der Potenz des Punktes M bezüglich des Kreises S ist (vgl. S. 464). Hieraus folgt, daß der Teil der Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise S_1 und S_2, der innerhalb dieser Kreise liegt, mit der Menge der Mittelpunkte aller jener Kreise Σ übereinstimmt, die sowohl vom Kreis S_1 als auch vom Kreis S_2 halbiert werden (Abb. 10b).

2.3. Der Potenzpunkt dreier Kreise. Wir betrachten nun drei Kreise S_1, S_2 und S_3, die paarweise nicht konzentrisch sind. Wenn die Mittelpunkte O_1, O_2 und O_3 dieser Kreise nicht auf einer Geraden liegen (Abb. 11), dann sind die Potenzlinien o_{12} und o_{13} der Kreise S_1 und S_2 bzw. S_1 und S_3 nicht parallel

(weil diese Geraden auf der Geraden O_1O_2 bzw. O_1O_3 senkrecht stehen); es sei O der Schnittpunkt dieser Potenzlinien. Da der Punkt O der Potenzlinie o_{12} angehört, hat er bezüglich S_1 und S_2 die gleiche Potenz, und da der Punkt O auch der Potenzlinie o_{13} angehört, hat er bezüglich S_1 und S_3 die gleiche

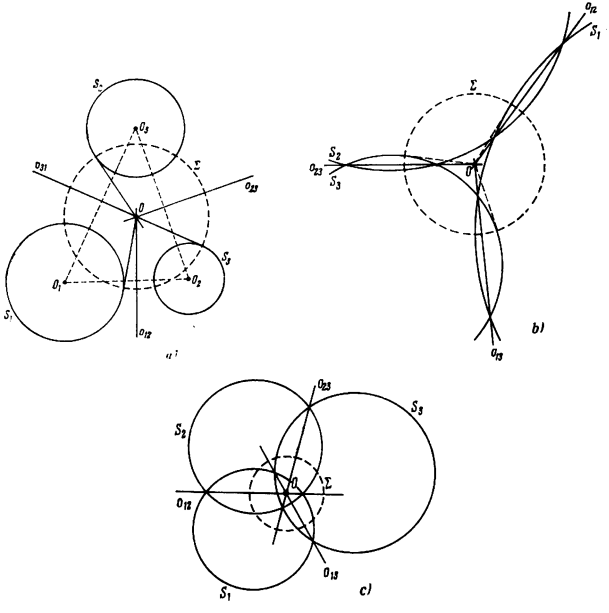


Abb. 11

Potenz; daraus folgt aber, daß O auch der Potenzlinie o_{23} der Kreise S_2 und S_3 angehört. Wir sehen also, daß *sich die paarweisen Potenzlinien dreier Kreise S_1, S_2 und S_3 mit endlichem Radius, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, in einem Punkt O schneiden.* Dieser Punkt heißt der *Potenzpunkt* der drei Kreise. Weil der Potenzpunkt bezüglich jedes der drei Kreise S_1, S_2 und S_3 ein und dieselbe Potenz hat, liegt er entweder innerhalb aller drei Kreise oder gehört jedem der drei Kreise an oder liegt außerhalb aller drei Kreise.

Aus dem Satz über den Potenzpunkt ergibt sich insbesondere eine einfache Konstruktionsmethode für die Potenzlinie o zweier sich nicht schneidender Kreise S_1 und S_2 (die Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise fällt mit der Geraden zusammen, die ihre gemeinsame Sehne enthält): Wir wählen einen beliebigen Kreis S, dessen Mittelpunkt nicht auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Kreise S_1 und S_2 liegt und der sowohl S_1 als auch S_2 schneidet (Abb. 12). Die Potenzlinie o_1 der Kreise S und S_1 fällt mit der Geraden zusammen, die die gemeinsame Sehne von S und S_1 enthält; die Potenzlinie o_2 der Kreise S und S_2 fällt mit der Geraden zusammen, die die gemeinsame Sehne

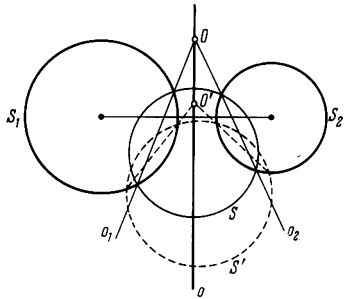


Abb. 12

dieser Kreise enthält. Der Schnittpunkt O der Geraden o_1 und o_2 ist der Potenzpunkt der Kreise S_1, S_2 und S und gehört insbesondere der gesuchten Potenzlinie der Kreise S_1 und S_2 an. Also ist die Potenzlinie o identisch mit der durch den Punkt O verlaufenden Senkrechten zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte von S_1 und S_2. (Man kann natürlich analog auch mit Hilfe eines anderen Kreises S' einen zweiten Punkt O' der gesuchten Potenzlinie konstruieren.)

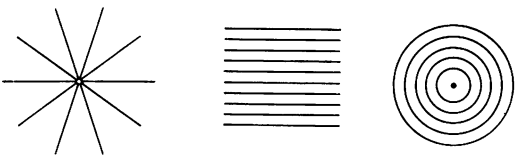
Offensichtlich ist der Potenzpunkt dreier Kreise S_1, S_2 und S_3, wenn er außerhalb dieser Kreise liegt, zugleich der Mittelpunkt des einzigen Kreises Σ, der zu den drei gegebenen Kreisen orthogonal ist (Abb. 11a, b). *Liegt der Potenzpunkt O innerhalb der gegebenen Kreise, so ist er der Mittelpunkt des einzigen Kreises Σ, der von den drei gegebenen Kreisen halbiert wird* (Abb. 11c). Liegen die Mittelpunkte dreier gegebener Kreise alle auf einer Geraden, so ist der einzige auf allen drei gegebenen Kreisen senkrecht stehende „Kreis" die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte – ein „Kreis mit unendlichem Radius"; „Kreise", die durch die drei gegebenen Kreise halbiert werden, existieren in diesem Fall nicht.

Liegen die Zentren dreier Kreise S_1, S_2 und S_3 auf einer Geraden, so stehen ihre paarweisen Potenzlinien o_{12}, o_{13} und o_{23} alle senkrecht auf der Verbindungs-

geraden der Mittelpunkte und sind demzufolge zueinander parallel; *also haben drei Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, keinen Potenzpunkt.* Als Spezialfall kann jedoch der Fall eintreten, daß die Geraden o_{12} und o_{13} zusammenfallen; dann hat jeder Punkt dieser Geraden o die gleichen Potenzen in bezug auf S_1 und S_2 sowie in bezug auf S_1 und S_3. Hieraus folgt, daß jeder Punkt der Geraden o auch gleiche Potenz bezüglich der Kreise S_2 und S_3 hat, d. h., sie fällt mit der Potenzlinie o_{23} der Kreise S_2 und S_3 zusammen. Dieser Fall, daß *die paarweisen Potenzlinien mehrerer Kreise alle zusammenfallen,* ist aus einer Reihe von Gründen von besonderem Interesse; wir betrachten ihn im folgenden Paragraphen ausführlicher.

§ 3. Kreisbüschel und Kreisbündel

3.1. Kreisbüschel. Unter einem *Geradenbüschel* versteht man in der analytischen Geometrie eine Gesamtheit von Geraden einer Ebene, die aus allen und nur den Geraden besteht, die durch einen festen Punkt gehen (Abb. 13a), bzw. aus genau den Geraden, die einer gegebenen Geraden parallel sind (Abb. 13b).[1]) Da wir die Geraden als ausgeartete „Kreise" auffassen, wollen



a) *b)* *c)*

Abb. 13

wir die in Abb. 13a, b dargestellten Büschel auch als *Büschel von Kreisen mit unendlichem Radius* ansehen. Von größerem Interesse sind für uns jedoch die *Büschel von Kreisen mit endlichem Radius.* Hierunter wollen wir einerseits die Gesamtheiten von Kreisen verstehen, die von allen zu einem gegebenen Kreis konzentrischen Kreisen gebildet werden (sie sollen „uneigentliche" Büschel heißen; Abb. 13c), und andererseits alle Gesamtheiten von Kreisen, von denen je zwei stets ein und dieselbe Gerade als Potenzlinie o besitzen (die wir „eigentliche" Büschel nennen). In die eigentlichen Büschel wollen wir außerdem stets noch die gemeinsame Potenzlinie sämtlicher Paare von Kreisen des Büschels mit aufnehmen; somit enthält jedes Büschel, das kein Büschel konzentrischer Kreise ist, wenigstens einen „Kreis mit unendlichem Radius" (d. h. eine Gerade).

[1]) Vgl. S. 107.

Offenbar wird jedes eigentliche Büschel von einer Geraden o, einem Kreis S_0 und allen jenen Kreisen S gebildet, für die o die Potenzlinie der Kreise S_0 und S ist. (Aus den Darlegungen auf S. 470 folgt nämlich, daß die Gerade o dann auch Potenzlinie eines beliebigen Paares von Kreisen unseres Büschels ist.)

Schneidet ein Kreis S_0 eines eigentlichen Büschels die Potenzlinie o in den Punkten A und B (Abb. 14a), dann muß jeder andere Kreis S des Büschels ebenfalls durch die Punkte A und B gehen (da o die Potenzlinie der Kreise S_0

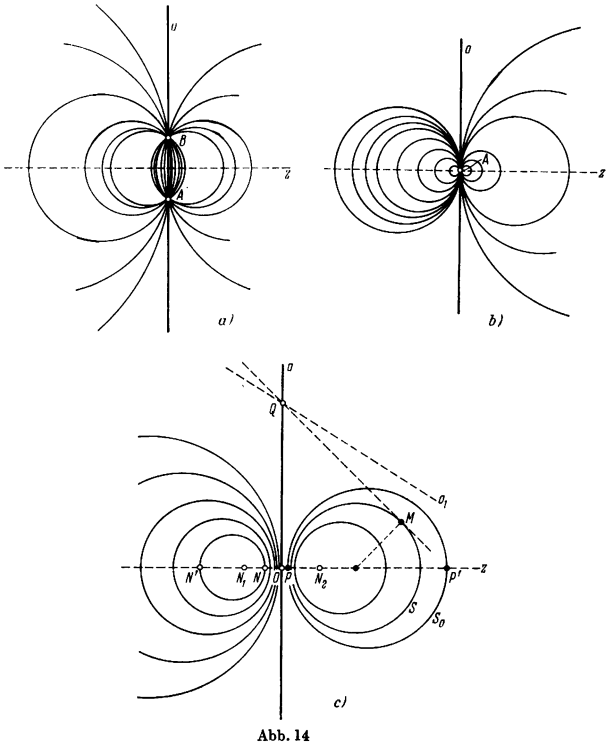


Abb. 14

und S ist); verläuft umgekehrt S durch die Punkte A und B, so ist o die Potenzlinie der Kreise S_0 und S, und mithin gehört S dem Büschel an. Also besteht im betrachteten Fall das Büschel aus genau den Kreisen, die durch die beiden festen Punkte A und B gehen. Ein solches Büschel nennt man ein *Büschel sich schneidender Kreise*. Es sei noch bemerkt, daß ein Büschel sich schneidender Kreise keine Kreise vom Radius Null, d. h. keine Punkte, enthält.

Wir nehmen nun an, daß ein Kreis S_0 eines Büschels die Potenzlinie o in einem Punkt A berührt (Abb. 14b). In diesem Fall muß auch jeder andere Kreis S des Büschels die Gerade o im Punkt A berühren, weil o die Potenzlinie der Kreise S_0 und S ist. Berührt umgekehrt ein Kreis S die Gerade o im Punkt A, so fällt die Potenzlinie der Kreise S_0 und S mit o zusammen. Also besteht in diesem Fall das Büschel aus genau den Kreisen, die die Gerade o im gegebenen Punkt A berühren; ein solches Büschel heißt ein *Büschel sich berührender Kreise*. Ein Büschel sich berührender Kreise enthält genau einen Kreis vom Radius Null, nämlich den Punkt A; denn die Potenzlinie dieses Punktes und eines beliebigen Kreises des Büschels fällt mit o zusammen. (Es sei bemerkt, daß auch die Büschel konzentrischer Kreise jeweils genau einen Kreis vom Radius Null enthalten, nämlich den gemeinsamen Mittelpunkt aller Kreise des Büschels.)

Schneidet schließlich auch nur ein Kreis S_0 eines Büschels die Potenzlinie o nicht (Abb. 14c), so kann kein Kreis S des Büschels die Gerade o schneiden, weil sonst die Potenzlinie der Kreise S_0 und S nicht mit o übereinstimmen würde. Ferner ist es unmöglich, daß sich irgend zwei Kreise des Büschels schneiden, da andernfalls die Potenzlinie dieser Kreise, d. h. die ihre gemeinsame Sehne enthaltende Gerade, von o verschieden wäre. Ein solches Büschel heißt ein *Büschel sich nicht schneidender Kreise*.[1])

Offenbar liegen in allen drei Fällen die Mittelpunkte sämtlicher Kreise des jeweiligen eigentlichen Büschels auf einer zur Potenzlinie o senkrechten Geraden z, die man als *Achse des Büschels* bezeichnet. Es sei noch bemerkt, daß *in allen Fällen durch jeden Punkt M der Ebene wenigstens ein Kreis des Büschels geht*. Für die beiden Arten von Büscheln von Kreisen mit unendlichem Radius (d. h. für die Geradenbüschel) sowie für die Büschel konzentrischer, die Büschel sich schneidender und die Büschel sich berührender Kreise ist das ganz offensichtlich. Wir zeigen, daß dieser Sachverhalt auch für die Büschel sich nicht schneidender Kreise gilt. Zunächst ist klar, daß durch jeden Punkt N der Achse z des Büschels ein Kreis des Büschels geht: Der Durchmesser $\overline{NN'}$ dieses Kreises wird durch die Gleichung $(ON) \cdot (ON') = (OP) \cdot (OP')$ festgelegt, wobei O bzw. P, P' die Schnittpunkte der Achse z mit der Potenzlinie bzw. mit irgendeinem Kreis S_0 des Büschels sind (Abb. 14c). Gilt insbesondere für den Punkt N die Beziehung $|ON|^2 = (OP) \cdot (OP')$, so fällt N' mit N zusammen, und S ist demzufolge ein Kreis vom Radius Null, d. h. ein Punkt; somit enthält jedes Büschel sich nicht schneidender Kreise zwei Punkte N_1 und N_2, die man die *Grundpunkte* des Büschels nennt und die

[1]) In der Literatur bezeichnet man die angeführten (in Abb. 14a bis c dargestellten) drei Arten von Büscheln meistens als *elliptische*, *parabolische* und *hyperbolische Büschel*.

auf der Geraden z auf verschiedenen Seiten des Punktes O mit dem gleichen Abstand $\sqrt{(OP)\cdot(OP')}$ vom Punkt O liegen. Ist nun M ein beliebiger Punkt, der nicht der Achse z des Büschels angehört, so verläuft die Potenzlinie o_1

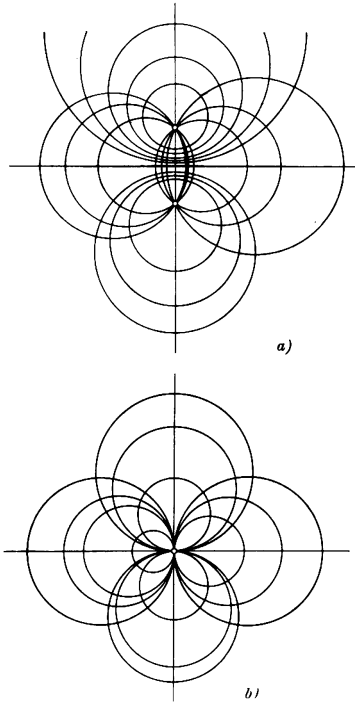


Abb. 15

des Punktes M und irgendeines Kreises S_0 des Büschels nicht parallel zu o und schneidet o folglich in einem Punkt Q, der bezüglich des Kreises M vom Radius Null und des Kreises S_0 die gleiche Potenz hat. Wir konstruieren nun denjenigen Kreis S mit Mittelpunkt auf der Achse z, der die Gerade QM im

Punkt M berührt. (Sein Mittelpunkt ist offenbar der Schnittpunkt der Geraden z mit der im Punkt M auf QM errichteten Senkrechten.) Der Punkt Q hat offenbar gleiche Potenz in bezug auf S und S_0, d. h., er gehört der Potenzlinie dieser beiden Kreise an. Hieraus ergibt sich, daß o die Potenzlinie der Kreise S und S_0 ist; folglich ist S der durch den Punkt M gehende Kreis des Büschels.

Da jeder Punkt Q der Potenzlinie o eines eigentlichen Kreisbüschels, der außerhalb aller Kreise des Büschels liegt (d. h. im Fall eines Büschels sich berührender Kreise vom Punkt A verschieden ist und im Fall eines Büschels sich schneidender Kreise nicht der Strecke $\overline{AB}$ angehört; vgl. Abb. 14a, b), bezüglich aller Kreise des Büschels die gleiche positive Potenz a^2 hat, ist der Punkt Q Mittelpunkt eines zu allen Kreisen des Büschels orthogonalen Kreises Σ. (Der Radius dieses Kreises ist a.) *Also gibt es eine unendliche Menge von Kreisen, die gleichzeitig auf sämtlichen Kreisen des Büschels senkrecht stehen.* Man erkennt unschwer, daß diese Kreise ihrerseits wieder ein Büschel bilden: Die Potenzlinie zweier solcher Kreise fällt nämlich mit der Achse z des Ausgangsbüschels zusammen, da z die Menge der Mittelpunkte aller zu diesen beiden Kreisen orthogonalen Kreise ist (vgl. S. 468). Die Gerade z selbst geht ebenfalls in dieses neue Büschel ein, da sie ein Kreis mit unendlichem Radius ist, der zu allen Kreisen unseres Büschels orthogonal ist. Zwei Kreisbüschel mit der Eigenschaft, daß jeder der Kreise des ersten Büschels zu allen Kreisen des

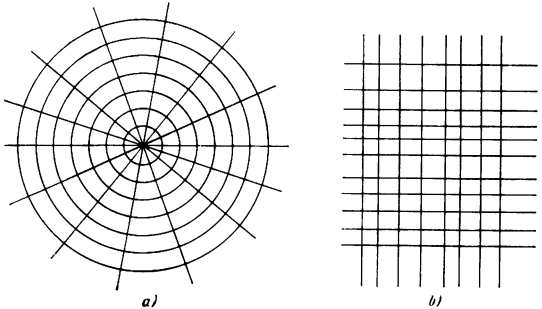


Abb. 16

zweiten Büschels orthogonal ist und umgekehrt, heißen *orthogonale* oder *konjugierte Kreisbüschel*. Wie man leicht sieht, ist einem Büschel sich nicht schneidender Kreise ein Büschel sich schneidender Kreise orthogonal (weil alle Kreise des zweiten Büschels durch die Grundpunkte des ersten gehen müssen) und umgekehrt (Abb. 15a); einem Büschel sich berührender Kreise ist ein anderes Büschel sich berührender Kreise orthogonal (Abb. 15b).

Den Begriff des orthogonalen Büschels kann man auch auf Geradenbüschel und Büschel konzentrischer Kreise übertragen: Offenbar ist das zu einem Büschel sich schneidender Geraden orthogonale Büschel ein Büschel konzentrischer Kreise (Abb. 16a) und umgekehrt, dagegen ist das zu einem Büschel paralleler Geraden orthogonale Büschel wieder ein Büschel paralleler Geraden (Abb. 16b). Dieser Sachverhalt gestattet es, allen Büscheln von Kreisen (mit endlichem oder unendlichem Radius) folgende allgemeine Definition zu geben: Ein *Kreisbüschel* ist die Menge aller Kreise der Ebene, die zu zwei gegebenen, verschiedenen Kreisen S_1 und S_2 orthogonal sind.[1])

3.2. Kreisbündel. Wir definieren als ein (eigentliches) *Kreisbündel* eine Menge von Kreisen, die aus allen den Kreisen mit endlichem Radius besteht, von denen je drei denselben Punkt O als Potenzpunkt haben (den man dann den *Potenzpunkt des Bündels* nennt), sowie allen den Kreisen mit unendlichem Radius (Geraden), die durch den Punkt O gehen. Aus dieser Definition folgt, daß die Potenz des Punktes O in bezug auf beliebige drei Kreise des Bündels mit endlichem Radius stets dieselbe ist; hieraus ergibt sich, daß der Potenzpunkt O eines eigentlichen Kreisbündels bezüglich aller Kreise des Bündels dieselbe Potenz hat. Demnach kann man das eigentliche Kreisbündel auch als die *Menge aller der Kreise der Ebene* definieren, *bezüglich derer ein gegebener Punkt O ein und dieselbe Potenz k hat* (zuzüglich aller durch O gehenden Geraden); den Punkt O nennt man mitunter auch einfach das *Zentrum des Bündels* und die Zahl k die *Potenz des Bündels*.

Ist $k = a^2 > 0$, so ist die Länge der Tangente vom Punkt O an einen beliebigen Kreis mit endlichem Radius des Bündels gleich a; daraus folgt, daß *das Bündel aus allen Kreisen besteht, die zu einem festen Kreis Σ mit Mittelpunkt in O und Radius a orthogonal sind* (einschließlich der Punkte des Kreises Σ als Kreisen des Bündels vom Radius Null und der durch O gehenden Geraden als Kreisen des Bündels mit unendlichem Radius). *Ist $k = 0$, so besteht das Bündel offenbar aus allen Kreisen* (mit endlichem oder unendlichem Radius), *die durch den Punkt O gehen*; ein solches Bündel enthält einen einzigen Kreis vom Radius Null, den Punkt O selbst. *Ist schließlich $k = -a^2 < 0$, so besteht das Bündel aus allen Kreisen, die den Kreis Σ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius a halbieren* (vgl. S. 468), einschließlich der durch O gehenden Geraden; ein solches Bündel enthält keine Kreise vom Radius Null, d. h. Punkte.[2])

Neben den eigentlichen Bündeln rechnet man zu den Kreisbündeln noch die *Bündel aller Kreise, deren Mittelpunkt auf einer festen Geraden s liegen*, und

---

[1]) Sind S_1 und S_2 zwei Geraden, so gelangen wir zu einem Büschel konzentrischer Kreise oder paralleler Geraden; sind S_1 und S_2 konzentrische Kreise, so erhalten wir ein Büschel sich schneidender Geraden; in allen übrigen Fällen ergeben sich eigentliche Kreisbüschel. Es sei bemerkt, daß ein Büschel sich schneidender Kreise auch als *Menge aller der Kreise* definiert werden kann, *die zwei gegebene, verschiedene Kreise S_1 und S_2 halbieren*.

[2]) Die eigentlichen Bündel der ersten Art nennt man *hyperbolisch*, die der zweiten Art *parabolisch* und die der dritten Art *elliptisch*.

aller *Geraden, die auf s senkrecht stehen* (Bündel der Kreise, die zu einem „Kreis mit unendlichem Radius", d. h. zu einer Geraden s, orthogonal sind), und das *Bündel aller „Kreise mit unendlichem Radius"* (Geraden) *der Ebene.*

Zum Abschluß sei bemerkt, daß *der Durchschnitt zweier verschiedener Bündel* (d. h. die Menge aller Kreise, die gleichzeitig zwei Bündeln angehören) *stets ein Büschel ist*: Der Durchschnitt zweier Bündel, von denen eines das Bündel aller Geraden ist, bildet ein Büschel sich schneidender oder paralleler Geraden; der Durchschnitt der beiden Bündel von Kreisen, die zur Geraden s_1 bzw. s_2 orthogonal sind, bildet ein Büschel konzentrischer Kreise, falls s_1 und s_2 nicht parallel sind, und ein Büschel paralleler Geraden, falls s_1 und s_2 parallel sind; der Durchschnitt zweier eigentlicher Bündel von Kreisen mit gemeinsamem Mittelpunkt und verschiedenen Potenzen ist ein Büschel sich schneidender Geraden. In allen verbleibenden Fällen ist der Durchschnitt zweier Kreisbündel ein eigentliches Büschel: Besteht eines der beiden Bündel aus den Kreisen, die zu einer Geraden s orthogonal sind, und ist das zweite ein eigentliches Bündel mit dem Mittelpunkt O, so stellt ihr Durchschnitt ein eigentliches Büschel dar, dessen Potenzlinie die durch O verlaufende Senkrechte zu s ist (das ergibt sich daraus, daß die Mittelpunkte aller dem Durchschnitt der Bündel angehörenden Kreise mit endlichem Radius auf s liegen und daß der Punkt O bezüglich je zwei dieser Kreise die gleiche Potenz hat); der Durchschnitt zweier eigentlicher Bündel mit verschiedenen Mittelpunkten O_1 und O_2 ist ein Büschel mit der Potenzlinie O_1O_2. (Zum Beweis genügt folgende Bemerkung: Da die beiden Punkte O_1 und O_2 bezüglich zwei beliebiger Kreise mit endlichem Radius, die beiden Bündeln angehören, gleiche Potenz haben, ist die Gerade O_1O_2 die Potenzlinie dieser beiden Kreise.)

§ 4. Die Inversion

4.1. Definition der Inversion. Wir betrachten ein festes Kreisbündel und wählen aus ihm alle die Kreise aus, die durch einen bestimmten Punkt A der Ebene gehen. Diese Kreise gehören dem Durchschnitt zweier Bündel an, dem gewählten Bündel und dem Bündel der Kreise, die durch den Punkt A gehen; nach den obigen Darlegungen (S. 477) bilden sie ein Kreisbüschel. (Wir schließen hier den Fall aus, daß das erste Bündel das Zentrum A und die Potenz 0 hat und somit alle seine Kreise durch A gehen.) Wenn das erste Bündel das Bündel aller Geraden der Ebene ist und der Punkt A mit dem Zentrum des gewählten Bündels zusammenfällt, ist offenbar das erhaltene Büschel ein Büschel sich schneidender Geraden; in allen übrigen Fällen ist es ein Büschel von Kreisen, die sich in zwei Punkten A und A' schneiden, oder ein Büschel sich berührender Kreise. (Da alle Kreise des Büschels durch den Punkt A gehen, können wir kein Büschel sich nicht schneidender oder konzentrischer Kreise bekommen.) Auf diese Weise kann man durch die Wahl eines bestimmten Kreisbündels in der Ebene (das vom Bündel aller Geraden verschieden ist) eine *Abbildung* der

Ebene definieren, *die jedem vom Zentrum O des Bündels verschiedenen Punkt A der Ebene den zweiten Schnittpunkt A' der durch den Punkt A gehenden Kreise des Bündels zuordnet.* (Wenn sich alle Kreise in A berühren, nehmen wir an, daß unsere Abbildung den Punkt A in sich überführt.)[1]) Diese Abbildung nennen wir die *Punktinversion* oder kurz *Inversion*, die durch das betrachtete Bündel definiert wird. Besteht das Bündel aus allen Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden s liegen, sowie den zu s senkrechten Geraden, so heißt die durch das Bündel definierte Inversion eine *spezielle Inversion*, genauer die *spezielle Inversion mit der Achse s*; die einem Bündel sich in einem Punkt schneidender Kreise entsprechende Inversion nennt man *entartet*; in allen anderen Fällen haben wir eine *gewöhnliche* oder *gemeine Inversion* vorliegen, wobei das Zentrum des Bündels das *Zentrum* dieser Inversion und die Potenz k des Bündels die *Potenz* der Inversion genannt wird.

Offenbar bildet eine entartete Inversion jeden (vom Zentrum O des Bündels verschiedenen) *Punkt der Ebene in ein und denselben Punkt O ab* (da in diesem

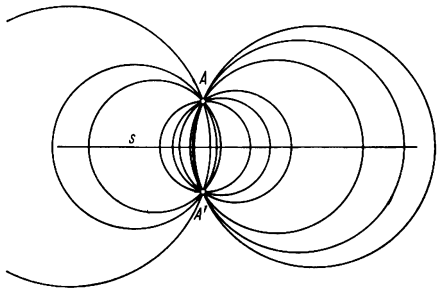


Abb. 17

Fall die Menge der durch einen festen Punkt A gehenden Kreise des Bündels das Büschel aller der Kreise ist, die sich in den Punkten A und O schneiden) – diese Abbildung ist selbstverständlich uninteressant. *Die spezielle Inversion mit der Achse s ist die Spiegelung an der Geraden s*; denn jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden s liegt und der durch einen bestimmten Punkt A geht (wie auch die durch A verlaufende Senkrechte zu s), geht durch den zu A bezüglich s symmetrisch gelegenen Punkt A' (Abb. 17).[2]) Somit gilt unser Hauptinteresse den gewöhnlichen oder gemeinen Inversionen, die wir im fol-

[1]) Zu den geometrischen Abbildungen vgl. allgemein den Artikel „Geometrische Transformationen" in diesem Band der EdEM (im folgenden werden wir diesen Artikel als „G.T." zitieren), S. 45ff.

[2]) Vgl. „G.T.", S. 51.

genden der Kürze halber meistens einfach „Inversionen" nennen wollen; in allen Fällen, in denen gleichzeitig von der gewöhnlichen und der speziellen Inversion die Rede ist, sprechen wir von einer *nichtentarteten Inversion*.

Aus der oben gegebenen Beschreibung der eigentlichen Kreisbündel folgt, daß *man die gewöhnliche Inversion mit dem Zentrum O und der positiven Potenz a^2 als die Abbildung definieren kann, die jedem von Punkt O verschiedenen Punkt A der Ebene den zweiten Schnittpunkt A' aller der Kreise zuordnet, die durch den Punkt A gehen und zum Kreis Σ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius a orthogonal sind* (Abb. 18a); der Kreis Σ, durch dessen Vorgabe die Inversion völlig bestimmt ist, heißt der *Grundkreis* der Inversion. Läßt man zu, daß der Grundkreis in ei e Gerade (einen „Kreis mit unendlichem Radius") entarten kann, so erfaßt die letzte Definition auch die speziellen Inversionen, die Spiegelungen an einer Geraden (Abb. 17). Diese Verwandtschaft zwischen der Inversion mit positiver Potenz und der Spiegelung an einer Geraden findet ihren Ausdruck darin, daß man die Inversionen mit positiver Potenz meistens auch als *Spiegelungen an einem Kreis* bezeichnet. Läßt man auch zu, daß der Grundkreis der Inversion ein Punkt (ein „Kreis vom Radius Null") sein kann, so erfaßt unsere Definition ebenfalls die entarteten Inversionen. Die Inversion mit dem Zentrum O und der negativen Potenz $-a^2$ kann man schließlich als die *Abbildung* definieren, *die jedem vom Punkt O verschiedenen Punkt A den zweiten Schnittpunkt aller der Kreise zuordnet, die durch A gehen und den Kreis Σ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius a halbieren* (Abb. 18b).

Man kann die Inversionen auch rein analytisch definieren. Aus der Tatsache, daß das Zentrum O eines eigentlichen Bündels bezüglich aller Kreise des Bündels die Potenz k hat, folgt, daß jeder durch einen bestimmten (von O verschiedenen) Punkt A gehende Kreis des Bündels die Gerade OA in einem zweiten Punkt A' schneidet, für den $(OA) \cdot (OA') = k$ gilt. Hieraus ersieht man, daß *man die Inversion mit dem Zentrum O und der Potenz k auch als diejenige geometrische Transformation definieren kann, die einen von O verschiedenen Punkt A der Ebene in den Punkt A' der Geraden OA überführt, für den*

$$(OA) \cdot (OA') = k$$

gilt. Wegen ihrer Einfachheit ist diese Definition der Inversion am weitesten verbreitet;[1]) auch wir werden uns ihrer im folgenden meistens bedienen. Insbesondere folgt aus dieser Definition, daß die Inversionen mit dem gleichen Zentrum O und den dem Betrag nach gleichen Potenzen k und $-k$ einen Punkt A in zwei Punkte A' und A'' der Geraden OA überführen, die vom Inversionszentrum O den gleichen Abstand $\frac{k}{|OA|}$ haben, aber auf verschiedenen Seiten desselben liegen; *die Inversion mit dem Zentrum O und der (negativen) Potenz $-k$ stimmt also überein mit dem in beliebiger Reihenfolge genommenen Produkt*[2]) *aus der Inversion mit dem Zentrum O und der (positiven) Potenz k und der Spiegelung am Punkt O.*

[1]) Vgl. „G.T.", S. 51.
[2]) Vgl. „G.T.", S. 74ff.

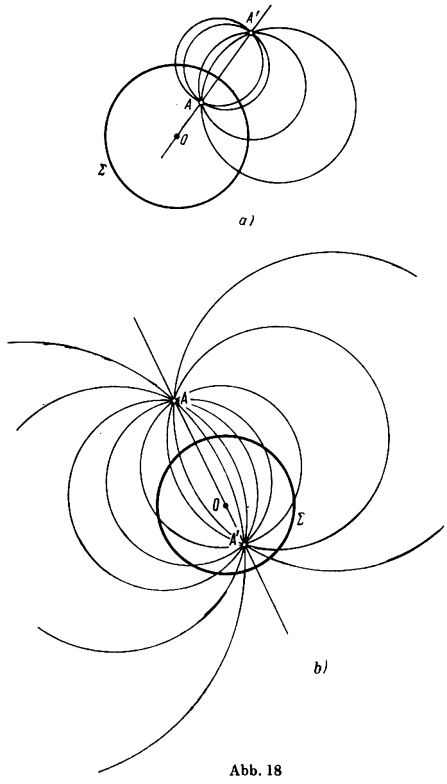


Abb. 18

4.2. Eigenschaften der Inversion. Zunächst sei bemerkt, daß *das Zentrum O einer Inversion in keinen Punkt der Ebene abgebildet wird.* Da offenbar der Bildpunkt A' eines Punktes A um so weiter von O entfernt ist, je dichter A bei O liegt (wobei der Abstand $|OA'|$ jede beliebige vorgegebene Zahl übertrifft,

sofern A genügend nahe bei O liegt), sagt man auch, daß *der Bildpunkt des Zentrums O einer Inversion „im Unendlichen liegt"* oder daß *„eine Inversion den Punkt O ins Unendliche überführt"*; selbstverständlich muß man diese Ausdrucksweise in dem Sinne auffassen, daß bei einer Inversion der Punkt O auf keinen Punkt abgebildet wird, aber die nahe bei O gelegenen Punkte in sehr weit entfernte Punkte übergehen.[1])

Es sei als nächstes bemerkt, daß jede nichtentartete Inversion die Punkte der Ebene „miteinander vertauscht" (d. h., wenn der Punkt A in den Punkt A' abgebildet wird, geht umgekehrt A' in A über).[2]) Dabei führt die Inversion mit dem Zentrum O und der Potenz k das Innere des Kreises Σ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $\sqrt{|k|}$ in das Außengebiet dieses Kreises über und umgekehrt, während die Spiegelung an einer Geraden s die beiden Halbebenen, in die die Ebene durch s geteilt wird, miteinander vertauscht. Den Kreis Σ führt die Inversion in sich selbst über; dabei gehen bei positivem k alle Punkte des Kreises Σ in sich selbst über (genauso wie bei der Spiegelung an einer Geraden s alle Punkte dieser Geraden in sich selbst übergehen), während bei negativem k jeder Punkt des Kreises Σ in den ihm diametral gegenüberliegenden Punkt von Σ übergeht.

Wir geben nun zwei weniger offensichtliche Eigenschaften der Inversion an.

A. *Jede nichtentartete Inversion führt jeden Kreis mit nichtverschwindendem Radius in einen Kreis mit nichtverschwindendem Radius über* (d. h. jeden Kreis und jede Gerade in einen Kreis oder in eine Gerade).

Da ganz offensichtlich ist, daß die Spiegelungen an einer Geraden s diese Eigenschaft besitzen, muß nur bewiesen werden, daß dies auch für jede gewöhnliche Inversion der Fall ist. Zunächst ist klar, daß eine Inversion jede Gerade, die durch das Inversionszentrum geht, in sich selbst überführt. Sind ferner M und M' die Schnittpunkte einer durch den Punkt O gehenden Geraden mit einem Kreis S mit dem Durchmesser $\overline{OP}$ und mit einer auf OP in einem gewissen Punkt P' senkrecht stehenden Geraden s (Abb. 19a), so gilt wegen der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke OPM und $OM'P'$ mit dem gemeinsamen spitzen Winkel bei O

$$\frac{|OP|}{|OM|} = \frac{|OM'|}{|OP'|},$$

woraus sofort

$$(OM) \cdot (OM') = (OP) \cdot (OP')$$

folgt. Die letzte Gleichung besagt aber, daß *die Inversion mit dem Zentrum O und der Potenz k einen durch O gehenden Kreis S in die auf dem Durchmesser $\overline{OP}$ des Kreises senkrecht stehende Gerade s überführt, die diesen Durchmesser in*

---

[1]) Bezüglich einer anderen Auffassung dieser Ausdrucksweise (die mit dem Hinzufügen eines „uneigentlichen" Punktes zur Ebene in Zusammenhang steht) vgl. S. 51 ff.

[2]) Man sagt dafür auch, die Inversion sei eine *involutorische* Transformation (vgl. „G.T.", S. 91).

demjenigen Punkt P' schneidet, für den $(OP) \cdot (OP') = k$ ist; umgekehrt führt diese Inversion eine nicht durch O gehende Gerade s in denjenigen durch O gehenden Kreis S über, dessen Durchmesser die Strecke $\overline{OP}$ der durch O verlaufenden Senkrechten OP' zu s ist, für die $(OP) \cdot (OP') = k$ gilt.

Es sei schließlich S ein beliebiger, nicht durch das Inversionszentrum gehender Kreis und p die Potenz des Punktes O in bezug auf den Kreis S, so daß jede durch O verlaufende Gerade den Kreis S in zwei Punkten M und M_1

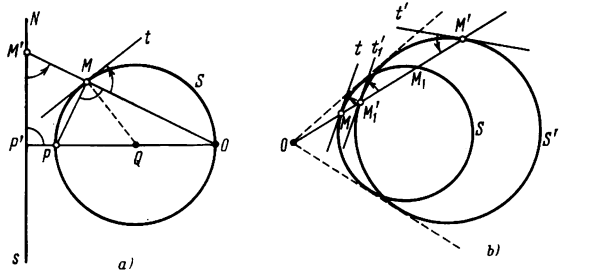


Abb. 19

schneidet, für die $(OM) \cdot (OM_1) = p$ gilt. Es sei ferner S' der Kreis, der dem Kreis S bei der Homothetie mit dem Zentrum in O und dem Koeffizienten[1]) $\frac{k}{p}$ entspricht, und es seien M_1' und M' die Punkte des Kreises S', die bei der betrachteten Ähnlichkeitstransformation den Punkten M und M_1 des Kreises S entsprechen (Abb. 19b). Dann gilt

$$(OM) \cdot (OM_1) = p, \quad \frac{(OM')}{(OM_1)} = \frac{k}{p}.$$

Hieraus folgt

$$(OM) \cdot (OM') = k,$$

d. h., *die Inversion mit dem Zentrum O und der Potenz k führt einen nicht durch O gehenden Kreis S in denjenigen Kreis S' über, der zu S mit dem Ähnlichkeitszentrum in O und dem Ähnlichkeitskoeffizienten $\frac{k}{p}$ zentrisch ähnlich (homothetisch) ist, wobei p die Potenz des Punktes O in bezug auf den Kreis S bezeichnet.* (Dabei entspricht der Punkt M des Kreises S bei der zentrischen Ähnlichkeitstransformation dem Punkt M_1' des Kreises S' und bei der Inversion dem Punkt M'.)

[1]) Vgl. „G.T.", S. 49.

Damit ist die Eigenschaft A der Inversionen bewiesen.[1])

B. *Jede nichtentartete Inversion läßt den Winkel zwischen zwei Kreisen unverändert.* Genauer: Sind t_1, t_2 die Tangenten im Punkt A an zwei sich im Punkt A schneidende Kreise S_1 und S_2 mit nichtverschwindenden Radien und t_1', t_2' die Tangenten in dem A bei einer Inversion entsprechenden Punkt A' an die Kreise S_1' und S_2' mit nichtverschwindenden Radien, in die S_1 und S_2 bei dieser nichtentarteten Inversion übergehen, so gilt

$$\sphericalangle (t_1, t_2) = \sphericalangle (t_2', t_1').$$

(Man beachte die Reihenfolge der Tangenten!)

Es genügt wieder zu zeigen, daß die gewöhnliche Inversion die Eigenschaft B besitzt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPM und $OM'P$ (Abb. 19a) folgt $\sphericalangle (PO, PM) = \sphericalangle (M'P', M'O)$. Es gilt jedoch $\sphericalangle (PO, PM) = \sphericalangle (MO, t)$,

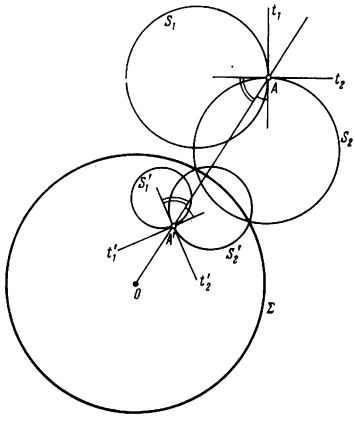


Abb. 20

wobei t die Tangente an S im Punkt M ist (beide Winkel lassen sich durch den halben Bogen MO messen); folglich gilt

$$\sphericalangle (MO, t) = \sphericalangle (s, M'O').$$

Ebenso bilden die Kreise S und S' (Abb. 19b) in den Punkten M und M' gleiche Winkel $\sphericalangle (MO, t)$ und $\sphericalangle (M_1'O, t_1')$ mit der Geraden OMM'. (Das folgt

[1]) Vgl. „G.T.“, S. 69.

daraus, daß O das Ähnlichkeitszentrum der Kreise S und S' ist; vgl. S. 497.) Da aber außerdem $\sphericalangle (M_1'O, t_1') = \sphericalangle (t', M'O)$ ist (vgl. S. 462f.), gilt

$$\sphericalangle (MO, t) = \sphericalangle (t', M'O).$$

Damit haben wir unsere Behauptung zunächst für den Fall bewiesen, daß einer der beiden betrachteten Kreise mit nichtverschwindendem Radius eine durch O gehende Gerade ist. Nun seien S_1 und S_2 zwei beliebige Kreise mit nichtverschwindendem Radius, die sich in einem Punkt A schneiden; S_1' und S_2' seien die sich im Punkt A' schneidenden Kreise, in die S_1 und S_2 bei einer Inversion übergehen. In diesem Fall gilt (Abb. 20)

$$\sphericalangle (t_1, AO) = \sphericalangle (A'O, t_1'), \quad \sphericalangle (AO, t_2) = \sphericalangle (t_2', A'O),$$

woraus

$$\sphericalangle (t_1, t_2) = \sphericalangle (t_2', t_1')$$

folgt, was zu zeigen war.

Insbesondere folgt aus der Eigenschaft B der Inversion, daß *eine nichtentartete Inversion zwei beliebige sich berührende Kreise in zwei sich berührende Kreise überführt.*

4.3. Der Satz von Pascal. Die Inversion wird häufig beim Beweis geometrischer Sätze angewandt. Oft gelingt es, die Zeichnung zu einem sich auf Kreise beziehenden geometrischen Satz mit Hilfe einer Inversion so zu verändern, daß einige der in dieser Zeichnung auftretenden Kreise in Geraden übergehen und die Zeichnung dadurch vereinfacht wird; beweisen wir dann den durch die transformierte Zeichnung veranschaulichten neuen, einfacheren Satz, so folgt daraus, daß auch der Satz, von dem wir ausgingen, gültig ist. Das Vereinfachen von Zeichnungen mit Hilfe der Inversion liegt auch vielen Anwendungen dieser Transformation bei geometrischen Konstruktionsaufgaben zugrunde. Wir verweisen den Leser diesbezüglich z. B. auf die ersten vier Bücher des am Schluß des Artikels angegebenen Literaturverzeichnisses;[1]) hier wollen wir uns auf ein einfaches, aber effektvolles Beispiel etwas anderen Charakters beschränken.

Wir zeigen, daß *die Schnittpunkte P, Q und R gegenüberliegender Seiten A_1A_2 und A_4A_5, A_2A_3 und A_1A_6, A_3A_4 und A_6A_1 eines beliebigen* (möglicherweise sich selbst überschneidenden) *in einen Kreis S einbeschriebenen Sechsecks $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ auf einer Geraden liegen* (Fascalscher Satz).

Es sei S_1 ein beliebiger Kreis, der S in den Punkten A_1 und A_4 schneidet; S_2 der Kreis, in den S_1 durch die Inversion mit dem Zentrum P und der Potenz $k_1 = (PA_1) \cdot (PA_2) = (PA_4) \cdot (PA_5)$ übergeführt wird (S_2 geht durch die Punkte A_2 und A_5); S_3 der Kreis, in den die Inversion mit dem Zentrum Q und der Potenz $k_2 = (QA_2) \cdot (QA_3) = (QA_5) \cdot (QA_6)$ den Kreis S_2 überführt (S_3 geht durch die Punkte A_3 und A_6); $\overline{S}_1$ der Kreis, in den die Inversion mit dem Zentrum R und der Potenz $k_3 = (RA_3) \cdot (RA_4) = (RA_6) \cdot (RA_1)$ den Kreis S_3 überführt ($\overline{S}_1$ geht wiederum durch die Punkte A_4 und A_1). Schließlich bezeichnen wir noch die Tangenten an S in den Punkten A_1, A_2, A_3 und A_4 mit t_1, t_2, t_3 und t_4 und die Tangenten an S_1, S_2, S_3 und $\overline{S}_1$ in den gleichen Punkten mit u_1, u_2, u_3 und $\bar{u}_1$ (Abb. 21). Man erkennt leicht, daß bei allen drei Inversionen der Kreis S in sich selbst übergeht.

[1]) Vgl. auch „G.T.", S. 64–66, 139–140, sowie den Artikel „Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen", S. 164ff.

Nach der Eigenschaft B der Inversion gilt mithin

$$\sphericalangle(t_1, u_1) = \sphericalangle(u_2, t_2) = \sphericalangle(t_3, u_3) = \sphericalangle(\bar{u}_1, t_4).$$

Die Gleichung $\sphericalangle(t_1, u_1) = \sphericalangle(\bar{u}_1, t_4)$ besagt aber, daß die Kreise S_1 und $\bar{S}_1$, die S beide in den Punkten A_1 und A_4 schneiden, in diesen Punkten mit dem Kreis S (nach Größe und Orientierung) gleiche Winkel bilden; daraus folgt aber, daß diese Kreise zusammenfallen. Also sind die Punkte P, Q und R die Zentren von Inversionen, die S_1 in S_2, S_2 in S_3

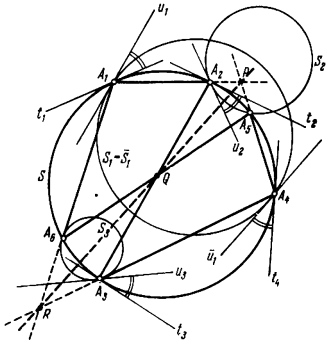


Abb. 21

und S_3 in S_1 überführen, und damit zugleich Ähnlichkeitszentren dieser Kreise (vgl. den Beweis der Eigenschaft A der Inversion). Hieraus folgt aber, daß diese Punkte auf einer Geraden liegen (S. 499)[1]).

§ 5. Punktgeometrie der Kreise

5.1. Die Kreisebene. Der Umstand, daß die Geraden und Kreise die einzigen in der Elementargeometrie untersuchten Kurven sind, legt es nahe, nur solche Transformationen der Ebene zu betrachten, die Geraden und Kreise wieder in Geraden und Kreise überführen. Es ist nun klar, daß es keine (stetige) Transformation der Ebene gibt, die *jedem* Punkt A der Ebene einen anderen Punkt A' zuordnet, die eine geschlossene Kurve – einen Kreis – in eine nicht geschlossene – eine Gerade – überführt; demzufolge muß jede solche Transformation jede Gerade in eine Gerade und jeden Kreis in einen Kreis über-

[1]) Vgl. auch „G.T.", S. 88.

führen.[1]) Auf diese Weise gelangen wir zu den Ähnlichkeitstransformationen als den einzigen Transformationen der Ebene, bei denen jede Gerade in eine Gerade und jeder Kreis in einen Kreis übergeht,[2]) und diese Transformationen sind auch gerade diejenigen, die im Lehrgang der Elementargeometrie systematisch betrachtet werden.

Das eben Gesagte widerspricht nicht dem Sachverhalt, daß die Inversionen auch Kreise in Geraden und Geraden in Kreise überführen; denn die Inversionen sind keine Transformation der *ganzen Ebene*, da dem Zentrum O einer Inversion kein Bildpunkt in der Ebene entspricht. Andererseits läßt es gerade der Umstand, daß eine Inversion die Gesamtheit aller Kreise und Geraden in die Gesamtheit eben dieser Kurven überführt, als äußerst wünschenswert erscheinen, diese Transformationen in die Klasse der Transformationen aufzunehmen, mit denen die Elementargeometrie operiert. Dazu müßte man aber zunächst erst einmal die Möglichkeit haben, die Inversionen als Transformationen der ganzen Ebene betrachten zu können und nicht nur der Ebene, aus der ein Punkt herausgenommen wurde: Andernfalls würden nämlich die Inversionen jede Gerade in einen Kreis überführen, aus dem ein Punkt herausgenommen wurde (da wir das Zentrum der Inversion stets aus der Betrachtung ausschließen müssen), und wenn wir zwei oder mehrere Inversionen hintereinander ausführen, kompliziert sich die Sachlage ganz erheblich.

Der Ausweg aus dieser Situation besteht in folgendem: Wir vereinbaren zu sagen, daß bei einer Inversion ihr Zentrum O in einen fiktiven „unendlich fernen Punkt" Ω der Ebene übergeht; umgekehrt soll dem „unendlich fernen Punkt" Ω bei einer beliebigen Inversion das Zentrum O der Inversion entsprechen (vgl. S. 51). Obgleich diese Terminologie eigentlich auch nur besagt, daß eine Inversion ihr Zentrum O in keinen real existierenden Punkt der Ebene überführt, ist sie doch in vielerlei Hinsicht äußerst vorteilhaft. Da z. B. bei einer Inversion die Geraden in Kreise übergehen, die durch das Zentrum O der Inversion verlaufen, müssen wir uns vorstellen, daß alle Geraden der Ebene durch den „unendlich fernen Punkt" gehen; diese Vereinbarung beseitigt aber den grundsätzlichen Unterschied zwischen Geraden und Kreisen, weil nun auch die Geraden geschlossene Kurven werden, nämlich Kurven, die „sich im Unendlichen schließen".[3]) Die auf diese Weise definitionsgemäß durch einen „unend-

---

[1]) Würde nämlich eine solche Transformation eine Gerade s in einen Kreis S überführen, so müßte sie auch eine s in einem Punkt A schneidende Gerade s_1 in eine Gerade oder einen Kreis S_1' überführen, die oder der mit S genau *einen* Punkt A' gemeinsam hat, d. h. S im Punkt A' berührt. Das ist jedoch nicht möglich, da die Geraden s und s_1 die Ebene in vier Teile zerlegen (und zwar derart, daß man zwei beliebige, verschiedenen Teilen der Ebene angehörende Punkte nicht durch eine Gerade oder einen Kreis verbinden kann, die weder s noch s_1 schneiden), während zwei einander berührende Kreise (wie auch ein Kreis und eine ihn berührende Gerade) S und S_1' die Ebene nur in drei Teile zerlegen.

[2]) Vgl. „G.T.", S. 57. Zu dem Folgenden vgl. auch „G.T.", S. 50–53.

[3]) Diese Aussage bedeutet, daß ein Punkt A, wenn er sich auf einer Geraden *in einer beliebigen ihrer Richtungen* unbeschränkt entfernt, zum „unendlich fernen Punkt" strebt (in dem Sinne, daß der Punkt A', in den eine Inversion mit dem Zentrum O den Punkt A überführt, zum Punkt O strebt).

lich fernen Punkt" ergänzte Ebene bezeichnet man als *Kreisebene*. Der Begriff der Kreisebene ist natürlich in gleichem Maße eine mathematische Abstraktion wie der Begriff der gewöhnlichen (unbeschränkten) Ebene; in der modernen Mathematik (insbesondere in der komplexen Funktionentheorie) spielt die Kreisebene eine äußerst wichtige Rolle.

5.2. Die Kreistransformationen. Die Transformationen der Kreisebene, die Geraden und Kreise wieder in Geraden und Kreise, d. h. die Gesamtheit aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius in sich überführen, werden bereits nicht mehr durch die Ähnlichkeitstransformationen allein erschöpft; ein Beispiel anderer Art liefern uns die Inversionen. Alle derartigen Transformationen heißen *Kreistransformationen*[1]). Man erkennt leicht, daß jede Kreistransformation der Kreisebene entweder eine Ähnlichkeitstransformation oder eine Inversion oder ein Produkt aus einer Ähnlichkeitstransformation und einer Inversion ist. In der Tat: Läßt eine Kreistransformation den „unendlich fernen Punkt" fest, so führt sie Geraden („Kreise mit unendlichem Radius" oder „Kreise, die durch den unendlich fernen Punkt gehen") wieder in Geraden und Kreise mit endlichem Radius in Kreise mit endlichem Radius über, d. h., sie ist eine Ähnlichkeitstransformation. Wir betrachten nun eine Kreistransformation K, die irgendeinen „endlichen" (d. h. gewöhnlichen) Punkt O der Ebene in Ω überführt.

Es sei dann I eine beliebige Inversion mit dem Zentrum O und $\Pi = K \cdot I^{-1}$ gesetzt. (Wenn also die Transformation K einen beliebig gegebenen Punkt A in den Punkt A' überführt und der Punkt A bei der Inversion I in den Punkt A_1 übergeht, führt Π den Punkt A_1 in den Punkt A' über; fällt der Punkt A_1 stets mit dem Punkt A' zusammen, so stimmt K mit I überein und ist folglich eine Inversion.)[2]) Die Transformation Π ist offenbar auch eine Kreistransformation; denn führt die Transformation K einen gewissen Kreis S in den Kreis S' über und geht S bei der Inversion I in den Kreis S_1 über, so führt Π den (beliebig wählbaren) Kreis S_1 in den Kreis S' über.[3]) Bei der Transformation Π gehen aber Geraden („Kreise durch Ω") stets in Geraden über; denn ist S_1 eine Gerade, so ist $S = I(S_1)$ ein Kreis durch O und folglich $S' = K(S)$ eine Gerade (ein „Kreis durch Ω"). Mithin ist Π eine Ähnlichkeitstransformation, was unsere Behauptung beweist. (Die beliebig gewählte Kreistransformation K stimmt mit dem Produkt $\Pi \cdot I$ überein.)

5.3. Der Begriff der Kreisgeometrie. Gegenstand der *Kreisgeometrie* (oder genauer der *Punkt-Kreisgeometrie*; der Sinn des Zusatzes „Punkt-" ergibt sich

[1]) Sie werden auch Möbiussche *Kreisverwandtschaften* oder Möbiussche *Transformationen* genannt.

[2]) Zur Definition des Produktes von geometrischen Transformationen vgl. „G.T.", S. 74ff. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[3]) Dies bedeutet im wesentlichen, daß die Kreistransformationen eine Gruppe von geometrischen Transformationen der Kreisebene bilden; vgl. S. 96. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

aus den weiteren Darlegungen) ist die Untersuchung derjenigen Eigenschaften geometrischer Figuren, die allen durch Kreistransformationen auseinander hervorgehenden Figuren gemeinsam sind.[1]) In dieser Geometrie spielt der Begriff des Kreises (mit nichtverschwindendem Radius) die grundlegende Rolle; die Geraden haben hier keine selbständige Bedeutung, da man sie durch Kreistransformationen in Kreise überführen kann. Ebenso wie in der gewöhnlichen Geometrie hat in dieser Geometrie die Lage eines Kreises in der Ebene keinen Einfluß auf seine Eigenschaften (verschieden gelegene Kreise haben die gleichen Eigenschaften); aber man kann die Kreise auch nicht nach der Größe ihrer Radien unterscheiden, denn die Kreistransformationen führen auch Kreise mit verschiedenen Radien ineinander über. Dagegen spielt der Winkel zwischen Kreisen in der Kreisgeometrie die gleiche Rolle wie in der gewöhnlichen Geometrie, da er bei beliebigen Kreistransformationen erhalten bleibt (vgl. S. 483).

Wir können hier Einzelheiten der Kreisgeometrie nicht näher erörtern; der Kreisgeometrie sind in der mathematischen Fachliteratur eine ganze Reihe sehr ausführlicher und gehaltvoller Arbeiten gewidmet (von ihnen ist in der Literaturangabe am Schluß des Artikels nur das Buch von BLASCHKE [8] erwähnt). Es sei nur bemerkt, daß die Begriffe Kreisbüschel und -bündel in der Kreisgeometrie eine sehr wesentliche Rolle spielen; diese Begriffe sind hier sinnvoll, da jede Kreistransformation ein Kreisbüschel wieder in ein Kreisbüschel und ein Kreisbündel wieder in ein Kreisbündel überführt.[2])

B. DER KREIS ALS MENGE VON GERADEN

§ 6. Gerichtete Kreise

6.1. Die Analogie zwischen den Eigenschaften der Punkte und der Geraden. Eine große Rolle spielt in der Geometrie die Tatsache, daß die Punkte in mancherlei Hinsicht ähnliche Eigenschaften haben wie die Geraden.[3]) So kann man z. B. einen Punkt durch zwei (durch ihn hindurchgehende) Geraden festlegen

[1]) Vgl. „G.T.", § 6.

[2]) Aus der Tatsache, daß man ein Kreisbüschel als Menge aller Kreise definieren kann, die zu zwei gegebenen Kreisen orthogonal sind, folgt sofort, daß jede Kreistransformation ein Kreisbüschel wieder in ein Büschel überführt (da zueinander orthogonale Kreise bei einer Kreistransformation in zueinander orthogonale Kreise übergehen). Etwas weniger offensichtlich ist, daß bei einer Kreistransformation ein Kreisbündel in ein Bündel übergeht; der Beweis hierfür stellt eine unkomplizierte, aber aufschlußreiche Aufgabe dar, deren Lösung wir dem Leser überlassen.

[3]) Vgl. dazu „G.T.", S. 122–126.

und eine Gerade durch zwei (auf ihr liegende) Punkte; die zwischen zwei gegebenen Punkten A und B liegenden Punkte einer Geraden bilden die Strecke $\overline{AB}$ und die durch einen Punkt gehenden Geraden, die zwischen zwei gegebenen Geraden a und b liegen, einen Winkel (die Verwandtschaft der Begriffe Strecke und Winkel wird auch durch die Darlegungen in 1.1. illustriert); durch die drei Ecken eines Dreiecks geht genau ein Kreis (der „Umkreis" des Dreiecks), und es gibt genau einen Kreis, der die drei Seiten eines Dreiecks berührt (den „Inkreis" des Dreiecks) usw. Das Ziel des vorliegenden Abschnitts ist es, dieser Analogie genauer nachzuspüren.

Im Abschnitt A sahen wir einen Kreis stets als Punktmenge an; diese Auffassung vom Kreis beherrscht auch den Schulstoff der Geometrie. Im Gegensatz dazu wollen wir jetzt den Kreis als die Menge aller der Geraden ansehen,

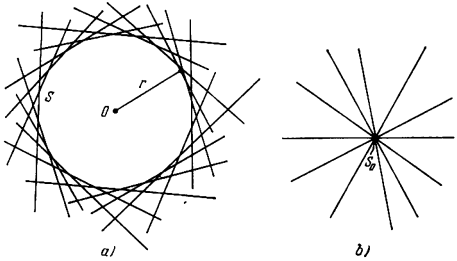


Abb. 22

die Tangenten an ihn sind; wir verstehen also jetzt unter einem *Kreis* S die Menge aller der Geraden der Ebene, die von einem festen Punkt O, dem *Mittelpunkt* des Kreises, einen gegebenen Abstand r haben (Abb. 22a). Dabei soll die Größe r, der *Radius* des Kreises, auch den Wert Null annehmen dürfen; in diesem Fall gelangen wir zu einem Punkt S_0, der hierbei als Menge aller durch S_0 hindurchgehenden Geraden erscheint (Abb. 22b). Damit ist von dem in diesem Artikel eingenommenen Standpunkt aus auch der Punkt ein Spezialfall des Kreises (ein „Kreis vom Radius Null").

6.2. Eine neue Ausweitung des Kreisbegriffs. Es sei bemerkt, daß die Analogie zwischen dem Kreis als Punktmenge und dem Kreis als Menge von Geraden in vieler Hinsicht durchbrochen wird. So können z. B. zwei Kreise nicht mehr als zwei gemeinsame Punkte, aber bis zu vier gemeinsame Geraden (d. h. gemeinsame Tangenten) besitzen; die Mittelpunkte aller durch zwei gegebene Punkte gehenden Kreise liegen auf einer bestimmten Geraden (Abb. 23a), wohingegen die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Geraden berühren,

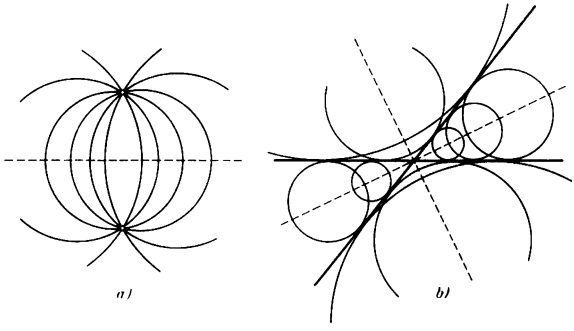


Abb. 23

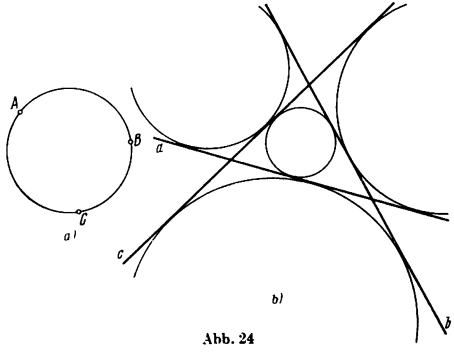


Abb. 24

zwei Geraden ausfüllen (Abb. 23b); es existiert genau ein Kreis, der durch drei gegebene Punkte geht (Abb. 24a), aber es gibt insgesamt vier Kreise, die drei gegebene Geraden berühren (Abb. 24b) usw. Um diese Divergenzen zu beseitigen, betrachteten wir in diesem Abschnitt stets *gerichtete* Kreise und Geraden, d. h. Kreise und Geraden, auf denen eine bestimmte, in Abbildungen durch einen Pfeil gekennzeichnete Richtung ausgezeichnet ist (vgl. S. 460). Die gerichteten Kreise nennt man auch *Zykel* und die gerichteten Geraden *Speere*. Dabei wollen wir annehmen, daß sich zwei (gerichtete) Kreise S_1 und S_2 nur dann berühren, wenn die Richtungen dieser Kreise im gemeinsamen Punkt übereinstimmen (Abb. 25a); dagegen sollen die beiden in Abb. 25b

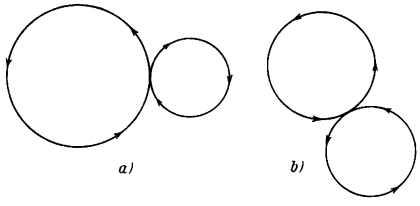


Abb. 25

dargestellten Kreise nun nicht mehr als sich berührende Kreise angesehen werden. Die gleiche Bedingung stellen wir auch an das Tangieren einer (gerichteten) Geraden S_0 (eines „Kreises mit unendlichem Radius") und eines (gerichteten) Kreises S_1. Wir nennen zwei „gerichtete" Geraden nur dann parallel, wenn die Richtungen dieser Geraden übereinstimmen. Die Zweckmäßigkeit der Einführung von gerichteten Geraden und Kreisen findet ihre Bestätigung darin, daß zwei (gerichtete) Kreise nicht mehr als zwei gemeinsame (gerichtete) Tangenten haben können (Abb. 26a), die Mittelpunkte aller (gerichteten) Kreise, die zwei gegebene (gerichtete) Geraden berühren, auf einer Geraden liegen (Abb. 26b), ein einziger (gerichteter) Kreis existiert, der drei gegebene (gerichtete) Geraden berührt (Abb. 26c) usw. Im folgenden werden wir in der Regel das Eigenschaftswort „gerichtet" fortlassen.

Um die oben gegebene Definition des Kreises aufrechterhalten zu können, müssen wir jetzt zusätzliche Vereinbarungen treffen; denn die Geraden, die vom Punkt O den Abstand r haben, können den einen oder den anderen der beiden sich nur durch die Richtung voneinander unterscheidenden Kreise mit dem Radius r berühren. Wir legen fest, daß der Abstand des Punktes O von der (gerichteten) Geraden l *positiv* sein soll, wenn O *links* von l liegt (Abb. 27a), und negativ im entgegengesetzten Fall. Dadurch ist es möglich, daß der Radius eines Kreises auch negativ werden kann; den (gerichteten) Kreis S mit dem Zentrum O und dem (positiven, negativen oder verschwindenden) Radius r kann man nun wie vorher als „geometrischen Ort" der (gerichteten) Geraden

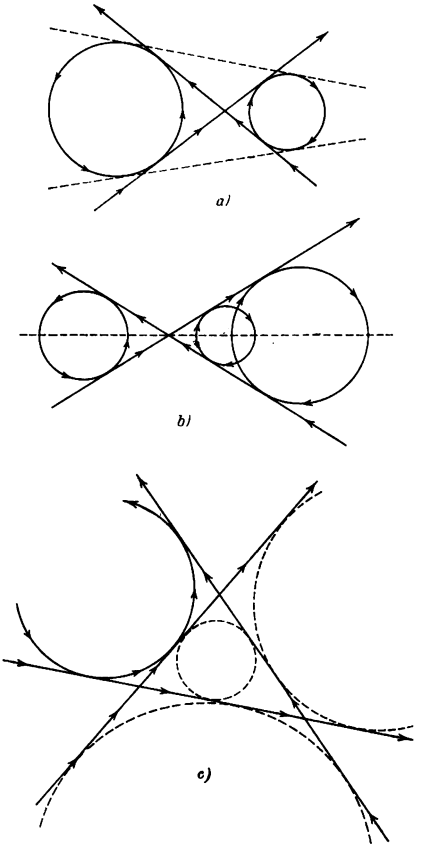


Abb. 26

ansehen, die von O den Abstand r haben. Offensichtlich haben dann alle entgegen dem Uhrzeigersinn gerichteten Kreise einen positiven Radius und die im Uhrzeigersinn gerichteten Kreise einen negativen Radius (Abb. 27b).

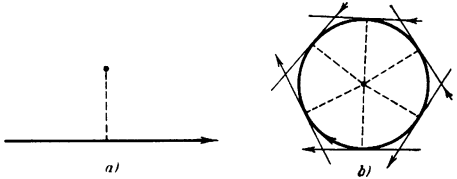


Abb. 27

6.3. Die Tangentenentfernung zweier Kreise. Unter dem (gerichteten) Winkel zwischen zwei (gerichteten) Geraden a und b wollen wir den Winkel zwischen den (durch die Pfeile angegebenen) Richtungen dieser Geraden verstehen (Abb. 28a); dadurch ist die Größe $\measuredangle (a, b)$ eines gerichteten Winkels

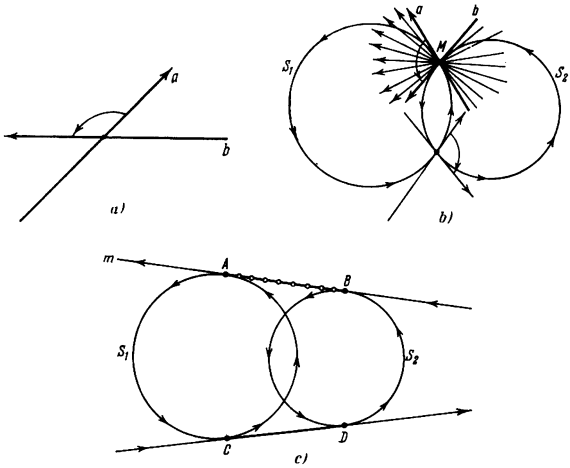


Abb. 28

bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt (vgl. S. 460f.). Unter dem *Winkel* zwischen zwei (gerichteten) Kreisen S_1 und S_2 verstehen wir den Winkel zwischen den (gerichteten) Tangenten an S_1 und S_2 in einem ihrer Schnittpunkte (Abb. 28b); dabei unterscheiden sich die Größen der Winkel, die von den Kreisen S_1 und S_2 in ihren beiden Schnittpunkten gebildet werden, durch ihr Vorzeichen (vgl. auch S. 463). Geometrisch ist der Winkel zwischen S_1 und S_2 als die Menge aller Geraden aufzufassen, die durch den gemeinsamen Punkt M der Kreise S_1 und S_2 gehen und zwischen den Tangenten a und b an diese Kreise in M liegen.

Neben den Winkeln zwischen S_1 und S_2 werden wir auch die Menge der Punkte betrachten, die der gemeinsamen Geraden (gemeinsamen Tangente) m der Kreise S_1 und S_2 angehören und zwischen den Punkten A und B dieser Kreise liegen (Abb. 28c), d. h. die Strecke $\overline{AB}$, deren Länge wir die *Tangentenentfernung* zwischen S_1 und S_2 nennen. Da die Gerade m gerichtet ist, kann man diese Länge als orientierte Länge ansehen; es sei bemerkt, daß die Tangentenentfernung zwischen zwei Kreisen S_1 und S_2 (in dieser Reihenfolge genommen) verschiedene Vorzeichen hat, wenn man sie auf der einen oder der anderen der gemeinsamen Tangenten dieser Kreise mißt (vgl. die Richtung der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in Abb. 28c). Die Tangentenentfernung zwischen sich berührenden (und nur zwischen sich berührenden) Kreisen ist gleich Null (wie auch der Winkel zwischen sich berührenden Kreisen gleich Null ist). Für Kreise, die keine gemeinsame Tangente besitzen, ist die Tangentenentfernung (wie auch der Winkel zwischen ihnen) nicht definiert.

Die Tangentenentfernung zweier Kreise S_1 und S_2 verallgemeinert den Begriff des Abstands zwischen Punkten; sie ist mit diesem Begriff identisch, wenn S_1 und S_2 „Kreise vom Radius Null" sind. In diesem Abschnitt wird der Begriff Tangentenentfernung eine große Rolle spielen.

§ 7. Ähnlichkeitspunkt und Ähnlichkeitsachse

7.1. Die Potenz einer Geraden in bezug auf einen Kreis. Wir beweisen zunächst den folgenden Satz, der dem Satz analog ist, den wir der Definition der Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis zugrunde legten (vgl. § 2, S. 465):

Wählt man auf einer Geraden m mehrere Punkte, die alle außerhalb eines gegebenen Kreises S liegen, so hat das Produkt der Tangens der halben Winkel, die die Gerade m mit den durch einen der Punkte gehenden Tangenten an S bildet $\left(\text{das Produkt } \tan\frac{\sphericalangle(m,a)}{2}\cdot\tan\frac{\sphericalangle(m,b)}{2} \text{ in Abb. 29a, b}\right)$ *für alle betrachteten Punkte den gleichen Wert.*

Zum Beweis fällen wir vom Mittelpunkt O des Kreises S das Lot OP auf die Gerade m; ferner bezeichnen wir mit A und B die Berührungspunkte der durch den Punkt M der Geraden m gehenden Tangenten a und b an S. Aus dem

Dreieck OAP erhalten wir nach dem Tangenssatz

$$\frac{\tan\frac{\angle PAO - \angle OPA}{2}}{\tan\frac{\angle PAO + \angle OPA}{2}} = \frac{|OP| - |OA|}{|OP| + |OA|}.$$

Da im Viereck $OAMP$ ein Paar gegenüberliegender Winkel rechte Winkel sind, kann man dem Viereck einen Kreis umschreiben; folglich ist $\angle PAO = \angle PMO$ und $\angle OPA = \angle OMA$ (da es sich jeweils um Winkel über demselben Kreisbogen handelt). Da aber

$$\angle PMO + \angle OMA = \angle PMA$$

und

$$\angle PMO - \angle OMA = \angle PMO + \angle OMB = \angle PMB$$

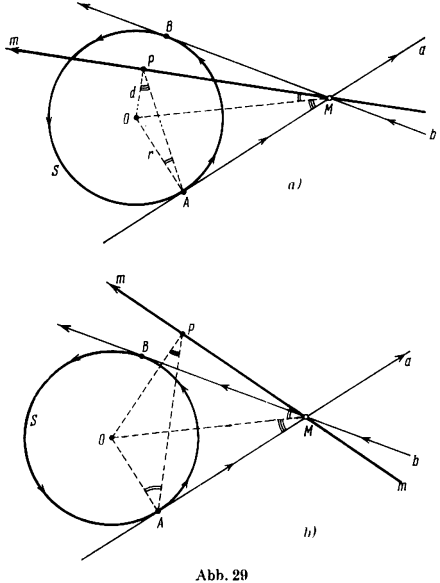


Abb. 29

ist, erhalten wir

$$\frac{\tan\dfrac{\angle PMB}{2}}{\tan\dfrac{\angle PMA}{2}} = \frac{|OP| - |OA|}{|OP| + |OA|}.$$

Nach Abb. 29a, b ist jedoch

$$\angle PMB = +\measuredangle(m, b), \quad \angle PMA = \pi + \measuredangle(m, a)$$

(man beachte die Richtung der Winkel!); folglich gilt

$$\tan\frac{\angle PMB}{2} = +\tan\frac{\measuredangle(m, b)}{2}, \quad \tan\frac{\angle PMA}{2} = -\cot\frac{\measuredangle(m, a)}{2}$$

und somit

$$\tan\frac{\measuredangle(m, a)}{2} \cdot \tan\frac{\measuredangle(m, b)}{2} = \frac{r - d}{r + d},$$

wobei $r = |OA|$ der Radius des Kreises S und $d = |OP|$ der Abstand des Zentrums von S von der Geraden m ist. Diese letzte Formel gilt für beliebige Werte von r und d (unabhängig von deren Größe und Vorzeichen; vgl. S. 491);[1]) damit ist zugleich der behauptete Satz bewiesen.

Das Produkt $\tan\frac{\measuredangle(m, a)}{2} \cdot \tan\frac{\measuredangle(m, b)}{2}$ bezeichnet man als die *Potenz der* (gerichteten) *Geraden m in bezug auf den* (gerichteten) *Kreis S*. Offenbar ist die Potenz einer Geraden m in bezug auf einen Kreis S (die gleich dem Quotienten $\frac{r - d}{r + d}$ ist) positiv, wenn die Gerade m den Kreis S schneidet, und negativ im entgegengesetzten Fall. (Aus Abb. 29a, b kann man ersehen, daß im ersten Fall die Winkel $\measuredangle(m, a)$ und $\measuredangle(m, b)$ gleich gerichtet und im zweiten Fall entgegengesetzt gerichtet sind.) Die Potenz m bezüglich S verschwindet dann und nur dann, wenn die Gerade m den Kreis S berührt; sie ist gleich 1 dann und nur dann, wenn die Gerade m durch den Mittelpunkt des Kreises S geht, und -1 dann und nur dann, wenn S ein Punkt ist, durch den die Gerade m nicht hindurchgeht. Wenn m der Lage in der Ebene nach mit einer Tangente an den Kreis S zusammenfällt, aber andere Richtung als diese hat, ist die Potenz der Geraden m bezüglich des Kreises S als unendlich anzusehen; ist schließlich S ein Punkt und m eine durch S gehende Gerade, so kann die Potenz überhaupt nicht definiert werden. Es sei noch bemerkt, daß die Potenz einer Geraden m in bezug auf einen Kreis S gleich dem Quadrat des Tangens des halben von der Geraden m mit S gebildeten Winkels ist, falls die Gerade m den Kreis S schneidet; zum Beweis dieser Behauptung braucht man nur als Punkt M einen der Schnittpunkte von m und S zu betrachten (Abb. 29a).

---

[1]) Wir empfehlen dem Leser, die weiteren der möglichen Fälle selbständig zu untersuchen (in Abb. 29a, b sind r und d positiv).

7.2. Der Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise. Wir betrachten nun zwei eigentliche Kreise S_1 und S_2 und suchen *alle Geraden, die bezüglich S_1 und S_2 die gleiche Potenz haben*; diese Aufgabe ist der Aufgabe analog, alle Punkte zu finden, die bezüglich zweier gegebener (nicht gerichteter) Kreise die gleiche Potenz haben (vgl. 2.2.). Ist m eine solche Gerade und sind d_1, d_2 die Abstände der Mittelpunkte O_1 und O_2 der Kreise S_1 und S_2 von dieser Geraden, r_1 und r_2 die Radien dieser Kreise, so gilt nach dem oben bewiesenen Sachverhalt

$$\frac{r_1 - d_1}{r_1 + d_1} = \frac{r_2 - d_2}{r_2 + d_2},$$

woraus sich durch Multiplikation über Kreuz und einfache Umformung

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$$

ergibt. Aus der letzten Beziehung folgt sofort, daß *bei $r_1 = r_2$ auch $d_1 = d_2$, d. h. die Gerade m der Verbindungsgeraden O_1O_2 der Mittelpunkte parallel sein muß*. Wenn man diesen Fall aber ausschließt, ist $d_1 \neq d_2$, und die Gerade m schneidet die Verbindungsgerade der Mittelpunkte in einem Punkt O; dabei folgt aus Abb. 30 sofort die Beziehung

$$\frac{(OO_1)}{(OO_2)} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

durch die die Lage des Punktes O eindeutig festgelegt ist. Geht umgekehrt eine Gerade m durch denjenigen Punkt O auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte, für den $\frac{(OO_1)}{(OO_2)} = \frac{r_1}{r_2}$ ist, so gilt

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{(OO_1)}{(OO_2)} = \frac{r_1}{r_2},$$

woraus folgt, daß diese Gerade in bezug auf die Kreise S_1 und S_2 die gleiche Potenz hat. Wir können also schließen, daß *im Fall $r_1 \neq r_2$ die Geraden, die bezüglich der Kreise S_1 und S_2 gleiche Potenzen haben, jene (und nur jene) Geraden sind, die die Verbindungsgerade O_1O_2 der Mittelpunkte in dem Punkt O schneiden, für den*

$$\frac{(OO_1)}{(OO_2)} = \frac{r_1}{r_2}$$

gilt. Dieser Punkt O heißt der *Ähnlichkeitspunkt der Kreise S_1 und S_2*.[1])

Haben die Kreise S_1 und S_2 zwei gemeinsame Tangenten (Abb. 30a, b), so fällt ihr Ähnlichkeitspunkt offensichtlich mit dem Schnittpunkt der gemein-

[1]) Vgl. „G.T.", S. 88–90. (Es sei bemerkt, daß nicht gerichtete Kreise zwei Ähnlichkeitspunkte besitzen, während gerichtete Kreise nur einen Ähnlichkeitspunkt haben — einen „äußeren", wenn die Kreise gleichgerichtet sind, und einen „inneren" im entgegengesetzten Fall.)

samen Tangenten zusammen; das folgt daraus, daß die gemeinsamen Tangenten bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz (nämlich Null) besitzen. Berühren sich die Kreise S_1 und S_2, so hat ihre einzige gemeinsame Tangente bezüglich S_1 und S_2 ebenfalls gleiche Potenz, und daraus folgt, daß der Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise ihr Berührungspunkt ist. Kreise gleichen Radius

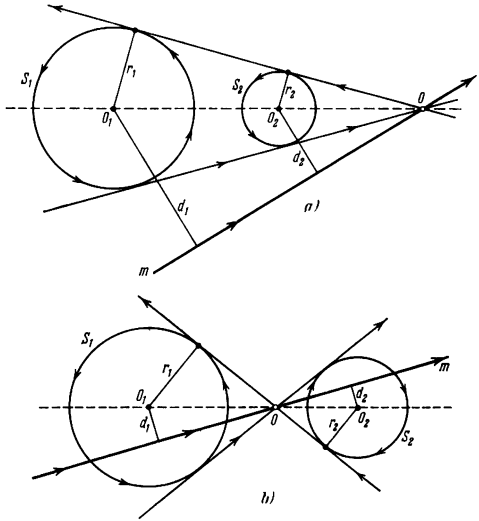


Abb. 30

haben keinen Ähnlichkeitspunkt, da sich in diesem Fall die Geraden, die bezüglich beider Kreise gleiche Potenz haben, nicht schneiden. Es sei noch bemerkt, daß alle durch den Ähnlichkeitspunkt der Kreise S_1 und S_2 gehenden Geraden, die einen dieser Kreise schneiden, auch den zweiten Kreis schneiden, und zwar unter dem gleichen Winkel wie den ersten (da die Potenz einer Geraden m bezüglich eines sie schneidenden Kreises S durch den Winkel zwischen m und S eindeutig bestimmt wird); hieraus kann man nochmals ersehen, daß für Kreise S_1 und S_2 mit zwei gemeinsamen Tangenten der Ähnlichkeitspunkt O mit dem Schnittpunkt dieser Tangenten zusammenfällt. Wichtig ist noch die Feststellung, daß für zwei gleichgerichtete Kreise S_1 und S_2, deren Radien r_1 und r_2 also gleiches Vorzeichen haben, die Abstände d_1 und d_2 ebenfalls gleiches

Vorzeichen besitzen (wegen $d_1 : d_2 = r_1 : r_2$) und die Mittelpunkte O_1, O_2 der Kreise deshalb beide *auf derselben Seite* jeder durch den Ähnlichkeitspunkt gehenden Geraden liegen. Folglich liegt bei gleichgerichteten Kreisen der Ähnlichkeitspunkt *außerhalb* der Strecke $\overline{O_1O_2}$ (Abb. 30a). Haben dagegen die Kreise S_1 und S_2 entgegengesetzte Richtungen, so liegt ihr Ähnlichkeitspunkt *auf der* Strecke $\overline{O_1O_2}$ (Abb. 30b).

7.3. Die Ähnlichkeitsachse dreier Kreise. Wir betrachten nun drei Kreise S_1, S_2 und S_3. Fällt der Ähnlichkeitspunkt O_{12} der Kreise S_1 und S_2 nicht mit dem Ähnlichkeitspunkt O_{13} der Kreise S_1 und S_3 zusammen, so hat die Gerade

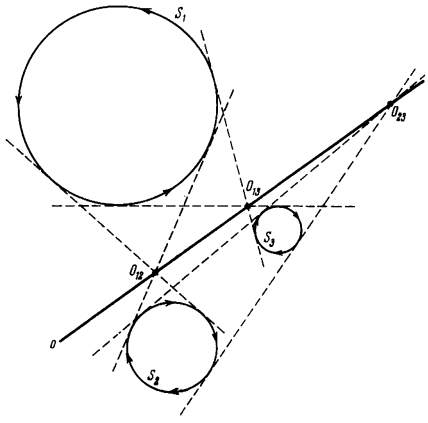


Abb. 31

$O_{12}O_{13}$ bezüglich S_1 und S_2 und bezüglich S_1 und S_3 die gleiche Potenz. Hieraus folgt, daß diese Gerade auch bezüglich S_2 und S_3 die gleiche Potenz hat und somit durch den Ähnlichkeitspunkt O_{23} der Kreise S_2 und S_3 geht (Abb. 31). Wir sehen also, daß *die paarweisen Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise* S_1, S_2 *und* S_3 *auf einer Geraden o liegen.*[1]) Diese Gerade heißt die *Ähnlichkeitsachse* der drei Kreise; man kann sie auch als die Gerade definieren, die bezüglich aller drei Kreise die gleiche Potenz hat. Fallen dagegen die Ähnlichkeitspunkte O_{12} und O_{13} zusammen, so hat jede durch den gemeinsamen Ähnlich-

[1]) Vgl. „G.T.", S. 90.

keitspunkt O gehende Gerade m die gleiche Potenz bezüglich S_1 und S_2 und bezüglich S_1 und S_3. Folglich hat m auch die gleiche Potenz bezüglich der Kreise S_2 und S_3, woraus folgt, daß O auch Ähnlichkeitspunkt der Kreise S_2 und S_3 ist. Der Fall, daß die paarweisen Ähnlichkeitspunkte mehrerer Kreise alle zusammenfallen, ist dem Fall des Zusammenfallens der paarweisen Potenzlinien von Kreisen analog (d. h. dem Fall, daß diese Kreise einem Büschel angehören); wir betrachten ihn ausführlicher im folgenden Paragraphen.

§ 8. Kreisreihen und Kreisnetze

8.1. Kreisreihen. Eine Menge von (gerichteten) Kreisen, die aus allen den Kreisen besteht, von denen je zwei einen gegebenen Punkt O als Ähnlichkeitspunkt haben, nennen wir eine (eigentliche) *Kreisreihe*; dabei rechnen wir den Punkt O selbst als *Zentrum* der Reihe ebenfalls zur Reihe hinzu (als „Kreis vom Radius Null" oder „Nullkreis" der Reihe). Außerdem definieren wir als Kreisreihen alle möglichen Mengen von Kreisen mit (nach Betrag und Vorzeichen) festem Radius r, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Geraden z liegen (eine „Reihe gleicher Kreise"; Abb. 32a); r darf dabei auch verschwinden, so daß die Menge aller Punkte einer Geraden ebenfalls als Reihe („Reihe von Nullkreisen") angesehen wird. Wenn zwei Kreise einer Reihe zwei (sich schneidende oder parallele) gemeinsame Tangenten m und n besitzen, die sich in ihrem Ähnlichkeitspunkt schneiden, berühren offenbar alle Kreise der Reihe die Geraden m und n (Abb. 32a, b); in diesem Fall heißt die Reihe (die dann aus allen m und n berührenden Kreisen besteht) eine *Reihe von Kreisen mit gemeinsamen Tangenten*. Berühren sich zwei Kreise einer (eigentlichen) Reihe in einem Punkt O, dann berühren sich alle Kreise der Reihe in diesem Punkt (Abb. 32c); in diesem Fall haben wir eine *Reihe sich berührender Kreise* vor uns (die einem Büschel sich berührender Kreise sehr ähnlich ist; vgl. 3.1.). Besitzen schließlich irgend zwei Kreise einer Reihe keine gemeinsamen Tangenten, so haben auch keine anderen zwei Kreise dieser Reihe eine gemeinsame Tangente; in diesem Fall liegt eine *Reihe von Kreisen ohne gemeinsame Tangenten* vor (Abb. 32d, e).[1])

Ein Spezialfall einer Kreisreihe ohne gemeinsame Tangenten ist eine Reihe konzentrischer Kreise, die aus allen Kreisen mit einem festen Punkt O als Mittelpunkt besteht (Abb. 32d). In allen anderen Fällen stimmen die Mittelpunkte der Kreise der Reihe nicht überein, sondern füllen eine gewisse Gerade z aus, die man die *Zentralachse* der Reihe nennt. (Wenn die Reihe ein Zentrum O hat, ist z die Gerade, welche O mit dem Mittelpunkt irgendeines Kreises S der Reihe verbindet.) Offenbar ist dabei jeder Punkt der Zentralachse z Mittelpunkt eines (und auch nur eines) Kreises der Reihe.

[1]) Diese drei Arten von Kreisreihen (vgl. Abb. 32a, b; 32c und 32d, e) werden auch *elliptische*, *parabolische* bzw. *hyperbolische Kreisreihen* genannt.

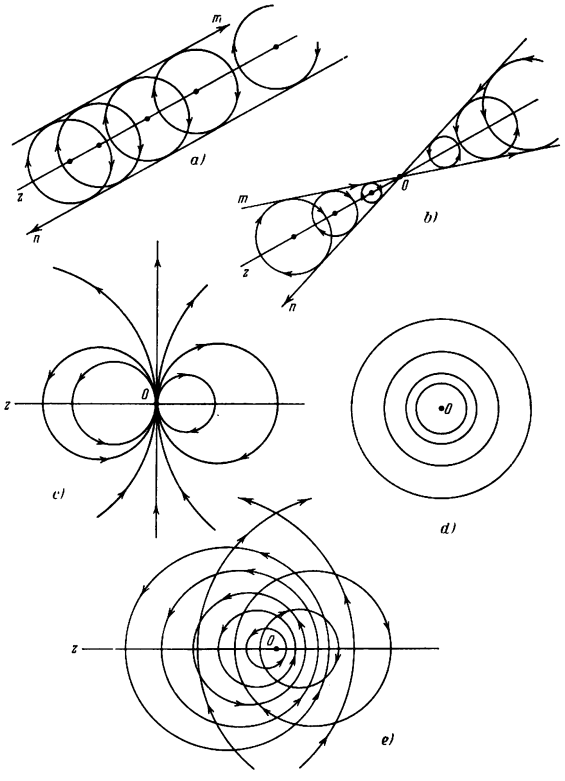


Abb. 32

8.2. Kreisnetze. Wir betrachten jetzt die Menge aller (gerichteten) Kreise, deren je drei dieselbe Gerade o als Ähnlichkeitsachse haben; eine solche Menge von Kreisen heißt ein (eigentliches) *Kreisnetz* und die Gerade o die *Achse* des Netzes. Zu den Kreisnetzen rechnen wir ferner die Gesamtheit aller Kreise der Ebene mit (nach Betrag und Vorzeichen) festem Radius r (das „Netz gleicher Kreise"); für $r = 0$ erhalten wir die Menge aller Punkte der Ebene, die damit ebenfalls zu den Kreisnetzen gezählt wird (als „Netz der Kreise vom Radius Null"). Offenbar kann man ein eigentliches Kreisnetz auch als die Menge aller Kreise definieren, bezüglich derer eine gegebene Gerade m eine gegebene Potenz k hat; die Zahl k heißt die *Potenz* des Netzes. Hieraus ergibt sich, daß man ein eigentliches Netz auch als die Menge aller Kreise definieren kann, deren Radius r mit dem Abstand d des Mittelpunktes des Kreises zur Achse o des Netzes in einem konstanten Verhältnis steht; zwischen dieser Größe l und der Potenz k des Netzes besteht der Zusammenhang $l = \frac{1+k}{1-k}$. $\left(\text{Wenn } \frac{r-d}{r+d} = k \text{ ist, gilt } \frac{r}{d} = \frac{1+k}{1-k}.\right)$ Ist die Potenz k des Netzes positiv, so kann man das Netz auch als Menge aller Kreise definieren, die die Achse o unter einem konstanten Winkel α schneiden $\left(\text{für den } \tan^2\frac{\alpha}{2} = k \text{ gilt; vgl. Abb. 33a}\right)$; ist $k = 0$, so besteht das Netz aus allen die Achse o berührenden Kreisen (Abbildung 33b); ist schließlich $k < 0$, so müssen wir uns mit der komplizierteren Definition des Netzes als der Menge aller Kreise S begnügen, die von einem Punkt P, nämlich der Projektion des Mittelpunktes O des Kreises auf die Achse o des Netzes, unter einem konstanten Winkel φ erscheinen. (Der Winkel φ und die Zahl k sind durch die Beziehung $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{d} = \frac{1+k}{1-k}$ verknüpft; vgl. Abbildung 33c.)[1])

Wir beweisen nun, daß *der Durchschnitt zweier verschiedener Netze* (die Menge der Kreise, die beiden Netzen gleichzeitig angehören) *eine Reihe bildet* (sofern überhaupt Kreise existieren, die dem Durchschnitt angehören). Der Durchschnitt des Netzes der Kreise mit dem konstanten Radius r und des eigentlichen Netzes mit der Achse o und der Potenz k bildet nämlich die Reihe gleicher Kreise, die aus Kreisen vom Radius r besteht, für die der Abstand d ihrer Mittelpunkte von o gleich $r\frac{1-k}{1+k}$ ist $\left(\text{wegen } \frac{r-d}{r+d} = k\right)$; der Durchschnitt zweier verschiedener Netze gleicher Kreise ebenso wie der Durchschnitt zweier verschiedener eigentlicher Netze mit gemeinsamer Achse ist leer. Ein Kreis, der zwei eigentlichen Netzen mit sich nicht schneidenden Achsen o_1 und o_2 und den Potenzen k_1 und k_2 angehört, genügt den Bedingungen

$$\frac{r-d_1}{r+d_1} = k_1 \quad \text{und} \quad \frac{r-d_2}{r+d_2} = k_2 \quad \text{oder} \quad \frac{r}{d_1} = \frac{1+k_1}{1-k_1} = l_1$$

[1]) Ein eigentliches Netz der ersten Art nennt man *hyperbolisch*, eines der zweiten Art *parabolisch* und eines der dritten Art *elliptisch*.

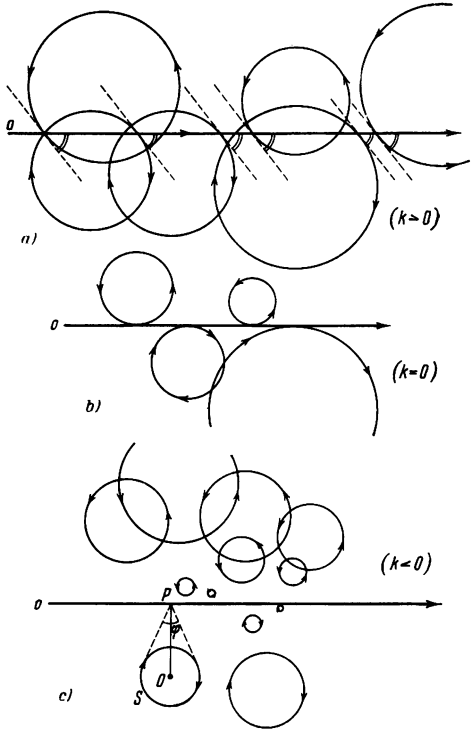


Abb. 33

und $\frac{r}{d_2} = \frac{1+k_2}{1-k_2} = l_2$, wenn r den Radius des Kreises, d_1 und d_2 die Abstände des Mittelpunkts des Kreises von o_1 und o_2 bezeichnet. Die Abstände d_1 und d_2 eines beliebigen Punktes der Ebene von den sich nicht schneidenden Geraden o_1 und o_2 (Abb. 34) sind durch eine Beziehung der Form $d_2 = \pm(d_1 - a)$ miteinander verknüpft, wobei a den (nach Betrag und Vorzeichen) konstanten Abstand der Geraden o_2 von der Geraden o_1 bezeichnet; die Zeichen „+" und

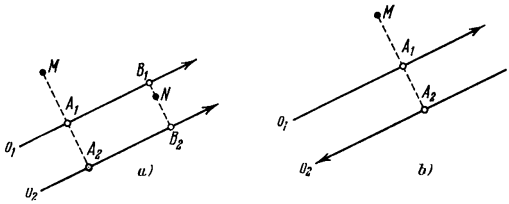


Abb. 34

„−" entsprechen den Fällen, daß die Geraden o_1 und o_2 parallel (gleichgerichtet) oder antiparallel (entgegengesetzt gerichtet) sind. Wir erhalten somit

$$\frac{r}{d_1} = l_1, \quad \pm\frac{r}{d_1 - a} = l_2$$

und

$$r = a\frac{l_2 l_1}{\pm l_2 - l_1}, \quad d_1 = a\frac{l_2}{\pm l_2 - l_1};$$

das bedeutet aber, daß der Durchschnitt der betrachteten Netze leer ist, wenn o_1 zu o_2 parallel und $l_1 = l_2$ oder o_1 zu o_2 antiparallel und $l_1 = -l_2$ ist, während er in allen übrigen Fällen eine Reihe gleicher Kreise bildet. Schneiden sich schließlich die Achsen o_1 und o_2 zweier Netze in einem Punkt O, so ist der Durchschnitt der Netze eine Reihe mit dem Zentrum O; denn der Punkt O ist dann Ähnlichkeitspunkt zweier beliebiger Kreise S_1 und S_2, die beiden Netzen gleichzeitig angehören, weil durch diesen Punkt zwei Geraden gehen, die bezüglich S_1 und S_2 die gleiche Potenz haben (nämlich die Geraden o_1 und o_2).

§ 9. Die Speerinversion

9.1. Definition der Speerinversion. In völliger Analogie zu 4.1. wählen wir in der Ebene ein Kreisnetz und betrachten alle Kreise dieses Netzes, die eine gegebene (gerichtete) Gerade a berühren. Diese Kreise gehören gleichzeitig

sowohl dem ersten Netz als auch dem Netz aller der Kreise an, die die Gerade a berühren; nach dem am Schluß des vorangehenden Paragraphen Gesagten bilden sie eine Kreisreihe. (Wir schließen hier den Fall aus, daß die Achse des Ausgangsnetzes mit a zusammenfällt und somit der Durchschnitt der beiden Netze leer oder mit dem Netz selbst identisch ist, wie auch den Fall, daß das Netz aus Kreisen besteht, die eine zu a parallele Gerade berühren, und der Durchschnitt leer ist.) Da alle Kreise dieser Reihe die Gerade a berühren, haben wir hier entweder eine Reihe von Kreisen mit zwei gemeinsamen Tangenten a und a' vorliegen oder eine Reihe sich berührender Kreise. Auf diese Weise ermöglicht die Wahl eines bestimmten Kreisnetzes in der Ebene die Definition einer *Abbildung der Ebene die jede von der Achse o des Netzes verschiedene* (gerichtete) *Gerade a in eine neue* (gerichtete) *Gerade a' überführt* (wenn die erhaltene Reihe aus Kreisen besteht, die die Gerade a alle in ein und demselben Punkt berühren, nehmen wir an, daß die betrachtete Transformation die Gerade a in sich selbst überführt). Diese Transformation nennen wir die dem betrachteten Netz entsprechende *Speerinversion*[1]). Dabei nennen wir die einem Netz gleicher Kreise entsprechende Speerinversion eine *spezielle Inversion*; die Speerinversion, die einem Netz von Kreisen entspricht, die sich längs einer Geraden berühren, nennen wir eine *entartete Inversion*; in allen übrigen Fällen haben wir eine gewöhnliche oder gemeine Speerinversion vorliegen, wobei wir die Achse o des Netzes als die *Achse* der Inversion und die Potenz k des Netzes als die *Potenz* der Inversion bezeichnen.

9.2. Die entartete Inversion und die spezielle Inversion. Offenbar führt die entartete Inversion jede Gerade der Ebene, die zur Achse o des Netzes nicht parallel ist, in die Gerade o über; diese Transformation ist nicht von Interesse, und wir schließen sie im weiteren aus unseren Betrachtungen aus. Interessanter ist schon die spezielle Speerinversion. Wir nehmen zunächst an, daß das Ausgangsnetz aus allen Kreisen vom Radius Null, d. h. aus allen Punkten besteht. Die Menge aller „Kreise vom Radius Null", die die Gerade a „berühren" (d. h. die Menge aller Punkte der Geraden a) stellt eine Reihe (gleicher) Kreise mit den gemeinsamen Tangenten a und a' dar, wobei die Gerade a' sich von der Geraden a nur durch ihre Richtung unterscheidet. Wir sehen also, daß die spezielle Inversion, die dem Netz der „Nullkreise" (Punkte) entspricht, die Richtung jeder Geraden der Ebene ändert; diese Transformation der Menge der gerichteten Geraden wollen wir *Umorientierung* (d. h. „Ver-

[1]) Dieser Terminus kann in verschiedenem Sinn gedeutet werden. Man kann nämlich annehmen, der Zusatz „Speer" beinhaltet, daß die betrachtete Transformation nicht durch einen Punkt O, das „Zentrum" der Inversion, gegeben wird wie die Punktinversion (die man in diesem Fall besser „Zentralinversion" nennen sollte), sondern durch eine gerichtete Gerade o, die „Achse" der Transformation. Man kann den Zusatz „Speer" aber auch als Hinweis darauf auffassen, daß unsere Transformation nicht Punkte der Ebene wieder in Punkte überführt, sondern gerichtete Geraden („Speere") in gerichtete Geraden („Speere"), d. h. eine *Speertransformation* der Ebene ist (vgl. S. 513).

tauschen der Richtungen") nennen. Offensichtlich führt die Umorientierung jeden Kreis S in einen Kreis S' über, der sich von S nur durch die Richtung unterscheidet (in dem Sinne, daß Geraden, die den Kreis S berühren, in Geraden übergehen, die den Kreis S' berühren); insbesondere führt die Umorientierung Punkte („Kreise vom Radius Null") in sich über.

Nun möge das Ausgangsnetz aus allen Kreisen vom Radius r bestehen. Offenbar berühren alle derartigen Kreise, die eine bestimmte Gerade a be-

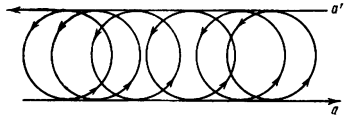


Abb. 35

rühren, auch die zu a antiparallele Gerade a', die von a den Abstand $2r$ hat. (Die Größe $2r$ kann dabei – in Übereinstimmung mit den Darlegungen auf S. 491 – auch negativ sein, was bedeutet, daß die Gerade a' rechts von a liegt; in Abb. 35 ist die Größe $2r$ positiv.) Also verschiebt die betrachtete

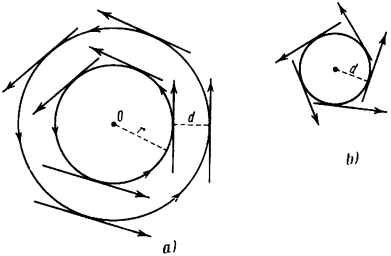


Abb. 36

spezielle Inversion jede Gerade parallel um den Abstand $2r$ von ihrer Ausgangslage und kehrt die Richtung der Geraden um. Die Transformation, die jede (gerichtete) Gerade a in eine zu ihr parallele Gerade a' überführt, die von a einen bestimmten Abstand d hat, bezeichnet man als *Dehnung um die Größe d*. Offenbar geht bei einer Dehnung um die Größe d jeder Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r in einen neuen Kreis mit demselben Mittelpunkt O, aber dem Radius $r + d$ über (Abb. 36a), insbesondere gehen die Punkte in Kreise von Radius d über (Abb. 36b); von diesem Sachverhalt leitet sich auch

die Bezeichnung „Dehnung" ab.[1]) Einander berührende Kreise gehen bei einer Dehnung in einander berührende Kreise über (Abb. 38a); haben zwei Kreise die Tangentenentfernung t, so gehen sie bei einer Dehnung in zwei Kreise über, deren Tangentenentfernung ebenfalls gleich t ist (Abb. 38b). Wir sehen also,

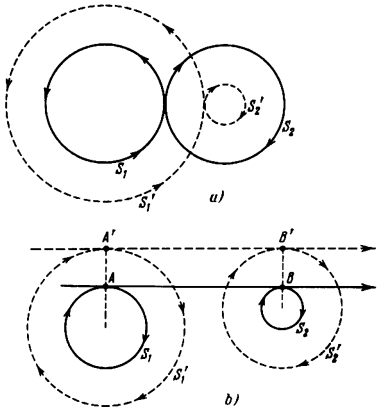


Abb. 38

[1]) Von der Eigenschaft der Dehnungen, Punkte in Kreise überzuführen und umgekehrt, macht man bereits in der Elementargeometrie Gebrauch. So läuft die bekannte Konstruk-

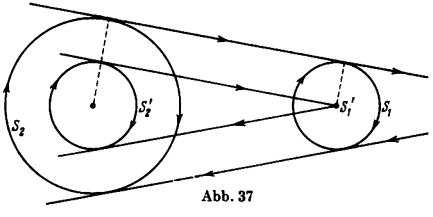


Abb. 37

tion einer gemeinsamen Tangente an zwei Kreise (Abb. 37) im wesentlichen darauf hinaus, daß man mit Hilfe einer geeigneten Dehnung die Kreise S_1 und S_2 in einen Punkt S_1' und einen Kreis S_2' überführt.

daß *die spezielle Speerinversion, die einem Netz von Kreisen vom Radius r entspricht, eine von einer Umorientierung begleitete Dehnung um die Größe 2r ist.*

9.3. Eigenschaften der Speerinversion. Wir kommen nun zur gewöhnlichen Speerinversion (diese Transformation wollen wir im folgenden einfach Speerinversion nennen) mit der Achse o und der Potenz k. Offenbar berührt jeder Kreis S des Netzes, der eine o im Punkt M schneidende Gerade berührt, auch diejenige Gerade a', die o im gleichen Punkt M schneidet und der Bedingung

$$\tan \frac{\sphericalangle (o, a)}{2} \cdot \tan \frac{\sphericalangle (o, a')}{2} = k \qquad (*)$$

genügt (Abb. 39), und zwar deshalb, weil die Gerade o bezüglich des Kreises S die Potenz k hat. Hieraus folgt, daß *die Speerinversion mit der Achse o und der*

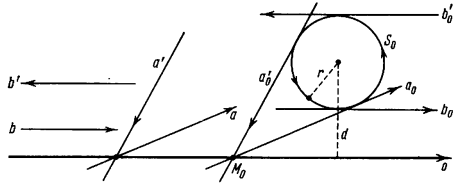


Abb. 39

Potenz k eine beliebige Gerade a in diejenige Gerade a' überführt, die o in demselben Punkt schneidet wie a und der Beziehung (*) *genügt.* Diese Definition der Speerinversion ist der analytischen Definition der Punktinversion (vgl. S. 479) völlig analog. Was die zur Inversionsachse o parallelen Geraden betrifft, so berührt jeder Kreis S des Netzes, der eine solche Gerade b berührt, ebenfalls die Gerade b', die antiparallel zu b und so gelegen ist, daß der Quotient der Abstände von b und b' zu o gleich k ist; das folgt daraus, daß die Potenz k der Geraden o bezüglich des Kreises S gleich $\dfrac{r-d}{r+d}$ ist (Abb. 39). Mithin führt die Inversion die Gerade b in b' (und b' in b) über.

Diese Definition der Speerinversion kann man etwas geometrischer ausdrücken. Dazu denken wir uns das die Inversion bestimmende Netz durch eine Achse o und einen dem Netz angehörenden Kreis S_0 gegeben (d. h. durch einen solchen Kreis S_0, dessen Potenz bezüglich o gleich k ist); diesen Kreis wollen wir einen *Leitkreis* der Speerinversion nennen. Offenbar führt die Speerinversion jede Tangente a_0 des Kreises S_0 in die zweite Tangente a_0' desselben Kreises über, die durch den Schnittpunkt M_0 von a_0 mit o geht; sie führt eine Tan-

gente b_0 des Kreises S_0, die o nicht schneidet, in die zweite, o nicht schneidende Tangente b_0' des Kreises S_0 über; eine beliebige Gerade a, die die Achse o schneidet und der Tangente a_0 des Kreises S_0 parallel läuft, wird in die Gerade a' übergeführt, die o in demselben Punkt wie a schneidet und der Tangente a_0' des Kreises S_0 parallel ist; eine beliebige Gerade b, die der o nicht schneidenden Tangente b_0 des Kreises S_0 parallel läuft, wird in eine zu b_0' parallele Gerade b' übergeführt, für die das Verhältnis der Abstände von b und b' zu o gleich dem Verhältnis der Abstände von b_0 und b_0' zu o ist (Abb. 39).

Es ist offensichtlich, daß jede nichtentartete Speerinversion, d. h. jede spezielle Inversion und jede gewöhnliche Inversion, die (gerichteten) Geraden der Ebene „miteinander vertauscht", d. h. eine Gerade a in diejenige Gerade a' überführt, die ihrerseits in a übergeht.[1]) Wir beweisen nun zwei weniger offensichtliche Eigenschaften der Speerinversion.

A. *Eine nichtentartete Speerinversion führt jeden Kreis mit endlichem Radius in einen Kreis mit endlichem Radius über* (d. h. jeden Kreis und jeden Punkt in einen Kreis oder Punkt).

Da sowohl jede Dehnung als auch die Umorientierung einen Kreis mit endlichem Radius in einen Kreis mit endlichem Radius überführen, ist offensichtlich, daß die speziellen Inversionen diese Eigenschaft besitzen. Schwieriger ist zu zeigen, daß jede gewöhnliche Speerinversion die Eigenschaft A besitzt. Wir bezeichnen den Mittelpunkt eines Leitkreises S_0 unserer Speerinversion mit O_0, und es seien a_0 und a_0' zwei Tangenten des Kreises S_0, die die Achse o in einem Punkt M_0 schneiden und den Kreis S_0 in den Punkten A_0 und A_0' berühren; R_0 und Q_0 seien die Schnittpunkte der Sehne $\overline{A_0A_0'}$ mit der Geraden O_0M_0 und der durch O_0 verlaufenden Senkrechten O_0P_0 zur Achse o (Abb. 40). Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $O_0Q_0R_0$ und $O_0M_0P_0$ bzw. $O_0A_0R_0$ und $O_0M_0A_0$ folgt $\dfrac{|O_0Q_0|}{|O_0R_0|} = \dfrac{|O_0M_0|}{|O_0P_0|}$, $\dfrac{|O_0R_0|}{|O_0A_0|} = \dfrac{|O_0A_0|}{|O_0M_0|}$. Gliedweise Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{|O_0Q_0|}{|O_0A_0|} = \frac{|O_0A_0|}{|O_0P_0|} \quad \text{oder} \quad |O_0Q_0| = \frac{|O_0A_0|^2}{|O_0P_0|},$$

woraus folgt, daß der Punkt Q_0 nicht von der Wahl des Tangentenpaares a_0, a_0' (d. h. von der Wahl des Punktes M_0 auf der Achse o) abhängt.

Wir betrachten nun einen beliebigen Kreis S mit dem Mittelpunkt O, und es sei Q derjenige Punkt der durch O verlaufenden Senkrechten zu o, für den $(O_0Q_0) : (OQ) = r_0 : r$ ist, wobei r_0 und r die (positiven oder negativen) Radien der Kreise S_0 und S sind; ferner sei S' derjenige Kreis, so daß der Ähnlichkeitspunkt der Kreise S und S' mit Q und die Potenzlinie der Kreise S

[1]) Eine spezielle Inversion führt z. B. eine beliebige Gerade a in die zu ihr antiparallele Gerade a' über, die von a einen konstanten Abstand $2r$ hat und rechts oder, wenn r negativ ist, links von a liegt. In diesem Fall ist aber auch a rechts bzw. links von a' gelegen (die Geraden a und a' sind antiparallel!), woraus folgt, daß a' seinerseits in a übergeht.

und S' mit o zusammenfällt.[1]) Wir behaupten, daß die betrachtete Speerinversion den Kreis S in den Kreis S' überführt.

Zum Beweis (vgl. Abb. 40) bemerken wir, daß der Schnittpunkt M_1 der zu den Tangenten a_0 und a_0' des Leitkreises S_0 parallelen Tangenten a und a_1 des Kreises S einer Geraden o_1 angehört, die bezüglich des Kreises S genauso liegt wie die Gerade o bezüglich S_0 (d. h., o_1 ist eine Gerade, für die $o_1 \parallel o$ und $(O_0P_0) : (OP) = r_0 : r$ gilt, wenn P der Fußpunkt des von O auf o_1 gefällten Lotes ist); das folgt daraus, daß die vom Kreis S und seinen Tangenten a, a_1 gebildete Figur der vom Kreis S_0 und den Tangenten a_0, a_0' gebildeten Figur ähnlich ist. Ferner geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der

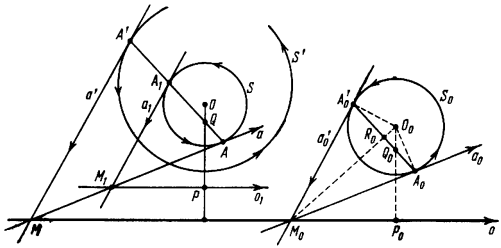


Abb. 40

Geraden a und a_1 mit dem Kreis S durch den Punkt Q. (Das folgt aus eben diesen Ähnlichkeitsüberlegungen.) Die im Schnittpunkt A' der Geraden QA_1 mit dem Kreis S' an S' gelegte Tangente a' ist zu a_1 parallel (weil Q das Ähnlichkeitszentrum der Kreise S und S' ist); ferner liegt der Schnittpunkt M der Geraden a und a' auf der Potenzlinie o der Kreise S und S' (weil $|MA| = |MA'|$ ist, da die Dreiecke M_1AA_1 und MAA' ähnlich sind und $|M_1A| = |M_1A_1|$ gilt; Abb. 40). Die Tatsache aber, daß sich die zu den Tangenten a_0 und a_0' des Kreises S_0 parallelen Tangenten a und a' an die Kreise S und S' auf der Geraden o schneiden, beweist unsere Behauptung (vgl. die Definition der Speerinversion, S. 508).

[1]) Ist S ein Punkt („Kreis vom Radius Null"), so ist S' ein solcher Kreis, daß o die Potenzlinie der Kreise S und S' und $(O_0Q_0) : (O'S) = r_0 : r'$ ist, wobei O' und r' der Mittelpunkt bzw. der Radius des Kreises S' sind; ist S ein eigentlicher Kreis, so daß die Potenzlinie der Kreise S und Q mit o zusammenfällt, so stimmt S' mit dem Punkt Q überein; ist S ein Punkt der Inversionsachse o, dann fällt S' mit S zusammen. Man konstruiert den Kreis S' am einfachsten, indem man das Tangentenpaar a_0 und a_0' des Kreises S_0 und zu ihnen parallele Geraden a und a' zeichnet. (a_0 und a_0' sowie a und a' schneiden sich auf der Achse o.) Wenn S die Gerade a berührt, folgt aus dem unten Bewiesenen, daß S' die Gerade a' berührt; dies gestattet es uns, da wir außerdem den Ähnlichkeitspunkt der Kreise S und S' kennen (man kann den Punkt Q sofort konstruieren), den Kreis S' aufzufinden.

B. *Eine nichtentartete Speerinversion läßt die Tangentenentfernung ungeändert.* Genauer: Sind A_1, A_2 die Berührungspunkte zweier Kreise S_1 und S_2 von endlichem Radius mit ihrer gemeinsamen Tangente t und A_1', A_2' die Berührungspunkte der Kreise S_1' und S_2', in die eine nichtentartete Inversion die Kreise S_1 und S_2 überführt, mit der Geraden t', in die diese Inversion die Gerade t überführt, so ist

$$(A_1A_2) = (A_2'A_1').$$

Die Behauptung ist für spezielle Speerinversionen offensichtlich richtig; denn führt eine spezielle Speerinversion zwei Kreise S_1 und S_2 von endlichem Radius in die Kreise S_1' und S_2' über, so gilt für die Tangentenentfernung (A_1A_2) und $(A_1'A_2')$ dieser Kreispaare $(A_1A_2) = -(A_1'A_2') = (A_2'A_1')$ (da sich bei einer Dehnung die Tangentenentfernung zweier Kreise nicht ändert und bei der Umorientierung lediglich ein Vorzeichenwechsel stattfindet); es bleibt also nur zu zeigen, daß auch die gewöhnliche Inversion die Eigenschaft B besitzt. Es sei zunächst bemerkt, daß für die Tangentenentfernungen (MA) und (MA') eines

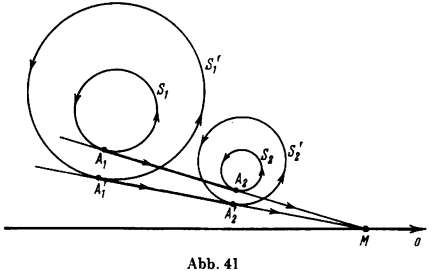


Abb. 41

Punktes M der Inversionsachse o zu zwei Kreisen S und S', die bei der Inversion ineinander übergehen, die Beziehung

$$(MA) = (A'M)$$

gilt, und zwar deswegen, weil o die Potenzlinie der Kreise S und S' ist (Abb. 40). Damit haben wir insbesondere unsere Behauptung für den Fall bewiesen, daß einer der beiden Kreise ein Punkt M der Inversionsachse o ist. Sind jedoch S_1 und S_2 zwei beliebige Kreise, die bei der Inversion in die Kreise S_1' und S_2' übergehen, so liegt der Schnittpunkt M der gemeinsamen Tangenten A_1A_2 und $A_1'A_2'$ an S_1 und S_2 bzw. an S_1' und S_2' auf der Inversionsachse (Abb. 41); mithin gilt

$$(MA_1) = (A_1'M), \quad (MA_2) = (A_2'M),$$

woraus sofort

$$(A_1A_2) = (A_2'A_1')$$

folgt.

Insbesondere folgt aus der Eigenschaft B der Inversion, daß *jede nichtentartete Speerinversion zwei sich berührende Kreise in zwei sich berührende Kreise überführt.*

9.4. Der Satz von Brianchon. Die Speerinversion kann ebenso wie die Punktinversion zum Beweis geometrischer Sätze und zur Lösung von Konstruktionsaufgaben heran-

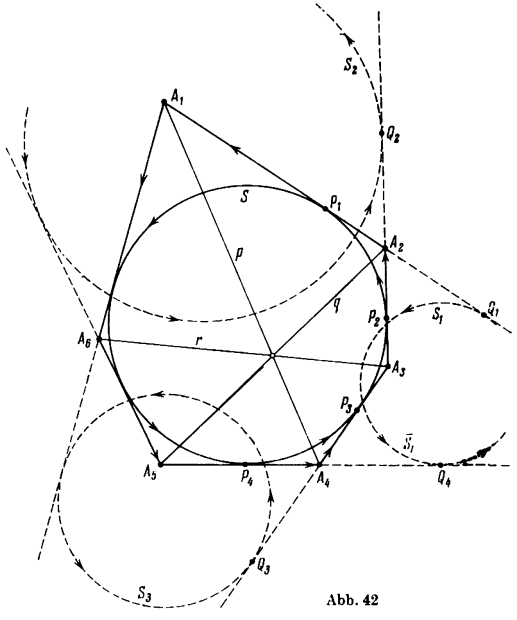


Abb. 42

gezogen werden.[1]) Wir bringen ein Beispiel für den Beweis eines geometrischen Satzes unter Verwendung einer Speerinversion.

Wir zeigen, daß *Geraden p, q und r, die die gegenüberliegenden Ecken A_1 und A_4, A_2 und A_5, A_3 und A_6 eines beliebigen* (möglicherweise sich selbst überschneidenden!) *einem*

[1]) Viele weitere Beispiele dieser Art enthält das im Literaturverzeichnis angegebene Buch von I. M. Jaglom [1].

Kreis S umbeschriebenen Sechsecks $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ miteinander verbinden, sich in einem Punkt schneiden oder einander parallel sind (Satz von BRIANCHON).

Es sei S_1 ein beliebiger (gerichteter) Kreis, der die Seiten A_1A_2 und A_4A_5 unseres Sechsecks berührt (wir sehen die Seiten des Sechsecks als gerichtet an, indem wir ihnen die Richtung zuschreiben, die einer beliebig gewählten Richtung des Kreises S entspricht); S_2 sei der Kreis, in den S_1 bei der Speerinversion mit der Achse q und dem Leitkreis S übergeht (S_2 berührt die Seiten A_2A_3 und A_5A_6); S_3 sei der Kreis, in den die Speerinversion mit der Achse r und ebenfalls dem Leitkreis S den Kreis S_2 überführt (S_3 berührt die Seiten A_3A_4 und A_6A_1); schließlich sei $\bar{S}_1$ der Kreis, in den die Speerinversion mit der Achse p und dem Leitkreis S den Kreis S_3 überführt ($\bar{S}_1$ berührt wieder die Seiten A_1A_5 und A_1A_2; Abb. 42). Bezeichnen wir die Berührungspunkte der Geraden A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 und A_4A_5 mit dem Kreis S mit P_1, P_2, P_3 bzw. P_4 und die Berührungspunkte derselben Geraden mit den Kreisen S_1 bzw. $\bar{S}_1$, S_2, S_3 und erneut S_1 bzw. $\bar{S}_1$ mit Q_1 bzw. $\bar{Q}_1$, Q_2, Q_3, Q_4 bzw. $\bar{Q}_4$, so gilt (vgl. auch S. 494)

$$(P_1Q_1) = (Q_2P_2) = (P_3Q_3) = (\bar{Q}_4P_4) = (P_1\bar{Q}_1).$$

Aus $(P_1Q_1) = (P_1\bar{Q}_1)$ folgt jedoch, daß die Kreise S_1 und $\bar{S}_1$ übereinstimmen. Folglich sind die Geraden q, r und p die Achsen der Inversionen, die S_1 in S_2, S_2 in S_3 und schließlich S_3 wieder in S_1 überführen, und fallen somit mit den paarweisen Potenzlinien der drei Kreise S_1, S_2 und S_3 zusammen (vgl. den Beweis der Eigenschaft A der Speerinversion). Hieraus folgt aber, daß sich diese Geraden in einem Punkt, dem Potenzpunkt der Kreise S_1, S_2 und S_3, schneiden oder einander parallel sind (vgl. 2.3.).

§ 10. Speergeometrie der Kreise

10.1. Speer-Kreistransformationen. Im vorliegenden Abschnitt wurden die Punkte stets nur als Spezialfall der Kreise angesehen, eine selbständige Bedeutung besaßen sie hier nicht. Dementsprechend wollen wir im folgenden die Punkte nicht mehr als geometrische Grundelemente ansehen und auch auf die Untersuchung von Punkttransformationen der Ebene, d. h. von Transformationen, die jeden Punkt auf einen Punkt abbilden, verzichten. Die Rolle der Punkttransformationen werden vielmehr Transformationen in der Menge der gerichteten Geraden (Speere) der Ebene übernehmen, d. h. Transformationen, die jede gerichtete Gerade (jeden Speer) auf eine andere gerichtete Gerade (einen anderen Speer) abbilden. Es liegt nahe, solche Transformationen als *Speertransformationen* der Ebene zu bezeichnen. Die Speertransformationen führen im allgemeinen bereits nicht mehr Punkte wieder in Punkte über: Versteht man nämlich unter einem Punkt A die Menge aller durch ihn hindurchgehenden Geraden $a, b, c, \ldots$ (Abb. 43a), so muß man erwarten, daß eine (stetige) Speertransformation den Punkt A in eine Kurve A' überführt, die durch die Schar ihrer Tangenten $a', b', c', \ldots$ repräsentiert wird (Abb. 43b), wie analog eine (stetige) Punkttransformation jede Gerade a (als Menge von Punkten $A, B, C, \ldots$ aufgefaßt) in eine Kurve a' überführt (die hier durch die Menge aller transformierten Punkte $A', B', C', \ldots$ repräsentiert wird).

Eine Sonderstellung nehmen unter allen Speertransformationen die *Speer-Kreistransformationen*[1]) ein, d. h. jene Speertransformationen, die jeden (gerichteten) Kreis S von endlichem Radius in einen Kreis S' überführen (d. h. die Menge der Tangenten eines beliebigen Kreises S in die Menge der Tangenten eines gewissen Kreises S'). Einfachste Beispiele für Speer-Kreistransformationen liefern die Ähnlichkeitstransformationen: Da diese Transformationen jede Gerade wieder in eine Gerade überführen, kann man sie als Speertransformationen ansehen, da sie aber auch Kreise in Kreise überführen, sind sie Kreistransformationen.[2]) Noch kompliziertere Beispiele sind die nichtentarteten

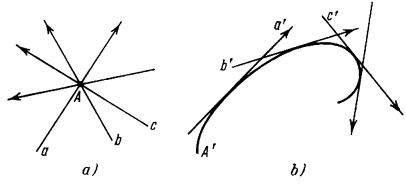


Abb. 43

Speerinversionen. Man kann leicht zeigen, daß das letzte Beispiel allgemeinen Charakter hat, d. h., daß jede Speer-Kreistransformation auf eine nichtentartete Inversion zurückgeführt werden kann; wir zeigen genauer, daß *jede Speer-Kreistransformation eine Ähnlichkeitstransformation, eine spezielle oder gewöhnliche Speerinversion oder ein Produkt aus einer Ähnlichkeitstransformation und einer Speerinversion ist.*

Zunächst ist klar, daß *jede Speer-Kreistransformation, die jeden Punkt wieder in einen Punkt überführt, eine Ähnlichkeitstransformation ist*; diese Behauptung unterscheidet sich nur der Form nach von der Behauptung, daß die Punkt-Kreistransformationen, die Geraden wieder in Geraden überführen, durch die Ähnlichkeitstransformationen ausgeschöpft werden (vgl. 5.1.). Ferner sei bemerkt, daß *eine Speer-Kreistransformation, die irgend zwei Punkte A und B wieder in Punkte A' und B' überführt, auch alle Punkte der Geraden AB in*

[1]) In der Literatur bezeichnet man diese Transformationen meistens als LAGUERREsche *Transformationen*.

[2]) Um eine Ähnlichkeitstransformation als Speertransformation ansehen zu können, muß man allerdings die Vereinbarung treffen, daß sie eine bestimmte gerichtete Gerade a in eine andere gerichtete Gerade a' überführt (die Richtungen von a und a' können beliebig gewählt werden) und eine beliebige gerichtete Gerade b in eine andere gerichtete Gerade b', so daß folgendes gilt: $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a', b')$ mit $\sphericalangle(a, b) = 0$, wenn b parallel zu a ist, und $\sphericalangle(a, b) = \pi$, wenn b antiparallel zu a ist. Auf diese Weise entsprechen ein und derselben als Punkttransformation aufgefaßten Ähnlichkeitstransformation zwei verschiedene Speertransformationen (was aus den beiden verschiedenen Möglichkeiten für die Wahl der Richtung von a' resultiert).

Punkte überführt. Bei einer solchen Transformation gehen nämlich zunächst die beiden einander entgegengerichteten Geraden a, b durch die Punkte A und B in die beiden einander entgegengerichteten Geraden a', b' durch A' und B' über; da man aber jeden Punkt der Geraden AB als Kreis („Kreis vom Radius Null") ansehen kann, der die Geraden a und b berührt, ist sein Bild ein „Kreis", der die Geraden a' und b' berührt, also ein Punkt der Geraden $A'B'$. *Insbesondere führt also jede Speer-Kreistransformation, die drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B und C der Ebene in Punkte überführt, jeden Punkt M der Ebene in einen Punkt über* (denn zunächst geht der Schnittpunkt N der Geraden AM und BC als Punkt von BC in einen Punkt über und damit auch der Punkt M als Punkt der Geraden AN; ist $AM \parallel BC$, so brauchen wir A nur durch eine der anderen Ecken des Dreiecks ABC zu ersetzen) *und ist folglich eine Ähnlichkeitstransformation.* Bei einer Speer-Kreistransformation, die keine Ähnlichkeitstransformation ist (und nur solche Transformationen interessieren uns noch), muß also einer der drei folgenden Fälle eintreten:

1. Die Transformation führt keinen Punkt der Ebene in einen Punkt über.
2. Die Transformation führt einen einzigen Punkt der Ebene in einen Punkt über (wir zeigen später, daß dieser Fall nicht möglich ist).
3. Die Transformation führt alle Punkte einer Geraden und nur die Punkte dieser Geraden in Punkte über.

Wir betrachten nacheinander diese drei Fälle:

1. Die Speer-Kreistransformation Λ führe keinen Punkt der Ebene in einen Punkt über. Wir betrachten dann zwei beliebige Punkte A' und B' und die beiden einander entgegengerichteten Geraden a' und b' durch diese Punkte; a und b seien die Geraden, die durch Λ in a' und b' übergeführt werden. Die Punkte der Geraden $A'B'$ („Kreise vom Radius Null, die die Geraden a' und b' berühren") sind die Bilder genau der Kreise, die die Geraden a und b berühren. Würden sich die Geraden a und b schneiden, so würde zu diesen Kreisen auch der Schnittpunkt M der Geraden a und b gehören (vgl. Abb. 32b auf S. 501); mithin würde der Punkt M in einen Punkt der Geraden $A'B'$ übergehen, was unserer Voraussetzung widerspricht. Hieraus folgt (vgl. Abb. 32a), daß die Geraden a und b antiparallel und alle sie berührenden Kreise gleich sind (insbesondere auch die Kreise A und B, die Λ in die Punkte A' und B' überführt).[1]) Für irgend zwei beliebige Punkte A' und B' sind die Urbilder A und B Kreise vom gleichen Radius, d. h., Λ transformiert alle Kreise mit einem bestimmten Radius r in Punkte.

Wir betrachten nun die Speerinversion (Dehnung mit Umorientierung) Γ, die die Kreise von eben diesem Radius r in Punkte überführt. Die Transformation $P = \Lambda \cdot \Gamma^{-1}$ ist dann eine Speer-Kreistransformation, die Punkte wieder in Punkte überführt (weil Γ^{-1} die Punkte in Kreise vom Radius r und Λ die Kreise vom Radius r in Punkte überführt) und mithin eine Ähnlichkeitstransformation; somit ist unsere ursprüngliche Transformation Λ

[1]) Die Geraden a und b können nicht parallel sein, da für solche Geraden kein sie berührender Kreis existiert.

ein Produkt aus einer Ähnlichkeitstransformation und einer speziellen Inversion.

2. Wir beweisen jetzt, daß es keine Speer-Kreistransformation Λ gibt, die einen einzigen Punkt A in einen Punkt überführt. Wir betrachten dazu zwei sich nur in der Richtung voneinander unterscheidende Geraden a und b, die durch A gehen. Sie gehen bei der Transformation Λ, falls es eine solche geben würde, in zwei Geraden a' und b' über, die sich im Bildpunkt A' des Punktes A schneiden. Wir betrachten dann eine weitere, nicht zu a parallele und nicht durch A gehende Gerade a_1; sie und die mit ihr der Lage nach zusammenfallende, von a_1 sich nur in der Richtung unterscheidende Gerade b_1 gehen in

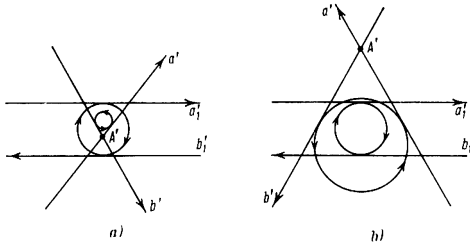


Abb. 44

zwei antiparallele Geraden a_1' und b_1' über (weil keiner der Punkte der Geraden a_1 in einen Punkt übergeht; vgl. oben). Nun ist zu bemerken, daß sich stets zwei Kreise M' bzw. M_1' finden lassen, die a' und b' bzw. a_1' und b_1' berühren und von denen der eine im Inneren des anderen liegt (Abb. 44a, b). Diese beiden Kreise sind offenbar die Bilder von Punkten M und M_1 der Geraden a bzw. a_1. Die beiden einander entgegengerichteten Geraden durch die Punkte M und M_1 müssen dann gemeinsame Tangenten der Kreise M' und M_1' sein, aber solche Tangenten gibt es nicht. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

3. Die Speer-Kreistransformation Λ führe alle Punkte einer gewissen Geraden o (die wir hier als gerichtete Gerade ansehen) und auch nur die Punkte dieser Geraden in Punkte über; ferner führe Λ einen bestimmten Kreis A in einen nicht auf der Gerade o liegenden Punkt A' über. Wir betrachten sodann eine gewöhnliche Speerinversion Γ mit der Achse o, die den Kreis A in einen Punkt A_1 überführt (und zwar in einen Punkt A_1, so daß o die Potenzlinie der Kreise A und A_1 ist). Die Speer-Kreistransformation $P = \Lambda \cdot \Gamma^{-1}$ führt offenbar alle Punkte der Geraden o wieder in Punkte über und außerdem den Punkt A in den Punkt A'; mithin führt sie alle Punkte der Ebene in Punkte der Ebene über (vgl. S. 514) und ist somit eine Ähnlichkeitstransformation.

Wir sehen also, daß in diesem Fall A ein Produkt aus einer Ähnlichkeitstransformation P und einer gewöhnlichen Speerinversion I' ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

10.2. Der Begriff der Speer-Kreisgeometrie. Die Untersuchung der Eigenschaften geometrischer Figuren (insbesondere von Kreisen und verschiedener Systeme von Kreisen), die bei Speer-Kreistransformationen erhalten bleiben, bildet den Gegenstand der *Speer-Kreisgeometrie* oder LAGUERREschen *Geometrie.* Manchmal betrachtet man dabei anstelle der Gesamtheit aller Speer-Kreistransformationen nur diejenigen dieser Transformationen, die die Tangentenentfernung zw ier Kreise unverändert lassen (d. h. die nichtentarteten Speerinversionen, die Bewegungen sowie die Produkte aus Speerinversionen und Bewegungen); in dieser Speer-Kreisgeometrie hat die Tangentenentfernung eine geometrische Bedeutung (in der allgemeinen Speer-Kreisgeometrie kann man dagegen nur vom Verhältnis der Tangentenentfernungen zweier Kreispaare sprechen[1]). Die Speer-Kreisgeometrie stellt eine inhaltsreiche geometrische Disziplin dar.[2]) Ein große Rolle spielen in dieser Geometrie die Begriffe Kreisreihe und Kreisnetz; dies hängt damit zusammen, daß jede Speer-Kreistransformation eine Kreisreihe wieder in eine Kreisreihe und ein Kreisnetz wieder in ein Kreisnetz überführt. (Wir empfehlen dem Leser, das zu beweisen.)

C. DER KREIS ALS MENGE VON LINIENELEMENTEN

§ 11. Der Kreis unter einem neuen Gesichtspunkt

11.1. Die Ebene als Menge von Linienelementen. Im ersten Abschnitt des vorliegenden Artikels wurde der Kreis als Punktmenge („geometrischer Ort") betrachtet. Dabei haben wir die Geraden in der Regel nur als Spezialfall der Kreise angesehen, während die Punkte eine ausgezeichnete Rolle spielten: Sie waren die Grundelemente der Geometrie, was sich z. B. darin widerspiegelt, daß im ersten Abschnitt ausschließlich Punkttransformationen der Ebene betrachtet wurden, d. h. Transformationen, die Punkte (zu denen ein „unendlich ferner Punkt" Ω hinzugezählt wurde) wieder in Punkte überführen. Im

[1]) Die Gesamtheit aller Speer-Kreistransformationen und die Gesamtheit der Speer-Kreistransformationen, die die Tangentenentfernung zwischen Kreisen unverändert lassen, stehen zueinander in derselben Beziehung wie die Ähnlichkeitstransformationen und die Bewegungen.

[2]) Die Grundlagen dieser Geometrie sind z. B. in dem am Schluß des Artikels angegebenen Buch von W. BLASCHKE [7] dargelegt.

Gegensatz hierzu haben wir im zweiten Abschnitt den Kreis als Menge von Geraden betrachtet; dementsprechend wurden dort die Punkte als Spezialfall der Kreise angesehen, während die Geraden eine ausgezeichnete Rolle spielten. Jetzt wollen wir den Aufbau einer allgemeineren Theorie skizzieren, in der sowohl die Geraden als auch die Punkte mit den Kreisen völlig gleichberechtigt sind (nur Spezialfälle der Kreise darstellen). Dabei nehmen wir hier wie im zweiten Abschnitt an, daß die Geraden und Kreise gerichtet sind, und zählen

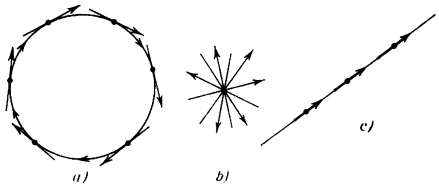


Abb. 45

wie im ersten Abschnitt zur Menge der Punkte ebenfalls einen „unendlich fernen Punkt" Ω dazu. Unter zwei sich berührenden Kreisen werden wir jetzt verstehen

zwei sich berührende (gerichtete) Kreise oder einen (gerichteten) Kreis und eine ihn berührende Gerade, die im Berührungspunkt die gleiche Richtung haben;

zwei parallele (d. h. sich nicht schneidende und gleichgerichtete) Geraden;

einen Punkt und einen durch ihn verlaufenden Kreis oder eine durch ihn verlaufende Gerade:

den „unendlich fernen Punkt" Ω und eine beliebige Gerade.

Da sich weder die Punkte noch die Geraden in der Menge der Kreise (in dem oben angegebenen weiten Sinne aufgefaßt) durch irgend etwas auszeichnen, muß man hier als Grundelement der Geometrie ein neues Gebilde ansehen. Als solches Gebilde nimmt man zweckmäßigerweise das sogenannte *Linienelement* (A, a), d. h. ein Paar, bestehend aus einem Punkt A und einer durch ihn hindurchgehenden (gerichteten) Geraden a. (Ein Linienelement besteht also aus einem Punkt und einer in diesem Punkt gegebenen Richtung.) Den Kreis betrachten wir jetzt als die Gesamtheit aller Linienelemente, die aus einem Punkt des Kreises und der Tangente an den Kreis in diesem Punkt gebildet werden (Abb. 45a); die Punkte und Geraden können wir analog als Mengen von Linienelementen auffassen (Abb. 45b, c). Es sei bemerkt, daß von dem hier eingenommenen Standpunkt aus sich zwei Kreise genau dann berühren, wenn sie ein gemeinsames Linienelement besitzen (Abb. 46); ver-

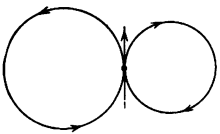
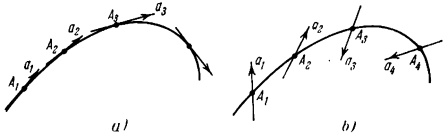


Abb. 46

einbart man, daß eine Richtung (die man durch eine gerichtete Gerade a repräsentieren kann, wobei jedoch zwei parallele Geraden dieselbe Richtung bestimmen) und der „unendlich ferne Punkt" Ω ein „unendlich fernes Linienelement (Ω, a)" bestimmen, so erfaßt diese Bedingung alle oben aufgezählten Fälle der Berührung von Kreisen.

11.2. Eine neue Definition des Kreises. Beim Aufbau einer Geometrie in der Menge der Linienelemente muß eine Kurve γ als die Gesamtheit aller durch sie definierten Linienelemente aufgefaßt werden (Abb. 47a); dabei muß jedoch bei der Definition einer Kurve



a) b)

Abb. 47

als „geometrischer Ort" von Linienelementen (A_1, a_1), (A_2, a_2), (A_3, a_3),... darauf geachtet werden, daß die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und die Geraden $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jeweils für sich genommen, *ein und dieselbe* Kurve definieren, d. h., daß der in Abb. 47b dargestellte Fall nicht eintreten darf. (Es muß, mit anderen Worten, gefordert werden, daß für jedes Linienelement (A, a) der betrachteten Menge von Linienelementen die Gerade a im Punkt A Tangente an die Kurve ist, die durch die Menge aller Punkte dieser Elemente bestimmt wird; hieraus folgt dann bereits, daß A der Berührungspunkt der Geraden a mit der durch die Geraden der betrachteten Linienelemente bestimmten Kurve ist.) Als Mengen von Linienelementen kann man die Kreise als diejenigen Kurven definieren, bei denen für zwei beliebige Linienelemente (A, a) und (B, b) derselben der Abstand $|AB|$ eindeutig durch den Winkel $\angle(a, b)$ bestimmt wird, und umgekehrt (d. h., wenn weder der Abstand $|AB|$ noch der Winkel $\angle(a, b)$ für alle Paare von Linienelementen der Kurve identisch verschwinden, sind für zwei Paare von Linienelementen (A_1, a_1), (B_1, b_1) und (A_2, a_2), (B_2, b_2) mit gleichen Abständen $|A_1B_1|$ und $|A_2B_2|$ auch die Winkel $\angle(a_1, b_1)$ und $\angle(a_2, b_2)$ gleich; Abb. 48). Dabei kann man den Radius des Kreises als Grenzwert des Quotienten $\dfrac{|AB|}{\angle(a, b)}$ für $\angle(a, b) \to 0$ oder $|AB| \to 0$ definieren[1]); der Radius eines Kreises kann auch gleich Null (ein Kreis vom

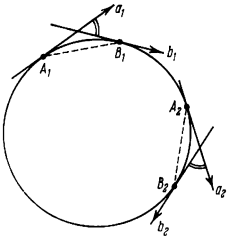


Abb. 48

[1]) Für einen Kreis ist charakteristisch, daß der Abstand $|AB|$ eine Funktion von $\angle(a, b)$ ist: $|AB| = f(\angle(a, b))$; der Radius des Kreises ist dann gleich der Ableitung der auf diese Weise gewonnenen Funktion $y = f(x)$ für $x = 0$ (vgl. den Artikel „Ableitungen, Integrale, Reihen" in Band III der EdEM). Der Winkel ist dabei im Bogenmaß zu messen.

Radius Null ist ein Punkt) oder unendlich sein (ein Kreis mit unendlichem Radius ist eine Gerade). Verwendet man hierbei orientierte Winkel (vgl. § 1 des Abschnitts A), so berücksichtigt diese Definition auch das Vorzeichen des Radius (vgl. 6.2.).

§ 12. Berührungsgeometrie der Kreise

12.1. Berührungs-Kreistransformationen. Die Untersuchung der Eigenschaften der als Mengen von Linienelementen aufgefaßten Kreise ist Gegenstand einer überaus gehaltvollen Theorie, die man analog zum Aufbau in den ersten beiden Abschnitten dieses Artikels entwickeln könnte. So kann man hier z. B. den Begriff „Potenz eines Kreises in bezug auf einen Kreis" definieren und mit seiner Hilfe Kreissysteme auszeichnen, die den Büscheln und Reihen bzw. den Bündeln und Netzen vergleichbar sind; ferner kann man mit Hilfe dieser Kreissysteme eine neue Art von „Inversionen" definieren, die jetzt Transformationen in der Menge der Linienelemente sind, bei der jeder Kreis (in dem in diesem Abschnitt vereinbarten weiten Sinne verstanden) wieder in einen Kreis übergeht usw. Die Darlegung dieser Theorie erforderte jedoch weit mehr Raum, als es der Rahmen dieses Artikels zuläßt.

Wir beschränken uns hier lediglich auf die Frage, inwieweit sich beliebige *Berührungs-Kreistransformationen*[1]), d. h. solche Transformationen in der Menge der Linienelemente, die jeden Kreis wieder in einen Kreis (die Menge der Linienelemente irgendeines anderen Kreises) überführen, auf die uns bereits bekannten Punkt-Kreistransformationen und Speer-Kreistransformationen zurückführen lassen. Sich berührende Kreise, d. h. Kreise, die ein gemeinsames Linienelement besitzen, führt eine Berührungs-Kreistransformation wieder in sich berührende Kreise über; von dieser Eigenschaft leitet sich auch die Bezeichnung „Berührungstransformation" ab.[2])

Offenbar sind die in den Abschnitten A und B betrachteten Punkt-Kreistransformationen und Speer-Kreistransformationen Spezialfälle der Berührungs-Kreistransformationen. Da nämlich z. B. eine Punkt-Kreistransformation K sich berührende Kreise wieder in sich berührende Kreise überführt, kann man sie auch als Transformation in der Menge der Linienelemente auffassen: Weil die Menge aller Kreise, die durch einen bestimmten Punkt A gehen und in diesem Punkt einander berühren, in eine Menge von Kreisen übergeht, die sich in irgendeinem anderen Punkt A' berühren (Abb. 49), kann

[1]) In der Literatur bezeichnet man diese Transformationen meistens als *Liesche Kreistransformationen*.

[2]) Allgemein bezeichnet man nach Lie diejenigen Transformationen in der Menge der Linienelemente als *Berührungstransformationen*, die jede Kurve (im Sinne von 11.2.) wieder in eine Kurve überführen; solche Transformationen führen sich berührende Kurven (Kurven mit einem gemeinsamen Linienelement) wieder in sich berührende Kurven über. Die Berührungs-Kreistransformationen sind ein Spezialfall der allgemeinen Berührungstransformationen.

man annehmen, daß K jedes Linienelement (A, a) in ein anderes Linienelement (A', a') überführt.[1]) Von unserem neuen Standpunkt aus kann man die Punkt- bzw. Speer-Kreistransformationen als diejenigen Berührungs-Kreistransformationen charakterisieren, die Punkte wieder in Punkte bzw. Geraden wieder in Geraden überführen. Es gibt jedoch auch Berührungs-Kreistransformationen, bei denen weder Punkte noch Geraden erhalten bleiben; eine solche Transformation können wir z. B. dadurch erhalten, daß wir mehrere Punkt- und

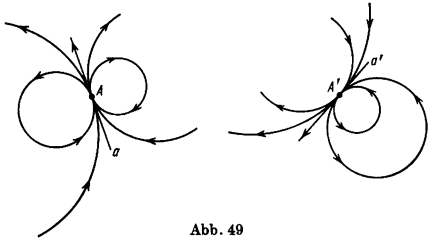


Abb. 49

Speer-Kreistransformationen hintereinander ausführen (z. B. zuerst eine Punkt- und dann eine Speerinversion). Es erweist sich, daß dieses Verfahren zur Erzeugung von Berührungs-Kreistransformationen Allgemeingültigkeit besitzt, d. h., daß *jede Berührungs-Kreistransformation als Produkt von Punkt- und Speer-Kreistransformationen dargestellt werden kann.*

Zunächst nehmen wir an, die Berührungs-Kreistransformation M_1 führt einen Punkt A in sich über. Wir wenden dann hintereinander die (Punkt-)Inversion I mit dem Zentrum A, die Transformation M_1 und nochmals die Inversion I an; die auf diese Weise erhaltene Transformation bezeichnen wir mit Λ, d. h., es ist $\Lambda = IM_1I$. Die Inversion I führt jede Gerade a in einen gewissen Kreis S über, der durch den Punkt A geht (in einen Kreis, der den „Kreis A mit verschwindendem Radius berührt"); die Transformation M_1 führt den Kreis S in einen anderen Kreis S' über, der ebenfalls durch A geht (denn M_1 soll nach Voraussetzung A in sich überführen); schließlich führt I den Kreis S' in eine andere Gerade a' über. Wir sehen also, daß *die Transformation $\Lambda = IM_1I$ jede Gerade wieder in*

[1]) Die Punktinversion mit dem Zentrum O und der Potenz k ist eine Berührungs-Kreistransformation, die ein beliebiges Linienelement (A, a) in dasjenige Linienelement (A', a') überführt, bei dem A und A' mit dem Inversionszentrum O auf einer Geraden m liegen, $(OA) \cdot (OA') = k$ und $\sphericalangle (m, a) = \sphericalangle (a', m)$ gilt; die letzte Bedingung gibt zugleich die Richtung von a' an, wenn a als gerichtete Gerade aufgefaßt wird. Die Speerinversion mit der Achse o und der Potenz k führt die Linienelemente (A, a) und (A', a') ineinander über, bei denen sich a und a' in einem Punkt M der Inversionsachse o schneiden und wobei die Beziehung $\tan \frac{\sphericalangle (o, a)}{2} \cdot \tan \frac{\sphericalangle (o, a')}{2} = k$ sowie $(AM) = (MA')$ gilt. Ebenso einfach läßt sich angeben, wie die speziellen Punkt- und Speerinversionen ein beliebiges Linienelement (A, a) transformieren; dies sei dem Leser überlassen.

eine Gerade überführt, d. h., *sie ist eine Speer-Kreistransformation* (eine gewöhnliche oder spezielle Speerinversion, die möglicherweise noch von einer Ähnlichkeitstransformation begleitet wird). Das Produkt der Inversion I, der Speer-Kreistransformation Λ und erneut der Inversion I ist identisch dem Produkt aus zwei Transformationen I, der Berührungs-Kreistransformation M_1 und noch zweier Inversionen I, d. h., es stimmt mit der Transformation M_1 überein (denn zwei aufeinanderfolgende Anwendungen der Inversionen I heben sich offenbar gegenseitig auf); damit ist gezeigt, daß M_1 *als Produkt der drei Transformationen* I, Λ *und* I *dargestellt werden kann.*

Wir betrachten nun eine *beliebige* Berührungs-Kreistransformation M. Führt M alle Punkte wieder in Punkte über, so reduziert sie sich, wie uns bereits bekannt ist, im wesentlichen auf eine (Punkt-)Inversion. Wir nehmen daher an, daß M einen Punkt A in einen Kreis S etwa mit dem Mittelpunkt A' und dem Radius r überführt.[1]) Mit T bezeichnen wir die Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{A'A}$[2]) und mit Γ die spezielle Speerinversion, die durch das Netz aller Kreise mit dem Radius r bestimmt wird. (Die spezielle Inversion Γ kann auch durch die Dehnung um die Größe $-r$ ersetzt werden.) Die Transformation T führt den Kreis S in den Kreis S' mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r über, und Γ führt S' in den Punkt A über; mithin ist das Produkt $M_1 = \Gamma T M$ der Transformationen M, T und Γ eine Berührungs-Kreistransformation, die den Punkt A in sich selbst überführt. Eine solche Transformation kann man aber, wie wir bereits bewiesen haben, als Produkt $I\Lambda I$, bestehend aus einer (Punkt-)Inversion I, einer Speer-Kreistransformation Λ (einer gewöhnlichen oder speziellen Speerinversion, die evtl. von einer Ähnlichkeitstransformation begleitet wird) und nochmals der Inversion I darstellen. Andererseits ist M das Produkt aus der Transformation M_1, der speziellen Inversion Γ und der Parallelverschiebung $\bar{T}$ um den Vektor $\overrightarrow{AA'}$. (Die Hintereinanderausführung der drei Transformationen M, Γ und $\bar{T}$ unterscheidet sich nicht von der Hintereinanderausführung der fünf Transformationen M, T, Γ, Γ und $\bar{T}$; aber die beiden nacheinander ausgeführten Inversionen Γ heben sich gegenseitig auf und ebenso die beiden Parallelverschiebungen T und $\bar{T}$.) *Somit stimmt* M *mit dem Produkt der fünf Transformationen* I, Λ, I, Γ *und* $\bar{T}$ *überein, womit unsere Behauptung bewiesen ist.*

12.2. Die Berührungsaufgabe von Apollonios. Die Berührungs-Kreistransformationen sind ebenfalls beim Beweis geometrischer Sätze und bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben vielfältig anwendbar. Wir beschränken uns hier auf ein bekanntes Beispiel dieser Art.

Es sei ein Kreis S *zu konstruieren, der drei gegebene Kreise* S_1, S_2 *und* S_3 *berührt* (Abb. 50a; diese Konstruktionsaufgabe heißt *Berührungsaufgabe von* Apollonios). Diese Aufgabe scheint zunächst sehr kompliziert zu sein, da überhaupt nicht ersichtlich ist, wie man von den vorhandenen, durch nichts miteinander verknüpften Kreisen S_1, S_2 und S_3 zu dem gesuchten Kreis S

---

[1]) Führt M den Punkt A in eine *Gerade* a über, so betrachten wir statt M das Produkt $\bar{M} = IM$ aus der Transformation M und einer (Punkt-)Inversion I, die a in einen Kreis S überführt; $\bar{M}$ erhält man dann seinerseits, wenn man nacheinander die Transformationen $\bar{M}$ und I ausführt. (Man kann übrigens zeigen, daß keine Berührungs-Kreistransformation *alle* Punkte der Ebene in Geraden überführt, daß sich sicher ein Punkt A finden läßt, den M in einen Kreis S mit endlichem Radius überführt.)

[2]) Vgl. S. 48.

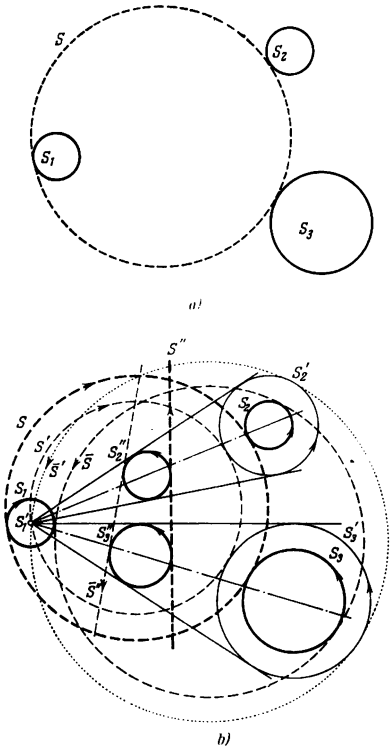


Abb. 50

gelangen soll. Die Zeichnung zur Aufgabe kann jedoch so vereinfacht werden, daß die neue Aufgabe bereits völlig trivial ist.

Zunächst führen wir durch eine *Speer-Kreistransformation* Λ den Kreis S_1 in einen Punkt S_1' über; die Kreise S_2' und S_3' gehen dabei in neue Kreise S_2'' und S_3'' über. Als Transformation Λ kann eine spezielle Speerinversion oder die

Dehnung um die Größe $-r_1$ verwendet werden, wobei r_1 der Radius des Kreises S_1 ist (vgl. Abb. 50b). Die Anwendung einer Speer-Kreistransformation setzt natürlich voraus, daß die Kreise S_1, S_2 und S_3 gerichtet sind. Waren diese Kreise ursprünglich nicht gerichtet, so geben wir ihre Richtungen beliebig vor. Den verschiedenen Möglichkeiten bei der Wahl der Richtungen dieser Kreise entsprechen verschiedene Lösungen der Berührungsaufgabe von APOLLONIOS.[1])

Der gesuchte Kreis S wird durch die Transformation Λ (sagen wir durch eine Dehnung) in einen Kreis S' übergeführt, der die Kreise S_2' und S_3' berührt und durch den Punkt S' hindurchgeht. Wir führen nun eine *Punkt-Kreistransformation*, z. B. eine Inversion I mit dem Zentrum S_1' aus, die den Punkt S_1' in den „uneigentlichen Punkt" Ω überführt. Dabei gehen die Kreise S_2' und S_3' in irgendwelche Kreise S_2'' und S_3'' über und der gesuchte Kreis S' in eine Gerade S'', die die Kreise S_2'' und S_3'' berührt. Somit führt die *Berührungs-Kreistransformation* $K = I\Lambda$ die Kreise S_1, S_2 und S_3 in den „uneigentlichen Punkt" Ω und zwei Kreise S_2'' und S_3'' über; den gesuchten Kreis S führt die Berührungs-Kreistransformation K in eine Gerade S'' über, die die Kreise S_2'' und S_3'' berührt. Sind die Kreise S_2'' und S_3'' bekannt, so läßt sich diese Gerade S'' unschwer konstruieren; danach kann man leicht von der Geraden S'' zum Kreis S' und von diesem schließlich zum gesuchten Kreis S übergehen. In Abhängigkeit von der Lage und der Richtung der Kreise S_2'' und S_3'' kann die Aufgabe zwei Lösungen (dieser Fall ist in Abb. 50 dargestellt), eine Lösung oder auch keine Lösung besitzen.

12.3. Der Begriff der Berührungsgeometrie der Kreise. Die Untersuchung derjenigen Eigenschaften von Figuren, die bei Berührungs-Kreistransformationen unverändert bleiben, bilden den Gegenstand der *Berührungsgeometrie der Kreise*[2]). Der oben bewiesene Sachverhalt erlaubt folgende Aussagen: *Die Berührungsgeometrie der Kreise untersucht diejenigen Eigenschaften von Figuren, die sowohl gegenüber Punkt- als auch gegenüber Speer-Kreistransformationen unverändert bleiben, und auch nur diese Eigenschaften.* In dieser Geometrie hat weder der Begriff des Winkels zwischen Kreisen noch der Begriff der Tangentenentfernung einen Sinn; es ist unschwer zu zeigen, daß hier auch kein Analogon zu diesen Begriffen angegeben werden kann, da ein beliebiges Paar von Kreisen durch eine passend ausgewählte Berührungs-Kreistransformation in ein beliebiges anderes Paar von Kreisen übergeführt werden kann. Dagegen

[1]) Später werden wir sehen, daß die Berührungsaufgabe von APOLLONIOS bis zu zwei Lösungen haben kann, wenn die Kreise S_1, S_2 und S_3 gerichtet sind. Die Richtung dreier nichtgerichteter Kreise kann auf verschiedene Weise festgelegt werden, und zwar gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten, was auf 16 verschiedene Kreise S führt. Diese 16 gerichteten Kreise unterscheiden sich jedoch paarweise nur durch die Richtung. Wir können also schließen, daß *im Fall nichtgerichteter Kreise die größtmögliche Anzahl der Lösungen für die Berührungsaufgabe von* APOLLONIOS *acht beträgt.*

[2]) Die Elemente dieser Geometrie sind in dem Buch von W. BLASCHKE [7] enthalten, auf das wir bereits mehrfach verwiesen haben.

besitzen in der Berührungsgeometrie der Kreise nicht je zwei Tripel von Kreisen diese Eigenschaft: So ist leicht einzusehen, daß die in Abb. 51a, b dargestellten beiden Tripel der Kreise S_1, S_2, S_3 und $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$ durch keine Berührungs-Kreistransformation ineinander übergeführt werden können (denn bei einer solchen müßte die Gerade S in einen Kreis $\bar{S}$ übergehen, der die Kreise $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$ „berührt", und einen solchen Kreis gibt es nicht). Man kann übrigens zeigen, daß alle (vom Standpunkt der Berührungsgeometrie der Kreise) verschiedenen Tripel von Kreisen, die sich paarweise nicht berühren,

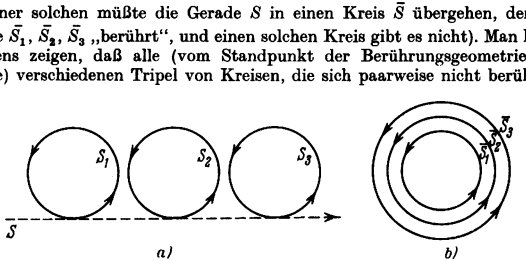


Abb. 51

durch dieses Paar vertreten werden; jedes andere Kreistripel kann durch eine Berührungs-Kreistransformation in eines der in Abb. 51a, b dargestellten Tripel übergeführt werden. Weit ergiebiger ist die Untersuchung der Eigenschaften von Kreisquadrupeln; hier kann man einige besonders interessante Typen von Quadrupeln auszeichnen und gewisse „Invarianten" der Kreisquadrupel bilden, d. h. den Kreisquadrupeln bestimmte Zahlen zuordnen, deren Übereinstimmung für zwei Quadrupel bedeutet, daß diese Kreisquadrupel im Sinne der Berührungs-Kreisgeometrie „gleich" sind, sich also durch eine gewisse Berührungs-Kreistransformation ineinander überführen lassen. Wir können jedoch hier nicht auf Details der Berührungsgeometrie der Kreise eingehen.

Literatur

[1] Яглом, И. М., Геометрические преобразования, т. I–II (Jaglom, I. M., Geometrische Transformationen, Bd. I, II), Moskau 1957, 1958.

[2] Перепелкин, Д. И., Курс элементарной геометрии, т. I–II (Perepelkin, D. I., Lehrgang der Elementargeometrie, Bd. I–II), Moskau-Leningrad 1948, 1949.

[3] Hadamard, J., Leçons de géométrie élémentaire I, II, 7. Aufl., Paris 1937.

[4] Делоне, Б. Н., и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии (Delaunay, B. N., und O. K. Shitomirski, Aufgabensammlung zur Geometrie), Moskau 1959.

[5] Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil II (Geometrie), 2. Aufl., Leipzig 1914.

[6] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., Berlin 1926.

[7] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. III (Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln), Berlin 1929.

Zusätzlich sei auf folgende Literatur verwiesen (*Anm. d. wissenschaftl. Red.*):

Lietzmann, W., Altes und Neues vom Kreis, 4. Aufl., Leipzig 1966.

B. A. ROSENFELD

DIE GRUNDBEGRIFFE DER SPHÄRISCHEN GEOMETRIE UND TRIGONOMETRIE

§ 1. Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie

1.1. Die Entstehung der sphärischen Geometrie. Die Geometrie der Ebene ist bekanntlich rein „irdischen" Ursprungs; sie entstand, worauf schon das Wort „Geometrie" hindeutet (γηρομετρία – „Erdmessung"), im Zusammenhang mit dem Vermessen von Landstücken kleiner Ausdehnung, die es gestattete, sie als Teil der Ebene anzusehen, Die sphärische Geometrie, d. h. die Geometrie auf der Sphäre, ist dagegen „himmlischen" Ursprungs: Mit der Geometrie auf der Sphäre kamen die Menschen zuerst in der Astronomie, bei der Untersuchung der sichtbaren „Himmelssphäre" in Berührung. Die sphärische Geometrie entstand im 1. und 2. Jahrhundert u. Z., als nach den römischen Eroberungen ein enger Kontakt zwischen den griechischen und alexandrinischen Geometern und den babylonischen Astronomen hergestellt war. Im 1. Jh. erschien die „Sphärik" des MENELAOS, die von dem berühmten KLAUDIOS PTOLOMAIOS von Alexandria sofort auf die Astronomie angewandt wurde. Später begann man, im Zusammenhang mit der Entwicklung der Seefahrt und der Geographie, die sphärische Geometrie auch auf die Oberfläche der Erdkugel anzuwenden. Gegenwärtig findet sowohl die ebene als auch die sphärische Geometrie breite Anwendung in der Geodäsie; auf der ebenen Geometrie fußt die „niedere Geodäsie" – die Geodäsie kleiner Landstücke –, auf der sphärischen Geometrie die „höhere Geodäsie" – die Geodäsie großer Landstücke.

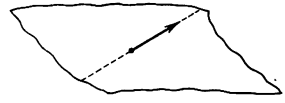


Abb. 1

Die ebene und die sphärische Geometrie haben viel Gemeinsames; das erklärt sich daraus, daß die Sphäre denselben Grad von „Beweglichkeit" besitzt wie die Ebene: Jeden Punkt der Ebene mit einer von ihm ausgehenden Richtung (Abb. 1) kann man durch eine Bewegung dieser Ebene mit jedem anderen Punkt dieser Ebene und einer von diesem ausgehenden Richtung zur Deckung bringen, und genauso kann man jeden Punkt einer Sphäre und eine von ihm ausgehende Richtung (Abb. 2) durch eine Drehung dieser Sphäre mit jedem anderen Punkt der Sphäre und einer von diesem ausgehenden Richtung zur Deckung bringen.[1])

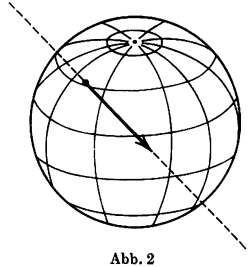


Abb. 2

[1]) Vgl. in diesem Zusammenhang den Artikel über Nichteuklidische Geometrien in Band V der EdEM.

1.2. Punkte, Großkreise und Kleinkreise. Während in der ebenen Geometrie als Grundbegriffe die Punkte, die Geraden und die Bewegungen der Ebene angesehen werden,[1]) spielen in der sphärischen Geometrie die *Punkte* der Sphäre, die *Großkreise* und die *Bewegungen* der Sphäre diese Rolle. Wir wollen die Bedeutung dieser Begriffe näher erläutern. Der Schnitt einer Sphäre mit einer Ebene ist stets ein Kreis: Wenn man nämlich vom Mittelpunkt der Kugel, deren Oberfläche die betrachtete Sphäre ist, das Lot auf diese Ebene fällt und eine Drehung des Raumes um dieses Lot mit einem beliebigen Winkel ausführt, geht bei dieser Drehung sowohl die Sphäre als auch die Ebene in sich über und folglich auch die Schnittlinie; mithin hat jeder Punkt dieser Schnittlinie vom Schnittpunkt der Ebene mit dem Lot den gleichen Abstand, woraus man ersieht, daß diese Schnittlinie ein Kreis ist. Der Radius ϱ dieses Kreises ist Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks (Abb. 3), dessen Hypotenuse der Radius r der Kugel und dessen zweite Kathete das vom Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene gefällte Lot h ist. Deshalb gilt nach dem Pythagoräischen Lehrsatz:

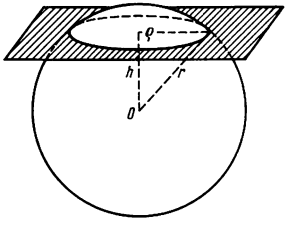


Abb. 3

$$\varrho = \sqrt{r^2 - h^2}.$$

Diese Formel zeigt, daß die Größe ϱ ihren maximalen Wert $\varrho = r$ für $h = 0$ annimmt, d. h. dann, wenn die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, also eine Diametralebene ist. In diesem Fall heißt der Kreis auf der Sphäre ein *Großkreis* (oder ein *Hauptkreis*). Bei $h > 0$ ist $\varrho < r$, und der Kreis auf der Sphäre heißt in diesem Fall ein *Kleinkreis* (oder ein *Nebenkreis*).

Da durch drei beliebige nicht auf einer Geraden liegende Punkte des Raumes eine einzige Ebene hindurchgeht, geht durch zwei beliebige Punkte einer Sphäre, die nicht diametral gegenüberliegen (d. h. nicht Endpunkte eines Durchmessers sind), genau eine Diametralebene. *Mithin geht durch zwei beliebige Punkte einer Sphäre, die sich nicht diametral gegenüberliegen, ein einziger Großkreis* (Abb. 4). Das entspricht genau dem Sachverhalt, daß in der Ebene durch zwei beliebige Punkte eine einzige Gerade geht. Durch zwei diametral gegenüberliegende Punkte einer Sphäre kann man dagegen unendlich viele Großkreise legen (Abb. 5). Da sich zwei verschiedene Diametralebenen einer Kugel längs eines Durchmessers der Kugel schneiden, *schneiden sich je zwei Großkreise einer Sphäre in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten der Sphäre* (Abb. 6). Hier stellen wir also einen Unterschied zwischen der sphärischen und der ebenen Geometrie fest, denn in der ebenen Geometrie gibt es keine zwei Geraden, die sich in mehr als einem Punkt schneiden.

[1]) Vgl. den Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie", S. 25.

Da eine Ebene den Raum in zwei Gebiete teilt, *zerlegt ein Großkreis die Sphäre in zwei Gebiete* (Abb. 4); diese Gebiete nennt man *Halbsphären*. Weil ferner zwei sich schneidende Ebenen den Raum in vier Gebiete teilen, *zerlegen zwei Großkreise die Sphäre in vier Gebiete* (Abb. 6). Weil schließlich drei sich

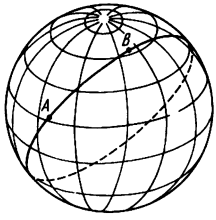


Abb. 4

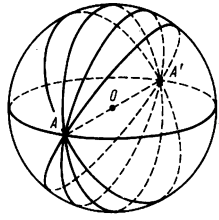


Abb. 5

in einem Punkt schneidende Ebenen den Raum in acht Gebiete teilen, *zerlegen drei sich nicht in einem Punkt schneidende Großkreise die Sphäre in acht Gebiete.* (In Abb. 7 sind die acht Gebiete ABC, ABC', $AB'C$, $A'BC$, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, $A'B'C'$ eingezeichnet, in die die Großkreise AB, AC und BC die Sphäre

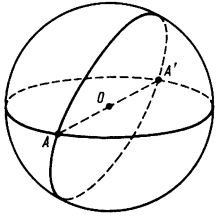


Abb. 6

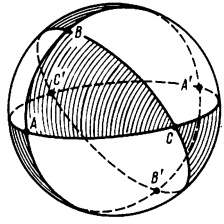


Abb. 7

zerlegen, wobei die Punkte A', B', C' den Punkten A, B, C diametral gegenüberliegen, so daß auch die Gebiete ABC und $A'B'C'$, ABC' und $A'B'C$, $AB'C$ und $A'BC'$, $A'BC$ und $AB'C'$ sich paarweise diametral gegenüberliegen.)

Während die ersten beiden dieser Eigenschaften den Eigenschaften der Geraden in der Ebene analog sind, daß nämlich die Ebene von einer Geraden in zwei Gebiete und von zwei sich schneidenden Geraden in vier Gebiete zerlegt wird, ist die dritte der angegebenen Eigenschaften der entsprechenden Eigenschaft der Geraden in der Ebene nicht völlig analog, da drei sich paar-

weise schneidende Geraden, die nicht alle drei durch einen Punkt gehen, die Ebene nicht in acht, sondern in *sieben* Teile zerlegen (Abb. 8).

Jedem Großkreis entsprechen zwei diametral gegenüberliegende Punkte der Sphäre, die aus ihr durch den auf der Ebene des Großkreises senkrecht stehen-

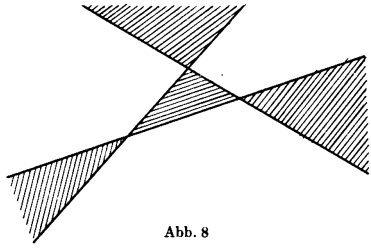


Abb. 8

den Durchmesser ausgeschnitten werden (Abb. 9). Diese beiden Punkte nennt man die *Pole* des Großkreises (vom griechischen Wort *πόλος*, in der lateinischen Form „polus" – „Achse", da die auf der Ebene eines Kreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte die Achse des Kreises im Raum genannt wird); in diesem Sinn sind die geographischen Pole, der Nord- und der Südpol der Erde, die Pole des Erdäquators. Offenbar entspricht zwei beliebigen diametral gegenüberliegenden Punkten A und B der Sphäre genau ein Großkreis, für den die Punkte A und B Pole sind; diesen Großkreis nennt man die *Polare* des Paares diametral gegenüberliegender Punkte A, B (vom lateinischen Wort „polaris", dem Eigenschaftswort zu „polus"). Jeden Punkt der Polaren bezeichnet man als polar konjugiert zu jedem seiner Pole; anders ausgedrückt: Punkte P und Q einer Sphäre sind *polar konjugiert*, wenn die Radien OP und OQ aufeinander senkrecht stehen (O ist dabei der Mittelpunkt der betrachteten Kugel).

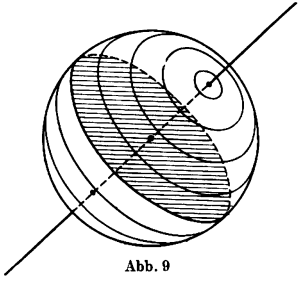


Abb. 9

1.3. Die Bewegungen einer Sphäre. Eine Transformation der Sphäre, bei der der (räumliche) Abstand zwischen den Punkten der Sphäre erhalten bleibt, wird als *Bewegung* der Sphäre bezeichnet.[1]) Eine Bewegung ist also eine Trans-

[1]) Vgl. den Artikel „Geometrische Transformationen", S. 55, und den Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie", S. 30.

formation φ der Sphäre, bei der für beliebige Punkte A, B der Sphäre der Abstand der Punkte $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ gleich dem Abstand der Punkte A und B ist. Da sich zwei Punkte A und B dann und nur dann diametral gegenüberliegen, wenn ihr Abstand den maximalen Wert $2r$ besitzt (wobei r der Radius der Kugel ist), folgt aus der Definition der Bewegung unmittelbar, daß *bei jeder Bewegung der Sphäre diametral gegenüberliegende Punkte der Sphäre in diametral gegenüberliegende Punkte übergehen.* Für diese Eigenschaft gibt es

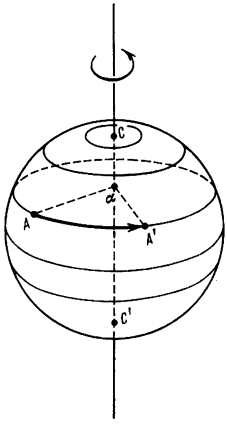


Abb. 10

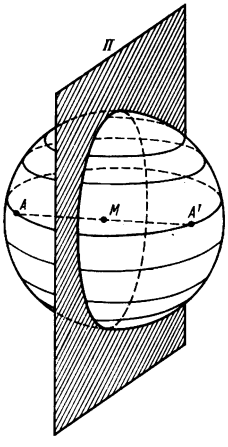


Abb. 11

in der ebenen Geometrie kein Analogon, weil es in der Ebene keine Punktepaare gibt, so daß die Bewegung des einen Punktes die Bewegung des anderen vollständig bestimmt. Während also eine Bewegung der Ebene eine Transformation der Menge der Punkte dieser Ebene ist, ist die Bewegung der Sphäre ihrem Wesen nach eine Transformation der Paare von diametral gegenüberliegenden Punkten der Sphäre.

Als Beispiel für eine Bewegung der Sphäre sei die *Drehung der Sphäre* um einen ihrer Durchmesser CC' mit einem Winkel α genannt, bei der sich jeder Kreis der Sphäre, der die Gerade CC' zur Achse hat, in sich um den Winkel α dreht (Abb. 10; selbstverständlich drehen sich alle diese Kreise in derselben Richtung um den Winkel α). Ein anderes Beispiel für eine Bewegung der Sphäre ist die *Spiegelung* der Sphäre an einer ihrer Diametralebenen Π, bei

der ein Punkt A in denjenigen Punkt A' übergeht, für den die Ebene Π auf der Strecke $\overline{AA'}$ senkrecht steht und durch ihren Mittelpunkt geht (Abb. 11). Die Drehungen und diese Spiegelungen sind in gewissem Sinne die Grundbewegungen der Sphäre; man kann nämlich beweisen, daß *jede (nichtidentische) Bewegung der Sphäre entweder eine Drehung oder eine Spiegelung oder ein Produkt aus einer Drehung und einer Spiegelung ist* (vgl. S. 83).

1.4. Der Gegenstand der sphärischen Geometrie. Nun können wir den Gegenstand der sphärischen Geometrie genauer umreißen: *Die sphärische Geometrie untersucht diejenigen Eigenschaften von Figuren auf der Sphäre, die bei beliebigen Bewegungen der Sphäre erhalten bleiben* (vgl. S. 93). Figuren auf der Sphäre, die durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können, heißen *kongruent*; kongruente Figuren werden in der sphärischen Geometrie als „gleich" angesehen.

Mitunter wird der Gegenstand der sphärischen Geometrie enger gefaßt: Man betrachtet statt der oben definierten Bewegungen nur die *Drehungen* der Sphäre und untersucht die Eigenschaften der Figuren, die bei Drehungen erhalten bleiben. In diesem Fall werden nur Figuren, die durch eine Drehung ineinander übergehen, als „gleich" angesehen,

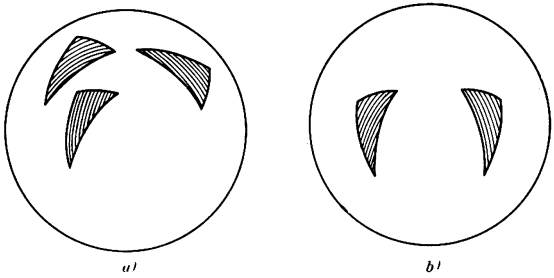


Abb. 12

während Figuren, die zwar durch eine Bewegung (im oben definierten Sinn) ineinander übergehen, aber nicht durch eine Drehung zur Deckung gebracht werden können, als verschieden gelten; solche Figuren nennt man (bei der genannten Auffassung der sphärischen Geometrie) *spiegelbildlich*. In Abb. 12a sind in diesem Sinne „gleiche" Figuren (sphärische Dreiecke, vgl. unten) und in Abb. 12b „spiegelbildliche" Figuren dargestellt.

Diesen beiden Auffassungen der sphärischen Geometrie entsprechen zwei analoge Auffassungen der Geometrie der Ebene. Man kann nämlich einerseits die Bewegungen der Ebene in dem im Artikel „Axiome und Grundbegriffe der Geometrie" angegebenen Sinn auffassen (d. h. als Bewegungen alle Drehungen, Parallelverschiebungen und Spiegelungen an einer Geraden sowie die Produkte aus diesen zulassen; vgl. S. 83). Andererseits ist auch ein Aufbau der Geometrie der Ebene möglich, bei dem als Bewegungen nur „Bewegungen

erster Art", d. h. Drehungen und Parallelverschiebungen, sowie Produkte aus diesen zugelassen werden. Von diesem Standpunkt aus werden nur solche Figuren als „gleich" angesehen, die durch eine Drehung und eine Parallelverschiebung ineinander übergehen, d. h. Figuren, die nicht nur in der üblichen Bedeutung des Wortes „gleich" (kongruent) sind, sondern auch denselben Umlaufssinn haben (im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn). Dagegen sieht man bei dieser Auffassung der ebenen Geometrie diejenigen Figuren, die im üblichen Sinn „gleich" sind, aber entgegengesetzten Umlaufssinn haben, nicht als gleich, sondern als „spiegelbildlich" an. In Abb. 13a sind „gleiche" Dreiecke und in Abb. 13b „spiegelbildliche" Dreiecke dargestellt.

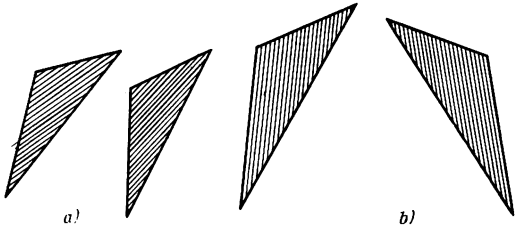


Abb. 13

Wenn man der in der Schule üblichen Auffassung folgt und solche Figuren als „gleich" ansieht, die durch „Überlagerung" (Aufeinanderlegen) zur Deckung gebracht werden können, dann entsprechen die genannten beiden Auffassungen der Planimetrie den beiden verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten des Wortes „Überlagerung". Einerseits kann man nämlich unter einer „Überlagerung" eine beliebige „mechanische" Verlagerung ebener Figuren verstehen, die diese nicht aus der betrachteten Ebene herausführen. Wenn wir die Gleichheit von Figuren mittels dieser Art von „Überlagerungen" (d. h. durch Bewegungen erster Art) definieren, kommen wir zur zweiten der genannten Auffassungen der Planimetrie; in diesem Fall sind die in Abb. 13b dargestellten Dreiecke ungleich, da keine Verlagerung eines dieser Dreiecke, die es nicht aus der Zeichenebene herausführt, dieses Dreieck mit dem anderen zur Deckung bringt. Andererseits kann man als „Überlagerungen" auch solche Verlagerungen von Figuren zulassen, die diese aus der betrachteten Ebene herausführen (umklappen). Bei einer solchen Auffassung wird auch die Spiegelung an einer Geraden zu einer „Überlagerung", da sie durch eine Verlagerung im Raum (nämlich eine Drehung um eine Achse; Abb. 14) realisiert werden kann. Dieser Standpunkt führt zur üblichen Auffassung der Gleichheit von Figuren. (In diesem Fall werden auch die in Abb. 13b dargestellten Dreiecke als gleich angesehen.)

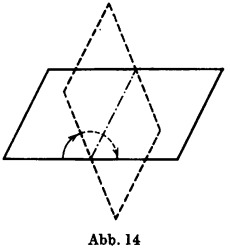


Abb. 14

Der Unterschied zwischen den beiden genannten Auffassungen der Planimetrie besteht also darin, daß man in einem Fall unter Bewegungen „mechanische" Verlagerungen von

Figuren in der betrachteten Ebene versteht und im anderen Fall im umgebenden dreidimensionalen Raum ausgeführte „mechanische" Verlagerungen. Es muß bemerkt werden, daß die beiden angeführten Auffassungen der Planimetrie, strenggenommen, auf zwei verschiedene geometrische Systeme führen. In der nur auf Bewegungen erster Art begründeten Geometrie existieren Begriffe, die in der üblichen Geometrie keinen Sinn haben; dazu gehören der Umlaufssinn einer Figur, der orientierte Flächeninhalt einer Figur (der Flächeninhalt, der in Abhängigkeit vom Umlaufssinn mit diesem oder jenem Vorzeichen versehen wird[1]), das Schiefprodukt zweier Vektoren[2]) u. a. Im Schulunterricht läßt man Fragen dieser Art meistens außer acht, was der Betrachtung aller Bewegungen und nicht nur der Bewegungen erster Art entspricht.

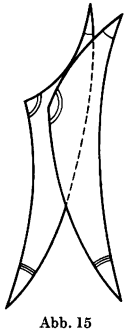


Abb. 15

In der sphärischen Geometrie scheint der Unterschied zwischen den beiden angeführten Auffassungen auf den ersten Blick prinzipiellerer Natur zu sein als in der Planimetrie; denn es gibt ja keine „mechanische" Verlagerung (im dreidimensionalen Raum), die eines der in Abb. 12b dargestellten Dreiecke mit dem anderen Dreieck zur Deckung brächte. (Wenn man das Dreieck ABC aus der Sphäre „herausschneidet" und es „anders herum" auf das Dreieck $A'B'C'$ legt, kommen die Dreiecke nicht zur Deckung, es stört die Krümmung der Sphäre; Abb. 15.) Diese Überlegung ist jedoch nicht prinzipiellerer Natur: Denkt man sich nämlich die Sphäre in den vierdimensionalen Raum[3]) eingebettet, so können spiegelbildliche Figuren (z. B. die in Abb. 12b abgebildeten Dreiecke) durch eine „mechanische" Verlagerung in diesem vierdimensionalen Raum zur Deckung gebracht werden (d. h. durch eine „Bewegung erster Art" im vierdimensionalen Raum).

1.5. Das Dualitätsprinzip. Wir haben gesehen, daß eine beliebige Bewegung der Sphäre jedes Paar diametral gegenüberliegender Punkte wieder in ein Paar diametral gegenüberliegender Punkte überführt. *Somit ist in der sphärischen Geometrie das Paar diametral gegenüberliegender Punkte ein selbständiges geometrisches Objekt.* Wir heben eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Punktepaare hervor: *Jedem Satz der sphärischen Geometrie entspricht ein anderer Satz dieser Geometrie, den man aus dem ersten durch Vertauschen der Worte* „Paar diametral gegenüberliegender Punkte" *und* „Großkreis", „liegt auf" *und* „geht durch", „lassen sich miteinander verbinden" *und* „schneiden sich" *usw. erhält.* Zum Beispiel gilt:

Je zwei Großkreise auf einer Sphäre schneiden sich in einem Paar diametral gegenüberliegender Punkte.	Je zwei Paare diametral gegenüberliegender Punkte einer Sphäre lassen sich durch einen Großkreis miteinander verbinden.

[1]) Vgl. z. B. das Buch A. M. Лопшиц, Об измерении площадей ориентированных фигур (A. M. Lopschitz, Über die Berechnung des Flächeninhalts orientierter Figuren), Moskau 1956.

[2]) Vgl. den Artikel „Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie", S. 348.

[3]) Vgl. den Artikel über mehrdimensionale Räume in Band V der EdEM.

Diese Eigenschaft der Sätze der sphärischen Geometrie (man bezeichnet sie als „*Dualitätsprinzip*") ergibt sich daraus, daß jedem Großkreis auf der Sphäre umkehrbar eindeutig das Paar seiner Pole entspricht und daß jedem Paar diametral gegenüberliegender Punkte der Sphäre umkehrbar eindeutig ihre Polare entspricht; dabei liegen, wenn der Großkreis durch ein Paar diametral gegenüberliegender Punkte geht, die Pole dieses Kreises auf der Polaren dieses Punktepaares (Abb. 16). Sätze, die durch das angegebene Vertauschen auseinander hervorgehen, bezeichnet man als einander *duale Sätze*. Ist einer von zwei dualen Sätzen bewiesen, so ergibt sich der Beweis des zweiten Satzes aus dem Beweis des ersten Satzes, indem man in diesem jeden Großkreis durch seine Pole und jedes Paar diametral gegenüberliegender Punkte durch seine Polare ersetzt.

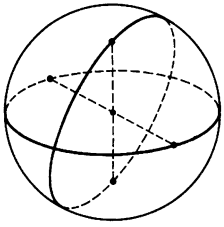


Abb. 16

1.6. Winkel auf der Sphäre. Der *Winkel* zwischen zwei sich schneidenden Kurven im Raum wird allgemein durch den Winkel zwischen den Tangenten an die Kurven in ihrem Schnittpunkt gemessen. Ein Spezialfall davon ist die Größe des Winkels zwischen zwei Großkreisen auf einer Sphäre. In Abb. 17 ist der Winkel BAC zwischen den Großkreisen AB und AC auf der Sphäre und der diesen Winkel messende Winkel XAY zwischen den Tangenten AX und AY an diese Großkreise dargestellt.

Wir betrachten nun den Großkreis, der die Polare des Scheitels A eines Winkels auf der Sphäre ist. Schneidet dieser die „Schenkel" des Winkels in den Punkten B und C, so sind die Strahlen OB und OC parallel den Tangenten AX und AY an die Schenkel des Winkels (Abb. 17). Mithin ist die Länge des Großkreisbogens $\widehat{BC}$ gleich dem Produkt aus der Größe des Winkels BAC und dem Radius der Sphäre. *Die Größe des Winkels zwischen zwei Großkreisen auf einer Sphäre ist also gleich dem Quotienten aus der Länge des Großkreisbogens zwischen den zum Scheitel des Winkels polar konjugierten Punkten der Schenkel des Winkels und dem Radius der Sphäre.*

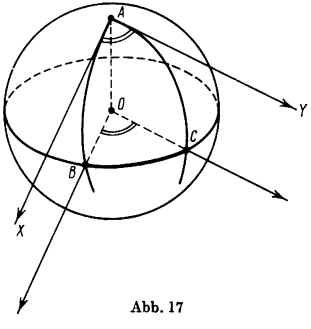
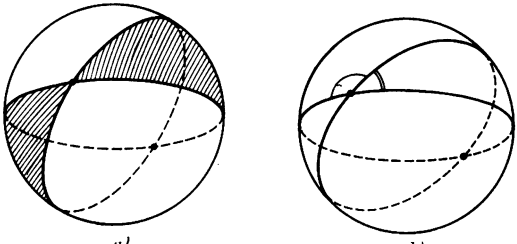


Abb. 17

Wir merken an, daß die von zwei halben Großkreisen in den diametral gegenüberliegenden Schnittpunkten A, A' gebildeten Winkel BAC und $BA'C$

beide demselben Winkel BOC gleich groß sind und folglich auch untereinander gleiche Größe haben. Zwei Großkreise definieren in jedem ihrer beiden Schnittpunkte vier Winkel. Dabei haben je zwei einander gegenüberliegende Winkel,



a) *b)*

Abb. 18

die also keinen Schenkel gemeinsam haben, dieselbe Größe (Abb. 18a), während sich je zwei benachbarte Winkel zu einem gestreckten Winkel der Größe π ergänzen (Abb. 18b). Je zwei gegenüberliegende Winkel bezeichnet man als ein *Paar von Scheitelwinkeln*, je zwei benachbarte Winkel als ein *Paar von Nebenwinkeln*.

Da die Pole D und E der Großkreise AB und AC diejenigen Punkte des Großkreises BC sind, die man aus den Punkten B und C durch eine Drehung um

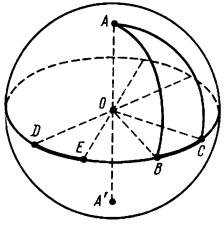


Abb. 19

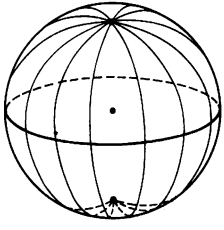


Abb. 20

die Gerade AA' mit einem rechten Winkel erhält, ist die Länge des Bogens $\widehat{BC}$ gleich der des Bogens $\widehat{DE}$ und die Größe des Winkels BAC gleich dem Quotienten aus der Länge des Bogens $\widehat{DE}$ und dem Radius der Sphäre. Das Vertauschen eines der Punkte D oder E mit dem ihm diametral gegenüberliegenden Punkt D' oder E' (Abb. 19) entspricht dem Übergang zu einem Neben-

winkel des Winkels BAC. *Es ist also die Größe jedes der Winkel zwischen zwei Großkreisen gleich dem Quotienten aus der Länge eines der Bögen, der ihre Pole miteinander verbindet, und dem Radius der Sphäre.*

Da bei der Spiegelung an einer Diametralebene die Pole des durch diese Ebene aus der Sphäre ausgeschnittenen Großkreises ineinander übergehen, gehen die durch diese Pole gehenden Großkreise bei der angegebenen Spiegelung ebenfalls in sich selbst über (Abb. 20). Mithin sind die Winkel, die diese Großkreise mit dem von der Ebene ausgeschnittenen Großkreis bilden, gleich ihren Nebenwinkeln und folglich rechte Winkel. *Also schneiden sich Großkreise, von denen einer durch die Pole des anderen geht, unter einem rechten Winkel.* Solche Großkreise nennen wir *zueinander senkrecht* (*orthogonal*).

Wenn wir umgekehrt auf einem von zwei senkrechten Großkreisen die zum Schnittpunkt polar konjugierten Punkte aufsuchen, erhalten wir Punkte, für

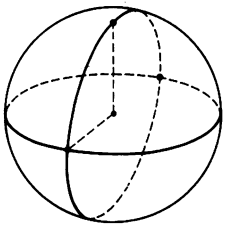


Abb. 21

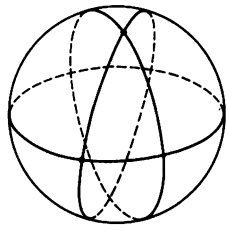


Abb. 22

die der zugehörige Radius der Sphäre senkrecht auf der Diametralebene steht, die den zweiten Großkreis aus der Sphäre ausschneidet (Abb. 21), d. h. die Punkte, die zu diesem Kreis Pole sind. *Folglich geht jeder von zwei zueinander senkrechten Großkreisen durch die Pole des anderen Großkreises.*

Hieraus folgt, daß genau der Großkreis, der Polare des Schnittpunktes zweier Großkreise ist, auf beiden Großkreisen senkrecht steht, d. h., *zu zwei Großkreisen gibt es stets genau einen Großkreis, der auf beiden senkrecht steht* (Abb. 22). Zum Vergleich bemerken wir, daß in der Ebene nur parallele Geraden gemeinsame Senkrechte besitzen, wobei jedoch zwei parallele Geraden nicht eine, sondern unendlich viele gemeinsame Senkrechte haben.

§ 2. Sphärische Dreiecke

2.1. Dreiecke und Zweiecke auf der Sphäre. In § 1 sahen wir, daß drei Großkreise auf einer Sphäre, die sich nicht in einem Punkt schneiden, die Sphäre in acht Gebiete zerlegen. Jedes dieser von Bögen der drei Großkreise beran-

deten Gebiete heißt ein *sphärisches Dreieck* (Abb. 23). Die das sphärische Dreieck berandenden Großkreisbögen nennt man seine *Seiten*, die Endpunkte dieser Bögen seine *Ecken* und die von den Seiten des sphärischen Dreiecks in seinen Ecken gebildeten Winkel die *Winkel* des sphärischen Dreiecks. Es ist klar, daß jede Seite eines sphärischen Dreiecks kleiner als ein halber Großkreis ist.

Im Unterschied zur Ebene, wo das Dreieck das Vieleck mit der geringsten Anzahl von Seiten ist, gibt es auf der Sphäre Vielecke mit weniger als drei

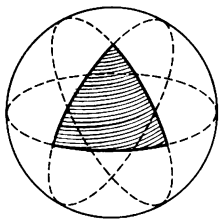


Abb. 23

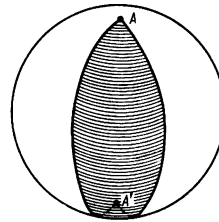


Abb. 24

Seiten, nämlich die Zweiecke. Ein *Zweieck* ist ein von zwei halben Großkreisen mit gemeinsamen Endpunkten berandeter Teil der Sphäre; diese gemeinsamen Endpunkte, die die *Ecken* des Zweiecks genannt werden, sind diametral gegenüberliegende Punkte der Sphäre. In Abb. 24 ist ein Zweieck mit den Ecken A und A' abgebildet.

2.2. Polardreiecke. Jedem sphärischen Dreieck ABC kann man ein anderes sphärisches Dreieck $A'B'C'$ zuordnen, dessen Ecken die Pole der durch die Seiten $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ des sphärischen Dreiecks ABC bestimmten Großkreise sind, die auf derselben Seite dieser Großkreise liegen wie entsprechend die Ecken A, B, C (Abb. 25). Wir nennen das sphärische Dreieck $A'B'C'$ das *Polardreieck* des sphärischen Dreiecks ABC.

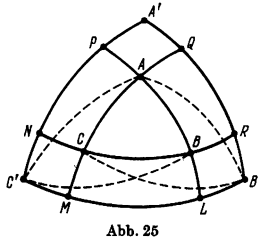


Abb. 25

Ist das sphärische Dreieck $A'B'C'$ Polardreieck des sphärischen Dreiecks ABC, so ist auch umgekehrt das sphärische Dreieck ABC Polardreieck des sphärischen Dreiecks $A'B'C'$. Da nämlich der Punkt B' ein Pol des Großkreises AC ist, ist der Punkt B' zu den Punkten A und C polar konjugiert (Abb. 25); da der Punkt C' ein Pol des Großkreises AB ist, ist der Punkt C' polar konjugiert zu den

Punkten A und B; ist aber der Punkt A polar konjugiert zu den Punkten B' und C', so ist er Pol des Großkreises $B'C'$. Da die Punkte A und A' auf derselben Seite des Großkreises BC liegen, liegen diese Punkte auch auf derselben Seite des Großkreises $B'C'$. Genauso beweist man, daß die Punkte B und C Pole der Großkreise $C'A'$ bzw. $A'B'$ sind und auf derselben Seite dieser Großkreise liegen wie die Punkte B' und C'. Also ist das sphärische Dreieck ABC Polardreieck des sphärischen Dreiecks $A'B'C'$.

Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Großkreise AB und AC mit der Seite $\widehat{B'C'}$ mit L und M, die Schnittpunkte der Großkreise BC und BA mit der Seite $\widehat{A'C'}$ mit N und P und die Schnittpunkte der Großkreise CA und CB mit der Seite $\widehat{A'B'}$ mit Q und R (Abb. 25). Bezeichnen wir ferner die Größe der Winkel CAB, ABC und BCA mit α, β und γ und den Radius der Sphäre mit r, so erhalten wir als Längen der Großkreisbögen $\widehat{LM}$, $\widehat{NP}$ und $\widehat{QR}$ die Werte αr, βr und γr. Da die Bögen $\widehat{B'M}$, $\widehat{LC'}$, $\widehat{C'P}$, $\widehat{NA'}$, $\widehat{A'R}$, $\widehat{QB'}$ polar konjugierte Punkte miteinander verbinden, sind ihre Längen gleich $\frac{\pi}{2}r$. Wenn also alle drei Winkel $\alpha, \beta, \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ sind, haben die Bögen $\widehat{B'L}$ und $\widehat{MC'}$, $\widehat{C'N}$ und $\widehat{PA'}$, $\widehat{A'Q}$ und $\widehat{RB'}$, die die Bögen $\widehat{LM}$, $\widehat{NP}$ und $\widehat{QR}$ zu $\frac{\pi}{2}r$ ergänzen, die Längen $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)r$, $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)r$, $\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)r$. Also haben die Seiten $\widehat{B'C'}$, $\widehat{C'A'}$ und $\widehat{A'B'}$ des Polardreiecks in diesem Fall die Längen $(\pi-\alpha)r$, $(\pi-\beta)r$ und $(\pi-\gamma)r$. Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man auf analoge Weise, wenn gewisse der Winkel α, β oder γ größer als $\frac{\pi}{2}$ sind. *Die Seitenlängen des Polardreiecks eines sphärischen Dreiecks ABC sind also gleich $(\pi-\alpha)r$, $(\pi-\beta)r$, $(\pi-\gamma)r$.* Bezeichnen wir diese Seitenlängen mit a', b', c', so erhalten wir hieraus $\alpha = \pi - \frac{a'}{r}$, $\beta = \pi - \frac{b'}{r}$, $\gamma = \pi - \frac{c'}{r}$, d. h., *die Winkel des Polardreiecks eines sphärischen Dreiecks mit den Seitenlängen a', b', c' haben die Größen $\pi - \frac{a'}{r}, \pi - \frac{b'}{r}, \pi - \frac{c'}{r}$.*

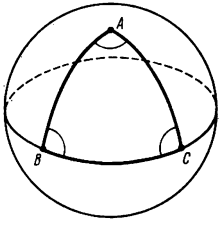


Abb. 26

Ein sphärisches Dreieck, das mit seinem Polardreieck übereinstimmt, heißt ein *autopolares Dreieck* (zusammengesetzt aus dem griechischen Wort αὐτός „selbst" und dem Wort „polar"). Weil die Ecken eines autopolaren Dreiecks paarweise polar konjugiert sind, sind alle Seiten eines solchen sphärischen Dreiecks Viertel eines Großkreises, und daraus folgt, daß alle drei Winkel eines solchen sphärischen Dreiecks rechte Winkel sind. In Abb. 26 ist ein autopolares Dreieck ABC dargestellt.

2.3. Die Kongruenz sphärischer Dreiecke. Nach den obigen Ausführungen werden sphärische Dreiecke als *kongruent* angesehen, wenn sie durch eine Bewegung der Sphäre miteinander zur Deckung gebracht werden können. Offenbar kann man zwischen den Ecken zweier kongruenter sphärischer Dreiecke eine solche Zuordnung treffen, daß auch die entsprechenden Seiten und die entsprechenden Winkel dieser Dreiecke gleiche Größe haben: Man braucht nur jeder Ecke des ersten sphärischen Dreiecks diejenige Ecke des zweiten sphärischen Dreiecks zuzuordnen, in die sie bei der Bewegung der Sphäre, die die beiden sphärischen Dreiecke zur Deckung bringt, übergeht.

Die Kongruenz von sphärischen Dreiecken wird genau wie die Kongruenz ebener Dreiecke durch die Gleichheit (Kongruenz) dreier Elemente dieser Dreiecke bestimmt. Es gibt sechs Kriterien für die Kongruenz sphärischer Dreiecke:

Sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen[1]) *in*

I. *zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel;*

II. *einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln;*

III. *allen drei Seiten;*

IV. *zwei Seiten und einem anliegenden Winkel und der andere anliegende Winkel in beiden Dreiecken spitz oder in beiden Dreiecken stumpf ist;*

V. *zwei Winkeln und einer anliegenden Seite und die andere anliegende Seite in beiden Dreiecken kleiner als* $\frac{\pi}{2} r$ *oder in beiden Dreiecken größer als* $\frac{\pi}{2} r$ *ist;*

VI. *allen drei Winkeln.*

Die ersten vier Kongruenzsätze sind dieselben wie für ebene Dreiecke und werden genauso wie diese bewiesen. Der fünfte Kongruenzsatz für sphärische Dreiecke hat auch ein Analogon in der ebenen Geometrie, nur daß dieses keine Bedingung über die zweite anliegende Seite enthält. In der ebenen Geometrie ist der Beweis dieses Kriteriums allerdings trivial; denn wenn zwei ebene Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, sind auch die dritten Winkel der Dreiecke einander gleich. In der sphärischen Geometrie ist dieser Schluß jedoch nicht anwendbar, da hier die Summe der drei Winkel eines Dreiecks, wie wir später noch sehen werden, keine konstante Größe ist.

Der sechste Kongruenzsatz für sphärische Dreiecke hat kein Analogon in der ebenen Geometrie; hier ist das Übereinstimmen in allen drei Winkeln kein Kriterium für die Kongruenz der Dreiecke, sondern für ihre Ähnlichkeit.

Wie werden nun das fünfte und das sechste Kriterium für die Kongruenz sphärischer Dreiecke bewiesen? Wir vergleichen dazu den ersten Kongruenzsatz

[1]) Gemeint ist dabei hier und im folgenden stets, daß diese Elemente (Seiten oder Winkel) kongruent sind, d. h. durch eine Bewegung der Sphäre zur Deckung gebracht werden können. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

mit dem zweiten, den dritten mit dem sechsten und den vierten mit dem fünften. Dabei bemerken wir folgendes: Wenn für zwei sphärische Dreiecke ein Kriterium eines Paares erfüllt ist, gilt für ihre Polardreiecke das zweite Kriterium des gleichen Paares. Da aus der Kongruenz zweier sphärischer Dreiecke offensichtlich die Kongruenz ihrer Polardreiecke folgt, ergibt sich somit aus der Gültigkeit eines der Kriterien eines jeden Paares die Gültigkeit des zweiten Kriteriums desselben Paares. Insbesondere ergibt sich die Gültigkeit des sechsten Kriteriums, das in der Ebene kein Analogon besitzt, aus der Gültigkeit des dritten Kriteriums und die Gültigkeit des fünften Kriteriums aus der Gültigkeit des vierten Kriteriums.

Die am Schluß des vierten und fünften Kongruenzsatzes für sphärische Dreiecke angegebenen Bedingungen sind wesentlich. Wir erläutern das an zwei einfachen Beispielen.

Ein Beispiel nicht kongruenter sphärischer Dreiecke, die in zwei Seiten und einem anliegenden Winkel übereinstimmen (vgl. das vierte Kriterium), ist in Abb. 27 dargestellt. Zur Konstruktion solcher sphärischer Dreiecke braucht man nur von einem gleichschenkligen sphärischen Dreieck ABC mit der Basis $\widehat{BC}$ auszugehen und seine Ecke A mit einem Punkt D der Basis, der nicht deren

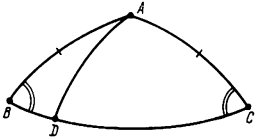


Abb. 27

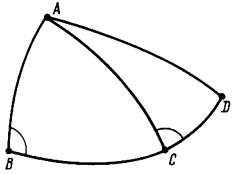


Abb. 28

Mittelpunkt ist, durch einen Großkreis zu verbinden. Dann haben die sphärischen Dreiecke ABD und ACD die gemeinsame Seite $\widehat{AD}$, die gleichen Seiten $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ und gleiche Winkel bei B und C, aber ihre Seiten $\widehat{BD}$ und $\widehat{DC}$ sind nach Konstruktion verschieden.

Ein Beispiel nicht kongruenter sphärischer Dreiecke, die in zwei Winkeln und einer anliegenden Seite übereinstimmen, zeigt die Abb. 28 (vgl. das fünfte Kriterium). Zur Konstruktion derartiger sphärischer Dreiecke ist zunächst ein sphärisches Dreieck ABC zu konstruieren, in dem sich die Winkel ABC und ACB zu einem Winkel der Größe π ergänzen. Auf der Verlängerung der Seite $\widehat{BC}$ ist dann ein beliebiger Punkt D zu wählen und durch einen Großkreisbogen mit dem Punkt A zu verbinden. Die sphärischen Dreiecke ABD und ACD haben den Winkel bei D und die Seite $\widehat{AD}$ gemeinsam, und die Winkel ABD und ACD stimmen überein, aber ihre Seiten $\widehat{BD}$ und $\widehat{CD}$ sind nach Konstruktion verschieden.

2.4. Der Großkreis als Kürzeste. *In jedem sphärischen Dreieck ist jede Seite kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten und größer als ihre Differenz.* Es sei dazu ABC ein beliebiges sphärisches Dreieck. Wir nehmen an, daß von den Seiten $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ die Seite $\overset{\frown}{AC}$ die längere ist. Wir tragen auf der Seite $\overset{\frown}{AC}$ einen Bogen $\overset{\frown}{AB'}$ ab, dessen Länge gleich der des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ ist (Abb. 29). Durch die Punkte B, B' legen wir eine Ebene, die die Halbgeraden OA und OC in gewissen Punkten A_1 und C_1 schneidet. Die ebenen Dreiecke OA_1B und OA_1B' sind dann kongruent (weil sie die Seite $\overline{OA_1}$ gemeinsam haben, die Seiten $\overline{OB}$ und $\overline{OB'}$ gleiche Länge haben und ihre Winkel bei der Ecke O gleich groß sind), und folglich ist $|A_1B| = |A_1B'|$. Da die Punkte A_1, B' und C_1 auf einer Geraden (der Schnittgeraden der Ebenen OAC und A_1BC_1) liegen, wobei der Punkt B' zwischen A_1 und C_1 liegt, ist

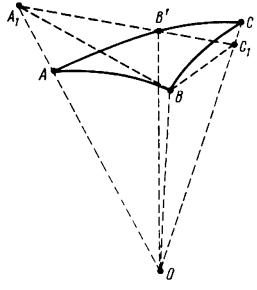


Abb. 29

$$|B'C_1| = |A_1C_1| - |A_1B'| = |A_1C_1| - |A_1B| < |BC_1|.$$

Wir betrachten nun die ebenen Dreiecke OBC_1 und $OB'C_1$. In diesen Dreiecken ist $\overline{OC_1}$ eine gemeinsame Seite, ferner ist $|OB| = |OB'|$, und die dritten Seiten sind durch die Ungleichung $|B'C_1| < |BC_1|$ miteinander verknüpft. Folglich sind die in diesen Dreiecken den ungleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch die Ungleichung $\sphericalangle B'OC_1 < \sphericalangle BOC_1$ miteinander verknüpft. Folglich ist auch der über dem Winkel $B'OC$ aufgespannte Bogen $\overset{\frown}{B'C}$ kleiner als der über dem Winkel BOC_1 aufgespannte Bogen $\overset{\frown}{BC_1}$, es gilt also

$$|\overset{\frown}{AC}| - |\overset{\frown}{AB}| = |\overset{\frown}{AC}| - |\overset{\frown}{AB'}| = |\overset{\frown}{B'C}| < |\overset{\frown}{BC}|,$$

d. h., jede Seite eines sphärischen Dreiecks ist größer als die Differenz seiner beiden anderen Seiten. Hieraus folgt weiterhin (indem man auf beiden Seiten der erhaltenen Ungleichung $|\overset{\frown}{AB}|$ hinzuaddiert)

$$|\overset{\frown}{AC}| < |\overset{\frown}{AB}| + |\overset{\frown}{BC}|,$$

d. h., jede Seite eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als die Summe seiner beiden anderen Seiten.

Aus dem bewiesenen Satz folgt genauso wie in der ebenen Geometrie, daß *in jedem sphärischen Dreieck dem größeren Winkel die größere Seite und der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt.*

Ferner folgt aus dem bewiesenen Sachverhalt sofort, daß für zwei nicht diametrale Punkte A und B der Sphäre der diese beiden Punkte verbindende

Großkreisbogen, der kleiner als ein Halbkreis ist[1]), kürzer ist als jede aus einigen Großkreisbögen zusammengesetzte Kurve, die A und B miteinander verbindet (Abb. 30); das beweist man ebenso wie den Satz, daß in der Ebene die zwei Punkte A und B verbindende Strecke kürzer ist als jeder Streckenzug, der die Punkte A und B miteinander verbindet. Da man die Länge jeder[2]) stetigen Kurve auf der Sphäre mit beliebig kleinem Fehler durch die Länge einer Kurve ersetzen kann, die aus Großkreisbögen zusammengesetzt ist, die Punkte der gegebenen Kurve miteinander verbinden, *ist der die Punkte A und B verbindende Großkreisbogen, der kleiner als ein Halbkreis ist, auch kürzer als jede die Punkte A und B verbindende Kurve auf der Sphäre*, d. h., dieser Großkreisbogen ist auf der Sphäre Kürzeste. Auch in dieser Beziehung ist also der Großkreis das Analogon zur Geraden in der Ebene. Daraus ersieht man, daß jene Linien auf der (als Sphäre angenommenen) Erdoberfläche, die man durch Einvisieren erhält und in kleinen Abschnitten als Geraden ansieht, bei hinreichender Verlängerung Großkreisbögen sind. Da diese Linien auf der Erdoberfläche von Geodäten ermittelt werden, bezeichnet man die Großkreise auch als *geodätische Linien* der Sphäre.

Abb. 30

Weil die kürzeste zwei Punkte der Sphäre verbindende Linie ein Großkreisbogen ist (der einen Halbkreis nicht übertrifft), nennt man die Länge dieses Bogens den *sphärischen Abstand* der beiden Punkte der Sphäre.

Im Unterschied zur Ebene, in der Dreiecke mit zwei rechten Winkeln nicht auftreten können, sind auf der Sphäre solche Dreiecke möglich: Es sind das diejenigen Dreiecke, bei denen eine der Ecken Pol der gegenüberliegenden

---

[1]) Es ist hierbei wesentlich, daß man den Bogen betrachtet, der kleiner als ein Halbkreis ist, da sich der Beweis der angeführten Behauptung (Abb. 31) auf die Untersuchung

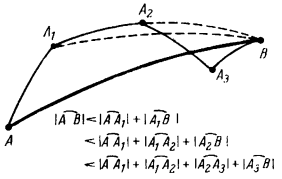


Abb. 31

einer Kette von sphärischen Dreiecken stützt, und bei diesen muß jede Seite kleiner als ein Halbkreis sein. Es ist auch völlig klar, daß ein Großkreisbogen, der größer als ein Halbkreis ist, nicht Kürzeste sein kann.

[2]) Selbstverständlich ist hier von „rektifizierbaren" Kurven auf der Sphäre die Rede (vgl. den Artikel über Bogenlänge und Oberflächeninhalt in Band V der EdEM).

Seite ist; die den rechten Winkeln gegenüberliegenden Seiten dieser Dreiecke haben die Länge $\frac{\pi}{2}r$. Auf der Sphäre gibt es auch Dreiecke mit drei rechten Winkeln, nämlich die uns bereits bekannten autopolaren Dreiecke (Abb. 26); bei autopolaren Dreiecken haben alle drei Seiten die Länge $\frac{\pi}{2}r$. Wenn ein sphärisches Dreieck nur einen rechten Winkel besitzt, bezeichnet man die diesem rechten Winkel gegenüberliegende Seite genau wie im Fall ebener rechtwinkliger Dreiecke als die Hypotenuse und die beiden anderen Seiten als die Katheten des Dreiecks.

2.5. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks. Der *Flächeninhalt einer sphärischen Figur* wird in Analogie zum Flächeninhalt einer ebenen Figur durch eine reelle Zahl gegeben, wobei die folgenden vier Forderungen erfüllt sein sollen:[1])

1. *Der Flächeninhalt einer sphärischen Figur ist eine positive Zahl* (Positivität).[2])
2. *Der Flächeninhalt einer sphärischen Figur bleibt bei Bewegungen der Sphäre ungeändert* (Invarianz).
3. *Wird eine sphärische Figur in zwei sphärische Figuren zerlegt, so ist der Flächeninhalt der gesamten Figur gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Teilfiguren* (Additivität).
4. *Der Flächeninhalt der ganzen Sphäre mit dem Radius r beträgt* $4\pi r^2$ (Normierung).

Zunächst bestimmen wir den *Flächeninhalt der Zweiecke*: Teilt man die Sphäre in n gleiche Zweiecke (Abb. 32), so folgt aus den Forderungen der Additivität, Invarianz und Normierung des Flächeninhalts sofort, daß der Flächeninhalt eines jeden dieser Zweiecke (d. h. der Flächeninhalt eines beliebigen Zweiecks mit dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$) gleich $\frac{1}{n}\cdot 4\pi r^2$ ist. Dann beträgt aber der Flächeninhalt eines Zweiecks mit dem Winkel $\frac{2\pi m}{n}$, da man es sich aus m der zuvor betrachteten Zweiecke zusammengesetzt denken kann, $\frac{m}{n}\cdot 4\pi r^2$. Betrachten wir schließlich ein Zweieck mit dem Winkel α, wobei $\frac{2\pi m}{n} < \alpha < \frac{2\pi(m+1)}{n}$ ist, so müssen für seinen Flächeninhalt $S(\alpha)$ die Ungleichungen

$$\frac{m}{n}\cdot 4\pi r^2 < S(\alpha) < \frac{m+1}{n}\cdot 4\pi r^2$$

[1]) Vgl. den Artikel über Flächen- und Rauminhalt in Band V der EdEM.

[2]) Im folgenden beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher Figuren, die ein sphärisches Dreieck enthalten.

gelten. (Das folgt aus der ersten und der dritten Eigenschaft des Flächeninhalts.) Lassen wir hier die Zahl n unbeschränkt wachsen, so erhalten wir durch einen Grenzübergang den Flächeninhalt eines beliebigen Zweiecks: *Ein Zweieck, dessen Winkel gleich α ist, hat den Flächeninhalt*

$$S(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 2r^2\alpha,$$

d. h.

$$S(\alpha) = 2r^2\alpha. \tag{1}$$

Wir betrachten nun ein sphärisches Dreieck ABC. Je zwei Seiten des Dreiecks bestimmen ein Paar von Großkreisen, die ihrerseits zwei Zweiecke festlegen, deren Winkel gleich dem Winkel zwischen den betrachteten Seiten des

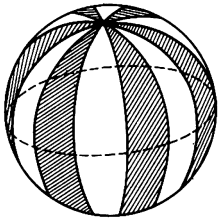


Abb. 32

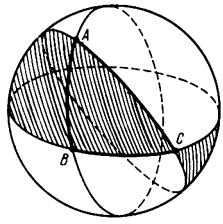


Abb. 33

sphärischen Dreiecks sind (Abb. 33). Auf diese Weise ergeben sich sechs Zweiecke, zwei mit dem Winkel α, zwei mit dem Winkel β und zwei mit dem Winkel γ. Das Dreieck ABC und das ihm diametral gegenüberliegende Dreieck $A'B'C'$ (das dem Dreieck ABC kongruent ist) gehen je in drei dieser Zweiecke ein, während die übrigen (nicht auf den Seiten der Zweiecke liegenden) Punkte der Sphäre nur einem Zweieck angehören. Mithin ist die Summe der Flächeninhalte der sechs Zweiecke gleich der Summe aus dem Flächeninhalt S der ganzen Sphäre und dem Vierfachen des Flächeninhalts $S(\Delta)$ des Dreiecks ABC, d. h.

$$2S(\alpha) + 2S(\beta) + 2S(\gamma) = S + 4S(\Delta).$$

Wegen

$$S(\alpha) = 2r^2\alpha, \quad S(\beta) = 2r^2\beta, \quad S(\gamma) = 2r^2\gamma$$

erhalten wir

$$4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi r^2 + 4S(\Delta),$$

d. h.

$$S(\Delta) = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \tag{2}$$

Da die Größen $S(\Delta)$ und r^2 positiv sind, ist die Größe $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ ebenfalls positiv, woraus

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

folgt, d. h., *die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks ist größer als ein gestreckter Winkel.* Die Größe $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ heißt der *Exzeß* oder *Defekt* des sphärischen Dreiecks.

Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks ist also gleich dem Produkt aus dem Exzeß dieses Dreiecks und dem Quadrat des Radius der Kugel.

Ersetzt man in der letzten Ungleichung die Winkel α, β und γ durch die ihnen gleichen Ausdrücke $\pi - \frac{a'}{r}$, $\pi - \frac{b'}{r}$, $\pi - \frac{c'}{r}$, wobei a', b', c' die Seitenlängen des Polardreiecks sind, so erhält man die Ungleichung

$$a' + b' + c' < 2\pi r,$$

die besagt, daß *die Summe der Seitenlängen eines sphärischen Dreiecks kleiner als die Länge eines Großkreises ist.*

Als ein *sphärisches Vieleck* bezeichnet man jeden von einer geschlossenen, aus Großkreisbögen zusammengesetzten Linie (ohne Selbstüberschneidungen) berandeten Teil einer Sphäre. Die ein sphärisches Vieleck berandenden Großkreisbögen heißen seine *Seiten*, die Endpunkte dieser Bögen seine *Ecken* und die von den Seiten in den Ecken gebildeten Winkel heißen die *Winkel* des sphärischen Vielecks.

Ein sphärisches Vieleck heißt *konvex*, wenn es ganz auf einer Seite eines jeden Großkreises liegt, der eine Seite des Vielecks enthält (Abb. 34). Verbinden wir eine der Ecken eines kon-

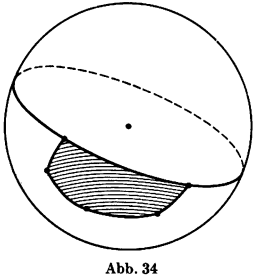


Abb. 34

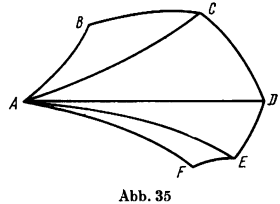


Abb. 35

vexen sphärischen n-Ecks durch Großkreisbögen mit allen anderen Ecken dieses Vielecks, so zerlegen wir es in $n - 2$ sphärische Dreiecke (Abb. 35). Daher ist der Flächeninhalt eines konvexen sphärischen n-Ecks gleich der Summe der Flächeninhalte dieser $n - 2$ sphärischen Dreiecke. Da die Winkelsumme aller $n - 2$ sphärischen Dreiecke gleich der Summe Σ_n der Winkel des sphärischen n-Ecks ist, *beträgt der Flächeninhalt S_n eines konvexen sphärischen n-Ecks*

$$S_n = r^2[\Sigma_n - (n-2)\pi], \tag{3}$$

wobei Σ_n die Summe aller seiner inneren Winkel ist.

Dieser Satz gilt auch für nichtkonvexe sphärische Vielecke.[1])

[1]) Vgl. z. B. das am Schluß des Artikels angegebene Buch von D. I. PEREPELKIN [2].

§ 3. Kleinkreise

3.1. Kreise und Winkel auf der Sphäre. In § 1 haben wir bemerkt, daß der Schnitt einer Sphäre mit einer nicht durch den Mittelpunkt der zugehörigen Kugel gehenden Ebene ein *Kleinkreis* ist. Da jeweils drei Punkte der Sphäre genau eine Ebene bestimmen, *kann man durch jeweils drei nicht auf einem Großkreis gelegene Punkte einer Sphäre genau einen Kleinkreis legen* (Abb. 36).

Da eine Ebene den Raum in zwei Gebiete zerlegt, teilt jeder Kleinkreis die Sphäre in zwei Gebiete, die man *Kalotten* nennt. Dasjenige Gebiet, das eine Halbsphäre nicht übertrifft, bezeichnet man als eine *sphärische Kreisscheibe*.

Bei jeder Drehung um den Durchmesser der Sphäre, der auf einer einen Kleinkreis aus der Sphäre ausschneidenden Ebene senkrecht steht, geht dieser Kreis in sich selbst über (denn diese Senkrechte ist die Achse des betrachteten Kreises). Daher ist der sphärische Abstand aller Punkte des Kreises von den Endpunkten des gewählten Durchmessers der Sphäre konstant. Umgekehrt geht die Menge aller der Punkte der Sphäre, die von einem ihrer Punkte denselben sphärischen Abstand haben, bei einer Drehung um den durch diesen Punkt gehenden Durchmesser in sich selber über, ist also ein Kleinkreis (und wird aus der Sphäre durch eine auf diesem Durchmesser senkrecht stehende Ebene ausgeschnitten). Somit sind die Kleinkreise als geometrische Örter aller Punkte der Sphäre, die von einem Punkt der Sphäre den gleichen sphärischen Abstand haben, das Analogon zu den Kreisen in der Ebene. Alle Punkte der Sphäre, die von einem Punkt A der Sphäre denselben sphärischen Abstand haben, besitzen auch von dem zu A diametralen Punkt A' jeweils denselben sphärischen Abstand. Denjenigen der Punkte A, A', für den der sphärische Abstand zu den Punkten des Kleinkreises kleiner als $\frac{\pi}{2}r$ ist, nennt man den *sphärischen Mittelpunkt* des Kleinkreises und den sphärischen Abstand der Punkte des Kleinkreises zu seinem sphärischen Mittelpunkt den *sphärischen Radius* des Kleinkreises. Offenbar gehört der sphärische Mittelpunkt eines Kleinkreises der von ihm berandeten sphärischen Kreisscheibe an. Die Pole der Großkreise kann man ebenfalls als sphärische Mittelpunkte dieser Kreise ansehen; als sphärischer Radius eines Großkreises wäre dann die Zahl $\frac{\pi}{2}r$ anzusehen.

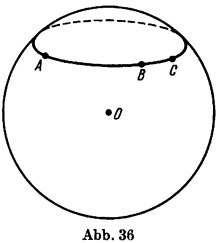


Abb. 36

Da die durch den sphärischen Mittelpunkt eines Kleinkreises gehenden Großkreise senkrecht auf der Polaren des sphärischen Mittelpunktes des Kleinkreises stehen, ist der sphärische Abstand der Punkte des Kleinkreises von diesem Großkreis (längs des „sphärischen Lotes" gemessen) gleich der Ergänzung

des sphärischen Radius des Kleinkreises zu $\frac{\pi}{2}r$. Umgekehrt ist der geometrische Ort aller Punkte der Sphäre, die von einem ihrer Großkreise (im Sinne des sphärischen Abstandes) gleichweit entfernt sind und auf ein und derselben Seite dieses Großkreises liegen, der geometrische Ort aller Punkte, die von einem seiner Pole gleichweit entfernt sind, d. h. ein Kleinkreis. *Also ist ein Kleinkreis der geometrische Ort aller Punkte der Sphäre, die von einem Großkreis gleichweit entfernt sind und auf ein und derselben Seite dieses Großkreises liegen.* Diesen Großkreis nennt man die *Basis* des Kleinkreises und den Abstand der Punkte des Kleinkreises von der Basis den *Parameter* des Kleinkreises. Offenbar ergeben der sphärische Radius R und der Parameter P des Kleinkreises zusammen $\frac{\pi}{2}r$. In Abb. 37 sind Mittelpunkt und Basis eines Kleinkreises abgebildet.

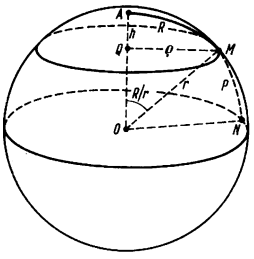


Abb. 37

Der Mittelpunkt eines Kleinkreises in seiner Ebene sei der Punkt Q, sein Radius die Zahl ϱ, und es sei M ein beliebiger Punkt dieses Kreises (Abb. 37), d. h. $|OM| = r$, $|QM| = \varrho$ und $\sphericalangle\, MOQ = \frac{R}{r}$. Dann ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck OQM die Beziehung $\varrho = r \sin \frac{R}{r}$, d. h., *der Umfang eines sphärischen Kreises vom sphärischen Radius R ist gleich*

$$C = 2\pi r \sin \frac{R}{r}. \tag{4}$$

Wegen $\sin \frac{R}{r} = \cos \frac{P}{r}$ ergibt sich damit für den *Umfang eines sphärischen Kreises vom Parameter P*

$$C = 2\pi r \cos \frac{P}{r}. \tag{5}$$

Da die von einem Kreis mit dem sphärischen Radius R berandete sphärische Kreisscheibe eine Kalotte der Höhe $h = r\left(1 - \cos \frac{R}{r}\right) = 2r \sin \frac{R}{2r}$ ist, der Flächeninhalt einer Sphärenschicht (insbesondere auch einer Kalotte) der Höhe h aber $2\pi rh$ beträgt, wenn r der Radius der Sphäre ist, *beträgt der Flächeninhalt der sphärischen Kreisscheibe mit dem sphärischen Radius R*

$$S = 4\pi r^2 \sin^2 \frac{R}{2r}. \tag{6}$$

8.2. Die geodätische Krümmung eines Kleinkreises. Ebenso wie die Kreise der Ebene durch ihre *Krümmung* charakterisiert werden können — einer Größe, die dem Radius umgekehrt proportional ist und die man als Maß für die Abweichung des Kreises von einer Geraden ansehen kann —, kann man auch die Kreise auf der Sphäre durch eine Zahl charakterisieren, die für Großkreise verschwindet und bei Kleinkreisen den Grad ihrer Abweichung von einem Großkreis kennzeichnet. Da man die Großkreise geodätische Linien nennt, heißt diese Zahl, die wir gleich definieren werden, die *geodätische Krümmung* des Kleinkreises. Zur Definition der geodätischen Krümmung betrachten wir Vektoren, die in Ebenen liegen, welche die Sphäre in den Punkten des gegebenen Kreises berühren, wobei der Anfangspunkt der Vektoren mit dem Berührungspunkt zusammenfallen möge (Abb. 38). Für diese Vektoren kann man auf folgende Weise eine *Parallelübertragung* längs eines Kreises definieren. Die Tangentialebenen an die Sphäre in den Punkten des Kreises sind gleichzeitig Tangentialebenen an einen geraden Kreiskegel im Fall eines Kleinkreises (Abb. 39) und an einen geraden Kreiszylinder im Fall eines Großkreises (Abb. 40). Wickeln wir den auf diese Weise konstruierten Kegel oder Zylinder in die Ebene ab, so geht unser Kreis in der Ebene in einen Kreisbogen oder eine Strecke über. Bei der Abwicklung fällt der gegebene Vektor mit einem Vektor der Ebene zusammen. Diesen Vektor übertragen wir jetzt in der Ebene parallel in irgendeinen anderen Punkt des bei der Abwicklung erhaltenen Kreisbogens oder der Strecke. Der im Ergebnis dieser Parallelübertragung erhaltene Vektor geht, wenn wir den Kegel oder Zylinder wieder an die Sphäre

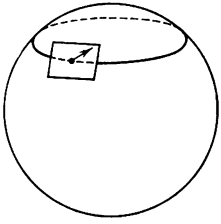
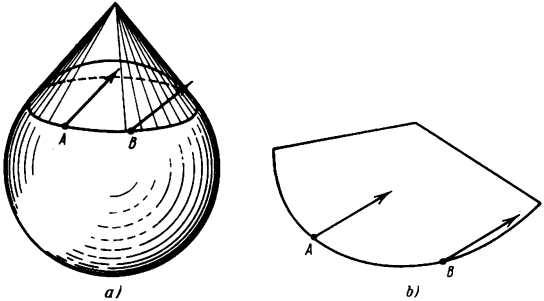


Abb. 38



a) b)

Abb. 39

anlegen, in einen Vektor der Tangentialebene an die Sphäre im entsprechenden Punkt der Sphäre über. Diesen letzteren Vektor nennen wir den *aus dem ursprünglichen Vektor durch Parallelübertragung längs des Kreises erzeugten Vektor*. In Abb. 39 ist die Parallelübertragung eines Vektors längs eines Kleinkreises dargestellt.

Wir betrachten nun eine solche Parallelübertragung, bei der der zu übertragende Vektor nach einem Umlauf des ganzen Kreises wieder in den Ausgangspunkt zurückkehrt. Im Fall eines Großkreises, der bei der Abwicklung des Zylinders in die Ebene in eine Strecke übergeht, nimmt der Vektor nach einer solchen Parallelübertragung bei seiner Rückkehr seine Ausgangslage wieder ein (Abb. 40). Im Fall eines Kleinkreises aber, der bei der Abwicklung des Kegels in die Ebene in einen Kreisbogen übergeht, nimmt der Vektor nach einer solchen Parallelübertragung seine Ausgangslage nicht wieder ein, sondern wurde um einen gewissen Winkel gedreht (Abb. 41). Es ist unschwer einzusehen, daß dieser Winkel für beliebige zu übertragende Vektoren stets ein und derselbe ist. Das Verhältnis des auf diese Weise für einen

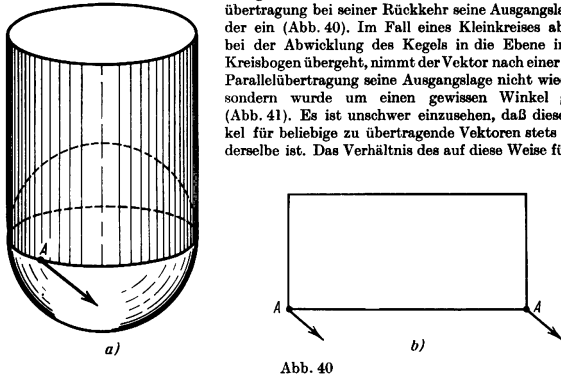


Abb. 40

Kreis auf der Sphäre definierten Winkels zum Umfang dieses Kreises nennen wir die *geodätische Krümmung dieses Kreises auf der Sphäre.*

Da im Fall eines Großkreises ein Vektor bei der Parallelübertragung in seine Ausgangslage zurückkehrt, *ist die geodätische Krümmung eines Großkreises gleich Null.* Im Fall eines

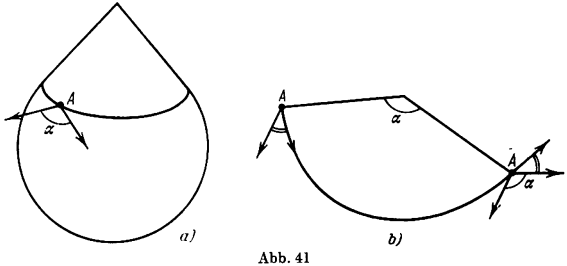


Abb. 41

Kleinkreises dreht sich dagegen ein Vektor bei der Parallelübertragung um einen Winkel von der Größe des Winkels an der Spitze des Sektors, in den sich der Kegel in die Ebene abwickelt (Abb. 41). Dieser Winkel ist gleich dem Verhältnis der Länge des Bogens dieses

Sektors (dem Umfang des Grundkreises des Kegels) zum Radius des Sektors (der Länge der geradlinigen Erzeugenden des Kegels). Da der Umfang des Grundkreises des Kegels mit dem des gegebenen Kleinkreises zusammenfällt, beträgt er $c = 2\pi r \sin\frac{R}{r}$. Die geradlinige Erzeugende l des Kegels ist Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zweite Kathete gleich dem Radius r der Sphäre und dessen l gegenüberliegender Winkel gleich dem Verhältnis $\frac{R}{r}$ ist; hieraus ergibt sich $l = r\tan\frac{R}{r}$. Somit ist der Drehwinkel Δ eines Vektors bei der Parallelübertragung längs eines Kleinkreises mit dem sphärischen Radius R gleich

$$\Delta = \frac{c}{l} = 2\pi\cos\frac{R}{r}, \tag{7}$$

und *die geodätische Krümmung eines Kleinkreises mit dem sphärischen Radius R ist gleich*

$$k = \frac{\Delta}{c} = \frac{1}{r}\cot\frac{R}{r}. \tag{8}$$

Es sei bemerkt, daß im Grenzfall, wenn der Radius R des Kleinkreises gegen den Radius $\frac{\pi}{2}r$ eines Großkreises strebt, die geodätische Krümmung k gegen Null geht.

3.3. Die Gauß-Bonnetsche Formel. Die Parallelübertragung eines Vektors kann auch zur Bestimmung des Flächeninhalts einer von beliebigen Kreisbögen berandeten sphärischen Figur herangezogen werden. Dazu betrachten wir zunächst die Parallelübertragung

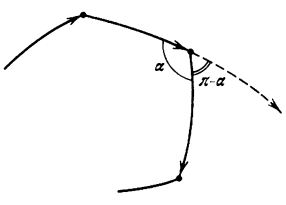


Abb. 42

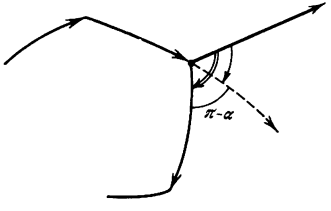


Abb. 43

eines Vektors längs des Randes eines sphärischen Vielecks. Da die Seiten eines sphärischen Vielecks Großkreisbögen sind, bleibt bei der Parallelübertragung eines Vektors längs einer Seite des sphärischen Vielecks der Winkel, den er mit dem Tangentialvektor an diese Seite bildet, unverändert. Dieser Winkel ändert sich nur, wenn man um eine Ecke des Vielecks herumgeht. Ist dabei der Winkel des Vielecks in einer Ecke gleich α, so ist der Winkel zwischen den einem bestimmten Umlaufssinn des Vielecks entsprechenden Tangentialvektoren an die Seiten dieses Vielecks gleich $\pi - \alpha$ (Abb. 42). Folglich ändert sich der Winkel zwischen einem zu übertragenden Vektor und dem Tangentialvektor an die Seite des Vielecks beim Herumgehen um diese Ecke ebenfalls um $\pi - \alpha$ (Abb. 43).

Insgesamt dreht sich also bei einer Parallelübertragung eines Vektors längs des ganzen Randes eines sphärischen Vielecks dieser Vektor um den Winkel

$$\Delta_n = n\pi - \Sigma_n. \tag{9}$$

Da nun der Flächeninhalt S_n eines konvexen n-Ecks mit der Summe Σ_n seiner inneren Winkel durch die Beziehung (3), d. h. durch

$$S_n = r^2[2\pi - (n\pi - \Sigma_n)]$$

verknüpft ist, besteht zwischen dem Winkel Δ_n und dem Flächeninhalt S_n die Beziehung

$$S_n = r^2(2\pi - \Delta_n). \tag{10}$$

Wir betrachten nun irgendeine konvexe sphärische Figur, die von Kreisbögen (nicht unbedingt Großkreisbögen) berandet wird. Wenn wir dieser Figur sphärische Vielecke einbeschreiben und die Seitenanzahl derselben so gegen Unendlich gehen lassen, daß die Länge der größten Seite des Vielecks gegen Null geht, dann konvergiert der Flächeninhalt S_n der einbeschriebenen n-Ecke gegen den Flächeninhalt S der betrachteten Figur und der Winkel Δ_n gegen den Winkel Δ, um den sich ein Vektor bei der Parallelübertragung längs des gesamten Randes dieser Figur bei seiner Rückkehr in den Ausgangspunkt gedreht hat. Somit erhalten wir, wenn wir in der Gleichung (10) den Grenzübergang ausführen, daß der Flächeninhalt S der Figur und der Winkel Δ durch die Beziehung

$$S = r^2(2\pi - \Delta) \tag{11}$$

verknüpft sind, die ein Spezialfall der berühmten GAUSS-BONNETschen *Formel* ist.

Als ein Beispiel für die Anwendung der Formel (11) berechnen wir den Flächeninhalt eines sphärischen Kreises. Für einen sphärischen Kreis mit dem sphärischen Radius R ist der Winkel Δ gleich $2\pi \cos \frac{R}{r}$ [vgl. Formel (7)]; mithin ist in diesem Fall

$$S = 2\pi r^2 \left(1 - \cos \frac{R}{r}\right) = 4\pi r^2 \sin^2 \frac{R}{2r},$$

d. h., wir erhalten wieder die Beziehung (6).

Für eine sphärische Figur mit beliebigem, aus Kreisbögen bestehendem Rand ist der Winkel Δ gleich der Summe der Nebenwinkel Δ_i der inneren Winkel dieser Figur (wie für das sphärische Vieleck) und der Produkte $k_i s_i$, wobei k_i die geodätischen Krümmungen der die Figur berandenden Bögen und s_i deren Längen sind, d. h., man kann in diesem Fall die Formel (11) in der Gestalt

$$S = r^2(2\pi - \sum_i \Delta_i - \sum_i k_i s_i) \tag{12}$$

schreiben.

Die Parallelübertragung kann man aber auch längs einer beliebigen glatten Kurve definieren. In diesem Fall bilden natürlich die Tangentialebenen in den Punkten dieser Kurve im allgemeinen keinen Kegel oder Zylinder mehr, sondern eine Fläche, die von den Tangenten an eine räumliche Kurve erzeugt wird; eine solche Fläche läßt sich ebenso wie ein Kegel oder ein Zylinder in die Ebene „abwickeln". Die *geodätische Krümmung der Kurve* auf der Sphäre wird in jedem ihrer Punkte definiert als Grenzwert des Verhältnisses des Drehwinkels eines Vektors bei der Parallelübertragung längs eines Kurvenbogens zur Länge dieses Bogens beim Zusammenziehen dieses Bogens auf den gegebenen Punkt; im allgemeinen ändert sich jetzt die geodätische Krümmung von Punkt zu Punkt (sie ist nur für Kreise konstant). Den Flächeninhalt einer von einer beliebigen glatten Kurve berandeten sphärischen Figur kann man nach derselben Formel (11) bestimmen wie auch den

Flächeninhalt der bisher von uns betrachteten Figuren; diese Formel kann man auch in einer zu (12) analogen Form schreiben, wobei lediglich an die Stelle der Summe $\sum_i k_i s_i$ das Integral $\int_\sigma k\,ds$ über die geodätische Krümmung längs des Randes nach dessen Bogenlänge tritt. Die besagte Formel ist die allgemeine GAUSS-BONNET*sche Formel* für sphärische Flächen.

§ 4. Trigonometrische Beziehungen im sphärischen Dreieck[1])

4.1. Der Seitenkosinussatz. Wir betrachten ein beliebiges sphärisches Dreieck ABC. (Wir erinnern daran, daß jede seiner Seiten kleiner als πr ist.)

Wir beweisen zuerst den *Seitenkosinussatz*, der dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie analog ist; der Beweis des Seitenkosinussatzes stützt sich, wie wir sehen werden, wesentlich auf den ebenen Kosinussatz.

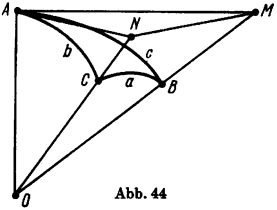


Abb. 44

Wir nehmen zunächst an, daß jede der Seiten b und c des sphärischen Dreiecks ABC kleiner als $\frac{\pi}{2}r$ ist. Wir legen im Punkt A die Tangenten AM und NA an die Seiten c und b und bestimmen die Schnittpunkte M und N dieser Tangenten mit den Verlängerungen der Radien OB und OC (Abb. 44); diese Schnittpunkte existieren, da nach Voraussetzung jeder der Winkel AOC und AOB kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Dann ist die Größe des Winkels α gleich der des Winkels MAN, und wir erhalten nach dem ebenen Kosinussatz für das ebene Dreieck MAN die Beziehung

$$|MN|^2 = |AN|^2 + |AM|^2 - 2|AN| \cdot |AM| \cos\alpha. \tag{13}$$

Andererseits sind die Winkel BOC, AOC und AOB als Zentriwinkel von Großkreisen der Sphäre zu den Bögen a, b, c entsprechend gleich $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}$ und $\frac{c}{r}$; damit ergibt sich aus dem Dreieck OMN

$$|MN|^2 = |OM|^2 + |ON|^2 - 2|OM| \cdot |ON| \cos\frac{a}{r}. \tag{14}$$

Durch Vergleich von (13) und (14) erhalten wir

$$|OM|^2 + |ON|^2 - 2|OM| \cdot |ON| \cos\frac{a}{r} = |AN|^2 + |AM|^2 - 2|AN| \cdot |AM| \cos\alpha. \tag{15}$$

[1]) Vgl. auch Nr. 6.2. des Artikels „Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie" S. 376.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OMA ergibt sich

$$|OM|^2 - |AM|^2 = |OA|^2, \quad \frac{|OA|}{|OM|} = \cos\frac{c}{r}, \quad \frac{|AM|}{|OM|} = \sin\frac{c}{r} \tag{16}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck ONA

$$|ON|^2 - |AN|^2 = |OA|^2, \quad \frac{|OA|}{|ON|} = \cos\frac{b}{r}, \quad \frac{|AN|}{|ON|} = \sin\frac{b}{r}. \tag{17}$$

Wegen der ersten Beziehungen (16) und (17) kann die Gleichung (15) in der Gestalt

$$2|OM| \cdot |ON| \cos\frac{a}{r} = 2|OA|^2 + 2|AN| \cdot |AM| \cos\alpha$$

geschrieben werden, d. h., es ist

$$|OM| \cdot |ON| \cos\frac{a}{r} = |OA|^2 + |AN| \cdot |AM| \cos\alpha. \tag{18}$$

Indem wir (18) durch das Produkt $|OM| \cdot |ON|$ dividieren, erhalten wir

$$\cos\frac{a}{r} = \frac{|OA|}{|OM|} \cdot \frac{|OA|}{|ON|} + \frac{|AN|}{|ON|} \cdot \frac{|AM|}{|OM|} \cos\alpha$$

oder, wegen der zweiten und dritten Beziehungen (16) und (17),

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha. \tag{19}$$

Ist die Seite b größer als $\frac{\pi}{2}r$ und die Seite c kleiner als $\frac{\pi}{2}r$, so verlängern wir die Seiten a und b unseres Dreiecks bis zu ihrem dem Punkt C diametral gegenüberliegenden Schnittpunkt C' (Abb. 45). Dann sind im sphärischen Dreieck ABC' die Seiten $\widehat{AC'}$ und $\widehat{AB}$ entsprechend gleich $\pi r - b$ und c, d. h. kleiner als $\frac{\pi}{2}r$, und der Winkel BAC ist als Nebenwinkel zum Winkel α gleich $\pi - \alpha$. Folglich gilt nach (19) im Dreieck ABC' die Beziehung

$$\cos\left(\pi - \frac{a}{r}\right) = \cos\left(\pi - \frac{b}{r}\right)\cos\frac{c}{r} + \sin\left(\pi - \frac{b}{r}\right)\sin\frac{c}{r}\cos(\pi - \alpha)$$

oder

$$-\cos\frac{a}{r} = -\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} - \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha,$$

woraus sich durch Multiplikation mit -1 die Formel (19) ergibt.

Sind beide Seiten b und c unseres Dreiecks größer als $\frac{\pi}{2}r$, so verlängern wir die Seiten b und c unseres Dreiecks bis zu ihrem dem Punkt A diametral gegenüberliegenden Schnittpunkt A' (Abb. 46). Im sphärischen Dreieck $A'BC$ sind die Seiten $\widehat{CA'}$ und $\widehat{BA'}$ entsprechend gleich $\pi r - b$ und $\pi r - c$, d. h. kleiner als $\frac{\pi}{2}r$, und der Winkel $BA'C$ ist gleich dem Winkel α. Mithin gilt im Dreieck $A'BC$ nach Formel (19) die Beziehung

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\left(\pi - \frac{b}{r}\right)\cos\left(\pi - \frac{c}{r}\right) + \sin\left(\pi - \frac{b}{r}\right)\sin\left(\pi - \frac{c}{r}\right)\cos\alpha,$$

aus der wir unmittelbar die Formel (19) erhalten.

Der Fall $b = \frac{\pi}{2}r$, $c < \frac{\pi}{2}r$ erledigt sich ähnlich wie der Fall $b < \frac{\pi}{2}r$, $c < \frac{\pi}{2}r$, sofern man anstelle des Punktes N in Abb. 44 die Projektion des Punktes C

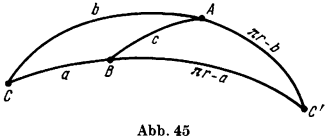


Abb. 45

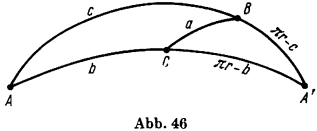


Abb. 46

auf die Tangentialebene an die Sphäre im Punkt A verwendet. Der Fall $b = \frac{\pi}{2}r$, $c > \frac{\pi}{2}r$ wird gemäß Abb. 45 auf den vorangehenden Fall zurückgeführt. Die Fälle $b < \frac{\pi}{2}r$, $c = \frac{\pi}{2}r$ und $b > \frac{\pi}{2}r$, $c = \frac{\pi}{2}r$ erledigen sich analog. Im Fall $b = c = \frac{\pi}{2}r$ gilt schließlich (19) trivial.

Damit ist gezeigt, daß (19) für beliebige sphärische Dreiecke richtig ist. Man nennt die Formel (19) den *Seitenkosinussatz für sphärische Dreiecke*. In Worten wird dieser Satz meistens folgendermaßen formuliert (für $r = 1$, d. h. für eine Sphäre vom Radius 1): *Der Kosinus einer Seite eines sphärischen Dreiecks ist gleich der Summe aus dem Produkt der Kosinus der beiden anderen Seiten und dem Produkt der Sinus der beiden anderen Seiten mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.*

Wenn wir in der Formel (19) die Bezeichnungen der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ zyklisch vertauschen, erhalten wir zwei analoge Formeln:

$$\cos\frac{b}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\beta \tag{20}$$

und

$$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r} + \sin\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}\cos\gamma. \tag{21}$$

4.2. Der Sinussatz. Wir beweisen nun den zum Sinussatz der ebenen Trigonometrie analogen *Sinussatz für sphärische Dreiecke.* Aus der Formel (19) ergibt sich die Beziehung

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Mittels dieser Gleichung erhalten wir

$$\frac{\sin^2\frac{a}{r}}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\frac{a}{r}}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\frac{a}{r}}{1-\left(\frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}{\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r} - \left(\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}{\left(1-\cos^2\frac{b}{r}\right)\left(1-\cos^2\frac{c}{r}\right) - \left(\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}{1-\cos^2\frac{a}{r} - \cos^2\frac{b}{r} - \cos^2\frac{c}{r} + 2\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}.$$

Wegen der Symmetrie des erhaltenen Ausdrucks bezüglich der Seiten a, b, c ist er den analogen Ausdrücken gleich, die man erhält, indem man auf der linken Seite dieser Gleichung die Seiten a, b, c und die Winkel α, β, γ zyklisch vertauscht. Ziehen wir aus diesen Ausdrücken die Quadratwurzel, so erhalten wir

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin\gamma}. \tag{22}$$

Diese Formel drückt den *Sinussatz für sphärische Dreiecke* aus, den man gewöhnlich (für $r = 1$) folgendermaßen formuliert: *Die Sinus der Seiten eines sphärischen Dreiecks verhalten sich zueinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.*

Insbesondere ersieht man aus Formel (22) folgendes: Gilt in einem sphärischen Dreieck die Beziehung $\beta = \pi - \alpha$, so daß also $\sin\beta = \sin\alpha$ ist, so gilt auch $\sin\frac{b}{r} = \sin\frac{a}{r}$, d. h., es ist entweder $a = b$ oder $b = \pi r - a$. Falls hierbei $a = b$ gilt, ist $a = \beta$, und zwar $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ wegen $\beta = \pi - \alpha$, d. h., C ist ein Pol der Seite $\overset{\frown}{AB}$ und mithin $a = b = \frac{\pi}{2}r$; somit gilt die Beziehung $b = \pi r - a$ auch in diesem Fall. *Ist also $\beta = \pi - \alpha$, so sind die Seiten a und b durch die Beziehung $b = \pi r - a$ miteinander verknüpft.*

4.3. Die Fünf-Elemente-Formeln. Wir leiten nun die sogenannten *Fünf-Elemente-Formeln* her. Multiplizieren wir die Gleichung (19) gliedweise mit $\cos\frac{c}{r}$ und addieren wir dazu Gleichung (20), so erhalten wir

$$\cos\frac{b}{r} + \cos\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r} + \cos\frac{b}{r}\cos^2\frac{c}{r} + \sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\beta + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\alpha$$

und nach Weglassen gleicher Glieder

$$\cos\frac{b}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos^2\frac{c}{r} + \sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\beta + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\alpha,$$

woraus

$$\cos\frac{b}{r}\left(1 - \cos^2\frac{c}{r}\right) = \sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\beta + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\alpha$$

oder

$$\cos\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\beta + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\alpha$$

folgt. Dividieren wir beide Seiten dieser Gleichung durch $\sin\frac{c}{r}$, so erhalten wir

$$\cos\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r}\cos\beta + \sin\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\alpha$$

oder endgültig

$$\sin\frac{a}{r}\cos\beta = \cos\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r} - \sin\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\alpha. \tag{23}$$

Das ist eine der Fünf-Elemente-Formeln, die man gewöhnlich folgendermaßen in Worte faßt: *Das Produkt des Sinus einer Seite eines sphärischen Dreiecks und des Kosinus eines anliegenden Winkels ist gleich der Differenz aus dem Produkt des Kosinus der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite mit dem Sinus der dritten Seite und dem Produkt des Sinus der dem gegebenen Winkel gegenüber-*

liegenden Seite mit dem Kosinus der dritten Seite und dem Kosinus des der gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkels.

Wenn wir in Formel (23) die Bezeichnungen der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ zyklisch vertauschen, erhalten wir zwei analoge Formeln:

$$\sin\frac{b}{r}\cos\gamma = \cos\frac{c}{r}\sin\frac{a}{r} - \sin\frac{c}{r}\cos\frac{a}{r}\cos\beta, \tag{24}$$

$$\sin\frac{c}{r}\cos\alpha = \cos\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r} - \sin\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\gamma. \tag{25}$$

Vertauscht man in Formel (23) die Seiten a und c sowie die Winkel α und γ miteinander und sodann zyklisch die Bezeichnungen der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ, so erhält man drei weitere Formeln:

$$\sin\frac{a}{r}\cos\gamma = \cos\frac{c}{r}\sin\frac{b}{r} - \sin\frac{c}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\alpha, \tag{26}$$

$$\sin\frac{b}{r}\cos\alpha = \cos\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r} - \sin\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\beta, \tag{27}$$

$$\sin\frac{c}{r}\cos\beta = \cos\frac{b}{r}\sin\frac{a}{r} - \sin\frac{b}{r}\cos\frac{a}{r}\cos\gamma. \tag{28}$$

Diese Formeln sind den Projektionssätzen der ebenen Trigonometrie analog.

Ersetzt man in Formel (23) $\sin\frac{a}{r}$, $\sin\frac{b}{r}$ und $\sin\frac{c}{r}$ durch die ihnen proportionalen Größen $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$, so erhält man die Beziehung

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\frac{b}{r}\sin\gamma - \cos\frac{c}{r}\cos\alpha\sin\beta$$

oder

$$\cos\frac{b}{r}\sin\gamma = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha\cos\frac{c}{r}. \tag{29}$$

Dies ist eine Fünf-Elemente-Formel anderer Art, die man gewöhnlich folgendermaßen in Worte faßt: *Das Produkt des Kosinus einer Seite eines sphärischen Dreiecks und des Sinus eines anliegenden Winkels ist gleich der Summe aus dem Produkt des Kosinus des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels mit dem Sinus des dritten Winkels und dem Produkt des Sinus des der gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkels mit dem Kosinus des dritten Winkels und dem Kosinus der dem gegebenen Winkel gegenüberliegenden Seite.*

Durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen für die Seiten a, b, c und die Winkel α, β, γ erhalten wir aus Formel (29) zwei weitere Formeln:

$$\cos\frac{c}{r}\sin\alpha = \cos\gamma\sin\beta + \sin\gamma\cos\beta\cos\frac{a}{r}, \tag{30}$$

$$\cos\frac{a}{r}\sin\beta = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma\cos\frac{b}{r}. \tag{31}$$

Vertauscht man in (29) die Seiten a und c sowie die Winkel α und γ miteinander und sodann zyklisch die Bezeichnungen der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ, so ergeben sich drei weitere Formeln:

$$\cos\frac{b}{r}\sin\alpha = \cos\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos\frac{a}{r}, \tag{32}$$

$$\cos\frac{c}{r}\sin\beta = \cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha\cos\frac{b}{r}, \tag{33}$$

$$\cos\frac{a}{r}\sin\gamma = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\cos\frac{c}{r}. \tag{34}$$

Diese Formeln haben in der ebenen Trigonometrie kein Analogon.

Die Fünf-Elemente-Formeln (29), (30), (31), (32), (33) und (34) können auch aus den entsprechenden Formeln (28), (26), (27), (23), (24) und (25) dadurch gewonnen werden, daß man diese Formeln für das Polardreieck hinschreibt und die Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten zweier zueinander polarer Dreiecke verwendet.

4.4. Der Winkelkosinussatz. Wir beweisen nun den *Winkelkosinussatz*, der in der ebenen Trigonometrie ebenfalls kein Analogon besitzt. Wir setzen aus der Gleichung (32) den Wert für $\cos\frac{b}{r}\sin\alpha$ in (31) ein und erhalten

$$\cos\frac{a}{r}\sin\beta = \cos\alpha\sin\gamma + \left(\cos\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos\frac{a}{r}\right)\cos\gamma$$

oder

$$\cos\frac{a}{r}\sin\beta = \cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma\cos\gamma + \sin\beta\cos\frac{a}{r}(1-\sin^2\gamma);$$

somit gilt

$$\cos\frac{a}{r}\sin\beta\sin^2\gamma = \cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin\gamma\cos\gamma$$

oder, nachdem man durch $\sin\gamma$ dividiert hat,

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{r}. \tag{35}$$

Diese Formel (35) drückt den *Winkelkosinussatz* aus, den man gewöhnlich folgendermaßen formuliert: *Der Kosinus eines Winkels eines sphärischen Dreiecks ist gleich der Differenz aus dem Produkt der Sinus der beiden anderen Winkel mit dem Kosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite und dem Produkt der Kosinus der anderen beiden Winkel.*

Indem wir in Formel (35) die Bezeichnungen der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ zyklisch vertauschen, erhalten wir zwei weitere Formeln:

$$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\frac{b}{r}, \tag{36}$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\frac{c}{r}. \tag{37}$$

Man kann die Formeln (35), (36) und (37) des Winkelkosinussatzes auch aus den entsprechenden Formeln (19), (20) und (21) des Seitenkosinussatzes dadurch erhalten, daß man diese Formeln für das Polardreieck hinschreibt und die Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten zweier zueinander polarer Dreiecke verwendet.

Es sei bemerkt, daß sich für kleine Werte der Verhältnisse $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ und $\frac{c}{r}$, d. h. für sehr kleine Seitenlängen a, b, c des sphärischen Dreiecks oder für einen sehr großen Radius r der Sphäre, die sphärische Geometrie wenig von der ebenen Geometrie unterscheidet und die trigonometrischen Beziehungen im sphärischen Dreieck durch die trigonometrischen Beziehungen im ebenen Dreieck ersetzt werden können. Denn für kleine Werte der Veränderlichen x können höhere Potenzen dieser Veränderlichen vernachlässigt und folglich $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ durch x und $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ durch $1 - \frac{x^2}{2}$ oder sogar durch 1 ersetzt werden. Dabei gehen aber, wie man leicht nachprüft, der Seitenkosinussatz und der sphärische Sinussatz in die entsprechenden Sätze der ebenen Geometrie über, die ersten sechs Fünf-Elemente-Formeln in die Projektionssätze der ebenen Trigonometrie und die zweiten sechs Fünf-Elemente-Formeln sowie der Winkelkosinussatz, für die es in der ebenen Trigonometrie kein Analogon gibt, in die Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Die grundlegenden Sätze der sphärischen Trigonometrie wurden im Mittelalter von Gelehrten des Ostens gefunden. Die durch den Seitenkosinussatz beschriebenen Beziehungen wurden von AL-BATTÂNÎ, einem syrischen Mathematiker und Astronomen des 9. Jh. aufgestellt, einem Abkommen einer Familie der die Sterne anbetenden Sabäer, bei denen im Verlaufe vieler Jahrhunderte die babylonischen astronomischen Traditionen gepflegt wurden. Der sphärische Sinussatz wurde fast gleichzeitig von den mittelasiatischen Mathematikern und Astronomen des 10. Jh. IBN IRAK VON CHORESM, ABÛ'L-WAFÂ VON CHORASSAN und AL-CHODSHANDI VON CHODSHENT gefunden. Die durch den Winkelkosinussatz beschriebenen Beziehungen stellte (mit Hilfe des Polardreiecks) der im 13. Jh. in Aserbaidshan wirkende NASÎR-ED-DÎN AT-TÛSÎ auf, von dem auch die erste vollständige Darlegung des gesamten Systems der sphärischen Trigonometrie stammt.

4.5. Die Kotangensformeln. Dividiert man die Fünf-Elemente-Formel (23) seitenweise durch die sich aus (22) ergebende Gleichung

$$\sin\frac{a}{r}\sin\beta = \sin\frac{b}{r}\sin\alpha,$$

so erhält man die Beziehung

$$\cot\beta = \frac{\cot\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r} - \cos\frac{c}{r}\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

oder

$$\cot\beta\sin\alpha = \cot\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r} - \cos\frac{c}{r}\cos\alpha$$

und schließlich

$$\sin\frac{c}{r}\cot\frac{b}{r} - \sin\alpha\cot\beta = \cos\frac{c}{r}\cos\alpha. \tag{38}$$

Das ist eine der *Kotangensformeln*, die man gewöhnlich folgendermaßen in Worte faßt: *Die Differenz aus dem Produkt des Sinus einer Seite eines sphärischen Dreiecks mit dem Kotangens einer anderen Seite und dem Produkt des Sinus des der dritten Seite gegenüberliegenden Winkels mit dem Kotangens des der zweiten Seite gegenüberliegenden Winkels ist gleich dem Produkt des Kosinus der ersten Seite mit dem Kosinus des der dritten Seite gegenüberliegenden Winkels.*

Durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ in Formel (38) erhalten wir zwei weitere Formeln:

$$\sin\frac{a}{r}\cot\frac{c}{r} - \sin\beta\cot\gamma = \cos\frac{a}{r}\cos\beta, \tag{39}$$

$$\sin\frac{b}{r}\cot\frac{a}{r} - \sin\gamma\cot\alpha = \cos\frac{b}{r}\cos\gamma. \tag{40}$$

Vertauscht man in (38) die Seiten a und c sowie die Winkel α und γ miteinander und sodann zyklisch die Bezeichnungen der Seiten a, b, c und der Winkel α, β, γ, so ergeben sich drei weitere Formeln:

$$\sin\frac{a}{r}\cot\frac{b}{r} - \sin\gamma\cot\beta = \cos\frac{a}{r}\cos\gamma, \tag{41}$$

$$\sin\frac{b}{r}\cot\frac{c}{r} - \sin\alpha\cot\gamma = \cos\frac{b}{r}\cos\alpha, \tag{42}$$

$$\sin\frac{c}{r}\cot\frac{a}{r} - \sin\beta\cot\alpha = \cos\frac{c}{r}\cos\beta. \tag{43}$$

4.6. Das rechtwinklige sphärische Dreieck. Ist das sphärische Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel α, so nimmt der Seitenkosinussatz (19) die Gestalt

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} \tag{44}$$

an, d. h., *der Kosinus der Hypotenuse ist gleich dem Produkt der Kosinus der Katheten*. Dieser die Hypotenuse und die Katheten eines rechtwinkligen

sphärischen Dreiecks miteinander verknüpfende Satz ist ein Analogon zum Satz des PYTHAGORAS und heißt der *sphärische Satz des* PYTHAGORAS.[1])

Ist α ein rechter Winkel, so läßt sich der Sinussatz (22) durch die beiden Beziehungen

$$\sin\frac{b}{r} = \sin\frac{a}{r}\sin\beta \tag{45}$$

und

$$\sin\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r}\sin\gamma \tag{46}$$

wiedergeben.

Die Formeln (45) und (46) heißen die *Sinusformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck.*

Die Fünf-Elemente-Formeln (25) und (27) nehmen im Fall, daß α ein rechter Winkel ist, die Gestalt

$$\cos\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r} - \sin\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\gamma = 0$$

und

$$\cos\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r} - \sin\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r}\cos\beta = 0$$

an, woraus man sofort die Formeln

$$\tan\frac{b}{r} = \cos\gamma\tan\frac{a}{r} \tag{47}$$

und

$$\tan\frac{c}{r} = \cos\beta\tan\frac{a}{r} \tag{48}$$

gewinnt.

Die Formeln (47) und (48) heißen die *Tangensformeln erster Art für das rechtwinklige sphärische Dreieck.*

Für einen rechten Winkel α lautet die Formel (35) des Winkelkosinussatzes

$$-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{r} = 0,$$

woraus man

$$\cos\frac{a}{r} = \cot\beta\cot\gamma \tag{49}$$

erhält.

---

[1]) Schreibt man die Formel (44) in der Gestalt

$$1 - \frac{a^2}{2r^2} + \cdots = \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \cdots\right)$$

(vgl. S. 562), so kann man sich davon überzeugen, daß für $r \to \infty$ der sphärische Satz des PYTHAGORAS in den ebenen Satz des PYTHAGORAS $a^2 = b^2 + c^2$ übergeht.

Die Formel (49) ist die *Kotangensformel für das rechtwinklige sphärische Dreieck.*

Für einen rechten Winkel α haben die Formeln (36) und (37) des Winkelkosinussatzes die Gestalt

$$\cos\beta = \sin\gamma \cos\frac{b}{r} \tag{50}$$

und

$$\cos\gamma = \sin\beta \cos\frac{c}{r}. \tag{51}$$

Die Formeln (50) und (51) werden die *Kosinusformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck* genannt.

Für einen rechten Winkel α lauten die Kotangensformeln (38) und (42)

$$\sin\frac{c}{r}\cot\frac{b}{r} - \cot\beta = 0 \tag{42}$$

und

$$\sin\frac{b}{r}\cot\frac{c}{r} - \cot\gamma = 0,$$

woraus man

$$\tan\frac{b}{r} = \sin\frac{c}{r}\tan\beta, \tag{52}$$

$$\tan\frac{c}{r} = \sin\frac{b}{r}\tan\gamma \tag{53}$$

gewinnt.

Die Formeln (52) und (53) heißen die *Tangensformeln zweiter Art für das rechtwinklige sphärische Dreieck.*

Der sphärische Satz des PYTHAGORAS, die zwei Sinusformeln, die zwei Tangensformeln erster Art, die Kotangensformel, die zwei Kosinusformeln und die zwei Tangensformeln zweiter Art bilden zehn Beziehungen für das rechtwinklige sphärische Dreieck.

4.7. Die Berechnung sphärischer Dreiecke. Die von uns hergeleiteten trigonometrischen Beziehungen gestatten es, ein sphärisches Dreieck aus drei beliebigen seiner Elemente (Seiten und Winkeln) zu berechnen. Sind uns die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben, so finden wir nach Formel (19) des Seitenkosinussatzes

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

und dazu analog aus den Formeln (20) und (21) $\cos\beta$ und $\cos\gamma$.

Sind uns zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt, z. B. die Seiten b, c und der Winkel α, so finden wir die Seite a nach Formel (19) des Seitenkosinussatzes. Da wir damit alle drei Seiten des sphärischen Dreiecks kennen, können wir die restlichen Winkel wie oben bestimmen.

Sind uns zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks und einer der anliegenden Winkel bekannt,[1]) z. B. die Seiten a, b und der Winkel α, so finden wir nach der Formel (22) des Sinussatzes

$$\sin\beta = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin\frac{a}{r}}\sin\alpha\,.$$

Es sei bemerkt, daß diese Beziehung zwei Werte für β liefert, die sich gegenseitig zu π ergänzen; das entspricht dem Sachverhalt, daß es im allgemeinen zwei sphärische Dreiecke mit gegebenem a, b und α gibt, wie wir bereits im Zusammenhang mit dem vierten Kongruenzsatz für sphärische Dreiecke bemerkten.

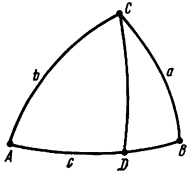


Abb. 47

Zur Bestimmung der Seite c und des Winkels γ legen wir durch die Ecke C den Großkreisbogen, der auf dem Großkreis AB senkrecht steht.[2]) Ist D ein Schnittpunkt dieser Großkreise, so betrachten wir die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ACD und BCD (Abb. 47). In diesen Dreiecken kennen wir die Hypotenusen b und a und die Winkel in den Ecken A und B. Die zweiten Katheten dieser Dreiecke können nach den Tangensformeln erster Art (47) und (48) berechnet werden und die Winkel bei der Ecke C nach der Kotangensformel (49). Die Seite c und der Winkel γ des sphärischen Dreiecks ABC sind dann die Summen der ermittelten Seiten und Winkel der rechtwinkligen Dreiecke, wenn der Punkt D auf der Seite $\overset{\frown}{AB}$ liegt, und die Differenzen dieser Seiten und Winkel, wenn der Punkt D außerhalb der Seite $\overset{\frown}{AB}$ liegt. Sind nämlich die Winkel α, β des Ausgangsdreiecks beide spitz oder beide stumpf, so schneidet der Kreis, der durch den Punkt C geht und auf AB senkrecht steht, den Kreis AB in zwei Punkten, von denen einer auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt; diesen Punkt muß man im betrachteten Fall als Punkt D nehmen (Abb. 47).

---

[1]) Es wird vorausgesetzt, daß wenigstens eine der gegebenen Seiten von $\frac{\pi}{2}r$ verschieden ist. Ist nämlich $a = b = \frac{\pi}{2}r$, so muß $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sein, und dann kann man unendlich viele Dreiecke der gesuchten Art finden.

[2]) Da nach Voraussetzung eine der Seiten a, b von $\frac{\pi}{2}r$ verschieden ist, kann der Punkt C nicht Pol des Kreises AB sein, und deswegen geht durch C genau eine Senkrechte zu AB.

Dann stimmen in den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD die Winkel bei A bzw. B mit den Winkeln α bzw. β des Ausgangsdreiecks ABC überein, und die Seite c und der Winkel γ des Dreiecks ABC sind die Summen der von uns gefundenen Seiten oder Winkel der rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD. Ist dagegen im Dreieck ABC einer der Winkel α oder β spitz und der andere stumpf, so schneidet der Kreis, der durch den Punkt C geht und auf AB senkrecht steht, den Kreis AB in zwei Punkten, die beide außerhalb des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ liegen. In diesem Fall kann man irgendeinen dieser Punkte als Punkt D nehmen, z. B. denjenigen, der auf der Verlängerung der Seite $\overset{\frown}{AB}$ über den Punkt B hinaus liegt (Abb. 48). Dann ist im Dreieck ACD der Winkel bei der Ecke A gleich dem Winkel α und der Winkel bei der Ecke B im Dreieck BCD gleich $\pi - \beta$. Ferner ist die Seite c und der Winkel γ des Dreiecks ABC die Differenz der Seiten $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BD}$ bzw. die Differenz der Winkel bei der Ecke C der Dreiecke ACD und BCD. Ist schließlich einer der Winkel α oder β (z. B. α) ein rechter Winkel, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig, und man kann zur Bestimmung der Seite c und des Winkels γ in diesem Fall die Formeln (44), (47) heranziehen.

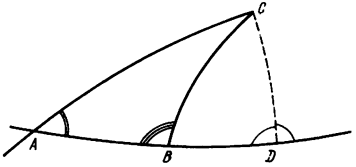


Abb. 48

Sind uns die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks bekannt, so berechnen wir nach der Formel (35) des Winkelkosinussatzes

$$\cos\frac{a}{r} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

und analog dazu nach den Formeln (36) und (37) $\cos\dfrac{b}{r}$ und $\cos\dfrac{c}{r}$.

Sind uns zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks und die Seite zwischen ihnen bekannt, z. B. die Winkel β und γ und die Seite a, so bestimmen wir den Winkel α nach der Formel (35) des Winkelkosinussatzes. Nachdem wir damit alle drei Winkel des sphärischen Dreiecks kennen, können wir die übrigen Seiten wie zuvor angegeben bestimmen.

Sind uns schließlich zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks[1]) und die einem dieser Winkel gegenüberliegende Seite bekannt, z. B. die Winkel α und β und

[1]) Es wird vorausgesetzt, daß wenigstens einer der gegebenen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist.

die Seite a, so berechnen wir nach Formel (22) des Sinussatzes

$$\sin\frac{b}{r} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin\frac{a}{r}.$$

Wir weisen darauf hin, daß diese Beziehung für b zwei sich zu πr ergänzende Werte liefert; das entspricht dem Sachverhalt, daß es im allgemeinen zwei sphärische Dreiecke mit gegebenem α, β und a gibt, wie wir bereits bei der Untersuchung des fünften Kongruenzsatzes für sphärische Dreiecke bemerkten. Die Seite c und der Winkel γ können aus den Winkeln α, β und den Seiten a, b wie oben angegeben bestimmt werden.

Literatur

[1] HADAMARD, J., Leçons de géométrie élémentaire II, 7. Aufl., Paris 1937.

[2] Перепелкин, Д. И., Курс элементарной геометрии, т. II (PEREPELKIN, D. I., Lehrgang der Elementargeometrie, Bd. II), Moskau-Leningrad 1949.

[3] Степанов, Н. Н., Сферическая тригонометрия (STEPANOW, N. N., Sphärische Trigonometrie), Moskau-Leningrad 1948.

S. A. SKOPEZ

KEGELSCHNITTE

§ 1. Verschiedene Definitionen der Kegelschnitte

1.1. Kegelschnitte als Schnitte eines geraden Kreiskegels. Wie schon der Name sagt, handelt es sich bei einem *Kegelschnitt* um eine Kurve, die beim *Schnitt der Fläche eines Kreiskegels mit einer nicht durch die Spitze des Kegels gehenden Ebene* entsteht.

Unter einer *Kegelfläche* verstehen wir dabei eine Fläche, die bei der Drehung einer Geraden l um eine Gerade p entsteht, welche l schneidet und auf l nicht

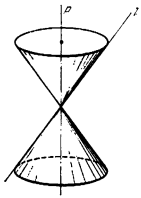


Abb. 1

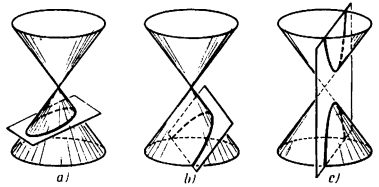


Abb. 2

senkrecht steht. Diese Fläche besteht aus zwei Teilen, welche sich im Schnittpunkt der Geraden l und p, der Kegelspitze, berühren (Abb. 1). Für jede nicht durch die Spitze des Kegels gehende Ebene tritt genau einer der folgenden Fälle ein: a) Die Ebene schneidet eine der Kegelhälften in einer geschlossenen beschränkten Kurve (Abb. 2a); b) die Ebene schneidet eine der Kegelhälften in einer unbeschränkten Kurve (Abb. 2b); c) die Ebene schneidet beide Kegelhälften (Abb. 2c). Obwohl die in Abb. 2a–c dargestellten Kurven ganz verschieden aussehen, sind sie alle Kegelschnitte. Im allgemeinen rechnete man zu den Kegelschnitten auch die Schnitte einer *Zylinderfläche* mit einer Ebene, die zu den Erzeugenden des Zylinders nicht parallel ist (Abb. 3). Später wird sich übrigens zeigen, daß zwischen den Kurven aus Abb. 3 und 2a kein Unterschied besteht. Der Kreis ist ein spezieller Kegelschnitt, denn man kann ihn als Schnitt eines Kegels mit einer zur Kegelachse senkrechten Ebene erhalten (Abb. 4) oder indem man einen Zylinder mit einer Ebene schneidet, die auf seinen Erzeugenden senkrecht steht. Damit lassen sich auch die ebenen Schnitte des dritten in der Elementargeometrie untersuchten Körpers, der *Kugel*, unter die Kegelschnitte einordnen.

Geht die Schnittebene durch die Spitze der Kegelfläche oder ist sie zu den Erzeugenden der Zylinderfläche parallel, so spricht man von einem *entarteten Kegelschnitt*. Zu den entarteten Kegelschnitten werden gezählt: ein Paar

sich schneidender Geraden – nämlich Erzeugende des Kegels (Abb. 5a); ein Paar paralleler Geraden – nämlich Erzeugende des Zylinders (Abb. 5b); eine einzige Gerade – nämlich eine einzelne Erzeugende des Kegels bzw. des

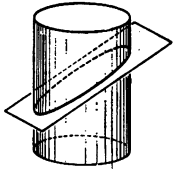


Abb. 3

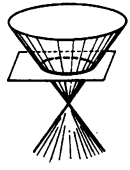


Abb. 4

Zylinders (Abb. 5c, d). Außerdem kann die nur aus einem Punkt bestehende „Linie" zu den entarteten Kegelschnitten gerechnet werden (Abb. 6a) wie auch die gar keine Punkte enthaltende „Linie" (Abb. 6b). (Man kann einen

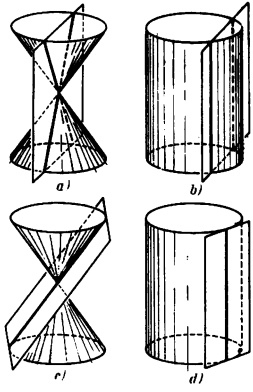


Abb. 5

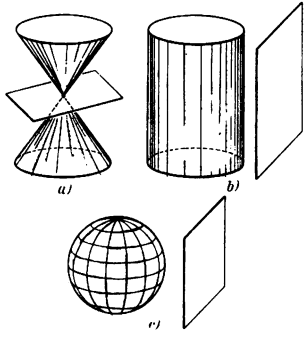


Abb. 6

keine Punkte enthaltenden „Kegelschnitt" auch dadurch erhalten, daß man eine Kugel mit einer in hinreichend großer Entfernung von ihrem Mittelpunkt verlaufenden Ebene „schneidet"; Abb. 6c.) In der elementaren Theorie der Kegelschnitte beschränkt man sich im allgemeinen auf die Untersuchung der interessanteren *eigentlichen* oder *nichtentarteten* Kegelschnitte.

Die von uns gegebene Definition der Kegelschnitte ist ziemlich umständlich und hat außerdem den Nachteil, daß sie räumlicher Natur ist, wohingegen die Kegelschnitte ebene Kurven sind und als solche vollständig mit den Hilfsmitteln der Planimetrie behandelt werden können. Weiter unten wird gezeigt, daß sich die Kegelschnitte auch ohne Verwendung von Begriffen aus der Stereometrie definieren lassen.

1.2. Die Leitlinieneigenschaft der Kegelschnitte. Nun zeigen wir, daß jeder vom Kreis verschiedene (nichtentartete) Kegelschnitt als *Menge von Punkten M* definiert werden kann, *für die das Verhältnis des Abstandes $|MF|$ von einem festen Punkt F zum Abstand $|MP|$ von einer nicht durch den Punkt F gehenden festen Geraden f einen konstanten Wert ε besitzt:*

$$\frac{|MF|}{|MP|} = \varepsilon = \text{const}.$$

Der Punkt F heißt *Brennpunkt* des Kegelschnittes, die Gerade f seine *Leitlinie* und das Verhältnis ε seine *Exzentrizität*.

Wenn der Punkt F zur Geraden f gehört, stellt die durch die Bedingung $\frac{|MF|}{|MP|} = \varepsilon$ = const definierte Punktmenge ein Geradenpaar dar (Abb. 7a), d. h. einen entarteten Kegelschnitt; für $\varepsilon = 1$ geht dieses Geradenpaar in eine Gerade über (Abb. 7b).

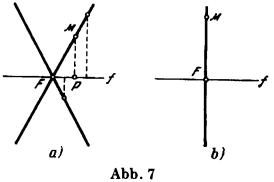


Abb. 7

Zum Beweis betrachten wir einen Kegel, der bei der Drehung einer Geraden l um eine sie im Punkt O schneidende Gerade p entsteht, wobei p und l den Winkel $\alpha < 90°$ einschließen mögen. Die Ebene π sei so gelegt, daß sie nicht durch die Kegelspitze geht und mit der Kegelachse p einen Winkel $\beta < 90°$ einschließt (Abb. 8a–c; wenn $\beta = 90°$ ist, schneidet π den Kegel in einem Kreis). Dem Kegel beschreiben wir eine Kugel K ein, welche die Ebene π in einem Punkt F und den Kegel längs eines Kreises S berührt.[1]) Die Schnittgerade der Ebene π und der Ebene σ, in welcher der Kreis S liegt, bezeichnen wir mit f. Nun verbinden wir einen beliebigen Punkt M der Schnittlinie Λ der Ebene π mit dem Kegel einmal mit der Kegelspitze O und zum anderen mit dem Punkt F; von M fällen wir auf die Gerade f das Lot MP. Sei E der Schnittpunkt der Erzeugenden MO des Kegels mit dem Kreis S. Dann ist $|MF| = |ME|$, denn in beiden Fällen handelt es sich um Abschnitte von Tangenten durch den Punkt M an die Kugel K. Ferner schließt die Strecke $\overline{ME}$

[1]) Der Nachweis, daß es stets wenigstens eine solche Kugel K gibt, sei dem Leser überlassen. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

mit der Kegelachse p den konstanten (d. h. von der Wahl des Punktes M unabhängigen) Winkel α und die Strecke $\overline{MP}$ mit p den konstanten Winkel β ein. Die Projektionen dieser beiden Strecken auf die Achse p haben daher die Länge $|ME| \cos\alpha$ bzw. $|MP| \cos\beta$. Nun fallen beide Projektionen jedoch zusammen, denn die Strecken $\overline{ME}$ und $\overline{MP}$ haben den gemeinsamen Anfangs-

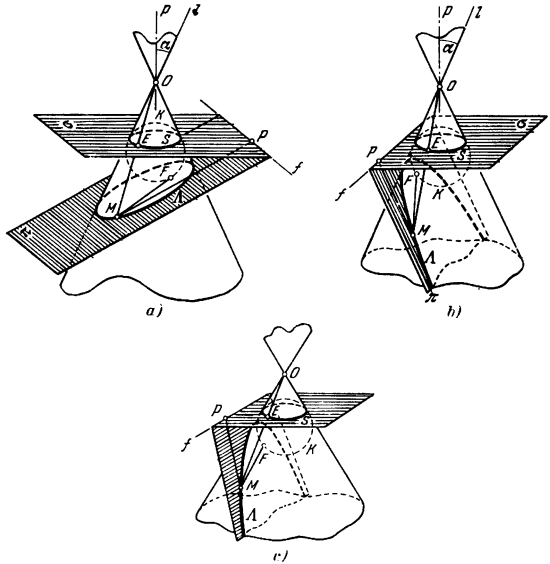


Abb. 8

punkt M, und ihre Endpunkte liegen in der Ebene σ, die auf p senkrecht steht. Also ist $|ME| \cos\alpha = |MP| \cos\beta$ oder wegen $|ME| = |MF|$

$$|MF| \cos\alpha = |MP| \cos\beta,$$

und daraus folgt

$$\frac{|MF|}{|MP|} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \varepsilon = \text{const.}$$

Wie sich weiter ohne Schwierigkeiten zeigen läßt, ist $\frac{|MF|}{|MP|} \neq \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, wenn der Punkt M der Ebene π nicht zum Kegel gehört. Es kann somit jeder Schnitt

eines geraden Kreiskegels als Menge derjenigen Punkte der Ebene beschrieben werden, für die $\frac{|MF|}{|MP|} = \text{const}$ ist. Offenbar können wir bei geeigneter Wahl der Größen der Winkel α und β für die Exzentrizität $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ jeden Wert $\varepsilon > 0$ bekommen; ferner ist unmittelbar zu sehen, daß aus Ähnlichkeitsgründen der Abstand $|FQ|$ des Brennpunktes zur Leitlinie dem Radius r der Kugel K (bzw. dem Abstand d der Ebene π von der Kegelspitze O) direkt proportional ist,[1]) so daß wir durch geeignete Wahl von d für $|FQ|$ jeden Wert erhalten können. Jede Menge von Punkten M, für die das Verhältnis der Abstände von M zu einem festen Punkt F und zu einer festen Geraden f einen konstanten Wert hat, kann deshalb als eine Kurve erhalten werden, die beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene entsteht. Damit haben wir bewiesen, daß die (nichtentarteten) Kegelschnitte auch mit Hilfe der im vorliegenden Abschnitt behandelten Eigenschaft definiert werden können. Diese Eigenschaft der Kegelschnitte wird als *Leitlinieneigenschaft* bezeichnet.

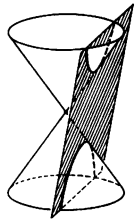


Abb. 9

Für $\beta > \alpha$ ist $\varepsilon < 1$, für $\beta = \alpha$ ist $\varepsilon = 1$, und für $\beta < \alpha$ ist $\varepsilon > 1$. Des weiteren sieht man sogleich, daß die Ebene π für $\beta > \alpha$ den Kegel in einer geschlossenen beschränkten Kurve, für $\beta = \alpha$ in einer unbeschränkten Kurve und für $\beta < \alpha$ jede der beiden Kegelhälften in einer Kurve schneidet, also die Schnittfigur aus zwei (unbeschränkten) Teilen oder *Ästen* besteht (Abb. 9). Ist für einen Kegelschnitt die Exzentrizität $\varepsilon < 1$, so spricht man von einer *Ellipse*, für $\varepsilon = 1$ von einer *Parabel* und für $\varepsilon > 1$ von einer *Hyperbel*. Zu den Ellipsen wird auch der Kreis gezählt, der sich nicht durch die Leitlinieneigenschaft bestimmen läßt; da für den Kreis das Verhältnis $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ Null wird (hier ist $\beta = 90°$), kann der Kreis als Kegelschnitt mit der Exzentrizität 0 aufgefaßt werden.

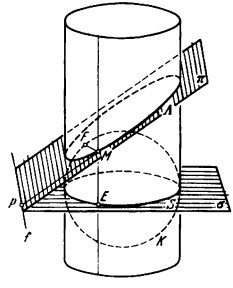


Abb. 10

Ohne weitere Schwierigkeiten kann nun bewiesen werden, daß die ebenen Schnitte eines geraden Kreiszylinders ebenfalls Ellipsen sind. Dazu nehmen wir an, die Ebene π schließe mit der Zylinderachse einen Winkel $\beta < 90°$ ein (Abb. 10). Dem Zylinder beschreiben wir eine Kugel K ein,

[1]) Wie gezeigt werden kann, ist

$$|FQ| = \frac{r(\sin\alpha + \sin\beta)}{\cos\beta}.$$

welche die Ebene π in einem Punkt F und den Zylinder in einem Kreis S berührt. Es sei f die Schnittgerade der den Kreis S enthaltenden Ebene σ und der Ebene π. Auf der Schnittlinie von π mit dem Zylinder wählen wir irgendeinen Punkt M und verbinden ihn mit dem Punkt F; von M fällen wir auf die Gerade f das Lot MP. Die durch M gehende Erzeugende ME des Zylinders schneidet den Kreis S in einem Punkt E. Es ist $|MF| = |ME|$ (denn $\overline{MF}$, $\overline{ME}$ sind Abschnitte von Tangenten, die von M aus an K gelegt wurden); dem rechtwinkligen Dreieck MPE mit dem spitzen Winkel $\sphericalangle PME = \beta$ entnimmt man ferner, daß $\dfrac{|ME|}{|MP|} = \cos\beta$ ist. Hieraus folgt

$$\frac{|MF|}{|MP|} = \cos\beta = \text{const.}$$

Der Schnitt des Zylinders mit der Ebene π stellt somit einen Kegelschnitt mit dem Brennpunkt F, der Leitlinie f und der Exzentrizität $\cos\beta < 1$ dar, d. h. eine Ellipse.

Wie leicht gezeigt werden kann, lassen sich alle Ellipsen als ebene Schnitte von Kreiszylindern erhalten.

1.3. Die Brennpunkteigenschaften der Ellipsen und Hyperbeln. Ist $\beta = \alpha$, so gibt es nur eine dem Kegel einbeschriebene Kugel K, welche die Ebene π

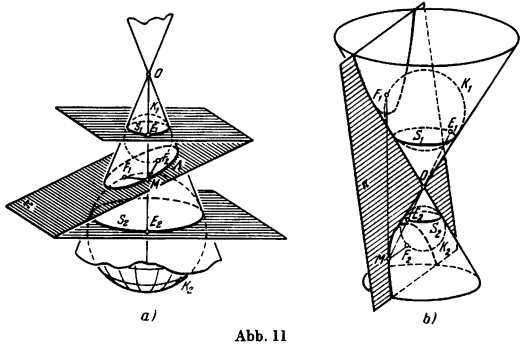


Abb. 11

berührt (vgl. Abb. 8b). Für $\beta \neq \alpha$ können jedoch zwei derartige Kugeln K_1 und K_2 konstruiert werden.[1]) Ihre Berührungspunkte mit der Ebene π (die die

[1]) Man bezeichnet diese Kugeln auch als DANDELINsche *Kugeln*. – *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Brennpunkte des betreffenden Kegelschnittes darstellen) bezeichnen wir mit F_1 und F_2; S_1 und S_2 seien die Kreise, in denen die Kugeln den Kegel berühren (Abb. 11a, b). Nun verbinden wir einen auf der Ellipse bzw. Hyperbel beliebig gewählten Punkt M mit den Brennpunkten F_1, F_2 sowie mit der Kegelspitze O. Schneidet die Erzeugende OM des Kegels die Kreise S_1 und S_2 in den Punkten E_1, E_2, dann ist $|MF_1| = |ME_1|$ und $|MF_2| = |ME_2|$ (da es sich jeweils um Abschnitte von Tangenten handelt, die von M aus an K_1 und K_2 gelegt werden). Für die Ellipse ist außerdem (Abb. 11a)

$$|MF_1| + |MF_2| = |ME_1| + |ME_2| = |E_1E_2|.$$

Der Abstand $|E_1E_2|$ auf d r Erzeugenden des Kegels zwischen den Kreisen S_1 und S_2 hängt aber offensichtlich nicht von der Wahl des Punktes M ab. Wir bezeichnen diesen Abstand mit $2a$. Die Ellipse kann demzufolge auch definiert werden als *Menge aller derjenigen Punkte M, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist:*

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a = \text{const}.$$

Für die Hyperbel (Abb. 11b) gilt entsprechend für jeden Punkt M des der Kugel K_2 entsprechenden Astes die Beziehung

$$|MF_1| - |MF_2| = |ME_1| - |ME_2| = |E_1E_2| = 2a = \text{const}.$$

Liegt M dagegen auf der die Kugel K_1 einschließenden Seite des Kegels, dann erhalten wir

$$|MF_2| - |MF_1| = |ME_2| - |ME_1| = |E_2E_1| = 2a = \text{const}.$$

Die Hyperbel kann also definiert werden als *Menge aller derjenigen Punkte M, für die der absolute Betrag der Differenz der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist:*

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a = \text{const}.$$

(Dabei ist $2a$ der Abstand der Kreise S_1, S_2 auf einer Erzeugenden des Kegels.)

Die oben hergeleiteten Eigenschaften von Ellipse und Hyperbel heißen ihre *Brennpunkteigenschaften*. Man hätte diese Eigenschaften auch zur Definition dieser Kurven verwenden können.

Die Brennpunkteigenschaft der Ellipse läßt sich auch einfach aus der Definition der Ellipse als Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene π herleiten. Dazu werden dem Zylinder die beiden Kugeln K_1 und K_2 einbeschrieben, die die Ebene π in den Punkten F_1, F_2 berühren. Nun verbinden wir einen beliebigen Ellipsenpunkt M mit den beiden Punkten F_1 und F_2 (Abb. 12). Außerdem legen wir durch M die Erzeugende E_1E_2 des Zylinders, welche die Kreise S_1 und S_2, in denen die Kugeln K_1 und K_2 den Zylinder berühren, in den Punkten E_1, E_2 schneide. Die Strecken $\overline{MF_1}$ und $\overline{ME_1}$ sowie $\overline{MF_2}$ und $\overline{ME_2}$ sind gleich lang, da sie Abschnitte von Tangenten durch M an K_1 bzw. K_2 sind.

Es ist daher

$$|MF_1| + |MF_2| = |ME_1| + |ME_2| = |E_1E_2| = 2a = \text{const},$$

wobei $2a$ der Abstand der Kreise S_1 und S_2 auf einer Erzeugenden des Zylinders ist.

Es sei noch bemerkt, daß die Punkte F_1, F_2 offenbar zusammenfallen, wenn die Schnittebene π auf der Achse des Kegels bzw. des Zylinders senkrecht steht

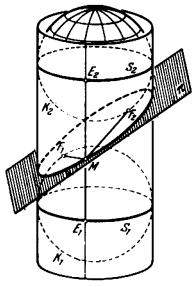
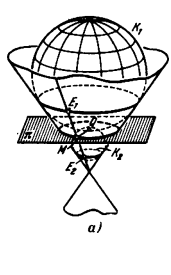


Abb. 12



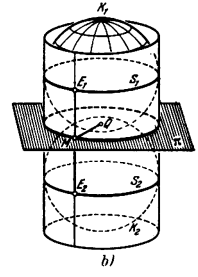


Abb. 13

(Abb. 13a, b). Die Brennpunkte der dabei erhaltenen Ellipse fallen daher in einem Punkt Q zusammen, und die Brennpunkteigenschaft der Ellipse reduziert sich auf die Gleichung

$$2\,|MQ| = 2a, \quad \text{d. h.} \quad |MQ| = a = \text{const},$$

durch welche ein Kreis definiert wird.

1.4. Kegelschnitte und das Problem des Apollonios. Das bekannte Problem des APOLLONIOS, nämlich die Konstruktion eines Kreises, der drei gegebene Kreise berührt (vgl. S. 522 ff.), führt in natürlicher Weise auf die Betrachtung von Kegelschnitten. Bei der Lösung dieses Problems ist es zweckmäßig, zuerst einmal alle diejenigen Kreise S zu betrachten, welche *zwei* der gegebenen Kreise, etwa S_1 und S_2, berühren; dabei soll der Fall nicht ausgeschlossen werden, daß ein Kreis oder sogar beide Kreise S_1 und S_2 in einen „Kreis mit unendlich großem Radius" ausarten, d. h. eine Gerade darstellen. Wenn S_1 und S_2 Geraden sind, stellt die Menge der Mittelpunkte aller S_1 und S_2 berührenden Kreise S offensichtlich ein Paar sich schneidender Geraden dar (Abb. 14a) oder eine Gerade (Abb. 14b), d. h., es ergeben sich *entartete Kegelschnitte*. Wir wollen zeigen, daß sich in den anderen Fällen *nichtentartete Kegelschnitte ergeben*.

Es berühre also der Kreis S mit dem Radius r den Kreis S_1 mit dem Radius r_1 und den Kreis (bzw. die Gerade) S_2 (Abb. 15a, b). Wir ersetzen den Kreis S durch den zu ihm konzentrischen Kreis S' mit dem Radius $|r \pm r_1|$, wobei das Pluszeichen genommen wird,

wenn sich die Kreise S und S_1 außen berühren, und das Minuszeichen im Fall einer inneren Berührung. Offensichtlich geht der Kreis S' durch den Mittelpunkt Q_1 des Kreises S_1 und berührt den zu S_2 konzentrischen Kreis S_2' mit dem Radius $|r_2 \mp r_1|$, wobei r_2 der Radius von S_2 ist (oder er berührt die zu S_2 parallele Gerade S_2', deren Abstand zu S_2 gleich r_1 ist; vgl. Abb. 15a, b).[1]) Damit haben wir die Bestimmung der Menge der Mittelpunkte von allen Kreisen S in einfacher Weise zurückgeführt auf die *Bestimmung der Menge der*

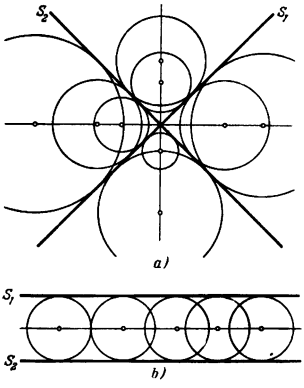


Abb. 14

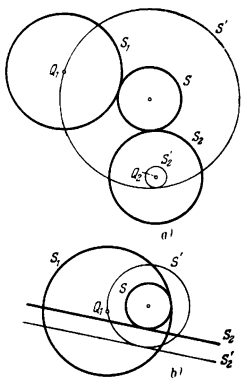


Abb. 15

Mittelpunkte von allen Kreisen S', die durch einen gegebenen Punkt Q_1 gehen und einen gegebenen Kreis (bzw. eine Gerade) S_2' berühren. Dabei kann angenommen werden, daß Q_1 *nicht* auf dem Kreis (bzw. auf der Geraden) S_2' liegt, da in diesem Fall die Menge der Mittelpunkte der Kreise S' offenbar eine Gerade ergibt (Abb. 16a, b). Unter diesen Voraussetzungen sind folgende drei Fälle zu unterscheiden.

a) *Der Punkt Q_1 liegt innerhalb des Kreises S_2'* (Abb. 17a). Sind Q_2 der Mittelpunkt und $2a$ der Radius des Kreises S_2' und bezeichnet M bzw. R den Mittelpunkt bzw. den Radius des (veränderlichen) Kreises S', so ist offenbar

$$|Q_2M| = 2a - R = 2a - |Q_1M|,$$

d. h.

$$|Q_2M| + |Q_1M| = 2a.$$

Hieraus folgt, daß die Menge der Punkte M eine *Ellipse* mit den Brennpunkten Q_1 und Q_2 bildet.

b) *Der Punkt Q_1 liegt außerhalb des Kreises S_2'* (Abb. 17b). Unter Beibehaltung der im vorhergehenden Fall eingeführten Bezeichnungen finden wir, daß in Abhängigkeit davon,

[1]) Mit anderen Worten: Wir führen eine *Dehnung* (vgl. S. 507) um den Wert $-r_1$ durch (vgl. die Lösung des Problems des APOLLONIOS auf S. 522ff).

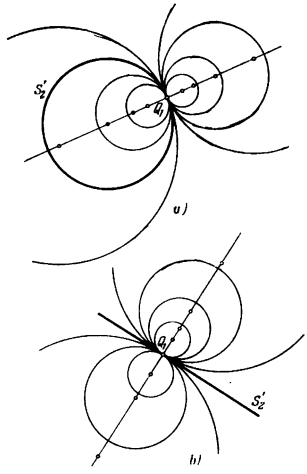


Abb. 16

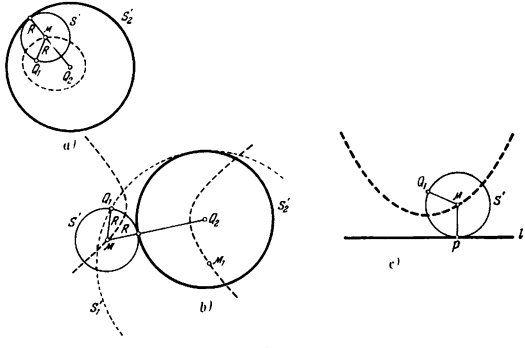


Abb. 17

ob der Kreis S' den Kreis S_2' von außen oder von innen berührt,

$$|Q_2M| = 2a + R = 2a + |Q_1M| \quad \text{bzw.} \quad |Q_2M| = R - 2a = |Q_1M| - 2a,$$

d. h.

$$|Q_2M| - |Q_1M| = 2a \quad \text{bzw.} \quad |Q_1M| - |Q_2M| = 2a$$

gilt. Also bildet in diesem Fall die Menge der Punkte M eine *Hyperbel* mit den Brennpunkten Q_1 und Q_2.

c) *Der „Kreis" S_2' ist eine Gerade l* (Abb. 17c). In diesem Fall ist der Abstand $|MP|$ des Mittelpunktes M von S' zur Geraden l offenbar gleich dem Radius $|MQ_1|$ von S,

$$|MQ_1| = |MP|,$$

d. h., es handelt sich bei der Menge der Punkte M um eine *Parabel* mit dem Brennpunkt Q_1 und der Leitlinie l.

Wie man leicht sieht, kann *jede* Ellipse, Hyperbel oder Parabel als Menge der Mittelpunkte von Kreisen S' beschrieben werden, die durch einen festen Punkt Q_1 gehen und einen festen Kreis bzw. eine feste Gerade S_2' berühren. Die nichtentarteten Kegelschnitte können also als Kurven definiert werden, welche *die Menge der Mittelpunkte aller Kreise darstellen, die durch einen gegebenen Punkt gehen sowie einen nicht durch diesen Punkt gehenden Kreis (bzw. eine nicht durch diesen Punkt gehende Gerade) berühren.*

1.5. Die analytische Definition der Kegelschnitte. In der analytischen Geometrie wird bewiesen, daß durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(in der wenigstens einer der Koeffizienten A, B, C von Null verschieden ist) in einem rechtwinkligen kartesischen (oder sogar in einem affinen) Koordinatensystem nur die folgenden acht Kurventypen beschrieben werden: a) Ellipse, b) Hyperbel, c) Parabel (die *nichtentarteten* Kurven zweiter Ordnung), d) ein Paar sich schneidender Geraden, e) ein Paar paralleler Geraden, f) ein Paar zusammenfallender Geraden (Doppelgerade), g) ein Punkt (die *entarteten* Kurven zweiter Ordnung), h) eine „Kurve", die aus keinem Punkt besteht.

Umgekehrt wird jede Kurve, die zu einem der angegebenen acht Typen[1]) gehört, in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten durch eine Gleichung zweiten Grades beschrieben. Die (entarteten und nichtentarteten) Kegelschnitte können also auch als *Kurven zweiter Ordnung* definiert werden.

Im vorhergehenden haben wir verschiedene gleichberechtigte Definitionen der Kegelschnitte kennengelernt, von denen jede der Theorie der Kegelschnitte zugrunde gelegt werden kann. Daneben gibt es noch zahlreiche andere Definitionen dieser bemerkenswerten Kurven. Die wichtigsten Definitionen sind allerdings die letzte (analytische) und die erste (räumliche) Definition. Die

[1]) In der analytischen Geometrie spricht man gewöhnlich von *neun* (und nicht von acht) Typen von Kegelschnitten, da man dort zwischen einer „imaginären Ellipse" und einem „Paar imaginärer paralleler Geraden" unterscheidet (vgl. Abb. 6c und b); vom geometrischen Standpunkt sind diese „Kurven" gleich, da beide keinen Punkt enthalten, jedoch werden sie analytisch durch verschiedene Gleichungen beschrieben.

Bedeutung der ersten Definition erklärt sich daraus, daß sie *die projektive Äquivalenz eines nichtentarteten Kegelschnittes mit dem gewöhnlichen Kreis* zeigt, d. h., sie gibt eine Beschreibung der Kegelschnitte als Kurven, die sich aus dem Kreis durch Zentralprojektion im Raum (oder durch eine *projektive Abbildung* der Ebene[1])) ergeben. Jedoch macht der räumliche Charakter der ersten Definition diese für eine geometrische Analyse der Eigenschaften der Kegelschnitte recht unhandlich. Was die letzte (analytische) Definition betrifft, so gehört sie offensichtlich zur analytischen und nicht zur elementaren Geometrie. Deshalb wollen wir im folgenden unter einem *Kegelschnitt* stets eine Menge von solchen Punkten M verstehen, für die das Verhältnis des Abstandes $|MF|$ des Punktes M von einem festen Punkt F (Brennpunkt) zum Abstand $|MP|$ von einer festen Geraden f (Leitlinie) einen konstanten Wert ε hat (die sogenannte *Exzentrizität* der Kurve):

$$\frac{|MF|}{|MP|} = \varepsilon = \text{const}.$$

Anders gesagt: die nachfolgenden Betrachtungen bauen auf der *Leitlinieneigenschaft* der Kegelschnitte auf. Je nachdem, ob die Exzentrizität ε kleiner, gleich oder größer als 1 ist, nennen wir die betreffende Kurve eine *Ellipse*, eine *Parabel* oder eine *Hyperbel*. Dabei wollen wir auch den gewöhnlichen *Kreis* zu den Ellipsen zählen, wobei wir annehmen, daß seine Exzentrizität gleich Null sei.

§ 2. Die Ellipse

2.1. Die Form der Ellipse. Die durch F gehende und senkrecht auf der Leitlinie f stehende Gerade x nennen wir die *Hauptachse* der Ellipse F; der Schnittpunkt der beiden Geraden f und x sei D (Abb. 18). Es sei M ein Punkt der Ellipse, d. h. $|MF| : |MP| = \varepsilon$. Wenn M und der Brennpunkt F auf verschiedenen Seiten der Leitlinie f liegen würden, dann wäre, da die Länge der Strecke $\overline{MF}$ nicht kleiner als die ihrer Projektion $\overline{M_1F}$ auf die Gerade x ist und $|MP| = |M_1D| < |M_1F|$ gilt (der Punkt D liegt zwischen F und M_1),

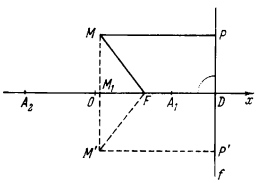


Abb. 18

$$\varepsilon = |MF| : |MP| \geqq |M_1F| : |M_1D| > 1,$$

was der Definition der Ellipse widerspricht. Das heißt: *Alle Punkte der Ellipse liegen auf derjenigen Seite der Leitlinie, auf welcher der Brennpunkt liegt.*

[1]) Vgl. S. 111.

Wir konstruieren jetzt den bezüglich der Geraden x zum Punkt M symmetrisch gelegenen Punkt M'. Auf Grund der Eigenschaften der Axialsymmetrie ergibt sich $|MF| = |M'F|$, $|MP| = |M'P'|$ (Abb. 18), d. h., es ist $|M'F| : |M'P'| = |MF| : |MP| = \varepsilon$. Mit M liegt also stets auch M' auf der Ellipse. Teilen wir ferner die Strecke $\overline{FD}$ innen und außen im Verhältnis ε, so erhalten wir Punkte A_1 und A_2, die ebenfalls zur Ellipse gehören. Diese beiden Punkte heißen die *Scheitel* (*Hauptscheitel*) der Ellipse; die Scheitel sind die einzigen auf der Geraden x liegenden Ellipsenpunkte. Die Strecke $\overline{A_1A_2}$ wird die *große Achse* der Ellipse genannt; ihre Länge bezeichnen wir mit $2a$. Die Zahl a heißt dabei der *große Halbmesser* der Ellipse. Wir sind also zu folgendem Ergebnis gelangt:

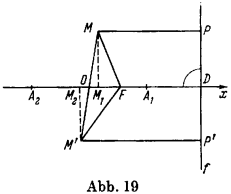


Abb. 19

Die Hauptachse der Ellipse ist Symmetrieachse der Ellipse; auf ihr liegen zwei Ellipsenpunkte, welche die Endpunkte der großen Achse der Ellipse sind und ihre Scheitel heißen.

Der Mittelpunkt O der großen Achse ist der *Mittelpunkt* der Ellipse. Wir wollen jetzt zeigen, daß der Mittelpunkt der Ellipse ihr Symmetriezentrum ist. Dazu sei M ein beliebiger Punkt der Ellipse E, und der Punkt M' liege bezüglich O symmetrisch zu M. Um nachzuweisen, daß M' zur Ellipse E gehört, muß gezeigt werden, daß die Beziehung $|M'F| : |M'P| = \varepsilon$ erfüllt ist (Abb. 19).

Zunächst bestimmen wir den Abstand d_0 des Punktes O von der Leitlinie. Es sei p der Abstand $|FD|$ des Brennpunktes von der Leitlinie. Mit A_1 wollen wir den zwischen F und D liegenden Endpunkt der großen Achse bezeichnen. Dann ist

$$\frac{p - |DA_1|}{|DA_1|} = \varepsilon, \quad |DA_1| = \frac{p}{1+\varepsilon},$$

$$\frac{|DA_2| - p}{|DA_2|} = \varepsilon, \quad |DA_2| = \frac{p}{1-\varepsilon}.$$

Berücksichtigen wir, daß $d_0 = \frac{1}{2}(|DA_1| + |DA_2|)$ ist, so erhalten wir

$$d_0 = \frac{p}{1-\varepsilon^2}.$$

Für das Folgende setzen wir $|MF| = r$, $|M'F| = r'$, $|MP| = d$ und $|M'P'| = d'$. Da die Strecke $\overline{OD}$ in dem Trapez $MPP'M'$ Mittellinie ist, gilt

$$d_0 = \frac{d + d'}{2}.$$

Ein Vergleich der beiden für d_0 gefundenen Ausdrücke ergibt

$$2p = (1 - \varepsilon^2)(d + d').$$

Ferner entnehmen wir den rechtwinkligen Dreiecken MM_1F und $M'M_2F$, in denen $|MM_1| = |M'M_2|$ ist,

$$r^2 - (d - p)^2 = r'^2 - (d' - p)^2$$

bzw.

$$r^2 - r'^2 = d^2 - d'^2 - 2p(d - d').$$

Setzen wir hier den oben für p gefundenen Ausdruck ein, so erhalten wir

$$r^2 - r'^2 = d^2 - d'^2 - (1 - \varepsilon^2)(d^2 - d'^2)$$

oder

$$r^2 - \varepsilon^2 d^2 = r'^2 - \varepsilon^2 d'^2.$$

Nun ist die linke Seite dieser Gleichung aber nach Voraussetzung gleich Null ($r : d = \varepsilon$); folglich muß auch die rechte Seite gleich Null sein, d. h., es ist $r' = \varepsilon d'$. Damit ist gezeigt, daß der Punkt M' zur Ellipse gehört. Wir haben also bewiesen: *Der Mittelpunkt einer Ellipse ist ihr Symmetriezentrum.*

Es ist klar, daß auch der Mittelpunkt eines *Kreises* (d. h. einer Ellipse mit der Exzentrizität Null) dessen Symmetriezentrum ist.

Wenn der Punkt M ein Ellipsenpunkt ist, liegen auch der bezüglich der Geraden x zu M symmetrische Punkt M' und der bezüglich des Mittelpunktes O zu M' symmetrische Punkt M'' auf der Ellipse. Durch den Punkt O legen wir nun diejenige Gerade y, die auf x senkrecht steht (Abb. 20). Offensichtlich ist die Gerade y parallel zu MM' und geht durch den Mittelpunkt O der Seite $\overline{M'M''}$ des rechtwinkligen Dreiecks $MM'M''$ (mit dem rechten Winkel an der Ecke M). Folglich steht die Gerade y auf der Strecke $\overline{M''M}$ senkrecht und geht durch deren Mittelpunkt, d. h., die Punkte M und M'' liegen bezüglich der Geraden y symmetrisch. Wir können also feststellen:

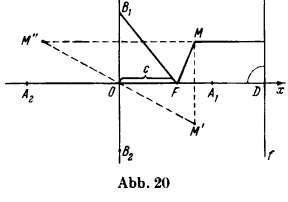


Abb. 20

Die Gerade y ist eine zweite Symmetrieachse der Ellipse.

Wir wollen nun die Ellipsenpunkte bestimmen, die auf der Symmetrieachse y liegen. Es sei B ein derartiger Punkt. Dann gilt für ihn $d = d_0 = p : (1 - \varepsilon^2)$. Aus der Beziehung $r : d = \varepsilon$ folgt

$$|BF| = r = d_0\varepsilon = p\varepsilon : (1 - \varepsilon^2).$$

Andererseits ist

$$a = \frac{1}{2}(|DA_2| - |DA_1|) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1 - \varepsilon} - \frac{p}{1 + \varepsilon}\right) = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}.$$

Demzufolge ist $|BF| = a$, d. h., ein Punkt B der Geraden y gehört dann und nur dann zur Ellipse, wenn $|BF| = a$ ist. Nun ist aber der Abstand des Mittelpunktes O vom Brennpunkt F, die *Brennweite*[1]) c, *kleiner* als die große Halbachse, $c < a$, denn der Punkt F liegt zwischen O und A_1. Daher gibt es auf der Geraden y *zwei* Punkte B_1 und B_2, die zur Ellipse gehören und bezüglich x symmetrisch liegen. Diese Punkte werden ebenfalls als *Scheitel* der Ellipse (*Nebenscheitel*) bezeichnet. Die Gerade B_1B_2 heißt die *Nebenachse* der Ellipse und die Strecke $\overline{B_1B_2}$ die *kleine Achse* der Ellipse. Die Länge der kleinen Achse werde mit $2b$ bezeichnet; die Zahl b wird dann der *kleine Halbmesser* der Ellipse genannt.

Eine zweite Symmetrieachse der Ellipse ist diejenige Gerade, die durch den Mittelpunkt der Ellipse geht und auf ihrer großen Achse senkrecht steht. Auf dieser Symmetrieachse liegen zwei Punkte der Ellipse, die ebenfalls Scheitel der Ellipse genannt werden und die die Endpunkte ihrer kleinen Achse sind. Der Abstand jedes dieser Scheitel zum Brennpunkt ist gleich dem großen Halbmesser der Ellipse.

Wir betrachten nun den Punkt $\tilde{F}$ und die Gerade $\tilde{f}$, die zu F bzw. f bezüglich der Geraden y symmetrisch liegen, und nehmen $\tilde{F}$ als Brennpunkt und $\tilde{f}$ als Leitlinie einer Ellipse $\tilde{E}$ mit der Exzentrizität $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Wenn der Punkt M zur Ellipse E gehört, ist $|MF| : |MP| = \varepsilon$. Für den zu M bezüglich der Geraden y symmetrischen Punkt $\tilde{M}$ ist dann aber $|\tilde{M}\tilde{F}| : |\tilde{M}\tilde{P}| = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, d. h., der Punkt $\tilde{M}$ gehört zur Ellipse $\tilde{E}$. Nun gehört aber, wie wir oben gezeigt haben, der Punkt $\tilde{M} = M''$ auch zur Ellipse E. Folglich gehört jeder Punkt der Ellipse $\tilde{E}$ zur Ellipse E (und umgekehrt), d. h., die Ellipsen $\tilde{E}$ und E fallen zusammen. Dem entnehmen wir:

Der Punkt und die Gerade, welche zum Brennpunkt bzw. zur Leitlinie einer Ellipse bezüglich ihrer kleinen Achse symmetrisch liegen, können als zweiter Brennpunkt und zweite Leitlinie genommen werden, so daß sich bei derselben Exzentrizität dieselbe Ellipse ergibt.

Aus den oben erhaltenen Relationen und bewiesenen Sätzen ergeben sich noch folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} &1.\ d_0 = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, && 3.\ a = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \\ &2.\ c = d_0 - p = \frac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, && 4.\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{p\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus lassen sich weitere Relationen herleiten, die in Ellipsen behandelnden Aufgaben häufig wiederkehren, wie z. B.

$$\begin{aligned} &1.\ c : a = \varepsilon, && 3.\ c^2 = a^2 - b^2, \\ &2.\ d_0 = a : \varepsilon, && 4.\ a^2 = cd_0. \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) Vielfach auch *lineare Exzentrizität* genannt. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Insbesondere gilt: *Die Exzentrizität einer Ellipse ist gleich dem Verhältnis des Brennpunktabstandes 2c zur Länge der großen Achse; die Differenz der Quadrate der Längen der großen und der kleinen Achse einer Ellipse ist gleich dem Quadrat des Brennpunktabstandes.*

Für $\varepsilon \to 0$ geht bei festem a (Übergang von der Ellipse mit den Halbachsen a und b zum Kreis mit dem Radius a) c gegen 0, b gegen a, p gegen ∞ und d_0 gegen ∞.

2.2. Lagebeziehungen von Ellipse und Gerade. Tangenten an die Ellipse. Durch einen Ellipsenpunkt M legen wir eine Gerade g. Wenn g zur Leitlinie f parallel ist, liegt noch ein weiterer Punkt M' der Ellipse auf g, der bezüglich x zu M symmetrisch liegt. (Ist M einer der beiden Punkte A_1, A_2, so fallen M' und M zusammen.) Außer M und M' enthält g keine weiteren Ellipsenpunkte, weil für jeden von M und M' verschiedenen Punkt von g der Abstand d von der Leitlinie gleich dem von M und M' ist, während der Abstand r dieses Punktes vom Brennpunkt ein anderer ist als der von M und M', so daß folglich das Verhältnis $\frac{r}{d}$ nicht den Wert ε hat.

Wir beweisen nun, daß auch im allgemeinen Fall, d. h., wenn die Gerade g nicht zu f parallel ist, g außer M nur noch einen weiteren Punkt M' der Ellipse E enthält, der allerdings auch mit M zusammenfallen kann. Zuerst untersuchen wir den Fall, daß die Gerade g nicht durch den Brennpunkt F geht (Abb. 21). Es sei G der Schnittpunkt der beiden Geraden g und f. Wir konstruieren die Gerade g_1, die bezüglich FG zur Geraden MF symmetrisch ist. Die Geraden g und g_1 schneiden sich; denn wären g und g_1 parallel, dann wäre das Dreieck MFG gleichschenklig, d. h., es wäre $|MF| = |MG|$ (Abb. 22a), wobei $|MG| \geqq |MP|$ ist, also wäre $r:d = \frac{|MF|}{|MP|} \geqq 1$, was der Ellipsendefinition widerspricht. Mit M' bezeichnen wir den Schnittpunkt von g und g_1; offenbar gilt $d:d' = |MP|:|M'P'| = |MG|:|M'G|$. Andererseits ist die Gerade FG aber nach Konstruktion Winkelhalbierende des Außenwinkels des Dreiecks FMM' an der Ecke F, und daher ist $|MG|:|M'G| = r:r'$. Also ist $d:d' = r:r'$, und folglich gehört auch der Punkt M' zur Ellipse E. Wenn die Geraden MF und FG aufeinander senkrecht stehen (Abb. 22b), fällt g_1 mit MF und der Punkt M' mit M zusammen.

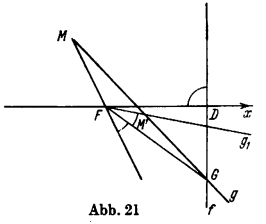


Abb. 21

Es bleibt noch zu zeigen, daß auf der Geraden g keine von M und M' verschiedenen Punkte der Ellipse liegen. Wir nehmen das Gegenteil an, d. h., daß drei Punkte M, M', M'' der Geraden g zur Ellipse E gehören. Wie man sogleich sieht, ist dann die Gerade FG Winkelhalbierende eines Außenwinkels

für jedes der drei Dreiecke FMM', $FM'M''$ und $FM''M$, und die Gerade FM liegt bezüglich der Geraden FG zu den beiden Geraden FM' und FM'' symmetrisch, was unmöglich ist.

Schließlich ist noch der oben ausgeschlossene Fall zu untersuchen, daß die Gerade g durch den Brennpunkt F der Ellipse geht. Auf g konstruieren wir den Punkt M', für den

$$|FM'| : |M'G| = |FM| : |MG| \qquad (*)$$

gilt (Abb. 23). Aus der Proportion (*) läßt sich die neue Proportion

$$r : r' = |MG| : |M'G| \quad \text{bzw.} \quad r : r' = d : d'$$

herleiten, da $|MG| : |M'G| = d : d'$; das bedeutet aber, daß M' zur Ellipse E gehört. Ganz offensichtlich kann auf der Geraden g kein weiterer Ellipsen-

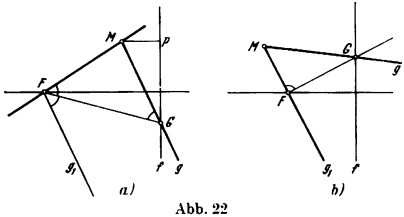


Abb. 22

punkt liegen, da es nur einen einzigen Punkt M' gibt, welcher die Bedingung (*) erfüllt.

Jede durch einen Punkt der Ellipse gehende Gerade enthält noch einen weiteren Ellipsenpunkt, der in Spezialfällen mit dem ersten zusammenfallen kann. Eine Gerade und eine Ellipse können keine drei Punkte gemeinsam haben.

Hat eine Gerade t mit der Ellipse nur *einen* Punkt M gemeinsam, so nennen wir t die *Tangente* an die Ellipse im Punkt M. Aus dem vorher Gesagten ergibt sich: *Durch jeden Punkt der Ellipse läßt sich genau eine Tangente legen, wobei der zwischen dem Berührungspunkt und der Leitlinie liegende Abschnitt $\overline{MG}$ der Tangente t vom Brennpunkt aus unter einem rechten Winkel erscheint.*

Um die Tangente t im Punkt M der Ellipse E zu konstruieren, *legen wir durch den Brennpunkt F eine Gerade, die auf der Geraden MF senkrecht steht, und bestimmen ihren Schnittpunkt G mit der Leitlinie; die Gerade MG ist dann die gesuchte Tangente t.* Aus der Konstruktion folgt, daß die Tangenten t_{A_1}, t_{A_2} an die Ellipse E in den Haupt-

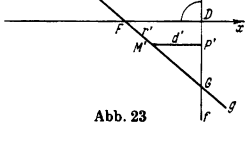


Abb. 23

scheiteln A_1 und A_2 zur Nebenachse der Ellipse parallel sind. Die Tangenten t_{B_1}, t_{B_2} in den Nebenscheiteln B_1 und B_2 sind dagegen zur Hauptachse parallel; zum Beweis genügt es, die Formeln (1) heranzuziehen.

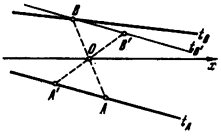


Abb. 24

Jede durch den Mittelpunkt O gehende *Sehne* der Ellipse nennen wir einen *Durchmesser* der Ellipse. Wir wollen nun zeigen, daß die Tangenten t_A und t_B in den Endpunkten A und B eines Durchmessers $\overline{AB}$ einer Ellipse parallel sind. Wir nehmen an, die beiden Tangenten wären nicht parallel (Abb. 24). Dann legen wir durch B die Parallele $t_{B'}$ zur Geraden t_A. Die Gerade $t_{B'}$ schneidet die Ellipse in einem Punkt B', der bezüglich des Mittelpunktes O zu dem auf der Ellipse und auf der Geraden t_A liegenden Punkt A' symmetrisch ist. In diesem Fall ist aber t_A keine Tangente. Also gilt der Satz:

Die Tangenten an die Ellipse in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel.

2.3. Eigenschaften der Brennpunkte der Ellipse. Die Verbindungsstrecke eines Brennpunktes mit einem Ellipsenpunkt heißt ein *Brennstrahl*. Offenbar gibt es zu jedem Ellipsenpunkt zwei Brennstrahlen. Es seien dann $r = |MF|$ und $\tilde{r} = |M\tilde{F}|$ die Längen der beiden Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes M; mit d und $\tilde{d}$ bezeichnen wir die Abstände von M zu den Leitlinien (Abb. 25). Nach Definition gilt dann

$$r + \tilde{r} = (d + \tilde{d})\,\varepsilon = 2d_0\varepsilon.$$

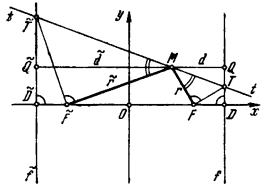


Abb. 25

Unter Verwendung der ersten und dritten Beziehung aus (1) erhalten wir

$$r + \tilde{r} = \frac{2p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = 2a.$$

Die Summe der Längen der Brennstrahlen ist für jeden Ellipsenpunkt gleich der Länge der großen Achse.

Es ist klar, daß diese Eigenschaft (vgl. 1.3.) auch für den Kreis gültig bleibt, wenn wir annehmen, daß bei einem Kreis beide Brennpunkte in seinem Mittelpunkt zusammenfallen.

Es seien T und $\tilde{T}$ die Schnittpunkte der Tangente im Ellipsenpunkt M mit den Leitlinien f und $\tilde{f}$. Wir verbinden T und $\tilde{T}$ mit dem jeweiligen Brennpunkt F bzw. $\tilde{F}$ und legen durch den Punkt M die zur Achse x parallele Gerade, welche die Leitlinien in den Punkten Q und $\tilde{Q}$ schneide (Abb. 25). Offenbar gilt

$$d : \tilde{d} = |MT| : |M\tilde{T}|, \quad d : \tilde{d} = r : \tilde{r},$$

woraus folgt, daß in den rechtwinkligen Dreiecken MTF und $M\tilde{T}\tilde{F}$ die Beziehung $r : \tilde{r} = |MT| : |M\tilde{T}|$ erfüllt ist. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke sind daher ähnlich, und es ist $\sphericalangle TMF = \sphericalangle \tilde{T}M\tilde{F}$, d. h., *die Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes schließen mit der Tangente in diesem Punkt an die Ellipse gleiche Winkel ein.*

Diese Eigenschaft der Tangente kann ihrer Konstruktion zugrunde gelegt werden: Die Tangente in einem Punkt M an die Ellipse ist die Winkelhalbierende des Außenwinkels des Dreiecks $MF\tilde{F}$ in der Ecke M. Zum anderen läßt sich aus dieser Eigenschaft der Tangente eine bemerkenswerte optische Eigenschaft eines ellipsenförmigen Hohlspiegels erklären: *Wenn sich in einem Brennpunkt einer Ellipse eine Lichtquelle befindet, sammeln sich die davon ausgehenden Lichtstrahlen nach der Reflektion am Spiegel im anderen Brennpunkt* (Abb. 26).

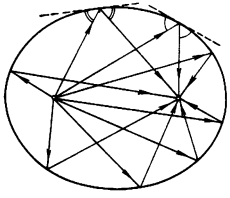


Abb. 26

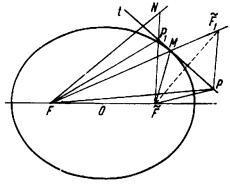


Abb. 27

Die beiden Brennpunkte der Ellipse liegen bezüglich jeder Tangente in derselben Halbebene; denn die Tangente im Punkt M halbiert den Außenwinkel des Dreiecks $FM\tilde{F}$ an der Ecke M. Nun sei N ein Punkt in derjenigen Halbebene bezüglich der Tangente t im Punkt M, in der nicht die Brennpunkte liegen, und P sei ein Punkt der Tangente; mit $\tilde{F}_1$ wollen wir den Punkt bezeichnen, der bezüglich der Tangente t zum Brennpunkt $\tilde{F}$ symmetrisch liegt (Abb. 27). Der Punkt $\tilde{F}_1$ liegt auf der Verlängerung der Strecke $\overline{FM}$, und es ist $|F\tilde{F}_1| = 2a$; daher ist $|FP| + |\tilde{F}P| = |FP| + |P\tilde{F}_1| \geqq 2a$, wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $P \equiv M$ ist. Schneidet die Gerade $N\tilde{F}$ die Tangente t in einem Punkt P_1, so gilt nach dem Bewiesenen $|FP_1| + |\tilde{F}P_1| \geqq 2a$; andererseits ist $|FN| + |NP_1| > |FP_1|$. Durch gliedweise Addition der beiden letzten Ungleichungen finden wir $|FN| + |\tilde{F}N| > 2a$, d. h., der Punkt N kann kein Ellipsenpunkt sein. Es gilt also der Satz:

Die Punkte einer Ellipse liegen bezüglich jeder ihrer Tangenten sämtlich in derselben Halbebene, d. h., die Ellipse ist eine konvexe Figur.

Eine durch den Brennpunkt F gehende Sehne $\overline{MN}$ der Ellipse wird eine *Brennpunktsehne* genannt. Wir konstruieren an eine Ellipse in den Endpunk-

ten M und N einer Brennpunktsehne die Tangenten; es seien M_0 bzw. N_0 deren Schnittpunkte mit der Leitlinie (Abb. 28). Wie wir bewiesen haben, stehen die Geraden M_0F und N_0F auf MN senkrecht, so daß die Punkte M_0 und N_0 zusammenfallen; es gilt also:

Die durch die Endpunkte einer Brennpunktsehne an eine Ellipse gelegten Tangenten schneiden sich auf der Leitlinie (oder sind zu ihr parallel).

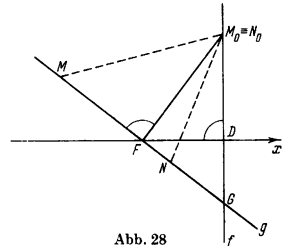


Abb. 28

2.4. Mit der Ellipse verbundene Kreise. Zwei Sätze von Poncelet. Spiegeln wir einen Brennpunkt der Ellipse an allen ihren Tangenten, so erhalten wir die Menge aller der Punkte, deren Abstand zum anderen Brennpunkt konstant gleich $2a$ ist, d. h., diese Punkte bilden den Kreis um den zweiten Brennpunkt mit dem Radius $2a$ (Abb. 29). Dieser Kreis wird ein *Richtkreis* der Ellipse genannt. Offenbar besitzt jede Ellipse zwei Richtkreise.

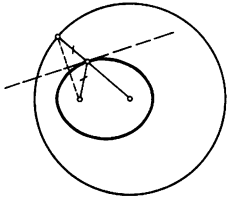


Abb. 29

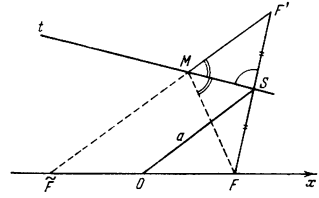


Abb. 30

Fällen wir andererseits vom Brennpunkt F auf eine Tangente t an die Ellipse das Lot FS und verbinden wir den Punkt S mit dem Mittelpunkt O der Ellipse (Abb. 30), so ist SO eine Mittellinie in dem Dreieck $F\tilde{F}F'$, das von den beiden Brennpunkten F, $\tilde{F}$ und dem bezüglich t zu F symmetrisch gelegenen Punkt F' gebildet wird. Demzufolge ist die Strecke $\overline{OS}$ halb so lang wie die Seite $\overline{\tilde{F}F'}$, d. h. $|OS| = a$. Der Punkt S liegt daher auf dem Kreis um O mit dem Radius a; dieser Kreis heißt *Scheitelkreis* der Ellipse.

Die Fußpunkte der von einem Brennpunkt der Ellipse auf die Tangenten gefällten Lote bilden den Kreis um den Ellipsenmittelpunkt O, dessen Radius gleich dem großen Halbmesser der Ellipse ist.

Wir ziehen jetzt durch einen Ellipsenpunkt M die Tangente t. Von den Brennpunkten fällen wir die Lote $|FH| = h$, $|\tilde{F}\tilde{H}| = \tilde{h}$ auf die Tangente (Abb. 31). Der Abstand $|OP| = d$ des Ellipsenmittelpunktes von der Tangente t ist gleich $\frac{1}{2}(h + \tilde{h})$. Da H und $\tilde{H}$ auf dem Scheitelkreis liegen, ist $|OH| = |O\tilde{H}| = a$. Dem rechtwinkligen Dreieck OPH entnehmen wir die Beziehung $a^2 = d^2 + \frac{1}{4}|H\tilde{H}|^2$. Nun ist aber $|H\tilde{H}|^2 = 4c^2 - (h - \tilde{h})^2$; daher ist $a^2 = \frac{1}{4}(h + \tilde{h})^2 + c^2 - \frac{1}{4}(h - \tilde{h})^2$. Hieraus folgt $h\tilde{h} = b^2$ oder:

Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente an die Ellipse ist konstant und gleich dem Quadrat des kleinen Halbmessers.

Ist die Gerade g keine Tangente an die Ellipse E und liegen beide Brennpunkte von E in derselben Halbebene bezüglich g, so ist das aus den Abständen der Brennpunkte von der Geraden g gebildete Produkt von b^2 verschieden

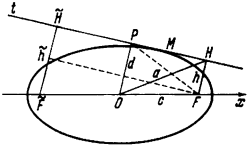


Abb. 31

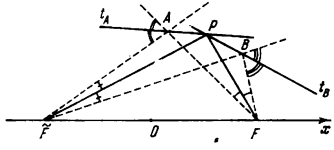


Abb. 32

und zwar kleiner als b^2 für Geraden, die E schneiden, und größer als b^2 für Geraden, die E nicht schneiden. Das bedeutet: *Nach Wahl von zwei festen Punkten F und $\tilde{F}$ bildet die Gesamtheit aller derjenigen Geraden, bezüglich derer die beiden Punkte F, $\tilde{F}$ in derselben Halbebene liegen und für die das Produkt der Abstände von den beiden Punkten konstant ist, die Menge aller Tangenten an eine gewisse Ellipse.*

Wir beweisen jetzt zwei interessante Sätze, die von dem französischen Mathematiker V. Poncelet (1788–1867) stammen.

a) Wir ziehen zwei Brennstrahlen $\overline{FA}$ und $\overline{FB}$ an die Ellipse und konstruieren die Winkelhalbierende des Winkels AFB (Abb. 32). Wir wollen zeigen, daß diese Winkelhalbierende durch den Schnittpunkt P der in A und B an die Ellipse gelegten Tangenten geht. Dazu verbinden wir die Punkte A und B mit dem zweiten Brennpunkt $\tilde{F}$. In dem (sich überschneidenden) Viereck $FA\tilde{F}B$ ist die Summe der Längen eines Paares benachbarter Seiten gleich der Summe der Längen des anderen Seitenpaares: $|FA| + |\tilde{F}A| = |FB| + |\tilde{F}B|$ $(= 2a)$. Zu einem derartigen Viereck existiert stets ein Kreis, der dessen Seiten

bzw. deren Verlängerungen berührt.[1]) Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Außenwinkel in den Ecken mit Seitenpaaren von gleicher Summe mit den Winkelhalbierenden der Innenwinkel in den beiden anderen Ecken. Nun sind aber die Tangenten in den Punkten A und B an die Ellipse gerade die Winkelhalbierenden der Außenwinkel des Vierecks, und sie schneiden sich daher im Mittelpunkt P des Kreises. Die Geraden FP und $\tilde{F}P$ sind somit Winkelhalbierende der entsprechenden Winkel zwischen den Brennstrahlen der Punkte A und B. Wir erhalten so den Satz:

Zieht man von einem Brennpunkt zu zwei Ellipsenpunkten die Brennstrahlen, so geht die Winkelhalbierende des von diesen beiden Strahlen eingeschlossenen Winkels durch den Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten an die Ellipse.

b) Wir beweisen jetzt, daß $\sphericalangle APF = \sphericalangle BP\tilde{F}$ ist. Dazu spiegeln wir den Brennpunkt F an der Tangente PA und den Brennpunkt $\tilde{F}$ an der Tangente PB; die gefundenen Punkte F_1 und $\tilde{F}_1$ verbinden wir mit $\tilde{F}$ bzw. F (Abb. 33).

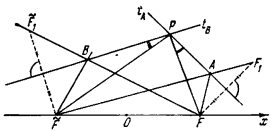


Abb. 33

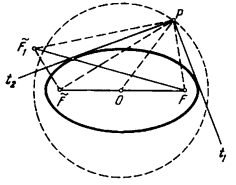


Abb. 34

Die Dreiecke $F_1\tilde{F}P$ und $F\tilde{F}_1P$ sind kongruent (sie haben drei gleiche Seiten), und daher ist $\sphericalangle F_1P\tilde{F} = \sphericalangle FP\tilde{F}_1$. Ziehen wir von diesen Winkeln den beiden gemeinsamen Winkel $\sphericalangle FP\tilde{F}$ ab und halbieren die Differenz, so erhalten wir das gesuchte Ergebnis.

Zwei von den Brennpunkten zu zwei verschiedenen Ellipsenpunkten gezogene Brennstrahlen erscheinen vom Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten aus unter dem gleichen Winkel.

Abschließend stellen wir uns die Aufgabe, von einem Punkt P aus zwei *zueinander senkrechte* Tangenten t_1, t_2 an die Ellipse zu legen (Abb. 34). Spiegeln wir den Brennpunkt $\tilde{F}$ an der Geraden t_2 und verbinden wir den erhaltenen Punkt $\tilde{F}_1$ mit F, so ist offenbar $|F\tilde{F}_1| = 2a$, und der Winkel $\sphericalangle FP\tilde{F}_1$ ist ein rechter Winkel (dies folgt in Verbindung mit dem zweiten Satz von PONCELET aus dem Umstand, daß t_1 und t_2 einen rechten Winkel einschließen sollen);

[1]) Vgl. etwa J. HADAMARD, Géométrie élémentaire, Teil 1, Lösung der Aufgabe 87.

daher ist $|PF|^2 + |P\tilde{F}_1|^2 = 4a^2$. Nun ist aber $|P\tilde{F}_1| = |P\tilde{F}|$; also ist auch $|PF|^2 + |P\tilde{F}|^2 = 4a^2$. Da jedoch PO Mittellinie im Dreieck $PF\tilde{F}$ ist, ergibt sich $|PO|^2 = \frac{1}{2}(|PF|^2 + |P\tilde{F}|^2) - c^2$. Unter Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichung erhalten wir $|PO|^2 = 2a^2 - c^2$ oder $|PO|^2 = (a^2 - c^2) + a^2 = a^2 + b^2$, d. h.:

Die Scheitel der rechten Winkel, deren Schenkel eine Ellipse berühren, liegen auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$ um den Mittelpunkt der Ellipse.

2.5. Die Ellipse als Bild des Kreises bei einer Stauchung. Der Abstand eines Ellipsenpunktes M von der Hauptachse x bzw. von der Nebenachse y sei $|MM_1| = y$ bzw. $|MM_2| = x$ (Abb. 35). Aus Symmetriegründen können wir uns auf die Betrachtung derjenigen Ellipsenpunkte beschränken, welche in einem der vier von den beiden Achsen x und y gebildeten Quadranten liegen. Aus den Beziehungen (2) von S. 587 ergibt sich

$$r^2 = |FM|^2 = (x - c)^2 + y^2,$$

$$d^2 = |MP|^2 = \left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right)^2,$$

$$r^2 = \varepsilon^2 d^2.$$

Nach Elimination von r und d erhalten wir

$$(x - c)^2 + y^2 = \varepsilon^2\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right)^2.$$

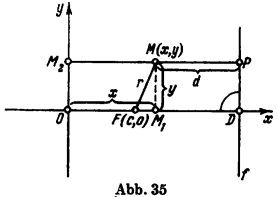


Abb. 35

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (2) gelangen wir nach Multiplikation dieser Gleichung mit a schließlich auf den Ausdruck

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Wenn die Ellipsenachsen als Koordinatenachsen eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems gewählt werden, erfüllen die Koordinaten jedes Ellipsenpunktes die Gleichung (3), und umgekehrt stellt jede Lösung der Gleichung (3) die Koordinaten eines zur Ellipse gehörenden Punktes dar. Gleichung (3) ist die *Gleichung der auf ihre Achsen als Koordinatenachsen bezogenen Ellipse*. Man bezeichnet (3) auch als *Mittelpunktsgleichung der Ellipse*.

Wir betrachten jetzt eine Gerade x, die wir als *Stauchungsachse* bezeichnen wollen, und geben eine Zahl $k > 0$ als *Stauchungsverhältnis* vor. Jedem Punkt M der Ebene ordnen wir denjenigen Punkt M_1 auf der Geraden $MP \perp x$

zu, dessen Abstand h_1 von der Stauchungsachse x mit dem Abstand h des Punktes M von dieser Achse durch die Gleichung $h_1 = kh$ verknüpft ist. Der Übergang von M zu M_1 wird als *Stauchung* oder *Kontraktion auf die Gerade x mit dem Stauchungsverhältnis k* bezeichnet (vgl. S. 50). Für $k < 1$ handelt es sich bei dieser Abbildung tatsächlich um eine Stauchung, für $k > 1$ um eine Streckung.

Wir wollen jetzt den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ der Stauchung auf die Gerade x mit dem Verhältnis $k = \frac{b}{a} < 1$ unterwerfen. Einem beliebigen Punkt $M(x, y)$ des Kreises wird dabei derjenige Punkt $M_1(X, Y)$ zugeordnet, für den $x = X$, $y = \frac{a}{b} Y$ gilt (Abb. 36). Da nun die Koordinaten (x, y) von M die Kreisgleichung erfüllen, ist

$$X^2 + \frac{a^2}{b^2} Y^2 = a^2$$

oder

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Wir sehen also, daß die Koordinaten (X, Y) des Punktes M_1 die Ellipsengleichung erfüllen, die Menge der Punkte M_1 also eine Ellipse darstellt. Mit anderen Worten:

Die bei der Stauchung eines Kreises auf einen seiner Durchmesser entstehende Kurve ist eine Ellipse, für die der gegebene Kreis Scheitelkreis ist.

Diese Eigenschaft der Ellipse kann benutzt werden, um die Ellipse in einfacher Weise punktweise aus dem Kreis zu konstruieren, aus dem sie durch Stauchung hervorgeht. Dazu fällen wir von einem Punkt M des Kreises mit dem Radius a das Lot auf einen gegebenen Durchmesser und bestimmen darauf den Punkt M_1, für den $h_1 : h = b : a$ gilt. Der Punkt M_1 gehört dann zur Ellipse mit den Halbmessern a und b.

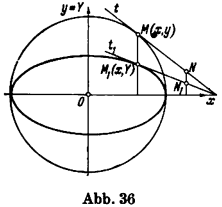


Abb. 36

Bei der Stauchung auf eine Gerade gehen drei auf einer Geraden liegende Punkte in drei Punkte mit derselben Eigenschaft über, d. h., bei einer derartigen Abbildung ist das Bild einer Geraden stets wieder eine Gerade (vgl. S. 56). Aus dieser Eigenschaft und der Tatsache, daß die Stauchung auf eine Gerade eine umkehrbar eindeutige Abbildung ist, folgt, daß jede Tangente an den Kreis bei der Stauchung in eine Tangente an die Ellipse übergeht. Wenn wir also von einem Punkt N_1 eine Tangente an die Ellipse legen wollen, verfahren wir folgendermaßen: Wir konstruieren den Punkt N, der sich aus N_1 durch Stauchung bezüglich der Achse x (der Hauptachse der Ellipse) mit dem Verhältnis $k_1 = \frac{1}{k} = \frac{a}{b}$ ergibt, zeichnen danach vom Punkt N aus an den Scheitelkreis

die Tangente t und stauchen diese schließlich im Verhältnis k (Abb. 36). Die dabei erhaltene Gerade t_1 ist Tangente an die Ellipse. Insbesondere können also von einem beliebigen Punkt N_1 aus höchstens *zwei* Tangenten an eine Ellipse gelegt werden (denn mehr als zwei Tangenten können von N aus nicht an den Scheitelkreis gezogen werden). Die außerhalb des Kreises liegenden Punkte und nur diese gehen bei der Stauchung in die außerhalb der Ellipse gelegenen Punkte über. Somit können wir sagen:

Von jedem außerhalb einer Ellipse gelegenen Punkt aus können genau zwei Tangenten an die Ellipse gezogen werden.

Bei der Stauchung auf eine Gerade entspricht dem Schnittpunkt zweier Geraden der Schnittpunkt der Bilder dieser beiden Geraden, und folglich werden parallele Geraden in parallele Geraden abgebildet. Außerdem ist das Verhältnis zweier paralleler Strecken gleich dem Verhältnis der Bilder dieser Strecken; insbesondere gehen bei der Stauchung auf eine Gerade eine Strecke und ihr Mittelpunkt in eine Strecke und deren Mittelpunkt über (vgl. S. 56 und 71). Nun liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kreises auf einer Geraden, nämlich auf einem Durchmesser. Also gilt der folgende Satz:

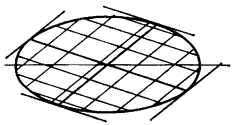


Abb. 37

Bei einer Ellipse liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einem Durchmesser der Ellipse (Abb. 37), *und dabei sind die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers zu den Sehnen parallel, die von dem Durchmesser halbiert werden.*

Ziehen wir in einem Kreis die zu einem Durchmesser parallelen Sehnen, so liegen die Mittelpunkte dieser Sehnen auf dem zum ersten senkrechten Durchmesser, während die Mittelpunkte der zum zweiten Durchmesser parallelen Sehnen auf dem ersten Durchmesser liegen. Bei der von uns betrachteten Stauchung werden nun zwei zueinander senkrechte Kreisdurchmesser in zwei Durchmesser der Ellipse abgebildet, die *konjugiert* genannt werden. Die zu den Richtungen konjugierter Durchmesser parallelen Richtungen heißen *konjugierte Richtungen.*

Werden die zu einem Durchmesser einer Ellipse parallelen Sehnen von einem anderen Durchmesser halbiert, so halbiert der erste Durchmesser auch die zum zweiten Durchmesser parallelen Sehnen. Je zwei derartige Durchmesser sind konjugierte Durchmesser der Ellipse. Zu jedem Durchmesser gibt es einen eindeutig bestimmten konjugierten Durchmesser. Die Hauptdurchmesser (*Achsen*) *der Ellipse sind zugleich rechtwinklige und konjugierte Durchmesser.*

In einen Kreis zeichnen wir zwei aufeinander senkrecht stehende Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ ein. Bei einer Stauchung gehen sie in zwei konjugierte Halbmesser $\overline{OA_1}$ und $\overline{OB_1}$ der Ellipse über (Abb. 38). Setzen wir $|OA_1| = a_1$ und $|OB_1| = b_1$,

so ist offenbar

$$a_1^2 + b_1^2 = |OA_0|^2 + |OB_0|^2 + k^2(|A_0A|^2 + |B_0B|^2),$$

wobei A_0 und B_0 die Projektionen der Punkte A und B auf die Stauchungsachse bezeichnen und $k = \frac{b}{a}$ das Stauchungsverhältnis ist. Aus der Kongruenz der Dreiecke OAA_0, OBB_0 folgt aber $|OA_0| = |BB_0|$, $|OB_0| = |AA_0|$. Daher ist

$$a_1^2 + b_1^2 = |OA_0|^2 + |AA_0|^2 + k^2(|A_0A|^2 + |OA_0|^2) = (k^2 + 1)\,a^2,$$

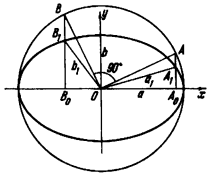


Abb. 38

woraus sich nach Einsetzen des Wertes für k

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

ergibt. Damit sind wir zu dem sogenannten *Ersten Satz des* APOLLONIOS gelangt:

Die Summe der Quadrate der Längen von konjugierten Halbmessern einer Ellipse ist eine Konstante: Sie ist gleich der Summe der Quadrate der Halbmesser der Ellipse.

Da sich ferner bei einer Stauchung auf eine Gerade der Flächeninhalt einer jeden Figur mit dem Stauchungsverhältnis multipliziert[1]), ist jedes der Ellipse umbeschriebene Parallelogramm, dessen Seiten konjugierte Richtungen haben, das Bild eines dem Scheitelkreis umbeschriebenen Quadrates mit der Seitenlänge $2a$ (Abb. 39). Der Flächeninhalt eines derartigen Parallelogramms ist daher gleich $4a^2\frac{b}{a} = 4ab$. Dies ist der Inhalt des *Zweiten Satzes von* APOLLONIOS:

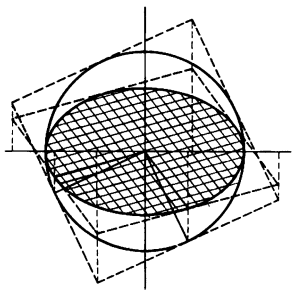


Abb. 39

Der Flächeninhalt der der Ellipse umbeschriebenen Parallelogramme mit Seiten in konjugierten Richtungen ist konstant gleich $4ab$.

Analoge Überlegungen führen zu dem Ergebnis, daß *der Flächeninhalt der Ellipse gleich πab ist.*

Es seien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ zwei zueinander senkrechte Ellipsenhalbmesser (Abb. 40), wobei $|OA| = m$ und $|OB| = n$ sei. Von den Punkten A und B fällen wir die Lote $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ auf die große Achse der Ellipse. Offenbar ist

[1]) Dies folgt aus der Tatsache, daß die genannte Eigenschaft der Stauchung für jedes Netz von kleinen Quadraten gilt, deren Seiten der Stauchungsachse parallel sind.

dann das Dreieck OAA_1 dem Dreieck OBB_1 ähnlich. Ist also $|OB_1| = s$, so ist demzufolge $|AA_1| = \frac{m}{n}s$. Nun stauchen wir die Ellipse auf ihre große Achse im Verhältnis $\frac{1}{k} = \frac{a}{b} > 1$ (in Wirklichkeit ist diese „Stauchung" eine Streckung, da ja $\frac{1}{k} > 1$ ist). Die Punkte A_0 und B_0, in die A und B bei der Stauchung übergehen, liegen auf dem der Ellipse umbeschriebenen Kreis vom Radius a (Scheitelkreis). Hieraus folgt

$$(n^2 - s^2)\frac{a^2}{b^2} + s^2 = a^2, \quad \frac{m^2}{n^2}s^2\frac{a^2}{b^2} + m^2 - \frac{m^2}{n^2}s^2 = a^2.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung seitenweise mit $\frac{m^2}{n^2}$ und fügen sie dann zur zweiten hinzu, so erhalten wir

$$\frac{a^2}{b^2}m^2 + m^2 = a^2\left(\frac{m^2}{n^2} + 1\right).$$

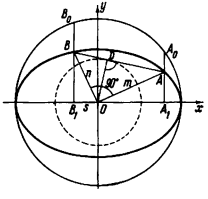


Abb. 40

Hieraus ergibt sich

$$a^2b^2(m^2 + n^2) = m^2n^2(a^2 + b^2)$$

und daraus schließlich

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Damit haben wir folgendes gefunden: *Die Summe der reziproken Quadrate der Längen von zwei zueinander senkrechten Halbmessern ist eine Konstante.*

Wir fällen nun (bei Verwendung der oben eingeführten Bezeichnungen) vom Mittelpunkt der Ellipse das Lot $\overline{OD}$ auf die Sehne $\overline{AB}$; dann ist

$$\frac{1}{|OD|^2} = \frac{|OA|^2 + |OB|^2}{|OA|^2 \cdot |OB|^2} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2},$$

d. h.

$$\frac{1}{|OD|^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}.$$

Die vom Mittelpunkt einer Ellipse unter einem rechten Winkel erscheinenden Sehnen der Ellipse berühren den Kreis um den Mittelpunkt O vom Radius

$$R = \sqrt{1\Big/\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{1\Big/\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Wir stellen uns nun vor, daß sich eine Strecke $\overline{AB}$ von der konstanten Länge a mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels

xOy bewege. Was für eine Kurve beschreibt dabei ein beliebiger Punkt M der Strecke $\overline{AB}$? Zur Beantwortung dieser Frage ziehen wir durch den Punkt O eine zu AB parallele Gerade. Sie möge das von M auf OA gefällte Lot im Punkt M_1 schneiden (Abb. 41). Offenbar ist $|OM_1| = |MB|$, d. h., der Punkt M_1 beschreibt bei der Bewegung von M einen Kreisbogen vom Radius $|BM|$ um den Mittelpunkt O. Es sei ferner M_0 der Schnittpunkt der beiden Geraden OA und MM_1. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OM_1M_0 und M_0MA folgt $|OM_1| : |MA| = |M_0M_1| : |M_0M|$ bzw. $|BM| : |MA| = |M_0M_1'| : |M_0M|$, wobei M_1' den bezüglich OA zu M_1 symmetrischen Punkt bezeichnet. Mit M_1 beschreibt offenbar auch M_1' einen Kreisbogen, und damit ist klar, daß der Punkt M einen Ellipsenbogen beschreibt. (Wir weisen drauf hin, daß der Punkt M auch dann einen Ellipsenbogen beschreibt, wenn er auf der *Verlängerung* der Strecke $\overline{AB}$ liegt.) Wir haben also gefunden:

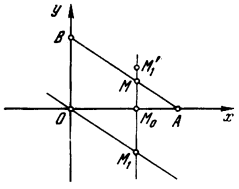


Abb. 41

Bewegen sich die Endpunkte einer Strecke $\overline{AB}$ von konstanter Länge auf den Schenkeln eines rechten Winkels, so beschreibt jeder Punkt M dieser Strecke (oder ihrer Verlängerung) einen Ellipsenbogen mit Halbmessern $|MA|$ bzw. $|MB|$. Insbesondere gilt: Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ beschreibt einen Kreis vom Radius $\frac{1}{2}|AB|$.

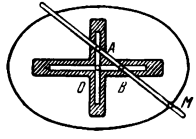


Abb. 42

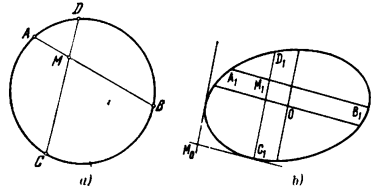


Abb. 43

Auf dieser Eigenschaft der Ellipse beruht die Konstruktion eines Zeichengerätes für Ellipsen, des *Ellipsenzirkels* (Abb. 42).

Wir wenden uns jetzt wieder dem Kreis zu, aus dem die Ellipse durch Stauchung auf eine Gerade hervorgeht. In diesem Kreis ziehen wir zwei sich in einem Punkt M schneidende Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ (Abb. 43a). Nach einem bekannten Satz ist

$$(|MA| \cdot |MB|) : (|MC| \cdot |MD|) = 1.$$

Durch die Stauchung gehen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in zwei sich in einem Punkt M_1 schneidende Sehnen $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ der Ellipse über (Abb. 43b), und dabei ist

$$|M_1A_1| = l_1 \cdot |MA|, \quad |M_1B_1| = l_1 \cdot |MB|,$$
$$|M_1C_1| = l_2 \cdot |MC|, \quad |M_1D_1| = l_2 \cdot |MD|,$$

wobei l_1 und l_2 durch die Richtung der Sehnen und das Stauchungsverhältnis bestimmte Proportionalitätsfaktoren sind. Folglich ist

$$(|M_1A_1| \cdot |M_1B_1|) : (|M_1C_1| \cdot |M_1D_1|) = l_1^2 : l_2^2.$$

Halten wir die Richtungen der Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ fest, ändern aber dabei die Lage des Punktes M, so bleiben auch die Richtungen der Sehnen $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ ungeändert, und nur die Lage des Punktes M_1 wird eine andere. Dann bleiben aber die Faktoren l_1, l_2 ebenfalls ungeändert, und daraus folgt, daß das Verhältnis der Produkte aus den Längen zweier Sehnen nicht von ihrem Schnittpunkt, sondern nur von ihren Richtungen abhängt:

Schneiden sich zwei Sehnen $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ einer Ellipse (oder deren Verlängerungen) in einem Punkt M_1, so hängt das Verhältnis

$$(|M_1A_1| \cdot |M_1B_1|) : (|M_1C_1| \cdot |M_1D_1|)$$

nur von den Richtungen der Sehnen und nicht von der Wahl des Punktes M_1 ab.

Betrachten wir speziell die von einem Punkt M_0 an die Ellipse gelegten Tangenten und die zu ihnen parallelen Durchmesser der Ellipse, so finden wir:

Das Verhältnis der Abstände des Punktes M_0 von den Berührungspunkten der Tangenten ist gleich dem Verhältnis der Längen der zu den Tangenten parallelen Durchmesser.

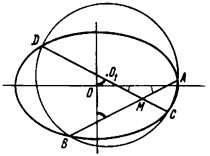


Abb. 44

Dieser Satz, der von dem berühmten I. Newton stammt, kann zur Herleitung gewisser Eigenschaften von vier auf einem Kreis gelegenen Ellipsenpunkten A, B, C, D benutzt werden (Abb. 44). Wenn sich nämlich die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ im Punkt M schneiden, ist wegen einer bekannten Eigenschaft des Kreises $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$. Daher müssen die zu den Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallelen Ellipsendurchmesser gleiche Länge haben. Wie jedoch Symmetrieüberlegungen zeigen, liegen gleich lange Durchmesser stets symmetrisch zu den Achsen der Ellipse. Wenn also die vier Punkte A, B, C, D einer Ellipse auf einem Kreis liegen, bilden die Sehnen bzw. deren Verlängerungen mit jeder der beiden Ellipsenachsen entgegengesetzt liegende gleiche Winkel. Wie man leicht sieht, gilt hiervon auch die Umkehrung. Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Vier Ellipsenpunkte A, B, C, D liegen genau dann auf einem Kreis, wenn die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit den Ellipsenachsen entgegengesetzt liegende gleiche Winkel einschließen.

Wir nehmen nun an, ein Kreis S *berühre* die Ellipse E im Punkt A und schneide sie in zwei anderen Punkten C und D. Den Punkt A halten wir fest und nähern ihm den Punkt C. Der Kreis wird dabei verschiedene Lagen durchlaufen und schließlich, wenn C mit A zusammenfällt, eine Grenzlage einnehmen; D hat dann eine gewisse Grenzlage D_0 eingenommen. Der so gewonnene Kreis heißt der *Schmiegkreis* der Ellipse im Punkt A; er berührt die Ellipse in dem einen Punkt A und schneidet sie daneben *nur in einem Punkt* D_0 (Abb. 45).

Von den „vier" der Ellipse und dem Schmiegkreis gemeinsamen Punkten fallen drei mit dem Punkt A zusammen ($A = B = C$). Dem vorhergehenden Satz zufolge müssen die Geraden AB und CD_0 entgegengesetzt liegende gleiche Winkel mit den Ellipsenachsen

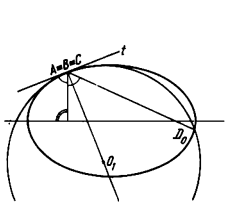


Abb. 45

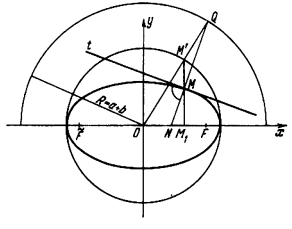


Abb. 46

bilden. Nun ist im vorliegenden Fall aus der Geraden AB die Tangente t im Punkt A der Ellipse geworden. Der Neigungswinkel der Geraden $CD_0 = AD_0$ gegen die Ellipsenachsen ist folglich gleich dem der Tangente t. Das ermöglicht es, den Punkt D_0 und daran anschließend den Schmiegkreis mühelos zu konstruieren. Der Schmiegkreis der Ellipse im Punkt A geht durch den Punkt D_0 und berührt die Gerade t in A.

Die angegebene Konstruktion läßt sich nicht anwenden, wenn der Punkt A mit einem Scheitel der Ellipse zusammenfällt, da in diesem Fall auch der Punkt D_0 mit A übereinstimmt. Um den Schmiegkreis an die Ellipse in einem Scheitel, etwa im Scheitel B auf der Nebenachse, konstruieren zu können, bedarf es der Kenntnis einiger Eigenschaften der Normalen zur Ellipse. Als *Normale* in einem Punkt M einer Ellipse wird diejenige Gerade durch M bezeichnet, die auf der Tangente in diesem Punkt an die Ellipse senkrecht steht.

Die Normale im Punkt M der Ellipse schneide die Hauptachse im Punkt N (Abb. 46). Wir wollen zeigen, daß das Verhältnis $|ON| : |NM_1|$ einen konstanten Wert hat, wenn wir mit M_1 die Projektion von M auf die Hauptachse bezeichnen. An Hand des Dreiecks $\bar{F}MF$ mit der Höhe MM_1 und der Winkelhalbierenden MN ergibt sich

$$|M_1F| = \pm\frac{1}{4c}(r^2 + 4c^2 - \bar{r}^2) = \pm\frac{1}{4c}[4c^2 - (\bar{r} + r)(\bar{r} - r)]$$

$$= \pm\frac{1}{4c}[4c^2 - 2a(2a - 2r)] = \pm\frac{1}{c}(ar - a^2 + c^2) = \pm\frac{1}{c}(ar - b^2),$$

$$|NF| = \frac{2cr}{r + \bar{r}} = \frac{rc}{a}, \quad |OF| = c.$$

Folglich ist

$$|ON| : |NM_1| = (c - |NF|) : (|NF| \mp |M_1F|)$$
$$= \left(c - \frac{rc}{a}\right) : \left(\frac{rc}{a} - \frac{ar - b^2}{c}\right) = c^2 : b^2.$$

Die Normale in einem Punkt der Ellipse teilt die zwischen dem Mittelpunkt und der Projektion des Punktes auf die große Achse liegende Strecke in dem konstanten Verhältnis $c^2 : b^2$.

Durch eine Streckung der Ellipse werde dem Punkt M der Punkt M' auf dem der Ellipse umbeschriebenen Kreis zugeordnet; die Normale NM im Punkt M schneide die Verlängerung des Radius $\overline{OM'}$ in einem Punkt Q. Wir wollen zeigen, daß $|OQ| = a + b$ ist. Wenden wir den Satz von MENELAOS[1]) auf das Dreieck $OM'M_1$ und die Sekante QN an, so finden wir

$$\frac{|OQ|}{|QM'|} \cdot \frac{|M'M|}{|MM_1|} \cdot \frac{|M_1N|}{|NO|} = -1;$$

dabei ist

$$\frac{|M'N|}{|MM_1|} = \frac{|M'M_1| - |MM_1|}{|MM_1|} = \frac{|M'M_1|}{|MM_1|} - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}.$$

Nach entsprechender Vereinfachung erhalten wir schließlich $|OQ| = a + b$.

Entspricht bei einer Stauchung dem Punkt M' auf dem der Ellipse umbeschriebenen Kreis der Punkt M auf der Ellipse, so schneiden sich die Normalen in diesen Punkten zu den betreffenden Kurven in einem Punkt, der auf dem Kreis mit dem Radius $a + b$ um den Ellipsenmittelpunkt liegt.

Nun möge die Normale im Punkt M der Ellipse die kleine Achse im Punkt S schneiden. Wir bestimmen zunächst die Grenzlage S_0 des Punktes S, wenn sich M längs der Ellipse dem Scheitel B auf der kleinen Achse nähert. Dazu verlängern wir die Normale bis zu ihrem Schnittpunkt Q mit dem Kreis vom Radius $a + b$ um den Ellipsenmittelpunkt O. Es sei ferner M' der Schnittpunkt der Geraden OQ mit dem der Ellipse umbeschriebenen Kreis. Dann gilt die Proportion $|QM| : |MS| = |QM'| : |M'O| = b : a$. Wenn sich nun der Punkt M dem Punkt B nähert, geht $|QM|$ gegen a, und es wird $|BS_0| = a^2 : b$. Das ist aber gerade der Radius des Schmiegkreises an die Ellipse in den Nebenscheiteln der Ellipse. In analoger Weise ergibt sich, daß $b^2 : a$ der Radius des Schmiegkreises in den Hauptscheiteln der Ellipse ist.

§ 3. Die Hyperbel

3.1. Die Form der Hyperbel. Es sei F der Brennpunkt und f die Leitlinie einer Hyperbel. Den Abstand $|FD|$ des Brennpunktes F von der Leitlinie f bezeichnen wir mit p, und x sei die durch F gehende Gerade, die auf f senkrecht steht (Abb. 47). Nach Definition gilt für jeden Punkt M der Hyperbel

$$r : d = \varepsilon > 1,$$

[1]) Vgl. S. 355.

wobei $r = |MF|$ bzw. $d = |MP|$ den Abstand des Punktes M vom Brennpunkt bzw. von der Leitlinie bedeutet.

Aus der Definition der Hyperbel folgt sofort, daß die Gerade x Symmetrieachse für die Hyperbel ist. Auf dieser Achse liegen zwei Hyperbelpunkte A_1, A_2, die die Strecke $\overline{FD}$ von innen und außen im Verhältnis ε teilen. Diese beiden Punkte werden die *Scheitel* der Hyperbel genannt; der eine Scheitel liegt zwischen Brennpunkt und Leitlinie, während der zweite (da $\varepsilon > 1$ ist) auf der anderen Seite der Leitlinie liegt. Die Strecke $\overline{A_1A_2}$ heißt die *reelle Achse* der Hyperbel. Ihre Länge wird im folgenden mit $2a$ bezeichnet; die Zahl a

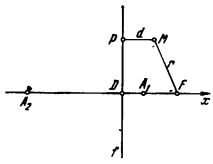


Abb. 47

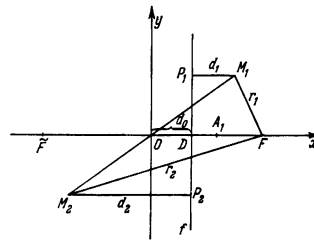


Abb. 48

wird dabei der *reelle Halbmesser* der Hyperbel genannt. Mit O bezeichnen wir den Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_1A_2}$ und mit d_0 den Abstand $|OD|$. Aus den Beziehungen

$$\frac{p - |DA_1|}{|DA_1|} = \varepsilon, \qquad \frac{p + |DA_2|}{|DA_2|} = \varepsilon$$

erhalten wir

$$|DA_1| = \frac{p}{\varepsilon + 1}, \qquad |DA_2| = \frac{p}{\varepsilon - 1},$$

und daher ist

$$d_0 = \frac{1}{2}(|DA_2| - |DA_1|) = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon - 1} - \frac{1}{\varepsilon + 1}\right) = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}. \tag{1}$$

Wir beweisen jetzt, daß der Punkt O Symmetriezentrum für die Hyperbel ist. Ist M_1 ein Hyperbelpunkt, so erfüllen die Streckenlängen $r_1 = |FM_1|$, $d_1 = |P_1M_1|$ die Beziehung $r_1 = \varepsilon d_1$. Für den bezüglich O zu M_1 symmetrisch gelegenen Punkt M_2 sei $r_2 = |FM_2|$ und $d_2 = |M_2P_2|$ (Abb. 48). Wir müssen zeigen, daß $r_2 = \varepsilon d_2$ ist.

In dem Trapez $M_1P_1M_2P_2$ verbindet die Gerade OD die Mittelpunkte der Diagonalen. Folglich ist $|OD| = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)$ mit $d_2 > d_1$. Die Abstände der

Punkte M_1, M_2 von der Achse x betragen daher

$$r_1^2 - (d_1 - p)^2 = r_2^2 - (d_2 + p)^2.$$

Hieraus folgt

$$r_1^2 - r_2^2 = d_1^2 - d_2^2 - 2p(d_1 + d_2),$$

d. h.

$$r_1^2 - r_2^2 = d_1^2 - d_2^2 - (d_2^2 - d_1^2)(\varepsilon^2 - 1).$$

Wir erhalten schließlich

$$r_1^2 - r_2^2 = \varepsilon^2(d_1^2 - d_2^2).$$

Nach Voraussetzung ist aber $r_1^2 = \varepsilon^2 d_1^2$. Demzufolge ist $r_2^2 = \varepsilon^2 d_2^2$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Hyperbel besitzt ein Symmetriezentrum, dessen Abstand d_0 von der Leitlinie sich nach Formel (1) *bestimmt.*

Aus der Tatsache, daß die Hyperbel ein Symmetriezentrum O (oder kürzer ein *Zentrum*) und eine durch O gehende Symmetrieachse x besitzt, folgt, daß die auf x senkrecht stehende Gerade y durch O gleichfalls Symmetrieachse für die Hyperbel ist. Diese Achse wird die *imaginäre Achse* der Hyperbel genannt. Wir haben also gefunden:

Die Hyperbel besitzt zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, die sich im Symmetriezentrum der Hyperbel schneiden.

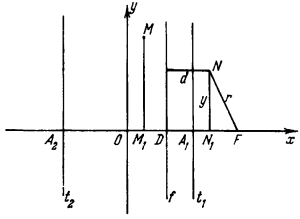


Abb. 49

Auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Hyperbel können wir uns bei der weiteren Untersuchung des Kurvenverlaufs auf das Innere eines der von den Symmetrieachsen gebildeten rechten Winkel beschränken. Weiterhin folgt aus den Symmetrieeigenschaften sofort, daß die Hyperbel einen zweiten Brennpunkt $\tilde{F}$ und eine zweite Leitlinie $\tilde{f}$ besitzt.

Durch den Punkt A_1 ziehen wir die zur Achse y parallele Gerade t_1 (Abb. 49). Auf dieser Geraden t_1 liegt nur ein einziger Hyperbelpunkt, nämlich A_1; denn für jeden von A_1 verschiedenen Punkt der Geraden t_1 ist der Wert von d derselbe wie für A_1, während sich r und $|FA_1|$ voneinander unterscheiden.

Weiter ist zu sehen, daß zwischen den beiden Geraden t_1 und y keine Hyperbelpunkte liegen. Ist nämlich M ein Punkt aus dem von den Geraden t_1 und y gebildeten Streifen und M_1 seine Projektion auf die Achse x, so ist $|M_1F| : |M_1D| > \varepsilon$; denn bei einer Bewegung des Punktes M_1 von O bis A_1 wächst das Verhältnis $|M_1F| : |M_1D|$ erst von ε^2 bis ∞ und fällt dann von ∞ bis ε. Dann ist aber erst recht $|MF| : |MP| = |MF| : |M_1D| > \varepsilon$, was zu zeigen war. Insbesondere schneidet die imaginäre Achse y nirgends die Hyperbel.

Zwischen den auf der Achse x senkrecht stehenden Geraden t_1, t_2 durch die Scheitel A_1, A_2 liegen keine Hyperbelpunkte.

Es sei N ein Punkt der Hyperbel, der rechts von der Geraden t_1 und oberhalb der Achse x liegt (Abb. 49). Der Abstand y dieses Hyperbelpunktes von der Achse x ergibt sich nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS zu

$$y = \sqrt{r^2 - (d - p)^2}.$$

Setzen wir darin $r = \varepsilon d$, so erhalten wir

$$y = \sqrt{d^2(\varepsilon^2 - 1) + 2dp - p^2}. \tag{2}$$

Der Beziehung (2) können wir entnehmen, daß bei monotoner und unbeschränkter Zunahme des Abstandes d auch y monoton und unbeschränkt wächst. Die Punkte der Hyperbel „erstrecken sich also bis ins Unendliche".

Bei monotoner unbeschränkter Zunahme des Abstandes eines Hyperbelpunktes von der Achse x wächst auch der Abstand dieses Punktes von der Achse y monoton und unbeschränkt.

3.2. Eigenschaften der Brennpunkte der Hyperbel. Die Verbindungsstrecke eines Brennpunktes mit einem Hyperbelpunkt heißt ein *Brennstrahl*. Zu jedem Hyperbelpunkt M gibt es zwei Brennstrahlen FM und $\tilde{F}M$; ihre Längen seien r bzw. $\tilde{r}$ (Abb. 50). Offenbar lassen sich bei Kenntnis von r und ε sowohl d als auch die beiden zugehörigen (bezüglich x symmetrisch gelegenen) Hyperbelpunkte in einfacher Weise bestimmen. Dadurch ist auch der Wert von $\tilde{r}$ für diese beiden Punkte festgelegt. Es ist also zu erwarten, daß zwischen r und $\tilde{r}$ ein Zusammenhang besteht, den wir jetzt herleiten wollen. Wir betrachten zunächst einen Hyperbelpunkt M, der rechts von der Achse y gelegen ist (wobei wir annehmen, daß auch F rechts von y liegt). Nach Definition ist dann

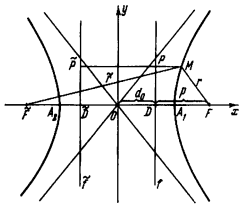


Abb. 50

$$r = \varepsilon d, \quad \tilde{r} = \varepsilon \tilde{d}, \quad \tilde{d} - d = 2d_0, \quad \tilde{d} + d = 2e,$$

wobei e den Abstand des betrachteten Hyperbelpunktes von der Achse y bezeichnet. Hieraus ergibt sich

$$d = e - d_0, \qquad \tilde{d} = e + d_0$$

sowie

$$\tilde{r} - r = 2\varepsilon d_0 = \frac{2p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Zum anderen ist nun

$$a = |OA_1| = |OD| + |DA_1| = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} + \frac{p}{\varepsilon + 1} = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}. \tag{3}$$

Wir erhalten also

$$\tilde{r} - r = 2a.$$

Entsprechend gilt für die Brennstrahlen der links von der Achse y gelegenen Hyperbelpunkte (wenn wir nach wie vor annehmen, daß F rechts von y liegt)

$$r - \tilde{r} = 2a. \tag{4}$$

Daraus folgt:

Der absolute Betrag der Differenz der Längen der Brennstrahlen zu einem beliebigen Hyperbelpunkt ist konstant und gleich der Länge der reellen Achse der Hyperbel.

3.3. Die Gleichung der Hyperbel. Wir wollen jetzt die zwischen den Abständen x und y eines Hyperbelpunktes von den Achsen bestehende Beziehung aufstellen (Abb. 51).

Dazu bestimmen wir zunächst den Abstand c des Mittelpunktes der Hyperbel vom Brennpunkt. Aus der Beziehung $a^2 = d_0 c$ ergibt sich $a : c = d_0 : a$ oder, bei Berücksichtigung von (1) und (3), $a : c = 1 : \varepsilon$. Es ist also

$$c = a\varepsilon. \tag{5}$$

Hieraus folgt

$$r^2 = (x - c)^2 + y^2,$$

$$r^2 = \varepsilon^2 \left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2,$$

und aus der Gleichheit der beiden rechten Seiten ergibt sich

$$(x - c)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2,$$

$$x^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) - y^2 = c^2 - a^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

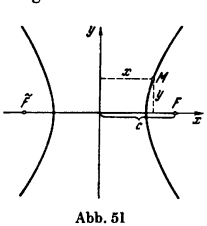


Abb. 51

Nun ist aber $c > a$, und folglich existiert eine Zahl b, für die $c^2 - a^2 = b^2$ ist. Wir erhalten somit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Werden die Symmetrieachsen einer Hyperbel als Achsen eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems gewählt, so stellt (6) die *Gleichung der Hyperbel* dar. Die Größe b heißt der *imaginäre Halbmesser* der Hyperbel.

Die Abstände x und y eines Hyperbelpunktes von den Symmetrieachsen sind durch die Beziehung (6) *miteinander verknüpft.*

Wir betrachten jetzt die im ersten Quadranten ($x \geqq a, y \geqq 0$) liegenden Hyperbelpunkte. Wie man (6) entnimmt, ist für diese Punkte

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} < \frac{bx}{a}. \tag{7}$$

Die Gleichung (7) zeigt, daß die Hyperbelpunkte *unterhalb* der Halbgeraden $y = \frac{bx}{a}$ ($x \geqq 0$) liegen.

Aus Symmetriegründen folgt hieraus, daß sämtliche Hyperbelpunkte innerhalb derjenigen von den Geraden $y = \pm \frac{b}{a} x$ gebildeten Winkelräume liegen, in denen sich auch die reelle Achse befindet. Die Geraden $y = \pm \frac{b}{a} x$ werden *Asymptoten* der Hyperbel genannt.

Die Hyperbelpunkte liegen innerhalb derjenigen von den Asymptoten gebildeten Winkelräume, in denen die reelle Achse der Hyperbel verläuft.

Wir wollen nun die Differenz δ der Abstände eines Hyperbelpunktes und eines Asymptotenpunktes von der Achse x bestimmen, falls beide Punkte auf derselben Senkrechten zur Achse x liegen; dabei beschränken wir unsere Betrachtungen auf den ersten Quadranten (Abb. 52). Aus Gleichung (7) folgt

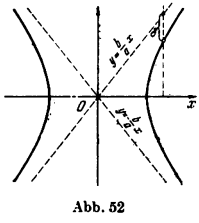


Abb. 52

$$\delta = \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \frac{b}{a} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$$

$$= -\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < 0.$$

Lassen wir hier x über alle Grenzen wachsen, so geht δ offenbar gegen 0, d. h., mit wachsendem x kommen die Hyperbelpunkte der Asymptote beliebig nahe, da der Abstand eines Hyperbelpunktes von der Asymptote höchstens gleich $|\delta|$ ist (als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $|\delta|$).

Entfernt sich ein Punkt längs eines Hyperbelastes, so nimmt sein Abstand von der entsprechenden Asymptote unbegrenzt ab.

Eine Hyperbel, deren Asymptoten aufeinander senkrecht stehen, heißt *gleichseitig*. In diesem Fall sind die Asymptoten die Winkelhalbierenden $y = \pm x$ der Quadranten, und die Gleichung der Hyperbel hat die Gestalt

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{8}$$

Man sieht leicht ein, daß man die „allgemeine" Hyperbel (6) aus der gleichseitigen Hyperbel (8) dadurch gewinnen kann, daß man eine Stauchung auf die reelle Achse im Verhältnis $k = \frac{a}{b}$ durchführt. Für die gleichseitige Hyperbel ist $a = b$, $c = a\sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$. Während also bei der Ellipse der Spezialfall $a = b$ den Kreis liefert, ist der entsprechende Spezialfall der Hyperbel die gleichseitige Hyperbel.

Das folgende Beispiel zeigt eine weitere Analogie zwischen Kreis und gleichseitiger Hyperbel: Bekanntlich kann man den Kreis als Menge der dritten Eckpunkte aller derjenigen Dreiecke auffassen, von denen zwei Eckpunkte fixiert worden sind und die *Summe* der Winkel an diesen Ecken 90° beträgt (Abb. 53). Entsprechend ist eine gleichseitige Hyperbel die *Menge der dritten*

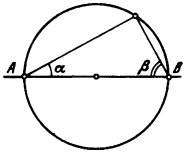


Abb. 53

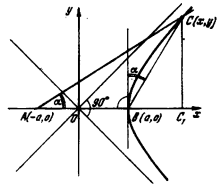


Abb. 54

Eckpunkte aller derjenigen Dreiecke, in denen zwei Eckpunkte fixiert worden sind und die Differenz der Winkel an diesen Ecken 90° *beträgt* (Abb. 54). Zum Beweis denken wir uns im Dreieck ABC die Ecken A, B festgehalten und den Punkt C so gewählt, daß $|\sphericalangle A - \sphericalangle B| = 90°$ ist. Die Gerade AB nehmen wir als x-Achse und die im Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ errichtete Senkrechte als y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Bezeichnen wir die Länge der Strecke $\overline{AB}$ mit $2a$ und die Länge der Höhe $\overline{CC_1}$ im Dreieck ABC mit y, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACC_1 und BCC_1

$$y : (a + x) = (x - a) : y$$

oder

$$x^2 - a^2 = y^2, \quad \text{d. h.} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

3.4. Lagebeziehungen von Hyperbel und Gerade. Tangenten an die Hyperbel. Es sei g eine durch einen Hyperbelpunkt M gehende Gerade, die die Leitlinie f im Punkt G schneide (Abb. 55). Mit g_1 bezeichnen wir die Gerade, die bezüglich FG zur Geraden FM symmetrisch ist. Wie bei der Ellipse kann bewiesen werden: Ist die Gerade g zu keiner Asymptote parallel, so schneiden sich g und g_1 in einem Hyperbelpunkt M'. Stehen dabei die Geraden MF und FG senkrecht aufeinander, so fällt g_1 mit MF zusammen, und die Punkte M' und M stimmen

überein. Ist dagegen g zu einer Asymptote parallel, so ist $g' \| g$, und der zweite Schnittpunkt von g mit der Hyperbel fehlt (man sagt in diesem Fall, der zweite Schnittpunkt „liege im Unendlichen"). Somit haben wir erhalten:

Hat eine Gerade mit der Hyperbel überhaupt einen Punkt gemeinsam, so gibt es stets noch einen zweiten derartigen Punkt, der allerdings mit dem ersten zusammenfallen oder im Unendlichen liegen kann.

Eine Gerade, die zu keiner Asymptote parallel ist und mit der Hyperbel nur einen Punkt gemeinsam hat, heißt eine Tangente an die Hyperbel. *Der*

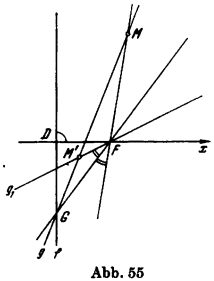


Abb. 55

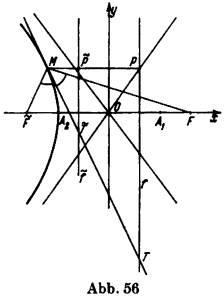


Abb. 56

zwischen Berührungspunkt und Leitlinie liegende Tangentenabschnitt erscheint vom zugehörigen Brennpunkt aus unter einem rechten Winkel.

Hieraus folgt, daß sich die Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktsehne auf der Leitlinie schneiden oder zu ihr parallel sind, und umgekehrt.

Die Tangente im Punkt M an die Hyperbel möge die Leitlinien in den Punkten T und $\tilde{T}$ schneiden, und die parallel zur x-Achse durch M gehende Gerade schneide die Leitlinien in P und $\tilde{P}$ (Abb. 56). Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MPT und $M\tilde{P}\tilde{T}$ folgt $|MP| : |M\tilde{P}| = |MT| : |M\tilde{T}|$. Andererseits ist aber $|MP| : |M\tilde{P}| = |MF| : |M\tilde{F}|$. Folglich gilt $|MT| : |M\tilde{T}| = |MF| : |M\tilde{F}|$. Nun sind aber die Dreiecke MFT und $M\tilde{F}\tilde{T}$ rechtwinklig und daher ähnlich, d. h., es ist $\sphericalangle\, \tilde{F}M\tilde{T} = \sphericalangle\, FMT$. Folglich gilt:

Jede Tangente an die Hyperbel halbiert den Winkel zwischen den Brennstrahlen zum Berührungspunkt.

Aus dieser Eigenschaft der Tangenten ergibt sich unmittelbar ein Konstruktionsverfahren für Hyperbeltangenten.

Spiegeln wir einen Brennpunkt der Hyperbel an allen möglichen Tangenten derselben, so gelangen wir zu denjenigen Punkten, deren Abstand vom anderen

Brennpunkt gleich $2a$ ist (Abb. 57). Diese Punkte liegen also auf einem Kreis vom Radius $2a$ um den anderen Brennpunkt. Dieser Kreis heißt ein *Richtkreis* der Hyperbel. Es gibt zwei derartige Kreise.

Des weiteren gilt: *Die Fußpunkte der von einem Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lote bilden den Kreis mit der reellen Achse der Hyperbel als Durchmesser* (Abb. 58; vgl. S. 592).

Wir beweisen jetzt: *Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente ist von der Wahl der Tangente unabhängig und gleich dem Quadrat des imaginären Halbmessers.* Dazu fällen wir von den Brennpunkten F und $\tilde{F}$ die Lote FH

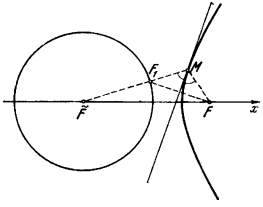


Abb. 57

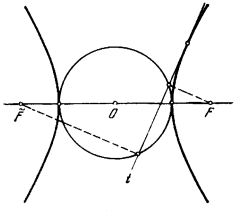


Abb. 58

und $\tilde{F}\tilde{H}$ auf die Tangente t im Punkt M an die Hyperbel (Abb. 59). Es sei $|FH| = h$, $|\tilde{F}\tilde{H}| = \tilde{h}$. Unmittelbar ist dem Trapez $FH\tilde{F}\tilde{H}$ zu entnehmen, daß der Abstand $h_0 = |OH_0|$ des Hyperbelmittelpunktes O von der Tangente t gleich $\frac{1}{2}|h - \tilde{h}|$ ist. Tragen wir ferner auf der Verlängerung von OH_0 die Strecke $\overline{H_0F'}$ der Länge h ab und berücksichtigen wir, daß $|OH| = |O\tilde{H}| = a$ und $|OF| = c$ ist, so finden wir an Hand der rechtwinkligen Dreiecke $OF'F$ und OH_0H

$$c^2 = |OF|^2 = |OF'|^2 + |F'F|^2$$
$$= (h_0 + h)^2 + |H_0H|^2,$$
$$a^2 = |OH|^2 = h_0^2 + |H_0H|^2$$

und folglich

$$c^2 - a^2 = \left(\frac{h + \tilde{h}}{2}\right)^2 - \left(\frac{h - \tilde{h}}{2}\right)^2$$

oder

$$h\tilde{h} = c^2 - a^2 = b^2.$$

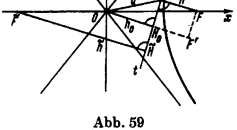


Abb. 59

Von diesem Satz läßt sich auch die Umkehrung beweisen, nämlich: *Die Menge der Geraden in der Ebene, die die Strecke $\overline{F\tilde{F}}$ schneiden und für die das*

Produkt der Abstände von den Punkten F und $\tilde{F}$ konstant ist, stimmt mit der Menge der Tangenten an die Hyperbel mit den Brennpunkten F und $\tilde{F}$ überein.

Für die Hyperbel behalten auch die oben bewiesenen Sätze von PONCELET ihre Gültigkeit:

1. *Die Winkelhalbierende des von zwei von ein und demselben Brennpunkt ausgehenden Brennstrahlen gebildeten Winkels geht durch den Schnittpunkt der Tangenten in den zugehörigen Punkten der Hyperbel* (Abb. 60a).

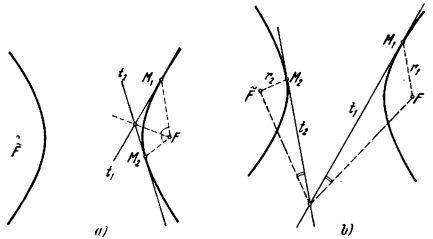


Abb. 60

2. *Zwei von den Brennpunkten zu zwei Hyperbelpunkten gezogene Brennstrahlen erscheinen vom Schnittpunkt der Tangenten in diesen aus unter gleichen oder komplementären Winkeln* (Abb. 60b).

Die Beweise dieser Sätze verlaufen ganz analog zu den oben für die Ellipse durchgeführten Beweisen der Sätze von PONCELET.

3.5. Eigenschaften der Asymptoten. Die Tangente t im Punkt M einer Hyperbel schneide die Asymptoten m_1 und m_2 in den Punkten N_1 und N_2 (Abb. 61). Wir wollen zeigen, daß das Produkt der Streckenlängen $|ON_1|$ und $|ON_2|$ konstant ist. Dazu ziehen wir durch den Brennpunkt F die zu den Asymptoten m_1, m_2 parallelen Geraden FK_1 und FK_2. Nach dem ersten Satz von PONCELET[1]) ist

$$\sphericalangle MFN_1 = \sphericalangle N_1FK_1, \qquad \sphericalangle MFN_2 = \sphericalangle N_2FK_2.$$

Hieraus folgt

$$\sphericalangle N_1FN_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle K_1FK_2 = \sphericalangle K_1FO = \sphericalangle N_1O\tilde{F},^{2})$$

[1]) Bei diesen Anwendungen des Satzes von PONCELET ist jeweils einer der Brennstrahlen parallel zu einer der Asymptoten. An die Stelle einer der Tangenten tritt dann sinngemäß die entsprechende Asymptote. Der Leser mache sich klar, daß der Satz von PONCELET auch in diesem Fall richtig ist. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

[2]) Die erste dieser Gleichungen ergibt sich durch Anwendung des ersten Satzes von PONCELET auf die Brennstrahlen FK_1 und FK_2. An die Stelle der Tangenten treten jetzt sinngemäß die beiden Asymptoten. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

und daher ist

$$\sphericalangle N_1FM = \sphericalangle OFN_2 = \sphericalangle FN_1O$$

und

$$\sphericalangle MFN_2 = \sphericalangle FN_2O = \sphericalangle OFN_1.$$

Aus der Gleichheit der Winkel ergibt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke OFN_1 und OFN_2. Also gilt

$$|ON_1| : |OF| = |OF| : |ON_2|$$

bzw.

$$|ON_1| \cdot |ON_2| = |OF|^2 = c^2.$$

Der Flächeninhalt des von den beiden Asymptoten und einer variablen Tangente gebildeten Dreiecks ist konstant.

Der Wert dieser Konstanten läßt sich sehr einfach bestimmen (Abb. 62):

$$S_{ON_1N_2} = \frac{1}{2}|ON_1| \cdot |ON_2| \sin\omega = \frac{1}{2}c^2 \sin\omega$$

$$= \frac{1}{2}c^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}c^2 \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{2}c^2 \frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = ab,$$

wobei ω der Winkel zwischen den Asymptoten und α der Neigungswinkel einer Asymptote gegen die reelle Achse der Hyperbel ist.

Wir beweisen nun, daß der Berührungspunkt einer Tangente an die Hyperbel den zwischen den Asymptoten liegenden Tangentenabschnitt halbiert. Es

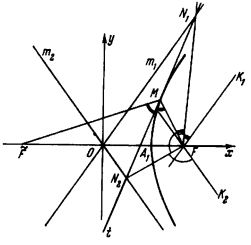


Abb. 61

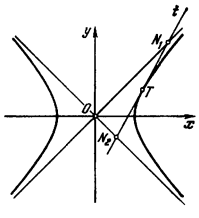


Abb. 62

genügt, diese Eigenschaft für eine gleichseitige Hyperbel nachzuweisen; denn jede ungleichseitige Hyperbel kann durch eine Stauchung auf die reelle Achse in eine gleichseitige abgebildet werden, wobei Tangenten in Tangenten, Asymptoten in Asymptoten und Streckenmittelpunkte wieder in Streckenmittelpunkte übergehen.

Zum Beweis nehmen wir an, daß die Punkte N_1, N_2 und der Mittelpunkt T der Strecke $\overline{N_1N_2}$ die Koordinaten $N_1(m_1, m_1)$, $N_2(m_2, -m_2)$ bzw. $T(x, y)$ haben (Abb. 62). Offenbar ist $x = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$, $y = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)$ und $x^2 - y^2 = m_1m_2$. Nun ist aber $m_1 = \frac{|ON_1|}{\sqrt{2}}$, $m_2 = \frac{|ON_2|}{\sqrt{2}}$, und wir erhalten also $m_1m_2 = \frac{c^2}{2}$. Folglich ist

$$x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2} \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 = a^2,$$

da für die gleichseitige Hyperbel $c^2 = 2a^2$ ist. Der Mittelpunkt T der Strecke $\overline{N_1N_2}$ gehört demnach sowohl zur Hyperbel als auch zur Tangente, d. h., T ist der Berührungspunkt.

Der von den Asymptoten eingeschlossene Abschnitt einer Tangente an die Hyperbel wird vom Berührungspunkt halbiert.

Aus den letzten beiden Sätzen folgt, daß *die Hyperbel auch als geometrischer Ort der vierten Ecken aller Parallelogramme konstanten Flächeninhalts aufgefaßt werden kann, deren eine Ecke und der Winkel an derselben festgehalten werden und deren beide benachbarten Ecken jeweils auf den Geraden liegen, die von den Schenkeln des gegebenen Winkels gebildet werden.*

Nimmt man die Asymptoten einer Hyperbel als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so erhält die Gleichung der Hyperbel die Gestalt

$$xy = \frac{1}{\sin \omega} 2s \quad \text{oder} \quad xy = m^2.$$

Speziell hat die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in dem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem, dessen Achsen die Asymptoten darstellen, die Form

$$xy = k \quad \text{oder} \quad y = \frac{k}{x},$$

wobei $k \neq 0$ eine Konstante ist. In dieser Form wird die Hyperbelgleichung häufig im Algebraunterricht behandelt.

§ 4. Die Parabel

4.1. Die Form der Parabel. Die Gleichung der Parabel. Eine Parabel ist durch ihren Brennpunkt F und ihre Leitlinie f eindeutig bestimmt. Das vom Brennpunkt auf die Leitlinie gefällte Lot $x = \overline{FD}$ wird *Achse* der Parabel genannt, und der Abstand p des Brennpunktes von der Leitlinie heißt ihr *Parameter*

(Abb. 63). Aus der Definition der Parabel als Menge aller Punkte, deren Abstände von F und f gleich sind, ergibt sich die *Symmetrie der Parabel bezüglich ihrer Achse*, wobei nur ein einziger Punkt O der Achse x zugleich auch Parabelpunkt ist, nämlich der Mittelpunkt der Strecke $\overline{FD}$. Der Punkt O heißt der *Scheitel* der Parabel.

Durch O legen wir nun die auf der Achse x senkrecht stehende Gerade y. Offenbar liegen außer dem Punkt O keine weiteren Parabelpunkte auf der Geraden y; denn für jeden von O verschiedenen Punkt P der Geraden y ist der Abstand r vom Brennpunkt größer als $\frac{p}{2}$, während der Abstand $|PP_1| = d$ zur Leitlinie $\frac{p}{2}$ beträgt, d. h., es ist $r : d > 1$, also P kein Parabelpunkt. Für jeden in der nicht den Brennpunkt enthaltenden Halbebene bezüglich der Geraden y liegenden Punkt ist $r > d$, und es liegen daher in dieser Halbebene

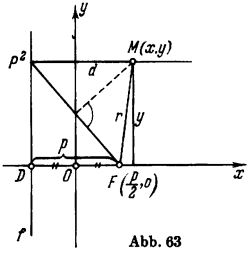


Abb. 63

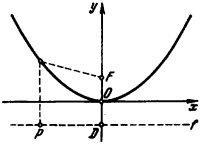


Abb. 64

überhaupt keine Parabelpunkte. *Die Punkte einer Parabel liegen alle in derjenigen Halbebene bezüglich der Geraden y, in der der Brennpunkt der Parabel liegt.* Aus Symmetriegründen besitzt jede zur Geraden y parallele Gerade, die mit der Parabel überhaupt einen Punkt gemeinsam hat, mit ihr noch einen zweiten Punkt; die Gerade y hat dabei als einzige mit der Parabel nur einen Punkt gemeinsam. Deshalb bezeichnet man y als *Scheiteltangente* an die Parabel.

Wir nehmen jetzt die Parabelachse x als Abszissenachse und die Scheiteltangente y als Ordinatenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Es sei $M(x, y)$ ein beliebiger Parabelpunkt (Abb. 63). Dann ist

$$r^2 = |MF|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \quad d^2 = |MP|^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

und wegen $r^2 = d^2$ ergibt sich hieraus

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Wenn also die Abszisse eines Punktes M der Parabel gegeben ist, läßt sich die Ordinate einfach als mittlere Proportionale von Abszisse und doppeltem Parameter berechnen. Wie Gleichung (1) zeigt, geht mit x auch y gegen ∞, d. h., die Parabel ist eine unbeschränkte Kurve.

Vertauschen wir die Benennung der Koordinatenachsen (Abb. 64), so geht die Gleichung der Parabel über in

$$x^2 = 2py \quad \text{oder} \quad y = ax^2 \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{2p}.$$

Das ist eine Form der Parabelgleichung, wie sie auch im Algebraunterricht vorkommt.

4.2. Lagebeziehungen von Parabel und Gerade. Tangenten an die Parabel. Die Gerade g möge die Parabel in einem Punkt M schneiden. Wir wollen zeigen, daß dann auf der Geraden g im allgemeinen noch ein weiterer Parabelpunkt M_1

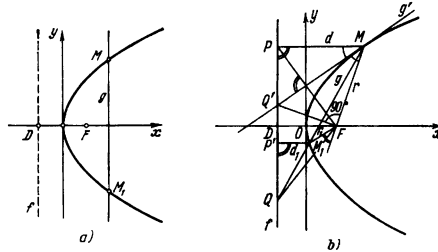


Abb. 65

liegt. Ist g zur Achse y (bzw. zur Leitlinie) parallel, so ist M_1 der bezüglich der Achse x zu M symmetrisch gelegene Punkt (Abb. 65a). Wir nehmen jetzt an, g schneide die Leitlinie in einem Punkt Q (Abb. 65b). Wir spiegeln dann die Gerade MF an FQ und bezeichnen mit M_1 den Schnittpunkt der dabei erhaltenen Geraden g_1 mit der Geraden g. Unter Ausnutzung der Eigenschaften der Winkelhalbierenden eines Außenwinkels an einem Dreieck finden wir die Beziehung $|MQ| : |QM_1| = |MF| : |M_1F|$. Bezeichnen d und d_1 die Abstände der Punkte M und M_1 von der Leitlinie, so ist $d : d_1 = |MQ| : |QM_1|$ und folglich $d : d_1 = |MF| : |M_1F|$. Nun ist aber $d = |MF|$ und somit $d_1 = |M_1F|$; das beweist, daß M_1 ein Punkt der Parabel ist.

Es kann natürlich vorkommen, daß sich die Geraden g und g_1 in dem Punkt $M = M_1$ schneiden. Das wird dann eintreten, wenn $\sphericalangle QFM$ gleich 90° ist (die Gerade g' und der Punkt Q' in Abb. 65b). In diesem Fall ist die Gerade g *Tangente* an die Parabel im Punkt M.

Der zwischen dem Berührungspunkt und der Leitlinie liegende Abschnitt einer Tangente an die Parabel erscheint vom Brennpunkt aus unter einem rechten Winkel.

Es ist ferner möglich, daß die Geraden g und g_1 parallel sind und der Punkt M_1 nicht existiert. Das ist dann der Fall, wenn das Dreieck FMQ gleichschenklig ist, also $|MF| = |MQ|$ gilt (Abb. 66). Das besagt aber, daß die Gerade g zur Parabelachse parallel ist.

Wie man leicht sieht, kann keine Gerade g mit der Parabel drei Punkte gemeinsam haben.

Geht eine Gerade g durch einen Parabelpunkt M und ist sie keine Tangente und keine Parallele zur Parabelachse, so schneidet sie die Parabel noch in einem zweiten Punkt.

Wir vermerken, daß der Beweis etwas anders verläuft, wenn die Gerade g durch den Brennpunkt der Parabel geht; die Untersuchung dieses Falles überlassen wir dem Leser.

Jede Gerade g, die zur Parabelachse parallel ist, wird ein *Durchmesser* der Parabel genannt. Um eine grundlegende Eigenschaft der Durchmesser herzuleiten, spiegeln wir den Brennpunkt F der Parabel an irgendeiner ihrer Sehnen $\overline{AB}$; es sei F_1 der dabei gefundene Punkt, und seien A_1 und B_1 die Projektionen

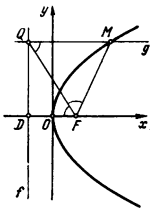


Abb. 66

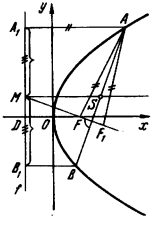


Abb. 67

der Endpunkte A und B der Sehne auf die Leitlinie (Abb. 67). Der Punkt A liegt von den Punkten F, F_1 und A_1 gleich weit entfernt, d. h., der Kreis mit dem Radius $|AF|$ um den Punkt A berührt also die Leitlinie im Punkt A_1. Entsprechend berührt der Kreis mit dem Radius $|BF|$ um den Punkt B die Leitlinie im Punkt B_1. Aus einer bekannten Eigenschaft des Kreises folgt dann

$$|MA_1|^2 = |MF| \cdot |MF_1| = |MB_1|^2,$$

wenn M der Schnittpunkt der Geraden FF_1 mit der Leitlinie der Parabel ist; der Punkt M halbiert also die Strecke $\overline{A_1B_1}$. Nun stimmt der Punkt M aber mit der Projektion des Mittelpunktes S der Sehne $\overline{AB}$ auf die Leitlinie über-

ein. Wenn nun die Sehne $\overline{AB}$ parallel verschoben wird, bleibt die Gerade FF_1 und damit auch der Punkt M unverändert, was bedeutet, daß die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer Parallelen zur Parabelachse liegen (Abb. 68). Man nennt diese Gerade den *der gewählten Sehnenrichtung entsprechenden Durchmesser der Parabel.*

Die Menge der Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Parabel bildet eine zu einem Parabeldurchmesser gehörende Halbgerade.

Etwas eingehender wollen wir noch die Eigenschaften der Tangente an die Parabel untersuchen. Die Tangente t im Punkt M der Parabel schneide deren

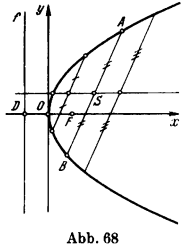


Abb. 68

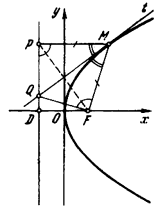


Abb. 69

Leitlinie im Punkt Q, und es sei P der Fußpunkt des von M auf die Leitlinie gefällten Lotes (Abb. 69). In dem Viereck $MFQP$ sind zwei gegenüberliegende Winkel rechte Winkel, und die Seiten $\overline{MP}$ und $\overline{MF}$ sind gleich lang. Folglich sind die Dreiecke PMQ und QMF kongruent, und die Tangente t ist Winkelhalbierende des von dem Brennstrahl und der durch M gehenden Parallelen zur Achse x gebildeten Winkels.

Die Tangente in einem Punkt M der Parabel halbiert den Winkel zwischen dem vom Punkt M auf die Leitlinie gefällten Lot und der Verbindungsgeraden des Punktes M mit dem Brennpunkt.

Dem Viereck $MFQP$ entnehmen wir ferner, daß die Punkte P und F bezüglich der Winkelhalbierenden t des Winkels FMB symmetrisch liegen:

Die bezüglich der Tangenten zum Brennpunkt der Parabel symmetrischen Punkte liegen auf der Leitlinie.

Weiterhin folgt hieraus:

Die Fußpunkte der vom Brennpunkt der Parabel auf die Tangenten gefällten Lote liegen auf deren Scheiteltangente.

Durch die Endpunkte A und B einer Brennpunktsehne $\overline{AB}$ legen wir die Tangenten, und es seien A_1 bzw. B_1 deren Schnittpunkte mit der Leitlinie

(Abb. 70). Werden diese Punkte mit dem Brennpunkt verbunden, so erhalten wir zwei von A_1 und B_1 auf die Sehne $\overline{AB}$ gefällte Lote. Die beiden Punkte A_1 und B_1 stimmen demzufolge überein:

Die Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktsehne der Parabel schneiden sich auf deren Leitlinie.

Jetzt fällen wir von den Punkten A und B die Lote AA_0 und BB_0 auf die Leitlinie. Offenbar sind die Tangenten in den Punkten A und B Winkelhalbierende zweier Supplementwinkel und schneiden sich deshalb unter einem rechten Winkel:

Die Menge der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel die Parabeln berühren, stimmt mit der Leitlinie der Parabel überein.

Nun beweisen wir den folgenden Satz:

Legen wir von einem Punkt aus zwei Tangenten an die Parabel, so erscheinen die zwischen diesem Punkt und den Berührungspunkten liegenden Tangentenabschnitte vom Brennpunkt der Parabel aus unter gleichen Winkeln.

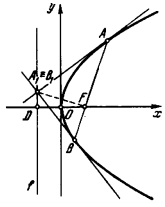


Abb. 70

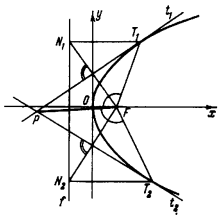


Abb. 71

Zum Beweis seien PT_1 und PT_2 die Tangenten, T_1 und T_2 ihre Berührungspunkte (Abb. 71). Wir spiegeln den Brennpunkt F an den Tangenten und verbinden die dabei gefundenen Punkte N_1 und N_2 mit T_1 und T_2. Auf Grund der Symmetrie ist $\sphericalangle PFT_1 = \sphericalangle PN_1T_1$, $\sphericalangle PFT_2 = \sphericalangle PN_2T_2$. Andererseits haben wir $\sphericalangle PN_1T_1 = \sphericalangle PN_2T_2$ wegen der Symmetrie bezüglich der Senkrechten zur Leitlinie durch den Punkt P. Folglich ist $\sphericalangle PFT_1 = \sphericalangle PFT_2$, was zu beweisen war.

Wir zeigen schließlich noch:

Der zwischen dem Berührungspunkt und der Parabelachse liegende Abschnitt einer Tangente an die Parabel wird von der Scheiteltangente halbiert.

Die Tangente t im Punkt M der Parabel schneide die Parabelachse im Punkt S und die Scheiteltangente y im Punkt R (Abb. 72). Das Dreieck FMP

ist gleichschenklig, und MR ist die Winkelhalbierende des Winkels FMP. Das Viereck $PMFS$ ist also ein Rhombus, und folglich ist $|SR| = |RM|$.

Es soll noch eine Konstruktion der von einem Punkt P an die Parabel gelegten Tangenten angegeben werden: Wir verbinden den Punkt P mit dem Brennpunkt und konstruieren über der Strecke $\overline{PF}$ als Durchmesser den Kreis; dieser schneide die Scheiteltangente y in den Punkten N_1 und N_2 (Abb. 73). Die Geraden PN_1 und PN_2 sind dann die Tangenten vom Punkt P

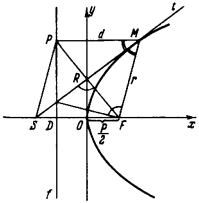


Abb. 72

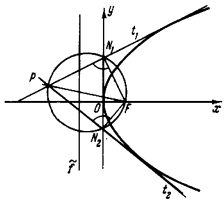


Abb. 73

an die Parabel. Denn jede von einem Punkt der Scheiteltangente gelegte Tangente steht auf der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem Brennpunkt senkrecht (siehe oben). Da nun z. B. PN_1 und N_1F aufeinander senkrecht stehen, ist PN_1 Tangente von N_1 und folglich auch von P an die Parabel.

§ 5. Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte

5.1. Polargleichung der Kegelschnitte. Wir nehmen einen der Brennpunkte F eines Kegelschnittes als Pol und die auf der Leitlinie senkrechte Richtung (von der Leitlinie zum Pol) als Achse eines Polarkoordinatensystems. Bezeichnen wir den Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie mit m und den Abstand eines Punktes M des Kegelschnittes von der Leitlinie mit d, so sind die Polarkoordinaten r und φ des Punktes M offenbar durch die Beziehung

$$r \cos \varphi + m = d$$

miteinander verknüpft (Abb. 74). Andererseits ist nach Definition der Kegelschnitte $d = r : \varepsilon$. Es ist daher

$$r \cos \varphi + m = \frac{r}{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad r = \frac{m}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Diese Gleichung ist die *Polargleichung eines Kegelschnittes*. Für $\varphi = 90°$ wird $r = m\varepsilon$. Dieser Radius wird im allgemeinen mit p bezeichnet (*Parameter* des Kegelschnittes); er ist gleich der halben Länge der Brennpunktsehne, die auf

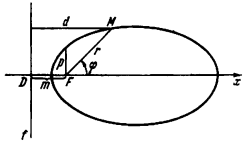


Abb. 74

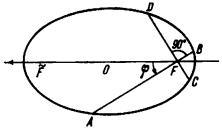


Abb. 75

der Achse des Polarkoordinatensystems senkrecht steht. Für die Ellipse und die Hyperbel ist $p = \frac{b^2}{a}$; denn es ist

$$m\varepsilon = \left(\frac{a}{\varepsilon} - c\right)\varepsilon = a - c\varepsilon = a - \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

bzw.

$$m\varepsilon = \left(c - \frac{a}{\varepsilon}\right)\varepsilon = c\varepsilon - a = \frac{c^2}{a} - a = \frac{b^2}{a}.$$

Für die Parabel ist $p = m$. In Polarkoordinaten läßt sich also jeder Kegelschnitt in der Form

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

schreiben.

Die Polargleichung erweist sich als außerordentlich vorteilhaft, wenn man Aussagen über Brennpunktsehnen eines Kegelschnittes beweisen will.

Gegeben sei eine durch den Brennpunkt F gehende Sehne $\overline{AB}$ (Abb. 75). Dann ist

$$|AF| = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad |BF| = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p}.$$

Die Summe der reziproken Längen der Strecken, in die eine Brennpunktsehne der Ellipse oder Parabel durch den Brennpunkt geteilt wird, ist eine Konstante. (Für die Hyperbel gilt $\left|\frac{1}{|AF|} \pm \frac{1}{|BF|}\right| = \frac{2}{p}$.)

Es seien jetzt $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei *zueinander senkrechte* Brennpunktsehnen der Ellipse oder der Parabel. Dann ist

$$|AB| = |AF| + |BF| = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} + \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$$

und

$$|CD| = |CF| + |FD| = \frac{p}{1 + \varepsilon \sin \varphi} + \frac{p}{1 - \varepsilon \sin \varphi} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi};$$

daraus folgt

$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{2 - \varepsilon^2}{2p}.$$

Die Summe der reziproken Längen zweier zueinander senkrechter Brennpunktsehnen der Ellipse oder der Parabel ist eine Konstante.

5.2. Konfokale Kegelschnitte. Zwei Mittelpunktskegelschnitte (zwei Ellipsen, zwei Hyperbeln oder eine Ellipse und eine Hyperbel) heißen konfokal, wenn sie dieselben Brennpunkte besitzen. Zwei Parabeln werden *konfokal* genannt, wenn sie denselben Brennpunkt haben und ihre Achsen zusammenfallen.

Zwei konfokale Ellipsen und zwei konfokale Hyperbeln haben keine gemeinsamen Punkte, da jede Ellipse und jede Hyperbel durch ihre beiden Brennpunkte und einen ihrer Punkte eindeutig festgelegt ist. Ein konfokales Paar aus Ellipse und Hyperbel besitzt vier Schnittpunkte (Abb. 76a). Zwei konfokale Parabeln mit gleichgerichteten Achsen schneiden sich nicht; denn hätten

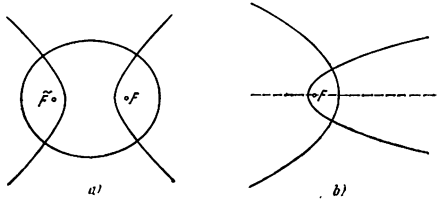


Abb. 76

sie einen Punkt gemeinsam, so besäßen sie auch dieselbe Leitlinie und wären dann sogar identisch. Zwei konfokale Parabeln mit entgegengesetzt gerichteten Achsen schneiden sich in zwei Punkten (Abb. 76b).

Sind eine Ellipse und eine Hyperbel konfokal, so schneiden sie sich orthogonal, d. h., die Tangenten an die beiden Kurven in den ihnen gemeinsamen Punkten stehen aufeinander senkrecht. Die Tangente an die Ellipse halbiert nämlich den Außenwinkel zwischen den Brennstrahlen, und die Tangente an die Hyperbel halbiert den Innenwinkel zwischen den Brennstrahlen. Beide Winkelhalbierende müssen also aufeinander senkrecht stehen, da sie Nebenwinkel halbieren.

Konfokale Parabeln mit entgegengesetzt gerichteten Achsen schneiden sich gleichfalls orthogonal, wovon man sich analog überzeugen kann.

Die Gesamtheit aller konfokalen Ellipsen und Hyperbeln mit gegebenen Brennpunkten bildet in der Ebene ein *orthogonales Netz* (Abb. 77a), da durch jeden Punkt der Ebene (mit Ausnahme der zu den gemeinsamen Achsen gehörenden Punkte) genau eine Ellipse und genau eine Hyperbel geht und sich beide Kurven in dem betrachteten Punkt orthogonal schneiden. Die beim Schnitt von zwei Ellipsen mit zwei Hyperbeln auftretenden Vierecke haben rechte Winkel, und sie können als krummlinige Rechtecke aufgefaßt werden. In analoger Weise definieren zwei Scharen konfokaler Parabeln in der Ebene ein orthogonales Netz (Abb. 77b).

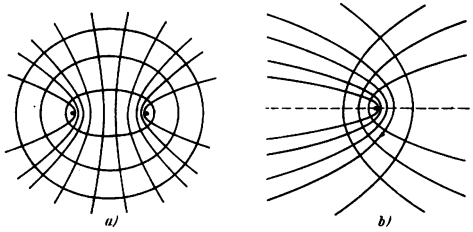


Abb. 77

Es soll noch der folgende bemerkenswerte Satz bewiesen werden:

Die Abstände zwischen den gegenüberliegenden Ecken eines krummlinigen Vierecks in einem aus konfokalen Ellipsen und Hyperbeln gebildeten orthogonalen Netz sind gleich, d. h., die Diagonalen in den Rechtecken eines solchen Netzes sind gleich lang.

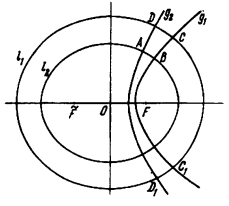


Abb. 78

Die gemeinsamen Brennpunkte der Ellipsen l_1, l_2 und der Hyperbeln g_1, g_2 bezeichnen wir mit F und $\tilde{F}$ und den Abstand zwischen den Brennpunkten mit m (Abb. 78). Es seien A, B, C, D die Ecken des von diesen Kurven gebildeten krummlinigen Vierecks. Wir beweisen, daß $|AC| = |BD|$ ist. Es sei $|AC| = x$, $|BD| = y$. Offensichtlich ist

$$|AF| + |A\tilde{F}| = 2a, \quad |AF| - |A\tilde{F}| = 2b;$$
$$|BF| + |B\tilde{F}| = 2a, \quad |BF| - |B\tilde{F}| = 2d;$$
$$|CF| + |C\tilde{F}| = 2c, \quad |CF| - |C\tilde{F}| = 2d;$$
$$|DF| + |D\tilde{F}| = 2c, \quad |DF| - |D\tilde{F}| = 2b.$$

Hieraus ergibt sich

$$|AF| = a + b, \quad |A\tilde{F}| = a - b; \quad |CF| = c + d, \quad |C\tilde{F}| = c - d;$$
$$|BF| = a + d, \quad |B\tilde{F}| = a - d; \quad |DF| = c + b, \quad |D\tilde{F}| = c - b.$$

Wir betrachten nun das Dreieck $F\tilde{F}A$ sowie den Punkt C. Vom Punkt C aus erscheinen die Dreiecksseiten unter den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, von denen entweder einer gleich der Summe der beiden anderen ist (z. B. $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$) oder für die $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$ gilt. In beiden Fällen folgt aus diesen Beziehungen zwischen den Winkeln die Relation

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 - 1 = 0.$$

Setzen wir hierin die aus den Dreiecken $CF\tilde{F}$, $C\tilde{F}A$, CAF mit Hilfe des Kosinussatzes berechneten Kosinuswerte ein, so erhalten wir nach entsprechender Vereinfachung

$$\begin{aligned} m^2x^4 + \{m^4 - 2[m^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 8abcd]\}\, x^2 \\ + m^2[a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \\ - 2(a^2c^2 + b^2d^2) + 8abcd] \\ - 16(ac - bd)(ad - bc)(ab - cd) = 0, \end{aligned}$$

wobei $x = |AC|$ ist.

Ausgehend von dem Dreieck $F\tilde{F}B$ sowie dem Punkt C erhalten wir *dieselbe* biquadratische Gleichung in $y = |BD|$. Zwei Ellipsen und zwei Hyperbeln legen nun vier Vierecke fest, von denen allerdings je zwei kongruent sind (man beachte, daß sich unsere Überlegungen nur auf die *rechten* Äste der Hyperbeln g_1, g_2 beziehen). Daher entsprechen die beiden positiven Wurzeln[1]) der obenstehenden Gleichung in x den Diagonalen $|AC|$ und $|AC_1|$ aus den Vierecken $ABCD$ bzw. ABC_1D_1. Ebenso ergeben sich $|BD|$ und $|BD_1|$ als positive Wurzeln derselben Gleichung in der Unbekannten y. Es ist also entweder $|AC| = |BD|$ oder $|AC| = |BD_1|$. Aus Symmetriegründen müssen nun die Diagonalen in einem der Vierecke kleiner sein als die entsprechenden Diagonalen in dem anderen, d. h., es ist $|AC| < |AC_1|$, $|BD| < |BD_1|$, und daher ist auch $|AC| + |BD| < |AC_1| + |BD_1|$. Wäre also $|AC| = |BD_1|$, so müßte $|BD| = |AC_1|$ und $|AC| + |BD| = |AC_1| + |BD_1|$ sein, entgegen der vorhergehenden Ungleichung. Wir können folglich den Fall $|AC| = |BD_1|$ ausschließen, und es bleibt nur die Möglichkeit $|AC| = |BD|$, was zu beweisen war.

Eine entsprechende Eigenschaft besitzen die Diagonalen eines krummlinigen Vierecks, das von zwei Paaren konfokaler Parabeln gebildet wird.

---

[1]) Wir merken an, daß die obige Gleichung eine quadratische Gleichung in x^2 ist, also von den vier Wurzeln je zwei entgegengesetzt gleich sind. Bei unseren Betrachtungen interessieren nur die positiven Wurzeln, von denen es genau zwei gibt. — *Anm. d. wissenschaftl. Red.*

Literatur

[1] Salmon, G., und W. Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte I, II, 8. bzw. 7. Aufl., Leipzig und Berlin 1915 bzw. 1918.

[2] Hadamard, J., Leçons de géométrie élémentaire II, 7. Aufl., Paris 1937.

[3] Делоне, Б. Н., и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, ч. I (Delaunay, B. N., und D. A. Raikow, Analytische Geometrie, Teil I), Moskau-Leningrad 1948.

[4] Яглом, И. М., и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I (Jaglom, I. M., und W. G. Aschkinuse, Ideen und Methoden der affinen und der projektiven Geometrie, Teil I), Moskau 1962.

[5] Félix, L., Elementarmathematik in moderner Darstellung, Braunschweig und Leipzig 1966 (Übersetzung aus dem Französischen).

[6] Weber, H., und J. Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik II/1, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1915.

[7] Steiner, J., Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektive Eigenschaften, Leipzig 1898.

[8] Lebesgue, H., Les coniques, Paris 1942.

[9] Dingeldey, F., Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III/2, Leipzig 1903.

NAMENVERZEICHNIS

Abû'l-Wafâ von Chorassan 562
Adler, A. 164, 172
al-Battânî 562
al-Chodshandi von Chodshent 562
Alexandrow, A. D. 422, 429, 430
Archimedes 11
Aristoteles 6f., 9f., 24

Beltrami, E. 22, 39
Bolyai, J. 12f.

Cantor, G. 31
Cauchy, A. 422

Dedekind, R. 24
Demokrit 6f., 9f., 41
Desargues, G. 91
Descartes, R. 12

Einstein, A. 12
Euklid 6ff., 422

Galois, E. 205
Gauss, C. F. 12f., 49, 205, 226
Gödel, K. 22

Hilbert, D. 34
Hippokrates von Chios 6

Ibn Irak von Choresm 562

Kagan, W. F. 34
Klein, F. 22, 39, 96f.

Laguerre, E. 459
Lie, S. 459
Lindemann, F. 9
Lobatschewski, N. I. 12f., 22, 39, 40

Mascheroni, L. 164
Menelaos 529
Möbius, A. F. 459
Mohr, G. 164
Monge, G. 279f.

Nasîr-ed-din at-Tûsî 562
Newton, I. 601

Pasch, M. 27
Platon 6
Pogorelow, A. W. 430
Pohlke, K. 252
Poincaré, H. 39
Poncelet, J. 167
Poncelet, V. 593
Ptolemaios, K. 529
Pythagoras 6f., 9f.

Riemann, B. 40, 96

Schwarz, H. A. 252
Schur, F. 34
Steiner, J. 167
Steinitz, E. 413, 422

Thales von Milet 4ff., 10
Thaer, C. 8

Vitruvius 280

SACHVERZEICHNIS

Abbildung, affine 56f., 70f., 87, 97, 115
—, eineindeutige 47
—, geometrische 46
—, inverse 91, 131
—, lineare 112
—, projektive 584
Abbildungsverfahren von FEDOROW 232f.
— von MONGE 234, 279f.
—, projektive 235f.
abgeflachter Kubus 447
abgeflachtes Dodekaeder 447
abgestumpfter Kubus 447
abgestumpftes Dodekaeder 447
— Ikosaeder 447
— Ikosododekaeder 447
— Kubooktaeder 447
— Oktaeder 447
— Tetraeder 447
Abstand, sphärischer 545
abstraktes Vielflach 411ff.
Abszissenachse 328
Achse 326
—, axonometrische 275
— einer Hyperbel, imaginäre 605
— — —, reelle 604
— eines Kreisbüschels 473
— eines Kreisnetzes 502
—, natürliche 275
— einer Parabel 614
— einer Speerinversion 505
Addition von Vektoren 303ff.
Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen 332f., 339
affin verknüpft 256
—e Geometrie 98f.
—e Transformation 56f., 70f., 87, 97, 115
—er Punktraum, n-dimensionaler 386
—es Dreibein 250
—es Netz 245
—es Zweibein 245
Ähnlichkeitsachse 90
Ähnlichkeitsgeometrie 97
Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise 497
Ähnlichkeitstransformation 56, 86ff., 94, 97, 514
Ähnlichkeitstransformation, zentrale 49f.
Algebra, LIESche 388
Anordnungsaxiome 24, 27
Anreißen 157
Antiprisma 444ff.
APOLLONIOS, Berührungsaufgabe von 522ff., 580ff.
—, Satz des 598
Applikationsachse 328
äquiaffine Transformation 288
Äquivalenzklasse 302
Äquivalenzrelation 301
Archimedischer Körper 446f.
Archimedisches Axiom 24, 30
— Vielflach 446f.
Assoziativgesetz 20, 79ff.
— für die Vektoraddition 308
Äste einer Hyperbel 577
Asymptoten einer Hyperbel 608
Aufriß 279
Aufrißebene 279
Außengebiet eines Vielecks 394
— eines Vielflachs 396
äußeres Produkt zweier Vektoren 388
autopolares Dreieck 541
Axialsymmetrie 298
Axiom, Archimedisches 24, 30
— von CANTOR 31
— von DEDEKIND 24, 31ff.
— von PASCH 27
Axiomatik 14
axiomatische Methode 12ff.
—r Aufbau der Geometrie 14
Axiome der Anordnung 24, 27
— der Bewegung 30
— des EUKLID 8
— der Geometrie 26ff.
— der Inzidenz 26
— der Stetigkeit 24, 30f.
Axiomensystem 14f.
Axonometrie, dimetrische 276
—, isometrische 276
—, orthogonale 274ff.
—, parallele 259
—, schiefe 258ff.

Axonometrie, trimetrische 276
—, zentrale 290f.
axonometrische Achse 275

Basis eines Kleinkreises 550
— eines Körpers 219
—, orthonormierte 381f.
bedingtes Bild 261
Begriffe der Geometrie 3ff.
Berührungsaufgabe von APOLLONIOS 522ff., 580ff.
Berührungsgeometrie der Kreise 524f.
Berührungs-Kreistransformation 520ff.
Berührungstransformation 119ff., 129, 520
Bewegung 10f., 30, 34, 55, 80f., 93, 97
— einer Sphäre 532ff.
Bewegungsgeometrie 97
Bild, bedingtes 261
—, freies 240ff.
—, gebundenes 240ff.
—, kombiniertes 279
— eines Punktes 46
—, vollständiges 256
Bipyramide 418
birationale Transformation 73f., 113ff.
Brennpunkt eines Kegelschnittes 575ff.
Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte 579
Brennpunktsehne einer Ellipse 591
Brennstrahl einer Ellipse 590
— einer Hyperbel 606
Brennweite einer Ellipse 587
BRIANCHON, Satz von 512f.
Büschel sich berührender Kreise 473
— konzentrischer Kreise 471ff.
— sich nicht schneidender Kreise 473
— sich schneidender Kreise 473

CANTORsches Axiom 31
CAUCHY, Satz von 422ff.
CEVA, Satz von 357

DANDELINSche Kugeln 578
darstellende Geometrie 236
DEDEKINDsches Axiom 24, 31ff.
deduktive Methode 3
Defekt eines sphärischen Dreiecks 548
Definitionen des EUKLID 7f.
Definitionsbereich 45f.
Dehnung 49, 506f.
DESARGUES, Satz von 124ff.
DESARGUESsche Gerade 288
— Konfiguration 287
Diagonalpunkt 282
Differenz von Vektoren 309f.
Dimension 321
Dimetrie, orthogonale 265, 276
dimetrische Axonometrie 276
Distributivgesetz 21
Dodekaeder 433
—, abgeflachtes 447
—, abgestumpftes 447
—, großes 453
—, regelmäßiges 436
Dodekaedrododekaeder 455
Dodekaedroikosaeder 455
Doppelpyramide 418
Doppelverhältnis 281
Drehung 47, 55, 77ff., 81
— einer Sphäre 533
Dreibein, affines 250
Dreieck 393
—, autopolares 541
—, sphärisches 374ff., 540
Dreitafelprojektion 280
Dreiteilung eines Winkels 221ff.
duale Vielflache 417ff., 436
Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie 122ff.
— der sphärischen Geometrie 536f.
— für Vielflache 419
Durchmesser einer Ellipse 590
— einer Parabel 617

Ebene, geschlossene 98f.
—, orientierte 358
—, projektive 107
Ecke eines Vielecks 393
— eines Vielflachs 395ff.
eigentliche Kreisreihe 500
—r Kegelschnitt 574
—s Kreisnetz 502
eineindeutige Abbildung 47
einfaches Vieleck 393
— Vielflach 396ff.
Einheitspunkt 284
Einheitsstrecke 94
Einheitsvektoren 328
Eintafel-Parallelprojektion 238ff.
Eintafelverfahren 235
Elemente des EUKLID 5ff.
Ellipse 577ff., 584ff.

Ellipsenzirkel 156
elliptische Kreisreihe 500
—s Kreisbündel 476
—s Kreisbüschel 473
—s Kreisnetz 502
entartete Inversion 478
— Speerinversion 505ff.
—r Kegelschnitt 573f.
entgegengesetzter Vektor 306
Erlanger Programm 97
Erweiterung, Grad einer 219
—, quadratische 215
—, zulässige 215
euklidische Geometrie 97
—r Punktraum 384
—r —, n-dimensionaler 386
—r Vektorraum 378
—r —, n-dimensionaler 386
Eulersche Gerade 59
— Zahl 401ff.
—r Kreis 60
—r Satz 400ff.
Exzentrizität eines Kegelschnittes 575ff.
Exzeß eines sphärischen Dreiecks 548

Fedorow, Abbildungsverfahren von 232f.
Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks 546ff.
— einer Ellipse 598
— einer sphärischen Figur 553f.
— eines Kleinkreises 550
—, orientierter 345ff.
— eines sphärischen Zweiecks 546
Fluchtlinie 285
Fluchtpunkt 286
Formel von Gauss-Bonnet 554f.
freies Bild 240ff.
Fünf-Elemente-Formel 559ff.
Fünftes Postulat des Euklid 11ff., 33
Funktion 45
Fußpunktkurve 127
Fußpunkttransformation 127ff., 131

Galilei-Transformation 103f.
Gauss-Bonnetsche Formel 554f.
gebundenes Bild 240ff.
gemeine Inversion 478
— Speerinversion 505ff.
Genauigkeit einer Konstruktion 159ff.
geodätische Krümmung 551f.
— Linie auf der Sphäre 545
Geometrie, affine 98f.
—, darstellende 236
—, euklidische 97
—, innere 428ff.
—, konforme 98f.
—, nichteuklidische 97
—, projektive 111ff.
geometrische Abbildung 46
— Konstruktion 155ff., 196ff., 206f.
— Transformation 47ff.
—r Ort 10, 178ff.
Gerade, Desarguessche 288
—, gerichtete 491
Geradenbündel 236
Geradenbüschel 116, 471
gerichtete Gerade 491
— Strecke 299ff.
—r Kreis 491f.
Geschlecht eines Vielflachs 401ff.
geschlossene Ebene 52, 72f., 98f.
gewöhnliche Inversion 478
— Speerinversion 505ff.
Gleichheit 301
gleichseitige Hyperbel 608
Gleichung der Ellipse 595
— der Hyperbel 607, 614
— der Parabel 616
Gleitspiegelung 83
Grad einer Erweiterung 219
große Achse einer Ellipse 585
—r Halbmesser einer Ellipse 585
—s Dodekaeder 453
—s Ikosaeder 454
—s Sterndodekaeder 453f.
Großkreis 530
Grundbegriffe der Geometrie 25
Grundgebilde 29
Grundkreis einer Inversion 479
Grundpunkte eines Kreisbüschels 474
Grundriß 279
Grundrißebene 279
Gruppe 20f., 377f.
— von Transformationen 132
— von geometrischen Transformationen 96ff.

Halbebene 29
Halbmesser einer Hyperbel, imaginärer 607
— — —, reeller 604
Halbraum 29
halbregelmäßiges Vielflach 439ff.

Halbsphäre 531
Halbstrahl 29
Hauptachse einer Ellipse 584
Hauptkreis 530
Hauptscheitel einer Ellipse 585
Heronsche Formel 354
Hexaeder 433
—, regelmäßiges 436
Höhen eines Dreiecks 339
Höhenlinie 235
homogene Koordinaten 112f.
Homologie 105ff., 117
Homothetie 49f., 55f., 67, 86f., 91
Homothetieachse 88
Hyperbel 577ff., 603ff.
—, gleichseitige 608
hyperbolische Inversion 53, 68f., 90f., 115
— Kreisreihe 500
—s Kreisbündel 476
—s Kreisbüschel 473
—s Kreisnetz 502

Identische Transformation 79
Ikosaeder 433
—, abgestumpftes 447
—, großes 454
—, regelmäßiges 436
Ikosododekaeder 447
—, abgestumpftes 447
imaginäre Achse einer Hyperbel 605
—r Halbmesser einer Hyperbel 607
induktive Methode 3
Inhalt eines sphärischen Vielecks 548
Innengebiet eines Vielecks 394
— eines Vielflachs 396
innere Geometrie 428ff.
Interpretation 15ff.
Invarianten bei Parallelprojektion 238
inverse Abbildung 91, 131
— Transformation 90f.
Inversion, entartete 478
—, gemeine 478
—, gewöhnliche 478
—, hyperbolische 53, 68f., 90f., 115
— am Kreis 19, 51, 57, 64ff., 68f., 72f., 87ff., 91, 115, 117ff., 137ff., 164ff., 477ff.
—, nichtentartete 479
—, spezielle 478
Involution 91
involutorische Transformation 91
Inzidenz 410ff.
Inzidenzaxiome 26
irreduzibel 217
Isohypse 235
Isometrie, orthogonale 266, 277f.
isometrische Axonometrie 276
isomorphe Vielflache 410
Isomorphie 23

Jacobische Identität 365

Kalotte 549
Kante eines Vielflachs 395ff.
Kardioide 128
Kegelfläche 573
Kegelschnitt 573
—, eigentlicher 574
—, entarteter 573f.
—, nichtentarteter 574
—e, konfokale 622
Kern eines Vielecks 451
— eines Vielflachs 451
kleine Achse einer Ellipse 587
—r Halbmesser einer Ellipse 587
—s Sterndodekaeder 452f.
Kleinkreis 530
— auf der Sphäre 549ff.
kombinatorische Eigenschaften eines Vielflachs 410
—r Typ eines Vielflachs 410
kombiniertes Bild 279
Kommutativgesetz 20, 79
— für die Vektoraddition 306
Kommutator 388
konfokale Kegelschnitte 622
konforme Geometrie 98f.
Kongruenz 30, 34
— sphärischer Dreiecke 542f.
konjugierte Durchmesser 249
— — einer Ellipse 597
— Kreisbüschel 475
— Richtungen 597
konkurrierende Punkte 236
Konstruktion eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden 224f.
— in beschränkter Ebene 175ff.
— mittels unzugänglicher Elemente 175ff.
—, geometrische 155ff., 196ff., 206f.
— allein mittels Lineal 167ff.
— mittels Lineal beschränkter Länge 173ff.
— von regelmäßigen Vielecken 225f.
— allein mittels Zirkel 164ff.

Konstruktion mittels Zirkel und Lineal 208f.
—en in der Ebene 196ff.
—en im Raum 198f.
Kontraktion in bezug auf eine Gerade 50, 56, 63f., 67, 115, 134f.
— in bezug auf einen Punkt 49, 55f., 67, 87, 115
Koordinaten 34f.
—, homogene 112f.
— eines Vektors 318ff., 382
Koordinatenachsen 328
Koordinatensystem 328
—, projektives 283ff.
Koordinator 157
Körner 157
Körper 21
—, Archimedischer 446f.
—, Platonischer 434ff.
—, Poinsotscher 451ff.
Kosinusformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck 565
Kosinussatz 337
Kotangensformel für sphärische Dreiecke 563
—n für das rechtwinklige sphärische Dreieck 564f.
Kote 235
kotierte Projektion 235
konvexes Vieleck 394
— sphärisches Vieleck 548
— Vielflach 396ff.
Kreis (als Menge von Geraden) 489ff.
—, gerichteter 491ff.
— (als Menge von Linienelementen) 518
— (als Menge von Punkten) 461ff.
Kreisachsengeometrie 133
Kreisachsentransformation 119ff., 132f.
Kreisberührungsgeometrie 133
Kreisberührungstransformation 132f.
Kreisbündel 476ff.
Kreisbüschel 472ff.
—, konjugierte 475
—, orthogonale 475
Kreisebene 487
Kreisgeometrie 98f., 119ff., 133
Kreisnetz 502ff.
—, eigentliches 502
—, elliptisches 502
—, hyperbolisches 502
—, parabolisches 502
Kreisreihe 500
—, eigentliche 500
—, elliptische 500
—, hyperbolische 500
—, parabolische 500
Kreistransformation 57, 72f., 87, 98f., 117ff., 487f.
Kreisverwandtschaft 57, 87, 98f., 117ff., 487f.
Krümmung, geodätische 551ff.
Kubooktaeder 447
—, abgestumpftes 447
Kubus, abgeflachter 447
—, abgestumpfter 447
Kurve zweiter Ordnung 583

Laguerresche Geometrie 517
— Transformation 514ff.
Länge eines Vektors 299
Leitkreis einer Speerinversion 508f.
Leitlinie eines Kegelschnittes 575ff.
Leitlinieneigenschaft der Kegelschnitte 577
Liesche Algebra 388
— Transformation 520ff.
Lineal 157, 163
—, zweiseitiges 172
linear abhängig 320f.
— unabhängig 320f.
—e Abbildung 112
—e Exzentrizität einer Ellipse 587
—e Transformation 70f.
Linienelement 129, 518ff.
Lorentz-Transformation 104

Mediane 324
Menelaos, Satz von 355
Metamathematik 205
metrische Eigenschaften eines Vielflachs 410
Mittelpunkt einer Ellipse 585
— eines Kreises 461
Mittelpunktsgleichung der Ellipse 595
mittlere Proportionale 182
Möbiussche Transformationen 487f.
Modell 15ff., 150
Monge, Abbildungsverfahren von 234, 279ff.
Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl 311f., 377f.

Näherungskonstruktion 189f.
natürliche Achse 275

n-dimensionaler affiner Punktraum 386
— euklidischer Punktraum 386
— Vektorraum 385f.
— euklidischer Vektorraum 386
Nebenachse einer Ellipse 587
Nebenkreis 530
Nebenscheitel einer Ellipse 587
Nebenwinkel 538
Netz konfokaler Kegelschnitte 623
— eines Vielflachs 420ff.
Neun-Punkte-Kreis 60
nichtentartete Inversion 479
—r Kegelschnitt 574
nichteuklidische Geometrie 121., 97
Normale einer Ellipse 602f.
Nullkreis 461
Nullvektor 306

Oktaeder 432
—, abgestumpftes 447
—, regelmäßiges 436
Operationsbereich 48
Ordinatenachse 328
Ordnungslinie 279
orientierte Ebene 358
—r Flächeninhalt 345ff.
—r Rauminhalt 359
Ort, geometrischer 178ff.
orthogonale Axonometrie 274ff.
— Dimetrie 265, 276
— Isometrie 266, 277f.
— Kreisbüschel 475
— Parallelprojektion 241
— Projektion 46
— Trimetrie 277
orthonormierte Basis 381f.
Ortsvektor 300

Pantograph 156
Parabel 577ff., 614ff.
parabolische Kreisreihe 500
—s Kreisbündel 476
—s Kreisbüschel 473
—s Kreisnetz 502
parallel 33
—e Axonometrie 259
Parallelaxiom 11, 33
Parallelogrammregel 307f.
Parallelprojektion 234, 236ff.
—, orthogonale 241
—, rechtwinklige 241
Parallelprojektion, schiefe 241
—, schräge 241
Paralleltransformation 119ff., 131
Parallelübertragung 551ff.
Parallelverschiebung 48, 55, 67, 75ff., 82, 91, 99ff., 297f., 300
Parameter eines Kegelschnittes 621
— eines Kleinkreises 550
— einer Parabel 614
PASCAL, Satz von 484f.
Pascalsche Schnecke 128
Platonischer Körper 434ff.
Platonisches Vielflach 434ff.
POHLKE und SCHWARZ, Satz von 252
POINSOTscher Körper 451ff.
POINSOTsches Vielflach 451ff.
polar konjugierte Punkte 532
Polardreieck 540f.
Polare 532
Polargleichung der Kegelschnitte 620f.
Polarität 122, 131, 140ff.
Pole eines Großkreises 532
Polyeder 394ff.
Polygon 393
PONCELET, Sätze von 612
Postulate des EUKLID 8f.
Potenz einer Geraden in bezug auf einen Kreis 496
— einer Inversion 478
— eines Kreisbündels 476
— eines Kreisnetzes 502
— eines Punktes in bezug auf einen Kreis 464f.
— einer Speerinversion 505
Potenzlinie zweier Kreise 465ff.
Potenzpunkt eines Kreisbündels 476
— dreier Kreise 468ff.
Prisma 395, 441
—, regelmäßiges 447
Prismatoid 444ff.
Produkt von Abbildungen 130ff.
— von Transformationen 74ff.
— eines Vektors mit einer Zahl 377f.
Projektion, kotierte 235
—, orthogonale 46
—, sekundäre 257
—, stereographische 52
— eines Vektors auf eine Achse 326f.
Projektionsachse 279
Projektionsebene 281
Projektionsformel 331

Projektionsrichtung 236
Projektionsstrahl 236, 281
Projektionszentrum 281
projektive Abbildung 584
— Abbildungsverfahren 235f.
— Ebene 107
— Geometrie 111ff.
— Transformation 111ff.
—s Koordinatensystem 283ff.
Proportionale, mittlere 182
—, vierte 182
Punkt-Kreisgeometrie 487
Punkt-Kreistransformation 487f.
Punktraum, affiner 386
—, euklidischer 384, 386
Pyramide 395

quadratische Erweiterung eines Zahlkörpers 215
Quadratur des Kreises 226f.

Radius eines Kreises 461
Raumbegriffe 40f.
Rauminhalt, orientierter 359
rechtwinklige Parallelprojektion 241
reelle Achse einer Hyperbel 604
—r Halbmesser einer Hyperbel 604
regelmäßiges Prisma 447
— Sternvieleck 450f.
— Sternvielflach 451ff.
— Vieleck 433f.
— Vieleck mit Selbstüberschneidung 450f.
— Vielflach 430ff.
Reihe sich berührender Kreise 500
— von Kreisen mit gemeinsamen Tangenten 500
— — — ohne gemeinsame Tangenten 500
Reißnadel 157
Reißschiene 156
Rekonstruktion 259
Rektifizierung eines Kreisbogens 190ff.
Relativitätsprinzip von EINSTEIN 104
— von GALILEI 102ff.
Resultierende 308
reziprokes Vielflach 438
Rhomboikosododekaeder 447
Rhombokubooktaeder 447
Richtkreis einer Ellipse 592
— einer Hyperbel 611

Satz des APOLLONIOS 598
— von BRIANCHON 512f.
Satz von CAUCHY 422ff.
— von CEVA 357
— von DESARGUES 124ff.
—, EULERscher 400ff.
— von MENELAOS 355
— von PASCAL 484f.
— von POHLKE und SCHWARZ 252
— des PYTHAGORAS für sphärische Dreiecke 563f.
— von STEINITZ 413ff.
Sätze von PONCELET für die Hyperbel 612
Scheitel einer Hyperbel 604
— einer Parabel 615
Scheitelkreis einer Ellipse 592
Scheiteltangente an eine Parabel 615
Scheitelwinkel 538
Schiebelehre 157
schiefe Axonometrie 258ff.
— Parallelprojektion 241
Schiefprodukt von Vektoren 348f.
Schmiegkreis einer Ellipse 602
schräge Parallelprojektion 241
Schwerpunkt eines Dreiecks 323
Seite eines Vielecks 393
— eines Vielflachs 394ff.
Seitenfläche eines Vielflachs 394ff.
Seitenhalbierende eines Dreiecks 323
Seitenkosinussatz für sphärische Dreiecke 376, 555ff.
Seitenriß 280
sekundäre Projektion 257
Selbstüberschneidung 393, 450
Sinusformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck 564
Sinussatz 338
— für sphärische Dreiecke 376, 558f.
Skalarprodukt 335ff.
— zweier Vektoren 378
Spatprodukt, n-dimensionales 386
— von Vektoren 359ff.
Speer 491
Speerinversion 504ff.
—, entartete 505ff.
—, gemeine 505ff.
—, gewöhnliche 505ff.
—, spezielle 505ff.
Speer-Kreisgeometrie 517
Speer-Kreistransformation 514ff.
Speertransformation 513
spezielle Inversion 478
— Speerinversion 505ff.

sphärische Geometrie 529ff.
— Kreisscheibe 549
—r Abstand 545
—r Mittelpunkt eines Kleinkreises 549
—r Radius eines Kleinkreises 549
—r Seitenkosinussatz 376
—r Sinussatz 376
—r Winkelkosinussatz 377
—s Dreieck 374ff., 540
—s Vieleck 548
—s —, konvexes 548
— Zweieck 540
Spiegelung an einer Ebene 298
— an einer Geraden 49, 55, 60ff., 67, 77ff., 83, 298, 478
— an einem Paar paralleler Geraden 53
— an einer Hyperbel 115
— an einem Kreis 51, 57, 64f., 68f., 72f., 91, 115, 137ff., 164ff., 479
— an einer Parabel 115
— an einem Punkt 49, 55, 60ff., 67, 75ff., 83, 297
— an einer Sphäre 533
Stauchung auf eine Gerade 596
Stauchungsachse 595
Stauchungsverhältnis 595
Steinitz, Satz von 413ff.
stereographische Projektion 15ff., 52
Stern einer Ecke 438f.
— einer Fläche 438f.
Sterndodekaeder, großes 453f.
—, kleines 452f.
Sternvieleck, regelmäßiges 450f.
Sternvielflach, regelmäßiges 451ff.
stetige Transformationen 54
Stetigkeit 9f.
Stetigkeitsaxiome 24, 30f.
Strecke 27
—, gerichtete 299ff.
Subtraktion von Vektoren 309f.
sukzessive Approximation 193ff.
Summe von Vektoren 303ff., 377
Symmetrie 60ff., 91
— der Ordnung k 61
Symmetrieachse 60ff.
Symmetriezentrum 60ff.

Tangensformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck 564f.
Tangente an eine Ellipse 589
— an eine Hyperbel 610
Tangente an eine Parabel 616
Tangentenentfernung 494
Teilverhältnis 355
Tetraeder 395, 433
—, abgestumpftes 447
—, regelmäßiges 436
topologische Eigenschaften eines Vielflachs 410
—r Typ eines Vielflachs 410
Transformation, affine 56f., 70f., 87, 97, 115
—, äquiaffine 288
—, birationale 73f., 113ff.
—, geometrische 47ff.
—, identische 79
—, inverse 90f.
—, involutorische 91
—, Laguerresche 514ff.
—, lineare 70f.
—, Liesche 520ff.
—, Möbiussche 487f.
—, projektive 111ff.
—, unimodulare 288
Transformationsgruppe 96ff.
Trimetrie, orthogonale 277
trimetrische Axonometrie 276

Übertragungsprinzip 133ff.
Umfang eines Kleinkreises 550
Umorientierung 505f.
Umriß 262
Unabhängigkeit der Axiome der Geometrie 39f.
— eines Axiomensystems 38
unimodulare Transformation 288
Unmöglichkeitsbeweis 205
Urbild 91

Vektor 298ff.
—, entgegengesetzter 306
Vektoraddition 303ff., 377
Vektorprodukt 362ff.
—, n-dimensionales 387
Vektorraum 377ff.
—, euklidischer 378
—, n-dimensionaler 358f.
Vektorsubtraktion 309f.
verbundene Elemente 254
Verdoppelung eines Würfels 220f.
Verzerrungskoeffizienten 275
Vieleck 393
—, einfaches 393

Vieleck, konvexes 394
—, regelmäßiges 433f.
—, zerfallendes 450
Vielflach 394ff.
—, abstraktes 410ff.
—, Archimedisches 446f.
—, einfaches 396ff.
— vom Geschlecht Null 401
—, halbregelmäßiges 439ff.
—, konvexes 396ff.
—, Platonisches 434ff.
—, Poinsotsches 451ff.
—, regelmäßiges 430ff.
—, reziprokes 438
—, Netz eines 420ff.
—e, duale 417ff., 436
Viereck 393
—, vollständiges 251
vierte Proportionale 182
vollständiges Bild 256
— Viereck 251
Vollständigkeit der Axiome der Geometrie 34ff.
— eines Axiomensystems 23ff.
Vollständigkeitsaxiom 24, 34

Wertebereich 46
Widerspruchsfreiheit der Axiome der Geometrie 34ff.
— eines Axiomensystems 21ff.
Winkel zwischen zwei Kreisen 483f., 494
— auf einer Sphäre 537f.
Winkelkosinussatz für sphärische Dreiecke 377, 561f.
Winkelmesser 156, 163f.
Würfel 436

Zeichendreieck 156, 163
Zeicheninstrument 155ff.
Zeichenmaschine 156
Zentralachse einer Kreisreihe 500
zentrale Ähnlichkeitstransformation 49f.
— Axonometrie 290f.
Zentralprojektion 107, 234, 280ff., 584
Zentralsymmetrie 297
Zentrum einer Hyperbel 605
— einer Inversion 478
— eines Kreises 461
— eines Kreisbündels 476
— einer Kreisreihe 500
zerfallendes Vieleck 450
Zirkel 156, 163
zulässige Erweiterung eines Zahlkörpers 215
zusammengesetzte Funktion 74
Zweibein, affines 245
Zweieck, sphärisches 540
zweiseitiges Lineal 172
Zweitafelverfahren 279
Zykel 491f.
Zyklographie 231f.