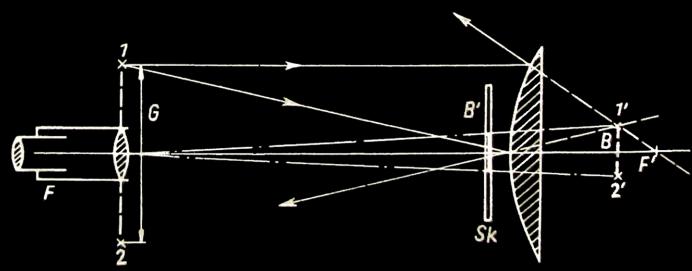
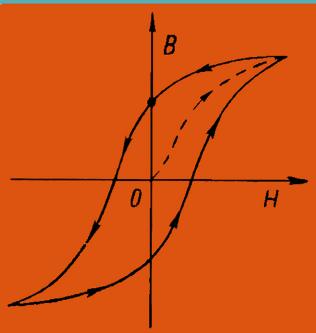
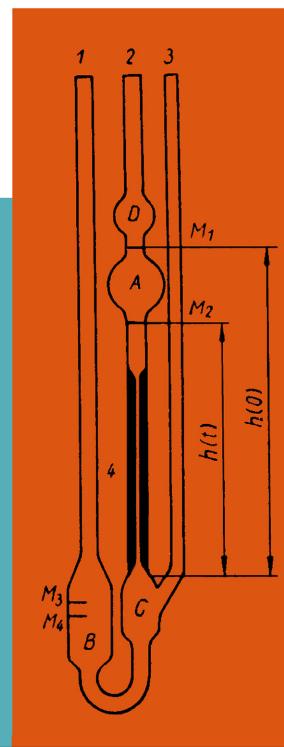
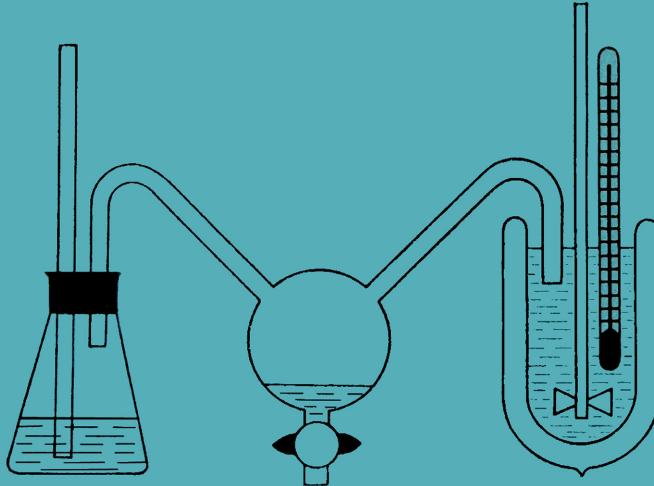


# Physikalisches Praktikum



# **Physikalisches Praktikum für Anfänger**

---

Begründet von

PROF. DR. W. ILBERG†, Leipzig

Herausgegeben von

DR. M. KRÖTZSCH, Leipzig

Autoren

DR. K. KREHER, Leipzig

DR. M. KRÖTZSCH, Leipzig

PROF. DR. H. A. SCHNEIDER, Freiberg

---

4., erweiterte und bearbeitete Auflage

Mit 213 Abbildungen



BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT 1977

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977

4. Auflage

VLN 294-375/68/77 · LSV 1104

Lektor: Dipl.-Math. Hellmuth Neubert

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig - III/18/97

Bestell-Nr. 665 8449

DDR 24,50 M

# Vorwort zur ersten Auflage

Die „Grundaufgaben des physikalischen Praktikums“ von *Schaefer, Bergmann und Kliefoth* haben durch mehrere Jahrzehnte in zahlreichen Auflagen und Neudrucken viele Generationen von Studenten erfolgreich durch das physikalische Praktikum an unseren Hoch- und teilweise auch Fachschulen geführt. Wenngleich auch bei jeder neuen Auflage einige als wünschenswert erkannte Änderungen und Ergänzungen angebracht worden sind, so verlangte doch die in den letzten Jahren erfolgte Neuordnung der Ausbildung künftiger Physiker und anderer Naturwissenschaftler sowie der Lehrerstudenten eine eingehende Überarbeitung sowohl des Versuchsbestandes als z. T. auch der Darstellung. Ebenso mußte die Tatsache Berücksichtigung finden, daß einfachere Versuche heute vielfach schon im Schulunterricht als Schülerversuche durchgeführt werden, so daß sich ihre Wiederholung im Physikalischen Praktikum der Hochschule zumeist erübrigkt. Im Laufe der Vorarbeiten für eine in solchem Sinne beabsichtigte Neubearbeitung des genannten Lehrbuches zeigte sich, daß diese der Herausgabe eines völlig neu geschriebenen Werkes entsprechen würde, so daß es durchaus berechtigt erschien, im Titel den Bezug auf das frühere Werk fallenzulassen.

Eine gewisse Schwierigkeit besteht bei der Schaffung eines Praktikumsbuches immer darin, eine angemessene Auswahl von wirklich zweckmäßigen Versuchen zu treffen. Dies ist um so schwerer, als an den verschiedenen Ausbildungsstätten sich im Laufe der Zeit auch verschiedene Aufgabenbestände herausgebildet haben. Um hierüber zunächst eine Übersicht zu bekommen, wurden zahlreiche Universitäts- und Fachschulinstitute innerhalb der Deutschen Demokratischen Republik um Mitteilung des derzeitigen Versuchsbestandes gebeten. Den betreffenden Praktikumsvorständen, die uns durch die Beantwortung unserer Fragen entgegenkommend unterstützten, sei auch an dieser Stelle herzlich gedankt. Als Ergebnis der Umfrage kann festgestellt werden, daß, wie zu erwarten, gewisse Grundversuche mit geringfügigen Varianten mehr oder weniger überall vorhanden sind, wozu je nach Eigenart des betreffenden Instituts bzw. der zuständigen Praktikumsleiter noch unterschiedliche Spezialversuche kommen. Es mußte nun Aufgabe des vorliegenden Praktikumsbuches sein, durch die aufgenommenen Versuchsbeschreibungen die wichtigsten Grundversuche möglichst weitgehend zu erfassen, wobei ein Verzicht auf speziellere Aufgaben in Kauf genommen werden konnte, zumal für diese an den betreffenden Instituten Einzelbeschreibungen vorhanden sein werden. Ebenso wird es öfters nütz-

lich sein, dem Studenten die örtlich unterschiedlichen Abweichungen von der Versuchsbeschreibung in vorliegendem Buch durch schriftliche Anweisung oder auch nur mündlich zu erläutern. Herausgeber und Mitarbeiter haben es für zweckmäßig angesehen, sachlich verwandte Versuche zu Versuchsgruppen zu vereinigen, denen jeweils allgemeine Ausführungen vorangestellt sind, die dem Studenten den zugrunde liegenden Stoff in großen Zügen in Erinnerung bringen sollen. Dabei wurde Wert auf eine möglichst gründliche theoretische Durchdringung gelegt. Daß es nicht die Aufgabe sein kann, hiermit ein Lehrbuch zu ersetzen, versteht sich von selbst. Zu den einzelnen Aufgaben werden anschließend noch die speziellen Grundlagen gegeben und schließlich die Versuchsdurchführung beschrieben. Der zunehmenden Bedeutung der Atomphysik entsprechend wurden auch einige einfache Versuche aus diesem Gebiet mit aufgenommen, die sich mit Praktikumsmitteln durchführen lassen.

Kritische Beurteilung des unmittelbar gemessenen oder aus Messungen gefundenen Resultates ist grundsätzliche Forderung jeder wissenschaftlichen Arbeit und außerdem von hohem erzieherischen Wert. Es sollte daher stets im Anschluß an jeden Versuch eine Fehlerrechnung oder wenigstens Fehlerabschätzung durchgeführt werden.

Es ist kaum vermeidbar, daß ein neu geschriebenes Buch noch Mängel und Fehler aufweist. Herausgeber und Verfasser wären für entsprechende Hinweise dankbar, um sie bei einer späteren Auflage berücksichtigen zu können.

Leipzig, im Januar 1966

Waldemar Ilberg

## Vorwort zur vierten Auflage

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage haben die physikalischen Praktika sowohl in der Aufgabenstellung als auch in der Ausrüstung große Änderungen erfahren. Der Praktikant soll heute vom Beginn seines Studiums an moderne Meßverfahren und wissenschaftliche Geräte kennenlernen, mit denen er in der Praxis konfrontiert wird. Außerdem soll er mit wichtigen Meßmethoden vertraut gemacht werden, die der Bestimmung physikalischer Stoffeigenschaften dienen. Versuche, in denen dargestellt wird, wie man eine physikalische Größe im Prinzip messen kann, treten immer mehr in den Hintergrund. Der Umfang des Buches konnte und sollte nicht erheblich vergrößert werden. Daher waren einige Streichungen und Kürzungen notwendig, um die Beschreibung aller neu vorgesehenen Versuche zu ermöglichen.

Das vorliegende Werk ist als Arbeitsmaterial für das Einführungspraktikum und das Meßpraktikum konzipiert. Für das Elektronikpraktikum und das Fortgeschrittenenpraktikum stellt die Beherrschung der behandelten Versuche nur eine Voraussetzung dar.

An der Gestaltung der vierten Auflage haben sich zusätzlich drei Mitarbeiter beteiligt, die über langjährige Erfahrungen in der experimentellen Ausbildung von Studenten der Karl-Marx-Universität verfügen. Herr *F. Thomschke* hat den Abschn. W. 1.0 und die Versuche W. 1.1, W. 1.3, W. 1.4 und W. 4.4 geschrieben. Herr *Dr. A. Mende* hat den Abschn. E. 3 gründlich überarbeitet, und Herr *Dr. H. Schulze* hat die Versuche M. 8.2, O. 1.4 und O. 3.4 verfaßt.

Herrn *Dr. W. Rohmann* (Friedrich-Schiller-Universität, Jena) gebührt Dank für eine Reihe wertvoller Hinweise. Außerdem möchte der Herausgeber seiner Frau, *Gertrud Krötzsch*, herzlich danken, ohne deren tatkräftige Mitarbeit eine Einhaltung des Abgabetermins für das Manuskript der viersten Auflage nicht möglich gewesen wäre.

Herausgeber und Autoren hoffen, daß die vierte Auflage in der Versuchsauswahl und in der Darstellung den Wünschen der Benutzer – Dozenten wie Studenten – entspricht.

Leipzig, im Juli 1977

Manfred Krötzsch

# Inhalt

|  |    |
|--|----|
| Einführung . . . . .   | 11 |
| 1.1. Größen und Einheiten . . . . .  | 11 |
| 1.2. Maßsystem . . . . .   | 12 |
| 1.3. Messungen und Meßfehler . . . . .   | 14 |
| 1.4. Fehlertheorie . . . . .   | 16 |
| 1.4.1. Fehlerabschätzung und Größtfehler . . . . .                                 | 16 |
| 1.4.1.1. Unmittelbare Messung . . . . .  | 16 |
| 1.4.1.2. Mittelbare Messung (Fehlerfortpflanzung) . . . . .                        | 17 |
| 1.4.2. Statistische Fehlertheorie . . . . .  | 18 |
| 1.4.2.1. Unmittelbare Messung . . . . .  | 18 |
| 1.4.2.2. Mittelbare Messung (Fehlerfortpflanzung) . . . . .                        | 22 |
| 1.4.3. Überprüfung des statistischen Charakters einer Meßreihe . . . . .           | 23 |
| 1.4.4. Mittelwert und Fehler von Meßwerten unterschiedlicher Genauigkeit . . . . . | 25 |
| 1.5. Auswertung von Meßresultaten . . . . .  | 26 |
| 1.5.1. Rechenverfahren . . . . .   | 26 |
| 1.5.2. Rechnen mit kleinen Größen . . . . .  | 26 |
| 1.5.3. Graphische Darstellungen . . . . .  | 27 |
| 1.5.4. Ausgleichsrechnung . . . . .  | 32 |
| 1.6. Versuchsvorbereitung und Protokollführung . . . . .                           | 35 |
| Mechanik . . . . .   | 38 |
| M. 1. Wägung . . . . .   | 38 |
| M. 1.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 38 |
| M. 1.0.1. Zweischalenaage . . . . .  | 38 |
| M. 1.0.2. Regeln für das Arbeiten mit Analysenwaagen . . . . .                     | 43 |
| M. 1.0.3. Einschalen-Analysenwaage . . . . .                                       | 44 |
| M. 1.1. Empfindlichkeit einer Zweischalenaage . . . . .                            | 45 |
| M. 1.2. Absolute Wägung . . . . .  | 45 |
| M. 2. Dichte . . . . .   | 46 |
| M. 2.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 46 |
| M. 2.1. Auftriebsmethode . . . . .   | 49 |
| M. 2.2. Mohr-Westphalsche Waage . . . . .  | 51 |
| M. 2.3. Pyknometer . . . . .   | 54 |
| M. 2.4. Relative Dampfdichte nach <i>Dumas</i> . . . . .                           | 57 |
| M. 2.5. Relative Dampfdichte nach <i>V. Meyer</i> . . . . .                        | 60 |
| M. 2.6. Relative Gasdichte nach <i>Bunsen</i> . . . . .                            | 64 |
| M. 3. Pendel . . . . .   | 67 |
| M. 3.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 67 |
| M. 3.0.1. Physikalisches und mathematisches Pendel . . . . .                       | 67 |
| M. 3.0.2. Drehtisch und Torsionspendel . . . . .                                   | 70 |
| M. 3.0.3. Lösung der Bewegungsgleichungen . . . . .                                | 70 |

|  |     |
|--|-----|
| M. 3.0.4. Satz von <i>Steiner</i>  | 72  |
| M. 3.0.5. Reduzierte Pendellänge   | 73  |
| M. 3.1. Fadenpendel  | 74  |
| M. 3.2. Reversionspendel   | 76  |
| M. 3.3. Gekoppelte Pendel  | 82  |
| M. 3.4. Trägheits- und Direktionsmomente   | 86  |
| <br>M. 4. Kreisel  | 91  |
| M. 4.0. Allgemeine Grundlagen  | 91  |
| M. 4.0.1. Kreiselarten   | 91  |
| M. 4.0.2. Präzession des symmetrischen Kreisels  | 91  |
| M. 4.0.3. Nutation des symmetrischen Kreisels  | 93  |
| M. 4.1. Gyroskop   | 96  |
| <br>M. 5. Elastische Eigenschaften fester Körper   | 99  |
| M. 5.0. Allgemeine Grundlagen  | 99  |
| M. 5.1. Elastizitätsmodul  | 101 |
| M. 5.1.1. Dehnung  | 102 |
| M. 5.1.2. Biegung  | 103 |
| M. 5.2. Torsionsmodul  | 108 |
| M. 5.2.1. Statische Meßmethode   | 110 |
| M. 5.2.2. Dynamische Meßmethode  | 111 |
| M. 5.3. Schraubenfeder   | 113 |
| M. 5.4. Poissonsche Zahl   | 116 |
| <br>M. 6. Oberflächenspannung  | 120 |
| M. 6.0. Allgemeine Grundlagen  | 120 |
| M. 6.1. Abreißmethode  | 122 |
| M. 6.2. Steighöhenmethode  | 123 |
| <br>M. 7. Viskosität und Strömungsprobleme   | 128 |
| M. 7.0. Allgemeine Grundlagen  | 128 |
| M. 7.0.1. Bernoullische Gleichung  | 128 |
| M. 7.0.2. Definition der Viskosität  | 130 |
| M. 7.0.3. Gesetz von <i>Hagen</i> und <i>Poiseuille</i>                                  | 130 |
| M. 7.1. Kugelfallmethode nach <i>Stokes</i>  | 133 |
| M. 7.2. Höppler-Viskosimeter   | 135 |
| M. 7.3. Ubbelohde-Viskosimeter   | 137 |
| M. 7.4. Rotationsviskosimeter  | 140 |
| M. 7.5. Prandtlisches Staurohr   | 143 |
| M. 7.6. Reynoldssche Zahlen  | 145 |
| <br>M. 8. Schallwellen   | 147 |
| M. 8.0. Allgemeine Grundlagen  | 147 |
| M. 8.1. Kundtsches Rohr  | 152 |
| M. 8.2. Beugung des Lichts an Ultraschallwellen (Debye-Sears-Effekt)                     | 155 |
| <br>Wärmelehre   | 159 |
| W. 1. Temperaturmessung  | 159 |
| W. 1.0. Allgemeine Grundlagen  | 159 |
| W. 1.0.1. Temperatur, Maßeinheiten und Temperaturskalen                                  | 159 |
| W. 1.0.2. Temperaturmessung mittels mechanischer temperaturabhängiger Stoffeigenschaften | 160 |

---

|  |     |
|--|-----|
| W. 1.0.3. Temperaturmessung mittels elektrischer temperaturabhängiger Stoffeigenschaften . . . . . | 163 |
| W. 1.0.4. Temperaturmessung mittels optischer temperaturabhängiger Stoffeigenschaften . . . . .    | 165 |
| W. 1.0.5. Thermostat und Kontaktthermometer . . . . .  | 166 |
| W. 1.1. Ausdehnungskoeffizient einer Flüssigkeit . . . . .   | 168 |
| W. 1.2. Gasthermometer . . . . .   | 169 |
| W. 1.3. Widerstandsthermometer . . . . .   | 172 |
| W. 1.4. Pyrometer . . . . .  | 173 |
| <br>W. 2. Zustandsänderungen und Phasenumwandlungen . . . . .                                      | 174 |
| W. 2.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 174 |
| W. 2.0.1. Zustandsgleichungen . . . . .  | 174 |
| W. 2.0.2. Energiesatz und Adiabatengleichung . . . . .   | 178 |
| W. 2.0.3. Dampfdruck . . . . .   | 180 |
| W. 2.1. Bestimmung der relativen Molekülmasse nach <i>Menzies</i> . . . . .                        | 183 |
| W. 2.2. Isothermen eines Stoffes . . . . .   | 186 |
| W. 2.3. Versuch von <i>Clément</i> und <i>Desormes</i> . . . . .                                   | 188 |
| W. 2.4. Dampfdruckkurve und Verdampfungswärme . . . . .  | 191 |
| <br>W. 3. Bestimmung von Wärmemengen (Kalorimetrie) . . . . .                                      | 193 |
| W. 3.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 193 |
| W. 3.1. Wärmekapazität eines Kalorimeters . . . . .  | 195 |
| W. 3.2. Spezifische Wärmekapazität von Festkörpern und Flüssigkeiten . . . . .                     | 197 |
| W. 3.2.1. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester Stoffe . . . . .                       | 197 |
| W. 3.2.2. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Flüssigkeiten . . . . .                   | 199 |
| W. 3.3. Umwandlungswärmen . . . . .  | 201 |
| W. 3.3.1. Spezifische Schmelzwärme des Eises . . . . .   | 201 |
| W. 3.3.2. Spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes . . . . .                               | 202 |
| <br>W. 4. Systeme mit verschiedenen Komponenten . . . . .  | 203 |
| W. 4.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 203 |
| W. 4.0.1. Gibbssche Phasenregel . . . . .  | 203 |
| W. 4.0.2. Lösungen . . . . .   | 204 |
| W. 4.0.3. Legierungen . . . . .  | 209 |
| W. 4.1. Siedepunktserhöhung . . . . .  | 211 |
| W. 4.2. Gefrierpunktserniedrigung . . . . .  | 213 |
| W. 4.3. Thermische Analyse . . . . .   | 214 |
| W. 4.4. Mikrothermoanalyse . . . . .   | 217 |
| <br>Elektrizitätslehre . . . . .   | 222 |
| E. 1. Widerstände . . . . .  | 222 |
| E. 1.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 222 |
| E. 1.0.1. Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz . . . . .                                    | 222 |
| E. 1.0.2. Kirchhoffsche Regeln . . . . .   | 223 |
| E. 1.0.3. Schaltung von Widerständen . . . . .   | 223 |
| E. 1.0.4. Spezifischer Widerstand, Temperaturabhängigkeit des Widerstandes . . . . .               | 224 |
| E. 1.0.5. Ausführungsformen elektrischer Widerstände . . . . .                                     | 226 |
| E. 1.1. Bestimmung von Widerständen durch Strom- und Spannungsmessung . . . . .                    | 227 |
| E. 1.2. Wheatstonesche Brücke . . . . .  | 233 |
| E. 1.3. Thomson-Brücke . . . . .   | 238 |
| E. 1.4. Entladung von Kondensatoren . . . . .  | 241 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>E. 2. Gleichstromquellen . . . . .</b>                                      | <b>244</b> |
| E. 2.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 244        |
| E. 2.1. Strom-Spannungs-Charakteristik einer Stromquelle . . . . .             | 247        |
| E. 2.2. Spannungsmessung durch Kompensation . . . . .                          | 251        |
| <b>E. 3. Elektronische Bauelemente . . . . .</b>                               | <b>256</b> |
| E. 3.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 256        |
| E. 3.0.1. Elektronenröhren . . . . .   | 256        |
| E. 3.0.2. Halbleiterdiode und Transistor . . . . .                             | 260        |
| E. 3.1. Kennlinie einer Hochvakuumdiode . . . . .                              | 265        |
| E. 3.2. Kennlinien von Triode, Tetrode und Pentode . . . . .                   | 266        |
| E. 3.3. Kennlinien von Halbleiterdioden . . . . .                              | 267        |
| E. 3.4. Kennlinienfeld des Transistors . . . . .                               | 268        |
| <b>E. 4. Elektrische Ströme und Magnetismus . . . . .</b>                      | <b>269</b> |
| E. 4.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 269        |
| E. 4.0.1. Magnetisierung . . . . .   | 269        |
| E. 4.0.2. Kraftwirkung magnetischer Felder auf elektrische Ströme . . . . .    | 273        |
| E. 4.1. Drehspulgalvanometer . . . . .   | 274        |
| E. 4.2. Ballistisches Galvanometer . . . . .                                   | 285        |
| E. 4.3. Kriechgalvanometer – Fluxmeter . . . . .                               | 290        |
| E. 4.4. Elektronenstrahlferroskop . . . . .                                    | 293        |
| E. 4.5. Hall-Effekt . . . . .  | 298        |
| <b>E. 5. Wechselstromwiderstände und elektrische Schwingungen . . . . .</b>    | <b>304</b> |
| E. 5.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 304        |
| E. 5.0.1. Komplexe Darstellung von Wechselstromgrößen . . . . .                | 304        |
| E. 5.0.2. Schaltung von Blindwiderständen . . . . .                            | 308        |
| E. 5.0.3. Die Dielektrizitätskonstante . . . . .                               | 309        |
| E. 5.0.4. Elektrische Schwingungen . . . . .                                   | 310        |
| E. 5.1. Induktivitätsmessungen . . . . .                                       | 315        |
| E. 5.2. Kapazitätsmessungen mit einer Wechselstrombrücke . . . . .             | 318        |
| E. 5.3. Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten . . . . .   | 322        |
| E. 5.4. Ermittlung von Phasenbeziehungen zwischen Strom und Spannung . . . . . | 324        |
| E. 5.5. Strom- und Spannungsresonanz . . . . .                                 | 328        |
| <b>Optik und Atomphysik . . . . .</b>  | <b>331</b> |
| <b>O. 1. Linsen und Linsensysteme . . . . .</b>                                | <b>331</b> |
| O. 1.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 331        |
| O. 1.1. Krümmungsradius und Brennweite dünner Linsen . . . . .                 | 336        |
| O. 1.2. Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems . . . . .               | 340        |
| O. 1.3. Lupe und Mikroskop . . . . .   | 342        |
| O. 1.4. Fernrohr . . . . .   | 346        |
| <b>O. 2. Interferenz, Kohärenz und Beugung . . . . .</b>                       | <b>349</b> |
| O. 2.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 349        |
| O. 2.1. Newtonsche Ringe . . . . .   | 356        |
| O. 2.2. Beugung am Spalt und Doppelspalt . . . . .                             | 358        |
| O. 2.3. Beugung am Gitter . . . . .  | 362        |
| <b>O. 3. Brechungsindex, Dispersion und Absorption . . . . .</b>               | <b>367</b> |
| O. 3.0. Allgemeine Grundlagen . . . . .  | 367        |
| O. 3.0.1. Brechungsindex und Dispersion . . . . .                              | 367        |

|                 |   |     |
|-----------------|---|-----|
| O. 3.0.2.       | Extinktion und Absorption . . . . .                                 | 369 |
| O. 3.1.         | Refraktometer . . . . .   | 371 |
| O. 3.2.         | Prismenspektrometer . . . . .                                       | 375 |
| O. 3.3.         | Interferometer . . . . .  | 379 |
| O. 3.4.         | Spektralphotometer . . . . .  | 383 |
| O. 4.           | Polarisation . . . . .  | 386 |
| O. 4.0.         | Allgemeine Grundlagen . . . . .                                     | 386 |
| O. 4.1.         | Polarisationswinkel und Reflexionsvermögen . . . . .                | 389 |
| O. 4.2.         | Drehung der Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes . . . . . | 391 |
| O. 5.           | Strahlungsmessung und Photometrie . . . . .                         | 392 |
| O. 5.0.         | Allgemeine Grundlagen . . . . .                                     | 392 |
| O. 5.1.         | Photozelle . . . . .  | 400 |
| O. 5.2.         | Spektrale Empfindlichkeit lichtelektrischer Strahlungsempfänger     | 403 |
| O. 5.3.         | Plancksches Strahlungsgesetz . . . . .                              | 405 |
| O. 5.4.         | Photometrie . . . . .   | 407 |
| O. 6.           | Fundamentalkonstanten der Physik . . . . .                          | 410 |
| O. 6.0.         | Allgemeine Grundlagen . . . . .                                     | 410 |
| O. 6.1.         | Elementarladung nach <i>Millikan</i> . . . . .                      | 412 |
| O. 6.2.         | Spezifische Ladung des Elektrons . . . . .                          | 414 |
| O. 6.3.         | Franck-Hertz-Versuch . . . . .                                      | 418 |
| O. 6.4.         | Rydberg-Konstante und Plancksches Wirkungsquantum . . . . .         | 420 |
| O. 7.           | Radiometrie . . . . .   | 423 |
| O. 7.0.         | Allgemeine Grundlagen . . . . .                                     | 423 |
| O. 7.0.1.       | Wechselwirkung von Strahlung und Stoff . . . . .                    | 423 |
| O. 7.0.2.       | Strahlungsdetektoren . . . . .                                      | 425 |
| O. 7.0.3.       | Gesetz des radioaktiven Zerfalls . . . . .                          | 430 |
| O. 7.1.         | Diffusionsnebelkammer . . . . .                                     | 431 |
| O. 7.2.         | Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr . . . . .                  | 432 |
| O. 7.3.         | Messungen mit der Ionisationskammer . . . . .                       | 434 |
| O. 7.4.         | Aktivierungsanalyse . . . . .                                       | 437 |
| Tabellen        | . . . . .   | 443 |
| Sachverzeichnis | . . . . .   | 455 |

# Einführung

## 1.1. Größen und Einheiten

Messungen dienen zur Bestimmung physikalischer Größen, wie Längen, Zeiten, Massen, Stromstärken usw.

Eine Größe ist durch die Angabe der Maßzahl und der gewählten Einheit bestimmt; man kann sie in Form eines Produktes aus Maßzahl und Einheit schreiben, wobei die Aufteilung in verschiedener Weise erfolgen kann. Beispielsweise bedeuten 5 m (Maßzahl 5, Einheit „das Meter“) und 500 cm die gleiche Größe. Große Einheiten ergeben kleine Maßzahlen und umgekehrt.

Durch physikalische Messungen werden jedoch nicht einzelne Größen ermittelt, sondern auch Zusammenhänge zwischen mehreren Größen, die sich als Gleichungen darstellen lassen. Wir schreiben sie in der Form von *Größengleichungen*, in denen jedes Formelzeichen das Produkt aus Maßzahl und Einheit bedeutet.

Beispielsweise gilt für die Abhängigkeit der Schwingungsdauer  $T$  eines mathematischen Pendels von seiner Länge  $l$  die Formel  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$  ( $g$  Schwerkraftbeschleunigung). Setzt man hier  $l = 1$  m und  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> ein, so ergibt sich  $T = 2\pi \sqrt{1/(9,81 \text{ m/s}^2)} = 2,006$  s. Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man  $l = 100$  cm und  $g = 981$  cm/s<sup>2</sup> einsetzt.

Die Verwendung von Größengleichungen bringt folgende Vorteile:

1. Größengleichungen sind unabhängig vom Maßsystem.
2. Sie gelten unabhängig von den Einheiten, die für die einzelnen Größen gewählt werden. – Im allgemeinen wird man allerdings, wie im obigen Beispiel, für Größen gleicher Dimension gleiche Einheiten wählen. In Sonderfällen kann man jedoch ohne weiteres von dieser Regel abweichen. Zum Beispiel wird der spezifische Widerstand  $\rho$  eines Drahtes nach der Formel  $\rho = R \cdot A/l$  berechnet ( $R$  elektrischer Widerstand,  $A$  Querschnitt,  $l$  Länge). Setzt man hier  $A$  in mm<sup>2</sup> und  $l$  in m ein, so ergibt sich  $\rho$  in  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ . Diese Form ist in der Praxis oft bequemer als die Angabe in  $\Omega \text{ m}$ , die man erhält, wenn man alle Längen in m angibt.
3. Eine Umrechnung auf andere Einheiten ist leicht möglich, indem man mit Einheiten wie mit Zahlen rechnet.  
Beispielsweise ist  $1 \Omega \text{ mm}^2/\text{m} = 1 \Omega \cdot \frac{10^{-6} \text{ m}^2}{1 \text{ m}} = 10^{-6} \Omega \text{ m} = 10^{-4} \Omega \text{ cm}$ .
4. Größengleichungen gestatten in Form von Dimensionsbetrachtungen einfache Kontrollen von Formeln, da auf beiden Seiten einer Gleichung

Größen gleicher Dimension stehen müssen. Insbesondere müssen Summanden gleiche Dimensionen haben, Exponenten und Argumente von Winkelfunktionen dimensionslos sein usw. Ist dies nicht der Fall, so liegt mit Sicherheit ein Fehler vor. (Fehler in der Zahlenrechnung lassen sich natürlich auf diese Weise nicht ermitteln.)

## 1.2. Maßsystem

Wir benutzen das international vereinbarte und in der DDR gesetzlich vorgeschriebene Maßsystem SI (Système International d'Unités), das sich auf folgenden Grundeinheiten aufbaut:

1. Einheit der Länge ist das Meter (m).

1 m ist gleich 1 650 763,73 Vakuum-Wellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus  $2p_{10}$  und  $5d_5$  des Nuklids Krypton 86 entspricht.

Praktisch (mit einer Genauigkeit von  $2 \cdot 10^{-7}$ ) ist dies identisch mit dem Abstand der beiden mittleren Markierungen des internationalen Meterprototyps bei 0 °C und Atmosphärendruck.

2. Einheit der Masse ist das Kilogramm (kg).

1 kg ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

3. Einheit der Zeit ist die Sekunde (s).

1 s ist die Dauer von 9 192 631 770 Perioden der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur niveaus des Grundzustandes des Nuklids Cäsium 133 entspricht.

Praktisch (mit einer Genauigkeit von  $10^{-6}$ ) ist dies identisch mit der Dauer des 86400ten Teils eines mittleren Sonnentages.

4. Einheit der Stromstärke ist das Ampere (A).

1 A ist die Stärke des zeitlich unveränderlichen Stromes durch zwei geradlinige parallele unendlich lange Leiter der relativen Permeabilität 1 und von vernachlässigbarem Querschnitt, die den Abstand 1 m haben und zwischen denen die durch den Strom elektrodynamisch hervorgerufene Kraft im Vakuum  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton pro Meter der Doppelleitung beträgt.

5. Einheit der Temperatur ist das Kelvin (K).

1 K ist der 273,16te Teil der (thermodynamischen) Temperatur des Tripelpunktes von reinem Wasser natürlicher Isotopenzusammensetzung.

6. Einheit der Lichtstärke ist die Candela (cd).

1 cd ist die Lichtstärke, mit der ein schwarzer Körper der Fläche (1/600 000)  $m^2$  bei der Erstarrungstemperatur des Platins beim Druck 101 325 N/ $m^2$  senkrecht zu seiner Oberfläche leuchtet.

7. Einheit der Stoffmenge ist das Mol (mol).

1 mol ist die Stoffmenge eines Systems, das so viel Elementarteilchen enthält, wie Atome in 0,012 kg des Nuklids Kohlenstoff 12 enthalten sind. Die Art der gemeinten Elementarteilchen (Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen usw.) muß dabei jeweils angegeben werden.

Die in 1 mol enthaltene Teilchenzahl ist eine Naturkonstante und wird als Avogadrokonstante  $N_A$  oder Loschmidtsche Konstante  $L$  bezeichnet. Es ist  $N_A = 6,0231 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Auf Teilchenmengen bezogene Größen heißen molare Größen. Die wichtigsten davon sind die Molmasse  $M$  (g/mol), das Molvolumen  $V_M = M \cdot v$  (cm<sup>3</sup>/mol) und die molare Wärmekapazität  $C = M \cdot c$  (J · mol<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>), wobei  $v$  das spezifische Volumen und  $c$  die spezifische Wärmekapazität sind.

Der Zahlenwert der Molmasse wird als relative Atom- bzw. Molekülmasse bezeichnet.

*Tabelle 1. Namen und Kurzzeichen physikalischer Größen*

| Größe                            | Einheit                              | Kurzzeichen                                     |
|----------------------------------|--------------------------------------|---|
| Fläche                           | Quadratmeter                         | m <sup>2</sup>                                  |
| Volumen                          | Kubikmeter                           | m <sup>3</sup>                                  |
| Ebener Winkel                    | Radian                               | rad (= m/m)                                     |
| Räumlicher Winkel                | Steradian                            | sr (= m <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> )          |
| Frequenz                         | Hertz                                | Hz (= s <sup>-1</sup> )                         |
| Geschwindigkeit                  | Meter/Sekunde                        | m/s   |
| Beschleunigung                   | Meter/Quadratsekunde                 | m/s <sup>2</sup>                                |
| Dichte                           | Kilogramm/Kubikmeter                 | kg/m <sup>3</sup>                               |
| Kraft                            | Newton                               | N (= kg · m/s <sup>2</sup> )                    |
| Druck                            | Pascal = Newton/Quadratmeter         | Pa = N/m <sup>2</sup>                           |
| Arbeit, Energie, Wärme-<br>menge | Joule = Newtonmeter<br>= Wattsekunde | J (= N · m = Ws)                                |
| Leistung                         | Watt                                 | W (= J/s)                                       |
| Elektrische Spannung             | Volt <sup>1)</sup>                   | V (= W/A)                                       |
| Elektrizitätsmenge               | Coulomb                              | C (= A · s)                                     |
| Elektrische Feldstärke           | Volt/Meter                           | V/m   |
| Elektrischer Widerstand          | Ohm                                  | Ω (= V/A)                                       |
| Kapazität                        | Farad                                | F (= A · s/V)                                   |
| Induktionsfluß                   | Weber = Voltsekunde                  | Wb (= V · s)                                    |
| Induktivität                     | Henry                                | H (= V · s/A)                                   |
| Magnetische Induktion            | Tesla = Weber/Quadrat-<br>meter      | T (= Wb/m <sup>2</sup> = V · s/m <sup>2</sup> ) |
| Magnetische Feldstärke           | Ampere/Meter                         | A/m   |
| Magnetische Spannung             | Ampere                               | A   |
| Lichtstrom                       | Lumen                                | lm (= cd · sr)                                  |
| Beleuchtungsstärke               | Lux                                  | lx (= lm/m <sup>2</sup> )                       |
| Leuchtdichte                     | Candela/Quadratmeter                 | cd/m <sup>2</sup>                               |

<sup>1)</sup> Die Einheit der elektrischen Spannung 1 V = 1 W/A = 1 J/As ergibt sich aufgrund des Energiesatzes, indem man fordert, daß die Einheit der elektrischen Arbeit (1 VAs) gleich 1 J ist.

Die Einheiten aller anderen physikalischen Größen lassen sich aus diesen sieben Grundeinheiten ableiten und in Form von Potenzprodukten mit ganzzahligen Exponenten schreiben. Die wichtigsten davon sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Bruchteile und Vielfache von Einheiten werden durch die in Tab. 2 zusammengestellten Vorsilben bezeichnet:

*Tabelle 2. Bezeichnungen für dezimale Bruchteile und Vielfache von Einheiten*

| Name  | Zeichen | Bedeutung | Name  | Zeichen | Bedeutung  |
|-------|---------|-----------|-------|---------|------------|
| Tera  | T       | $10^{12}$ | Dezi  | d       | $10^{-1}$  |
| Giga  | G       | $10^9$    | Zenti | c       | $10^{-2}$  |
| Mega  | M       | $10^6$    | Milli | m       | $10^{-3}$  |
| Kilo  | k       | $10^3$    | Mikro | $\mu$   | $10^{-6}$  |
| Hekto | h       | $10^2$    | Nano  | n       | $10^{-9}$  |
| Deka  | da      | $10^1$    | Pico  | p       | $10^{-12}$ |
|       |         |           | Femto | f       | $10^{-15}$ |
|       |         |           | Atto  | a       | $10^{-18}$ |

Aus historischen Gründen werden häufig noch systemfremde Einheiten benutzt: Als Krafteinheit, insbesondere im Bereich der Technik, das Kilopond (kp); 1 kp ist diejenige Kraft, die im normalen Schwerefeld der Erde auf die Masse 1 kg wirkt; 1 kp entspricht 9,80665 N.

Als Druckeinheit im Bereich der Technik die technische Atmosphäre (at); es ist 1 at = 1 kp/cm<sup>2</sup>.

Als Druckeinheit im Bereich der Vakuumtechnik das Torr (Torr); 1 Torr ( $\triangleq$  1 mm Quecksilbersäule) ist der von einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe bei 0 °C auf die Unterlage ausgeübte Druck. 1 Torr entspricht 133,3 N/m<sup>2</sup>.

Als Energieeinheit, insbesondere für Wärmemengen, die Kalorie (cal); 1 cal = 4,1840 J. (Die frühere Definition, wonach 1 cal diejenige Wärmemenge war, die 1 g Wasser beim Erwärmen von 14,5 auf 15,5 °C aufnimmt, trifft nicht mehr zu.)

Als Einheit der magnetischen Induktion das Gauß (G); 1 G entspricht  $10^{-4}$  Vs/m<sup>2</sup>.

Als Einheit der magnetischen Feldstärke das Oerstedt (Oe); 1 Oe entspricht  $(1000/4\pi)$  A/m = 79,58 A/m.

### 1.3. Messungen und Meßfehler

Physikalische Größen werden in manchen Fällen durch Zählen, in den meisten Fällen jedoch durch Messung bestimmt, wobei unter einer Messung der Vergleich der zu bestimmenden Größe mit der gewählten Einheit zu verstehen ist.

Im Gegensatz zum reinen Zählen, das zumindest im Prinzip fehlerfrei ausgeführt werden kann, sind Messungen durch stets vorhandene Unzulänglichkeiten der Meßapparatur, Unvollkommenheiten der Sinnesorgane und unkontrollierte äußere Einflüsse immer fehlerbehaftet. Von Ausnahmen ab-

gesehen liefern daher selbst mehrere mit der gleichen Apparatur unter gleichen Bedingungen ausgeführte Messungen nicht das gleiche Ergebnis.

Jedes Meßergebnis ist also ein Näherungswert, dessen Genauigkeit durch die Angabe eines Unsicherheitsintervalls charakterisiert werden muß. Beispielsweise beträgt der derzeitig beste Wert für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c_0 = (299\,792\,456,2 \pm 1,1)$  m/s.

Meßfehler treten als systematische und als zufällige Fehler auf.

*Systematische Fehler* beeinflussen bei gleicher experimenteller Anordnung das Resultat stets im gleichen Sinn und ändern sich gesetzmäßig mit der Änderung der Versuchsbedingungen. Sie haben ihren Ursprung in:

Fehlanzeigen der Meßinstrumente (z. B. infolge falscher Eichung, Veränderungen infolge Alterung oder Überlastung),

Unvollkommenheit des Meßgegenstandes (z. B. mangelnde Reinheit von Stoffen, Inhomogenitäten, zeitliche Änderungen des Meßobjektes während der Messung),

Beeinflussung des Meßobjektes durch das Meßgerät (z. B. Deformation bei der Dickenmessung mit einer Meßschraube),

Übersehen äußerer Einflüsse auf das Experiment (z. B. Luftauftrieb bei Präzisionswägungen, elektrische oder magnetische Streufelder, wechselseitige Beeinflussung mehrerer Meßinstrumente), aber auch im

Überschreiten der Gültigkeitsgrenzen physikalischer Gesetze (z. B. Verlassen des Elastizitätsbereichs bei Dehnungsmessungen).

Systematische Fehler sind prinzipiell vermeidbar, oft jedoch nur mit beträchtlichem experimentellem Aufwand (Änderung der Meßapparatur oder sogar des Meßprinzips). Unter Praktikumsbedingungen ist ihre Beseitigung oft nicht oder nicht vollständig möglich; der Praktikant muß sich aber über ihren Einfluß auf das Meßresultat Gedanken machen.

*Zufällige Fehler* haben unregelmäßigen (statistischen) Charakter und können bei gleicher experimenteller Anordnung das Meßergebnis sowohl vergrößern als auch verkleinern. Sie haben subjektive und objektive Ursachen.

Subjektiv bedingt sind Parallaxefehler, Schätzungsfehler bei der Interpolation von Skalenablesungen, schwankende Reaktionszeit des Beobachters usw.

Objektiv bedingt sind

- unregelmäßig schwankende Einflüsse der Meßapparatur und der Umwelt (Reibung bei mechanischen Bewegungen, variable Kontaktwiderstände, Schwankungen von Temperatur, Luftdruck, Netzzspannung usw.)
- durch Quantenerscheinungen bedingte statistische Gesetzmäßigkeiten des Meßgegenstandes bzw. der Meßapparatur (Rauschen elektrischer Ströme, Temperaturbewegung von Molekülen, Fluktuationen beim radioaktiven Zerfall oder bei Emission von Lichtquanten usw.).

Die durch Quantenerscheinungen bedingten zufälligen Fehler sind grundsätzlich unvermeidbar und bestimmen die prinzipielle Genauigkeitsgrenze einer Messung; alle anderen Fehler sind zwar prinzipiell vermeidbar, praktisch jedoch bei vorgegebenen Versuchsbedingungen nicht auszuschalten.

## 1.4. Fehlertheorie

Aufgabe der Fehlertheorie ist es, geeignete Näherungswerte und Unsicherheitsintervalle für die gemessenen Größen zu definieren und Methoden zu ihrer Berechnung aus den Meßdaten anzugeben. Sie ist damit die Grundlage für die kritische Auswertung der Meßergebnisse.

Aussagen über systematische Fehler erhält man durch eine Fehlerabschätzung (Abschn. 1.4.1); die Größe der zufälligen Fehler läßt sich durch mehrmalige Messung und anschließende statistische Verarbeitung der Meßdaten gewinnen (Abschn. 1.4.2).

Durch Addition des zufälligen und des maximal möglichen systematischen Fehlers ergibt sich die Meßunsicherheit des Meßwerts.

### 1.4.1. Fehlerabschätzung und Größtfehler

#### 1.4.1.1. Unmittelbare Messung

Mißt man eine physikalische Größe nur ein einziges Mal, so betrachtet man den Meßwert  $x$  als Näherungswert für den unbekannten wahren Wert  $X$ . Die Abweichung des Meßwerts vom wahren Wert heißt wahrer Fehler und ist ebenso wie  $X$  nicht bekannt.

Statt durch den wahren Fehler charakterisiert man daher die Güte der Messung durch die maximal mögliche Abweichung des Meßwerts vom wahren Wert, die man als Größtfehler  $\Delta x$  bezeichnet.

$\Delta x$  wird anhand des Meßverfahrens, der Empfindlichkeit der Geräte, der verwendeten Skalenteilung, der Sorgfalt beim Experimentieren usw. abgeschätzt. Als Fehler der Meßgeräte sind die vom Hersteller garantierten Genauigkeiten (sog. Garantiefehlergrenzen) einzusetzen. Zum Beispiel werden elektrische Geräte in Güteklassen eingeteilt. Die Klassenzeichen (0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5) geben dabei den maximalen prozentualen Fehler, bezogen auf den Endausschlag, an.

Beispiel: Ein Spannungsmesser der Gütekasse 1,5 habe eine Skale mit einem Endausschlag von 500 V, der Abstand der Teilstriche betrage 5 V. Als Ablesefehler setzt man die Hälfte des Abstandes benachbarter Teilstriche (2,5 V) an; entsprechend der Gütekasse sind dazu 1,5% von 500 V zu addieren, so daß der Größtfehler 10 V beträgt.

Aussagekräftiger als der absolute Größtfehler  $\Delta x$  ist meist der relative Größtfehler  $\Delta x/x$  bzw. der prozentuale Größtfehler  $(100 \cdot \Delta x/x)\%$ . Da das Vorzeichen der Abweichung des Meßwerts vom wahren Wert nicht bekannt ist, erfolgt die Angabe des Meßergebnisses in der Form

---


$$X = x \pm \Delta x \quad \text{oder} \quad X = x \cdot (1 \pm \Delta x/x). \quad (1)$$


---

Mißt man die Größe  $X$  mehrmals ( $n$ -mal) und sind die Abweichungen der Meßwerte  $x_1, \dots, x_n$  untereinander wesentlich kleiner als der Größtfehler, so dominieren offenbar systematische Fehler. Man betrachtet dann den Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (2)$$

als Näherungswert für die Größe  $X$ .

Die Güte des Meßergebnisses hängt in diesem Falle nicht von der Anzahl der Messungen ab (mißt man beispielsweise mit einem falsch geeichten Maßstab, so bleibt das Ergebnis auch bei oftmaliger Messung falsch), der Fehler von  $x$  ist deshalb unabhängig von  $n$  durch  $\Delta x$  bestimmt.

#### 1.4.1.2. Mittelbare Messung (Fehlerfortpflanzung)

In der Praxis hat man es meist nicht nur mit unmittelbar meßbaren Größen zu tun, sondern es sind zusammengesetzte Größen zu ermitteln, in deren Berechnung mehrere unmittelbar gemessene Größen eingehen.

Zwischen der zusammengesetzten Größe  $f$  und den voneinander unabhängigen direkt meßbaren Größen  $x, y, z, \dots$  bestehe der Zusammenhang  $f = f(x, y, z, \dots)$ . Dann interessiert die Auswirkung der Größtfehler  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  auf die Größe  $f$ , d. h. der zugehörige Größtfehler  $\Delta f$ .

Sind die Fehler genügend klein gegen die Meßwerte, so berechnet man  $\Delta f$ , indem man die Funktion  $f$  an der Stelle  $x, y, z, \dots$  in eine Taylorreihe entwickelt, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) = f(x, y, z, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \\ + \dots = f + \Delta f.$$

Um mit Sicherheit den Größtfehler  $\Delta f$  zu erhalten, also die in Praxis durchaus mögliche Kompensation der Einzelfehler zu vermeiden, ist der Absolutbetrag aller Glieder zu nehmen, so daß sich ergibt

---


$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \quad (3)$$


---

Häufig benötigte Sonderfälle der Gl. (3) sind

- a)  $f = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + \dots$  (lineare Funktion).

Dann ist

$$\Delta f = |a| \Delta x + |b| \Delta y + |c| \Delta z + \dots \quad (3a)$$

b)  $f = A \cdot x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$  (Potenzprodukt).

Dann ist

$$\frac{\Delta f}{f} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x} + |\beta| \frac{\Delta y}{y} + |\gamma| \frac{\Delta z}{z} + \dots \quad (3b)$$

Beispiel: Die Schwerkraftbeschleunigung  $g$  werde aus der Länge  $l$  und der Schwingungsdauer  $T$  eines Fadenpendels bestimmt:  $g = 4\pi^2 \cdot l/T^2$ . Die Messung liefert  $l = 97,4$  cm und  $T = 1,981$  s, woraus sich  $g = 4\pi^2 \cdot l/T^2 = 979,9$  cm/s<sup>2</sup> ergibt.

$l$  wurde unter Verwendung einer Millimeterskala gemessen, die an beiden Endpunkten etwa mit einer Genauigkeit von 0,5 mm ablesbar ist; so ist  $\Delta l = 0,1$  cm. Zur Zeitmessung wurden 100 Schwingungen mit der Stoppuhr auf 0,2 s genau gemessen (0,1 s Fehler am Anfang und am Ende geschätzt), daher ist  $\Delta T = 0,002$  s. Mit  $\frac{\Delta l}{l} \approx 0,001$  und  $\frac{\Delta T}{T} \approx 0,001$  wird nach Gl. (3b)  $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \cdot \frac{\Delta T}{T} = 0,003$  bzw.  $\Delta g = 3$  cm/s<sup>2</sup>. Das Ergebnis ist zu runden und in der Form  $g = (980 \pm 3)$  cm/s<sup>2</sup> =  $980 \cdot (1 \pm 0,003)$  cm/s<sup>2</sup> anzugeben.

Sind die Fehler groß, muß man zur Ermittlung der Grenzwerte  $f \pm \Delta f$  die Grenzwerte  $x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z, \dots$  sinngemäß in  $f = f(x, y, z, \dots)$  einsetzen. Dabei werden die positiven und negativen Größtfehler  $\Delta f_+$  und  $\Delta f_-$  i. a. verschiedene Beträge erhalten.

Beispiel: Bei der Messung der Schwerkraftbeschleunigung  $g$  aus Länge  $l$  und Schwingungsdauer  $T$  eines Fadenpendels werde  $T$  nur sehr ungenau zu  $T = (2 \pm 0,5)$  s bestimmt; demgegenüber kann der Fehler von  $l = (99 \pm 1)$  cm vernachlässigt werden.

Die durch  $\Delta T = 0,5$  s verursachten Grenzen von  $g = 4\pi^2 \cdot l/T^2$  ergeben sich zu  
 $g + \Delta g_+ = \frac{4\pi^2 l}{(T - \Delta T)^2} = 17,4$  m/s<sup>2</sup> und  $g - \Delta g_- = \frac{4\pi^2 l}{(T + \Delta T)^2} = 6,3$  m/s<sup>2</sup>.

Alle in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen gelten auch, wenn man  $x, y, z, \dots$  mehrmals gemessen hat und systematische Fehler dominieren. Es sind dann überall die Mittelwerte  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$  einzusetzen, an den Größtfehlern ändert sich nichts.

## 1.4.2. Statistische Fehlertheorie

Sieht man von systematischen Fehlern ab und liegt eine große Anzahl von Beobachtungen vor, so kann eine Fehleranalyse mit statistischen Methoden erfolgen (eine Methode zur Überprüfung, ob bei einer Meßreihe die Einzelwerte statistisch verteilt sind, wird in Abschn. 1.4.3 beschrieben)

### 1.4.2.1. Unmittelbare Messung

Die Größe  $x$  werden unter gleichen Bedingungen  $n$ -mal gemessen, wobei  $n$  im Gegensatz zu Abschn. 1.4.1 eine große Zahl sein muß. Die  $n$  Meßwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  häufen sich bei einem bestimmten Wert. Teilt man die  $x$ -Skale

in kleine Intervalle  $\Delta x_k$ , so gilt für die Zahl der Meßwerte  $\Delta n_k$ , die in den Abschnitt  $\Delta x_k$  fallen.

$$\Delta n_k = w(x_k) \cdot n \cdot \Delta x_k. \quad (4)$$

$w(x_k)$  gibt an, in welcher Weise sich die Meßwerte auf die einzelnen Intervalle verteilen und kann näherungsweise als Wahrscheinlichkeitsdichte betrachtet werden. Gl. (4) besagt, daß  $w(x_k) \cdot \Delta x_k$  eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit) darstellt, mit der ein im Intervall  $\Delta x_k$  liegender Wert gemessen wird.

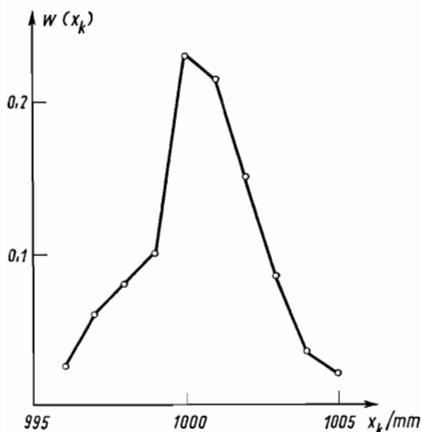


Abb. 1 a.  
Häufigkeitspolygon einer Meßreihe

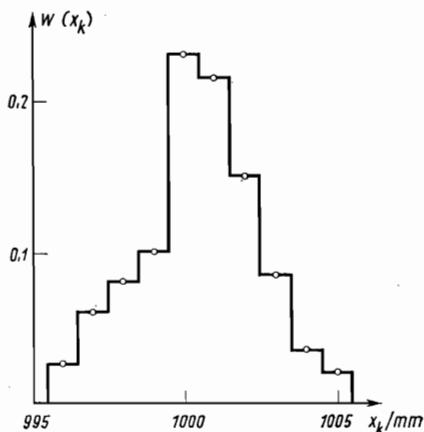


Abb. 1 b.  
Histogramm der Meßreihe von Abb. 1 a

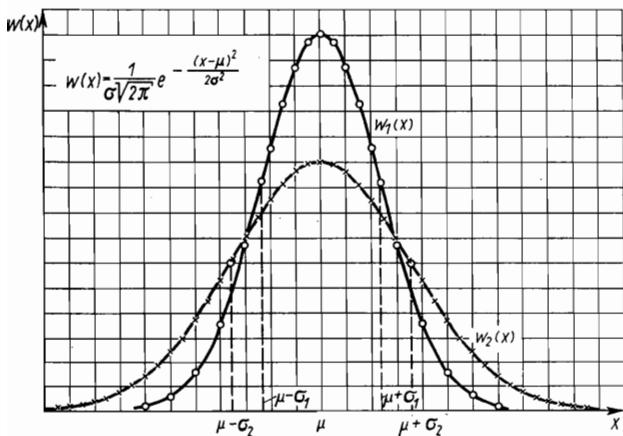


Abb. 1 c. Gaußsche Normalverteilungen mit gleichem Zentralwert  $\mu$  und verschiedenen Standardabweichungen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$

Trägt man  $w(x_k)$  jeweils über der Mitte des zugehörigen Intervalls  $\Delta x_k$  auf, so erhält man eine grafische Darstellung der Verteilung in Form eines Häufigkeitspolygons (Abb. 1a) bzw. Histogramms (Abb. 1b).

Wird die Zahl der Messungen vergrößert und die Intervallteilung verfeinert, so nähert sich  $w(x_k)$  in vielen Fällen erfahrungsgemäß einer Glockenkurve, der Gaußschen Normalverteilung (Abb. 1c)

$$w(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (5)$$

die durch den Erwartungswert (Zentralwert, wahren Wert)  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  (als Gütemaß) charakterisiert ist [ $\sigma$  ist der Abstand der Abszisse der Wendepunkte der Kurve  $w(x)$  vom Zentralwert]. In der Praxis muß man sich aus zeitlichen und ökonomischen Gründen meist mit relativ wenigen Meßwerten begnügen, was der Entnahme einer Stichprobe (vom Stichprobenumfang  $n$ ) aus der Gesamtheit der möglichen Meßwerte entspricht.

Als Näherungswert für den wahren Wert  $\mu$  betrachtet man auch hier den Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (6)$$

Die Abweichung  $x_k - \bar{x}$  vom Mittelwert ist der (scheinbare) Fehler<sup>1)</sup> der Einzelmessung; als Maß für die Güte der Messung benutzt man die Streubreite (empirische Standardabweichung, Streuungsmaß)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}, \quad (7)$$

die einen Näherungswert für die Standardabweichung  $\sigma$  darstellt. Der Nenner  $n-1$  ist die Zahl der Kontrollmessungen, dadurch wird berücksichtigt, daß man bei einer einzigen Messung aufgrund statistischer Überlegungen keinerlei Angaben über den Fehler machen kann.

Für die Streubreite  $\bar{s}$  des Mittelwertes erhält man<sup>2)</sup>

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

$\bar{s}$  wird mit wachsender Zahl von Beobachtungen kleiner, jedoch erfolgt die Verringerung nur mit der Wurzel aus der Zahl der Beobachtungen, so daß wenige sorgfältige Messungen einer großen Zahl oberflächlicher Messungen vorzuziehen sind.

<sup>1)</sup> Der wahre Fehler ist die Abweichung vom wahren Wert  $\mu$ , der jedoch nicht bekannt ist.

<sup>2)</sup> Gl. (8) folgt aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz (12), da der Mittelwert  $\bar{x}$  als eine Funktion der  $n$  Meßwerte  $x_1, \dots, x_n$  aufgefaßt werden kann.

Den Bereich  $\bar{x} \pm t \cdot \bar{s}$  nennt man den Vertrauensbereich des Mittelwerts.  $t$  hängt ab von der statistischen Sicherheit, mit der der wahre Wert zwischen den Vertrauengrenzen  $\bar{x} - t \cdot \bar{s}$  und  $\bar{x} + t \cdot \bar{s}$  liegen soll. Sind die Meßwerte entsprechend Gl. (5) normalverteilt, so ergeben sich die Vertrauensbereiche aus folgender Tabelle:

*Tabelle 3. Vertrauensbereiche bei Gaußscher Normalverteilung*

| Statistische Sicherheit | $t$ | Vertrauensbereich   |
|-------------------------|-----|---|
| 68%                     | 1   | $\bar{x} \pm \bar{s} = \bar{x} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} s$  |
| 95%                     | 2   | $\bar{x} \pm 2\bar{s} = \bar{x} \pm \frac{2}{\sqrt{n}} s$ |
| 99,7%                   | 3   | $\bar{x} \pm 3\bar{s} = \bar{x} \pm \frac{3}{\sqrt{n}} s$ |

Unter Praktikumsbedingungen genügt eine statistische Sicherheit von 95 % ( $t = 2$ ), man gibt das Ergebnis also in der Form

$$x = \bar{x} \pm 2\bar{s} = \bar{x} \pm 2s/\sqrt{n} \quad (9)$$

bzw. unter Benutzung des relativen Fehlers in der Form

$$x = \bar{x} \left( 1 \pm \frac{2\bar{s}}{\bar{x}} \right) = \bar{x} \left( 1 \pm \frac{2s}{\bar{x}\sqrt{n}} \right) \quad (9a)$$

an.

*Tabelle 4. Messung der Länge eines Fadenpendels*

| $l_i$<br>cm        | $l - l_i$<br>cm | $(l - l_i)^2$<br>cm <sup>2</sup> |
|--------------------|-----------------|----------------------------------|
| 97,30              | +0,06           | 0,0036                           |
| ,40                | -0,04           | 16                               |
| ,35                | +0,01           | 01                               |
| ,45                | -0,09           | 81                               |
| ,30                | +0,06           | 36                               |
| ,40                | -0,04           | 16                               |
| ,35                | +0,01           | 01                               |
| ,40                | -0,04           | 16                               |
| ,30                | +0,06           | 36                               |
| ,35                | +0,01           | 01                               |
| $\Sigma 973,60$ cm |                 | 0,0240 cm <sup>2</sup>           |

Beispiel: 10 Messungen der Länge  $l$  eines Fadenpendels ergaben die Werte von Tab. 4. Der Mittelwert ist  $\bar{l} = 97,36$  cm, die Streubreite des Einzelwertes ist  $s = \sqrt{0,024/9}$  cm = 0,05 cm, die Streubreite des Mittelwertes  $\bar{s} = s/\sqrt{10} = 0,016$  cm. Nach Gl. (9) bzw. (9 a) lautet das Ergebnis  $\bar{l} = (97,36 \pm 0,03)$  cm = 97,36 · (1 ± 0,0003) cm.

Sind zufällige und systematische Fehler von vergleichbarer Größe, so ist der entsprechend Abschn. 1.4.1.1 abgeschätzte Größtfehler  $\Delta x$  zum zufälligen Fehler  $2s/\sqrt{n}$  zu addieren, so daß man eine Meßunsicherheit  $2s/\sqrt{n} + \Delta x$  und damit

$$x = \bar{x} \pm (2\bar{s} + \Delta x) = \bar{x} \pm (2s/\sqrt{n} + \Delta x) \quad (10)$$

erhält.

#### 1.4.2.2. Mittelbare Messung (Fehlerfortpflanzung)

Den Mittelwert für eine zusammengesetzte Größe  $f(x, y, z, \dots)$  erhält man durch Einsetzen der Mittelwerte  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$  direkt gemessener Größen:

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots). \quad (11)$$

Für die Streubreite  $\bar{s}_f$  von  $\bar{f}$  gilt das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\bar{s}_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \bar{s}_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \bar{s}_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \bar{s}_z\right)^2 + \dots} \quad (12)$$

Da es auf statistischen Überlegungen beruht, berücksichtigt es die Möglichkeit, daß sich die Streuungen  $\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{s}_z, \dots$  in ihren Auswirkungen auf die zusammengesetzte Größe  $f$  teilweise kompensieren. Der wahre Wert von  $f$  liegt daher entsprechend der Gaußschen Normalverteilung (5) mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % innerhalb des Intervalls  $\bar{f} \pm 2\bar{s}_f$ .

Als Beispiel werde wieder die Schwebeschleunigung  $g$  aus der Länge  $l$  und der Schwingungsdauer  $T$  eines Fadenpendels bestimmt ( $g = 4\pi^2 \cdot l/T^2$ ), wobei  $\bar{l} = 97,36$  cm,  $\bar{s}_l = 0,016$  cm,  $\bar{T} = 1,981$  s und  $\bar{s}_T = 0,001$  s sein sollen. Es wird

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{97,36 \text{ cm}}{(1,981 \text{ s})^2} = 979,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2},$$

und mit

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 l}{T^3}$$

erhält man nach Gl. (12)

$$\bar{s}_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} \bar{s}_l\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^3} \bar{s}_T\right)^2} = 1,0 \text{ cm/s}^2.$$

Das Ergebnis ist daher abzurunden und in der Form

$$g = (980 \pm 2) \text{ cm/s}^2$$

anzugeben.

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man zunächst den relativen Fehler

$$\bar{s}_g/\bar{g} = \sqrt{\left(\frac{\bar{s}_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\bar{s}_T}{T}\right)^2}$$

bildet. Man findet  $\bar{s}_g/\bar{g} = 0,0010$  und daraus  $\bar{s}_g = 1,0 \text{ cm/s}^2$ .

### 1.4.3. Überprüfung des statistischen Charakters einer Meßreihe

Um zu überprüfen, ob die Verteilung der  $n$  Meßwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einer Meßreihe genügend genau mit der Gaußschen Normalverteilung übereinstimmt, kann man wie folgt vorgehen:

Aus Gl. (6) ergibt sich durch Integration die Anzahl  $n(\xi)$  der Meßwerte, die kleiner als ein vorgegebener Wert  $\xi$  sind, zu

$$n(\xi) = n \cdot \int_{-\infty}^{\xi} w(\xi') d\xi' = n \cdot \Phi(\xi).$$

Die Funktion

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left\{-\frac{(\xi' - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} d\xi' \quad (13)$$

heißt Gaußsches Fehlerintegral und ist in Abb. 2 dargestellt. In einem sog.

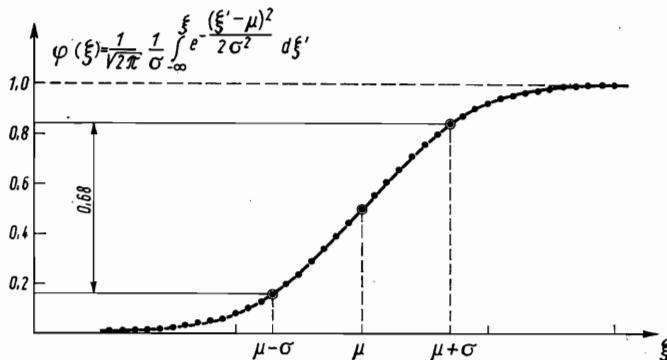


Abb. 2. Gaußsches Fehlerintegral  $\Phi(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{(\xi' - \mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi'$

Wahrscheinlichkeitsnetz (Abb. 3), dessen Abszisse linear und dessen Ordinate entsprechend dem Gaußschen Fehlerintegral unterteilt sind, erscheint diese Funktion als Gerade (vgl. dazu Abschn. 1.5.3).

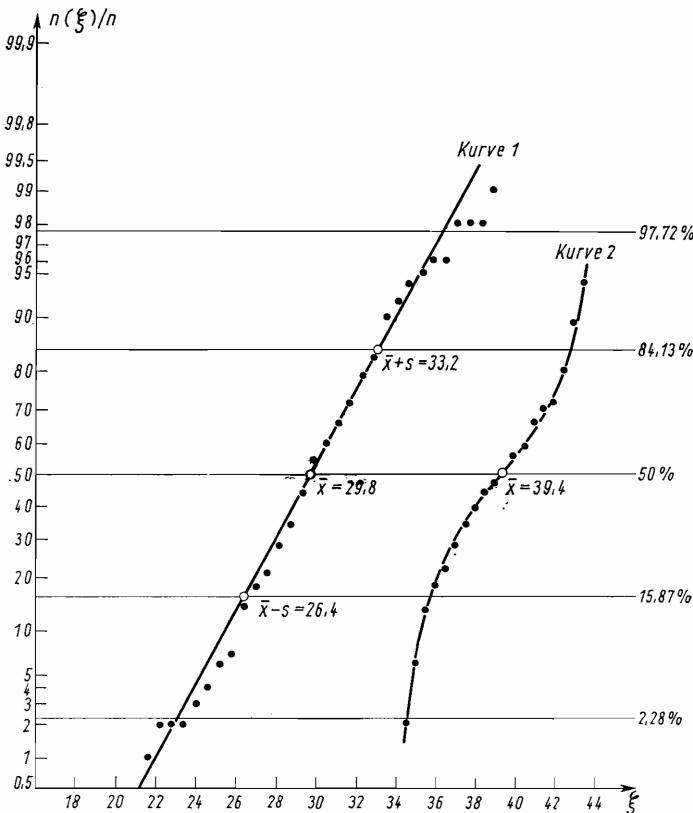


Abb. 3. Häufigkeitsverteilung von Meßreihen im Wahrscheinlichkeitsnetz  
Kurve 1: annähernd normalverteilte Meßwerte; Kurve 2: rechteckverteilte  
Meßwerte (Ordinatenwerte in %)

Trägt man in dieses Netz die relative Anzahl  $n(\xi)/n$  der Meßwerte unterhalb von  $\xi$  als Funktion von  $\xi$  ein, so ergibt sich beim Vorliegen normalverteilter Meßwerte eine Gerade, aus der man ohne Rechnung Mittelwert und Streubreite ablesen kann. Als Beispiel sind in Abb. 3 als Kurve 1 Werte, die näherungsweise einer Gaußverteilung mit dem Mittelwert  $\bar{x} = 29,8$  und einer Streuung  $s = 3,4$  entsprechen, eingetragen.

Die stark von einer Geraden abweichende Kurve 2 stammt dagegen von einer Reihe von Werten, die gleichmäßig im Intervall zwischen 34 und 44 verteilt sind,

$$w(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{für } 34 \leq x \leq 44, \\ 0 & \text{für } x < 34 \text{ und } x > 44, \end{cases}$$

also nicht der Normalverteilung unterliegen.

#### 1.4.4. Mittelwert und Fehler von Meßwerten unterschiedlicher Genauigkeit

Wird die Größe  $x$   $n$ -mal mit verschiedener Genauigkeit (z. B. mit unterschiedlichen Meßmitteln oder von verschiedenen Beobachtern) gemessen, so ordnet man jedem Meßwert  $x_i$  entsprechend seiner Genauigkeit ein statistisches Gewicht  $p_i$  zu.

Aus analogen Überlegungen wie in Abschn. 1.4.2 ergibt sich dann der sog. gewogene Mittelwert  $\bar{x}_g$  zu

$$\bar{x}_g = \sum_{i=1}^n p_i x_i / \sum_{i=1}^n p_i, \quad (14)$$

die Streubreite (bezogen auf  $\bar{x}_g$ ) der Einzelmessung zu

$$s_{gx_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x}_g)^2}{(n-1)p_i}} \quad (15)$$

und die Streubreite des Mittelwerts  $\bar{x}_g$  zu

$$s_{gx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x}_g)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n p_i}}. \quad (16)$$

Die statistischen Gewichte sind der Meßgenauigkeit entsprechend zu wählen, z. B. umgekehrt proportional zum geschätzten Größtfehler des Meßwertes  $x_i$ .

## 1.5. Auswertung von Meßresultaten

### 1.5.1. Rechenverfahren

In den meisten Fällen erhält man bei einem Experiment die gesuchte Größe nicht direkt, sondern muß sie durch mehr oder weniger umfangreiche Rechnungen aus den Meßergebnissen ermitteln.

Bevor man mit der Rechnung beginnt, muß man sich über die erforderliche Genauigkeit klar werden. Sie ist so zu wählen, daß der Fehler durch die Meßgenauigkeit gegeben ist und nicht etwa durch die Rechnung vergrößert wird; andererseits ist es sinnlos und reine Zeitverschwendug, übertrieben genau zu rechnen. Im allgemeinen wird man eine Dezimale über die *sichereren* Dezimalen des Meßresultats hinaus berücksichtigen.

Die benötigte Rechengenauigkeit bestimmt die Wahl der Rechenhilfsmittel. Meist genügt der Rechenschieber. Bei 25 cm Skalenlänge beträgt die relative Unsicherheit einer Einstellung etwa 0,1 %. Eine einfache Multiplikation oder Division zweier Zahlen erfordert drei Einstellungen (Einstellen der 1. und 2. Zahl und Ablesen des Ergebnisses). Sind  $n$  Zahlen miteinander zu verknüpfen, so sind dazu  $2n - 1$  Einstellungen erforderlich. Für den mittleren relativen Fehler des Ergebnisses erhält man nach Gl. (12) die Werte von Tab. 5.

*Tabelle 5. Relativer Fehler beim Rechenschieber*

| Anzahl der zu verknüpfenden Zahlen | Relativer Fehler            |
|------------------------------------|-----------------------------|
| 2                                  | 0,17%                       |
| 3                                  | 0,22%                       |
| 4                                  | 0,26%                       |
| 5                                  | 0,30%                       |
| .                                  |                             |
| .                                  |                             |
| .                                  |                             |
| $n$                                | $\sqrt{2n - 1} \cdot 0,1\%$ |

Ist größere Genauigkeit erforderlich, muß man eine Logarithmentafel oder eine Rechenmaschine verwenden.

### 1.5.2. Rechnen mit kleinen Größen

Große Einsparung von Rechenaufwand ist oft durch die Benutzung von Näherungsformeln zu erzielen, die man durch Reihenentwicklung gewinnt:

#### 1. Winkelfunktionen von kleinen Argumentwerten:

Mißt man  $\varphi$  im Bogenmaß, so ist

$$\sin \varphi \approx \varphi \approx \tan \varphi \quad \text{und} \quad \cos \varphi \approx 1.$$

Der relative Fehler hat die Größenordnung  $q^2$ ; unterhalb von  $2^\circ$  ist er kleiner als  $1\%$ , unterhalb von  $6^\circ$  kleiner als  $1\%$ .

## 2. Faktoren, die wenig von 1 abweichen:

Dieser Fall tritt häufig auf, wenn an Meßwerten kleine Korrekturen anzubringen sind. Ist  $z \ll 1$ , so gilt

$$(1 \pm z)^n \approx 1 \pm nz,$$

$$(1 \pm z)^{-n} \approx 1 \mp nz,$$

$$\sqrt[n]{(1 \pm z)} \approx 1 \pm \frac{1}{n} z,$$

$$(1 \pm z_1)(1 \pm z_2) \approx 1 \pm z_1 \pm z_2,$$

$$\exp(\pm z) \approx 1 \pm z,$$

$$\ln(1 \pm z) \approx \pm z.$$

Der Fehler hat die Größenordnung  $z^2$ ; für  $z < 0,03$  ist er kleiner als  $0,001$ , für  $z < 0,1$  ist er kleiner als  $0,01$ .

### 1.5.3. Graphische Darstellungen

Den funktionellen Zusammenhang zweier Größen wird man meist durch eine graphische Darstellung veranschaulichen, die unbedingt auf Koordinatenpapier auszuführen und mit einer Abbildungsunterschrift zu versehen ist. Außer der Bezeichnung sind an den Achsen die dargestellten Größen und die gewählten Einheiten anzugeben. Der Maßstab ist so zu wählen, daß die Kurve möglichst unter einem Winkel von etwa  $45^\circ$  zu den Koordinatenachsen verläuft. Dadurch erhält man auf beiden Achsen gleiche Ablesegenauigkeit.

Liegen die Meßwerte innerhalb eines begrenzten Intervalls relativ weit entfernt vom Nullpunkt, so ist eine Darstellung mit unterdrücktem Nullpunkt zu wählen (vgl. z. B. Abb. 5 b).

Oft ist es zweckmäßig, nicht die gemessenen Größen selbst, sondern geeignete Funktionen davon graphisch darzustellen, am besten auf entsprechend unterteilem Koordinatenpapier. Diese Funktionen werden nach Möglichkeit so gewählt, daß man als Kurve eine Gerade erhält. Einige typische Beispiele sollen das Verfahren erläutern.

#### 1. Linearer Zusammenhang über einen großen Meßbereich

Hat man die Aufgabe, die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes  $U = I \cdot R$  über einen großen Bereich (etwa  $10 \text{ mV}$  bis  $100 \text{ V}$ , also über 4 Dekaden) zu überprüfen, so mißt man in Stufen, die sich innerhalb einer Dekade immer

etwa um die gleichen Faktoren unterscheiden, z. B. bei  $10 - 20 - 50 - 100 - 200 - 500$  mV usw. Bei einer graphischen Darstellung im linearen Maßstab würde sich der größte Teil der Meßpunkte beim Nullpunkt häufen. Daher empfiehlt es sich, in diesem Falle eine Darstellung im doppeltlogarithmischen Maßstab anzufertigen. Die für diesen Zweck hergestellten Koordinatenpapiere sind nach dem dekadischen Logarithmus unterteilt. Trägt man  $\lg I/I_0$  als Funktion von  $\lg U/U_0$  auf, so erhält man eine gleichmäßige Verteilung der Meßpunkte.  $I_0$  und  $U_0$  bedeuten hier die Einheiten von  $I$  und  $U$ .

Ist das Ohmsche Gesetz für den untersuchten Leiter erfüllt, so ergibt sich mit der aus  $\frac{U}{U_0} = \frac{I \cdot R}{I_0 \cdot R_0}$  folgenden Gleichung  $\lg U/U_0 = \lg I/I_0 + \lg R/R_0$  in der doppelt logarithmischen Darstellung eine Gerade mit der Steigung  $S = 1$ . Nullpunktsfehler äußern sich in dieser Darstellung als Krümmung der Kurve.

## 2. Potenzzusammenhang

Der Zusammenhang zwischen der durch eine Lichtquelle der Lichtstärke  $I$  erzeugten Beleuchtungsstärke  $E$  und der Entfernung  $r$  der bestrahlten Fläche von der Lichtquelle ist durch die Beziehung  $E = I/r^2$  gegeben.

Trägt man die zugehörigen Meßwerte im doppelt logarithmischen Maßstab auf, so ergibt sich wegen  $\lg E/E_0 = \lg I/I_0 - 2 \cdot \lg r/r_0$  eine Gerade mit der Steigerung  $S = -2$  (Abb. 4).  $E_0$ ,  $I_0$  und  $r_0$  bedeuten die Einheiten der entsprechenden Größen.

Da auf beiden Achsen der gleiche Maßstab gewählt wurde, braucht dieser bei der Berechnung der Steigung nicht berücksichtigt zu werden. Die Abweichungen der 3 Meßpunkte bei großen Entfernungen dürften auf Streulicht zurückzuführen sein.

Allgemein liefert jeder Potenzzusammenhang im doppelt logarithmischen Maßstab eine Gerade, deren Steigung gleich dem Exponenten ist.

## 3. Exponentieller Zusammenhang

a) Bei der Entladung eines Kondensators der Kapazität  $C$  über einen Widerstand  $R$  ändert sich die Spannung  $U$  exponentiell mit der Zeit gemäß  $U = U_0 \cdot e^{-t/RC}$ .

Trägt man den Logarithmus des Spannungsverhältnisses als Funktion der Zeit auf, so erhält man wegen  $\lg U/U_0 = -\frac{t \cdot \lg e}{R \cdot C} = -\frac{0,4343 \cdot t}{R \cdot C}$  eine Gerade mit der Steigung  $S = -\frac{\lg e}{R \cdot C} = -\frac{0,4343}{R \cdot C}$  (Abb. 5a).

Für die Zeichnung benutzt man in diesem Falle einfach logarithmisch unterteiltes Papier (Abszisse linear, Ordinate logarithmisch geteilt). Da der Maßstab auf beiden Achsen unterschiedlich ist, muß er bei der Berechnung von  $S$ , wie in Abb. 5a angegeben, berücksichtigt werden.

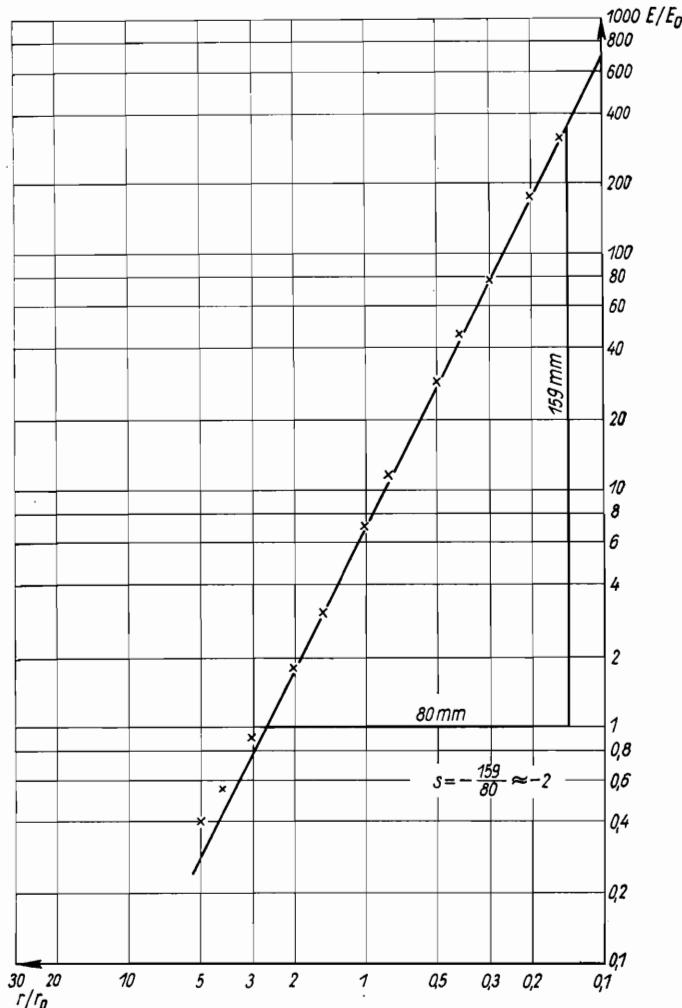


Abb. 4. Beleuchtungsstärke  $E$  als Funktion der Entfernung  $r$  (beide Achsen logarithmisch geteilt)

b) Der Dampfdruck  $p$  einer Flüssigkeit hängt gemäß

$$p = a \cdot T^{-b} \cdot e^{-Q_{23}/RT}$$

von der Temperatur  $T$  ab ( $a$  und  $b$  sind Konstanten,  $Q_{23}$  ist die molare Verdampfungswärme,  $R$  die molare Gaskonstante).

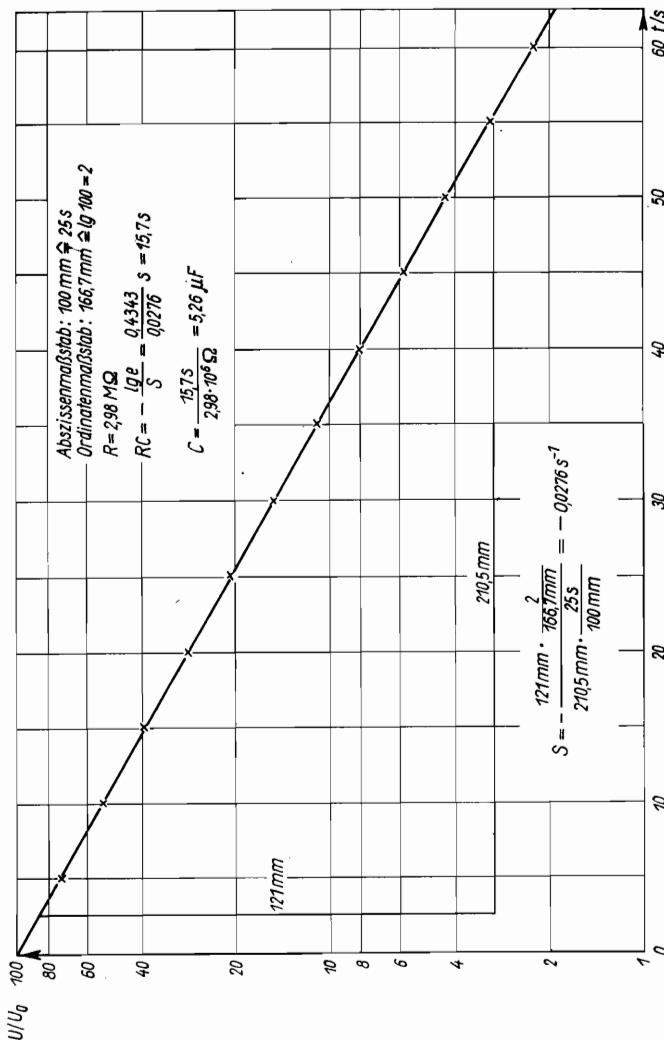


Abb. 5a. Entladung eines Kondensators über einen Widerstand:  
 Abhängigkeit der Spannung  $U$  von der Zeit  $t$  (Abszisse linear, Ordinate logarithmisch geteilt)

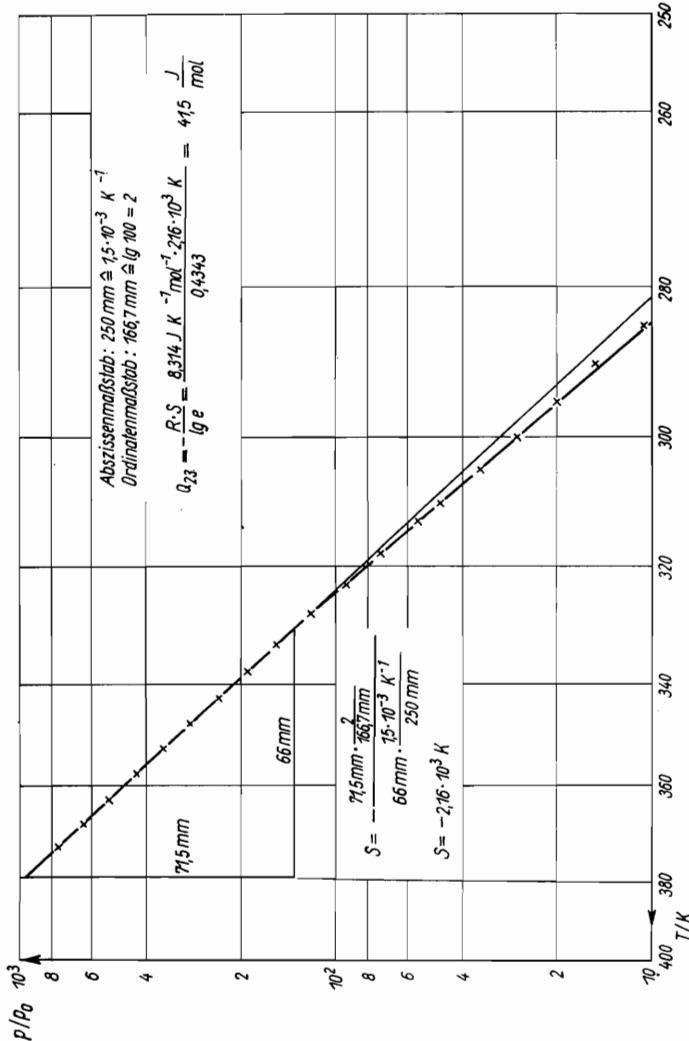


Abb. 5b. Dampfdruck  $p$  von Wasser als Funktion der absoluten Temperatur  $T$  (Abszisse reziprok, Ordinate logarithmisch geteilt)

Auch in diesem Falle steht entsprechend unterteiltes Koordinatenpapier zur Verfügung: Abszisse reziprok, Ordinate logarithmisch unterteilt (Abb. 5 b).

Bei den graphischen Darstellungen auf logarithmisch unterteiltem Papier muß man stets mit dem Zehnerlogarithmus rechnen, da die verfügbaren Papiere dementsprechend unterteilt sind; ansonsten wäre die Verwendung des natürlichen Logarithmus vorzuziehen, da dann der Faktor  $\lg e$  verschwindet.

#### 4. Sinusförmiger Zusammenhang

Die Schwingungen eines Tonfrequenzgenerators seien mittels eines Schleifenoszillographen registriert worden, die Grundfrequenz sei  $f_0$ . Es ist zu prüfen, ob Oberwellen vorhanden sind. Zu diesem Zwecke trägt man die gemessenen Amplituden auf Koordinatenpapier auf, dessen Abszisse nach einer Sinusfunktion und dessen Ordinate linear unterteilt ist. Ist nur die Grundschwingung vorhanden, so erhält man eine Gerade, Oberwellen bewirken Abweichungen. Man kann auf diese Weise bereits einen geringen Oberwellengehalt erkennen, der sich bei linearer Abszissenteilung noch nicht bemerkbar macht.

#### 5. Polardiagramme

Mißt man den von einer leuchtenden Fläche ausgestrahlten Lichtstrom  $\Phi$  als Funktion des Winkels  $\vartheta$  zwischen Beobachtungsrichtung und Flächen normale, so erhält man ein sehr anschauliches Bild von der räumlichen Verteilung, wenn man die Meßwerte in ein Polardiagramm einträgt (Abb. 6).

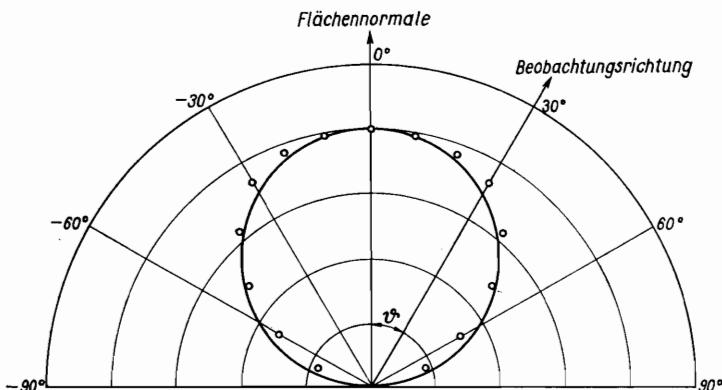


Abb. 6. Richtstrahldiagramm einer strahlenden Fläche  
Ausgezogener Kreis: Lambertsches Gesetz

Insbesondere erhält man bei Gültigkeit des Lambertschen Gesetzes  $\Phi = \Phi_0 \cdot \cos \vartheta$  einen Kreis, der die strahlende Fläche tangiert. Abweichungen vom Lambertschen Gesetz sind daher leicht festzustellen.

#### 1.5.4. Ausgleichsrechnung

Hat man die Größe  $y$  als Funktion einer Größe  $x$  gemessen und die Meßpunkte auf Koordinatenpapier aufgezeichnet, so tritt häufig die Frage nach der besten Kurve durch diese Punkte auf. Dabei ist meist aufgrund theo-

retischer Erwägungen der Funktionszusammenhang zwischen  $y$  und  $x$  bis auf einen oder mehrere Parameter  $A, B, \dots$  bekannt, die aus der Messung zu bestimmen sind.

Wir behandeln hier den Sonderfall eines linearen Zusammenhangs<sup>1)</sup>

$$y = A + B \cdot x. \quad (17)$$

Die Meßwerte seien  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_n$ . Die  $x_k$  sollen als fehlerfrei angesehen werden. Die Bestwerte  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  der Konstanten  $A$  und  $B$  sind zu bestimmen.

Setzt man  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  in Gl. (17) ein, so erhält man

$$\bar{y}_k = \bar{A} + \bar{B} \cdot x_k. \quad (18)$$

Infolge der Meßfehler stimmt  $\bar{y}_k$  im allgemeinen nicht mit dem Meßwert  $y_k$  überein, und  $\Delta y_k = y_k - \bar{y}_k$  ist von Null verschieden.  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  lassen sich aus der Forderung bestimmen, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen  $\Delta y_k$  ein Minimum werden soll:

$$F(\bar{A}, \bar{B}) = \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{A} - \bar{B}x_k)^2 = \text{Min.}!$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum lauten  $\partial F / \partial \bar{A} = \partial F / \partial \bar{B} = 0$ . Daraus ergeben sich zwei lineare Gleichungen für  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ :

$$\sum_{k=1}^n y_k - n \cdot \bar{A} - \bar{B} \sum_{k=1}^n x_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n y_k x_k - \bar{A} \sum_{k=1}^n x_k - \bar{B} \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0.$$

Führt man die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k,$$

$$\bar{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{und} \quad \bar{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$$

ein, so erhält man

$$n\bar{y} = n\bar{A} + n\bar{x}\bar{B},$$

$$n\bar{xy} = n\bar{x}\bar{A} + n\bar{x^2}\bar{B}.$$

---

<sup>1)</sup> Viele nichtlineare Zusammenhänge können durch geeignete mathematische Umformungen (vgl. Abschn. 1.5.3) in lineare umgewandelt werden.

Löst man nach  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  auf, so ergibt sich

$$\bar{B} = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \quad (19\text{a})$$

und

$$\bar{A} = \bar{y} - \bar{B} \cdot \bar{x} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}. \quad (19\text{b})$$

Die Berechnung der Fehler von  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  geschieht wie folgt:

Die Streubreite  $s_y$  von  $y_k$  ist nach Gl. (7) gleich

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\Delta y_k)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{A} - \bar{B}x_k)^2}.$$

Die Streubreite von  $\bar{B}$  ergibt sich daraus nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (12) zu

$$\bar{s}_B = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial y_k} \right)^2 \cdot s_y^2}. \quad (20)$$

Es ist  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial y_k} = \frac{1}{n} \frac{(x_k - \bar{x})}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$ , und man erhält

$$\bar{s}_B = s_y \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial y_k} \right)^2} = s_y \sqrt{\frac{1}{n(\bar{x}^2 - (\bar{x})^2)}}. \quad (21)$$

Ferner erhält man mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}}{\partial y_k} &= \frac{1}{n} \frac{\bar{x}^2 - x_k \bar{x}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \\ \bar{s}_A &= s_y \sqrt{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial y_k} \right)^2} = s_y \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{n(\bar{x}^2 - (\bar{x})^2)}} = \bar{s}_B \cdot \sqrt{\bar{x}^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

### Beispiel

Zur Bestimmung des linearen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  eines Stabes wurde die Längenänderung  $y$  als Funktion der Temperatur gemessen; bei  $20^\circ\text{C}$  betrug die Länge  $l_{20}$  gerade 1 m. Es ist  $l = l_0 \{1 + \alpha(T - T_0)\}$  ( $l_0$  = Länge bei  $0^\circ\text{C}$ , d.h. bei  $T = T_0$ ), also

$$y = l - l_{20} = l_0 - l_{20} + l_0 \cdot \alpha (T - T_0) = A + B\Delta T.$$

Als Meßergebnis erhielt man die in Tabelle 6, Spalte 1 und 2 zusammengestellten Werte.  
Setzt man die Mittelwerte aus Tabelle 6 ein, so ergibt sich

$$\bar{B} = \frac{23,55 \text{ mm K} - 0,272 \text{ mm} \cdot 50 \text{ K}}{3500 \text{ K}^2 - 50 \text{ K} \cdot 50 \text{ K}} = 99,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm/K},$$

$$\bar{A} = 0,272 \text{ mm} - 99,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{K}} \cdot 50 \text{ K} = -0,2255 \text{ mm},$$

$$l_0 = l_{20} + A = 999,8 \text{ mm},$$

$$\alpha = B/l_0 = 99,5 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}.$$

Tabelle 6. Messung des linearen Ausdehnungskoeffizienten

| $\Delta T$<br>K | y<br>mm | $\Delta T^2$<br>$\text{K}^2$ | $y \cdot \Delta T$<br>mm · K | $\Delta y$<br>mm | $(\Delta y)^2$<br>$\text{mm}^2$ |
|-----------------|---------|------------------------------|------------------------------|------------------|---------------------------------|
| 0               | -0,24   | 0                            | 0                            | -0,0145          | $210 \cdot 10^{-6}$             |
| 10              | -0,13   | 100                          | -1,3                         | -0,0040          | $16 \cdot 10^{-6}$              |
| 20              | 0,00    | 400                          | 0                            | +0,0265          | $700 \cdot 10^{-6}$             |
| 30              | 0,08    | 900                          | 2,4                          | +0,0070          | $49 \cdot 10^{-6}$              |
| 40              | 0,16    | 1600                         | 6,4                          | -0,0125          | $160 \cdot 10^{-6}$             |
| 50              | 0,29    | 2500                         | 14,5                         | +0,0180          | $330 \cdot 10^{-6}$             |
| 60              | 0,35    | 3600                         | 21,0                         | -0,0215          | $465 \cdot 10^{-6}$             |
| 70              | 0,47    | 4900                         | 32,9                         | -0,0010          | $1 \cdot 10^{-6}$               |
| 80              | 0,55    | 6400                         | 44,0                         | -0,0205          | $420 \cdot 10^{-6}$             |
| 90              | 0,69    | 8100                         | 62,1                         | +0,0200          | $400 \cdot 10^{-6}$             |
| 100             | 0,77    | 10000                        | 77,0                         | +0,0005          | $0 \cdot 10^{-6}$               |
| Summe           | 550     | 2,99                         | 38500                        | 259,0            | -0,0020                         |
| Mittelwert      | 50      | 0,272                        | 3500                         | 23,55            | $2751 \cdot 10^{-6}$            |

Für die Fehler erhält man aus Spalte 6 von Tabelle 6

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 2,751 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

und

$$\bar{s}_B = \frac{0,017 \text{ mm}}{\sqrt{11(3500 \text{ K}^2 - 2500 \text{ K}^2)}} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ mm/K}.$$

Es ist also  $\alpha = B/l_0 = (99,5 \pm 2) \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$ .

## 1.6. Versuchsvorbereitung und Protokollführung

Die Erfahrung zeigt, daß jedem Studenten, der ein physikalisches Praktikum besucht, Hinweise für eine sinnvolle Versuchsvorbereitung und eine ordnungsgemäße Protokollführung gegeben werden müssen. Einzelheiten zu diesem Thema sind in der Praktikumsordnung der jeweiligen Hochschule festgelegt. Hier können nur einige allgemeine Regeln dargestellt werden.

In der Praxis hat es sich bewährt, für Meßprotokolle entweder gebundene

Bücher mit numerierten Seiten oder bestimmte Formblätter zu verwenden. Aus diesem Grunde wird in jedem Praktikum eine dieser beiden Möglichkeiten für die Protokollführung vorgeschrieben. Die Verwendung von „Schmierzetteln“ ist unter keinen Umständen gestattet. Das Protokoll ist das Dokument eines Experiments. Daher sollen alle Eintragungen mit Ausnahme von Skizzen und graphischen Darstellungen mit Tinte oder Kugelschreiber vorgenommen werden. Es ist nicht erlaubt, zu radieren oder in anderer Weise Protokollteile verschwinden zu lassen, denn dabei besteht immer die Gefahr, daß auch unbedingt notwendige Angaben versehentlich verlorengehen. Wenn einem Praktikanten fehlerhafte Eintragungen unterlaufen, so sind diese unter Angabe der Fehlerursache einzuklammern oder sauber durchzustreichen. Auf allen Formblättern bzw. auf dem Titelblatt des Protokollbuches sind Name, Fachrichtung und Seminargruppe des Praktikanten anzugeben. Die erste Seite eines Protokollbuches soll einem Inhaltsverzeichnis vorbehalten bleiben.

### *Vorbereitung*

Jeder Student erfährt rechtzeitig Thema und Literatur der auszuführenden Versuche, auf die er sich in Hausarbeit vorzubereiten hat. Nach dem Literaturstudium soll der Student den Versuch planen, d. h., er soll die Experimente in Gedanken ablaufen lassen und sich dabei überlegen, in welcher Reihenfolge die benötigten physikalischen Größen gemessen werden müssen. Andernfalls kann es vorkommen, daß eine Größe, deren Bestimmung im richtigen Moment vergessen wurde, in der zur Verfügung stehenden Zeit nicht ermittelt werden kann, weil sich die entsprechenden Versuchsbedingungen nicht mehr einstellen lassen.

Nun ist das Protokoll schriftlich vorzubereiten. Die Überschrift besteht aus der Bezeichnung des Versuches. Anschließend ist die genaue Aufgabenstellung zu formulieren. Das Meßverfahren soll in kurzer Form charakterisiert werden. Das kann in Stichworten und mit Hilfe von sauberen und übersichtlichen Freihandskizzen geschehen. Bei Versuchen der Elektrizitätslehre sind stets die Schaltskizzen anzugeben. Auf keinen Fall ist es erwünscht, daß ein Student im Protokoll Abschnitte aus Lehrbüchern oder eventuell vorhandenen Versuchsanleitungen abschreibt. In ein Protokoll der Praxis gehören keine theoretischen Abhandlungen, sondern nur die Gleichungen, die zur Berechnung der gesuchten physikalischen Größen erforderlich sind. Wenn ein Student die notwendigen Gleichungen in seinem Protokoll ableitet, weil er die Berechnung lernen will, wird er nicht getadelt. Jeder Praktikant sollte aber bedenken, daß nicht zählt, wieviel er aufgeschrieben hat, sondern wieviel er weiß.

Bei der Beschreibung des Meßverfahrens, in den Skizzen und nach den Gleichungen muß die Bedeutung der verwendeten Symbole für die einzelnen physikalischen Größen klar angegeben werden. Zur schriftlichen Vorbereitung eines Protokolls gehört schließlich die Anwendung der Fehlerberechnungsformeln auf die verwendeten Gleichungen.

Ein Student hat sich ordnungsgemäß vorbereitet, wenn er im Praktikum unverzüglich und ohne grobe Fehler zu begehen mit der Versuchsausführung beginnen kann.

### *Meßprotokoll*

Im Meßprotokoll werden das Datum sowie die Uhrzeit für Beginn und Ende der Versuchsausführung angegeben. Die Namen des wissenschaftlichen Betreuers und eventueller Mitarbeiter am Versuch sind zu vermerken. Dann folgt ein Verzeichnis aller notwendigen Geräte mit Angabe ihrer Inventar- oder Gerätenummer und ihrer Genauigkeit (z. B. Güteklaasse, kleinstes ablesbares Intervall usw.).

Während der Versuchsausführung sind alle direkt gemessenen Größen, die für das Endergebnis benötigt werden, übersichtlich – möglichst in Form von Tabellen – zu notieren. Außerdem sind die Fehler dieser Größen im Protokoll schriftlich festzuhalten. Alle Angaben müssen TGL-gerecht sein, d. h., es dürfen nur die gesetzlich zugelassenen Symbole und Einheiten verwendet werden.

### *Auswertung*

Die Versuchsauswertung ist – wenn nicht anders vereinbart – unmittelbar nach Abschluß der Experimente in der Praktikumszeit vorzunehmen und abzuschließen. Zur Auswertung werden im allgemeinen Zwischenresultate – z. B. Mittelwerte der verschiedenen Meßgrößen – gebraucht. Auch diese Werte müssen im Protokoll erscheinen.

Ist in einem Versuch die Abhängigkeit einer physikalischen Größe von einer anderen zu ermitteln, so soll dieser Zusammenhang stets auf geeignetem Koordinatenpapier graphisch dargestellt werden (vgl. Abschn. 1.5.3). Die Meßpunkte müssen in den graphischen Darstellungen – z. B. als Kreuze – deutlich erkennbar sein, denn sie – nicht die hindurchgezogene Kurve – sind der Beleg für das Experiment. Jeder Student soll sich anhand des Variationsbereiches der darzustellenden Größen überlegen, wie der Maßstab auf den Koordinatenachsen sinnvoll zu wählen ist. In vielen Fällen empfiehlt es sich, den Nullpunkt zu unterdrücken. Jede graphische Darstellung muß beschriftet sein. Dazu gehören das Thema (z. B. „Dynamische Viskosität einer Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur“) und die Bezeichnung der Koordinatenachsen mit Symbol und der verwendeten Einheit (z. B.  $\eta/10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  und  $T/^\circ\text{C}$ ).

Die Auswertung wird mit dem Meßergebnis einschließlich Fehlerangabe – bei graphischen Darstellungen für mindestens zwei Werte – abgeschlossen. Am Ende des Protokolls soll eine Diskussion des Ergebnisses und möglichst eine kritische Bewertung des Experiments stehen.

Allgemein kann man sagen: Ein Protokoll ist dann in Ordnung, wenn ein Mitarbeiter gleichen Ausbildunggrades wie der Protokollant anhand der Aufzeichnungen die Meßmethode und die Auswertung verstehen kann.

# Mechanik

## M. 1. WÄGUNG

### M. 1.0. Allgemeine Grundlagen

#### M. 1.0.1. Zweischalenwaage

Die gleicharmige Zweischalenwaage ist eine spezielle Konstruktionsform der Hebelwaage. Das schwingfähige System einer solchen Waage besteht aus dem Waagebalken, an dem ein Zeiger starr befestigt ist, und zwei Waagschalen. Die Schalen sollen als völlig gleich angenommen werden.

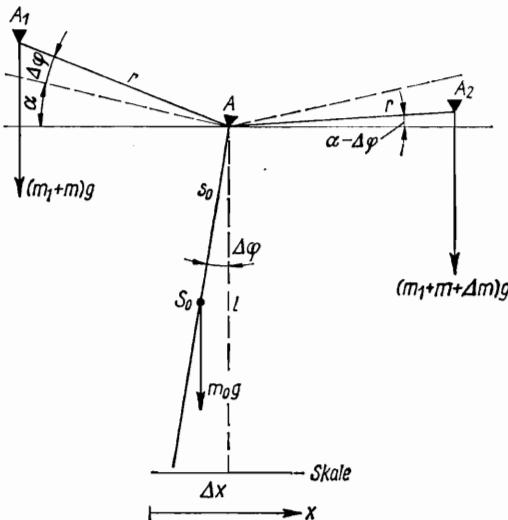


Abb. 7. Gleichgewichtslage einer ungleich belasteten Zweischalenwaage (schematisch)

Genau in der Mitte des Waagebalkens ist die Schneide  $A$  – die Drehachse – angebracht. Der Massenmittelpunkt  $S_0$  von Waagebalken und Zeiger muß unterhalb der Schneide  $A$  liegen, damit das schwingfähige System an eine stabile Ruhelage gebunden ist (vgl. Abb. 7).

Ein Maß für die Güte einer Waage ist die Empfindlichkeit  $E$ . Legt man auf

eine der beiden Schalen einer zuvor abgeglichenen Waage einen Körper hinreichend kleiner Masse  $\Delta m$ , so führt das System Schwingungen aus. Diese sind infolge der Reibung der Schneide  $A$  in ihrem Lager gedämpft.<sup>1)</sup> Ist das System nach einer gewissen Zeit zur Ruhe gekommen, haben sich Waagebalken und Zeiger gegenüber der Ausgangsstellung um den Winkel  $\Delta\varphi$  gedreht, und das freie Ende des Zeigers, dessen Lage an einer Skale beobachtet werden kann, hat sich um das Stück  $\Delta x$  verschoben. Die Entfernung der Skale von der Schneide  $A$  sei  $l$ . Da

$$\Delta\varphi \ll 1 \quad (1)$$

ist, gilt in sehr guter Näherung

$$\Delta x = l\Delta\varphi.$$

Als *Empfindlichkeit* definiert man das Verhältnis

---


$$E = \frac{\Delta x}{\Delta m} = l \frac{\Delta\varphi}{\Delta m}. \quad (2)$$


---

Nach Übereinkunft gibt man  $\Delta x$  in Skalenteilen und  $\Delta m$  in Milligramm an. Die Empfindlichkeit einer Zweischalenwaage ist sowohl von physikalischen Größen der Waage als auch von der Belastung  $m$  abhängig. In den folgenden Überlegungen wird die Länge des Hebelarmes (der Abstand zwischen  $A$  und  $A_1$  bzw.  $A$  und  $A_2$ ) mit  $r$ , die Masse von Waagebalken und Zeiger mit  $m_0$ , die Masse einer Waagschale mit  $m_1$  und der Abstand zwischen  $S_0$  und  $A$  mit  $s_0$  bezeichnet. In Abb. 7 ist die Gleichgewichtslage einer ungleich belasteten Waage dargestellt. Nach dem Hebelgesetz befindet sich eine Waage im Gleichgewicht, wenn die Summe aller auftretenden Drehmomente verschwindet. Rechnet man Drehmomente im Uhrzeigersinn positiv, im Gegen- uhrzeigersinn negativ, so gilt

$$\begin{aligned} r(m_1 + m + \Delta m)g \cos(\alpha - \Delta\varphi) - r(m_1 + m)g \cos(\alpha + \Delta\varphi) \\ - s_0 m_0 g \sin \Delta\varphi = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Jeder Summand in Gl. (3) enthält die Schwerebeschleunigung  $g$  als Faktor. Daraus folgt, daß man mit einer Hebelwaage die Masse  $m$  eines Körpers, nicht sein Gewicht  $F = mg$  bestimmt. Nach Abschätzung (1) ist

$$\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi, \quad \cos(\alpha \pm \Delta\varphi) \approx \cos \alpha \mp \Delta\varphi \sin \alpha.$$

---

<sup>1)</sup> Die Waagebalken mancher Analysenwaagen sind zusätzlich mit Dämpfungstöpfen versehen.

Damit kann man Gl. (3) in guter Näherung

$$r \Delta m \cos \alpha = \{s_0 m_0 - r[2(m_1 + m) + \Delta m] \sin \alpha\} \Delta \varphi \quad (3a)$$

schreiben. In der Praxis ist stets

$$\alpha \ll 1, \quad \Delta m \ll 2(m_1 + m),$$

und Gl. (3a) vereinfacht sich zu

$$r \Delta m = \{s_0 m_0 - 2r(m_1 + m) \alpha\} \Delta \varphi. \quad (3b)$$

Jede Waage, deren Prinzip mit Abb. 7 übereinstimmt, wird so konstruiert, daß

$$s_0 m_0 > 2r(m_1 + m) \alpha$$

für alle zulässigen Belastungen  $m$  ist. Die durch Gl. (2) definierte Empfindlichkeit lautet also

$$E = l \frac{r}{s_0 m_0 - 2r(m_1 + m) \alpha}. \quad (4)$$

Aus Gl. (4) folgt, daß die Empfindlichkeit der Länge des Hebelarmes  $r$  näherungsweise proportional ist. Eine Vergrößerung von  $r$  ist aber mit einer Zunahme der Masse  $m_0$  verbunden, da man den Querschnitt des Waagebalkens nicht beliebig klein wählen kann. Außerdem wächst das Trägheitsmoment des schwingfähigen Systems bei Verlängerung des Hebelarmes erheblich an. Dadurch wird die Schwingungsdauer und also auch der Zeitaufwand für eine Wägung größer [vgl. Gl. (M. 3.-13)]. Es ist daher nicht erstaunlich, daß Analysenwaagen mit relativ kurzen Waagebalken ausgestattet sind. Eine Verkleinerung des Abstandes  $s_0$  erhöht zwar die Empfindlichkeit, führt aber auch dazu, daß die Ruhelage des schwingfähigen Systems der Waage weniger stabil und die Schwingungsdauer größer wird.

Die Empfindlichkeit wächst nach Gl. (4) mit der Belastung  $m$  an. Dieser Empfindlichkeitssteigerung wirkt aber die unvermeidliche Durchbiegung des Waagebalkens entgegen, die einer Abnahme des Winkels  $\alpha$  gleichkommt und den Abstand  $s_0$  vergrößert;  $\alpha$  und  $s_0$  sind also Funktionen der Belastung  $m$ .

$$\alpha = \alpha(m), \quad s_0 = s_0(m).$$

Der Nenner von Gl. (4) nimmt daher mit zunehmender Masse  $m$  nicht monoton ab, sondern hat bei einer bestimmten Belastung  $m = m'$  ein Minimum. Der Wert von  $m'$  hängt sowohl von der Größe des Winkels  $\alpha(0)$  als auch von der Festigkeit des Waagebalkens ab. Die Empfindlichkeit  $E$  als Funktion der Belastung  $m$  hat bei  $m = m'$  ein Maximum.

Bei einer Belastung  $m = m'' > m'$  liegen die Drehachse  $A$  und die Schneiden  $A_1$  und  $A_2$  auf einer Geraden ( $\alpha = 0$ ). In diesem Falle lautet Gl. (4)

$$E = l \frac{r}{s_0 m_0}. \quad (4a)$$

Wird die Belastung  $m$  größer als  $m''$ , so befinden sich die Schneiden  $A_1$  und  $A_2$  bei abgeglichener Waage unterhalb der Drehachse  $A$ . Dann ist in Gl. (4) der Winkel  $\alpha$  durch  $-\alpha$  zu ersetzen, und die Empfindlichkeit nimmt gemäß

$$E = l \frac{r}{s_0 m_0 + 2r(m_1 + m)\alpha} \quad (4b)$$

mit der Belastung ab. Die bei der Diskussion von Gl. (4) gewonnenen Ergebnisse lassen sich am Waagmodell prüfen.

Mit einer Zweischal-Analysenwaage können sehr genaue Massebestimmungen durchgeführt werden. Man muß aber bedenken, daß sich die beiden Hebelarme der Waage niemals völlig gleich lang herstellen lassen. Die Länge des linken Hebelarmes  $r_e$  unterscheidet sich stets um einen sehr kleinen Betrag von der des rechten  $r_r$ . Außerdem ist zu berücksichtigen, daß der Schwerkraft bei einer Wägung in einem materiellen Medium – z. B. in Luft – der Auftrieb entgegenwirkt.

Das *Archimedische Prinzip* besagt:

Der *Auftrieb*, der auf einen Körper in einem materiellen Medium (Flüssigkeit oder Gas) wirkt, ist gleich dem Gewicht des vom Körper verdrängten Mediums:

$$|F_A| = V \varrho_M g = m \frac{\varrho_M}{\varrho} g; \quad (5)$$


---

hierin ist  $V$  das Volumen und  $\varrho$  die Dichte des Körpers. Die Dichte des Mediums ist mit  $\varrho_M$  bezeichnet.

Legt man den zu wägenden Körper der Masse  $m$  auf die linke, Wägestücke der Masse  $m_r^*$  auf die rechte Schale einer Waage, die sich in Luft befindet, so gilt für den Abgleich

$$\begin{aligned} \left\{ mg - m \frac{\varrho_L}{\varrho} g \right\} r_1 &= \left\{ m_r^* g - m_r^* \frac{\varrho_L}{\varrho^*} g \right\} r_r, \\ m \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho} \right) r_1 &= m_r^* \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right) r_r. \end{aligned} \quad (6)$$

$\varrho_L$  bzw.  $\varrho^*$  sind die Dichte der Luft bei Zimmertemperatur und Luftdruck bzw. der Wägestücke. Vertauscht man nun Körper und Wägestücke, tritt

an die Stelle der Gl. (6)

$$m \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho}\right) r_r = m_i^* \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right) r_i. \quad (7)$$

Aus den Gln. (6) und (7) folgt mit der Abkürzung

$$\bar{m} = \sqrt{m_i^* m_r^*} \quad (8a)$$

für die zu bestimmende Masse

$$m = \bar{m} \frac{\frac{1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}}{1 - \frac{\varrho_L}{\varrho}}}{.} \quad (9a)$$

Da die Dichte der Luft sehr klein gegen die Dichte des Körpers bzw. die der Wägestücke ist, kann man für Gl. (9a)

$$m = \bar{m} \left\{ 1 + \frac{\varrho_L}{\varrho} - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right\} \quad (9b)$$

schreiben.

Mit einer sehr genauen Analysenwaage lassen sich  $m_i^*$  und  $m_r^*$  bei Verwendung des Reiters bis auf  $10^{-4}$  g bestimmen. Wenn  $m_i^*$  und  $m_r^*$  jeweils größer als 100 g sind, muß man zur Berechnung des geometrischen Mittels  $\bar{m}$  zwei siebenstellige Zahlen miteinander multiplizieren und aus dem Produkt die Wurzel ziehen. Um diese lästige Zahlenrechnung zu umgehen, schreibt man Gl. (8a)

$$\bar{m} = m_i^* \sqrt{1 + \frac{m_r^* - m_i^*}{m_i^*}} \quad (8b)$$

und bedenkt, daß der Unterschied zwischen  $m_i^*$  und  $m_r^*$  sehr gering ist. Die Wurzel in Gl. (8b) läßt sich nach der kleinen Größe  $(m_r^* - m_i^*)/m_i^*$  entwickeln, und die Entwicklung darf nach dem linearen Glied abgebrochen werden.

$$\bar{m} \approx m_i^* \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_r^* - m_i^*}{m_i^*}\right) = \frac{1}{2} (m_i^* + m_r^*). \quad (8)$$

Man darf also das geometrische Mittel der Massen  $m_i^*$  und  $m_r^*$  mit hinreichender Genauigkeit durch das arithmetische Mittel ersetzen. Aus den Gln. (8) und (9b) erhält man

---


$$m = \frac{1}{2} (m_i^* + m_r^*) \left(1 + \frac{\varrho_L}{\varrho} - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right). \quad (9)$$


---

Das Längenverhältnis der beiden Hebelarme der Waage ergibt sich aus den Gln. (6) und (7) zu

$$\frac{r_1}{r_r} = \sqrt{\frac{m_r^*}{m_l^*}} = \sqrt{1 + \frac{m_r^* - m_l^*}{m_l^*}} \quad (10a)$$

oder nach Entwicklung der Wurzel zu

---


$$\frac{r_1}{r_r} = 1 + \frac{1}{2} \frac{m_r^* - m_l^*}{m_l^*}. \quad (10)$$


---

### M. 1.0.2. Regeln für das Arbeiten mit Analysenwaagen

Eine Analysenwaage ist ein genaues und empfindliches Meßinstrument, das äußerst sorgfältig behandelt werden muß.

Wenn man die Arretierschraube einer Waage vorsichtig löst, erhält der Waagebalken einen leichten Stoß, und das System Waagebalken – Zeiger – Waagschalen beginnt um die Gleichgewichtslage zu schwingen. Die Amplitude der Schwingungen wird meist durch eine Lupe auf einer Skale beobachtet, die hinter dem freien Ende des Zeigers am Ständer der Waage befestigt ist. Die Gleichgewichtslage (der Nullpunkt) wird stets bei schwingender Waage und geschlossenem Gehäuse festgestellt. Nach dem Ent-

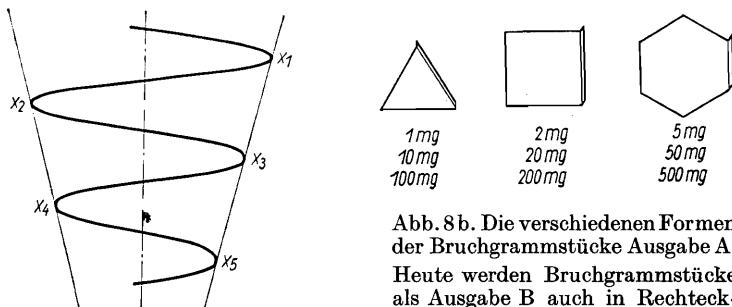


Abb. 8a. Zur Bestimmung der Gleichgewichtslage einer Waage

Abb. 8b. Die verschiedenen Formen der Bruchgrammstücke Ausgabe A. Heute werden Bruchgrammstücke als Ausgabe B auch in Rechteckform verschiedener Größen hergestellt. Die Masse ist als Zahlenwert in mg eingedruckt.

arretieren lässt man das System einige Schwingungen ausführen und ermittelt dann die Lage von fünf aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten des Zeigers. Dabei ist auf Zehntelskalenteile zu schätzen. Die Zahl der Umkehrpunkte muß ungerade sein (vgl. Abb. 8a), da die Schwingungen gedämpft

sind. Wenn die Dämpfung nicht zu groß ist, kann man die Abnahme der Amplituden als nahezu linear ansehen. Die Gleichgewichtslage  $x$  ergibt sich, indem man das arithmetische Mittel von  $x_1$ ,  $x_3$  und  $x_5$  sowie das von  $x_2$  und  $x_4$  bildet und aus diesen beiden Werten das arithmetische Mittel berechnet.

$$x = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} (x_1 + x_3 + x_5) + \frac{1}{2} (x_2 + x_4) \right\}. \quad (11)$$

Nach der Nullpunktsbestimmung wird die Waage sofort arretiert. Eine Waage darf nur im arretierten Zustand be- oder entlastet werden. Beachtet man diese Vorschrift nicht, besteht die Gefahr, daß die Schneiden  $A$ ,  $A_1$  und  $A_2$  (vgl. Abb. 7) aus ihren Läfern springen und beschädigt werden. Nach jeder Wägung wird der Nullpunkt erneut bestimmt. Unterscheidet sich die Gleichgewichtslage vor der Wägung  $x_v$  nur wenig von der nach der Wägung  $x_n$ , so arbeitet man mit

$$x = \frac{1}{2} (x_v + x_n). \quad (12)$$

Beträgt der Unterschied zwischen  $x_v$  und  $x_n$  mehrere Skalenteile, soll ein Assistent die Waage prüfen.

Die Wägestücke und der Reiter dürfen nur mit der Pinzette angefaßt werden. Der Reiter hat eine Masse von 10 mg. Er kann mit einem verschiebbaren Haken auf das am Waagebalken angebrachte Reiterlineal gesetzt werden. Bei der Bestimmung des Nullpunktes soll sich der Reiter in der Mitte des Waagebalkens (Teilstrich 0) befinden.

### M. 1.0.3. Einschalen-Analysenwaage

Seit einigen Jahren werden vorwiegend ungleicharmige Analysenwaagen hergestellt, die nur mit einer Waagschale versehen sind. Der kürzere Hebelarm ist mit der Schale (Masse  $m_1$ ) und einem aus verschiedenen Teilen zusammengesetzten Zusatzkörper (Masse  $m_{\max}$ ) belastet. Das Gleichgewicht wird durch den geeignet bemessenen längeren Hebelarm hergestellt. Legt man nun auf die Waagschale einen Körper der Masse  $m < m_{\max}$ , dann können mit Hilfe eines Schaltwerkes so viele Teile des Zusatzkörpers abgehoben werden, bis der kürzere Hebelarm wieder mit der Masse  $m_1 + m_{\max}$  belastet und die Waage abgeglichen ist (Substitutionsprinzip). Die Masse  $m$  liest man an einem Zählwerk ab.

Da die Belastung bei dieser Waagenart unabhängig von der zu bestimmenden Masse  $m$  ist, bleibt die Empfindlichkeit im gesamten Wägebereich konstant. Die Genauigkeit der Massebestimmung hängt nur von der Empfindlichkeit der Waage und der Präzision ab, mit der die Teile des Zusatzkörpers angefertigt worden sind. Das Längenverhältnis der beiden Hebelarme beeinflußt dagegen die Genauigkeit nicht.

### M. 1.1. Empfindlichkeit einer Zweischalenwaage

*Aufgabe:* Die Empfindlichkeit einer Zweischalen-Analysenwaage soll bei verschiedenen Belastungen bestimmt werden.

#### Versuchsausführung

Wir lösen vorsichtig die Arretierschraube und bestimmen den Nullpunkt  $x_v$  aus der Lage von fünf aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten des Zeigers der schwingenden Waage [vgl. Gl. (11)]. Dann wird die Waage arretiert und der Reiter auf Teilstrich 3 des Reiterlineals am Waagebalken gesetzt. Das entspricht einer Belastung von 3 mg. Die neue Gleichgewichtslage  $x'$  ist wieder aus fünf Umkehrpunkten des Zeigers zu ermitteln. Wir arretieren die Waage und heben den Reiter mit dem verschiebbaren Haken auf Teilstrich 0 des Reiterlineals. Nun wird der Nullpunkt  $x_n$  nochmals bestimmt und  $x$  aus Gl. (12) berechnet. Die Empfindlichkeit der unbelasteten Waage ergibt sich, indem wir die Differenz  $|x' - x|$  durch 3 mg teilen.

In gleicher Weise ist die Empfindlichkeit der Waage zu bestimmen, wenn jede der beiden Schalen mit 5; 10; 20; 50 bzw. 100 g belastet ist. Der Nullpunkt stimmt bei den verschiedenen Belastungen im allgemeinen nicht mit dem der unbelasteten Waage überein, da zwei Wägestücke der gleichen Wertstufe niemals völlig identisch sind und das Längenverhältnis der beiden Hebelarme nicht exakt 1 ist.

Wir stellen die Empfindlichkeit als Funktion der Belastung graphisch dar und vergleichen das experimentelle Ergebnis mit der in Abschn. M. 1.0.1 gegebenen Diskussion.

### M. 1.2. Absolute Wägung

*Aufgabe:* Die Masse  $m$  eines Körpers ist mit einer Zweischalen-Analysenwaage zu bestimmen. Der Fehler soll  $2 \cdot 10^{-4}$  g nicht überschreiten. Außerdem ist das Längenverhältnis der beiden Hebelarme der Waage zu berechnen.

#### Versuchsausführung

Wir bestimmen den Nullpunkt  $x_v$  der Waage [vgl. Gl. (11)]. Dann wird die Waage arretiert und der zu wägende Körper auf die linke Schale gelegt. Wir schätzen die Masse des Körpers und belasten die rechte Schale mit den entsprechenden Wägestücken. Bei unvollständiger Aufhebung der Arretierung lässt sich leicht erkennen, ob die Waage näherungsweise abgeglichen ist. Die Lage des Reiters wird auf dem Lineal so lange verändert, bis der Zeiger frei vor der Skale schwingt. Die Gleichgewichtslage  $x'$  soll sich nur wenig von  $x_v$  unterscheiden. Nun verschieben wir den Reiter um einen Teil-

strich nach rechts, d. h., wir vergrößern die Belastung der rechten Schale um 1 mg und stellen die Gleichgewichtslage  $x''$  fest. Die arretierte Waage wird vollständig entlastet, der Reiter auf Teilstrich 0 des Lineals gesetzt und der Nullpunkt kontrolliert:  $x_n$ .

Die Masse  $m_r^*$  ergibt sich aus der Masse der Wägestücke unter Berücksichtigung der Stellung des Reiters bei der Gleichgewichtslage  $x'$ . Wenn  $x$  [vgl. Gl. (12)] und  $x'$  nicht übereinstimmen, fügen wir  $\varepsilon$  Milligramm hinzu.

$$\varepsilon = \frac{x' - x}{x' - x''},$$

$\varepsilon$  kann sowohl positiv als auch negativ sein. In analoger Weise ist die Masse  $m_l^*$  zu ermitteln. Dafür gilt die obige Beschreibung, es sind nur die Begriffe rechts und links zu vertauschen.

Die Dichte der Luft bei Zimmertemperatur und Luftdruck ist

$$\varrho_L \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Die Dichten  $\varrho$  und  $\varrho^*$  sind der Tab. 1 zu entnehmen. Die Masse  $m$  des Körpers wird nach Gl. (9), das Längenverhältnis der Hebelarme nach Gl. (10) berechnet.

## M. 2. DICHTE

### M. 2.0. Allgemeine Grundlagen

Die Dichte  $\varrho$  eines homogenen Körpers ist das Verhältnis seiner Masse  $m$  zu seinem Volumen  $V$

---


$$\varrho = \frac{m}{V}. \quad (1)$$


---

Im gesetzlichen Maßsystem ist die Einheit der Dichte  $\text{kg m}^{-3}$ .

Die Masse eines Körpers lässt sich durch eine Wägung mit großer Genauigkeit ermitteln. Wenn zur Bestimmung der Masse eine Zweischalen-Analysenwaage verwendet werden soll, ist vor dem Versuchsbeginn unbedingt der Abschn. M. 1.0.2 zu lesen.

Eine Volumenbestimmung ist nach verschiedenen Methoden möglich, von denen drei erwähnt werden sollen.

1. Hat ein fester Körper eine einfache geometrische Gestalt, d. h., lässt sich sein Volumen als Funktion gewisser Längen ausdrücken, so wird die

Volumenbestimmung auf Längenmessungen zurückgeführt, die mit mechanischen Meßwerkzeugen (Meßschieber, Meßschraube, Endmaße usw.) vorgenommen werden können.

2. Wenn man das von einem beliebigen Körper eingenommene Volumen mit einer Flüssigkeit bekannter Dichte – z. B. mit Wasser – ausfüllt, kann die Volumenbestimmung durch Wägungen erreicht werden.
3. Jeder Körper erfährt in einer Flüssigkeit bzw. in einem Gas einen Auftrieb. Dieser ist nach dem Archimedischen Prinzip gleich dem Gewicht des verdrängten Flüssigkeits- bzw. Gasvolumens [vgl. Gl. (M. 1.-5)]. Das Volumen des Körpers lässt sich daher durch Wägung in zwei verschiedenen Medien bekannter Dichte – z. B. in Luft und in Wasser – bestimmen.

Während die Dichte eines festen Körpers oder einer Flüssigkeit nur wenig von der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$  abhängt, ändert sich die Dichte eines Gases oder eines Dampfes erheblich mit den Zustandsgrößen  $T$  und  $p$ . Bei Angabe einer Gas- oder Dampfdichte sind daher stets die Versuchsbedingungen zu erwähnen.

Unter  $T$  ist die absolute Temperatur zu verstehen, die in Kelvin (K) angegeben wird. Die mit gewöhnlichen Flüssigkeitsthermometern in Grad Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) gemessene Temperatur soll dagegen mit  $t$  bezeichnet werden. Wenn  $T$  und  $t$  den gleichen Zustand eines Körpers beschreiben, besteht der Zusammenhang

$$\{T\} = 273,15 + \{t\}.$$

Die geschweiften Klammern bedeuten, daß nur die Zahlenwerte der entsprechenden Größen gemeint sind.

Der Druck  $p$  ist die senkrecht auf die Flächeneinheit wirkende Kraft. Die Einheit des Druckes ist daher im gesetzlichen Maßsystem das Pascal,  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$ , im CGS-System  $\text{dyn cm}^{-2}$ . Der Luftdruck wird im allgemeinen durch die Höhe  $h$  der Quecksilbersäule im Barometer bei  $0^{\circ}\text{C}$  charakterisiert. Die Druckeinheit 1 Torr entspricht dem Schweredruck einer Quecksilbersäule von  $10^{-3} \text{ m}$  Höhe. Aus

$$p = h \varrho_{\text{Hg}} g \quad (2)$$

folgt

$$1 \text{ Torr} = 10^{-3} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \text{ N m}^{-2} = 133,4 \text{ N m}^{-2}.$$

In Gl. (2) bedeuten  $\varrho_{\text{Hg}}$  die Dichte von Quecksilber bei  $0^{\circ}\text{C}$  und  $g$  die Schwerkraftbeschleunigung.

Als relative Gas- oder Dampfdichte  $D$  definiert man das Verhältnis der Dichte des Gases  $\varrho_G$  oder des Dampfes  $\varrho_D$  zur Dichte trockener Luft  $\varrho_L$  bei gleichen Zustandsgrößen  $T$  und  $p$ :

$$D = \frac{\varrho_G(T, p)}{\varrho_L(T, p)} = \frac{m_G}{m_L} \quad \text{oder} \quad D = \frac{\varrho_D(T, p)}{\varrho_L(T, p)} = \frac{m_D}{m_L}; \quad (3)$$

dabei ist  $D$  das Verhältnis der Masse des Gases  $m_G$  oder des Dampfes  $m_D$  zu der im gleichen Volumen bei gleichen Bedingungen enthaltenen Masse trockener Luft  $m_L$ .

Wenn man annimmt, daß die zu untersuchenden Gase bzw. Dämpfe der Zustandsgleichung

---


$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{const} \quad \text{oder} \quad \varrho \frac{T}{p} = \varrho_0 \frac{T_0}{p_0} = \text{const} \quad (4)$$


---

genügen,<sup>1)</sup> ist  $D$  unabhängig von  $T$  und  $p$ . In diesem Falle kann man mit Hilfe von  $D$  die Masse eines Kilomols Gas bzw. Dampf  $M$  berechnen. Ein Kilomol (kmol) ist die Teilchenmenge, in der genau so viele, unter sich gleiche Teilchen wie in 12 kg des häufigsten Kohlenstoffisotops  $^{12}\text{C}$  Nuklide enthalten sind. Nach dem Gesetz von *Avogadro* befindet sich in gleichen Volumina verschiedener Gase, für die Gl. (4) erfüllt ist, bei gleicher Temperatur und gleichem Druck die gleiche Anzahl Moleküle. Daraus folgt, daß das Volumen eines Kilomols für alle idealen Gase gleich ist. Es beträgt bei Normalbedingungen ( $T_N = 273,15\text{ K}$  und  $p_N = 760\text{ Torr}$ )

$$V_{M,N} = 22,41 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}.$$

Wenn man die in Gl. (3) vorkommenden Massen auf das Volumen eines Kilomols bezieht und die Masse eines Kilomols Luft

$$M_L = V_{M,N} \varrho_{L,N}$$

schreibt, ergibt sich

$$M = V_{M,N} \varrho_{L,N} D. \quad (5)$$

Die Dichte der Luft bei Normalbedingungen  $\varrho_{L,N}$  ist der Tab. 3 zu entnehmen.

Als relative Molekülmasse  $M'$  definiert man die Masse eines Moleküls des betrachteten Stoffes geteilt durch den zwölften Teil der Masse eines  $^{12}\text{C}$ -Nuklids. Aus dieser Definition folgt, daß die relative Molekülmasse mit dem Zahlenwert der Masse eines Kilomols übereinstimmt.

$$M' = 22,41 \cdot 1,293 \cdot D = 29,0 D. \quad (5a)$$

Die chemische Untersuchung eines Stoffes gibt Aufschluß darüber, welche Elemente in welchem Massenverhältnis enthalten sind. Eine Analyse von z. B. Benzol führt zu dem Ergebnis, daß Kohlenstoff und Wasserstoff im Massenverhältnis 12:1 vorkommen. Danach ist die chemische Formel  $C_nH_n$ , wobei  $n$  eine beliebige ganze Zahl sein kann. Hat man nun die relative Dampfdichte von Benzol zu  $D = 2,70$  bestimmt, ergibt sich  $M'$  nach Gl. (5a) zu 78,3. Die chemische Formel muß daher  $C_6H_6$  heißen.

---

<sup>1)</sup> Für Dämpfe ist die Annahme nur dann erfüllt, wenn die Temperatur  $T$  erheblich größer als die Siedetemperatur der Flüssigkeit ist.

## M. 2.1. Auftriebsmethode

**Aufgabe:** Die Dichte verschiedener fester Körper soll nach der Auftriebsmethode bestimmt werden.

Eine Hebelwaage sei abgeglichen, nachdem am Bügel einer der beiden Schalen ein sehr dünner Kupferdraht (Volumen  $\Delta V$ ) angebracht worden ist. Man befestigt den zu untersuchenden Körper (Masse  $m$ , Volumen  $V$ ) an dem Draht und führt die Wägung in Luft durch. Die Gleichgewichtsbedingung lautet bei Berücksichtigung des Auftriebes

$$m - V\varrho_L = m^* \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right). \quad (6)$$

In Gl. (6) sind  $m^*$  bzw.  $\varrho^*$  die Masse bzw. die Dichte der Wägestücke und  $\varrho_L$  die Dichte der Luft bei Zimmertemperatur und Luftdruck. Während der Wägung in Wasser soll der Körper völlig, der Befestigungsdraht mit  $1/n$  seiner Länge eintauchen. Für das Gleichgewicht gilt

$$m - V\varrho_W - \frac{1}{n} \Delta V (\varrho_W - \varrho_L) = m_W^* \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right); \quad (7a)$$

dabei ist  $\varrho_W$  die Dichte des Wassers und  $m_W^*$  die Masse der Wägestücke bei dieser Wägung. Mit dem letzten Summanden auf der linken Seite von Gl. (7a) wird berücksichtigt, daß der Draht in Wasser einen größeren Auftrieb als in Luft erfährt. Wenn der Draht einen Durchmesser von 0,2 mm, eine Länge von 20 cm hat und etwa zur Hälfte in das Wasser taucht, stellt  $\frac{1}{n} \Delta V \varrho_L$  eine Masse von ungefähr  $4 \cdot 10^{-6}$  g dar. Glieder dieser Größenordnung sollen in der weiteren Betrachtung vernachlässigt werden. Gl. (7a) lautet dann

$$m - V\varrho_W - \frac{1}{n} \Delta V \varrho_W = m_W^* \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right). \quad (7)$$

Die Gln. (6) und (7) sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen  $m$  und  $V$ . Die Lösung kann

$$m(\varrho_W - \varrho_L) = (m^* \varrho_W - m_W^* \varrho_L) \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right),$$

$$V(\varrho_W - \varrho_L) = \left(m^* - m_W^* - \frac{1}{n} \Delta V \varrho_W\right) \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right)$$

geschrieben werden. Damit erhält man für die gesuchte Dichte

---


$$\varrho = \frac{m^* \varrho_w - m_w^* \varrho_L}{m^* - m_w^* - \frac{1}{n} \Delta V \varrho_w}. \quad (8)$$


---

Der Ausdruck  $\frac{1}{n} \Delta V \varrho_w$  hat die Größenordnung  $10^{-3}$  g. Außerdem gilt die Abschätzung

$$m_w^* \varrho_L \approx 10^{-3} m^* \varrho_w.$$

Die Berücksichtigung des Auftriebes, den der Draht in Wasser erfährt, und der Auftriebskräfte, die auf den Körper und die Wägestücke in Luft wirken, hat nur dann einen Sinn, wenn man eine genügend empfindliche Waage verwendet. Führt man den Versuch mit einer Balkenwaage durch, so darf Gl. (8) durch

---


$$\varrho = \frac{m^*}{m^* - m_w^*} \varrho_w \quad (8a)$$


---

ersetzt werden.

Das Verfahren in der oben beschriebenen Form versagt, wenn die Dichte des Körpers kleiner als die von Wasser ist. In diesem Falle wird der Körper vor der Wägung in Wasser mit einem Zusatzkörper hinreichend großer Dichte beschwert. Anstelle der Gl. (7) tritt dann

$$m - V \varrho_w + m_z - V_z \varrho_w - \frac{1}{n} \Delta V \varrho_w = m_w^* \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right); \quad (9a)$$

$V_z$  bzw.  $m_z$  sind das Volumen bzw. die Masse des Zusatzkörpers. Durch Wägung dieses Körpers in Wasser erhält man

$$m_z - V_z \varrho_w - \frac{1}{n} \Delta V \varrho_w = m_{z,w}^* \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right).$$

Es wird also vorausgesetzt, daß der Befestigungsdraht bei beiden Wägungen gleich weit in das Wasser eintaucht. Damit kann Gl. (9a)

$$m - V \varrho_w = (m_w^* - m_{z,w}^*) \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*}\right) \quad (9)$$

geschrieben werden. Aus den Gln. (6) und (9) lassen sich  $m$  und  $V$  und folglich auch die gesuchte Dichte  $\varrho$  berechnen. Das Ergebnis lautet

---


$$\varrho = \frac{m^* \varrho_w - (m_w^* - m_{z,w}^*) \varrho_L}{m^* - (m_w^* - m_{z,w}^*)} \quad (10)$$


---

oder bei Verwendung einer Balkenwaage

---

$$\varrho = \frac{m^*}{m^* - (m_{W}^* - m_{Z,W}^*)} \varrho_W. \quad (10a)$$


---

### Versuchsausführung

Wir messen die Länge und den Durchmesser eines dünnen Kupferdrahtes zur Berechnung von  $\Delta V$ , befestigen den Draht am Bügel einer Waagschale und gleichen die Waage ab. Der zu untersuchende Körper wird an den Draht gehängt. Aus der Wägung in Luft erhalten wir  $m^*$ . Anschließend ist die Waagschale mit einer kleinen Bank zu überbrücken, auf die wir ein Becherglas stellen. Das Glas muß so weit mit Wasser gefüllt sein, daß der an dem Draht hängende Körper vollständig eintaucht. Sollten an dem Körper Luftblasen haften, so sind diese zu beseitigen. Die Wägung in Wasser liefert  $m_W^*$ . Wir messen die Wassertemperatur und schätzen die Länge des eintauchenden Drahtes. Nach der Bestimmung der Empfindlichkeit der Waage ist zu entscheiden, ob die gesuchte Dichte gemäß Gl. (8) oder (8a) zu berechnen ist. Die Dichte von Wasser wird der Tab. 4 entnommen. Bei Verwendung der Gl. (8) ist die Dichte der Luft nach Gl. (4) aus der Dichte bei Normalbedingungen auf zwei Stellen genau zu berechnen.

Wir wiederholen die Messung mit anderen Versuchskörpern. Sollte ein Körper in Wasser schwimmen, so ist er vor der Wägung in Wasser mit dem Versuchskörper zu beschweren, der die größte Dichte hat. In diesem Falle erhalten wir die gesuchte Dichte aus Gl. (10) bzw. (10a).

Hat ein Körper einfache geometrische Gestalt, dann sollen außerdem die Längen gemessen werden, die zur Berechnung seines Volumens notwendig sind. Aus Gl. (6) und dem berechneten Volumen ergibt sich seine Dichte.

## M. 2.2. Mohr-Westphalsche Waage

*Aufgabe:* Die Dichte einer Flüssigkeit und die Dichte eines festen Körpers sollen mit der Mohr-Westphalschen Waage bestimmt werden.

Die Mohr-Westphalsche Waage ist eine ungleicharmige Hebelwaage. Der längere Hebelarm ist durch Kerben in Zehntel seiner Länge geteilt. Am Ende befindet sich ein Haken, an den ein Senkkörper gehängt werden kann. Dieser enthält ein Thermometer. Der andere Hebelarm endet in einem Metallzylinder, der mit einem Dorn versehen ist. Bei abgeglichener Waage spielt die Spitze des Dornes vor der Spitze eines zweiten Dornes, der am Stativ der Waage befestigt ist. Als Wägestücke dienen Reiter verschiedener Größe, deren Massen sich wie 1 : 0,1 : 0,01 verhalten.

Die Waage wird so justiert, daß sie bei Belastung mit dem Senkkörper (Masse  $m_s$ , Volumen  $V_s$ ) abgeglichen ist. Dann greift am Haken des längeren Hebelarmes das Gewicht des Senkkörpers und des Befestigungsdrahtes (Masse  $\Delta m$ , Volumen  $\Delta V$ ) vermindert um den Luftauftrieb an. Bezeichnet man diese Kraft mit  $m'g$ , die Dichte der Luft bei Zimmertemperatur und Luftdruck mit  $\varrho_L$ , so ergibt sich

$$m' = m_s + \Delta m - (V_s + \Delta V) \varrho_L. \quad (11)$$

Nun taucht man den Senkkörper völlig, den Befestigungsdraht mit  $1/n$  seiner Länge in Wasser und belastet den längeren Hebelarm mit Reitern der Masse  $m_1$ , bis sich die Waage im Gleichgewicht befindet. Dann gilt

$$\begin{aligned} m' &= m_s + \Delta m - \left( V_s + \frac{1}{n} \Delta V \right) \varrho_W \\ &\quad - \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \Delta V \varrho_L + m_1 \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_R} \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$\varrho_R$  ist die Dichte der Reiter. Man trocknet den Senkkörper sorgfältig ab und hängt ihn in eine Flüssigkeit der Dichte  $\varrho$ . Nach dem Abgleich der Waage mit Reitern der Masse  $m_2$  soll der Befestigungsdraht genau so tief in die Flüssigkeit wie zuvor in Wasser tauchen. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} m' &= m_s + \Delta m - \left( V_s + \frac{1}{n} \Delta V \right) \varrho \\ &\quad - \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \Delta V \varrho_L + m_2 \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_R} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Zieht man Gl. (11) von Gl. (13) bzw. (12) ab, so erhält man

$$\begin{aligned} m_2 \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_R} \right) &= \left( V_s + \frac{1}{n} \Delta V \right) (\varrho - \varrho_L), \\ m_1 \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_R} \right) &= \left( V_s + \frac{1}{n} \Delta V \right) (\varrho_W - \varrho_L). \end{aligned}$$

Daraus folgt

---


$$\varrho = \frac{m_2}{m_1} \varrho_W + \left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right) \varrho_L. \quad (14)$$


---

In Gl. (14) geht nur das Verhältnis von  $m_2$  zu  $m_1$  ein. Aus diesem Grunde ist es möglich, beide Massen in der gleichen, aber willkürlichen Einheit „Reitermasse“ auszudrücken. Darunter soll die Masse des großen Reiters verstanden werden. Zur Erläuterung sei ein Beispiel angegeben: Wenn sich der

Senkkörper in einer Flüssigkeit befindet, und die Waage spielt bei Belastung des längeren Hebelarmes mit dem großen Reiter in Kerbe 7, dem mittleren in Kerbe 9 und dem kleinen in Kerbe 1, so ist das nach dem Hebelgesetz gleichbedeutend mit einer Belastung des Hakens von

$$m = 0,791 \text{ „Reitermasse“}.$$

### *Schwebemethode*

Ein fester Körper schwebt in einer Flüssigkeit, wenn die Dichten der beiden Stoffe übereinstimmen. Auf den festen Körper wirkt dann die Gesamtkraft Null, da sich Schwerkraft und Auftrieb gegenseitig aufheben. Die Bestimmung der Dichte einer solchen Flüssigkeit ist also zugleich die Bestimmung der Dichte des festen Körpers. Um dieses Verfahren anwenden zu können, benötigt man zwei mischbare Flüssigkeiten. Die Dichte der einen Flüssigkeit muß größer, die der anderen kleiner als die Dichte des festen Körpers sein. Die Herstellung einer homogenen Mischung, in der der feste Körper exakt schwebt, erfordert einige Zeit und Mühe. Man kommt im allgemeinen schneller zum Ziel, wenn man zunächst eine Mischung anfertigt, in der der Körper mit sehr geringer Geschwindigkeit fällt, und anschließend eine Mischung, in der der Körper etwa mit gleicher Geschwindigkeit steigt. Die Dichte des festen Körpers ist dann in guter Näherung gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Flüssigkeitsdichten. Die Schwebemethode ist immer dann zu empfehlen, wenn der zu untersuchende feste Körper sehr klein ist.

Mit Methylenjodid und Toluol lassen sich Mischungen herstellen, deren Dichte  $\rho$  in dem Intervall

$$0,87 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \leq \rho \leq 3,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

liegt. Hat der zu untersuchende feste Körper eine Dichte, die nur wenig größer als die von Wasser ist, kann eine wäßrige Kochsalzlösung Verwendung finden.

### *Versuchsausführung*

Wir hängen den Senkkörper an den Haken und justieren die Waage, bis sie sich im Gleichgewicht befindet. Der Senkkörper wird vollständig in Wasser getaucht und die Waage durch Aufsetzen von Reitern abgeglichen:  $m_1$ . Die Wassertemperatur wird abgelesen und notiert. Wir trocknen den Senkkörper ab und hängen ihn in die zu untersuchende Flüssigkeit. Der Abgleich der Waage liefert  $m_2$ . Die Temperatur der Flüssigkeit ist zu notieren. Wir berechnen die gesuchte Dichte nach Gl. (14). Die Dichte des Wassers wird der Tab. 4 entnommen. Für die Mehrzahl aller Flüssigkeiten ist der zweite Summand in Gl. (14) vernachlässigbar klein. Muß er doch berücksichtigt werden, berechnen wir die Dichte der Luft mit Hilfe der Gl. (4) aus der Dichte bei Normalbedingungen auf zwei Stellen genau.

Wir stellen eine Flüssigkeitsmischung bzw. eine Kochsalzlösung her, in der der zu untersuchende feste Körper schwiebt, und bestimmen die Dichte dieses Gemisches bzw. dieser Lösung.

### M. 2.3. Pyknometer

**Aufgabe:** Die Dichte eines festen Körpers soll durch die Bestimmung seiner Masse und durch die Wägung des von ihm verdrängten Wassers ermittelt werden.

Das *Pyknometer* (Abb. 9) ist ein im allgemeinen doppelwandiges Glasgefäß, an das eine mit einer Strichmarke  $S$  versehene Kapillare angeschmolzen ist und das mit einem sorgfältig eingeschliffenen Thermometer geschlossen werden kann.

Eine Analysenwaage befindet sich im Gleichgewicht, wenn man eine Waagschale mit dem zu untersuchenden Körper (Masse  $m$ , Volumen  $V$ ), die andere mit Wägestücken (Masse  $m^*$ , Dichte  $\varrho^*$ ) belastet. Die Dichte der Luft bei Zimmertemperatur und Luftdruck sei  $\varrho_L$ . Dann gilt bei Berücksichtigung des Auftriebes

$$m - V\varrho_L = m^* \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right). \quad (15)$$

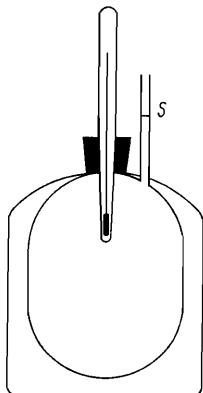


Abb. 9. Pyknometer

Das äußere Volumen des Pyknometers soll mit  $V_P$  bezeichnet werden. Eine Wägung des mit destilliertem Wasser gefüllten Pyknometers (Masse  $m_1$ ) führt zu der Abgleichbedingung

$$m_1 - V_P \varrho_L = m_1^* \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right), \quad (16)$$

während die Wägung des mit dem festen Körper und mit destilliertem Wasser gefüllten Pyknometers (Masse  $m_2$ ) die Bedingung

$$m_2 - V \varrho_L = m_2^* \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right) \quad (17)$$

liefert. Dabei sind  $m_1^*$  und  $m_2^*$  die Massen der Wägestücke, die bei den entsprechenden Wägungen dem Pyknometer das Gleichgewicht halten. Unter der Voraussetzung, daß die Temperatur des Wassers bei beiden Wägungen gleich der konstanten Zimmertemperatur ist, besteht zwischen den Massen  $m$ ,  $m_1$  und  $m_2$  und dem Volumen  $V$  der Zusammenhang

$$m - V \varrho_W = m_2 - m_1; \quad (18)$$

$\varrho_W$  ist die Dichte von Wasser. Setzt man die Gl. (16) und (17) in Gl. (18) ein, erhält man

$$m - V \varrho_W = (m_2^* - m_1^*) \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right). \quad (19)$$

Die Gl. (15) und (19) sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen  $m$  und  $V$ . Die Lösung lautet

$$m(\varrho_W - \varrho_L) = [m^* \varrho_W - (m_2^* - m_1^*) \varrho_L] \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right),$$

$$V(\varrho_W - \varrho_L) = [m^* - (m_2^* - m_1^*)] \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho^*} \right).$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Dichte

---


$$\varrho = \frac{m^* \varrho_W - (m_2^* - m_1^*) \varrho_L}{m^* - (m_2^* - m_1^*)}. \quad (20)$$


---

Die Wägungen des Pyknometers führen zu fehlerhaften Ergebnissen, wenn sich Luftblasen im Inneren oder Wassertropfen am äußeren Umfang des Gefäßes befinden. Außerdem treten Fehler auf, wenn die Temperatur  $t_1$  im Inneren des nur mit Wasser gefüllten Pyknometers von der Temperatur  $t_2$  des mit Wasser und dem zu untersuchenden Körper gefüllten Pyknometers abweicht. Sieht man das Volumen  $V$  und das innere Volumen des Gefäßes  $V_i$  als konstant an, tritt an die Stelle der Gl. (18)

$$m - V \varrho_W(t_2) = m_2 - m_1 + V_i [\varrho_W(t_1) - \varrho_W(t_2)]. \quad (18a)$$

In den Gln. (18) und (19) fehlt dann also der Summand

$$V_1 [\varrho_w(t_1) - \varrho_w(t_2)].$$

Mit  $V_1 = 50 \text{ cm}^3$ ,  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  und  $\Delta t = |t_2 - t_1| = 1 \text{ K}$  beträgt diese Masse etwa  $10^{-2} \text{ g}$ , während der aus den Wägungen resultierende Fehler von  $m_2^* - m_1^*$  bei Verwendung einer Analysenwaage kleiner gehalten werden kann. Man muß sich daher im Experiment bemühen, daß die Differenz  $\Delta t$  so klein wie nur möglich wird. Außerdem ist diese Überlegung bei der Fehlerrechnung zu beachten.

Das in Abb. 9 dargestellte Pyknometer kann auch zur Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit verwendet werden. In diesem Falle ermittelt man die Masse des mit Luft, des mit destilliertem Wasser und des mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Pyknometers. Aus den Abgleichbedingungen, die den drei Wägungen entsprechen, läßt sich die gesuchte Dichte berechnen.

Ein Pyknometer, das zur Bestimmung der Luftdichte verwendet werden soll, ist ein Glaskolben mit zwei angesetzten Rohren, die sich durch Hähne vakuumdicht schließen lassen. Die Dichte der Luft kann berechnet werden, wenn man die Masse des luftgefüllten, des evakuierten und des mit Wasser gefüllten Pyknometers bestimmt.

### *Versuchsausführung*

Wir wägen den zu untersuchenden festen Körper bei der Temperatur  $t_0$  mit einer Analysenwaage und erhalten  $m^*$ . Nun wird das Pyknometer mit destilliertem Wasser gefüllt. Wir achten darauf, daß sich vor dem Einsetzen des Thermometers keine Luftblasen im Inneren des Glaskolbens befinden. Der Wasserspiegel in der Kapillare soll oberhalb der Marke  $S$  liegen. Anschließend ist das Pyknometer sorgfältig mit Zellstoff abzutrocknen. Um eine Erwärmung des Wassers zu vermeiden, fassen wir das Pyknometer nur am Hals an. Nach einigen Minuten hat das Wasser die Gleichgewichtstemperatur  $t_1$  angenommen, die wir notieren. Das Wasser, das sich in der Kapillare oberhalb der Marke  $S$  befindet, wird vorsichtig mit Zellstoff oder Fließpapier abgesaugt. Die Wägung des Pyknometers liefert  $m_1^*$ . Anschließend bringen wir den festen Körper mit Hilfe einer Pinzette in das Pyknometer. Es ist wieder darauf zu achten, daß vor dem Einsetzen des Thermometers alle Luftblasen aus dem Wasser entwichen sind. Nun warten wir so lange, bis die Temperatur im Inneren des gut abgetrockneten und bis zur Marke  $S$  gefüllten Pyknometers mit  $t_1$  übereinstimmt, und ermitteln die Masse  $m_2^*$ . Die Dichte des Wassers bei der Temperatur  $t_1$  ist der Tab. 4 zu entnehmen, die der Luft bei Zimmertemperatur und Luftdruck mit Hilfe der Gl. (4) aus der Dichte bei Normalbedingungen auf zwei Stellen genau zu berechnen. Die gesuchte Dichte  $\varrho$  erhalten wir aus Gl. (20).

## M. 2.4. Relative Dampfdichte nach Dumas

**Aufgabe:** Die relative Dampfdichte  $D$  einer Flüssigkeit soll nach der Methode von *Dumas* bestimmt werden. Mit Hilfe von  $D$  ist die relative Molekulmasse zu berechnen.

Gegeben sei ein Glaskolben (Masse  $m_K$ ), dessen Ansatzrohr zu einer Kapillare ausgezogen ist. Bei Zimmertemperatur  $t_0$  und Luftdruck  $p_0$  soll das innere Volumen des Kolbens mit  $V_0$ , die Dichte der Luft mit  $\varrho_0$  bezeichnet werden. Die Masse des luftgefüllten Glaskolbens ist unter den genannten Bedingungen

$$m_L = m_K + V_0 \varrho_0. \quad (21)$$

Nun bringt man einige Kubikzentimeter der zu untersuchenden Flüssigkeit (Dichte  $\varrho_F$ ) in den Kolben und erwärmt ihn in einem Wasserbad der Temperatur  $t$ , bis die Flüssigkeit vollständig verdampft ist. Der Luftdruck sei jetzt  $p$  und das innere Volumen des Kolsbens  $V$ . Im Kolben befindet sich eine bestimmte Masse Dampf  $V' \varrho_D$  und eine im allgemeinen kleine Masse Luft ( $V - V'$ ).  $\varrho_D$  bzw.  $\varrho$  sind die Dichte des Dampfes bzw. der Luft bei den genannten Bedingungen. Man schmilzt die Öffnung der Kapillare zu und kühl auf Zimmertemperatur  $t_0$  ab. Dabei kondensiert der Dampf. Die Masse des geschlossenen Kolsbens ist

$$m_D = m_K + V' \varrho_D + (V - V') \varrho. \quad (22)$$

Wenn man die Kapillare in luftfreies Wasser taucht und abbirkt, dringt durch die entstandene Öffnung bis zum Druckausgleich Wasser in den Kolben ein. Ist die Zimmertemperatur wieder  $t_0$  und der Luftdruck  $p_0$ , dann nehmen die Flüssigkeit das Volumen

$$V_F = V' \frac{\varrho_D}{\varrho_F},$$

die Luft das Volumen

$$V_L = (V - V') \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

und das Wasser das Volumen

$$V_W = V_0 - V_F - V_L$$

ein. Die Dichte des Wassers bei Zimmertemperatur soll mit  $\varrho_W$  bezeichnet werden. Die Masse des Kolsbens ist

$$\begin{aligned} m_{W,L} &= m_K + V' \varrho_D + (V - V') \varrho \\ &+ \left[ V_0 - V' \frac{\varrho_D}{\varrho_F} - (V - V') \frac{\varrho}{\varrho_0} \right] \varrho_W. \end{aligned} \quad (23)$$

Füllt man den Kolben vollständig mit Wasser, gilt

$$m_w = m_K + V' \varrho_D + \left[ V_0 - V' \frac{\varrho_D}{\varrho_F} \right] \varrho_W. \quad (24)$$

Zwischen  $V$  und  $V_0$  besteht näherungsweise der Zusammenhang

$$V = V_0 [1 + 3\alpha(T - T_0)], \quad (25)$$

wobei  $\alpha$  der lineare,  $3\alpha$  der kubische Ausdehnungskoeffizient von Glas ist. In den Gln. (21) bis (24) sind die vier unbekannten Größen  $m_K$ ,  $V_0$ ,  $V'$  und  $\varrho_D$  enthalten. Durch geeignete Kombination lassen sich die Gleichungen zu einer vereinigen, in der nur noch die Unbekannte  $\varrho_D$  vorkommt. Die Rechnung kann vereinfacht werden, wenn man bedenkt, daß das von der Flüssigkeit eingenommene Volumen  $V_F$  sehr klein gegen  $V_0$  ist und daß sich die Dichten der meisten Flüssigkeiten nur wenig von der Dichte des Wassers unterscheiden. Man setzt daher näherungsweise

$$\varrho_F = \varrho_W.$$

In dieser Näherung lauten die Gln. (23) und (24)

$$m_{W,L} = m_K + (V - V') \varrho + \left[ V_0 - (V - V') \frac{\varrho}{\varrho_0} \right] \varrho_W, \quad (23a)$$

$$m_W = m_K + V_0 \varrho_W. \quad (24a)$$

Aus den Gln. (24a) und (21) folgt

$$V_0 = \frac{m_W - m_L}{\varrho_W - \varrho_0} \quad (26)$$

aus den Gln. (24a) und (23a)

$$V - V' = \frac{m_W - m_{W,L}}{\varrho_W - \varrho_0} \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho} \quad (27)$$

und aus den Gln. (22) und (21)

$$m_D - m_L = V' \varrho_D - V_0 \varrho_0 + (V - V') \varrho. \quad (28)$$

Wenn man Gl. (28) nach  $\varrho_D$  auflöst und  $V$ ,  $V'$  sowie  $V_0$  mit Hilfe der Gln. (27) (25) und (26) durch bekannte Größen ersetzt, erhält man

$$\varrho_D = \frac{(m_D - m_L) \frac{\varrho_W - \varrho_0}{\varrho_0} + m_{W,L} - m_L}{(m_W - m_L) [1 + 3\alpha(T - T_0)] \frac{1}{\varrho_0} - (m_W - m_{W,L}) \frac{1}{\varrho}}. \quad (29)$$

Die relative Dampfdichte  $D$  ergibt sich, indem man Gl. (29) durch die Dichte trockener Luft  $\varrho_L(T, p)$  teilt. Unter der Voraussetzung, daß die Luft im Inneren des Kolbens während des Versuches trocken ist, gilt nach Gl. (4)

$$\frac{\varrho_L}{\varrho_0} = \frac{T_0 p}{T p_0}, \quad \frac{\varrho_L}{\varrho} = 1.$$

Damit wird

$$D = \frac{(m_D - m_L) \frac{\varrho_w - \varrho_0}{\varrho_0} + m_{w,L} - m_L}{(m_w - m_L) [1 + 3\alpha(T - T_0)] \frac{T_0 p}{T p_0} - (m_w - m_{w,L})}. \quad (30)$$

Wenn man die Näherung  $\varrho_F = \varrho_w$  nicht einführt, hat der Nenner in Gl. (30) eine kompliziertere Form. Es läßt sich aber abschätzen, daß die erzielte Verbesserung kleiner als die durch Meßfehler bedingte Unsicherheit von  $D$  ist.

Der Luftauftrieb, den der Glaskolben bzw. die Wägestücke erleiden, beeinflußt Gl. (30) nicht. Man darf also die Größen  $m_L$ ,  $m_D$ ,  $m_{w,L}$  bzw.  $m_w$  durch die Masse der Wägestücke ersetzen, die dem Kolben bei den vier entsprechenden Wägungen das Gleichgewicht halten.

### Versuchsausführung

Wir überzeugen uns, daß der Glaskolben trocken ist, und erwärmen das Ansatzrohr gleichmäßig, d.h. unter ständigem Drehen des Kolbens über der Flamme eines Bunsenbrenners. Wenn das Glas hinreichend weich ist, ziehen wir das Rohr zu einer Kapillare aus und brechen das Ende so ab, daß eine Öffnung von ungefähr 0,5 mm Durchmesser entsteht. Die Masse des luftgefüllten Kolbens  $m_L$  wird mit Hilfe einer Analysenwaage bestimmt. Während der Wägung lesen wir die Zimmertemperatur  $t_0$  und den Luftdruck  $p_0$  (die Höhe der Quecksilbersäule  $h_0$  im Barometer) ab. Der Kolben wird über einer nicht zu kräftigen Gasflamme erwärmt. Anschließend tauchen wir die Kapillare in die zu untersuchende Flüssigkeit. Nachdem einige Kubikzentimeter des Stoffes eingedrungen sind, wird der Kolben in siedendes Wasser gesetzt. Wir warten (mindestens 15 Minuten), bis die Flüssigkeit vollständig verdampft ist und bis die Temperatur  $t$  im Inneren des Kolbens mit der des siedenden Wassers übereinstimmt. Wir lesen  $t$  und den Luftdruck  $p$  (Quecksilbersäule  $h$ ) ab und schmelzen die Öffnung der Kapillare zu. Der Kolben wird aus dem Bad genommen, auf Zimmertemperatur abgekühlt und abgetrocknet. Seine Masse  $m_D$  ist mit der Analysenwaage zu bestimmen. Nun halten wir die Kapillare in luftfreies Wasser der Temperatur  $t_0$ , brechen die Kapillare vorsichtig an der Stelle, an der sie in das Ansatzrohr übergeht, ab und lassen Wasser eindringen, bis der Spie-

gel im Kolben die gleiche Höhe wie der im Vorratsgefäß hat. Die Masse  $m_{w,L}$  des sorgfältig abgetrockneten Kolbens (einschließlich der abgebrochenen Kapillare) wird im allgemeinen so groß sein, daß wir sie mit einer Balkenwaage ermitteln müssen. Dann füllen wir den Kolben vollständig mit Wasser und bestimmen  $m_w$ . Wenn der Kolben beim Zuschmelzen nur Dampf enthält, saugt er nach dem Abbrechen der Kapillare so viel Wasser an, bis das Volumen  $V_0$  ausgefüllt ist. In diesem Falle ist  $m_{w,L} = m_w$ . Zur Bestimmung von  $\varrho_0$  rechnen wir den bei der Zimmertemperatur  $t_0$  abgelesenen Luftdruck  $p_0$  auf 0 °C um und berücksichtigen die Kapillardepression der Quecksilbersäule des Barometers (vgl. Tab. 5). Den so erhaltenen Druck nennen wir  $p_0'$ . Die Dichte  $\varrho_0(T_0, p_0')$  wird mit Hilfe der Gl. (4) aus der Dichte der Luft bei Normalbedingungen auf vier Stellen genau berechnet. Bei der Angabe von

$$\frac{p}{p_0} = \frac{h}{h_0}$$

brauchen die genannten Korrekturen nicht berücksichtigt zu werden. Die Dichte von Wasser  $\varrho_w(t_0)$  ist der Tab. 4, der lineare Ausdehnungskoeffizient von Glas  $\alpha$  der Tab. 1 zu entnehmen. Die gesuchte relative Dampfdichte  $D$  wird nach Gl. (30), die relative Molekülmasse  $M'$  nach Gl. (5a) berechnet.

Da die Luft im Kolben im allgemeinen nicht trocken ist, sondern Wasserdampf enthält, kann der nach Gl. (30) in der beschriebenen Weise berechnete Wert von  $D$  einen zusätzlichen relativen Fehler bis zu ungefähr 0,5 % haben. Der relative Fehler der relativen Molekülmasse  $M'$  ist stets größer als der von  $D$ , weil die der Gl. (5) zugrunde liegende Gleichsetzung von Dampf und idealem Gas nur als Näherung betrachtet werden kann.

## M. 2.5. Relative Dampfdichte nach V. Meyer

**Aufgabe:** Die relative Dampfdichte  $D$  einer Flüssigkeit ist nach der Methode von *Viktor Meyer* zu bestimmen. Die relative Molekülmasse des Stoffes soll mit Hilfe von  $D$  berechnet werden.

Eine Flüssigkeit bekannter Masse  $m_D$  wird in einem Kolben 1 (vgl. Abb. 10) bei der Temperatur  $T$  und dem Luftdruck  $p$  vollständig verdampft. Der Dampf (Volumen  $V_D$ ) verdrängt Luft, die in dem Meßzylinder 2 aufgefangen wird. Die Luft nimmt bei der Temperatur  $T_1$  (Zimmertemperatur) und dem Druck  $p_1$  das Volumen  $V_1$  ein. Wenn man voraussetzt, daß

1. die in der Verdampfungsanordnung enthaltene Luft trocken ist,
2. im Kolben 1 kein homogenes Dampf-Luft-Gemisch entsteht, d. h. die Verdampfung der Flüssigkeit bei der Temperatur  $T$  hinreichend schnell erfolgt,

3. das konstante Temperaturgefälle, das sich im Ansatzrohr 4 vor Beginn der Verdampfung eingestellt hat, durch die aus dem Kolben 1 verdrängte Luft nicht gestört wird, das heißt die Verdampfung der Flüssigkeit nicht zu schnell vor sich geht, besteht nach Gl. (4) der Zusammenhang

$$\frac{V_D p}{T} = \frac{V_1 p_1}{T_1}. \quad (31)$$

Die Dichte des Dampfes lässt sich daher

$$\varrho_D = \frac{m_D}{V_D} = \frac{m_D T_1 p}{V_1 T p_1} \quad (32)$$

schreiben.

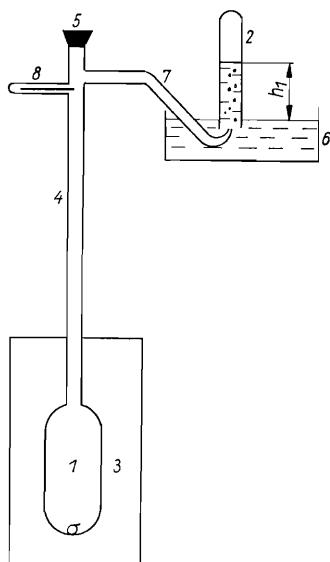


Abb. 10. Dampfdichtebestimmung nach V. Meyer

Die Dichte der Luft  $\varrho_L(T, p)$  wird nach Gl. (4) aus der Dichte  $\varrho_{L, N}$  bei Normalbedingungen  $T_N, p_N$  berechnet:

$$\varrho_L = \varrho_{L, N} \frac{T_N p}{T p_N}. \quad (33)$$

Die gesuchte relative Dampfdichte erhält man durch Division der Gl. (32) durch Gl. (33):

$$D = \frac{m_D T_1 p_N}{V_1 \varrho_{L, N} T_N p_1}. \quad (34)$$

Da die im Meßzylinder enthaltene Luft mit Wasserdampf gesättigt ist, setzt sich der in dem Gasvolumen herrschende Gesamtdruck  $p_2$  additiv aus dem Partialdruck der Luft  $p_1$  und dem der Temperatur  $T_1$  entsprechenden Sättigungsdampfdruck des Wassers  $p_w$  zusammen (Gesetz von Dalton). Andererseits ist  $p_2$  gleich dem äußeren Luftdruck  $p$  vermindert um den Druck der im Meßzylinder stehenden Wassersäule der Höhe  $h_1$ . Es gilt also

$$p_1 = p - p_w - h_1 \rho_w g.$$

Die Drücke  $p_N$  und  $p_1$  dürfen durch die entsprechenden Höhen der Quecksilbersäule im Barometer ersetzt werden, da in Gl. (34) nur das Verhältnis der beiden Größen auftritt.

$$\frac{p_N}{p_1} = \frac{h_N}{h - h_w - h_1 \frac{\rho_w}{\rho}}. \quad (35)$$

$\rho_w$  bzw.  $\rho$  sind die Dichte von Wasser bzw. von Quecksilber. Setzt man Gl. (35) in Gl. (34) ein, ergibt sich

---


$$D = \frac{m_D T_1 h_N}{V_1 \rho_{L,N} T_N \left( h - h_w - h_1 \frac{\rho_w}{\rho} \right)}. \quad (36)$$


---

### Versuchsausführung

Wir schalten die Heizung (Bunsenbrenner oder Thermostat) für den Temperierbehälter 3 (vgl. Abb. 10) ein. Dieser Behälter ist im allgemeinen ein mit Wasser gefülltes Gefäß. Wenn die Temperatur  $T$  größer als 373 K sein soll, kann Silikonöl als Temperierflüssigkeit Verwendung finden bzw. ist der Behälter 3 durch einen elektrisch geheizten Ofen zu ersetzen. In das Ansatzrohr 4 wird ein dünnes Rohr eingeführt, das bis zum Boden des Verdampfungskolbens 1 reichen soll. Durch dieses Rohr lassen wir etwa 30 Minuten lang trockene Preßluft mit geringer Geschwindigkeit strömen, so daß eventuell vorhandene Flüssigkeitsdämpfe und feuchte Luft aus dem Kolben 1 entfernt werden.

Inzwischen wird die Masse  $m_D$  der zu untersuchenden Flüssigkeit mit Hilfe einer Analysenwaage bestimmt. Die Flüssigkeit soll in ein kleines Glasgefäß gefüllt werden, das sich entweder mit einem Stopfen schließen oder zuschmelzen lässt. Der zweckmäßig zu wählende Betrag von  $m_D$  hängt von der Größe des Verdampfungskolbens 1 bzw. der des Meßzylinders 2 ab.

Nachdem der Temperierbehälter 3 die gewünschte Temperatur  $T$  angenommen hat, schalten wir die Preßluftleitung ab und entfernen das Rohr aus dem Ansatzrohr 4. Dieses wird mit dem Stopfen 5 geschlossen. Nun bringen wir eine wassergefüllte Wanne 6 so an, daß sich das offene Ende des

Rohres 7 knapp unter der Wasseroberfläche befindet. Die Einstellung des Temperaturliegengewichtes in der Verdampfungsanordnung erkennen wir daran, daß aus dem Rohr 7 keine Luftblasen mehr entweichen. Dann stecken wir das mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllte Gefäß in das Ansatzrohr 4, in dem es durch einen Nickelstab 8, der sich mit Hilfe eines Magneten horizontal verschieben läßt, gehalten werden soll. Wenn sich das durch das kurzzeitige Öffnen des Ansatzrohres 4 nur wenig gestörte Temperaturliegengewicht wieder eingestellt hat, schieben wir den vollständig mit Wasser gefüllten Meßzylinder 2 über die Öffnung des Rohres 7 und lesen den Luftdruck  $p$  (Quecksilbersäule  $h$ ) und die Zimmertemperatur  $t_1 \triangleq T_1$  ab. Nun lassen wir das kleine Glasgefäß, das den Flüssigkeitstropfen enthält, in den Verdampfungskolben 1 fallen. Ein sehr dünnwandiges, zugeschmolzenes Gefäß wird beim Aufschlagen zerspringen. Soll das Gefäß durch den Aufprall nicht entzweigehen, muß es mit einem Stopfen verschlossen sein, der beim Verdampfen der Flüssigkeit herausgedrückt wird. Die vom Dampf verdrängte Luft wird im Meßzylinder 2 aufgefangen. Treten aus dem Rohr 7 keine Luftblasen mehr aus, lesen wir die Höhe der Wassersäule  $h_1$  und das Volumen  $V_1$  ab. Vor dem Abschalten der Heizung des Temperierbehälters 3 ist unbedingt der Stopfen 5 aus dem Ansatzrohr 4 zu ziehen!

Der der Temperatur  $t_1$  entsprechende Sättigungsdampfdruck von Wasser  $p_w$  (Quecksilbersäule  $h_w$ ) wird der folgenden Tabelle, die Dichte von Quecksilber der Tab. 2 entnommen. Wir berechnen die gesuchte relative Dampfdichte  $D$  nach Gl. (36), die relative Molekülmasse  $M'$  nach Gl. (5a).

#### *Dampfdruck des Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur (angegeben in Torr)*

Temperatur in °C

| Zehner | Einer  | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| 10     | 9,209  | 9,844  | 10,518 | 11,231 | 11,987 | 12,788 | 13,634 | 14,530 | 15,477 | 16,477 |   |
| 20     | 17,535 | 18,650 | 19,827 | 21,068 | 22,377 | 23,756 | 26,209 | 26,739 | 28,349 | 30,043 |   |
| 30     | 31,824 | 33,695 | 35,663 | 37,729 | 39,898 | 42,175 | 44,563 | 47,067 | 49,692 | 52,442 |   |

Wenn der Meßzylinder 2 vor der Verdampfung der Flüssigkeit nicht vollständig mit Wasser gefüllt ist, müssen die Höhe der Wassersäule  $h_0$  und das Gasvolumen  $V_0$  abgelesen werden. Nach der Verdampfung hat die Wassersäule die Höhe  $h_1$ , und das gesamte Gasvolumen ist  $V$ . Das Volumen  $V_1$  ergibt sich in diesem Falle in guter Näherung zu

$$V_1 = V - V_0 \left\{ 1 - \frac{h_0 - h_1}{h - h_w} \frac{\varrho_w}{\varrho} \right\}.$$

Da die der Gl. (31) zugrunde liegenden Voraussetzungen im Experiment kaum exakt erfüllt werden können, ist der tatsächliche Fehler von  $D$  stets größer als der Wert  $\Delta D$ , der sich aus der formalen Fehlerrechnung ergibt.

### M. 2.6. Relative Gasdichte nach Bunsen

*Aufgabe:* Die relative Gasdichte  $D$  verschiedener Gase soll nach der Ausströmungsmethode von *Bunsen* bestimmt werden.

Ein Gas, das sich in einem Rohr 1 (Querschnitt  $A_1$ ) befindet, soll unter dem Druck

$$p = p_0 + x \varrho g \quad (37)$$

stehen (vgl. Abb. 11);  $p_0$  ist der Luftdruck und  $\varrho$  die Dichte von Quecksilber. Bei der in Abb. 11 angegebenen Stellung des Dreiweghahnes 2 strömt das Gas mit der Geschwindigkeit  $v_G$  aus einer feinen Düse 3 (Querschnitt  $A$ ).

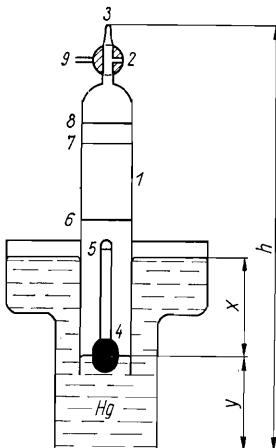


Abb. 11. Prinzip des Effusiometers nach *Bunsen*

Wenn man voraussetzt, daß das Gas als inkompressibel angesehen und der Einfluß der inneren Reibung vernachlässigt werden kann, besteht zwischen  $v_G$  und der Geschwindigkeit  $v_{G1}$ , mit der das Gas bzw. der Quecksilberspiegel im Rohr 1 steigt, der Zusammenhang

$$Av_G = A_1 v_{G1}, \quad (38)$$

und es gilt die Bernoullische Gleichung [vgl. Gl. (M. 7.-1 a)]

$$p + \frac{1}{2} \varrho_G v_{G1}^2 + y \varrho_G g = p_0 + \frac{1}{2} \varrho_G v_G^2 + h \varrho_G g. \quad (39)$$

$\varrho_G$  ist die als konstant angenommene Dichte des Gases. Gl. (39) läßt sich mit den Gln. (37) und (38)

$$\begin{aligned} [x\varrho - (h - y)\varrho_G]g &= \frac{1}{2}\varrho_G v_{G1}^2 \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_1} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}\varrho_G v_{G1}^2 \left[ \left( \frac{A_1}{A} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (40)$$

schreiben. Die Größe  $(h - y)\varrho_G$  ist gegenüber  $x\varrho$  vernachlässigbar, wenn man sehr kleine Werte  $x$  von der Betrachtung ausschließt. Damit vereinfacht sich Gl. (40) zu

$$x\varrho g = \frac{1}{2}\varrho_G v_{G1}^2 \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}\varrho_G v_{G1}^2 \left[ \left( \frac{A_1}{A} \right)^2 - 1 \right]. \quad (40a)$$

Für den speziellen Fall, daß das Rohr 1 Luft (Dichte  $\varrho_L$ ) enthält, gilt

$$x\varrho g = \frac{1}{2}\varrho_L v_{L1}^2 \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}\varrho_L v_{L1}^2 \left[ \left( \frac{A_1}{A} \right)^2 - 1 \right]. \quad (40b)$$

Aus den Gln. (40a) und (40b) folgt

$$D = \frac{\varrho_G}{\varrho_L} = \frac{v_{L1}^2}{v_{G1}^2}. \quad (41)$$

Die Geschwindigkeiten  $v_G$ ,  $v_{G1}$ ,  $v_L$  und  $v_{L1}$  sind Funktionen von  $x$  und lassen sich experimentell nur schwer bestimmen. Dagegen kann man leicht die Zeit messen, in der ein definiertes, endliches Volumen Gas aus dem Rohr 1 ausströmt. Zur Zeit  $t = 0$  soll die Marke 5 des Schwimmers 4 die Marke 6 am Rohr 1 passieren. Der zugehörige Wert von  $y$  sei  $y_1$ . Zur Zeit  $t = t_G$  bzw.  $t = t_L$  habe die Marke 5 die Marke 7 erreicht, und  $y$  sei auf  $y_2$  gestiegen. Löst man Gl. (40a) nach  $v_{G1}$  auf, so erhält man

$$\begin{aligned} v_{G1} &= \frac{dy}{dt_G} = \frac{C}{\sqrt{\varrho_G}} \sqrt{x}, \quad dt_G = \frac{\sqrt{\varrho_G}}{C} \frac{dy}{\sqrt{x}}, \\ t_G &= \frac{\sqrt{\varrho_G}}{C} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{x}}. \end{aligned} \quad (42)$$

<sup>1)</sup> Da das Volumen des Quecksilbers konstant ist, sind  $dx$  und  $dy$  einander proportional. Es ist aber nicht nötig, diesen Zusammenhang anzugeben.

Entsprechend gilt

$$t_L = \frac{\sqrt{\rho_L}}{C} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{x}}. \quad (43)$$

$$C = \sqrt{\sqrt{\frac{2\rho g}{\left(\frac{A_1}{A}\right)^2 - 1}}}$$

stellt eine Effusiometerkonstante dar. Teilt man Gl. (42) durch Gl. (43) und quadriert anschließend, ergibt sich für die gesuchte relative Gasdichte

---


$$D = \frac{\rho_G}{\rho_L} = \frac{t_G^2}{t_L^2}. \quad (44)$$


---

Die Dichten zweier Gase verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, in denen gleiche Volumina der Gase unter gleichen Bedingungen aus der gleichen Öffnung ausströmen (Ausströmungsgesetz von *Bunsen*).

Da die eingangs gemachten Voraussetzungen bei realen Gasen nicht exakt erfüllt sind, ist mit einem systematischen Fehler von  $D$  zu rechnen, der einige Prozent betragen kann. Dieser Fehler wird um so größer, je mehr sich die Viskosität des zu untersuchenden Gases von der der Luft unterscheidet.

#### *Versuchsausführung*

Wir lösen die an der Marke 8 angebrachte Halterung (in Abb. 11 nicht eingezeichnet) und ziehen das Rohr 1 bei der Stellung  $a$  des Dreieghahnes 2 (vgl. Abb. 12) aus dem mit Quecksilber gefüllten Gefäß heraus. Nun wird der Hahn in die Stellung  $b$  gedreht, das geschlossene Rohr 1 in das Quecksilber gedrückt und die Halterung an der Marke 8 befestigt. Sollte der

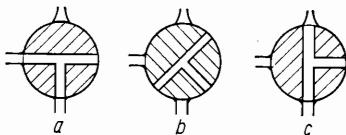


Abb. 12. Verschiedene Stellungen eines Dreieghahnes

Schwimmer 4 jetzt schon steigen, ist der Dreieghahn undicht. In diesem Falle muß der Hahn gefettet, d. h. der Schliff mit einem dünnen, gleichmäßig verteilten Film aus Fett versehen werden. Wenn der Hahn dicht ist, drehen wir ihn in die Stellung  $c$  und bestimmen die Zeit  $t_L$ , in der die Marke 5 des Schwimmers von der Marke 6 zur Marke 7 gelangt. Der Versuch ist mit Luft so oft zu wiederholen (mindestens zehnmal), bis sich für  $t_L$  ein konstanter Wert ergibt.

Wir ziehen das Rohr 1 so weit aus dem Quecksilber heraus, daß das offene Ende gerade noch eintaucht, und lassen durch den Stutzen 9 bei der Stellung  $\alpha$  des Dreiweghahnes einige Minuten lang das zu untersuchende Gas mit sehr geringer Geschwindigkeit einströmen. Dann wird der Versuch, wie oben beschrieben, so oft durchgeführt, bis die Zeit  $t_G$  mit hinreichender Sicherheit bestimmt ist. Die gesuchte relative Gasdichte  $D$  ergibt sich aus Gl. (44).

Wenn das Gas aus einer Stahlflasche entnommen werden muß, soll sich der Student vor dem Versuchsbeginn die Wirkungsweise und Handhabung eines Reduzierventils vom Assistenten erklären lassen!

## M. 3. PENDEL

### M. 3.0. Allgemeine Grundlagen

#### M. 3.0.1. Physikalisches und mathematisches Pendel

Ein *physikalisches Pendel* ist ein starrer Körper mit einer im allgemeinen horizontalen, fest vorgegebenen Drehachse, die nicht durch den *Massenmittelpunkt* des Körpers geht. Nach einer Auslenkung führt das Pendel unter dem Einfluß der Schwerkraft Schwingungen um seine Ruhelage aus. In den folgenden Überlegungen wird vorausgesetzt, daß die Reibung im Achsenlager vernachlässigbar klein ist.

Der senkrechte Abstand des Massenmittelpunktes  $S$  eines Körpers  $K$  von der Drehachse  $A$  soll mit  $s_A$  bezeichnet werden (vgl. Abb. 13). Ein beliebiges Massenelement  $dm$  habe den senkrechten Abstand  $r$  von der Achse  $A$ . Der zeitlich konstante Winkel zwischen  $r$  und  $s_A$  sei  $\alpha$ . Bildet  $s_A$  mit der Vertikalen den Winkel  $\varphi$ , so lautet die Bewegungsgleichung für das Massenelement

$$dm \cdot r \cdot \ddot{\varphi} = -dm \cdot g \cdot \sin(\alpha + \varphi). \quad (1)$$

Durch Multiplikation von Gl. (1) mit dem Kraftarm  $r$  und anschließende Integration über den gesamten Körper  $K$  erhält man die Drehmomentengleichung

$$\int_K \ddot{\varphi} r^2 dm = -g \int_K r \sin(\alpha + \varphi) dm. \quad (2)$$

Da der Körper starr sein soll, ist die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  für alle Massenelemente gleich und kann vor das Integral geschrieben werden. Die

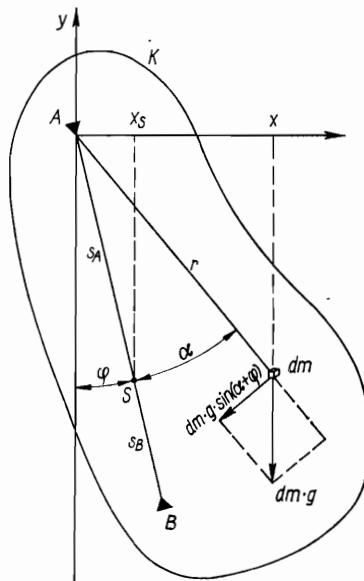


Abb. 13.  
Physikalisches Pendel

Größe

$$I_A = \int_K r^2 dm \quad (3)$$

ist das *Trägheitsmoment* des Körpers, bezogen auf die Achse  $A$ . Die Einheit des Trägheitsmomentes ist im gesetzlichen Maßsystem  $\text{kg m}^2$ .

Nach der Definition des Massenmittelpunktes gilt

$$\int_K r \sin(\alpha + \varphi) dm = \int_K x dm = mx_S = ms_A \sin \varphi; \quad (4)$$

$m$  ist die Masse des Pendels. Mit den Gln. (3) und (4) kann man Gl. (2)

$$\ddot{\varphi} = - \frac{ms_A g}{I_A} \sin \varphi \quad (5)$$

schreiben. Die Größe

$$D_A = ms_A g \quad (6)$$

hat die Dimension eines Drehmoments und wird als *Direktionsmoment* des Pendels bezeichnet.

Das *mathematische Pendel* stellt eine Idealisierung dar. Man denkt sich die gesamte Masse im Massenmittelpunkt  $S$  vereinigt und sieht die Bindung an die Drehachse  $A$  als masselos an. Dieser Idealisierung entspricht näherungsweise das Fadenpendel, das aus einer Metallkugel besteht, die an einem dünnen Faden der Länge  $l$  aufgehängt ist. Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels lautet

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

oder

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (7)$$

Die Gln. (5) und (7), deren Lösung elementar nicht möglich ist, vereinfachen sich, wenn man nur sehr kleine Auslenkungen

$$|\varphi| \ll 1$$

zuläßt. Dann kann man den Sinus durch das Argument ersetzen und erhält

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m s_A g}{I_A} \varphi, \quad (5a)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi. \quad (7a)$$

Die bisherigen Betrachtungen gelten nur für Bewegungen im Vakuum. Schwingt das Pendel in Luft (Dichte  $\rho_L$ ), so ist der Auftrieb [vgl. Gl. (M. 1.-5)] zu berücksichtigen. Die rücktreibende Kraft auf ein Massenelement hat dann den Betrag

$$dm g \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right) \sin(\alpha + \varphi),$$

und an die Stelle der Gl. (2) tritt

$$\int_K \dot{\varphi} r^2 dm = -g \int_K \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right) r \sin(\alpha + \varphi) dm. \quad (2a)$$

Setzt sich das Pendel aus  $N$  homogenen Teilkörpern  $K_i$  zusammen, deren Massenmittelpunkte  $S_i$  auf einer die Achse  $A$  schneidenden Geraden liegen und deren Massen bzw. Dichten mit  $m_i$  bzw.  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) bezeichnet werden sollen, wird Gl. (2a)

$$\int_K \dot{\varphi} r^2 dm = -g \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_i}\right) \int_{K_i} r \sin(\alpha + \varphi) dm$$

oder

$$I_A \ddot{\varphi} = -g \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_i}\right) m_i s_{Ai} \sin \varphi. \quad (5b)$$

Hierbei ist  $s_{Ai}$  der Abstand des Massenmittelpunktes des  $i$ -ten Teilkörpers von der Drehachse  $A$ . Die Berücksichtigung des Auftriebes bedeutet also in diesem Falle: Man ersetzt in Gl. (5) sowie in den daraus gewonnenen Gln. (5a) und (13) den Ausdruck  $ms_A$  durch

$$\sum_{i=1}^N \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_i} \right) m_i s_{Ai}. \quad (8)$$

Haben alle Teile des Pendels die gleiche Dichte  $\varrho$ , dann vereinfacht sich der Ausdruck (8) zu

$$ms_A \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho} \right). \quad (8a)$$

### M. 3.0.2. Drehtisch und Torsionspendel

Unter einem Drehtisch versteht man einen starren Körper, der um eine vertikale Achse gedreht werden kann. Bindet man dieses System durch eine Spiralfeder an eine Ruhelage, so führt es nach einer Auslenkung Schwingungen aus. Wenn die elastischen Deformationen der Feder hinreichend klein sind, kann man das rücktreibende Drehmoment der Auslenkung  $\varphi$  proportional setzen. Bei Vernachlässigung der Reibung im Achsenlager lautet die Bewegungsgleichung

---


$$\ddot{\varphi} = - \frac{D}{I} \varphi. \quad (9)$$


---

Dabei ist  $I$  das Trägheitsmoment des Drehtisches um die vorgegebene Achse, und der Proportionalitätsfaktor  $D$  ist das Direktionsmoment der Feder.

Ein *Torsionspendel* ist ein starrer Körper, der an einem Draht aufgehängt oder zwischen zwei Blattfedern gespannt ist. Nach einer Verdrillung des Drahtes bzw. der Federn führt das Torsionspendel Drehschwingungen aus. Für sehr kleine Scherwinkel kann man berechnen [vgl. Gl. (M. 5.2.-26)], daß das rücktreibende Drehmoment der Auslenkung aus der Ruhelage proportional ist. Die Bewegung des Torsionspendels wird daher auch durch Gl. (9) beschrieben.

### M. 3.0.3. Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen (5a), (7a) und (9) sind vom Typ

---


$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi. \quad (10)$$


---

Gl. (10) sagt aus: Es wird eine Funktion  $\varphi(t)$  gesucht, die ihrer zweiten Ableitung nach der Zeit proportional ist. Da die Gl. (10) durch zwei nachein-

ander auszuführende Integrationen gelöst wird, muß die vollständige mathematische Lösung zwei Integrationskonstanten enthalten. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Funktion

$$\varphi = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (11)$$

die obengenannten Forderungen erfüllt. Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Dem Versuchsbeginn entsprechen

$$\varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = 0 \quad \text{für } t = 0.$$

Damit lautet Gl. (11)

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t = \varphi_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right); \quad (11a)$$

$T$  ist die Schwingungsdauer bei sehr kleinen Auslenkungen (physikalisches und mathematisches Pendel) bzw. bei geringen elastischen Deformationen (Drehtisch und Torsionspendel).

Wenn man die Schwingungsdauer stoppen will, wählt man dagegen den Augenblick als Anfang der Zeitmessung, in dem das Pendel die maximale Geschwindigkeit hat, d. h., es ist

$$\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{\max} \quad \text{für } t = 0.$$

Dann ist

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_{\max}}{\omega} \sin \omega t = \varphi_0 \sin \omega t = \varphi_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \quad (11b)$$

Durch Einsetzen von Gl. (11a) oder (11b) in die Gln. (7a), (5a) bzw. (9) findet man für das Fadenpendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (12)$$

für das physikalische Pendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{ms_A g}} \quad (13)$$

und für den Drehtisch oder das Torsionspendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (14)$$

Die mathematische Behandlung der Gl. (5) und (7) liefert für die Schwingungsdauer

$$T' = T \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right\}. \quad (15)$$

Für  $T$  ist beim Fadenpendel Gl. (12) und beim physikalischen Pendel Gl. (13) einzusetzen. Wenn die Amplitude  $\varphi_0$  kleiner als 0,1 (d. h.  $< 6^\circ$ ) ist, dann kann man in sehr guter Näherung mit

$$T' = T \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 \right) \quad (15a)$$

arbeiten.

#### M. 3.0.4. Satz von Steiner

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers, bezogen auf die Achse  $A$ , ist gleich dem Trägheitsmoment, bezogen auf die durch den Massenmittelpunkt gehende, zu  $A$  parallele Achse  $S$ , vermehrt um das Produkt aus der Masse des Körpers und dem Quadrat des senkrechten Abstandes der beiden Achsen.

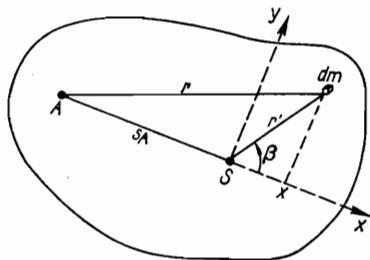


Abb. 14.  
Zum Steinerschen Satz

Zum Beweis dieses Satzes betrachtet man den in Abb. 14 dargestellten ebenen Schnitt durch den Körper. Der Ursprung des Koordinatensystems  $x, y, z$  (die  $z$ -Achse stimmt mit der Drehachse  $S$  überein) soll im Massenmittelpunkt des Körpers liegen. Nach dem Kosinussatz gilt

$$r^2 = r'^2 + s_A^2 + 2s_A r' \cos \beta = r'^2 + s_A^2 + 2s_A x.$$

Dann ist das Trägheitsmoment des Körpers bezogen auf die Achse  $A$

$$I_A = \int_K r^2 dm = \int_K r'^2 dm + s_A^2 \int_K dm + 2s_A \int_K x dm,$$

$$\int_K x dm = x_S m = 0,$$

---


$$I_A = I_S + ms_A^2. \quad (16)$$


---

Der Steinersche Satz ist ein wertvolles Hilfsmittel für die Berechnung von Trägheitsmomenten.

### M. 3.0.5. Reduzierte Pendellänge

Ein physikalisches Pendel hat die gleiche Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel der Fadenlänge

$$l_A = \frac{I_A}{ms_A}. \quad (17)$$

$l_A$  ist die der Achse  $A$  entsprechende reduzierte Pendellänge. Gegeben sei ein physikalisches Pendel mit den parallelen Drehachsen  $A$  und  $B$  (vgl. Abb. 13). Der Massenmittelpunkt soll auf der Geraden von  $A$  nach  $B$  liegen, und der Achsenabstand sei

$$l = s_A + s_B.$$

Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Schwingungsdauern um diese beiden Achsen übereinstimmen. Aus

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{ms_A g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_A}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{ms_B g}} = T_B$$

folgt bei Verwendung des Steinerschen Satzes

$$l_A = \frac{I_B}{ms_B} = \frac{I_S + m(l - s_A)^2}{m(l - s_A)} = \frac{I_A + ml^2 - 2mls_A}{m(l - s)},$$

$$l_A = \frac{ml_A s_A + ml^2 - 2mls_A}{m(l - s_A)}$$

oder

$$l^2 - (l_A + 2s_A)l + 2l_A s_A = 0. \quad (18)$$

Die quadratische Gleichung (18) kann

$$(l - l_A)(l - 2s_A) = 0 \quad (19)$$

geschrieben werden.

Ist  $l \neq 2s_A$ , so muß  $l = l_A$  sein, d. h., der Achsenabstand, bei dem die Schwingungsdauern gleich sind, ist gleich der reduzierten Pendellänge.

Ist jedoch  $l = 2s_A$ , d. h., der Massenmittelpunkt halbiert die Verbindungsline der beiden Achsen, so ist der Schluß  $l = l_A$  falsch.

### M. 3.1. Fadenpendel

*Aufgabe:* Die Schwerkraftbeschleunigung  $g$  ist mit dem Fadenpendel zu bestimmen. Der relative Größtfehler soll 0,8 % nicht überschreiten.

Eine Metallkugel hängt an einem dünnen Faden vor einer Spiegelskale mit Millimeterteilung. Der Nullpunkt des Maßstabes soll mit der Drehachse übereinstimmen. Die Fadellänge  $l$  ist der Abstand der Drehachse vom Mittelpunkt der Kugel. Regt man das Pendel zu Schwingungen kleiner Amplitude ( $\varphi_0 < 5^\circ$ ) an, so liefert Gl. (12) den Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer  $T$ , der Fadellänge  $l$  und der Schwerkraftbeschleunigung  $g$ .

$$g = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 l. \quad (20)$$

Das Fadenpendel ist strenggenommen ein physikalisches Pendel, das in einem materiellen Medium (Luft) schwingt. Es empfiehlt sich zu prüfen, ob die verschiedenen Vernachlässigungen tragbar sind, die man bei der Verwendung der Gleichungen für ein im Vakuum schwingendes mathematisches Pendel macht.

Das Trägheitsmoment  $I$  des Pendels setzt sich additiv aus dem der Kugel  $I_K$  und dem des Fadens  $I_F$  zusammen. Da das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel mit dem Radius  $R$  und der Masse  $m_K$  bezogen auf eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Achse

$$I_K = \frac{2}{5} m_K R^2$$

ist, erhält man nach Gl. (16)

$$I_K = m_K l^2 + \frac{2}{5} m_K R^2 = m_K l^2 \left\{ 1 + \frac{2}{5} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \right\}.$$

Das Trägheitsmoment des Fadens der Masse  $m_F$  bezogen auf die gegebene Drehachse ist

$$I_F = \frac{1}{3} m_F l^2.$$

Damit wird

$$I = m_K l^2 \left\{ 1 + \frac{2}{5} \left( \frac{R}{l} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{m_F}{m_K} \right\}. \quad (21)$$

Bezeichnet man die Dichte der Kugel mit  $\rho_K$  und die des Fadens mit  $\rho_F$ , so lautet Gl. (5b)

$$I \ddot{\varphi} = -g \left\{ \left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} \right) m_K l + \left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_F} \right) m_F \frac{l}{2} \right\} \sin \varphi$$

oder

$$I \ddot{\varphi} = -g m_K l \sin \varphi \left\{ 1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} + \frac{1}{2} \frac{m_F}{m_K} \left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_F} \right) \right\}. \quad (22)$$

Setzt man  $I$  gemäß Gl. (21) in Gl. (22) ein und beschränkt die Betrachtungen auf sehr kleine Auslenkungen, so erhält man

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l^*} \varphi$$

mit

$$l^* = l \frac{1 + \frac{2}{5} \left( \frac{R}{l} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{m_F}{m_K}}{1 - \left\{ \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{2} \frac{m_F}{m_K} \left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_F} \right) \right\}}.$$

Für die Schwerbeschleunigung gilt daher Gl. (20) mit  $l^*$  statt  $l$ . Da  $(R/l)^2$ ,  $m_F/m_K$ ,  $\rho_L/\rho_K$  und  $\rho_L/\rho_F$  sehr klein gegen 1 sind, sollen alle Produkte solcher Ausdrücke vernachlässigt werden. In dieser Näherung ist

$$g = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 l \left\{ 1 + \frac{2}{5} \left( \frac{R}{l} \right)^2 + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} \right\}. \quad (23)$$

### Versuchsausführung

Zur Bestimmung der Fadenlänge  $l$  blicken wir in horizontaler Richtung so auf den oberen Rand der ruhenden Kugel, daß er sich mit seinem Spiegelbild deckt, und lesen die Länge  $l_o$  ab. In gleicher Weise ergibt sich für den unteren Kugelrand  $l_u$ . Die Fadenlänge ist das arithmetische Mittel von  $l_o$  und  $l_u$ . Hängt das Pendel nicht vor einer Spiegelskale, so ist die Fadenlänge mit einem Kathetometer zu messen. Wir bestimmen die Schwingungsdauer  $T$ , indem wir fünfmal die Zeit für 100 Schwingungen stoppen. Der Versuch ist bei  $n = 1$  anderen Fadenlängen zu wiederholen.

Wir berechnen  $g$  nach Gl. (20) und bilden die arithmetischen Mittel  $g_i$  aller Werte, die sich bei der Fadenlänge  $l_i$  ergeben haben. Da die Messungen bei großen Fadenlängen genauer als die bei kleinen sind, ist aus den Größen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  der gewichtete Mittelwert

$$\bar{g} = \frac{l_1 g_1 + l_2 g_2 + \dots + l_n g_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}$$

zu berechnen.

Studenten mit Physik als Hauptfach sollen nachweisen, daß die Verwendung von Gl. (20) anstelle von Gl. (23) zur Bestimmung der Schwerbeschleunigung gerechtfertigt ist. Dazu muß gezeigt werden, daß die Abweichung der geschweiften Klammer in Gl. (23) von 1 dem Betrag nach hinreichend klein gegen den relativen Meßfehler  $\Delta g/g$  ist.

### M. 3.2. Reversionspendel

- Aufgaben:* 1. Die Schwerkraftbeschleunigung  $g$  ist mit dem Reversionspendel zu bestimmen. Der relative Größtfehler von  $g$  soll kleiner als 0,08 % sein.  
 2. Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer  $T'$  vom Auslenkwinkel  $\varphi_0$  ist mit dem Reversionspendel bei einer vorgeschriebenen Lage des Laufgewichtes experimentell zu ermitteln, um die Gültigkeit von Gl. (15a) nachzuweisen.

Das *Reversionspendel* besteht im allgemeinen aus einem Metallstab, der um zwei parallele Achsen  $A$  und  $B$  gedreht werden kann (vgl. Abb. 15). Die Achsen haben den fest vorgegebenen Abstand  $l$ . Zwischen den Achsen befindet sich ein kleines Laufgewicht  $L$  der Masse  $m_L$ . Durch Verschieben

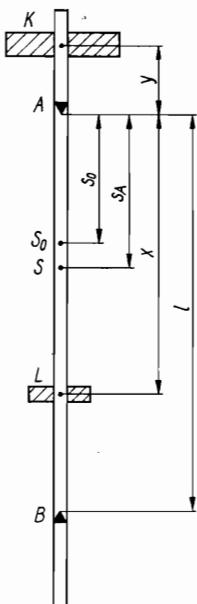


Abb. 15. Reversionspendel

von  $L$  läßt sich die Schwingungsdauer des Pendels innerhalb gewisser Grenzen variieren. In der Nähe des einen Stabendes ist ein Zusatzkörper  $K$  (Masse  $m_K$ ) angebracht. Wenn  $m_K$  hinreichend groß gegen  $m_L$  ist, kann man den Abstand  $y$  so wählen, daß für jede mögliche Lage des Laufgewichtes ( $0 < x < l$ )

$$0 < s_A < \frac{l}{2} \quad (24)$$

ist. Dabei soll mit  $s_A$  der Abstand des Massenmittelpunktes  $S$  des Pendels von der Drehachse  $A$  bezeichnet werden. Wenn bei einer bestimmten Stellung  $x$  des Laufgewichtes die Schwingungsdauer um die Achse  $A$  gleich der um die Achse  $B$  ist, dann entspricht der Achsenabstand  $l$  der reduzierten Pendellänge. Setzt man

$$T_A = T_B = T, \quad (25)$$

so gilt für die Schwerebeschleunigung

$$g = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 l. \quad (26)$$

Die bisherigen Betrachtungen gelten streng für ein im Vakuum schwingendes Pendel, dessen Amplitude unendlich klein ist. In Wirklichkeit schwingt das Pendel in Luft mit endlicher Amplitude. Nimmt man an, daß das Pendel ein homogener Körper ist, d. h., daß alle Teile des Pendels die gleiche Dichte  $\varrho$  haben, so wird die Pendelbewegung durch Gl. (5b) mit  $N = 1$  beschrieben. Aus den Gln. (15a) und (13) in Verbindung mit dem Ausdruck (8a) folgt für die tatsächliche Schwingungsdauer um die Achse  $A$

$$T_A^* = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{ms_A g \left( 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho} \right)}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 \right) = T_A \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2}{1 - \frac{\varrho_L}{\varrho}}}.$$

Eine analoge Beziehung gilt für die tatsächliche Schwingungsdauer um die Achse  $B$ . Im Experiment wird

$$T_A^* = T_B^* = T^*$$

bestimmt. Dann gilt Gl. (25) mit

$$T = T^* \frac{\sqrt{1 - \frac{\varrho_L}{\varrho}}}{1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2}. \quad (27)$$

Setzt man  $T$  nach Gl. (27) in Gl. (26) ein, erhält man für die Schwerebeschleunigung

$$g = \left( \frac{2\pi}{T^*} \right)^2 \frac{\left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 \right)^2}{1 - \frac{\varrho_L}{\varrho}} l.$$

Wenn man bedenkt, daß  $\varrho_L/\varrho < 10^{-3}$ , und für  $\varphi_0 < 0,1$  auch  $(1/16) \varphi_0^2 < 10^{-3}$  ist, sind alle Produkte solcher Größen vernachlässigbar, und es gilt

$$g = \left( \frac{2\pi}{T^*} \right)^2 \cdot l \left\{ 1 + \frac{1}{8} \varphi_0^2 + \frac{\varrho_L}{\varrho} \right\}. \quad (28)$$

Der voranstehenden Beschreibung liegt die Annahme zugrunde, daß mindestens eine Stellung des Laufgewichtes in dem Intervall  $0 < x < l$  existiert, für die die Schwingungsdauern um die Achsen  $A$  und  $B$  gleich sind. Es lohnt sich, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen Gl. (25) erfüllt werden kann. Zu diesem Zweck sind die Massenmittelpunktsabstände  $s_A$  und  $s_B$ , die Trägheitsmomente  $I_A$  und  $I_B$  und anschließend die Schwingungsdauern  $T_A$  und  $T_B$  als Funktionen von  $x$  darzustellen.

$$ms_A = m_0 s_0 + m_L x,$$

$$ms_B = m(l - s_A) = m_0(l - s_0) + m_L(l - x).$$

Dabei bedeuten  $m$  die Masse des gesamten Pendels,  $m_0$  die Masse des Pendels ohne Laufgewicht und  $s_0$  den Abstand zwischen dem Massenmittelpunkt  $S_0$  des Pendels ohne Laufgewicht und der Achse  $A$ .

$$I_A = I_0 + m_0 s_0^2 + I_L + m_L x^2,$$

$$I_B = I_0 + m_0(l - s_0)^2 + I_L + m_L(l - x)^2.$$

$I_0$  ist das Trägheitsmoment des Pendels ohne Laufgewicht bezogen auf die durch  $S_0$  gehende, zu  $A$  und  $B$  parallele Drehachse, und  $I_L$  ist das Trägheitsmoment des Laufgewichtes bezogen auf die zu  $A$  und  $B$  parallele Achse, die durch den Massenmittelpunkt des Laufgewichtes geht. Mit der Abkürzung

$$I = I_0 + m_0 s_0^2 + I_L \quad (29)$$

erhält man für die Schwingungsdauern

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{ms_A g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{I + m_L x^2}{m_0 s_0 + m_L x}}, \quad (30)$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{I_B}{ms_B g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{I + m_0 l(l - 2s_0) + m_L(l - x)^2}{m_0(l - s_0) + m_L(l - x)}}. \quad (31)$$

Die Forderung  $T_A = T_B$  führt auf die nachstehende Gleichung dritten Grades in  $x$

$$\begin{aligned} 2m_L^2 x^3 - m_L \{m_0(l - 2s_0) + 3m_L l\} x^2 \\ + m_L \{2I + m_0 l(l - 4s_0) + m_L l^2\} x \\ - \{I - m_0 l s_0\} \{m_0(l - 2s_0) + m_L l\} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Eine der drei Lösungen von Gl. (32) kann man sofort angeben. Für  $x = x_3$  sei  $s_A = l/2$  [vgl. Gl. (19)]. Dann gilt

$$m \frac{l}{2} = (m_0 + m_L) \frac{l}{2} = m_0 s_0 + m_L x_3$$

oder

$$x_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_0}{m_L} (l - 2s_0) + l \right\}.$$

Da die Ungleichung (24) erfüllt sein soll, ist  $x_3$  größer als  $l$ , d. h., die Stellung des Laufgewichtes kommt im Experiment nicht vor. Dividiert man Gl. (32) durch  $x - x_3$ , so erhält man die quadratische Gleichung

$$x^2 - lx + \frac{I - m_0 s_0 l}{m_L} = 0,$$

deren Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{l}{2} (1 \pm \varepsilon) \quad (33)$$

mit

$$\varepsilon = + \sqrt{1 - \frac{I - m_0 s_0 l}{m_L \left( \frac{l}{2} \right)^2}}$$

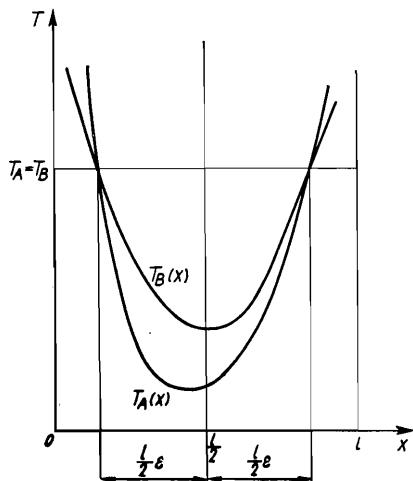


Abb. 16.  
Graphische Darstellung  
von  $T_A(x)$  und  $T_B(x)$

sind. Gl. (33) besagt, daß in dem Intervall  $0 < x < l$  symmetrisch zu  $x = l/2$  zwei Stellungen  $x_1$  und  $x_2$  des Laufgewichtes zu finden sind, bei

denen der Achsenabstand  $l$  der reduzierten Pendellänge entspricht, sofern die in Gl. (29) definierte Größe  $I$  der Bedingung

$$I = m_0 s_0 l + m_L \left( \frac{l}{2} \right)^2 (1 - \varepsilon^2) \quad (34)$$

mit  $0 < \varepsilon < 1$  genügt. Gl. (34) läßt sich durch geeignete Wahl der Masse und der Anordnung des Zusatzkörpers  $K$  stets so erfüllen, daß die Ungleichung (24) erhalten bleibt.

Es kann gezeigt werden, daß die Funktionen  $T_A(x)$  und  $T_B(x)$ , die durch die Gln. (30) und (31) gegeben sind, nur je einen Extremwert, und zwar ein Minimum haben. Die beiden Minima liegen unter den oben gemachten Voraussetzungen in der Nähe des Wertes  $x = l/2$ . Abb. 16 zeigt den prinzipiellen Verlauf der Funktionen  $T_A(x)$  und  $T_B(x)$ .

### Versuchsausführung

*Zu Aufgabe 1:* Wir bestimmen die Schwingungsdauern  $T_A^*$  und  $T_B^*$  für verschiedene Stellungen des Laufgewichtes  $L$  und achten darauf, daß die Amplitude bei allen Schwingungen den gleichen Wert  $\varphi_0 \leq 0,1$  hat. Das Laufgewicht soll in dem Intervall  $0 < x < l$  von Messung zu Messung um 5 cm verschoben werden. Um die in der Aufgabenstellung geforderte Genauigkeit zu erreichen, werden die Schwingungsdauern nach der Koinzidenzmethode oder mit einem elektronischen Zählfrequenzmesser ermittelt.

Die folgende Darstellung beschreibt nur eine der technisch recht verschiedenen Möglichkeiten zur Bestimmung der Koinzidenzzeit. Wir bringen eine Glimmlampe durch Spannungsimpulse der Impulsfolgefrequenz  $v_0 = 1/T_0$  kurzzeitig zum Aufleuchten. Das Licht soll durch einen engen, horizontalen Spalt auf einen kleinen Spiegel fallen, der an das untere Ende des Pendelstabes gekittet ist. Der Spalt wird über den Spiegel durch ein Fernrohr mit Visierlinie beobachtet. Das Fernrohr ist so zu justieren, daß sich Spalt und Visierlinie bei ruhendem Pendel decken. Schwingt das Pendel mit einer Schwingungsdauer  $T^*$ , die sich nur wenig von  $T_0$  unterscheidet, so beobachten wir durch das Fernrohr ein langsames Wandern der Lage der Lichtblitze, da die Phase der Schwingungen bei aufeinander folgenden Lichtimpulsen nicht gleich ist. Zur Zeit  $t = 0$  soll ein Lichtimpuls mit der Visierlinie des Fernrohres zur Deckung kommen. Nun wandert die Lage der Lichtblitze z. B. nach oben, kehrt nach Erreichen eines höchsten Wertes um, passiert die Visierlinie in entgegengesetzter Richtung wie zur Zeit  $t = 0$ , erreicht einen tiefsten Wert und fällt zur Zeit  $t = t_1$  wieder mit der Visierlinie zusammen.  $t_1$  wird als Koinzidenzzeit bezeichnet. Wenn in dieser Zeit die Glimmlampe  $n_1$ -mal aufgeleuchtet hat, ist

$$t_1 = n_1 T_0. \quad (35)$$

Das Pendel hat in der Zeit  $t_1$  entweder  $n_1 + 1$  oder  $n_1 - 1$  volle Schwingungen ausgeführt, je nachdem ob  $T_A^*$  bzw.  $T_B^*$  kleiner oder größer als  $T_0$  ist,

d. h., es gilt

$$T_{A,B}^* = T_0 \frac{n_1}{n_1 \pm 1}. \quad (36)$$

Beobachten wir  $k$  Koinzidenzen, bestehen die Zusammenhänge

$$t_k = n_k T_0 = k n_1 T_0, \quad (35\text{a})$$

$$T_{A,B}^* = T_0 \frac{n_k}{n_k \pm k}. \quad (36\text{a})$$

Die Zeit  $T_0$  soll mit großer Genauigkeit gegeben sein. Im Experiment müssen wir also zunächst feststellen, ob die Schwingungsdauer  $T_A^*$  bzw.  $T_B^*$  größer oder kleiner als  $T_0$  ist. Dann genügt es, die Koinzidenzzeit  $t_1$  bzw.  $t_k$  mit einer genauen Uhr zu messen. Das langweilige Zählen der Schwingungen ist überflüssig. Aus Gl. (35) bzw. (35a) erhalten wir  $n_1$  bzw.  $n_k$ , aus Gl. (36) bzw. (36a) die Schwingungsdauer  $T_A^*$  bzw.  $T_B^*$ .

Wir stellen  $T_A^*$  und  $T_B^*$  als Funktionen von  $x$  graphisch dar (vgl. Abb. 16). Die Schnittpunkte der beiden Kurven werden sich im allgemeinen noch nicht mit hinreichender Genauigkeit ermitteln lassen. Aus diesem Grunde bestimmen wir  $T_A^*$  und  $T_B^*$  in der Nähe von  $x_1$  und  $x_2$ , indem wir das Laufgewicht von Messung zu Messung nur um 1 cm verschieben. Der relative Fehler von  $T^*$  kann auf diese Weise kleiner als 0,01 % gehalten werden.

Der Achsenabstand  $l$  wird dem Studenten im allgemeinen als Funktion der Temperatur angegeben. Die Voraussetzung, daß das Reversionspendel ein homogener Körper ist, trifft nur selten zu. Wenn das Pendel aus Stahl- und Messingteilen zusammengesetzt ist, können wir

$$\frac{\rho_L}{\rho} \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$$

setzen und  $g$  nach Gl. (28) berechnen. Da der Versuch viel Zeit beansprucht, werden im Praktikum oft nur Teilaufgaben gestellt.

Steht zur Bestimmung von  $T_A^*$  und  $T_B^*$  ein Zählfrequenzmesser zur Verfügung, so lassen wir das Pendel eine Lichtschranke passieren, deren elektrische Impulse dem Gerät zugeleitet werden. Die in der DDR handelsüblichen Zählfrequenzmesser können wir so einstellen, daß die Zeit von 10 Impulsen – das entspricht der Dauer von 5 Pendelschwingungen – gemessen wird. Da eine derartige Bestimmung nur ungefähr 10 s dauert, nehmen wir sie bei jeder Stellung des Laufgewichtes mindestens dreimal vor und arbeiten mit den Mittelwerten. Dieses Verfahren der Zeitmessung ist genauso exakt wie die Koinzidenzmethode, läßt sich aber viel schneller durchführen.

*Zu Aufgabe 2:* Die Schwingungsdauer  $T'$  wird hinreichend oft für  $1^\circ \leqq \varphi_0 \leqq 10^\circ$ , z. B. mit einem Zählfrequenzmesser, bestimmt. Tragen wir  $T'$

über  $\varphi_0^2$  ( $\varphi_0$  in Bogenmaß) auf, so ergibt sich nach Gl. (15a) eine Gerade, die eine Steigung von  $(1/16) T$  hat und für  $\varphi_0 = 0$  den Wert  $T' = T$  liefert. Eventuelle Abweichungen vom linearen Verlauf sollen diskutiert werden.

### M. 3.3. Gekoppelte Pendel

*Aufgabe:* Die Schwingungsdauern zweier gekoppelter Pendel bei gleichsinnigen bzw. gegensinnigen Schwingungen  $T_1$  bzw.  $T_2$  sollen gemessen werden. Die Schwingungsdauer bei Schwebungsschwingungen  $T$  und die Schwingungsdauer  $T_s$  sind sowohl experimentell zu bestimmen als auch aus  $T_1$  und  $T_2$  zu berechnen. Außerdem ist der Kopplungsgrad  $k$  zu ermitteln.

Gegeben seien zwei völlig gleiche physikalische Pendel 1 und 2, die elastisch gekoppelt sind. Im allgemeinen wird die Kopplung durch eine Schraubenfeder (vgl. Abb. 17) oder durch eine Gummischnur erzeugt.

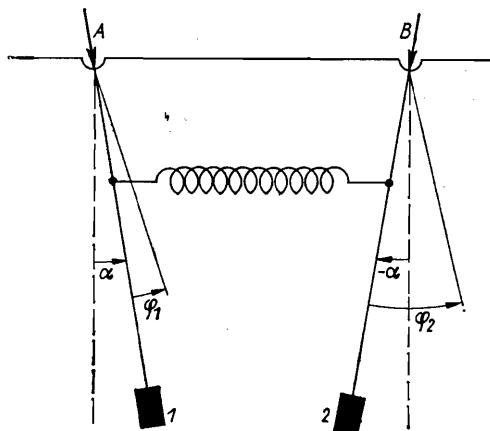


Abb. 17.  
Gekoppelte Pendel

Es ist aber auch möglich, die Pendel ohne mechanische Hilfsmittel zu koppeln. Sind z. B. beide Pendelkörper Dauermagnete, erfolgt die Kopplung durch das Magnetfeld.

Die Drehachsen  $A$  und  $B$  sind so gelagert, daß beide Pendel nur in ein und derselben Ebene schwingen können. In den folgenden Überlegungen werden Winkel und Drehmomente nach rechts positiv und nach links negativ gerechnet. Außerdem wird vorausgesetzt, daß die Schwingungsamplituden der Pendel sehr klein sind und die Reibung in den Achsenlagern vernachlässigt werden kann.

Die Kopplung bewirkt, daß sich die Ruhelage des Pendels 1 um den Winkel  $\alpha$ , die des Pendels 2 um den Winkel  $-\alpha$  von der Vertikalen unterscheidet. In der Ruhelage verschwindet das resultierende Drehmoment sowohl für Pendel 1 als auch für Pendel 2. Bezeichnet man mit  $D$  das Direktionsmoment [vgl. Gl. (6)] von Pendel 1 bzw. 2 und mit  $M_0$  den Betrag des Drehmomentes, das von der Feder auf jedes der beiden Pendel ausgeübt wird, so gilt

$$D\alpha = M_0. \quad (37)$$

Ist Pendel 1 um den Winkel  $\varphi_1$ , Pendel 2 um den Winkel  $\varphi_2$  aus der Ruhelage ausgelenkt, so wirkt auf Pendel 1 das rücktreibende Drehmoment

$$-D(\varphi_1 + \alpha),$$

und das von der Feder herrührende Drehmoment ist

$$M_0 + D^*(\varphi_2 - \varphi_1).$$

$D^*$  ist das Direktionsmoment der Feder. Bei Berücksichtigung von Gl. (37) kann man das resultierende Drehmoment für Pendel 1

$$-D(\varphi_1 + \alpha) + M_0 + D^*(\varphi_2 - \varphi_1) = -D\varphi_1 - D^*(\varphi_1 - \varphi_2)$$

schreiben. Für Pendel 2 liefert eine analoge Betrachtung

$$-D(\varphi_2 - \alpha) - M_0 - D^*(\varphi_2 - \varphi_1) = -D\varphi_2 + D^*(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Die Bewegungsgleichungen lauten daher

$$I\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 - D^*(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (38)$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D^*(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (39)$$

Durch die Substitution

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

vereinfachen sich die Gln. (38) und (39) zu

$$I\ddot{\psi}_1 = -D\psi_1$$

$$I\ddot{\psi}_2 = -(D + 2D^*)\psi_2.$$

Die Lösungen [vgl. Gl. (11)] sind

$$\psi_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t,$$

$$\psi_2 = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t$$

mit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = + \sqrt{\frac{D}{I}}, \quad (40)$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = + \sqrt{\frac{D + 2D^*}{I}} = + \omega_1 \sqrt{1 + 2 \frac{D^*}{D}}. \quad (41)$$

Geht man wieder zu den Winkeln  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  über, erhält man

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \{a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t\}, \quad (42)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \{a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t - a_2 \cos \omega_2 t - b_2 \sin \omega_2 t\}. \quad (43)$$

Die Integrationskonstanten  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  und  $b_2$  sollen für drei verschiedene Fälle bestimmt werden.

### 1. Gleichsinnige Schwingungen

Beide Pendel werden um den gleichen Winkel  $\varphi_0$  aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und zur Zeit  $t = 0$  losgelassen. Mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

folgt aus den Gln. (42) und (43)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\varphi_0, & b_1 = a_2 = b_2 = 0, \\ \varphi_1 &= \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_1 t. \end{aligned} \quad (44)$$

Die beiden Pendel schwingen gleich, und zwar so, als wenn die Kopplung nicht vorhanden wäre.

### 2. Gegensinnige Schwingungen

Pendel 1 wird um den Winkel  $\varphi_0$ , Pendel 2 um den Winkel  $-\varphi_0$  ausgelenkt. Zur Zeit  $t = 0$  lässt man beide Pendel los. Aus den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} a_2 &= 2\varphi_0, & a_1 = b_1 = b_2 = 0, \\ \varphi_1 &= -\varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_2 t. \end{aligned} \quad (45)$$

Beide Pendel schwingen mit gleicher Amplitude und gleicher Frequenz, aber mit einer Phasendifferenz  $\pi$ . Die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist größer als die der gleichsinnigen.

### 3. Schwebungsschwingungen

Man hält Pendel 1 in seiner Ruhelage fest, lenkt Pendel 2 um den Winkel  $\varphi_0$  aus und lässt beide Pendel zur Zeit  $t = 0$  los. Aus den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

ergibt sich

$$a_1 = -a_2 = \varphi_0, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

Die Gln. (42) und (43) lauten dann

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t \right] \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) t \right], \quad (46)$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \cos \left[ \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t \right] \cos \left[ \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) t \right]. \quad (47)$$

Die durch die Gln. (46) und (47) beschriebenen Schwingungen haben im allgemeinen einen komplizierten Verlauf. Aus diesem Grunde soll vorausgesetzt werden, daß die Kopplung der beiden Pendel nur lose ist. Als Maß für die Kopplung definiert man den Kopplungsgrad

$$k = \frac{D^*}{D + D^*}. \quad (48)$$

Mit den Gln. (40) und (41) kann man dafür

---


$$k = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2} \quad (49)$$


---

schreiben. Kleiner Kopplungsgrad bedeutet also, daß das Direktionsmoment der Feder klein gegen das des Pendels bzw. daß die Schwingungsdauer der gleichsinnigen Schwingung nur wenig größer als die der gegensinnigen ist. In diesem Falle kann man die Gln. (46) und (47) so interpretieren: Beide Pendel führen Schwingungen mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1)$$

bzw. der Schwingungsdauer  $T$  gemäß

---


$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right) \quad (50)$$


---

aus. Die Amplituden  $\varphi_0 \sin \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t$  bzw.  $\varphi_0 \cos \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t$  ändern sich mit kleiner Kreisfrequenz periodisch mit der Zeit. Die Amplituden von Pendel 1 verschwinden zu den Zeiten

$$t = nT_s, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Es gilt also

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_s = \pi,$$


---

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}. \quad (51)$$


---

Das beschriebene Verhalten bezeichnet man als Schwebung,  $T_s$  als Schwingungsdauer.

### *Versuchsausführung*

Wir bestimmen die Schwingungsdauern  $T_1$  und  $T_2$  bei der gleichen Lage der Kopplungsfeder, indem wir mehrmals die Zeit für je  $N$  Schwingungen sehr kleiner Amplitude stoppen. Die Zahl  $N$  ist so groß zu wählen, daß die zur Berechnung von  $k$  und  $T_s$  [vgl. die Gln. (49) und (51)] benötigte Differenz  $T_1 - T_2$  mit hinreichender Genauigkeit angegeben werden kann. Anschließend sind bei gleicher Kopplung die Schwingungsdauer der Schwingungsschwingung  $T$  und die Schwingungsdauer  $T_s$  zu messen. Beide Zeiten sollen auch aus den Gln. (50) bzw. (51) berechnet werden. Den Kopplungsgrad  $k$  erhalten wir aus Gl. (49). Der Versuch ist bei zwei anderen Einstellungen der Kopplungsfeder zu wiederholen.

Die Erscheinung der Schwingungsschwingungen ist anhand des Energiesatzes zu diskutieren. Studenten mit Physik als Hauptfach sollen sich außerdem überlegen, warum bzw. unter welchen Bedingungen beim Null-durchgang der Amplitude der Schwingungsschwingung ein Phasensprung von  $\pi$  auftritt.

## **M. 3.4. Trägheits- und Direktionsmomente**

*Aufgabe:* 1. Das Trägheitsmoment  $I$  und das Direktionsmoment  $D$  eines Drehtisches sollen bestimmt werden. Der Satz von Steiner ist experimentell zu prüfen.

Ein Drehtisch besteht aus einer horizontal liegenden Platte, die starr mit einer gut gelagerten, vertikalen Drehachse verbunden ist. An der Achse ist das innere Ende einer Spiralfeder befestigt. Das äußere Ende der Feder ist an das Gehäuse des Drehtisches angeschraubt. In die Platte sind kleine Löcher gebohrt, die definierte Abstände  $s$  von der Drehachse haben und zur Befestigung eines Körpers dienen. Als Körper  $K$  soll ein homogener Zylinder mit dem Radius  $R$  und der Masse  $m$  verwendet werden. Für die Schwin-

gungsdauer des Drehtisches gilt unter den in Abschn. M. 3.0.2 gemachten Voraussetzungen Gl. (14), d. h., es ist

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D}. \quad (52)$$

Befestigt man den Zylinder so auf dem Drehtisch, daß die Zylinderachse parallel zur Drehachse verläuft und von ihr den Abstand  $s$  hat, dann ist das Trägheitsmoment des Zylinders nach dem Steinerschen Satz Gl. (16)

$$I_K = \frac{1}{2} mR^2 + ms^2. \quad (53)$$

Für das Trägheitsmoment des Systems Drehtisch + Zylinder gilt

$$I_s = I + I_K = I + \frac{1}{2} mR^2 + ms^2, \quad (54)$$

für die Schwingungsdauer

$$T_s^2 = 4\pi^2 \frac{I_s}{D}. \quad (55)$$

Ist speziell  $s = 0$ , erhält man

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I + \frac{1}{2} mR^2}{D}. \quad (56)$$

Aus den Gln. (52) und (56) folgt

$$D = \frac{2\pi^2 mR^2}{T_0^2 - T^2}. \quad (57)$$

Den Rechnungen (vgl. Abschn. M. 3.0.2) liegt die Annahme zugrunde, daß die Reibung in den Achsenlagern vernachlässigbar ist. In Wirklichkeit treten im Experiment stets Reibungsverluste auf, die eine Dämpfung der Schwingungen zur Folge haben. Wenn man das Drehmoment der Reibung proportional der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  ansetzt, läßt sich berechnen, daß die Schwingungsamplitude exponentiell mit der Zeit abnimmt. Ist das Verhältnis einer Amplitude zur nächstfolgenden kleiner als 2, so wird die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung nur um weniger als 1 % größer als die der ungedämpften. Aus diesem Grunde ist es gerechtfertigt, zur Berechnung der Trägheitsmomente die Gleichungen für ungedämpfte Schwingungen zu verwenden.

### Versuchsausführung

Wir bestimmen die Masse  $m$  und den Radius  $R$  des Zylinders  $K$  und berechnen die Trägheitsmomente  $I_K$  nach Gl. (53) für die mit dem Drehtisch

realisierbaren Abstände  $s$ . Vor Beginn der weiteren Messungen ist der Drehtisch zu justieren. Zur Bestimmung der Größen  $T$ ,  $T_0$  und  $T_s$  ist die Zeit für möglichst viele Schwingungen zu stoppen. Das Direktionsmoment  $D$  ergibt sich aus Gl. (57), das Trägheitsmoment des Drehtisches  $I$  aus Gl. (52).

Wir berechnen die Trägheitsmomente  $I_s$  nach Gl. (54) und stellen die Gerade  $I_s$  über  $s^2$  graphisch dar. In diese Darstellung werden die nach Gl. (55) ermittelten Werte  $I_s$  als deutlich erkennbare Punkte eingetragen. Wenn die Abweichungen dieser Punkte von der Geraden kleiner als die absoluten Meßfehler sind, ist die Gültigkeit des Steinerschen Satzes experimentell nachgewiesen.

*Aufgabe:* 2. Die drei Hauptträgheitsmomente eines homogenen Körpers mit zwei zueinander senkrechten Symmetrieebenen sollen für den Massenmittelpunkt experimentell bestimmt werden.

Gegeben sei ein starrer Körper mit einer beliebigen Drehachse  $A$ . Ein Punkt der Achse wird als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinaten-

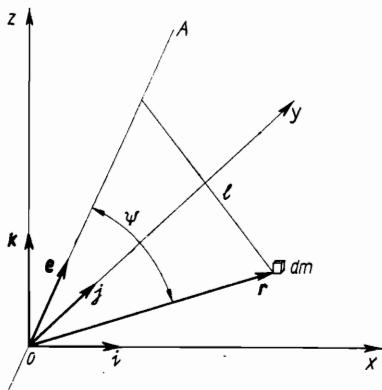


Abb. 18.  
Zur Drehung eines Körpers  
um eine feste Achse

systems mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  gewählt (vgl. Abb. 18). In diesem System hat der Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  der Drehachse die Komponenten (Richtungskosinus)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

$$\mathbf{e} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{e}|^2 = 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Ein beliebiges Massenelement  $dm$  des Körpers habe den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Der senkrechte Abstand des Massenelementes von der Achse sei  $l$ .

$$l^2 = |\mathbf{r}|^2 \sin^2 \psi = |\mathbf{r}|^2 - |\mathbf{r}|^2 \cos^2 \psi = |\mathbf{r}|^2 |\mathbf{e}|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2.$$

Das Trägheitsmoment  $I_A$  des Körpers, bezogen auf die gegebene Achse, ist

$$I_A = \int l^2 dm = \int |\mathbf{r}|^2 |\mathbf{e}|^2 dm - \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2 dm$$

oder

$$\begin{aligned} I_A &= \int (x^2 + y^2 + z^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dm \\ &\quad - \int (xx + y\beta + z\gamma)^2 dm. \end{aligned}$$

Ordnet man nach den Komponenten des Einheitsvektors  $\mathbf{e}$ , so wird

$$\begin{aligned} I_A &= \alpha^2 \int (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int (z^2 + x^2) dm + \gamma^2 \int (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - 2 \{ \alpha\beta \int xy dm + \beta\gamma \int yz dm + \gamma\alpha \int zx dm \}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke

$$\int (y^2 + z^2) dm = I_{xx}, \quad \int (z^2 + x^2) dm = I_{yy}, \quad \int (x^2 + y^2) dm = I_{zz}$$

sind die Trägheitsmomente des Körpers, bezogen auf die drei Achsen des Koordinatensystems. Die Größen

$$\int xy dm = I_{xy}, \quad \int yz dm = I_{yz}, \quad \int zx dm = I_{zx}$$

bezeichnet man als Trägheitsprodukte. Damit wird

$$I_A = \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz} - 2 \{ \alpha\beta I_{xy} + \beta\gamma I_{yz} + \gamma\alpha I_{zx} \}. \quad (58)$$

Gl. (58) sagt aus: Wenn man die drei Trägheitsmomente, bezogen auf die Achsen eines Koordinatensystems, und die drei Trägheitsprodukte kennt, kann man das Trägheitsmoment für jede durch den Nullpunkt des Systems gehende Achse angeben.

Auf der Drehachse soll vom Nullpunkt aus die Größe

$$R = I_A^{-\frac{1}{2}}$$

aufgetragen, d. h., es soll der Vektor

$$\mathbf{R} = I_A^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e} = R\alpha \mathbf{i} + R\beta \mathbf{j} + R\gamma \mathbf{k} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$$

dargestellt werden. Multipliziert man Gl. (58) mit  $R^2$ , so erhält man für die Komponenten  $\xi, \eta, \zeta$  des Vektors  $\mathbf{R}$

$$\xi^2 I_{xx} + \eta^2 I_{yy} + \zeta^2 I_{zz} - 2 \{ \xi\eta I_{xy} + \eta\zeta I_{yz} + \zeta\xi I_{zx} \} = 1. \quad (59)$$

Gl. (59) stellt eine Fläche im Raum dar. Da das Trägheitsmoment  $I_A$  für keine Drehachse verschwindet, bleibt der Vektor  $\mathbf{R}$  stets endlich. Die Fläche ist also ein Ellipsoid, das Trägheitsellipsoid. Durch eine Hauptachsen-

transformation (Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt) kann man Gl. (59) in die Form

$$X^2 I_X + Y^2 I_Y + Z^2 I_Z = 1 \quad (60)$$

bringen.  $I_X$ ,  $I_Y$  und  $I_Z$  bezeichnet man als Hauptträgheitsmomente, die Achsen des neuen Koordinatensystems  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  als Hauptträgheitsachsen und die durch die Achsen gebildeten Ebenen als Hauptträgheitsebenen.

Die Verhältnisse werden wesentlich einfacher, wenn der Körper homogen und z. B. die  $xy$ -Ebene des Koordinatensystems eine Symmetrieebene ist. In diesem Falle verschwinden die Trägheitsprodukte  $I_{yz}$  und  $I_{zx}$ , und die Hauptachsentransformation wird durch eine Drehung des Koordinatensystems um die  $z$ -Achse erreicht. Hat der Körper noch zusätzlich eine Symmetrieebene, die senkrecht auf der  $xy$ -Ebene steht (z. B. die  $xz$ -Ebene des Koordinatensystems), dann verschwindet auch  $I_{xy}$ . Die Achsen des Koordinatensystems  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind also bereits Hauptträgheitsachsen. Diese Betrachtungen gelten z. B. für den in Abb. 19 skizzierten Körper. Der

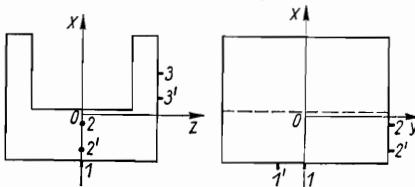


Abb. 19.  
Körper mit U-Profil

Ursprung des Koordinatensystems soll im Massenmittelpunkt liegen. Zur Bestimmung der verschiedenen Trägheitsmomente des Körpers verwendet man einen Drehtisch, dessen Trägheitsmoment  $I$  und Direktionsmoment  $D$  bekannt sind. Die Stifte 1, 1', 2, 2', 3 und 3' dienen dazu, den Körper in definierten Lagen auf dem Drehtisch zu befestigen.

### Versuchsausführung

Wir bringen die  $x$ -Achse (Stift 1) mit der Achse des Drehtisches zur Deknung und bestimmen die Schwingungsdauer  $T_{01}$ . Dann werden die Schwingungsdauern  $T_{s2}$  bzw.  $T_{s3}$  bei verschiedenen Abständen  $s$  zwischen Drehachse und Stift 2 bzw. Stift 3 gemessen. Aus

$$T_{sn}^2 = 4\pi^2 \frac{I + I_{sn}}{D}, \quad n = 1, 2, 3$$

lassen sich die Trägheitsmomente  $I_{sn}$  berechnen. Wir stellen  $I_{s2}$  und  $I_{s3}$  in Abhängigkeit von  $s$  graphisch dar und ermitteln die Minima der beiden Kurven.

Es gilt

$$\begin{aligned} I_{01} &= I_{xx} = I_x, \\ \text{Min } (I_{s2}) &= I_{yy} = I_y, \\ \text{Min } (I_{s3}) &= I_{zz} = I_z. \end{aligned}$$

Damit ist das Trägheitsellipsoid Gl. (60) für den Massenmittelpunkt des Körpers vollständig bestimmt. Außerdem kann man die Lage des Massenmittelpunktes angeben.

Die Lage des Massenmittelpunktes und die zugehörigen drei Hauptträgheitsmomente des Körpers der Abb. 19 können auch berechnet werden.

## M. 4. KREISEL

### M. 4.0. Allgemeine Grundlagen

#### M. 4.0.1. Kreiselarten

Alle starren Körper, die sich um einen festen Punkt drehen, stellen *Kreisel* dar. Besitzen sie bezüglich einer durch ihren Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) gehenden Achse Rotationssymmetrie, sprechen wir von einem *symmetrischen Kreisel*. Die Symmetriearchse ist Hauptträgheitsachse und wird Figurenachse genannt. Wenn der Schwerpunkt eines solchen Kreisels gleichzeitig Drehpunkt ist, liegt ein *kräftefreier Kreisel* vor, weil seine eigene Schwere die Kreiselbewegung nicht beeinflußt (Schweremoment gleich Null). Ein Kreisel, auf den ein Schweremoment oder ein beliebiges anderes, beispielsweise magnetisch bedingtes Moment wirkt, heißt *schwerer Kreisel*. Das im Versuch dieses Kapitels verwendete Fesselsche Gyroskop ist eine besondere Form eines symmetrischen Kreisels, der als kräftefreier und schwerer Kreisel betrieben werden kann.

Drehungen um Achsen sind Sonderfälle der Kreiselbewegung. Man findet sie beispielsweise bei navigatorischen Kreiselgeräten (Kreiselkompaß, Wendezeiger, künstlicher Horizont u. a.), bei rotierenden Maschinenteilen (Räder, Schwungscheiben, Rotor von Motor, Generator, Turbine usw.), bei der Erde und anderen Himmelskörpern, aber auch bei atomaren Drehbewegungen.

#### M. 4.0.2. Präzession des symmetrischen Kreisels

Ein *symmetrischer Kreisel* möge sich zunächst kräftefrei um seine im Raum ruhende Figurenachse drehen (Abb. 20a). Diese ist gleichzeitig

Richtung des Drehimpulsvektors  $\mathbf{L}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  sowie der diesen Vektoren zugeordneten Achsen, der Drehimpuls- und der momentanen Drehachse. Können Reibungskräfte vernachlässigt werden, behält der Drehimpuls des Kreisels seinen Betrag und seine Richtung unverändert bei

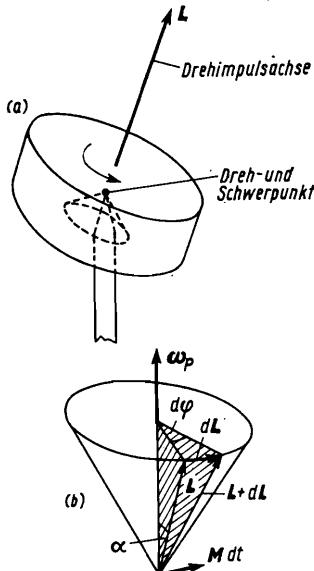


Abb. 20. Kräftefreier (a)  
und schwerer (b) Kreisel

(Drehimpulssatz). Wenn jedoch während der Zeit  $dt$  auf den Kreisel ein Drehmoment  $\mathbf{M}$  äußerer Kräfte wirkt (schwerer Kreisel), ändert sich der Drehimpuls gemäß der Gleichung

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt. \quad (1)$$

Der Vektor  $d\mathbf{L}$  hat stets die Richtung des Drehmomentvektors  $\mathbf{M}$ .

Zu dieser Gleichung führt folgende Überlegung: Faßt man einen Kreisel als System von Massenelementen auf, trägt jedes mit seinem Bahnmoment  $\mathbf{p}_i$  zum Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L}$  bei. Wir setzen daher definitionsgemäß

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$$

und verstehen unter  $\mathbf{r}_i$  den Radiusvektor, der von einem Bezugspunkt auf der Achse aus zum  $i$ -ten Massenelement geht.

Die Differentiation ergibt

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \left[ \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i \right) + \left( \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) \right].$$

Da  $\mathbf{p}_i \parallel d\mathbf{r}_i/dt$  ist, wird die erste Klammer dieser Gleichung Null. Das Vektorprodukt der zweiten Klammer stellt das durch eine Kraft  $\mathbf{F}_i$  verursachte Drehmoment  $\mathbf{M}_i$  dar; denn es ist  $d\mathbf{p}_i/dt = \mathbf{F}_i$  und  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i$ , so daß über

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{M}$$

die Gl. (1) unmittelbar folgt.

Zwei Grenzfälle der Drehimpulsänderung sind bemerkenswert:

a) Der Drehmomentvektor  $\mathbf{M}$  verläuft in Richtung von  $\mathbf{L}$ . Dann liegt auch  $d\mathbf{L}$  parallel zu  $\mathbf{L}$ . Die Vektoraddition  $\mathbf{L} + d\mathbf{L}$  wirkt sich nur auf den Betrag des Drehimpulses aus, seine Richtung bleibt erhalten. Je nach dem Richtungssinn des Drehmomentes wird der Kreisel angetrieben oder abgebremst.

b) Das Drehmoment  $\mathbf{M}$  bildet mit dem Drehimpulsvektor  $\mathbf{L}$  einen rechten Winkel. Dann steht auch  $d\mathbf{L}$  senkrecht auf  $\mathbf{L}$  (Abb. 20 b). In diesem Falle weicht die Drehimpulsachse in Richtung des Drehmomentes  $\mathbf{M}$ , also senkrecht zur wirkenden Kraft aus. Solange ein Drehmoment  $\mathbf{M}$  wirkt, läuft der Drehimpulsvektor  $\mathbf{L}$  auf der Mantelfläche eines Kreiskegels gleichförmig um, der Kreisel präzidiert. Der Öffnungswinkel  $2\alpha$  des Kreiskegels ist durch die Anfangsbedingungen gegeben, die hier nicht erörtert werden. Für die Winkelgeschwindigkeit  $|\omega_p|$  der Präzession folgt aus Abb. 20 b

$$|\omega_p| = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{|\mathbf{L}| \sin \alpha} \cdot \frac{|d\mathbf{L}|}{dt} = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{L}| \sin \alpha} \quad (2)$$

und daraus

$$|\mathbf{M}| = |\omega_p| \cdot |\mathbf{L}| \sin \alpha. \quad (3)$$

Dies ist der Betrag des Vektorproduktes

---


$$\mathbf{M} = \omega_p \times \mathbf{L}, \quad (4)$$


---

das somit die durch ein Drehmoment  $\mathbf{M}$  verursachte Präzession eines Kreisels beschreibt. Der Drehmomentvektor  $\mathbf{M}$  steht senkrecht zu der durch die Vektoren  $\omega_p$  und  $\mathbf{L}$  gebildeten Ebene, die Vektoren  $\omega_p$ ,  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{M}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Der allgemeine Fall, daß der Drehmomentvektor  $\mathbf{M}$  und der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  einen beliebigen Winkel einschließen, kann über eine Komponentenzerlegung auf die zuvor diskutierten Grenzfälle zurückgeführt werden.

### M. 4.0.3. Nutation des symmetrischen Kreisels

Wenn sich bei einem rotierenden symmetrischen Kreisel die Figuren-, die Drehimpuls- und die momentane Drehachse nicht decken (Abb. 21),

treten komplizierte Verhältnisse auf: Die momentane Drehachse und die Figurennachse beschreiben je einen Kreiskegel um die Drehimpulsachse, die beim kräftefreien Kreisel ihre Richtung im Raum beibehält (Drehimpulsatz). Die Kegel rollen aufeinander so ab, daß ihre Achsen stets eine Ebene bilden und bei einem verlängerten Kreisel<sup>1)</sup> zueinander die in der Abb. 21

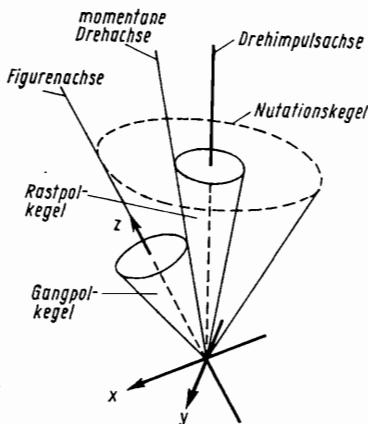


Abb. 21. Zur Bewegung eines verlängerten symmetrischen Kreisels

gezeichnete Lage haben. Die Bewegung der Figurennachse um die Drehimpulsachse ist gut zu beobachten und wird *Nutation* genannt, der zugehörige Kreiskegel ist der Nutationskegel. Die momentane Drehachse wandert im Kreiselkörper.

Führt man ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem ein, dessen Achsen  $x, y, z$  mit den Hauptträgheitsachsen des Kreisels zusammenfallen und bei dem  $z$  in Richtung der Figurennachse weist, läßt sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die momentane Drehachse durch ihre Komponenten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  im körperfesten Bezugssystem ausdrücken:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (5)$$

( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  Einheitsvektoren im körperfesten Bezugssystem). In entsprechender Weise gilt für den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \omega_x I_x \mathbf{i} + \omega_y I_y \mathbf{j} + \omega_z I_z \mathbf{k},$$

wenn  $I_x, I_y$  und  $I_z$  die Hauptträgheitsmomente (vgl. M. 3.4. Aufgabe 2) darstellen. Da beim symmetrischen Kreisel das Trägheitsellipsoid rotationsymmetrisch ist, folgt mit  $I_x = I_y = I_s$

$$\mathbf{L} = I_s(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + I_z \omega_z \mathbf{k} \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Er besitzt bezüglich seiner Figurennachse ein minimales, der abgeplattete Kreisel ein maximales Trägheitsmoment.

und daraus unter Beachtung der Gleichung (5)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{I_s} \mathbf{L} + \left(1 - \frac{I_z}{I_s}\right) \omega_z \mathbf{k}. \quad (7)$$

Der erste Summand stellt die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_N$  der Figurennachse um die Drehimpulsachse und damit die *Winkelgeschwindigkeit* der *Nutation* dar. Sie ist ein Vektor von der Richtung des Drehimpulses. Bezeichnet man die Periodendauer mit  $T_N$ , gilt für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit und damit für die Kreisfrequenz der Nutation

$$\omega_N = \frac{2\pi}{T_N} = \frac{1}{I_s} |\mathbf{L}|. \quad (8)$$

Da sich die Bewegung der Figurennachse gut beobachten lässt, kann die Nutationsfrequenz experimentell leicht ermittelt werden. Aus ihr und der Präzessionsfrequenz  $\nu_p$  können die Hauptträgheitsmomente des Kreisels bestimmt werden. Dazu dienen folgende Überlegungen: Das Skalarprodukt aus Gl. (6) und  $\mathbf{k}$  ergibt

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{L} = |\mathbf{L}| \cos \vartheta = I_z \omega_z$$

( $\vartheta$  ist der halbe Öffnungswinkel des Nutationskegels). Für kleine Winkel  $\vartheta$  ( $\cos \vartheta \approx 1$ ) folgt näherungsweise

$$|\mathbf{L}| = I_z \omega_z = 2\pi \nu_z I_z. \quad (9)$$

Hierin ist  $\nu_z$  die Frequenz der Rotation des Kreisels um seine Figurennachse. Setzen wir Gl. (9) in Gl. (8) ein, ergibt sich für die *Nutationsperiode*

---


$$T_N = \frac{1}{\nu_z} \frac{I_s}{I_z}. \quad (10)$$


---

Wenn ein Kreisel infolge eines permanenten äußeren Drehmomentes präzidiert, überlagert sich die Nutation dieser Bewegung, so daß der Kreisel insgesamt eine Nick- oder Schleifenbewegung auf kreisförmiger Bahn ausführt.

Setzt man den für kleine Nutationen gültigen Betrag des Drehimpulses [Gl. (9)] in Gl. (2) ein, folgt für die *Periodendauer der Präzession*

---


$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_P} = \frac{4\pi^2 \nu_z I_z}{|\mathbf{M}|} \sin \alpha. \quad (11)$$


---

## M. 4.1. Gyroskop

*Aufgaben:* An einem Gyroskop sollen ermittelt werden

1. die Nutationsperiode in Abhängigkeit von der Kreiselfrequenz [ $T_N = f(\nu_z)$ ],
2. die Abhängigkeit der Präzessionsperiode von äußeren Drehmomenten und von der Kreiselfrequenz, evtl. vom Trägheitsmoment des Kreisels [ $T_P = f(M, \nu_z, I_z)$ ],
3. die Hauptträgheitsmomente des Kreisels. Gegebenenfalls sind die aus experimentellen Daten ermittelten Werte mit den aus den Kreiselabmessungen berechneten zu vergleichen.

Als Modell für einen symmetrischen Kreisel dient ein modifiziertes Fessel-sches Gyroskop (Abb. 22). An dem einen Ende eines Stabes befindet sich ein elektrisch angetriebener Kreisel  $K$ , der vom Kurzschlußläufer eines Asynchronmotors gebildet wird. Seine Figurenachse zeigt in Richtung des Stabes.

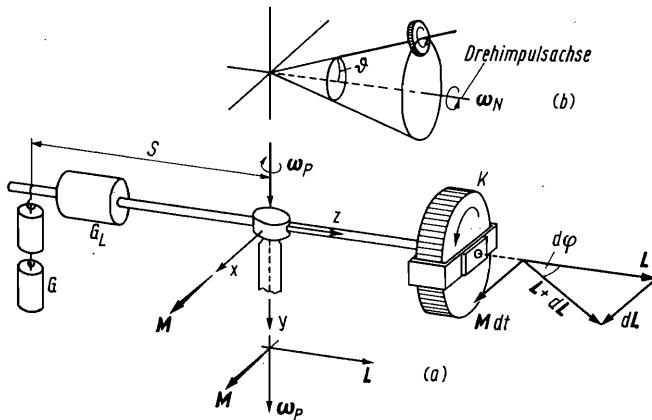


Abb. 22. Präzession (a) und Nutation (b) des Gyroskopes

Sie ist in Abb. 22a gleichzeitig Richtung der Drehimpulsachse. (Die Zuordnung der Vektoren  $M$  und  $\omega_P$  zu  $L$  geht aus der Abb. 20 für  $\alpha = 90^\circ$  hervor.) Mit dem Laufgewicht  $G_L$  am anderen Stabende kann das Gyroskop in bezug auf die horizontale Achse, die  $x$ -Achse der Abb. 22, ausbalanciert werden. Außerdem ist eine Drehung (Präzession) um die vertikale, die  $y$ -Achse möglich. Sie wird durch ein äußeres Moment  $M$  verursacht, welches im Abstand  $s$  von der Drehachse angebrachte Zusatzgewichte  $G = m \cdot g$  ( $m$  – Masse der Gewichtsstücke,  $g$  – Schwerkraftbeschleunigung) erzeugen. In diesem

Falle kann Gl. (11) durch

$$T_p = \frac{4\pi^2 \nu_z I_z}{mgs} \quad (12)$$

ersetzt werden. Die Kreiselfrequenz  $\nu_z$  ist mit der Frequenz  $\nu_E$  des elektrischen Drehfeldes im Motor  $M$  nahezu identisch. Es wird in unserem Beispiel vom Dreiphasenstrom eines Umformers erzeugt (Abb. 23)<sup>1)</sup>.

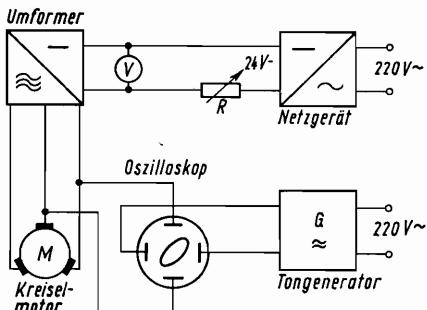


Abb. 23. Antrieb und Frequenzmessung beim Gyroskop

Mit dem Widerstand  $R$  regeln wir die Speisespannung des Umformers und damit die Frequenz des Dreiphasenstromes stufenlos.

Die Frequenz  $\nu_z \approx \nu_E$  kann auf verschiedene Weise ermittelt werden:

a) *Vergleich der Frequenz der Speisespannung  $\nu_E$  des Kreisels mit der Frequenz eines Tongenerators  $G$*  (gemäß der Schaltung in Abb. 23): Auf dem Schirm eines Elektronenstrahlloszilloskops wird die Lissajous-Figur für das Frequenzverhältnis 1 : 1 (siehe Versuch E. 5.4.) erzeugt. Die Messung ist bei Asynchronmotoren wegen des Schlupfes von Rotor und Drehfeld ( $\nu_z < \nu_E$ ) mit einem systematischen Fehler behaftet, der beim unbelasteten Asynchronmotor im allgemeinen  $< 1\%$  ist, im Versuch durchaus 5% betragen kann.

b) *Stroboskopische Frequenzmessung*: Auf der Rotorachse befindet sich eine Meßmarke oder eine mit einer Segmentteilung versehene Scheibe. Sie wird mit einer intensitätsmodulierten Lichtquelle (Lichtblitzstroboskop) periodisch beleuchtet. Stimmen die Frequenzen des Wechsellichtes und des Motors überein, ist ein stehendes Bild der Meßmarke bzw. der Segmentscheibe zu beobachten. Je nach Teilung der Segmentscheibe ist dies auch der Fall, wenn die Motorfrequenz bestimmte Bruchteile oder Vielfache der

<sup>1)</sup> Im Versuch handelt es sich beispielsweise um einen Kreisel eines Bordgerätes aus einem Flugzeug. Der Umformer wandelt den Gleichstrom des Bordnetzes (24 V) in Drehstrom ( $\nu_E \approx 500$  Hz) um, so daß der Kreisel hochtourig betrieben werden kann. Aus diesem Grunde werden Kreisel als Kurzschlußläufer ausgebildet.

Frequenz des Wechsellichtes beträgt [vgl. Versuch M. 3.2. (Versuchsausführung)]. Aus der an der Skale des Lichtblitzstroboskopes ablesbaren Frequenz des Wechsellichtes folgt die Frequenz des Rotors.

Eine andere Bauart des Gyroskopos geht aus dem zuvor beschriebenen Modell hervor, indem der Motorkreisel der Abb. 22 bei kardanischer Lagerung in das Drehzentrum gelegt wird. Auf dieses Modell lassen sich alle Überlegungen dieses Kapitels ohne Einschränkungen anwenden.

### *Versuchsausführung*

Die Figurenachse des Gyroskopos wird mittels Laufgewichtes  $G_L$  horizontal ausgerichtet, die Schaltung nach Abb. 23 aufgebaut. Die Meßreihen für *Aufgabe 1 und 2* beginnen jeweils mit maximaler Frequenz  $\nu_E$  bzw.  $\nu_z$  ( $R = 0$ ). Innerhalb der Meßreihen sollte mit mindestens 5 Rotorfrequenzen gearbeitet werden, die möglichst gleichmäßig auf das Intervall zwischen maximaler Frequenz ( $\nu_{E,\max}$ ) und etwa ihren halben Wert ( $1/2 \nu_{E,\max}$ ) verteilt sind. Eine konstante Drehzahl des Kreisels ist jeweils an einer gleichmäßigen Tonhöhe des Rotorgeräusches zu erkennen.

Zur Frequenzbestimmung über Lissajous-Figuren wird die Verstärkung am Oszilloskop bzw. am Tonfrequenzgenerator so gewählt, daß im abgeglichenen Zustand möglichst wenig verzerrte Ellipsen entstehen (siehe Versuch E. 5.4.). Beim Abgleichen verändern wir die Tonfrequenz kontinuierlich und lesen den Meßwert an der Skale des Generators ab, für den das Ellipsenbild ruht.

Bei *Aufgabe 1* lösen wir die Nutation des Gyroskops durch einen leichten Stoß gegen den Kreiselkörper aus. Wegen der Näherung in Gl. (9) soll  $\vartheta$  klein gehalten werden ( $\vartheta < 10^\circ$ ).  $T_N$  wird mit der Stoppuhr ermittelt, indem wir im Interesse eines kleinen Meßfehlers den Mittelwert aus mindestens 10 Umläufen der Figurenachse bilden. Die graphische Darstellung von  $T_N$  über  $1/\nu_z$  ergibt nach Gl. (10) als Ausgleichskurve eine Gerade.

Für *Aufgabe 2* stellen wir mit mehreren Gewichtsstücken  $G$ , die in bestimmten Abständen  $s$  vom Drehpunkt an das Gyroskop gehängt werden, verschiedene Werte des Drehmomentes  $|M| = mgs$  ein. Für jede Belastung und Rotorfrequenz wird die Periodendauer der Präzession mit der Stoppuhr bestimmt, indem wiederum der Mittelwert aus mehreren Umläufen gebildet wird. Läßt sich das Trägheitsmoment beim Kreiselmodell des Praktikums variieren, wird eine weitere Meßreihe bei geändertem Trägheitsmoment aufgenommen. Erfahrungsgemäß sinkt die Figurenachse auf der Seite der Zusatzgewichte im Laufe der Messung infolge Reibung ab. Dadurch verringert sich das Drehmoment, so daß die Messungen verfälscht werden. Deshalb muß die Figurenachse von Zeit zu Zeit durch einen leichten Druck in Präzessionsrichtung oder durch eine entsprechende Unterstützung angehoben werden.

Eine graphische Darstellung von  $T_P$  über  $\nu_z/(m \cdot s)$  liefert nach Gl. (12) als ausgleichende Kurve eine Gerade. Aus ihrer Steigung wird

gemäß *Aufgabe 3* mit Hilfe von Gl. (12) der Mittelwert des Hauptträgheitsmomentes  $I_z$  und mit der graphischen Darstellung der Aufgabe 1 und Gl. (10) der Mittelwert des Hauptträgheitsmomentes  $I_s$  berechnet.

## M. 5. ELASTISCHE EIGENSCHAFTEN FESTER KÖRPER

### M. 5.0. Allgemeine Grundlagen

Jeder feste Körper wird unter dem Einfluß einer mechanischen Spannung deformiert. Bei hinreichend kleiner Spannung ist die Deformation elastisch, d. h., der Körper nimmt nach der Entlastung seine ursprüngliche Gestalt wieder an. Überschreitet die Spannung dagegen einen bestimmten Wert, so können Fließerscheinungen zu bleibenden Volumen- oder Formänderungen führen. Dann nennt man die Deformation unelastisch.

Das elastische Verhalten homogener, isotroper fester Körper wird durch vier Materialgrößen charakterisiert: den *Elastizitätsmodul*  $E$ , die *Poissonsche Zahl*  $\mu$ , den *Torsions-* oder *Schubmodul*  $G$  und den *Kompressionsmodul*  $K$ .

Der Elastizitätsmodul wird durch das *Hooke'sche Gesetz*

---


$$\sigma = E \varepsilon \quad (1)$$


---

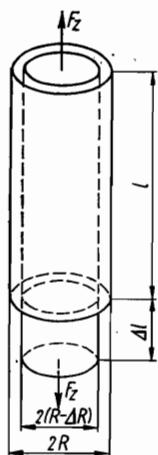


Abb. 24.  
Deformation eines Zylinders durch eine Zugkraft

definiert. Gl. (1) besagt, daß bei hinreichend kleinen Deformationen die Zugspannung  $\sigma$  der Dehnung  $\varepsilon$  proportional ist. Die Zugspannung ist die senkrecht zum Querschnitt  $A$  des Körpers angreifende Kraft  $F_z$  (vgl. Abb. 24) geteilt durch diesen Querschnitt.

$$\sigma = \frac{F_z}{A}. \quad (2)$$

Als Dehnung bezeichnet man das Verhältnis der Längenänderung zur ursprünglichen Länge  $l$ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3)$$

Die Poissonsche Zahl ist der Quotient der relativen Querverkürzung  $\Delta R/R$  und der Dehnung (vgl. Abb. 24).

$$\mu = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{l}{\Delta l}. \quad (4)$$

Wenn auf die obere Deckfläche eines Würfels, dessen Bodenfläche festgehalten wird, eine nicht zu große Kraft  $F_s$  in der in Abb. 25 dargestellten Richtung wirkt, so ist der Scherwinkel  $\alpha$  der Schubspannung  $\tau$  proportional.

---


$$\tau = G\alpha. \quad (5)$$


---

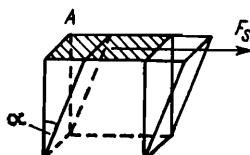


Abb. 25.  
Deformation eines Würfels durch eine Scherkraft

Den Proportionalitätsfaktor  $G$  nennt man Schub- oder Torsionsmodul, und die Schubspannung ist das Verhältnis der Scherkraft  $F_s$  zum Querschnitt  $A$  des Würfels.

$$\tau = \frac{F_s}{A}. \quad (6)$$

Ein fester Körper habe bei einem hydrostatischen Druck  $p$ , d. h. bei Vorhandensein einer negativen Spannung, das Volumen  $V$ . Wenn nun der Druck um den kleinen Wert  $\Delta p$  geändert wird, stellt man eine Volumenänderung  $\Delta V$  fest. Bei einer Druckerhöhung nimmt das Volumen ab, bei einer Druckerniedrigung zu. Der Quotient  $\Delta V/\Delta p$  ist also stets negativ. Der Betrag dieses Quotienten wird bei gegebener Druckdifferenz  $\Delta p$  um so

größer, je größer das Volumen  $V$  ist. Andererseits wird bei gegebenem Ausgangsvolumen  $V$  der Betrag von  $\Delta V/\Delta p$  um so kleiner, je größer die Druckdifferenz  $\Delta p$  ist. Zur Charakterisierung der Zusammendrückbarkeit eines festen Körpers empfiehlt sich daher der Ausdruck

$$\varkappa = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \right\} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}; \quad (7)$$

$\varkappa$  bezeichnet man als (differentielle) *Kompressibilität*, ihren Kehrwert als Kompressionsmodul.

$$K = \frac{1}{\varkappa}. \quad (8)$$

Aus den Definitionsgleichungen (1), (5) und (8) in Verbindung mit Gl. (7) folgt, daß die Größen  $E$ ,  $G$  und  $K$  die Dimension eines Druckes haben. Ihre Einheit ist im gesetzlichen Maßsystem  $\text{Nm}^{-2}$ . In der Technik war es bisher üblich, die drei Moduln in der Einheit  $\text{kp mm}^{-2}$  anzugeben.

$$1 \text{ kp mm}^{-2} = 9,81 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}.$$

Es soll noch erwähnt werden, daß zwischen den Materialgrößen der Elastizitätslehre der Zusammenhang

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1, \quad (9)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (10)$$

besteht. Wenn man also z. B. den Elastizitätsmodul und den Torsionsmodul experimentell bestimmt hat, können die Poissonsche Zahl und der Kompressionsmodul aus den Gln. (9) und (10) berechnet werden.

## M. 5.1. Elastizitätsmodul

Das Verhalten fester Körper bei Zugbeanspruchung wird in der Technik mit Hilfe von Zerreißmaschinen untersucht. Diese Maschinen sind mit zwei Spannbacken ausgerüstet, die zur Befestigung eines Stabes aus dem zu untersuchenden Material dienen. Eine der beiden Spannbacken ist starr mit dem Ständer der Zerreißmaschine verbunden. Greift nun an der anderen eine Zugkraft  $F_z$  in Richtung der Stabachse an, so dehnt sich die Materialprobe um  $\Delta l$ . An der Zerreißmaschine ist eine Meßuhr angebracht, die den Betrag von  $F_z$  anzeigt. Die Verlängerung  $\Delta l$  kann an einem Maßstab abgelesen werden. Im allgemeinen ist in eine Zerreißmaschine noch zusätzlich

ein Schreiber eingebaut, der  $F_z$  über  $\Delta l$  graphisch darstellt. Um die Ergebnisse von Proben mit unterschiedlichen Abmessungen vergleichen zu können, muß man von der Zugkraft zur Spannung und von der Verlängerung zur Dehnung übergehen, d. h. die Werte der Zugkraft durch den Querschnitt  $A$  der Probe und die Werte der Verlängerung durch die Anfangslänge  $l$  teilen. Abb. 26 zeigt schematisch ein sogenanntes Spannungs-

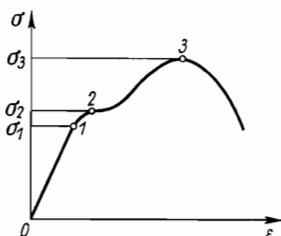


Abb. 26. Spannungs-Dehnungs-Diagramm  
(schematisch)

Dehnungs-Diagramm. Im Intervall  $0 < \sigma < \sigma_1$  gilt das Hookesche Gesetz Gl. (1). Punkt 1 wird als Proportionalitätsgrenze bezeichnet, und der Elastizitätsmodul ergibt sich in dem genannten Intervall zu

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}. \quad (11)$$

Im Intervall  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$  ist die Deformation zwar noch elastisch, aber Spannung und Dehnung sind einander nicht mehr proportional. Punkt 2 nennt man Elastizitätsgrenze. Zwischen Punkt 2 und Punkt 3 (Bruchgrenze) ist die Deformation unelastisch. Wird die Spannung  $\sigma_3$  erreicht, zerreißt die Probe.

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls im Laborversuch ist nicht unbedingt eine Zerreißmaschine notwendig. Hat die Probe des zu untersuchenden Materials einen kleinen Querschnitt, kann man durch Belastung mit Wägestücken, deren Masse einige Kilogramm beträgt, gut meßbare Verlängerungen erzielen. Wenn die Probe einen größeren Querschnitt hat, empfiehlt es sich, den Elastizitätsmodul durch einen Biegeversuch zu ermitteln.

### M. 5.1.1. Dehnung

*Aufgabe:* Der Elastizitätsmodul  $E$  verschiedener Metalle soll aus der Dehnung von Drähten bestimmt werden.

Ein Draht sei an einem Ende eingespannt, während am anderen Ende eine Zugkraft  $F_0$  angreift. Diese wird so groß gewählt, daß der Draht straff gespannt ist. Am Draht sind zwei Marken 1 und 2 angebracht, die bei der

Belastung  $F_0$  den Abstand  $l$  haben sollen. Beide Marken werden mit je einem Mikroskop beobachtet. Die Mikroskopständer dürfen während des Versuches nicht verschoben werden. Dagegen soll sich jedes Mikroskop relativ zu seinem Ständer mit Hilfe einer Meßschraube parallel zu dem zu untersuchenden Draht bewegen lassen, so daß man nach einer Vergrößerung der Zugkraft die Verschiebung der beiden Marken messen kann.

### Versuchsausführung

Wir beladen den Draht mit der Zugkraft  $F_0$  und messen den Abstand  $l$ . Der Drahdurchmesser  $2r$  ist an etwa zehn verschiedenen Stellen zwischen den Marken zu bestimmen. Zur Berechnung des Querschnittes wird der arithmetische Mittelwert  $\bar{r}$  verwendet. Wir stellen die beiden Meßschrauben auf 0 und lesen die Lage von Marke 1 bzw. 2 an den Okularskalen der Mikroskope ab. Nach zusätzlicher Belastung des Drahtes mit der Zugkraft  $F_Z$  sind die Meßschrauben so zu verstehen, daß die beiden Marken mit den gleichen Teilstichen der Okularskalen wie vor der Belastung zur Deckung kommen. Die Differenz der Meßschraubeneinstellungen ist die der Zugkraft  $F_Z$  entsprechende Verlängerung  $\Delta l$ . Wir berechnen die Zugspannung  $\sigma$  nach Gl. (2), die Dehnung  $\varepsilon$  nach Gl. (3) und wiederholen die Messung bei mehreren verschiedenen großen Zugkräften;  $\sigma$  ist über  $\varepsilon$  graphisch darzustellen. Der Elastizitätsmodul  $E$  ergibt sich aus dem Anstieg der gewonnenen Geraden [vgl. Gl. (11)]. Der Versuch ist mindestens mit einem Draht aus anderem Material zu wiederholen. Es ist zu beachten, daß die Drähte keinesfalls Knicke haben dürfen!

### M. 5.1.2. Biegung

*Aufgabe:* Der Elastizitätsmodul  $E$  verschiedener Metalle ist aus der Biegung von Stäben zu ermitteln.

Gegeben sei ein homogener Stab (Dichte  $\varrho$ , Querschnitt  $A$ ), der auf zwei Schneiden (Abstand  $l$ ) liegt. Jede der beiden Schneiden ist dadurch mit der Kraft  $0,5 F_0$  belastet. Das Gewicht des Stabes  $F_0$  kann unter der Voraussetzung, daß die Stablänge mit dem Schneidenabstand übereinstimmt,

$$F_0 = \varrho A l g \quad (12)$$

geschrieben werden. Der Stab ist infolge der Wirkung seines Gewichtes auch ohne zusätzliche Belastung etwas gebogen. Läßt man nun in der Mitte zwischen den Auflagen senkrecht zur Stabachse eine Kraft  $F$  angreifen, wird die Durchbiegung vergrößert. Abb. 27 zeigt zwei Anordnungen zur Untersuchung der Biegung. Diese sind gleichwertig, wenn beide Stäbe aus dem gleichen Material bestehen und den gleichen, konstanten Querschnitt  $A$  haben. Den folgenden Überlegungen liegt die Anordnung b) zugrunde.

Die angreifenden Kräfte bewirken, daß die oberen Schichten des Stabes gedrückt, die unteren gedehnt werden. Im Inneren gibt es eine Schicht, deren Länge sich nicht ändert. Diese Schicht bezeichnet man als neutrale Faser. Die Gleichung der neutralen Faser  $y(x)$  kann leicht berechnet werden, wenn

1. das Hookesche Gesetz Gl. (1) gilt,
2. ein ebener Querschnitt des Stabes bei allen auftretenden Belastungen eben bleibt,
3. die Durchbiegung so klein ist, daß für alle vorkommenden Werte von  $x$  der Betrag der Ableitung  $y'(x)$  sehr klein gegen 1 ist.

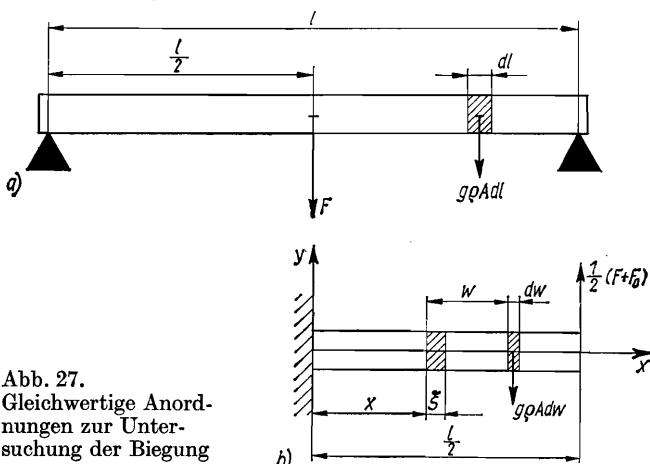


Abb. 27.  
Gleichwertige Anordnungen zur Unter-  
suchung der Biegung

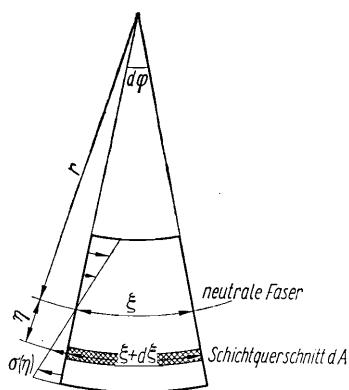


Abb. 28.  
Deformiertes Volumenelement

Auf den Stabquerschnitt an der Stelle  $x$  (vgl. Abb. 27 und Abb. 28) wirkt ein Drehmoment im Uhrzeigersinn

$$M_1 = g\rho A \int_0^{\frac{l}{2}-x} w \, dw + \int_A \eta \sigma(\eta) \, dA. \quad (13)$$

Aus Abb. 28 kann man entnehmen, daß sich das Hookesche Gesetz

$$\sigma(\eta) = E\varepsilon = E \frac{d\xi}{\xi} = E \frac{\eta}{r} \quad (14)$$

schreiben läßt. Dabei ist  $r$  der Krümmungsradius der neutralen Faser an der Stelle  $x$ . Das Integral

---


$$I_\eta = \int_A \eta^2 \, dA \quad (15)$$


---

bezeichnet man als *Flächenträgheitsmoment*. Seine Einheit ist im gesetzlichen Maßsystem  $\text{m}^4$ . Wenn man das erste Integral in Gl. (13) löst, in das zweite Integral Gl. (14) einsetzt und Gl. (15) berücksichtigt, erhält man

$$M_1 = \frac{1}{2} g\rho A \left( \frac{l}{2} - x \right)^2 + \frac{E}{r} I_\eta. \quad (16)$$

Die Kraft  $0,5(F + F_0)$  übt auf den Querschnitt an der Stelle  $x$  (vgl. Abb. 27) ein Drehmoment im mathematisch positiven Sinne

$$M_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right) (F + F_0) \quad (17)$$

aus. Im Gleichgewichtsfalle gilt

$$M_1 = M_2.$$

Aus den Gln. (16) und (17) folgt bei Verwendung von Gl. (12)

$$\frac{1}{r} EI_\eta = \frac{1}{4} F(l - 2x) + \frac{1}{2} g\rho A \left\{ \left( \frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right\}. \quad (18a)$$

Die Größe  $1/r$  ist die Krümmung der neutralen Faser an der Stelle  $x$ . Aus der Theorie der Berührungen höherer Ordnung folgt für die Krümmung einer Kurve  $y(x)$

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Nach Voraussetzung 3 soll  $(y')^2$  vernachlässigbar klein gegen 1 sein. In dieser Näherung gilt

$$\frac{1}{r} = \pm y''.$$

Die Integration der Gleichung

$$\pm EI_\eta y'' = \frac{1}{4} F(l - 2x) + \frac{1}{2} g\varrho A \left\{ \left( \frac{l}{2} \right)^2 - x^2 \right\} \quad (18)$$

liefert bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$y'(0) = y(0) = 0$$

$$\pm EI_\eta y' = \frac{1}{4} F(lx - x^2) + \frac{1}{2} g\varrho A \left\{ \left( \frac{l}{2} \right)^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right\}, \quad (19)$$

$$\pm EI_\eta y = \frac{1}{4} F \left( \frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + \frac{1}{4} g\varrho A \left\{ \left( \frac{l}{2} \right)^2 x^2 - \frac{1}{6} x^4 \right\}. \quad (20)$$

Da im vorliegenden Falle  $y(x)$  im Intervall  $0 < x < l/2$  positiv ist, muß in den Gln. (18) bis (20) das positive Vorzeichen verwendet werden. Die Funktion der neutralen Faser hat an der Stelle  $x = l/2$  sowohl die größte Steigung als auch den größten Funktionswert. Mit den Bezeichnungen

$$\varphi \approx \tan \varphi = y'(l/2) \quad \text{und} \quad s = y(l/2)$$

kann man die Gln. (19) und (20)

$$EI_\eta \varphi = \frac{1}{16} \left( Fl^2 + \frac{2}{3} g\varrho A l^3 \right),$$

$$EI_\eta s = \frac{1}{48} \left( Fl^3 + \frac{5}{8} g\varrho A l^4 \right)$$

oder

$$\varphi = \frac{l^2 \left( F + \frac{2}{3} F_0 \right)}{16 EI_\eta}, \quad (21)$$

$$s = \frac{l^3 \left( F + \frac{5}{8} F_0 \right)}{48 EI_\eta} \quad (22)$$

schreiben. Die Länge  $s$  nennt man Biegepfeil.

Im Experiment ist der Stab zunächst mit einer Schale (Masse  $m_s$ ) belastet, die zur Aufnahme von Wägestücken dient. Man erhält den Winkel  $\varphi_0$  bzw.

den Biegepfeil  $s_0$ , indem man in den Gln. (21) und (22)

$$F = m_{sg}$$

setzt. Anschließend wird auf die Schale ein Wägestück der Masse  $m$  gelegt. Der Winkel  $\varphi$  ergibt sich aus Gl. (21), der Biegepfeil  $s$  aus Gl. (22) mit

$$F = (m_s + m)g.$$

Gemessen werden die Differenzen  $\varphi - \varphi_0$  oder  $s - s_0$ . Dafür können die Gln. (21) und (22)

$$E = \frac{l^2 mg}{16 I_\eta (\varphi - \varphi_0)}, \quad (23)$$

$$E = \frac{l^3 mg}{48 I_\eta (s - s_0)} \quad (24)$$

geschrieben werden. Das Gewicht des Stabes und das der Schale brauchen daher nicht bekannt zu sein.

Um den Elastizitätsmodul  $E$  angeben zu können, muß man das Flächenträgheitsmoment  $I_\eta$  für den Querschnitt des zu untersuchenden Stabes berechnen. Voraussetzung für diese Berechnung ist, daß man die Lage der neutralen Faser kennt. Da sich der Stab bei der Biegung insgesamt weder verlängert noch verkürzt, ist

$$\int_A \sigma(\eta) dA = 0$$

oder mit Gl. (14)

$$\int_A \eta dA = 0. \quad (25)$$

Aus Gl. (25) folgt, daß der Massenmittelpunkt des Stabes in der neutralen Faser liegen muß. Hat der unbelastete Stab senkrecht zur Biegekraft eine Symmetrieebene, dann stellt die Symmetrieebene die neutrale Faser dar. Beispiele für diesen Fall sind Stäbe mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt, Rohre und  $\text{I}$ -Träger. Für U- oder T-Träger (Biegekraft nach oben oder nach unten) muß die Lage der neutralen Faser nach Gl. (25) berechnet werden.

### *Versuchsausführung*

Wir legen den zu untersuchenden Stab so auf die Schneiden, daß die Stabenden nur sehr wenig überstehen (vgl. Abb. 27), und messen den Abstand  $l$ . Dann wird die Schale zur Aufnahme der Wägestücke in der Mitte zwischen den Schneiden an den Stab gehängt.

Wir messen den Biegepfeil  $s_0$  mit einer Meßuhr oder einer Meßschraube. In gleicher Weise sind die Biegepfeile  $s_i$  nach Belastung der Schale mit Wägestücken der Masse  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) zu bestimmen. Die Gerade  $F_i = m_i g$  über  $S_i = s_i - s_0$ , deren Steigung  $\Delta F/\Delta S$  ist, wird graphisch dargestellt. Der gesuchte Elastizitätsmodul  $E$  ergibt sich nach Gl. (24) aus

$$E = \frac{l^3 \Delta F/\Delta s}{48I_\eta}.$$

Wenn statt des Biegepfeiles  $s$  der Winkel  $\varphi$  gemessen werden soll, befestigen wir an einem Stabende einen kleinen Spiegel. Eine senkrecht stehende Skale wird über den Spiegel durch ein Fernrohr mit Visierlinie beobachtet. Wir messen den Abstand  $L$  zwischen Spiegel und Skale. Ist der Stab nur mit der Schale belastet, wird am Maßstab der Skale der Wert  $z_0$  abgelesen, bei zusätzlicher Belastung mit einem Wägestück der Masse  $m_i$  der Wert  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Dann gilt

$$2(\varphi_i - \varphi_0) \approx \tan 2\varphi_i - \tan 2\varphi_0 = \frac{(z_i - z_0)}{L}.$$

Wir stellen die Gerade  $F_i = m_i g$  über  $\Phi_i = \varphi_i - \varphi_0$ , deren Steigung  $\Delta F/\Delta \Phi$  ist, graphisch dar und berechnen den gesuchten Elastizitätsmodul  $E$  nach Gl. (23) aus

$$E = \frac{l^2 \Delta F/\Delta \Phi}{16I_\eta}.$$

Das Flächenträgheitsmoment  $I_\eta$  für den Stabquerschnitt ist der Tab. 7 zu entnehmen. Die zur Berechnung von  $I_\eta$  benötigten Längen sind mit mechanischen Meßwerkzeugen an verschiedenen Stellen des Stabes zu bestimmen. Der Versuch soll mit mindestens einem Stab aus anderem Material wiederholt werden.

## M. 5.2. Torsionsmodul

Der Torsionsmodul  $G$  lässt sich leicht aus Untersuchungen an verdrillten Stäben mit kreisförmigem Querschnitt bestimmen. Gegeben sei ein einseitig eingespannter Stab, dessen Länge  $l$  groß gegen den Radius  $r$  sein soll. Betrachtet man im Stabinneren einen koaxialen Hohlzylinder mit dem Radius  $r'$  und der Dicke  $dr'$  (vgl. Abb. 29) und lässt am freien Ende peripher eine Schubkraft  $dF_s$  angreifen, so wird eine ursprünglich senkrechte Faser des Zylindermantels um den Scherwinkel  $\alpha$  gedreht. Für den Bogen

$$s = r'\varphi$$

gilt unter der Voraussetzung  $|\alpha| \ll 1$  in guter Näherung

$$s = l\alpha.$$

Damit kann man Gl. (5)

$$\tau = G\alpha = G \frac{r'}{l} \varphi$$

schreiben. Das Produkt aus der Schubspannung  $\tau$  und dem Querschnitt des Hohlzylinders ist die Schubkraft

$$dF_s = 2\pi r' dr' G \frac{r'}{l} \varphi.$$

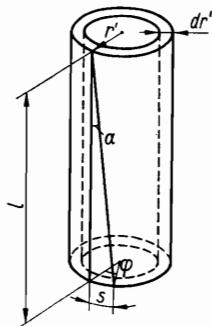


Abb. 29.  
Zur Torsion eines Zylinders

Durch Multiplikation mit dem Hebelarm  $r'$  geht die Schubkraft in das Drehmoment

$$dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi r'^3 dr'$$

über. Das resultierende Drehmoment erhält man durch Integration über alle Hohlzylinder:

$$M = \int dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^r r'^3 dr',$$

---


$$M = \frac{\pi Gr^4}{2l} \varphi. \quad (26)$$

Wenn zur Verdrillung des Stabes ein großes Drehmoment erforderlich ist, empfiehlt sich eine statische Bestimmung des Torsionsmoduls. Liegt dagegen das zu untersuchende Material als Draht vor, wird der Torsionsmodul zweckmäßigweise mit einer dynamischen Meßmethode ermittelt.

### M. 5.2.1. Statische Meßmethode

**Aufgabe:** Der Torsionsmodul von Stäben aus verschiedenem Material soll statisch bestimmt werden.

Das nicht eingespannte Ende eines Stabes wird starr mit einer zylindrischen Scheibe (Radius  $R$ ) verbunden. Dabei sollen Stabachse und Scheibenachse übereinstimmen. Wenn man nun die Schubkraft  $F_s$  in der in Abb. 30 dargestellten Weise an der Scheibe angreifen lässt, ist das auf den Stab übertragene Drehmoment

$$M = RF_s. \quad (27)$$

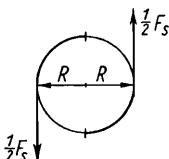


Abb. 30. Torsionsvorrichtung

Aus den Gln. (26) und (27) erhält man für den Torsionsmodul

---


$$G = \frac{2lRF_s}{\pi r^4 \varphi}. \quad (28)$$


---

An das freie Ende des Stabes ist ein kleiner Spiegel gekittet. Ein auf den Spiegel fallender Lichtstrahl soll nach der Reflexion auf eine Skale treffen, die den senkrechten Abstand  $L$  vom Spiegel hat. Dreht man die mit dem Stab verbundene Scheibe um den Winkel  $\varphi$ , wird die Lichtmarke auf der Skale um die Strecke  $x$  verschoben. Dann gilt

$$\tan 2\varphi = x/L \quad (29)$$

oder für  $|\varphi| \ll 1$

$$\varphi = \frac{x}{2L}. \quad (29a)$$

#### Versuchsausführung

Wir messen die Stablänge  $l$ , die Durchmesser  $2r$  bzw.  $2R$  des Stabes bzw. der Scheibe und den Abstand  $L$  zwischen Spiegel und Skale. Anschließend sind die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  für  $n$  verschiedene große Schubkräfte zu ermitteln. Die zugehörigen Winkel  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  ergeben sich aus Gl. (29) bzw. (29a). Wir bestimmen den arithmetischen Mittelwert aller Quotienten  $F_{st}/\varphi_i$  und berechnen den Torsionsmodul aus Gl. (28). Der Versuch ist mindestens mit einem Stab aus anderem Material zu wiederholen.

### M. 5.2.2. Dynamische Meßmethode

*Aufgabe:* Der Torsionsmodul eines Drahtes soll dynamisch bestimmt werden.

Ein Draht habe die Länge  $l$  und den Radius  $r$ . Das obere Ende sei eingespannt, das untere mit einer zylindrischen Scheibe belastet. Dreht man die Scheibe um den Winkel  $\varphi_0$  aus ihrer Ruhelage und lässt sie zur Zeit  $t = 0$  los, so führt das System unter der Wirkung der elastischen Kräfte des verdrillten Drahtes Torsionsschwingungen aus (vgl. Abschn. M. 3.0.2.). Bei einem Auslenkwinkel  $\varphi$  ist der Betrag des rücktreibenden Drehmomentes durch Gl. (26) gegeben. Die Größe

$$D = \frac{\pi G r^4}{2l} \quad (30)$$

ist das Direktionsmoment des Torsionspendels. Bezeichnet man mit  $I$  das Trägheitsmoment des Systems, so lautet nach Abschn. M. 3.0.2. Gl. (9) die Bewegungsgleichung

$$I\ddot{\varphi} = -D\varphi,$$

und für die Schwingungsdauer gilt nach Abschn. M. 3.0.3. Gl. (14)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (31)$$

Ist das Trägheitsmoment  $I$  bekannt, kann der Torsionsmodul  $G$  aus den Gln. (30) und (31) bestimmt werden. Im allgemeinen lässt sich aber das Trägheitsmoment des Systems (Draht, Scheibe und Befestigungsvorrichtung) nicht berechnen. Aus diesem Grunde ist es notwendig,  $I$  zu eliminieren.

Man schraubt einen Zylinder (Masse  $m$ , Radius  $R$ ) so an die schon vorhandene Scheibe, daß die Achse des Zylinders mit der Drahtachse übereinstimmt. Das Trägheitsmoment des Torsionspendels vergrößert sich dadurch additiv um

$$I_1 = \frac{1}{2} mR^2,$$

und die Schwingungsdauer wird

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_1}{D}}. \quad (32)$$

Wenn man die Gln. (32) und (31) quadriert und anschließend voneinander abzieht, ergibt sich für das Direktionsmoment

$$D = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T^2} = \frac{2\pi^2 mR^2}{T_1^2 - T^2}. \quad (33)$$

Aus den Gln. (30) und (33) folgt

$$G = \frac{4\pi l m R^2}{r^4(T_1^2 - T^2)}. \quad (34)$$

### Versuchsausführung

Wir bestimmen die Masse  $m$  und den Durchmesser  $2R$  des Zylinders sowie die Länge  $l$  und den Durchmesser  $2r$  des Drahtes. Der Drahtdurchmesser ist an mindestens zehn verschiedenen Stellen zu messen. In Gl. (34) soll der arithmetische Mittelwert  $\bar{r}$  verwendet werden. Zur Bestimmung der Schwingungsdauern  $T$  und  $T_1$  stoppen wir mehrfach die Zeiten für je 50 Schwingungen. Der Torsionsmodul  $G$  ergibt sich aus Gl. (34).

Die Zeiten 50  $T$  bzw. 50  $T_1$  betragen im allgemeinen mehrere Minuten. Die Erfahrung hat gezeigt, daß sich Praktikanten wegen der unvermeidlichen Geräusche in einem Labor leicht ablenken lassen und verzählen. So wird häufig die Dauer von 49 oder 51 Schwingungen statt der von 50 gestoppt. Ein Beispiel soll zeigen, wie dieser grobe Fehler ausgeschaltet werden kann. Wir bestimmen zunächst  $3T = 22,4$  s und  $3T = 22,0$  s. Aus diesen Werten ist zu schließen

$$7,3 \text{ s} < \bar{T} < 7,5 \text{ s}.$$

Nun messen wir  $10T = 74,0$  s und  $10T = 74,4$  s, woraus

$$7,40 \text{ s} < \bar{T} < 7,44 \text{ s}$$

folgt. Die Gefahr, daß wir uns bei 3 oder 10 Schwingungen verzählt haben, ist äußerst gering.

Für 50 Schwingungen soll sich  $50T = 363,2$  s ergeben. Rechnen wir mit einem Stoppfehler von  $\pm 0,4$  s, so erhalten wir

$$T = 7,264 \text{ s}, \quad \Delta T = \pm 0,008 \text{ s}.$$

Dieser Wert  $T$  liegt erheblich unterhalb der Grenzen aus der Bestimmung der Dauer von 10 Schwingungen und ist mit Sicherheit falsch. In Wirklichkeit gilt  $49T = 363,2$  s,

$$T = 7,412 \text{ s}, \quad \Delta T = \pm 0,008 \text{ s}.$$

Wir wiederholen die Messung von  $50T$  mehrmals mit großer Sorgfalt, um die angestellte Überlegung zu bestätigen. Zur Bildung des Mittelwertes  $\bar{T}$  darf auf keinen Fall der falsche Wert  $T = 7,264$  s – wohl aber  $T = 7,412$  s – einbezogen werden.

### M. 5.3. Schraubenfeder

- Aufgaben:*
1. Ein berührungsloser (induktiver) Wegaufnehmer ist einzumesen.
  2. Die Federkonstante einer Schraubenfeder soll mit einem Wegaufnehmer statisch bestimmt werden.
  3. Die Federkonstante soll dynamisch, d. h. aus der Periodendauer einer schwingenden Schraubenfeder, ermittelt werden.
  4. Der Torsionsmodul des Federmaterials ist zu berechnen.

Eine Schraubenfeder (Drahtradius  $r$ , Windungsradius  $R$ ) habe  $n$  Windungen und sei am oberen Ende eingespannt. Hängt man nun an das untere Ende einen Körper der Masse  $m$ , so wird die Feder um das Stück  $x$  gedehnt (vgl. Abb. 31). Im Gleichgewichtsfall ist die Summe der Kräfte gleich Null, d. h.

$$mg - cx = 0.$$

Darin sind  $g$  die Schwerebeschleunigung und  $c$  die Federkonstante. Es gilt also

---


$$c = \frac{m}{x} g. \quad (35)$$


---

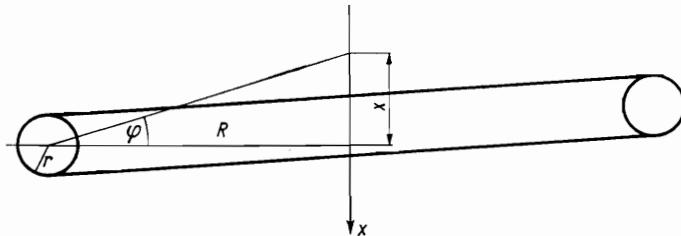


Abb. 31. Schnitt durch die unterste Windung einer um das Stück  $x$  gedehnten Schraubenfeder

Wenn man die belastete Feder, z. B. mit der Hand, aus ihrer Ruhelage zieht und plötzlich loslässt, beginnt die Feder zu schwingen. Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = g - \frac{c}{m} x = - \frac{c}{m} \left( x - \frac{mg}{c} \right) \quad (36)$$

hat eine partikuläre Lösung

$$x = A \sin \omega t + \frac{mg}{c}, \quad (37)$$

worin  $A$  eine Konstante und  $\omega$  die Kreisfrequenz sind.

Aus Gl. (37) folgt

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 \left( x - \frac{mg}{c} \right). \quad (38)$$

Der Vergleich der Gln. (36) und (38) liefert

$$\omega^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{c}{m}. \quad (39)$$

Während der Schwingungen wandeln sich kinetische und potentielle Energie ständig ineinander um. Bei diesem Prozeß müssen auch die Energieanteile der schwingenden Feder (Masse  $m_F$ ) berücksichtigt werden. In Gl. (39) ist aus diesem Grunde – wie hier aber nicht bewiesen werden soll –  $m$  durch  $m + \frac{1}{3} m_F$  zu ersetzen. Für die Federkonstante ergibt sich

$$c = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \left( m + \frac{1}{3} m_F \right). \quad (40)$$

Die Feder speichert bei einer Auslenkung  $x$  aus der Ruhelage eine potentielle Energie

$$E_p = \frac{c}{2} x^2. \quad (41)$$

Bei dieser Dehnung wird der Draht um den kleinen Winkel  $\varphi = x/R$  gedrillt (vgl. Abb. 31). Die potentielle Energie, die der Draht bei der Drillung aufnimmt, beträgt unter Berücksichtigung von Gl. (26)

$$E_p = \int_0^\varphi M d\varphi = \frac{\pi G r^4}{2l} \int_0^\varphi \varphi d\varphi = \frac{\pi G r^4}{4l} \varphi^2. \quad (42a)$$

Für die Länge des Drahtes kann man im allgemeinen in guter Näherung

$$l = 2\pi R n \quad (43)$$

schreiben. Damit wird Gl. (42a)

$$E_p = \frac{Gr^4}{8nR} \varphi^2 = \frac{Gr^4}{8nR^3} x^2. \quad (42)$$

Aus dem Vergleich der Gln. (41) und (42) erhält man für den Torsionsmodul

$$G = \frac{4nR^3c}{r^4}. \quad (44)$$

### Versuchsausführung

Die Bestimmung der Federkonstanten soll mit einem induktiven Wegaufnehmer  $W$  vorgenommen werden (vgl. die Abb. 32 und 33). Dieser besteht aus zwei hintereinandergeschalteten Spulen  $L_1$  und  $L_2$ , die auf einen durchbohrten Kern aus magnetischem Material gewickelt sind. Die Induktivitäten und damit die Wechselstromwiderstände der beiden Spulen hängen davon ab, wie weit der Taststift  $T$  in die Bohrung des Kernes ein-

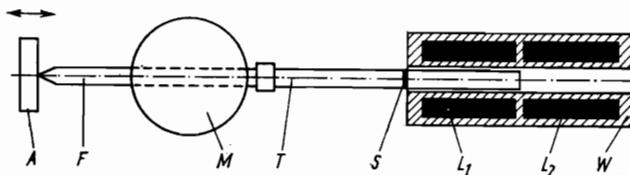


Abb. 32. Zur Einmessung eines induktiven Wegaufnehmers

geführt wird. Für die Messungen soll eine Universalmeßeinrichtung zur Verfügung stehen, deren Prinzipschaltbild in Abb. 33 dargestellt ist. Der Wegaufnehmer wird mit einem Kabel  $K$  an das Gerät angeschlossen und bildet mit den Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  eine Wechselstrombrücke in Wheatstoneschaltung. Ein Niederfrequenzgenerator  $G$  speist die Brücke. Die

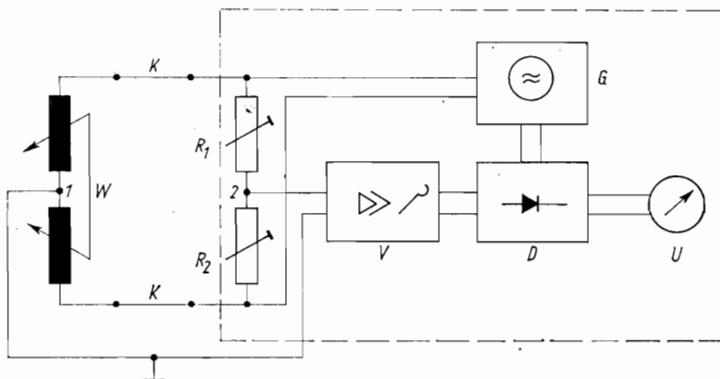


Abb. 33. Prinzipschaltbild einer Universalmeßeinrichtung mit angeschlossenem induktivem Wegaufnehmer

zwischen den Punkten 1 und 2 auftretende Spannung wird über einen Verstärker  $V$  einem phasenempfindlichen Demodulator  $D$  zugeführt, an den ein Anzeigegerät  $U$  angeschlossen ist. Es ist auch möglich, die demodulierte Spannung einem Zählfrequenzmesser oder einem Motorkompensator zuzuleiten.

Zunächst muß der Wegaufnehmer eingemessen werden. Dazu befestigen wir den Taststift am Fühler  $F$  einer mechanischen Meßuhr  $M$  und stecken ihn bis zur Strichmarke  $S$  in den Wegaufnehmer (vgl. Abb. 32). Der Fühler drückt gegen einen verstellbaren Anschlag  $A$ , der so eingestellt wird, daß der Zeiger der Meßuhr auf Teilstrich  $\theta$  steht. Nun gleichen wir die Wechselstrombrücke ab. Dann wird der Anschlag ein kleines Stück – z. B. 2 mm – in Richtung auf die Meßuhr verschoben. Dadurch gelangt der Taststift um das gleiche Stück weiter in den Wegaufnehmer hinein, und die Wechselstrombrücke wird verstimmt. Wir wählen die Verstärkung so, daß der Zeiger des Instrumentes  $U$  auf Vollausschlag steht. Von jetzt ab darf an der Universalmeßeinrichtung nichts mehr verstellt werden.

Wir ziehen den Taststift schrittweise – z. B. um je 0,2 mm – durch Verschieben des Anschlages aus dem Wegaufnehmer heraus, bis der Zeiger des Instrumentes  $U$  die gesamte Skale überstrichen hat. Die Lage des Taststiftes als Funktion des Zeigerausschlages wird graphisch dargestellt.

Um Aufgabe 2 auszuführen, hängen wir den Taststift an die unbelastete Feder und lassen ihn so weit in den Wegaufnehmer hineinreichen, daß das Anzeigegerät der Meßeinrichtung negativen Vollausschlag zeigt. Die Feder wird mit verschiedenen Körpern bekannter Masse  $m_i$  belastet. Die Verschiebungen  $x_i$ , die den sich einstellenden Zeigerausschlägen entsprechen, entnehmen wir dem angefertigten Diagramm und stellen  $m_i$  über  $x_i$  graphisch dar. Aus der Steigung der Geraden erhalten wir die Federkonstante.

Wir schließen statt des Anzeigegeräts einen elektronischen Zählfrequenzmesser an die Meßeinrichtung an, beladen die Feder mit Körpern bekannter Masse  $m_i$ , bestimmen hinreichend oft die Periodendauern  $T_i$  der schwingenden Feder und berechnen  $c$  nach Gl. (40) sowie  $G$  nach Gl. (44).

Dieser Versuch ist ein typisches Beispiel für die Bestimmung mechanischer Größen mit elektrischen Methoden. Der Student sollte sich überlegen, wie die Federkonstante mit rein mechanischen Mitteln gemessen werden kann.

#### M. 5.4. Poissonsche Zahl

*Aufgabe:* Die Poissonsche Zahl ist sowohl aus den beiden Hauptkrümmungsradien einer gebogenen Platte als auch dem Winkel  $2\alpha$  zu bestimmen, den die Hyperbelasymptoten einschließen.

Gegeben sei eine Platte (Länge  $l$ , Breite  $b$  und Höhe  $h$ ), die auf den zwei Schneiden  $S, S'$  aufliegt. Wird über die Schneiden  $S_1, S'_1$  (vgl. Abb. 34) mit Hilfe einer geeigneten Spannvorrichtung auf die Platte ein Druck ausgeübt,

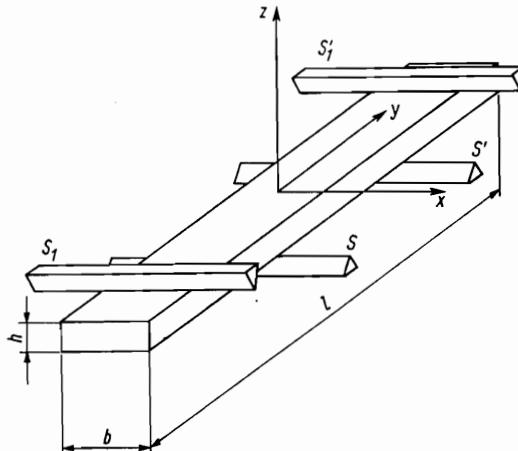


Abb. 34. Anordnung der Schneiden

so biegt sie sich in der  $yz$ -Ebene (Primärbiegung). Dabei werden die oberen Schichten der Platte gedehnt und erleiden eine Querkontraktion, während die unteren Schichten zusammengedrückt und somit in der Querrichtung gedehnt werden. Es tritt also auch in der  $xz$ -Ebene eine Biegung auf (Sekundärbiegung). Die Oberfläche der gebogenen Platte unter den Schneiden  $S_1, S'_1$  ist in Abb. 35 dargestellt. Die Kurven der Oberflächen der Platte in der  $yz$ -Ebene und in der  $xz$ -Ebene lassen sich in sehr guter Näherung durch ihre Krümmungskreise beschreiben. Alle Krümmungen in den Abb. 35, 36a,

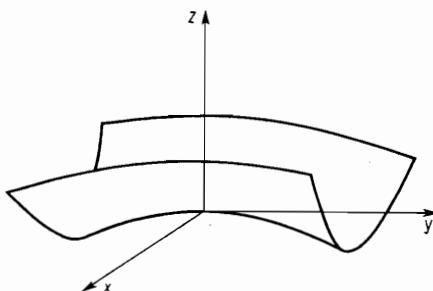


Abb. 35. Sattelförmige Oberfläche

36b sind stark übertrieben. Aus Abb. 36a folgt für die relative Verlängerung

$$\frac{l_1 - l}{l} = \frac{\beta_b h}{2l} = \frac{h}{2R_l - h},$$

während man für die relative Verkürzung aus Abb. 36b

$$\frac{b - b_1}{b} = \frac{\beta_b h}{2b} = \frac{h}{2R_b + h}$$

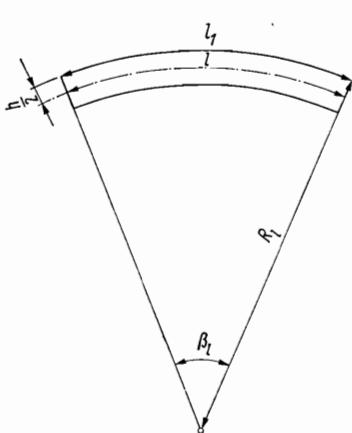


Abb. 36a.  
Schnitt durch die gebogene Platte  
in der  $yz$ -Ebene

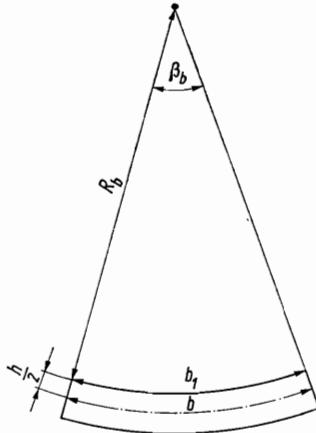


Abb. 36b.  
Schnitt durch die gebogene Platte  
in der  $xx$ -Ebene

erhält. Im Experiment ist  $h \ll R_l$  und  $h \ll R_b$ , so daß man  $h$  sowohl gegen  $2R_l$  als auch gegen  $2R_b$  vernachlässigen kann. Für die Poissonsche Zahl ergibt sich deshalb in guter Näherung

$$\mu = \frac{R_l}{R_b}. \quad (45)$$

Die Gleichung der in Abb. 35 dargestellten Sattelfläche ist

$$z = R_b \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{x}{R_b} \right)^2} \right) + R_l \left( \sqrt{1 - \left( \frac{y}{R_l} \right)^2} - 1 \right).$$

Da im Experiment  $x \ll R_b$  und  $y \ll R_l$  ist, kann man die Reihenentwicklung der Wurzeln nach den Gliedern mit  $(x/R_b)^2$  bzw.  $(y/R_l)^2$  abbrechen und

erhält

$$z = \frac{x^2}{2R_b} - \frac{y^2}{2R_l}. \quad (46)$$

Schnitte durch die Sattelfläche parallel zur  $xy$ -Ebene ( $z = \text{konstant}$ ) ergeben Hyperbeln. Für  $z = 0$  erhält man ein sich schneidendes Geradenpaar

$$y = +\sqrt{\frac{R_l}{R_b}}x \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{\frac{R_l}{R_b}}x.$$

Der kleinere Winkel zwischen den Geraden sei  $2\alpha$  (vgl. Abb. 37). Dann gilt

$$\mu = \frac{R_l}{R_b} = \tan^2 \alpha. \quad (47)$$

### Versuchsausführung

Die Spannvorrichtung wird auf den Tisch eines Mikroskops gestellt, der sich sowohl in einer Längsrichtung bewegen als auch um seine Achse drehen lässt. Legen wir auf die gebogene Platte eine planparallele Glasplatte und bestrahlen die Anordnung mit monochromatischem Licht, so lassen sich die in

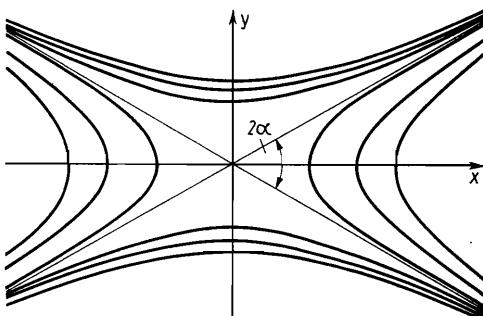


Abb. 37.  
Interferenzlinien

Abb. 37 angegebenen Hyperbelscharen – von denen nur je 3 dargestellt sind – als Interferenzlinien sichtbar machen. Für die Abstände der Hyperbelscheitelpunkte vom Nullpunkt  $r_{lk}$  und  $r_{bk}$  gilt Gl.(O. 2.-20a). Die Längen  $2r_{lk}$  und  $2r_{bk}$  sind für  $k = 1, \dots, 15$  auszumessen. Anschließend sollen

$$r_{lk}^2 = f_1(k) \quad \text{und} \quad r_{bk}^2 = f_2(k)$$

graphisch dargestellt werden. Bezeichnen wir die Steigungen der beiden Geraden mit  $S_l$  und  $S_b$ , so gilt

$$\mu = \frac{S_l}{S_b} = \frac{R_l}{R_b}.$$

Den Winkel  $2\alpha$  messen wir durch Drehung des Mikroskopisches direkt. Ist der Elastizitätsmodul des zu untersuchenden Materials bekannt, so können wir nach Gl. (9) den Torsionsmodul  $G$  berechnen.

Der Versuch ist nur mit Platten aus solchem Material durchführbar, deren Oberfläche völlig plan und gut reflektierend ist.

## M. 6. OBERFLÄCHENSPANNUNG

### M. 6.0. Allgemeine Grundlagen

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirken sowohl anziehende als auch abstoßende Kräfte geringer Reichweite. Der Abstand  $r_1$  zweier nächster Nachbarn stellt sich so ein, daß die Summe der abstoßenden und der anziehenden Kräfte gerade verschwindet. Wenn der Abstand zwischen zwei Molekülen etwas größer als dieser Normalabstand ist, so überwiegt die Anziehungskraft, ist er dagegen etwas kleiner, dann stoßen sich die Moleküle gegenseitig ab. Ein beliebiges Molekül der Flüssigkeit (Zentralmolekül) wird daher von allen Nachbarmolekülen angezogen, deren Abstand vom Zentralmolekül größer als  $r_1$ , aber kleiner als der Radius  $r_2$  der Wirkungssphäre der Molekularkräfte ist.

Die Anziehungskräfte zwischen den Bausteinen (Molekülen, Atomen, Ionen) eines Stoffes nennt man allgemein *Kohäsionskräfte*, da sie für den Zusammenhalt des Stoffes sorgen. Es existieren aber auch anziehende Kräfte zwischen benachbarten Bausteinen verschiedener Stoffe, die als *Adhäsionskräfte* bezeichnet werden.

Betrachtet man ein Molekül im Inneren einer Flüssigkeit, so ist die Resultierende der Anziehungskräfte Null, da die Nachbarmoleküle über alle Richtungen gleichmäßig verteilt sind. Für ein Flüssigkeitsmolekül in einer Grenzschicht (Oberfläche), deren Dicke dem Radius der Wirkungssphäre der Molekularkräfte entspricht, verschwindet dagegen die resultierende Kraft im allgemeinen nicht. Es sind zwei Möglichkeiten zu diskutieren:

1. Die Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen der Flüssigkeit sind größer als die Adhäsionskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen und den Bausteinen des angrenzenden Stoffes (vgl. Abb. 38a und b). In diesem

Falle wirkt auf ein Flüssigkeitsmolekül eine resultierende Kraft  $F$  senkrecht zur Oberfläche in das Innere der Flüssigkeit hinein. Die Flüssigkeit ist daher bestrebt, eine möglichst kleine Grenzfläche mit dem anderen Stoff zu bilden. Zur Vergrößerung dieser Fläche um  $\Delta A$  muß der Flüssigkeit eine Arbeit

$$\Delta W = \sigma \Delta A \quad (1)$$

zugeführt werden. Bei einer Verkleinerung der Grenzfläche um  $\Delta A$  wird eine Arbeit gemäß Gl. (1) frei. Den Proportionalitätsfaktor  $\sigma$  nennt man *Oberflächenspannung*. Ihre Einheit ist im gesetzlichen Maßsystem

$$\text{Jm}^{-2} = \text{Nm}^{-1}.$$

Man muß sich darüber im klaren sein, daß die Oberflächenspannung sowohl von der Natur der Flüssigkeit als auch von der Natur des angrenzenden Stoffes abhängig ist. Bei Angabe eines Wertes für  $\sigma$  ist daher stets der angrenzende Stoff zu nennen. Die Oberflächenspannung kann nur

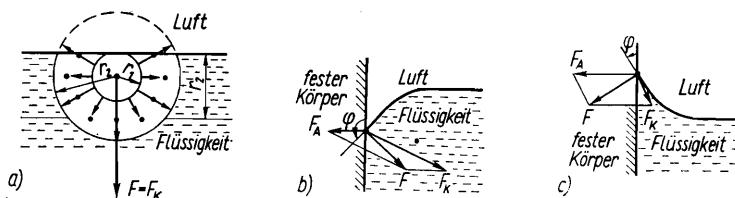


Abb. 38. Kräfte, die auf ein Grenzschichtmolekül wirken (schematisch)

dann als reine Materialeigenschaft der Flüssigkeit angesehen werden, wenn die Resultierende der Adhäsionskräfte  $F_A$  vernachlässigbar klein gegen die Resultierende der Kohäsionskräfte  $F_K$  ist (Beispiel: Flüssigkeit – Luft).

Im Falle der Abb. 38 b bezeichnet man die Flüssigkeit als nicht benetzend für den angrenzenden festen Körper. Wird der Randwinkel  $\varphi$  gleich  $\pi$ , d. h., ist  $F_A \ll F_K$ , ist die Nichtbenetzung vollständig.

2. Die Kohäsionskräfte sind kleiner als die Adhäsionskräfte (vgl. Abb. 38 c). Dann wirkt auf ein Flüssigkeitsmolekül der Grenzschicht eine resultierende Kraft  $F$  senkrecht zur Oberfläche aus der Flüssigkeit heraus. Die beiden Stoffe bilden daher eine möglichst große Grenzfläche. In diesem Falle bezeichnet man die Flüssigkeit als benetzend für den angrenzenden Stoff. Verschwindet der Randwinkel  $\varphi$ , d. h., ist  $F_K \ll F_A$  spricht man von vollständiger Benetzung.

Taucht man einen festen Körper in eine vollständig benetzende Flüssigkeit (etwa Glas in Wasser), so bleibt nach dem Herausziehen ein dünner Flüssigkeitsfilm an ihm haften. Die gründliche Entfernung solcher Flüssigkeitsschichten auf Festkörpern kann unter Umständen recht mühsam sein.

### M. 6.1. Abreißmethode

*Aufgabe:* Die Oberflächenspannung  $\sigma$  verschiedener Flüssigkeiten soll nach der Abreißmethode bestimmt werden.

Ein Platindraht der Länge  $l$  ist in einem Bügel eingelötet, der an einer Waage hängt. Der Bügel soll so weit in die zu untersuchende Flüssigkeit eintauchen, daß sich der Platindraht unmittelbar unter der Oberfläche be-

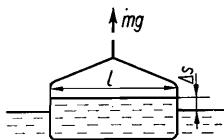


Abb. 39. Zur Abreißmethode

findet. Es wird vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit den Draht vollständig benetzt. Belastet man nun die Waage, so zieht der Draht eine Lamelle aus der Flüssigkeit heraus (vgl. Abb. 39). Diese Lamelle soll bei der Belastung  $F = mg$  gerade noch nicht abreißen. Da sich die Flüssigkeitsoberfläche um  $2l \Delta s$  vergrößert, lautet Gl. (1)

$$\Delta W = \sigma 2l \Delta s.$$

Andererseits ist

$$\Delta W = F \Delta s.$$

Daraus folgt

$$\sigma = \frac{F}{2l}. \quad (2)$$

In der Betrachtung, die zu Gl. (2) führt, sind alle Randeffekte des Bügels und der Einfluß des Gewichtes der herausgezogenen Lamelle unberücksichtigt geblieben. Wenn der Platindraht einen Durchmesser von 0,3 mm hat, ergeben sich für  $\sigma$  nach Gl. (2) Werte, die um etwa 10% zu groß sind. Die Abweichungen werden um so kleiner, je dünner der Platindraht ist.

*Lenard* hat eine genauere Beziehung zur Bestimmung der Oberflächenspannung nach der Abreißmethode abgeleitet. Diese lautet bei Vernachlässigung von Gliedern in  $r^2$

$$\sigma = \frac{F}{2l} - r \left\{ \sqrt{\frac{F\gamma}{l}} - \frac{F}{l^2} \right\}. \quad (2a)$$

In Gl. (2a) bedeuten  $r$  den Radius des Platindrahtes und  $\gamma$  die Wichte der Flüssigkeit.

### Versuchsausführung

Die Drahtbügel sind mit größter Vorsicht zu behandeln. Vor allen Dingen darf der Platindraht nicht berührt oder der Bügel verbogen werden. Die Bügel sind vor jeder Messung zur Reinigung mit Chromschwefelsäure, destilliertem Wasser, Spiritus, Äther und der zu untersuchenden Flüssigkeit abzuspülen.

Wir messen die Drahlänge  $l$  (z. B. mit einem Abbe-Komparator) und hängen den Bügel an die Waage, die so abgeglichen wird, daß der Platindraht in der Ebene der Flüssigkeitsoberfläche liegt. Zur Bestimmung der Kraft  $F = mg$  eignen sich besonders gut Spiralfederwaagen, mit denen man die Zugkraft kontinuierlich einstellen kann. Der Versuch läßt sich auch mit einer empfindlichen Balkenwaage durchführen, deren Belastung in möglichst kleinen Schritten erhöht wird, bis die Flüssigkeitsslamelle abreißt. Für  $F$  ist diejenige Belastung einzusetzen, der die Lamelle gerade noch das Gleichgewicht hält. Die Oberflächenspannung soll nach Gl. (2a) berechnet werden. Der Drahtradius  $r$  sei gegeben, die Wichte der Flüssigkeit wird einer Tabelle entnommen.

Der Versuch ist mit Bügeln anderer Abmessungen und mit anderen Flüssigkeiten zu wiederholen. Jede Messung soll mehrfach ausgeführt werden.

## M. 6.2. Steighöhenmethode

*Aufgabe:* Die Oberflächenspannung  $\sigma$  verschiedener Flüssigkeiten ist aus der Steighöhe in einem Kapillarrohr aus Glas zu bestimmen.

Eine Glaskapillare (Innenradius  $r$ , Außenradius  $r_1$ ) sei vollständig von der zu untersuchenden Flüssigkeit benetzt. Wenn man die Kapillare senkrecht in eine mit Flüssigkeit gefüllte Schale eintaucht, steigt die Flüssigkeit in dem Kapillarrohr bis zu einer Höhe  $h$  über den äußeren Spiegel an. Der innere, horizontale Querschnitt der Schale soll mit  $A$ , der Umfang dieses Querschnittes mit  $U$  bezeichnet werden.

Die Steighöhe  $h$  berechnet man zweckmäßigerweise nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Eine unendlich langsam verlaufende Vergrößerung der Steighöhe von  $h$  auf  $h + \Delta h$ , bei der der Flüssigkeitsspiegel in der Schale um  $\delta h$  sinkt (vgl. Abb. 40), erfordert die Arbeit

$$\Delta W_1 = \varrho \pi r^2 h g (\Delta h - \delta h); \quad (3)$$

dabei ist  $\varrho$  die Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit. Da das Volumen der Flüssigkeit konstant ist, gilt

$$\pi r^2 (\Delta h - \delta h) = (A - \pi r_1^2) \delta h.$$

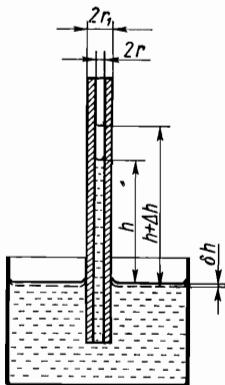


Abb. 40. Zur Steighöhenmethode

Durch das Anheben der Flüssigkeitssäule verkleinert sich die Grenzfläche zwischen der Luft und dem an der Innenwand der Kapillare haftenden Flüssigkeitsfilm um

$$2\pi r (\Delta h - \delta h).$$

Gleichzeitig nimmt die Grenzfläche zwischen der Luft und dem an der Innenwand der Schale sowie dem Außenmantel der Kapillare haftenden Flüssigkeitsfilm um

$$(U + 2\pi r_1) \delta h = \frac{\pi r^2 (U + 2\pi r_1)}{A - \pi r_1^2} (\Delta h - \delta h)$$

zu. Die gesamte Verkleinerung der Grenzfläche zwischen Luft und Flüssigkeit ist daher

$$\Delta A = 2\pi r \left\{ 1 - \frac{r \left( \frac{1}{2} U + \pi r_1 \right)}{A - \pi r_1^2} \right\} (\Delta h - \delta h),$$

und gemäß Gl. (1) wird die Energie

$$\Delta W_2 = \sigma 2\pi r \left\{ 1 - \frac{r \left( \frac{1}{2} U + \pi r_1 \right)}{A - \pi r_1^2} \right\} (\Delta h - \delta h) \quad (4)$$

frei. Diese Energie dient zum Anheben der Flüssigkeitssäule. Aus

$$\Delta W_1 = \Delta W_2$$

folgt mit den Gln. (3) und (4)

$$\sigma = \frac{\varrho g r h}{2 \left\{ 1 - \frac{r \left( \frac{1}{2} U + \pi r_1 \right)}{A - \pi r_1^2} \right\}} \quad (5)$$

Hat die Schale einen kreisförmigen Querschnitt (Innenradius  $R$ ), lautet Gl. (5)

$$\sigma = \frac{\varrho g r h}{2 \left\{ 1 - \frac{r}{R - r_1} \right\}}. \quad (5a)$$

Die genaue Bestimmung der Steighöhe  $h$  bereitet insofern Schwierigkeiten, als man die Höhe des Flüssigkeitsspiegels in der Schale im allgemeinen nicht sehr genau messen kann. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, als Vorratsgefäß eine Küvette zu verwenden. Eine Küvette ist ein Glasgefäß mit rechteckigem Querschnitt (Kantenlängen  $a$  und  $b$ ). Zwei gegenüberliegende, senkrechte Deckflächen bestehen aus geschliffenem Glas. Wenn man auf eine solche Fläche blickt, kann man den Flüssigkeitsspiegel sehr deutlich erkennen. Bei Verwendung einer Küvette lautet Gl. (5)

$$\sigma = \frac{\varrho g r h}{2 \left\{ 1 - \frac{r(a + b + \pi r_1)}{ab - \pi r_1^2} \right\}}. \quad (5b)$$

Wenn der Querschnitt  $A$  der Schale sehr groß gegen  $\pi r_1^2$  ist, vereinfachen sich die Gln. (5) bis (5b) in guter Näherung zu

$$\sigma = \frac{1}{2} \varrho g r h. \quad (5c)$$

Die Kenntnis der Höhe des Flüssigkeitsspiegels wird überflüssig, wenn man mehrere Kapillaren mit unterschiedlichen Innenradien in das Vorratsgefäß taucht. Die Oberflächenspannung lässt sich dann aus den Differenzen der verschiedenen Steighöhen berechnen.

### *Versuchsausführung*

Die benötigten Längen der Schale ( $2R$  oder  $a$  und  $b$ ) und der Außen-durchmesser des Kapillarrohres  $2r_1$  werden mit einem Meßschieber ermittelt. Zur Bestimmung von  $r$  sollen zwei völlig unterschiedliche Methoden beschrieben werden.

#### *Wägemethode*

Wir saugen mit einem Gummigefäß Quecksilber in die trockene Kapillare. Der Quecksilberfaden soll eine Länge  $l$  von mehreren Zentimetern haben. Wir messen  $l$  so genau wie möglich, bringen den Quecksilberfaden Schritt für Schritt an verschiedene Stellen der Kapillare, wiederholen jeweils die Längenmessung und bilden den arithmetischen Mittelwert  $\bar{l}$ . Anschließend ist die Masse  $m$  des in der Kapillare enthaltenen Quecksilbers mit einer Analysenwaage zu bestimmen (vgl. Abschn. M. 1.0.2.). Dazu wird die Masse  $m_1$  eines Uhrgläschens und die Masse  $m_2$  des Gläschens mit dem Quecksilber ermittelt. Es besteht der Zusammenhang

$$m = m_2 - m_1 = \varrho_{\text{Hg}} V = \varrho_{\text{Hg}} \pi r^2 l$$

oder

$$r = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{\pi l \varrho_{\text{Hg}}}}.$$

Die Dichte des Quecksilbers  $\varrho_{\text{Hg}}$  ist der Tab. 2 zu entnehmen. Für  $l$  verwenden wir den Mittelwert  $\bar{l}$ .

#### *Optische Methode*

Wir legen die Kapillare auf den Tisch eines Durchlichtmikroskops und durchstrahlen sie mit monochromatischem, parallelem Licht. Dann sehen wir die in Abb. 41 dargestellten Strahlen als helle Linien. Ihren Abstand  $2s$  können wir mit einem Okularmaßstab messen. Aus Abb. 41 folgt

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{s - r}{\sqrt{r_1^2 - s^2}}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha = \frac{s}{r_1} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{r_1}\right)^2}.$$

Nach dem Brechungsgesetz gilt

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \frac{s}{r_1} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{nr_1}\right)^2}.$$

Wenn wir in Gl. (6) alle Winkelfunktionen durch  $s$ ,  $r_1$  und  $n$  ausdrücken und Gl. (6) nach  $r$  auflösen, ergibt sich

$$\begin{aligned} r &= \frac{s}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{r_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{s}{nr_1}\right)^2} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{s}{r_1}\right)^2} \\ &= \frac{s}{n} \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{s}{n} \sqrt{1 + \tan^2(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

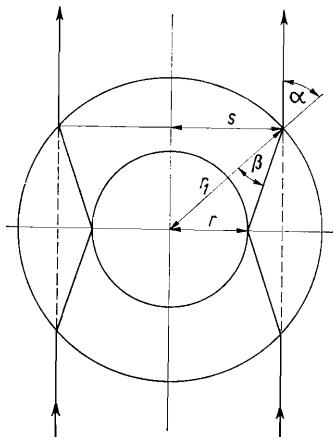


Abb. 41.  
Strahlen durch eine Kapillare

Es gilt also

$$r = \frac{s}{n} \sqrt{1 + \frac{(s - r)^2}{r_1^2 - s^2}}. \quad (7a)$$

Der Fehler von  $s$  und damit auch der von  $r$  wird in der Größenordnung von einigen Prozent liegen. Wenn wir nachweisen, daß

$$\frac{\left(s - \frac{s}{n}\right)^2}{r_1^2 - s^2} < 10^{-2}$$

ist, so vereinfacht sich Gl. (7a) zu

$$r = \frac{s}{n}. \quad (7)$$

Der Brechungsindex  $n$  der Glaskapillare soll gegeben sein.

Vor Beginn der Steighöhenbestimmung ist die Kapillare sorgfältig mit Chromschwefelsäure, destilliertem Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit zu reinigen. Dann tauchen wir die Kapillare senkrecht in die Flüssigkeit, saugen diese mit dem Gummigebläse hoch und warten die Einstellung von  $h$  von oben her ab. Die Höhe  $h$  wird entweder an einer Spiegelskale, die sich hinter dem Kapillarrohr befindet, abgelesen oder mit einem Kathetometer gemessen. Die Steighöhenbestimmung ist für jede Flüssigkeit mehrmals auszuführen. Wir bilden den arithmetischen Mittelwert  $\bar{h}$  und berechnen damit die gesuchte Oberflächenspannung nach Gl. (5a) bzw. (5b). Die Dichte  $\varrho$  ist der Tab. 2 oder der Versuchsanleitung im Praktikum zu entnehmen.

## M. 7. VISKOSITÄT UND STRÖMUNGSPROBLEME

### M. 7.0. Allgemeine Grundlagen

#### M. 7.0.1. Bernoullische Gleichung

Eine idealisierte Flüssigkeit oder ein idealisiertes Gas ströme durch ein Rohr. Die Idealisierung soll darin bestehen, daß der strömende Stoff als inkompressibel angesehen und die Wechselwirkung der Flüssigkeits- bzw.

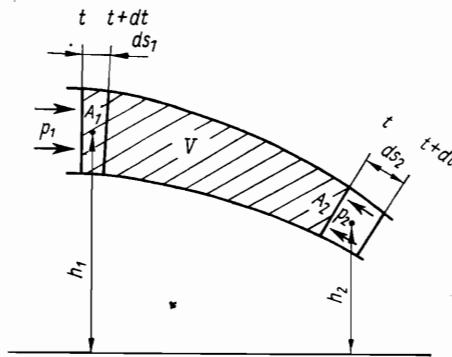


Abb. 42.  
Zur Bernoullischen  
Gleichung

Gasmoleküle untereinander und mit der Rohrwand vernachlässigt wird. Das Volumen  $V$  eines Stromfadens, dessen Querschnitt  $A$  von Ort zu Ort verschieden sein kann, bewegt sich in der Zeit  $dt$  bei Vorhandensein einer Druckdifferenz  $p_1 - p_2$  gemäß Abb. 42. Da der Stoff inkompressibel sein soll, ist

$$A_1 \, ds_1 = A_2 \, ds_2.$$

Die bei der Verschiebung des Volumens  $V$  geleistete Arbeit ist

$$p_1 A_1 \, ds_1 - p_2 A_2 \, ds_2 = (p_1 - p_2) A_1 \, ds_1.$$

Die kinetische Energie vergrößert sich um

$$\frac{1}{2} \varrho A_2 \, ds_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \varrho A_1 \, ds_1 v_1^2 = \left( \frac{1}{2} \varrho v_2^2 - \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \right) A_1 \, ds_1,$$

während die potentielle Energie um

$$\varrho A_2 \, ds_2 g h_2 - \varrho A_1 \, ds_1 g h_1 = \varrho g (h_2 - h_1) A_1 \, ds_1$$

zunimmt.  $\varrho$  ist die Dichte des strömenden Stoffes. Da jegliche Wechselwirkung vernachlässigt werden soll, muß die geleistete Arbeit gleich der Summe der gewonnenen kinetischen und potentiellen Energie sein. Es gilt also

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + \varrho g h_2 \quad (1a)$$

oder

$$p + \frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho g h = p_0. \quad (1)$$

Wenn die Strömung durch ein horizontales Rohr erfolgt, bleibt die potentielle Energie konstant. In Gl. (1a) ist dann  $h_1 = h_2$ , und die *Bernoulliche Gleichung* (1) vereinfacht sich zu

$$p + \frac{1}{2} \varrho v^2 = p_0. \quad (2)$$

Gl. (2) besagt: Der statische Druck, vermehrt um die kinetische Energie der Volumeneinheit (Staudruck), ist gleich dem konstanten Gesamtdruck.

### M. 7.0.2. Definition der Viskosität

Wenn ein realer Stoff (Flüssigkeit oder Gas) durch ein zylindrisches Rohr strömt, hat die Geschwindigkeit in der Rohrachse einen maximalen Wert, während sie an der Rohrwand verschwindet. Bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten kann man annehmen, daß differentiell dünne Hohlzylinder wirbelfrei aneinander gleiten. Eine solche Strömung nennt man laminar. Zwischen benachbarten Hohlzylindern muß eine Reibungskraft  $F_w$  wirken. Diese ist der Berührungsfläche  $A$  und dem Geschwindigkeitsgefälle  $dv/dr$  proportional. Als Proportionalitätsfaktor führt man die *dynamische Viskosität* (den Koeffizienten der inneren Reibung)  $\eta$  ein.

$$F_w = \eta A \frac{dv}{dr}. \quad (3)$$

Die Dimension der dynamischen Viskosität ist

$$\text{Kraft} \cdot \text{Zeit} \cdot \text{Länge}^{-2} = \text{Masse} \cdot \text{Länge}^{-1} \cdot \text{Zeit}^{-1}.$$

Die Einheit der dynamischen Viskosität ist im gesetzlichen Maßsystem  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ . Andere gebräuchliche Einheiten sind das Poise (P) und das Zentipoise (cP).

$$1 \text{ P} = 10^2 \text{ cP} = 1 \text{ g cm}^{-1} \text{s}^{-1} = 10^{-1} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}.$$

Das Verhältnis von dynamischer Viskosität  $\eta$  zur Dichte  $\varrho$  bezeichnet man als *kinematische Viskosität*  $\nu$ .

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}. \quad (4)$$

Die kinematische Viskosität hat die Dimension  $\text{Länge}^2 \cdot \text{Zeit}^{-1}$ . Ihre Einheit ist im gesetzlichen Maßsystem  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Andere gebräuchliche Einheiten sind das Stokes (St) und das Zentistokes (cSt).

$$1 \text{ St} = 10^2 \text{ cSt} = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

### M. 7.0.3. Gesetz von Hagen und Poiseuille

In einem mit Flüssigkeit oder Gas gefüllten Rohr vom Radius  $R$  entsteht eine *laminare Strömung*, wenn ein nicht zu großes Druckgefälle vorhanden ist. Im stationären Zustand ist für jeden coaxialen Zylinder vom Radius  $r$  die Summe von Druckkraft  $F$  und die Reibungskraft  $F_w$  gleich Null.

$$F + F_w = 0.$$

Für die Reibungskraft verwendet man Gl. (3).

$$\pi r^2(p_1 - p_2) + \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} = 0.$$

Die Lösung lautet unter Berücksichtigung der Randbedingung  $v(R) = 0$

---


$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (5)$$


---

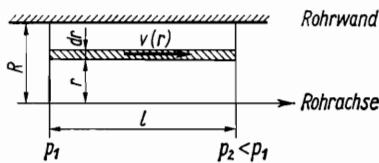


Abb. 43.  
Zum Gesetz von *Hagen*  
und *Poiseuille*

Durch einen Hohlzylinder vom Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  fließt in der Zeit  $t$  das Volumen  $dV$  (vgl. Abb. 43). Dann gilt

$$\frac{dV}{t} = 2\pi r dr v(r).$$

Mit  $v(r)$  gemäß Gl. (5) liefert die Integration über alle Hohlzylinder das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille*

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) 2r dr,$$

---


$$\frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2) R^4}{8\eta l}. \quad (6)$$


---

Es ist zweckmäßig, einen Mittelwert der Geschwindigkeit einzuführen. Als mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  definiert man das pro Zeiteinheit ausfließende Volumen, geteilt durch den Rohrquerschnitt, d. h., es ist

$$\frac{V}{t} = \pi R^2 \bar{v}. \quad (7)$$

Aus dem Vergleich der Gln. (6) und (7) folgt

$$\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{8\eta l}. \quad (8)$$

Das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille* gilt unter der Voraussetzung, daß die Strömung laminar ist. Bei *turbulenter Strömung*, bei der durch Wirbel Teilchen aus einer dünnen Schicht in benachbarte Schichten gelangen, ist Gl. (6) unbrauchbar. Aber auch im Bereich der laminaren Strömung ist das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille* nur richtig, wenn eine energetische Bedingung erfüllt ist. Um das einzusehen, betrachtet man die in einem Hohlzylinder mit dem Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  bei einer Geschwindigkeitsverteilung gemäß Gl. (5) enthaltene kinetische Energie

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \left( \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \right)^2 (R^2 - r^2)^2 \rho 2\pi r l dr.$$

Die gesamte kinetische Energie ergibt sich durch Integration über alle Hohlzylinder zu

$$E_k = \int_0^R dE_k = \frac{\pi \rho (p_1 - p_2)^2 R^6}{96 \eta^2 l}.$$

Dafür kann man

$$E_k = \pi R^2 (p_1 - p_2) \frac{\rho \bar{v} R}{\eta} \frac{R}{12} \quad (9)$$

schreiben. Der in Gl. (9) auftretende Faktor

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{v} R}{\eta} \quad (10)$$

ist, wie sich leicht nachweisen läßt, dimensionslos und wird *Reynoldssche Zahl* genannt.

Die kinetische Energie  $E_k$  kann nun unter keinen Umständen größer als die in den strömenden Stoff hineingesteckte Arbeit

$$W = \pi R^2 (p_1 - p_2) l \quad (11)$$

sein. Der Vergleich der Gln. (11) und (9) liefert

$$l > \frac{\rho \bar{v} R}{\eta} \frac{R}{12} = \frac{\text{Re}}{12} R. \quad (12)$$

Aus sorgfältigen Messungen ist bekannt, daß für

$$\text{Re} < 1160$$

die Strömung in einem Rohr mit Sicherheit laminar ist. Versteht man unter  $l$  die Länge des Rohres, dann folgt aus der Ungleichung (12), daß sich eine

parabolische Geschwindigkeitsverteilung im gesamten Bereich der laminaren Strömung nur dann einstellen kann, wenn das Verhältnis der Rohrlänge zum Rohrradius größer als 100 ist. Da bei der Herleitung des Gesetzes von *Hagen* und *Poiseuille* Gl. (5) verwendet wird, kann Gl. (6) nur gelten, wenn die Ungleichung (12) erfüllt ist.

## M. 7.1. Kugelfallmethode nach Stokes

*Aufgabe:* Die dynamische Viskosität einer sehr zähen Flüssigkeit ist nach der Kugelfallmethode bei Zimmertemperatur zu bestimmen.

Auf eine in einer zähen Flüssigkeit fallende Kugel (Abb. 44) vom Radius  $r$  wirken drei Kräfte: die Schwerkraft  $F_0$ , der Auftrieb  $F_A$  und die Reibungskraft  $F_W$ :

$$F_0 = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_K g, \quad (13)$$

$$F_A = - \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_F g, \quad (14)$$

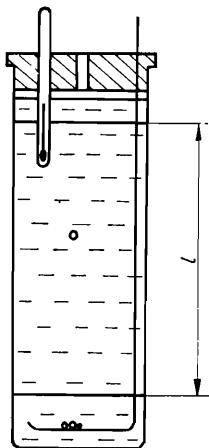


Abb. 44. Kugelfallmethode

dabei sind  $\varrho_K$  bzw.  $\varrho_F$  die Dichte der Kugel bzw. der Flüssigkeit. Für eine Kugel, die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit bewegt, gilt nach *Stokes*

$$F_W = - 6\pi\eta rv. \quad (15)$$

Im Experiment fällt die Kugel in einem endlichen Rohr mit dem Radius  $R$  und der Höhe  $h$ . Der Betrag der Reibungskraft vergrößert sich mit wachsenden Verhältnissen  $r/R$  und  $r/h$ . Da im allgemeinen

$$h \gg R \gg r$$

ist, soll die Abhängigkeit von  $h$  vernachlässigt werden. Als Ansatz für  $F_w$  empfiehlt sich

$$F_w = -6\pi\eta rv \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-n}. \quad (15a)$$

Nachdem die Kugel eine gewisse Strecke in der Flüssigkeit zurückgelegt hat, stellt sich eine konstante Geschwindigkeit  $v = l/t$  ein. Dann muß die Summe der auf die Kugel wirkenden Kräfte verschwinden.

$$F_0 + F_A + F_w = 0 \quad (16)$$

Setzt man die Gln. (13), (14) und (15a) in Gl. (16) ein, so erhält man für die Viskosität

---


$$\eta = \frac{2(\rho_K - \rho_F)g}{9l} r^2 t \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n. \quad (17)$$


---

Die Stokesschen Beziehungen Gl. (15) bzw. (15a) gelten unter der Voraussetzung, daß die Reynoldssche Zahl<sup>1)</sup>

$$\text{Re} = \frac{\rho_F vr}{\eta} \quad (18)$$

sehr klein gegen 1 ist. Aus diesem Grunde ist auch Gl. (17) nur für sehr kleine Reynoldssche Zahlen brauchbar.

Die Kugelfallmethode zur Bestimmung der dynamischen Viskosität kann nur als Demonstrationsversuch angesehen werden. Für die meisten Flüssigkeiten sind die Fallzeiten von Glas- oder gar Metallkugeln selbst bei sehr großen Fallstrecken sehr klein. Außerdem ist die Viskosität aller Flüssigkeiten stark von der Temperatur abhängig. Es macht experimentell viel Mühe, die Temperatur einer in einem langen Rohr befindlichen Flüssigkeit konstant zu halten.

Gl. (17) kann bei bekannter Viskosität des Mediums auch zur Bestimmung des Radius sehr kleiner Partikeln verwendet werden (vgl. Abschn. O. 8.1.).

---

<sup>1)</sup> Im Gegensatz zu der in Gl. (10) angegebenen Reynoldsschen Zahl für den Fall einer zylindersymmetrischen Strömung tritt in Gl. (18) der Kugelradius  $r$  auf.

### Versuchsausführung

Wir messen die Fallstrecke  $l$  und bestimmen den Rohrradius  $R$  sowie die aus mehreren Messungen gemittelten Werte der Radien  $r_1 < r_2 < \dots < r_m$  von  $m$  verschiedenen großen Kugeln. Wir stoppen rasch nacheinander die Fallzeiten  $t_1 > t_2 > \dots > t_m$  der Kugeln zwischen oberer und unterer Marke am Rohr und notieren während jeder Messung die Temperatur. Es ist darauf zu achten, daß die Kugeln längs der Rohrachse fallen und daß keine Luftblasen an den Kugeln hängen. Der Exponent  $n$  wird aus allen zur gleichen Temperatur gehörenden Kombinationen

$$r_i^2 t_i \left(1 - \frac{r_i}{R}\right)^n = r_k^2 t_k \left(1 - \frac{r_k}{R}\right)^n$$

bestimmt. Wir berechnen die Viskosität  $\eta$  nach Gl. (17) und wiederholen den Versuch mindestens einmal. Die Dichten  $\varrho_F$  und  $\varrho_K$  sind den Tab. 1 und 2 bzw. der Versuchsanleitung im Praktikum zu entnehmen. Wir weisen nach, daß die Reynoldssche Zahl für die größte Kugel noch sehr klein gegen 1 ist [vgl. Gl. (18)].

## M. 7.2. Höppler-Viskosimeter

*Aufgabe:* Die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität einer Flüssigkeit soll mit dem *Höppler-Viskosimeter* in einem vorgegebenen Temperaturbereich bestimmt werden.

Fällt eine Kugel in einem senkrecht stehenden Rohr, dessen Durchmesser nur wenig größer als der Kugeldurchmesser ist, so berührt die Kugel im allgemeinen in unkontrollierbarer Weise die Rohrwand. Ihre Bewegung wird reproduzierbar, wenn man das Rohr um einige Grad gegen die Vertikale neigt, d. h. die Kugel an der Rohrwand rollen läßt. Diese Überlegung veranlaßte *Höppler*, ein Viskosimeter mit geneigtem Rohr zu entwickeln (vgl. Abb. 45).

Die Viskosität aller Flüssigkeiten hängt sehr stark von der Temperatur ab. Aus diesem Grunde befindet sich das Viskosimeterrohr in einem weiten Glasrohr, durch das man Flüssigkeit konstanter Temperatur strömen läßt. Hat die Kugel die Meßstrecke (Abstand zwischen oberer und unterer Marke am Viskosimeterrohr) durchlaufen, dreht man das Viskosimeter  $180^\circ$  um die Achse  $A$  und läßt die Kugel zurückrollen. Während der Messung ist das Viskosimeter mit der Schraube  $S$  zu arretieren. Die Viskosität wird nach der empirischen Formel

---


$$\eta = K(\varrho_K - \varrho_F) t \quad (19)$$


---

berechnet. In Gl. (19) ist  $K$  die Kugelkonstante,  $t$  die Zeit, in der die Kugel die Meßstrecke durchläuft, und  $\rho_K$  bzw.  $\rho_F$  sind die Dichte der Kugel bzw. der Flüssigkeit.

Die Gln. (17) und (19) stimmen formal überein. Während sich aber für eine in einem weiten Rohr fallende kleine Kugel die Kugelkonstante berechnen läßt, muß die Größe  $K$  in Gl. (19) mit Hilfe einer Eichflüssigkeit empirisch ermittelt werden.

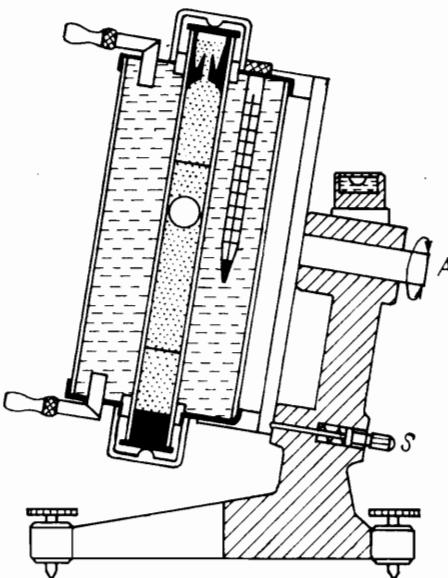


Abb. 45.  
Höppler-Viskosimeter

Um das Höppler-Viskosimeter in einem sehr großen Viskositätsbereich verwenden zu können, gehört zu jedem Gerät ein Satz von Kugeln verschiedener Größe und Dichte. Eine der Kugeln ist zur Bestimmung der Viskosität von Gasen geeignet.

Wenn man mit einer Kugel arbeitet, deren Durchmesser nur um etwa 0,1 mm kleiner als der Innendurchmesser des Rohres ist, so müssen das Rohr und die Kugel an jedem Versuchstag gründlich gereinigt werden. Auch die zu untersuchende Flüssigkeit muß außerordentlich sauber sein.

Bei den Messungen ist darauf zu achten, daß eine bestimmte „Mindestzeit“ nicht unterschritten wird, da anderenfalls die Strömung um die Kugel turbulent wird.

#### *Versuchsausführung*

Wir entgasen die Flüssigkeit durch Erwärmen in einem sauberen Becherglas und kühlen sie anschließend auf die geforderte Anfangstemperatur ab.

Die Flüssigkeit wird in das Viskosimeterrohr gefüllt. Alle an der Rohrwand haftenden Luftblasen sind sorgfältig zu entfernen. Dann stecken wir die Kugel in das Rohr. Auch an der Kugel darf keine Luftblase sitzen. Der Einsatz am oberen Ende des Viskosimeterrohres soll nicht vollständig gefüllt sein, damit sich die Flüssigkeit beim Erwärmen ausdehnen kann. Wir schließen das Rohr mit dem dafür vorgesehenen Schraubverschluß und justieren das Viskosimeter. Wir wählen am Kontaktthermometer die gewünschte Meßtemperatur, schrauben das entsprechende Thermometer in das Viskosimeter und schalten den Thermostaten (vgl. Abschn. W. 1.0.5.) ein.

Die Zeit, in der sich die Kugel von der oberen bis zur unteren Marke am Viskosimeterrohr bewegt, wird mit einer Stoppuhr gemessen. Da die Temperatur nicht in der zu untersuchenden Flüssigkeit, sondern im Temperierbad bestimmt wird, ist die „Fallzeit“ bei jeder Temperatur so oft zu stoppen, bis sich ein konstanter Wert ergibt.

Die Dichten  $\varrho_K$  und  $\varrho_F$  sind der Anleitung im Praktikum zu entnehmen. Wir berechnen die Viskosität  $\eta$  nach Gl. (19) und stellen die Meßergebnisse graphisch dar. Da die Viskosität vieler Flüssigkeiten der Beziehung

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{B}{T}\right)$$

genügt, tragen wir  $\lg \eta$  über  $1/T$  auf geeignetem Koordinatenpapier auf.  $A$  und  $B$  sind Materialkonstanten, und  $T$  ist die absolute Temperatur.

Jeder Praktikant soll sich davon überzeugen, daß alle Schläuche am Thermostat und am Viskosimeter mit Schlauchklemmen abgesichert sind.

## M. 7.3. Ubbelohde-Viskosimeter

*Aufgabe:* Die Abhängigkeit der kinematischen Viskosität einer Flüssigkeit von der Temperatur  $T$  ist in einem Intervall  $T_0 < T < T_1$  mit dem *Ubbelohde-Viskosimeter* zu bestimmen.

Das Viskosimeter nach *Ubbelohde* ist ein Kapillarviskosimeter. Es unterscheidet sich von dem älteren Viskosimeter nach *Ostwald* durch das Rohr 3 (vgl. Abb. 46). Dieses Rohr sorgt dafür, daß am unteren Ende der Kapillare 4 Luftdruck herrscht. Die aus der Kapillare austretende Flüssigkeit fließt in einer dünnen Schicht an der Innenwand des Volumens C ab. In C bildet sich ein sogenanntes hängendes Kugelniveau, das nach sorgfältigen Untersuchungen von *Ubbelohde* unabhängig von der Dichte, der Viskosität und der Oberflächenspannung der zu untersuchenden Flüssigkeit ist. Die untere Grenze der Druckhöhe  $h$  ist daher das untere Ende der Kapillare (nicht wie beim *Ostwald-Viskosimeter* die variable Höhe des Flüssigkeitsspiegels im Volumen B). Die Druckhöhe  $h$  ändert sich während der Messung von  $h(0)$

bis  $h(t)$ . Man rechnet deshalb mit dem zeitlichen Mittelwert

$$\bar{h} = \frac{1}{t} \int_0^t h \, dt.$$

Für die kinematische Viskosität gilt nach den Gln. (6) und (4)

$$\nu = \frac{\pi(p_1 - p_2) R^4 t}{8 V l_Q}. \quad (20)$$

Beim Eintritt in die Kapillare muß die Flüssigkeit beschleunigt werden. Dazu ist ein Druck  $\delta p$  notwendig.

$$p_1 - p_2 = \rho g \bar{h} - \delta p \quad (21)$$

Zur Berechnung von  $\delta p$  (*Hagenbachsche Korrektur*) schreibt man die kinetische Energie pro Zeiteinheit  $dE$  der durch einen Hohlzylinder mit dem Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  strömenden Flüssigkeit auf (vgl. Abb. 43). Es gilt

$$dE = \frac{1}{2} \rho 2\pi r dr [v(r)]^3$$

Die Integration über alle Hohlzylinder mit  $v(r)$  nach Gl. (5) liefert die gesamte kinetische Energie pro Zeiteinheit

$$E = \frac{\rho V^3}{\pi^2 R^4 t^3}.$$

Andererseits ist

$$E = \frac{\delta p V}{t}.$$

Daraus folgt

$$\delta p = \frac{\rho V^2}{\pi^2 R^4 t^2}. \quad (22)$$

Die dargestellte Überlegung ist insofern unexakt, als beim Eintritt der Flüssigkeit in die Kapillare eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung gemäß Gl. (5) noch gar nicht vorliegt. Aus diesem Grunde bringt man an Gl. (22) einen Korrekturfaktor  $m$  an, der einen Wert von etwa 1,1 hat.

$$\delta p = \frac{m \rho V^2}{\pi^2 R^4 t^2}. \quad (23)$$

Setzt man die Gln. (21) und (23) in Gl. (20) ein, erhält man

$$\nu = \frac{\pi g \bar{h} R^4}{8 V l} t - \frac{m V}{8 \pi l} \frac{1}{t}. \quad (24)$$

Mit den Viskosimeterkonstanten

$$K = \frac{\pi g \bar{h} R^4}{8 V l} \quad \text{und} \quad K' = \frac{m V}{8 \pi l}$$

wird

$$\nu = K \left[ t - \frac{K'}{K t} \right].$$

Die Größe  $K'/(Kt)$  muß die Dimension einer Zeit haben. Daher führt man eine Korrekturzeit

$$t' = \frac{K'}{K t}$$

ein. Gl. (24) lautet dann

---


$$\nu = K(t - t'). \quad (25)$$


---

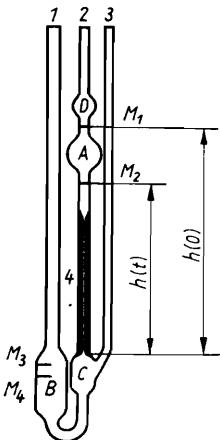


Abb. 46.  
Ubbelohde-Viskosimeter

Die Ubbelohde-Viskosimeter sind so dimensioniert, daß sich die Werte der Apparatekonstanten  $K$  nur sehr wenig von 1, 0,1 bzw.  $0,01 \text{ cSt s}^{-1}$  unterscheiden. Der exakte Wert von  $K$  ist in jedes Viskosimeter geätzt. Die den verschiedenen Ausflußzeiten  $t$  entsprechenden Korrekturzeiten  $t'$  sind tabelliert.

### Versuchsausführung

Wir füllen Rohr 1 (vgl. Abb. 46) mit Meßflüssigkeit, bis der Flüssigkeitsspiegel zwischen den Marken  $M_3$  und  $M_4$  liegt. Wir wählen am Kontaktthermometer die gewünschte Temperatur und schalten den Thermostaten ein (vgl. W. 1.0.5.). Dieser speist einen Glasbehälter, in den das Viskosimeter einzusetzen ist. Rohr 3 wird mit dem Finger geschlossen und die Meßflüssigkeit mit Hilfe eines Gummiglases in Rohr 2 hochgesaugt. Wenn das Volumen  $D$  völlig gefüllt ist, öffnen wir Rohr 3 und bestimmen die Zeit  $t$ , in der der Flüssigkeitsspiegel von der Marke  $M_1$  bis zur Marke  $M_2$  sinkt. Wir notieren die Temperatur des Flüssigkeitsbades und messen die Ausflußzeit  $t$  bei dieser Temperatur so oft, bis sich der Wert von  $t$  nicht mehr ändert. Die der Ausflußzeit  $t$  entsprechende Korrekturzeit  $t'$  wird der vom Herstellerbetrieb des Viskosimeters gelieferten Tabelle entnommen und die kinematische Viskosität nach Gl. (25) berechnet. Der Versuch ist bei anderen Temperaturen zu wiederholen. Wir stellen die Temperaturabhängigkeit der kinematischen Viskosität auf geeignetem Koordinatenpapier graphisch dar.

### M. 7.4. Rotationsviskosimeter

- Aufgaben:*
1. Die dynamische Viskosität  $\eta$  einer sehr zähen Flüssigkeit soll in Abhängigkeit von der Temperatur mit dem Rotationsviskosimeter bestimmt werden.
  2. Bei einer konstanten Temperatur ist die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsgefälles  $dv/dr$  von der Schubspannung  $\tau$  zu ermitteln.

Das *Rotationsviskosimeter* arbeitet nach folgendem Prinzip: In dem Spalt zwischen zwei konzentrisch angeordneten Zylindern (Radius  $r_i$  und  $r_a$ ) befindet sich eine zähe Flüssigkeit. Nun wird einer der beiden Zylinder mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gedreht, während der andere z. B. durch eine geeignete Torsionsvorrichtung oder eine Spiralfeder an eine Ruhelage gebunden ist. Die am rotierenden Zylinder haftende Flüssigkeitsschicht bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , die am anderen Zylinder haftende Schicht ruht.

Es gibt sowohl Rotationsviskosimeter, bei denen sich der äußere Zylinder dreht, als auch solche, bei denen der innere Zylinder rotiert. Hier soll der letztergenannte Fall behandelt werden (vgl. Abb. 47).

Wenn der Spalt zwischen den beiden Zylindern sehr schmal ist ( $r_a \approx r_i$ ), kann man bei laminarer Strömung in guter Näherung annehmen, daß die Geschwindigkeit linear vom rotierenden zum ruhenden Zylinder abnimmt,

$$v(r) = ar + b. \quad (26)$$

Die Konstanten  $a$  und  $b$  sind aus den Randbedingungen

$$v(r_i) = \omega r_i, \quad v(r_a) = 0$$

zu bestimmen. Man erhält

$$a = -\frac{\omega r_i}{r_a - r_i}, \quad b = \frac{\omega r_a r_i}{r_a - r_i}.$$

Damit wird Gl. (26)

$$v(r) = \frac{\omega r_i}{r_a - r_i} (r_a - r),$$

und für das Geschwindigkeitsgefälle ergibt sich

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\omega r_i}{r_a - r_i}. \quad (27)$$

Nach dem Newtonschen Ansatz für die Viskosität gilt

$$\eta = \frac{\tau(r)}{\left| \frac{dv}{dr} \right|} = \frac{F(r)}{2\pi h r \left| \frac{dv}{dr} \right|} = \frac{M(r)}{2\pi h r^2 \left| \frac{dv}{dr} \right|}. \quad (28)$$

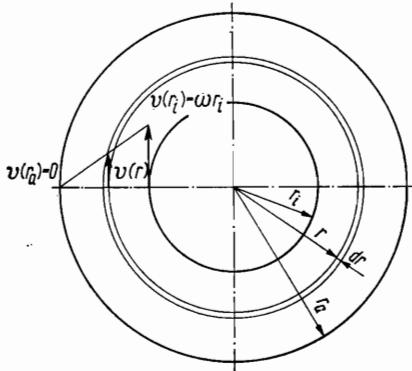


Abb. 47. Strömung zwischen rotierenden Zylindern

In Gl. (28) bedeuten  $F(r)$  die positiv gerechnete Reibungskraft,  $\tau(r)$  die Schubspannung und  $M(r)$  das Drehmoment im Abstand  $r$  von der Achse. Die Länge des rotierenden Zylinders ist mit  $h$  bezeichnet. Setzt man Gl. (27) in Gl. (28) für den Fall  $r = r_i$  ein, so ergibt sich

$$\eta = \frac{M(r_i)}{\omega} \cdot \frac{r_a - r_i}{2\pi h r_i^3}. \quad (29)$$

Die Bestimmung des Drehmomentes läßt sich auf eine Winkelmessung zurückführen. Die Winkelgeschwindigkeit kann in den meisten Viskosimetern stufenweise eingestellt werden. Der zweite Bruch in Gl. (29) ist für jedes Zylinderpaar eine Konstante. Die Viskosität und die Schubspannung lassen sich daher nach den Beziehungen

---


$$\eta = KN\alpha, \quad (30)$$

$$\tau = k\alpha \quad (31)$$


---

bestimmen, wenn die Konstanten  $K$  und  $k$  sowie der Drehzahlfaktor  $N$  bekannt sind und der Winkel  $\alpha$  gemessen wird.

Die Voraussetzung, daß der zylinderförmige Spalt sehr eng ist, ist für die Gültigkeit der Gln. (30) und (31) nicht nötig. Für dieses Problem (Couette-Strömung) läßt sich die Navier-Stokes'sche Differentialgleichung exakt lösen. An die Stelle der Gln. (26) und (29) treten dann folgende Beziehungen

$$v(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r},$$

$$\eta = \frac{M(r_i)}{\omega} \frac{r_a^2 - r_i^2}{2\pi h r_i^2(r_a^2 + r_i^2)}.$$

Da die Viskosität aller Flüssigkeiten stark von der Temperatur abhängig ist, muß sich das Rotationsviskosimeter in einem Temperiergefäß befinden, das von einem Thermostaten (vgl. Abschn. W. 1.0.5.) gespeist wird.

#### *Versuchsausführung*

Nachdem der Ringspalt mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und das Viskosimeter in den Temperiergefäß eingesetzt ist, stellen wir am Kontaktthermometer die gewünschte Temperatur ein und nehmen den Thermostat in Betrieb. Ist Temperaturlgleichgewicht erreicht, wird der Winkel  $\alpha$  bestimmt. Wir stellen bei jeder Messung die kleinste Winkelgeschwindigkeit, d. h. den größten Drehzahlfaktor, ein. Erst wenn  $\alpha$  sehr klein und damit der Fehler groß wird, schalten wir auf das nächstkleinere  $N$  um. Die Messung soll bei gleicher Temperatur mehrmals wiederholt werden. Mit dem Mittelwert  $\bar{\alpha}$  berechnen wir  $\eta$  nach Gl. (30). Haben wir die Messungen bei hinreichend vielen Temperaturen ausgeführt, wird  $\eta(T)$  auf geeignetem Koordinatenpapier graphisch dargestellt.

In Aufgabe 2 bestimmen wir  $\alpha$  bei verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  bzw. Drehzahl faktoren  $N$  – eventuell bei zwei Zylinderkombinationen – und berechnen  $\tau$  nach Gl. (31). Die Werte für  $dv/dr$  und  $k$  sollen dem Prüfschein des Viskosimeters entnommen werden. Die graphische Darstellung

$$\left| \frac{dv}{dr} \right| = \frac{1}{\eta} \tau$$

liefert für eine Newtonsche Flüssigkeit eine Gerade mit der Steigung  $1/\eta$ .  $\eta$  soll berechnet werden.

Wenn dieser lineare Zusammenhang nicht gilt, bezeichnet man die Flüssigkeit als nicht-Newtonsche oder strukturviskos. In diesem Falle können wir den Ansatz

$$\left| \frac{dv}{dr} \right| = \frac{1}{\eta(\tau)} \tau = \frac{1}{\eta_0} \tau^n$$

machen und berechnen den Exponenten  $n$  nach

$$n \lg \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) = \lg \left\{ \frac{\left| \frac{dv}{dr} \right|_1}{\left| \frac{dv}{dr} \right|_2} \right\}.$$

Außerdem bestimmen wir die Viskosität für die verschiedenen Schubspannungen nach Gl. (30) und stellen die Funktion  $\eta(\tau)$  graphisch dar.

## M. 7.5. Prandtlsches Staurohr

*Aufgabe:* Die Geschwindigkeitsverteilung einer stationären Luftströmung in einem zylindrischen Rohr soll mit dem *Prandtlschen Staurohr* bestimmt werden.

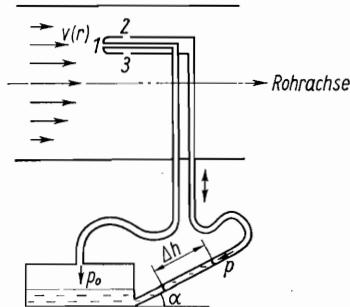


Abb. 48. Prandtl'sches Staurohr und Differenzmanometer

Mit Hilfe eines Flügelrades, dessen Drehzahl innerhalb gewisser Grenzen regelbar ist, wird in einem horizontalen Rohr eine Luftströmung erzeugt.

Zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit verwendet man ein Prandtl-sches Staurohr, das längs eines Rohrdurchmessers verschoben werden kann. An der Öffnung 1 (vgl. Abb. 48) herrscht der Gesamtdruck  $p_0$ , da dort die Strömungsgeschwindigkeit  $v = 0$  ist. An den Öffnungen 2 und 3 herrscht dagegen der statische Druck  $p$ . Die Druckdifferenz  $p_0 - p$  mißt man zweckmäßigerweise mit einem Differenzmanometer, dessen Rohr um den kleinen Winkel  $\alpha$  gegen die Horizontale geneigt ist. Es gilt

$$p_0 - p = \rho_F g \Delta h \sin \alpha. \quad (32)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich aus der Bernoullischen Gleichung (2) zu

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_L}}. \quad (33)$$

Setzt man Gl. (32) in Gl. (33) ein, erhält man

---


$$v = \sqrt{\frac{2\rho_F g \sin \alpha}{\rho_L}} \sqrt{\Delta h}. \quad (34)$$


---

Hierin sind  $\rho_F$  bzw.  $\rho_L$  die Dichte der Manometerflüssigkeit bzw. der Luft.

### Versuchsausführung

Wir bestimmen Zimmertemperatur und Luftdruck und berechnen die diesen Werten entsprechende Dichte der Luft aus der Dichte bei Normalbedingungen. Nun wird das Differenzmanometer justiert. Die Lage des Flüssigkeitsspiegels im Manometerrohr bei der Druckdifferenz 0 ist zu notieren. Wir schalten den Motor des Flügelrades ein und warten 10 bis 15 Minuten, damit sich im Motor und im Vorwiderstand ein Temperaturgleichgewicht und folglich eine zeitlich konstante Drehzahl des Flügelrades einstellen kann. Wir bestimmen  $\Delta h$  (vgl. Abb. 48) für verschiedene Lagen des Staurohres und berechnen die Geschwindigkeit  $v$  nach Gl. (34). Das Staurohr soll von Messung zu Messung um 5 mm längs eines Durchmessers des Strömungsrohres verschoben werden. Es ist darauf zu achten, daß die Achsen des Staurohres und des Strömungsrohres stets parallel zueinander sind. Der Versuch wird bei einer anderen Drehzahl des Flügelrades wiederholt. Wir stellen die Geschwindigkeit  $v$  über dem Abstand von der Rohrachse  $r$  für beide Drehzahlen graphisch dar und vergleichen die Ergebnisse mit Gl. (5).

## M. 7.6. Reynoldssche Zahlen

**Aufgabe:** Diejenige *Reynoldssche Zahl* soll bestimmt werden, bei der die laminare Strömung in einem Rohr in turbulente Strömung umschlägt.

Bei einer stationären Strömung durch ein Rohr vom Radius  $R$  ist die Summe der Druckkraft  $F$  und der Reibungskraft  $F_w$  gleich Null.

$$F + F_w = 0. \quad (35)$$

Für  $F_w$  soll ein Ansatz gewählt werden, der im Gegensatz zu Gl. (3) sowohl im Bereich der laminaren als auch in dem der turbulenten Strömung brauchbar ist. Man setzt die Reibungskraft  $F_w$  proportional der angeströmten Fläche  $A$  und der kinetischen Energie der Volumeneinheit mit der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}$  [vgl. die Gln. (7) und (8)].

$$F_w = -wA \frac{\varrho}{2} \bar{v}^2; \quad (36)$$

$w$  ist ein dimensionsloser Widerstandsbeiwert, und  $\varrho$  ist die Dichte der Flüssigkeit. Aus

$$\pi R^2(p_1 - p_2) - w2\pi Rl \frac{\varrho}{2} \bar{v}^2 = 0$$

folgt

$$w = \frac{(p_1 - p_2) R}{\varrho l \bar{v}^2}. \quad (37)$$

Für die Druckdifferenz (vgl. Abb. 49) gilt

$$p_1 - p_2 = \varrho g(h_1 - h_2).$$

Damit wird der Widerstandsbeiwert

$$w = \frac{g(h_1 - h_2) R}{l \bar{v}^2}. \quad (38)$$

Ist die Strömung laminar, kann man Gl. (8)

$$(p_1 - p_2) \pi R^2 - 8\pi \eta l \bar{v} = 0 \quad (39)$$

schreiben. Aus den Gln. (35) und (39) folgt

$$F_w = -8\pi \eta l \bar{v}. \quad (40)$$

Der Vergleich der Gln. (36) und (40) liefert

$$w = \frac{8}{R\varrho\bar{v}} = \frac{8}{Re} . \quad (41)$$

Trägt man  $\lg w$  über  $\lg Re$  auf, so ergibt sich im Bereich der laminaren Strömung gemäß Gl. (41) eine Gerade mit der Steigung  $-1$ . Bei turbulenter Strömung besteht zwischen  $\lg w$  und  $\lg Re$  ein anderer Zusammenhang.

### Versuchsausführung

Wir stellen eine Druckdifferenz  $p_1 - p_2$  ein und bestimmen die Zeit  $t$ , in der das Volumen  $V$  ausfließt. Befindet sich Luft im Strömungsrohr, darf erst dann mit der Messung begonnen werden, wenn die strömende Flüssigkeit alle Luftblasen aus dem Rohr entfernt hat. Wir lesen die Temperatur der Flüssigkeit (Wasser) ab und entnehmen die Dichte  $\varrho$  sowie die Viskosität  $\eta$  der Tab. 4.

Wir wiederholen die Messung bei etwa 30 verschiedenen Druckdifferenzen. Dies kann z. B. so geschehen, daß der gefüllte Behälter  $B$  (vgl. Abb. 49)

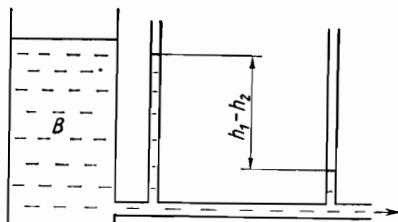


Abb. 49.  
Schematische Darstellung  
der Versuchsanordnung

von Messung zu Messung etwas geleert wird. Um genügend viele Messungen im Bereich der laminaren Strömung auszuführen, wählen wir die Differenz der Flüssigkeitshöhen in  $B$  zwischen zwei Messungen zunächst etwa 10 cm und lassen sie immer kleiner werden. Ist der Behälter  $B$  fast leer, soll die Differenz nur noch ungefähr 0,5 cm betragen. Wir berechnen den Rohrradius  $R$  mit Hilfe von Gl. (6). Da das Gesetz von *Hagen* und *Poiseuille* nur für laminare Strömung gilt, verwenden wir zur Berechnung von  $R$  die bei kleinen Druckdifferenzen ermittelten Werte  $V/t$ . Die mittleren Geschwindigkeiten  $\bar{v}$  erhalten wir aus Gl. (7), die Widerstandsbeiwerte  $w$  aus Gl. (38) und die Reynoldsschen Zahlen  $Re$  aus Gl. (10). Wir tragen  $\lg w$  über  $\lg Re$  auf geeignetem Koordinatenpapier auf und lesen den Wert der Reynoldsschen Zahl ab, bei dem der Umschlag von laminarer in turbulente Strömung stattfindet.

## M. 8. SCHALLWELLEN

### M. 8.0. Allgemeine Grundlagen

Eine elastische Deformation, d. i. die durch elastische Kräfte hervorgerufene Verschiebung eines Volumenelementes aus seiner stabilen Ruhelage, pflanzt sich in einem deformierbaren Medium mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit fort. Es entsteht eine mechanische Welle, die man als Schallwelle bezeichnet. Die Gesamtheit aller Flächenelemente des elastischen Körpers, die sich zu einer bestimmten Zeit im gleichen Schwingungszustand (in gleicher Phase) befindet, nennt man Wellenfläche. Existiert in einem homogenen, isotropen Körper ein punktförmiges Erregerzentrum, so entsteht eine *Kugelwelle*. Die Wellenflächen sind konzentrische Kugeln um den Erreger. Ist dagegen das Erregerzentrum unendlich weit entfernt, liegt eine *ebene Welle* vor. Die Wellenflächen sind zueinander parallele Ebenen. Alle Linien, die die Wellenflächen senkrecht schneiden, bezeichnet man als Strahlen.

In der folgenden Betrachtung wird vorausgesetzt, daß der elastische Körper eindimensional ist. In Wirklichkeit gibt es derartige Körper nicht. Man kann aber einen langen Metallstab (Dichte  $\rho$ ), dessen Querschnitt  $A$  hinreichend klein ist, näherungsweise als eindimensional betrachten. Jedes beliebige Volumenelement des Stabes führt unter dem Einfluß einer örtlich und zeitlich variablen Zugspannung

$$\sigma = \sigma(x, t)$$

in Richtung der Stabachse ( $x$ -Achse) Bewegungen um die Lage aus, die es ohne Vorhandensein einer Spannung einnimmt. Die Verschiebung eines beliebigen Querschnittes

$$\xi = \xi(x, t)$$

ist dann auch eine Funktion des Ortes und der Zeit.

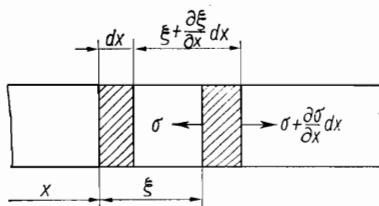


Abb. 50.  
Zur linearen Wellengleichung  
in festen Körpern

Ein bestimmter Querschnitt des Stabes stehe zur Zeit  $t = t_1$  unter der Spannung  $\sigma$  und sei um das Stück  $\xi$  aus seiner Ruhelage  $x$  verschoben (vgl. Abb. 50). Ein benachbarter Querschnitt, der unter der Spannung

$\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$  steht, ist zur gleichen Zeit  $t = t_1$  um  $\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$  aus seiner Ruhe-  
lage verschoben. Das Volumenelement  $A dx$  erfährt durch die Spannung  
eine absolute Längenänderung von  $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ , während die Dehnung (relative  
Längenänderung) gleich  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  ist. Alle auftretenden Spannungen sollen so  
klein sein, daß das Hookesche Gesetz [vgl. Gl. (M. 5.0.-1)] gilt. Dieses Gesetz  
kann im vorliegenden Falle

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

geschrieben werden.  $E$  ist der Elastizitätsmodul des Stabmaterials.

Auf das Volumenelement wirkt in Richtung der  $x$ -Achse eine Kraft

$$A dx \frac{\partial \sigma}{\partial x} = A dx E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Diese Kraft ist andererseits

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A dx \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Daraus folgt

---


$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1)$$


---

Eine ähnliche Betrachtung kann auch für Flüssigkeiten oder Gase angestellt werden. Man setzt voraus, daß sich der Stoff (Dichte  $\varrho$ ) in einem dünnen,

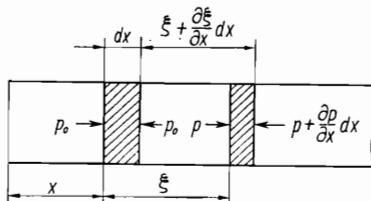


Abb. 51.  
Zur linearen Wellengleichung  
in Flüssigkeiten und Gasen

horizontalen Rohr (Querschnitt  $A$ ) befindet. Im Ruhezustand herrscht an allen Stellen des Rohres der konstante hydrostatische Druck  $p_0$ . Für die zur Zeit  $t = t_1$  auf das Volumenelement  $dV = A dx$  wirkenden Drücke

(vgl. Abb. 51) gilt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \delta p, \\ p + \frac{\partial p}{\partial x} dx &= p_0 + \delta p + \frac{\partial \delta p}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

$\delta p$  und die Verschiebung  $\xi$  sind Funktionen des Ortes und der Zeit. Das Volumenelement  $dV$  steht unter dem Einfluß einer Kraft

$$-A dx \frac{\partial \delta p}{\partial x}$$

in Richtung der  $x$ -Achse, die gleich

$$A dx \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

sein muß. Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x}. \quad (2)$$

Nun führt man den Kompressionsmodul [vgl. Gl. (M. 5.0.-8)]

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta p} \quad (3)$$

ein. Wendet man Gl. (3) auf das Volumenelement  $dV$  an, erhält man

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{dV} \frac{\delta dV}{\delta p} = -\frac{1}{dx} \frac{\delta dx}{\delta p}. \quad (4)$$

$\delta dx$  ist die absolute Längenänderung des Elementes unter der Wirkung des Druckes  $\delta p$ , d.h., es gilt

$$\delta dx = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Damit kann man Gl. (4)

$$\delta p = -K \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (5)$$

schreiben. Wird Gl. (5) in Gl. (2) eingesetzt, erhält man

---


$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (6)$$


---

Die linearen Wellengleichungen (1) und (6) sind vom Typ

---


$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (7)$$


---

Gl. (7) ist der einfachste Fall der hyperbolischen Normalform der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es existieren unendlich viele Lösungen. Jede Funktion

$$\xi = \xi \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad (8)$$

$$\xi = \xi \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (9)$$

genügt Gl. (7). Dies lässt sich sofort nachweisen, wenn man die beiden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von den Gln. (8) und (9) bildet.

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist die in Gl. (7) formal eingeführte Größe  $c$  die Geschwindigkeit, mit der sich ein bestimmter Schwingungszustand (eine Phase) fortpflanzt. Die Schallgeschwindigkeit  $c$  ist daher eine *Phasengeschwindigkeit*.

Die durch Gl. (8) bzw. (9) beschriebenen Wellen breiten sich in positiver bzw. negativer  $x$ -Richtung aus und sind als Lösungen der linearen Wellengleichung ebene Wellen. Da die Verschiebung in der Geraden der Ausbreitungsgeschwindigkeit erfolgt, nennt man diese Wellen *longitudinal*.

Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten sind longitudinale Wellen, da man im allgemeinen den Einfluß der inneren Reibung (Viskosität) vernachlässigen kann. In mehrdimensionalen festen Körpern treten dagegen infolge der nicht vernachlässigbaren Schubkräfte sowohl longitudinale als auch transversale Schallwellen auf.

Von besonderem Interesse sind die *harmonischen Wellen*, bei denen die Verschiebung  $\xi$  durch eine zeitlich und räumlich periodische Funktion

---


$$\xi = \xi_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (10)$$

oder

---


$$\xi = \xi_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (11)$$


---

beschrieben wird.  $\xi_0$  ist die Amplitude der Schwingung. Die in den Gln. (10) und (11) auftretende Größe  $\omega$  hat die Dimension  $\text{Zeit}^{-1}$ . Ihre Bedeutung erkennt man, wenn man den zeitlichen Verlauf der durch Gl. (10) dargestell-

ten Welle an der Stelle  $x = 0$  verfolgt. Zu allen Zeiten  $t = n\tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ist  $\xi$  gleich  $\xi_0$ . Daraus folgt  $\omega n\tau = n 2\pi$  oder

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu. \quad (12)$$

Hierin ist  $\tau$  die Schwingungsdauer,  $\nu$  die Frequenz und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Welle.

Betrachtet man andererseits den örtlichen Verlauf der durch Gl. (10) beschriebenen harmonischen Welle zur Zeit  $t = 0$ , dann ist an allen Stellen  $x = n\lambda$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $\xi$  gleich  $\xi_0$ . Es gilt also

$$\omega \frac{n\lambda}{c} = n2\pi$$

oder

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda\nu. \quad (13)$$

Die Phasengeschwindigkeit einer harmonischen Welle (Schallgeschwindigkeit) ist gleich dem Produkt aus der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $\nu$ .

Aus dem Vergleich der Gl. (7) mit den Gln. (1) und (6) folgt

$$c^2 = \frac{E}{\varrho}, \quad (14)$$

$$c^2 = \frac{K}{\varrho}. \quad (15)$$

Die Schallschwingungen erfolgen mit so großer Geschwindigkeit, daß sie als adiabatische Vorgänge angesehen werden können. Ist das deformierbare Medium ein ideales Gas, gilt für die Schwingungen die Adiabatengleichung [vgl. Gl. (W. 2.0.-18)]

$$V^\kappa p = \text{const.} \quad (16)$$

In Gl. (16) bedeutet  $\kappa$  das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$  zur spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $c_v$ . Differenziert man Gl. (16) nach  $V$ , ergibt sich

$$\kappa V^{\kappa-1} p + V^\kappa \frac{\delta p}{\delta V} = 0$$

oder

$$\frac{\delta p}{\delta V} = -\kappa \frac{p}{V}.$$

Damit lautet Gl. (3)

$$K = \kappa p. \quad (3a)$$

Setzt man Gl. (3a) in Gl. (15) ein, erhält man

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\varrho}. \quad (17)$$

Für ideale Gase gilt [vgl. Gl. (M. 2.0.-4)]

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0} \frac{T}{T_0} = \frac{p_0}{\varrho_0} \left\{ 1 + \frac{T - T_0}{T_0} \right\}. \quad (18)$$

Die Schallgeschwindigkeit in idealen Gasen ist eine vom Druck unabhängige Funktion der absoluten Temperatur  $T$ . Aus den Gln. (17) und (18) folgt

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\varrho_0}} \sqrt{1 + \frac{T - T_0}{T_0}}. \quad (19a)$$

Für Luft erhält man im Bereich der Zimmertemperatur ( $T - T_0 \ll T_0$ ) in guter Näherung

$$c = 330,6 \left\{ 1 + \frac{T - T_0}{2T_0} \right\} \text{ ms}^{-1}. \quad (19b)$$

Stehende Wellen treten auf, wenn sich zwei gegenläufige harmonische Wellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude überlagern. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß eine Welle an einer bestimmten Grenze reflektiert wird.

Das Experiment zeigt:

Erfolgt die Reflexion der Welle am akustisch dünneren Medium, entsteht an der Grenze ein *Bauch* (Schwingungsmaximum). Wird die Welle dagegen am akustisch dichten Medium reflektiert, entsteht ein *Knoten* (Auslösung des Schwingzustandes).

## M. 8.1. Kundtsches Rohr

*Aufgaben:* 1. Die Schallgeschwindigkeit in einem Gas  $c_G$  und das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen  $\kappa$  sollen bestimmt werden.

2. Außerdem sind die Schallgeschwindigkeit in einem Metallstab  $c_M$  und der Elastizitätsmodul  $E$  des Stabmaterials zu ermitteln.

Das Kundtsche Rohr (vgl. Abb. 52) ist ein horizontal liegendes Glasrohr, das an einem Ende durch einen mit der Platte  $P_1$  versehenen Stopfen geschlossen ist. In das andere Ende ragt ein dünner Metallstab mit kreisförmigem Querschnitt. Dieser Stab ist genau in der Mitte seiner Länge fest eingeklemmt. Wenn man die Mantelfläche des Stabes mit einem Lappen parallel zur Stabachse reibt, bildet sich im Metallstab eine stehende Welle, die man

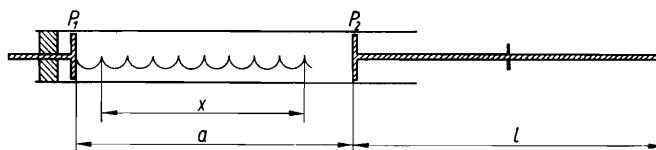


Abb. 52. Kundtsches Rohr

als unangenehmen Quietschton wahrnimmt. In der Mitte des Stabes (eingespannte Stelle) entsteht ein Schwingungsknoten, an den freien Enden je ein Schwingungsbauch. Zwischen der Wellenlänge und der Stablänge  $l$  besteht daher der Zusammenhang

$$\lambda_M = 2l. \quad (20)$$

Durch die am Stabende starr befestigte Platte  $P_2$  wird die Luft bzw. das Gas im Rohr zu Schwingungen angeregt. Da die von  $P_2$  ausgehenden Schallwellen an der Platte  $P_1$  reflektiert werden, entsteht in der Luft bzw. in dem Gas ebenfalls eine stehende Welle. Diese kann bei geeigneter Wahl des Abstandes  $a$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$  durch Korkpulver sichtbar gemacht werden. An der Platte  $P_1$  befindet sich ein Schwingungsknoten. Der Abstand ist immer dann geeignet gewählt, wenn sich die Platte  $P_2$  in unmittelbarer Nähe eines anderen Knotens befindet, da an einer solchen Stelle die Amplitude der Schwingungen in der Platte mit der Amplitude der Schwingungen in der Luft bzw. in dem Gas übereinstimmt. Die Wellenlänge in Luft  $\lambda$  bzw. in Gas  $\lambda_G$  ergibt sich aus dem Abstand  $x$  bzw.  $x_G$  von der ersten bis zur letzten gut erkennbaren Knotenstelle zu

$$\lambda = \frac{2x}{n} \quad (21)$$

bzw.

$$\lambda_G = \frac{2x_G}{m}. \quad (22)$$

Dabei ist  $n$  bzw.  $m$  die Zahl der zwischen den benachbarten Knoten liegenden Bäuche.

Die Frequenz  $\nu$  der stehenden Wellen ist in den verschiedenen Medien gleich. Daher gilt

$$c_M = \lambda_M \nu, \quad c_G = \lambda_G \nu, \quad c = \lambda \nu$$

oder

$$c_M = \frac{\lambda_M}{\lambda} c, \quad (23)$$

$$c_G = \frac{\lambda_G}{\lambda} c. \quad (24)$$

Die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit Hilfe eines Kundtschen Rohres ist ein vergleichendes Meßverfahren.  $c_M$  und  $c_G$  können nur angegeben werden, wenn die Schallgeschwindigkeit  $c$  in einem Medium (hier in Luft) bekannt ist.

Die stehende Welle in dem Gas, mit dem das Kundtsche Rohr gefüllt ist, kann auch durch einen Lautsprecher erzeugt werden, der einen Ton geeigneter Frequenz ausstrahlt. In diesem Falle ist die zweite Aufgabe zu streichen.

### *Versuchsausführung*

Wir messen die Zimmertemperatur und streuen Korkpulver in das Kundtsche Rohr. Pulver und Rohr müssen trocken sein, damit die feinen Korkstücke nicht am Glas anbacken. Das Pulver wird durch Klopfen am Rohr in einer Linie längs des unteren Innenmantels angeordnet und dann durch vorsichtiges Drehen des Rohres um seine Achse ein wenig gehoben. Nun erzeugen wir in dem Metallstab eine stehende Welle. Der dazu benötigte Lappen wird zur Erhöhung der Haftfähigkeit mit etwas Kolophonium bestreut. Wir verändern den Abstand  $a$  in sehr kleinen Schritten so lange, bis das Korkpulver im Glasrohr beim Reiben des Metallstabes deutlich erkennbare Kundtsche Staubfiguren bildet. Zur Bestimmung des Abstandes  $x$  dient ein Maßstab, der im allgemeinen mit einer verschiebbaren Visiereinrichtung versehen ist. Wir berechnen die Wellenlänge  $\lambda$  nach Gl. (21). Bei jeder Wiederholungsmessung (mindestens fünf) sind die Staubfiguren neu zu erzeugen. Aus den verschiedenen Werten  $\lambda_i$  wird der arithmetische Mittelwert  $\bar{\lambda}$  gebildet. Nun lassen wir einige Minuten lang ein Gas (z. B.  $\text{CO}_2$ ) durch das Kundtsche Rohr strömen. Anschließend wird der Versuch in der oben beschriebenen Weise ausgeführt. Aus den nach Gl. (22) berechneten Werten der Wellenlänge  $\lambda_G$  bilden wir den arithmetischen Mittelwert  $\bar{\lambda}_G$ .

Wir messen die Stablänge  $l$ , berechnen die Wellenlänge  $\lambda_M$  nach Gl. (20) und bestimmen zum Schluß noch einmal die Zimmertemperatur. Die Schallgeschwindigkeit in Luft  $c$  wird nach Gl. (19b), die in dem Metallstab  $c_M$

nach Gl. (23) und die in dem Gas  $c_G$  nach Gl. (24) berechnet. Dabei sind die Mittelwerte  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\lambda}_G$  zu verwenden.  $E$  ergibt sich aus Gl. (14) mit  $c = c_M$  und  $\kappa$  aus Gl. (19a) mit  $c = c_G$ . Die Dichten der verschiedenen Medien sind den Tab. 1 und 3 zu entnehmen.

## M. 8.2. Beugung des Lichts an Ultraschallwellen (Debye-Sears-Effekt)

- Aufgaben:*
1. Es ist die Schallgeschwindigkeit einer Flüssigkeit sowie die Schallwellenlänge nach der Methode von *Debye* und *Sears* zu bestimmen.
  2. Unter Zugrundelegung der in *Aufgabe 1* gemessenen Schallgeschwindigkeit sind durch Vergleichsmessungen die Schallgeschwindigkeiten von anderen Versuchsflüssigkeiten zu bestimmen.
  3. Von allen Versuchsflüssigkeiten ist der Kompressionsmodul zu berechnen.

Eine durch eine Flüssigkeit laufende Schallwelle besteht aus periodischen Verdichtungen und Verdünnungen, die sich mit Schallgeschwindigkeit durch das Medium bewegen (elastische Welle). Diese periodische Dichteänderung führt zu einer in gleicher Weise periodischen Änderung des optischen Brechungsindex (vgl. O. 3.). Eine ebene Schallwelle wirkt daher auf eine Lichtwelle wie ein Beugungsgitter, dessen Gitterkonstante gleich der Schallwellenlänge  $\lambda$  im Medium ist.

Ein solches Gitter nennt man *Phasengitter*, da die Lichtwellen, die an unterschiedlichen Stellen das Gitter durchlaufen, wegen der periodischen Änderung des Brechungsindex unterschiedliche optische Weglängen zurücklegen und beim Austritt gegeneinander phasenverschoben sind.

Beim Phasengitter treten im wesentlichen die gleichen Beugungerscheinungen auf, wie man sie bei einem üblicherweise verwendeten optischen Strichgitter beobachtet (vgl. O. 2.3.). Das letztere bezeichnet man als *Amplitudengitter*, weil es aus aufeinanderfolgenden durchsichtigen Spalten besteht, die durch undurchsichtige Partien voneinander getrennt sind. Das Licht wird also je nachdem, wo es auf das Gitter fällt, durchgelassen oder nicht, d. h. in der Amplitude verändert.

Die Erscheinung der Lichtbeugung an Schallwellen bezeichnet man als *Debye-Sears-Effekt*. Man verwendet hierzu Schallwellen im Ultraschallbereich, d. h. mit Frequenzen von mehr als 20 kHz.

Zum Nachweis des Beugungseffekts beleuchtet man die mit der Meßflüssigkeit gefüllte Glasküvette, in der sich der piezoelektrische Schallgeber befindet, senkrecht zur Schallrichtung mit parallelem monochromatischem cohärentem Licht (Abb. 53). Der durch die Linse 1 von der Lichtquelle be-

leuchtete Spalt wirkt als sekundäre Lichtquelle und wird durch die Linsen 2 und 3, zwischen denen die ungebeugten Strahlen parallel verlaufen, scharf auf den Schirm abgebildet. Anstelle des Schirms wird man oftmals eine Meßlupe verwenden.

Durch die Wirkung des Ultraschalls treten auf beiden Seiten vom zentralen Spaltbild eine Reihe von Beugungsbildern auf. Die Beugungerschei-

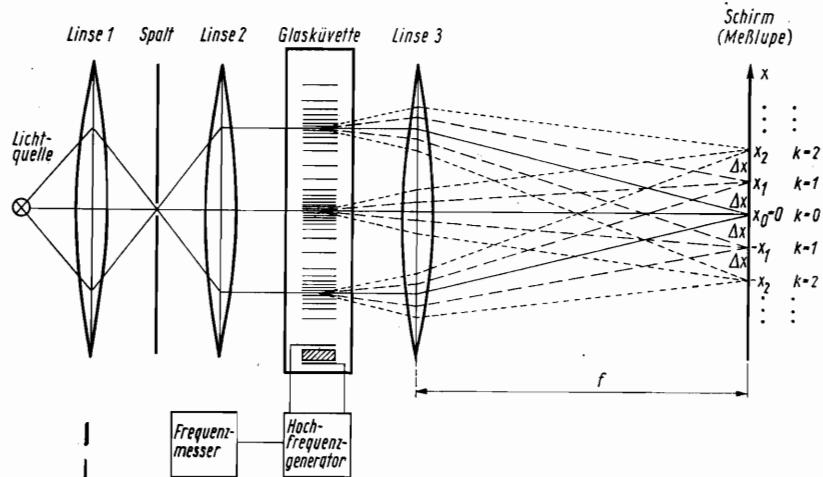


Abb. 53. Zum Debye-Sears-Effekt (Beugung stark schematisiert)

nungen sind sehr ähnlich denen, die an einem Strichgitter auftreten. Sie werden ebenfalls durch die Formel

$$b \cdot \sin \alpha_k = k \cdot \lambda_L \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

beschrieben (vgl. O. 2.3.); die Gitterkonstante  $b$  ist gleich der Schallwellenlänge  $\lambda$ . Zur Unterscheidung wird die Lichtwellenlänge hier mit  $\lambda_L$  bezeichnet. Beugungsmaxima  $k$ -ter Ordnung treten also bei Beugungswinkeln  $\alpha_k$  auf, für die gilt:

---


$$\lambda \cdot \sin \alpha_k = k \cdot \lambda_L \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$


---

Ist  $x_k$  der Abstand des  $k$ -ten Maximums vom Maximum nullter Ordnung (Zentralbild), so ergibt sich wegen der für kleine Winkel  $\alpha_k$  gültigen Beziehung  $x_k/f = \tan \alpha_k \approx \sin \alpha_k \approx \alpha_k$

$$\lambda \cdot \frac{x_k}{f} = k \cdot \lambda_L. \quad (26)$$

$f$  ist die Brennweite der Linse 3.

Für die Wellenlänge der Ultraschallwelle erhält man

$$\lambda = \frac{k \cdot \lambda_L \cdot f}{x_k} . \quad (27)$$

Die Abstände  $\Delta x$  benachbarter Maxima sind gleich. Es gilt

$$\Delta x = |x_{k+1} - x_k| = \frac{\lambda_L \cdot f}{\lambda} . \quad (28)$$

Ist die Frequenz  $\nu$  der Schallwelle bekannt, so läßt sich die Schallgeschwindigkeit  $c$  berechnen:

$$c = \lambda \cdot \nu = \frac{k \cdot \lambda_L \cdot f \cdot \nu}{x_k} \quad (29)$$

oder mit Gl. (28)

$$c = \lambda \cdot \nu = \frac{\lambda_L \cdot f \cdot \nu}{\Delta x_k} . \quad (30)$$

Da es für die Lage der Beugungsbilder bei der Fraunhoferschen Beugung gleichgültig ist, ob die beugende Struktur senkrecht zur optischen Achse verschoben wird bzw. sich bewegt, tritt der Debye-Sears-Effekt bei fortlaufenden und stehenden Wellen in gleicher Weise auf. Die Wellenlänge und damit die Gitterkonstante ist in beiden Fällen die gleiche. Die auftretende Dopplerverschiebung des gebeugten Lichts ist sehr klein und kann vernachlässigt werden.

### Versuchsausführung

Zur Absolutmessung der Schallwellenlänge nach *Aufgabe 1* verwenden wir Gl. (27) oder (28). Ist die Brennweite der Sammellinse 3 nicht bekannt, messen wir sie vorher nach einem der in Abschn. O. 1.1. beschriebenen Verfahren.  $x_k$  bzw.  $\Delta x$  wird am besten mit einer Meßlupe bestimmt. Wir messen mehrmals und bilden den Mittelwert.

Wir beachten, daß der piezoelektrische Schallgeber nur in Betrieb gesetzt werden darf, wenn sich Flüssigkeit in der Küvette befindet. Bei allen Messungen wählen wir die Breite des Beleuchtungsspaltes so klein wie möglich.

Um die Schallgeschwindigkeit  $c = \lambda \cdot \nu$  zu bestimmen, wird zusätzlich die Frequenz  $\nu$  des Hochfrequenzgenerators, der den Schallgeber anregt, mit Hilfe eines Frequenzzählers oder eines Meßgenerators gemessen.

Um mit der in Aufgabe 1 bestimmten Schallgeschwindigkeit durch Relativmessung die Schallgeschwindigkeit weiterer Versuchsfüssigkeiten zu erhalten, bedenken wir, daß bei konstanter Schallfrequenz  $\nu$  für zwei Flüssigkeiten I und II nach Gl. (30) gilt

$$c^I = \frac{\lambda_L f \nu}{\Delta x^I} ,$$

$$c^{II} = \frac{\lambda_L f \nu}{\Delta x^{II}} .$$

Damit wird

$$\frac{c^I}{c^{II}} = \frac{\Delta x^{II}}{\Delta x^I}.$$

Die Schallgeschwindigkeiten verhalten sich also bei konstanter Frequenz umgekehrt wie die Abstände  $\Delta x$  benachbarter Beugungsmaxima.

Als Bezugsflüssigkeit I wird die in Aufgabe 1 untersuchte gewählt. Für sie sind  $c^I$  und  $\Delta x^I$  bekannt.

Bei gleicher Ultraschallfrequenz bestimmen wir in einem weiteren Versuch den Abstand  $\Delta x^{II}$  benachbarter Beugungsmaxima der Flüssigkeit II. Da wir eine Reihe von Beugungsordnungen sehen, werden sämtliche Abstände benachbarter Maxima ausgemessen. Wir verwenden für die Berechnung den Mittelwert. Mit dem so bestimmten Wert  $\Delta x^{II}$  erhalten wir für die Schallgeschwindigkeit

$$c^{II} = \frac{\Delta x^I}{\Delta x^{II}} c^I.$$

Der Versuch wird mit anderen Flüssigkeiten wiederholt. Wenn die Schallgeschwindigkeiten aller Flüssigkeiten bestimmt sind, berechnen wir den Kompressionsmodul  $K$  nach Gl. (15). Die Dichte  $\varrho$  wird der Tab. 2 entnommen.

# Wärmelehre

## W. 1. TEMPERATURMESSUNG

### W. 1.0. Allgemeine Grundlagen

#### W. 1.0.1. Temperatur, Maßeinheiten und Temperaturskalen

Die Temperatur ist eine Zustandsgröße der Thermodynamik, die den Wärmezustand eines Körpers im thermodynamischen Gleichgewicht charakterisiert. Nach der kinetischen Wärmetheorie hängt sie von der durchschnittlichen kinetischen Energie der sich bewegenden Teilchen ab.

Die Temperatur übt einen entscheidenden Einfluß auf viele Stoffeigenschaften der Körper aus.

Die Thermodynamik verwendet die Temperatur als vierte Grundgröße neben den aus der Mechanik bekannten Grundgrößen Masse, Länge und Zeit. Die Temperatur kann nur indirekt gemessen werden. Die Messung beruht auf der Temperaturabhängigkeit solcher physikalischen und chemischen Stoffeigenschaften, die einer unmittelbaren Messung zugänglich sind. Man nennt diese Stoffe thermometrisch und die mit ihrer Hilfe festgelegten Temperaturskalen empirisch.

Eine Definition der Temperatureinheit ist nur im Zusammenhang mit der Realisierung einer Temperaturskale möglich. Die thermodynamische Temperaturskale ist zwar eine theoretisch begründete Skale (2. Hauptsatz und Carnotscher Kreisprozeß), sie kann aber weitgehend mit dem Gasthermometer verwirklicht werden. Mit Hilfe der thermodynamischen Temperaturskale wird die Temperatureinheit, das Kelvin, definiert:

---

Das Kelvin (K) ist der 273,16te Teil der (thermodynamischen) Temperatur des Tripelpunktes von reinem Wasser.

---

Je nach der Wahl des Nullpunktes unterscheidet man zwischen der absoluten oder Kelvin-Skale und der Celsius-Skale. Die absolute Temperatur wird mit  $T$  bezeichnet und in Kelvin (K) gemessen; sie beginnt beim absoluten Nullpunkt. Die CelsiusTemperatur wird mit  $t$  bezeichnet und in Grad Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) gemessen. Sie hat den Nullpunkt  $T_0 = 273,15 \text{ K}$ . Die CelsiusTemperatur kann also als spezielle Differenz

---

$$t = T - T_0 \tag{1}$$

---

aufgefaßt werden.

Temperaturbereiche (Differenzen, Toleranzen) stimmen demnach in beiden Skalen überein und werden ebenfalls in der Einheit Kelvin angegeben. Man muß daher beachten, daß ohne einen zusätzlichen Wortbegriff eine Unterscheidung, ob es sich um einen Skalenwert oder um eine Differenzgröße handelt, nicht möglich ist.

Bei hohen Genauigkeitsanforderungen sind thermodynamische Temperaturmessungen sehr schwierig und nur mit sehr hohem Aufwand zu verwirklichen. Man legte deshalb international für den praktischen Gebrauch eine empirische Temperaturskale mit mehreren Fixpunkten und den genauen Zuordnungsvorschriften fest. Diese *Internationale Praktische Temperaturskale* (IPT-Skale 1968) ist auf 11 Temperaturwerte, sogenannte Definitionsfixpunkte und auf Vorschriften für die Interpolation zwischen diesen Punkten gegründet.

Die IPT-Skale stimmt mit der thermodynamischen weitgehend, jedoch nicht vollständig überein. Da aber z. B. im Bereich von 0 °C bis 100 °C die Abweichungen zwischen den beiden Skalen nur einige Tausendstel Grad betragen, also bei den meisten praktischen Messungen unbedeutend sind, kann man die in der IPT-Skale gemessenen Temperaturen im allgemeinen in der Einheit der thermodynamischen Skale angeben.

### **W. 1.0.2. Temperaturmessung mittels mechanischer temperaturabhängiger Stoffeigenschaften**

Bei Erwärmung bzw. Abkühlung eines Körpers ändert sich unabhängig vom Aggregatzustand seine Länge bzw. sein Volumen. Bei einer Längenänderung tritt als Proportionalitätsfaktor der lineare Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  auf:

$$\alpha = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dT} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta T}. \quad (2)$$

Für die Temperaturabhängigkeit der Länge  $l$  gilt dann

---


$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T). \quad (3)$$


---

Analog dem linearen Ausdehnungskoeffizienten führt man den kubischen Ausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  ein:

$$\gamma = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dT} \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta T}. \quad (4)$$

Aus der dritten Potenz von Gl. (3) folgt bei Vernachlässigung der Potenzen 2. und 3. Ordnung mit  $\gamma \approx 3\alpha$

---


$$V = V_0(1 + \gamma \Delta T). \quad (5)$$


---

Das *Flüssigkeitsthermometer* ist die wichtigste Bauform der Thermometer. Es beruht auf der thermischen Ausdehnung einer Füllflüssigkeit in einem Gefäß mit angesetzter Kapillare und benutzt zum Anzeigen der Temperatur den Ausdehnungsunterschied zwischen Füllflüssigkeit und Gefäßmaterial. Als Thermometerfüllung werden benetzende und nicht benetzende Flüssigkeiten verwendet. Folgende Tabelle gibt einen Überblick über die gebräuchlichsten Flüssigkeiten und den Temperaturbereich, in dem sie anwendbar sind:

*Thermometerfüllflüssigkeiten*

| Material             | Temperaturbereich  |
|----------------------|--------------------|
| Quecksilber          | –38 bis +630 (750) |
| Quecksilber Thallium | –58 bis +30        |
| Pantan               | –200 bis +20       |
| Äthylalkohol         | –100 bis +50       |
| Toluol               | –70 bis +100       |

Für hohe Temperaturen werden die Thermometer aus Quarz hergestellt. Der Raum in der Kapillare ist mit einem unter Druck stehenden Gas, meist Stickstoff oder Wasserstoff, gefüllt. Die mit Glashermometern erreichbare Genauigkeit liegt im allgemeinen in der Größenordnung der Skalenteilung, also bei minimal 0,01 K. Die meisten Flüssigkeitsthermometer sind für den Fall justiert, daß sich der ganze Quecksilberfaden auf der zu messenden Temperatur befindet, also für völliges Eintauchen des Thermometers in ein temperaturkonstantes Bad bis über die Quecksilberkuppe. Müssen die Messungen mit herausragendem Faden durchgeführt werden, ist eine *Fadengenauigkeit* vorzunehmen. Die Korrektur läßt sich nach folgender Formel berechnen:

$$\Delta = k \cdot \Delta t_i (t - t_m). \quad (6)$$

Dabei ist  $\Delta t_i$  die Länge des herausragenden Fadens gemessen in °C,  $t$  die abgelesene Temperatur,  $t_m$  die mittlere Temperatur des Quecksilberfadens und  $k$  der scheinbare Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit in dem betreffenden Glas. Für Quecksilber in Jenaer Thermometerglas ist  $k = 0,000157 \text{ K}^{-1}$ , für nichtmetallische Flüssigkeiten wird allgemein  $k = 0,0013 \text{ K}^{-1}$  angenommen. Die mittlere Temperatur  $t_m$  wird entweder geschätzt oder mit einem speziellen „Fadenthermometer“ bestimmt.

Das *Beckmann-Thermometer* ist eine spezielle Form des Flüssigkeitsausdehnungsthermometers. Es wird insbesondere zur Bestimmung sehr kleiner Temperaturdifferenzen verwendet. Die Skale eines solchen Thermometers umfaßt im allgemeinen ein Temperaturintervall von nur 5 K mit einer Hundertstelgradteilung. Um das Thermometer für verschiedene Meßbereiche verwenden zu können, läßt sich die wirksame Quecksilbermenge verringern oder vergrößern. Abb. 54 zeigt den oberen Teil eines Beckmann-

Thermometers, das auf etwa  $50^{\circ}\text{C}$  erwärmt worden ist. Durch vorsichtiges Klopfen an das Thermometer reißt das Quecksilber in dem erweiterten, mittleren Rohr ab.

Der abgetrennte Anteil wird bei einer Abkühlung nicht wieder in das am unteren Ende befindliche Vorratsgefäß gezogen, so daß das Thermometer in einem Meßbereich von etwa  $50^{\circ}\text{C}$  bis  $55^{\circ}\text{C}$  verwendet werden kann. Will man den Meßbereich verändern, ist entweder ein weiterer Teil des Quecksilbers abzutrennen oder ein Teil des bereits abgetrennten Quecksilbers zurückzusaugen. Die Hilfsskale  $H$  läßt erkennen, daß das Thermometer für Temperaturen zwischen  $-20^{\circ}\text{C}$  und  $+120^{\circ}\text{C}$  brauchbar ist.

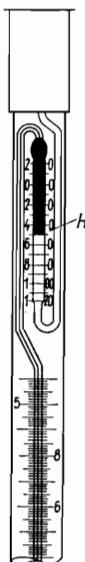


Abb. 54. Oberteil eines Beckmann-Thermometers

Die Ablesungen, die man mit einem auf diese Weise eingestellten Thermometer vornimmt, sind untereinander vergleichbar, ergeben aber noch keine absoluten Werte der Temperaturdifferenz. Hierzu ist es noch erforderlich, den *Gradwert* des Thermometers zu bestimmen. Der Gradwert, d. h. der einem Grad der Teilung entsprechende Temperaturwert, ist nur bei einer Temperatur richtig, denn er hängt von der Menge des Quecksilbers in der Kugel ab, und diese ändert sich, wenn Quecksilber in das Vorratsgefäß am oberen Ende der Kapillare überführt oder aus diesem entnommen wird. Dabei spielen vor allem die Ausdehnung des Glases (verschiedene Glassorten) und des Quecksilbers bei verschiedenen Temperaturen eine Rolle.

Der Gradwert läßt sich durch Vergleichsmessungen bestimmen oder berechnen. Besteht das Beckmann-Thermometer aus Jenaer Thermometerglas

und ist seine Skale für 0 °C bis 5 °C richtig (also Gradwert 1), so kann man den Gradwert nach der Formel

$$G = \frac{1}{1 - 0,00016 \cdot a} \quad (7)$$

berechnen. Dabei bedeutet  $a$  die in Grad angegebene abgetrennte Quecksilbermenge. Mit diesem Gradwert sind alle Ablesedifferenzen zu multiplizieren, wenn man Absolutwerte erhalten will. Der Gradwert hat dagegen bei allen Vergleichsmessungen nur untergeordnete Bedeutung. Aus dem gleichen Grund ist auch eine Fadenkorrektur nicht erforderlich, wenn Eichung und Messung unter gleichartigen Bedingungen durchgeführt werden.

In den *Gasthermometern* nutzt man zur Temperaturmessung die Zustandsänderung des (idealen) Gases aus. Es werden drei gasthermometrische Methoden unterschieden: Methode des konstanten Volumens, des konstanten Druckes und der konstanten Gefäßtemperatur.

Bei der ersten Methode bleibt das Volumen der eingeschlossenen Gasmasse etwa konstant. Die zu bestimmende Temperatur wird aus dem Druckverhältnis entsprechend (*Gay-Lussac*)

---


$$p = p_0(1 + \gamma \Delta T) \quad (8)$$


---

berechnet.

Bei der zweiten Methode wird der Druck konstant gehalten, wenn man das Meßgerät von der Bezugstemperatur auf die Meßtemperatur bringt. Die zu messende Temperatur ergibt sich aus dem Volumenverhältnis entsprechend Gl. (5). In beiden Fällen ist das Meßgefäß mit bekanntem Volumen über eine Kapillare mit einem Quecksilbermanometer verbunden.

Bei der Methode der konstanten Gefäßtemperatur wird die Temperatur aus Druck- und Volumenmessungen gewonnen. Dabei wird das Volumen so geändert, daß der Druck auf einen bestimmten Teil des Anfangsdruckes abnimmt.

### **W. 1.0.3. Temperaturmessung mittels elektrischer temperaturabhängiger Stoffeigenschaften**

Eine der wichtigsten Stoffeigenschaften, die zur Temperaturmessung verwendet werden, ist die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes (vgl. E. 1.0.4).

*Metallwiderstandsthermometer* bestehen meist aus Platin, z. T. auch aus Nickel.

Das Platinwiderstandsthermometer dient zur Interpolation der IPT-Skala 1968 zwischen 13,81 K und 903,89 K.

Für ein *Halbleiterthermometer* werden heute gesinterte Metalloxide und

oxydische Mischkristalle [Temperaturbereich  $-70^{\circ}\text{C}$  bis  $150$  ( $400$ )  $^{\circ}\text{C}$ ] sowie reines Germanium verwendet. Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes eines Halbleiters kann gut durch eine Exponentialfunktion [E. 1.0.4 – Gl. (10)] wiedergegeben werden. Wegen ihrer Eigenschaften, bei hohen Temperaturen den Strom besser zu leiten, heißen diese Halbleiter auch Heißleiter oder NTC-Widerstände (NTC: negative temperature coefficient).

Halbleiterwiderstandsthermometer haben gegenüber Metallwiderstandsthermometern einige Vorteile: Der größere Temperaturkoeffizient erlaubt die Anwendung von Meßwerken mit geringerer Empfindlichkeit. Da NTC-Widerstände sehr hochohmig hergestellt werden können, beeinflussen auch längere Anschlußleitungen das Meßergebnis nicht. Da weiterhin NTC-Widerstände sehr klein gehalten werden können (Kugeln mit Durchmesser 1 mm und kleiner), ergibt sich eine geringe thermische Trägheit (Einstellzeit einige ms). Nachteilig gegenüber Metallwiderstandsthermometern wirken sich die nichtlineare Widerstandscharakteristik, die notwendige künstliche Alterung bzw. Nacheichung und der durch große Herstellungstoleranzen bedingte Abgleich durch Vor- und Nebenwiderstände aus.

Eine andere wichtige Stoffeigenschaft, die zur Temperaturmessung verwendet wird, ist die Thermoelektrizität. Als Thermoelektrizität bezeichnet man die Gesamtheit von Erscheinungen in metallischen Stromkreisen, die aus einer Wechselwirkung von Strom und Wärme herrühren. Für die Temperaturmessung hat vor allem der *Seebeck-Effekt* Bedeutung. Er besagt, daß in einem Leiterkreis aus zwei verschiedenen Metallen eine Thermospannung erzeugt wird, wenn die beiden Lötstellen unterschiedliche Temperaturen haben. Wird der Stromkreis geschlossen, fließt ein Strom, der Thermostrom. Die Thermospannung liegt für die meisten Metalle bei  $10^{-4} \text{ V/K}$  bis  $10^{-5} \text{ V/K}$ . Die erzeugte Thermospannung wird in Thermoelementen zur Temperaturmessung benutzt. Dazu werden zwei Drähte aus verschiedenen Metallen durch Löten oder Schweißen miteinander verbunden. Die eine Lötstelle, die Meßlötstelle, wird der zu messenden Temperatur ausgesetzt, die zweite Lötstelle, die Vergleichslötstelle, befindet sich auf einer konstanten Temperatur (Eiswasser oder Thermostat). Die sich aufgrund der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Lötstellen ausbildende Thermospannung ist ein Maß für die Temperatur. Thermoelemente sind von  $-200^{\circ}\text{C}$  bis  $3000^{\circ}\text{C}$  zur Temperaturmessung geeignet. Es werden die verschiedensten Drahtkombinationen (Thermopaare) verwendet. Zum Beispiel ist die Kombination Kupfer/Konstantan für Temperaturen zwischen  $-200^{\circ}\text{C}$  und  $400^{\circ}\text{C}$  geeignet. Es ist eines der am häufigsten verwendeten Thermoelemente und besonders für niedrige Temperaturen geeignet. Mit dem Platin-Rhodium/Platin-Element erfolgt die Interpolation der IPT-Skale 1968 zwischen 900 K und 1388 K.

Die Thermospannung einer Materialkombination ist in erster Näherung proportional der Temperaturdifferenz

$$U = a \cdot \Delta T. \quad (9)$$

Für genauere Messungen ist eine quadratische Interpolation über Eichpunkte notwendig

$$U = a \cdot t \Delta T + b (\Delta T)^2. \quad (10)$$

Die Thermospannung wird im einfachsten Fall mit empfindlichen Galvanometern gemessen. Bei hohen Anforderungen müssen Kompensationsverfahren angewendet werden (E. 2.2).

Thermoelemente sind einfach herstellbar, besitzen eine geringe räumliche Ausdehnung, geringe thermische Trägheit und sind auch für Fernmessungen bei Verwendung von Ausgleichsleitungen geeignet.

#### **W. 1.0.4. Temperaturmessung mittels optischer temperaturabhängiger Stoffeigenschaften**

Mit optischen Methoden können die Temperaturen strahlender Körper gemessen werden, wenn ihre elektromagnetische Ausstrahlung eindeutig durch die Temperatur der Körper bestimmt ist, die Strahlung also eine Wärmestrahlung ist. Es gelten dann die in Abschn. O. 5.0 beschriebenen Gesetzmäßigkeiten [Gl. (2a) und Gl. (3)], d. h., exakt gelten sie nur für einen schwarzen Körper. Ein schwarzer Körper ist ein Körper, der alle einfallende elektromagnetische Strahlung unabhängig von Wellenlänge und Temperatur absorbiert, sein Absorptionsgrad ist  $\alpha = 1$  (ebenso sein Emissionsgrad  $\varepsilon = 1$ ), und sein Reflexionsgrad ist  $\varrho = 0$ . In der Natur existieren keine völlig schwarzen Strahler, gute Näherungen sind innen geschwärzte Hohlräume mit nicht zu großen Öffnungen. Reale Strahler, z. B. erwärmte Metalle (Glühlampen), strahlen bei gleichen Temperaturen weniger als schwarze Körper. Der Emissionskoeffizient ist stets kleiner als 1 (vgl. O. 5.0).

Aus den Strahlungsgesetzen ergibt sich, daß die Farbe, mit der ein Körper strahlt, von dessen Temperatur abhängt. Diesen Effekt kann man gut für grobe Temperaturabschätzungen benutzen. Ein Körper mit einer Temperatur von etwa 550 °C erscheint in dunkler Rotglut, gelbglühend hat er eine Temperatur von etwa 1100 °C, weißglühend etwa 1500 °C.

Meßgeräte, mit denen man durch Vergleich der Helligkeit bzw. Farbe eines Meßkörpers mit der einer Vergleichsfläche berührungsfrei Temperaturen (größer als 600 °C) bestimmen kann, heißen *Strahlungspyrometer*. Man unterscheidet, je nachdem ob der Vergleich im gesamten oder nur in einem schmalen Spektralbereich vorgenommen wird, *Gesamtstrahlungs-* und *Spektralpyrometer*. Letztere sind noch in *Teilstrahlungs-* und *Farypyrometer* unterteilbar. *Gesamtstrahlungspyrometer* konzentrieren mittels Linsen oder Hohlspiegel die von einem Körper emittierte Strahlung insgesamt oder eines sehr großen Spektralbereiches auf einen *Strahlungsempfänger*. Als Empfänger werden Photoelemente oder Thermoelemente benutzt. Die gewonnene Energie ist ein Maß für die Temperatur.

Das *Gliihfadenpyrometer*, ein Teilstrahlungspyrometer, vergleicht die Helligkeit bzw. Farbe des Meßobjektes mit der des Glühfadens einer speziellen Glühlampe. Durch Änderung des Lampenstromes wird der Glühfaden auf die Helligkeit des Meßobjektes eingestellt. Der Lampenstrom ist ein Maß für die Temperatur.

Das *Intensitätspyrometer*, ein weiteres Teilstrahlungspyrometer, gleicht im wesentlichen dem Gesamtstrahlungspyrometer, nur daß durch Vorschalten eines Farbilters ein kleiner Spektralbereich für die Messung verwendet wird. Die starke Lichtschwächung durch den Farbfilter macht die Verwendung von Verstärkern erforderlich.

*Farbpyrometer* filtern aus der zu untersuchenden Strahlung zwei komplementäre Spektralbereiche heraus und mischen diese. Die Mischfarbe wird dann mit der entsprechenden einer Glühlampe bekannter Farbtemperatur verglichen. Durch Farbfilter veränderlicher Dichte wird Farbgleichheit mit der Lampe hergestellt. Die Filterstellung ist ein Maß für die Temperatur.

### W. 1.0.5. Thermostat und Kontaktthermometer

Voraussetzungen für eine hinreichende Temperaturngleichheit zwischen Meßobjekt und Meßgerät und damit für eine richtige Temperaturanzeige sind räumliche und zeitliche Temperaturkonstanz des Meßobjektes. Dies läßt sich am besten mit einem Thermostaten mit Kontaktthermometer realisieren. Für Untersuchungen im Praktikum wird meist ein Flüssigkeitsthermostat verwendet, für hohe und tiefe Temperaturen gibt es auch Metallthermostaten. Ein *Flüssigkeitsthermostat* besteht aus einem nach außen wärmeisolierten Kessel, der zur Aufnahme der Flüssigkeit dient. Für den Temperaturbereich von 0 bis 100 °C wird normalerweise destilliertes Wasser verwendet, für höhere Temperaturen nimmt man in der Regel Silikon- oder Dampfturbinenöl. Im Inneren des Kessels befindet sich ein Rührwerk, das von einem Elektromotor angetrieben wird. Der Motor betätigt außerdem eine einstellbare Pumpe, mit der die Thermostatenflüssigkeit in einen äußeren Wärmebehälter gedrückt werden kann. Soll die Flüssigkeit im Wärmebehälter eine freie Oberfläche haben, muß der Thermostat mit einer kombinierten Druck-Saug-Pumpe ausgerüstet sein. Der Kessel enthält einen oder mehrere elektrische Heizkörper und eine Kühlslange, durch die man zur Abkühlung der Thermostatenflüssigkeit Leitungswasser fließen lassen kann.

Als Meßfühler dient ein Kontaktthermometer, dessen Prinzip in Abb. 55 dargestellt ist. In dem evakuierten Raum oberhalb des Quecksilberfadens *Q* ist eine Spindel *S* untergebracht. Wenn man die Spindel mit Hilfe des aufsetzbaren Hufeisenmagneten *H* dreht, bewegt sich die auf der Spindel sitzende Mutter *M* nach oben oder nach unten. An der Mutter ist ein Draht *D* befestigt. Bei einer bestimmten Temperatur *t* berührt die Oberfläche des Quecksilberfadens das Drahtende und schließt damit den elektrischen Kreis

zwischen den Polen 1 und 2. Die Lage der Mutter kann an einer Skale abgelesen werden, die in Grad Celsius geeicht ist. Die abgelesene Temperatur stimmt näherungsweise mit der Kontakttemperatur überein.

Das Regelungsprinzip des Thermostaten entspricht dem in Abb. 56 dargestellten Schaltplan. Wenn man den Netzschalter  $S_1$  schließt, wird der Motor  $M$  in Betrieb gesetzt. Außerdem fließt ein Strom durch das Relais  $Rel$  und den Widerstand  $R$ . Das Relais zieht an und schließt den Schalter

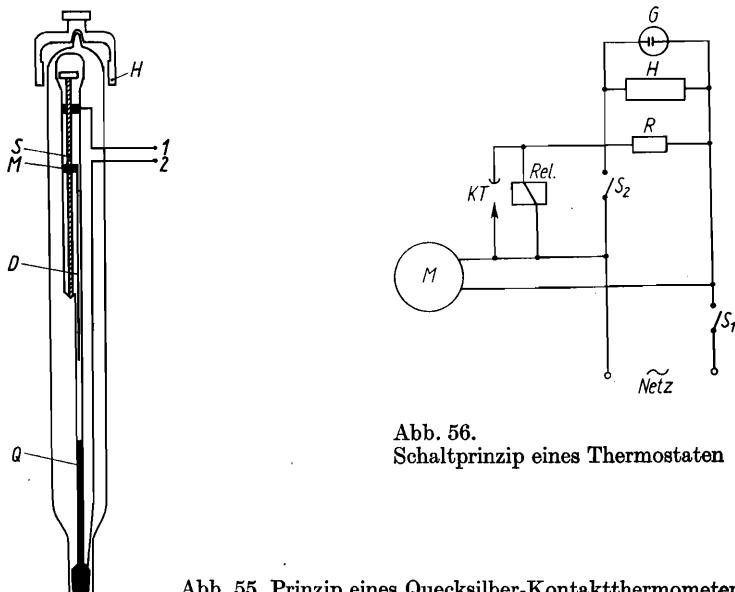


Abb. 55. Prinzip eines Quecksilber-Kontaktthermometers

$S_2$ . Der Heizer  $H$  wird vom Strom durchflossen, und die Glimmlampe  $G$  leuchtet auf. Parallel zum Relais liegt der Stromkreis des Kontaktthermometers  $KT$ . Wird dieser Kreis geschlossen, bricht die Spannung am Relais weitgehend zusammen. Der Schalter  $S_2$  wird geöffnet, die Heizung setzt aus, und die Glimmlampe erlischt. Nun kühlst sich die Flüssigkeit langsam ab, bis der Stromkreis des Kontaktthermometers unterbrochen wird. In diesem Augenblick schließt das Relais erneut den Heizstromkreis usw.

Größere Thermostate haben vier Heizleistungsstufen. Die Anpassung der Heizleistung an die jeweiligen Arbeitsbedingungen ist Voraussetzung für eine hohe Regelgenauigkeit. Die richtige Einstellung ist im allgemeinen erst nach Erreichen der Arbeitstemperatur, d. h. mit Einsetzen der Regelung des Thermostaten, möglich. Die günstigsten Bedingungen im Regelkreis bestehen, wenn die meist von einer Glimmlampe angezeigten Heiz- und Ausschaltzeiten möglichst kurz sind und ihr Verhältnis 1 : 1 beträgt. Zur Verkürzung der Aufheizzeit kann der Thermostat mit der größten Heiz-

leistung aufgeheizt und wenige Grad vor Erreichen der Arbeitstemperatur auf eine geringere Heizleistung umgeschaltet werden.

Die moderneren *Kombinationsthermostate* arbeiten mit zwei Heizungsstromkreisen. 50 % der Heizleistung werden ungeregelt geschaltet. Der über das Kontaktthermometer geregelte Heizleistungsanteil kann durch einen Thyristorsteller kontinuierlich zwischen Null und Maximum eingestellt werden. Die ungeregelte Grundheizung wirkt sich besonders bei hohen Arbeitstemperaturen günstig aus; da hier nur noch ein Teil der benötigten Heizleistung geregelt wird, ist eine wesentlich höhere Temperaturkonstanz erreichbar. Sie beträgt im allgemeinen etwa  $\pm 0,02$  K, bei den kontinuierlich regelbaren Thermostaten ist sie noch besser.

## W. 1.1. Ausdehnungskoeffizient einer Flüssigkeit

- Aufgaben:*
1. Die thermische Volumenänderung einer Flüssigkeit ist zu bestimmen und in einem Diagramm darzustellen.
  2. Mit Hilfe dieses Diagramms sind die Ausdehnungskoeffizienten in bestimmten Temperaturpunkten bzw. -intervallen zu berechnen.

Ein Glaskolben mit aufgesetzter Kapillare (Bürettenrohr) enthält die zu untersuchende Flüssigkeit (Volumen  $V_1$  bei der Temperatur  $t_1$ ). Das Ausdehnungsgefäß befindet sich in einem Wasserbad. Die Temperatur kann mit Hilfe eines Thermostaten schrittweise verändert werden. Die (scheinbare) Volumenänderung kann direkt an der geeichten Skale des Steigrohres abgelesen werden. Für den Ausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  der Flüssigkeit ergibt sich dann bei Beachtung der Ausdehnung des Glasgefäßes

---


$$\gamma = \frac{V_2 - V_1}{V_1(t_2 - t_1)} + 3\alpha_{Gl} \frac{V_2}{V_1}, \quad (11)$$


---

wobei unter  $V_2$  das Volumen bei der Temperatur  $t_2$  zu verstehen ist.

### Versuchsausführung

Ist das Volumen  $V_1$  bei der Temperatur  $t_1$  nicht bekannt, muß dies zunächst möglichst genau durch Wägung des leeren und des gefüllten Ausdehnungsgefäßes bestimmt werden. Danach erwärmen wir in Schritten von etwa 5 K bis über den höchsten in der Aufgabenstellung verlangten Temperaturpunkt bzw. über das höchste Intervall. Die abgelesenen Volumenänderungen  $\Delta V$  werden über den Temperaturänderungen  $\Delta T$  abgetragen. Aus den Anstiegen der Kurve in den Punkten  $t_1, t_2, \dots$  lassen sich die Ausdehnungskoeffizienten  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  bei  $t_1, t_2, \dots$  gemäß Gl. (11) berechnen.

## W. 1.2. Gasthermometer

*Aufgabe:* Der Spannungskoeffizient  $\gamma$  von Luft soll mit dem Gasthermometer von Jolly bestimmt werden. Außerdem ist die Zimmer-temperatur mit diesem Thermometer zu messen.

Das Gasthermometer nach Jolly (vgl. Abb. 57) besteht aus einem Glas-kolben  $K$ , der durch eine Kapillare  $k$  mit einem senkrecht stehenden Glas-rohr  $R_1$  verbunden ist. Der Kolben  $K$  soll im vorliegenden Falle mit Luft gefüllt sein. Parallel zu  $R_1$  befindet sich ein Glasrohr  $R_2$ , das vertikal ver-schoben werden kann. Als Verbindung zwischen den Rohren dient ein dickwandiger Gummischlauch. Die Rohre und der Schlauch sind mit Queck-silber gefüllt. Die Höhe des Rohres  $R_2$  wird stets so eingestellt, daß der Quecksilberspiegel im Rohr  $R_1$  die kleine Spitze  $S$  gerade berührt. Hinter den Rohren ist eine Skale angebracht, auf der man die Lage der Quecksilber-spiegel ablesen kann.

Zunächst soll die Luft in  $K$  die Temperatur  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  haben und unter dem Druck

$$p_0 = \rho g (h_0 + \Delta h_0) \quad (12)$$

stehen;  $h_0$  ist die Höhe der Quecksilbersäule im Barometer während der Bestimmung von  $\Delta h_0$ ;  $\rho$  ist die Dichte von Quecksilber. Bezeichnet man das innere Volumen des Kolbens bei  $0^\circ\text{C}$  mit  $V_0$ , so lautet die Zustandsglei-chung (W. 2.0.1–5)

$$p_0 V_0 = (n - \Delta n_0) R T_0, \quad (13)$$

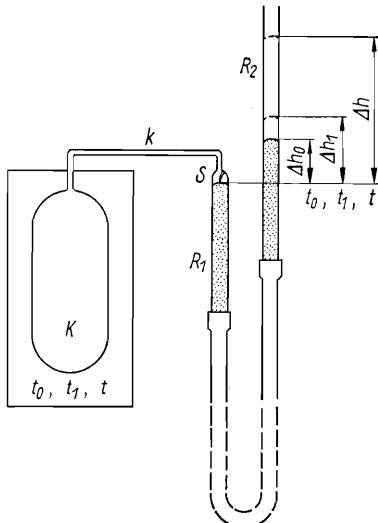


Abb. 57.  
Gasthermometer (schematisch)

wobei  $n$  die Luftmenge im Gasthermometer und  $\Delta n_0$  die Luftmenge im so genannten schädlichen Raum, d. h. in der Kapillare  $k$  bzw. im oberen Ende des Rohres  $R_1$ , ist. Diese Luft nimmt das Volumen  $\Delta V$  ein und besitzt näherungsweise die Zimmertemperatur  $t_1$ , d. h., es gilt

$$p_0 \Delta V = \Delta n_0 RT_1. \quad (14)$$

Eliminiert man aus den Gln. (13) und (14)  $\Delta n_0$ , erhält man

$$p_0 V_0 \left\{ 1 + \frac{\Delta V}{V_0} \frac{T_0}{T_1} \right\} = nRT_0. \quad (15)$$

Nun wird die Luft in  $K$  bis zur Siedetemperatur  $t$  von Wasser erwärmt. Der Druck steigt dabei auf

$$p = \rho g (h + \Delta h); \quad (16)$$

$h$  ist der Barometerstand in dem Augenblick, in dem man  $\Delta h$  bestimmt.<sup>1)</sup> Das innere Volumen des Kolbens vergrößert sich gemäß Gl. (5), und die Zustandsgleichung (W. 2.0.1–5) lautet

$$p V_0 (1 + 3\alpha_{\text{Gl}} t) = (n - \Delta n) RT. \quad (17)$$

Im Volumen  $\Delta V$ , in dem die Zimmertemperatur  $t_1$  näherungsweise erhalten bleibt, befindet sich jetzt die Luftmenge  $\Delta n$ , d. h., es gilt

$$p \Delta V = \Delta n RT_1. \quad (18)$$

Aus den Gln. (17) und (18) folgt

$$p V_0 \left\{ 1 + 3\alpha_{\text{Gl}} t + \frac{\Delta V}{V_0} \frac{T}{T_1} \right\} = nRT. \quad (19)$$

Die Division von Gl. (19) durch Gl. (15) liefert

$$\frac{p \left( 1 + 3\alpha_{\text{Gl}} t + \frac{\Delta V}{V_0} \frac{T}{T_1} \right)}{p_0 \left( 1 + \frac{\Delta V}{V_0} \frac{T_0}{T_1} \right)} = \frac{T}{T_0}. \quad (20a)$$

Nun sind sowohl  $3\alpha_{\text{Gl}} t$  als auch  $\Delta V/V_0$  sehr klein gegen 1. Man kann daher Gl. (20a) in guter Näherung

$$\frac{p}{p_0} \left\{ 1 + 3\alpha_{\text{Gl}} t + \frac{\Delta V}{V_0} \frac{T - T_0}{T_1} \right\} = \frac{T}{T_0} \quad (20)$$

<sup>1)</sup> Strenggenommen sind in den Gln. (12) und (16) unter  $\rho$  die Dichte von Quecksilber bei 0 °C und unter  $h_0$ ,  $\Delta h_0$ ,  $h$  und  $\Delta h$  die auf 0 °C umgerechneten Höhen zu verstehen. Diese Umrechnung ist aber überflüssig, da zur Berechnung von  $\gamma$  nur das Verhältnis  $(h + \Delta h)/(h_0 + \Delta h_0)$  benötigt wird.

schreiben.  $T - T_0$  ist aber gerade  $t$ , und es gilt

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \gamma t.$$

Wenn man Gl. (20) nach  $\gamma$  auflöst, ergibt sich bei Berücksichtigung der Gln. (16) und (12)

$$\gamma = \frac{1}{t} \left\{ \frac{h + \Delta h}{h_0 + \Delta h_0} \left[ 1 + \left( 3\alpha_{\text{Gl}} + \frac{\Delta V}{V_0} - \frac{1}{T_1} \right) t \right] - 1 \right\}. \quad (21)$$

In einer groben Näherung kann man das Volumen des schädlichen Raumes und die Ausdehnung des Glaskolbens  $K$  vernachlässigen. Dann vereinfacht sich Gl. (21) zu

$$\gamma_0 = \frac{1}{t} \left\{ \frac{h + \Delta h}{h_0 + \Delta h_0} - 1 \right\}. \quad (21a)$$

Mit diesem Wert  $\gamma_0$  berechnet man die Zimmertemperatur  $t_1$  näherungsweise zu

$$t_1 = \frac{1}{\gamma_0} \left\{ \frac{h_1 + \Delta h_1}{h_0 + \Delta h_0} - 1 \right\},$$

wobei  $h_1$  der Barometerstand während der Bestimmung von  $\Delta h_1$  ist. Die in Gl. (21) benötigte absolute Temperatur  $T_1$  ist in dieser Näherung

$$T_1 = \frac{1}{\gamma_0} \frac{h_1 + \Delta h_1}{h_0 + \Delta h_0}. \quad (22)$$

Wenn  $\gamma$  bekannt ist, kann das Thermometer zur Temperaturmessung verwendet werden.

### Versuchsausführung

Wir lesen am Barometer  $h_1$  ab und messen unmittelbar danach etwa fünfmal  $\Delta h_1$ . Dabei bemühen wir uns, den Quecksilberspiegel bei jeder Messung so genau wie möglich mit der Spitze  $S$  in Berührung zu bringen. Dann wird das Rohr  $R_2$  gesenkt und der Kolben  $K$  in ein Gefäß mit schmelzendem Eis getaucht. Das Senken des Rohres darf unter keinen Umständen vergessen werden, da sonst die Gefahr besteht, daß die sich abkühlende Luft Quecksilber in den Kolben  $K$  saugt. Nach einer Wartezeit von mindestens 20 Minuten bestimmen wir mehrmals  $\Delta h_0$  und den Luftdruck (die Höhe  $h_0$ ). Anschließend bringen wir den Kolben  $K$  in ein Gefäß mit siedendem Wasser, warten abermals 20 Minuten und lesen mehrfach  $\Delta h$  und den Luftdruck (die Höhe  $h$ ) ab. Vor dem Entfernen des Gefäßes mit siedendem Wasser muß das Rohr  $R_2$  wieder gesenkt werden.

Wir berechnen  $\gamma_0$  nach Gl. (21a),  $T_1$  nach Gl. (22) und  $\gamma$  nach Gl. (21). Die dem Luftdruck (Höhe  $h$ ) entsprechende Siedetemperatur des Wassers  $t$  ist der Tab. 8 zu entnehmen. Das Verhältnis  $\Delta V/V_0$  soll gegeben sein. Der Fehlerrechnung legen wir Gl. (21a) zugrunde, d. h., wir berechnen den Fehler von  $\gamma_0$ , der in sehr guter Näherung mit dem von  $\gamma$  übereinstimmt. Zur genauen Ermittlung der Zimmertemperatur  $t_1$  wird Gl. (21) nach  $t$  aufgelöst. Wir erhalten  $t = t_1$ , indem wir  $h + \Delta h$  durch  $h_1 + \Delta h_1$  ersetzen.

### **W. 1.3. Widerstandsthermometer**

- Aufgaben:*
1. Der elektrische Widerstand eines Platinwiderstandsthermometers ist bei Zimmertemperatur auf  $10^{-2} \Omega$  Genauigkeit zu messen.
  2. Aus dem Widerstand bei der Temperatur von Eiswasser und von siedendem Wasser ist der mittlere Temperaturkoeffizient zu berechnen.
  3. Die Erstarrungstemperatur einer Flüssigkeit ist als Haltepunkt der Abkühlungskurve zu bestimmen.

Da in dem angegebenen Temperaturintervall eine fast lineare Beziehung zwischen dem Widerstand des Platinmeßdrahtes und der Temperatur besteht, genügt zur Berechnung des Temperaturkoeffizienten Gl. (E. 1.0-9a).

Um die geforderte Genauigkeit von  $10^{-2} \Omega$  zu erhalten, ist zur Messung des Widerstandes eine *Präzisionsmeßbrücke in Wheatstone-Schaltung* erforderlich (vgl. E. 1.2). Dies ist eine Meßbrücke mit veränderlichem, durch Kurbeln einstellbarem Vergleichswiderstand  $R_N$  und mit festen, durch Stöpsel wählbaren Verzweigungswiderständen  $R_1$  und  $R_2$ . Der Vergleichswiderstand besteht aus Dekaden mit Einzelwiderständen von  $0,1; 1; 10; 100$  und  $1000 \Omega$ , die nach dem Baukastensystem zusammengesetzt und mit Laschen verbunden sind. Die Verzweigungswiderstände bestehen aus 2 Widerstandsreihen von  $10, 100, 1000$  und  $10000 \Omega$ , so daß das Verhältnis  $R_1 : R_2$  eine Potenz von 10 ergibt. Die Kippschalter im Batterie- und Galvanometerkreis haben Vorkontakte, an die der jeweilige Stromkreis über einen Vorwiderstand angeschlossen ist. Das Galvanometer ist dadurch bei nicht abgeglicher Brücke vor Überlastung geschützt.

#### *Versuchsausführung*

Die Schaltung der Brücke ist auf dem Gehäuse angegeben. Der Widerstand des Platinwiderstandsthermometers bei Zimmertemperatur soll grob bekannt sein; zur 1. Aufgabe ist daher zunächst die Brücke auf diesen Wert einzustellen.

Bei der 2. Aufgabe ist unbedingt Temperaturlgleichgewicht abzuwarten

(etwa 15 min). Bei der Siedetemperatur ist die Abhängigkeit vom Luftdruck zu beachten (vgl. Tab. 8).

Zur 3. Aufgabe füllen wir das Reagenzglas mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und bringen es in das mit gestoßenem Eis gefüllte Dewargefäß. Das Widerstandsthermometer wird so eingetaucht, daß es etwa in der Achse des Reagenzglases steht und den Boden gerade noch nicht berührt. Der Widerstand wird aller 30 s abgelesen, die Flüssigkeit wird ständig leicht gerührt. Der Haltepunkt soll etwa 10 min lang beobachtet werden. Die Abkühlungskurve ist zu zeichnen.

Bei der Fehlerabschätzung sind neben der Ablesegenauigkeit unbedingt auch die Meßunsicherheiten der verwendeten Meßgeräte zu beachten.

## W. 1.4. Pyrometer

- Aufgaben:*
1. Es sind die wahren Temperaturen eines Widerstandsrahtes bei verschiedenen Stromstärken mit Hilfe des Pyrometers zu bestimmen und graphisch darzustellen [ $T = f(I)$ ].
  2. Die wahren Temperaturen sind bei unter 1. gemessenen Strömen mit Hilfe des Stephan-Boltzmannschen Gesetzes zu berechnen und ebenfalls darzustellen (gleiches Diagramm).
  3. Die erhaltenen Kurven sind zu diskutieren, die Unterschiede zu begründen.

Im allgemeinen verwendet man zur Bestimmung hoher Temperaturen kommerzielle Pyrometer. Im Bereich von 700 bis 2000 °C bei Entfernungen ab 0,50 m ist das Teilstahlungspyrometer „Pyrolux I“ geeignet. Dies ist ein Glühfadenpyrometer nach dem Prinzip von *Holborn-Kurlbaum*. Die Leuchtdichte des zu messenden Temperaturstrahlers wird mit einem in seiner Leuchtdichte veränderlichen Glühfaden verglichen. Dieser Lampenfaden bildet den variablen Zweig einer fest abgestimmten, temperaturkompensierten Wheatstoneschen Brückenschaltung. Die an der Brücke angelegte Spannung läßt sich über einen Widerstand einstellen. Damit ändert sich der Heizstrom des elektrisch geheizten Pyrometerlampenfadens. Gleiche Leuchtdichte ist hergestellt, wenn sich der Fadenbogen nicht mehr vom Bild des Strahlers abhebt. Dann ist der Widerstand des Lampenfadens, der sich im Einklang mit seiner Temperatur ändert, ein Maß für die schwarze Temperatur des strahlenden Körpers. Durch einen Rotfilter wird das nötige einfarbige Licht erzeugt.

Zur Bestimmung der wahren Temperaturen  $T$  aus den gemessenen schwarzen Temperaturen  $T_s$  ist die Kenntnis des Emissionsgrades  $\varepsilon$  erforderlich. Um diesen zu messen, muß man den realen Strahler ins thermische Gleichgewicht mit einem schwarzen Strahler oder mit einem realen Strahler be-

kannten Emissionsgrades bringen. Für die meisten Metalle kann der Emissionsgrad Tabellen entnommen werden.

Die wahre Temperatur kann gemäß

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_s} + \frac{1}{\nu} \cdot \frac{k}{h} \cdot \ln \varepsilon \quad (23)$$

berechnet werden, wobei  $\nu$  die Frequenz,  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $h$  die Planck-Konstante sind. In den Beschreibungen der kommerziellen Geräte sind meist Korrekturtafeln bzw. -kurven enthalten, die nach Gl. (23) berechnet worden sind.

Für die Berechnung der wahren Temperaturen nach dem *Stefan-Boltzmannschen Gesetz* wird angenommen, daß alle zugeführte Energie bzw. Leistung in Strahlung umgesetzt wird. Mit Beachtung des Emissionsgrades  $\varepsilon$  ergibt sich dann aus Gl. (O. 5.0-3, 4) mit  $P$  (zugeführte elektrische Leistung),  $A$  (strahlende Fläche) und  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

$$P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot A. \quad (24)$$

### Versuchsausführung

Die Länge des eingespannten Widerstandsdrähtes (möglichst Flachdraht) ist so zu wählen, daß bei niedrigen Spannungen (10 bis 15 V) hohe Stromstärken (6 bis 12 A) entstehen. Die elektrischen Meßgeräte sind spannungsrichtig anzuschließen. Die Stromstärke erhöhen wir jeweils um 0,5 A, bei jedem Meßpunkt ermitteln wir eine Durchschnittstemperatur aus etwa 10 Messungen.

Für die tiefste und höchste gemessene Temperatur berechnen wir den zufälligen Fehler aus der entsprechenden Meßreihe, der systematische Fehler des Pyrometers wird abgeschätzt. Für die berechnete tiefste und höchste Temperatur berechnen wir die Größtfehler aus den abgeschätzten Fehlern der verwendeten Meßgeräte.

## W. 2. ZUSTANDSÄNDERUNGEN UND PHASENUMWANDLUNGEN

### W. 2.0. Allgemeine Grundlagen

#### W. 2.0.1. Zustandsgleichungen

Der Druck  $p$ , das Volumen  $V$  und die Temperatur  $T$  bzw.  $t$  sind physikalische Größen, die den Zustand eines Körpers beschreiben. Sie werden deshalb *Zustandsgrößen* genannt.

Zustandsänderungen sind besonders dann leicht zu überschauen, wenn eine Zustandsgröße konstant gehalten wird. Man unterscheidet

- a) *isobare* Zustandsänderungen ( $p = \text{const}$ ),
- b) *isochore* Zustandsänderungen ( $V = \text{const}$ ) und
- c) *isotherme* Zustandsänderungen ( $t = \text{const}$ ).

Die Zustandsgrößen  $p$ ,  $V$  und  $t$  können nicht beliebig geändert werden. Zwischen den drei Größen besteht ein funktionaler Zusammenhang, den man als *Zustandsgleichung* bezeichnet.

Für isotherme Zustandsänderungen in Gasen gilt nach *Boyle*

---


$$pV = \text{const}, \quad (1)$$


---

während isobare Zustandsänderungen durch

$$V = V_0(1 + \gamma t) = V_0 \gamma \left( \frac{1}{\gamma} + t \right) \quad (2)$$

und isochore Zustandsänderungen durch

$$p = p_0(1 + \gamma' t) \quad (3)$$

beschrieben werden (Gesetze von *Gay-Lussac*).  $\gamma$  ist der kubische Ausdehnungskoeffizient,  $\gamma'$  der Spannungskoeffizient des Gases. Gegeben sei ein Gas, das bei der Temperatur 0 °C unter dem Druck  $p_0$  stehen und das Volumen  $V_0$  einnehmen soll. Erwärmt man nun das Gas bei dem konstanten Druck  $p_0$  bis zur Temperatur  $t$ , so gilt

$$p_0 V = p_0 V_0 (1 + \gamma t). \quad (2a)$$

Führt man die gleiche Erwärmung bei dem konstanten Volumen  $V_0$  durch, ergibt sich

$$p V_0 = p_0 V_0 (1 + \gamma' t). \quad (3a)$$

Die Produkte  $p_0 V$  und  $p V_0$  müssen nach Gl. (1) übereinstimmen, da sie zwei Kombinationen von  $p$  und  $V$  darstellen, die zur gleichen Temperatur  $t$  gehören. Daraus folgt aber, daß  $\gamma'$  und  $\gamma$  gleich sind. Das Experiment zeigt darüber hinaus, daß alle Gase nahezu den gleichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten haben. Für das ideale Gas gilt

$$\gamma = \gamma' = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1}.$$

Gl. (2a) kann nach den bisherigen Überlegungen

$$pV = p_0 V_0 \gamma \left( \frac{1}{\gamma} + t \right) = C' T$$

geschrieben werden. Die Konstante  $C'$  muß der Masse  $m$  des Gases proportional sein, da die doppelte Gasmasse bei gleichem Druck und gleicher Temperatur das doppelte Volumen einnimmt.

$$pV = mCT. \quad (4)$$

Wird Gl. (4) auf ein Kilomol des Gases (Volumen  $V_M$ , Masse  $M$ ) bezogen, erhält man

$$pV_M = MCT. \quad (4a)$$

Die Erfahrung zeigt nun, daß das Volumen eines Kilomols für alle Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur gleich ist. Während  $C$  eine Materialkonstante darstellt, ist das Produkt  $MC$  eine Konstante  $R$ , die von der Natur des speziellen Gases nicht abhängt;  $R$  wird molare Gaskonstante genannt. Damit können die Gl. (4) und (4a)

$$pV = \frac{m}{M} RT = nRT, \quad (5)$$

$$pV_M = RT \quad (5a)$$


---

geschrieben werden. Das Verhältnis der Masse  $m$  des Gases zur Masse eines Kilomols  $M$  ist die Stoffmenge  $n$  in Kilomol. Unter Normalbedingungen ( $p_N = 760$  Torr,  $T_N = 273,15$  K) gilt

$$V_{M,N} = 22,41 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Aus Gl. (5a) folgt damit für die molare Gaskonstante

$$R = 8,314 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Ein Gas, das der Zustandsgleichung (5) genügt, bezeichnet man als *ideales Gas*. Gl. (5) kann mit Hilfe der kinetischen Gastheorie begründet werden, wenn man die Gasmoleküle als völlig elastische Punkte<sup>1)</sup> ansieht, die nur bei Zusammenstößen in Wechselwirkung miteinander stehen. In allen realen Gasen existieren aber auch Kräfte zwischen denjenigen Molekülen, die sich nicht berühren. Sowohl die auf ein beliebig herausgegriffenes Molekül wirkende Kraft als auch die Zahl aller wechselwirkenden Teilchen sind der Dichte proportional. Der gesamten Wechselwirkungskraft entspricht der sogenannte Kohäsionsdruck, der dem Quadrat der Dichte proportional bzw. dem Quadrat des Volumens umgekehrt proportional ist. Dieser Druck muß dem in der Zustandsgleichung idealer Gase auftretenden Druck  $p$  additiv hinzugefügt werden. Außerdem kann das Volumen des Gases nie- mals verschwinden, da die Moleküle selbst ein endliches Volumen einneh-

<sup>1)</sup> Kugeln mit dem Durchmesser Null.

men. Diese beiden Überlegungen führen zu der *van-der-Waalsschen Zustandsgleichung*. Diese lautet, bezogen auf ein Kilomol,

$$\left( p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = RT. \quad (6)$$

Die Größen  $a$  und  $b$  werden als van-der-Waalssche Konstanten bezeichnet. Das van-der-Waalssche *Kovolumen*  $b$  entspricht näherungsweise dem vierfachen Eigenvolumen der Moleküle. Gl. (6) kann

$$p V_M^3 - (pb + RT) V_M^2 + a V_M - ab = 0 \quad (6a)$$

geschrieben werden. Wenn  $T$  und  $p$  gegeben sind, erhält man aus Gl. (6a) entweder drei reelle Werte  $V_M$  oder nur einen. In Abb. 58 sind drei verschiedene Isothermen von Kohlendioxid dargestellt;  $\text{CO}_2$  ist ein Stoff, der der van-der-Waalsschen Zustandsgleichung in guter Näherung genügt.

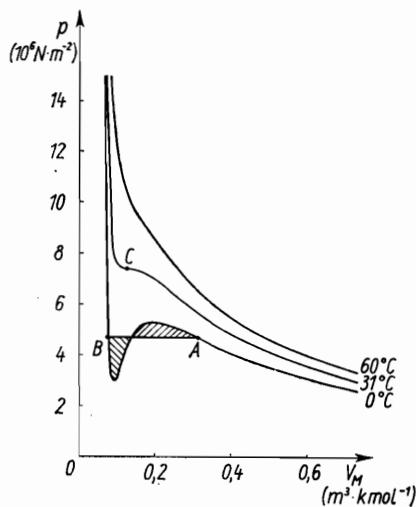


Abb. 58.  
Isothermen von Kohlendioxid

Die nach Gl. (6) berechnete Isotherme für 0 °C besitzt ein Maximum und ein Minimum. Diese Extremwerte werden im Experiment nicht realisiert. Sie entsprechen labilen Zuständen. Der Übergang vom Maximum zum Minimum ist völlig ausgeschlossen, da bei konstanter Temperatur der Druck mit abnehmendem Volumen nicht sinken kann. Wenn man das gasförmige  $\text{CO}_2$  isotherm komprimiert, beginnt am Punkt  $A$  die Verflüssigung, die am Punkt  $B$  abgeschlossen ist. Während dieses Prozesses wird die Umwandlungswärme freigesetzt. In dem Bereich, in dem der Stoff teilweise in gasförmiger und teilweise in flüssiger Phase vorliegt, bleibt der Druck konstant. Die Gerade  $AB$  ist so zu wählen, daß die beiden in Abb. 58 schraffierten

ten Flächen gleich sind. Diese Forderung ergibt sich aus dem 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik.

In den Isothermen, die sich nach Gl. (6) für Temperaturen zwischen 0 und 31 °C ergeben, rücken die beiden Extremwerte um so näher aneinander, je höher die Temperatur ist. Die Isotherme für 31 °C ist dadurch ausgezeichnet, daß die Extremwerte in einem Punkt  $C$  zusammenfallen. An dieser Stelle hat die Isotherme einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente. Die zugehörigen Werte von  $p$  und  $V_M$  bezeichnet man als kritischen Druck  $p_k$  und als kritisches Volumen eines Kilomols  $V_{Mk}$ . Die Temperatur, die dieser Isothermen entspricht, ist die kritische Temperatur  $T_k$ . Wenn man die kritische Temperatur und den kritischen Druck eines Stoffes kennt, lassen sich  $V_{Mk}$  und die van-der-Waalsschen Konstanten  $a$  und  $b$  berechnen. Oberhalb der kritischen Temperatur hat man keine Möglichkeit, die gasförmige Phase von der flüssigen Phase zu unterscheiden (vgl. die in Abb. 58 gezeichnete Isotherme für 60 °C).

### W. 2.0.2. Energiesatz und Adiabatengleichung

Der Energiesatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) resultiert aus der Erfahrung, daß sich keine Maschine konstruieren läßt, deren Arbeitsabgabe größer als die zugeführte Energie ist. Diese negative Aussage kann auch positiv formuliert werden: Die Summe der einem System zugeführten Wärmemenge  $\Delta Q$  und der zugeführten Arbeit  $\Delta W$  ist gleich der Zunahme der inneren Energie des Systems  $\Delta U$ :

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W. \quad (7)$$

Die Wärmemenge ist eine spezielle Energieform. Sie ist der Masse  $m$  und der Temperaturänderung  $\Delta t = \Delta T$  des Systems proportional:

$$\Delta Q = cm \Delta t = cm \Delta T. \quad (8)$$

Das Produkt  $c \cdot m$  bezeichnet man als Wärmekapazität, den Proportionalitätsfaktor  $c$  als spezifische Wärmekapazität. Die Einheiten für die Wärmemenge und die spezifische Wärmekapazität sind in W. 3 angegeben.

Die dem System zugeführte Arbeit kann

$$\Delta W = -p \Delta V \quad (9)$$

geschrieben werden, wobei  $\Delta V$  die Volumenänderung bei dem Druck  $p$  ist. Durch das Minuszeichen in Gl. (9) wird berücksichtigt, daß bei einer Arbeitszufuhr das Volumen abnimmt,  $\Delta V$  also negativ ist.

Nach Versuchen von *Gay-Lussac*, *Joule* und *Thomson* ändert sich die Temperatur eines Gases, das der Zustandsgleichung (5) genügt, bei Ausdehnung ohne Arbeitsaufwand (d. h. ins Vakuum) nicht. Aus der Voraus-

setzung  $\Delta W = 0$  und der experimentellen Feststellung  $\Delta T = 0$  (also  $\Delta Q = 0$ ) folgt

$$\Delta U = 0.$$

Die innere Energie eines idealen Gases ist nicht vom Volumen abhängig. Sie ist eine reine Temperaturfunktion. Dann muß aber jeder beliebige Übergang eines idealen Gases von der Temperatur  $T$  zur Temperatur  $T + \Delta T$  energetisch einer isochoren Erwärmung ( $\Delta V = \Delta W = 0$ ) von  $T$  auf  $T + \Delta T$  gleichwertig sein, d. h., es gilt

$$\Delta U = c_v m \Delta T. \quad (10)$$

Für eine isobare Erwärmung eines idealen Gases von  $T$  auf  $T + \Delta T$  nimmt der Energiesatz die Form

$$c_v m \Delta T = c_p m \Delta T - p \Delta V \quad (11)$$

an.  $c_v$  ist die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen,  $c_p$  die bei konstantem Druck. Nach Gl. (5) gilt für eine isobare Zustandsänderung

$$p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T. \quad (12)$$

Setzt man Gl. (12) in Gl. (11) ein, ergibt sich

$$R = M(c_p - c_v) = C_p - C_v. \quad (13)$$

Die molare Gaskonstante  $R$  ist also die molare Wärmekapazität eines idealen Gases bei konstantem Druck  $C_p$ , vermindert um diejenige bei konstantem Volumen  $C_v$ .

Für eine *adiabatische* Zustandsänderung, bei der dem System Wärme weder zugeführt noch entzogen wird, lautet der Energiesatz Gl. (7) in differentieller Schreibweise

$$dU = dW = -p dV. \quad (14)$$

Wendet man Gl. (14) auf ein ideales Gas an, so ergibt sich mit den Gln. (10) und (5)

$$\frac{dT}{T} = - \frac{R}{Mc_v} \frac{dV}{V}. \quad (15)$$

Unter der Voraussetzung, daß  $c_v$  konstant ist, liefert die Integration von Gl. (15) mit

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} \quad (16)$$

$$TV^{\kappa-1} = \text{const.} \quad (17)$$

Durch Einsetzen der Zustandsgleichung (5) in Gl. (17) erhält man zwei andere Formen der Adiabatengleichung.

$$pV^{\kappa} = \text{const}, \quad (18)$$

$$\frac{T^{\kappa}}{p^{\kappa-1}} = \text{const}. \quad (19)$$

### W. 2.0.3. Dampfdruck

Bringt man einen Flüssigkeitstropfen in ein evakuiertes Gefäß, das sich in einem Wärmebehälter konstanter Temperatur  $T$  befindet, so verdampft ein Teil der Flüssigkeit. Es stellt sich ein bestimmter Dampfdruck  $p$  ein, der nur von der Temperatur, nicht aber von dem zur Verfügung stehenden Volumen abhängt. Eine Vergrößerung des Volumens bei konstanter Temperatur hat zur Folge, daß ein weiterer Anteil Flüssigkeit verdampft. Eine Verkleinerung des Volumens bewirkt, daß der Dampf teilweise kondensiert.

Der Begriff des Dampfdruckes hat nur für solche Temperaturen einen Sinn, bei denen der betrachtete Stoff sowohl in flüssiger als auch in gasförmiger Phase vorliegen kann. Daher endet die Dampfdruckkurve jedes Stoffes im kritischen Punkt  $C$  (vgl. Abb. 58). Wenn man nur Temperaturintervalle zuläßt, deren obere Grenze klein gegen die kritische Temperatur  $T_k$  ist, kann der Dampfdruck vieler Stoffe in guter Näherung durch

$$\lg \frac{p}{p_0} = -a_1 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) - a_2 \lg \frac{T}{T_0} \quad (20)$$

beschrieben werden. In Gl. (20) ist  $p$  der Dampfdruck bei der Temperatur  $T$  und  $p_0$  derjenige bei  $T_0$ . Den Zusammenhang zwischen der molaren Verdampfungswärme  $Q_{23}$  und dem Differentialquotienten des Dampfdruckes nach der absoluten Temperatur liefert die Gleichung von *Clausius* und *Clapeyron*

$$Q_{23} = T \frac{dp}{dT} (V_3 - V_2). \quad (21)$$

Wenn man nur Zustände betrachtet, die hinreichend weit unterhalb des kritischen Punktes liegen, kann das Molvolumen der Flüssigkeit  $V_2$  gegen das des Dampfes  $V_3$  vernachlässigt werden. Verwendet man darüber hinaus für den Dampf die Zustandsgleichung (5a), so vereinfacht sich Gl. (21) zu

$$Q_{23} = T^2 \frac{dp}{dT} \frac{R}{p}. \quad (22)$$

Durch Einführung der Variablen  $y = \ln p/p_0$  und  $x = 1/T$  geht Gl. (22) in

$$\frac{d(\ln p/p_0)}{d(1/T)} = -\frac{Q_{23}}{R} \quad (23)$$

über. In der gleichen Näherung besteht zwischen dem Dampfdruck über dem festen Stoff  $p_{\text{fest}}$ , der Temperatur  $T$  und der molaren Sublimationswärme  $Q_{13}$  der Zusammenhang

$$\frac{d(\ln(p/p_0)_{\text{fest}})}{d(1/T)} = -\frac{Q_{13}}{R}. \quad (24)$$

Die Indizes in den Gln. (21) bis (24) sind so gewählt, daß 1 den festen, 2 den flüssigen und 3 den gasförmigen Zustand repräsentiert.

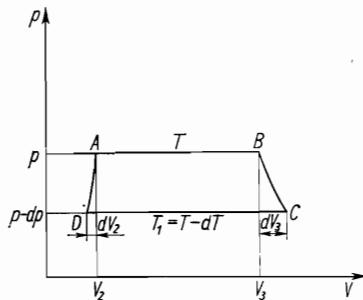


Abb. 59.  
Zur Gleichung von *Clausius*  
und *Clapeyron*

Gl. (21) kann begründet werden, wenn man den reversiblen *Carnotschen Kreisprozeß* betrachtet, der in Abb. 59 dargestellt ist. Während des Überganges vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$  wird ein Kilomol Flüssigkeit durch Zufuhr der Umwandlungswärme  $Q_{23}$  bei der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$  vollständig verdampft. Die abgegebene Arbeit beträgt<sup>1)</sup>

$$W_{AB} = -p(V_3 - V_2).$$

Durch eine adiabatische Entspannung des Dampfes vom Druck  $p$  auf den Druck  $p - dp$  gelangt man zum Punkt  $C$ . Die geleistete Arbeit ist näherungsweise

$$dW_{BC} = -p dV_3.$$

Eine isotherme Kompression bei der Temperatur  $T_1$  führt zum Punkt  $D$ . In diesem Punkt soll der Dampf vollständig kondensiert sein. Die dem System zugeführte Arbeit ist

$$W_{CD} = (p - dp)(V_3 + dV_3 - V_2 + dV_2).$$

Durch Zufuhr der Wärmemenge  $dQ$ , die im Vergleich zu  $Q_{23}$  vernachlässigbar klein ist, kehrt man zum Punkt  $A$  zurück. Die bei diesem Übergang geleistete Arbeit kann

1) Auch hier werden zugeführte Arbeiten positiv, abgegebene Arbeiten negativ gerechnet. Die Symbole  $W$  bzw.  $V$  bedeuten in der oben stehenden Betrachtung stets Arbeit je Kilomol bzw. Volumen je Kilomol.

näherungsweise

$$dW_{DA} = -p dV_2$$

geschrieben werden. Vernachlässigt man alle Produkte von differentiell kleinen Größen, erhält man für den Betrag der insgesamt geleisteten Arbeit

$$|W| = |W_{AB} + dW_{BC} + W_{CD} + dW_{DA}| = dp(V_3 - V_2).$$

Als Wirkungsgrad oder Nutzeffekt  $\eta$  des Kreisprozesses bezeichnet man den Betrag der geleisteten Arbeit, geteilt durch die zugeführte Wärmemenge, d. h., es ist

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{23}} = \frac{V_3 - V_2}{Q_{23}} dp. \quad (25a)$$

Andererseits ist der Wirkungsgrad eines reversiblen Carnot-Prozesses

$$\eta = \frac{T - T_1}{T} = \frac{dT}{T}. \quad (25)$$

Aus den Gln. (25a) und (25) läßt sich Gl. (21) sofort ablesen. Für den Prozeß der Phasenumwandlung (vgl. Abb. 59) lautet der Energiesatz, bezogen auf ein Kilomol:

$$U_3 - U_2 = Q_{23} - p(V_3 - V_2). \quad (26)$$

Dieser Prozeß ist sowohl isotherm als auch isobar. Wenn man annimmt, daß die molaren Wärmekapazitäten konstant sind, gilt für einen isobaren Prozeß

$$dU = d(C_p T) - d(pV),$$

oder wenn man längs der Isobaren integriert

$$U = C_p T - pV + f. \quad (27)$$

$f$  ist strenggenommen eine Funktion des Druckes, soll aber in der folgenden Betrachtung als Konstante behandelt werden. Gl. (27) ist sowohl für den Dampf (Index 3) als auch für die Flüssigkeit (Index 2) gültig. Daher kann Gl. (26)

$$f_3 - f_2 - p(V_3 - V_2) - (C_{p2} - C_{p3})T = Q_{23} - p(V_3 - V_2)$$

geschrieben werden. Mit der Abkürzung

$$f_3 - f_2 = Q_0$$

erhält man

$$Q_{23} = Q_0 - (C_{p2} - C_{p3})T. \quad (28)$$

Setzt man Gl. (28) in Gl. (22) ein und trennt nach den Variablen  $p$  und  $T$ , ergibt sich

$$\frac{dp}{p} = \frac{Q_0}{R} \frac{dT}{T^2} - \frac{C_{p2} - C_{p3}}{R} \frac{dT}{T},$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Q_0}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) - \frac{C_{p2} - C_{p3}}{R} \ln \frac{T}{T_0} \quad (29)$$

Wegen

$$\lg \frac{p}{p_0} = \ln \frac{p}{p_0} \lg e$$

liefert der Vergleich der Gln. (29) und (20)

$$a_1 = \frac{Q_0}{R} \lg e, \quad (30)$$

$$a_2 = \frac{C_{p2} - C_{p3}}{R}. \quad (31)$$

## W. 2.1. Bestimmung der relativen Molekülmasse nach Menzies

*Aufgabe:* Die relative Molekülmasse eines Stoffes soll nach der Methode von Menzies bestimmt werden.

Gegeben sei die in Abb. 60 dargestellte Anordnung. Sie besteht aus einem Glaskolben 1 (Radius  $r_1$ ), dessen oberes Ende in ein Rohr 2 übergeht. Im Rohr 1 befindet sich ein herausnehmbarer Metallzylinder 4, der ein kleines zugeschmolzenes Glaskölbchen 6 enthält. An das Rohr 2 ist seitlich ein Rohr 3 angesetzt. In ihm befindet sich ein Eisenstift 5, der in eine Öffnung des Metallzylinders eingeschoben werden kann und einen Fallkörper 9 im oberen Teil des Metallzylinders festhält. Das Glaskölbchen 6 enthält die zu untersuchende Stoffmenge  $n$  (Siedetemperatur  $T_s$ ) und die Luftmenge  $v$ . Der untere Teil des Kolbens 1 ist mit einem vertikal stehenden Rohr 7 (Radius  $r$ )

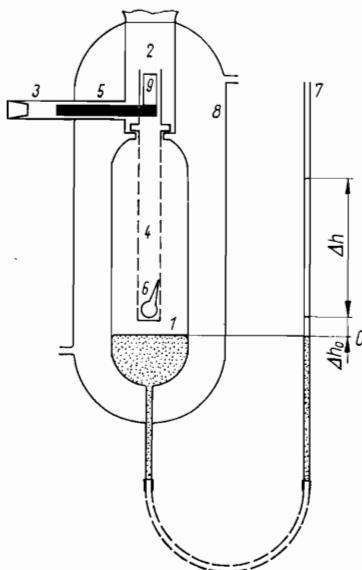


Abb. 60.  
Anordnung zur Bestimmung  
der relativen Molekülmasse  
nach Menzies

verbunden und mit Quecksilber (Dichte  $\varrho$ ) gefüllt. Der obere Teil enthält Luft. Der gesamte Kolben 1 ist in einem Glasgefäß 8 untergebracht, durch das eine Flüssigkeit konstanter Temperatur

$$T > T_s$$

fließt. Das Volumen, das die Luft im Kolben 1 bei der Temperatur  $T$  und dem Luftdruck

$$p = \varrho gh \quad (32)$$

einnimmt, soll mit  $V$  bezeichnet werden.

Wenn man das Rohr 2 mit einem Stopfen schließt, steigt der Druck im Kolben 1 an. Nach dem Einstellen des Temperaturlgleichgewichtes hat sich der Quecksilberspiegel im Kolben um das Stück  $\delta h_0^1$ ) gesenkt, während er im Rohr 7 um  $\Delta h_0$  gestiegen ist. Dadurch nimmt das Luftvolumen um  $\Delta V_0$  zu. Da das Volumen des Quecksilbers in guter Näherung konstant bleibt, besteht der Zusammenhang

$$\Delta V_0 = \pi r_1^2 \delta h_0 = \pi r^2 \Delta h_0. \quad (33)$$

Für die Druckerhöhung  $\Delta p_0$  gilt

$$\Delta p_0 = \varrho g (\Delta h_0 + \delta h_0) = \varrho g \Delta h_0 \left\{ 1 + \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right\}, \quad (34)$$

und die Zustandsgleichung (5) für die Luftmenge  $n_0$ , die sich im Kolben 1 befindet, lautet

$$(p + \Delta p_0) (V + \Delta V_0) = n_0 RT. \quad (35)$$

Wenn man nun das kleine Glasgefäß 6 zerstört, indem man mit Hilfe eines Ringmagneten den Eisenstift aus der Öffnung zieht und den Fallkörper auf das Glaskölbchen fallen lässt, verdampft der zu untersuchende Stoff. Dadurch steigt der Druck um  $\Delta p$ , das Gasvolumen vergrößert sich um  $\Delta V$ , der Quecksilberspiegel im Kolben 1 sinkt um  $\delta h$  und der im Rohr 7 steigt um  $\Delta h$ . Es gilt

$$\Delta V = \pi r_1^2 \delta h = \pi r^2 \Delta h, \quad (36)$$

$$\Delta p = \varrho g (\Delta h + \delta h) = \varrho g \Delta h \left\{ 1 + \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right\}. \quad (37)$$

Das Glasgefäß 6 wird bei der Zimmertemperatur  $T_1$ , also vor dem Einbringen in den Kolben 1, zugeschmolzen. Bezeichnet man das Volumen der in ihm enthaltenen Luft mit  $v$ , dann ist

$$pv = \nu R T_1. \quad (38)$$

<sup>1)</sup> Da sich im Experiment der Quecksilberspiegel im Kolben 1 kaum wahrnehmbar senkt, sind  $\delta h_0$  und die später auftretende Größe  $\delta h$  in Abb. 60 nicht eingezzeichnet.

Nach dem Zerstören des Gefäßes enthält das Volumen  $v$  nur noch die Luftmenge  $\nu - \Delta\nu$ , d. h., es gilt

$$(p + \Delta p_0 + \Delta p)v = (\nu - \Delta\nu)RT. \quad (39)$$

Aus den Gln. (38) und (39) folgt

$$\Delta\nu RT = v \left\{ p \frac{T}{T_1} - (p + \Delta p_0 + \Delta p) \right\}. \quad (40)$$

Die Zustandsgleichung (5) für das Luft-Dampf-Gemisch lautet schließlich

$$(p + \Delta p_0 + \Delta p)(V + \Delta V_0 + \Delta V) = (n_0 + n + \Delta n)RT. \quad (41)$$

Löst man Gl. (41) nach  $n$  auf, erhält man bei Beachtung von Gl. (35)

$$n = \frac{1}{RT} \{(p + \Delta p_0)\Delta V + \Delta p(V + \Delta V_0 + \Delta V) - \Delta n RT\}. \quad (42)$$

Mit den Gln. (32), (33), (34), (36), (37) und (40) kann Gl. (42)

$$\begin{aligned} n &= \frac{\varrho g}{RT} \left\{ \Delta h \left[ \pi r^2 h + \{V + \pi r^2(2\Delta h_0 + \Delta h)\} \left\{ 1 + \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. - v \left[ h \frac{T}{T_1} - \left( h + \{\Delta h_0 + \Delta h\} \left\{ 1 + \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right\} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

geschrieben werden. Der Radius  $r$  des Rohres  $\gamma$  wird stets sehr klein gegen den Radius  $r_1$  des Kolbens  $I$  gewählt. Aus diesem Grunde kann man die Stoffmenge  $n$  im allgemeinen nach

---


$$\begin{aligned} n &= \frac{\varrho g}{RT} \left\{ \Delta h \left[ V \left\{ 1 + \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right\} + \pi r^2(h + 2\Delta h_0 + \Delta h) \right] \right. \\ &\quad \left. - v \left[ h \frac{T}{T_1} - (h + \Delta h_0 + \Delta h) \right] \right\} \end{aligned} \quad (44)$$


---

berechnen. In einer groben Näherung werden der Radius  $r$  und das Volumen  $v$  gleich Null gesetzt. Dann gilt

---


$$n = \frac{\varrho g V}{RT} \Delta h. \quad (45)$$


---

Die molare Masse ergibt sich aus  $n$  und der Masse des zu untersuchenden Stoffes  $m$  zu

$$M = \frac{m}{n}. \quad (46)$$

Gibt man  $m$  in Gramm und  $n$  in Mol an, dann stimmt der Zahlenwert von  $M$  mit der relativen Molekülmasse überein. Die Methode von Menzies hat den Vorteil, daß man die Verdampfung auch bei Drücken ausführen kann, die kleiner als der Luftdruck sind. Wenn man vor der Zerstörung des Glasgefäßes 6 eine Pumpe an das Rohr 2 anschließt und den Druck im Kolben 1 erniedrigt, sinkt der Quecksilberspiegel im Rohr 7 unter das in Abb. 60 eingetragene Nullniveau. Zur Berechnung von  $n$  sind dann  $\Delta h_0$  und  $\delta h_0$  durch  $-\Delta h_0$  und  $-\delta h_0$  zu ersetzen. Da ein Dampf der Zustandsgleichung (5) um so besser genügt, je kleiner der Druck ist, kann man die relative Molekülmasse bei verschiedenen Drücken bestimmen und eine Extrapolation auf  $p = 0$  durchführen.

### Versuchsausführung

Wir wählen am Kontaktthermometer die Temperatur  $T$  und schalten den Thermostaten ein. Während der Erwärmung soll trockene Preßluft durch den Kolben 1 strömen. Wir wägen zwei kleine Glasgefäße 6 ( $m_1$  und  $m_2$ ), in die mit Hilfe einer Injektionsspritze einige Tropfen Benzol bzw. des zu untersuchenden Stoffes gespritzt werden. Wir schmelzen die Öffnungen zu und wägen beide Gefäße abermals ( $m'_1$  und  $m'_2$ ). Die Masse des Benzols ist dann  $m_B = m'_1 - m_1$ , die des zu untersuchenden Stoffes  $m = m'_2 - m_2$ . Wir bestimmen den Barometerstand  $h$  und das Nullniveau im Rohr 7. Nun wird das mit Benzol gefüllte Gefäß 6 in den Metallzylinder 4 gelegt, der Zylinder in das Rohr 1 eingesetzt, der Eisenstift in die Öffnung des Zylinders geschoben, der Fallkörper aufgesetzt und Rohr 2 sowie Rohr 3 mit Stopfen verschlossen. Sobald sich Temperaturlgleichgewicht in der Anordnung eingestellt hat, lesen wir  $\Delta h_0$  ab, zerstören das Gefäß 6 und bestimmen  $\Delta h$ . Die Temperaturen  $T$  und  $T_1$  werden notiert. Die Radien  $r$  und  $r_1$ , das Volumen  $v$  und die relative Molekülmasse von Benzol sollen gegeben sein. Das Volumen  $V$  wird sowohl nach Gl. (44) als auch nach Gl. (45) berechnet. Wenn die Differenz der beiden Werte kleiner als der aus Gl. (45) resultierende absolute Fehler von  $V$  ist, darf Gl. (45) für die Bestimmung der relativen Molekülmasse verwendet werden. Wir wiederholen den Versuch mit dem Gefäß 6, das den zu untersuchenden Stoff enthält.

## W. 2.2. Isothermen eines Stoffes

*Aufgabe:* Mehrere Isothermen eines Stoffes, dessen Siedetemperatur bei Luftdruck in der Nähe der Zimmertemperatur liegt, sollen experimentell aufgenommen werden.

Gegeben seien zwei U-Rohre aus Glas (vgl. Abb. 61). Die Enden der Schenkel 1 und 2 sind zugeschmolzen, während die Enden der Schenkel 3 und 4 durch das Rohr 5 miteinander verbunden sind. Rohr 5 kann durch

einen in Abb. 61 nicht angegebenen Hahn geschlossen werden. Der Schenkel 1 ist mit einem Gas (z. B. Wasserstoff) gefüllt, das in sehr guter Näherung der Zustandsgleichung (5) genügt und zur Druckmessung dient. Der Schenkel 2 enthält den zu untersuchenden Stoff. Im unteren Teil der beiden U-Rohre befindet sich Quecksilber. Hinter den U-Rohren steht eine Skale, auf der man die Lage der Quecksilberspiegel ablesen kann. Die gesamte Apparatur ist in einem Wasserbad konstanter Temperatur untergebracht.

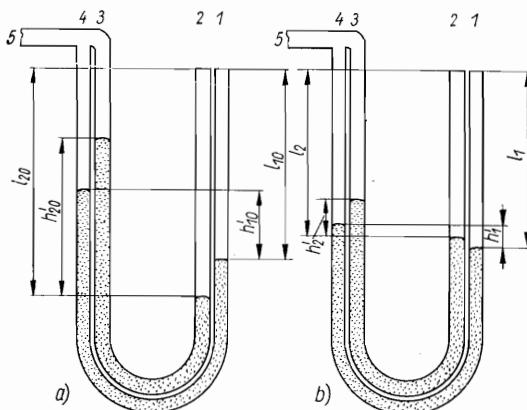


Abb. 61. Anordnung zur Bestimmung von Isothermen

Zu Beginn wird der Hahn am Rohr 5 geöffnet, so daß in den Schenkeln 3 und 4 der Luftdruck

$$p = \rho g h$$

herrscht. Dabei ist  $\rho$  die Dichte des Quecksilbers bei 0 °C, und  $h$  ist der auf 0 °C umgerechnete Barometerstand  $h'$ . Das ideale Gas (vgl. Abb. 61a) steht unter dem Druck

$$p_{10} = \rho g (h + h_{10}),$$

während der zu untersuchende Stoff dem Druck

---


$$p_{20} = \rho g (h + h_{20}) \quad (47)$$


---

ausgesetzt ist. Die Höhen  $h_{10}$  und  $h_{20}$  sind die auf 0 °C reduzierten Höhen  $h'_{10}$  und  $h'_{20}$ . Nun wird Luft in die Schenkel 3 und 4 gepumpt, der Hahn am Rohr 5 geschlossen und die Einstellung des Temperaturgleichgewichtes in der Anordnung abgewartet. Nach Gl. (1) gilt

$$p_1 l_1 = p_{10} l_{10}.$$

Der Druck im idealen Gas ist daher

$$p_1 = \varrho g (h + h_{10}) \frac{l_{10}}{l_1},$$

der in der Luft in den Schenkeln 3 und 4 (vgl. Abb. 61 b)

$$p_3 = p_4 = \varrho g \left\{ (h + h_{10}) \frac{l_{10}}{l_1} - h_1 \right\} \quad (48)$$

und der in dem zu untersuchenden Stoff

---


$$p_2 = \varrho g \left\{ (h + h_{10}) \frac{l_{10}}{l_1} + h_2 - h_1 \right\}. \quad (49)$$


---

Die Höhen  $h_1$  und  $h_2$  sind die auf 0 °C umgerechneten Höhen  $h'_1$  und  $h'_2$ . Wenn der Quecksilberspiegel im Schenkel 1 höher als der im Schenkel 4 liegt, ändert sich in den Gln. (48) und (49) das Vorzeichen von  $h_1$ . Eine entsprechende Überlegung gilt für das Vorzeichen von  $h_2$ .

#### Versuchsausführung

Wir wählen am Kontaktthermometer die geforderte Temperatur  $t$  und schalten den Thermostaten ein, der das Wasserbad speist. Nachdem die gesamte Versuchsanordnung die Temperatur  $t$  angenommen hat, werden bei offenem Rohr 5 die Längen  $h'_{10}$ ,  $h'_{20}$ ,  $l_{10}$  und  $l_{20}$  abgelesen. Außerdem sind der Barometerstand  $h'$ , die Zimmertemperatur  $t_1$  und die Badtemperatur  $t$  zu notieren. Wir pumpen Schritt für Schritt Luft in die Schenkel 3 und 4 und messen jeweils im Gleichgewichtszustand die Längen  $h'_1$ ,  $h'_2$ ,  $l_1$  und  $l_2$ . Sowohl  $h'$  als auch  $h'_{10}$  und  $h'_{20}$  und die verschiedenen Werte von  $h'_1$  und  $h'_2$  werden auf 0 °C umgerechnet (vgl. Tab. 5). Mit den so erhaltenen Höhen  $h$ ,  $h_{10}$ ,  $h_{20}$ ,  $h_1$  und  $h_2$  berechnen wir  $p_{20}$  nach Gl. (47) und  $p_2$  nach Gl. (49). Die Dichte  $\varrho$  ist der Tab. 2 zu entnehmen. Wir tragen die Drücke  $p_2$  über den zugehörigen Volumina  $V_2 = A l_2$  auf. Der Querschnitt  $A$  soll gegeben sein. Der Versuch ist bei zwei anderen Temperaturen des Wasserbades zu wiederholen.

### W. 2.3. Versuch von Clément und Desormes

**Aufgabe:** Das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten soll nach der Methode von Clément und Desormes für Luft und Kohlendioxid bestimmt werden.

Der folgenden Betrachtung liegt die Annahme zugrunde, daß sowohl der Luftdruck  $p$  als auch die Zimmertemperatur  $T_0$  während des Versuches konstant bleiben.

Eine Glasflasche  $F$ , deren inneres Volumen bis zum Dreiweghahn  $D$  mit  $V$  bezeichnet wird, ist mit einem Gas gefüllt (vgl. Abb. 62). Das Gas soll die Temperatur  $T_0$  haben und unter dem Druck

$$p + p_1 = \varrho g h + \varrho_M g h_1$$

stehen;  $h$  ist der Barometerstand, und  $p_1$  ist der Überdruck, der einer Flüssigkeitssäule der Höhe  $h_1$  im U-Rohr-Manometer  $M$  entspricht. Die Dichte von Quecksilber ist mit  $\varrho$ , die der Manometerflüssigkeit (im allgemeinen

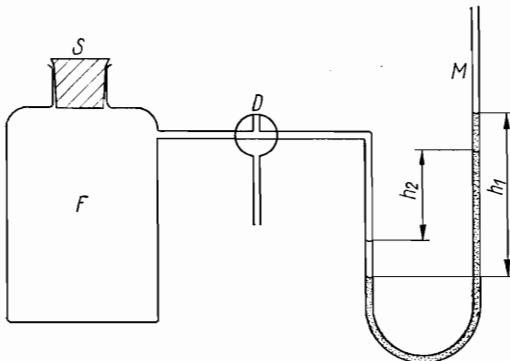


Abb. 62. Zum Versuch von Clément und Desormes

Wasser) mit  $\varrho_M$  bezeichnet. Durch kurze Zeitiges Drehen des Dreiweghahnes um  $90^\circ$  nach links gegenüber der in Abb. 62 angegebenen Stellung entspannt sich das in der Flasche enthaltene Gas bis zum Druck  $p$ . Dabei sinkt die Temperatur des Gases von  $T_0$  auf  $T$ . Sobald aus dem Hahn kein Gas mehr entweicht, wird der Hahn in die Ausgangsstellung zurückgedreht. Da die Entspannung sehr schnell vor sich geht, kann man sie als adiabatische Zustandsänderung ansehen. Nach Gl. (19) gilt also

$$\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\kappa} = \left(1 + \frac{p_1}{p}\right)^{\kappa-1}. \quad (50)$$

Durch das Zurückdrehen des Hahnes wird die im Volumen  $V$  enthaltene Gasmenge  $n$ , die der Zustandsgleichung

$$pV = nRT \quad (51)$$

genügt, mit der Gasmenge  $n_1$  vereinigt, die das Volumen  $V_1$  vom Dreiweghahn bis zum Flüssigkeitsspiegel im Manometerrohr füllt. Dieser Gasanteil genügt der Zustandsgleichung

$$(p + p_1)V_1 = n_1RT_0. \quad (52)$$

Nachdem die gesamte Gasmenge die Temperatur  $T_0$  angenommen hat, herrscht der Druck

$$p + p_2 = \varrho gh + \varrho_M gh_2,$$

und das Volumen beträgt  $V + V_2$ , d. h., es gilt

$$(p + p_2)(V + V_2) = (n + n_1)RT_0. \quad (53)$$

Setzt man die Gl. (51) und (52) in Gl. (53) ein, erhält man

$$pV\left(1 + \frac{p_2}{p}\right)\left(1 + \frac{V_2}{V}\right) = pV\left[\frac{T_0}{T} + \left(1 + \frac{p_1}{p}\right)\frac{V_1}{V}\right]. \quad (54)$$

Im Experiment wählt man  $p_1/p$ ,  $p_2/p$ ,  $V_1/V$  und  $V_2/V$  sehr klein gegen 1, so daß alle Produkte dieser Ausdrücke vernachlässigbar sind. Gl. (54) lautet dann in guter Näherung

$$1 + \frac{p_2}{p} - \frac{V_1 - V_2}{V} = \frac{T_0}{T}. \quad (55)$$

Aus den Gl. (55) und (50) folgt

$$1 + \frac{p_2}{p} - \frac{V_1 - V_2}{V} = \left(1 + \frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (56)$$

Nun ist

$$V_1 - V_2 = \frac{A}{2}(h_1 - h_2),$$

wobei  $A$  der Querschnitt des Manometerrohres sein soll. Man kann daher Gl. (56)

$$1 + \frac{\varrho_M h_2}{\varrho h} - \frac{A(h_1 - h_2)}{2V} = \left(1 + \frac{\varrho_M h_1}{\varrho h}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (57)$$

schreiben. Wird Gl. (57) logarithmiert und nach  $\kappa$  aufgelöst, erhält man

$$\kappa = \frac{\log\left(1 + \frac{\varrho_M h_1}{\varrho h}\right)}{\log\left(1 + \frac{\varrho_M h_1}{\varrho h}\right) - \log\left(1 + \frac{\varrho_M h_2}{\varrho h} - \frac{A(h_1 - h_2)}{2V}\right)}. \quad (58)$$

Da sich die Numeri der in Gl. (58) stehenden Logarithmen nur sehr wenig von 1 unterscheiden, gilt näherungsweise

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \left(1 - \frac{\varrho h A}{2 \varrho_M V}\right). \quad (59)$$

Durch geeignete Wahl von  $A$  und  $V$  kann man erreichen, daß

$$\frac{\varrho h A}{2\varrho_M V} < 0,01$$

wird. In diesem Falle darf  $\alpha$  gemäß

---


$$\alpha = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (60)$$


---

berechnet werden.

### *Versuchsausführung*

Wir lassen bei geöffnetem Stopfen  $S$  etwa 10 Minuten lang trockene Preßluft durch die Flasche  $F$  strömen und bestimmen den Barometerstand  $h$  und die Zimmertemperatur. Dann setzen wir den Stopfen ein, erzeugen den Überdruck und drehen den Dreiweghahn in die in Abb. 62 angegebene Stellung. Die Höhe der Flüssigkeitssäule  $h_1$  darf erst abgelesen werden, wenn sich im Inneren der Flasche das Temperaturgleichgewicht eingestellt hat. Als Meßinstrument dient ein Kathetometer oder eine Spiegelskale. Der Dreiweghahn wird für kurze Zeit in der bereits beschriebenen Weise geöffnet und dann zurückgedreht. Hat die Luft wieder die Zimmertemperatur angenommen, bestimmen wir  $h_2$ . Der Versuch ist mehrmals zu wiederholen, wobei der Barometerstand und die Zimmertemperatur ständig kontrolliert werden müssen. Anschließend lassen wir Kohlendioxid durch die Flasche strömen und messen  $h_1$  und  $h_2$  mehrfach für  $\text{CO}_2$ . Zur Berechnung von  $\alpha$  soll Gl. (59) verwendet werden. Der Fehlerrechnung legen wir Gl. (60) zugrunde. Für zwei Wertepaare von  $h_1$ ,  $h_2$  ist  $\alpha$  außerdem nach Gl. (58) zu berechnen und nachzuweisen, daß der Betrag der Differenz von  $\alpha$  nach Gl. (58) und  $\alpha$  nach Gl. (59) kleiner als der Fehler  $\Delta\alpha$  ist.  $V$  und  $A$  sollen gegeben sein, während  $\varrho$  und  $\varrho_M$  der Tab. 2 entnommen werden.

## **W. 2.4. Dampfdruckkurve und Verdampfungswärme**

*Aufgabe:* Die Dampfdruckkurve einer Flüssigkeit ist im Temperaturintervall  $T_1 < T < T_2$  experimentell aufzunehmen. Außerdem soll die molare Verdampfungswärme  $Q_{23}$  der Flüssigkeit berechnet werden.

Das in Abb. 63 dargestellte U-Rohr-Manometer ist mit Quecksilber gefüllt und in einem Wasserbad untergebracht, dessen Temperatur  $T$  mit Hilfe eines Thermostaten geregelt werden kann. In das Torricellische Va-

kuum des geschlossenen Schenkels 1 ist eine bestimmte Menge der zu untersuchenden Flüssigkeit eingeführt worden. Bezeichnet man den im offenen Schenkel 2 herrschenden Luftdruck mit

$$p_0 = \rho_0 g h_0,$$

so ergibt sich der gesuchte Dampfdruck zu

$$p = \rho_0 g (h_0 - h). \quad (61)$$

Hierin ist  $\rho_0$  die Dichte von Quecksilber bei 0 °C, und  $h_0$  stellt den auf 0 °C umgerechneten Barometerstand dar. Hinter dem U-Rohr-Manometer befindet sich eine Skale, an der man die Höhe  $h'$  ablesen kann, die, auf 0 °C umgerechnet, gleich  $h$  sein soll. Wenn der Quecksilberspiegel im Schenkel 2 höher als der im Schenkel 1 liegt, ändert sich in Gl. (61) das Vorzeichen von  $h$ .

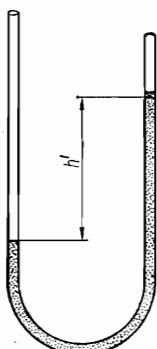


Abb. 63. Zur Dampfdruckbestimmung

Zur Berechnung der molaren Verdampfungswärme geht man von Gl. (22) aus, die durch den Übergang zum dekadischen Logarithmus die Form

$$Q_{23}(T) = -\frac{R}{\lg e} \frac{d(\lg p/p_0)}{d(1/T)} \quad (22a)$$

nimmt. Eine kalorimetrische Methode zur Bestimmung der Verdampfungswärme wird in W. 3.3.2 beschrieben.

#### Versuchsausführung

Wir wählen am Kontaktthermometer die gewünschte Temperatur  $T$  und schalten den Thermostaten ein. Dann wird der auf 0 °C reduzierte Barometerstand  $h_0$  bestimmt (vgl. Tab. 5). Die Höhe  $h'$ , die für mindestens zehn verschiedene Temperaturen zu messen ist, darf erst dann abgelesen werden, wenn der zu untersuchende Stoff die Badtemperatur  $T$  angenommen

hat. Wir rechnen jeden Wert  $h'$  auf den für 0 °C geltenden Wert  $h$  um und tragen  $\lg p/p_0$  über  $1/T$  auf. In dieser Darstellung ist die Dampfdruckkurve nur sehr wenig gekrümmt. Wir zeichnen für einen Punkt  $p_m$ ,  $T_m$  die Tangente der Dampfdruckkurve und berechnen die Steigung  $d(\lg p/p_0)/d(1/T)$ . Die molare Verdampfungswärme  $Q_{23}$  ( $T_m$ ) ergibt sich aus Gl. (22a).

Studenten der Physik sollen außerdem mit drei Wertepaaren  $p_i$ ,  $T_i$  – eines davon muß  $p_0$ ,  $T_0$  sein – die Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  der Gl. (20) berechnen. Bei Beachtung der Gln. (30) und (31) kann dann die molare Verdampfungswärme als Funktion der Temperatur gemäß Gl. (28) angegeben werden. Wenn die molare Wärmekapazität der Flüssigkeit  $C_{p2}$  bekannt ist, läßt sich die des Dampfes  $C_{p3}$  aus  $a_2$  berechnen.

## W. 3. BESTIMMUNG VON WÄRMEMENGEN (KALORIMETRIE)

### W. 3.0. Allgemeine Grundlagen

*Einheiten der Energie* sind nach internationaler Übereinkunft

$$1 \text{ Joule (J)} = 1 \text{ Wattsekunde (Ws)} = 1 \text{ Newtonmeter (Nm)}.$$

Daneben wurde früher im Bereich der Wärmelehre die inkohärente Einheit „Kalorie“ benutzt, die ursprünglich auf eine bestimmte Erwärmung der Masseneinheit des Wassers bezogen wurde. Sie ist jetzt durch die Umrechnungsbeziehung

$$1 \text{ cal} = 4,1840 \text{ J} = 4,1840 \text{ Nm} = 4,1840 \text{ Ws} \quad (1)$$

sekundär festgelegt.

Wärmemengen werden im *Kalorimeter* bestimmt. Für die folgenden Versuche werden ausschließlich Flüssigkeitskalorimeter verwendet. Das sind besonders gestaltete und mit einer gewissen Menge einer Flüssigkeit (meist Wasser) bekannter spezifischer Wärmekapazität  $c$  gefüllte Gefäße. Die zu bestimmenden Wärmemengen beliebigen Ursprungs ergeben sich in allen Fällen aus einer Energiebilanz der im Inneren des Kalorimeters ausgetauschten Anteile. Beim Aufstellen der Wärmeenergiebilanz wird die grundlegende Beziehung benutzt, daß die ausgetauschte Wärmemenge  $\Delta Q$  eine Änderung der Temperatur um  $\Delta t$  des betreffenden Stoffes (Masse  $m$ , spezifische Wärmekapazität  $c$ ) bewirkt:

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta t. \quad (2)$$

Aus Gl. (2) folgt, daß die spezifische Wärmekapazität die Dimension

$$\text{Wärmemenge} \cdot \text{Masse}^{-1} \cdot \text{Temperatur}^{-1}$$

besitzt. Die Einheit der spezifischen Wärmekapazität ist daher

$$1 \text{ Ws} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Um das Kalorimeter näherungsweise als abgeschlossenes System behandeln zu können, wird durch geschickte Konstruktion ein Energieaustausch mit der Umgebung weitgehend vermieden. Das Mehrfachkalorimeter (Abb. 64a) besteht aus mehreren ineinandergesetzten Metallgefäßen, die innen zur Vermeidung von Strahlungsverlusten verspiegelt sind. Verluste infolge Wärmeleitung und Konvektion werden durch die Unterteilung des Mantels und durch die isolierenden Distanzstücke sehr klein gehalten.

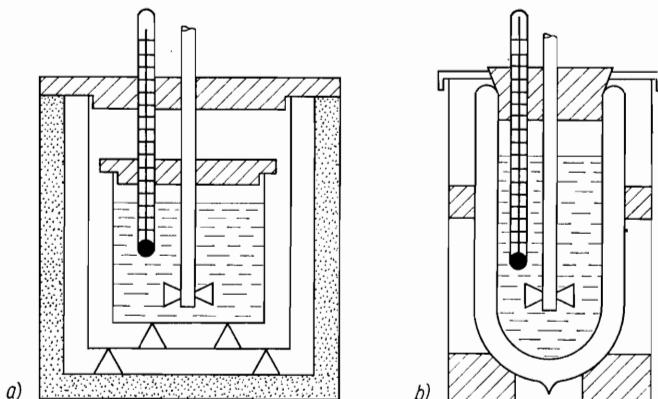


Abb. 64. Kalorimeter

*Dewar-Gefäße* (Abb. 64b) sind gläserne Vakuummantelgefäß, deren Innenwandungen ebenfalls verspiegelt sind. Sie verhalten sich hinsichtlich der Verluste günstiger als die zuvor genannten Mehrfachkalorimeter. Wegen der Implosionsgefahr sollen Dewar-Gefäße stets von einer Schutzhülle umgeben sein.

In die jeweilige Energiebilanz geht selbstverständlich auch die mit dem Kalorimetergefäß und dem apparativen Zubehör (z. B. Thermometer) ausgetauschte Wärmemenge ein (vgl. Abschn. W. 3.1). Außerdem kann, wie im folgenden mehrfach geübt wird, der Energieaustausch des Kalorimetersystems mit der weiteren Umgebung berücksichtigt werden.

Eine in der Kalorimetrie häufig benutzte Sonderform eines Quecksilberthermometers ist das *Beckmann-Thermometer*. Eine Beschreibung dieses Thermometers findet man in Abschn. W. 1.0.2.

## W. 3.1. Wärmekapazität eines Kalorimeters

*Aufgabe:* Die Wärmekapazität eines Kalorimeters ist zu bestimmen.

Die Wärmekapazität  $K$  einer Kalorimeteranordnung ist zahlenmäßig gleich der Wärmemenge, die sie bei einer Temperaturänderung von 1 K austauscht. Nach Gl. (2) ist daher

$$K = mc = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (3)$$

Die Einheit der Wärmekapazität ist  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ . Da die Anordnung aus verschiedenen Teilen (Kalorimetergefäß, Rührer, Thermometer) besteht, ist eine Berechnung der Wärmekapazität schwierig und die experimentelle Bestimmung vorzuziehen. Hierzu wird die Mischungsmethode benutzt. Das Kalorimeter wird mit einer bestimmten Menge warmen Wassers (Masse  $m_w$ , Temperatur  $t_w$ ) gefüllt und hierzu eine abgemessene Menge kalten Wassers (Masse  $m_k$ , Temperatur  $t_k$ ) gegossen. Nach erfolgtem Wärmeaustausch stellt sich eine Mischungstemperatur  $t_m$  ein. Sieht man zunächst von einer Beteiligung der Umgebung an dem Vorgang ab, so ergibt sich folgende Energiebilanz: Das kalte Wasser nimmt die Wärmemenge  $cm_k(t_m - t_k)$  auf, während das warme Wasser die Wärmemenge  $cm_w(t_w - t_m)$  und die Kalorimeteranordnung die Wärmemenge  $K(t_w - t_m)$  abgeben;  $c$  ist die spezifische Wärmekapazität des Wassers, deren geringfügige Temperaturabhängigkeit hier vernachlässigt wurde. Es gilt also

$$(cm_w + K)(t_w - t_m) = cm_k(t_m - t_k),$$

und die Wärmekapazität wird

$$K = c \left[ m_k \frac{t_m - t_k}{t_w - t_m} - m_w \right]. \quad (4)$$

Bei den Messungen ist der Wärmeaustausch mit der Umgebung des Kalorimeters trotz aller Vorkehrungen unvermeidlich.

Da der Mischvorgang eine endliche Zeit beansprucht, entspricht die gemessene Mischungstemperatur nicht dem Wert, der sich für den Fall unendlich schnellen Temperaturausgleiches einstellen würde. Er lässt sich jedoch aus einem *Temperatur-Zeit-Diagramm* (Abb. 65) durch Extrapolation gewinnen: Die Temperatur der Kalorimeterflüssigkeit – in diesem Fall die des warmen Wassers – wird während einer Vorperiode von etwa 5 min alle 30 s abgelesen und notiert. Die Hauptperiode wird durch das Eingießen des in diesem Falle kalten Wassers eingeleitet und umfasst den Mischvorgang, dessen Temperaturverlauf nach Möglichkeit auch verfolgt werden sollte.

Es schließt sich eine Nachperiode von etwa 5 min an. Wegen der Kürze der Vor- und Nachperiode ist der an sich exponentielle Temperaturverlauf durch die Geraden  $AB$  und  $FG$  hinreichend genau wiedergegeben. Aus diesem Temperaturverlauf läßt sich auf den Temperaturverlauf bei unendlich

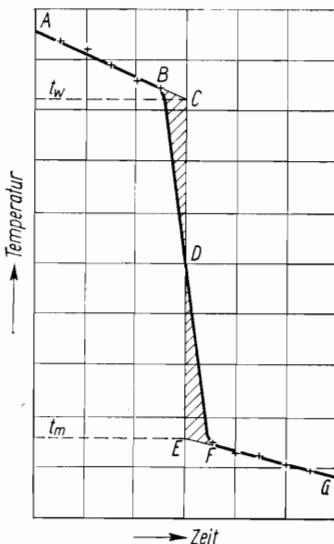


Abb. 65.  
Korrektur der Temperatur beim  
Mischvorgang

schnellem Ausgleich schließen, indem eine Senkrechte  $CE$  so gezeichnet wird, daß die Flächen  $BCD$  und  $DEF$  gleich groß sind. Als Temperaturen  $t_w$  und  $t_m$  werden diejenigen gewählt, die den Punkten  $C$  und  $E$  entsprechen.

Der absolute Größtfehler der Wärmekapazität folgt durch partielle Differentiation aus Gl. (4) und zeigt vor allem auch die Notwendigkeit einer genauen Temperaturmessung:

$$\Delta K = c \left[ \frac{t_m - t_k}{t_w - t_m} \cdot \Delta m_k + \frac{m_k}{t_w - t_m} \cdot \Delta(t_m - t_k) + m_k \frac{t_m - t_k}{(t_w - t_m)^2} \cdot \Delta(t_w - t_m) + \Delta m_w \right]. \quad (5)$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned}\Delta(t_m - t_k) &= \Delta t_m + \Delta t_k, \\ \Delta(t_w - t_m) &= \Delta t_w + \Delta t_m.\end{aligned}$$

### Versuchsausführung

In die Messungen sind der Rührer und das Thermometer stets in gleicher Weise einzubeziehen. Um Kondensationsverluste zu vermeiden, füllen wir

das Kalorimeter zu Beginn des Versuches nur mit leicht erwärmtem Wasser etwa bis zur Hälfte. Außerdem überzeugen wir uns durch eine Überschlagsrechnung, daß wir mit allen Temperaturen innerhalb des Meßbereiches des Thermometers bleiben.

Die Massen  $m_k$  und  $m_w$  des Wassers ergeben sich aus der Differenz der Wägungen des leeren, des mit warmem Wasser und des gleichzeitig mit kaltem und warmem Wasser gefüllten Kalorimeters. Bei der Berechnung von  $K$  ist mit den aus einem Temperatur-Zeit-Diagramm gewonnenen Temperaturen zu arbeiten.

## **W. 3.2. Spezifische Wärmekapazität von Festkörpern und Flüssigkeiten**

Im allgemeinen muß man zwischen der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck ( $c_p$ ) und bei konstantem Volumen ( $c_v$ ) unterscheiden. Für Festkörper und auch für manche Flüssigkeiten (z. B. Wasser) kann wegen geringfügiger thermischer Ausdehnung meist mit hinreichender Genauigkeit

$$c_p = c_v = c \quad (6)$$

gesetzt werden. Nach Gl. (2), die hier in der Form

---


$$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta t} \quad (7)$$


---

geschrieben wird, entspricht der Wert der spezifischen Wärmekapazitäten dem Wert der Wärmemenge, die der Masseneinheit zugeführt werden muß, damit sich ihre Temperatur um 1 K erhöht. Die spezifischen Wärmekapazitäten sind in allen Aggregatzuständen eine Funktion der Temperatur.

### **W. 3.2.1. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester Stoffe**

*Aufgabe:* Die mittleren spezifischen Wärmekapazitäten von Metallproben sind für ein Temperaturintervall von etwa 20 bis 100 °C zu ermitteln.

Nach Gl. (7) gewinnt man die spezifische Wärmekapazität  $c$  einer Probe, indem ihre Temperatur ermittelt wird, nachdem die Probe eine Wärmemenge  $\Delta Q$  abgegeben hat. Der Wärmeverlust kann in einem Flüssigkeits-

kalorimeter gemessen werden. Er folgt aus der Temperaturänderung der Flüssigkeit.

Der auf die Temperatur  $t_f$  erhitzte Metallkörper (Masse  $m_f$ , spezifische Wärmekapazität  $c_f$ ) tauscht die Wärmemenge

$$\Delta Q = c_f m_f (t_f - t_m) \quad (8)$$

aus, wobei  $t_m$  die Temperatur nach dem Energieaustausch, die Mischungs-temperatur, ist. Vom Kalorimeter (Wärmekapazität  $K$ ) und der Flüssigkeit (Masse  $m_{fl}$ , Temperatur  $t_{fl}$ , spezifische Wärmekapazität  $c_{fl}$ ) wird diese Wärmemenge  $\Delta Q$  aufgenommen, so daß andererseits

$$\Delta Q = (c_{fl} m_{fl} + K) (t_m - t_{fl}) \quad (9)$$

ist.

Der Vergleich der Gln. (8) und (9) liefert als Bestimmungsgleichung für die *spezifische Wärmekapazität der Festkörperprobe*

---


$$c_f = \frac{(m_{fl} c_{fl} + K) (t_m - t_{fl})}{m_f (t_f - t_m)} . \quad (10)$$


---

Die Methode liefert einen Mittelwert von  $c_f$  für den Temperaturbereich zwischen  $t_m$  und  $t_f$ .

#### Versuchsausführung

Der Probekörper wird gewogen ( $m_f$ ) und in einem elektrisch beheizten Röhrenofen (Abb. 66) oder im Dampfstrom siedenden Wassers erhitzt

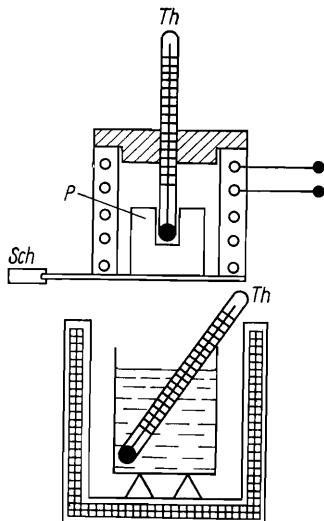


Abb. 66.  
Zur Bestimmung der spezifischen  
Wärmekapazität fester Stoffe

(Temperatur  $t_f$ ). Aus den Wägungen des leeren und des mit Wasser gefüllten Kalorimeters folgt die Masse  $m_{\text{fl}}$ . Die Temperatur des Wassers ( $t_{\text{fl}}$ ) wird über eine Vorperiode hin periodisch gemessen und ein Temperatur-Zeit-Diagramm (siehe W. 3.1) auch über eine Haupt- („Mischvorgang“) und Nachperiode hin vervollständigt. Dem Diagramm entnehmen wir die korrigierten Werte  $t_{\text{fl}}$  und  $t_m$ . Soweit die Wärmekapazität  $K$  unbekannt ist, soll ihre Bestimmung (Abschn. 3.1) den eigentlichen Messungen vorangestellt werden.

### **W. 3.2.2. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Flüssigkeiten**

*Aufgabe:* Die spezifische Wärmekapazität einer Flüssigkeit mäßigen Dampfdruckes soll bestimmt werden.

Die Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Flüssigkeiten kann immer dann auf die bisher behandelten Methoden zurückgeführt werden, wenn die Flüssigkeiten im Bereich der Versuchstemperatur nur unmerklich verdunsten:

a) Der Versuchsfüssigkeit im Kalorimeter wird eine bestimmte elektrische Energie und damit auch eine bekannte Wärmemenge zugeführt. Aus der Temperaturänderung der Flüssigkeit folgt ihre spezifische Wärmekapazität.

b) In sinngemäßer Umkehrung der zuvor behandelten Methode zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität fester Stoffe ergibt sich die spezifische Wärmekapazität einer Flüssigkeit, wenn sie mit einem temperierten Probekörper bekannter spezifischer Wärmekapazität in Wärmeaustausch tritt. Für diese Bestimmung ist Gl. (10) in gleicher Form gültig. Häufig bedient man sich dabei einer speziellen Form des Wärmeüberträgers, des Thermophors.

c) Der *Thermophor* (Abb. 67) hat die Form eines speziellen Flüssigkeits-thermometers mit großem Flüssigkeitsvorrat (häufig Quecksilber) und entsprechend großer Wärmekapazität. Am Schaft sind zwei Meßmarken  $M_1$  und  $M_2$  angebracht. Der vor Versuchsbeginn im Wasserbad erhitzte Thermophor wird in dem Augenblick in die Meßflüssigkeit getaucht, da der Quecksilbermaniskus von oben her die Meßmarke  $M_2$  passiert. Ist der Quecksilberspiegel bis  $M_1$  gesunken, hat der Thermophor eine bestimmte, in einem Vorversuch mit Wasser bestimmbarer Wärmemenge abgegeben. Bedeuten  $K$  die Wärmekapazität des Kalorimeters,  $m_1$  die Masse und  $c_1$  die spezifische Wärmekapazität des Wassers sowie  $t_1$  und  $t_2$  seine Temperatur vor und nach dem Wärmeaustausch, hat der Thermophor die Wärmemenge

$$\Delta Q = c_1 m_1 (t_2 - t_1) + K (t_2 - t_1) \quad (11)$$

an ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter abgegeben. Die gleiche Wärmemenge  $\Delta Q$  wird auch von dem mit der Versuchsfüssigkeit gefüllten Kalori-

meter aufgenommen. Dafür gilt

$$\Delta Q = cm(t - t') + K(t - t'); \quad (12)$$

hierin sind  $m$  die Masse,  $c$  die spezifische Wärmekapazität,  $t'$  und  $t$  die Temperatur des Versuchsstoffes vor und nach der Wärmeübertragung. Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke (11) und (12) läßt sich eine Beziehung herleiten, nach der man die *spezifische Wärmekapazität c der Versuchsflüssigkeit* berechnen kann:

$$c = \frac{(c_1 m_1 + K)(t_2 - t_1)}{m(t - t')} - \frac{K}{m}. \quad (13)$$

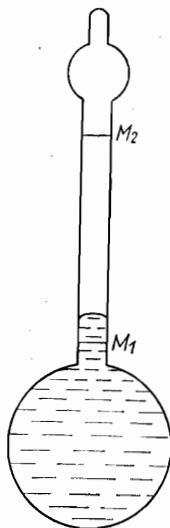


Abb. 67. Thermophor

#### Versuchsausführung

Sofern der Thermophor im Wasserbad erhitzt wird, muß er vor dem Eintauchen in das Kalorimeter gut abgetrocknet werden. Den Wärmeenergieausgleich im Kalorimeter fördern wir durch gutes Umrühren mit dem Thermometer. Die Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  sowie  $t$  und  $t'$  korrigieren wir durch das in W. 3.1 erläuterte Prinzip (Temperatur-Zeit-Diagramm). Die Massen ergeben sich jeweils aus der Differenz der Wägung des leeren und gefüllten Kalorimeters.

## W. 3.3. Umwandlungswärmen

Die Ermittlung von Umwandlungswärmen wird am Beispiel der spezifischen Schmelzwärme des Eises und der spezifischen Kondensationswärme des Wasserdampfes geübt.

Allgemein entsprechen die *spezifischen Umwandlungswärmen* den je nach der Richtung des Prozesses positiv oder negativ zu rechnenden Wärmemengen, die bei der Umwandlung der Masseneinheit des Stoffes bei konstanter Umwandlungstemperatur umgesetzt werden. Die Einheit der spezifischen Umwandlungswärme  $q_{ij}$  ist  $1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Insbesondere wird daher beim Schmelzen von 1 kg Eis eine Wärmemenge vom Betrage der spezifischen Schmelzwärme verbraucht, wenn dabei die Temperatur konstant  $0^\circ\text{C}$  bleibt. Die spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes bei Siedetemperatur wird frei, wenn 1 kg Wasserdampf in Wasser gleicher Temperatur übergeht.

### W. 3.3.1. Spezifische Schmelzwärme des Eises

*Aufgabe:* Die spezifische Schmelzwärme des Eises ist zu bestimmen.

Die spezifische Schmelzwärme  $q_{12}$  eines Stoffes lässt sich immer dann nach der Mischmethode bestimmen, wenn als Kalorimeterflüssigkeit entweder die Schmelze des Versuchsstoffes oder eine Flüssigkeit verwendet wird, in der sich der Versuchsstoff weder löst noch mit ihr chemisch reagiert. Stets muß die Temperatur der Flüssigkeit höher als die Schmelztemperatur des festen Stoffes sein.

Wird eine Masse  $m_f$  festen Stoffes der Temperatur  $t_f$  in das Kalorimeter gegeben, so erwärmt sie sich auf die Schmelztemperatur  $t_s$ . Sie verharrt hier so lange, bis der Stoff vollständig geschmolzen ist, und erwärmt sich dann auf die Mischungstemperatur  $t_m$ . In diesen drei Etappen werden von dem ursprünglich festen Stoff gemäß Gl. (2) die Wärmemengen

$$Q_1 = m_f \cdot c_f (t_s - t_f) \quad (c_f \text{ spezifische Wärmekapazität des festen Stoffes}),$$

$$Q_2 = m_f \cdot q_{12},$$

$$Q_3 = m_f \cdot c_s (t_m - t_s) \quad (c_s \text{ spezifische Wärmekapazität des geschmolzenen Stoffes})$$

aufgenommen. Die Wärmeenergieanteile werden von der Kalorimeterflüssigkeit (Masse  $m_{fl}$ , spezifische Wärmekapazität  $c_{fl}$ ) und dem Kalorimeter (Wärmekapazität  $K$ ) geliefert, indem sich die Temperatur  $t_{fl}$  der Kalorimeteranordnung auf die Mischungstemperatur  $t_m$  erniedrigt:

$$Q_4 = (c_{fl} m_{fl} + K) (t_{fl} - t_m).$$

Aus der Energiebilanz

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$$

folgt die allgemeine Beziehung für die Bestimmung der spezifischen Schmelzwärme nach dieser Methode:

$$q_{12} = \frac{c_{\text{fl}} m_{\text{fl}} + K}{m_{\text{f}}} (t_{\text{fl}} - t_{\text{m}}) - c_{\text{s}} (t_{\text{m}} - t_{\text{s}}) - c_{\text{f}} (t_{\text{s}} - t_{\text{f}}). \quad (14)$$

Gl. (14) vereinfacht sich bei der Bestimmung der spezifischen Schmelzwärme des Eises, da wegen  $t_{\text{f}} = t_{\text{s}} = 0^\circ$  auch  $Q_1 = 0$  ist.

Man erhält

---


$$q_{12} = \frac{c_{\text{fl}} m_{\text{fl}} + K}{m_{\text{f}}} (t_{\text{fl}} - t_{\text{m}}) - c_{\text{s}} t_{\text{m}}. \quad (15)$$


---

### Versuchsausführung

Das Eis wird vor dem Beginn des Versuches gut zerkleinert und abgetrocknet. Seine Masse und die Masse des als Kalorimeterflüssigkeit dienenden Wassers folgt aus der Differenz dreier Wägungen: der des leeren (einschließlich des Thermometers), der des mit Wasser gefüllten Kalorimeters und einer Wägung, bei der das Kalorimeter zusätzlich das Wasser des geschmolzenen Eises enthält. Die Temperaturen  $t_{\text{fl}}$  und  $t_{\text{m}}$  gewinnen wir aus einem Temperatur-Zeit-Diagramm (siehe W. 3.1).

### W. 3.3.2. Spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes

*Aufgabe:* Die spezifische Kondensationswärme des Wasserdampfes bei seiner Siedetemperatur soll ermittelt werden.

Zur Bestimmung der spezifischen Kondensations- (oder Verdampfungs-) Wärme  $q_{23}$  des Wassers bei der Siedetemperatur  $t_s$  leitet man eine bestimmte

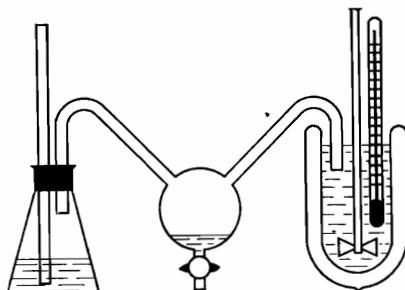


Abb. 68. Zur Bestimmung der Kondensationswärme des Wasserdampfes

Menge des Dampfes (Masse  $m_D$ ) in die Flüssigkeit (Wasser, spezifische Wärmekapazität  $c$ ) des Kalorimeters und läßt ihn dort kondensieren (vgl. Abb. 68). Dabei werden die Wärmemenge  $q_{23}m_D$  und bei der Abkühlung auf die Mischungstemperatur  $t_w$  die Energie  $cm_D(t_s - t_m)$  frei. Diese beiden Anteile werden von der Kalorimeteranordnung aufgenommen (Wärmekapazität  $K$ ;  $m_w$  und  $t_w$  sind Masse und Temperatur des Wassers im Kalorimeter). Aus der Energiebilanz folgt

$$q_{23} = \frac{cm_w + K}{m_D} (t_m - t_w) - c (t_s - t_m). \quad (16)$$

### *Versuchsausführung*

Wir bringen das Wasser zum Sieden und warten in der Dampfleitung ein Temperaturlgleichgewicht ab, bevor wir den Dampf in das Kalorimeter einleiten. Der Kondensatfänger in der Zuleitung soll verhindern, daß im Rohr kondensierter Dampf in das Kalorimeter läuft. Die Masse der Kalorimeterflüssigkeit und die des kondensierten Dampfes ermitteln wir in bekannter Weise durch je zwei Wägungen. Der Versuch wird mit Vor-, Haupt- und Nachperiode zur Aufnahme eines Temperatur-Zeit-Diagrammes durchgeführt. Diesem sind die korrigierten Temperaturen zu entnehmen (siehe W. 3.1).

## **W. 4. SYSTEME MIT VERSCHIEDENEN KOMPONENTEN**

### **W. 4.0. Allgemeine Grundlagen**

#### **W. 4.0.1. Gibbssche Phasenregel**

Als Komponenten bezeichnet man die verschiedenen Bestandteile (z. B. chemische Verbindungen), die in einem System vorhanden sind. Im allgemeinen existieren in einem bestimmten System mehrere homogene Bereiche, die durch Grenzflächen voneinander getrennt sind. Diese Bereiche werden Phasen genannt. Der Begriff der Phase stellt eine Verallgemeinerung des Begriffes Aggregatzustand dar. Ein System kann verschiedene feste oder flüssige Phasen haben. So ist z. B. fester Schwefel in einer monoklinen und einer rhombischen Modifikation – d. h. in zwei Phasen – bekannt. Dagegen besitzt jedes System wegen der Mischbarkeit der Gase nur eine gasförmige Phase. Die frei wählbaren Zustandsgrößen bezeichnet man als

Freiheitsgrade des Systems. Den Zusammenhang zwischen der Zahl der Freiheitsgrade  $f$ , der Zahl der Komponenten  $k$  und der Zahl der Phasen  $n_{ph}$  liefert die Gibbsche Phasenregel

$$f = k + 2 - n_{ph}. \quad (1)$$

Zur Erläuterung der Begriffe soll das in Abb. 69 dargestellte Zustandsdiagramm von Wasser betrachtet werden. Für dieses System gilt  $k = 1$ . Wenn nur eine der drei Phasen vorliegt ( $n_{ph} = 1$ ), folgt aus Gl. (1)  $f = 2$ , d. h., sowohl der Druck  $p$  als auch die Temperatur  $T$  sind innerhalb gewisser

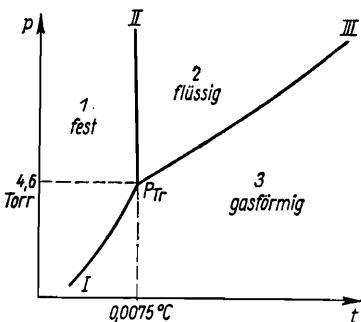


Abb. 69.  
Zustandsdiagramm von Wasser

Grenzen frei vorgebbar. Sollen sich zwei Phasen im Gleichgewicht befinden ( $n_{ph} = 2$ ), wird  $f = 1$ . Zu jeder sinnvoll gewählten Temperatur  $T$  ist dann der Druck  $p$  festgelegt. Man erhält für die Kombination fest-gasförmig die Sublimationskurve  $I$ , für die Kombination fest-flüssig die Schmelzkurve  $II$  und für die Kombination flüssig-gasförmig die Dampfdruckkurve  $III$ . Eine Koexistenz aller drei Phasen ( $n_{ph} = 3$ ) ist wegen  $f = 0$  nur in einem Punkt mit definierten Werten von  $T$  und  $p$  – dem Tripelpunkt  $P_{Tr}$  – möglich.

#### W. 4.0.2. Lösungen

Manche festen Stoffe lösen sich beim Eindringen in eine Flüssigkeit (Lösungsmittel), d. h., es tritt eine vollständige Mischung der verschiedenen Bestandteile ein. In den folgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß die Lösung stark verdünnt ist. Die Menge des gelösten Stoffes  $n_1$  soll also sehr klein gegen die Menge des Lösungsmittels  $n_0$  sein. Außerdem wird für den Dampf des Lösungsmittels die Zustandsgleichung idealer Gase [vgl. Gl. (W. 2-5)] verwendet.

Wenn man den rechten Schenkel eines U-Rohres mit einer Lösung, den linken Schenkel mit dem reinen Lösungsmittel füllt, diffundieren im Laufe der Zeit die Moleküle des gelösten Stoffes in das Lösungsmittel hinein. Für dieses Bestreben nach Verdünnung macht man einen bestimmten Druck

in der Lösung – den osmotischen Druck  $\Pi$  – verantwortlich.  $\Pi$  kann gemessen werden, wenn Lösung und Lösungsmittel durch eine semipermeable (nur für die Moleküle des Lösungsmittels durchlässige) Wand  $W$  getrennt sind (vgl. Abb. 70).

Das U-Rohr soll sich in einem Gefäß befinden, das unter dem der Temperatur  $T$  entsprechenden Dampfdruck des Lösungsmittels steht. Die Verdün-

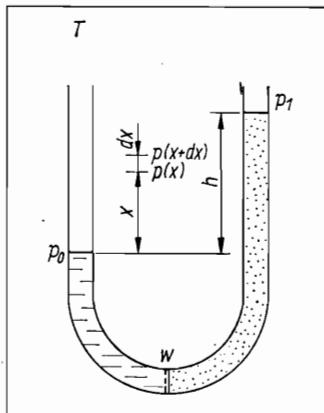


Abb. 70.  
Zur Dampfdruckerniedrigung  
in Lösungen

nung geht nun so vor sich, daß Moleküle des Lösungsmittels durch  $W$  hindurch in die Lösung wandern. Im Gleichgewichtsfall unterscheiden sich die Lagen der Flüssigkeitsspiegel in den Schenkeln des U-Rohres um die Höhe  $h$ . Bezeichnet man die Dichte der Lösung mit  $\varrho$ , den Dampfdruck des Lösungsmittels mit  $p_0$ , den der Lösung mit  $p_1$ , so ergibt sich der osmotische Druck zu

$$\Pi = \varrho gh - (p_0 - p_1)$$

oder näherungsweise zu<sup>1)</sup>

$$\Pi = \varrho gh. \quad (2)$$

Nun muß sich aber auch der Dampf im Gleichgewicht befinden. Nach Abb. 70 gilt

$$p(x + dx) - p(x) = -\varrho_D g dx,$$

wobei  $\varrho_D$  die Dichte des Dampfes an der Stelle  $x$  sein soll. Entwickelt man  $p(x + dx)$  in eine Taylorreihe, gilt bei Vernachlässigung von  $(dx)^2$ <sup>2)</sup>

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho_D g = -\frac{\rho M_0}{RT} g$$

<sup>1)</sup> Wenn  $\overline{\varrho_D}$  die mittlere Dampfdichte im Intervall  $0 \leq x \leq h$  ist, wird  $p_0 - p_1 = \overline{\varrho_D} gh$ .

oder

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = - \frac{M_0 g}{RT} \int_0^h dx, \\ \ln \frac{p_1}{p_n} - \ln \frac{p_0}{p_n} = - \frac{M_0 g h}{RT}; \quad (3a)$$

$M_0$  ist die molare Masse des Lösungsmittels und  $p_n$  ein beliebiger konstanter Druck. Führt man in Gl. (3a) den osmotischen Druck gemäß Gl. (2) ein, erhält man

$$\ln \frac{p_1}{p_n} = \ln \frac{p_0}{p_n} - \frac{M_0 \Pi}{\varrho RT}. \quad (3b)$$

Der osmotische Druck in stark verdünnten Lösungen genügt dem *van't-Hoff'schen Gesetz*

$$\Pi V = n_1 RT. \quad (4)$$

Die Menge  $n_1$  des gelösten Stoffes verhält sich also in der Lösung wie ein ideales Gas, das bei der Temperatur  $T$  das Volumen  $V$  einnimmt. Mit Gl. (4) lautet Gl. (3b)

$$\ln \frac{p_1}{p_n} = \ln \frac{p_0}{p_n} - \frac{M_0 n_1}{\varrho V}; \quad (3c)$$

$\varrho V$  ist die Masse der Lösung, die nach der eingangs gemachten Voraussetzung näherungsweise durch die Masse  $m_0$  des Lösungsmittels ersetzt werden darf. Für den Dampfdruck der Lösung gilt daher

$$\ln \frac{p_1}{p_n} = \ln \frac{p_0}{p_n} - \frac{n_1}{n_0}. \quad (3)$$

Die durch Gl. (3) beschriebene Dampfdruckerniedrigung in stark verdünnten Lösungen hat sowohl eine Siedepunktserhöhung als auch eine Gefrierpunktserniedrigung zur Folge.

Der Dampfdruck des Lösungsmittels genügt der *Gleichung von Clausius und Clapeyron* [vgl. Gl. (W. 2-23)]

$$\frac{d \ln p_0/p_n}{d(1/T)} = - \frac{Q_{23}}{R}. \quad (5)$$

Die molare Verdampfungswärme  $Q_{23}$  kann innerhalb eines kleinen Temperaturintervall es als konstant angesehen werden. Die Integration der Gl. (5) führt zu der ausgezogenen Geraden in Abb. 71.

Nach Gl. (3) liegt die Dampfdruckkurve der Lösung in der in Abb. 71 gewählten Darstellung um den konstanten Wert  $n_1/n_0$  tiefer (gestrichelte Gerade). Das Lösungsmittel bzw. die Lösung sieden bei den Temperaturen

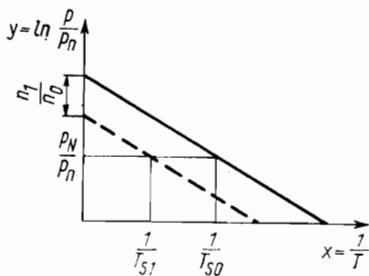


Abb. 71.  
Zur Siedepunktserhöhung

$T_{S0}$  bzw.  $T_{S1}$ , bei denen der Dampfdruck mit dem Luftdruck  $p_N$  übereinstimmt. Aus Abb. 71 folgt

$$\left[ \frac{1}{T_{S0}} - \frac{1}{T_{S1}} \right] \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{n_1}{n_0}. \quad (6)$$

Da  $n_1$  nach Voraussetzung sehr klein gegen  $n_0$  ist, gilt für die Siedepunkterhöhung  $\Delta T_S$  näherungsweise

$$\frac{1}{T_{S0}} - \frac{1}{T_{S1}} = \frac{T_{S1} - T_{S0}}{T_{S0}^2} = \frac{\Delta T_S}{T_{S0}^2}.$$

Außerdem folgt aus Gl. (5)

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Q_{23}}{R},$$

so daß man Gl. (6)

---


$$\Delta T_S = \frac{RT_{S0}^2}{Q_{23}} \frac{n_1}{n_0} \quad (7)$$


---

schreiben kann.

Der Sublimationsdruck des Lösungsmittels  $p_{0\text{fest}}$  genügt der Gleichung von Clausius und Clapeyron [vgl. Gl. (W. 2-24)]

$$\frac{d(\ln(p_0/p_n)_{\text{fest}})}{d(1/T)} = - \frac{Q_{13}}{R} = - \frac{Q_{12} + Q_{23}}{R}. \quad (8)$$

Die molare Sublimationswärme  $Q_{13}$  setzt sich additiv aus der molaren Schmelzwärme  $Q_{12}$  und der molaren Verdampfungswärme  $Q_{23}$  zusammen.

Innerhalb eines kleinen Temperaturintervall es ist  $Q_{13}$  konstant. In Abb. 72 wird daher die Sublimationskurve durch die steile Gerade I dargestellt, die Dampfdruckkurve des Lösungsmittels durch die Gerade II. Der Schnittpunkt der beiden Geraden liefert den Tripelpunkt  $P_{Tr}$  des Lösungsmittels. Die Dampfdruckkurve der Lösung (gestrichelte Gerade) liegt nach Gl. (3)

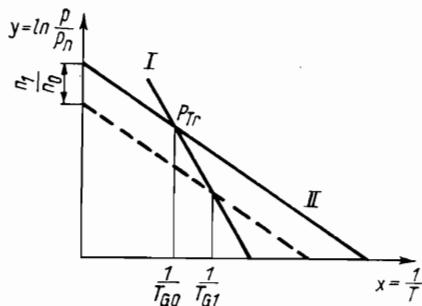


Abb. 72.  
Zur Gefrierpunkts-  
erniedrigung

um  $n_1/n_0$  unterhalb der Geraden II. Am Schnittpunkt der gestrichelten Geraden und der Geraden I haben Lösung und festes Lösungsmittel den gleichen Dampfdruck, d. h., das Lösungsmittel beginnt in der Lösung zu erstarren. Es ist immer die Phase mit dem kleineren Dampfdruck stabil.

Aus Abb. 72 ergibt sich der Zusammenhang

$$\left[ \frac{1}{T_{G1}} - \frac{1}{T_{G0}} \right] \left[ \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{II} - \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_I \right] = \frac{n_1}{n_0}. \quad (9)$$

Nun ist

$$\left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{II} - \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_I = \frac{Q_{13}}{R} - \frac{Q_{23}}{R} = \frac{Q_{12}}{R}.$$

Außerdem gilt in guter Näherung

$$\frac{1}{T_{G1}} - \frac{1}{T_{G0}} = \frac{T_{G0} - T_{G1}}{T_{G0}^2} = \frac{\Delta T_G}{T_{G0}^2}.$$

Die Erniedrigung des Tripelpunktes lässt sich also durch

---


$$\Delta T_G = \frac{RT_{G0}^2}{Q_{12}} \frac{n_1}{n_0} \quad (10)$$


---

beschreiben. Da die Erstarrungstemperatur nur sehr wenig vom Druck abhängt, kann man annehmen, daß auch die Gefrierpunkterniedrigung in guter Näherung vom Druck unabhängig ist. Aus diesem Grunde darf

Gl. (10) für die Gefrierpunktserniedrigung bei Luftdruck verwendet werden. Häufig dissoziieren die Moleküle des gelösten Stoffes im Lösungsmittel. Die Stoffmenge  $n_1$  ist der Zahl der Moleküle  $N_1$  proportional, die in der Masse  $m_1$  des gelösten Stoffes enthalten sind. Zerfällt der Bruchteil  $\delta$  der  $N_1$  Moleküle in je  $z$  kleinere Teile, dann befinden sich

$$N'_1 = N_1 [1 + (z - 1) \delta]$$

fremde Partikeln im Lösungsmittel. In diesem Falle muß man in den Gln. (3), (7) und (10)  $n_1$  durch

$$n'_1 = n_1 [1 + (z - 1) \delta] \quad (11)$$

setzen. Die Zahl  $\delta$  bezeichnet man als *Dissoziationsgrad*.

### V. 4.0.3. Legierungen

Jeder Stoff, der aus mehreren Elementen besteht und die Eigenschaften von Metallen hat, wird *Legierung* genannt. Manche Stoffe besitzen die Fähigkeit, sich vollständig in der Schmelze eines Metalls zu lösen. Derartige Lösungen und erstarrte Schmelzen, die aus *Mischkristallen* aufgebaut sind, bezeichnet man als *homogene Legierungen*. Bei teilweiser oder vollständiger Unlöslichkeit der Komponenten ineinander entstehen *heterogene Legierungen*, die sich im festen Zustand aus einem Gemisch verschiedenartiger Kristalle zusammensetzen. Durch Legieren ändern sich die physikalischen Eigenschaften des Grundmetalls. So wird z. B. die mechanische Festigkeit erhöht, während die elektrische Leitfähigkeit und die Wärmeleitfähigkeit abnehmen. Die folgenden Ausführungen dienen der Erläuterung einiger

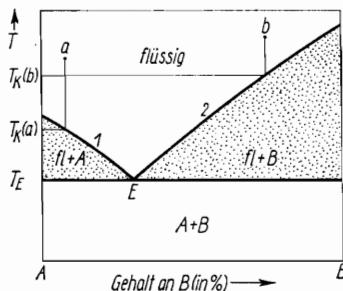


Abb. 73.  
Schmelzpunktendiagramm eines in  
der Schmelze mischbaren mecha-  
nischen Gemenges

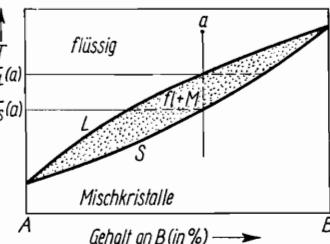


Abb. 74.  
Schmelzpunktendiagramm einer  
lückenlosen Reihe von Misch-  
kristallen

einfacher Beispiele. Blei und Antimon sind in der Schmelze vollständig mischbar, während ihre Kristalle ein mechanisches Gemenge bilden. Das Schmelzpunktdiagramm von Pb-Sb-Legierungen entspricht dem in Abb. 73 dargestellten Typ. Kühlt man eine Schmelze  $a$  ab, so beginnt bei der Temperatur  $T_K(a)$  die Komponente  $A$  zu kristallisieren. Die Zusammensetzung der Schmelze wird mit fallender Temperatur durch Kurve 1 beschrieben. Eine Schmelze  $b$  scheidet dagegen nach dem Erreichen der Temperatur  $T_K(b)$  Kristalle der Komponente  $B$  aus, und Kurve 2 stellt die Zusammensetzung der Schmelze als Funktion der Temperatur dar. Der Schnittpunkt  $E$  der Kurven 1 und 2 wird als *eutektischer Punkt* bezeichnet. Die Restschmelze einer beliebigen Legierung dieses Typs erstarrt bei der Temperatur  $T_E$  wie ein einheitliches Metall.

Silber und Gold sind in der Schmelze ebenfalls vollständig mischbar. Während der Erstarrung entstehen aber Mischkristalle. Abb. 74 zeigt das

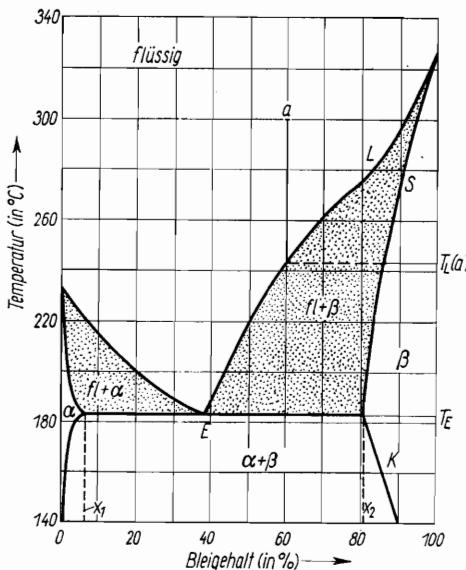


Abb. 75.  
Schmelzpunktdiagramm  
von Pb-Sn-Legierungen

Schema des Schmelzpunktdiagrammes für Ag-Au-Legierungen. Wenn eine Schmelze  $a$  beliebiger Zusammensetzung bei der Abkühlung die auf der Liquiduskurve  $L$  liegende Temperatur  $T_L(a)$  erreicht, setzt die Mischkristallbildung ein. Die Zusammensetzung der Kristalle wird durch den Punkt der Soliduskurve  $S$  festgelegt, der zur Temperatur  $T_L(a)$  gehört. Mit sinkender Temperatur kann die momentane Zusammensetzung der Schmelze auf der Kurve  $L$ , die der gerade entstehenden Mischkristalle auf der Kurve  $S$  abgelesen werden. Durch Diffusion tritt aber ein ständiger Konzentrations-

ausgleich zwischen Schmelze und Mischkristallen ein. Die Erstarrung ist bei der Temperatur  $T_s(a)$  beendet, und die Zusammensetzung der Mischkristalle ist mit der der ursprünglichen Schmelze  $a$  identisch.

Blei und Zinn bilden Legierungen, die einer Kombination der beiden bisher erläuterten Typen entsprechen. Abb. 75 zeigt das Schmelzpunktdiagramm. Enthält die Schmelze einen Bleigehalt, der kleiner als  $x_1 = 5\%$  oder größer als  $x_2 = 80,5\%$ <sup>1)</sup> ist, entstehen bei der Erstarrung der Schmelze Mischkristalle  $\alpha$  oder  $\beta$  in der am Beispiel Ag-Au beschriebenen Weise. Während der Abkühlung einer Schmelze  $a$  beginnt bei der Temperatur  $T_L(a)$  die Ausscheidung von Mischkristallen  $\beta$ . Die Zusammensetzung der Mischkristalle ändert sich gemäß der Soliduskurve  $S$ , die der Schmelze gemäß der Liquiduskurve  $L$ . Bei der Temperatur  $T_E$  erstarrt die Restschmelze wie ein einheitliches Metall. Das Eutektikum setzt sich aber nicht aus den Kristallen der reinen Komponenten zusammen, sondern besteht aus Mischkristallen  $\alpha$  der Zusammensetzung  $x_1$  und Mischkristallen  $\beta$  der Zusammensetzung  $x_2$ . Die Mischkristalle  $\beta$ , die vor der Erstarrung des Eutektikums schon vorhanden waren, scheiden bei Temperaturen unterhalb  $T_E$  gemäß Kurve  $K$  Zinn aus.

Die Diskussion der Verhältnisse bei der Abkühlung einer Schmelze, deren Pb-Gehalt kleiner als 38 % ist, soll dem Leser überlassen bleiben. Außerdem wird empfohlen, die Aussagen der Gibbschen Phasenregel Gl. (1) für die verschiedenen Schmelzpunktdiagramme zusammenzustellen.

## W. 4.1. Siedepunktserhöhung

**Aufgabe:** Die relative Molekülmasse eines in Wasser löslichen festen Stoffes soll aus der Siedepunktserhöhung der Lösung bestimmt werden.

Abb. 76 zeigt die von Landsberger angegebene Anordnung zur Bestimmung der Siedepunktserhöhung. Das Lösungsmittel bzw. die Lösung befindet sich in dem Glasgefäß  $G$ , das in einem Behälter  $B$  untergebracht ist. Der Stopfen  $S$  enthält zwei Bohrungen, in die das Beckmann-Thermometer  $Th$  und das Rohr  $R_1$  eingesetzt sind. Wenn man durch das Rohr  $R_1$  Wasserdampf in das Gefäß  $G$  leitet, beginnt die Flüssigkeit (Wasser oder Lösung) nach einiger Zeit zu sieden. Der Wasserdampf kann durch die Öffnung  $O$  und das Rohr  $R_2$  entweichen. Die beschriebene Art der Erwärmung hat den großen Vorteil, daß kein Siedeverzug auftritt.

### Versuchsausführung

Wir bestimmen den Barometerstand und entnehmen die zugehörige Siedetemperatur von Wasser  $t_{s0}$  der Tab. 8. Wir wägen das gut getrocknete Ge-

<sup>1)</sup> % bedeutet hier Massenprozent.

fäß  $G$ , dessen Masse  $m_2$  sein soll. Dann wird das Gefäß  $G$  in den Behälter  $B$  gesetzt, etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllt und mit dem Stopfen  $S$  verschlossen. Das Beckmann-Thermometer  $Th$  und das Rohr  $R_1$  müssen hinreichend tief in das Wasser eintauchen. Wir bringen Wasser in der Flasche  $F$  zum Sieden und leiten den Dampf durch das Rohr  $R_1$  in das Gefäß  $G$ . Sobald der Quecksilberfaden des Thermometers vor der Skale sichtbar wird, lesen

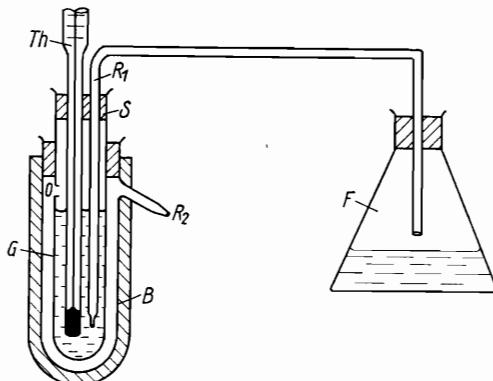


Abb. 76. Anordnung zur Bestimmung der Siedepunktserhöhung

wir die Lage des Meniskus in regelmäßigen Zeitabständen ab. Das Beckmann-Thermometer muß so eingestellt sein, daß das Fadenende bei der Siedetemperatur von Wasser im unteren Teil der Skale liegt. Nun geben wir den festen Körper, dessen Masse  $m_1$  mit einer Analysenwaage bestimmt worden ist, in das Wasser und ermitteln die Siedetemperatur der Lösung in der oben beschriebenen Weise. Die Temperaturdifferenz  $\Delta t'$  ist auf den Meßbereich zwischen  $0^\circ\text{C}$  und  $5^\circ\text{C}$  umzurechnen. So erhalten wir  $\Delta t = \Delta T_s$ . Nach der Abkühlung auf Zimmertemperatur wird die Masse  $m_3$  des außen getrockneten Gefäßes  $G$  bestimmt. Die Masse des Wassers ergibt sich zu

$$m_0 = m_3 - (m_1 + m_2).$$

Nach Gl. (7) gilt für die molare Masse des gelösten Stoffes

$$M_1 = \frac{RT_{S0}^2}{Q_{23}\Delta t} \frac{m_1}{m_0} M_0 = \frac{RT_{S0}^2}{q_{23}\Delta t} \frac{m_1}{m_0}.$$

Die spezifische Verdampfungswärme von Wasser  $q_{23}$  ist der Tab. 2 zu entnehmen. Wenn der gelöste Stoff in Wasser dissoziiert, ist Gl. (11) zu beachten.

## V. 4.2. Gefrierpunktserniedrigung

**Aufgabe:** Die relative Molekülmasse eines in Wasser löslichen festen Stoffes ist aus der Gefrierpunktserniedrigung der Lösung zu bestimmen.

Eine Anordnung zur Bestimmung der Gefrierpunktserniedrigung, die in ähnlicher Form von Beckmann angegeben wurde, ist in Abb. 77 dargestellt. Ein Glasgefäß  $G_1$ , das etwa zur Hälfte mit Wasser bzw. der Lösung gefüllt ist, sitzt in einem Gefäß  $G_2$ . In dem Raum zwischen den Gefäßen befindet

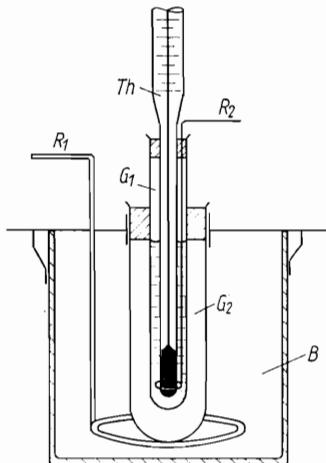


Abb. 77. Anordnung zur Bestimmung der Gefrierpunktserniedrigung

sich Luft. Das Gefäß  $G_2$  ist in einem Behälter  $B$  untergebracht, der mit einer Kältemischung aus Viehsalz, gestoßenem Eis und Wasser beschickt wird. Die Rührer  $R_1$  und  $R_2$  dienen zum Ausgleich räumlicher Temperaturunterschiede in der Kältemischung und in dem Wasser bzw. in der Lösung. Die Gefrierpunktserniedrigung wird mit dem Beckmann-Thermometer  $Th$  gemessen.

### Versuchsausführung

Wir stellen im Behälter  $B$  die Kältemischung her, deren Temperatur etwa  $-10^\circ\text{C}$  betragen soll. Dann wird das mit Wasser der bekannten Masse  $m_0$  gefüllte Gefäß  $G_1$  in den Behälter  $B$  gesetzt. Bei ständiger Bewegung der Rührer  $R_1$  und  $R_2$  beobachten wir die Lage des Quecksilbermeniskus im Beckmann-Thermometer. Im allgemeinen tritt eine Unterkühlung des Wassers unter den Gefrierpunkt ein, die aber durch Rühren bald aufgehoben werden kann. Während der Erstarrung soll der Quecksilberfaden des Thermometers im oberen Bereich der Skale enden. Die entsprechende Temperatur  $t$  wird notiert. Wir heben das Gefäß  $G_1$  vor dem Ende der Erstarrung des

Wassers aus dem Behälter  $B$  und warten, bis das Eis vollständig geschmolzen ist. Dann wird der gelöste Stoff, dessen Masse  $m_1$  mit einer Analysenwaage bestimmt worden ist, in das Gefäß  $G_1$  geschüttet. Wir lassen die Lösung unter ständigem Rühren abkühlen und notieren sowohl die tiefste Temperatur  $t'$ , die bei der Unterkühlung erreicht wird, als auch die Temperatur  $t''$ , die das Thermometer unmittelbar nach Aufhebung der Unterkühlung anzeigt. Im Laufe der Erstarrung des Wassers nimmt die Konzentration der Lösung zu, d. h., die Erstarrungstemperatur sinkt. Nach Gl. (10) gilt

$$M_1 = \frac{RT_{G0}^2}{Q_{12}\Delta t} \frac{m_1}{m_0} M_0 = \frac{RT_{G0}^2}{q_{12}\Delta t} \frac{m_1}{m_0}$$

mit

$$\Delta t = t - t'' = \Delta T_G.$$

Die spezifische Schmelzwärme von Eis  $q_{12}$  ist der Tab. 2 zu entnehmen. Wenn der gelöste Stoff in Wasser dissoziiert, muß Gl. (11) beachtet werden.

Strenggenommen muß die Masse  $m_0$  um die Masse  $m_E$ , die nach Aufhebung der Unterkühlung bereits in Form von Eis vorliegt, verringert werden. Für  $m_E$  gilt näherungsweise

$$c(m_0 + m_1)(t'' - t') = q_{12}m_E,$$

wobei  $c$  die spezifische Wärmekapazität der Lösung ist. Diese Korrektur hat aber nur dann einen Sinn, wenn  $m_E$  wesentlich größer als  $m_1$  ist.

### W. 4.3. Thermische Analyse

*Aufgabe:* Die Abkühlungskurven einiger Blei-Zinn-Legierungen sollen aufgenommen werden. Die Zusammensetzung der verschiedenen Legierungen ist zu bestimmen.

Die Temperatur  $T$  einer Pb-Sn-Legierung, die nach dem Schmelzen sich selbst überlassen bleibt, genügt zunächst dem Newtonschen Abkühlungsgesetz

---


$$\frac{dT}{d\tau} = -\lambda(T - T_0). \quad (12)$$


---

Die Abkühlgeschwindigkeit  $dT/d\tau$  ist also der Temperaturdifferenz  $T - T_0$  proportional, wobei im vorliegenden Fall  $T_0$  die konstante Zimmertemperatur sein soll. Den Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  bezeichnet man als Abkühlungs-

konstante. Die Integration der Gl. (12) im Zeitintervall von 0 bis  $\tau$  liefert

$$\lambda\tau = - \int_{T(0)}^{T(\tau)} \frac{dT}{T - T_0} = \ln \frac{T(0) - T_0}{T(\tau) - T_0} \quad (13)$$

oder

$$T(\tau) - T_0 = [T(0) - T_0] e^{-\lambda\tau}. \quad (14)$$

Wenn die Legierung nicht gerade die eutektische Zusammensetzung hat, beginnt bei einer bestimmten Temperatur  $T_L$  die Ausscheidung fester Pb-Sn-Mischkristalle. Durch die entstehende Erstarrungswärme wird die Abkühlgeschwindigkeit verkleinert, d. h., die Abkühlungskurve weist bei  $T_E$  einen Knick auf (vgl. Abb. 78). Die Schmelze besitzt bei der Temperatur  $T_E$

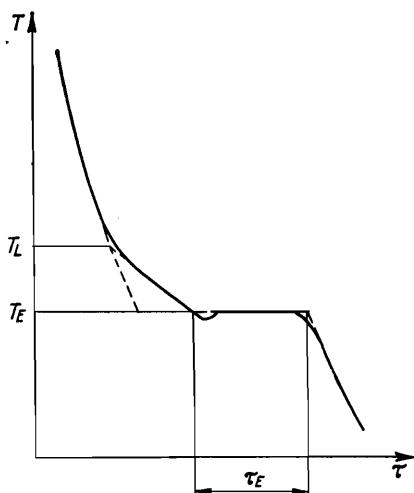


Abb. 78. Temperatur-Zeit-Diagramm einer Pb-Sn-Legierung

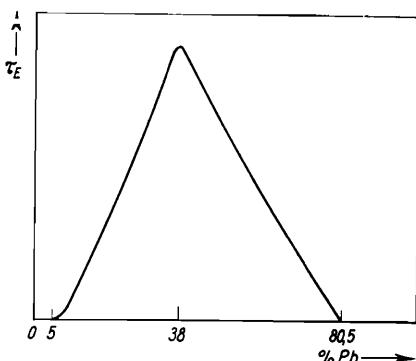


Abb. 79.  $\tau_E$  in Abhängigkeit vom Pb-Gehalt

die eutektische Zusammensetzung und erstarrt wie ein reines Metall. Während der Zeit  $\tau_E$  bleibt die Temperatur der Legierung konstant. Die Abkühlung der völlig erstarrten Legierung genügt Gl. (14). Die  $\lambda$ -Werte der Schmelze und der festen Legierung stimmen nahezu überein.

Wenn  $T_L$  größer als die Schmelztemperatur von Zinn ist, kann die Zusammensetzung der Legierung aus Abb. 75 eindeutig bestimmt werden. Ist dagegen  $T_L$  kleiner als 232 °C, ergeben sich aus dem Schmelzpunktendiagramm zwei mögliche Konzentrationen. Die Zeit  $\tau_E$  stellt ebenfalls ein Maß für die Zusammensetzung dar, sofern die verschiedenen Legierungen gleiche Masse haben und unter den gleichen Bedingungen abgekühlt werden.

Aus Abb. 79 erhält man für jede Zeit  $\tau_E$  zwei Konzentrationen. Die zu

untersuchende Legierung besitzt die Zusammensetzung, die sowohl mit Abb. 75 als auch mit Abb. 79 vereinbar ist.

Die Thermoanalyse wird neuerdings meist in Form der *Differentialthermoanalyse* (DTA) eingesetzt. Diese beruht auf folgendem Prinzip: Die beiden Temperaturfühler eines Differentialthermoelementes, wie es beispielsweise in Abb. 93 dargestellt ist, tauchen in je ein meist aus Platin bestehendes Probekölbchen. In das eine Kölbchen wird der zu untersuchende Stoff gefüllt. In dem anderen Kölbchen befindet sich ein Vergleichsstoff, der im Temperaturbereich der Messung keine Wärmetönung zeigen darf. Für das Temperaturintervall  $100\text{ }^{\circ}\text{C} \leq t \leq 1600\text{ }^{\circ}\text{C}$  ist z. B.  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$  geeignet. Beide Kölbchen werden in einem gemeinsamen Wärmebad (Ofen) erhitzt bzw. abgekühlt. Das Differentialthermoelement liefert nur bei den Temperaturen eine Spannung, bei denen die zu untersuchende Probe im Vergleich zum Inertstoff eine Wärmetönung zeigt. Die Thermospannung wird in kommerziellen Apparaturen automatisch registriert und gegenüber der mit einem weiteren Thermoelement gemessenen Temperatur der Vergleichsprobe aufgezeichnet. Das Vorzeichen der Thermospannung gestattet, zwischen exo- und endothermen Vorgängen zu unterscheiden. Die Fläche unter der Kurve ist ein Maß für die Umwandlungswärme.

Als dynamische Meßmethode liefert die DTA keine exakten Gleichgewichtswerte der Umwandlungs- oder auch Reaktionstemperaturen bzw. der entsprechenden Wärmemengen. Wesentliche Einflußgrößen sind Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärmekapazität von Probe- und Vergleichsstoff, ihre Massenverhältnisse, gegebenenfalls die Teilchengrößen sowie die Aufheiz- oder Abkühlgeschwindigkeit. Die Aufheizgeschwindigkeit wird bei kommerziellen Anlagen im Interesse guter Reproduzierbarkeit der Messungen programmgesteuert.

### *Versuchsausführung*

Wir erwärmen die Legierung in einem Tiegel auf etwa  $330\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Nach mehrfachem Umrühren lassen wir die Schmelze abkühlen und lesen im Intervall  $320\text{ }^{\circ}\text{C} \leq t \leq 140\text{ }^{\circ}\text{C}$  alle 15 s die Temperatur ab. Zur Temperaturmessung dient im allgemeinen ein eingemessenes Thermoelement. Das Temperatur-Zeit-Diagramm entspricht der in Abb. 78 ausgezogenen Kurve. Wir berechnen  $\lambda$  nach Gl. (13), wobei die Zeit  $\tau$  so zu wählen ist, daß der obere Teil der Abkühlungskurve möglichst gut durch Gl. (14) beschrieben wird. Der Knick bei  $T_L$  ist oft nicht sehr ausgeprägt. Da die Temperatur an der freien Oberfläche stets unter der im Inneren der Legierung liegt, beginnt die Ausscheidung von Mischkristallen an verschiedenen Stellen zu verschiedenen Zeiten. Vor dem Erstarren der eutektischen Schmelze stellen wir eine Unterkühlung fest. Die schon erwähnten Temperaturunterschiede in der Legierung haben zur Folge, daß die Erstarrung der eutektischen Schmelze in einem gewissen Zeitintervall und nicht in einem definierten Zeitpunkt abgeschlossen wird. Wir stilisieren die Abkühlungskurve durch Extrapolation sicherer Kurventeile (gestrichelte Linien in Abb. 78) und entnehmen der Darstellung die Temperaturen  $T_L$  und  $T_E$  sowie die Zeit  $\tau_E$ . Die Zusammensetzung der Legierung wird der Abb. 75 und dem  $\tau_E$ -Diagramm, das für die vorliegende Versuchsanordnung gegeben sein soll, entnommen. Wir wiederholen den Versuch mit Legierungen anderer Zusammensetzung.

Eine genauere Darstellung der Abkühlungskurve erhalten wir, wenn wir anstelle der punktweisen Aufnahme der Temperatur die Thermospannung einem Motorkompensator zuführen, der diese als Funktion der Zeit schreibt,

## W. 4.4. Mikrothermoanalyse

- Aufgaben:* 1. Die Schmelztemperaturen zweier Stoffe sind mit der *durchgehenden Methode* und mit der *Gleichgewichtsmethode* zu bestimmen.
2. Die eutektische Temperatur eines Gemisches aus den beiden Stoffen ist mit Hilfe der *Kontaktmethode* zu ermitteln.
3. Mit Hilfe der *Glaspulvermethode* sind die Temperaturen festzustellen, bei denen die Brechungsindizes der beiden Stoffe mit dem eines vorgegebenen Glaspulvers übereinstimmen.
- Auf graphischem Wege ist das prozentuale Verhältnis eines Gemisches aus den beiden Stoffen für eine gegebene *Gleichheits temperatur* zu ermitteln.

Moderne zeit- und stoffsparende physikalische Mikromethoden auf dem Gebiet der Analyse organischer Stoffe und Stoffgemische sind chemischen Analyseverfahren und Nachweisreaktionen vielfach überlegen. Ausgangspunkt und Grundlage einiger Mikromethoden bildet die Schmelzpunktbestimmung unter dem Mikroskop. Messungen thermischer Konstanten von Stoffen, wie eutektische Temperaturen mit Teststoffen und Bestimmung der Lichtbrechung von Schmelzen mittels einer Skale gepulverter optischer Gläser mit bekannten Brechungsindizes, dienen sowohl zur Identifizierung als auch zur quantitativen Analyse von Gemischen. Eine weitere Anwendungsmöglichkeit ist die Bestimmung der relativen Molekulmasse.

Ein Mikroschmelzpunktapparat (z. B. der handelsübliche Mikroschmelzpunktapparat „Boëtius“) besteht im wesentlichen aus einem elektrisch heizbaren runden Metallblech, dem Heiztisch, der auf den Objekttisch eines Mikroskops aufgesetzt werden kann. Der Heiztisch besitzt eine zentrale Bohrung, die sich nach unten konisch erweitert. Ein dort angebrachter hitzebeständiger Kondensor besorgt die ausreichende und gleichmäßige Beleuchtung des Gesichtsfeldes mit praktisch parallelem Licht. Zur Temperaturmessung dient ein in einem besonderen Justierverfahren eingemessener Einschlußthermometer, das korrigierte Schmelztemperaturen anzeigt. Die zentrale Lage des Temperaturfühlers dicht unter dem Objekt macht die Anzeige von einem zeitlich und örtlich unterschiedlichen peripheren Wärmegefälle in der Heizplatte unabhängig.

Zur Schmelzpunktbestimmung sind zwei Methoden bekannt. Bei der *durchgehenden Arbeitsweise* lässt man die Temperatur bis zum vollständigen Schmelzen des Stoffes stetig ansteigen. Bei diesem Schmelzvorgang verflüssigen sich zuerst die kleinsten Splitter, dann kleinere Kristalle und zuletzt die großen Kristalle, bis es zu einem völligen Zerfließen kommt. Diese Methode dient meist nur zur ungefähren Orientierung, in welchem Intervall die Schmelztemperatur liegt.

Wesentlich genauer ist die *Gleichgewichtsmethode*. Hierbei wird die Temperatur in der Nähe des vorher bestimmten Schmelzintervall es nur langsam

erhöht. Noch bevor der Stoff völlig geschmolzen ist, wird die Heizung abgeschaltet. Einige Restkristalle innerhalb des Schmelztropfens beginnen nach dem Abschalten wieder zu wachsen, bei erneuter Erwärmung schmelzen sie wieder ab. Durch wiederholtes Abkühlen und Erwärmen kann man sehr genau das Gleichgewicht zwischen fester und flüssiger Phase bestimmen.

Nur wenige Stoffe bleiben vor dem Schmelzen ganz unverändert. Bei den meisten sieht man während des Erhitzens vor dem Erreichen der Schmelztemperatur mannigfache, durch Sublimationsvorgänge bedingte Veränderungen. Manche Stoffe lagern sich während des Erwärmens so weitgehend um, daß sie vor dem Schmelzen ein völlig anderes Aussehen gewinnen. Es können tropfenförmige oder kristallisierte Sublimate oder beide nebeneinander auftreten. Die tropfenförmigen bezeichnet man richtiger als Kondensationströpfchen. Für die mikroskopische Arbeitsweise ist die Fähigkeit eines Stoffes zu sublimieren oft von außerordentlichem Vorteil, da sie die Möglichkeit bietet, in kurzer Zeit aus einem unreinen Stoff eine kleine, für die Mikroschmelzpunkt- oder Brechungsindexbestimmung genügende Menge reiner Kristalle zu erhalten.

Die Bestimmung der eutektischen Temperatur soll hier nur an Stoffen erläutert werden, die in der Schmelze mischbar sind, aber keine Mischkristalle bilden (vgl. W. 4.0.3, Abb. 73). Ein Gemisch aus zwei Stoffen wird auf dem Heiztisch beobachtet. Bei Erreichen der eutektischen Temperatur schmilzt ein Teil zu Schmelztropfen, der andere Teil bleibt kristallin. Dabei hängt die Anzahl der Tropfen vom Mengenverhältnis der beiden Stoffe ab. Trotzdem kann man diese Erscheinung schon beim Vorhandensein eines Mengenverhältnisses von nur 1 : 99 unter dem Mikroskop beobachten. Es kann bei dieser Methode aber vorkommen, daß im Beobachtungsfeld nur ein Stoff vorhanden ist, und dieser dann erst bei seiner Schmelztemperatur schmilzt. Um das dadurch notwendig gewordene fortwährende Verschieben des mikroskopischen Präparates zu vermeiden, wendet man die *Kontaktmethode* an. Hierbei wird die Mischzone zweier zwischen Objektträger und Deckglas sich berührender Stoffe bei Temperaturänderungen unter dem Mikroskop beobachtet.

Durch die Bestimmung der eutektischen Temperatur eines Stoffes mit einem Teststoff kann man den Stoff charakterisieren bzw. nachweisen.

Eine besonders charakteristische Eigenschaft der Stoffe ist die Lichtbrechung. Kristalle, bei denen die Lichtbrechung in allen Richtungen gleich ist, nennt man optisch isotrop. Der Brechungsindex ist von der Lage des Kristalls unabhängig. Ist dies nicht der Fall, liegen optisch anisotrope Kristalle vor. Da bei diesen Kristallen die Bestimmung der Brechungsindizes sehr kompliziert wird, wurde sie oft zur Identifizierung von Stoffen abgelehnt. Bestimmt man aber den Brechungsindex nicht von den festen Kristallen, sondern von deren Schmelzen, die immer optisch isotrop sind, hat man die Schwierigkeit der optischen Anisotropie der meisten kristallisierten organischen Stoffe umgangen. Man versetzt dazu das mikroskopische Präparat des zu prüfenden Stoffes vor dem Schmelzen mit ein paar Stäub-

chen eines Glaspulvers mit bekanntem Brechungsindex, schmilzt es und vergleicht die Lichtbrechung der Schmelze mit der der Glassplitter. Ein Objekt ist in einer umgebenden Flüssigkeit nur sichtbar, wenn der Brechungsindex der beiden Stoffe verschieden ist. Das Objekt erscheint dann durch eine scharfe dunkle Linie von dem umgebenden Medium abgegrenzt. Beim Heben des Tubus entsteht neben der Grenze eine helle Linie, die *Beckesche Linie*, die sich beim weiteren Heben des Tubus gegen den stärker lichtbrechenden Stoff hin zu verschieben scheint. Beim Senken des Tubus wandert diese Linie gegen das schwächer lichtbrechende Medium. Bei vollständiger Gleichheit der Brechungsindizes verschwindet in der Regel die Beckesche Linie, das Objekt ist in diesem Fall in der umgebenden Flüssigkeit unsichtbar. Zum Vergleich steht eine ganze Skale von Glaspulverarten zur Verfügung mit einer durchschnittlichen Differenz der Brechungsindizes von 0,01.

Die Tatsache, daß der Index der Schmelze mit steigender Temperatur abnimmt, während der der Gläser praktisch unverändert bleibt, ermöglicht eine noch genauere Bestimmung. Zu diesem Zweck wählt man von den beiden Glaspulvern, deren Brechungsindizes knapp oberhalb bzw. unterhalb des Index des geschmolzenen Stoffes liegen, das Glas mit dem niedrigeren Index. Unmittelbar nach dem Schmelzen ist die Schmelze höher lichtbrechend als die Glassplitter, nach weiterem Erhitzen nimmt jedoch der Brechungsindex der Schmelze ab, die Beckesche Linie und somit die Glassplitter werden immer undeutlicher, um schließlich bei Übereinstimmung der Lichtbrechung meist vollständig zu verschwinden. Bei weiterem Temperaturanstieg tauchen die Glassplitter wieder auf, die Beckesche Linie wandert jetzt beim Heben des Tubus gegen die Glassplitter. Die Schmelze ist niedriger brechend geworden. Dieses Umschlagen der Beckeschen Linie vollzieht sich innerhalb eines Grades. Die Temperatur, bei der die Brechungsindizes von Schmelze und Glaspulver gleich sind, heißt *Gleichheitstemperatur*.

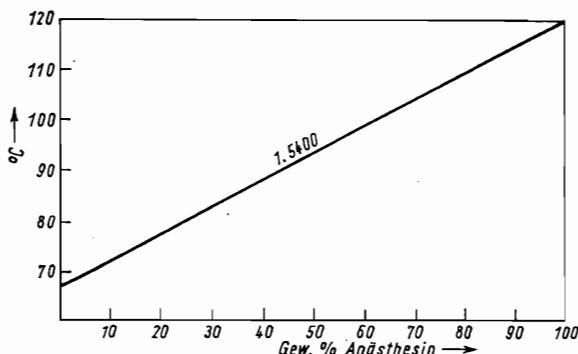


Abb. 80. Refraktionsdiagramm  
Cycloform : Anästhesin

Mit Hilfe der Lichtbrechung ist auch eine quantitative Analyse von Zweistoffgemischen möglich. Sie beruht darauf, daß die Brechungsindizes von geschmolzenen Mischungen in der Regel eine lineare Funktion der Brechungsindizes der beiden Komponenten darstellen. Die einfachsten Beispiele sind dabei die, bei denen zur Bestimmung der Brechungsindizes der Komponenten das gleiche Glaspulver verwendet werden kann, so daß der Unterschied der Lichtbrechung nur an den verschiedenen Gleichheitstemperaturen von Schmelze und Glas zum Ausdruck kommt.

Man trägt in einem Diagramm auf der Abszisse die Mischungsverhältnisse und auf der Ordinate die Temperaturen auf.

In Abb. 80 ist das Diagramm von Cycloform und Anästhesin wiedergegeben, das erstere zeigt bei  $66,5^{\circ}\text{C}$ , das letztere bei  $120^{\circ}\text{C}$  Gleichheit der Lichtbrechung mit Glas ( $n = 1,5400$ .) Die entsprechenden Temperaturen für alle Mischungsverhältnisse liegen auf einer die beiden Gleichheitstemperaturen der Komponenten verbindenden Geraden. Je steiler diese Gerade bei einem System verläuft, um so genauer läßt sich die quantitative Bestimmung durchführen.

#### Versuchsausführung

Für die Herstellung des mikroskopischen Präparates benötigen wir eine sehr geringe Stoffmenge, im allgemeinen nicht mehr als 0,1 mg, die vorher zwischen zwei Objektträgern zerrieben wird, um nicht zu große Kristalle in die Untersuchung einzubeziehen. Für die Schmelzpunktbestimmung ermitteln wir zunächst in einem Vorversuch bei größter Heizleistung die ungefähre Schmelztemperatur, bringen die Schmelze unter leichtem Druck auf das Deckglas zum Erstarren und erhalten dadurch einen Kristallfilm und damit

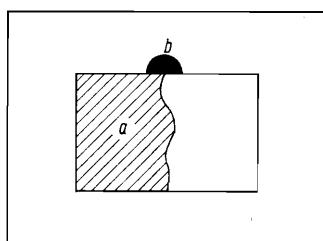


Abb. 81. Kontaktpräparat

den den Einmeßbedingungen entsprechenden gleichmäßig kleinen Abstand zwischen Objektträger und Deckglas. Die Schmelztemperatur wird nun mehr bei einem Temperaturanstieg von  $4\text{ K} \cdot \text{min}^{-1}$  (Einstellung Vorwiderstand) nach der *durchgehenden Methode* bzw. mit höherer Präzision *im Gleichgewicht* bestimmt.

Für die Bestimmung der eutektischen Temperatur mit Hilfe der *Kontaktmethode* wird das Kontaktpräparat wie folgt hergestellt (vgl. Abb. 81): Wir bringen zunächst eine Probe des höher schmelzenden Stoffes zum Schmelzen,

achten darauf, daß die Schmelze nur etwa die Hälfte des Raumes zwischen Objektträger und Deckglas ausfüllt, und lassen erstarren (Gebiet *a*). Den zweiten Stoff bringen wir nun an den Rand des Deckglases neben den erstarrten ersten Stoff (Stelle *b*) und erwärmen, bis er schmilzt, wobei die Schmelze in den noch freien Raum zwischen Objektträger und Deckglas einfließt. In der Berührungszone wird durch die Schmelze des zweiten Stoffes etwas von dem erstarrten ersten Stoff aufgelöst. Dadurch haben die beiden Stoffe die Möglichkeit, sich entweder nur zu mischen oder in der für das Stoffpaar charakteristischen Weise miteinander zu reagieren. Gelingt dies nicht, so wird das Präparat nochmals vollständig durchgeschmolzen, abgekühlt und erneut erwärmt. Die dadurch breiter gewordene Mischzone läßt sich besser beobachten.

Für Aufgabe 3 benötigen wir eine etwas größere Stoffmenge. Wir bringen einige Glassplitter in das wie bei Aufgabe 1 vorbereitete Präparat, erwärmen aber noch langsamer als bei der Gleichgewichtsmethode und beobachten das Verhalten der Beckeschen Linie. Die Beckesche Linie ist am intensivsten, wenn das Präparat im monochromatischen Licht beobachtet wird, deshalb ist ein Rotfilter vorzuschalten.

# Elektrizitätslehre

## E. 1. WIDERSTÄNDE

### E. 1.0. Allgemeine Grundlagen

#### E. 1.0.1. Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz

Das Verhältnis der in einem Stromkreis wirksamen Spannung  $U$  zur Stromstärke  $I$  bezeichnet man als den Widerstand  $R$  des Stromkreises:

$$R = \frac{U}{I} \text{ (Definition)} \quad (1)$$

Einheit: 1 Ohm ( $\Omega$ ) = 1  $\frac{\text{Volt (V)}}{\text{Ampere (A)}}$ .

Gl. (1) kann auch auf einzelne Teile eines Stromkreises angewendet werden, wobei die Spannung zwischen den Enden des betrachteten Teilstückes einzusetzen ist. Physikalisch gesehen erscheint es sinnvoll, die Stromstärke als Folge der sie verursachenden Spannung aufzufassen:  $I = U/R$ ; oftmals ist es aber auch zweckmäßig, umgekehrt die Spannung zwischen den Enden eines Leiterstückes formal als Folge des Stromes anzusehen, der dieses Leiterstück durchfließt:  $U = IR$ . Man nennt diese Spannung auch „Widerstandsspannung“, die an  $R$  auftritt, oder „Spannungsabfall“.

Anstelle des Widerstandes kann mit gleicher Berechtigung auch dessen Kehrwert  $G$  eingeführt werden, der *Leitwert* genannt wird:  $G = 1/R$ . Seine Einheit ist das Siemens (S). Mit dem Leitwert ergeben sich die Beziehungen

$$G = \frac{I}{U}, \quad I = UG, \quad U = \frac{I}{G}. \quad (1a)$$

Im allgemeinen Fall besteht keine Proportionalität zwischen  $I$  und  $U$ , so daß  $R$  eine Funktion von  $U$  oder von  $I$  wird (Glimmlampe, Lichtbogen, Elektronenröhre, Gleichrichter usw.). In dem technisch besonders wichtigen Sonderfall der metallischen Leitung ist jedoch Proportionalität zwischen Stromstärke und Spannung gegeben (*Ohmsches Gesetz*), so daß dann  $R = \text{const}$  ist. Hierfür ist allerdings Konstanz der Temperatur Voraussetzung. Da sich diese jedoch durch die Wärmeentwicklung des Leiter durchfließenden Stromes in Abhängigkeit von dessen Stärke u. U. merklich ändern kann (Glühlampe), wird in solchen Fällen  $R$  durch diesen sekundären Einfluß stromstärkeabhängig.

### E. 1.0.2. Kirchhoffsche Regeln

Die 1. *Kirchhoffsche Regel* geht davon aus, daß in keinem Punkt eines elektrischen Netzwerkes freie Ladungsträger zusätzlich entstehen oder verschwinden. Sie lautet: Die Summe der zu einem Verzweigungspunkt eines Netzwerkes (Knoten) hinfließenden ist gleich der Summe der abfließenden Ströme. Werden die zu- und abfließenden Ströme durch unterschiedliche Vorzeichen gekennzeichnet, ist die Summe aller Teilströme  $I_i$  Null (*Knotenregel*):

---


$$\sum_i I_i = 0. \quad (2)$$


---

Die 2. *Kirchhoffsche Regel* betrachtet die Spannungsverhältnisse in einer geschlossenen Leiterschleife (Masche) eines Netzwerkes: Die Summe der „eingeprägten“ Spannungen  $U_k$  (Urspannungen entsprechender Quellen) ist dem Betrag nachgleich der Summe aller Spannungen  $U_i = I_i R_i$  an den Widerständen (*Maschenregel*). Dafür schreibt man meist

---


$$\sum_k U_k + \sum_i I_i R_i = 0, \quad (3)$$


---

weil vereinbarungsgemäß von folgender *Vorzeichenregel* ausgegangen wird: Jeder Spannungsquelle wird ein „Zähl-“ oder „Bezugspfeil“ von der Richtung des elektrischen Feldes innerhalb der Spannungsquelle und daher vom positiven zum negativen Pol zugeordnet. Als positive, ebenfalls durch Pfeile symbolisierte Stromrichtung gilt die Bewegung positiver Lagsträger.

Gl. (3) führt zum richtigen Ergebnis, wenn die Masche eines Netzes in einem willkürlich festgelegten Sinne durchlaufen wird und beim Aufsummieren der Anteile die Vorzeichenkonvention beachtet wird.

### E. 1.0.3. Schaltung von Widerständen

Durch *Kombination von Einzelwiderständen* (Abb. 82) können beliebig vorgegebene Widerstandswerte realisiert werden: Die *Reihen- oder Serenschaltung* der Einzelwiderstände  $R_1, R_2, \dots, R_n$  führt zu dem Gesamtwiderstand

---


$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (\text{Addition der Widerstände}). \quad (4)$$


---

Bei der *Parallelschaltung* ist der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste Teilwiderstand; denn es ist

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (\text{Addition der Leitwerte}). \quad (5)$$

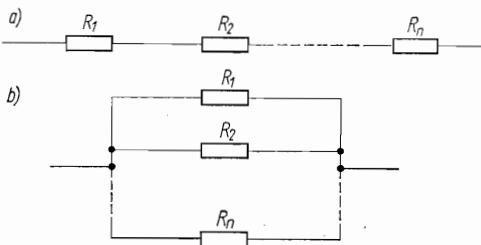


Abb. 82. a) Reihen- und b) Parallelschaltung von Widerständen

Insbesondere gilt für zwei Widerstände

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (6)$$

Die Gln. (4) und (5) folgen aus der Definition des Widerstandes [Gl. (1)] und den Kirchhoffsschen Regeln [Gln. (2) und (3)].

#### E. 1.0.4. Spezifischer Widerstand, Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

Bei einem homogenen zylindrischen Leiter (Länge  $l$ , Querschnitt  $A$ ) ergibt sich sein Widerstand zu

$$R = \varrho \frac{l}{A}; \quad (7)$$

dabei ist  $\varrho$  eine Materialkonstante, die *spezifischer Widerstand* genannt wird und in  $\Omega \cdot \text{m}$ ,  $\Omega \cdot \text{cm}$  oder in  $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$  angegeben werden kann.

Der Kehrwert von  $\varrho$  wird als *spezifisches Leitvermögen*  $\sigma$  bezeichnet, d.h., es gilt

$$G = \sigma \frac{A}{l}.$$

Bei festen Stoffen ist  $\rho$  stark vom Reinheitsgrad und vom Kristallgefüge abhängig. Geringe Verunreinigungen setzen z. B. den Widerstand von Leitungskupfer und -aluminium stark herauf.

Die bereits erwähnte Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von der Temperatur kann für viele, vor allem metallische Stoffe durch die Beziehung

$$R_t = R_0(1 + \beta t + \gamma t^2) \quad (8)$$

beschrieben werden, wobei  $R_t$  und  $R_0$  die Widerstände bei der Temperatur  $t$  und am Eispunkt ( $0^\circ\text{C}$ ) bedeuten;  $\beta$  und  $\gamma$  sind *Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes*. Sie werden in  $\text{K}^{-1}$  bzw.  $\text{K}^{-2}$  angegeben. Ist  $R_0$  beispielsweise durch eine Messung am Eispunkt bekannt, können  $\beta$  und  $\gamma$  durch zwei weitere, über das interessierende Temperaturintervall verteilte Widerstandbestimmungen  $R_{t_1}$  und  $R_{t_2}$  (die zugehörigen Temperaturen sind  $t_1$  und  $t_2$ ) berechnet werden. Mit den experimentellen Daten lässt sich zweimal Gl. (8) aufstellen. Man erhält so Bestimmungsgleichungen für  $\beta$  und  $\gamma$ :

$$\beta = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \frac{R_{t_1} - R_0}{R_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} - \frac{R_{t_2} - R_0}{R_0} \cdot \frac{t_1}{t_2} \right\}, \quad (8a)$$

$$\gamma = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \frac{R_{t_2} - R_0}{R_0} \cdot \frac{1}{t_2} - \frac{R_{t_1} - R_0}{R_0} \cdot \frac{1}{t_1} \right\}. \quad (8b)$$

Für kleine Temperaturintervalle kann mit meist hinreichender Genauigkeit die Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes durch den linearen Zusammenhang

$$R_t = R_0(1 + \beta t) \quad (9)$$

approximiert werden, der für  $\gamma = 0$  aus Gl. (8) folgt. Handelt es sich darum, Widerstandswerte bei zwei beliebigen Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  in Beziehung zu bringen, setzt man

$$\frac{R_{t_1}}{R_{t_2}} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2}$$

und findet hieraus

$$\beta = \frac{R_{t_1} - R_{t_2}}{t_1 R_{t_2} - t_2 R_{t_1}}. \quad (9a)$$

Der Temperaturkoeffizient  $\beta$  lässt sich in diesem Fall aus zwei Widerstandsmeßungen bei den Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  des interessierenden Intervalls gewinnen.

Im Vorzeichen des Temperaturkoeffizienten  $\beta$  kommt der Leitungsmechanismus der betreffenden Stoffklasse zum Ausdruck. Für Metalle und für viele Metallegierungen ist der Temperaturkoeffizient positiv; der Widerstand steigt also mit zunehmender Temperatur. Es gelingt aber auch, Legierungen herzustellen (z. B. aus Kupfer, Nickel, Mangan), die innerhalb eines weiten Temperaturbereiches nahezu konstanten Widerstand haben ( $\beta \approx 0$ ). Diese Legierungen eignen sich besonders für Normal- und Meßwiderstände. Elektrolyte sowie halbleitende Stoffe (das sind beispielsweise Elemente der 4. Gruppe des Periodensystems wie C, Si, Ge, aber auch binäre Verbindungen von Elementen der 2. mit der 6., sogenannte II-VI-Halbleiter, bzw. der 3. mit der 5. Gruppe des Periodensystems, die III-V-Halbleiter) weisen einen negativen Temperaturkoeffizienten auf. Spezielle Widerstände aus halbleitendem Material heißen deshalb auch NTC-Widerstände (NTC = negative temperature coefficient).

Das Temperaturverhalten von Halbleitern kann oft durch eine Exponentialfunktion der Form

---


$$R_T = R^* e^{\frac{T^*}{T}} = R^* e^{\frac{E}{kT}} \quad (10)$$


---

recht gut wiedergegeben werden. Hierin ist  $T$  die absolute Temperatur,  $T^*$  eine Materialkonstante von der Dimension einer Temperatur.  $R^*$  ist ein Faktor, der die Dimension eines Widerstandes hat und von der Form des Widerstandes und der Ladungsträgerkonzentration wesentlich abhängt. In der zweiten Schreibweise von Gl. (10) sind  $E$  die Aktivierungsenergie und  $k$  die Boltzmann-Konstante. Durch Differentiation der Gl. (10) nach der Temperatur und eine Umformung folgt für den Temperaturkoeffizienten dieser Stoffklasse

---


$$\beta^* = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = - \frac{T^*}{T^2}. \quad (10a)$$


---

Die Gln. (8) bis (10a) gelten auch, wenn wir die Widerstände  $R$  durch die entsprechend indizierten spezifischen Widerstände  $\rho$  ersetzen. Dies ist durch Gl. (7) begründet.

### **E. 1.0.5. Ausführungsformen elektrischer Widerstände**

Widerstände dienen vor allem zur Umwandlung elektrischer Energie in Wärme (Heizung) oder Strahlungsenergie (Glühlampe), der Stromeinstellung oder -begrenzung in Leitungszweigen und zur Erzeugung gewünschter Spannungsabfälle. Daneben gibt es verschiedene Sonderformen (z. B. die

**Meßwertwandler:** Widerstandsmanometer, Widerstandsthermometer, Dehnungsmeßstreifen, Photowiderstände). In diesem Abschnitt werden nur Meß- und Einstellwiderstände behandelt. Der Praktikant informiere sich im Labor über die verschiedenen, dort benutzten Ausführungsformen: Grundsätzlich lassen sich feste und veränderbare Widerstände unterscheiden. Letztere können kontinuierlich oder stufenweise einstellbar sein.

**Drahtwiderstände** bestehen aus Sonderlegierungen mit hohem spezifischem Widerstand und relativ kleinem Temperaturkoeffizienten (Manganin, Konstantan), **Schichtwiderstände** aus Kohlenstoff, der auf einem Porzellankörper niedergeschlagen ist. Aus der Beschriftung der Widerstände oder aus Farbkennzeichen sind ihre in  $\Omega$ ,  $k\Omega$  oder  $M\Omega$  angegebene Größe und oft die Zuverlässigkeit des Nennwertes sowie die zulässige Belastbarkeit (Stromstärke in A oder Leistung in W) zu ersehen. Vor dem Einsatz eines Widerstandes überzeuge man sich durch eine Überschlagsrechnung, daß dieser nicht überlastet wird.

**Normalwiderstände** sind Präzisionswiderstände für Meßzwecke. Sie werden meist in Büchsenform gebaut und besitzen zwei Apparateklemmen für den Anschluß der Meßanordnung und zwei zur Messung des Spannungsabfalles. Die Widerstände eines Satzes entsprechen dezimalen Bruchteilen oder Vielfachen von  $1\Omega$  (Bereich  $10^{-4}\Omega \dots 10^5\Omega$ ).

**Stöpselwiderstände** sind ebenfalls Präzisionsmeßwiderstände. Die Einzelwiderstände sind in Reihe geschaltet und in der Regel innerhalb einer Zehnerpotenz  $1 : 2 : 2 : 5$  abgestuft. Die nicht benötigten Widerstände des Satzes werden mit einem Stöpsel überbrückt.

Bei **Dekadenwiderständen** sind zehn gleiche Widerstände in Reihe geschaltet und jeweils mit einem Kontakt eines Stufenschalters verbunden. Der Einzelwiderstand entspricht einem dezimalen Bruchteil oder Vielfachen von  $1\Omega$ . Die einzelnen Dekaden können zu Sätzen mit einem Wertebereich von  $0,1\Omega$  bis  $10^6\Omega$  vereinigt werden.

Als Einstellwiderstand werden **Schiebe-, Dreh- und Kurbelwiderstände** benutzt.

Die beschriebenen Meß- und Einstellwiderstände ergeben im Gleich- und Wechselstromkreis praktisch gleiche Werte, wenn man sie gemäß Gl. (1) aus Wertepaaren der Stromstärke und Spannung berechnet. Man nennt sie im Unterschied zu den frequenzabhängigen induktiven und kapazitiven Wechselstromwiderständen insbesondere auch Gleichstrom- oder Wirkwiderstände. Für ihre Kombination (Reihen- und Parallelschaltung) mit induktiven und kapazitiven Widerständen gelten Gl. (4) bis (6) nur, wenn letztere als komplexe Widerstände aufgefaßt werden (vgl. Abschn. E. 5.0.1 und E. 5.0.2).

## E. 1.1. Bestimmung von Widerständen durch Strom- und Spannungsmessung

**Aufgaben:** 1. Aus der Messung von Strom und Spannung ist unter Berücksichtigung des Innenwiderstandes der Instrumente ein elektrischer Widerstand zu ermitteln.

2. Durch Messung der Ströme und Spannungen sollen die Gesamt- und Teilwiderstände

- a) einer Reihenschaltung
- b) einer Parallelschaltung

bestimmt werden. Mit den Meßdaten sind die Beziehungen für die Reihen- und Parallelschaltung sowie die Kirchhoffsschen Regeln zu überprüfen.

3. Die Strom-Spannungs-Charakteristiken verschiedenartiger elektrischer Widerstände (z. B. Metall- und Kohlefadenlampe, Eisen-Wasserstoff-Widerstand, Varistor) sind aufzunehmen. Aus den Meßdaten werden die Widerstands-Stromstärke-Kennlinien abgeleitet und diskutiert.

Nach der Definition [Gl. (1)] läßt sich ein elektrischer Widerstand aus Wertepaaren der Stromstärke und Spannung berechnen. Zur gleichzeitigen Erfassung von Strom und Spannung dienen die Schaltungsvarianten a und b der Abb. 83. Das Potentiometer (Schiebewiderstand  $R_p$ ) liefert eine zwischen Null und dem Wert der Quelle liegende variable Spannung (vgl.

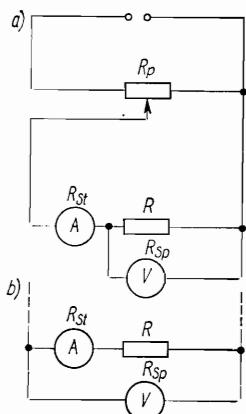


Abb. 83. Widerstandsbestimmung aus Strom- und Spannungsmessung

Abschn. E. 2.2). Sie kann selbstverständlich auch einem Stromversorgungsgerät entnommen werden.  $R$  soll der Widerstand sein, dessen Wert zu ermitteln ist. Damit die Meßwerte durch die Instrumente möglichst wenig beeinflußt werden, besitzen Strommesser (Ampermeter) im Vergleich zu den Widerständen des Meßkreises einen kleinen Innenwiderstand ( $R_{st}$ ), Spannungsmesser (Voltmeter) dagegen einen vergleichsweise hohen ( $R_{sp}$ ).

Bei der Schaltung a (*spannungsrichtige Schaltung*) wird der Teilstrom  $I_{sp}$  über den Spannungsmesser (Widerstand  $R_{sp}$ ) mit gemessen. Gl. (1) liefert daher für den Widerstand  $R$  einen zu kleinen Wert und muß durch

$$R = \frac{U}{I - I_{sp}} = \frac{U}{I - U/R_{sp}} \quad (11a)$$

ersetzt werden. In der Schaltung b (*stromrichtige Schaltung*) verfälscht der Spannungsabfall  $U_{\text{St}}$  am Widerstand  $R_{\text{St}}$  des Strommessers das Ergebnis. Der Widerstand  $R$  ist in diesem Falle aus

$$R = \frac{U - U_{\text{St}}}{I} = \frac{U - IR_{\text{St}}}{I} \quad (11\text{b})$$

zu berechnen, da Gl. (1) zu große Werte ergibt. Ein Vergleich der Formeln zeigt, daß Gl. (11a) für  $R_{\text{Sp}} \gg R$  und Gl. (11b) für  $R_{\text{St}} \ll R$  in Gl. (1) übergehen.

Die schaltungsbedingten Fehler können meist vernachlässigt werden, wenn bei vergleichsweise kleinen Widerständen  $R$  die Schaltung a, bei großen Widerständen  $R$  die Schaltung b verwendet wird.

Soll dagegen bei *Feinmessungen* der schaltungsbedingte Fehler berücksichtigt werden, wird die spannungsrichtige Schaltung a bevorzugt, weil der Innenwiderstand der Voltmeter meist bekannt und gegenüber dem der Amperemeter weitaus unveränderlicher ist. Eine Korrektur der Meßwerte erübrigt sich auch, wenn die Spannung „leistunglos“ gemessen wird. Das kann mit elektronischen Voltmetern (vgl. Abschn. E. 2.1), Oszillographen (vgl. Abschn. E. 4.4), Elektrometern (vgl. Abschn. E. 1.4) oder mit der Spannungsbestimmung durch Kompensation (vgl. Abschn. E. 2.2) erreicht werden.

Für die Strom- und Spannungsmessungen dieses Abschnittes werden Drehspulmeßwerke empfohlen, deren Prinzip und Verhalten an anderer Stelle (Abschn. E. 4.1) ausführlich behandelt werden. Oft wird es nötig sein, Strom- und Spannungsmessungen innerhalb großer Bereiche, gegebenenfalls über mehrere Zehnerpotenzen der Meßwerte hinweg bei gleicher relativer Genauigkeit durchzuführen. Dann benutzt man Instrumente hoher Empfindlichkeit, deren Meßbereich durch Zusatzwiderstände entsprechend verändert werden kann.

Soll der *Meßbereich eines Strommessers*  $n$ -fach erweitert werden, schaltet man parallel zum Instrument (Innenwiderstand  $R_{\text{St}}$ ) einen Widerstand  $R_{\text{Sh}}$  (Shunt), über den bei Vollausschlag des Instrumentes der  $(n - 1)$ -fache Strom fließen muß. Dies wird, da die Teilströme bei der Parallelschaltung den entsprechenden Widerständen reziprok sind, durch einen Shunt

$$R_{\text{Sh}} = \frac{R_{\text{St}}}{n - 1} \quad (12\text{a})$$

erreicht.

Der *Meßbereich eines Spannungsmessers* wird  $n$ -fach erweitert, wenn dem Innenwiderstand  $R_{\text{Sp}}$  ein Widerstand

$$R_{\text{R}} = (n - 1) R_{\text{Sp}} \quad (12\text{b})$$

in Reihe geschaltet wird. An diesem Vorwiderstand tritt bei Vollausschlag des Instrumentes im Vergleich zu seinem Innenwiderstand ein  $(n - 1)$ -facher Spannungsabfall auf.

Das Prinzip der Meßbereicherweiterung elektrischer Meßinstrumente wird in handelsüblichen *Vielfachmeßinstrumenten* sehr umfassend angewandt. Das Meßsystem ist ein hochempfindliches Drehspulinstrument mit niedrigem Widerstand, das bei geeigneter Wahl von Vor- und Parallelwiderständen sowohl für Spannungs- wie auch für Strommessungen benutzt werden kann. Die Widerstände sind in das Gehäuse des Instrumentes eingebaut und werden über einen Stufenschalter in Verbindung mit der Wahl des Meßbereiches geschaltet. Durch einen zusätzlich im Gehäuse untergebrachten Meßgleichrichter können auch Wechselströme und Wechselspannungen erfaßt werden. Die zugehörige (meist rote) Skale ist wegen der gekrümmten Gleichrichterkennlinie nicht linear. Sie ist in Effektivwerten des Stromes und der Spannung geteilt und setzt sinusförmigen Verlauf voraus. Oberschwingungen verfälschen daher das Meßergebnis. In günstigen Fällen eignen sich mit Gleichrichtern ausgestattete Drehspulinstrumente für Messungen bei Frequenzen von 15 Hz bis etwa 15000 Hz.

Ein Vielfachmeßinstrument umfaßt beispielsweise für beide Stromarten entsprechend unterteilte Bereiche von  $50 \mu\text{A}$  bis  $2,5 \text{ A}$  und  $100 \text{ mV}$  bis  $1000 \text{ V}$ . Die Angabe des Meßbereiches bezieht sich jeweils auf den Vollausschlag des Instrumentes.

Der Innenwiderstand  $R_i$  eines Vielfachmeßinstrumentes läßt sich für den jeweils gewählten Meßbereich als Produkt aus dem Meßbereichendwert und einem bezogenen Widerstand ( $\Omega/\text{V}$ ) berechnen. Für die Wechselspannungsmeßbereiche beträgt der gerätetypische Wert beispielsweise  $4000 \Omega/\text{V}$ , für entsprechende Gleichspannungsbereiche  $20000 \Omega/\text{V}$ . Gelegentlich ist die Stromaufnahme bei Vollausschlag im jeweiligen Meßbereich angegeben, die gleich dem Kehrwert des bezogenen Widerstandes ist, so daß man den Strombedarf des Spannungsmessers gleichzeitig mit der zu messenden Spannung auf der entsprechenden Skale ablesen kann. Analog wird für die Strommeßbereiche der Spannungsbedarf für Vollausschlag angegeben. Das Produkt aus Strom- bzw. Spannungsbedarf bei Vollausschlag und dem Meßbereichendwert ergibt den jeweiligen Innenwiderstand.

Vielfachmeßinstrumente gehören meist zur *Gütekasse 1,5*, wie aus der Beschriftung der Skale zu erkennen ist. Das bedeutet, daß der absolute Fehler der Instrumentenanzeige  $1,5\%$  des Meßbereichendwertes bei Einhaltung bestimmter Bedingungen (z. B. hinsichtlich Temperatur, Lage des Instrumentes, Fremdfelder) nicht überschreitet. Solche Instrumente gehören nach internationaler Übereinkunft zur Gruppe der *Betriebsmeßgeräte*, deren Klassen 1; 1,5; 2,5 und 5 sind. Elektrische *Feinmeßgeräte* werden in die Klassen 0,05; 0,1; 0,2 und 0,5 eingeteilt.

Einfache, direkt anzeigenende *Widerstandsmesser* (Ohmmeter, Durchgangsprüfer) basieren auf Gl. (1). Bei ihnen werden eine Trockenbatterie, ein Strommesser und der zu bestimmende Widerstand in Reihe geschaltet. Da mit festgelegter Spannung gearbeitet wird, ist es möglich, auf der Skale des Strommessers unmittelbar Widerstandswerte anzugeben. Eine Nullpunkt Korrektur ist dann möglich, wenn im Meßkreis zusätzlich ein Einstellwiderstand liegt. Dieser wird vor jeder Messung so gewählt, daß bei überbrücktem Anschluß für den zu bestimmenden Widerstand das Instrument Vollausschlag zeigt.

Das Verhalten elektrischer Bauelemente bei unterschiedlichen Betriebsbedingungen läßt sich besonders gut übersehen, wenn die Zusammenhänge graphisch dargestellt werden. Es liegt eine *Strom-Spannungs-Charakteristik* oder -*Kennlinie* vor, wenn die Stromstärke über der Spannung aufgetragen wird, die den jeweiligen Strom bewirkt. Entsprechendes gilt für die *Widerstands-Strom-* oder die *Widerstands-Spannungs-Kennlinie*.

Ein *Eisen-Wasserstoff-Widerstand* besteht aus einem mit Wasserstoffgas gefüllten und den Glühlampen ähnlichen Glaskolben, in dem ein dünner Eisendraht gespannt ist. Eisen besitzt einen großen positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes und Wasserstoff eine gute Wärmeleitfähigkeit. Bei geringen Spannungen wird die im Eisendraht erzeugte Joulesche Wärme durch den Wasserstoff nahezu vollständig abgeführt, so daß die Temperatur und damit auch der Widerstand des Drahtes praktisch konstant bleiben. Von einer bestimmten Spannung an ist der Wasserstoff nur noch in der Lage, die Wärme teilweise abzuleiten. Eisen-Wasserstoff-Widerstände werden so ausgelegt, daß in einem gewissen Spannungsbereich – dem Regelbereich – Widerstand und anliegende Spannung einander proportional sind, so daß die Stromstärke konstant bleibt. Der differentielle Widerstand strebt in diesem Gebiet gegen Unendlich. Oberhalb des Regelbereiches überwiegt die Wärmeableitung durch Strahlung, und der differentielle Widerstand nimmt wieder ab. Früher wurden auf diese Weise Netzgeräte gegenüber Schwankungen der Eingangsspannung unempfindlich gemacht, heute hält man z. B. den Strom in elektrolytischen Bädern mit Eisen-Wasserstoff-Widerständen konstant.

*Varistoren* sind spannungsabhängige Widerstände (*variable resistor*) aus gesintertem Siliziumkarbid, bei denen die Kennlinie unabhängig von der Polarität ist. Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung wird in einem großen Bereich durch

$$U = CI^\beta$$

gegeben. Darin sind  $\beta$  eine Materialkonstante ( $0,18 \leq \beta \leq 0,26$ ) und  $C$  ein Proportionalitätsfaktor, in den die geometrischen Abmessungen des Varistors eingehen. Der Gleichstromwiderstand

$$R = \frac{U}{I} = CI^{\beta-1}$$

und auch der differentielle Widerstand

$$R_d = \frac{dU}{dI} = \beta CI^{\beta-1} = \beta R$$

nehmen mit steigender Stromstärke ab. Varistoren dienen zur Spannungsstabilisierung und zur Unterdrückung von Spannungsspitzen, z. B. zur Funkenlöschung an Relaiskontakten.

### Versuchsausführung

Die Messungen werden jeweils mit niedrigen Werten der Spannung begonnen. Zum Schutz der Instrumente tasten wir uns grundsätzlich vom unempfindlichsten zu dem für die jeweilige Messung günstigsten Meßbereich vor. Bei Vielfachinstrumenten muß bei der Wahl der Meßbereiche unbedingt die Stromart beachtet werden.

*Aufgabe 1:* Es wird nach Schaltung a der Abb. 83 gearbeitet und für mindestens 5 Wertepaare von Strom und Spannung der unbekannte Widerstand nach Gl. (11a) berechnet. Die schaltungsbedingten Fehler sind mit den instrumentellen Fehlern zu vergleichen. Es ist zu prüfen, ob erstere bei den gewählten Versuchsbedingungen ins Gewicht fallen. Die instrumentell bedingten Fehler werden aus den der Güteklaasse des Instrumentes entsprechenden Werten für  $\Delta I$  und  $\Delta U$  abgeschätzt.

*Aufgabe 2:* Als Meßobjekte dienen mehrere Einzelwiderstände, die nacheinander in Reihe und parallel geschaltet werden. Es ist eine Schaltung aufzubauen, die es ermöglicht, jeweils den Gesamtstrom und die Gesamtspannung sowie die Teilströme oder Spannungsabfälle zu messen. Die Messungen sollen jeweils bei drei verschiedenen Eingangsspannungen vorgenommen, die Einzelwiderstände nach Gl. (1) berechnet, die Gln. (4) und (5) sowie die Kirchhoffsschen Regeln [Gln. (2) und (3)] überprüft werden.

*Aufgabe 3:* In einem Vorversuch ermitteln wir für jedes Meßobjekt einen Richtwert des Widerstandes, um zu entscheiden, ob Schaltung a oder b der Abb. 83 zweckmäßiger ist. Bei mindestens einem der Meßobjekte wird die Schaltung mit Wechselspannung betrieben. Die in der Arbeitsplatzanleitung für die einzelnen Bauelemente angegebenen Betriebsdaten dürfen nicht überschritten werden.

In einer Darstellung von  $I$  über  $U$  bestimmt man einen konstanten Widerstand des Meßobjekts aus der Steigung  $S$  der Geraden gemäß

$$R = \frac{1}{S} = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1}.$$

Bei nichtlinearem Kurvenverlauf lässt man die Spannungs- und Stromdifferenzen gegen Null gehen und erhält den *differentiellen Widerstand*

$$R_d = \frac{dU}{dI}. \quad (13)$$

Für die graphische Darstellung der Kennlinien wird wegen des Umfanges der Wertebereiche logarithmisch geteiltes Koordinatenpapier dem gewöhnlichen Millimeterpapier vorgezogen. Aus Gl. (1) folgt

$$\log \frac{R}{R_0} = \log \frac{U}{U_0} - \log \frac{I}{I_0},$$

wobei  $R_0$ ,  $U_0$  und  $I_0$  die Einheiten für  $R$ ,  $U$  und  $I$  im gleichen Maßsystem bedeuten. Durch sie werden die zu logarithmierenden Größen dimensionslos (vgl. Einführung 1.5.3-1). In doppeltlogarithmischer Darstellung ergeben die Kurven für konstante Widerstände ( $R = \text{const}$ ) gleichermaßen Geraden, ebenso alle Kennlinien mit Potenzabhängigkeiten. Für den Vari-

stor erhält man z. B.

$$\log \frac{U}{U_0} = \log \frac{C}{C_0} + \beta \log \frac{I}{I_0},$$

worin  $C_0$  die Einheit von  $C$  ist. Aus der Steigung  $S$  der Kennlinie in doppelt-logarithmischer Darstellung erhält man die Konstante  $\beta = 1/S$ .

## E. 1.2. Wheatstonesche Brücke

- Aufgaben:*
1. Für einen Thermistor<sup>1)</sup>, einen Kohleschicht- und einen Drahtwiderstand ist die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes im Bereich von etwa 20 bis 100 °C zu ermitteln. Es ist zu prüfen, ob jeweils Gl. (8) bzw. (9) oder Gl. (10) die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes besser wiedergibt. Aus entsprechenden Darstellungen der Meßwerte werden die Temperaturkoeffizienten des Widerstandes sowie gegebenenfalls die Konstanten der Gl. (10) bestimmt.
  2. Es sollen der Innenwiderstand eines Drehspulgalvanometers ermittelt und die für eine 10- und 100fache Meßbereicherweiterung notwendigen Zusatzwiderstände berechnet werden, wenn das Instrument als Strom- und Spannungsmesser eingesetzt wird.

In der Grundschaltung besteht eine *Wheatstonesche Brücke* aus 4 Widerständen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_N$  und  $R_X$ , die in der skizzierten Weise (Abb. 84) leitend verbunden sind. An den Punkten A und B der Schaltung liegt eine Spannungsquelle  $U$ , zwischen C und D ein Galvanometer  $G$ .

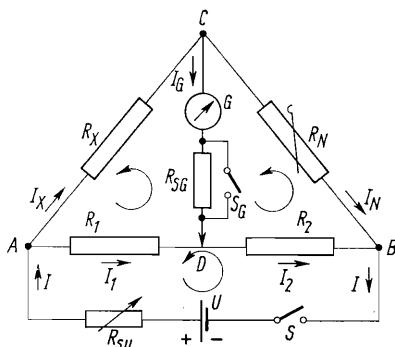


Abb. 84. Wheatstone-Brücke

<sup>1)</sup> Ein Thermistor ist ein speziell für Temperaturmessungen hergestellter Widerstand aus halbleitendem Material von großem Temperaturkoeffizienten (vgl. Abschn. E.1.0.4).

Durch geschickte Wahl der Widerstandswerte  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_N$  und  $R_X$  – die Widerstände der Zuleitungen werden vernachlässigt – kann erreicht werden, daß das Galvanometer stromlos, die Brücke „abgeglichen“ ist. In diesem Falle liegen die Punkte  $C$  und  $D$  der Schaltung auf gleichem elektrischem Potential, und die Spannungsabfälle an den Widerständen  $R_1$  und  $R_X$  sowie  $R_2$  und  $R_N$  sind paarweise gleich. Es gilt

$$R_1 I_1 = R_X I_X, \quad (14)$$

$$R_2 I_2 = R_N I_N. \quad (15)$$

Bei abgeglichener Brücke sind außerdem  $I_1 = I_X$  und  $I_2 = I_N$ . Aus der Division der Gln. (14) und (15) ergibt sich daher

---


$$R_X = R_N \frac{R_1}{R_2}. \quad (16)$$


---

Wenn die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  durch einen gemeinsamen, gut kalibrierten, homogenen Widerstandsdräht ersetzt werden, den bei  $D$  ein Schleifkontakt in die Längen  $l_1$  und  $l_2$  teilt (*Wheatstone-Kirchhoffsche Schleifdrahtbrücke*), kann wegen Gl. (7) für die Abgleichbedingung auch

---


$$R_X = R_N \frac{l_1}{l_2} \quad (17)$$


---

gesetzt werden.

Die Gln. (16) und (17) besagen, daß sich ein unbekannter Widerstand  $R_X$  aus dem Vergleichswiderstand  $R_N$  und dem Widerstands- bzw. Längenverhältnis ( $R_1/R_2$  oder  $l_1/l_2$ ) ermitteln läßt.

Bei jeder Wheatstone-Brücke lassen sich Galvanometer  $G$  und Spannungsquelle  $U$  vertauschen. Die Teilströme in den Zweigen einer abgeglichenen Brücke ändern sich nicht, wenn das Instrument kurzgeschlossen oder die Zuleitung zum Galvanometer unterbrochen wird.

Um das Galvanometer vor Überlastung zu schützen, sind ihm Schutzwiderstände  $R_{SG}$  vorgeschaltet. Der größte dieser Schutzwiderstände muß so bemessen sein, daß auch bei völliger Verstimmung der Brücke die Gesamtspannung  $U$  am Diagonalzweig liegen kann, ohne Galvanometer das zu zerstören. Dem gleichen Zweck können mit der Spannungsquelle in Reihe geschaltete Einstellwiderstände  $R_{SU}$  dienen.

Beim Feinabgleich der Brücke werden die Schutzwiderstände überbrückt. Das Galvanometer soll möglichst im aperiodischen Grenzfall (vgl. Abschn. E. 4.1) arbeiten. Das ist der Fall, wenn der Gesamtwiderstand  $R_g$  der Brücke bezogen auf die Punkte  $C$  und  $D$  im abgeglichenen Zustand gleich dem äußeren Grenzwiderstand des Galvanometers ist. Um eine hohe Anzeigeempfind-

lichkeit zu erreichen, werden in Brücken Galvanometer mit niedrigem Innenwiderstand  $R_G$  bevorzugt. Dann gilt

$$R_G \ll R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_N R_X}{R_N + R_X}.$$

Bei verstimmter Brücke zeigt das Galvanometer einen Strom  $I_G$  an, der sich mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln [Gl. (2) und (3)] berechnen lässt. Dabei wollen wir in die Widerstände  $R_{SG}$  und  $R_{SU}$  die Innenwiderstände von Galvanometer und Spannungsquelle einbeziehen.

Für die Knotenpunkte  $C$  und  $D$  gilt

$$I_X = I_N + I_G, \quad (18a)$$

$$I_2 = I_1 + I_G, \quad (18b)$$

für die Maschen  $ACD$ ,  $CBD$  und  $ADB$

$$I_1 R_1 = I_X R_X + I_G R_{SG}, \quad (18c)$$

$$I_2 R_2 = I_N R_N - I_G R_{SG}, \quad (18d)$$

$$U = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I R_{SU}. \quad (18e)$$

Läßt man den Spannungsabfall  $I R_{SU}$  am Innenwiderstand der Spannungsquelle unberücksichtigt, ergibt sich aus der Lösung des Systems der Gln. (18a bis e) für die Stromstärke im Brückenzweig

$$I_G = U \frac{R_1 R_N - R_2 R_X}{R_X [R_{SG}(R_1 + R_2) + R_1 R_2] + R_N [(R_X + R_{SG})(R_1 + R_2) + R_1 R_2]}. \quad (19)$$

Diese Gleichung enthält für  $I_G = 0$  (Stromlosigkeit der Brücke) die Abgleichbedingung [Gl. (16)]. Sie zeigt andererseits, daß der Galvanometerstrom und damit auch die Brückenempfindlichkeit mit der Spannung  $U$  steigt. Diese Möglichkeit einer Empfindlichkeitssteigerung wird durch die Eigenerwärmung der Widerstände begrenzt, so daß die Empfindlichkeit von Wheatstone-Brücken vor allem durch die Stromempfindlichkeit des Galvanometers bestimmt ist. Gestützt auf Gl. (19), wird die Änderung eines Widerstandes  $R_X$  (beispielsweise unter Temperatureinfluß) gelegentlich auch aus dem Galvanometerstrom einer nur anfänglich abgeglichenen Brücke ermittelt. Dieses Verfahren setzt ein kalibriertes Galvanometer voraus. Werden hohe Meßgenauigkeiten gefordert, müssen die in den Gln. (16) und (19) verknüpften Widerstände genau abgeglichen sein und zeitlich konstante Werte besitzen.

Kommerzielle Wheatstone-Brücken unterscheiden sich untereinander in ihrem Aufbau und hinsichtlich ihrer Meßgenauigkeiten. In *Kleinmeßbrücken* werden die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  meist von einem Drehpotentiometer gebildet. Eine Kreisskale ist

direkt in Werten des Widerstandsverhältnisses  $R_1/R_2 = X$  beschriftet. Da der Vergleichswiderstand  $R_N$  in dezimalem Bruchteilen und Vielfachen von  $1\Omega$  abgestuft ist, läßt sich das Meßergebnis sehr einfach als Zehnerpotenz des Skalenwertes  $X$  ablesen.

Widerstände, Galvanometer, Bedienungselemente und eine Spannungsquelle (Trockenbatterie) sind gemeinsam in einem Gehäuse untergebracht, an das der zu bestimmende Widerstand von außen angeschlossen wird. Der Meßwertumfang von Schleifdrahtbrücken reicht etwa von  $0,5\Omega$  bis  $50\text{ k}\Omega$ , die Genauigkeit beträgt günstigenfalls 1%.

Bei *Präzisionsmeßbrücken* in Wheatstone-Schaltung wird das Brückenverhältnis  $R_1/R_2$  meist mit zwei dekadisch abgestuften Stöpselwiderständen (Wertebereich  $1\Omega$ ,  $10\Omega$ ,  $10^2\Omega$ ,  $10^3\Omega$ ,  $10^4\Omega$ ) eingestellt. Sie dienen zum Grobabgleich der Brücke, während der Feinabgleich mit dem Widerstand  $R_N$  erfolgt. Dieser wird von mehreren in Reihe geschalteten und dekadisch abgestuften Präzisionskurbelwiderständen (Abgleichsgenauigkeit besser  $\pm 0,03\%$  bei  $R_N > 1\Omega$ ) gebildet. Die kleinste Dekade umfaßt  $10 \cdot 0,1\Omega$ , so daß sich bei insgesamt 6 Dekaden beliebige Widerstände zwischen 0 und  $100\,000,0\Omega$  in Stufen von  $0,1\Omega$  einstellen lassen. Präzisionsbrücken erfordern externe Spannungsquellen und Galvanometer. Mit Präzisionsmeßbrücken werden Genauigkeiten bis zu 0,05% erreicht. Gute Wheatstone-Brücken (geringe Übergangs- und hohe Isolationswiderstände) überstreichen einen Meßbereich von  $10^{-3}\Omega$  bis  $10^9\Omega$ .

### Fehlerbetrachtung

Eine über den gesamten Bereich konstante Ablesegenauigkeit der Längen  $l_1$  und  $l_2$  (bzw. der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$ ) wirkt sich je nach Stellung des Schleifkontaktees auf den relativen Fehler des Widerstandes  $R_N$  unterschiedlich aus:

Mit  $l_1 + l_2 = l$  und  $l_1 = x$ ;  $l_2 = l - x$  geht Gl. (17) in

$$R_N = R_N \frac{x}{l-x} = R_N \left( \frac{l}{x} - 1 \right)^{-1}$$

über. Daraus folgt, daß der relative Fehler

$$\frac{\Delta R_N}{R_N} = \frac{\Delta \left( \frac{l}{x} - 1 \right)^{-1}}{\left( \frac{l}{x} - 1 \right)^{-1}} = \frac{l \Delta x}{x(l-x)}$$

bei gegebenem  $\Delta x$  ein Minimum annimmt, wenn  $x(l-x)$  ein Maximum ist. Das Minimum des Fehlers liegt daher bei

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{oder} \quad l_1 = l_2,$$

wie sich aus Differentiation und Nullsetzen des Differentialquotienten

$$\frac{d}{dx} [x(l-x)] = l - 2x = 0$$

ergibt. In diesem Falle stimmen nach Gl. (17) der zu messende Widerstand  $R_N$  und der Vergleichswiderstand  $R_N$  überein.

### Versuchsausführung

Bei *Aufgabe 1* befinden sich die zu bestimmenden Widerstände im Bad eines Thermostaten und werden stufenweise erwärmt. Nachdem sich jeweils

ein Temperaturlgleichgewicht zwischen Bad und Widerstand eingestellt hat, werden die Widerstände über einen Meßstellenumschalter wahlweise mit der Meßbrücke verbunden. In jedem Falle ist der Abgleich der Brücke (Einstellung auf Stromlosigkeit des Galvanometers) zunächst bei unempfindlichem Galvanometer herbeizuführen. Der Feinabgleich erfolgt bei überbrücktem Galvanometerschutzwiderstand  $R_{SG}$ . Im Interesse eines kleinen relativen Fehlers wird jeweils in einem Vorversuch die günstigste Größe des Vergleichswiderstandes  $R_N$  ermittelt.

Um zu prüfen, welche der Gleichungen die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes treffender beschreibt, fertigen wir für jeden Widerstand aus den Meßwerten zwei graphische Darstellungen an. Ist Gl. (9) erfüllt, muß die Ausgleichskurve auf Millimeterpapier eine Gerade sein, wenn  $R_X$  über  $t$  aufgetragen wird. In diesem Falle dienen aus der Meßkurve entnommene Wertepaare von  $R_X$  und  $t$  zur Ermittlung des Temperaturkoeffizienten nach Gl. (9a). Auf einfache-logarithmischem Papier (vgl. Einführung 1.5.3-3) ergeben sich Geraden, wenn die Meßwerte von  $R_X$  über der reziproken absoluten Temperatur  $1/T$  dargestellt werden und Gl. (10) erfüllen. Für zwei Wertepaare von  $R_X$  und  $T$  gewinnen wir mit Hilfe von Gl. (10) zwei Gleichungen

$$R_{T_1} = R^* \cdot e^{T^*/T_1}, \quad (20a)$$

$$R_{T_2} = R^* \cdot e^{T^*/T_2}, \quad (20b)$$

aus denen die beiden Unbekannten  $R^*$  und  $T^*$  berechnet werden können. Die Division der Gln. (20a u. b) liefert nach einer Umformung

$$T^* = \frac{\ln(R_{T_1}/R_{T_2})}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}. \quad (21)$$

Damit kann  $R^*$  errechnet werden, wenn der Wert für  $T^*$  in eine der Gln. (20) eingesetzt wird. Werden die Meßkurven weder durch Gl. (9) noch durch Gl. (10) über den ganzen Temperaturbereich befriedigend wiedergegeben, sollte die jeweils günstigste Kurve stückweise linear approximiert werden.

Für *Aufgabe 2* wird das Instrument, dessen Innenwiderstand zu ermitteln ist, anstelle von  $R_X$  in die Brücke gelegt und das Nullinstrument der üblichen Anordnung durch einen Schalter ersetzt. Ein variabler Ballastwiderstand  $R_{SU}$  vor der Spannungsquelle muß zu Beginn der Messungen voll wirksam sein. Er wird laufend so nachgestellt, daß der Teilstrom durch das Instrument zu einem gut beobachtbaren Ausschlag führt. Der Abgleich der Brücke ist erfolgt, wenn das Öffnen und Schließen des Schalters ohne Einfluß auf den Instrumentenausschlag bleibt.

### E. 1.3. Thomson-Brücke

*Aufgaben:* 1. Es sind die Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes für Nickeldraht im Bereich von 0°C bis etwa 100 °C zu ermitteln.

2. Der spezifische Widerstand einer Zweistofflegierung soll in Abhängigkeit von ihrer Zusammensetzung am Beispiel des Systems Kupfer-Nickel oder  $\alpha$ -Messing bestimmt werden.

Das Schaltbild einer *Thomson-Brücke* ist in Abb. 85 dargestellt. Darin sind  $R_1$  und  $R_3$  Stöpselwiderstände,  $R_2$  und  $R_0$  Kurbelwiderstände, und  $G$  ist ein Nullinstrument (Lichtmarkengalvanometer), das durch den Widerstand  $R_s$  geschützt werden kann. Die Drähte von den Klemmen 3 und 4 der Brücke zu dem Normalwiderstand  $R_N$  sollen die Widerstände  $r_1$  und  $r_3$  haben.  $R_N$  und der zu bestimmende Widerstand  $R_x$  sind durch einen Draht

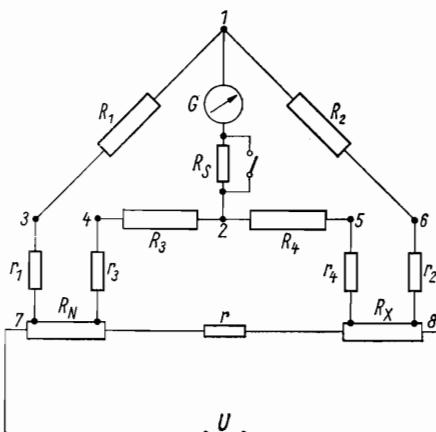


Abb. 85. Thomson-Brücke

(Widerstand  $r$ ) verbunden. Die Widerstände der Zuleitung von  $R_x$  zu den Klemmen 5 und 6 der Brücke sind mit  $r_4$  und  $r_2$  bezeichnet. Die Spannung  $U$  einer Gleichstromquelle liegt einerseits an  $R_N$  und andererseits an  $R_x$ . Für die folgenden Betrachtungen sollen die Abkürzungen

$$R'_1 = R_1 + r_1, \quad R'_2 = R_2 + r_2, \quad R'_3 = R_3 + r_3, \quad R'_4 = R_4 + r_4 \quad (22)$$

verwendet werden.

Wenn die Brücke abgeglichen ist, gilt

$$U_{71} = U_{72}, \quad U_{18} = U_{28}. \quad (23)$$

Dann genügen die Stromstärken  $I_R$  durch die entsprechenden Widerstände

$R$  den Beziehungen

$$I_{R_N} = I_{R_X}, \quad I_{R_1'} = I_{R_2'}, \quad I_{R_3'} = I_{R_4'}. \quad (24)$$

Außerdem ist

$$I_{R_3'}(R'_3 + R'_4) = I_r r = (I_{R_N} - I_{R_3'}) r, \\ I_{R_3'} = I_{R_N} \frac{r}{R'_3 + R'_4 + r}. \quad (25)$$

Die Gln. (23) lassen sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes unter Berücksichtigung der Gln. (24) und (25) als

$$I_{R_1'} \cdot R'_1 = I_{R_N} \left\{ R_N + \frac{R'_3 r}{R'_3 + R'_4 + r} \right\}, \quad (23a)$$

$$I_{R_1'} \cdot R'_2 = I_{R_N} \left\{ R_X + \frac{R'_4 r}{R'_3 + R'_4 + r} \right\} \quad (23b)$$

schreiben. Teilt man Gl. (23b) durch Gl. (23a) und löst nach  $R_X$  auf, erhält man

$$R_X = \frac{R'_2}{R'_1} R_N + \frac{R'_3 r}{R'_3 + R'_4 + r} \left\{ \frac{R'_2}{R'_1} - \frac{R'_4}{R'_3} \right\}. \quad (26)$$

In Thomson-Brücken wird der Abgleich so vorgenommen, daß die Bedingung

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \quad (27)$$

erfüllt ist. Man kann nun stets

$$r_1 \ll R_1, \quad r_3 \ll R_3$$

wählen, indem man den Normalwiderstand  $R_N$  mit sehr kurzen, dicken Drähten an die Klemmen 3 und 4 der Brücke anschließt. Häufig lässt es sich auch erreichen, daß  $r_2$  gegen  $R_2$  und  $r_4$  gegen  $R_4$  vernachlässigt werden können. In diesem Falle vereinfacht sich Gl. (26) zu

---


$$R_X = \frac{R_2}{R_1} R_N. \quad (28)$$


---

Für eine Widerstandsbestimmung ist immer dann eine Thomson-Brücke der Wheatstone-Brücke vorzuziehen, wenn  $r_2$  und  $r_4$  gegen  $R_X$  nicht vernachlässigt werden können. Das ist etwa unterhalb  $R_X \approx 1 \Omega$  der Fall. Der Anwendungsbereich von Thomson-Brücken reicht in günstigen Fällen bis herunter zu  $10^{-7} \Omega$ .

*Legierungen* sind homogene oder heterogene, mehrere Elemente enthaltende Stoffe mit metallischen Eigenschaften. Die Bestandteile homogener Legierungen sind im flüssigen und festen Zustand ineinander vollständig löslich. Sie bilden daher ungeordnete oder geordnete Mischkristalle und intermetallische Verbindungen. Sind die Elemente ineinander nur beschränkt löslich oder vollkommen unlöslich, bilden sich heterogene, aus mehreren Phasen bestehende Legierungen (vgl. Abschn. W. 4.0.3).

Im Vergleich zu ihren Bestandteilen besitzt eine Legierung meist erheblich andere Eigenschaften. So wird bei Mischkristallen der elektrische Widerstand im Vergleich zu den Komponenten heraufgesetzt, während sich gleichzeitig der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes [Gl. (9a)] erniedrigt. Daher gelingt es, aus gut leitenden metallischen Elementen Widerstandsdrähte zu fertigen, die einen vernachlässigbaren Temperaturkoeffizienten besitzen (Beispiel: Konstantan, eine Legierung mit etwa 60 % Cu- und 40 % Ni-Anteil). Bei Zweistoffsystemen unbegrenzter Mischbarkeit (Beispiel: System Cu-Ni) durchläuft der spezifische Widerstand in Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis bei etwa 50 %igem Anteil einer jeden Komponente ein Maximum. Treten bei bestimmten Konzentrationen geordnete Mischkristalle (Überstrukturen; intermetallische Verbindungen, wie beispielsweise im System Cu-Au) auf, fällt dort der spezifische Widerstand gegenüber benachbarten Konzentrationen erheblich ab. Der im Vergleich zu den Komponenten hohe elektrische Widerstand homogener Legierungen wird durch zusätzliche elastische Streuung der Leitungselektronen an den in den Stoff höherer Konzentration eingelagerten Atomen erklärt, die als Gitterstörung aufzufassen sind. Die elektrische Leitfähigkeit der heterogenen Legierungen ändert sich annähernd proportional zum Volumenanteil der Phasen am Kristallgemenge.

Die Legierungen der Aufgabe 1 bilden ungeordnete Mischkristalle. Beim System Cu-Ni können sich die Elemente in allen Konzentrationsverhältnissen ineinander lösen. Das Zustandsdiagramm entspricht Abb. 74. Messing ist eine Cu-Zn-Legierung mit einem Kupfergehalt von mindestens 55 %. Es bildet ein kompliziertes Zustandsdiagramm und nur unterhalb von etwa 35 % Zn eine homogene Legierung, das  $\alpha$ -Messing.

### Versuchsausführung

Zunächst berechnen oder schätzen wir die Größe der Widerstände  $r_2$ ,  $r_4$  und  $r$  und überlegen uns, welche Größenordnung  $R_N$ ,  $R_1$  und  $R_2$  haben müssen, damit  $R_x$  mit hinreichender Genauigkeit nach Gl. (28) ermittelt werden kann. Bei allen Widerstandsmessungen wird der Grobabgleich an dem durch den Widerstand  $R_s$  geschützten Galvanometer beobachtet. Für den Feinabgleich überbrücken wir  $R_s$ .

Die Messungen für *Aufgabe 1* erfordern besonders große Sorgfalt, wenn sich die beiden Temperaturkoeffizienten  $\beta$  und  $\gamma$  der Gl. (8) ergeben sollen. Der Widerstandswert des Nickeldrahtes wird zunächst in Eiswasser ( $R_0$ ) oder einem entsprechenden Kältebad, dann im Bad eines Thermostaten bei

verschiedenen Temperaturen bis herauf zu etwa 100 °C ermittelt. Zusätzliche Meßpunkte können bei der Abkühlung des Bades erhalten werden. Die Meßpunkte sollen etwa 5 bis 10 K auseinanderliegen. In jedem Falle muß das Temperaturgleichgewicht abgewartet werden. Die Meßwerte werden über der Temperatur graphisch dargestellt und durch eine ausgleichende Kurve verbunden. Der Darstellung werden  $R_0$  und zwei weitere, über die Kurve verteilte Wertepaare von  $R$  und  $t$  entnommen und mit Hilfe der Gln. (8a) und (8b) die Temperaturkoeffizienten berechnet.

Bei *Aufgabe 2* ermitteln wir die elektrischen Widerstände für jede in Draht- oder Stabform vorliegende Legierung durch mehrere voneinander unabhängige Messungen. Außerdem bestimmen wir die Meßlänge  $l$  sowie den Querschnitt  $A$  mittels Meßstab oder Schieblehre und Mikrometer-schraube (jeweils Mittelwertbildung über mindestens 5 Einzelmessungen) und berechnen den spezifischen Widerstand nach Gl. (7). Diesen stellen wir über der Konzentration graphisch dar und zeichnen die mittleren Fehler der einzelnen Werte ein. Außerdem sollen die experimentell bestimmten Werte von  $\varrho$  mit den Werten verglichen werden, die sich aus einer linearen Kombination der spezifischen Widerstände der Komponenten ergeben.

## E. 1.4. Entladung von Kondensatoren

*Aufgabe:* Es sind Hochohmwiderstände und die Zeitkonstanten der jeweiligen Schaltung zu bestimmen.

Die in den Abschn. 1.1 bis 1.3 beschriebenen Methoden der Widerstandsbestimmung versagen im allgemeinen bei Hochohmwiderständen. Hierfür ist folgendes Verfahren geeignet: Ein Kondensator der Kapazität  $C$  möge die Ladung  $Q$  tragen, so daß wir an ihm eine Spannung

$$U_C = Q/C \quad (29)$$

messen. Verbinden wir ihn mit einem Widerstand  $R$  (Abb. 86), fließt Ladung ab und die Spannung  $U_C$  sinkt entsprechend.<sup>1)</sup> Gleichzeitig wird am Widerstand ein Spannungsabfall  $U_R = IR$  beobachtet, wobei  $I$  der Momentanwert des Entladestromes ist. Nach der 2. Kirchhoffsschen Regel [Gl. (3)] muß die Summe der Spannungen an Kondensator und Widerstand Null sein:

$$U_C + U_R = 0, \quad (30)$$

demzufolge ist

$$U_C = -U_R = \frac{Q}{C} = -\frac{dQ}{dt} R. \quad (31)$$

<sup>1)</sup> In diesem Versuch wird vorausgesetzt, daß der Parallel-Verlustwiderstand des Kondensators sehr groß gegen den Widerstand  $R$  ist.

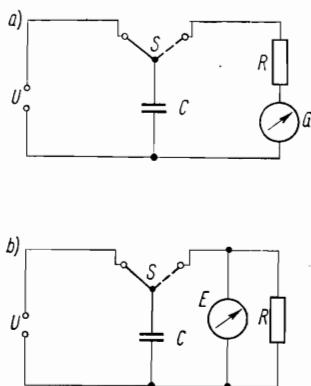


Abb. 86. Bestimmung von Höchstohmwiderrständen

Dabei wurde beachtet, daß definitionsgemäß  $I = dQ/dt$  ist. Wegen  $Q = CU_C = -CIR$  ( $R, C$  = konstant) kann dafür auch

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} = -CR \frac{dI}{dt}$$

gesetzt werden, so daß man aus Gl. (31) folgende drei Differentialgleichungen ableiten kann:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt, \quad (32a)$$

$$\frac{dU_C}{U_C} = -\frac{1}{RC} dt, \quad (32b)$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt. \quad (32c)$$

Danach sind die relativen Änderungen der Ladung des Kondensators, seiner Spannung und des Entladestromes der Zeit proportional und um so geringer, je größer das Produkt  $RC$  ist. Wegen seiner Bedeutung und Dimension wird

$$\tau = RC \quad (33)$$

*Zeitkonstante* genannt. Die Integration der Gl. (32a bis c) liefert für Ladung, Spannung und Strom gleichartige Abklinggesetze:

$$\ln \frac{Q_t}{Q_0} = -\frac{t - t_0}{RC}; \quad Q_t = Q_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}}; \quad (33a, b)$$

$$\ln \frac{U_t}{U_0} = -\frac{t - t_0}{RC}; \quad U_t = U_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}}; \quad (34a, b)$$

$$\ln \frac{I_t}{I_0} = -\frac{t - t_0}{RC}; \quad I_t = I_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}}. \quad (35a, b)$$

Die Ladung und Spannung eines Kondensators sowie die Stromstärke beim Entladen nehmen also exponentiell ab. Für einen Zeitpunkt  $t$  lassen sich die Ladung  $Q_t$ , die Spannung  $U_t$  und die Stromstärke  $I_t$  errechnen, wenn die zu einer Zeit  $t_0$  gehörenden Anfangswerte  $Q_0$ ,  $U_0$  und  $I_0$  sowie der Widerstand  $R$  und die Kapazität  $C$  bekannt sind. Umgekehrt können aus dem Verlauf von  $Q$ ,  $U$  und  $I$  mit Hilfe der Gln. (33) bis (35) wahlweise Zeiten, Kapazitäten oder Widerstände ermittelt werden.

Diese Methode ist vor allem für die Kurzzeitmessung und – wie im vorliegenden Versuch praktiziert – für die Bestimmung von Hoch- und Höchstohmwiderränden von meßtechnischer Bedeutung.

Je nachdem, ob wir den Strom- oder Spannungsverlauf verfolgen wollen, wird die Schaltung nach Abb. 86a oder 86b aufgebaut. Mit dem Umschalter

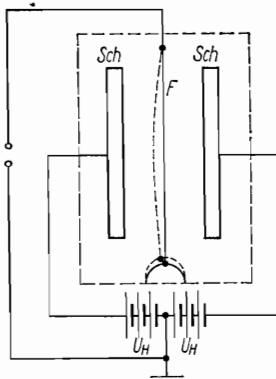


Abb. 87. Elektrometer  
in heterostatischer Schaltung

$S$  kann der Kondensator  $C$  wahlweise aufgeladen oder über den Widerstand  $R$  entladen werden. Als Strommesser dient ein empfindliches Galvanometer  $G$ . Um eine Entladung des Kondensators über den Spannungsmesser weitgehend zu vermeiden, muß dieser einen nahezu unendlichen Innenwiderstand besitzen. Deshalb benutzen wir ein elektronisches Voltmeter (Abschn. E. 2.1), ein elektrostatisches Voltmeter oder ein Elektrometer  $E$ , mit dem bei entsprechender Kalibrierung gemäß Gl. (29) auch Ladungen gemessen werden können. Beim Einfadenelektrometer in der sogenannten heterostatischen Schaltung (Abb. 87) sind die zu messende Spannung und der Ausschlag einander proportional. Außerdem kann eine relativ große Spannungsempfindlichkeit (angegeben in Skt/V) erreicht werden. Sie wird durch den Abstand der Schneiden  $Sch$ , die symmetrisch zur Erde liegende Hilfsspannung  $U_H$  (Anodenbatterie) sowie durch die mechanische Spannung des Fadens  $F$  beeinflußt.

### Versuchsausführung

Wir bauen die Schaltung a oder b nach Abb. 86 auf und setzen voraus, daß kalibrierte Meßinstrumente zur Verfügung stehen oder zumindest die Linearität von Ausschlag und Meßwert gesichert ist. Die Kapazität  $C$  wird durch Reihen- und Parallelschaltung (vgl. Abschn. E. 5.0.3) mehrerer einzelner Kondensatoren verändert. Als Anfangswert der Zeit wählen wir  $t_0 = 0$  und messen mit der Stoppuhr jeweils die Zeit  $t = t_n$ , während der der Meßwert auf  $1/n$  des Anfangswertes gesunken ist, so daß

$$Q_t = \frac{1}{n} Q_0; \quad U_t = \frac{1}{n} U_0; \quad I_t = \frac{1}{n} I_0 \quad (36)$$

sind.

Die Zahl  $n$  und die Zeitkonstante  $\tau$  werden so gewählt, daß einerseits die Zeit  $t_n$  nicht zu kurz wird und andererseits der Zeiger des Meßinstrumentes noch mit hinreichend großer Geschwindigkeit den Teilstrich von  $Q_t$ ,  $U_t$  oder  $I_t$  passiert.

Mit den Gln. (36) folgt aus dem Abklinggesetz [Gln. (33) bis (35)] als Bestimmungsgleichung für den Widerstand

$$R = \frac{t_n}{C \ln n}. \quad (37)$$

Wir messen mehrfach die Zeit  $t_n$  für etwa 3 unterschiedliche Werte von  $n$  und mindestens 3 verschiedene Kapazitätswerte. Der Widerstand ergibt sich über Gl. (37) als arithmetisches Mittel der einzelnen Werte. Mit ihm werden nach Gl. (33) die Zeitkonstanten des Versuches bestimmt. Mit welchem Fehler sind die Ergebnisse behaftet?

Falls die Werte von  $t_n$  über  $C \log n$  aufgetragen werden, kann aus der Steigung der ausgleichenden Kurven ebenfalls der Widerstand ermittelt werden.

## E. 2. GLEICHSTROMQUELLEN

### E. 2.0. Allgemeine Grundlagen

Jede Stromquelle besitzt als charakteristische Kenngröße eine *Urspannung*  $E$ , früher *elektromotorische Kraft* genannt. Sie bewirkt die Bewegung der Ladungsträger im geschlossenen Leiterkreis. Die Spannung, die an den Klemmen der belasteten Stromquelle gemessen wird, die *Klemmenspannung*  $U$ , ist im allgemeinen kleiner als die Urspannung. Die Unterschiede

zwischen der Ursprungsspannung  $E$  und der Klemmenspannung  $U$  werden durch den Spannungsabfall  $U_1$  an dem inneren Widerstand  $R_i$  verursacht. Es gilt (2. Kirchhoff'sches Gesetz), wenn  $I$  die Stärke des Stromes ist, der das Innere der Stromquelle und den Widerstand  $R_a$  im äußeren Kreis gleichermaßen durchfließt (Abb. 88),

$$E = U + U_1 = U + IR_1 = I(R_a + R_i). \quad (1)$$

Klemmenspannung  $U$  und Ursprungsspannung  $E$  stimmen also nur bei unbelasteter Stromquelle ( $I = 0, R_a \rightarrow \infty$ ) überein [Gl. (1)]. Im Falle des Kurzschlusses ( $R_a \rightarrow 0$ ) fließt der größte Strom, der der Stromquelle überhaupt entnommen werden kann. Dabei bricht die Klemmenspannung zusammen ( $U \rightarrow 0$ ), so daß aus Gl. (1) für den *Kurzschlußstrom*

$$I_K = \frac{E}{R_i} \quad (2)$$

folgt. Er wird also ausschließlich durch die Stromquelle bestimmt.

Die vom Widerstand  $R_a$  aufgenommene Leistung ist, wenn Gl. (1) berücksichtigt wird,

$$P_a = UI = I^2 R_a = \left( \frac{E}{R_a + R_i} \right)^2 \cdot R_a. \quad (3)$$

Da die Ursprungsspannung  $E$  und der Innenwiderstand  $R_i$  der Stromquelle vorgegeben und nahezu konstant sind, ist die an den Verbraucher abgegebene Leistung eine Funktion des Widerstandes  $R_a$ . Die Leistung ist maximal, wenn die Bedingung

$$\frac{dP_a}{dR_a} = \left( \frac{E}{R_a + R_i} \right)^2 - 2 \frac{R_a E^2}{(R_a + R_i)^3} = 0$$

erfüllt ist. Das ist bei

$$R_a = R_i \quad (4)$$

der Fall und wird *Leistungsanpassung* genannt. An dieser Stelle ist die zweite Ableitung  $d^2P_a/dR_a^2$  als hinreichendes Kriterium für ein Maximum negativ. Mit der Gl. (4) erhalten wir für die vom Widerstand  $R_a$  maximal aufgenommene Leistung aus Gl. (3)

---


$$R_{a\max} = \frac{E^2}{4R_i}. \quad (5)$$


---

Sie ist gleich der Leistung des Innenwiderstandes  $R_i$  der Stromquelle.

Der *Wirkungsgrad*  $\eta$  einer Gleichstromanordnung ist als Verhältnis der Nutzleistung  $P_a$  zu der von der Stromquelle insgesamt aufgebrachten Leistung  $P_g$  definiert. Mit den Gln. (1) und (3) folgt daher

$$\eta = \frac{P_a}{P_g} = \frac{UI}{EI} = \frac{R_a \cdot I^2}{(R_a + R_i) I^2} = \frac{(R_a + R_i) U^2}{R_a \cdot E^2}. \quad (6)$$

Der Wirkungsgrad beträgt demzufolge beim angepaßten ( $R_i = R_a$ ) Verbraucher 0,5 bzw. 50 %. Er strebt gegen 1, wenn der Innenwiderstand  $R_i$  gegenüber  $R_a$  verschwindend klein wird, und gegen Null, wenn  $R_a \rightarrow 0$  geht.

Für die Leistungsanpassung von Wechselstromquellen an elektrische Netzwerke gelten entsprechende Überlegungen. Sie berücksichtigen die Eigenart der verschiedenen Wechselstromwiderstände und führen nur bei rein „ohmscher“ Belastung zu den für Gleichstrom abgeleiteten Beziehungen, in denen dann  $I$  und  $U$  die Effektivwerte von Strom und Spannung sind.

Die Leistungsanpassung ist vor allem in der Schwachstromtechnik bedeutungsvoll. In der Starkstromtechnik wird mit Überanpassung ( $R_a > R_i$ ) gearbeitet.

Als *Gleichstromquellen* werden vornehmlich elektrodynamische Generatoren, mit Gleichrichterschaltungen versehene Netzanschlußgeräte sowie galvanische Primär- und Sekundärelemente eingesetzt. Von den Primärelementen sind das zur *Trockenbatterie* weiterentwickelte Leclanché-Element ( $E = 1,5 \dots 1,6$  V) sowie das aus einer mehrschichtigen Elektroden-Elektrolyt-Kombination aufgebaute *Weston-Normalelement* von Bedeutung. Letzteres dient als Labornormal, da seine Spannung und deren Temperaturgang exakt reproduzierbar und genau bekannt sind ( $E_{20^\circ} = 1,018$  V). Damit eine Polarisierung der Elektroden und eine dadurch bedingte Spannungsänderung vermieden werden, darf man es nur gering beladen ( $I \leq 10^{-4}$  A). *Sekundärelemente* (Sammler oder Akkumulatoren) können im Unterschied zu den Primärelementen wiederholt regeneriert („geladen“) werden. Von praktischer Bedeutung sind vor allem die Blei- ( $E = 2,1$  V), die Nickel-Kadmium- ( $E = 1,35$  V) und die Nickel-Eisen-Sammler ( $E = 1,6$  V).

Der *Innenwiderstand* der galvanischen Elemente hängt vom Typ, konstruktiven Merkmalen sowie von der Elektrolytzusammensetzung und -temperatur ab. Letztere beeinflussen auch die Urspannung  $E$ . Bei einem belasteten galvanischen Element können sich daher die Urspannung und sein Innenwiderstand mehr oder weniger ändern. Der Innenwiderstand von Bleiakkumulatoren ist sehr niedrig (Größenordnung:  $10^{-2}$  Ω), so daß nach Gl. (2) relativ große Ströme entnommen werden können, ohne daß die Klemmenspannung stark sinkt. Dabei ist eine Eigenerwärmung unvermeidlich.

Der Innenwiderstand der alkalischen Sammler (Ni-Fe, Ni-Cd) ist etwa fünfmal so groß wie der eines entsprechenden Bleisammlers. Der Innenwiderstand eines Trockenelements (Größenordnung:  $10^{-1}$  Ω) steigt im Laufe der Entladung auf das 10- bis 15fache seines ursprünglichen Wertes.

Gesamtinnenwiderstände einer *Reihen- oder Parallelschaltung von galvanischen Elementen* werden nach den bekannten Widerstandsgesetzen [Gln. (E. 1-4 u. 5)] berechnet

und sind daher größer oder kleiner als die Innenwiderstände der einzelnen Elemente. Für die Ströme und Spannungen von Elementkombinationen<sup>1)</sup> gelten die Kirchhoff-schen Regeln [Gln. (E. 1–2 u. 3)].

Ein weiteres Merkmal eines galvanischen Elementes ist seine *Kapazität*. Sie wird in Amperestunden (Ah) angegeben und ist ein Maß dafür, wie lange (angegeben in h) ein Element bis zur Entladung über einen vereinbarten Widerstand einen in A ausgedrückt Strom liefern kann. Übliche Werte liegen etwa zwischen 1 Ah (Taschenlampenbatterie) und 200 Ah (Batterie eines Lastkraftwagens). Diese elektrochemische Kapazität darf mit der elektrostatischen eines Kondensators keinesfalls verwechselt werden.

## E. 2.1. Strom-Spannungs-Charakteristik einer Stromquelle

- Aufgaben:*
1. Die Strom-Spannungs-Charakteristiken von galvanischen Primär- und Sekundärelementen sind aufzunehmen, die Innenwiderstände der Stromquellen als Funktion der Belastung zu ermitteln und graphisch darzustellen.
  2. Der Kurzschlußstrom der Stromquellen werde berechnet.
  3. Für ein Trockenelement ist der günstigste Grad der Leistungsanpassung experimentell zu ermitteln und mit der Theorie zu vergleichen. Der Wirkungsgrad ist bei mehreren Belastungen anzugeben.

*Strom-Spannungs-Charakteristiken* oder *-Kennlinien* sind graphische Darstellungen der Stromstärke über der jeweiligen Klemmenspannung. Sie informieren über das Verhalten des elektrischen Kreises bei unterschiedlichen Belastungen. Aus ihnen können Wertepaare der Klemmenspannung  $U$  und der Stromstärke  $I$  entnommen werden, mit denen sich bei bekannter Ursprungsspannung  $E$  der Innenwiderstand  $R_i$  der Stromquelle berechnet; denn aus Gl. (1) folgt

---


$$R_i = \frac{E - U}{I}. \quad (7)$$


---

Die  $I$ - $U$ -Kennlinien werden mit Hilfe der Schaltung in Abb. 88 aufgenommen. Da der Widerstand  $R_a$  variabel ist, ergeben sich für  $I$  und  $U$  verschiedene Werte. Bei offenem Schalter  $S$  ist die Klemmenspannung mit der Ursprungsspannung identisch, wie aus Gl. (1) für  $I = 0$  folgt. Allerdings muß dann zur Spannungsmessung auch ein Instrument mit extrem hohem Innenwiderstand verwendet werden. Besonders geeignet sind elektrostatische Instrumente (vgl. Abschn. E. 1.4) oder das im Abschn. E. 2.2 praktizierte Kompressionsverfahren. Für den Versuch dieses Abschnittes wird ein *elektronischer Spannungsmesser* empfohlen. Er arbeitet nach folgendem Prinzip:

<sup>1)</sup> Kombinationen einzelner galvanischer Elemente (Zellen) werden Batterie genannt.

Die zu messende Spannung oder ein an einem hochohmigen Spannungssteiler (vgl. Abschn. E. 2.2) abgezweigter Teil wird verstärkt und von einem Drehspulinstrument angezeigt. Wenn Wechselspannungen vorliegen, werden sie im Meßgerät zunächst gleichgerichtet. Mit Elektronenröhren bestückte Geräte (*Röhrenvoltmeter*) werden zunehmend durch transistorisierte (*Transistorvoltmeter*) verdrängt.

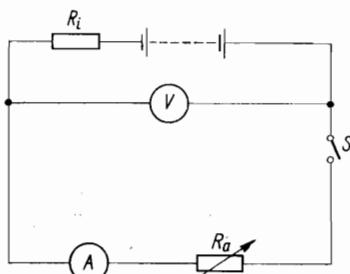


Abb. 88.  
Schaltung zur Strom-Spannungs-Charakteristik einer Stromquelle

Am Beispiel des in *Universal-Röhrenvoltmetern* (Meßbereiche 0,3 V; 1 V; ... 1000 V) benutzten Gleichspannungsdifferenzverstärkers (Abb. 89) wird das Prinzip besonders deutlich. In den zwei einander entsprechenden Zweigen einer Brückenschaltung (vgl. Abb. 84) befinden sich gleichartige Elektronenröhren  $E_1$  und  $E_2$ . Da auch die Anodenwiderstände  $R$  gleich sind, sollte das Mikroamperemeter  $A$  des Diagonalzweiges (Meßbereich je nach Gerätetyp  $10 \mu\text{A} \dots 100 \mu\text{A}$ , Innenwiderstand  $R_A$  einige  $\text{k}\Omega$ ) im nichtangesteuerten

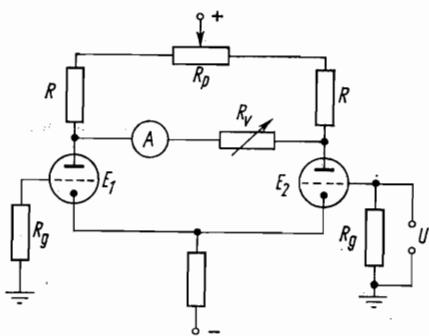


Abb. 89.  
Differenzverstärker  
im Röhrenvoltmeter

Zustand keinen Ausschlag zeigen. Mit dem Potentiometer  $R_p$  kann der Nullpunkt korrigiert werden. Wird am Gitterwiderstand  $R_g$  der einen Röhre die zu messende Spannung  $U$  angelegt, tritt am Instrument eine Spannung

$$U_A = U \frac{SR_i R_A R}{RR_A + R_A R_i + RR_i}$$

auf ( $S$  und  $R_1$  sind Steilheit und Innenwiderstand der Röhren, vgl. Abschn. E. 3). Sie ist also der zu messenden Spannung  $U$  proportional. Die Eingangswiderstände röhrenbestückter Universalvoltmeter liegen für Gleichspannung im Bereich von  $10 \text{ M}\Omega$  bis  $1000 \text{ M}\Omega$ , für Wechselspannung bei  $1 \text{ M}\Omega$  bis  $10 \text{ M}\Omega$  bei einem Frequenzumfang von etwa  $30 \text{ Hz}$  bis  $800 \text{ MHz}$ . Die Genauigkeit liegt bei  $\pm 3\%$  des Meßbereichendwertes.

Die Empfindlichkeit der Anzeige (Meßbereichwahl) wird mit dem Vorwiderstand  $R_v$  verändert.

Im Gegensatz zur Elektronenröhre kann der Transistor nicht leistungslos gesteuert werden (vgl. Abschn. E. 3), so daß der Innenwiderstand von Transistorvoltmetern mit beispielsweise  $800 \text{ k}\Omega/\text{V}$  deutlich unter dem des Röhrenvoltmeters blieb. Seitdem jedoch Feldeffekttransistoren bekannt sind, lassen sich auch Eingangswiderstände von  $10 \text{ M}\Omega$  erreichen.

Im *Transistorvoltmeter* kann ebenfalls ein dem Prinzip in Abb. 89 entsprechender Differenzverstärker angewendet werden (Abb. 90). Die Transistoren  $T_1$  und  $T_2$  arbeiten hier in Emitterschaltung, die eine lineare Stromverstärkung bewirkt. Die Eingangsspannung  $U$  wird an die Basisanschlüsse

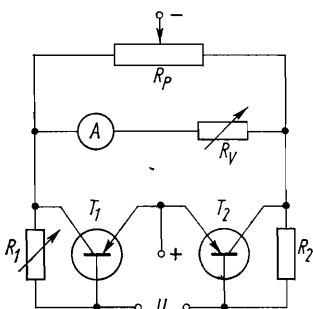


Abb. 90.  
Differenzverstärker  
im Transistorvoltmeter

der beiden Transistoren gelegt, das verstärkte Meßsignal vom Mikroamppermeter  $A$  des Diagonalzweiges der Brückenschaltung angezeigt. Der bei Transistoren beträchtliche Temperatureinfluß, Alterungseffekte und Unsymmetrien der Schaltung erfordern häufigere Nullpunkt Korrekturen. Diese und die Meßbereichumschaltung erfolgen mit den Widerständen  $R_1$  und  $R_v$ . Der Vorteil des Transistorvoltmeters liegt in niedrigen Steuerspannungen und in der geringen Größe der Bauelemente, die in Verbindung mit gedruckten Schaltungen und Batteriebetrieb handliche, transportable Geräte ermöglichen (Genauigkeit: etwa  $\pm 3\%$ ; Frequenzbereich: einige  $10 \text{ Hz}$  bis einige  $\text{MHz}$ ).

Infolge ihrer hohen Innenwiderstände belasten elektronische Voltmeter die Meßstellen praktisch nicht. Mit ihnen kann man daher auch Spannungen von Spannungssquellen mit hohem Innenwiderstand messen (Beispiel: pH-Meßelektroden), wo beispielsweise herkömmliche Vielfachmeßinstru-

mente versagen. Elektronische Voltmeter werden weiterhin als Nullindikatoren in Brückenschaltungen eingesetzt und sind unentbehrliche Meßgeräte der Schwachstromtechnik.

In zunehmendem Maße werden *transistorisierte Vielfachmeßgeräte* entwickelt. Sie arbeiten auf der Basis eines Transistorvoltmeters und sind den herkömmlichen, verstärkerlosen Vielfachmessern (vgl. Abschn. E. 1.1) ebenbürtig. Bei diesen Geräten erfolgt die Spannungsmessung nach dem zuvor beschriebenen Prinzip. Die Strommessung wird auf eine Ermittlung des Spannungsabfalles an den im Gerät eingebauten Meßwiderständen zurückgeführt. Diese werden je nach dem gewünschten Meßbereich wahlweise in den Meßkreis eingeschaltet. Die Widerstandsbestimmung erfolgt nach dem Ohmmeterprinzip (vgl. Abschn. E. 1.1). Eine interne Stromquelle des Vielfachmessers wird mit dem zu bestimmenden Widerstand verbunden und aus dem Spannungsabfall an einem mit der Stromquelle und dem unbekannten Widerstand in Reihe geschalteten Meßwiderstand auf den Wert des Widerstandes geschlossen. Dazu dient eine entsprechend geteilte Skale (Genauigkeit  $\approx 10\%$ ).

### Versuchsausführung

Für die Messungen wird eine Schaltung nach Abb. 88 hergestellt und dabei vor allem auch auf die richtige Polung der Meßinstrumente geachtet. Als Widerstand  $R_a$  verwenden wir einen Stöpsel- oder Dekadenwiderstand, an dem der jeweils eingeschaltete Wert abgelesen werden kann (Belastbarkeit beachten!).

Bei *Aufgabe 1* werden für Akku und Trockenelement bei jeweils 10 bis 20 Werten des Widerstandes  $R_a$ , bei großen Werten beginnend, Stromstärke  $I$  und Spannung  $U$  tabelliert und die Strom-Spannungs-Charakteristiken gezeichnet. Die Ursprungsspannung  $E$  wird bei geöffnetem Schalter  $S$  im Verlaufe einer jeden Meßreihe mehrmals gemessen, da sie bei frisch geladenen oder bereits stark entladenen Sammlern und bei relativ stark belasteten Elementen mit der Zeit abnehmen wird. Als Anfangswert der Ursprungsspannung kann außerdem der nach  $I = 0$  extrapolierte Spannungswert der Kennlinien gelten. Innenwiderstände  $R_i$  der Elemente werden mit Wertepaaren der Strom-Spannungs-Kennlinien und der jeweiligen Ursprungsspannung  $E$  nach Gl. (7) berechnet und gegebenenfalls in Abhängigkeit von der Stromstärke gezeichnet. Die Werte und Kurvenverläufe beider Darstellungen dieser Aufgabe werden diskutiert.

Bei annähernd linearem Verlauf der Strom-Spannungs-Charakteristik kann der Innenwiderstand  $R_i$  aus der Neigung der Kurve ermittelt werden:

$$-R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (8)$$

In *Aufgabe 2* sind Kurzschlußströme für Akku und Trockenelement nach Gl. (2) zu berechnen.

In Vorbereitung der *Aufgabe 3* wird empfohlen, bei Aufgabe 1 zunächst in einem Vorversuch über Gl. (7) den Innenwiderstand des Trockenelementes abzuschätzen und die Widerstände  $R_a$  beim Trockenelement in Aufgabe 1 gleichmäßig um den Wert des abgeschätzten Innenwiderstandes

zu verteilen. Für jeden Wert des Widerstandes  $R_a$  werden die Leistung und der Wirkungsgrad [Gl. (6)] errechnet, in Abhängigkeit vom Widerstand  $R_a$  graphisch dargestellt und mit der Theorie verglichen.

## E. 2.2. Spannungsmessung durch Kompensation

*Aufgaben:* Bestimme nach der Poggendorffschen Kompensationsmethode und (oder) mit einem Gleichstromkompensator

1. die Urspannung eines galvanischen Elementes als Beispiel für ein beliebiges elektrochemisches Potential;
2. den Spannungsverlauf eines Thermoelementes in Abhängigkeit von der Temperatur. Aus dem Verlauf der Kurve sind die thermoelektrischen Konstanten des Thermoelementes zu ermitteln.

Die Urspannung einer Spannungsquelle kann nur mit einem Voltmeter extrem hohen Innenwiderstandes (vgl. Abschn. E. 2.1) oder nach einer Kompensationsmethode exakt ermittelt werden.

Der *Kompensationsmethode nach Poggendorff* liegt folgendes Prinzip zugrunde (Abb. 91): Eine Hilfsspannung  $U_H$  bewirkt in einem Widerstand

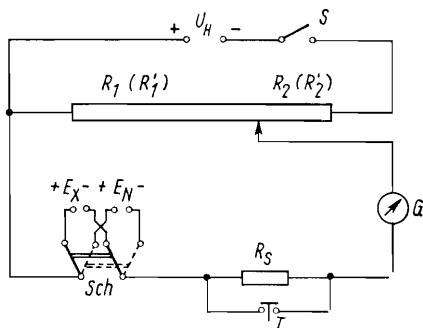


Abb. 91.  
Kompensationsmethode  
nach *Poggendorff*

die Stromstärke  $I$ . Teilt ein variabler Abgriff diesen Widerstand in die Teilwiderstände  $R_1$  und  $R_2$ , so tritt am Widerstand  $R_1$  nach dem Ohmschen Gesetz der Spannungsabfall  $U = IR_1$  auf (*Spannungsteiler- oder Potentiometerschaltung*). Mit dieser Spannung kann die Urspannung  $E_x$  einer beliebigen Spannungsquelle kompensiert werden, wenn nur  $E_x < U_H$  ist. Der Abgleich ist erreicht, wenn das Galvanometer  $G$  stromlos ist. Dann gilt, da  $U = E_x = IR_1$  und  $U_H = I(R_1 + R_2)$ , die Beziehung

$$E_x = U_H \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (9)$$

Die zunächst nur ungenau bekannte Hilfsspannung  $U_H$  läßt sich mit der gleichen Methode über einen Vergleich mit der Spannung  $E_N$  eines Normalelementes ( $E_N < U_H$ ) aus der Gleichung

$$U_H = E_N \frac{R_1 + R_2}{R'_1} \quad (10)$$

ermitteln. Dabei ist  $R'_1$  der Widerstand, an dem in diesem Falle die zur Kompensation führende Spannung abgegriffen wird. Die Kombination der Gln. (9) und (10) liefert

---


$$E_x = E_N \frac{R_1}{R'_1} \quad (11)$$


---

und zeigt, daß die Hilfsspannung  $U_H$  nicht bekannt zu sein braucht. Sie darf sich aber während der Meßdauer nicht ändern. Ein Umschalter *Sch* (Abb. 91) erleichtert die Verbindung der variablen Spannung mit dem Normalelement oder der Spannungsquelle, deren Spannung zu bestimmen ist.

Die *Spannung des Normalelementes* ist geringfügig temperaturabhängig (siehe Eichtabelle). Man prüfe durch Fehlerabschätzung, ob dies berücksichtigt werden muß. Eine Polarisation der Elektroden des Normalelementes kann nur vermieden werden, wenn die im Sinne einer Ladung oder Entladung durch das Element fließenden Ströme  $< 10^{-4}$  A sind. Der Einsatz einer Wheatstone-Kirchhoffsschen Schleifdrahtbrücke (siehe Abschn. E. 1.2) als Potentiometer ist deshalb ungünstig. Eine Verschiebung des Schleifkontakte um 1 mm bewirkt bei den üblichen Spannungen  $U_H$  von einigen Volt bereits einen zusätzlichen Spannungsabfall in der Größenordnung von  $10^{-3}$  V.

Stöpselrheostaten sind als Spannungsteiler gut geeignet, doch ist die Auswertung nach Gl. (11) nur erlaubt, wenn  $R_1 + R_2 = R'_1 + R'_2$  oder zumindest  $R_2 \gg R_1$  bzw.  $R'_1$  ist.<sup>1)</sup>

Normalelement und Galvanometer *G* werden durch den meist stufenweise einstellbaren Widerstand  $R_s$  geschützt. Er muß so bemessen sein, daß bei voller Spannung  $U_H$  weder die für das Normalelement ( $10^{-4}$  A) noch für den Vollausschlag des Galvanometers maximal zulässige Stromstärke erreicht wird.

In einem *Kompensator* (Abb. 92) wird die Hilfsstromstärke im Potentiometerwiderstand konstant gehalten. Der Widerstand, an dem die Kompensationsspannung abfällt, kann daher in Einheiten der elektrischen Spannung geteilt werden. Dies wird erreicht, indem das Potentiometer aus mehreren

---

<sup>1)</sup> Werden zwei gleiche, in Reihe geschaltete Sätze von Stöpselwiderständen verwendet, läßt sich diese Bedingung immer erfüllen; so ist im Prinzip der nachfolgend beschriebene Kompensator aufgebaut.  $R_1 + R_2$  kann z. B. so gewählt werden, daß an einem Widerstand von  $1 \Omega$  die Spannung  $1 \text{ mV}$  auftritt.

dekadisch abgestuften Kurbelwiderständen besteht. Eine konstante Hilfstromstärke (z. B. 1 mA) lässt sich durch den veränderlichen Widerstand  $R$  einstellen. Der Hilfstrom durchfließt nur die Einzelwiderstände nicht, die über die Schleifkontakte  $S_2$  und  $S_3$  bzw.  $S'_2$  und  $S'_3$  überbrückt sind. Wird durch die

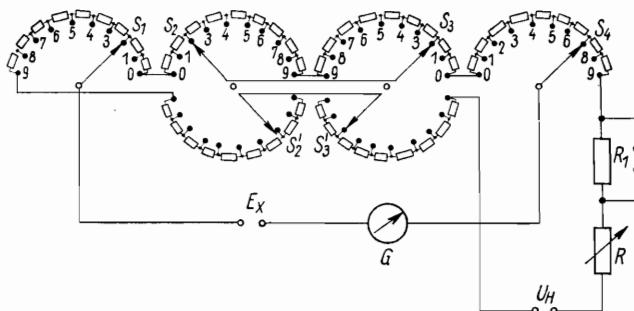


Abb. 92. Kompensator

Doppelkurbeln auf der einen Seite der Widerstand verkleinert, wird auf der anderen Seite automatisch der gleiche Betrag hinzugefügt. Die Kompensationsspannung wird an dem Widerstand zwischen den Kontakten  $S_1 - S_2$  und  $S_3 - S_4$  abgegriffen. Der Abgleichvorgang ist am Galvanometer  $G$  zu verfolgen. Der richtige Hilfstrom fließt, wenn der Spannungsabfall an einem zusätzlich eingebauten Präzisionswiderstand  $R_1$  durch die Spannung eines Normalelementes kompensiert ist.

Befinden sich in einem offenen Leiterkreis zweier Metalle oder Halbleiter die Kontaktstellen 1 und 2 (Abb. 93) auf verschiedener Temperatur, stellen wir zwischen den offenen Enden des Kreises eine Spannung fest, die *Thermospannung* (Seebeck-Effekt). Sie bewirkt einen *Thermostrom*, wenn die Enden miteinander leitend verbunden werden. Bei einem solchen *Thermoelement* wird thermische Energie direkt in elektrische Energie umgewandelt. Die

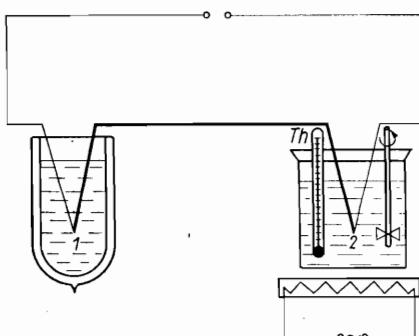


Abb. 93. Anordnung des Thermoelementes

Urspannung eines Thermoelementes entsteht in den beiden Kontaktstellen der Stoffe, indem sich dort von der Stoffpaarung und der Temperatur abhängende Potentialsprünge ausbilden. Sie lassen sich quantenstatistisch deuten. Bei gleicher Temperatur der Kontaktstellen sind die Potentialdifferenzen entgegengesetzt gleich, so daß sie sich kompensieren.

Thermoelemente dienen zur Temperaturmessung. Bewährte Materialkombinationen sind Kupfer-Konstantan, Eisen-Konstantan, Nickel-Chromnickel, Platin-Platinrhodium. Ihre Thermospannung liegt in der Größenordnung von  $10^{-2}$  mV/K, die von Halbleitern bei einigen mV/K.

Die thermoelektrische Spannung  $E$  einer Materialkombination (Abb. 93) läßt sich im allgemeinen durch die quadratische Funktion

$$E = a \Delta T + b (\Delta T)^2 \quad (12a)$$

beschreiben. Hierbei sind  $a$  und  $b$  thermoelektrische Materialkonstanten,  $\Delta T$  die Differenz der Temperatur des Meßfühlers zur Bezugstemperatur. Für einen begrenzten Temperaturbereich gilt mit meist hinreichender Genauigkeit die lineare Gleichung

$$E = a \Delta T, \quad (12b)$$

die für  $b = 0$  aus Gl. (12a) hervorgeht.

Unter der *differentiellen Empfindlichkeit eines Thermoelements* versteht man die erste Ableitung der Gl. (12a) bzw. Gl. (12b) nach der Temperatur:

$$\frac{dE}{dT} = a + 2b \Delta T \quad (13a)$$

bzw.

$$\frac{dE}{dT} = a. \quad (13b)$$

Für eine Reihe von Thermopaaren ist die differentielle Empfindlichkeit eine lineare Funktion der Temperaturdifferenz, so daß mit zwei Wertepaaren<sup>1)</sup>  $\Delta E$  und  $\Delta T$  ein System zweier Gleichungen (13a) gebildet werden kann, aus dem sich die thermoelektrischen Konstanten  $a$  und  $b$  der jeweiligen Materialkombination ergeben.

In Temperaturintervallen bis zu etwa 100 K lassen sich Kupfer-Konstantan- und Eisen-Konstantan-Thermoelemente mit meist hinreichender Genauigkeit durch eine konstante differentielle Empfindlichkeit charakterisieren. Dann folgt die thermoelektrische Konstante  $a$  gemäß Gl. (13b) aus einem Wertepaar von  $\Delta E$  und  $\Delta T$ .

Technische Temperaturbestimmungen mit einem Thermoelement erfolgen im allgemeinen über eine Strommessung (Ausschlagmethode). Die

<sup>1)</sup> Hier werden  $dE$  und  $\Delta E$  bzw.  $dT$  und  $\Delta T$  gleichgesetzt, weil sich aus dem Experiment nur endlich große Spannungs- und Temperaturdifferenzen ergeben.

Skalen der Instrumente sind dabei meist auf die Thermoelemente abgestimmt und in Einheiten der Temperatur geteilt. Da die Überlegungen des Abschn. E. 2.0 auch für Thermospannungsquellen zutreffen, empfiehlt sich, thermoelektrische Konstanten über eine Spannungsmessung durch Kompensation zu ermitteln.

### Versuchsausführung

Für *Aufgabe 1* werde eine Schaltung nach Abb. 91 aufgebaut (Polungen der Spannungsquellen beachten!). Werden dabei als Potentiometer Stöpselrheostaten verwendet, ziehen wir im Interesse der Meßgenauigkeit sowohl Stöpsel kleinster Widerstände als auch solche bis in den  $10^4\text{-}\Omega$ -Bereich hinein. Bei unempfindlichem Galvanometer  $G$  bzw. größtem Schutzwiderstand  $R_S$  suchen wir für die zu ermittelnde Spannung  $E_X$  den Widerstand  $R_1$ , bei dem das Galvanometer stromlos wird. Der Feinabgleich erfolgt bei höchster Galvanometerempfindlichkeit. Der Abgleichvorgang wird wiederholt (Bestimmung von  $R_1'$ ), nachdem mit dem Umschalter *Sch* das Normalelement eingeschaltet wird. Gl. (10) liefert die zu ermittelnde Spannung  $E_X$ . Die Spannung des Normalelementes  $E_N$  entnehmen wir der Arbeitsplatzanleitung.

Bei *Aufgabe 2* werde ein kommerzieller Gleichstromkompensator benutzt. Zunächst ist der Hilfsstrom mit dem Widerstand  $R$  auf den vorgeschriebenen Wert einzustellen. Beim Sollwert des Hilfsstromes muß an  $R_1$  eine bestimmte, in der Arbeitsplatzanleitung angegebene Spannung abfallen. (Beachte: Die Kurbelwiderstände müssen dabei auf Null stehen.) Das Thermoelement liegt an den mit  $E_X$  bezeichneten Klemmen.

In das Dewargefäß (Lötstelle 1, Abb. 93) füllen wir Eiswasser (Bezugs temperatur 0 °C). Auf diese Temperatur wird zunächst auch der Meßfühler 2 gebracht, und anschließend wird die Badflüssigkeit bei der Lötstelle 2 unter ständigem Rühren langsam erwärmt.<sup>1)</sup>

Über ein Temperaturintervall von etwa 80 K hinweg ermitteln wir in Abständen von etwa 5 K zusammengehörende Werte von Temperatur und Thermospannung. Die Kompensation wird bei unempfindlichem Galvanometer begonnen. Es wird empfohlen, die jeweilige Thermospannung geringfügig überzukompensieren und die Badtemperatur in dem Augenblick abzulesen, da der Zeiger des Galvanometers  $G$  die Nullmarke passiert. Der Hilfsstrom sollte im Verlauf der Meßreihe mehrmals überprüft werden.

Sofern zwischen der Thermospannung und der Temperatur ein linearer Zusammenhang besteht (graphische Darstellung!), wird die thermoelektrische Konstante  $a$  aus der Steigung der Kurve gemäß Gl. (13 b) berechnet. Bei nichtlinearem Kurvenverlauf kann zur Bestimmung der thermoelektrischen Konstanten  $a$  und  $b$  mit einem Gleichungspaar von der Form der

<sup>1)</sup> Bei technischen Messungen höherer Temperaturen mit einem Thermoelement wird – unter Verzicht auf eine entsprechende Genauigkeit – auf eine definierte Vergleichsstelle 1 meist verzichtet.

Gl. (13a) gearbeitet werden, für das zusammengehörende Werte von  $\Delta E$  und  $\Delta T$  der graphischen Darstellung entnommen werden. Falls  $\Delta E/\Delta T$  über  $\Delta T$  aufgetragen wird, muß sich eine Gerade ergeben [Gl. (13a)], aus der  $a$  und  $b$  über Ordinatenabschnitt und Steigung maß folgen.

## E. 3. ELEKTRONISCHE BAUELEMENTE

### E. 3.0. Allgemeine Grundlagen

#### E. 3.0.1. Elektronenröhren

Funktionsgrundlage der Elektronenröhren ist die Bewegung freier Elektronen im Vakuum.<sup>1)</sup> Diese verlassen als Folge einer direkten oder indirekten elektrischen Heizung die Kathode mit thermischer Geschwindigkeit, bilden vor der Kathode eine negative Raumladungswolke, und nur die Elektronen großer kinetischer Energie (Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung) erreichen bei fehlender Saugspannung die Anode. Je nach der Zahl der Elektroden unterscheidet man Diode, Triode, Tetrode, Pentode usw.

Der Anodenstrom  $I_a$  durch eine *Diode* nimmt in der *Durchlaßrichtung*, d. h. bei positiver Anodenspannung  $U_a$ , mit  $U_a$  zu und erreicht einen Sättigungswert

---


$$I_s = CT_k^2 e^{-\frac{e\Phi_k}{kT_k}}, \quad (1)$$


---

wenn alle emittierten Elektronen zur Anode gelangen. In der Richardson-Dushmanngleichung (1) sind  $C$  eine Proportionalitätskonstante,  $T_k$  die Kathodentemperatur,  $e$  die Elementarladung,  $e\Phi_k$  die *Austrittsarbeit* der Elektronen aus der Kathode und  $k$  die Boltzmann-Konstante. In der *Sperrichtung*, d. h.  $U_a < 0$ , nimmt der Strom mit der Spannung rasch ab; seine Größe wird durch das Anlaufstromgesetz

---


$$I_a = I_s e^{\frac{eU_a - e(\Phi_a - \Phi_k)}{kT_k}} \quad (2)$$


---

<sup>1)</sup> Wegen des guten Vakuums ( $p < 10^{-7}$  Torr) ist die mittlere freie Weglänge der Elektronen groß gegenüber den Abmessungen der Röhre. Eine Behinderung der Bewegung durch Restgasmoleküle ist nicht zu befürchten.

gegeben, wobei  $e\Phi_a$  die Austrittsarbeit der Elektronen aus der Anode ist. Es ist zu beachten, daß sich bei der Röhrendiode auch bei negativer Anodenspannung die Stromrichtung nicht umkehrt! In einer Darstellung von  $\ln I_a/I_0$  über  $U_a$  erhält man in diesem Gebiet eine Gerade der Steigung  $e/kT_k$ , aus der man die Kathodentemperatur  $T_k$  bestimmen kann, der Schnittpunkt der Anlaufstromgeraden mit dem Sättigungsstrom liefert das *Kontaktpotential*  $\Phi_a - \Phi_k$  (vgl. Abb. 94). Bei modernen Röhren liegt der Sättigungsstrom wegen der großen Emissionsfähigkeit der Kathode über den maximal zulässigen Betriebsbedingungen. Man bestimmt das Kontaktpotential daher entweder im Impulsbetrieb oder mit unterheizter Kathode und der dabei vorliegenden geringeren Emission.

Bei Einhalten des vom Hersteller vorgeschrivenen Heizstromes  $I_H$  liegt zwischen Anlaufstrom- und Sättigungsstrombereich das *Raumladungsbereich*.

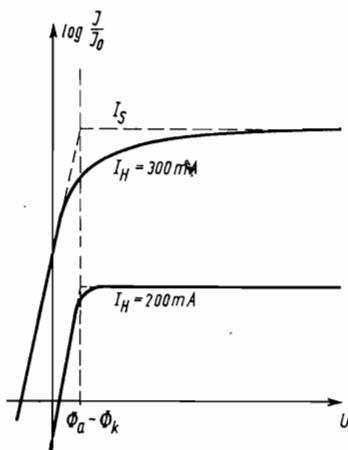


Abb. 94. *I-U-Kennlinien einer Hochvakuumdiode bei zwei verschiedenen Heizströmen (normal 300 mA  $I_0$  ist Einheit der Stromstärke)*

gebiet, in dem die große Zahl emittierter Elektronen um die Kathode eine Raumladungswolke bildet und die positive Anodenspannung zum Teil abschirmt, so daß der Sättigungsstrom nicht erreicht wird. In diesem für den normalen Betrieb hauptsächlich interessierenden Bereich gilt das Schottky-Langmuirsche *Raumladungsgesetz*

$$I_a = K U_a^{3/2}. \quad (3)$$

Eine Darstellung von  $I_a$  über  $U_a^{5/2}$  liefert als Steigung die vom Aufbau der Diode abhängige *Raumladungskonstante*  $K$ .

Dioden werden zur Gleichrichtung, Modulation und Demodulation von Wechselspannungen unterschiedlichster Frequenz benutzt. Bei der *Triode* ist zwischen Kathode und Anode ein *Steuergitter*  $g$  eingefügt. Mit der Gitterspannung  $U_g$  kann der Anodenstrom  $I_a$  gesteuert werden.  $U_g$  wird dabei negativ gewählt, damit kein Gitterstrom fließt und die Steuerung leistunglos erfolgt. Der Zusammenhang von Gitterspannung  $U_g$  und Anodenstrom  $I_a$

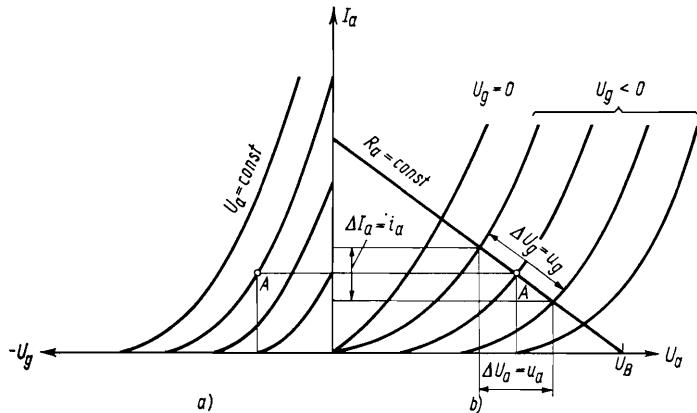


Abb. 95. Kennlinien einer Triode  
a)  $I_a$ - $U_g$ -Kennlinien; b)  $I_a$ - $U_a$ -Kennlinien

ist in Abb. 95 schematisch dargestellt. Die Anodenspannung dient als Parameter, der Heizstrom ist konstant. Dem Kennlinienfeld können die charakteristischen Röhrendaten entnommen werden. Die *Steilheit*  $S$  kennzeichnet die Steuerwirkung der Gitterspannung auf den Anodenstrom

$$S = \left( \frac{\partial I_a}{\partial U_g} \right)_{U_a = \text{const.}} \quad (4)$$

Der *Durchgriff*  $D$  gibt an, in welchem Maße die Anoden- und die Gitterspannung in entgegengesetzter Richtung geändert werden müssen, damit der Anodenstrom beibehalten wird. Es gilt

$$D = \left( - \frac{\partial U_g}{\partial U_a} \right)_{I_a = \text{const.}} \quad (5)$$

Er deutet an, wie stark die von der Anode ausgehenden Feldlinien durch das Gitter hindurch in das Raumladungsgebiet greifen.

Den Kehrwert des Durchgriffs bezeichnet man als *Verstärkungsfaktor*  $\mu$ . Der *innere Widerstand*  $R_i^1$ ) beschreibt die zu einer Anodenstromänderung

<sup>1)</sup> Der innere Widerstand  $R_i$  ist ein differentieller Widerstand (vgl. E. 1) und vom Gleichstromwiderstand  $R = U_a/I_a$  der Röhre zu unterscheiden.

rung notwendige Änderung der Anodenspannung, wenn die Gitterspannung konstant bleibt. Es ergibt sich

$$R_i = \left( \frac{\partial U_a}{\partial I_a} \right)_{U_g = \text{const.}} \quad (6)$$

Die *Barkhausensche Röhrenformel* besagt, daß das Produkt dieser Röhrenkenndaten den Wert 1 hat:

---


$$S \cdot D \cdot R_i = 1. \quad (7)$$


---

In Analogie zum Schottky-Langmuirschen Raumladungsgesetz gilt für den Anodenstrom einer Triode

$$I_a = C \cdot U_{st}^{3/2}, \quad (8)$$

wobei die Steuerspannung  $U_{st}$  dem Ausdruck

$$U_{st} = U_g + DU_a \quad (9)$$

entspricht.

Beim praktischen Einsatz der Röhre liegt meist im Anodenstromkreis ein *Außenwiderstand*  $R_a$ , an dem durch den fließenden Anodenstrom ein Spannungsabfall hervorgerufen wird. Dadurch werden kleine Änderungen der Gitterspannung  $\Delta U_g = u_g$  (Aussteuerung) in große Änderungen des Spannungsabfalls am Außenwiderstand  $\Delta U_a = u_a$  umgewandelt (Spannungsverstärkung). Die den Außenwiderstand  $R_a$  charakterisierende Widerstandsgerade (Arbeitsgerade, Abb. 95 b) schneidet die Achsen bei  $I_a = 0$ ,  $U_a = U_B$  (Betriebsspannung) und bei  $I_a = U_B/R_a$ ,  $U_a = 0$ . Der *Arbeitspunkt A*, d. h. die Gleichstromwerte, um die Gitterspannung, Anodenstrom und Anodenspannung bei der Aussteuerung schwanken, wird in den Bereich geringster Krümmung der  $I_a$ - $U_g$ -Kennlinie gelegt, sonst treten unerwünschte Verzerrungen auf. Für die Verstärkung gilt

$$i_a = S u_{st} = S(u_g + Du_a) \quad (10)$$

mit  $i_a = \Delta I_a$  (Anodenstromänderung) und  $u_{st} = \Delta U_{st}$  (Steuerspannungsänderung). Eine positive Gitterspannungsänderung  $u_g$  bewirkt auch ein Ansteigen des Anodenstromes und wegen des größeren Spannungsabfalls am Außenwiderstand ein Absinken der Anodenspannung

$$u_a = -i_a R_a. \quad (11)$$

Aus den Glv. (10) und (11) erhält man unter Berücksichtigung der Barkhausen-Beziehung  $S \cdot D \cdot R_i = 1$  die *Verstärkung V* zu

---


$$V = \left| \frac{u_a}{u_g} \right| = \frac{R_a S}{1 + R_a S D} = \frac{R_a}{R_i + R_a} \cdot \frac{1}{D} = \frac{R_a}{R_i + R_a} \cdot \mu. \quad (12)$$


---

$R_a \gg R_i$  ergibt die Maximalverstärkung

$$V_{\max} = \frac{1}{D} = \mu. \quad (13)$$

Diese Bedingung ist bei Trioden meist in guter Näherung erfüllt.

Der Durchgriff, der bei Trioden im wesentlichen die Verstärkung begrenzt, lässt sich durch ein *Schirmgitter*  $g_2$  zwischen Steuergitter  $g_1$  und Anode  $a$  (vgl. Abb. 102), das konstantes Potential erhält, herabsetzen (Tetrode). Dadurch wird der Anodenstrom fast unabhängig von der Anodenspannung. Bei der *Tetrode* kann infolge des Spannungsabfalls an einem Außenwiderstand im Anodenkreis bei größerem Anodenstrom unter Umständen die an der Röhre wirksame Anodenspannung unter die Spannung des Schirmgitters sinken. Aus der Anode austretende Sekundärelektronen werden zum Schirmgitter hin beschleunigt und vermindern den durch den Abfall der Anodenspannung schon geschwächten Anodenstrom zusätzlich. Deshalb wird ein auf Kathodenpotential liegendes *Bremsgitter*  $g_3$  unmittelbar vor der Anode angeordnet, welches die Sekundärelektronen zur Anode zurücktreibt, für die stark beschleunigten Primärelektronen jedoch kein Hindernis bildet. Die so entstandene *Pentode* besitzt gegenüber der Triode einen erheblich größeren Innenwiderstand und einen um Größenordnungen geringeren Anodendurchgriff  $D_a$ . Die Steuerwirkung des Schirmgitters wird dabei – ebenso bei der Tetrode – durch den Schirmgitterdurchgriff

$$D_{g_2} = \left( -\frac{\partial U_{g_1}}{\partial U_{g_2}} \right)_{I_a, U_a = \text{const}} \quad (14)$$

beschrieben. Ersetzt man in Gl. (12)  $D$  durch  $S$  und  $R_i$ , so ergibt sich

---


$$V = \frac{R_i R_a}{R_i + R_a} S. \quad (15)$$


---

Gl. (15) ist für die Betrachtung von Pentoden günstiger und geht für  $R_i \gg R_a$  (bei Pentoden meist erfüllt) in die häufig verwendete Näherungsformel

$$V = R_a S \quad (16)$$

über.

### E. 3.0.2. Halbleiterdiode und Transistor

Die vierwertigen Halbleiterelemente (Silizium, Germanium) werden durch Einbau (*Dotierung*) einer geringen Menge<sup>1)</sup> von fünfwertigen Elementen

---

<sup>1)</sup> Die Störstellenatome werden den Halbleitern etwa im Verhältnis  $1 : 10^7$  zugefügt.

(Arsen, Antimon, Wismut) in das Kristallgitter zum *Elektronen-* oder *n-Leiter*, da die für die Bindung im Grundgitter überzähligen fünften Valenzelektronen der fünfwertigen Atome als Leitungselektronen abgegeben werden. Die Fremdatome werden daher *Donatoren* genannt.

Dotiert man vierwertige Elemente mit dreiwertigen (Indium, Aluminium, Gallium), kann von der Lücke des jeweils fehlenden vierten Valenzelektrons (*Defektelektron*) ein Elektron aus der Nachbarschaft aufgenommen werden. Die Fremdatome wirken als *Akzeptoren*. Durch Platzwechselvorgänge der Elektronen wandern auch die Elektronenlücken im Material (*Löcherleitung*). Da das Defektelektron als positive Ladung auf neutralem Grund aufgefaßt werden kann, wird dieser Mechanismus *p-Leitung* genannt.

Berühren sich p- und n-leitendes Material (*Kristalldiode*), diffundieren durch die Berührungsfläche Löcher aus dem p-Gebiet in das n-Gebiet (Abb. 96). Umgekehrt wandern Elektronen aus dem n- in das p-leitende

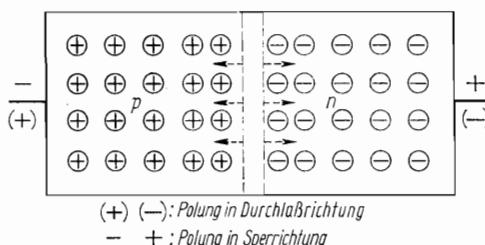


Abb. 96. Prinzip der Kristalldiode

Material. An der Grenzfläche bildet sich im p-Gebiet eine negative, im n-Gebiet eine positive Raumladung. Das elektrische Feld zwischen den Ladungswolken behindert einen weiteren Nachschub an Ladungen beiderlei Vorzeichens und führt schließlich zu einem Ladungsgleichgewicht. Zwischen den Raumladungswolken hat sich infolge der Wiedervereinigung (Rekombination) von Elektronen und Löchern eine hochohmige, an Ladungsträgern verarmte Zone gebildet, die *Sperrsicht*, die weiter vergrößert wird, wenn die p-Seite auf negativem, die n-Seite auf positivem Potential liegt (vgl. Abb. 96). Diese Polung (Sperrichtung) verursacht nur einen geringen Strom (Sperrstrom). Bei einer Vorzeichenumkehr der Spannung fließen Ladungsträger in die Verarmungszone, die von einer bestimmten Spannung an, der *Schleusen-* oder *Schwellspannung*, einen stark anwachsenden Strom bilden.

Die Kombination von p- und n-leitendem Material wirkt daher als Volumengleichrichter. Sie hat gegenüber früher eingeführten Randschichtgleichrichtern (Kupferoxydul-, Selengleichrichter) den Vorteil eines größeren Verhältnisses von Durchlaß- und Sperrstrom und kann noch bei höheren Sperrspannungen arbeiten. Halbleiterdioden werden wie Röhrendioden eingesetzt.

Durch eine geeignete, relativ hohe Dotierung lassen sich sehr dünne Sperrsichten erreichen, bei denen oberhalb einer bestimmten Sperrspan-

nung (*Durchbruch-* oder *Zenerspannung*) der Strom steil ansteigt (Abb. 97). Die notwendigen Ladungsträger entstehen infolge der hohen Feldstärke der dünnen Sperrsicht über innere Feldemission (feldstärkebedingtes Ablösen der Valenzelektronen, Zenereffekt) bzw. bei einer Stoßionisation durch die stark beschleunigten Ladungsträger (Lawineneffekt oder Ladungsträgermultiplikation). Diese Z-Dioden werden zur Spannungsstabilisierung, zum Überlastungsschutz von empfindlichen Bauelementen, als sekundäre Spannungsnormalen u. a. verwendet.

Wird die Dotierung weiter erhöht, so verringert sich die Sperrsichtdicke so sehr, daß sie, besonders in Sperrichtung, von den Ladungsträgern

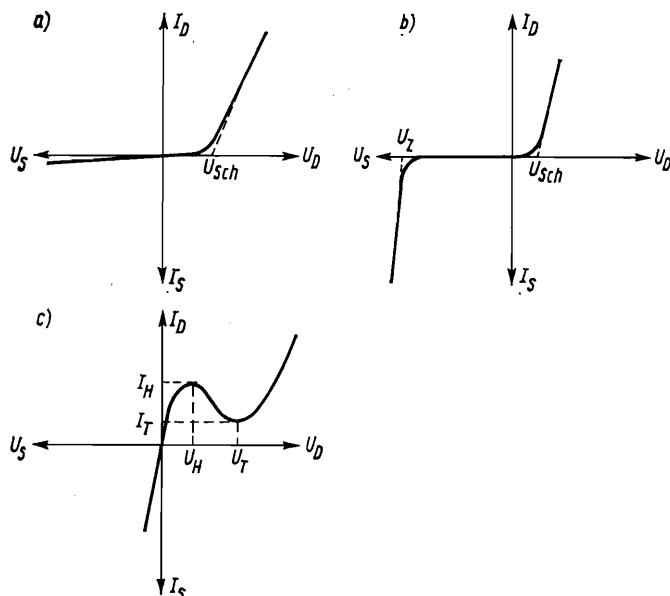


Abb. 97. Kennlinien von Halbleiterdioden

a) normale Diode; b) Z-Diode; c) Tunneldiode

$I_D$ ,  $I_S$ ,  $I_H$  bzw.  $I_T$  sind Durchlaß-, Sperr-, Höcker- bzw. Talstrom;  
 $U_D$ ,  $U_S$ ,  $U_Z$ ,  $U_{Sch}$ ,  $U_H$  bzw.  $U_T$  sind Durchlaß-, Sperr-, Zener-, Schwell-, Höcker- bzw. Talspannung

sehr leicht „durchtunnelt“ werden kann (quantenmechanischer Tunnel-Effekt). In Durchlaßrichtung nimmt der Tunnelstrom mit steigender Spannung schneller wieder ab, als der normale Diodenstrom steigt, so daß nach einem Maximum (Höckerstrom mit zugehöriger Höckerspannung) der Strom zunächst abfällt, um nach einem Minimum (Talstrom) wieder anzusteigen (Abb. 97). Der Bereich fallender Kennlinie (differentieller Wider-

stand  $dU/dI < 0$ ) wird bei der Tunneldiode zur Verstärkung und Schwingungserzeugung benutzt.

Eine Zonenfolge pnp oder npn mit den zugehörigen Anschlüssen *Emitter E*, *Basis B* und *Kollektor C* führt zum *Transistor* (Abb. 98), den man sich als Reihenschaltung zweier entgegengesetzter gepolerter Dioden vorstellen kann. Die Basis-Emitter-Diode wird in Durchlaßrichtung gepolt, dadurch fließt in ihr bei kleiner Spannung  $U_{BE}$  ein großer Strom, der in die sehr dünne Basisschicht (wenige  $\mu\text{m}$ ) gelangt und von der Kollektorspannung  $U_{CE}$  zum größten Teil in die in Sperrrichtung betriebene Kollektor-Basis-Diode gezogen wird. Der Strom durch die Basiselektrode  $I_B$  wird deshalb sehr klein,

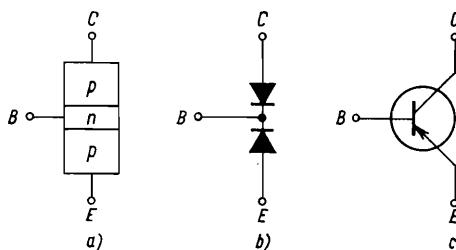


Abb. 98. pnp-Transistor  
a) Zonenfolge; b) Ersatzschaltung; c) Schaltbild

während am Kollektor der um den Faktor  $\beta = I_C/I_B$  verstärkte Kollektorstrom  $I_C$  abgenommen werden kann.

Der über die Basis fließende Steuerstrom  $I_B$  bewirkt, daß der Transistor nicht leistungslos gesteuert werden kann, sowohl im Eingangs- als auch im Ausgangskreis sind Ströme und Spannungen und die entsprechenden gegenseitigen Beeinflussungen zu berücksichtigen. Für den Betrieb des Transistors als Verstärker interessieren hauptsächlich die Wechselgrößen (dynamische Größen, Aussteuerung)  $\Delta I = i$  bzw.  $\Delta U = u$ . Der Index 1 bei  $u$  und  $i$  bezeichnet die Eingangsgrößen, der Index 2 die Ausgangsgrößen. Die Verknüpfungen zwischen ihnen wird meist in *Hybriddarstellung* angegeben

$$\begin{aligned} u_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}u_2, \\ i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}u_2, \end{aligned} \quad (17)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (17a)$$

Der Ausdruck „hybrid“ (von zweierlei Herkunft) weist darauf hin, daß die Parameter  $h_{ik}$  unterschiedliche Dimensionen besitzen. Man bevorzugt diese

Darstellung, da alle Parameter anschaulich und leicht meßbar sind. Es gelten für die *h*-Parameter die Definitionsgleichungen:

$$h_{11} = \left( \frac{u_1}{i_1} \right)_{u_2=0} \quad \text{Eingangswiderstand (in } \Omega \text{) bei dynamisch kurzgeschlossenem Ausgang,}$$

$$h_{12} = \left( \frac{u_1}{u_2} \right)_{i_1=0} \quad \text{Spannungsrückwirkung (dimensionslos) bei dynamisch offenem (nicht angesteuertem) Eingang,}$$

$$h_{21} = \left( \frac{i_2}{i_1} \right)_{u_2=0} \quad \text{Stromverstärkung (dimensionslos) bei dynamisch kurzgeschlossenem Ausgang,}$$

$$h_{22} = \left( \frac{i_2}{u_2} \right)_{i_1=0} \quad \text{Ausgangsleitwert (in S) bei dynamisch offenem Eingang.}$$

Dynamisch kurzgeschlossener Ausgang bedeutet, daß die zur Einstellung des Arbeitspunktes *A* notwendige Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE}$  konstant gehalten wird, d. h., daß keine Ausgangsspannungsänderung  $u_2$  bzw. Ausgangswechselspannung entstehen kann, wenn der Eingang ausgesteuert wird. Analog wird bei dynamisch offenem Eingang das Entstehen einer Änderung des Eingangstromes  $i_1$  verhindert, wenn sich  $u_2$  ändert. Die Bedeutung der *h*-Parameter und eine Möglichkeit ihrer Ermittlung ergibt sich anschaulich aus dem Kennlinienfeld des Transistors (Abb. 99).

Für den Einsatz des Transistors sind drei *Grundschaltungen* möglich, die ihre Bezeichnung nach der Elektrode, die Eingang und Ausgang gemeinsam

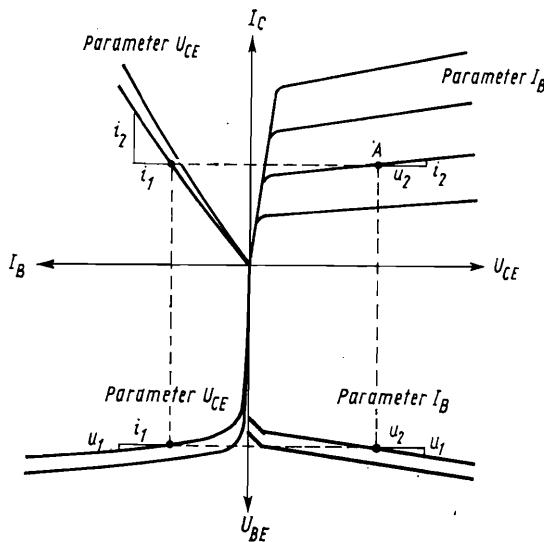


Abb. 99. Kennlinienfeld eines Transistors

ist, erhalten haben (Abb. 100). Diese Grundschaltungen zeichnen sich durch eine Reihe unterschiedlicher Eigenschaften aus:

|                      | Emitter-schaltung | Basis-schaltung | Kollektor-schaltung |
|----------------------|-------------------|-----------------|---------------------|
| Eingangswiderstand   | klein             | sehr klein      | groß                |
| Ausgangswiderstand   | groß              | groß            | klein               |
| Spannungsverstärkung | groß              | groß            | $\approx 1$         |
| Stromverstärkung     | groß              | $\approx 1$     | groß                |

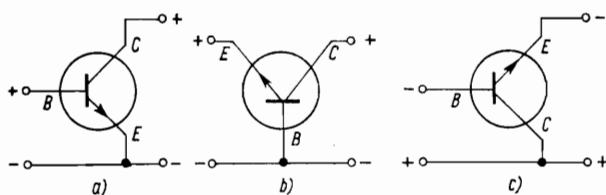


Abb. 100. Grundschaltungen eines npn-Transistors  
a) Emitterschaltung; b) Basisschaltung; c) Kollektorschaltung

Für die meisten Anwendungsfälle wird die Emitterschaltung bevorzugt, die weitgehend der normalen Röhrenschaltung entspricht. Die anderen Grundschaltungen sind Spezialanwendungen vorbehalten.

### E. 3.1. Kennlinie einer Hochvakuumdiode

*Aufgaben:* 1. Es ist die  $I_a$ - $U_a$ -Kennlinie einer Hochvakuumdiode bei zwei verschiedenen Heizströmen aufzunehmen und graphisch darzustellen.

2. Aus den Kennlinien sind das Kontaktpotential zwischen Anode und Kathode, für die beiden Heizströme die jeweilige Kathoden-temperatur und für den größeren Heizstrom die Raumladungskonstante zu bestimmen.

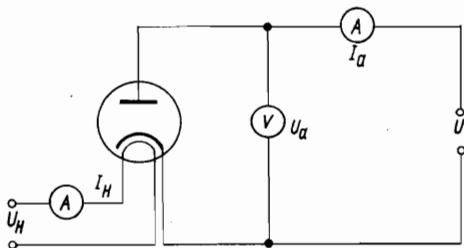


Abb. 101.  
Meßschaltung einer  
Hochvakuumdiode

### *Versuchsausführung*

Die Messungen werden mit einer Schaltung nach Abb. 101 durchgeführt. Zur Darstellung der Kennlinien verwenden wir einfach-logarithmisches Papier mit 3 bis 4 Dekaden für die  $I$ -Achse. Vom Einsetzen des Stromes ( $I \approx 1 \mu\text{A}$ ) bis  $U_a \approx +1 \text{ V}$  ist in Schritten von etwa  $0,1 \text{ V} \dots 0,15 \text{ V}$  zu messen, bis  $4 \text{ V}$  etwa aller  $0,5 \text{ V}$ , darüber sind bis zu den Maximalwerten der Diode noch 4 bis 5 Meßpunkte erforderlich.

### **E. 3.2. Kennlinien von Triode, Tetrode und Pentode**

- Aufgaben:*
1. a) Für eine Triode oder eine als Triode geschaltete Pentode ( $g_2 = g_3 = a$ , Abb. 102) sind  $I_a$ - $U_a$ -Kennlinien für verschiedene Werte der Anodenspannung als Parameter aufzunehmen.
  - b) Es sind  $I_a$ - $U_a$ -Kennlinien für verschiedene Werte der Gitterspannung  $U_{g1}$  als Parameter aufzunehmen.
  - c) Aus beiden Kennlinienscharen sind für einen vorgegebenen Arbeitspunkt  $D$ ,  $S$  und  $R_i$  zu bestimmen und die Barkhausen-Formel sowie das modifizierte Schottky-Langmuirsche Raumladungsgesetz Gl. (8) zu überprüfen.
  - d) Für einen vorgegebenen Außenwiderstand ist die Arbeitsgerade in das  $I_a$ - $U_a$ -Diagramm einzutragen und daraus die Spannungsverstärkung zu bestimmen. Diese ist mit der aus den Röhrenkennwerten nach Gl. (12) berechneten zu vergleichen.
  2. Für eine als Tetrode geschaltete Pentode ( $g_3$  an  $g_2$ , Abb. 103) ist für feste Gitter- und Schirmgitterspannung  $U_{g1}$  bzw.  $U_{g2}$  eine  $I_a$ - $U_a$ -Kennlinie aufzunehmen.
  3. a) Für eine Pentode sind  $I_a$ - $U_g$ -Kennlinien für verschiedene Werte der Schirmgitterspannung  $U_{g2}$  als Parameter bei fester Anodenspannung aufzunehmen.
  - b) Es sind  $I_a$ - $U_a$ -Kennlinien für verschiedene Werte der Gitterspannung  $U_{g1}$  als Parameter bei fester Schirmgitterspannung  $U_{g2}$  (gleicher Wert wie in Aufgabe 2) aufzunehmen.
  - c) Für einen vorgegebenen Arbeitspunkt sind  $S$  und  $R_i$  aus den Kennlinien zu bestimmen und der Anodendurchgriff über die Barkhausen-Formel zu berechnen. Außerdem ist der Schirmgitterdurchgriff zu bestimmen.
  4. Die erhaltenen Kennlinien sind zu diskutieren.
  5. In die Kennlinienfelder für  $I_a$ - $U_a$  ist der zulässige Arbeitsbereich, gegeben durch die vom Hersteller veröffentlichten Grenzwerte für Anodenstrom  $I_a$ , Anodenspannung  $U_a$  und Anodenverlustleistung  $P_a = I_a U_a$ , einzulezeichnen.

### Versuchsausführung

Die Triode und (oder) Pentode werden nach den Schaltbildern der Abb. 102 und 103 geschaltet. Bei der Berechnung der Röhrenkennwerte werden als Näherung für die Differentialquotienten in den Gln. (4) bis (6) die Differenzenquotienten bei den wenig gekrümmten Kurventeilen, sonst

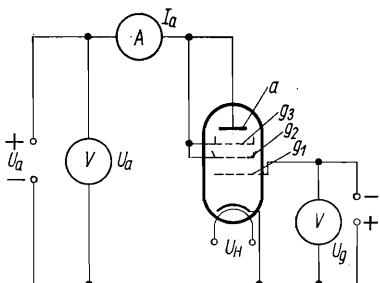


Abb. 102. Schaltung  
einer Pentode als Triode

der Anstieg der Tangenten verwendet. Es ist besonders zu beachten, daß bei der Wahl der Wertepaare die jeweiligen Nebenbedingungen ( $I_a$ ,  $U_a$ ,  $U_{g1}$ ,  $U_{g2} = \text{const}$ ) eingehalten werden. Für die Überprüfung der modifizierten Schottky-Langmuirschen Gleichung wird die Erläuterung des Abschn. E. 3.0.1 sinngemäß übertragen.

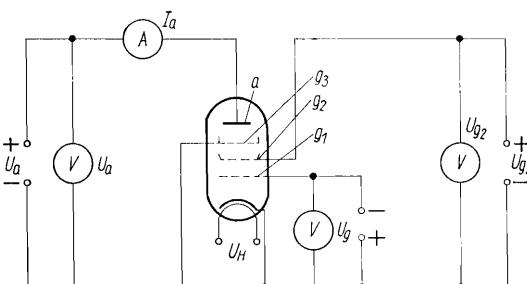


Abb. 103. Schaltung einer Pentode (für die Schaltung einer Pentode als Tetrode ist  $g_3$  an  $g_2$  zu legen)

## E. 3.3. Kennlinien von Halbleiterdioden

- Aufgaben:*
1. Es sind die  $I-U$ -Kennlinien für Germanium-, Silizium-, Z- und Tunnelelektronen diode in Durchlaß- und Sperrrichtung aufzunehmen.
  2. Für die Germanium- und die Siliziumdiode sind für vorgegebene Durchlaß- und Sperrspannungen Gleichstrom- und

differentieller Widerstand sowie die Schwellspannung zu bestimmen. Die unterschiedlichen Werte der Dioden sind zu diskutieren.

3. Für die Z-Diode ist die Zenerspannung zu bestimmen und der differentielle Widerstand im Sperrbereich für vorgegebene Sperrströme bei gleichzeitiger Angabe der zugehörigen Spannung zu berechnen.

4. Für die Tunneldiode sind Höcker- und Talstrom mit den zugehörigen Spannungen anzugeben und die differentiellen Widerstände für vorgegebene Spannungen sowie an der steilsten Stelle der fallenden Kennlinie zu bestimmen.

### Versuchsausführung

Zur Messung wird eine Schaltung nach Abb. 104 benutzt. Der Umpolschalter gestattet die Untersuchung von Durchlaß- und Sperrrichtung. Da sich Spannungen und Ströme um Größenordnungen ändern können, werden

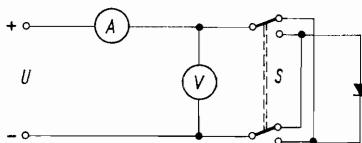


Abb. 104. Meßschaltung für Halbleiterdioden, Umpolschalter  $S$  in Sperrrichtung gezeichnet

vorteilhaft Vielfachmesser eingesetzt. Die in Sperrichtung und bei kleinen Durchlaßspannungen auftretenden Verfälschungen der Stromanzeige lassen sich leicht korrigieren, wenn man auf der Vielfachskale des als Spannungsmesser verwendeten Gerätes außer der Spannung gleichzeitig den notwendigen Strombedarf für den jeweiligen Ausschlag abliest (vgl. E. 1). Es ist unbedingt darauf zu achten, daß die Höchstwerte für Strom und Spannung eingehalten werden. Zur Ermittlung der Zenerspannung und der Schwell- (oder Schleusen-) Spannung legt man eine Tangente an den steilen, praktisch geradlinigen Teil der Kennlinie und bestimmt den Schnittpunkt mit der U-Achse.

### E. 3.4. Kennlinienfeld des Transistors

- Aufgaben:*
1. Es ist das Kennlinienfeld eines Transistors in Emitterschaltung aufzunehmen. Dazu sind  $I_C$  und  $U_{BE}$  als Funktion von  $U_{CE}$  mit mehreren Werten von  $I_B$  als Parameter zu messen.
  2. Aus den Meßwerten sind für alle  $I_B$ -Werte die  $I_C$ - $U_{CE}$ -Kennlinien, für mindestens zwei  $I_B$ -Werte  $U_{BE}$ - $U_{CE}$ -Kennlinien und für zwei  $U_{CE}$ -Werte  $I_C$ - $I_B$ - und  $U_{BE}$ - $I_B$ -Kennlinien darzustellen.

3. Ein vorgegebener Arbeitspunkt im ersten Quadranten ist auf die anderen drei Quadranten zu übertragen. Für diesen Arbeitspunkt sind die vier  $h$ -Parameter zu berechnen.

### Versuchsausführung

Die Messungen erfolgen mit einer Schaltung nach Abb. 105 für npn-Transistoren, bei pnp-Transistoren sind die Spannungen und alle Instrumente umzupolen. Zur Bestimmung von  $U_{BE}$  verwenden wir vorteilhaft ein Röhren- oder Transistorvoltmeter (Innenwiderstand  $\geq 1 \text{ M}\Omega$ ), um Stromverfälschungen durch die Spannungsmessung zu vermeiden. An allen anderen

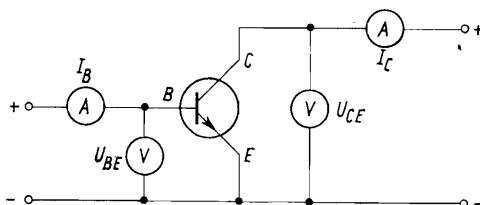


Abb. 105. Meßschaltung zur Aufnahme der Kennlinien eines npn-Transistors

Stellen sind Vielfachmesser einzusetzen. Bei kleinen Kollektorspannungen ( $U_{CE} < 1 \text{ V}$ ) besteht eine sehr starke gegenseitige Beeinflussung aller Größen, so daß sämtliche Werte ständig zu kontrollieren sind. Für die Berechnung der  $h$ -Parameter wird bei den linearen Teilen der Kennlinien der Differenzenquotient, sonst der Anstieg der Tangente benutzt. Es ist unbedingt darauf zu achten, daß alle Grenzwerte des im Versuch benutzten Transistortyps (Spannung, Strom, Leistung) nicht überschritten werden, vgl. E.2.1.

## E. 4. ELEKTRISCHE STRÖME UND MAGNETISMUS

### E. 4.0. Allgemeine Grundlagen

#### E. 4.0.1. Magnetisierung

Wird ein Stoff einem magnetischen Feld der Stärke  $\mathbf{H}$  (Einheit:  $1 \text{ A m}^{-1}$ ) ausgesetzt, so wird er magnetisiert. Die *Magnetisierung*  $\mathbf{M}$  ist als Quotient aus dem magnetischen Moment der magnetisierten Probe und ihrem Volumen festgelegt. Sie hat demzufolge die gleiche Einheit wie die magnetische Feldstärke und wird als Beitrag eines Stoffes zum magnetischen Feld auf-

gefaßt. Bei vielen Stoffen ist sie der magnetisierenden Feldstärke proportional:  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ . Der Proportionalitätsfaktor  $\chi_m$  heißt *magnetische Suszeptibilität*. Für die *magnetische Induktion* oder *Flußdichte*  $\mathbf{B}$  folgt somit

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}; \quad (1a)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$  wird *Induktions-* oder *magnetische Feldkonstante* genannt,  $\mu_r = 1 + \chi_m$  ist die relative *Permeabilität* des magnetisierten Stoffes. Sie wird wegen

---


$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (1b)$$


---

als Quotient der magnetischen Induktion im Stoff und der im Vakuum definiert. Die *Einheit der magnetischen Induktion* ist 1 Tesla (T) = 1 Wb m<sup>-2</sup>, und 1 Wb (Weber) = 1 Vs steht für die *Einheit des magnetischen Flusses*. Der magnetische Fluß  $\Phi$  durch eine Fläche  $A^*$  ist als

---


$$\Phi = \int \mathbf{B} \, dA^* \quad (2a)$$


---

( $dA^* \perp A^*$ ) definiert. Im homogenen Feld vereinfacht sich diese Gleichung bei ebener Fläche zu

---


$$\Phi = B \cdot A^* \cos(\mathbf{B}, dA^*). \quad (2b)$$


---

Durch die dimensionslosen Kennwerte  $\chi_m$  und  $\mu_r$  werden die Stoffe hinsichtlich ihrer magnetischen Eigenschaften klassifiziert und charakterisiert. Für *para-* und *diamagnetische Stoffe* ist  $\mu_r \approx 1$ , für *ferromagnetische*<sup>1)</sup> gilt dagegen  $\mu_r \gg 1$  (bis  $10^5$ ). Ferro- und Paramagnetika nehmen in einem magnetischen Feld eine diesem gleichgerichtete Magnetisierung an ( $\mu_r > 1$ ,  $\chi_m > 0$ ). Diamagnetika ( $\mu_r < 1$ ,  $\chi_m < 0$ ) sind entgegen dem äußeren Feld magnetisiert.

Die graphische Darstellung der Magnetisierung  $M$  oder der magnetischen Induktion  $B$  in Abhängigkeit von der magnetisierenden Feldstärke  $H$  liefert für ferromagnetische Stoffe Kurven nach Art der Abb. 106: Die Magnetisierung wächst zunächst mit der Feldstärke, erreicht aber dann einen Sättigungswert. Der entsprechende Kurvenzug  $O-P_1$  heißt *Neukurve*. Auf sie läßt sich Gl. (1b) nur anwenden, wenn die Permeabilität  $\mu_r$  als variabler, feldstärkeabhängiger Wert aufgefaßt wird. Er hängt außerdem vom Stoff und seiner Vorbehandlung ab. Deshalb kennzeichnet man Ferromagnetika durch ihre Anfangspermeabilität  $\mu_{r0}$  (das ist die Permeabilität für  $H \rightarrow 0$ )

<sup>1)</sup> Ferromagnetische Stoffe sind die Elemente Eisen, Kobalt, Nickel sowie Legierungen dieser Elemente untereinander und mit fremden Elementen; weiterhin sind einige Legierungen nicht ferromagnetischer Elemente ferromagnetisch.

und durch die maximale Permeabilität  $\mu_{r\max}$ . Sie kommt der Stelle der Neukurve zu, an der eine Tangente den größtmöglichen Anstieg besitzt. Wenn wir die magnetisierende Feldstärke von  $P_1$  aus verringern, wird ein dem Kurvenzug  $P_1 - P_2$  entsprechender Zusammenhang  $M$  bzw.  $B = f(H)$  beobachtet. Selbst bei  $H = 0$  bleibt der Stoff magnetisch und kann durch

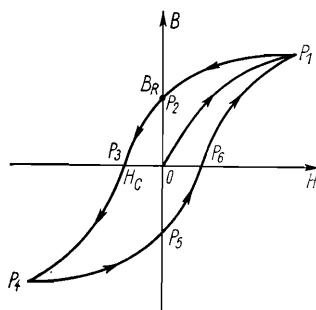


Abb. 106. Hysteresekurve

*Remanenzinduktion*  $B_R$  oder durch die *remanente Magnetisierung*  $M_R$  charakterisiert werden ( $P_2$  in Abb. 106). Durch eine *Koerzitivfeldstärke*  $-H = H_C$  ( $P_3$  in Abb. 106) wird die Remanenz beseitigt. Bei einer zyklischen Veränderung der magnetisierenden Feldstärke wird der Kurvenzug  $P_1, P_2, \dots, P_6$  wiederholt durchlaufen (*magnetische Hysterese*). Da  $[B] \cdot [H] = \text{W s m}^{-3}$ , entspricht die von der Hysteresekurve eingeschlossene Fläche betragsmäßig der Energie, die bei einem Zyklus der Ummagnetisierung für die Volumeneinheit aufzuwenden ist.

Der Verlauf der Hysteresekurve wird durch mehrere, im folgenden vereinfacht dargestellte magnetische Elementarvorgänge bestimmt: Kleine Bereiche (*Weißsche Bezirke*) sind magnetisiert, weil ihre atomar-magnetischen Momente sich spontan parallel zueinander und zu typischen kristallographischen Richtungen stellen. Die Magnetisierungsrichtungen der Weißschen Bezirke eines polykristallinen Stoffes sind im Körper statistisch verteilt und deshalb makroskopisch nicht zu bemerken ( $M = 0$ ). In einem äußeren Magnetfeld wachsen zunächst die Gebiete günstiger spontaner Magnetisierung auf Kosten benachbarter Bezirke durch reversible *Wandverschiebungen* oder indem die Magnetisierungsrichtung ganzer Volumenbereiche in eine energiemäßig günstigere kristallographische Richtung umklappt (*Barkhausen-Sprung*). Im Sättigungsgebiet der Neukurve werden die Vektoren der Magnetisierung vorwiegend aus ihrer kristallographisch günstigen Richtung heraus und in die Richtung des magnetisierenden Feldes eingedreht.

Stoffe, die aus zwei Untergittern bestehen, in denen die spontane Magnetisierung gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist, sind *antiferromagnetisch*. Wenn dagegen die spontane Magnetisierung in den beiden Untergittern nicht gleich groß ist, nennt man das Material *ferrimagnetisch*. Wichtige Vertreter dieser Stoffgruppe sind die *Ferrite*. Sie haben ähnliche magnetische Eigenschaften wie Ferromagnetika.

*Ferri- und ferromagnetische Stoffe* werden oberhalb einer für das betreffende Material charakteristischen Temperatur (Curie-Temperatur  $T_C$ )

paramagnetisch. Für Temperaturen  $T > T_C$  gilt das *Curiesche Gesetz*

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (3)$$

( $C$  = Curiesche Konstante).

Für die Änderung der magnetischen Induktion  $B$  einer entmagnetisierten, ferro- bzw. ferrimagnetischen Probe gilt nach *Rayleigh* in magnetischen Feldern  $H$ , die klein gegen die Koerzitivfeldstärke  $H_C$  sind

$$B - B_1 = \mu_0 \left\{ \mu_{ra} (H - H_1) \pm \frac{\beta}{2} (H - H_1)^2 \right\}. \quad (4a)$$

In Gl. (4a) sind  $\mu_{ra}$  die Anfangspermeabilität – d. h. die auf die Feldstärke  $H = 0$  extrapolierte relative Permeabilität – und  $\beta$  die Rayleigh-Konstante der magnetischen Induktion. Das positive Vorzeichen in Gl. (4a) ist für  $H > H_1$ , das negative für  $H < H_1$  zu nehmen.

Wählt man  $H_1 = -H_0$ ,  $B_1 = -B_0$ , so erhält man für die Kurve  $a$  (vgl. Abb. 107)

$$B + B_0 = \mu_0 \left\{ \mu_{ra} (H + H_0) + \frac{\beta}{2} (H + H_0)^2 \right\}. \quad (4b)$$

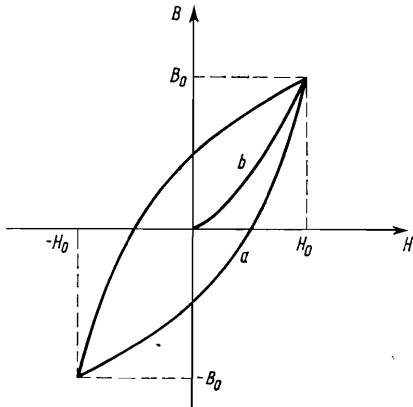


Abb. 107. Rayleigh-Schleife

Für  $H = H_0$ ,  $B = B_0$  ergibt sich aus Gl. (4b) die Kurve  $b$ , auf der die positiven Spitzen verschieden weit ausgesteuerter Rayleigh-Schleifen liegen. Aus

$$B_0 = \mu_0 \{ \mu_{ra} + \beta H_0 \} H_0 \quad (4c)$$

folgt, daß die relative Permeabilität längs der sogenannten Kommutierungskurve  $b$  linear mit der Amplitude der Wechselfeldstärke

ansteigt, d. h.

$$\mu_r = \mu_{ra} + \beta H_0. \quad (5)$$

Form und Fläche der Magnetisierungskurven sowie der daraus ableitbaren Kennwerte bestimmen die *Einsatzgebiete der magnetischen Werkstoffe*: Magnetische Schalter und Speicher verlangen beispielsweise möglichst rechteckige Hysteresekurven. Transformatoren- und Dynamobleche erfordern möglichst kleine Koerzitivfeldstärken ( $H_c < 1 \text{ A cm}^{-1}$ ), große Anfangs- ( $\mu_{ra} \approx 1000$ ) und Maximalpermeabilitäten ( $\mu_{r\max} \approx 10000$ ) und schmale Hysteresen. Für Dauermagnete werden Stoffe mit großer Remanenz ( $B_R \approx 10^{-4} \text{ Vs cm}^{-2}$ ) und großer Koerzitivfeldstärke ( $H_c \approx 500 \text{ A cm}^{-1}$ ) eingesetzt. Kerne für Spulen und Übertrager der Schwachstromtechnik zeichnen sich durch möglichst hohe und über weite Bereiche der Feldstärke konstante Permeabilitäten aus.

#### E. 4.0.2. Kraftwirkung magnetischer Felder auf elektrische Ströme

Elektrische Ströme erzeugen magnetische Felder. Wird beispielsweise eine zylindrische Spule von der Länge  $l$  und vom Durchmesser  $d$  von einem Strom  $I$  durchflossen, so beträgt die *magnetische Feldstärke längs der Spulenachse*

$$H = \frac{NI}{\sqrt{d^2 + l^2}}. \quad (6a)$$

Hierin bedeutet  $N$  die Windungszahl der Spule. Aus Gl. (6a) ergibt sich mit  $d \ll l$  der für eine unendlich lange Spule gültige Grenzfall

$$H = \frac{NI}{l}. \quad (6b)$$

Die magnetischen Felder elektrischer Ströme wechselwirken ihrerseits mit magnetischen Feldern und verursachen Kräfte, die vielfältig ausgenutzt werden. Beispiele hierfür sind der Elektromotor, die große Gruppe der elektromechanischen Wandler, gewisse elektronenoptische Geräte und elektrische Meßinstrumente. Die Bestimmung magnetischer Feldstärken und die Festlegung der Einheit der Stromstärke beruhen ebenfalls auf der gegenseitigen Kraftwirkung zweier elektrischer Ströme und ihrer Magnetfelder.

Auf eine im Magnetfeld mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte elektrische Ladung  $Q$  bzw. auf einen vom Strom  $I$  durchflossenen Leiter der Länge  $l$  wirkt eine Kraft

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = l(\mathbf{I} \times \mathbf{B}) \quad (7a)$$

vom Betrage

$$\mathbf{F} = Q \cdot v \cdot B \sin (\mathbf{v}, \mathbf{B}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = l \cdot I \cdot B \sin (\mathbf{I}, \mathbf{B}). \quad (7\text{b})$$

Ihre Wirkungslinie steht also senkrecht zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bzw. zum Strom  $\mathbf{I}$  und zur magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$ . Die Vektoren  $\mathbf{v}$  bzw.  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{F}$  bilden bei einer positiven Ladung oder der positiven Stromrichtung ein Rechtssystem, bei einer negativen Ladung oder der Stromrichtung der Elektronen ein Linkssystem.

### E. 4.1. Drehspulgalvanometer

- Aufgaben:*
1. Bestimme den Innenwiderstand sowie die Strom- und Spannungsempfindlichkeit eines Drehspulgalvanometers.
  2. Es sind die Bewegungsarten (Schwingfall, aperiodischer Grenzfall, Kriechfall) einer Galvanometerspule zu verwirklichen und graphisch darzustellen. Der dem aperiodischen Grenzfall entsprechende Außenwiderstand ist anzugeben und das logarithmische Dekrement in Abhängigkeit von der Dämpfung zu ermitteln.

*Drehspulinstrumente* beruhen auf folgendem Prinzip (Abb. 108): Die Pole eines Permanentmagneten und ein Weicheisenkern  $K$  bilden einen zylindrischen Luftspalt. In ihm herrscht ein radialsymmetrisches magnetisches

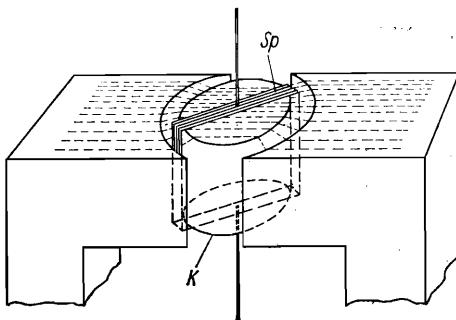


Abb. 108. Prinzip des Drehspulgalvanometers

Feld. Um den Kern kann sich eine rechteckige Spule  $Sp$  bewegen. Sie besteht aus Kupferdraht und bildet den Innenwiderstand  $R_i$  des Instrumentes. Die Spule wird bei dem empfindlichsten Instrument dieser Art, dem *Drehspulgalvanometer*, durch Torsionsfäden oder -bänder gehalten. Bei weniger empfindlichen Drehspulmeßwerken ist sie spitzengelagert und wird

durch ein Spiralfederpaar an eine Gleichgewichtslage gebunden. Torsionsfäden und Spiralfedern dienen gleichzeitig als elektrische Anschlüsse der Spule.

Fließt durch die Spule (Höhe  $h$ , Breite  $b$ ,  $N$  Windungen) ein Gleichstrom (Stromstärke  $I$ ), übt das magnetische Feld (Kraftflußdichte  $B$ ) auf jede der im Feld befindlichen Spulenseiten gemäß Gl. (7b) eine Kraft

$$F = NIhbB \quad (7c)$$

aus ( $I$  bzw.  $h \perp B$ ) und erzeugt so ein Kräftepaar. Dessen Drehmoment ist, da  $I \perp B$ , vom Betrage

$$M = NbhIB = NA^*IB = GI; \quad (8a)$$

$A^* = bh$  ist die Querschnittsfläche der Spule,  $G = NA^*B$  nennt man *dynamische Galvanometerkonstante*.

Eine Gleichgewichtslage der stromdurchflossenen Spule ist im Vergleich zur Nullage erreicht, wenn das elektrisch bedingte Drehmoment  $M$  und das Moment der elastisch tordierten Spulenhalterung

$$M' = D\alpha \quad (8b)$$

( $D$  Direktionsmoment,  $\alpha$  Drehwinkel der Spule) gleich sind. Aus den Gln. (8a) und (8b) folgt für den *Drehwinkel  $\alpha$  eines Drehspulmeßwerkes*

$$\alpha = \frac{G}{D} I = E_{I(\alpha)} : I. \quad (9)$$


---

Er ist demnach der zu messenden Stromstärke proportional. Der Proportionalitätsfaktor  $E_{I(\alpha)} = G/D$  ist die auf den Drehwinkel bezogene *Stromempfindlichkeit* des Meßwerkes. Da Stromstärke und Spannung in einem Leiterkreis einander proportional sind, dienen Drehspulmeßwerke auch als Spannungsmesser.

*Galvanometerablesung:* Bei empfindlichen Drehspulgalvanometern<sup>1)</sup> wird die jeweilige Stellung der Spule durch einen am Spulenrahmen befestigten kleinen Spiegel angezeigt. Das geschieht wie folgt:

a) Das Spiegelbild (Abb. 109;  $Sp$ : Spiegel) einer ebenen Skale  $Sk$  wird mit einem Fernrohr  $F$  betrachtet, in dessen Bildebene sich ein Fadenkreuz befindet.

b) Anstelle des Fernrohres wird eine mit einem Spalt, Faden oder einer Marke versehene Lichtquelle benutzt, die den Spiegel beleuchtet. Vor diesem befindet sich eine Linse, die auf der Skale ein Bild der Lichtmarke entwirft.

<sup>1)</sup> Mit Instrumenten höchster Empfindlichkeit können Ströme bis herab zu  $10^{-11}$  A nachgewiesen werden.

Dreht sich der Spiegel um den Winkel  $\alpha$  aus der in Abb. 109 angenommenen Nullstellung heraus, überstreicht der „Lichtzeiger“ einen Winkel  $2\alpha$  (Reflexionsgesetz), für den mit den Bezeichnungen der Abb. 109 und der Vereinbarung  $2\alpha = \varphi$  gilt

$$\tan \varphi = \frac{a^1}{A}; \quad (10a)$$

bei kleinen Winkeln ist die Näherung

$$\varphi = \frac{a}{A} \quad (10b)$$

erlaubt, für die bei  $\varphi < 6^\circ$  der relative Fehler unter 1 % bleibt. Ein von einem systematischen Fehler freier Winkel wird aus

$$\varphi = \frac{a'}{A} \quad (10c)$$

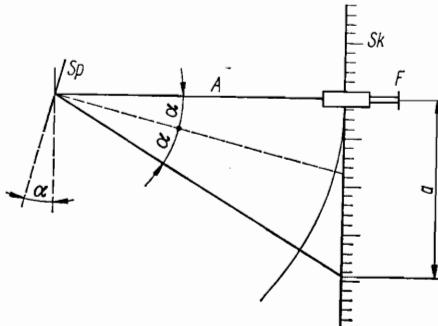


Abb. 109.  
Lichtzeigerablesung

im Bogenmaß erhalten, wenn  $a'$  der auf eine Kreisskala vom Radius  $A$  umgerechnete Ausschlag  $a$  der ebenen Skala ist (*Reduktion auf den Bogen*). Dafür gilt

$$a' = a - \Delta \quad (10d)$$

mit

$$\Delta = a - A\varphi = a - A \arctan \frac{a}{A}. \quad (10e)$$

*Strom- und Spannungsempfindlichkeit:* Strom- und Spannungsempfindlich-

<sup>1)</sup> Die Beziehung setzt voraus, daß der Lichtzeiger des stromlosen Instrumentes unter einem rechten Winkel auf die Skale trifft.

keit eines Galvanometers sind durch die Gleichungen

---


$$E_I = \frac{\varphi}{I} = \frac{a'/A}{I} \quad (11\text{a})$$

und

---


$$E_U = \frac{\varphi}{U} = \frac{a'/A}{U} \quad (11\text{b})$$


---

definiert. Vereinbarungsgemäß werden der Ausschlag  $a'$  in der Maßeinheit mm und der Skalenabstand  $A$  in m angegeben. Demzufolge sind die Einheiten der Strom- und Spannungsempfindlichkeit

$$[E_I] = \frac{\text{mm/m}}{\text{A}} ; \quad [E_U] = \frac{\text{mm/m}}{\text{V}} .$$

Aus dem Vergleich der Gln. (9) und (11 a) folgt

---


$$E_I = 2E_{I(\alpha)} . \quad (12)$$


---

Die Kehrwerte der Empfindlichkeiten

---


$$C_I = \frac{1}{E_I} \quad \text{und} \quad C_U = \frac{1}{E_U} \quad (13\text{a, b})$$


---

werden Reduktionsfaktoren oder *Strom- und Spannungskonstante* des Instrumentes genannt. Strom- und Spannungsempfindlichkeit sind über den Innenwiderstand  $R_i$  des Instrumentes miteinander verbunden (Ohmsches Gesetz):

---


$$E_I = E_U R_i . \quad (14)$$


---

Die Kennwerte eines Galvanometers sind meist auf dem Typenschild angegeben, so daß auch mit nichtkalibrierten Instrumenten über die Gln. (11) und (13) Absolutmessungen von Strom und Spannung möglich sind.

Experimentell lassen sich die Stromempfindlichkeit  $E_I$  eines Galvanometers und sein Innenwiderstand  $R_i$  (vgl. Aufgabe 2 in E. 1.2) wie folgt ermitteln:

Wählen wir in der Schaltung nach Abb. 110 den Widerstand  $R_2 \ll R_1$ , läßt sich der aus den Parallelwiderständen  $R_2$  und  $R_i + R_3$  gebildete Widerstand gegenüber  $R_1$  vernachlässigen, und die Stromstärke im Kreis beträgt an-

nähernd

$$I_1 = \frac{U}{R_1} . \quad (15)$$

Über das Galvanometer fließt nach den Gesetzen der Stromverzweigung nur der Teilstrom

$$I = I_1 - I_2 \quad (16)$$

( $I_2$  Teilstrom im Widerstand  $R_2$ ), für den andererseits

$$I = I_2 \frac{R_2}{R_1 + R_3} \quad (17)$$

gilt. Aus diesen Beziehungen folgt

$$I = \frac{UR_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} . \quad (18)$$

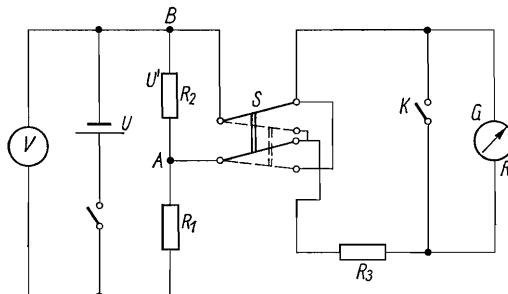


Abb. 110. Schaltung des Galvanometers

Damit sind die Stromkonstante [Gl. (13a)] durch

---


$$C_I = \frac{1}{E_I} = \frac{UR_2}{(a'/A) R_1} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (19a)$$


---

und der Ausschlag durch

$$\varphi = \frac{a'}{A} = \frac{E_I U R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (19b)$$

gegeben.

Mit 2 Werten des Widerstandes  $R_3$  und entsprechenden Ausschlägen ergeben sich bei Konstanz der übrigen Größen zwei Gleichungen, in denen  $R_1$  und  $E_I$  unbekannt sind und daraus errechnet werden können. Vorausgesetzt wird dabei, daß  $E_I$  – wie bei guten Galvanometern gesichert – nicht

von der Größe des Ausschlages abhängt. Soll dies nicht vorausgesetzt werden, benutzen wir zwei Wertepaare  $R_1$  und  $R_3$ , die zu annähernd gleichen Ausschlägen führen.

Wenn wir in Abb. 110 den Widerstand  $R_3$  ausschalten ( $R_3 = 0$ ), wird der Ausschlag des Galvanometers nach Gl. (19b) durch den Innenwiderstand  $R_i$  bestimmt, sofern im Vergleich zu diesem  $R_2$  verschwindend klein ist ( $R_2 \ll R_i$ ). Der Ausschlag geht mit wachsendem  $R_3$  zurück und beträgt annähernd die Hälfte des anfänglichen Wertes, wenn

$$R_3 = R_i \quad (20)$$

ist.

*Bewegungsgleichung und Bewegungsarten der Spule:* Die Spule eines Galvanometers führt meist gedämpfte Drehschwingungen um eine Gleichgewichtslage aus [Schwingfall (a) in Abb. 111]. Beim stark gedämpften

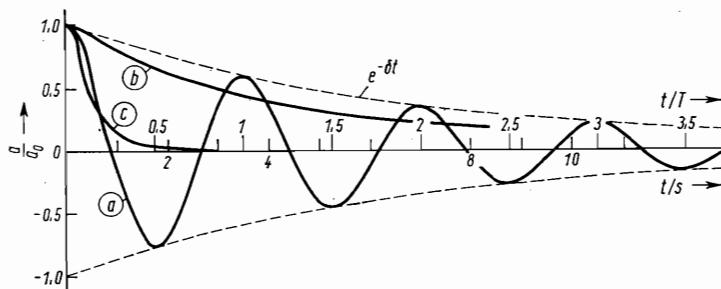


Abb. 111. Bewegungsarten einer Galvanometerspule  
a) Schwingfall ( $T = 3,5$  s;  $\delta = 0,15$  s $^{-1}$ ); b) Kriechfall; c) aperiodischer Grenzfall ( $T_0 = 3,49$  s;  $\omega_0 = \delta = 1,8$  s $^{-1}$ )

System wird sich eine asymptotische Kriechbewegung [Kriechfall (b)] einstellen. Den Übergang vom Kriech- zum Schwingfall bildet der aperiodische Grenzfall (c). Bei ihm kommt die Spule in kürzester Zeit in der Gleichgewichtslage zur Ruhe. Darin liegt die meßtechnische Bedeutung des aperiodischen Grenzfalles.

Alle Bewegungsformen der Drehspule gehorchen einer Differentialgleichung (Schwingungsgleichung), die sich durch Gleichsetzen aller am System wirkenden Drehmomente ergibt. Zunächst wird ein stromloses Instrument angenommen, so daß sich die Dämpfung auf die Luftreibung ( $r$  Reibungsfaktor) im Ringspalt des Magneten beschränkt. Dann gilt

---


$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + r \frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = 0. \quad (21)$$


---

$\alpha = \alpha(t)$  ist der momentane Drehwinkel,  $J(d^2\alpha/dt^2)$  verkörpert die durch das Trägheitsmoment  $J$  bedingte Trägheit des Systems,  $r(d\alpha/dt)$  ist das durch Dämpfung verursachte Drehmoment und  $D\alpha$  das rücktreibende Moment, welches durch die Winkelrichtgröße  $D$  der elastischen Spulenbefestigung erzeugt wird. Entsprechend ihrer physikalischen Bedeutung werden die Dämpfungskonstante

$$\delta = \frac{r}{2J} \quad (22)$$

und die Kreisfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Systems in der Form

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J} \quad (23)$$

eingeführt, so daß anstelle der Gl. (21) auch

---


$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\delta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (24)$$


---

geschrieben werden kann. Mit dem Ansatz

$$\alpha = ae^{\lambda t} \quad (25)$$

und seinen Ableitungen

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lambda \alpha \quad \text{und} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \lambda^2 \alpha$$

folgt aus Gl. (24) die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (26)$$

aus der sich für  $\lambda$  die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (27)$$

ergeben.

Jeder der beiden  $\lambda$ -Werte liefert eine partikuläre Lösung der Gl. (24), wenn man sie in den Ansatz (25) einsetzt.

Die vollständige Lösung ist für  $\delta \neq \omega_0$

$$\alpha = e^{-\delta t} \left\{ a e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + b e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right\} \quad (28)$$

und für  $\delta = \omega_0$

$$\alpha = e^{-\delta t} (a + bt). \quad (29)$$

Die Konstanten  $a$  und  $b$  sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Beim Abschaltvorgang lauten diese:  $\alpha = \alpha_0$ ,  $d\alpha/dt = 0$  für  $t = 0$ . Man hat drei Fälle zu unterscheiden:

a) Für  $\delta > \omega_0$  ist die Wurzel reell,  $\lambda_{1,2}$  sind negativ, und  $\alpha$  fällt monoton. Es liegt der *aperiodische* oder *Kriechfall* vor.

b) Wenn  $\delta = \omega_0$  ist, gibt es nur eine Lösung der Gl. (26). Der Ausschlag  $\alpha$  [siehe Gl. (29)] nimmt ebenfalls, jetzt optimal schnell, monoton ab (*aperiodischer Grenzfall*).

c) Der *Schwingfall* liegt für  $\delta < \omega_0$  vor, die Wurzel wird imaginär. Nach der Eulerschen Beziehung<sup>1)</sup> kann in diesem Falle Gl. (28) in der Form

$$\alpha = e^{-\delta t} \{ (a + b) \cos \omega t + j(a - b) \sin \omega t \} \quad (28a)$$

geschrieben werden. Darin stellt

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (30)$$

die Kreisfrequenz dar ( $\nu$  Frequenz,  $T$  Schwingungsdauer).

Da Gl. (24) reell ist, müssen sowohl Real- als auch Imaginärteil von Gl. (28a) für sich allein schon Lösungen sein. Die vollständige Lösung ist

<sup>1)</sup> Die komplexe Schreibweise einer Schwingung stützt sich auf folgende Zusammenhänge: Die Kreisbewegung kann als ein in der komplexen Zahlenebene mit der Kreisfrequenz  $\omega$  (Winkelgeschwindigkeit) um den Ursprung umlaufender Punkt aufgefaßt werden. Der Radiusvektor  $A'$  der Kreisbewegung stellt physikalisch die Amplitude der Schwingung dar. Er bildet mit der positiven reellen ( $x$ -)Achse den Winkel

$$\psi = \omega t \quad \text{oder} \quad \psi = \omega t + \varphi',$$

je nachdem, ob der Winkel  $\psi$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  ebenfalls Null oder  $\varphi'$  ist. Die Beträge der Koordinaten des Punktes auf der reellen und der imaginären, der  $y$ -Achse, sind unter der Voraussetzung  $\varphi = 0$  für  $t = 0$

$$x = A' \cos \psi = A' \cos \omega t,$$

$$y = A' \sin \psi = A' \sin \omega t.$$

Die Beträge  $x$  und  $y$  stellen jeder für sich eine lineare Schwingung dar. Sie verdeutlichen, daß die lineare und zirkulare Oszillation für die mathematische Behandlung einander analog sind. Mit der imaginären Einheit  $j = \sqrt{-1}$  (definiert durch  $j^2 = -1$ ) kann der momentane Schwingungszustand des auf dem Kreis umlaufenden Punktes auch durch die komplexe Zahl

$$x + jy = A'(\cos \omega t + j \sin \omega t) = A'e^{j\omega t}$$

dargestellt werden. Der Zusammenhang der sin- und cos-Funktion mit der Exponentialfunktion ist durch die Eulersche Formel

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

gegeben.

daher

$$\alpha = e^{-\delta t} \{ A \cos \omega t + B \sin \omega t \} \quad (31)$$

oder

$$\alpha = C e^{-\delta t} \cos (\omega t - \beta). \quad (32)$$

Dies ist die Darstellung einer *gedämpften Schwingung*.

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maximalausschläge  $\alpha_m$  und  $\alpha_{m+1}$  nach einer Seite ist

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}. \quad (33)$$

Der Exponent  $\delta T$  heißt *logarithmisches Dekrement*  $A$ :

$$\ln \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} = \delta T = \frac{\delta}{\nu} = \frac{2\pi\delta}{\omega} = A. \quad (34)$$

Beim Einschalten eines Stromes bewegt sich die Spule eines Galvanometers unter dem Einfluß des Drehmomentes  $GI_g$  [ $G$  = Galvanometerkonstante, vgl. Gl. (8a)] auf eine neue Gleichgewichtslage zu. Der Einschwingvorgang gehorcht der inhomogenen Differentialgleichung

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + r \frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = GI_g. \quad (35)$$

Der Gesamtstrom  $I_g$  wird aus dem Strom  $I$  einer Spannungsquelle und dem durch die Spulenbewegung induzierten Strom  $I_i$  gebildet. Er kann durch Induktionsspannung  $U_i$  und Widerstand ausgedrückt werden:

$$I_g = I + I_i = I + \frac{U_i}{R_i + R_a}. \quad (36)$$

$R_i$  ist der Innenwiderstand des Galvanometers,  $R_a$  der Widerstand des äußeren Kreises. Für die Induktionsspannung ergibt sich aufgrund des Induktionsgesetzes

$$U_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NBA^* \frac{d\alpha}{dt} = -G \frac{d\alpha}{dt} \quad (37)$$

( $N, A^*$  Windungszahl und Fläche der Spule;  $\Phi, B$  Kraftfluß und Kraftfluß-

dichte des magnetischen Feldes). Damit kann für den Gesamtstrom [Gl. (36)]

$$I_g = I - \frac{G}{R_i + R_a} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \quad (38)$$

gesetzt werden.

Wird dies in Gl. (35) berücksichtigt, ergibt sich nach entsprechender Umformung für die Schwingungsgleichung

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left( r + \frac{G^2}{R_i + R_a} \right) \frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = GI. \quad (39)$$

Hierin ist  $I$  der Strom durch die ruhende Spule. Der Klammerausdruck  $r^* = r + G^2/(R_i + R_a)$  muß als Reibungsfaktor des belasteten Galvanometers aufgefaßt werden.

Mit der Substitution  $\alpha = \alpha^* + (G/D) I$  geht Gl. (39) in

---


$$J \frac{d^2\alpha^*}{dt^2} + \left( r + \frac{G^2}{R_i + R_a} \right) \frac{d\alpha^*}{dt} + D\alpha^* = 0 \quad (40)$$


---

über. Sie nimmt somit die Struktur der Gl. (21) an.

Der Einschwingvorgang des Galvanometersystems in die Nullage und in eine beliebige andere Gleichgewichtslage sind also gleichwertig, so daß die bereits früher diskutierten Lösungen der Schwingungsgleichung im Prinzip auch für den Fall des belasteten Galvanometers zutreffen. Insbesondere folgt aus der entsprechend modifizierten Dämpfungskonstanten [Gl. (22)]

$$\delta^* = \frac{r^*}{2J} = \frac{1}{2J} \left( r + \frac{G^2}{R_i + R_a} \right), \quad (41)$$

dass sich die Dämpfung aus einem mechanisch und einem elektrisch bedingten Anteil zusammensetzt. Sie ist durch die Wahl des Außenwiderstandes  $R_a$  in weiten Grenzen veränderlich. Wenn der Widerstand im aperiodischen Grenzfall  $R_{gr}$  genannt wird, gilt insbesondere:

a)  $R_a < R_{gr}$ : *Kriechfall*. Die Dämpfung ist bei kleinem  $R_a$ , besonders bei  $R_a = 0$  (Kurzschluß der Galvanometerklemmen), groß.

b)  $R_a = R_{gr}$ : *Aperiodischer Grenzfall*. In diesem Falle ist  $\delta^* = \omega_0$ . Mit Gl. (23) folgt daher aus Gl. (41) für den Grenzwiderstand

$$R_{gr} = \frac{G^2}{2\sqrt{JD - r}} - R_i. \quad (42)$$

c)  $R_a > R_{gr}$ : *Schwingfall*. Bei extrem großem  $R_a$  ( $R_a \rightarrow \infty$ , offene Galvanometerklemmen) wird die Dämpfung durch die meist nur kleine Luftreibung bestimmt.

Wenn die Gln. (30) und (34) miteinander verknüpft werden, läßt sich die Schwingungsdauer  $T$  eines gedämpften Galvanometers durch die des unge- dämpften Systems  $T_0$  und durch das logarithmische Dekrement  $\Delta$  ausdrücken:

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{4\pi^2}}. \quad (43)$$

Danach wächst die Schwingungsdauer eines Galvanometers mit seiner Dämpfung.

Somit stehen Gleichungen zur Verfügung, die auch die in diesem Versuch nicht geforderten Galvanometerkonstanten (Winkelrichtgröße der Drehspule  $D$ , ihr Trägheitsmoment  $J$ , die Galvanometerkonstante  $G$ ) zu ermitteln gestatten.

#### Versuchsausführung

Wir stellen die Schaltung nach Abb. 110 her und sichern, daß  $R_1 \gg R_2$  und  $R_2 \ll R_i$  (Größenordnung von  $R_i$ : 10 bis  $10^3 \Omega$ ) ist. Die Widerstände  $R_1$  (Größenordnung:  $10^3$  bis  $10^4 \Omega$ ) und  $R_2$  (Größenordnung: 0,1 bis  $10 \Omega$ ) werden bei jeder Meßreihe so aufeinander abgestimmt, daß der Ausschlag auf einer mehr als 1 m vom Instrument entfernten ebenen Skale 200 bis 300 mm nicht überschreitet. Dann erübrigts sich die Reduktion des Ausschlages auf den Bogen ( $a' \approx a$ ). Bei offenem Galvanometerkreis ( $R_3 = \infty$ ) kann der Zeiger schnell in die Nullage gebracht werden, indem der Kurzschlußkontakt  $K$  mehrmals betätigt wird.

Bei *Aufgabe 1* beginnen wir mit  $R_3 = 0$  und notieren den Ausschlag ( $a_{01}$ ). Um Unsymmetrien der Anzeige auszuschließen, polen wir mit dem Schalter  $S$  die am Galvanometer liegende Spannung  $U'$  um, lesen den Ausschlag ( $a_{02}$ ) nach der anderen Seite vom Nullpunkt ab und bilden den Mittelwert  $a_0 = (a_{01} + a_{02})/2$ . Auf gleiche Weise werden die Ausschläge  $a_n$  ( $n = 1, \dots, 5$ ) für weitere Widerstände  $R_3$  ermittelt. Der größte Widerstand sollte etwa zu einem Ausschlag  $a_0/4$  führen. Jede Messung wird in Nullpunktbestimmungen eingeschlossen (Nullpunktdrift!). Aus einer graphischen Darstellung  $a_n = f(R_3)$  wird der Widerstand  $R_3$  entnommen, für den  $a = a_0/2$  ist. Er stimmt praktisch mit dem Innenwiderstand überein ( $R_{3(a_0/2)} = R_i$ ).

Mit zwei Wertepaaren  $R_3$  und  $a \approx a'$  der graphischen Darstellung stellen wir außerdem 2 Gleichungen nach Formel (19a, b) auf und berechnen daraus die Stromempfindlichkeit  $E_I$  und den Innenwiderstand  $R_i$  des Galvanometers, nachdem wir die Spannung  $U$  am Voltmeter abgelesen und den Skalenabstand  $A$  sowie die übrigen Widerstände ( $R_1, R_2$ ) ermittelt haben. Die Spannungsempfindlichkeit des Instrumentes folgt aus Gl. (14).

In *Aufgabe 2* erzeugen wir jeweils durch eine am Potentiometer abgegriffene Spannung  $U'$  einen angemessenen Ausschlag  $a_0$  und beobachten für verschiedene Außenwiderstände  $R_a = R_2 + R_3$  das Zurückschwingen der Galvanometerspule in die Nullage, nachdem die Spannung  $U$  im Haupt-

stromkreis abgeschaltet wird. Zunächst verschaffen wir uns einen Überblick über die Bewegungsarten der Spule (Schwing-, Kriech- und aperiodischer Grenzfall), indem  $R_3$  – mit dem Wert 0 beginnend – zunächst in groben Stufen geändert wird. Sodann engen wir den aperiodischen Grenzfall ein, indem wir den Widerstand  $R_a = R_{gr}$  suchen, für den ein bestimmter Ausschlag  $a_0$  in kürzester Zeit zu Null wird (Nullpunktcontrollen!).

Für einen Kriechfall ( $R_a < R_{gr}$ ), den aperiodischen Grenzfall ( $R_a = R_{gr}$ ) und mindestens 5 Schwingfälle ( $R_a > R_{gr}$ ) werden die Ausschlag-Zeit-Kurven gezeichnet. Im Interesse einer guten Vergleichbarkeit der Kurven werden sie normiert, indem für jeden Meßpunkt die Quotienten  $a/a_0$  gebildet und gegenüber der Zeit aufgetragen werden. Im Schwingfall können sicher nur die Umkehrpunkte des Ausschlages und die zugehörigen Zeiten erfaßt werden. Für die Schwingfälle wird das logarithmische Dekrement  $A$  nach Gl. (34) berechnet oder besser aus einer einfach-logarithmischen Darstellung entnommen. Wenn in ihr der Ausschlag über der Zeit aufgetragen wird, ergeben sich Geraden, aus deren Steigung das logarithmische Dekrement folgt.  $A$  wird in Abhängigkeit vom Dämpfungswiderstand  $R_a$  aufgetragen. Aus den Ausschlag-Zeit-Kurven sind weiterhin die Schwingungsdauern  $T$  in Abhängigkeit vom Dämpfungswiderstand  $R_a$  zu ermitteln und mit dem nach Gl. (43) berechneten Wert zu vergleichen.  $T_0$  ist die zu  $R_a = \infty$  (offener Galvanometerkreis) gehörende Zeit.

Im aperiodischen Grenzfall ( $R_a = R_{gr}$ ) wird zusätzlich folgende Messung empfohlen: Man greift verschiedene Spannungen  $U'$  an entsprechenden Widerständen  $R_2$  ab und erzeugt so Galvanometerströme  $I$ , die nach Gl. (18) berechnet werden. (Unsymmetrien der Anzeige durch Umpolen und Mittelwertbildung der Ausschläge nach rechts und links ausschalten, Nullpunktcontrollen!). Trägt man diese gegenüber den gegebenenfalls auf den Bogen reduzierten Ausschlägen  $a$  auf, liefern gute Galvanometer bei hinreichend genau ermitteltem Innenwiderstand Geraden. Die Stromempfindlichkeit ist also über den erfaßten Bereich konstant und folgt aus dem Anstieg  $\Delta a / \Delta I$  der Kurve [Gl. (12a)]:

$$E_I = \frac{\Delta a}{A \Delta I} .$$

## E. 4.2. Ballistisches Galvanometer

- Aufgaben*
1. Die Magnetisierungskurve für den Hufeisenkern eines Elektromagneten ist aufzunehmen.
  2. Ermittle die magnetische Feldstärke zwischen den Polen des Elektromagneten im Sättigungsgebiet.

*Ballistische Galvanometer* oder *Stoßgalvanometer* sind Drehspulinstrumente (siehe Abschn. E. 4.1) mit großem Trägheitsmoment  $J$  der Spule und

kleiner Winkelrichtgröße  $D$  ihrer Befestigung, so daß die Schwingungsdauer [Gln. (23) und (43)] schon im stromlosen Zustand groß ist ( $T_0 > 10$  s).

Fließt während einer gegenüber der Schwingungsdauer  $T_0$  kurzen Zeit  $\Delta t = t_2 - t_1$  ein Strom durch die Galvanometerspule, so hat sie sich erst wenig aus der Ruhelage entfernt, wenn der Strom bereits abgeklungen ist. Sie beginnt eine freie Drehschwingung mit einer Anfangsgeschwindigkeit,

die der Elektrizitätsmenge  $Q$  des Stromstoßes  $Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$  proportional ist.

Dieser bestimmt den maximalen Ausschlag des Galvanometers, den so genannten *ballistischen* oder *Stoßausschlag*, der damit der Ladung  $Q$  proportional ist und diese zu messen gestattet. Folgende Ableitungen führen zu den entsprechenden Beziehungen:

Die Bewegung der Galvanometerspule gehorcht der Differentialgleichung (39), wenn für  $I$  der beim Stromstoß zeitabhängige Momentanwert  $I(t) = dQ/dt$  eingeführt wird. Mit den Gln. (23) und (41) nimmt die Schwingungsgleichung (39) nach Division durch das Trägheitsmoment  $J$  die Form

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\delta^* \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = \frac{G}{J} \frac{dQ}{dt} \quad (44)$$

an. Eine Integration in den Grenzen  $t_1$  und  $t_2$  des Stromstoßes liefert

$$\frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t_1}^{t_2} + 2\delta^* \alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \omega_0^2 \int_{t_1}^{t_2} \alpha dt = \frac{G}{J} \int_{t_1}^{t_2} dQ. \quad (45)$$

Da die Drehspule aus der Ruhelage heraus angestoßen wird [ $(\alpha)_{t_1} = 0$ ;  $(d\alpha/dt)_{t_1} = 0$ ] und  $\alpha$  über das Zeitintervall  $\Delta t$  als verschwindend klein angesehen werden kann, vereinfacht sich Gl. (45) zu

$$\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t_2} = \frac{G}{J} Q. \quad (46)$$

Die am Ende des Stromstoßes erreichte Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\alpha} = (d\alpha/dt)_{t_2}$  der Drehspule ist demnach der Elektrizitätsmenge  $Q$  des Stromstoßes proportional. Beginnen wir die durch den Stromstoß verursachte freie Schwingung vom Zeitpunkt  $t = t_2$  an zu zählen und führen als neue Zeitksale  $t' = t - t_2$  ein, kann die Spulenbewegung gemäß Gl. (24) nunmehr durch die homogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2\alpha}{dt'^2} + 2\delta^* \frac{d\alpha}{dt'} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (47)$$

beschrieben werden. Als vollständige Lösung fanden wir für den Schwingfall die Gl. (31). Ihre Konstanten  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen (zur Zeit  $t' = 0$  sind  $\alpha = 0$  und  $\dot{\alpha} \neq 0$ ) zu  $\bar{A} = 0$  und  $\bar{B} = \dot{\alpha}/\omega$ . Damit erhalten wir aus Gl. (31) für den zeitlichen Verlauf des Ausschlags

$$\alpha = \frac{\dot{\alpha}}{\omega} e^{-\delta^* t'} \cdot \sin \omega t' \quad (48)$$

und daraus durch Nullsetzen der ersten Ableitung die Zeitpunkte extremer Ausschläge:

$$t'_m = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc tan} \frac{\omega}{\delta^*} \quad (49)$$

( $m = 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; \dots$ ). Der maximale Stoßausschlag der Drehspule ( $m = 1$ ) beträgt daher

$$\alpha_1 = \frac{G}{J\omega} e^{\omega \frac{\delta^*}{\omega} \operatorname{arc tan} \frac{\omega}{\delta^*}} \cdot Q. \quad (50)$$

Er folgt aus den Gln. (46), (48) und (49). Zur Drehung  $\alpha_1$  der Spule gehört ein Ausschlag  $\varphi_1 = 2\alpha_1$  des „Lichtzeigers“ (Reflexionsgesetz). Für ihn wird nach der Theorie des ballistischen Galvanometers

---


$$\varphi_1 = \frac{a'}{A} = E_b Q = E_{b0} \lambda^{-1} Q \quad (51)$$


---

gesetzt. Er ist demnach ebenfalls der Ladung  $Q$  proportional, die ihn verursacht.  $E_b$  ist die mit der Dämpfung des Galvanometerkreises sich verändernde *ballistische Empfindlichkeit*;  $E_{b0}$  steht für die ballistische Empfindlichkeit des (elektrodynamisch) ungedämpften Instrumentes, und für  $\lambda$  gilt

$$\lambda = e^{\omega \frac{\delta^*}{\omega} \operatorname{arc tan} \frac{\omega}{\delta^*}} = e^{\frac{A}{2\pi} \operatorname{arc tan} \frac{2\pi}{A}}, \quad (52)$$

wobei  $A = 2\pi\delta^*/\omega$  die jeweilige Dämpfung beschreibt. Entsprechend den Gln. (11 a, b) ist die ballistische Empfindlichkeit folgendermaßen definiert:

---


$$E_b \text{ bzw. } E_{b0} = \frac{a'/A}{Q} = \frac{a/A}{Q} \quad (53)$$


---

( $a'$  Ausschlag auf einer Kreisskale,  $a$  Ausschlag auf einer ebenen Skale,  $A$  Skalenabstand). Sie wird vereinbarungsgemäß in der Einheit

$$[E_b] = [E_{b0}] = 1 \frac{\text{mm/m}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 1 \frac{\text{mm/m}}{\text{C}}$$

angegeben. Die Näherung  $a' = a$  in Gl. (53) setzt kleine Ausschläge vor-  
aus. Andernfalls muß  $a$  nach den Gln. (10) auf den Bogen reduziert  
werden.

Der gerätetypische Wert  $E_{bo}$  ist meist auf dem Typenschild des Instruments angegeben. Andernfalls kann er bestimmt werden, indem Kondensatoren der Kapazität  $C$  durch eine Spannung  $U$  geladen und über das Galvanometer entladen werden. Dabei bewirkt die jeweilige Ladung  $Q = CU$  Ausschläge  $a'$  bzw.  $a$ . Aus der Steigung einer Kurve  $a = a' = f(Q)$  folgt  $E_{bo}$  gemäß Gl. (53).

Das logarithmische Dekrement  $\lambda$  wird nach Gl. (34) für die jeweiligen Versuchsbedingungen aus dem logarithmierten Verhältnis  $a_m/a_{m+1}$  bzw.  $a'_m/a'_{m+1}$  zweier aufeinanderfolgender Ausschläge auf der gleichen Seite vom Nullpunkt bestimmt:

$$\lambda = \ln \frac{a_m}{a_{m+1}} = \ln \frac{a'_m}{a'_{m+1}} . \quad (54)$$

Zur Vereinfachung der Auswertung kann  $\lambda$  aus einer graphischen Darstellung (Abb. 112) entnommen werden, in der die Gl. (52) in der Form  $\lambda = f(a_m/a_{m+1})$  wiedergegeben ist.

Die magnetische Feldstärke zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten ergibt sich aus dem Stromstoß, den eine aus dem Magnetfeld schnell

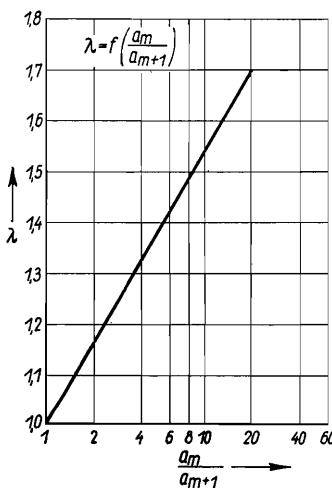


Abb. 112.  
Bestimmung von  $\lambda$  aus aufeinander-  
folgenden Ausschlägen eines  
ballistischen Galvanometers

heraus bewegte, flache Induktionsspule erzeugt. Wenn ihre Windungs-  
fläche  $A^*$  mit der magnetischen Induktion  $B$  einen rechten Winkel bildet,  
herrscht in der Spule ein magnetischer Fluß  $\Phi$ , den Gl. (2) beschreibt. Bei  
 $N$  Windungen der Spule und  $\mu_r = 1$  (Luft) in Gl. (1 b) führt ihre Bewegung

im Feld zu einer induzierten Spannung (Induktionsgesetz)

$$U = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NA^* \frac{dB}{dt} = -\mu_0 NA^* \frac{dH}{dt}, \quad (55)$$

die bei einem Gesamtwiderstand im Galvanometerkreis (Abb. 113) von

$$R' = R_{Sp} + R_i + R_1$$

( $R_{Sp}$  Widerstand der Induktionsspule;  $R_i$  Innenwiderstand des Instruments;  $R_1$  Ballastwiderstand) zu der momentanen Stromstärke

$$I = \frac{U}{R'} = -\mu_0 N \frac{A^*}{R'} \frac{dH}{dt} \quad (56)$$

führt. Durch das Instrument fließt während der Zeit  $t$  eine Elektrizitätsmenge

$$Q = \int_0^t I dt = -\mu_0 N \frac{A^*}{R'} \int_0^t \frac{dH}{dt} dt = -\mu_0 N \frac{A^*}{R'} \int_H^0 dH = \mu_0 N \frac{A^*}{R'} H, \quad (57)$$

aus der man mit Hilfe der Gl. (51) über den ballistischen Ausschlag  $\varphi_1$  die magnetische Feldstärke bestimmen kann:

---


$$H = \varphi_1 \lambda \frac{R'}{\mu_0 N A^* E_{b0}}. \quad (58)$$


---

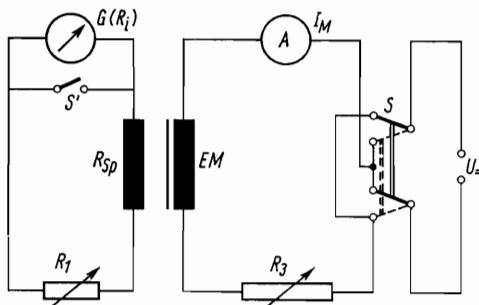


Abb. 113. Schaltung des ballistischen Galvanometers und des Elektromagneten

#### Versuchsausführung

Zunächst entmagnetisieren wir den Eisenkern in einem Wechselfeld abnehmender Amplitude. Wir speisen die Spulen des Magneten **EM** aus einem

Stelltransformator oder einer Potentiometerschaltung und senken die Wechselspannung langsam bis zum Werte Null (ausführliche Beschreibung der Entmagnetisierung siehe *Versuchsausführung* zu Abschn. 4.3).

Für die Aufnahme der Magnetisierungskurve (*Aufgabe 1*) werden der Galvanometerkreis und der Magnet nach Abb. 113 geschaltet. Der Magnet wird schrittweise bis zur Sättigung mit wachsender Stromstärke  $I_M$  (Regelung über Widerstand  $R_3$ ) erregt und anschließend der gesamte, in Abb. 106 skizzierte Zyklus durchlaufen. Die Umkehr des Feldes erfolgt über den Polwenderschalter  $S$ . Da einerseits  $a_m \sim H$  [vgl. Gl. (58)], andererseits in der Magnetspule  $H \sim I_M$  [vgl. Gl. (6b)] ist, kann der Einfachheit halber durch eine Darstellung des Galvanometerausschlages über der Stromstärke im Magneten ein der Magnetisierungskurve analoges Bild erhalten werden.

Für *Aufgabe 2* setzen wir einen entsprechenden, auf 1 m Skalenabstand reduzierten Ausschlag  $a_m$  in Gl. (58) ein. Die ballistische Empfindlichkeit  $E_{b0}$  und der Innenwiderstand  $R_i$  des Instrumentes sind aus seinem Typenschild, die Spulendaten ( $N$ , mittlere Windungsfläche  $A^*$  in  $\text{m}^2$ ,  $R_{Sp}$ ) aus der Beschriftung der Versuchsanordnung zu ersehen. Den Widerstand  $R_1$  stellen wir so ein, daß das Galvanometer im Schwingfall arbeitet, das Amplitudenverhältnis  $a_m/a_{m+1}$  gut ermittelt und  $\lambda$  aus der graphischen Darstellung bestimmt werden kann. Die Feldstärke im Luftspalt wird für den Sättigungsbereich der Hysterese nach Gl. (58) berechnet.

### E. 4.3. Kriechgalvanometer – Fluxmeter

*Aufgaben:* Für einen geschlossenen ferromagnetischen Kreis (Transformatorkern) sind

1. der magnetische Fluß und die Flußdichte in Abhängigkeit von der magnetisierenden Feldstärke sowie
2. der Verlauf der Permeabilität über die Neukurve, die Remanenz und die Koerzitivfeldstärke zu ermitteln.

*Magnetische Flußmesser* (Fluxmeter) sind so stark gedämpfte Drehspulinstrumente (vgl. Abschn. 4.1), daß der Kriechfall eintritt. Das Drehspulsystem dieser *Kriechgalvanometer* besitzt ein geringes Trägheitsmoment  $J$  und ein verschwindend kleines rücktreibendes Moment ( $D\alpha = 0$ ). Die mechanische Dämpfung kann gegenüber der elektromagnetischen vernachlässigt werden, so daß für den Dämpfungsfaktor in Gl. (39)  $r^* = G^2/(R_i + R_a) = G^2/R'$  gilt ( $G$  Galvanometerkonstante;  $R_i$  Innenwiderstand des Instrumentes;  $R_a$  Außenwiderstand; Gesamtwiderstand des Galvanometerkreises  $R' = R_i + R_a$ ). Daher vereinfacht sich die *Bewegungsgleichung der Drehspule* [Gl. (39)] zu

$$r^* \frac{d\alpha}{dt} = GI \quad (59)$$

( $I$  momentane Stromstärke;  $\alpha$  Drehwinkel der Spule;  $d\alpha/dt$  Winkelgeschwindigkeit). Nach Umformung und Integration folgt daraus

---


$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{R'}{G} \int_{t_1}^{t_2} I dt = \frac{1}{G} \int_{t_1}^{t_2} U dt . \quad (60)$$


---

Aus der Drehung  $\Delta\alpha$  der Galvanometerspule lassen sich demnach Strom ( $\int I dt$ ) und Spannungsstöße ( $\int U dt$ ) ermitteln. Letztere werden bei einem Fluxmeter durch Spannungen gebildet, die in einer Spule ( $N'$  Windungen) induziert werden, wenn sich in ihr der magnetische Fluß  $\Phi$  ändert [ $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (B_2 - B_1) A^* = \Delta B A^*$ ;  $A^*$  ist die vom magnetischen Fluß erfaßte Fläche,  $B$  die Flußdichte]. Für den induzierten Spannungsstoß gilt nach Gl. (55)

$$\int_{t_1}^{t_2} U dt = N' \Delta\Phi = N' A^* \Delta B . \quad (61)$$

Der magnetische Fluß  $\Phi$  und die Flußdichte  $B$  durchsetzen die Spulenfläche in diesem Falle senkrecht. Das Minuszeichen der Gl. (55) ist für Flußmessungen praktisch ohne Bedeutung und deshalb in Gl. (61) nicht berücksichtigt worden. Wird in Gl. (60) die Empfindlichkeit  $E_\Phi$  des Flußmessers eingeführt, das Zeitintegral der Spannung (Spannungsstoß) durch die rechte Seite von Gl. (61) ersetzt und beachtet, daß bei Lichtzeigerinstrumenten für die Ausschlagänderung  $\Delta a' = a'_2 - a'_1$  auf einer zylindrischen Skale  $\Delta a' = 2r \Delta\alpha$  ( $r$ , „Zeigerlänge“) gilt [vgl. Abschn. 4.1], folgt

---


$$\Delta a' = E_\Phi \int_{t_1}^{t_2} U dt = E_\Phi N' \Delta\Phi = E_\Phi N' A^* \Delta B . \quad (62)$$


---

Die *Empfindlichkeit*  $E_\Phi$  kommerzieller Fluxmeter wird in der Maßeinheit Skt.  $V^{-1}s^{-1}$  angegeben. Auf dem Typenschild ist oft der reziproke Wert  $C_\Phi = 1/E_\Phi$  in Vs pro Skt. als Gerätekonstante eingetragen.

Die *Versuchsanordnung* ist in Abb. 114 schematisch dargestellt. Als geschlossener magnetischer Kreis dient ein Transformatorkern. Er ist mit einer Erregerspule ( $N$  Windungen) versehen, die aus einer Gleichspannungsquelle  $U$  gespeist wird. Der Erregerstrom  $I$  wird mit dem Widerstand  $R$  stufenweise verändert. Er erzeugt nach dem Durchflutungsgesetz eine *magnetisierende Feldstärke* [vgl. Gl. (6 b)]

$$H = NI/l \quad (63)$$

( $l$  mittlerer Umfang des magnetischen Kreises) und diese einen magnetischen Fluß  $\Phi$  im Kern. Jede Flußänderung  $\Delta\Phi$  bewirkt in der Induktionsspule

( $N'$  Windungen) des Meßkreises einen Spannungsstoß, der bei geschlossenem Schalter  $S'$  gemäß Gl. (62) die Zeigerstellung des Fluxmeters  $G$  um  $\Delta a'$  ändert.

### Versuchsausführung

Zunächst werden mit dem Meßschieber die Abmessungen des Kernes ermittelt und sein Querschnitt  $A^*$  sowie der mittlere Umfang  $l$  des magnetischen Kreises berechnet. Ein zerlegbarer Kern muß sorgfältig und ohne nennenswerte Luftpalte zusammengesetzt werden. Die Anordnung schalten wir nach Abb. 114.

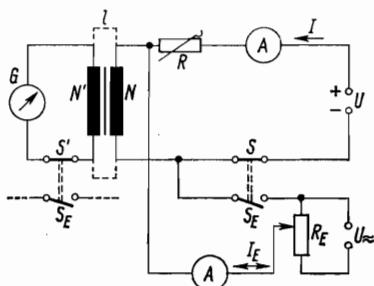


Abb. 114.  
Magnetische Flußmessung  
und Entmagnetisierung

Vor den elektrischen Messungen entmagnetisieren wir den Transformatorkern, indem wir die Erregerspule mit der Wechselspannungsquelle  $U_{\infty}$  verbinden (der Schalter  $S_E$  ist geschlossen, die mit ihm gekoppelten Schalter  $S$  und  $S'$  sind dann automatisch geöffnet). Die am Potentiometer  $R_E$  abgegriffene Spannung muß anfangs so hoch gewählt werden, daß die Wechselstromstärke  $I_E = I_{E\max}$  zu Amplituden des magnetisierenden Wechselfeldes führt, mit denen periodisch Sättigungsmagnetisierungen des Kernes erreicht werden ( $I_{E\max}$  ist der Arbeitsplatzanleitung zu entnehmen). Die Stromstärke  $I_E$  wird anschließend über die am Potentiometer abgenommene Spannung allmählich bis zum Werte  $I_E = 0$  verringert. Dabei werden immer kleinere Hysteresekurven durchlaufen, bis sie bei  $I_E = 0$  zu einem Punkt entarten und der Kern vollständig entmagnetisiert vorliegt.

Für die Fluß- und Flußdichtebestimmungen schalten wir die gekoppelten Schalter um ( $S_E$  geöffnet,  $S$  und  $S'$  geschlossen), nachdem mit dem Stufenschalter bei  $R$  der Erregerkreis geöffnet wurde ( $R = \infty$ ,  $I = 0$ ;  $\Phi, B = 0$ ). Das Meßwerk des Flußmessers wird entarretiert, der Nullpunkt gegebenenfalls über eine Rändelschraube mechanisch korrigiert. Bei den Messungen verringern wir den Widerstand  $R$  mit dem Stufenschalter schrittweise und protokollieren für jeden der  $m$  Schaltschritte ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) die entsprechenden Stromstärken  $I = I_m$  sowie die zugehörigen Ausschlagsänderungen  $\Delta a'_m$ . Nur bei sehr stark gedämpften Instrumenten ruht praktisch der Zeiger zwischen den Schaltschritten. Andernfalls sind die  $\Delta a'_m$  aus den

Zeigerstellungen unmittelbar vor und nach der Flußänderung zu bilden. Mit den Meßwerten von  $l$ ,  $A^*$  und  $\Delta a'_m$  werden aus den Gln. (62) und (63) die Fluß- und Flußdichteänderungen sowie die magnetisierende Feldstärke berechnet. Die Werte für  $N$  und  $N'$  sowie  $C_\Phi$  bzw.  $E_\Phi$  sind in der am Arbeitsplatz ausliegenden Anleitung angegeben. Mit den Werten für  $\Phi$  bzw.  $B$  und  $H$  wird die Neukurve der Magnetisierung (Abb. 106) gezeichnet. Dabei ist zu beachten, daß sich der Fluß  $\Phi_m$  bzw. die Flußdichte  $B_m$  durch Aufsummieren der  $m$  Fluß- bzw. Flußdichteänderungen ergeben. Der Zweig  $P_1 - P_2$  der Hysteresekurve (Abb. 106) wird erhalten, indem der Widerstand  $R$  wieder bis zu  $R = \infty$  schrittweise erhöht wird. Den Kurvenzug  $P_2 - P_3$  und die Verlängerung gegen  $P_4$  bekommen wir nach Umpolen der Gleichstromquelle und schrittweise Erhöhung des Erregerstromes  $I = I_m$ . Für diesen Kurventeil ist die magnetisierende Feldstärke negativ zu nehmen. Aus der Neukurve wird mittels Gl. (1b) die graphische Darstellung  $\mu_r = f(H)$  abgeleitet. Die remanente Flußdichte (Remanenz)  $B_R$  und die Koerzitivfeldstärke  $H_C$  werden der Hysterese entnommen.

*Achtung:* Falls sich der Zeiger des Flußmessers im Verlaufe einer Meßreihe dem Endausschlag nähert, ist vor dem nächsten Schaltschritt der Nullpunkt entsprechend zu verlegen. Sollen die Messungen abgebrochen oder unterbrochen werden, muß der Flußmesser erst arretiert und von der Meßspule getrennt werden, bevor wir die Gleichspannung abschalten. Andernfalls kann das Gerät beschädigt werden.

## E. 4.4. Elektronenstrahlferroskop

*Aufgabe:* Die Magnetisierungskurven verschiedener ferromagnetischer Werkstoffe sind mit einem Elektronenstrahlloszilloskop aufzunehmen und die Koerzitivfeldstärken sowie die Remanenzinduktionen zu ermitteln.

Mit einem *Elektronen-* oder *Kathodenstrahlloszilloskop* (*Kathodenstrahloszillograph*) wird der Verlauf einer elektrischen Spannung in Abhängigkeit von der Zeit oder im Vergleich zu einer anderen Spannung dargestellt. Es können daher auch Frequenzen gemessen und die Phasenlagen von Spannungen in bezug auf eine Vergleichsspannung bestimmt sowie alle Meßaufgaben gelöst werden, die auf die genannten Möglichkeiten zurückführbar sind. So werden beispielsweise Kennlinien aktiver und passiver elektrischer Bauelemente und die magnetische Hysterese ferromagnetischer Stoffe aufgezeichnet. Als Nullindikatoren ermöglichen Elektronenstrahlloszilloskope den phasenrichtigen Abgleich von Wechselstrommeßbrücken.

Der Meßvorgang wird auf dem Leuchtschirm einer *Elektronenstrahlröhre* (Abb. 115) aufgezeichnet. Diese arbeitet im Prinzip wie folgt: Eine indirekt geheizte Kathode  $K$  emittiert Elektronen, die durch eine zylindrische Anode

$A$  (Anodenspannung etwa 1000 bis 3000 V) beschleunigt werden. Der durch eine Lochblende begrenzte Teil des Elektronenstrahles erregt einen Leuchtschirm  $L$  im Spurpunkt. Die Kathode ist von einer Zylinderelektrode, dem Wehnelt-Zylinder  $W$  umgeben. Er liegt im Vergleich zur Kathode auf negativem Potential und entspricht in seiner Wirkung dem Steuergitter einer

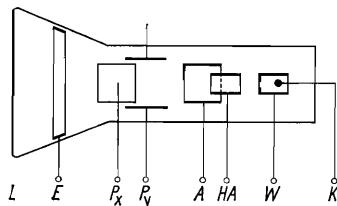


Abb. 115.  
Bildröhre (schematisch) eines  
Elektronenstrahloszillographen (ESO)

Triode (vgl. Abschn. E. 3.0.1). Die Steuerspannung kann bis zu etwa  $-100$  V variiert werden, so daß der Elektronenstrom mehr oder weniger gesperrt und das Leuchtschirmbild in seiner Helligkeit eingestellt wird. Eine weitere Zylinderelektrode (Hilfsanode  $HA$ ) wirkt gemeinsam mit der Anode  $A$  als elektronenoptische Sammellinse, die es ermöglicht, auf dem Leuchtschirm ein verkleinertes Bild der emittierenden Kathodenfläche zu erzeugen.  $P_x$  und  $P_y$  sind zwei Ablenkplattenpaare ( $x$ - und  $y$ -Platten), an die Meß- und Vergleichsspannungen ( $U_{x,y}$ ) gelegt werden. Die entsprechenden elektrischen Felder bewirken eine spannungsproportionale horizontale und vertikale Auslenkung  $s_{x,y}$  des Elektronenstrahles auf dem Leuchtschirm:

$$s_x = c_x U_x , \quad (64a)$$

$$s_y = c_y U_y , \quad (64b)$$

$c_x = s_x/U_x$  und  $c_y = s_y/U_y$  sind die *Ablenkempfindlichkeiten* der Elektronenstrahlröhre. Sie liegen in der Größenordnung 1 bis  $10$  mm/V. Ihr reziproker Wert wird Ablenkkoeffizient genannt. Eine Erhöhung der Anodenspannung, die im Hinblick auf die Bündelung des Elektronenstrahles und die Helligkeit des Schirmbildes durchaus erwünscht wäre, vermindert die Ablenkempfindlichkeit. Diese wird dagegen durch eine Nachbeschleunigung der bereits abgelenkten Elektronen nicht so stark beeinflußt. Die entsprechende Beschleunigungsspannung liegt an einer auf der Innenwand des Kolbens angebrachten Ring- oder Spiralelektrode  $E$ .

Um den zeitlichen Verlauf einer Spannung auf dem Leuchtschirm zweidimensional abzubilden, wird sie an die  $y$ -Platten gelegt und der Elektronenstrahl in  $x$ -Richtung zeitproportional ausgelenkt. Dafür sorgt eine *Zeitablenkeinheit* (Abb. 116). Sie liefert eine Wechselspannung von sägezahnförmigem Verlauf. Ihre Frequenz wird in Stufen grob und innerhalb der Stufen kontinuierlich geregelt. Während des linearen Spannungsanstieges auf der vorderen Flanke des Sägezahnes wird der Elektronenstrahl horizont-

tal über den Bildschirm geführt. Er springt während des Abfalles der Spannung auf Null (steile Sägezahnflanke) in die Ausgangslage zurück. Um eine störende Rücklaufspur zu vermeiden, wird der Elektronenstrahl für die Dauer des Rücklaufes „dunkelgetastet“. Auf dem Oszilloskopenschirm erscheint genau eine Periode des Meßvorganges als stehendes Bild, wenn die Frequenzen von Meßspannung und Zeitablenkspannung übereinstimmen.

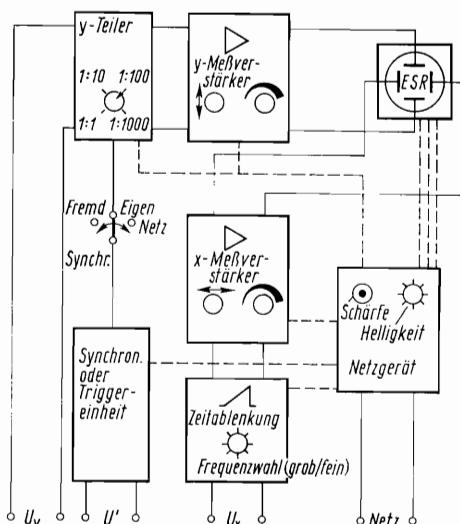


Abb. 116.

Vereinfachtes Blockschaltbild eines Elektronenstrahlloszillographen

$U_y$ : y-Ablenkspannung;  $U_x$ : x-Ablenkspannung;

$U'$ : äußere Steuerspannung; ESR: Elektronenstrahlröhre

Beträgt die Frequenz der Zeitablenkung einen Bruchteil der Meßfrequenz, können entsprechend mehr Perioden des Meßvorganges beobachtet werden.

Da sich von außen nur sehr schwer stabile Frequenzverhältnisse einstellen lassen, werden die y- und die Zeit-Ablenkeinheit durch einen elektronischen Gleichlaufzwang (Einrichtung zum Synchronisieren) gekoppelt. Die meisten Oszilloscopen ermöglichen einen Gleichlaufzwang auch mit der Netzfrequenz von 50 Hz oder mit einem externen Frequenzgenerator. Die verschiedenen Möglichkeiten (Fremd-, 50-Hz-Eigensynchronisation) werden durch einen Umschalter gewählt.

Der Gleichlauf von Meß- und Zeitablenkspannung wird neuerdings durch ein *Auslöseverfahren* erreicht: Ein „Trigger“ (Abb. 116) löst den Sägezahn immer dann aus, wenn die Meßspannung einen am Oszilloskop einstellbaren Schwellenwert (Triggerschwelle oder -pegel) durchläuft. Dieses Verfahren erlaubt sogar die Abbildung eines über die gesamte Schirmbreite ge-

spreizten Abschnittes einer Periode. Das Triggern kann wahlweise mit der Geräteinternen, aber auch mit einer externen Triggereinheit erfolgen.

Bei vielen Oszilloskophtypen sind die Ablenkplatten über entsprechende Buchsen direkt zugänglich. Je nach Ablenkempfindlichkeit und Größe des Leuchtschirmes der Röhre werden für die Aussteuerung des Elektronenstrahles Ablenkspannungen zwischen 5 und 20 V Gleich- oder Wechselspannung benötigt. Bei Wechselspannung ist zu beachten, daß der Ausschlag gleich dem Scheitelwert  $U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}}$  ( $U_{\text{eff}}$  Effektivwert der Spannung) ist. Sind die Ablenkspannungen zu klein, werden sie, wie im Blockschaltbild der Abb. 116 dargestellt, zunächst verstärkt ( $x$ - und  $y$ -Meßverstärker). An die Meßverstärker werden hohe Anforderungen gestellt: Sie sollen eine definierte einstellbare und über einen breiten Frequenzbereich gleichmäßige, verzerrungsfreie Verstärkung bewirken. Für einen Frequenzbereich bis etwa 100 kHz kann dies relativ leicht erreicht werden. Die Verstärkungen sind so bemessen, daß Eingangsspannungen von einigen mV die Oszilloscopen bereits aussteuern. Der Meßbereich wird zu hohen Spannungen hin erweitert, indem die Verstärker mit definiert wählbaren Spannungsteilern (in Abb. 116 als  $x$ - und  $y$ -Teiler bezeichnet) versehen sind.

Der Eingangswiderstand der Oszilloscopen liegt bei 1 bis 10 MΩ. Oszilloscopen erlauben daher Spannungsmessungen an hochohmigen Spannungsquellen und bei extrem niedriger Belastung der Meßstelle. Bei Wechselspannungsmessungen muß die Frequenzabhängigkeit der Impedanz beachtet werden.

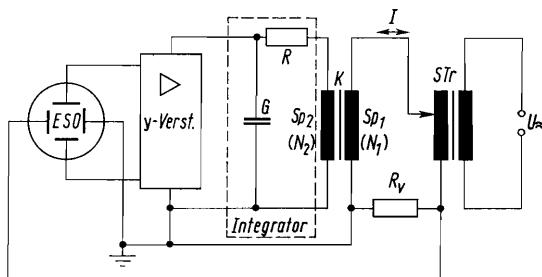


Abb. 117. Elektronenstrahlferroskop

Die Versuchsanordnung der Abb. 117 stellt ein sogenanntes *Elektronenstrahlferroskop* dar. Mit ihm kann die magnetische Hysteresekurve als stehendes Bild dargestellt werden, wie folgende Überlegungen zeigen:

Im magnetischen Wechselfeld einer langen Spule  $Sp_1$  (Abb. 117) wird eine ferromagnetische Probe  $K$  (geschlossener Kern) periodisch ummagnetisiert. Dies wird durch einen Wechselstrom  $I$  erreicht, den ein Stelltransformator  $STr$  liefert und der über den Widerstand  $R_V$  durch die Spule fließt. Wenn der Widerstand  $R_V$  gegenüber dem der Spule groß gewählt wird, bestimmt

er die momentane Stromstärke  $I$  des Erregerkreises. Er erzeugt in der Spule  $Sp_1$  (Länge  $l$ , Windungszahl  $N_1$ ) eine momentane Magnetfeldstärke [vgl. Gl. (6b)]

$$H = \frac{N_1 I}{l} = \frac{N_1 U}{l R_v}. \quad (65)$$

Demnach ist der Spannungsabfall  $U = IR_v$  am Widerstand  $R_v$  der magnetisierenden Feldstärke proportional. Er wird als Meßspannung benutzt und an die horizontalen Ablenkplatten eines Oszilloskops gelegt. Ist dessen horizontale Ablenkempfindlichkeit  $c_x$ , entspricht einer Ablenkung  $s_x$  des Elektronenstrahles die Spannung  $U = s_x/c_x$ , und Gl. (65) nimmt die Form

$$H = \frac{N_1 s_x}{l R_v c_x} \quad (66)$$

an.

Der jeweilige magnetische Kraftfluß  $\Phi = BA^*$  ( $A^*$  Querschnittsfläche des Kernes) durchsetzt die zweite Spule  $Sp_2$  (Windungszahl  $N_2$ ). In ihr wird nach dem Induktionsgesetz eine Spannung

$$U_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -N_2 A^* \frac{dB}{dt} \quad (67)$$

erzeugt, die demnach der zeitlichen Änderung  $dB/dt$  der Flußdichte proportional ist. Um die Flußdichte  $B$  als zweite Meßgröße zu erhalten, muß daher über die Spannung  $U_2$  integriert werden. Dies besorgt ein  $RC$ -Glied (Integrator), bei dem  $R \gg 1/\omega C$  ( $\omega$  Kreisfrequenz des Wechselstromes,  $C$  Kapazität des Kondensators,  $1/\omega C$  kapazitiver Widerstand)<sup>1)</sup> ist. Die momentane Stromstärke  $I_2 = U_2/R$  ist daher sehr gering und Gl. (67) hinreichend gut erfüllt. Am Kondensator entsteht der Spannungsabfall

$$U_C = \frac{1}{C} \int I_2 dt = 1 \frac{1}{RC} \int U_2 dt \quad (68)$$

oder, wenn Gl. (67) berücksichtigt wird,

$$U_C = \frac{1}{RC} \int N_2 A^* \frac{dB}{dt} dt = \frac{1}{RC} \cdot N_2 A^* B. \quad (69)$$

Demnach ist die magnetische Induktion  $B$  der Spannung  $U_C$  am Kondensator proportional. Diese wird zur vertikalen Auslenkung des Elektronen-

<sup>1)</sup> Erprobte Werte für den Integrator sind beispielsweise  $R = 50 \text{ k}\Omega$  und  $C = 1 \mu\text{F}$ .

strahles verwendet, nachdem sie verstärkt ( $y$ -Verstärker) wurde.<sup>1)</sup> Sind  $c_y$  die vertikale Ablenkempfindlichkeit und  $V_y$  der Verstärkungsfaktor, beträgt die Spannung für eine Auslenkung  $s_y$  andererseits  $U_C = s_y/(c_y \cdot V_y)$ . Die magnetische Induktion folgt daher aus Gl. (69) zu

$$B = \frac{RCs_y}{N_2 A * c_y V_y}. \quad (70)$$

### *Versuchsausführung*

Die einzelnen Baugruppen werden nach Abb. 117 geschaltet, nachdem die Sekundärspannung des Stelltransformators  $STr$  auf ihren kleinsten Wert eingestellt und der Elektronenstrahlzoszillograph eingeschaltet wurde. Mit den entsprechenden Regelknöpfen der Frontplatte des Oszilloskopos sind Helligkeit und Schärfe des Schirmbildes günstig einzustellen (Vorsicht! Elektronenstrahl brennt bei übermäßiger Fokussierung und Helligkeit auf dem Leuchtschirm ein). Die Spulen  $Sp_1$  und  $Sp_2$  stecken wir auf einen U-förmigen Kern  $K$  des ferromagnetischen Materials und schließen den magnetischen Kreis mit einem entsprechenden Probekörper (Luftspalte möglichst klein halten!). Dann erhöhen wir die Sekundärspannung des Stelltransformators, bis der Elektronenstrahl durch den Spannungsabfall am Widerstand  $R_v$  ausgesteuert wird. Falls dies nicht möglich sein sollte, ist über den  $x$ -Verstärker des Oszilloskopos zu gehen. Die  $y$ -Verstärkung wird so gewählt, daß die Hysteresekurve den Leuchtschirm ausfüllt. Die Lage der Koordinatenachsen erhalten wir dadurch, daß der Elektronenstrahl nacheinander allein horizontal und vertikal ausgelenkt wird ( $U$  bzw.  $U_C = 0$ ). Der Koordinatenursprung soll möglichst mit dem Mittelpunkt des auf dem Leuchtschirm befindlichen Rasters übereinstimmen. Er kann mit entsprechenden Regelknöpfen (Höhe, Seite) verlegt werden.

Dem Leuchtschirmbild werden die horizontalen und vertikalen Auslenkungen entnommen. Die zur Errechnung der Koerzitivfeldstärke  $H_C$  und Remanenzinduktion  $B_R$  nach den Gln. (66) und (70) notwendigen Ablenkempfindlichkeiten  $c_x$  und  $c_y$  sowie der Verstärkungsfaktor  $V_y$  werden mit Hilfe der Gl. (64a u. b) über bekannte Spannungen  $U_{x,y}$  ermittelt.

## E. 4.5. Hall-Effekt

*Aufgaben:* 1. Ein Magnetometer (Hall-Sonde) ist zu kalibrieren, indem die Hall-Spannung für zwei Sondenstromstärken in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke einer stromdurchflossenen Spule aufgenommen wird.

<sup>1)</sup> Die Verstärker des Oszilloskopos müssen phasenrein arbeiten, andernfalls sind die Hystereseschleifen im Sättigungsgebiet verschlungen.

2. Für einen Halbleiterwerkstoff sind der Leitungstyp, die Ladungsträgerdichte und die Beweglichkeit der Ladungsträger zu ermitteln.

Eine quaderförmige Halbleiterprobe werde parallel zu ihren Längsseiten (Abb. 118) von einem Gleichstrom  $I$  durchflossen. Sie befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Flußdichte  $B$ , das die Probe senkrecht zur Oberfläche und zur Stromrichtung durchsetzt. Dies hat eine Lorentz-Kraft

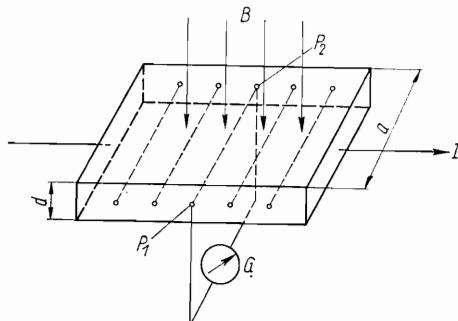


Abb. 118. Zum Hall-Effekt

[Gl. (7)] auf die den Strom bildenden Ladungsträger zur Folge, die je nach Vorzeichen aus ihrer ursprünglichen Strombahn heraus und zu einer der Längsseiten der Probe hin verdrängt werden. Die Ladungen eines Vorzeichens sind also über den Querschnitt der Probe ungleichmäßig verteilt und bilden ein elektrisches Querfeld (Feldstärke  $E_H$ ), dessen elektrostatische Kraft der Lorentz-Kraft entgegenwirkt. Im stationären Fall sind die Beiträge von elektrostatischer Feldkraft  $F_e = QE_H$  und Lorentz-Kraft  $F_L = QvB$  ( $Q$  strömende Ladung,  $v$  Geschwindigkeit der Ladungsträger in Stromrichtung) gleich, so daß sich zwischen symmetrischen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  der Probe eine konstante Spannung  $U_H$  einstellt. Für sie folgt aus

$$QE_H = QvB$$

unter der Voraussetzung eines homogenen Querfeldes wegen  $E_H = U_H/a$  ( $a$  Breite der Probe)

$$U_H = vBa. \quad (71)$$

Diese Erscheinung ist der *Hall-Effekt*, die Spannung  $U_H$  wird daher *Hall-Spannung* genannt.

Für die Stromstärke  $I$  bzw. die Stromdichte  $j = I/a \cdot d$  ( $d$  Probendicke) ergeben sich die Beziehungen

$$j = \sigma \cdot E = \mu n e E = nev. \quad (72)$$

Darin sind  $\sigma = 1/\rho$  die elektrische Leitfähigkeit (Einheit:  $1/\Omega \cdot \text{m}$ );  $\rho$  der spezifische Widerstand,  $E$  die in Stromrichtung wirkende elektrische Feldstärke,  $n$  die Ladungsträgerkonzentration (Einheit:  $\text{cm}^{-3}$ ),  $e$  die Elementarladung und

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{\sigma}{ne} \quad (73)$$

die *Beweglichkeit gleichartiger Ladungsträger* entlang der Stromrichtung. Die Beweglichkeit wird meist in der Einheit  $\text{cm}^2/\text{Vs}$  angegeben.

Wird in Gl. (71) die Geschwindigkeit durch den aus Gl. (72) ableitbaren Ausdruck ersetzt und  $j = I/a \cdot d$  beachtet, folgt

$$U_H = \frac{1}{ne} ajB = \frac{1}{ne} \frac{IB}{d} = \frac{\mu}{\sigma} \frac{IB}{d}. \quad (74)$$

Die Größe

$$R_H = \frac{1}{ne} = \frac{\mu}{\sigma} \quad (75)$$

nennt man *Hall-Konstante*. Damit kann für die *Hall-Spannung*

$$U_H = R_H ajB = R_H \frac{IB}{d} \quad (76)$$

geschrieben werden.

Bei der Herleitung der Hall-Spannung wurde vorausgesetzt, daß der Strom von Ladungen eines einzigen Vorzeichens gebildet wird, wie es beispielsweise bei der metallischen Leitung der Fall ist. Geht man dagegen von einer bei Halbleitern möglichen ambipolaren Leitung [Elektronen-(n-)und-Löcher-(p)-Leitung] aus, erhält man für die *Hall-Konstante* den Ausdruck

$$R_H = \frac{1}{e} \left( \frac{\sigma_p^2}{n_p \sigma^2} - \frac{\sigma_n^2}{n_n \sigma^2} \right). \quad (77)$$

Dabei ist berücksichtigt, daß sich die Leitfähigkeit  $\sigma$  einer Probe aus der elektronischen ( $\sigma_n$ ) und Löcher- ( $\sigma_p$ ) Leitfähigkeit zusammensetzt ( $\sigma = \sigma_p + \sigma_n$ );  $n_p, n_n$  sind die Löcher- und Elektronenkonzentration.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Auch die Ableitung der Gl. (77) geht von vereinfachten klassischen Vorstellungen aus. Sie vernachlässigt die thermische Bewegung der Ladungsträger, ihre Streuung am Gitter und an Störstellen, den Einfluß der Bandstruktur des Halbleiters und des Magnetfeldes. Deshalb wird die Hall-Konstante im allgemeinen durch einen *Hall-Faktor* korrigiert, der in praktischen Fällen bei Unkenntnis meist Eins gesetzt wird.

Nach Gl. (77) können sich Löcher- und Elektronenleitung kompensieren. Im Falle einer Überschußleitung vereinfacht sich Gl. (77) zur Form der Gl. (75); denn mit  $n_p \gg n_n$  wird  $\sigma_p \approx \sigma$  und

$$R_H = \frac{1}{n_p e} = \frac{\mu_p}{\sigma} \quad (\text{Löcherleitung}). \quad (78a)$$

Für  $n_n \gg n_p$  gilt  $\sigma_n \approx \sigma$  und

$$R_H = -\frac{1}{n_n e} = -\frac{\mu_n}{\sigma} \quad (\text{Elektronenleitung}). \quad (78b)$$

In Gln. (78a) und (78b) stellen  $\mu_{p,n}$  die Löcher- und Elektronenbeweglichkeit dar. Die bei n- und p-Leitung unterschiedlichen Vorzeichen der Hall-Konstanten bestimmen das Vorzeichen der Hall-Spannung [Gl. (76)].

Aus der Größe und dem Vorzeichen der Hall-Konstanten [Gln. (78a) und (78b)] lassen sich die Ladungsträgerkonzentration, der Leitungstyp sowie die Beweglichkeit der Ladungsträger ermitteln.

Über die Hall-Spannung [Gl. (76)] kann aber auch die magnetische Induktion bzw. magnetische Feldstärke bestimmt werden. Nach diesem Prinzip arbeitende Magnetometer (*Hall-Sonden*) werden kommerziell gefertigt. Damit die durch ein Magnetfeld hervorgerufene Hall-Spannung möglichst groß ist, sollte die Hall-Konstante  $R_H$  der Sonde groß sein. Dies kann gemäß Gln. (78a) und (78b) durch niedrige Ladungsträgerkonzentrationen erreicht werden. Im Interesse einer angemessenen Leistung der Hall-Sonde wünscht man sich jedoch eine hohe Leitfähigkeit, die proportional zur Hall-Konstanten wächst. Die widersprüchlichen Forderungen werden nach Gl. (73) nur von Werkstoffen hoher Beweglichkeit erfüllt, die in ihren elektrischen Parametern außerdem weitgehend temperaturunabhängig sein sollten. Nach Tab. 10 ist dies beispielsweise für n-InSb gegeben.

Weiterhin lassen sich über den Hall-Effekt große Gleichströme ermitteln [Gl. (76)].

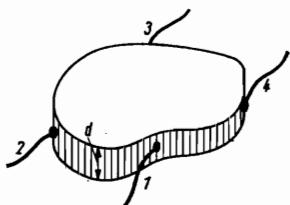


Abb. 119. Hall-Probe nach *van der Pauw*

Um die Schwierigkeiten bei der Herstellung und symmetrischen Kontaktierung quaderförmiger Halbleiterplättchen zu eliminieren, wird heute vorwiegend die von *van der Pauw* angegebene Variante der Hall-Messung benutzt, die im folgenden ohne Ableitungen<sup>1)</sup> angegeben wird: Ein plan-

<sup>1)</sup> Die Ableitungen sind aufwendig. Deshalb wird auf die Originalarbeit verwiesen: L. J. van der Pauw, Philips Res. Repts 13, 1–9 (1958).

paralleles Scheibchen (Dicke  $d$ ) beliebiger Gestalt wird längs seines Umfanges mit vier Kontakten versehen (1 bis 4 in Abb. 119). Läßt man den Strom durch zwei gegenüberliegende Kontakte 1 und 3 fließen ( $I_{13}$ ) und mißt die Spannung zwischen den beiden anderen Kontakten 2 und 4 ( $U_{24}$ ), kann ein Widerstand

$$R_{13/24} = U_{24}/I_{13} \quad (79)$$

definiert werden. Dieser wird einmal mit, einmal ohne Magnetfeld bestimmt und aus den zugehörigen Widerständen der Differenzwiderstand  $\Delta R_{13/24}$  gebildet. Es läßt sich zeigen, daß der Hall-Koeffizient durch

---


$$R_H = \frac{d}{B} \Delta R_{13/24} \quad (80)$$


---

gegeben ist.

Für den spezifischen Widerstand  $\varrho$  der Halbleiterscheibe liefert die Theorie den Ausdruck

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{R_{12/34} + R_{23/14}}{2} \cdot f, \quad (81)$$

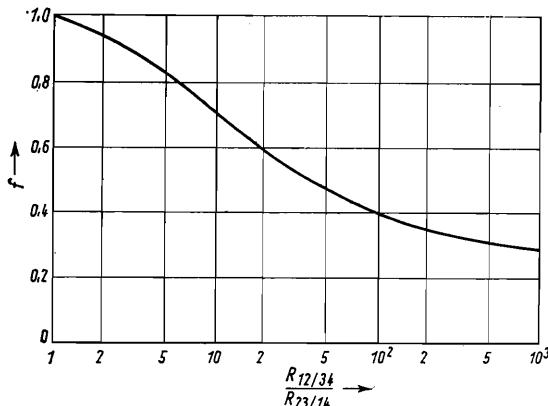


Abb. 120. Verlauf des Faktors  $f$  in Abhängigkeit vom Widerstandsverhältnis  $R_{12/34}/R_{23/14}$

$f$  ist ein lediglich vom Quotienten  $R_{12/34}/R_{23/14}$  abhängender Faktor, dessen Verlauf Abb. 120 zeigt.  $R_{12/34}$  und  $R_{23/14}$  sind Widerstände, die entsprechend der Gl. (79) gebildet werden. Die Ströme  $I_{12}$  bzw.  $I_{23}$  und die Spannungen  $U_{34}$  bzw.  $U_{14}$  werden jedoch zwischen benachbarten Kontaktstellen gemessen.

Es ist vorteilhaft, wenn bei der Methode nach *van der Pauw* die Scheiben einfache symmetrische Gestalt (rechteckig, quadratisch, kreisförmig) besitzen und symmetrisch kontaktiert sind.

### Versuchsausführung

In beiden Aufgaben wird die (in Kunststoff gefaßte) Hall-Probe nach Abb. 121 a geschaltet (Bezifferung der Kontaktstellen beachten!) und dabei für den Widerstand  $R$  zunächst der höchstmögliche Wert gewählt. Das ist

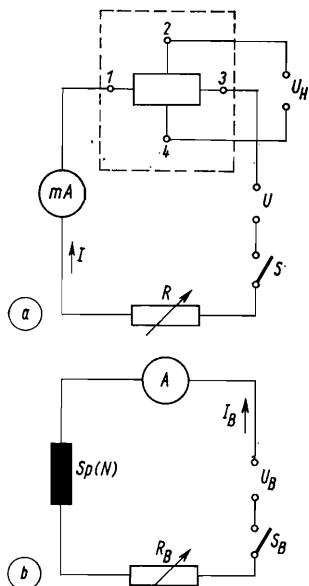


Abb. 121. Schaltung von Hall-Probe (a) und Magnetfeldspule (b)

notwendig, damit die Hall-Probe sich durch die Stromwärme nicht aufheizt. Die Spannung  $U_H$  (Größenordnung 10 bis  $10^2$  mV) wird leistungslos und deshalb in diesem Versuch mit einem elektronischen Voltmeter (Abschn. E. 2.1) gemessen. Die Thermospannungen aller Kontaktstellen können das Meßergebnis verfälschen.

Für die Messungen der *Aufgabe 1* wird die Hall-Sonde in die Mitte einer Spule (Windungszahl  $N$ ) so eingeführt, daß die Scheibenfläche parallel zum Spulenquerschnitt liegt. Die Spule wird aus einem Stromversorgungsgerät gespeist (Schaltung nach Abb. 121 b), dessen Ausgangsspannung  $U_B$  stufenweise einstellbar ist. Den jeweiligen Spulenstrom  $I_B$  lesen wir am Ampere-Meter  $A$  ab und berechnen nach Gl. (6) die magnetische Feldstärke  $H$  bzw. über Gl. (1b) die magnetische Induktion  $B$  am Orte der Hall-Sonde. Bei

zwei verschiedenen, mit dem Widerstand  $R$  (Abb. 121 a) eingestellten und in der Arbeitsplatzanleitung vorgeschriebenen Sondenströmen  $I$  (Größenordnung:  $10^1$  bis  $10^2$  mA) ermitteln wir die Spannung  $U_H$  in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion  $B$  bzw. vom Spulenstrom  $I_B$ . Die jeweilige Hall-Spannung ist die Differenz der Querspannung im Magnetfeld und außerhalb des Magnetfeldes ( $H = 0$ ; ohmscher Nullwert). Für beide Sondenströme wird  $U_H$  als Funktion von  $B$  aufgetragen und das Ergebnis mit der Theorie [Gl. (76)] verglichen.

Bei *Aufgabe 2* nutzen wir den homogenen Bereich des Magnetfeldes zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten aus. Die Flussdichte  $B$  ( $B > 0,1 \text{ Vs m}^{-2}$ ) ermitteln wir – sofern der Meßbereich ausreicht – mit der in Aufgabe 1 kalibrierten Hall-Sonde. Andernfalls arbeiten wir mit dem in der Arbeitsplatzanleitung angegebenen Wert. Die Hall-Konstante  $R_H$  berechnen wir nach Gl. (80).  $\Delta R_{13/24}$  ergibt sich aus Gl. (79), indem wir  $U_{24}$  einmal im und einmal außerhalb des Magnetfeldes messen. In beiden Fällen halten wir mit dem Widerstand  $R I_{13}$  konstant (Größenordnung: 10 mA). Die Dicke  $d$  der Hall-Probe ist aus der Arbeitsplatzanleitung zu ersehen. Mit dem Wert von  $R_H$  kann aus Gl. (78a) bzw. (78b) die Ladungsträgerdichte errechnet werden. Die Gleichungen liefern gleichzeitig die Ladungsträgerbeweglichkeit  $\mu_{n,p}$ , wenn die Leitfähigkeit  $\sigma$  bekannt ist. Diese lässt sich über Gl. (81) ermitteln, indem wir die Widerstände  $R_{12/34}$  und  $R_{23/14}$  aus entsprechenden Messungen der Spannung ( $U_{34}, U_{14}$ ) und Stromstärke ( $I_{12}, I_{23}$ ) gemäß Gl. (79) bilden (Kontakte nicht verwechseln!). Der Faktor  $f$  folgt aus der graphischen Darstellung für das entsprechende Widerstandsverhältnis  $R_{12/34}/R_{23/14}$ .

## E. 5. WECHSELSTROMWIDERSTÄNDE UND ELEKTRISCHE SCHWINGUNGEN

### E. 5.0. Allgemeine Grundlagen

#### E. 5.0.1. Komplexe Darstellung von Wechselstromgrößen

Für Gleichstrom stellt eine Spule einen ohmschen Widerstand dar, der durch das Material und die Abmessungen der Drahtwicklung gegeben ist [vgl. Gl. (E. 1.-7)]. Ein verlustfreier Kondensator bildet einen unendlich hohen Gleichstromwiderstand. Im Wechselstromkreis bedeuten Spulen der Induktivität  $L$  und Kondensatoren der Kapazität  $C$  endliche, von der Kreisfrequenz  $\omega$  der Wechselspannung abhängige, *induktive* oder *kapazi-*

### zitive Widerstände

---

$$Z_L = j\omega L, \quad (1)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}. \quad (2)$$


---

Die Beträge

---

$$X_L = \omega L, \quad (1a)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (2a)$$


---

bezeichnet man als *Blindwiderstand* der Induktivität bzw. der Kapazität. Während der induktive Widerstand mit der Frequenz zunimmt, sinkt der kapazitive Widerstand mit ihr. Die *Einheit der Induktivität* ist das Henry (H)

$$1H = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}.$$

Die *Einheit der Kapazität*, die sich aus der Definition

$$Q = C \cdot U \quad (3)$$

herleitet, ist das Farad (F)

$$1 \text{ F} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1}.$$

Damit erweisen sich induktiver und kapazitiver Widerstand als dimensionsgleich mit dem ohmschen Widerstand und rechtfertigen somit ihre Definition.

Der *Wechselstromwiderstand einer Induktivität* hat folgende Ursache: In der Spule wird bei einer Änderung der Stromstärke (Ein- bzw. Ausschaltvorgang, Wechselstrom) eine der von außen anliegenden Spannung  $U$  entgegengerichtete Spannung

$$U = -L \frac{dI}{dt} \quad (4)$$

induziert. Nach dem Kirchhoffschen Gesetz gilt

$$U + U_L = U - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (5)$$

Im Wechselstromkreis muß man zulassen, daß Spannung und Stromstärke nicht phasengleich sind, sondern daß die Extremwerte oder die Nulldurchgänge von  $U$  und  $I$  zu verschiedenen Zeiten erreicht werden. Wird die Phasenverschiebung zwischen Span-

nung und Strom mit  $\varphi$  bezeichnet, so kann man bei harmonischem Verlauf<sup>1)</sup>

$$U = U_0 e^{j\omega t}, \quad (6)$$

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (7)$$

schreiben.  $U_0$  bzw.  $I_0$  sind die Extremwerte,  $U$  und  $I$  die Momentanwerte von Spannung und Stromstärke. Die Behandlung von Wechselstromgrößen in komplexer Darstellung bringt eine erhebliche rechentechnische Erleichterung mit sich. Der physikalische Sachverhalt wird stets durch den Realteil der komplexen Gleichungen beschrieben. Mit der aus Gl. (7) folgenden zeitlichen Ableitung

$$\frac{dI}{dt} = j\omega I$$

geht Gl. (4) in

$$U = j\omega L I \quad (8)$$

über. Aus dem Vergleich mit dem Ohmschen Gesetz wird  $j\omega L$  als induktiver (komplexer) Widerstand interpretiert [vgl. Gl. (1)]. Durch die imaginäre Einheit  $j$  kommt zum Ausdruck, daß bei rein induktiver Belastung die Spannung gegenüber dem Strom in der Phase um  $\pi/2$  vorausseilt.

Zum Wechselstromwiderstand eines Kondensators führen ähnliche Betrachtungen: Unter dem Einfluß einer äußeren Spannung  $U$  nimmt ein Kondensator der Kapazität  $C$  die Ladung  $Q = \int I dt$  auf. Es gilt

$$U = U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad (9)$$

und, wenn für  $I$  der durch Gl. (7) dargestellte harmonische Stromverlauf vorausgesetzt wird,

$$U = U_C = \frac{1}{j\omega C} I = -j \frac{1}{\omega C} I. \quad (10)$$

Der Vergleich mit dem Ohmschen Gesetz liefert den kapazitiven Widerstand [vgl. Gl. (2)], und außerdem sagt Gl. (10) aus, daß der Strom der Spannung um den Phasenwinkel  $\pi/2$  vorausseilt. In ohmschen Widerständen haben Spannung und Strom gleiche Phase. An induktiven oder kapazitiven Blindwiderständen treten im Gegensatz zu den ohmschen Widerständen keine Verluste an elektrischer Energie auf.

Es ist jedoch zu bedenken, daß Spulen stets einen ohmschen Widerstandsanteil und eine – wenn auch in vielen Fällen vernachlässigbar kleine – Eigenkapazität besitzen. Desgleichen sind bei Kondensatoren eine Eigeninduktivität und ein Wirkwiderstand vorhanden. Schließlich sind ohmsche Widerstände je nach ihrer Art mit einem mehr oder weniger großen Blindanteil behaftet. Widerstände sind daher in der Praxis nicht absolut phasenrein. Die Phasenlage und der Betrag des resultierenden Widerstandes bzw. des Leitwertes können Zeigerdiagrammen in der Gaußschen Ebene entnommen werden, sofern die einzelnen Widerstandsanteile bekannt sind.

Die *Ersatzschaltung einer Spule* ist eine Reihenschaltung von ohmschem Widerstand  $R$  und induktivem Widerstand  $Z_L$ , so daß der Gesamtwider-

<sup>1)</sup> Über die komplexe Darstellung harmonischer Funktionen und den Zusammenhang mit der e-Funktion informiert die Fußnote auf Seite 281.

stand in komplexer Darstellung (*Scheinwiderstand*)

$$Z = R + j\omega L \quad (11)$$

ist. Der Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene entsprechend, wird  $R$  auf der reellen und  $\omega L$  auf der positiven imaginären

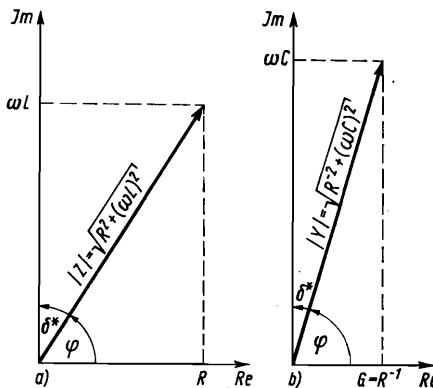


Abb. 122. Zeigerdiagramm für den a) Widerstand einer Spule;  
b) Leitwert eines Kondensators

Achse aufgetragen (vgl. Abb. 122a). Die vektorielle Addition liefert den resultierenden Widerstand vom Betrag

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (12)$$

und einen *Phasenwinkel*  $\varphi$  gemäß

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (13)$$

Induktivitäten werden so hergestellt, daß  $R \ll \omega L$  für alle Frequenzen im Anwendungsbereich ist. Dann unterscheidet sich der Phasenwinkel nur wenig von  $\pi/2$ . Der Winkel

$$\delta^* = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (14)$$

ist ein Maß für die ohmschen Verluste.  $\delta^*$  wird als *Verlustwinkel*,

$$\tan \delta^* = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \tan^{-1} \varphi = \frac{R}{\omega L} \quad (15)$$

als *Verlustfaktor* bezeichnet.

Als *Ersatzschaltbild für einen Kondensator* wird in den meisten Fällen eine Parallelschaltung von  $C$  und  $R$  gewählt, da jeder Stoff, der als Dielektrikum zwischen die Kondensatorbelegungen gebracht wird, bis zu einem gewissen Grade elektrisch leitend ist. Der Leitwert eines Kondensators in komplexer Darstellung (*Scheinleitwert*) wird durch

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C, \quad (16)$$

$$|Y| = \sqrt{R^{-2} + (\omega C)^2}, \quad (17)$$


---

der *Verlustfaktor* durch

$$\tan \delta^* = \frac{1}{\omega CR} \quad (18)$$

beschrieben (vgl. Abb. 122 b).

### E. 5.0.2. Schaltung von Blindwiderständen

Bei einer *Reihenschaltung mehrerer Spulen*  $1, 2, \dots, n$  addieren sich deren Wirk- und Blindwiderstände einzeln. Daher gilt

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad (19a)$$

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n. \quad (19b)$$


---

In einer *Parallelschaltung* addieren sich Wirk- und Blindleitwerte einzeln. Daraus folgt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \quad (20a)$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}. \quad (20b)$$


---

Bei einer *Serienschaltung von mehreren Kondensatoren* der Kapazität  $C_1, C_2, \dots, C_n$  addieren sich deren Blindwiderstände  $1/\omega C_i$ . Daraus folgt für

die Gesamtkapazität  $C$

---


$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (21)$$


---

In einer *Parallelschaltung* addieren sich die Blindleitwerte  $\omega C_i$  [vgl. Gl. (14)], also auch die Kapazitäten

---


$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (22)$$


---

### E. 5.0.3. Die Dielektrizitätskonstante

Die Kapazität  $C$  eines mit einem Dielektrikum der relativen Dielektrizitätskonstanten oder Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  gefüllten Kondensators ist gegenüber der Leerkapazität  $C_0$  (Vakuum zwischen den Belegungen) um den Faktor  $\epsilon_r$  größer. Die *relative Dielektrizitätskonstante (DK)* ist also als das Verhältnis zweier Kapazitäten definiert

---


$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}. \quad (23)$$


---

Aus Gl. (23) folgt, daß  $\epsilon_r$  für Vakuum gleich 1 ist. Befindet sich zwischen den Kondensatorbelegungen Luft, so ist  $\epsilon_r = 1,0006$ . Aus diesem Grunde kann die Leerkapazität  $C_0$  in den meisten Fällen in Luft gemessen werden.

Für einen *Plattenkondensator* ist

$$C = \epsilon \frac{A}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (24)$$

In Gl. (24) sind  $A$  die Plattenfläche und  $d$  der Plattenabstand.  $\epsilon_0$  ist die *elektrische Feldkonstante* oder *Dielektrizitätskonstante des Vakuums*:

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Das Produkt  $\epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon$  bezeichnet man als *Dielektrizitätskonstante des Stoffes*,  $\epsilon$  hat die gleiche Dimension wie  $\epsilon_0$ .

Gl. (24) gilt exakt nur für unendlich ausgedehnte Plattenkondensatoren. Alle Randeffekte – die dielektrischen Feldlinien verlaufen am Rande der Platten nicht mehr senkrecht zu ihnen – sind dabei außer acht gelassen worden. Um diese Randeffekte zu unterdrücken, umgibt man kreisförmige Plattenkondensatoren mit von ihnen isolierten Schutzringen, in denen die gleiche elektrische Feldstärke wie im Plattenkondensator herrscht.

### E. 5.0.4. Elektrische Schwingungen

Entlädt sich ein Kondensator der Kapazität  $C$  über eine mit einem Wirkwiderstand  $R$  in Reihe geschaltete Spule der Induktivität  $L$ , wird in dieser eine Spannung induziert. Sie bewirkt ihrerseits einen zeitlich veränderlichen Strom, der sich dem Entladestrom überlagert und den Kondensator erneut auflädt. Auf diese Weise wandeln sich die elektrische Feldenergie des Kondensators und die magnetische Feldenergie der Spule periodisch ineinander um, bis die elektrische Energie durch den Wirkwiderstand verzehrt ist. Dieser Vorgang ist eine *freie gedämpfte elektrische Schwingung*, die bei starker Dämpfung [ $(R/2L)^2 \gg 1/LC$ ] analog zur mechanischen Schwingung (vgl. E. 4.1) in den aperiodischen Fall übergeht. Die  $RLC$ -Kombination stellt einen *elektrischen Schwingkreis* dar.

Wird ein Schwingkreis an eine Wechselstromquelle angeschlossen, bildet der Wechselstrom im Kreis eine *erzwungene elektrische Schwingung*. Je nach

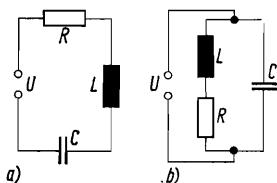


Abb. 123.  
Reihen- (a) und Parallelschwingkreis (b)

Art der Schaltung liegen Reihen- oder Parallelschwingkreise (Abb. 123a u. b) vor. Die typischen Erscheinungen einer erzwungenen elektrischen Schwingung werden am Beispiel eines *Reihenschwingkreises* gezeigt:

Die Eingangsspannung  $U$  habe einen harmonischen Verlauf, der sich durch

$$U = U_0 e^{j\omega t} \quad (25)$$

( $U_0$  Scheitelwert der Spannung;  $\omega$  Kreisfrequenz) beschreiben lässt.<sup>1)</sup> Die Spannung erzeugt einen, im allgemeinen ihr gegenüber phasenverschobenen Wechselstrom, dessen momentane Stromstärke durch

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (26)$$

( $I_0$  Scheitelwert der Stromstärke oder Stromamplitude;  $\varphi$  Phasenwinkel) gegeben ist. Er führt am Wirkwiderstand  $R$ , am Kondensator der Kapazität  $C$  und an der Spule von der Induktivität  $L$  zu Teilspannungen

$$U_R = IR, \quad (27a)$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad (27b)$$

<sup>1)</sup> Über die komplexe Darstellung harmonischer Funktionen und den Zusammenhang mit der e-Funktion informiert die Fußnote auf Seite 281.

und

$$U_L = -L \frac{dI}{dt}. \quad (27c)$$

In jedem Augenblick muß im Schwingkreis das Kirchhoff'sche Gesetz [Gl. (E. 1.-3)] erfüllt sein, wobei die in der Spule induzierte Spannung wie eine eingeprägte Spannung (Spannungsquelle) zu behandeln ist. Daher gilt

$$U_R + U_C = U + U_L.$$

Werden für die Größen dieser Gleichung die Ausdrücke (25) und (27 a, b, c) gesetzt, ergibt sich nach einmaliger Differentiation und Umstellung die als *Schwingungsgleichung* bekannte Beziehung

---


$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = j\omega \frac{U_0}{L} e^{j\omega t}. \quad (28)$$


---

Ihrer Struktur nach ist es eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie enthält als Sonderfall die homogene Differentialgleichung der zu Beginn dieses Abschnittes betrachteten freien Schwingung, für die die rechte Seite der Gleichung Null ist. Für  $R = 0$  beschreibt Gl. (28) eine ungedämpfte Schwingung. Ein bemerkenswerter Unterschied zum mechanischen Analogon [Gl. (E. 4.-35)] besteht insofern, als die rechte Seite der Gl. (28) die Kreisfrequenz  $\omega$  als Faktor enthält. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus der Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung, wie sie im Prinzip durch Gl. (E. 4.-31 b) gegeben ist, und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen. Erstere beschreibt die mit dem Einschalten angeregte, mit der Zeit abklingende Eigen schwingung des Kreises. Die partikuläre Lösung gilt für den stationären, den sogenannten eingeschwungenen Zustand, auf den wir uns im folgenden beschränken.

Gl. (26) stellt eine Lösung der Schwingungsgleichung (28) dar, wenn wir für die Stromamplitude  $I_0$  einen auf folgende Weise ermittelten Ausdruck setzen:

Führen wir die Ableitungen der Gl. (26)

$$\frac{dI}{dt} = j\omega I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

und

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

in Gl. (28) ein, folgt nach entsprechenden Umformungen und mit der Euler-

schen Formel (vgl. die Fußnote auf S. 281)

$$-\omega^2 + j\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = j\omega \frac{U_0}{I_0 L} e^{j\varphi} = j\omega \frac{U_0}{I_0 L} (\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (29)$$

Real- und Imaginärteil dieser Gleichung müssen für sich erfüllt sein, so daß Gl. (29) in

$$\omega^2 - \frac{1}{LC} = \frac{U_0 \omega}{I_0 L} \sin \varphi \quad (30a)$$

und

$$\frac{R}{L} \omega = \frac{U_0 \omega}{I_0 L} \cos \varphi \quad (30b)$$

aufgespaltet werden darf. Durch Quadrieren und Addition beider Gleichungen erhalten wir für die *Stromamplitude*

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (31)$$

Der Nenner dieser Beziehung ist der Betrag des Wechselstromwiderstandes (Scheinwiderstand, Impedanz) für die Reihenschaltung von  $R$ ,  $L$  und  $C$  (vgl. Abschn. 5.0.1 u. 2). Bei konstanter Scheitelspannung  $U_0$  wird die vom Reihenschwingkreis aufgenommene Stromstärke maximal (*Resonanz*), wenn der Klammerausdruck verschwindet, wenn also  $\omega L - 1/\omega C = 0$  ist. Dies ist bei der *Resonanzfrequenz*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32)$$

(*Thomsonsche Schwingungsformel*) der Fall. Der Strom wird lediglich durch den Wirkwiderstand begrenzt. Die Resonanz im Reihenschwingkreis wird *Reien-* oder *Spannungsresonanz* genannt. Damit soll insbesondere auch zum Ausdruck kommen, daß die Spannungsabfälle  $U_L$  und  $U_C$  an den Blindwiderständen weit über der Eingangsspannung liegen können. Für diese *Resonanzüberhöhung* gilt

$$\frac{U_L}{U_0} = \frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR}. \quad (33)$$

Bei der Ableitung dieses Ausdrückes werden die Gln. (1a), (2a) und (32) benutzt.

Aus dem Quotienten der Gln. (30a) und (30b) ergibt sich der *Phasenwinkel* zwischen der Eingangsspannung und dem Schwingkreisstrom; denn es ist

---


$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (34)$$


---

Wenn man die *Dämpfungskonstante*

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (35)$$

und die Kreisfrequenz  $\omega_0$  gemäß Gl. (32) in die Schwingungsgleichung (28) einführt, nimmt diese die Form

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = j\omega \frac{U_0}{L} e^{j\omega t} \quad (28a)$$

an. Entsprechend kann man für Gln. (30a und b) auch

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \frac{\omega U_0}{I_0 L} \sin \varphi, \quad (30aa)$$

$$2\delta\omega = \frac{\omega U_0}{I_0 L} \cos \varphi \quad (30bb)$$

setzen und erhält für die *Stromamplitude*

$$I_0 = \frac{\frac{\omega U_0}{L}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \quad (31a)$$

Sie geht demnach bei niedrigen Frequenzen ( $\omega \rightarrow 0$ ) gegen Null. Bei dem in der Schaltungspraxis bedeutsamen Fall des nur schwach gedämpften Systems stimmen die Resonanzfrequenz  $\omega = \omega_r$  und die Eigenfrequenz  $\omega_0$  praktisch überein ( $\omega_r \approx \omega_0$ ).

Unter dieser Voraussetzung folgt für die Resonanzamplitude

$$I_{0r} \approx \frac{\frac{\omega_0 U_0}{L}}{2\delta\omega_0}. \quad (31b)$$

Sie nimmt demzufolge mit der Dämpfung ab. Gleichzeitig wird die Resonanzkurve – das ist die graphische Darstellung der Amplitude über der Erregerfrequenz (vgl. Abb. 130) – und damit die „Abstimmsschärfe“

des Kreises geringer. Ein Maß dafür ist die *Halbwerts- oder Bandbreite*  $\Delta\omega$ . Das ist die Frequenzbreite an der Stelle der Resonanzkurve, für die die Amplitude  $I_0 = I_{0r}/\sqrt{2}$  ist, also das 0,707-fache der Resonanzamplitude  $I_{0r}$  beträgt (Abb. 130). Für sie gilt mit den Gln. (31 a, b)

$$\frac{I_0^2}{I_{0r}^2} = \frac{4\delta^2\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2} = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Dies kann nur für

$$\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{4\delta^2\omega_0^2} = 1$$

oder

$$2\delta\omega_0 = \omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)$$

erfüllt sein. Da aber  $(\omega - \omega_0) = \Delta\omega/2$  die halbe Bandbreite und  $\omega + \omega_0$  näherungsweise  $2\omega_0$  ist, folgt für die relative Bandbreite

$$\frac{2\delta}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (31c)$$

In Abb. 124 sind schematisch die Resonanzkurve und der Phasenverlauf für den Reihenschwingkreis dargestellt.

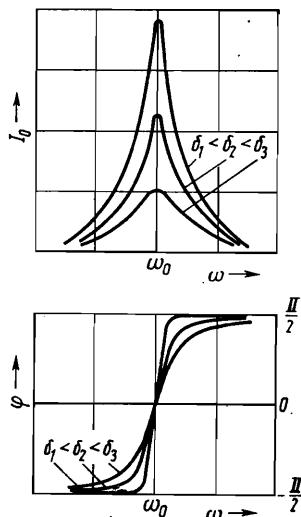


Abb. 124. Resonanzkurven und Phasenverlauf für den Reihenschwingkreis bei verschiedener Dämpfung

Die Stromstärke in einem *Parallelschwingkreis* nach Abb. 123 b wird durch die Parallelschaltung von  $RL$  und  $C$  bestimmt. Für diese Anordnung ergibt sich ein frequenzabhängiger Scheinwiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 \left[ R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}}, \quad (36)$$

der in Gl. (31) anstelle des Nenners zu setzen ist. Er ist in der Resonanz ( $\omega L = 1/\omega C$ ) maximal groß, die Eingangsstromstärke  $I_0$  daher extrem klein. Im Idealfall  $R = 0$  würde sie auch Null sein. Der Gesamtstrom teilt sich in die parallelen Teilströme  $I_L$  und  $I_C$  des Schwingkreises, die in der Resonanz vom gleichen Betrage, aber  $180^\circ$  gegeneinander phasenverschoben sind und sich kompensieren. Die Teilströme sind größer als der Gesamtstrom.

Für die *Resonanzüberhöhung* im Parallelschwingkreis (*Parallel- oder Stromresonanz*) gilt

$$\frac{I_L}{I_0} = \frac{I_C}{I_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR}. \quad (33a)$$

Der Phasenverlauf folgt aus

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2)}{R}. \quad (34a)$$

Diese Gleichung ist das Ergebnis einer dem Reihenschwingkreis analogen Rechnung. Aus ihr folgt für den Resonanzfall ( $\omega L = 1/\omega C$ )

$$\tan \varphi_r = - \frac{R}{\omega L};$$

der Phasenwinkel ist wegen  $\omega L \gg R$  bei der Resonanz praktisch Null.

## E. 5.1. Induktivitätsmessungen

- Aufgaben:*
1. Die Eigeninduktivität  $L$  und die Eigenkapazität  $C_L$  einiger Spulen sollen gemessen werden.
  2. Die Anfangspermeabilität  $\mu_{ra}$  des Kernmaterials verschiedener Ringkernspulen ist bei Zimmertemperatur zu bestimmen.
  3. Die Temperaturabhängigkeit der Anfangspermeabilität  $\mu_{ra}$  eines magnetischen Werkstoffes soll im Bereich von Zimmertemperatur bis zu einer vorgeschriebenen Höchsttemperatur er-

mittelt werden. Aus der graphischen Darstellung der Funktion  $\mu_{\text{ra}}(T)$  sind der Temperaturkoeffizient  $\alpha$  der Anfangspermeabilität  $\mu_{\text{ar}}$  zu berechnen und die Curie-Temperatur  $T_c$  zu extrapolieren.

Die für diese Versuche wichtigen Grundlagen der *Magnetisierung* sind im Abschn. E. 4.0.1 behandelt.

Die *Eigeninduktivität*  $L$  einer Spule kann man im Prinzip nach Gl. (12) bestimmen, indem man ihren Gleichstromwiderstand  $R$  und ihren Wechselstromwiderstand  $|Z|$  bei gegebener Kreisfrequenz  $\omega$  mißt. Dieses Verfahren wird aber in der Praxis kaum noch angewandt.

Zur Bestimmung von  $L$  stehen Induktivitätsmeßgeräte und Wechselstrommeßbrücken zur Verfügung.

*Induktivitätsmeßgeräte* arbeiten im allgemeinen nach dem Resonanzprinzip (Parallelschwingkreis, vgl. Abschn. E. 5.0.4). Sie bestehen aus einem Generator, dessen Frequenz in hinreichend weiten Grenzen eingestellt werden kann. An den Generator ist ein Kondensator der Kapazität  $C_0$  lose angekoppelt, zu dem man von außen die Spule der Induktivität  $L$  parallel schaltet. Wenn man nun die Generatorfrequenz kontinuierlich variiert, ergibt sich nach der Thomson-Formel [Gl. (32)] im Resonanzfall

$$L = \frac{1}{\omega^2 C_0} = \frac{1}{(2\pi)^2 C_0} \cdot \frac{1}{\nu^2}. \quad (37)$$

Die am  $CL$ -Schwingkreis auftretende Spannung wird auf einen einstellbaren Verstärker gegeben, gleichgerichtet und an einem Anzeigegerät abgelesen. Bei der Resonanzfrequenz ist die Spannungsüberhöhung am größten [vgl. Gl. (33)], d. h., es ist die Frequenz einzustellen, bei der das Anzeigegerät Maximalausschlag zeigt.

Das Ersatzschaltbild einer Spule bei Berücksichtigung der Eigenkapazität  $C_L$  ist eine Parallelschaltung von  $L$  und  $C_L$ . Man bestimmt also

$$\omega^{-2} = (C_0 + C_L) L. \quad (38)$$

Nun schaltet man im Meßgerät auf  $4C_0$  und wählt am Generator die Kreisfrequenz  $\omega/2$ . Mit Hilfe eines Drehkondensators  $C_D$ , der parallel zu  $C_0$  und  $C_L$  liegt, stellt man Resonanz her. Dann gilt

$$4\omega^{-2} = (4C_0 + C_L + C_D) L. \quad (39)$$

Aus den Gln. (38) und (39) folgt

$$4C_0 + 4C_L = 4C_0 + C_L + C_D,$$

$$C_L = \frac{1}{3} C_D. \quad (40)$$

Ähnliche Meßgeräte gibt es auch zur *Bestimmung von Kapazitäten*. In diesen Geräten ist eine Induktivität an den Generator angekoppelt, zu der man den zu untersuchenden Kondensator außen parallel schaltet (vgl. auch E. 5.3).

*Wechselstrommeßbrücken* zur Bestimmung von  $L$  sind in vielen Fällen modifizierte Wheatstone-Brücken (vgl. E. 1.2). Sie sind häufig als Labor-RLC-Meßbrücke aufgebaut. Mit ihr kann man bei Gleichspannung ohmsche Widerstände  $R$  und bei Wechselspannung bestimmter Frequenz Induktivitäten  $L$  oder Kapazitäten  $C$  messen. Derartige Geräte enthalten einen Stromversorgungsteil, die Meßbrücke und einen Indikator. Im allgemeinen kann man an diesen Brücken nach dem Abgleich (Minimalauschlag des Indikators)  $R$ ,  $L$  oder  $C$  direkt ablesen.

### Versuchsausführung

*Aufgabe 1:* Wir schalten die zu untersuchende Spule an ein Induktivitätsmeßgerät und bestimmen  $L$  nach Gl. (37). Normalerweise ist in solchen Geräten zu jeder Frequenz die zugehörige Eigeninduktivität für den Resonanzfall angegeben, so daß man den Wert für  $L$  am Instrument ablesen kann. Zum Grobabgleich wählen wir die Verstärkung so klein wie möglich. Erst wenn näherungsweise abgeglichen ist, können wir die Verstärkung erhöhen und ermitteln  $L$  im Rahmen der Genauigkeit des Gerätes. Anschließend wird  $C_L$  nach Gl. (40) bestimmt.

*Aufgabe 2:* Nach dem Induktionsgesetz gilt für die in einer Spule induzierte Spannung

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (41)$$

In Gl. (41) ist  $\Phi$  der magnetische Fluß, und das Integral ist über die gesamte von Feldlinien durchdrungene Fläche  $A$  zu erstrecken.  $\mathbf{B}$  und  $d\mathbf{A}$  ( $A \perp d\mathbf{A}$ ) sollen parallel zueinander sein. Ersetzt man die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  durch die Feldstärke  $\mathbf{H}$  [vgl. Gl. (E. 4-1 b)] und bedenkt, daß sich der Querschnitt  $A$  der Spule, die  $N$  Windungen haben soll, zeitlich nicht ändert, so erhält man

$$U = -\mu_0 \mu_r N A \frac{dH}{dt}. \quad (42)$$

Nun gilt für die Feldstärke  $H$  einer sehr langen Spule (Länge  $l$ ) oder einer Ringkernspule (Umfang  $l$ )  $H = N \cdot I/l$  [Gl. (E. 4-6 b)]. Damit wird

$$U = -\mu_0 \mu_r A \frac{N^2}{l} \frac{dI}{dt} \quad (43)$$

und mit der Eigeninduktivität  $L = \mu_0 \mu_r A \cdot N^2/l$

$$U = -L \frac{dI}{dt}. \quad (44)$$

Aus den Gln. (43) und (44) folgt

$$\mu_r = \frac{lL}{\mu_0 N^2 A} . \quad (45)$$

In Aufgabe 2 bestimmen wir  $L$  für verschiedene Werte der Spitzenspannung  $U_0$ , die an der zu untersuchenden Probe liegt und mit einem geeigneten Röhrenvoltmeter (siehe Abschn. E. 2) gemessen wird. Für  $H_0$  gilt

$$H_0 = \frac{NI_0}{l} = \frac{N}{\omega l} \frac{U_0}{L} . \quad (46)$$

Wir stellen die Funktion  $\mu_r$  über  $H_0$  graphisch dar. Die Extrapolation von  $\mu_r$  auf  $H_0 = 0$  liefert die Anfangspermeabilität  $\mu_{ra}$ . Ist die gewonnene Kurve  $\mu_r(H_0)$  eine Gerade, so ist die Rayleigh-Beziehung [Gl. (E. 4-5)] bestätigt. Wenn die Kurve schwach gekrümmmt ist, können wir nur eine mittlere Rayleigh-Konstante  $\beta$  der Induktion mittels Gl. (E. 4-5) berechnen.

In Aufgabe 3 soll  $L$  bei hinreichend kleiner Spitzenspannung  $U_0$  bei verschiedenen, vorgeschriebenen Temperaturen gemessen werden. Dazu bringt man die zu untersuchende Ringspule in ein Temperiergefäß, das von einem Thermostat mit Ölfüllung gespeist wird. Die Spitzenspannung  $U_0$  soll so klein sein, daß man

$$\mu_r \approx \mu_{ra}$$

setzen kann. Der Temperaturkoeffizient  $\alpha$  ergibt sich bei linearem Kurvenverlauf aus

$$\mu_{ra}(T) = \mu_{ra}(T_1) \{1 + \alpha(T_2 - T_1)\} . \quad (47)$$

Es ist vereinbart, daß  $\alpha$  – auch bei nichtlinearem Kurvenverlauf – aus den Werten von  $\mu_{ra}$  bei  $T_1 = 23^\circ\text{C}$  und  $T_2 = 63^\circ\text{C}$  zu berechnen ist.

Wenn die Curie-Temperatur  $T_c$  (vgl. Abschn. E. 4.0.1) erreicht wird, bricht  $L$  von einem hohen auf einen sehr niedrigen Wert zusammen. Es kann vorkommen, daß bei Temperaturen oberhalb  $T_c$  ein Brückenabgleich nicht mehr möglich ist.

## E. 5.2. Kapazitätsmessungen mit einer Wechselstrombrücke

- Aufgaben:*
1. Die Kapazität  $C$  einiger Kondensatoren soll bestimmt werden. Außerdem sind die Gln. (21) und (22) zu überprüfen.
  2. Die Kapazität  $C_1$  und der Verlustfaktor  $\tan \delta_1^*$  einer Parallel-

schaltung eines Kondensators und eines Widerstandes  $R_1$  sind als Funktion der Frequenz zu bestimmen.

3. Die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  und der Verlustfaktor  $\tan \delta^*$  sollen bei einer vorgegebenen Frequenz für verschiedene feste Dielektrika gemessen werden.

*Präzisionsmeßbrücken zur Bestimmung von Kapazitäten* sind in vielen Fällen wie Wheatstone-Brücken aufgebaut (vgl. Abschn. E. 1.2). In ihnen sind lediglich die ohmschen Widerstände durch verlustbehaftete Kondensatoren ersetzt [vgl. Gl. (16) bzw. Gl. (17)]. Als Spannungsquelle dient ein Generator variabler Frequenz, als Indikator ein Oszillograph (vgl. E. 4.4). Oszillographen sind einseitig geerdet. Aus diesem Grunde muß die Brücke

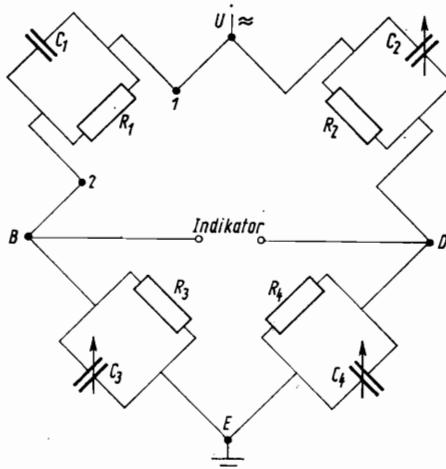


Abb. 125. Schaltung einer Kapazitätsmeßbrücke

der Abb. 125 einen Übertrager enthalten. Die Kondensatoren  $C_2$ ,  $C_3$  und  $C_4$  der Abb. 125 sollen einstellbar sein. Die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  lassen sich als verschiedene feste Werte einstellen.

Die Brücke ist abgeglichen, wenn zwischen den Punkten  $B$  und  $D$  (vgl. Abb. 125) keine Spannungsdifferenz vorhanden ist. Die Abgleichbedingung für die Brücke lautet, ausgedrückt in Scheinleitwerten,

$$Y_1 Y_4 = Y_2 Y_3. \quad (48)$$

Setzt man für die Scheinleitwerte Gl. (16), und führt man für  $\tan \delta_1^*$  und  $\tan \delta_2^*$  Gl. (18) ein, so erhält man

$$C_1 (\tan \delta_1^* + j) \left( \frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \right) = C_2 (\tan \delta_2^* + j) \left( \frac{1}{R_3} + j\omega C_3 \right).$$

In dieser komplexen Gleichung müssen sowohl die Real- als auch die Imaginärteile übereinstimmen. Damit erhält man zwei Gleichungen für die beiden gesuchten Größen  $C_1$  und  $\tan \delta_1^*$ . Die Lösung lautet

$$\tan \delta_1^* = \frac{\omega (C_4 R_4 - C_3 R_3) + \tan \delta_2^* (1 + \omega^2 C_3 R_3 C_4 R_4)}{1 + \omega^2 C_3 R_3 C_4 R_4 - \omega \tan \delta_2^* (C_4 R_4 - C_3 R_3)}, \quad (49)$$

$$C_1 = C_2 \frac{R_4}{R_3} \frac{1 + \omega^2 C_3 R_3 C_4 R_4 - \tan \delta_2^* (C_4 R_4 - C_3 R_3)}{1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2}. \quad (50)$$

Die Gln. (49) und (50) vereinfachen sich, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

1.  $\omega(C_4 R_4 - C_3 R_3) < 1$  und  $\tan \delta_2^* < 10^{-3}$ .

Man erhält

$$\tan \delta_1^* = \frac{\omega (C_4 R_4 - C_3 R_3)}{1 + \omega^2 C_3 R_3 C_4 R_4} + \tan \delta_2^*, \quad (49a)$$

$$C_1 = C_2 \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{1 + \omega^2 C_3 R_3 C_4 R_4}{1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2}. \quad (50a)$$

2. Zusätzlich sei  $\omega^2 C_3 R_3 C_4 R_4 < 10^{-3}$ . Dann gilt

$$\tan \delta_1^* = \omega (C_4 R_4 - C_3 R_3) + \tan \delta_2^*, \quad (49b)$$

$$C_1 = C_2 \frac{R_4}{R_3} \frac{1}{1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2}. \quad (50b)$$

3. Schließlich sei  $\omega^2 C_4^2 R_4^2 < 10^{-3}$  und  $\tan \delta_2^* \ll \tan \delta_1^*$ .

Damit werden die Gln. (44) und (45) zu:

$$\tan \delta_1^* = \omega (C_4 R_4 - C_3 R_3), \quad (49c)$$

$$C_1 = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (50c)$$

### Versuchsausführung

Wir schalten

- a) einen Kondensator,
- b) eine Reihenschaltung von  $n$  Kondensatoren,
- c) eine Parallelschaltung von  $n$  Kondensatoren,
- d) eine Parallelschaltung eines Widerstandes und eines Kondensators

an die Klemmen 1 und 2 der in Abb. 125 dargestellten Brücke. Am Generator wird die kleinste geforderte Frequenz gewählt. Für  $R_3 = R_4$  stellen wir den größten Wert ein.

Der Brückenabgleich wird bei festen Werten für  $C_3$ ,  $R_3$  und  $R_4$  durch wechselweises Vergrößern von  $C_2$  und  $C_4$  zunächst bei ganz geringer Amplitude des Generators und geringer Verstärkung im Oszillographen gesucht. Haben wir den Abgleich grob gefunden, so dürfen zum Feinabgleich die Generatoramplitude und die Oszillographenverstärkung vergrößert werden.

In *Aufgabe 1* überprüfen wir, ob sich die Einzelkapazitäten bzw. ihre Kehrwerte entsprechend den Gl. (21) und (22) addieren.

In *Aufgabe 2* führen wir die Messung bei verschiedenen Frequenzen aus. Dabei müssen unter Umständen  $R_3$  und  $R_4$  verkleinert werden. Bei der Berechnung von  $C_1$  und  $\tan \delta_1^*$  ist zu prüfen, welche der Voraussetzungen 1., 2., 3. erfüllt sind. Danach wählen wir die geeigneten Näherungsformeln zur Bestimmung von  $C_1$  und  $\tan \delta_1^*$  aus. Die Frequenzabhängigkeit von  $\tan \delta_1^*$  ist auf doppeltlogarithmischem Koordinatenpapier darzustellen. Aus dieser Kurve soll  $R_1$  ermittelt werden.

In *Aufgabe 3* lässt sich die Frequenz so wählen, daß zur Auswertung die Gl. (49c) und (50c) verwendet werden können. Wir bestimmen zunächst die Kapazität  $C_{10}$  eines Plattenkondensators einschließlich seiner Zuleitungen zur Brücke. Zwischen den Platten (Abstand  $h$ ) befindet sich Luft.

Nun schieben wir  $n$  Proben (Querschnitt  $A$ , Höhe  $h$ ,  $DK = \epsilon_r$ ) zwischen die Platten und bestimmen

$$C_{1n} = C_{10} + \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{nA}{h}.$$

Daraus ergibt sich

---


$$\epsilon_r = \frac{(C_{1n} - C_{10}) h}{\epsilon_0 n A} + 1. \quad (51)$$


---

Die Höhen der Scheiben müssen sehr genau gemessen werden. Schieben wir zwei Proben der Höhe  $h$  und  $h - \Delta h$  zwischen die Platten, so bestimmen wir

$$C_{12} = C_{10} - 2\epsilon_0 \frac{A}{h} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{h} + C_R. \quad (52)$$

In Gl. (52) ist  $C_R$  die Kapazität der Reihenschaltung aus dünnerer Platte und Luftspalt.

$$C_R = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{h} \frac{1}{1 + (\epsilon_r - 1) \frac{\Delta h}{h}}. \quad (53)$$

Setzen wir in Gl. (51)  $n = 2$ , so ergibt sich für die  $DK$  nur ein angenäherter Wert  $\tilde{\epsilon}_r$ . Mit  $\tilde{\epsilon}_r$  und Gl. (53) können wir Gl. (52) schreiben

$$2\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r + \frac{\epsilon_r}{1 + (\epsilon_r - 1) \frac{\Delta h}{h}}.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für  $\epsilon_r$  mit der Lösung

$$\epsilon_r = - \left( \frac{h}{\Delta h} - \tilde{\epsilon}_r - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{h}{\Delta h} - \tilde{\epsilon}_r - \frac{1}{2} \right)^2 + 2\tilde{\epsilon}_r \left( \frac{h}{\Delta h} - 1 \right)}. \quad (54)$$

Wenn die Dicke des Luftpaltes nur 2,5% der des Plattenabstandes im Kondensator beträgt, unterscheiden sich  $\epsilon_r$  und ein angenommener Wert  $\tilde{\epsilon}_r = 5$  bereits um 5%.

Bei der Bestimmung des Verlustfaktors ist zu beachten, daß der nach Gl. (49c) mit  $n = 2$  und  $R_3 = R_4 = R$  ermittelte Wert

$$\tan \delta_{12}^* = \omega R (C_{42} - C_{32}) \quad (55)$$

auch unter der Annahme, daß der Plattenkondensator und die Zuleitungen zur Brücke verlustfrei sind, noch nicht der Wert für die zu untersuchenden Platten ist. Es gilt [vgl. Gl. (18)]

$$\tan \delta_{12}^* = \frac{1}{\omega C_{12} R_p} = \frac{1}{\omega C_p R_p} \cdot \frac{C_p}{C_{12}} = \tan \delta_p^* \cdot \frac{C_p}{C_{12}}. \quad (56)$$

Dabei sind  $C_p$ ,  $R_p$  und  $\tan \delta_p^*$  die Kapazität, der Widerstand und der Verlustfaktor der beiden Platten in Parallelschaltung. Aus den Gln. (55) und (56) folgt

---


$$\tan \delta_p^* = \frac{\omega R h (C_{42} - C_{32}) C_{12}}{2\epsilon_0 \epsilon_r A}. \quad (57)$$


---

Die Größen  $R$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{32}$  und  $C_{42}$  werden in der Brücke eingestellt,  $\nu = \omega/2\pi$  am Generator gewählt. Für  $\epsilon_r$  soll Gl. (51) Verwendung finden.

### E. 5.3. Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten

*Aufgaben:* 1. Ein DK-Meßgerät ist abzulegenen.

2. Es ist die DK eines flüssigen, nichtleitenden und unbegrenzt mischbaren Zweistoffgemisches in Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis aufzunehmen.

Für die Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten (DK) nichtleitender Flüssigkeiten werde eine *Schwingkreismethode* benutzt, die sich auf die Thomsonsche Formel [vgl. Gl. (32)] für den praktisch ungedämpften elektrischen Kreis [ $(R/2L)^2 \ll 1/LC$ ] stützt und in der Form

---


$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (58)$$


---

benutzt wird.  $L$  und  $C$  sind die gesamte Schwingkreisinduktivität und -kapazität,  $\nu_0$  und  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz und Resonanzkreisfrequenz des Schwingkreises. Wird in den Kreis zusätzlich eine Kapazität eingeschaltet oder der Kondensator mit einem Dielektrikum von der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_r$  [vgl. Gl. (23)] gefüllt, wird der Schwingkreis verstimmt. Gl. (58) bietet die Möglichkeit, die Kapazitätsänderung über die Änderung der Resonanzfrequenz zu erfassen oder, wenn die ursprünglich im Kreis liegende Induktivität oder Kapazität meßbar variabel sind, die Verstimmung des Kreises zu kompensieren.

Hier wird der zweite Weg bei der DK- bzw. Kapazitätsmessung benutzt:

Die Schwingungen eines durch einen Steuerquarz frequenzstabilisierten Schwingkreises am Gitter einer Oszillatroröhre steuern deren Anodenstrom. Sie regen so den Meßschwingkreis in der Anodenleitung zu erzwungenen

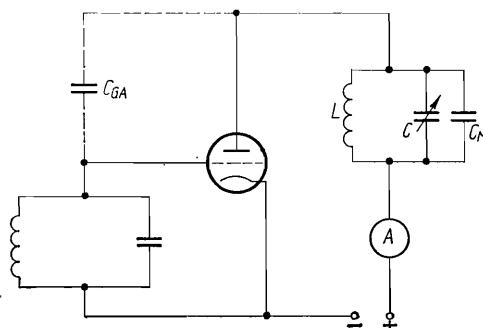


Abb. 126a. Schaltung eines DK-Meßgerätes

Schwingungen gleicher Frequenz an. Die „Schaltkapazität“ innerhalb der Röhre zwischen Gitter und Anode übernimmt die Rückkopplung (*Huth-Kühn-Schaltung*) und ist in Abb. 126a symbolisch durch den Kondensator  $C_{GA}$  dargestellt. Mit einem Drehkondensator  $C$  lässt sich die Eigenfrequenz des Meßschwingkreises genau auf die Vergleichsfrequenz einstellen. Bei der Frequenzgleichheit beider Kreise wird der Wert des Anodenstroms ein Minimum (Stromresonanz, siehe Abschn. E. 5.0.4). Er kann am Strommesser  $A$ , einem Mikroamperemeter, abgelesen werden. Wenn die Oszillatroröhre gleichzeitig Abstimmanzeigeröhre (magisches Auge) ist, kann das Leuchtbild als weiteres Resonanzkriterium dienen. Der Zusammenhang

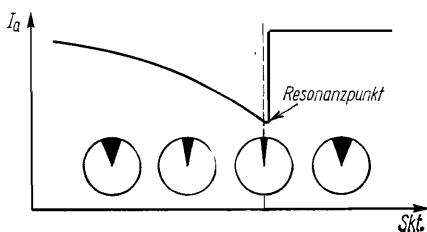


Abb. 126b. Leuchtfeldbild der Abstimmanzeigeröhre und Anodenstrom

zwischen Anodenstromstärke  $I_A$  und Leuchtbild des magischen Auges ist in Abhängigkeit von der in relativen Werten  $Skt$  (Skalenteilen) angegebenen Stellung des Drehkondensators  $C$  aus Abb. 126 b zu ersehen. Die unsymmetrische Gestalt der Resonanzkurve ist durch den Steuerquarz im Gitterschwingkreis bedingt. Dem entspricht ein Leuchtfeldsprung als empfindliches Resonanzkriterium beim Durchlaufen der Kurve.

Die Kapazität  $C_M$  (Abb. 126 a) stellt eine Meßzelle, in unserem Falle eine Flüssigkeitsmeßzelle dar, die aus einem kleinen, in einem Glasgefäß untergebrachten Plattenkondensator besteht. Der Meßbereich des Gerätes kann durch Einschalten verschiedener Induktivitäten  $L$  in den Anodenschwingkreis geändert werden.

### Versuchsausführung

Zur Bestimmung der DK von Flüssigkeiten kalibrieren wir entweder die Skale des Drehkondensators  $C$  unmittelbar in Einheiten der DK, indem wir die Meßzelle  $C_M$  nacheinander mit Flüssigkeiten unterschiedlicher, bekannter DK füllen und jeweils die Resonanzstelle aufsuchen (*Aufgabe 1*).

Universeller und für die Bestimmung von Kapazitäten unumgänglich ist der Abgleich in Einheiten der Kapazität. Hierzu ersetzen wir die Meßzelle  $C_M$  durch einen Präzisionsdrehkondensator. Bei diesen Messungen geht die Schaltkapazität der möglichst starr gewählten Zuleitungen ein. Der ihnen zukommende Betrag an Skalenteilen kann durch eine Differenzmessung ermittelt und als Korrektur berücksichtigt werden (*Aufgabe 1*).

Die Leerkapazität  $C_{MO}$  der Meßzelle und die Schaltkapazität  $C_s$  des Anschlusses können wir dann anhand der Abgleichkurve oder mit zwei Flüssigkeiten bekannter DK ( $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ ) über das Gleichungssystem

$$\epsilon_1 C_{MO} + C_s = C_1, \quad (59a)$$

$$\epsilon_2 C_{MO} + C_s = C_2 \quad (59b)$$

leicht ermitteln.  $C_1$  und  $C_2$  sind die Kapazitäten der gefüllten Zellen, deren Werte sich aus der Abgleichkurve ergeben.

Für verschiedene Mischungsverhältnisse der Flüssigkeiten werden die zu den Resonanzpunkten gehörenden Kapazitäten aus der Abgleichkurve entnommen. Die Dielektrizitätskonstanten ergeben sich aus Gl. (23), in die für  $C$  jeweils die Größe  $C_M - C_s$  einzusetzen ist (*Aufgabe 2*).

## E. 5.4. Ermittlung von Phasenbeziehungen zwischen Strom und Spannung

*Aufgabe:* Der Phasenverlauf zwischen Strom und Spannung ist an einem RC-, einem RL- und einem RLC-Glied in Abhängigkeit von der Frequenz aufzunehmen und zu diskutieren.

Der *Phasenwinkel*  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung wird mit dem Elektronenstrahlloszillographen (Abschn. E. 4.4) ermittelt, indem die am Wirkwiderstand abgegriffene und dem Strom phasengleiche Spannung  $U_0$  dem Horizontalverstärker des Oszilloscopes zugeführt wird. Die (phasenverschobene) Spannung  $U$  der jeweiligen Kombination aus Wirk- und Blindwiderstand liegt hingegen am Vertikalverstärker (Abb. 127). Das Bild auf

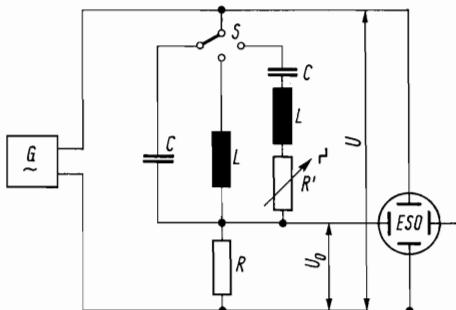


Abb. 127. Schaltung zur Bestimmung des Phasenwinkels

dem Schirm des Oszilloscopes entspricht dem allgemeinen Fall einer Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehender Schwingungen gleicher Frequenz:

Es entsteht eine Ellipse als *Lissajous-Figur*. Dies wird durch die folgende Rechnung bestätigt, die außerdem zu einer Beziehung für die Phasenverschiebung  $\varphi$  führt. Für die rechtwinkligen Koordinaten der Bahnkurve setzen wir

$$x = a \cos \omega t, \quad (60a)$$

$$y = b \cos (\omega t + \varphi) = b (\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi). \quad (60b)$$

Die Bahnkurve (Abb. 128) muß daher innerhalb eines Rechteckes mit den Seiten  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$  verlaufen. Aus Gl. (60a) finden wir  $\cos \omega t = x/a$ . Damit kann  $\sin \omega t = \sqrt{1 - (x/a)^2}$  gesetzt werden. Führen wir beide Aus-

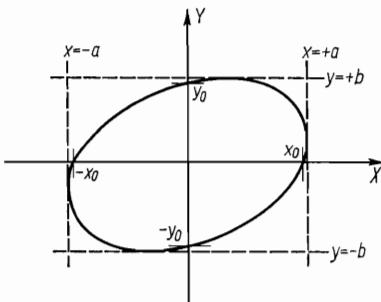


Abb. 128. Schirmbild für die Überlagerung zweier orthogonaler Schwingungen gleicher Frequenz

drücke in Gl. (60b) ein, wird die Zeit eliminiert, und nach weiteren elementaren Rechnungen folgt als allgemeine *Gleichung der Bahnkurve*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi - \sin^2 \varphi = 0. \quad (61)$$

Sie beschreibt eine Ellipse (elliptische Schwingung), deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, deren Hauptachsen sich wegen

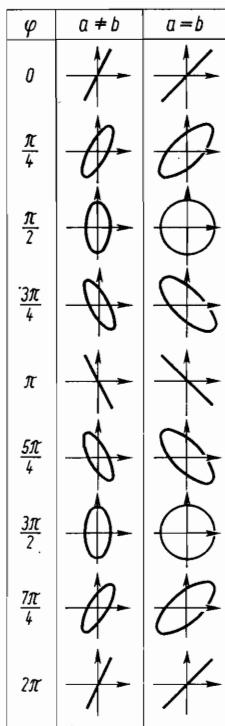


Abb. 129. Lissajous-Figuren zweier zueinander senkrechter Schwingungen gleicher Frequenz bei verschiedenen Phasenwinkeln und Amplituden ( $a \neq b, a = b$ )

des Produktes  $xy$  aber nicht mit den Koordinatenachsen decken. Folgende, in Abb. 129 dargestellte Fälle sind zu unterscheiden:

1.  $\varphi = 0$ : Die Ellipse entartet zu einer Geraden (lineare Schwingung)

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{b}{a} x \quad (61a)$$

durch den 1. und 3. Quadranten, die mit  $a = b$  die Achsen unter  $45^\circ$  schneidet.

2.  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ : Es ergibt sich eine mehr oder weniger schlanke Ellipse, die für  $\varphi = \pi/2$  die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (61\text{b})$$

erfüllt und deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Bei  $a = b$  entartet die Bahnkurve zu einem Kreis (zirkulare Schwingung).

3.  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ : Mit dem Übergang zu  $\varphi = \pi$  zieht sich die Ellipse zu einer Geraden durch den 2. und 4. Quadranten zusammen, die gemäß Gl. (61) der Formel

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{bzw.} \quad y = -\frac{b}{a} x \quad (61\text{c})$$

genügt.

4.  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ : Mit wachsendem Phasenwinkel entfaltet sich die Gerade zu einer Ellipse bei gleichzeitiger Drehung ihrer Hauptachsen.

Für  $\varphi = 3\pi/2$  decken sich die Hauptachsen gemäß der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (61\text{d})$$

mit den Koordinatenachsen. Die Ellipse wird mit  $\varphi \rightarrow 2\pi$  schmäler und degeneriert für  $\varphi = 2\pi$  zu einer mit der bei  $\varphi = 0$  deckungsgleichen Geraden.

Weitere Einzelheiten sind der Abb. 129 zu entnehmen und können im Versuch beobachtet werden. Meßtechnisch bedeutsam sind Phasenwinkel im Bereich  $-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2$ .

Aus Gl. (61) gehen für  $x$  bzw.  $y = 0$  die Schnittpunkte  $x_0$  und  $y_0$  der Ellipse mit der  $x$ - und  $y$ -Achse hervor (vgl. Abb. 128):

$$x_0 = a |\sin \varphi|, \quad (62\text{a})$$

$$y_0 = b |\sin \varphi|. \quad (62\text{b})$$

Damit sind Bestimmungsgleichungen für die *Phasenverschiebung* gewonnen, aus denen

---


$$|\sin \varphi| = \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} \quad (63)$$


---

folgt.

### Versuchsausführung

Frequenzgenerator  $G$ , die RLC-Glieder und der Elektronenstrahlzoszillograph werden nach Abb. 127 geschaltet und letzterer in Betrieb genommen.

Die den Teilaufgaben entsprechenden Glieder werden mit dem Schalter  $S$  wahlweise eingeschaltet. Horizontal- und Vertikalverstärker sind so einzustellen, daß von der Ellipse ständig alle Seiten des auf dem Schirm eingezeichneten Rechteckes berührt werden. Gegebenenfalls ist das Bild insgesamt horizontal oder vertikal zu verschieben. Bei jeder Frequenz werden als Achsenabschnitte die Mittelwerte aus  $\pm x_0$  bzw.  $\pm y_0$  ermittelt und die Phasenwinkel errechnet [Gl. (63)].

Das Vorzeichen des Phasenwinkels bestimmt man am besten so: Wird  $|\varphi|$  mit wachsender Frequenz kleiner, ist es negativ. Bei einem mit der Frequenz wachsenden  $|\varphi|$  ist es positiv.

Die Meßergebnisse sind rechnerisch zu überprüfen, indem die Phasenwinkel aus Zeigerdiagrammen berechnet werden, die nach den Ausführungen des Abschn. E. 5.0.1 angefertigt werden.

### E. 5.5. Strom- und Spannungsresonanz

- Aufgaben:*
1. Für einen Reihenschwingkreis sind der Verlauf der Teilspannungen an Kondensator und Spule sowie die Stromstärke in Abhängigkeit von der Frequenz der Stromquelle bei verschiedenen Wirkwiderständen aufzunehmen und zu diskutieren.
  2. Aus den Resonanzkurven des Reihenschwingkreises sind die Dämpfungs- und Gütfaktoren zu bestimmen.
  3. Im Parallelkreis sind der Verlauf des Gesamtstromes und der Teilströme durch Kondensator und Spule in Abhängigkeit von der Frequenz der Stromquelle zu verfolgen und in einem Diagramm darzustellen.
  4. Für den Resonanzfall sind entweder die Spannungs- oder Stromüberhöhung zu ermitteln.

Die Spannungsresonanz im Reihen- oder Serienkreis ist einerseits in der Wechselstromtechnik gefürchtet, da die unter Umständen hohen Spannungen beispielsweise Menschen gefährden, Isolatoren zerstören oder zu Sprüherscheinungen führen können. Andererseits werden Serienkreise in der Schwachstromtechnik im Eingang von Rundfunkempfängern (Antennenkreis), in Frequenzmessern oder als Einzelkreise von Bandfiltern benutzt, weil für die Resonanzfrequenz größte Stromstärke herrscht. Parallelkreise können bestimmte Frequenzen sperren (Sperrkreise). Sie dienen außerdem als Schwingkreise in Sendern, Verstärkern oder Empfängern.

Fast bei allen technischen Anwendungen werden möglichst wenig gedämpfte Schwingkreise angestrebt. Das sind solche, deren *Dämpfungsfaktor*

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \quad (64)$$

klein ist.

Nach Gl. (31 b) vermindert die Dämpfung die Resonanzamplitude und vergrößert die relative *Halbwerts- oder Bandbreite*. Für diese wurde im Abschn. E. 5.0.4 (vgl. Abb. 130)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\delta}{\omega_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\delta}{\pi\nu_0} \quad (65)$$

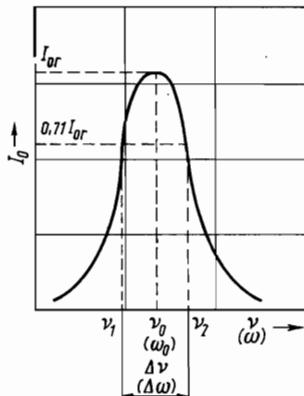


Abb. 130.  
Resonanzkurve und Halbwertsbreite

abgeleitet. Damit kann für das *logarithmische Dekrement* [vgl. Gl. (E. 4.-33)]

$$A = \frac{\delta}{\nu_0} = \frac{\pi \Delta\nu}{\nu_0} \quad (66)$$

geschrieben werden. Der *Gütefaktor* eines Schwingkreises ist durch

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{R/L} = \frac{2\pi\nu_0}{R/L} \quad (67)$$

definiert.

#### Versuchsausführung

Die Kreise werden jeweils über einen Verstärker mit dem Frequenzgenerator verbunden (Abb. 131 und 132). Wir achten darauf, daß über die

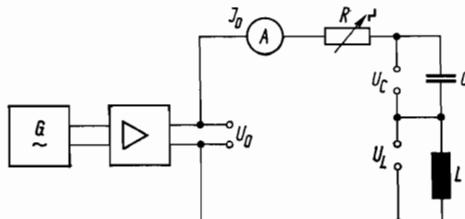


Abb. 131. Schaltung zur Spannungsresonanz

gesamte Meßreihe hinweg die Eingangsspannung  $U_0$  konstant bleibt, und stellen gegebenenfalls am Verstärker nach. Den günstigsten Wert der Eingangsspannung und den zu überstreichenden Frequenzbereich entnehmen wir der am Arbeitsplatz ausliegenden Vorschrift.

Falls die Spannungen der *Aufgaben 1* und *2* mit elektronischen Spannungsmessern (Abschn. E. 2.1) bestimmt werden sollen, können wir wegen der einseitigen Erdung dieser Instrumente mit der Schaltung nach Abb. 131

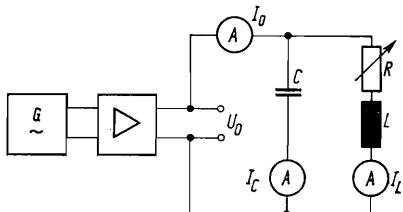


Abb. 132. Schaltung zur Stromresonanz

nur  $U_0$  und  $U_L$  gleichzeitig messen. Sollen  $U_0$  und  $U_C$  gleichzeitig bestimmt werden, so müssen wir  $C$  und  $L$  in der Schaltung vertauschen. Die Resonanzkurven  $I_0 = f(\nu)$  werden für drei hinreichend unterschiedliche Wirkwiderstände aufgenommen. Die Dämpfungsfaktoren (*Aufgabe 2*) sollen gemäß Gl. (65) aus den Resonanzkurven ermittelt und mit den nach Gl. (64) berechneten Werten verglichen werden. Der Gütefaktor folgt aus Gl. (67). Entsprechende Messungen werden am Parallelkreis (*Aufgabe 3*) vorgenommen.

*Aufgabe 3* wird über die Gln. (33) und (33a) gelöst. Gegebenenfalls ist zu beachten, daß  $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$  ( $I_{\text{eff}}$  effektive Stromstärke) ist.

# Optik und Atomphysik

## O. 1. LINSEN UND LINSENSYSTEME

### O. 1.0. Allgemeine Grundlagen

Linsen sind Körper aus einer lichtbrechenden Substanz, die von zwei meist kugelförmigen Flächen begrenzt werden. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Flächen heißt optische Achse.

Ein auf die Linse fallender Lichtstrahl wird entsprechend dem Brechungsgesetz (siehe Abschn. O. 3) an beiden Grenzflächen gebrochen. Beschränkt man sich auf Strahlen, die nur kleine Winkel mit der optischen Achse bilden, so vereinigt eine Linse alle von einem Gegenstandspunkt  $G$  ausgehenden Strahlen in einem Bildpunkt  $B$ . Das Bild  $B$  heißt reell, wenn sich die Strahlen im Bildpunkt wirklich schneiden, es heißt virtuell, wenn sich nur die rückwärtigen Verlängerungen der Strahlen schneiden.

Zunächst beschränken wir unsere Betrachtungen auf dünne Linsen. Bei diesen lässt sich die zweimalige Brechung des Lichtes durch eine einzige Brechung an der Mittelebene der Linse ersetzt denken.

Es sind *Sammellinsen* und *Zerstreuungslinsen* zu unterscheiden: Sammellinsen sind in der Mitte dicker, Zerstreuungslinsen dünner als am Rand.

Parallel zur optischen Achse einfallendes Licht wird von einer Sammellinse im Brennpunkt  $F$  vereinigt (Abb. 133 a); der Abstand des Brennpunktes  $F$  von der Mittelebene ist die *Brennweite*  $f$  der Linse. Der reziproke Wert  $D = 1/f$  wird als *Brechkraft* bezeichnet und in Dioptrien ( $1 \text{ Dioptrie} = 1 \text{ m}^{-1}$ ) gemessen.

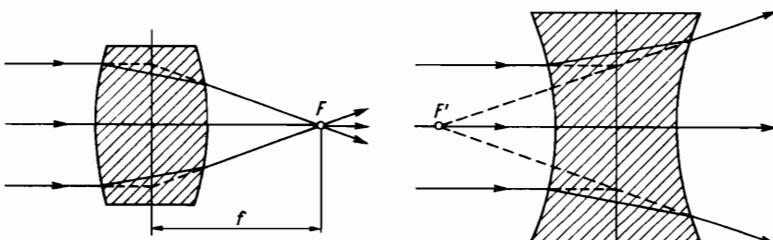


Abb. 133. Lichtbrechung an einer Sammellinse (a) und an einer Zerstreuungslinse (b). Für die Bildkonstruktion lässt sich die zweimalige Brechung der Strahlen durch eine einmalige Brechung an der Mittelebene ersetzen (die Linsen sind übertrieben dick gezeichnet).

Bei Zerstreuungslinsen werden parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen so gebrochen, als kämen sie von einem Brennpunkt  $F'$  (Abb. 133 b); auch hier ist der Abstand des Brennpunkts von der Mittelebene die Brennweite  $f'$ . Sammellinsen haben also reelle, Zerstreuungslinsen virtuelle Brennpunkte.

Für die geometrische Konstruktion des bei der optischen Abbildung entstehenden Bildes  $B$  benutzt man Strahlen, deren Verlauf nach dem Durchgang durch die Linse leicht zu verfolgen ist:

1. den Mittelpunktsstrahl, der seine Richtung nicht ändert,
2. den Parallelstrahl, der zum Brennpunktsstrahl wird,
3. den Brennpunktsstrahl, der zum Parallelstrahl wird.

In Abb. 134a ist die Konstruktion des Bildes bei einer Sammellinse für drei verschiedene Gegenstandsweiten ausgeführt; die Abb. 134b zeigt die entsprechende Konstruktion für eine Zerstreuungslinse.

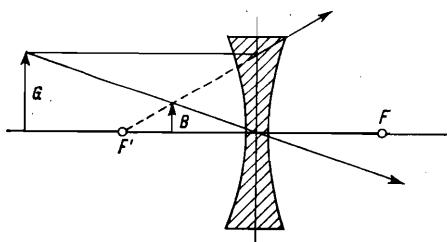
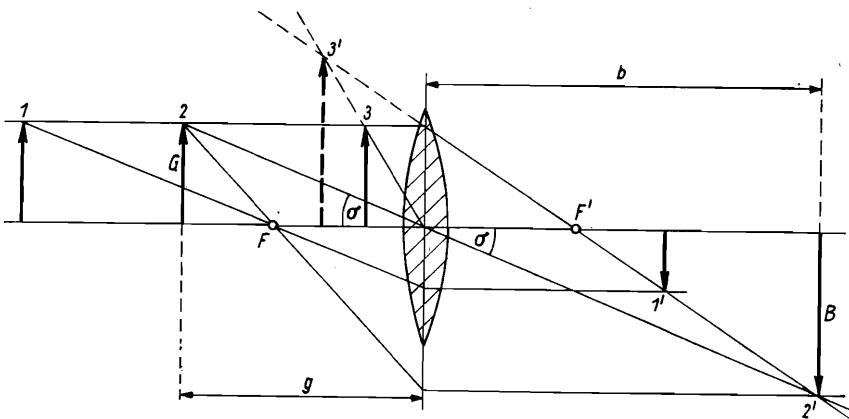


Abb. 134. Bildkonstruktion bei einer dünnen Sammellinse (a) und einer dünnen Zerstreuungslinse (b)

$B$  und  $G$  bezeichnen Bild- bzw. Gegenstandsgröße,  $b$  und  $g$  Bild- bzw. Gegenstandsweite

Für Hohlspiegel gelten völlig analoge Betrachtungen, die entsprechende Bildkonstruktion zeigt Abb. 135.

Das Verhältnis von Bildgröße  $B$  zu Gegenstandsgröße  $G$  bezeichnet man als *linearen Abbildungsmaßstab*  $\gamma$ . Mit Hilfe des Strahlensatzes ergibt sich aus Abb. 134a

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (1)$$

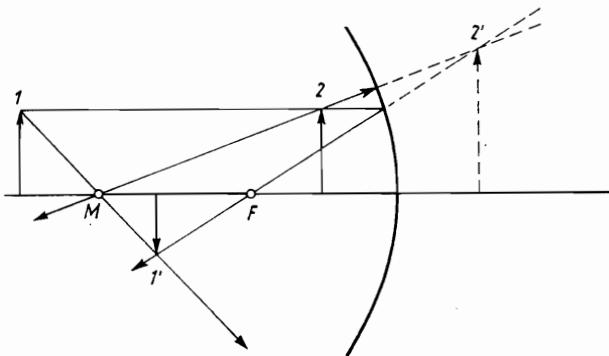


Abb. 135. Bildkonstruktion am Hohlspiegel

$M$  Krümmungsmittelpunkt,  $F$  Brennpunkt. Die Brennweite ist gleich dem halben Krümmungsradius:  $f = R/2$

Ebenfalls mit Hilfe des Strahlensatzes erhält man

$$\frac{G}{f} = \frac{B}{b-f},$$

woraus die Linsengleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2)$$

folgt. Bei virtuellen Bildern bzw. Brennpunkten sind  $b$  bzw.  $f$  negativ einzusetzen.

Setzt man zwei dünne Linsen mit den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  so zusammen, daß ihr Abstand klein gegen die Brennweite ist, so addieren sich ihre Brechkräfte, d. h., für die Brennweite  $F$  des Systems gilt

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}. \quad (3)$$

Die Brennweite  $f$  einer dünnen Plankonvexlinse läßt sich aus dem Brechungsindex  $n$  des Linsenmaterials und dem Krümmungsradius  $R$  der konvexen Linsenfläche berechnen. Aus Abb. 136 ergibt sich

$$\frac{h}{f} = \tan(\beta - \alpha) \quad (4)$$

und

$$\frac{h}{R} = \sin \alpha. \quad (5)$$

(Bei einer Kugelfläche geht das Einfallslot durch den Krümmungsmittelpunkt  $M$ .)

Nach dem Brechungsgesetz (siehe Abschn. O. 3) ist

$$n \sin \alpha = \sin \beta. \quad (6)$$

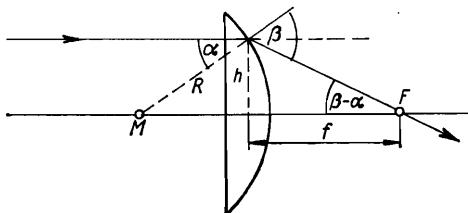


Abb. 136. Zur Berechnung der Brennweite einer dünnen Plankonvexlinse

Beschränkt man sich auf kleine Einfallshöhen  $h$ , so sind die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sehr klein und es wird

$$\frac{h}{f} = \tan(\beta - \alpha) \approx \beta - \alpha \approx (n - 1) \cdot \alpha \approx (n - 1) \cdot \frac{h}{R}.$$

Man findet also

---


$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \frac{1}{R}. \quad (7a)$$


---

Für eine dünne Plankonkavlinse gilt die gleiche Formel, man muß jedoch  $R$  negativ zählen, so daß sich eine negative Brennweite ergibt.

Linsen mit 2 gekrümmten Flächen kann man sich aus 2 einseitig planen Linsen zusammengesetzt denken. Entsprechend Gl. (3) wird dann

---


$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (7b)$$


---

Dabei ist der Radius für konvexe Flächen positiv, für konkave negativ einzusetzen. Da der Brechungsindex von der Wellenlänge des benutzten Lich-

tes abhängt, ist auch die Brennweite wellenlängenabhängig. Bei dicken Linsen kann man sich die zweimalige Brechung der Lichtstrahlen an den Linsenflächen nicht mehr durch eine einzige Brechung an der Mittelebene ersetzt denken. Man hilft sich hier durch Einführung der gegenüberliegenden Hauptebene  $H$  und der bildseitigen Hauptebene  $H'$  (Abb. 137), an

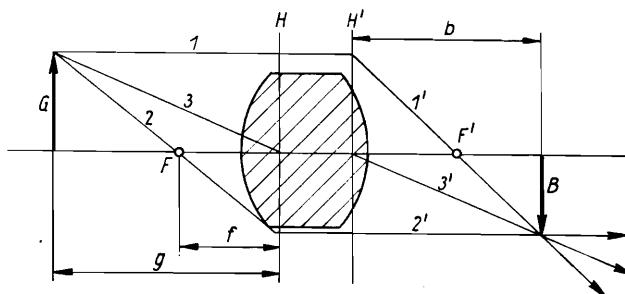


Abb. 137. Bildkonstruktion bei einer dicken Sammellinse

denen man sich die Strahlen gebrochen denkt. Die Bildkonstruktion ist dabei nach folgender Vorschrift<sup>1)</sup> auszuführen:

1. Zwischen  $H$  und  $H'$  laufen alle Strahlen parallel zur Achse.
2. Der Parallelstrahl  $I$  wird an der Hauptebene  $H'$  gebrochen und wird zum Brennpunktsstrahl  $I'$  durch den zu  $H'$  gehörigen Brennpunkt  $F'$ .

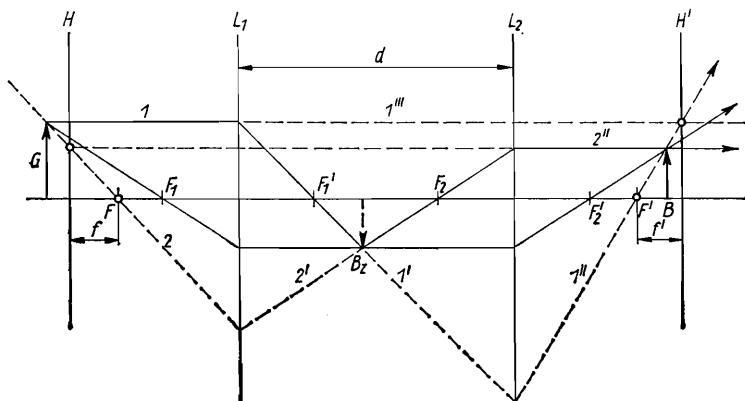


Abb. 138. Konstruktion der Hauptebenen eines Linsensystems

<sup>1)</sup> Der nach dieser Vorschrift konstruierte Strahlenverlauf hat nur für die Bildkonstruktion Bedeutung und stimmt nicht mit dem wirklichen Strahlengang überein.

3. Der Brennpunktsstrahl  $2$  durch den zu  $H$  gehörigen Brennpunkt  $F$  wird an der Hauptebene  $H$  gebrochen und wird zum Parallelstrahl  $2'$ .
4. Der Mittelpunktsstrahl  $3$  wird lediglich parallel verschoben.

Rechnet man  $g$ ,  $b$  und  $f$  von den zugehörigen Hauptebenen ab, so gelten die Gln. (2) und (1) auch für dicke Linsen. Die Lage der Hauptebenen lässt sich nach dem in Versuch O. 1.2 beschriebenen Verfahren von *Abbe* bestimmen.

Die Methode der Hauptebenen bewährt sich nicht nur bei dicken Linsen, sondern sie kann auch zur Bildkonstruktion in zentrierten Linsensystemen (mehrere Linsen mit gemeinsamer optischer Achse) benutzt werden.

Die Lage der Hauptebenen des Systems lässt sich dabei aus der Lage der Hauptebenen der Einzellinsen konstruieren. Das Verfahren dazu wird in Abb. 138 an zwei dünnen Sammellinsen  $L_1$  und  $L_2$ , die den Abstand  $d$  haben, demonstriert (die Linsen sind nur durch ihre Mittelebenen angedeutet). Zunächst konstruiert man mittels Parallel- und Brennpunktsstrahlen das Zwischenbild  $B_z$  und das Bild  $B$  des Gegenstandes  $G$ . Nun verfolgt man den Verlauf des Parallelstrahls  $1$  durch beide Linsen und erhält die Strahlen  $1'$  und  $1''$ , da ja  $1''$  an  $L_2$  so gebrochen wird, daß  $1''$  durch den Bildpunkt  $B$  geht. Der Schnittpunkt der Verlängerung  $1'''$  von  $1$  mit  $1''$  bestimmt die Lage der Hauptebene  $H'$ , der Schnittpunkt von  $1''$  mit der optischen Achse ist der bildseitige Brennpunkt  $F'$  des Systems.  $H$  und  $F$  werden analog konstruiert, indem man den Parallelstrahl  $2''$  rückwärts verfolgt und den Schnittpunkt seiner Verlängerung  $2'''$  mit dem Strahl  $2$  bestimmt. In dem Beispiel von Abb. 138 liegen  $F$  und  $F'$  innerhalb der Hauptebenen.

### O. 1.1. Krümmungsradius und Brennweite dünner Linsen

*Aufgaben:* 1. Krümmungsradius und Brennweite einer dünnen Plankonvexlinse sind nach verschiedenen Verfahren zu messen; aus den Meßwerten ist der Brechungsindex  $n$  zu berechnen.

2. Die Gültigkeit der Linsengleichung ist zu überprüfen.

#### a) Messung des Krümmungsradius

Der Krümmungsradius kann mittels mechanischer oder optischer Verfahren gemessen werden.

Bei den mechanischen Verfahren mißt man, beispielsweise mit einem Tiefentaster, wie weit eine konvexe Linsenfläche in eine kreiszylindrische Vertiefung einsinkt bzw. wie weit die Mitte einer konkaven Linsenfläche über der Auflageebene liegt.

Bei den berührungslosen optischen Verfahren benutzt man die Linsenfläche als Spiegel. Bei konkaven Flächen ist das *Autokollimationsverfahren* am einfachsten: Befindet sich im Krümmungsmittelpunkt des Spiegels ein

Schirm mit einer leuchtenden Marke, so wird diese umgekehrt und gleich groß auf dem Schirm scharf abgebildet (Abb. 139). In der Praxis benutzt man als leuchtende Marke das über eine dünne planparallele Platte  $P$  beleuchtete Fadenkreuz  $K$  eines sog. Gaußschen Okulars (Abb. 140) und verändert den Abstand zwischen Fadenkreuz und Spiegel so lange, bis das Fadenkreuz scharf und parallaxefrei in sich abgebildet wird.

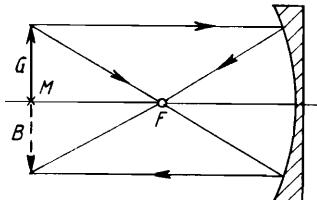


Abb. 139. Autokollimationsverfahren beim Hohlspiegel

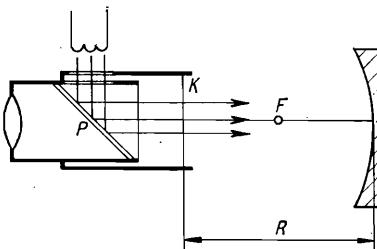


Abb. 140. Gaußsches Okular

Bei konvexen Flächen entstehen virtuelle Bilder, das Autokollimationsverfahren ist daher nicht anwendbar. Man benutzt dann die *Methode von Kohlrausch* (Abb. 141). Bei diesem Verfahren befinden sich vor der Linsenfläche zwei leuchtende Marken  $1$  und  $2$ , deren Spiegelbilder  $1'$  und  $2'$  hinter der Linsenfläche liegen. Den Abstand  $B$  der Spiegelbilder bestimmt man, indem man vor der Linse eine durchsichtige Skale  $Sk$  befestigt und mit

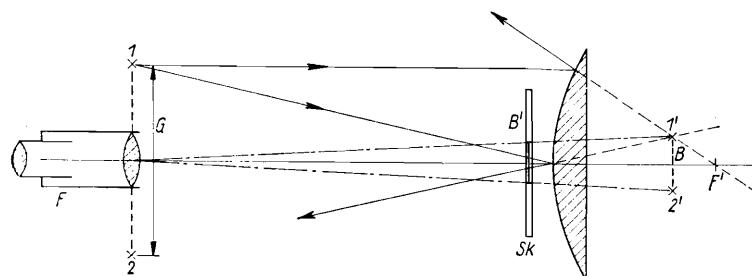


Abb. 141. Kohlrauschsche Methode zur Messung des Krümmungsradius

einem Fernrohr  $F$ , dessen Objektiv sich auf der Verbindungsgeraden der beiden leuchtenden Marken befindet, die Projektion  $B'$  der virtuellen Bilder auf diese Skale mißt.

Nach Gl. (2) ist

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = -\frac{1}{|f|} = -\frac{2}{R}.$$

Aus Abb. 141 entnimmt man unter Benutzung des Strahlensatzes

$$b/g = B/G$$

und

$$B/(g + |b|) = B'/g.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen die nicht direkt meßbaren Größen  $b$  und  $B$ , so ergibt sich

$$R = \frac{2 \cdot g \cdot B'}{G - 2 \cdot B'}. \quad (8)$$

### b) Brennweitenmessung

Die Brennweite von Sammellinsen mißt man am einfachsten aus Gegenstands- und Bildweite, indem man das Bild eines leuchtenden Gegenstands (beleuchteter durchsichtiger Maßstab) auf einem Schirm auffängt und die entsprechenden Abstände zum Linsenmittelpunkt mißt. Aus Gl. (2) berechnet man daraus die Brennweite.

Das Verfahren hat den Nachteil, daß bei gefäßten Linsen die Lage der Mittelebene nicht genau bekannt ist. Man verwendet dann das *Besselsche Verfahren*, bei dem Gegenstands- und Bildweite indirekt durch genauer

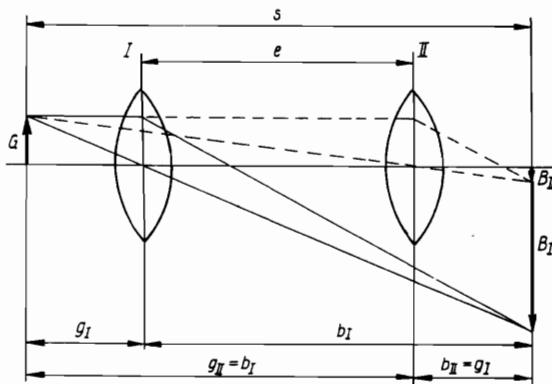


Abb. 142. Besselsche Methode der Brennweitenbestimmung

meßbare Größen ermittelt werden (Abb. 142). Bei festem Abstand  $s$  zwischen Gegenstand und Schirm erhält man bei zwei symmetrischen Linsenstellungen  $I$  und  $II$  scharfe reelle Bilder auf dem Schirm (in Stellung  $I$  ein vergrößertes, in Stellung  $II$  ein verkleinertes), wenn der Abstand  $s$  größer als die vierfache Brennweite der Linse ist.

Ist die Größe der Verschiebung von Stellung *I* nach Stellung *II* gleich *e*, so gilt wegen der Symmetrie der Linsenstellungen

$$e = b_I - g_I \quad \text{bzw.} \quad e = g_{II} - b_{II} \quad (9a)$$

und

$$s = g_I + b_I = g_{II} + b_{II}. \quad (9b)$$

Löst man nach *g* und *b* auf und setzt in die Linsengleichung (2) ein, so ergibt sich<sup>1)</sup>

$$f = \frac{1}{4} \left( s - \frac{e^2}{s} \right). \quad (10)$$

Die Brennweitenmessung kann auch nach dem *Autokollimationsverfahren* erfolgen (Abb. 143). Man bringt dazu hinter der Linse einen ebenen Spiegel

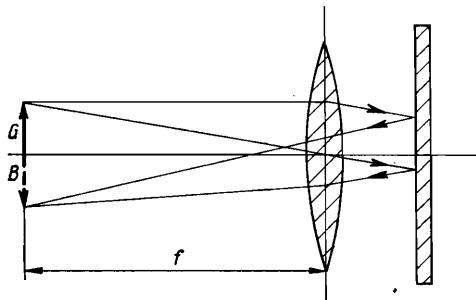


Abb. 143. Autokollimationsverfahren zur Brennweitenmessung

senkrecht zur optischen Achse an und verschiebt eine als Gegenstand dienende leuchtende Marke so lange, bis ihr Bild in der Gegenstandsebene scharf erscheint. Ist dies erreicht, so befindet sich der Gegenstand in der Brennweite der Linse. Alle von einem Punkt des Gegenstands ausgehenden Lichtstrahlen treten daher parallel aus der Linse aus, werden reflektiert und in der Brennebene wieder zu einem Punkt vereinigt. Für die praktische Ausführung benutzt man ebenso wie bei der Messung des Krümmungsradius das Gaußsche Okular.

Das Verfahren wird hauptsächlich benutzt, um ein Fernrohr auf Unendlich einzustellen (das Fadenkreuz befindet sich dann in der Brennebene des Objektivs) und um seine Sehlinie senkrecht zu einer reflektierenden Fläche zu stellen. Die Linse *L* ist in diesem Falle das Fernrohrobjektiv; der Abstand zwischen Fernrohr und Spiegel kann beliebig groß sein.

<sup>1)</sup> Bei dicken Linsen ist  $s = g + b + \overline{HH'}$ , wenn  $\overline{HH'}$  der Abstand der beiden Hauptebenen ist. Bei Präzisionsmessungen muß daher  $\overline{HH'}$  ebenfalls gemessen werden. In Gl. (10) ist anstelle von *s* die Größe  $s - \overline{HH'}$  einzusetzen.

Da die Abbildung mit Zerstreuungslinsen nur virtuelle Bilder liefert, muß deren Brennweite indirekt gemessen werden. Man setzt zu diesem Zwecke die Zerstreuungslinse, deren Brennweite  $f_z$  zu messen ist, mit einer Sammellinse bekannter Brennweite  $f_s$  zu einem zentrierten Linsensystem zusammen.

Für die Brennweite  $F$  des Systems ergibt sich nach Gl. (3)

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_s} + \frac{1}{f_z},$$

wobei  $f_z$  negativ ist. Wählt man die Brennweite der Sammellinse kleiner als den Betrag der Brennweite der Zerstreuungslinse, so überwiegt die sammelnde Wirkung, und das System hat eine positive Brennweite, die sich nach den oben beschriebenen Methoden messen lässt. Aus  $f_s$  und  $F$  ergibt sich

$$f_z = -\frac{F \cdot f_s}{F - f_s}. \quad (11)$$

### Versuchsausführung

Details zur mechanischen Ermittlung des Krümmungsradius sind den entsprechenden Gerätebeschreibungen zu entnehmen.

Bei der Messung des Krümmungsradius nach *Kohlrausch* beobachtet man außer den an der Vorderseite der Linse reflektierten Bildern auch solche, die von Reflexionen an der Rückseite stammen. Sie sind lichtschwächer; bei einer einseitig planen Linse kann man sie vermeiden, indem man die Planfläche schräg zur optischen Achse des Fernrohrs stellt.

Die Brennweitenmessungen sind auf einer optischen Bank auszuführen, die Linsen sind dabei genau senkrecht zur optischen Achse aufzustellen. Um chromatische Abbildungsfehler zu vermeiden, ist gegebenenfalls mit monochromatischem Licht zu arbeiten. Abbildungsfehler infolge zu weit geöffneter Bündel beseitigt man durch genügend enge Blenden vor den Linsen.

Zur Überprüfung der Linsengleichung mißt man bei verschiedenen Gegenstandsweiten  $g$  die Bildweite  $b$  und trägt  $1/b$  über  $1/g$  auf. Dabei muß sich eine Gerade mit der Steigung  $-1$  ergeben.

## O. 1.2. Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems

- Aufgaben:*
1. Es sind die Brennweite und die Lage der Hauptebenen eines Systems aus zwei dünnen Sammellinsen zu bestimmen, und es ist eine maßstabgerechte Zeichnung anzufertigen.
  2. Die Brennweiten der Einzellinsen sind zu messen. Unter Benutzung der dabei erhaltenen Werte sind die Lagen der Brennpunkte und der Hauptebenen zu konstruieren und mit dem Ergebnis von Aufgabe 1 zu vergleichen.

Die Messung der Brennweite und der Lage der Hauptebenen eines Linsensystems erfolgt nach dem *Verfahren von Abbe*, das auf der Messung des Abbildungsmaßstabes reeller Bilder beruht. Kombiniert man die Gln. (2) und (1) miteinander, so ergibt sich

$$g = f \cdot \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \quad (12a)$$

und

$$b = f \cdot (1 + \gamma). \quad (12b)$$

Gegenstandsweite  $g$  und Bildweite  $b$  sind nicht direkt meßbar, da die Lage der Hauptebenen noch unbekannt ist. Man mißt daher zunächst die Entfernung  $g'$  und  $b'$  von einer beliebig am Linsensystem angebrachten Ablesemarke  $A$  ab und erhält (Abb. 144)

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + h \quad (13a)$$

und

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + \gamma) + h'. \quad (13b)$$

Mißt man bei zwei verschiedenen Entfernungen  $g'_1$  und  $g'_2$  die Werte  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , so kann man die Unbekannten  $h$  und  $h'$  durch Differenzbildung eliminieren und erhält

$$f = \frac{\frac{g'_2 - g'_1}{1}}{\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1}} \quad (14a)$$

bzw.

$$f = \frac{\frac{b'_2 - b'_1}{1}}{\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1}}. \quad (14b)$$

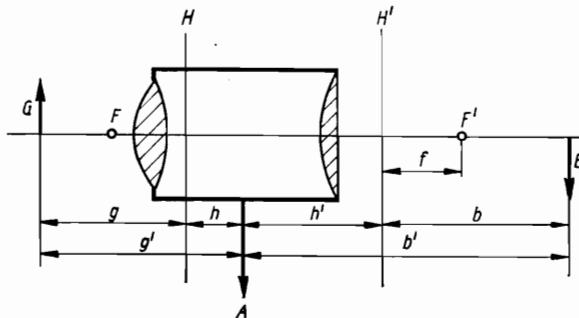


Abb. 144. Messung der Hauptebenenlage nach *Abbe*

Setzt man die so bestimmte Brennweite  $f$  in Gl. (13a) bzw. (13b) ein, so ergibt sich

$$h = g'_1 - f \cdot \left(1 + \frac{1}{\gamma_1}\right) = g'_2 - f \cdot \left(1 + \frac{1}{\gamma_2}\right) \quad (15a)$$

und

$$h' = b'_1 - f \cdot (1 + \gamma_1) = b'_2 - f \cdot (1 + \gamma_2). \quad (15b)$$

Es kann vorkommen, daß  $h$  oder  $h'$  negativ sind. Negatives  $h$  bedeutet, daß die Hauptebene  $H$  zwischen Ablesemarke und Bildebene liegt; negatives  $h'$  bedeutet, daß  $H'$  zwischen Ablesemarke und Gegenstandsebene liegt. Die Brennweite  $f$  kann ebenfalls negativ werden. In diesem Falle liegt der gegenstandsseitige Brennpunkt  $F$  zwischen  $H$  und der Bildebene, der bildseitige Brennpunkt  $F'$  zwischen  $H'$  und der Gegenstandsebene.

### *Versuchsausführung*

Als Gegenstand benutzen wir eine beleuchtete Glasskale, die wir durch Verschieben des Linsensystems auf einen Schirm mit Millimeterteilung oder auf die Okularskale einer Meßlupe scharf abbilden. Es empfiehlt sich, bei mäßiger Vergrößerung oder Verkleinerung zu messen (etwa  $0,2 < \gamma < 5$ ) und möglichst enge Blenden vor die Linsen zu setzen, da sich sonst Abbildungsfehler störend bemerkbar machen.

Um die Genauigkeit der Messungen zu vergrößern, messen wir nicht nur bei zwei, sondern bei 4 bis 8 Gegenstandsweiten und tragen  $g'$  über  $1/\gamma$  und  $b'$  über  $\gamma$  auf. Es ergeben sich zwei Geraden, deren Steigung gleich der Brennweite ist. Die Steigung ermittelt man, indem man entweder nach Augenmaß die beste Gerade durch die Meßpunkte legt oder diese durch Ausgleichsrechnung (siehe Abschn. 1.5.4 der Einleitung) berechnet. Mit der so ermittelten Brennweite berechnen wir aus Gl. (15a) für alle gemessenen Gegenstandsweiten die Größe  $h$  und bilden den Mittelwert. Analog berechnen wir aus Gl. (15b)  $h'$ .

Für die Fehlerrechnung legen wir die Gln. (14) und (15) zugrunde.

Die Brennweite der Einzellinsen bestimmt man mit einem der in Versuch O. 1.1 beschriebenen Verfahren; die Konstruktion der Lage der Hauptebenen und Brennpunkte erfolgt nach der im Abschn. O. 1.0 angegebenen Methode.

## O. 1.3. Lupe und Mikroskop

- Aufgaben:**
1. Die Vergrößerung einer Lupe und eines Mikroskops ist zu bestimmen.
  2. Die Apertur eines Mikroskops ist zu messen.
  3. Der Zusammenhang zwischen Apertur und Auflösungsvermögen eines Mikroskops ist mit Hilfe von Testobjekten zu überprüfen.

Der Winkel, unter dem ein Gegenstand vom optischen Mittelpunkt des Auges aus gesehen wird, heißt **Sehwinkel**  $\sigma$  oder **scheinbare Größe** (Abb. 145). Er hängt von der Objektgröße  $G$  und vom Abstand des Gegenstandes vom Auge ab. Objekte gleicher scheinbarer Größe erzeugen auf der Netzhaut

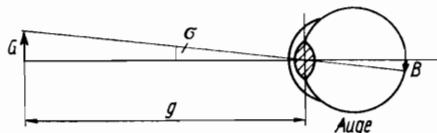


Abb. 145. Scheinbare Größe eines Objekts

gleich große Bilder. Der Sehwinkel kleiner Gegenstände läßt sich durch Annäherung an das Auge nicht beliebig vergrößern, da unterhalb der deutlichen Sehweite  $s = 25$  cm die Sehschärfe abnimmt.

**Lupe** und **Mikroskop** dienen zur Vergrößerung des Sehwinkels kleiner Gegenstände. Als Vergrößerung bezeichnet man das Verhältnis

$$\Gamma = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma}, \quad (16)$$

wobei  $\sigma$  der Sehwinkel mit „unbewaffnetem“ Auge (ohne optisches Instrument) und  $\sigma'$  der Sehwinkel bei Benutzung eines optischen Instruments sind und beide Sehwinkel auf die gleiche Entfernung zu beziehen sind. Eine Lupe ist eine Sammellinse, bei der sich der Gegenstand innerhalb der Brennweite befindet, so daß ein vergrößertes, aufrechtes, virtuelles Bild entsteht (Abb. 146). Zweckmäßigerverweise arbeitet man so, daß sich das Bild in der

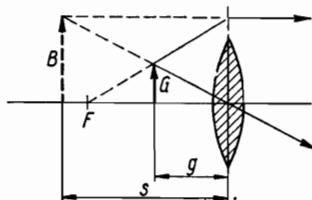


Abb. 146. Zur Vergrößerung der Lupe

deutlichen Sehweite  $s$  befindet. Bringt man die Lupe unmittelbar vor das Auge, so ist  $\tan \sigma' = B/s$ , während ohne Lupe  $\tan \sigma = G/s$  ist. Aus der Linsengleichung  $1/g - 1/s = 1/f$  (das negative Vorzeichen entspricht dem virtuellen Bild) folgt  $s/g = s/f + 1$ , und man erhält

---


$$\Gamma_L = \frac{B}{G} = \frac{s}{g} = \frac{s}{f} + 1. \quad (17)$$


---

In diesem Falle ist die Vergrößerung  $\Gamma_L$  gleich dem Abbildungsmaßstab  $\gamma$ . Im allgemeinen unterscheiden sich jedoch Vergrößerung und Abbildungsmaßstab. Beispielsweise kann man eine Lupe auch so benutzen, daß der Gegenstand in der Brennebene, das virtuelle Bild demzufolge im Unendlichen liegt. Der Sehwinkel mit Lupe ist dann gleich  $G/f$ , und man erhält  $\Gamma_{L\infty} = s/f$ , während der Abbildungsmaßstab  $\gamma_\infty = \infty$  ist.

Genügt die mit einer Lupe erreichbare Vergrößerung nicht, so benutzt man ein *Mikroskop*. Bei diesem wird zunächst mittels einer Sammellinse (*Objektiv*) ein vergrößertes, reelles Zwischenbild entworfen und dieses mittels einer Lupe (*Okular*) betrachtet (Abb. 147). Die damit erzielten Vergrößerungen sind gleich dem Produkt aus dem Abbildungsmaßstab  $\gamma_0 = B_z/G$  des Objektivs und der Lupenvergrößerung  $m$  des Okulars.

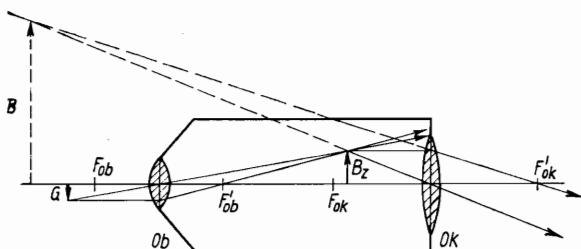


Abb. 147. Strahlengang im Mikroskop

Maßgebend für die Leistungsfähigkeit eines Mikroskops ist jedoch nicht die erreichbare Vergrößerung, sondern sein *Auflösungsvermögen*, das angibt, bei welchem minimalen Abstand  $d_{\min}$  zwei Objektpunkte noch getrennt wahrnehmbar sind.

Das Auflösungsvermögen wird durch die Beugung des Lichtes an der Objektivöffnung begrenzt (vgl. Abschn. O. 2).

Nach *Abbe* ist

$$d_{\min} = \frac{0,61 \cdot \lambda}{n \cdot \sin u} = \frac{0,61 \cdot \lambda}{A}. \quad (18)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Wellenlänge des benutzten Lichtes (bei weißem Licht rechnet man mit  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , da für Licht dieser Wellenlänge das Auge am empfindlichsten ist),  $n$  der Brechungsindex des Mediums zwischen Gegenstand und Objektiv und  $u$  der halbe Öffnungswinkel des von einem axial gelegenen Gegenstandspunkt in das Objektiv eintretenden Lichtbündels (vgl. Abb. 149). Die Größe  $n \cdot \sin u = A$  heißt *numerische Apertur* des Objektivs, sie ist ein Maß für sein Auflösungsvermögen.

### Versuchsausführung

Zur Messung der Vergrößerung der Lupe betrachtet man mit einem Auge durch einen Tubus  $T$  die in der deutlichen Sehweite befindliche Skale  $h$  und

mit dem anderen Auge durch die Lupe  $L$  die vertikal verschiebbare gleichartige Skale  $II$  (Abb. 148).

Skale  $II$  wird so lange verschoben, bis ihr von der Lupe erzeugtes Bild in der gleichen Entfernung wie Skale  $I$  scharf erscheint, so daß man beide Skalen übereinander sieht. Bei richtiger Einstellung zeigen die Skalen keine

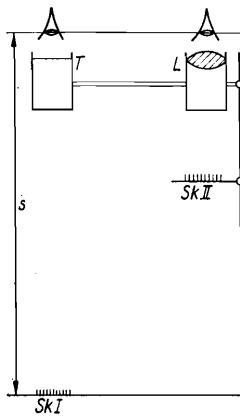


Abb. 148. Messung der Lupenvergrößerung

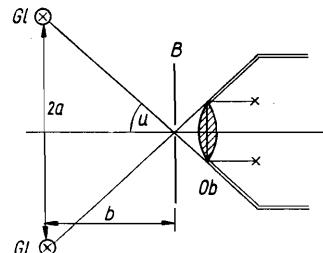


Abb. 149. Messung des Aperturwinkels beim Mikroskop

Parallaxe gegeneinander. Erscheinen dann  $n_1$  Skalenteile von Skale  $I$  gleich  $n_2$  Skalenteilen von Skale  $II$ , so ist die Lupenvergrößerung

$$\Gamma_L = \frac{n_1}{n_2}. \quad (19)$$

Um evtl. Unterschiede der beiden Augen des Beobachters auszugleichen, vertauscht man Lupe und Tubus und bildet das Mittel aus den beiden Messungen.

Die Vergrößerung des Mikroskops läßt sich auf die gleiche Weise bestimmen. Wegen der starken Vergrößerung verwendet man allerdings in diesem Falle als Skale  $II$  ein Objektivmikrometer mit einer  $1/100$ -mm-Teilung, als Skale  $I$  dagegen eine 1-mm-Teilung. Dann ist

$$\Gamma_M = 100 \cdot \frac{n_1}{n_2}. \quad (19a)$$

Zur Messung des Aperturwinkels  $u$  benutzt man das in Abb. 149 schematisch dargestellte Verfahren. Zunächst stellt man das Mikroskop auf eine in der Mitte des Gesichtsfeldes befindliche feine Lochblende  $B$  scharf ein. Dann entfernt man, ohne an der Einstellung etwas zu verändern, das Okular und

beobachtet ein Glühlämpchen *Gl*, das senkrecht zur Sehlinie auf einer Skale verschiebbar ist. Man sieht dann dicht vor dem Objektiv das verkleinerte Bild des Lämpchens. Aus den beiden Stellungen, bei denen dieses gerade am Rande des Gesichtsfeldes verschwindet, ergibt sich der Aperturwinkel zu

$$\tan u = \frac{a}{b}. \quad (20)$$

Zur Überprüfung des Zusammenhangs zwischen Apertur und Auflösungsvermögen betrachten wir als Testobjekte Strichgitter bekannter Gitterkonstante und stellen fest, welcher Abstand gerade noch aufgelöst wird. Es ist zweckmäßig, diese Messung bei monochromatischer Beleuchtung auszuführen. Dabei läßt sich auch die Abhängigkeit des Auflösungsvermögens von der Wellenlänge überprüfen.

## O. 1.4. Fernrohr

*Aufgaben:* 1. Es ist die Vergrößerung eines Fernrohres zu messen.

2. Das Gesichtsfeld des Fernrohres ist zu bestimmen.

3. Es sind die Brennweiten der Objektiv- und Okularlinse von einem Modell eines astronomischen Fernrohrs zu messen. Daraus ist die Vergrößerung des Fernrohrs zu berechnen. Die Vergrößerung ist unabhängig davon direkt zu messen. Beide Werte sind zu vergleichen.

Linsenfernrohre bestehen im einfachsten Falle aus zwei Linsen, dem Objektiv (Sammellinse) und dem Okular (Sammel- oder Zerstreuungslinse). Sie werden zur Vergrößerung des Schenkels eines weit entfernten Gegenstands verwendet. Das vom Gegenstand ausgehende Licht trifft daher nahezu parallel auf das Fernrohrobjektiv. Zur Betrachtung ferner Gegenstände läßt man beim Fernrohr den Brennpunkt  $F'_{\text{ob}}$  des Objektivs mit dem Brennpunkt  $F_{\text{ok}}$  des Okulars zusammenfallen (*telezentrisches System*), so daß parallel ins Objektiv fallende Lichtbündel das Fernrohr auch wieder parallel verlassen. Man beobachtet deshalb mit auf Unendlich akkommodiertem Auge.

Man unterscheidet

a) das *astronomische* oder *Keplersche Fernrohr*, das aus zwei Sammellinsen besteht, einem Objektiv großer und einem Okular kleiner Brennweite (Abb. 150) und

b) das *holländische* oder *Galileische Fernrohr*. Es besteht aus einer langbrennweitigen sammelnden Objektivlinse und einer kurzbrennweitigen Zerstreuungslinse als Okular (Abb. 151).

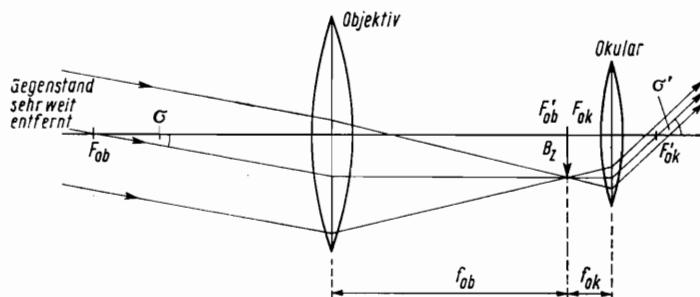


Abb. 150. Strahlengang im astronomischen Fernrohr

Zur Berechnung der Vergrößerung des astronomischen Fernrohrs werde angenommen, daß ein vom fernen Gegenstand ausgehendes paralleles Lichtbündel unter einem Sehwinkel  $\sigma$  in das „unbewaffnete“ Auge des Beobachters fällt (Abb. 145). Da bei einem weit entfernten Gegenstand die Länge des Fernrohrs vernachlässigt werden kann, tritt das Lichtbündel unter dem

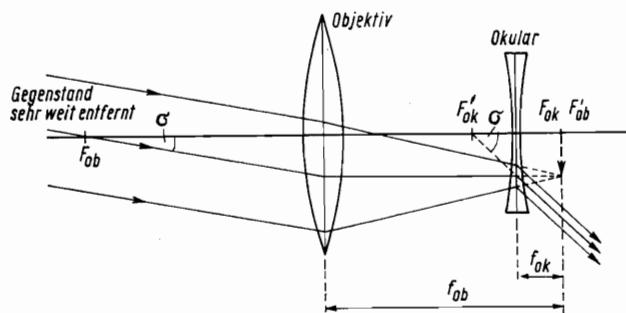


Abb. 151. Strahlengang im holländischen Fernrohr

gleichen Winkel  $\sigma$  in das Objektiv des Fernrohres ein. In der gemeinsamen Brennebene von Objektiv und Okular entsteht ein umgekehrtes reelles Zwischenbild der Größe

$$B_z = f_{ob} \cdot \tan \sigma. \quad (21)$$

Durch das als Lupe wirkende unmittelbar vor dem Auge befindliche Okular erscheint das Bild unter dem Sehwinkel  $\sigma'$  mit

$$\tan \sigma' = \frac{B_z}{f_{ok}} \quad (22)$$

(siehe Abschn. O. 1.3), und für die Vergrößerung des astronomischen Fernrohrs ergibt sich aus den Gln. (16), (21) und (22)

$$\Gamma_{\text{ast}} = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} = \frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}} . \quad (23)$$

**Das astronomische Fernrohr liefert umgekehrte Bilder.**

Beim holländischen Fernrohr entsteht kein reelles Zwischenbild. Als Vergrößerung erhält man durch im wesentlichen analoge Betrachtungen (Abb. 131)

$$\Gamma_{\text{holl}} = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma} = \frac{f_{\text{ob}}}{|f_{\text{ok}}|} . \quad (24)$$

**Das holländische Fernrohr liefert aufrechte Bilder (Opernglas).**

### Versuchsausführung

Zur Messung der Vergrößerung visiert man mit einem Auge durch das Fernrohr einen entfernten Maßstab an, mit dem anderen betrachtet man ihn direkt, indem man seitlich am Fernrohr vorbeisieht. Es gelingt ohne große Mühe, beide Bilder gleichzeitig wahrzunehmen.

Man zählt aus, wie viele Teilstriche  $n_1$  des unvergrößerten Maßstabs auf  $n_2$  Teilstichen des durch das Fernrohr betrachteten Maßstabs kommen. Die Fernrohrvergrößerung  $m$  beträgt dann

$$m = \frac{n_1}{n_2} .$$

Man wiederholt den Versuch, indem man mit jeweils dem anderen Auge durch das Fernrohr sieht bzw. den Maßstab direkt beobachtet.

Zur Bestimmung des als Winkel definierten Gesichtsfeldes (Objektfeldgröße)  $\alpha$  (Abb. 152) bestimmt man den Durchmesser  $D$  des kreisförmigen

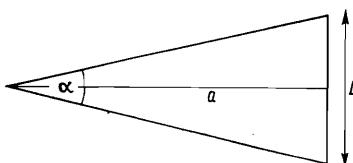


Abb. 152.  
Zur Definition des Gesichtsfeldes

Gesichtsfeldes, indem man wieder den Maßstab durch das Fernrohr betrachtet. Ist  $a$  der Abstand des Fernrohrobjektivs vom Maßstab, so ergibt sich aus  $\tan \alpha/2 \approx \alpha/2 = D/2a$  das Gesichtsfeld zu

$$\alpha = \frac{D}{a} .$$

$\alpha$  ist vom Bogenmaß ins Gradmaß umzurechnen.

Die Brennweiten des Objektivs und des Okulars des Fernrohrmodells werden nach einem der in Abschn. O. 1.1 beschriebenen Verfahren (günstig ist die Bessel-Methode) gemessen. Die Vergrößerung des astronomischen Fernrohrs wird nach Gl. (23) berechnet. Darüber hinaus mißt man, wie oben erläutert, die Vergrößerung direkt und vergleicht beide Werte.

## O. 2. INTERFERENZ, KOHÄRENZ UND BEUGUNG

### O. 2.0. Allgemeine Grundlagen

Licht ist eine elektromagnetische Wellenerscheinung. Zu dieser Feststellung zwingen u. a. die in den folgenden Versuchen beschriebenen Interferenz- und Beugungsphänomene.

Wir beschränken uns auf ebene harmonische Wellen, die sich in  $+x$ -Richtung ausbreiten. Für diese läßt sich die elektrische Feldstärke  $E(x, t)$  in der Form

$$E(x, t) = E_0 \cdot e^{i\omega(t - x/c)} \quad (1)$$

schreiben<sup>1)</sup> (Abb. 153).

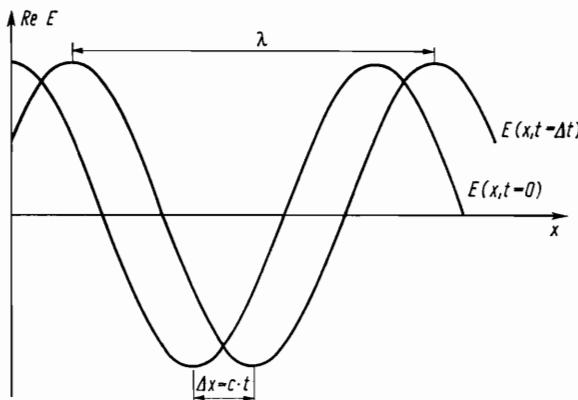


Abb. 153. Örtliche Verteilung der elektrischen Feldstärke einer harmonischen Welle für zwei verschiedene Zeiten

<sup>1)</sup> Die Benutzung der komplexen Schreibweise hat rechentechnische Gründe; physikalische Bedeutung hat nur der Realteil der Gleichungen.

$E_0$  ist die Amplitude der Welle,  $\omega = 2\pi\nu$  die Kreisfrequenz und  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Frequenz  $\nu$  und Wellenlänge  $\lambda$  sind durch die Gleichung

---


$$c = \lambda \cdot \nu \quad (2)$$


---

miteinander verknüpft.

Da es sich beim Licht um sehr hochfrequente elektromagnetische Schwingungen handelt, ist nicht die Feldstärke  $E$ , sondern die Intensität  $I$  direkt beobachtbar; sie ist dem Zeitmittel des Betragsquadrats der Feldstärke proportional:

---


$$I \sim \overline{|E(x, t)|^2} = \overline{E(x, t) \cdot E^*(x, t)}. \quad (3)$$


---

Überlagern sich zwei oder mehrere Wellen gleicher Frequenz, so tritt *Interferenz* ein: je nach ihrer Phasenlage verstärken oder schwächen die Wellen einander (vgl. die analogen Erscheinungen bei Schallwellen, Abschn. M. 8).

Es sei

$$E_1(x, t) = E_{10} \cdot e^{i\omega(t - x/c)}$$

und

$$E_2(x, t) = E_{20} \cdot e^{i[\omega(t - x/c) + \delta]},$$

wobei  $\delta = 2\pi \cdot \Delta x / \lambda$  die Phasenverschiebung der Welle 2 gegenüber der Welle 1 ist ( $\Delta x$  ist die Wegdifferenz der beiden Wellen).

Da sich elektrische Feldstärken ungestört überlagern, erhält man am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  die Feldstärke

$$E(x, t) = (E_{10} + E_{20} \cdot e^{i\delta}) \cdot e^{i\omega(t - x/c)}, \quad (4)$$

die einer Intensität

$$I \sim (E_{10} + E_{20} \cdot e^{i\delta}) \cdot (E_{10} + E_{20} \cdot e^{-i\delta}) = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2 \cdot E_{10} \cdot E_{20} \cdot \cos \delta \quad (5a)$$

entspricht. Drückt man die reellen Amplituden  $E_{10}$  und  $E_{20}$  durch die Intensitäten  $I_1$  und  $I_2$  der einzelnen Lichtwellen aus, so folgt

---


$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \delta. \quad (5b)$$


---

Die resultierende Intensität  $I$  ist also nicht gleich der Summe der Intensitäten der Einzelwellen, sondern ist infolge des sog. Interferenzgliedes  $2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \delta$  entsprechend der Phasenverschiebung  $\delta$  größer oder kleiner. Insbesondere gilt für gleiche Intensitäten  $I_1 = I_2$

bei  $\delta = 0$  oder  $2k \cdot \pi$  :  $I = 4 \cdot I_1$  (maximale Verstärkung),  
bei  $\delta = \pi$  oder  $(2k + 1)\pi$  :  $I = 0$  (vollständige Auslöschung).

$\delta = 2k\pi$  entspricht einer Wegdifferenz von  $k \cdot \lambda$ ,  $\delta = (2k + 1)\pi$  einer Wegdifferenz von  $k \cdot \lambda + \lambda/2$ , wobei  $k$  eine beliebige ganze Zahl ist. Im Fall konstruktiver Interferenz (**maximale Verstärkung**) heißt  $k$  Ordnung der Interferenz.

Alle diese Überlegungen gelten für räumlich und zeitlich unbegrenzte Wellen. Dagegen lassen sich erfahrungsgemäß Interferenzexperimente mit Licht aus getrennten Lichtquellen (auch mit Licht von verschiedenen Stellen der gleichen Lichtquelle) nicht ausführen. Das hat seine Ursache darin, daß Licht aus räumlich und zeitlich begrenzten Wellengruppen besteht, deren Länge man als Kohärenzlänge  $l$  und deren Dauer man als Kohärenzzeit  $\tau$  bezeichnet. Interferenz tritt daher nur auf, wenn die sich überlagernden Wellen im gleichen Elementarvorgang, d. h. im gleichen Atom, entstanden sind. Nur solche Lichtwellen sind kohärent, d. h. stimmen dauernd in Wellenlänge und Schwingungsebene überein und haben eine zeitlich konstante Phasendifferenz.

Für punktförmige Lichtquellen lassen sich die Bedingungen für Kohärenz wie folgt formulieren:

1. Es muß hinreichende Überlappung der Wellengruppen im Beobachtungsgebiet vorliegen, d. h., die Wegdifferenz der interferierenden Wellen muß kleiner als die Kohärenzlänge sein.
2. Die Phasendifferenz darf sich zeitlich nicht (oder nur sehr langsam) ändern, damit die Lage der Interferenzfigur während der Beobachtungszeit konstant bleibt.

Beide Bedingungen lassen sich durch Aufspalten einer Wellengruppe in zwei (oder mehrere) realisieren, d. h., man muß als Lichtquellen für Interferenzversuche zwei (oder mehrere) Bilder der gleichen Lichtquelle benutzen.

Bei Verwendung räumlich ausgedehnter Lichtquellen, die nicht als einheitliches Ganzes schwingen (was in der Praxis außer bei Lasern stets der Fall ist), kommt noch eine weitere Bedingung hinzu:

3. Nur innerhalb eines Öffnungswinkels  $2u$ , der der Kohärenzbedingung

---


$$\sin u \ll \frac{\lambda}{2 \cdot y} \quad (6)$$


---

genügt, kann eine Lichtquelle der linearen Ausdehnung  $y$  als punktförmiges Wellenzentrum betrachtet werden (Abb. 154), andernfalls ist sie als aus mehreren inkohärenten Lichtquellen zusammengesetzt zu betrachten (vgl. O. 2.2).

Während in gewöhnlichen Lichtquellen spontane Emission vorherrscht, d. h. alle Atome unabhängig voneinander Licht aussenden, dominiert in Lasern die induzierte Emission, d. h., alle Atome sind durch das Strahlungs-

feld gekoppelt. Laser stellen daher räumlich einheitlich schwingende Strahler sehr großer Kohärenzlänge dar. Infolgedessen ist auch Licht, das von unterschiedlichen Stellen des Lasers stammt, interferenzfähig.

Trifft eine Lichtwelle auf ein Hindernis, so tritt Beugung auf: die Welle wird von der geradlinigen Ausbreitungsrichtung abgelenkt. Die Erklärung

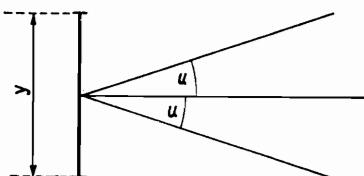


Abb. 154. Zur Kohärenzbedingung

für diese Erscheinung liefert das Huygenssche Prinzip, nach dem jeder Punkt in einem Wellenfeld Ausgangspunkt einer Elementarwelle wird, die sich nach allen Seiten gleichmäßig ausbreitet. Trifft eine ebene Welle also beispielsweise auf eine sehr kleine Öffnung (Durchmesser  $\ll \lambda/2$ ) in einem Schirm, so entsteht hinter dem Schirm eine Kugelwelle.

Werden von einer Welle mehrere Elementarwellen an verschiedenen Orten erzeugt (z. B. bei mehreren Öffnungen im Schirm bzw. bei einer relativ großen Öffnung), so können diese miteinander interferieren, da sie durch den gleichen Elementarvorgang erzeugt werden und infolgedessen kohärent sind. Auf diese Weise entstehen die an einem Spalt oder einem Beugungsgitter auftretenden hellen und dunklen Beugungsstreifen.

Wir betrachten zunächst die Verhältnisse an einem Doppelspalt mit sehr schmalen gleichbreiten Einzelpalten und berechnen die Intensitätsverteilung

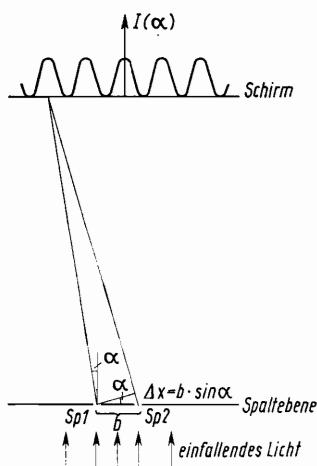


Abb. 155. Beugung am Doppelspalt und Intensitätsverteilung bei schmalen Einzelpalten.

Die beiden von den Spalten 1 und 2 ausgehenden Strahlen, die sich auf dem Schirm treffen, werden als parallel betrachtet

lung auf einem weit entfernten Schirm. Dann sind die beiden in Abb. 155 gezeichneten „Strahlen“ (Ausschnitte aus den in den beiden Spalten entstehenden Kugelwellen) praktisch parallel.<sup>1)</sup> Wir haben es in diesem Fall mit der Interferenz paralleler Bündel zu tun, was man als Fraunhofersche Beobachtungsart bezeichnet (im Gegensatz zur Fresnelschen Beobachtungsart, bei der beliebig geneigt Bündel interferieren).

Aus Abb. 155 ergibt sich, daß die unter dem Winkel  $\alpha$  gebeugten Strahlen eine Phasenverschiebung von

$$\delta = 2\pi \frac{b \cdot \sin \alpha}{\lambda} \quad (7)$$

gegeneinander haben. Bezeichnen wir die von jedem Einzelpalt durchgelassene Intensität mit  $I_0$ , so wird nach Gl. (5 b)

---


$$I(\alpha) = 2 \cdot I_0 \cdot (1 + \cos \delta) = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (8)$$


---

Die Intensitätsverteilung  $I(\alpha)$  ist in Abb. 155 eingetragen.

Beugungsminima liegen an den Stellen

$$\frac{\delta_k}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{oder} \quad \sin \alpha_k = \frac{\lambda}{2b} (2k + 1), \quad (9a)$$

Beugungsmaxima an den Stellen

$$\frac{\delta'_k}{2} = k \cdot \pi \quad \text{oder} \quad \sin \alpha'_k = \frac{\lambda}{b} \cdot k. \quad (9b)$$

Experimentell ist jedoch die Voraussetzung sehr schmaler Spalte ( $\ll \lambda$ ) am Doppelspalt nicht realisierbar, da die Beugungerscheinungen zu lichtschwach werden.

Bevor wir den Doppelspalt mit endlicher Spaltbreite betrachten, berechnen wir zunächst die Intensitätsverteilung bei der Beugung an einem Einzelpalt der Breite  $a$  für Fraunhofersche Beobachtungsart. Wir haben es jetzt mit der Interferenz vieler Parallelstrahlbündel der Breite  $dy$  zu tun (Abb. 156), die jeweils einen Feldstärkebeitrag  $dE = E \cdot dy/a$  liefern und deren Phasenverschiebung

$$\delta(y) = 2\pi \frac{y \cdot \sin \alpha}{\lambda} = \delta_{\max} \cdot \frac{y}{a} \quad (10)$$

---

<sup>1)</sup> In der Praxis beobachtet man die Interferenz in der Brennebene einer Linse, in der parallele Bündel vereinigt werden. Die Linse erzeugt keine zusätzlichen Phasenverschiebungen, die Rechnung gilt daher auch für diese Beobachtungsart.

beträgt, wobei

$$\delta_{\max} = 2\pi \frac{a \cdot \sin \alpha}{\lambda} \quad (11)$$

ist.

Analog zu Gl. (4) ist über alle Teilbündel zu summieren (integrieren), man erhält dann für die Feldstärke beim Beugungswinkel

$$E(\alpha) = \frac{E_0}{\alpha} e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \int_0^a e^{i\delta_{\max} \cdot y/\alpha} dy = \frac{E_0}{i\delta_{\max}} (e^{i\delta_{\max}} - 1) e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}. \quad (12)$$

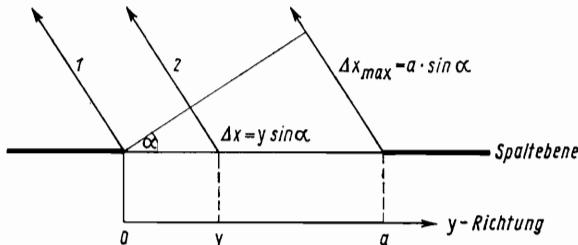


Abb. 156. Zur Beugung am Einzelspalt der Breite  $a$

Die Wegdifferenz zwischen den Strahlen 1 und 2 beträgt  $\Delta x = y \sin \alpha$ , die Phasendifferenz also  $\delta(y) = 2\pi \frac{y \sin \alpha}{\lambda}$

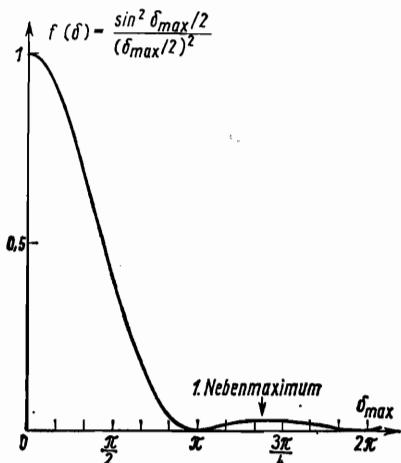


Abb. 157. Spaltfunktion  $f(\delta_{\max}) = \frac{\sin^2 \delta_{\max}/2}{(\delta_{\max}/2)^2}$

Geht man entsprechend Gl. (3) zur Intensität über, so ergibt sich

$$I = I_0 \frac{2 - 2 \cos \delta_{\max}}{\delta_{\max}^2} = I_0 \frac{\sin^2 \delta_{\max}/2}{(\delta_{\max}/2)^2} \quad (13)$$

(vgl. Abb. 157).

Im Falle des Einzelpalts liegen entsprechend Gl. (13) Beugungsminima bei

$$\frac{\delta_{\max, k}}{2} = k \cdot \pi \quad \text{bzw.} \quad a \cdot \sin \alpha_k = k \cdot \lambda \quad (k \neq 0), \quad (14a)$$

die Beugungsmaxima bei  $\alpha = 0$  und in der Nähe von (aber nicht genau bei)

$$\frac{\delta_{\max, k}}{2} = \frac{\pi}{2} (2k + 1) \quad \text{bzw.} \quad a \cdot \sin \alpha_k = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (14b)$$

Ist  $a < \lambda$ , so gibt es keinen Winkel, der Gl. (14a) erfüllt, also auch keine Intensitätsminima. So schmale Spalte werden zum Ausgangspunkt von Kugelwellen, leuchten also den Halbraum hinter dem Spalt ohne Beugungsstreifen relativ gleichmäßig aus.

Die Berechnung der Intensitätsverteilung bei der Beugung am Doppelspalt mit endlich breiten Einzelpalten verläuft analog zur Berechnung beim Einzelpalt, es ist lediglich über beide Spalte zu integrieren. Als Ergebnis erhält man die Intensitätsverteilung

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \delta_{\max}/2}{(\delta_{\max}/2)^2} \cos^2 \delta/2, \quad (15)$$

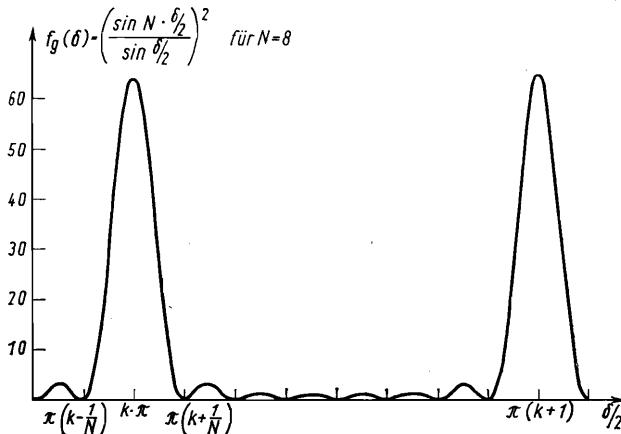


Abb. 158. Gitterfunktion  $f_g(\delta) = \left( \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)^2$  für  $N = 8$ ,

Hauptmaxima liegen bei  $\delta = 2k\pi$ ; Minima (Nullstellen) bei  $\delta = 2\pi(k + p/N)$ , wobei  $p = 1, 2, \dots, N - 1$  ist

die sich als Produkt der Intensitätsverteilungen (8) und (13) darstellt (Abb. 157).

Bei einem Beugungsgitter ist statt über 2 über  $N$  Spalte zu integrieren, man erhält dann

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \delta_{\max}/2}{(\delta_{\max}/2)^2} \cdot \frac{\sin^2 N \delta/2}{\sin^2 \delta/2}, \quad (16)$$

wobei der erste winkelabhängige Faktor auch hier die Intensitätsverteilung des Einzelpalts ist (Abb. 158).

### O. 2.1. Newtonsche Ringe

*Aufgaben:* 1. Die Wellenlänge von monochromatischem Licht ist zu ermitteln.

2. Der Krümmungsradius einer Sammellinse ist zu bestimmen.

Newton'sche Ringe entstehen durch die Interferenz von Licht an der dünnen Zwischenschicht zwischen einer schwach gewölbten Linse und einer Planglasplatte. Man beobachtet im allgemeinen das von dieser Anordnung reflektierte Licht (Abb. 159). In diesem Falle interferieren der an der Unterseite der Linse reflektierte Strahl 1 und der an der Oberseite der Glasplatte

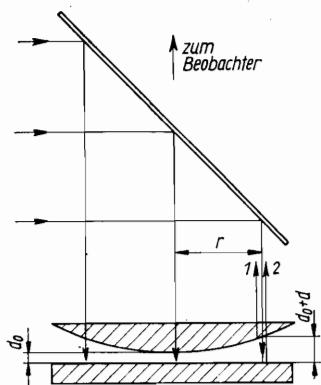


Abb. 159.  
Entstehung der Newtonschen Ringe

reflektierte Strahl 2. Beide Strahlen sind der Deutlichkeit halber versetzt gezeichnet. Ihre Richtungsänderungen bei der Brechung bzw. Reflexion an der Linsenfläche sind für die weiteren Betrachtungen unwesentlich und werden vernachlässigt.

Ist  $r$  der Abstand vom Berührungs punkt der Linse mit der Glasplatte, so hat die Luftschi cht zwischen Linse und Glasplatte dort die Dicke  $d_0 + d$ .

Der Anteil  $d_0$  berücksichtigt, daß keine ideale Berührung vorliegt: Durch Staub kann der Abstand vergrößert, durch Deformation verkleinert werden.

Sieht man von der geringfügigen Brechung der Lichtstrahlen in der Linse ab, so beträgt der Wegunterschied der beiden interferierenden Wellenzüge  $2 \cdot (d_0 + d)$ ; da die Reflexion des zweiten Wellenzuges am optisch dichteren Medium erfolgt, ist noch ein Phasensprung von  $\pi/2$  zu addieren (vgl. die analogen Verhältnisse bei der Reflexion von Schallwellen, Abschn. M. 8), so daß sich eine Phasenverschiebung

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} (d_0 + d) + \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

ergibt. Ist

$$\delta = 2\pi \cdot k \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (18a)$$

so verstärken sich die interferierenden Wellenzüge, und es entsteht ein heller Ring, da längs der Peripherie eines Kreises um den Berührungs punkt von Glasplatte und Linse die Phasenverschiebung  $\delta$  konstant ist. Ist dagegen

$$\delta = \pi \cdot (2k + 1) \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (18b)$$

so löschen sich die interferierenden Wellenzüge aus, und es entsteht ein dunkler Ring.

Den Zusammenhang zwischen dem Radius  $r_k$  des  $k$ -ten Ringes und der Dicke  $d$  kann man entsprechend Abb. 160 mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck ermitteln. Es ist

$$d \cdot (2R - d) = r_k^2. \quad (19)$$

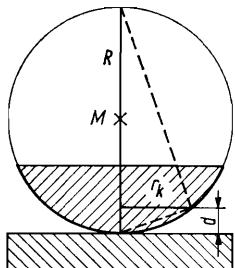


Abb. 160. Zur Ermittlung der Dicke  $d$

Bei schwach gewölbten Linsen ist  $d \ll R$ , so daß in Gl. (19) das Glied  $d^2$  vernachlässigt werden darf.

Aus den Gln. (17), (18) und (19) folgt dann für die dunklen Ringe

---


$$r_k^2 = k \cdot R \cdot \lambda - 2 \cdot d_0 \cdot R \quad (20a)$$


---

und für die hellen Ringe

$$r_k^2 = \left( k - \frac{1}{2} \right) \cdot R \cdot \lambda - 2 \cdot d_0 \cdot R. \quad (20\text{b})$$

### Versuchsausführung

Zur Lösung von Aufgabe 1 ist eine Linse mit bekanntem Krümmungsradius  $R$  zu benutzen ( $R$  kann nach den in Versuch O. 1.1 beschriebenen Methoden bestimmt werden). Linse und Glasplatte werden auf einen mittels Meßschraube verschiebbaren Tisch gelegt und mit parallelem Licht der zu messenden Wellenlänge  $\lambda$  bestrahlt. Zur Vermeidung störender Reflexionen legt man unter die Glasplatte schwarzes Papier.

Die Beobachtung der Newtonschen Ringe erfolgt mit einem Fernrohr mit Fadenkreuz. Durch die Verschiebung des Tisches lassen sich die Durchmesser der hellen und der dunklen Ringe bestimmen. Systematische Fehler können sich ergeben, wenn die Linse nicht in allen Richtungen den gleichen Krümmungsradius hat. Dies läßt sich überprüfen, indem man den Durchmesser der Ringe in verschiedenen Richtungen mißt.

Aufgabe 2 ist in gleicher Weise zu lösen. Die Beleuchtung muß dabei mit monochromatischem Licht bekannter Wellenlänge erfolgen. Bei Linsen mit sehr großen Krümmungsradien liefert diese Methode genauere Werte als andere Meßmethoden.

Zur Auswertung trägt man  $r_k^2$  über  $k$  auf und erhält eine Gerade mit der Steigung  $S = R \cdot \lambda$ . Je nachdem, ob  $R$  oder  $\lambda$  bekannt ist, läßt sich aus der Steigung  $\lambda$  oder  $R$  berechnen.

Für die Fehlerrechnung legt man die Gleichung

$$R \cdot \lambda = \frac{r_{k_2}^2 - r_{k_1}^2}{k_2 - k_1} \quad (21)$$

zugrunde, die durch Differenzbildung aus Gl. (20) folgt.

Erstreb man hohe Genauigkeit, so kann man nach dem im Abschn. 1.5.4 der Einleitung beschriebenen Verfahren die beste Ausgleichsgerade durch die Meßpunkte legen und den mittleren Fehler in der dort angegebenen Weise berechnen.

## O. 2.2. Beugung an Spalt und Doppelspalt

- Aufgaben:*
1. Die Wellenlänge der Na-D-Linie ist zu bestimmen.
  2. Die Intensitätsverteilung bei der Beugung an einem Einzelspalt ist mittels eines Photowiderstandes auszumessen.
  3. Die Gültigkeit der Kohärenzbedingung ist zu überprüfen.

Zur Untersuchung der Beugung an Spalten benutzt man spaltförmige Lichtquellen (z. B. einen parallel zum beugenden Spalt  $Sp2$  angeordneten Beleuchtungsspalt  $Sp1$ ) und beobachtet das Beugungsbild in der Brennebene einer Sammellinse  $L$  mit einer Meßlupe bzw. registriert es auf einer Photoplatte oder mittels eines lichtelektrischen Empfängers (Abb. 161).

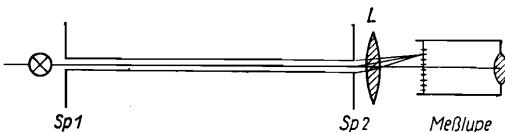


Abb. 161. Wellenlängenmessung durch Beugung am Spalt bzw. Doppelspalt

Ist der Beleuchtungsspalt hinreichend schmal (s. unten), so erhält man in der Beobachtungsebene Minima und Maxima der Intensität, woraus man beim beugenden Doppelspalt entsprechend Gl. (9) bei bekanntem Spaltabstand  $b$  durch Messung der Winkel  $\alpha_k$  bzw.  $\alpha'_k$  die Wellenlänge berechnen kann. Analog ist beim Einzelspalt die Gl. (14) zu benutzen.

Die Winkel  $\alpha_k$  bzw.  $\alpha'_k$ , unter denen die dunklen bzw. hellen Beugungsstreifen beobachtet werden, erhält man entsprechend Abb. 162 aus

$$\tan \alpha_k = x_k/f, \quad (22)$$

wobei  $2 \cdot x_k$  der Abstand der beiden Streifen gleicher Ordnung in der Brennebene der Sammellinse und  $f$  deren Brennweite ist.

Für breite Beleuchtungsspalte sind zusätzliche Überlegungen erforderlich. Wir betrachten die Verhältnisse für 3 linienförmige Lichtquellen, die sich im Abstand  $g$  vom beugenden Doppelspalt befinden und voneinander den Abstand  $y/2$  haben (Abb. 163). Da ihr Licht inkohärent ist, erzeugen

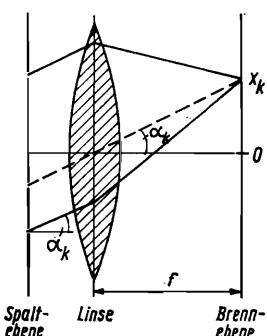


Abb. 162. Sammlung von Parallelstrahlen in der Brennebene einer Sammellinse

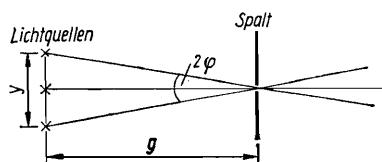


Abb. 163. Zur Kohärenzbedingung

sie unabhängig voneinander 3 Beugungsbilder, wobei die von den beiden äußeren Lichtquellen stammenden um den Winkel  $\varphi$  gegen das mittlere verdreht sind. Die Lichtquellen seien weit vom beugenden Doppelspalt entfernt, daher ist  $\varphi$  klein, und es gilt

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{y}{2g}. \quad (23)$$

Ist  $\varphi$  gerade so groß, daß die hellen Streifen des Beugungsbildes der mittleren Lichtquelle mit den dunklen Streifen der Beugungsbilder der äußeren Lichtquellen zusammenfallen, so wird die Beugungsscheinung unbeobachtbar. Dieser Fall tritt beim Doppelspalt ein, wenn

$$\varphi = \alpha_1 = \frac{\lambda}{2b}$$

ist, da entsprechend Gl. (9) Maxima und Minima um den Winkel  $\alpha_1 = \lambda/2b$  gegeneinander verdreht sind. Scharfe Beugungsstreifen sind daher nur zu erhalten, wenn die Bedingung

$$\tan \varphi = \frac{y}{2g} \ll \frac{\lambda}{2b} \quad (24)$$

erfüllt ist, die der Kohärenzbedingung (6) entspricht.

Für die Beugung am Einzelspalt ist in Gl. (24)  $2b$  durch die Spaltbreite  $a$  zu ersetzen.

Ausgedehnte Lichtquellen kann man sich aus einer Reihe punktförmiger Lichtquellen zusammengesetzt denken; die Bedingung (24) muß dann für die Ränder der Lichtquelle erfüllt sein.

Die Benutzung ausgedehnter Lichtquellen setzt also große Entfernung oder schmale Beugungsspalte voraus, andernfalls muß die Ausdehnung der Lichtquelle durch Vorsetzen eines Beleuchtungsspaltes verringert werden.

### Versuchsausführung

Als Lichtquelle verwendet man eine Natriumdampflampe, die praktisch monochromatisches Licht (die gelbe Na-D-Linie) aussendet. Zur Erfüllung der Kohärenzbedingung (24) dient Spalt 1, der sich in großem Abstand vom beugenden Doppelspalt (Sp 2 in Abb. 161) befindet, so daß dieser praktisch mit parallelem Licht beleuchtet wird (Abb. 161). Die Beugungsscheinung beobachten wir mit einer Meßlupe, deren Okularskale sich in der Brennebene der Linse  $L$  befindet. Wir erreichen dies, indem wir zunächst Spalt 2 entfernen und Spalt 1 scharf auf die Okularskale abbilden. Nachdem wir dann Spalt 2 in den Strahlengang gebracht haben, messen wir den Abstand  $2x_k$  der hellen Streifen gleicher Ordnung. Aus den Gln. (9) und (22) ergibt

sich, da die Beugungswinkel  $\alpha'_k$  sehr klein sind,

$$x_k/f = \lambda \cdot k/b. \quad (25)$$

Trägt man daher  $x'_k$  über  $k$  auf und legt durch die Meßpunkte eine Gerade, so ist deren Steigung

$$S = f \cdot \lambda/b. \quad (26)$$

Zur Bestimmung der Wellenlänge sind noch der Spaltabstand  $b$  des Doppelspaltes und die Brennweite  $f$  der Linse zu ermitteln. Wir bestimmen  $b$ , indem wir den Beugungsspalt an die Stelle des Beleuchtungsspaltes bringen und mittels  $L$  vergrößert auf die Okularskale abbilden. Wir erhalten ein Spaltbild  $b' = \gamma \cdot b$ , wobei  $\gamma$  der Abbildungsmaßstab der Linse bei der betreffenden Gegenstandsweite ist.

$\gamma$  und  $f$  bestimmen wir mittels der in Versuch O. 1.1 beschriebenen Bessel-schen Methode, wobei Spalt 2 als Gegenstand dient und das Bild in der Okularskale der Meßlupe entsteht. Aus den Gl. (19a und b) von Abschn. O. 1.1 folgt

$$\gamma = \frac{s + e}{s - e} \quad (27)$$

und

$$f = \frac{1}{4} \left( s - \frac{e^2}{s} \right). \quad (28)$$


---

Erfolgt der Nachweis des Beugungsbildes photographisch, so ist analog zu verfahren: das Beugungsbild ist mit auf Unendlich eingestelltem Apparat aufzunehmen,  $f$  ist jetzt die Brennweite des Objektivs.  $b$  kann wie oben erläutert mit einer beliebigen Sammellinse ermittelt werden.

Bei photoelektrischer Registrierung tastet man die Beugungsfigur mit einem lichtelektrischen Empfänger ab, vor dem sich ein feiner Meßspalt befindet, der zusammen mit dem Empfänger mittels eines Meßschlittens verschoben werden kann. Der registrierte Strom ist ein Maß für die Lichtintensität am Ort des Meßspalts.

Zur Überprüfung der Kohärenzbedingung benutzen wir einen Beleuchtungsspalt variabler Breite und verändern diesen von kleinen Spaltbreiten beginnend so weit, bis die Beugungerscheinung des Spaltes 2 verschwindet. Wir messen die Spaltbreite  $y$ , bei der dies eintritt, und vergleichen mit der Beziehung (24). Es ist dabei mit ruhendem Auge zu beobachten, da bei schräger Blickrichtung eine Bündelbegrenzung durch die Pupille erfolgt, was einer Verkleinerung des Beleuchtungsspaltes entspricht, so daß noch Beugungsstreifen zu beobachten sind, wenn Gl. (24) nicht mehr erfüllt ist.

### O. 2.3. Beugung am Gitter

- Aufgaben:*
1. Die Gitterkonstante eines Reflexionsgitters ist zu bestimmen.
  2. Die Wellenlängen der intensivsten Linien des Quecksilberspektrums sind zu messen.
  3. Die Formel für das Auflösungsvermögen des Beugungsgitters ist zu überprüfen.

Ein Beugungsgitter besteht aus einer Glas- oder Metallplatte, in die mit einem Diamanten viele eng benachbarte äquidistante Furchen geritzt wurden. Die Flächen zwischen den Furchen wirken als enge reflektierende Spalte. Beleuchtet man das Gitter mit parallelem Licht, so wird jeder dieser Spalte zum Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Vereinigt man alle unter einem bestimmten Winkel abgebeugten Strahlen in der Brennebene einer Sammellinse (Abb. 164), so tritt dort Interferenz ein.

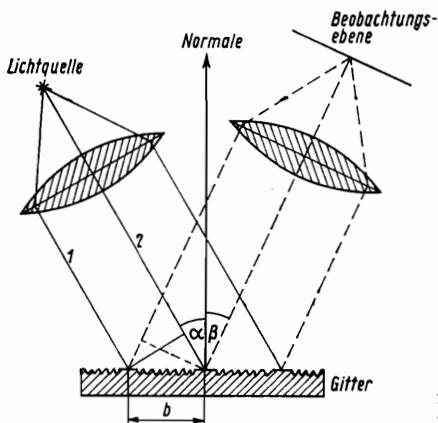


Abb. 164.  
Beugung am Reflexionsgitter

Ist  $\alpha$  der Einfallswinkel des parallelen Lichtes und beobachtet man unter dem Winkel  $\beta$  zur Normale des Gitters, so beträgt die Phasenverschiebung  $\delta$  benachbarter Strahlen (z. B. 1 und 2 in Abb. 164)

$$\delta = \frac{2 \cdot \pi \cdot b \cdot (\sin \alpha - \sin \beta)}{\lambda}, \quad (29)$$

wobei  $b$  die Gitterkonstante ist, die den Abstand äquivalenter Punkte des Gitters angibt. Beobachtet man auf der Seite, auf der das Licht einfällt – was im allgemeinen schwierig ist –, so ist  $\beta$  negativ zu rechnen, d. h., in Gl. (29) ist das Minuszeichen durch ein Pluszeichen zu ersetzen.

Die entstehende Intensitätsverteilung wird durch Gl. (16) beschrieben und hat die in Abb. 158 dargestellte Form. Die bei einem Gitter mit vielen

Spalten allein beobachtbaren Hauptmaxima der Intensitätsverteilung liegen bei den Nullstellen des Nenners, d. h. bei  $\delta/2 = k \cdot \pi$  bzw.

$$\sin \beta_k = \sin \alpha - k \cdot \lambda/b \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (30)$$

Man beobachtet also in der durch  $\beta_k$  gegebenen Richtung nur Licht, dessen Wellenlänge die Gl. (30) erfüllt. Da verschiedenen Wellenlängen verschiedene Ablenkinkel  $\beta_k$  entsprechen, kann man das Gitter zur Zerlegung des Lichtes in sein Spektrum benutzen (Gitterspektrometer).

Je nach der Größe von  $k$  spricht man von einem Spektrum 1., 2., 3. Ordnung usw.; das nicht abgebeugte Licht bei  $\beta_0 = \alpha$  ( $k = 0$ ) bezeichnet man als „Spektrum nullter Ordnung“.

Von entscheidender Bedeutung für die Leistungsfähigkeit eines Spektrometers ist sein *Auflösungsvermögen*. Man versteht darunter die Größe

$$A = \frac{\lambda}{d\lambda}. \quad (31)$$

In dieser Gleichung ist  $d\lambda$  die kleinste Wellenlängendifferenz, die man mit dem Spektrometer noch getrennt wahrnehmen kann.  $d\lambda$  hängt von der Breite der bei der Beugung am Gitter entstehenden hellen Beugungstreifen ab.

Zur Berechnung des Auflösungsvermögens nehmen wir an, daß das einfallende Licht die Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  ( $d\lambda \ll \lambda$ ) enthält. Das Hauptmaximum  $k$ -ter Ordnung für die Wellenlänge  $\lambda$  liegt bei  $\beta_k$ , für die Wellenlänge  $\lambda + d\lambda$  liegt es bei  $\beta'_k$ , wobei  $\beta'_k$  durch

$$\sin \beta'_k = \sin \alpha - k \cdot \frac{\lambda + d\lambda}{b} \quad (30a)$$

gegeben ist.

Eine getrennte Wahrnehmung beider ist gerade noch möglich, wenn  $\beta'_k$  mit der ersten Nullstelle der Intensitätsverteilung neben dem Hauptmaximum  $\beta_k$  der Wellenlänge  $\lambda$  zusammenfällt. Aus Gl. (16) und Abb. 158 ergibt sich, daß diese Nullstelle bei einer Phasenverschiebung liegt, die durch

$$N \cdot \frac{\delta'}{2} = N \cdot \frac{\delta}{2} + \pi \quad (32a)$$

gegeben ist, während das Hauptmaximum  $k$ -ter Ordnung bei  $\delta/2 = k \cdot \pi$  liegt. Daraus folgt

$$\delta' = \frac{2\pi b (\sin \alpha - \sin \beta'_k)}{\lambda} = 2\pi k + \frac{2\pi}{N}$$

bzw.

$$\sin \beta'_k = \sin \alpha - \frac{\lambda}{b} \left( k + \frac{1}{N} \right). \quad (32b)$$

Gleichsetzen von Gl. (30a) und (32a) liefert

$$\lambda \left( k + \frac{1}{N} \right) = k(\lambda + d\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N \cdot k}.$$

Das Auflösungsvermögen des Gitters ist also unabhängig von der Einfallsrichtung lediglich durch Strichzahl  $N$  und Beugungsordnung  $k$  bestimmt:

$$A = \frac{\lambda}{d\lambda} = k \cdot N. \quad (33)$$


---

Zur genauen Messung der Beugungswinkel dient uns ein *Spektrometer*, dessen Hauptteile Spaltrohr mit Eintrittsspalt, Spektrometertisch mit Justierschrauben 1, 2 und 3, Beobachtungsfernrohr mit Fadenkreuz, zusammen mit dem Strahlengang in Abb. 165 schematisch dargestellt sind.

Spalt und Spaltrohr dienen zur Erzeugung parallelen Lichtes, der Spektrometertisch trägt das dispersierende System, in unserem Falle das Beugungsgitter. Das Objektiv des Beobachtungsfernrohrs erzeugt ein Bild des Spal-

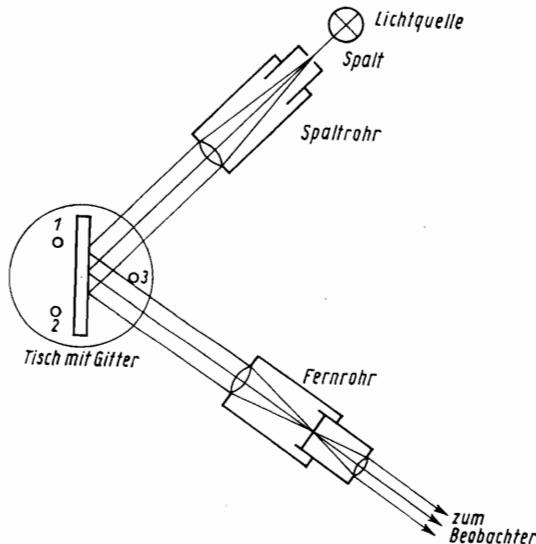


Abb. 165. Strahlengang im Gitterspektrometer

tes in der Farbe des gebeugten Lichtes, das mit dem Okular beobachtet werden kann. Mit Hilfe der Winkelteilung eines Teilkreises kann die Ver-  
drehung des Fernrohres gegenüber dem Spektrometertisch gemessen werden.

Für spektroskopische Untersuchungen werden heute in der Praxis ausschließlich *Spektrographen* oder *Monochromatoren* benutzt. Bei den Spektrographen ist das drehbare Fernrohr durch eine feststehende Kamera ersetzt, die Registrierung des Spektrums erfolgt auf der Photoplatte. Monochromatoren haben einen feststehenden Austrittsspalt, die verschiedenen Wellenlängen werden durch Drehung des Gitters (bzw. des Prismas bei Prismenmonochromatoren) nacheinander auf den Austrittsspalt abgebildet. Für spektroskopische Untersuchungen mit Monochromatoren wird das austretende Licht mittels lichtelektrischer Empfänger (vgl. Abschn O. 5) nachgewiesen. Diese Geräte unterscheiden sich in ihrem Aufbau beträchtlich von dem oben beschriebenen Spektrometer.

### *Versuchsausführung*

Vor der Messung muß das Spektrometer justiert werden.<sup>1)</sup> Die Justierung umfaßt

1. die Einstellung des Fernrohres auf Unendlich,
2. die Senkrechttstellung der Sehlinie des Fernrohres zur Drehachse des Spektrometers.
3. die Einstellung des Spaltrohres,
4. die Justierung des Beugungsgitters.

Zu 1. und 2.: Läßt sich das Fernrohr aus dem Spektrometer herausnehmen, so kann die Einstellung auf Unendlich dadurch erfolgen, daß man einen genügend weit entfernten Gegenstand parallaxefrei<sup>2)</sup> in die Ebene des Fadenkreuzes abbildet (Beobachtung durch das geöffnete Fenster).

Bei fest eingebautem Fernrohr erfolgt die Einstellung auf Unendlich zusammen mit der Senkrechttstellung der Sehlinie durch Autokollimation mittels des Gaußschen Okulars (vgl. Versuch O. 1.1). Das aus dem Fernrohr austretende Licht wird an einer Glasplatte reflektiert, die parallel zu der Verbindungsline der beiden Justierschrauben 1 und 2 (Abb. 165) auf dem Spektrometertisch steht. Das Fernrohr ist auf Unendlich eingestellt, wenn man das Fadenkreuz und sein Spiegelbild gleichzeitig scharf und parallaxefrei sieht. Die Einstellung geschieht durch Verschieben des gesamten Okulars, nachdem man vorher mit der äußeren Okularlinse auf das Fadenkreuz scharf eingestellt hat.

Nun neigt man mittels der Justierschraube 3 die Glasplatte, bis sich Fadenkreuz und Spiegelbild decken. Dadurch ist erreicht, daß die Sehlinie senkrecht zur Oberfläche der Glasplatte steht, sie wird dann jedoch im allgemeinen noch nicht senkrecht zur Drehachse stehen.

Um auch dies zu erreichen, dreht man den Spektrometertisch (oder das Fernrohr) um 180°. Fadenkreuz und Spiegelbild decken sich nach dieser Drehung im allgemeinen nicht. Die auftretende Abweichung kompensiert man zur Hälfte durch Neigung der Glasplatte mittels der Justierschraube 3 und zur Hälfte durch Neigung des Fernrohres.

Das Verfahren ist so oft zu wiederholen, bis nach einer Drehung um 180° keine Abweichung mehr auftritt. Ist die Glasplatte nicht genau planparallel, so treten zwei Spiegelbilder auf. Davon ist stets das von der gleichen Seite reflektierte auszuwählen, nach der Drehung um 180° also das durch Reflexion an der Rückseite entstandene licht-

<sup>1)</sup> Bei modernen Spektrographen und Monochromatoren erfolgt die Justierung bei der Herstellung und braucht nicht vom Benutzer vorgenommen zu werden.

<sup>2)</sup> Das ist besser als die Einstellung auf größte Bildschärfe, da diese oft täuscht.

schwächere Spiegelbild, wenn man vor der Drehung das durch Reflexion an der Vorderseite entstandene lichtstärkere gewählt hatte.

Zu 3.: Zur Justierung des Spaltrohres beleuchtet man den Spalt und dreht das Fernrohr, bis das Licht aus dem Spaltrohr in dieses hineinfällt. Da das Fernrohr auf Endlich eingestellt ist, entsteht ein scharfes Bild des Spaltes nur dann, wenn er sich in der Brennebene der Spaltrohrlinse befindet, was durch Verschieben des Auszuges, an dem der Spalt befestigt ist, erreicht wird. Nun neigt man das Spaltrohr, bis das Spaltbild vom horizontalen Faden des Fadenkreuzes halbiert wird. Ist dies erreicht, so stimmt die Achse des Spaltrohres mit der Sehlinie des Fernrohres überein.

Zu 4.: Zur Justierung des Gitters stellt man dieses wie vorher die Glasplatte so auf den Spektrometertisch, daß die Gitterebene parallel zur Verbindungsleitung der Justierschrauben 1 und 2 verläuft, und stellt durch Autokollimation die Gitterebene senkrecht zur Sehlinie des Fernrohres, die aufgrund der vorangegangenen Justierung des Spaltrohres mit der Achse desselben übereinstimmt.

Beleuchtet man jetzt den Spalt und dreht das Fernrohr, so läuft das Spektrum im allgemeinen schräg durch das Gesichtsfeld, da die Gitterstriche nicht genau parallel zum Spalt stehen. Man korrigiert dies mit den Justierschrauben 1 und 2, bis alle Spektrallinien vom horizontalen Faden des Fadenkreuzes halbiert werden.

Nach der Justierung des Gitters arretiert man den Tisch und stellt die Sehlinie des Fernrohrs senkrecht zur Gitterebene. Der am Teilkreis dabei abgelesene Winkel gibt die Richtung der Gitternormale an. Den Einfallswinkel  $\alpha$  bestimmt man durch Beobachtung des Spektrums 0-ter Ordnung, die Beugungswinkel  $\beta_k$  in 1. und 2. Ordnung, indem man bei möglichst engem Eintrittsspalt das Fadenkreuz mit dem entsprechenden Spaltbild zur Dekkung bringt und die zugehörigen Drehwinkel am Teilkreis abliest. Die Ablesung des Drehwinkels erfolgt mit zwei Nonien, die um  $180^\circ$  gegeneinander versetzt sind, um Teilungsfehler zu eliminieren. Die direkte Messung der Gitterkonstanten  $b$ , z. B. unter einem Mikroskop, ist zu ungenau. Man ermittelt daher  $b$  mit Licht bekannter Wellenlänge, z. B. einer Natriumdampflampe, indem man die entsprechenden Beugungswinkel mißt und aus der aus Gl. (30) folgenden Formel

$$b = \frac{k \cdot \lambda}{\sin \alpha - \sin \beta_k} \quad (30b)$$

berechnet. Dieses Verfahren ist auch im Hinblick auf die Meterdefinition zweckmäßig.

Ist  $b$  bekannt, so ergibt sich aus den Beugungswinkeln  $\beta_k$  die Wellenlänge zu

$$\lambda = \frac{b (\sin \alpha - \sin \beta_k)}{k} . \quad (30c)$$

Zur Überprüfung des Auflösungsvermögens wählt man geeignete Linienpaare des Quecksilber- oder Natriumspektrums aus (siehe Tab. 12) und verändert mittels einer Spaltblende den Querschnitt des aus dem Spaltrohr austretenden Lichtbündels und damit die Zahl  $N$  der an der Beugung beteiligten Gitterspalte. Ist  $a$  die Breite der Spaltblende, so ist die Zahl  $N$  der ausgeleuchteten Gitterspalte durch  $N = a/b$  gegeben.

## O. 3. BRECHUNGSGESETZ, DISPERSION UND ABSORPTION

### O. 3.0. Allgemeine Grundlagen

#### O. 3.0.1. Brechungsindex und Dispersion

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist in verschiedenen Stoffen verschieden groß. Ursache dafür ist, daß alle Stoffe aus geladenen Teilchen (Atomkernen und Elektronen) aufgebaut sind, die durch die einfallende elektromagnetische Lichtwelle in Schwingungen versetzt werden und dadurch zum Ausgangspunkt neuer Lichtwellen werden.

Von zwei Stoffen bezeichnet man den mit der größeren Lichtgeschwindigkeit als den optisch dünneren, den mit der kleineren Lichtgeschwindigkeit als den optisch dichteren Stoff. Trifft eine Lichtwelle auf die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen, so ändert sich ihre Ausbreitungsrichtung, sie wird gebrochen (und teilweise reflektiert). Für die Brechung einer ebenen Welle (in Abb. 166 durch Lichtstrahlen, d. h. durch ihre Flächen-normalen, charakterisiert) an einer ebenen Grenzfläche gilt das Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (1)$$

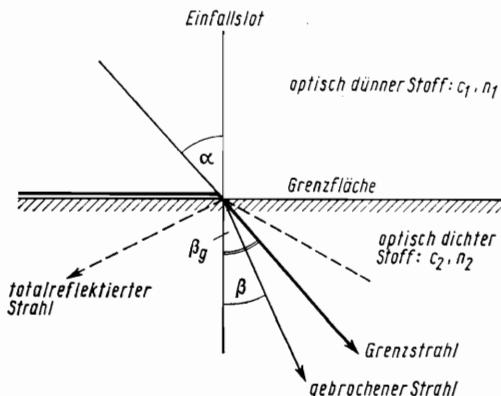


Abb. 166. Zum Snelliusschen Brechungsgesetz.  
Der Strahlengang ist umkehrbar.

Das Verhältnis  $n_1 = c_0/c_1$  ( $c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,  $c_1$  Lichtgeschwindigkeit im Stoff 1) heißt (absoluter) Brechungsindex des Stoffes 1;  $n_{21}$  ist der relative Brechungsindex des Stoffes 2 gegenüber dem Medium 1.

Aus Gl. (1) ergibt sich: Geht der (auf der Wellenfront senkrecht stehende) Lichtstrahl vom optisch dünneren zum optisch dichteren Stoff über (z. B. von Luft in Glas), so wird er zum Einfallslot hin, im umgekehrten Fall vom Lot weg gebrochen; der gebrochene Strahl liegt dabei in beiden Fällen in der durch das Einfallslot und den einfallenden Strahl gebildeten Einfallsebene.

Beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Stoff ist der Brechungswinkel stets größer als der Einfallswinkel, er erreicht daher bereits bei einem Einfallswinkel  $\beta_g < 90^\circ$  den Wert  $90^\circ$ . Wird der Einfallswinkel größer als  $\beta_g$ , so wird das gesamte Licht in den dichten Stoff zurückgeworfen, es tritt *Totalreflexion* ein;  $\beta_g$  heißt daher Grenzwinkel der Totalreflexion.

Die Lichtgeschwindigkeit hängt außer von dem Stoff, in dem sich das Licht ausbreitet, auch von der Wellenlänge ab (außer im Vakuum). Diese Erscheinung bezeichnet man als Dispersion. Sie wird dadurch verursacht, daß die Moleküle des Stoffes, die durch die Lichtwelle in erzwungene Schwingungen versetzt werden, über eine (oder mehrere) optische Eigenfrequenzen  $\omega_0$  verfügen. Demzufolge hängt die Größe des elektrischen Dipolmoments  $p$ , das durch das elektrische Feld  $E$  der Lichtwelle in einem Molekül induziert wird, von der Frequenz  $\omega$  der Lichtwelle ab.

Das Verhältnis  $\alpha_p = p/E$  eines Atoms oder Moleküls ist ein Maß für die Deformierbarkeit der Elektronenhülle und wird Polarisierbarkeit genannt. Aus der Theorie der erzwungenen Schwingungen (vgl. E. 5.0.4) ergibt sich

$$\alpha_p = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2)$$

wobei  $e$  die elektrische Ladung und  $m$  die Masse des für die optische Resonanz verantwortlichen Teilchens ist.

Berücksichtigt man den Beitrag benachbarter Moleküle zu dem elektrischen Feld der Lichtwelle, so erhält man für die Abhängigkeit der Brechzahl  $n$  von der Frequenz

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} N \alpha_p = \frac{e^2 N}{3\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3)$$

(Lorentz-Lorenzsche Formel).  $N$  ist dabei die Konzentration der polarisierbaren Moleküle,  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante des Vakuums.

Schematisch ergibt sich daraus, wenn man noch den Einfluß der Dämpfung berücksichtigt, die Kurve 1 in Abb. 167. Bei genügend langen Wellenlängen (bei üblichen Gläsern im sichtbaren Bereich) nimmt der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge ab (normale Dispersion). Als Maß für die Größe der Dispersion dient in diesem Bereich die Differenz der Brechungs-

indizes für die Wasserstofflinien  $H_\alpha$  und  $H_\beta$ , die als mittlere Dispersion  $n_F - n_C$  bezeichnet wird ( $F$  und  $C$  sind die Fraunhoferschen Bezeichnungen für  $H_\alpha$  und  $H_\beta$ ).

In dem in Abb. 167 eingezeichneten Gebiet sog. anomaler Dispersion, in dem der Brechungsindex mit wachsender Wellenlänge zunimmt, tritt gleichzeitig starke Absorption auf (Kurve 2), so daß dort  $n$  nicht mehr mit den sonst üblichen Methoden gemessen werden kann.

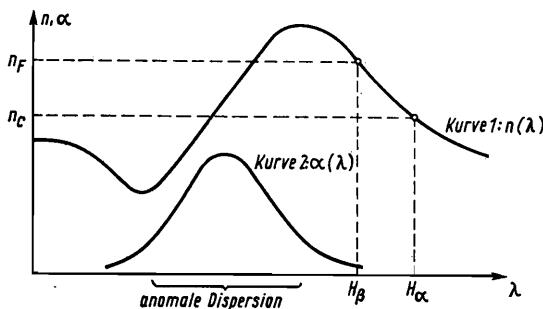


Abb. 167. Dispersion und Absorption in der Umgebung einer optischen Resonanzstelle

Die aus dem Brechungsindex  $n$  berechenbare Größe

$$R_M = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{\varrho} \quad (4)$$

( $M$  Molmasse,  $\varrho$  Dichte) heißt Molrefraktion. Sie ist eine Stoffkonstante, die von Druck, Temperatur und Aggregatzustand weitgehend unabhängig ist.  $R_M$  kann genähert als Summe der Refraktionsanteile der Bindungen betrachtet werden:

$$R_M = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + \dots, \quad (5)$$

wobei  $x, y, z, \dots$  die Bindungsrefraktionen,  $a, b, c, \dots$  die Anzahlen der jeweiligen Bindungen im Molekül sind. Infolge der näherungsweisen Additivität der Bindungsrefraktionen ist  $R_M$  eine wichtige Größe in der organischen Chemie.

### O. 3.0.2. Extinktion und Absorption

Für die bisher betrachteten vollständig durchsichtigen Stoffe genügt die Brechzahl  $n$  zur optischen Charakterisierung. Tatsächlich wird jedoch ein Lichtbündel beim Durchgang durch einen Stoff auch geschwächt. Die Schwächung wird durch Lichtstreuung (Richtungsänderung eines Teils der

Welle) und durch Absorption (Umwandlung von Licht- in Wärmeenergie) verursacht.

Bei senkrechtem Durchgang einer Lichtwelle der Intensität  $I_0$  durch eine planparallele Schicht der Dicke  $d$  erhält man für die Intensität  $I$  hinter der Schicht in guter Näherung

$$I = I_0(1 - R)^2 \cdot e^{-K \cdot d}. \quad (6)$$

$K$  heißt Extinktionskoeffizient; sein Reziprokerwert  $1/K$  entspricht der mittleren Reichweite des Lichtes in dem betreffenden Stoff und kann auch als mittlere freie Weglänge der Photonen interpretiert werden.  $R$  ist der Reflexionskoeffizient der Grenzfläche (vgl. O. 4), durch den Faktor  $(1 - R)^2$  wird die Reflexion an Vorder- und Rückseite der Schicht berücksichtigt [Mehrachtreflexionen und Interferenzen sind in Gl. (6) vernachlässigt].

Bei verdünnten Lösungen, in denen die Wechselwirkung der gelösten Moleküle untereinander vernachlässigt werden kann, ist  $K$  proportional zur Konzentration  $c$  der gelösten Moleküle:

$$K = \epsilon \cdot c \quad (7)$$

(*Beersches Gesetz*). Die Proportionalitätskonstante  $\epsilon$  heißt spezifischer Extinktionskoeffizient und ist für den gelösten Stoff charakteristisch. Gl. (6) geht damit über in

$$I = I_0(1 - R)^2 \cdot e^{-\epsilon \cdot c \cdot d} \quad (8)$$

(*Lambert-Beersches Gesetz*).

Die in einer dünnen Schicht der Dicke  $dx$  dem einfallenden Lichtbündel entzogene relative Intensität ergibt sich aus Gl. (6) zu

$$\frac{dI}{I} = -K \cdot dx. \quad (9)$$

Diese Größe stimmt überein mit der Wahrscheinlichkeit für das Verschwinden eines Photons aus dem Strahl auf der Strecke  $dx$ .

Andererseits enthält die Schicht im durchstrahlten Querschnitt  $A$

$$dN = N \cdot A \cdot dx$$

Moleküle (Abb. 168), wobei  $N$  die Teilchendichte (Zahl der gelösten Moleküle je Volumeneinheit) ist. Ordnet man jedem Molekül einen extingierenden Querschnitt  $q$  zu, so ist der Bruchteil

$$q \cdot dN/A = N \cdot q \cdot dx$$

der durchstrahlten Fläche von gelösten Molekülen bedeckt. Diese Größe ist daher ebenfalls gleich der Wahrscheinlichkeit für das Verschwinden eines Photons aus dem Lichtbündel. Setzt man die beiden Wahrscheinlichkeiten

gleich, so ergibt sich

$$q = K/N. \quad (10)$$

Der Teilchendichte  $N$  entspricht eine Konzentration

$$c = N \cdot m, \quad (11)$$

wobei  $m$  die Molekülmasse ist. Mit  $m = M/N_A$  ( $M$  Molmasse,  $N_A$  Avogadro-Konstante) wird

$$q = \varepsilon \cdot \frac{M}{N_A}, \quad (12)$$

so daß man aus der (makroskopischen) spezifischen Extinktion den (mikroskopischen) Extinktionsquerschnitt eines Moleküls berechnen kann.

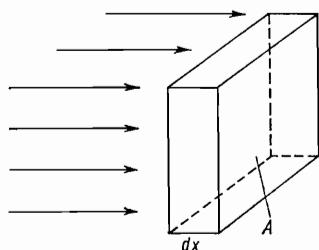


Abb. 168. Zur Berechnung des  
extingierenden Querschnitts;  
 $A$  durchstrahlte Fläche;  
 $dx$  Schichtdicke

Ist die Extinktion ausschließlich durch Absorption bedingt (keine Streuung), so spricht man statt vom Extinktionskoeffizienten vom Absorptionskoeffizienten  $\alpha$ . Der Absorptionskoeffizient ist stark von der Wellenlänge der einfallenden Strahlung abhängig, so daß sich für jeden Stoff ein charakteristisches Absorptionsspektrum  $\alpha(\lambda)$  ergibt, das z. B. zur Identifizierung des betreffenden Stoffes herangezogen werden kann. Starke Absorption tritt insbesondere im Bereich der anomalen Dispersion (Abb. 167) auf.

## O. 3.1. Refraktometer

- Aufgaben:*
1. An einem Refraktometermodell sind der Brechungsindex des Prismas und eines Glasplättchens mit Na-Licht zu messen.
  2. Der Brechungsindex von Wasser ist in Abhängigkeit von der Temperatur zu messen und graphisch darzustellen.
  3. Die Brechzahlen und die mittleren Dispersionen von mindestens 4 geeigneten organischen Verbindungen sind zu messen; aus den Brechzahlen sind die Refraktionsanteile der einzelnen Bindungen zu berechnen.

Geräte zur Bestimmung der Brechzahl durch Messung des Grenzwinkels der Totalreflexion heißen *Refraktometer*. Bei ihnen genügt die Messung eines Winkels, während sonst nach Gl. (1) die Messung zweier Winkel erforderlich ist.

Die Messung des Grenzwinkels erfolgt bei streifendem Lichteinfall an einem Prisma (Abb. 169). Hat das Prisma den Brechungsindex  $n_1$  und den

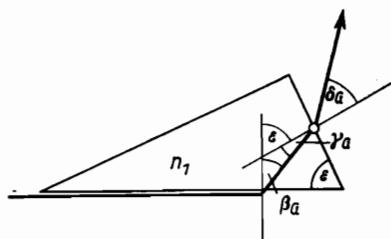


Abb. 169. Brechung am Prisma bei streifendem Lichteinfall ( $\beta_g = \beta_a$ ,  $\gamma_g = \gamma_a$ ,  $\delta_g = \delta_a$ )

brechenden Winkel  $\epsilon$ , so wird der streifend einfallende Strahl ( $\alpha = 90^\circ$ ) unter dem Winkel  $\beta_g$  in das Prisma hineingebrochen, trifft unter dem Winkel  $\gamma_g$  auf die zweite Prismenfläche auf und verlässt das Prisma unter dem Winkel  $\delta_g$ . Nach dem Brechungsgesetz gilt beim Eintritt des Strahls

$$\sin \beta_g = \frac{1}{n_1} \quad (13)$$

und beim Austritt

$$\sin \delta_g = n_1 \cdot \sin \gamma_g = \frac{\sin \gamma_g}{\sin \beta_g}. \quad (14)$$

Wie aus Abb. 169 hervorgeht, ist

$$\beta_g + \gamma_g = \epsilon, \quad (15)$$

da  $\epsilon$  Außenwinkel in dem vom Lichtstrahl und den beiden Loten gebildeten Dreieck ist. Setzt man Gl. (15) in Gl. (14) ein, so ergibt sich

$$\cot \beta_g = \frac{\sin \delta_g + \cos \epsilon}{\sin \epsilon}. \quad (16)$$

Müßt man  $\epsilon$  und  $\delta_g$ , so läßt sich aus Gl. (16)  $\beta_g$  und damit aus Gl. (13) der Brechungsindex  $n_1$  berechnen.

Strahlen, die unter kleinerem Einfallswinkel als  $90^\circ$  einfallen, verlassen das Prisma unter einem größeren Winkel als  $\delta_g$ , so daß nur Strahlen austreten, die mit dem Lot einen Winkel größer als  $\delta_g$  bilden. Beobachtet man das austretende Licht mit einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr, so entspricht jeder Strahlrichtung ein Punkt in der Brennebene (Abb. 170). Da in dem aus dem Prisma austretenden Lichtbündel nicht alle Richtungen

enthalten sind, bleibt ein Teil des Gesichtsfeldes dunkel. Der Richtung des Grenzstrahls entspricht daher bei Verwendung monochromatischen Lichtes eine scharfe Grenze zwischen hellem und dunklem Teil des Gesichtsfeldes.

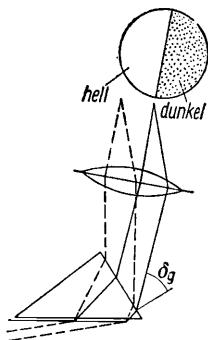


Abb. 170. Strahlengang im Refraktometer

Bei Verwendung von weißem Licht entsteht anstelle der scharfen Grenzlinie ein farbiger Saum, da der Brechungsindex und damit auch die Lage der Grenzlinie von der Wellenlänge abhängen.

#### Versuchsausführung

Aufgabe 1 wird mit einem Refraktometermodell ausgeführt, das aus einem drehbaren Prisma, einem Teilkreis und einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr besteht.

Den brechenden Winkel  $\varepsilon$  bestimmt man, indem man das Fernrohr senkrecht zu einer an  $\varepsilon$  anliegenden Prismenfläche einstellt (Ablesung  $\varphi_1$  am Teilkreis) und dann das Prisma dreht, bis die zweite an  $\varepsilon$  anliegende Prismenfläche senkrecht zum Fernrohr steht (Ablesung  $\varphi_2$ ). Der Drehwinkel ist dann  $\varphi_2 - \varphi_1 = 180^\circ - \varepsilon$ . Die Senkrechtstellung des Fernrohrs erfolgt nach dem in Versuch O. 1.1 beschriebenen Autokollimationsverfahren mittels des am Fernrohr befindlichen *Gaußschen Okulars*.

Der Winkel  $\delta_g$  wird gemessen, indem man das Prisma streifend beleuchtet, das Fadenkreuz auf die Hell-Dunkel-Grenze des Gesichtsfeldes einstellt und die Winkeldifferenz zwischen austretendem Strahl und Lot bestimmt.

Um den Brechungsindex  $n_2$  des Glasplättchens zu messen, klebt man es mit einer Flüssigkeit höherer Brechzahl (meist Monobromnaphthalin) an die Eintrittsfläche des Refraktometerprismas und bestimmt den Austrittswinkel  $\delta'_g$  bei der Hypotenuse streifendem Lichteinfall. Für die Berechnung ist Gl. (13) durch

$$\frac{1}{n_{12}} = \frac{n_2}{n_1} = \sin \beta'_g \quad (13a)$$

zu ersetzen, da jetzt der relative Brechungsindex  $n_{12}$  gemessen wird. Die zwischen Glasplättchen und Prisma befindliche Flüssigkeit hat auf die

Messung keinen Einfluß, solange ihr Brechungsindex größer als der des Glasplättchens ist. Sie bildet nämlich eine sehr dünne planparallele Schicht, die nur zu einer geringen Parallelverschiebung der einfallenden Lichtstrahlen führt, die Strahlrichtung jedoch unverändert läßt.

Die Aufgaben 2 und 3 werden mit einem *Abbeschen Refraktometer* ausgeführt. Dieses Refraktometer besitzt ein aufklappbares Doppelprisma, in dessen Zwischenraum die Flüssigkeit eingefüllt wird. Die der Flüssigkeit anliegende Fläche des unteren Prismas ist aufgerauht und dient als sekundäre Lichtquelle, wodurch günstige Beleuchtungsverhältnisse geschaffen werden (Abb. 171).

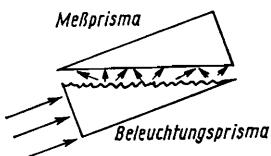


Abb. 171. Zur Beleuchtung beim  
Abbe-Refraktometer

Das Prisma kann mittels durchströmender Flüssigkeit, die von einem Thermostaten geliefert wird, gekühlt oder erwärmt werden. Statt eines Teilkreises ist eine Skale vorhanden, an der der Brechungsindex  $n_d$  für Natriumlicht ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) direkt abgelesen werden kann.

Die Messung erfolgt mit weißem Licht.

Dabei erscheint zunächst ein farbiger Saum. Im Fernrohr des Refraktometers befinden sich jedoch 2 sog. Amici-Prismen, die für Licht der Na-D-Linie geradsichtig sind, für andere Wellenlängen jedoch eine schwache Brechung bewirken (Abb. 172). Durch Verdrehen der beiden Prismenkombinationen gegeneinander kann der farbige Saum zum Verschwinden gebracht werden, so daß wieder eine scharfe Hell-Dunkel-Grenze erscheint. Aus der Größe der dazu erforderlichen Drehung kann mittels einer Eichtabelle die mittlere Dispersion der Flüssigkeit bestimmt werden.

Die Berechnung der Molrefraktionen erfolgt nach Gl. (4). Auflösung eines Gleichungssystems, das sich aus den Gln. (5) für die untersuchten Substanzen zusammensetzt, liefert die Bindungsrefraktionen, wenn man so viele Substanzen untersucht, wie verschiedene Bindungen in ihnen vorkommen.

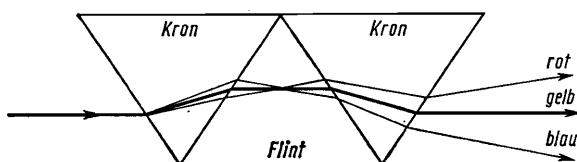


Abb. 172. Amici-Prisma: Kronglas hat kleinen Brechungsindex und geringe Dispersion; Flintglas hat großen Brechungsindex und große Dispersion

### Fehlerabschätzung

Die Berechnung des Brechungsindex des Refraktometerprismas erfolgt aus den Gln. (13) und (16).  $\varepsilon$  und  $\delta_g$  werden gemessen und sind daher fehlerbehaftet; die zu erwartenden Fehler seien  $\Delta\varepsilon$  und  $\Delta\delta_g$ . Differentiation von Gl. (16) liefert

$$-\frac{d\beta_g}{\sin^2 \beta_g} = \frac{\sin \varepsilon \cos \delta_g d\delta_g - \cos^2 \varepsilon d\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon}, \quad (17)$$

und aus Gl. (13) folgt

$$dn_1 = -\frac{\cos \beta_g}{\sin^2 \beta_g} d\beta_g. \quad (18)$$

Nach Bildung des Absolutbetrages ergibt sich daraus

$$\Delta n_1 \leq \frac{\cos \beta_g}{\sin^2 \varepsilon} \{ \sin \varepsilon \cos \delta_g \Delta \delta_g + \cos^2 \varepsilon \Delta \varepsilon \}. \quad (19)$$

## O. 3.2. Prismenspektrometer

- Aufgaben:*
1. Die Dispersionskurve eines Prismas ist zu messen.
  2. Die Wellenlängen der Wasserstofflinien  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  sind zu ermitteln.
  3. Das Auflösungsvermögen des Prismas ist zu berechnen und der gefundene Wert experimentell zu überprüfen.

Beim Durchgang durch ein Prisma wird ein Lichtstrahl zweimal an den Grenzflächen gebrochen. Für den Fall, daß der Strahl in einem Hauptsnitt (senkrecht zur brechenden Kante) verläuft und das Prisma symmetrisch durchsetzt (Abb. 173), tritt die kleinste Ablenkung  $\delta$  auf. Ist  $\alpha$  der Einfallsinkel und  $\varepsilon$  der brechende Winkel, so gilt

$$\sin \alpha = n \cdot \sin \beta, \quad (1a)$$

$\beta = \varepsilon/2$  und  $\delta = 2\alpha - \varepsilon$ . Daraus ergibt sich

---


$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta)}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (20)$$


---

Da der Brechungsindex von der Wellenlänge abhängt, wird Licht verschiedener Wellenlänge verschieden stark abgelenkt, das benutzte Licht

wird in sein Spektrum zerlegt (Prismenspektrometer). Verwendet man eine Lichtquelle, die ein Linienspektrum aussendet (z. B. eine Quecksilberdampflampe), so kann man durch Messung der Ablenkwinkel die Dispersionskurve (Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge) ermitteln.

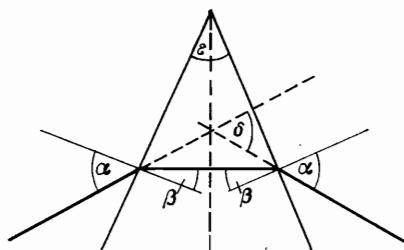


Abb. 173. Brechung am Prisma bei symmetrischem Strahlengang

Ist die Dispersionskurve bekannt, so kann man umgekehrt das Prisma zur Wellenlängenmessung benutzen, indem man den Brechungsindex für die betreffende Wellenlänge mißt und damit aus der Dispersionskurve  $\lambda$  bestimmt. Man kann sich dabei die Umrechnung von  $\delta$  in  $n$  ersparen, indem man sofort  $\delta = \delta(\lambda)$  als Eichkurve zeichnet und daraus nach Messung des Ablenkwinkels die gesuchte Wellenlänge direkt abliest.

Die Leistungsfähigkeit eines Spektrometers wird durch sein *Auflösungsvermögen* charakterisiert. Das Auflösungsvermögen gibt an, in welchem Maße verschiedene Wellenlängen als getrennte Spektrallinien wiedergegeben werden. Es ist durch die apparativ bedingte Breite der Linien begrenzt.

Ist der Eintrittsspalt breit, so sind es auch die im Fernrohr beobachteten Spaltbilder. Durch Verringerung der Spaltbreite lassen sich diese aber nicht beliebig schmal machen. Die untere Grenze ist durch die Beugung bestimmt: Da das Prisma höchstens von einem Lichtbündel der Breite  $a$  durchsetzt werden kann (vgl. Abb. 174), wirkt es wie ein Spalt gleicher Breite. Man erhält daher bei Verwendung monochromatischen Lichtes in der Brennebene des Fernrohrs die in Abb. 157 dargestellte Intensitätsverteilung. Der Winkeleabstand der ersten Minima vom Hauptmaximum ergibt sich nach

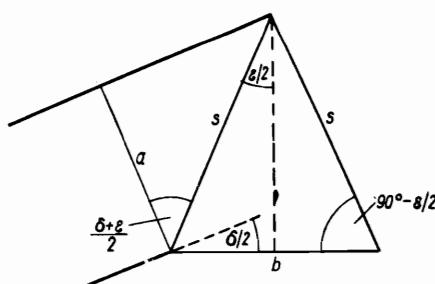


Abb. 174.  
Zum Auflösungsvermögen  
des Prismas

Gl. (O. 2.-14a) zu  $\sin \alpha = \lambda/a \approx \alpha$ . Zwei Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  ( $d\lambda \ll \lambda$ ) werden dann noch als getrennte Spektrallinien wahrgenommen, wenn das Hauptmaximum der Linie  $\lambda + d\lambda$  mit dem 1. Minimum der Linie  $\lambda$  zusammenfällt, d. h., wenn

$$\delta(\lambda + d\lambda) = \delta(\lambda) \pm \alpha = \delta(\lambda) \pm \frac{\lambda}{a} \quad (21)$$

ist. Als Größe des Auflösungsvermögens definiert man

$$A = \frac{\lambda}{d\lambda},$$

und man erhält durch Taylorentwicklung von (21)

$$A = \frac{\lambda}{d\lambda} = a \cdot \left| \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \right|. \quad (22)$$

Für die partielle Ableitung  $\partial \delta / \partial \lambda$  ergibt sich aus Gl. (20)

$$\frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = 2 \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda} \cdot \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \frac{\delta + \varepsilon}{2}},$$

woraus

$$A = \left| \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right| \cdot 2a \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \frac{\varepsilon + \delta}{2}} \quad (23)$$

folgt.

Ist das Prisma voll ausgeleuchtet, so ergeben sich aus der Abb. 174 die Beziehungen  $a = s \cdot \cos \frac{\varepsilon + \delta}{2}$  und  $b/2 = s \cdot \sin \varepsilon/2$  ( $b$  Basislänge des Prismas), und Gl. (23) vereinfacht sich zu

---


$$A = b \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|. \quad (24)$$


---

Das Auflösungsvermögen lässt sich also aus der Steigung der Dispersionskurve berechnen und ist wie diese von der Wellenlänge abhängig.

#### Versuchsausführung

Die Bestimmung von  $n$  nach Gl. (20) erfordert die Messung des brechenden Winkels  $\varepsilon$  und des Winkels der minimalen Ablenkung  $\delta$ . Die Winkel-

messung erfolgt mit einem Spektrometer, das zunächst sorgfältig zu justieren ist (vgl. Versuch O. 2.3).

Daraufhin ist die brechende Kante des Prismas senkrecht zur Sehlinie des Fernrohres zu stellen, damit das Prisma im Hauptschnitt durchstrahlt wird. Dies geschieht, indem man nach dem in Versuch O. 2.3 beschriebenen Autokollimationenverfahren beide brechende Flächen senkrecht zur Sehlinie stellt. Das Prisma stellt man dazu zweckmäßigerweise so auf den Spektrometertisch, daß eine der brechenden Flächen senkrecht zur Verbindungsline zweier Justierschrauben verläuft, und verstellt diese Fläche unter alleiniger Benutzung dieser beiden Schrauben. Für die Justierung der zweiten Fläche benutzt man dann ausschließlich die dritte Justierschraube.

Die Messung des brechenden Winkels kann in der in Versuch O. 3.1 beschriebenen Weise erfolgen. Ein weiteres Verfahren besteht darin, das Prisma so aufzustellen, daß beide brechenden Flächen gleichzeitig vom Spaltrohr beleuchtet werden. Man erhält dann zwei Strahlenbündel, die einen Winkel von  $2\epsilon$  einschließen.

Zur Messung der Dispersionskurve beleuchtet man den Spalt mit dem Licht einer Quecksilberdampflampe. Nach dem Durchgang des Lichtes durch das Prisma beobachtet man im Fernrohr voneinander getrennte farbige Bilder des Spaltes, die bei hinreichend kleiner Spaltbreite als Spektrallinien bezeichnet werden und den verschiedenen Wellenlängen des vom Quecksilberdampf ausgestrahlten Lichtes entsprechen.

Zur Bestimmung des Minimums der Ablenkung dreht man den Spektrometertisch mit dem Prisma und verfolgt die zu messende Linie im Fernrohr. Bei einer bestimmten Stellung kehrt sich bei gleichbleibender Drehrichtung des Prismas die Bewegung der Linie um. In dieser Minimumstellung bringt man das Fadenkreuz mit der Spektrallinie zur Deckung und liest den Einstellwinkel ab. In dieser Weise ist für jede Linie zu verfahren. Anschließend dreht man das Prisma so, daß das einfallende Licht nach der anderen Seite abgelenkt wird, und wiederholt das Verfahren; die Differenz der beiden Einstellwinkel ist dann gleich dem doppelten Ablenkinkel für die betreffende Wellenlänge. Die zu den einzelnen Spektrallinien gehörigen Wellenlängen sind aus Tabelle 12 zu entnehmen.

Zur Ermittlung der Wellenlänge der Wasserstofflinien ersetzt man die Quecksilberdampflampe durch eine wasserstoffgefüllte Geißlerröhre und mißt ebenso wie bei den Quecksilberlinien die Ablenkinkel. Die Wellenlängen entnimmt man der mit Hilfe der Quecksilberlinien gezeichneten Einmeßkurve  $\delta = \delta(\lambda)$ .

Der Fehler der Wellenlängenmessung ergibt sich aus folgenden Überlegungen:  $\Delta\delta$  sei der Fehler der Winkelmessung. Sieht man zunächst die Einmeßkurve  $\delta(\lambda)$  als fehlerfrei an, so ergibt sich ein Wellenlängenfehler  $\Delta\lambda = |\partial\delta/\partial\lambda|^{-1} \Delta\delta$ . In Wirklichkeit sind die Meßpunkte der Einmeßkurve jedoch mit dem gleichen Fehler behaftet, so daß der obige Wert zu verdoppeln ist.

Eine weitere Fehlerquelle liegt vor, wenn zur Kalibrierung nur wenige Wellenlängen benutzt wurden, so daß der Verlauf der Einmeßkurve nicht genügend genau interpoliert werden kann. Sind  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  Meßpunkte (Abb. 175), so verläuft die Einmeßkurve

mit Sicherheit innerhalb des Dreiecks  $CBX$ , der Interpolationsfehler  $\Delta\delta'$  beträgt daher etwa  $XX'/2$ , und man erhält als maximalen Fehler der Wellenlänge  $\Delta\lambda \leq |\partial\delta/\partial\lambda|^{-1} (2\Delta\delta + \Delta\delta')$ .

Eine experimentelle Überprüfung des Zusammenhanges von Auflösungsvermögen und Bündelbreite  $a$  lässt sich mit Hilfe eng benachbarter Spektrallinien ausführen. Man bringt dazu vor dem Objektiv des Fernrohrs oder

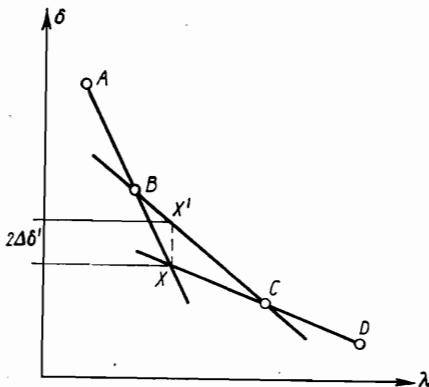


Abb. 175.  
Interpolationsfehler bei der  
Wellenlängenmessung

des Spaltrohrs eine Spaltblende an, deren Breite  $a$  veränderlich ist, bestimmt die Breite, bei der die gewählten Linien gerade noch getrennt erscheinen, und vergleicht mit Gl. (23). Geeignete Linienpaare sind in Tab. 13 zu finden.

### O. 3.3. Interferometer

*Aufgabe:* Die Brechzahl von Luft als Funktion des Druckes ist zu messen.

Theoretische Überlegungen zeigen, daß bei Gasen die Differenz  $(n - 1)$  proportional zur Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Teilchen  $N$  ist.

Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase  $\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0}$  ergibt sich

$$N = \left( \frac{N_A}{V_M} \right) \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \quad (25)$$

( $N_A$  Avogadro-Konstante,  $V_M$  Molvolumen,  $p$  Druck,  $T$  absolute Temperatur; der Index 0 bezeichnet die betreffenden Werte unter Normalbedin-

gungen). Bezeichnet man den Brechungsindex unter Normalbedingungen mit  $n_0$ , so ergibt sich aus Gl. (25)

$$n - 1 = (n_0 - 1) \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t}, \quad (26)$$

wobei  $\gamma$  der Ausdehnungskoeffizient für ein ideales Gas und  $t$  die Temperatur in Grad Celsius ist.

Da der Brechungsindex von Gasen nur sehr wenig von 1 verschieden ist, erfolgt die Messung mit einem *Interferometer*, mit dem die Differenz der optischen Weglängen  $n \cdot l$  von zwei kohärenten Strahlenbündeln, die zwei Küvetten durchlaufen, gemessen wird. Verschiedene Interferometer unter-

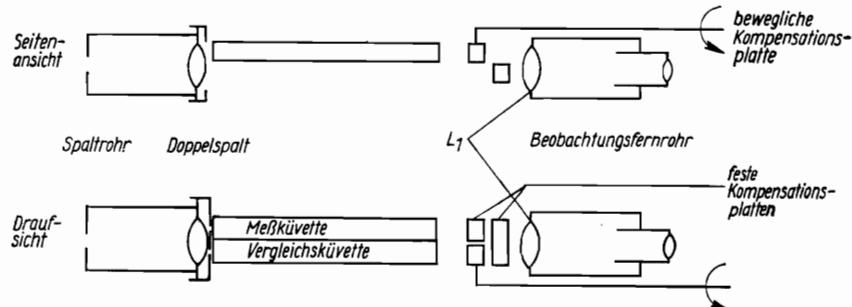


Abb. 176. Schema des Löwe-Haber-Interferometers

scheiden sich im wesentlichen durch die Art und Weise, wie die beiden kohärenten Strahlenbündel erzeugt werden. Für die Erklärung legen wir ein *Löwe-Haber-Interferometer* zugrunde (Abb. 176), eine Übertragung der Überlegungen auf andere Interferometertypen ist leicht möglich. Beim Löwe-Haber-Interferometer werden die beiden Strahlenbündel durch zwei Spalte erzeugt. Bei ihrer Vereinigung durch die Linse  $L_1$  entsteht daher in der Brennebene des Fernrohrs das Beugungsbild eines Doppelspalts (Spaltabstand  $b$ ), das bei Benutzung monochromatischen Lichtes aus äquidistanten hellen und dunklen Streifen besteht. Nach Gl. (O. 2.-9a) erhält man helle Streifen für alle Winkel  $\alpha_k$ , die der Beziehung

$$b \cdot \sin \alpha_k = k \cdot \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

genügen.

Der helle Streifen  $k$ -ter Ordnung kommt durch Überlagerung zweier Wellen zustande, zwischen denen bei leeren Küvetten eine Wegdifferenz von  $k \cdot \lambda$  besteht (Abb. 177). Befindet sich in der Meßküvette ein Gas mit dem Brechungsindex  $n$  und in der Vergleichsküvette ein Gas mit dem Brechungsindex  $n_v$ , so erhalten die beiden Wellen zusätzlich eine Differenz

der optischen Weglängen, die gleich  $(n - n_v) \cdot l$  ist, wenn  $l$  die Länge der Küvetten ist und die geringe Neigung der Strahlen vernachlässigt wird.

Der helle Streifen  $k$ -ter Ordnung wandert dadurch an eine Stelle, die durch den Winkel  $\alpha'_k$  bestimmt ist; es ist

$$b \cdot \sin \alpha'_k = k\lambda + (n - n_v) \cdot l = \left[ k + \frac{(n - n_v)}{\lambda} \cdot l \right] \lambda = (k + \Delta k) \lambda. \quad (28)$$

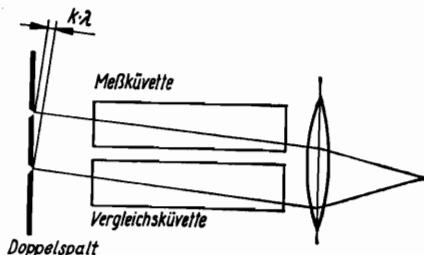


Abb. 177.  
Zur Ableitung der Interferometergleichung (29)

Da eine Differenz der optischen Weglänge von  $\lambda$  gerade einer Streifenbreite im Beugungsbild entspricht, bedeutet dies eine Verschiebung des ganzen Beugungsbildes um

$$\Delta k = (n - n_v) \cdot l / \lambda \quad (29)$$

#### Streifenbreiten.

Um diese Verschiebung messen zu können, läßt man einen Teil der beiden Strahlenbündel unterhalb der Küvetten verlaufen, so daß sie von Unterschieden im Brechungsindex unbeeinflußt bleiben und infolgedessen ein feststehendes Streifensystem erzeugen. Die Messung der Verschiebung des beweglichen gegenüber dem feststehenden Streifensystem erfolgt durch Kompensation: Im Strahlengang der Vergleichsküvette befindet sich eine durch eine Meßtrommel drehbare Glasplatte (Kompensationsplatte), die eine kontinuierliche Veränderung der Plattendicke und damit der optischen Weglänge des Vergleichsstrahls ermöglicht, wodurch die Verschiebung meßbar kompensiert werden kann.

#### Versuchsausführung

1. *Einmessung des Interferometers:* Zunächst ist festzustellen, bei welcher Stellung der Kompensationsplatte die Wegdifferenz der beiden Strahlenbündel gleich Null ist. Dabei bleiben die beiden Küvetten offen (gleicher Druck), und die Beleuchtung der Spalte erfolgt mit weißem Licht. Das Streifensystem besteht dann aus einer Überlagerung der Beugungsstreifen aller Farben. Da der Abstand der Streifen von der Wellenlänge abhängt, treten jetzt nur der helle Streifen nullter Ordnung und die beiden dunklen Streifen 1. Ordnung deutlich hervor. Der helle Streifen nullter Ordnung hat

zwei rote Säume, die dunklen Streifen 1. Ordnung haben innen (d. h. dem hellen Streifen nullter Ordnung zugewandt) blaue Säume. Dadurch ist eine eindeutige Festlegung des Nullpunktes möglich, indem man entsprechende Streifen vom feststehenden und vom beweglichen Streifensystem genau übereinanderstellt und an der Meßtrommel die zugehörige Lage der Kompensationsplatte abliest.

Nun beleuchtet man mit monochromatischem Licht und erhält ein System von hellen und dunklen Streifen. Die Streifen von Meß- und Vergleichssystem stehen bei richtiger Nullpunktffestlegung genau übereinander. Verschiebt man durch Drehen der Meßtrommel die beiden Systeme um genau eine Streifenbreite, so erzeugt die Kompensationsplatte eine Wegdifferenz von  $\lambda$  für die Wellenlänge des zur Kalibrierung benutzten Lichtes. Bei Verschiebung um zwei Streifenbreiten beträgt die Wegdifferenz zwei Wellenlängen usw. Trägt man daher die an der Meßtrommel abgelesenen Werte  $x_h$  über der Anzahl der Streifenverschiebungen  $\Delta k$  auf, so erhält man die Einmeßkurve des Interferometers für die betreffende Wellenlänge.

**2. Messung der Brechzahl:** Um die Brechzahl zu messen, ist es am günstigsten, die Vergleichsküvette zu evakuieren. Ist das nicht möglich, benutzt man eine luftgefüllte verschlossene Küvette, so daß die darin enthaltene Teilchenzahl konstant bleibt. Temperaturänderungen haben dann keinen Einfluß auf  $n_v$ , da  $N$  konstant ist.

Die Meßküvette füllt man mit Luft, aus der  $\text{CO}_2$  und Wasserdampf entfernt wurden. Überdruck erzeugt man mit einem kleinen Gummiball, Unterdruck mit einer Wasserstrahlpumpe. Der Druck in der Meßküvette wird mit einem U-Rohr-Manometer gemessen, der äußere Luftdruck mit einem Barometer bestimmt.

Zur Brechzahlbestimmung benutzt man weißes Licht und kompensiert die bei einem bestimmten Druck auftretende Verschiebung der Interferenzstreifen mit der Kompensationsplatte. Aus der Einmeßkurve entnimmt man die zugehörige Streifenverschiebung  $h$ , der nach Gl. (29) eine Brechzahldifferenz

$$\Delta n = n - n_v = \frac{h \cdot \lambda}{l} \quad (29a)$$

entspricht. Entsprechend dem Meßverfahren ist hierbei für  $\lambda$  die zur Eichung benutzte Wellenlänge einzusetzen.

Zur Bestimmung von  $n_0$  trägt man  $\Delta n$  als Funktion von  $p$  auf ( $n_v$  braucht dazu nicht bekannt zu sein) und ermittelt durch Ausgleichsrechnung (vgl. Abschn. 1.5.4 der Einleitung) die beste Gerade durch diese Meßpunkte.

Aus Gl. (26) folgt für die Steigung  $S$  dieser Geraden

$$S = \frac{dn}{dp} = \frac{(n_0 - 1)}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t},$$

und man erhält

$$n_0 = 1 + S \cdot p_0 \cdot (1 + \gamma t). \quad (30)$$

Ist  $n_v$  bekannt (z. B. ist  $n_v = 1$ , wenn man die Vergleichsküvette evakuiert), so lässt sich  $n_0$  auch direkt bestimmen, indem man Gl. (26) nach  $n_0$  auflöst. Man erhält mit  $n = n_v + \Delta n$

$$n_0 = 1 + (n - 1) \frac{p_0}{p} (1 + \gamma t). \quad (31)$$

## O. 3.4. Spektralphotometer

*Aufgaben:* 1. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Lambert-Beerschen Gesetzes

- a) durch Messung des Reintransmissionsgrades von wäßrigen Kupfersulfatlösungen verschiedener Konzentration bei konstanter Schichtdicke (Prüfen Sie, ob ein linearer Zusammenhang zwischen der Extinktionskonstanten und der Konzentration besteht. Bestimmen Sie die spezifische Extinktionskonstante.),
- b) durch Messung des Reintransmissionsgrades einer wäßrigen Kupfersulfatlösung bestimmter Konzentration bei verschiedenen Schichtdicken.

Die Wellenlänge ist bei den Aufgaben a und b konstant zu halten.

- 2. Bestimmen Sie den extingierenden Querschnitt für Kupfersulfat.
- 3. Messen Sie die Extinktion einer Farbstofflösung in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Diskutieren Sie die gemessene Kurve.

Der prinzipielle Aufbau eines Spektralphotometers ist in Abb. 178 gezeigt. Aus dem von der Lichtquelle ausgehenden Licht wird durch Filter bzw. einen Gitter- oder Prismenmonochromator Licht einer bestimmten

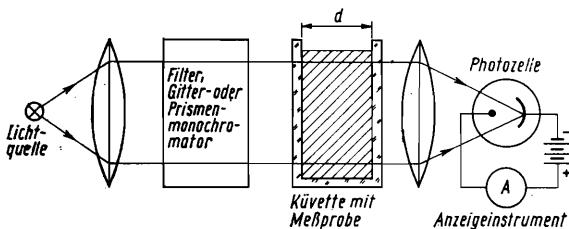


Abb. 178. Schematischer Aufbau eines Spektralphotometers

Wellenlänge ausgesondert und als Parallelbündel durch die mit der Meßprobe gefüllte, von parallelen Wänden begrenzte Glasküvette hindurchgeleitet. Der Strahlungsnachweis erfolgt durch eine Photozelle, ein Photoelement oder einen Photowiderstand mit nachgeschaltetem Anzeigegerät.

Von den drei Prozessen, die zur Intensitätsabnahme des Lichtes beim Durchgang durch eine Materieschicht führen – Reflexion an den Grenzflächen, Absorption und Streuung –, ist der Anteil der Lichtstreuung bei Lösungen absorbierender Teilchen in einem nichtabsorbierenden Lösungsmittel, die im folgenden ausschließlich betrachtet werden, vernachlässigbar.

Da man durch spektralphotometrische Messungen Aussagen über die durch die gelösten Moleküle hervorgerufene Extinktion und nicht über Reflexionsverluste an den Grenzflächen oder die Extinktion durch das Lösungsmittel selbst erzielen will, beseitigt man diese Einflüsse durch Vergleichsmessungen: Um die Extinktion der gelösten Moleküle zu bestimmen, mißt man zunächst die Extinktion des Systems Küvette + Lösungsmittel + gelöster Stoff und zieht davon die Extinktion des Bezugssystems Küvette + Lösungsmittel ab.

Da durch die gewählte Meßmethode der Einfluß der Reflexionen nicht mehr wirksam wird, kann für das Weitere Gl. (6) in der Form

$$I = I_0 \cdot e^{-Kd} \quad (32)$$

und Gl. (8) in der Form

$$I = I_0 \cdot e^{-ecd} \quad (33)$$

Verwendung finden.

Die dimensionlose Größe  $E = Kd = ecd$  (beim letzten Gleichheitszeichen ist die Gültigkeit des Beerschen Gesetzes vorausgesetzt!) bezeichnet man auch als *Extinktion* im engeren Sinne, so daß stets gilt:

$$I = I_0 \cdot e^{-E}. \quad (34)$$

Ebenso schreibt man für den *Reintransmissionsgrad*

$$\vartheta = I/I_0 = e^{-E}. \quad (35)$$

Oftmals verwendet man zur Definition der Extinktionsgrößen aus praktischen Gründen anstelle der Exponentialfunktion Zehnerpotenzen. So schreibt man für Gl. (32)

$$I = I_0 \cdot 10^{-K'd} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = 10^{-K'd}, \quad (36)$$

für Gl. (33)

$$I = I_0 \cdot 10^{-ecd} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = 10^{-ecd} \quad (37)$$

und anstelle der Gln. (34) und (35)

$$I = I_0 \cdot 10^{-E'} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = 10^{-E'}. \quad (38)$$

Die Umrechnung zwischen den unterschiedlich definierten Größen ist leicht

möglich:

$$\left. \begin{array}{l} K = 2,303 \cdot K', \\ \varepsilon = 2,303 \cdot \varepsilon', \\ E = 2,303 \cdot E'. \end{array} \right\} \quad (39)$$

### Versuchsausführung

Es ist darauf zu achten, daß alle Messungen als Vergleichsmessungen durchgeführt werden. Als Normal für die Vergleichsmessung dient eine Küvette gleicher Schichtdicke, die mit dem Lösungsmittel, in unserem Falle also mit destilliertem Wasser, gefüllt ist. Mißt man eine absorbierende Probe (bestehend aus: Küvette + Lösungsmittel + gelöste absorbierende Substanz) und liest am Photometer einen bestimmten Extinktionswert  $E$  ab, so ist dieser zu korrigieren, indem man den bei der Vergleichsmessung (Küvette + Lösungsmittel) gewonnenen Extinktionswert davon abzieht. Liest man den Reintransmissionswert der Meßprobe direkt ab, so ist dieser Wert entsprechend Gl. (35) durch den Reintransmissionsgrad des Vergleichsnormals zu teilen. Durch dieses Vorgehen erreicht man, daß Lichtverluste im Lösungsmittel oder durch Reflexion an den Grenzflächen in das Meßresultat nicht mehr eingehen.

Die Meß- und die Vergleichsküvette müssen genau gleich sein. Sie sind vor den Messungen innen und außen sorgfältig zu reinigen.

Man mißt den Reintransmissionsgrad  $\vartheta$  bei konstanter Wellenlänge in Abhängigkeit von der Konzentration  $c$  der Kupfersulfatlösungen und der Schichtdicke  $d$ . Aus  $\vartheta$  berechnet man nach Gl. (35) jeweils die Extinktion  $E$ . Bei industriell gefertigten Spektralphotometern kann man  $E'$  nach Gl. (38) direkt ablesen. Zur Umrechnung benutzt man Gl. (39).

Das Lambert-Beersche Gesetz überprüft man, indem man den Reintransmissionsgrad  $\vartheta$  in einfach-logarithmischer Darstellung als Funktion der Konzentration  $c$  bzw. der Schichtdicke  $d$  aufträgt. In beiden Fällen muß sich bei Gültigkeit des Lambert-Beerschen Gesetzes eine Gerade ergeben. Aus dem Anstieg läßt sich die spezifische Extinktionskonstante  $\varepsilon$  berechnen.

Ist das Beersche Gesetz erfüllt, so ist die Extinktionskonstante eine lineare Funktion der Konzentration  $c$ . Man prüft dies, indem man die für die verschiedenen Konzentrationen berechneten Werte  $K = E/d$  über der Konzentration  $c$  aufträgt. Der Anstieg der Geraden gibt direkt die spezifische Extinktionskonstante  $\varepsilon$ .

Zur Bestimmung des extingierenden Querschnitts  $q$  verwendet man die Gln. (10) oder (12).

Bei der Messung der Wellenlängenabhängigkeit der Extinktion  $E$  einer Farbstofflösung ist bei jeder Wellenlänge die Extinktion der Vergleichsprobe mitzumessen und die Korrektur in der oben beschriebenen Weise vorzunehmen. Die Meßwerte sind graphisch darzustellen. Bei der Diskussion beachte man, daß ein Stoff, der eine bestimmte Farbe absorbiert, in der entsprechenden Komplementärfarbe erscheint.

## O. 4. POLARISATION

### O. 4.0. Allgemeine Grundlagen

Licht ist eine *transversale Wellenbewegung*, bei der die Schwingungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung erfolgen. Den Beweis dafür liefert die Möglichkeit, Licht zu polarisieren. Wir beschäftigen uns im folgenden mit linear polarisiertem Licht, bei dem die Schwingungen nur in einer bestimmten Ebene, der Schwingungsebene<sup>1)</sup>, erfolgen.

Natürliches Licht ist unpolarisiert, es ändert seine Schwingungsebene innerhalb sehr kurzer Zeiten völlig unregelmäßig. Um daraus linear polarisiertes Licht herzustellen, kann man die Reflexion an durchsichtigen Spiegeln oder die Doppelbrechung benutzen.

#### 1. Polarisation durch Reflexion

Die Intensität  $I^{(r)}$  eines an einem durchsichtigen Medium reflektierten parallelen Strahlenbündels ergibt sich bei Polarisation parallel zur EinfallsEbene zu

---


$$I_{\parallel}^{(r)} = \left( \frac{n \cos \alpha - \cos \beta}{n \cos \alpha + \cos \beta} \right)^2 \cdot I_{\parallel}^{(e)} \quad (1a)$$


---

und bei Polarisation senkrecht zur Einfallsebene zu

---


$$I_{\perp}^{(r)} = \left( \frac{\cos \alpha - n \cos \beta}{\cos \alpha + n \cos \beta} \right)^2 \cdot I_{\perp}^{(e)}, \quad (1b)$$


---

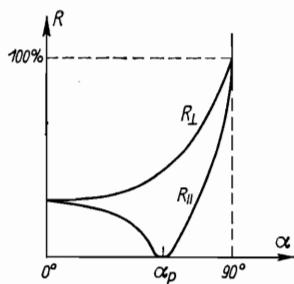


Abb. 179. Reflexionskoeffizient  $R$  als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha$

<sup>1)</sup> Bei einer Lichtwelle stehen elektrische und magnetische Feldstärke aufeinander; unter Schwingungsebene versteht man die Ebene, in der der Vektor der elektrischen Feldstärke schwingt. Die Ebene, in der der Vektor der magnetischen Feldstärke schwingt, wird auch als Polarisationsebene bezeichnet.

wobei  $\alpha$  der Einfallswinkel,  $\beta$  der Brechungswinkel,  $n$  der Brechungsindex des reflektierenden Mediums und  $I^{(e)}$  die Intensität des einfallenden Strahlenbündels ist (*Fresnelsche Formeln*).

Ist  $n > 1$ , so ergibt sich die in Abb. 179 gezeigte Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten  $R = I^{(r)}/I^{(e)}$  vom Einfallswinkel  $\alpha$ . Man sieht, daß bei einem bestimmten Einfallswinkel  $\alpha_p$  die Intensität des reflektierten Strahls verschwindet, wenn dieser parallel zur Einfallsebene polarisiert ist. Läßt man daher unpolarisiertes Licht unter dem Winkel  $\alpha_p$  einfallen, so werden nur die senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Anteile reflektiert, das reflektierte Licht ist daher linear polarisiert. Der Winkel  $\alpha_p$  wird *Polarisationswinkel* genannt.

Aus Gl. (1a) folgt, indem man  $I^{(r)} = 0$  setzt,

$$\alpha_p + \beta_p = 90^\circ. \quad (2)$$

Reflektierter und gebrochener Strahl stehen also in diesem Falle senkrecht aufeinander (*Brewstersches Gesetz*, vgl. Abb. 180). Setzt man (2) in das Brechungsgesetz ein, so ergibt sich

---


$$\tan \alpha_p = n. \quad (3)$$


---

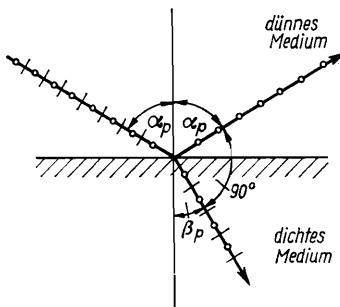


Abb. 180. Brewstersches Gesetz

## 2. Polarisation durch Doppelbrechung

Trifft ein Lichtstrahl auf einen optisch einachsigen Kristall, z. B. Kalkspat, so wird er im allgemeinen (wenn er nicht in Richtung der optischen Achse oder senkrecht dazu verläuft) in zwei Strahlen verschiedener Richtung aufgespalten. Der eine der Strahlen gehorcht dem Snelliusschen Brechungsgesetz und wird als *ordentlicher Strahl* bezeichnet; der andere gehorcht diesem Gesetz nicht<sup>1)</sup> und heißt *außerordentlicher Strahl*. Beide Strahlen sind senkrecht zueinander linear polarisiert; da in dem einfallenden na-

<sup>1)</sup> Für den außerordentlichen Strahl hängt der Brechungsindex von der Ausbreitungsrichtung ab.

türlichen Licht beide Polarisationsrichtungen mit gleicher Intensität enthalten sind, haben beide Strahlen die gleiche Intensität.

Will man mittels Doppelbrechung linear polarisiertes Licht erzeugen, so muß man einen der beiden Strahlen beseitigen. Dies geschieht beim sog. *Glan-Thompson-Prisma* in folgender Weise: Aus einem doppelbrechenden Kalkspatkristall werden 2 Prismen mit ihren brechenden Kanten parallel zur optischen Achse herausgeschnitten und mit Kanadabalsam gekittet (Abb. 181). Für den ordentlichen Strahl ( $\alpha_0$ ) ist die Brechzahl des Kalkspats

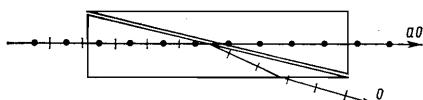


Abb. 181.  
Glan-Thompson-Prisma

( $n = 1,66$ ) größer als die des Kanadabalsams ( $n = 1,54$ ), er wird daher an der Kittfläche totalreflektiert und an der geschwärzten Fassung des Prismas absorbiert. Für den außerordentlichen ( $\alpha_0$ ) Strahl ist dagegen der Brechungsindex des Kalkspats in der betreffenden Richtung ( $n = 1,49$ ) kleiner als der des Kanadabalsams, er tritt daher als linear polarisierter Strahl aus dem Prisma aus. Auf dem gleichen Prinzip beruht die polarisierende Wirkung des früher vorwiegend benutzten *Nicolschen Prismas*, bei dem jedoch die Eintrittsfläche schräg zur Längsrichtung steht und das nur einen kleineren Gesichtsfeldwinkel (beim Glan-Thompson-Prisma  $42^\circ$ ) auszunutzen gestattet.

Anstelle von Polarisationsprismen lassen sich auch sog. dichroitische Kristalle zur Herstellung polarisierten Lichtes benutzen, z. B. Turmalin. Bei diesen Kristallen wird der eine der beiden Strahlen stark absorbiert. Bei den häufig benutzten Polarisationsfiltern sind derartige Kristalle geordnet in geeignete Folien eingelagert.

### 3. Drehung der Polarisationsebene

Beim Durchgang von linear polarisiertem Licht durch sogenannte *optisch aktive Substanzen* wird die Schwingungsebene gedreht. Optisch aktive Substanzen treten stets in zwei Formen auf, die gleich stark, aber in entgegengesetzten Richtungen drehen. Liegen diese Substanzen als Kristalle

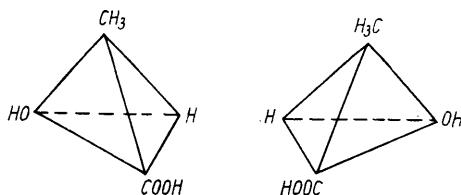


Abb. 182. Stereoisomere der Milchsäure  $\text{CH}_3 \cdot \text{CHOH} \cdot \text{COOH}$   
(das asymmetrische C-Atom hat man sich in der Mitte des gezeichneten Tetraeders zu denken)

vor, so unterscheiden sich die rechts- und linksdrehenden auch in ihrer äußereren Form, sie verhalten sich wie Bild und Spiegelbild (*Enantiomorphie*).

Die Drehung ist durch den Aufbau der Substanz bedingt und geht bei Stoffen, die auch in Lösung optisch aktiv sind, auf eine asymmetrische Molekülstruktur zurück, die meist durch ein asymmetrisches Kohlenstoffatom (Kohlenstoffatom mit vier verschiedenen Substituenten) bedingt ist. Abb. 182 zeigt für die einfachste optisch aktive Substanz, die Milchsäure, schematisch die beiden möglichen Molekülformen.

Die optische Aktivität von Kristallen ist nicht notwendig durch asymmetrische Moleküle bedingt, sie kann auch durch eine schraubenförmige Anordnung der Gitterbausteine hervorgerufen werden, z. B. beim Quarz.

Blickt man der Ausbreitungsrichtung des Lichtes entgegen, so heißt eine Substanz rechtsdrehend, wenn sie die Schwingungsebene im Uhrzeigersinn, dreht, andernfalls linksdrehend. Bei festen Stoffen muß man zur Messung des Drehwinkels eine planparallele Platte der Dicke  $d$  aus dem zu untersuchenden Material herausschneiden. Der Drehwinkel  $\varphi$  ist dann proportional zu  $d$ :

$$\varphi = [\varphi] \cdot d. \quad (4)$$

Die Materialkonstante  $[\varphi]$  (meist in Grad/mm angegeben) heißt spezifische Drehung, sie hängt von der Schnittlage und von der Wellenlänge des Lichtes ab (Rotationsdispersion), im allgemeinen nimmt  $[\varphi]$  mit abnehmender Wellenlänge zu.

Bei Lösungen hängt der Drehwinkel außer von der durchstrahlten Schichtdicke auch noch von der Konzentration  $c$  ab, so daß sich

$$\varphi = [\varphi] \cdot c \cdot d \quad (5)$$

ergibt;  $c$  wird meist in g/cm<sup>3</sup>,  $d$  in dm angegeben, so daß man  $[\varphi]$  dann in Grad cm<sup>3</sup>/g dm erhält.

Manche optisch inaktiven Stoffe werden optisch aktiv, wenn man sie in ein Magnetfeld bringt, dessen Richtung parallel oder antiparallel zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes ist. Diese Erscheinung bezeichnet man als *Faraday-Effekt*. Die Drehung der Polarisierungsebene ist auch hier proportional zur Schichtdicke und hängt linear von der magnetischen Flussdichte ab. Es ist daher

$$\varphi = \omega \cdot d \cdot B. \quad (6)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\omega$  wird als *Verdet-Konstante* des betreffenden Stoffes bezeichnet.

## O. 4.1. Polarisationswinkel und Reflexionsvermögen

- Aufgaben:*
1. Der Polarisationswinkel einer Glasplatte ist zu bestimmen.
  2. Das Reflexionsvermögen als Funktion des Einfallswinkels ist zu messen.

Unter Benutzung eines Spektrometers läßt sich die in Abb. 179 gezeichnete Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten  $R$  vom Einfallswinkel  $\alpha$  überprüfen. Man benötigt dazu ein Meßgerät für die Intensität des Lichtes, z. B. eine Photozelle, einen Photowiderstand oder ein Photoelement. Während der durch die Photozelle fließende Strom proportional zur Lichtintensität ist, muß bei Verwendung eines Photoelements oder eines Photowiderstands die Abhängigkeit des Photostroms von der Lichtintensität vor der Messung durch Aufnahme einer Einmeßkurve bestimmt werden (vgl. Abschn. O. 5).

### Versuchsausführung

Für die Messung benutzt man eine Platte aus geschwärztem Glas, um störende Reflexionen von der Rückseite zu vermeiden. Diese Platte wird so auf den Spektrometertisch gestellt, daß die reflektierende Fläche parallel zur Drehachse steht (Justierung siehe Versuch O. 2.3).

Zur Messung des Polarisationswinkels bringt man vor dem Spaltrohr ein Polarisationsfilter an. Ist dessen Durchlaßrichtung nicht bekannt, so ermittelt man sie zusammen mit dem Polarisationswinkel in folgender Weise: Zunächst wird bei beliebigem Einfallswinkel das Bild des Spaltes nach Reflexion des Lichtes an der Glasplatte im Fernrohr beobachtet und der Polarisator so lange gedreht, bis die minimale Helligkeit des Spaltbildes erreicht ist. Nun wird der Einfallswinkel verändert, ohne daß das Spaltbild aus dem Gesichtsfeld verschwindet. Hat man auf diese Weise den Polarisationswinkel erreicht, so tritt völlige Verdunkelung des Spaltbildes ein (evtl. ist dazu der Polarisator noch geringfügig nachzudrehen), und die Durchlaßrichtung des Polarisationsfilters stimmt mit der Einfallsebene überein, liegt also senkrecht zur Drehachse des Spektrometers.

Zur Messung des Reflexionsvermögens ersetzt man das Okular des Fernrohrs durch den geeichten Strahlungsempfänger und mißt bei verschiedenen Einfallswinkeln die Intensität des reflektierten Strahls bei parallel und bei senkrecht zur Einfallsebene polarisiertem Licht. Dabei ist sorgfältig darauf zu achten, daß das gesamte aus dem Spaltrohr austretende Licht an der Glasplatte reflektiert wird und ins Fernrohr fällt. Nötigenfalls muß der Durchmesser des Lichtbündels durch geeignete Blenden begrenzt werden. Ferner ist zu beachten, daß die Messung nicht durch Streulicht, z. B. von den Zimmerwänden, verfälscht wird. Schließlich entfernt man die Glasplatte und mißt die Intensität des einfallenden Lichtes, indem man das Fernrohr in die Richtung des Spaltrohres dreht.

Die gefundene Abhängigkeit des Reflexionsvermögens vom Einfallswinkel ist graphisch darzustellen und mit den nach Gln. (1a), (1b) berechneten Werten zu vergleichen. Für die Berechnung ist der aus dem Polarisationswinkel nach Gl. (3) ermittelte Brechungsindex zugrunde zu legen.

## O. 4.2. Drehung der Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes

- Aufgaben:*
1. Die Konzentrationsabhängigkeit des Drehvermögens einer Rohrzuckerlösung ist zu untersuchen und das spezifische Drehvermögen zu berechnen.
  2. Die Wellenlängenabhängigkeit der spezifischen Drehung eines Quarzplättchens ist zu ermitteln.
  3. Die Verdetsche Konstante für Nitrobenzol ist zu messen.

Die Drehung der Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes wird mit dem *Polarisationsapparat* (Abb. 183) gemessen. Hauptbestandteile dieses Apparates sind zwei Polarisationsprismen oder Polarisationsfilter. Das erste



Abb. 183. Schema eines Polarisationsapparates

Prisma, der *Polarisator P*, erzeugt linear polarisiertes Licht; mit Hilfe des zweiten Prismas, des *Analysators A*, läßt sich die Lage der Schwingungsebene feststellen. Stehen die Schwingungsebenen von Polarisator und Analysator parallel, so ist das Gesichtsfeld des Fernrohres *F* hell; stehen sie senkrecht aufeinander (*gekreuzt*), so ist das Gesichtsfeld dunkel.

Bringt man zwischen die gekreuzten Polarisationsfilter eine Küvette *K* mit einer optisch aktiven Substanz, so wird das Gesichtsfeld aufgehellt, da die Schwingungsebene des Lichtes gedreht wurde. Der Drehwinkel  $\varphi$  läßt sich messen, indem der Analysator so lange gedreht wird, bis wieder Dunkelheit herrscht. Dies ist dann der Fall, wenn der Analysator um  $\varphi$  oder um  $180^\circ - \varphi$  gedreht wird. Um zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden, muß der Drehsinn der betreffenden Substanz ermittelt werden.

Da die Einstellung auf völlige Dunkelheit schwierig ist, benutzt man für genauere Messungen einen Halbschattenapparat. Bei diesem teilt man durch ein Hilfsfilter *N* das Gesichtsfeld in zwei Hälften. Bei parallelen Filtern bewirkt das Hilfsfilter eine Verdunklung der einen Hälfte des Gesichtsfeldes, wenn seine Durchlaßrichtung schräg zu der des Polarisators steht. Dreht man nun den Analysator, so daß der helle Teil des Gesichtsfeldes dunkler wird, so wird die vorher verdunkelte Hälfte aufgehellt, und man erreicht schließlich eine Stellung, in der beide Teile gleich hell erscheinen. Bei einer Drehung um  $360^\circ$  erscheinen die beiden Gesichtsfeldhälften in zwei Stellungen gleich hell und in zwei anderen gleich dunkel. Die dunkle „Halbschattenstellung“ ist die empfindlichere, sie wird als Ausgangsstellung für die Messung des Drehwinkels benutzt.

### Versuchsausführung

Zu 1.: An Zuckerlösungen verschiedener Konzentration wird die Größe der Drehung gemessen. Da der Drehwinkel mit wachsender Konzentration zunimmt, ergibt sich auch leicht der Drehsinn der Lösung. Das spezifische Drehvermögen berechnet man nach Gl. (5). Ist  $[\varphi]$  bekannt, so kann man durch Messung des Drehwinkels Konzentrationsmessungen ausführen.

Zu 2.: Um die Abhängigkeit der spezifischen Drehung von der Wellenlänge zu messen, stellt man mit Hilfe von Filtern (z. B. Metallinterferenzfiltern) monochromatisches Licht her und mißt für jede Wellenlänge den zugehörigen Drehwinkel. Die Dicke des Quarzplättchens wird mit einem Meßschieber oder einer Bügelmeßschraube bestimmt. Um den Drehsinn festzustellen, bringt man gleichzeitig zwei Plättchen des gleichen Quarzes zwischen Polarisator und Analysator; der Drehwinkel muß dann größer werden.

Eine andere Methode besteht darin, die Erscheinungen im weißen Licht zu beobachten. Infolge der Rotationsdispersion wird jeweils nur eine Farbe ausgelöscht, und man sieht die Komplementärfarbe. Aus der Aufeinanderfolge der Farben bei der Drehung des Analysators läßt sich ebenfalls der Drehsinn ermitteln.

Zu 3.: Zur Messung der Verdetschen Konstanten wird die zur Messung benutzte Kuvette mit einer Spule umgeben, in der ein starkes Magnetfeld erzeugt werden kann. Man mißt den Drehwinkel in Abhängigkeit von der magnetischen Flußdichte  $B$ , wobei zur Vergrößerung der Meßgenauigkeit durch Umpolen des Spulenstromes abwechselnd bei positiver und negativer Feldstärke gemessen wird, wodurch man eine Verdopplung des Drehwinkels erreicht.

Die magnetische Flußdichte  $B$  bestimmt man aus Windungszahl  $n$  der Spule und dem durchfließenden Strom  $I$  nach der Formel

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot \frac{I}{l} \quad (7)$$

( $l$  Länge der Spule,  $\mu_0$  magnetische Feldkonstante).

## O. 5. STRAHLUNGSMESSUNG UND PHOTOMETRIE

### O. 5.0. Allgemeine Grundlagen

Die von einer Lichtquelle emittierte Strahlung kann in verschiedener Weise bewertet werden. Interessiert man sich für rein physikalische Probleme, so bezieht man sich auf die Energie der Strahlung; interessiert man

sich dagegen für den Lichteindruck auf das menschliche Auge, so bezieht man sich auf die Lichtstärke und die davon abgeleiteten Größen.

In der folgenden Übersicht sind die physikalischen Strahlungsgrößen (Index e) und die photometrischen Größen einander gegenübergestellt (vgl. auch Abschn. 1.2 der Einleitung):

*Auf die Quelle bezogene Größen:*

|  |  |
|--|--|
| Strahlstärke $I_e$ (W/sr)                          | $\triangleq$ Lichtstärke $I$ (cd)                                      |
| Strahldichte $L_e$ (W/(m <sup>2</sup> · sr))       | $\triangleq$ Leuchtdichte $L$ (cd/m <sup>2</sup> )                     |
| Strahlungsfluß (Energiestrom) $\Phi_e$ (W)         | $\triangleq$ Lichtstrom $\Phi$ (lm) 1 lm = 1 cd · sr                   |
| spezifische Ausstrahlung $M_e$ (W/m <sup>2</sup> ) | $\triangleq$ spezifische Lichtausstrahlung<br>$M$ (lm/m <sup>2</sup> ) |

*Auf den Empfänger bezogene Größe:*

|  |  |
|--|--|
| Bestrahlungsstärke $E_e$ (W/m <sup>2</sup> ) | $\triangleq$ Beleuchtungsstärke $E$ (lx) |
|  | 1 lx = 1 lm/m <sup>2</sup>               |

Der Begriff „Intensität“ wird in verschiedener Bedeutung, meist synonym für Bestrahlungsstärke gebraucht.

Außer der Gesamtstrahlung ist häufig die räumliche und die spektrale Verteilung der Strahlung von Bedeutung. Die Abhängigkeit der Strahl- bzw. Leuchtdichte von der Ausstrahlungsrichtung<sup>1)</sup> gibt man in Form des Richtstrahldiagramms (Indikatrix)  $L = L(\vartheta, \varphi)$  an, wobei  $\vartheta$  und  $\varphi$  als Polarwinkel die Beobachtungsrichtung festlegen. Meist kann man sich dabei auf die Verteilung in einer Ebene senkrecht zur strahlenden Fläche beschränken, so daß zur Festlegung der Ausstrahlungsrichtung die Angabe eines Winkels genügt.

Für den wichtigen Spezialfall einer gleichmäßig erhitzten ebenen Fläche eines schwarzen Körpers ist das Richtstrahldiagramm in Abb. 7 der Einleitung angegeben. Eine derartige Fläche hat eine konstante winkelunabhängige Strahl- bzw. Leuchtdichte und strahlt nach dem *Lambertschen Gesetz*

---


$$L = L_0 \cdot \cos \vartheta; \quad (1)$$


---

dabei ist  $\vartheta$  der Winkel zwischen Ausstrahlungsrichtung und Flächennormale und  $L_0$  die Strahl- bzw. Leuchtdichte in Richtung der Flächennormalen.

Zur Charakterisierung der *spektralen Verteilung* der Strahlung trägt man die in einem engen Wellenlängenintervall  $\Delta\lambda$  gemessene spektrale Strahldichte  $L_{e\lambda}$  als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  auf. Man erhält bei glühenden Festkörpern oder Flüssigkeiten den in Abb. 184a schematisch dargestellten Verlauf (Kontinuumstrahler), während sich bei angeregten Gasen der in Abb. 184b gezeigte Verlauf ergibt (Linienstrahler).

<sup>1)</sup> Bezüglich der räumlichen Verteilung besteht kein Unterschied zwischen Strahldichte und Leuchtdichte.

Ein wichtiger Spezialfall ist die *spektrale Strahlungsverteilung des schwarzen Körpers* (d. h. eines Körpers, der alle auftreffende Strahlung absorbiert). Sie gehorcht dem Planckschen Strahlungsgesetz: Die spektrale Strahldichte  $L_{e\lambda}$  unpolarisierter Strahlung im Intervall  $\Delta\lambda$ , bezogen auf die Einheit des Raumwinkels, ist gegeben durch

$$L_{e\lambda} \cdot \Delta\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \cdot \Delta\lambda. \quad (2a)$$

Benutzt man statt der Wellenlänge die Frequenz  $\nu$  als Abszisse, so erhält man

$$L_{e\lambda} \cdot \Delta\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cdot \Delta\nu \quad (2b)$$

( $h$  Plancksches Wirkungsquantum,  $c$  Lichtgeschwindigkeit). Die spektrale Strahldichte hängt also bei einem derartigen Strahler außer von der Größe der strahlenden Fläche nur von der Wellenlänge und von der absoluten Temperatur  $T$  ab, jedoch nicht von der Beschaffenheit des Strahlers selbst.

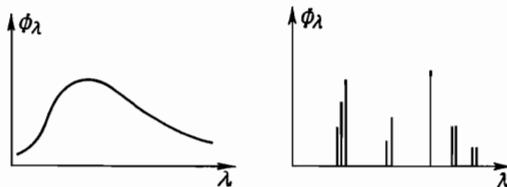


Abb. 184. Spektrale Strahldichte  $L_{e\lambda}$  als Funktion der Wellenlänge  
a) Kontinuumstrahler; b) Linienstrahler

Durch Integration über alle Wellenlängen und über einen Halbraum ergibt sich unter Berücksichtigung des *Lambertschen Gesetzes* [Gl. (1)] die spezifische Ausstrahlung

$$M_e = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} L_{e\lambda} d\lambda \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4 T^4}{c^2 h^3} = \sigma \cdot T^4 \quad (3)$$

(*Stefan-Boltzmannsches Gesetz*).

*Reale Strahler*, z. B. Glühlampen, strahlen bei gleicher Temperatur stets weniger als der schwarze Körper. Das Verhältnis der Strahldichte des betreffenden Körpers zu der eines schwarzen Körpers gleicher Temperatur bezeichnet man als den spektralen Emissionskoeffizienten  $\varepsilon(\lambda, T)$ , so daß man

für die spektrale Strahldichte  $L_{e\lambda}$  eines Temperaturstrahlers schreiben kann

$$L_{e\lambda} \Delta\lambda = \varepsilon(\lambda, T) \cdot \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\frac{hc}{\lambda kT} - 1} \cdot \Delta\lambda. \quad (4)$$

Der Emissionskoeffizient  $\varepsilon(\lambda, T)$  ist gleich dem Absorptionsvermögen  $A(\lambda, T)$ , das sich durch Reflexionsmessungen bestimmen lässt (Kirchhoff'sches Gesetz). Es ist nämlich

$$A(\lambda, T) = 1 - R(\lambda, T), \quad (5)$$

wobei  $R = I^r/J^e$  das Verhältnis von reflektierter zu eingestrahlter Lichtintensität bei senkrechtem Lichteinfall ist (vgl. Abschn. O. 4).

Einen Körper, bei dem der Emissionskoeffizient unabhängig von der Wellenlänge ist, bezeichnet man als *grauen Strahler*. Seine spektrale Strahldichte stimmt bis auf einen konstanten Faktor  $\varepsilon < 1$  mit der des schwarzen Körpers überein. Beispielsweise ist für das technisch wichtige Wolfram im sichtbaren Spektralbereich in guter Näherung  $\varepsilon = 0,47$ , unabhängig von Temperatur und Wellenlänge.

Der Nachweis der Strahlungsenergie kann mit thermischen oder photoelektrischen Strahlungsempfängern erfolgen. Mit beiden misst man die Bestrahlungsstärke  $E_e$ . Zwischen ihr und der Strahlstärke  $I_e$  besteht bei genügend kleiner und hinreichend weit vom Empfänger entfernter Lichtquelle der Zusammenhang (Abb. 185)

$$E_e = \frac{I_e}{r^2} \cdot \cos \alpha \quad (6)$$

(photometrisches Grundgesetz).  $\alpha$  ist der Einfallswinkel der Strahlung,  $r$  der Abstand der Lichtquelle von der Empfängerfläche. Da es sich hier

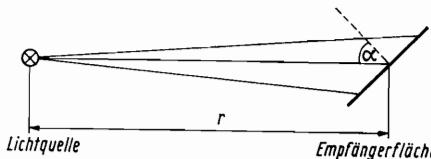


Abb. 185.  
Zum photometrischen  
Grundgesetz

ebenso wie beim Lambertschen Gesetz Gl. (1) um rein geometrische Beziehungen handelt, besteht der gleiche Zusammenhang auch zwischen Beleuchtungsstärke  $E$  und Lichtstärke  $I$ .

In thermischen Empfängern (z. B. im Vakuumthermoelement, vgl. O. 5.2) wird die gesamte auffallende Strahlung unabhängig von der Wellenlänge in Wärme umgewandelt; die entstehende Temperaturerhöhung wird gemessen und dient als Maß für die Bestrahlungsstärke.

Photoelektrische Strahlungsempfänger beruhen auf dem lichtelektrischen

**Effekt.** Dabei wird die in dem lichtempfindlichen Stoff absorbierte Lichtenergie auf die in dem Stoff gebundenen Elektronen übertragen, so daß diese im Inneren frei beweglich werden (innerer lichtelektrischer Effekt) oder aus dem Stoff austreten können (äußerer lichtelektrischer Effekt).

Beim *äußerem lichtelektrischen Effekt* zeigt es sich, daß die kinetische Energie  $mv^2/2$  der ausgelösten Elektronen unabhängig von der Lichtintensität ist, dagegen linear mit der Frequenz des Lichtes anwächst. Diese Tatsache ist auf der Grundlage der klassischen Physik völlig unverständlich und kann nur durch die Quantentheorie erklärt werden. Nach dieser Theorie besteht das Licht aus Quanten der Energie  $W = h \cdot v$  ( $h$  Plancksche Konstante), die nur als Ganzes absorbiert werden können. Demzufolge wird bei der Absorption auf ein Elektron genau die Energie  $h \cdot v$  übertragen.

Um aus dem bestrahlten Körper austreten zu können, müssen die Elektronen die *Austrittsarbeits*  $W_A$  gegen die bindenden Kräfte der Atome des betreffenden Stoffes leisten, nach dem Austritt haben sie daher höchstens die Energie  $W' = W - W_A$ . Für den Zusammenhang zwischen maximaler äußerer kinetischer Energie  $W'$  und Frequenz  $v$  ergibt sich daher die *Einstinsche Gleichung*

$$W' = \frac{m}{2} v^2 = h v - W_A. \quad (7)$$

Ist  $h \cdot v < W_A$ , so genügt die bei der Absorption des Lichtes von den Elektronen aufgenommene Energie nicht zur Überwindung der Austrittsarbeits, es treten keine Elektronen aus. Der äußere lichtelektrische Effekt tritt daher nur oberhalb der Grenzfrequenz  $v_g = W_A/h$  auf, der die Grenzwellenlänge

$$\lambda_g = h \cdot c / W_A \quad (8)$$

entspricht.

Die auf diesem Effekt beruhenden Photozellen und Sekundärelektronenvervielfacher sind infolgedessen nur zum Nachweis von Strahlung mit  $\lambda < \lambda_g$  einsetzbar.

Das Verhältnis  $q(\lambda) = \frac{\text{Zahl der ausgelösten Photoelektronen}}{\text{Zahl der einfallenden Lichtquanten}}$  bei monochromatischem Licht der Wellenlänge  $\lambda$  bezeichnet man als Quantenausbeute des betreffenden Stoffes. Im allgemeinen steigt die Quantenausbeute mit abnehmender Wellenlänge stark an (normale Empfindlichkeitskurve), bei Alkali- und Erdalkalimetallen tritt jedoch in bestimmten Spektralbereichen ein ausgeprägtes Maximum auf (selektive Empfindlichkeitskurve). Für die als Strahlungsempfänger häufig benutzten Photozellen werden hauptsächlich Kathoden mit selektiver Empfindlichkeitskurve benutzt.

Der *innere lichtelektrische Effekt* äußert sich in einer Änderung der elek-

trischen Leitfähigkeit des bestrahlten Stoffes, die sich in der in Abb. 186 angegebenen Schaltung als Stromänderung bemerkbar macht (Photowiderstand). Diese Änderung ist nur bei Isolatoren und Halbleitern merklich, bei Metallen wird sie durch die ohnehin vorhandene hohe Leitfähigkeit vollständig überdeckt. Der Effekt ist besonders ausgeprägt bei Selen, Kadmium-, Zink-, Thallium- und Bleisulfid.

Um die Leitfähigkeitsänderung in einem homogenen Stoff nachzuweisen, ist entsprechend der Abb. 186 eine Hilfsspannung erforderlich. Bestrahlt

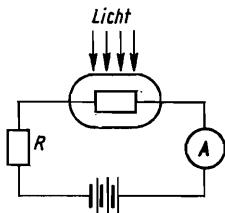


Abb. 186. Schaltung eines Photowiderstandes

man dagegen die Grenzfläche zwischen einem Metall und einem Halbleiter oder einen p-n-Übergang in einem Halbleiter, so tritt der sog. Sperrsicht-Photoeffekt auf, der eine spezielle Form des inneren lichtelektrischen Effektes darstellt. Die elektrische Sperrsicht (vgl. Abschn. E. 3) bewirkt, daß die im Halbleiter gebildeten Elektronen nur in einer Richtung abfließen können; es tritt daher bereits ohne Hilfsspannung ein Photostrom auf. Eine derartige Anordnung wird als Photoelement bzw. Photodiode bezeichnet.

Bei lichtelektrischen Bauelementen, die auf dem inneren lichtelektrischen Effekt beruhen, ist die Anzahl der erzeugten Photoelektronen und damit die Quantenausbeute  $q(\lambda)$  meist nicht unmittelbar messbar. Man gibt daher statt  $q(\lambda)$  meist die spektrale Empfindlichkeit  $S(\lambda)$  an, die als Quotient aus Empfängeranzeige und der absorbierten Strahlungsleistung  $P_e(\lambda)$  definiert ist. Als Anzeigegröße wählt man oft den Photostrom  $i_{\text{photo}}$  und erhält dann

$$S(\lambda) = \frac{i_{\text{photo}}(\lambda)}{P_e(\lambda)}. \quad (9)$$

Dieses Verhältnis hängt allerdings bei den aus homogenen photoleitenden Stoffen bestehenden Photowiderständen auch von der Größe der Hilfsspannung ab. Ferner ist zu berücksichtigen, daß der Photostrom oft nicht linear mit der Bestrahlungsstärke ansteigt, d. h., die spektrale Empfindlichkeit hängt außer von der Wellenlänge auch von der Bestrahlungsstärke ab.

Für photometrische Messungen, d. h. für die Bewertung der Strahlung entsprechend ihrem Lichteindruck auf das Auge, können subjektive und objektive Verfahren eingesetzt werden.

Bei den *subjektiven Verfahren* ist man auf den Vergleich von Beleuchtungsstärken angewiesen, da das Auge nur Beleuchtungsunterschiede wahrnehmen, dagegen Lichtstärken nicht unmittelbar vergleichen kann.

Der Vergleich von Lichtstärken erfolgt daher unter Zugrundelegung des photometrischen Grundgesetzes [Gl. (6)]: Will man die Lichtstärke  $I_2$  einer Lampe messen, so vergleicht man sie mit einer Lichtquelle bekannter Lichtstärke  $I_1$ , indem man den Abstand beider Lampen von einer Fläche so regelt, daß beide auf dieser die gleiche Beleuchtungsstärke erzeugen. Es ist dann  $E_2 = E_1$ , und unter der Voraussetzung, daß das Licht beider Lichtquellen unter dem gleichen Winkel auf die Fläche auftrifft, folgt aus Gl. (6)

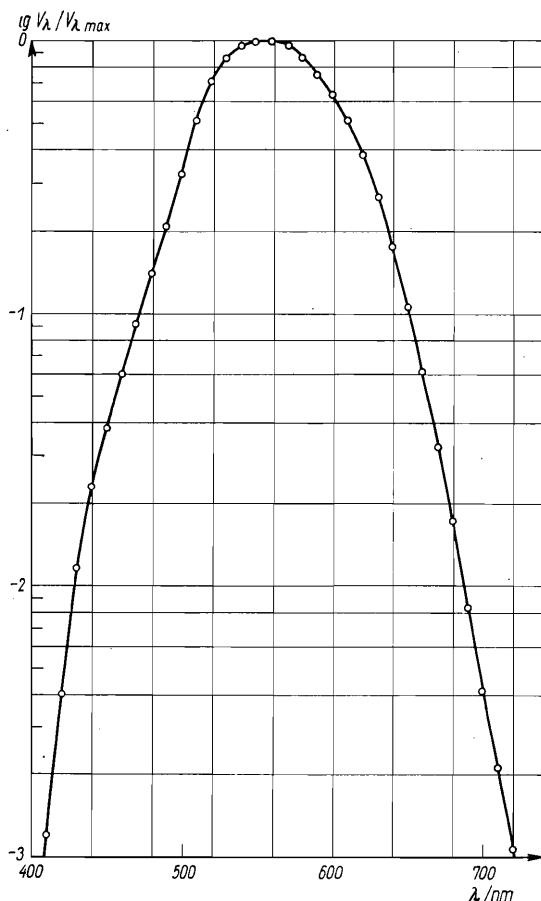


Abb. 187. Spektrale Empfindlichkeit  $V_\lambda$  des normalen helladaptierten Auges im logarithmischen Maßstab

$I_1/r_1^2 = I_2/r_2^2$ . Daraus ergibt sich

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (6a)$$

Dadurch ist die Messung der Lichtstärke auf den Vergleich von Beleuchtungsstärken zurückgeführt, der mit Photometern ausgeführt wird.

Voraussetzung für das Meßverfahren ist, daß beide Lichtquellen gleichfarbiges Licht ausstrahlen. Ist das nicht der Fall, so müssen Vereinbarungen getroffen werden, was man unter gleicher Beleuchtungsstärke verschiedenfarbiger Lichtquellen verstehen will (heterochrome Photometrie). Es ist jedoch in einem solchen Falle zweckmäßiger, objektive Meßverfahren zu benutzen.

Bei den Verfahren der *objektiven Photometrie* wird das Auge durch einen lichtelektrischen Empfänger ersetzt, der die gleiche spektrale Empfindlichkeit wie das Auge hat. Unter der spektralen Empfindlichkeit  $V_\lambda$  des Auges versteht man das Verhältnis von photometrisch gemessener Lichtstärke zur Strahlungsstärke der Lichtquelle bei der Wellenlänge  $\lambda$ . Dieses Verhältnis ist an einer Vielzahl von Versuchspersonen gemessen worden, der international vereinbarte Mittelwert ist in Abb. 187 dargestellt.

Durch Vorschalten geeigneter Filter kann man photoelektrische Empfänger herstellen, deren spektrale Empfindlichkeit mit der des Auges weitgehend übereinstimmt. Ein derartiger Empfänger kann dann direkt in Einheiten der Beleuchtungsstärke geeicht und für die Messung von Licht beliebiger spektraler Zusammensetzung benutzt werden.

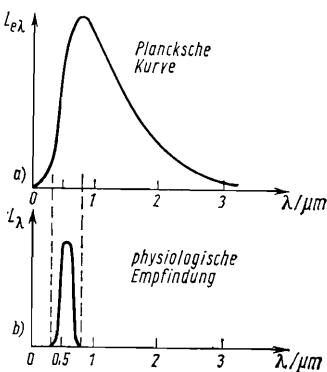


Abb. 188. Spektrale Strahldichte eines schwarzen Strahlers bei 3000 K (a) und entsprechende Leuchtdichteempfindung (b)

Mißt man mit einem solchen Empfänger beispielsweise die spektrale Verteilung der Leuchtdichte eines schwarzen Strahlers (Abb. 188a), so ist seine Anzeige der physiologischen Leuchtdichteempfindung (Abb. 188b) proportional.

### O. 5.1. Photozelle

- Aufgaben:*
1. Die Strom-Spannungs-Charakteristik einer Vakuum- und einer Edelgaszelle ist aufzunehmen.
  2. Die Abhängigkeit des Photostroms von der Bestrahlungsstärke (Lichtintensität) ist zu messen.
  3. Die Plancksche Konstante  $\hbar$  ist zu bestimmen.

Eine Photozelle besteht aus einem evakuierten oder edelgasgefüllten Glas- oder Quarzgefäß, in dem sich eine ring- oder netzförmige Anode und eine lichtempfindliche Kathode aus einem Material geringer Austrittsarbeit (Kalium, Cäsiumantimonid, Cäsiumoxid) befinden. An die Anode wird eine Saugspannung  $U$  gelegt, die die durch das einfallende Licht ausgelösten Elektronen zur Anode zieht.

Bei Vakuumzellen gelangen bei genügend großer positiver Anodenspannung alle Elektronen zur Anode, es fließt ein Sättigungsstrom  $i_s$ . Verringert man die Spannung, so wird der Strom schließlich infolge der Raumladung, die die Elektronen erzeugen, kleiner. Jedoch fließt auch bei geringen negativen Anodenspannungen noch ein schwacher Strom, da die Elektronen infolge ihrer kinetischen Energie auch gegen eine schwache negative Spannung anlaufen können. Der Strom wird erst Null, wenn die kinetische Energie der Elektronen kleiner ist als die potentielle Energie  $e \cdot U$  ( $e$  Elementarladung,  $U$  Spannung zwischen Kathode und Anode, vgl. Abb. 189).

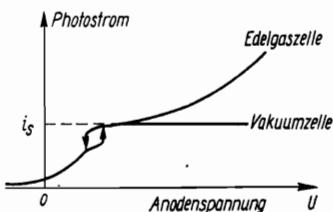


Abb. 189. Strom-Spannungs-Kennlinien von Photozellen mit Hystereseerscheinungen

Gasgefüllte Zellen verhalten sich bei kleinen Spannungen wie Vakuumzellen; bei großen Anodenspannungen tritt jedoch keine Sättigung auf, sondern der Strom steigt mit wachsender Spannung exponentiell an. Übertrifft nämlich die Anodenspannung die Ionisierungsspannung des Füllgases, so treten unelastische Stöße zwischen den Photoelektronen und den Atomen des Füllgases auf, die zur Bildung von Sekundärelektronen und positiven Ionen führen. Die Sekundärelektronen wandern zusammen mit den Photoelektronen zur Anode, die Ionen zur Kathode, so daß eine beträchtliche Stromverstärkung zustande kommt. Bei sehr großen Anodenspannungen ( $>100$  V) tritt schließlich eine Glimmentladung auf, die zur Zerstörung der Zelle führen kann.

### Versuchsausführung

1. Die Messung der Strom-Spannungs-Charakteristik erfolgt in der der Abb. 190 entsprechenden Schaltung. Als Strommesser ist ein empfindliches Galvanometer oder ein Röhrenverstärker mit geringem Spannungsbedarf

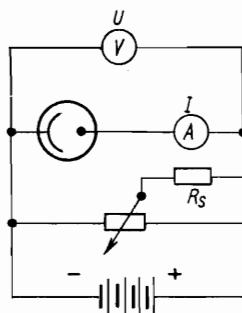


Abb. 190. Schaltung zur Messung von Strom-Spannungs-Kennlinien

zu verwenden (gegebenenfalls muß bei kleinen Saugspannungen der Spannungsabfall am Strommesser in Rechnung gestellt werden). Es ist sorgfältig darauf zu achten, daß insbesondere bei Edelgaszellen die maximal zulässige Spannung nicht überschritten wird.

Die Beleuchtung kann bei dieser Messung mit weißem Licht erfolgen, die Lichtintensität muß jedoch unbedingt während der Zeit der Messung konstant bleiben. Es ist daher zweckmäßig, als Spannungsquelle für die Lampe einen Akkumulator zu verwenden. Die Spannung ist von kleinen nach großen Werten und umgekehrt zu verändern; man beobachtet dabei oft charakteristische Hystereserscheinungen (Abb. 189), die ihre Ursache in Aufladungen der Glaswand der Zelle haben.

2. Um die Abhängigkeit des Photostroms von der Lichtintensität zu messen, ist es erforderlich, die Lichtintensität meßbar zu verändern. Am einfachsten und zuverlässigsten geschieht dies durch Änderung des Abstandes zwischen Lichtquelle und Photozelle (wobei sich selbstverständlich keine Linsen zwischen den beiden befinden dürfen). Ist  $I_0$  die Lichtstärke der Lampe und  $r$  der Abstand zwischen Lichtquelle und Photozelle, so ist die Bestrahlungsstärke am Ort der Photozelle durch Gl. (6) gegeben. Durch Abstandsänderung erhält man Relativwerte für die Empfindlichkeit  $i_s/I_0$ , auch wenn die Lichtstärke  $I_0$  nicht bekannt ist.

Die Messung ist bei Vakuumzellen im Sättigungsbereich, bei Edelgaszellen bei der höchsten zulässigen Spannung auszuführen. Sehr kleine Abstände sind zu vermeiden, da dann die Abstandsbestimmung ungenau wird.

Ist die Lichtstärke  $I_0$  bekannt, so ist durch diese Messung die Photozelle gleichzeitig als Luxmeter geeicht. Allerdings ist die Eichung im allgemeinen nur für Lichtquellen gleicher Farbtemperatur, d. h. mit gleicher spektraler Zusammensetzung des Lichtes richtig, da sich im allgemeinen die spektrale Empfindlichkeit der Photozelle von der

des Auges unterscheidet. Um Photozellen als Luxmeter für beliebige Lichtquellen verwenden zu können, muß ihre spektrale Empfindlichkeit durch geeignete Farbfilter mit der des Auges in Übereinstimmung gebracht werden ( $V_\lambda$ -getreue spektrale Empfindlichkeit).

3. Der Verlauf der Strom-Spannungs-Charakteristik hängt im Gebiet negativer Anodenspannungen von der kinetischen Energie der Photoelektronen und infolgedessen von der Frequenz des eingestrahlten Lichtes ab.

Für die maximale negative Anodenspannung  $U_0$ , gegen die die Photoelektronen noch anlaufen können, findet man aufgrund des Energiesatzes

$$eU_0 = \frac{m}{2} v^2 = h\nu - W_A . \quad (7a)$$

Mißt man daher  $U_0$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $\nu$  des Lichtes, so erhält man eine Gerade

$$U_0 = -\frac{W_A}{e} + \frac{h}{e} \nu . \quad (7b)$$

Die Steigung dieser Geraden ist gleich  $h/e$  und wird aus den Meßwerten graphisch oder durch Ausgleichsrechnung ermittelt. Mit dem als bekannt vorausgesetzten Werte  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  As ergibt sich daraus  $h$ .

Zur Messung benutzt man die Spektrallinien von Quecksilber, die mit geeigneten Filtern oder einem Monochromator aus dem Spektrum ausgeblendet werden. Kurzwelliges Streulicht ist dabei sorgfältig zu vermeiden.

Infolge der begrenzten Empfindlichkeit des Strommessers läßt sich nur feststellen, bei welcher Spannung der Strom unter die Nachweispelze des Meßinstruments gesunken ist. Es ist deshalb zweckmäßig, durch Einschalten von Graufiltern dafür zu sorgen, daß bei verschiedenen Wellenlängen die gleiche Anzahl von Elektronen/Sekunde emittiert wird, also bei verschiedenen Wellenlängen auf etwa gleichen Sättigungsstrom einzustellen. Dadurch wirkt sich der durch die Empfindlichkeitsgrenze des Meßinstruments hervorgerufene Fehler bei der Bestimmung von  $U_0$  bei allen Messungen in gleicher Weise aus und verursacht keine Verfälschung des Wertes  $h/e$ .

Fehlmessungen können durch schlechte Isolation der Zelle und durch Photoemission der Anode hervorgerufen werden. Beides äußert sich darin, daß bei einer bestimmten negativen Spannung der Strom sein Vorzeichen wechselt. Isolationsströme lassen sich durch sorgfältigen elektrischen Aufbau vermeiden; Photoemission der Anode ist herstellungsbedingt (Verunreinigung der Anode durch Kathodenmaterial), in diesem Falle ist eine andere Zelle zu benutzen.

## O. 5.2. Spektrale Empfindlichkeit lichtelektrischer Strahlungsempfänger

- Aufgaben:**
1. Die relative spektrale Empfindlichkeit eines Photowiderstandes und einer Photodiode sind zu bestimmen.
  2. Die Intensitätsabhängigkeit der Empfindlichkeit eines Photoelements ist bei konstanter Wellenlänge zu ermitteln.
  3. Die Quantenausbeute einer Vakuumphotozelle ist als Funktion der Wellenlänge zu messen.

Die spektrale Empfindlichkeit  $S(\lambda)$  ist durch Gl. (9) definiert:

$$S(\lambda) = \frac{i_{\text{photo}}(\lambda)}{P_e(\lambda)}, \quad (9)$$

wobei  $i_{\text{photo}}$  der Photostrom,  $P_e$  die ihn verursachende Strahlungsleistung ist.

Die Messung erfolgt durch Vergleich mit einem Strahlungsempfänger bekannter Empfindlichkeit, indem man nacheinander beide Empfänger an die gleiche Stelle im optischen Strahlengang bringt.

Als Strahlungsempfänger bekannter spektraler Empfindlichkeit dient ein *Vakuumthermoelement*, bei dem die gesamte auffallende Strahlung unabhängig von der Wellenlänge in Wärme umgewandelt wird. Beim Thermoelement nach *Hase* (Abb. 191) fällt die Strahlung auf ein sorgfältig geschwärztes

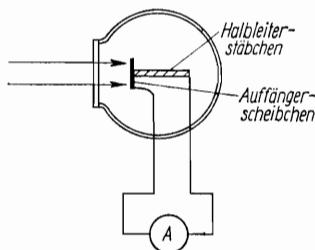


Abb. 191. Thermoelement nach *Hase*

Auffängerscheibchen und erwärmt dieses. Dadurch entsteht an dem damit einseitig verbundenen Halbleiterstäbchen eine Temperaturdifferenz, die zu einer Thermospannung zwischen den beiden Enden des Halbleiterstäbchens und damit zu einem Stromfluß durch das angeschlossene empfindliche Galvanometer führt.

Die Temperaturerhöhung  $\Delta T$  ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen zugestrahlter und abgeführter Leistung. Die zugestrahlte Leistung  $\bar{P}_e$  ist der Bestrahlungsstärke  $E_e$  proportional, die abgeführte Leistung setzt sich aus Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung zusammen. Wärmeleitung und Konvektion sind proportional zur Temperaturdifferenz, die Wärmestrahlung ist nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz proportional zu  $T_e^4 - T_u^4$ , da der Empfänger (Temperatur  $T_e$ ) nicht nur abstrahlt, sondern

auch Energie aus der Umgebung (Temperatur  $T_u$ ) zugestrahlt bekommt. Da  $T_e$  nur geringfügig höher als  $T_u$  ist, gilt

$$T_e^4 - T_u^4 = (T_u + \Delta T)^4 - T_u^4 \approx 4 \cdot T_u^3 \cdot \Delta T \sim \Delta T. \quad (10)$$

Damit wird die gesamte abgeführte Leistung proportional zu  $\Delta T$ , und aus der Gleichgewichtsbedingung folgt  $\Delta T \sim P_e$ .

Da der Thermostrom  $i_{th}$  proportional zu  $\Delta T$  ist, gilt schließlich

$$i_{th}(\lambda) = S_{th} \cdot P_e(\lambda). \quad (11a)$$

Der Photostrom des lichtelektrischen Empfängers im gleichen Strahlungsfeld ist

$$i_{photo}(\lambda) = S(\lambda) \cdot P_e(\lambda). \quad (11b)$$

Durch Division der Gl. (11a) und (11b) erhält man

$$S(\lambda) = S_{th} \cdot \frac{i_{photo}(\lambda)}{i_{th}(\lambda)}, \quad (12)$$

wobei die Empfindlichkeit  $S_{th}$  des thermischen Empfängers nicht von der Wellenlänge abhängt.

In vielen Fällen begnügt man sich mit der Kenntnis der relativen spektralen Empfindlichkeit

$$\frac{S(\lambda)}{S(\lambda_0)} = \frac{i_{photo}(\lambda)}{i_{photo}(\lambda_0)} / \frac{i_{th}(\lambda)}{i_{th}(\lambda_0)}, \quad (12a)$$

in die die Empfindlichkeit  $S_{th}$  nicht eingeht. Dabei ist  $\lambda_0$  an sich beliebig, jedoch wählt man meist die Wellenlänge, bei der die Empfindlichkeit ein Maximum hat, d. h., man setzt die relative Empfindlichkeit im Maximum gleich 1.

Die Quantenausbeute  $q(\lambda)$  ist definiert als das Verhältnis der Anzahl der je Zeiteinheit erzeugten Photoelektronen  $n(\lambda)$  zur Anzahl der je Zeiteinheit absorbierten Lichtquanten  $n_0(q)$ , d. h.,  $q(\lambda)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein absorbiertes Lichtquant ein Photoelektron erzeugt.  $q(\lambda)$  läßt sich aus der Empfindlichkeit  $S(q)$  berechnen, wenn der Zusammenhang zwischen Photostrom und  $n(q)$  bekannt ist.

Im Falle des äußeren lichtelektrischen Effekts in einer Vakuumphotozelle (in der keine Stromverstärkung auftritt), ist

$$i_{photo} = n(\lambda) \cdot e, \quad (13)$$

wobei  $e$  die Elementarladung ist.

Andererseits hat jedes Lichtquant die Energie  $\hbar \cdot \nu$ , daher besteht zwischen  $P_e$  und  $n_0$  der Zusammenhang

$$P_e(\lambda) = n_0(\lambda) \cdot \hbar \nu. \quad (14)$$

Aus den Gln. (13) und (14) folgt

$$q(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{n_0(\lambda)} = S(\lambda) \cdot \frac{h\nu}{e} = \frac{hc}{e\lambda} \cdot S(\lambda). \quad (15)$$

Auch hier begnügt man sich meist mit der Messung der relativen Quantenausbeute

$$\frac{q(\lambda)}{q(\lambda_0)} = \frac{S(\lambda)}{S(\lambda_0)} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda}, \quad (15a)$$

die sich nur durch den Faktor  $\lambda_0/\lambda$  von der relativen spektralen Empfindlichkeit unterscheidet.

Will man Absolutwerte von  $q$  bestimmen, so benötigt man  $P_e(\lambda)$ ; eine derartige Messung erfordert also ein absolut geeichtes Thermoelement.

### Versuchsausführung

Als Lichtquelle benutzt man einen Strahler mit kontinuierlichem Spektrum. Mittels eines Monochromators oder geeigneter Filter erzeugt man monochromatisches Licht, bringt nacheinander die beiden Empfänger, die zu vergleichen sind, in den Strahlengang und mißt die Ströme  $i_{ph}$  und  $i_{th}$ . Dabei ist sorgfältig darauf zu achten, daß das gesamte aus dem Monochromator austretende Licht auf die empfindliche Fläche der Empfänger fällt.

Erforderlichenfalls ist der Bündeldurchmesser durch geeignete Blenden zu begrenzen. Ferner ist sicherzustellen, daß kein Streulicht auf den Empfänger gelangt, das die Anzeige insbesondere dann stark verfälschen kann, wenn man in großem Abstand vom Empfindlichkeitsmaximum arbeitet. Alle Meßergebnisse sind graphisch darzustellen.

## O. 5.3. Plancksches Strahlungsgesetz

**Aufgabe:** Die Temperaturabhängigkeit der spektralen Strahlungsdichte einer Glühlampe ist für verschiedene Wellenlängen zu messen und daraus das Verhältnis der Planckschen zur Boltzmannschen Konstante ( $h/k$ ) zu ermitteln.

Eine Glühlampe mit Wolframfaden kann man im sichtbaren Spektralbereich in guter Näherung als einen grauen Strahler betrachten. Die spektrale Verteilung der Strahldichte ist dann durch Gl. (4) gegeben, wobei  $\epsilon = 0,47$  ist.

Für die technisch möglichen Temperaturen unterhalb des Schmelzpunktes ist  $h\nu/kT \gg 1$ , so daß man näherungsweise

$$L_{ev} \cdot \Delta\nu = \frac{2eh\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \Delta\nu \quad (14a)$$

setzen kann.

Benutzt man für den Nachweis der Strahlung einen Empfänger, dessen Anzeige  $A$  (z. B. der Photostrom) proportional zur Bestrahlungsstärke ist, so gilt

$$A(T) \sim e^{-h\nu/kT}; \quad (16)$$

daraus folgt

$$\ln \frac{A(T)}{A(T_0)} = \frac{h\nu}{kT_0} - \frac{h\nu}{kT}, \quad (16a)$$

wobei  $T_0$  eine beliebig gewählte Temperatur des Glühfadens ist. Trägt man also  $\ln [A(T)/A(T_0)]$  über  $1/T$  auf, so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung  $-h\nu/k$ , aus der man  $h/k$  entnehmen kann.

#### Versuchsausführung

Als Lichtquelle benutzt man entweder eine Wolframbandlampe oder eine Glühlampe mit einem möglichst langen Glühfaden.

Bei einer Glühlampe bestimmt man die Temperatur des Glühfadens aus dem elektrischen Widerstand (vgl. Abschn. E. 1). Lampen mit langem Glühfaden sind günstig, da sich bei ihnen Ungleichmäßigkeiten der Temperatur des Fadens, z. B. an den Befestigungsstellen, weniger stark bemerkbar machen.

Bei der Wolframbandlampe muß die Temperatur der strahlenden Fläche auf optischem Wege mit einem *Pyrometer* gemessen werden (Abb. 192). Die

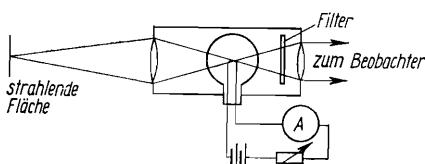


Abb. 192.  
Schema eines Pyrometers

strahlende Fläche wird dazu in eine Ebene abgebildet, in der sich der Faden einer kleinen Glühlampe befindet. Der Strom dieser Lampe wird so lange verändert, bis das Bild des Glühfadens auf dem Untergrund der strahlenden Fläche verschwindet; die dazu nötige Stromstärke ist ein Maß für die Temperatur, die man aus einer Eichkurve entnimmt. Die Eichung des Pyrometers erfolgt, indem man Körper bekannter Temperatur betrachtet.

Für die Strahlungsmessung bringt man vor der Lichtquelle ein Filter an, das nur einen schmalen Wellenlängenbereich durchläßt, oder man benutzt einen Monochromator. Da die Anzeige des Nachweisgerätes proportional zur Bestrahlungsstärke sein muß, kommt für den Nachweis nur eine Photozelle oder ein Photovervielfacher in Frage.

Der *Photovervielfacher* (Sekundärelektronenvervielfacher, SEV, Abb. 193) enthält ebenso wie die Photozelle eine lichtempfindliche Kathode. Die durch das Licht aus-

gelösten Elektronen gelangen aber nicht direkt zur Anode, sondern treffen noch auf mehrere Prallanoden (*Dynoden*), aus denen sie Sekundärelektronen „herausschlagen“, so daß für jedes an der Kathode ausgelöste Elektron an der Anode eine Elektronenlawine ankommt, die bis zu  $10^6$  Elektronen enthält (vgl. Abb. 193). Die Anwendung eines derartigen Photovervielfachers ist immer dann vorteilhaft, wenn sehr geringe Lichtintensitäten nachzuweisen sind.

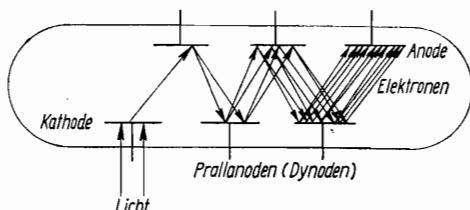


Abb. 193. Schema eines Sekundärelektronenvervielfachers (SEV)

Es ist zweckmäßig, das von der Lampe ausgesandte Licht durch ein rotierendes Zahnrad zu modulieren und den Strom der Photozelle mit einem Wechselstromverstärker zu messen. Die Messung kann dann nicht durch Streulicht verfälscht werden und läßt sich auch in einem mäßig abgedunkelten Raum ausführen.

Die Messung ist bei mindestens drei Wellenlängen auszuführen. Mittels des gemessenen Wertes für  $h/k$  ist zu überprüfen, inwieweit die Bedingung  $hv/kT \gg 1$  erfüllt ist; der durch die Vernachlässigung von 1 gegenüber  $e^{hv/kT}$  im Nenner von Gl. (4) entstehende Fehler ist abzuschätzen.

## O. 5.4. Photometrie

- Aufgaben:*
1. Lichtstärke und optischer Wirkungsgrad einer Glühlampe sind in Abhängigkeit von der zugeführten elektrischen Leistung zu messen, und es ist zu ermitteln, mit welcher Potenz der absoluten Temperatur die Lichtstärke der Lampe ansteigt.
  2. Das Richtstrahldiagramm einer Glühlampe ist zu messen und mit dem eines Lambertschen Strahlers zu vergleichen.

Unter dem optischen Wirkungsgrad  $\eta$  einer Lichtquelle versteht man das Verhältnis der Lichtstärke  $I$  zur aufgewandten elektrischen Leistung  $P$ :

$$\eta = \frac{I}{P} . \quad (17)$$

Im Gegensatz zum mechanischen oder thermodynamischen Wirkungsgrad ist der optische Wirkungsgrad keine reine Zahl, sondern wird in cd/W gemessen.

Die Abhängigkeit der Lichtstärke von der Temperatur der Glühlampe läßt sich innerhalb gewisser Grenzen durch den Potenzzusammenhang

$$I = \text{const } T^x \quad (18)$$

beschreiben. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz (3) ist die ausgestrahlte Gesamtleistung proportional zur 4. Potenz der absoluten Temperatur  $T$ .<sup>1)</sup> Da im Dauerbetrieb Gleichgewicht zwischen zugeführter und ausgestrahlter Leistung besteht, gilt also

$$T = \text{const } P^{1/4} \quad (19)$$

und man erhält

$$I = \text{const } P^{x/4} \quad (20)$$

bzw.

$$\log (I/I_0) = \frac{x}{4} \cdot \log (P/P_0), \quad (20\text{a})$$

wobei  $I_0$  und  $P_0$  zusammgehörige Meßwerte bei einer beliebig gewählten Temperatur  $T_0$  sind.

### Versuchsausführung

Die Messung der Lichtstärke erfolgt durch photometrischen Vergleich mit einer Normallampe<sup>2)</sup> bekannter Lichtstärke nach dem photometrischen Grundgesetz [Gl. (6)]. Man vergleicht beide Lichtquellen mit Hilfe des Photometerwürfels von Lummer und Brodhun auf einer optischen Bank.

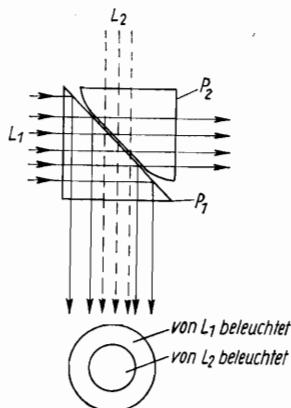


Abb. 194. Photometerwürfel

<sup>1)</sup> Genauer: proportional zu  $T^4 - T_u^4$ , wenn  $T_u$  die Temperatur der Umgebung ist. Es ist jedoch  $T \gg T_u$ , so daß man  $T_u^4$  vernachlässigen kann.

<sup>2)</sup> Eine Normallampe ist ein sekundäres Normal, dessen Lichtstärke durch Vergleich mit einem schwarzen Strahler ermittelt wurde.

Der Photometerwürfel (Abb. 194) besteht aus zwei Prismen  $P_1$  und  $P_2$ , die in der Mitte der Hypotenosen fest aneinandergepreßt sind, so daß kein Zwischenraum bleibt. In die Mitte des Beobachtungsfeldes gelangt daher nur Licht von der Lichtquelle  $L_2$ , das den Würfel ungehindert durchsetzt. Hingegen wird das Licht von der Lichtquelle  $L_1$  am Rand des Prismas  $P_1$  totalreflektiert und gelangt an den Rand des Beobachtungsfeldes.

Für die Messung läßt man das Licht der beiden Lichtquellen, die zu vergleichen sind, zunächst in der in Abb. 195 gezeigten Weise an einer weißen

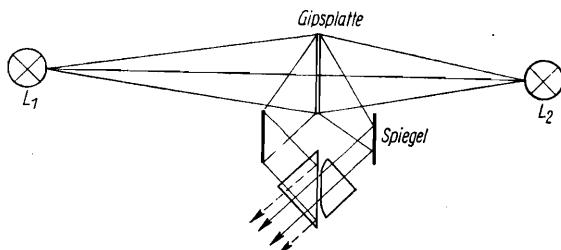


Abb. 195. Messung von Lichtstärken mit dem Photometerwürfel

Gipsplatte reflektieren, damit die ungleichmäßige Emission verschiedener Teile der Lichtquelle nicht stört. Gipsplatte und Photometerwürfel sind zu einem Photometerkopf vereint, der auf der optischen Bank zwischen den beiden Lichtquellen angeordnet ist. Erscheinen beide Seiten der Gipsplatte gleich hell, so ist nach Gl. (6)

$$I_2 = I_1 \cdot (r_2/r_1)^2.$$

Reflektiert die Gipsplatte nicht auf beiden Seiten gleich gut, so treten Fehler auf. Man eliminiert sie, indem man den Photometerkopf um  $180^\circ$  dreht und das geometrische Mittel der beiden Ablesungen bildet.

Anstelle des Photometerkopfes kann man auch ein Photoelement benutzen, das zu diesem Zwecke nicht geeicht zu sein braucht, da es ja nur auf die Feststellung der Gleichheit zweier Beleuchtungsstärken ankommt.

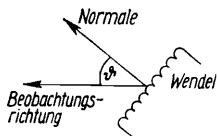


Abb. 196. Zur Messung der Richtstrahlcharakteristik einer Glühlampe

Steht ein als Photometer geeichter Strahlungsempfänger zur Verfügung (siehe Vers. O. 5.2), so ist die Vergleichslampe überflüssig, und man kann die Lichtstärke direkt aus der gemessenen Beleuchtungsstärke und dem Abstand zur Lichtquelle berechnen. Für die Berechnung des optischen Wir-

kungsgrades ist noch die der Lampe zugeführte elektrische Leistung zu ermitteln. Man erhält sie aus Stromstärke und Spannung.

Trägt man im logarithmischen Maßstab die Lichtstärke als Funktion der elektrischen Leistung auf, so ergibt sich nach Gl. (20a) eine Gerade, aus deren Steigung man  $x$  entnehmen kann.

Zur Messung der Richtstrahlcharakteristik befindet sich die Lampe in einer drehbaren Halterung. Man mißt die Lichtstärke in Abhängigkeit vom Drehwinkel mit einem geeichten Photoelement oder durch Vergleich mit einer Normallampe. Die Messung ist so auszuführen, daß bei der Drehung der Winkel zwischen der Normalen zur Glühwendel und der Ausstrahlungsrichtung verändert wird (Abb. 196). Das Ergebnis ist in einem Polardia gramm darzustellen.

## O. 6. FUNDAMENTALKONSTANTEN DER PHYSIK

### O. 6.0. Allgemeine Grundlagen

In den physikalischen Gesetzen tauchen eine Reihe von Fundamental konstanten auf, deren Größe als naturgegeben anzusehen ist und nur durch Experimente bestimmt werden kann. Es sind dies die Elementarladung  $e$ , die Avogadro-Konstante  $N_A$ , die Boltzmann-Konstante  $k$ , das Plancksche Wirkungsquantum  $h$ , die Elektronenmasse  $m_e$  und die Protonenmasse  $m_p$ , ferner die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und die Gravitationskonstante  $\gamma$ .

Die Verfahren zur Messung dieser Konstanten bilden eines der reizvollsten Kapitel der Physik, weil dabei in faszinierender Weise der innere Zusammenhang verschiedener Teilgebiete sichtbar wird. Mit Ausnahme der Gravitationskonstanten und der Lichtgeschwindigkeit lassen sich diese Fundamentalkonstanten bereits mit relativ bescheidenen Hilfsmitteln im Rahmen eines Praktikums bestimmen, wobei allerdings auf die modernen Präzisionsmethoden verzichtet werden muß.

1. Die Elementarladung  $e$  wird nach der Methode von Millikan (Versuch O. 6.1) gemessen.

Ist  $e$  bekannt, so läßt sich aus der leicht meßbaren Faraday-Konstante  $F$  die Avogadro-Konstante  $N_A$  berechnen: Da  $F$  die von einem Mol eines einwertigen Elektrolyten bei der Elektrolyse überführte Elektrizitätsmenge ist, erhält man

$$N_A = F/e. \quad (1)$$

Die Avogadro-Konstante ist das Hauptbindeglied zwischen mikroskopischen und makroskopischen Größen. Daher lassen sich bei Kenntnis von  $N_A$  weitere Fundamentalkonstanten berechnen:

a) Die Protonenmasse  $m_p$  erhält man aus der Masse eines Mols Wasserstoff, die sich durch Wägung bestimmen lässt (vgl. Abschn. M. 2.0).

Da  $M(H_2)/N_A$  gleich der Masse von zwei Wasserstoffatomen ist, wird

$$m_p = \frac{1}{2} \frac{M(H_2)}{N_A} - m_e. \quad (2)$$

Dabei liefert die Elektronenmasse  $m_e$  nur eine geringe Korrektur. Analog ergibt sich die Neutronenmasse  $m_n$  aus der Wägung von Deuterium.

b) Die Boltzmann-Konstante  $k$  ergibt sich aus der molaren Gaskonstanten  $R$ , es ist

$$k = \frac{R}{N_A}. \quad (3)$$

Die Gaskonstante  $R$  lässt sich messen, indem man durch eine genau meßbare Strommenge eine bestimmte Menge eines Gases durch Elektrolyse abscheidet und dessen Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur misst.

$k$  lässt sich auch unmittelbar aus Schwankungerscheinungen (z. B. aus der Brownschen Bewegung in einem Millikan-Kondensator, vgl. O. 6.1) ermitteln.

2. Die Elektronenmasse  $m_e$  bestimmt man aus der Ablenkung von Elektronenstrahlen im magnetischen Feld (Versuch O. 6.2). Es ergibt sich primär die spezifische Ladung  $e/m_e$ , aus der man  $m_e$  berechnen kann, wenn  $e$  bekannt ist.

In ähnlicher Weise bestimmt man in Massenspektrometern die spezifische Ladung und damit die Atommasse von Einzelteilchen, während man mit den chemischen Methoden der Molekulargewichtsbestimmung nur Mittelwerte über sehr viele Teilchen und über verschiedene Isotope erhält.

3. Das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  kann man auf verschiedene Weise messen. Alle Methoden beruhen auf dem quantenhaften Charakter der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie.

Theoretisch am einfachsten zu überblicken ist die Bestimmung von  $h/e$  aus der Einsteinschen Gleichung des Photoeffektes (Versuch O. 5.1). Während dieser Methode die Umwandlung der Energie eines Lichtquants in kinetische Energie eines Elektrons zugrunde liegt, stellt der Franck-Hertz-Versuch (Versuch O. 6.3) in einem gewissen Sinne die Umkehrung dazu dar: Die kinetische Energie von Elektronen wird bei unelastischen Zusammenstößen mit Atomen in die Energie eines Lichtquants umgewandelt. Dieser Versuch lässt sich zu einer Meßmethode für  $h/e$  ausbauen, wenn man neben den Anregungspotentialen noch die Frequenz des emittierten Lichtes misst. Als weitere Meßmethoden für  $h$  werden in Versuch O. 6.4 die Berechnung

von  $\hbar$  aus der Rydberg-Konstanten des Wasserstoffatoms und in Versuch O. 5.3 die Messung des Verhältnisses von Planckscher zu Boltzmannscher Konstanten  $\hbar/k$  aus dem Planckschen Strahlungsgesetz beschrieben (letztere kann man auch als Meßmethode für  $k$  auffassen, wenn man  $\hbar$  als anderweitig gemessen voraussetzt).

## O. 6.1. Elementarladung nach Millikan

*Aufgabe:* Die Elementarladung  $e$  ist zu ermitteln.

Kleine Flüssigkeitströpfchen sind stets geladen. Ihre Ladung ist notwendigerweise ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung. Befindet sich ein geladenes Tröpfchen in einem vertikal gerichteten elektrischen Feld, so wirken folgende Kräfte:

1. die Differenz zwischen Schwerkraft  $F_0$  und Auftrieb  $F_A$ :

$$F_0 - F_A = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot (\varrho - \varrho_L) \cdot g;$$

2. die Reibungskraft  $F_W = 6\pi \cdot \eta \cdot v \cdot r$  (vgl. Versuch M. 7.1);

3. die elektrische Kraft  $F_e = \pm q \cdot E$  je nach Richtung des Feldes (positives Vorzeichen bedeutet Feldstärke in Richtung der Schwerkraft).

Dabei ist  $r$  der Radius,  $q$  die Ladung und  $\varrho$  die Dichte des Tröpfchens,  $\varrho_L$  die Dichte der Luft,  $\eta$  der Koeffizient der inneren Reibung der Luft und  $E$  die Feldstärke.

Bereits nach kurzer Zeit bewegt sich das Tröpfchen gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $v$  (vgl. die analogen Verhältnisse in Versuch M. 7.1). Sind elektrisches Feld und Schwerkraft gleichgerichtet, so ergibt sich daher

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\varrho - \varrho_L) g - 6\pi \eta r v_+ + q \cdot E = 0, \quad (4a)$$

sind sie entgegengerichtet, so erhält man

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\varrho - \varrho_L) g - 6\pi \eta r v_- - q \cdot E = 0. \quad (4b)$$

Ohne elektrisches Feld erhält man die Fallgeschwindigkeit  $v_0$  aus

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\varrho - \varrho_L) g - 6\pi \eta r v_0 = 0. \quad (4c)$$

Durch Bildung der Summe von (4a) und (4b) erhält man

$$\frac{8\pi}{3} r^3 (\varrho - \varrho_L) \cdot g = 6\pi \eta r (v_+ + v_-), \quad (4d)$$

woraus sich der unbekannte Tröpfchenradius ergibt:

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta(v_+ + v_-)}{g(\varrho - \varrho_L)}}. \quad (5)$$

Bildet man die Differenz von (4a) und (4b), so folgt

$$q = \frac{6\pi\eta r(v_+ - v_-)}{E} = 9\pi \sqrt{\frac{\eta^3}{g(\varrho - \varrho_L)}} \cdot \frac{1}{E} \sqrt{(v_+ + v_-)(v_+ - v_-)}. \quad (6)$$

Bei der Berechnung von  $q$  nach Gl. (6) muß man berücksichtigen, daß bei Tröpfchen, die in ihrer Größe mit der mittleren freien Weglänge  $\lambda$  der Gasmoleküle vergleichbar sind,  $\eta$  keine Konstante ist, sondern vom Tröpfchenradius abhängt. Nach Cunningham ist

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + 0,63 \frac{\lambda}{r}}, \quad (7)$$

wobei  $\eta_0$  der bei großem Durchmesser gemessene Koeffizient der inneren Reibung ist.

### Versuchsausführung

Zur Messung wird in einen seitlich beleuchteten Kondensator (vgl. Abb. 197) Zigarettenrauch geblasen, der teilweise aus geladenen Teilchen besteht, um die sich Wasserdampf kondensiert hat. Die Tröpfchen beob-

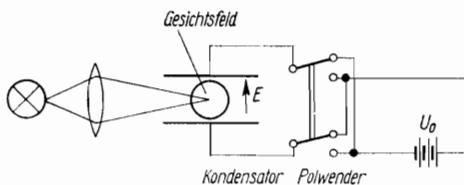


Abb. 197. Zur Messung der Elementarladung nach Millikan

achtet man mit einem Mikroskop mit geeichter Okularskale; die optische Achse des Mikroskops steht dabei senkrecht zum elektrischen Feld und zum einfallenden Licht (Dunkelfeldbeleuchtung, die Tröpfchen erscheinen hell auf dunklem Grund). Man faßt nun ein bestimmtes Tröpfchen ins Auge, schaltet das elektrische Feld ein und bestimmt mit einer Stoppuhr die Zeit, in der es eine bestimmte Anzahl von Marken der geeichten Okularskale passiert. Noch ehe das Tröpfchen das Gesichtsfeld verläßt, polt man das Feld um und mißt in gleicher Weise bei entgegengesetzter Feldrichtung.

Anschließend bestimmt man noch die Geschwindigkeit  $v_0$  des freien Falls ohne elektrisches Feld.

Zur Auswertung überprüft man zunächst, ob die aus den Gl. (4c) und (4d) folgende Beziehung

$$2 \cdot v_0 = v_+ + v_- \quad (4e)$$

innerhalb der Fehlergrenzen der Geschwindigkeitsmessung erfüllt ist. Ist das nicht der Fall, so sind die Meßwerte infolge von Umladungen des Tröpfchens während der Messung verfälscht und deshalb unbrauchbar. Ist Gl. (4e) erfüllt, so berechnet man zunächst nach Gl. (5) den Tröpfchenradius  $r$ , man benutzt hierfür näherungsweise  $\eta_0 = [1,835 \cdot 10^{-5} - 4,9 \cdot 10^{-8} (20 - t)] \text{ kg/m} \cdot \text{s}$  [ $t$  ist der Zahlenwert (Celsiusskala) der Temperatur im Kondensator]. Mit Hilfe des so gewonnenen Näherungswertes für den Tröpfchenradius berechnet man nach Gl. (7) den für diesen Radius gültigen  $\eta$ -Wert ( $\lambda = 6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  für Luft unter Normalbedingungen).

Die Feldstärke erhält man aus der angelegten Spannung  $U$  und dem Abstand der Kondensatorplatten, für die Dichte der Tröpfchen benutzt man den Wert für Wasser.

Setzt man alles in Gl. (6) ein, so erhält man  $q$ .

Es sind möglichst viele Teilchen auszumessen, die Größe der Elementarladung erhält man aus den  $q$ -Werten als größten gemeinsamen Teiler.

Strömungsscheinungen, die z. B. durch Temperaturdifferenzen der Kammerwände verursacht sein können, führen zu systematischen Fehlern. Man schätzt aus der leichter zu beobachtenden horizontalen Strömungsgeschwindigkeit ab, wie groß der Fehler wird, wenn eine gleich große vertikale Strömungsgeschwindigkeit vorhanden wäre.

## O. 6.2. Spezifische Ladung des Elektrons

*Aufgabe:* Aus dem Krümmungsradius eines Elektronenstrahls in einem homogenen Magnetfeld ist die spezifische Ladung  $e/m_e$  des Elektrons zu bestimmen.

Bewegt sich ein Elektron in einem magnetischen Feld  $\mathbf{B}$ , so unterliegt es dem Einfluß der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = e \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (8)$$

seine Bewegungsgleichung lautet daher

$$m_e \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (9)$$

Den Vektor  $\mathbf{v}$  zerlegt man zweckmäßigerweise in eine Komponente  $v_{||}$  parallel zum Magnetfeld und in eine Komponente  $v_{\perp}$  senkrecht zum Magnetfeld.

Ein parallel zum Magnetfeld fliegendes Elektron wird nach Gl. (9) nicht beeinflußt, d. h., es ist  $v_{\parallel} = \text{const.}$

Ein senkrecht zum Magnetfeld fliegendes Elektron unterliegt der Kraft

$$F_{\perp} = e \cdot v_{\perp} \cdot B, \quad (8a)$$

die senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. Es beschreibt daher einen Kreis, dessen Radius sich aus dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Lorentzkraft ergibt:

$$\frac{1}{r} \cdot m_e \cdot v_{\perp}^2 = e \cdot v_{\perp} \cdot B.$$

Man erhält für den Radius

---


$$r = m_e \cdot \frac{v_{\perp}}{eB}. \quad (10)$$


---

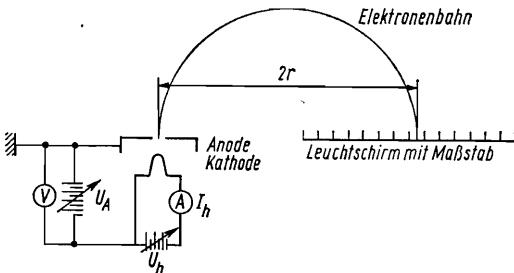


Abb. 198. Schema zur  $e/m_e$ -Messung

Elektronen einheitlicher Geschwindigkeit erzeugt man, indem man die aus einer Glühkathode austretenden Elektronen durch eine an die Anode angelegte Spannung  $U_A$  so beschleunigt, daß sie sich nach dem Durchgang durch ein Loch in der Anode senkrecht zum Magnetfeld bewegen (Abb. 198).

Aus dem Energiesatz

$$\frac{m}{2} v_{\perp}^2 = e \cdot U_A \quad (11)$$

folgt dann

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2e U_A}{m_e}} \quad (11a)$$

bzw.

---

$$r = \sqrt{\frac{2m_e U_A}{e}} \cdot \frac{1}{B}. \quad (12)$$


---

Daraus erhält man

---

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2U_A}{B^2 \cdot r^2}. \quad (13)$$


---

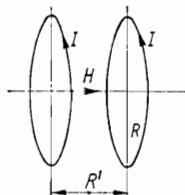


Abb. 199. Helmholtz-Spulenpaar

Das Magnetfeld wird mit einem Helmholtz-Spulenpaar erzeugt (Abb. 199). Dieses besteht aus zwei flachen Spulen mit dem Radius  $R$ , und je  $n$  Windungen, die im Abstand  $R' = R/2$  parallel zueinander angeordnet sind und vom gleichen Strom  $I$  durchflossen werden. Das in dem frei zugänglichen Innenraum entstehende Magnetfeld ist weitgehend homogen und hat die Größe

$$B = \frac{8\mu_0}{\sqrt{125}} \cdot \frac{I}{R} \cdot n. \quad (14)$$

Die Bahn der Elektronen wird sichtbar gemacht, indem man die Meßröhre nicht vollständig evakuiert. Infolgedessen stößt ein Teil der Elektronen mit den Restgasmolekülen zusammen und regt sie zur Lichtaussendung an. Bei einem Teil der Zusammenstöße entstehen positive Ionen. Sie bleiben infolge ihrer im Vergleich zu den Elektronen großen Masse in der Nähe des Entstehungsorts, d. h. auf der Elektronenbahn, und kompensieren durch ihre Ladung die Raumladung des Elektronenstrahls. Durch diese „Raumladungsfokussierung“ entsteht ein enges Elektronenbündel, ein sog. Fadenstrahl.

### Versuchsausführung

Nach genügender Evakuierung der Meßröhre ist der Heizstrom der Kathode allmählich zu erhöhen, bis der Elektronenstrahl als Fadenstrahl oder infolge seines Auf treffens auf einen Leuchtschirm sichtbar wird. Dabei ist

die Arbeitsanweisung genau zu beachten, um die Zerstörung der Kathode zu vermeiden! Anschließend mißt man bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen  $U_A$  und Magnetfeldstärken  $B$  den Radius  $r$ .

$r$  kann innerhalb der Meßröhre aus der Lage des Auftreffpunktes des Elektronenstrahls auf einen mit Maßstab versehenen Leuchtschirm ermittelt werden; ist keine solche Meßmöglichkeit vorgesehen, muß  $r$  von außen durch Anvisieren mit einem Fernrohr bestimmt werden, das senkrecht zu seiner Sehlinie meßbar verschoben werden kann (Kathetometer).

Zur Auswertung bieten sich 2 Möglichkeiten an:

a) Trägt man bei konstantem  $U_A$  den Radius  $r$  über  $1/B$  auf, so ergibt sich nach Gl. (12) eine Gerade mit der Steigung

$$S_1 = \sqrt{\frac{2U_A}{e/m_e}}, \quad (15)$$

aus der

$$e/m_e = 2 \cdot U_A / S_1^2 \quad (15a)$$

folgt.

b) Trägt man bei konstantem  $B$  die Größe  $r^2$  über  $U_A$  auf, so erhält man nach Gl. (12) eine Gerade mit der Steigung

$$S_2 = \frac{2m_e}{B^2 \cdot e}, \quad (16)$$

aus der sich

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2}{B^2 \cdot S_2} \quad (16a)$$

ergibt.

Ursachen für systematische Fehler sind der Einfluß des Magnetfeldes der Erde und die thermische Geschwindigkeit der Elektronen beim Austritt aus der Kathode.

Der Einfluß des Erdfeldes läßt sich näherungsweise eliminieren, indem man zunächst bei einer Magnetfeldrichtung den Radius  $r_+$  mißt, anschließend durch Umpolen der Stromrichtung in den Helmholtz-Spulen die Richtung von  $B$  umkehrt und den zugehörigen Radius  $r_-$  mißt; es ist dann

$$r \approx \frac{1}{2} (r_+ + r_-). \quad (17)$$

Die Differenz  $|r_+ - r_-|$  ist ein Maß für die Stärke des Erdfeldeinflusses. Den Einfluß der thermischen Geschwindigkeit der Elektronen kann man näherungsweise berücksichtigen, indem man statt mit der Anodenspannung  $U_A$  mit der Spannung ( $T$  Kathodentemperatur)

$$U'_A = U_A + kT/2e \quad (18)$$

rechnet, d. h., man addiert die Hälfte der mittleren thermischen Geschwindigkeit in Austrittsrichtung  $v_{\text{th}} = \sqrt{kT/m_e}$  entsprechenden Spannung. Dabei muß  $kT/e \ll U_A$  sein. Der Einfluß der relativistischen Massenveränderlichkeit wird erst bei Spannungen oberhalb von 10 kV wichtig.

### O. 6.3. Franck-Hertz-Versuch

**Aufgabe:** Das Anregungspotential von Quecksilberatomen ist durch Elektronenstoß zu bestimmen und daraus das Verhältnis  $h/e$  zu berechnen.

Atome können sich nur in diskreten Energiezuständen befinden (vgl. die Rechnungen zum H-Atom, Vers. O. 6.4), sie können daher nur bestimmte Energiebeträge aufnehmen oder abgeben, die gerade der Energiedifferenz zwischen zwei erlaubten Energieniveaus entsprechen. Der Nachweis für den quantenhaften Charakter der Energieübertragung wird durch den Elektronenstoßversuch von *Franck* und *Hertz* erbracht.

Die für die Ausführung des Versuchs erforderliche Apparatur ist in Abb. 200 schematisch dargestellt. In einer mit Quecksilberdampf gefüllten Triode

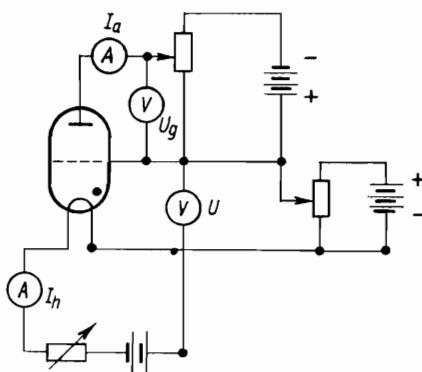


Abb. 200. Schaltung zur Messung des Anregungspotentials von Gasen

beschleunigt man die von der Kathode emittierten Elektronen durch eine positive Gitterspannung  $U$ ; zwischen Gitter und Anode liegt ein Bremspotential  $U_g$  von etwa 0,5 V.

Mißt man den Anodenstrom  $I_a$  als Funktion der Beschleunigungsspannung  $U$ , so erhält man die in Abb. 201 schematisch dargestellte Kurve. Bei niedriger Spannung steigt der Strom wie in einer Hochvakuumröhre mit wachsender Spannung an, sinkt jedoch beim Erreichen einer bestimmten Spannung plötzlich ab. Nach Durchlaufen dieser Spannung haben die Elek-

tronen nämlich genügend Energie, um die Quecksilberatome anzuregen, während bei niedrigerer Energie die Zusammenstöße völlig elastisch verlaufen. Bei der Anregung der Quecksilberatome verlieren die Elektronen fast ihre gesamte Energie und können daher nicht mehr gegen das Bremspotential  $U_g$  anlaufen. Weitere Minima in der Anodenstromkurve entstehen infolge der Anregung von zwei oder mehr Atomen durch das gleiche Elektron.

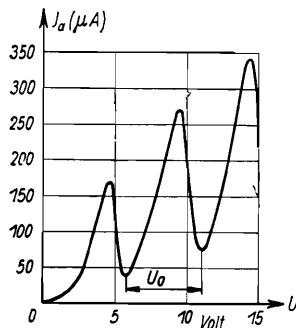


Abb. 201. Meßkurve beim Franck-Hertz-Versuch

Der Abstand aufeinanderfolgender Minima ist gleich dem Anregungspotential  $U_0$  der Quecksilberatome; infolge der Differenz der Austrittsarbeiten von Kathode und Anode kann jedoch das erste Minimum bei einer von  $U_0$  abweichenden Spannung liegen. Die angeregten Atome gehen unter Lichtaussendung wieder in den Grundzustand über, die Energie der ausgestrahlten Lichtquanten ist dabei gleich  $e \cdot U_0$ . Man kann daher bei gleichzeitiger Bestimmung der Anregungsenergie  $e \cdot U_0$  und der Energie  $h \cdot \nu$  der Lichtquanten die Größe  $h/e = U_0/\nu$  ermitteln.

#### Versuchsausführung

Um sich einen raschen Überblick über die Abhängigkeit des Anodenstroms von der Beschleunigungsspannung zu verschaffen, benutzt man die in Abb. 202 angegebene Schaltung. An der Kathode der Meßröhre liegt jetzt eine Sägezahnspannung, die man dem Kippgerät eines Oszilloskopraphen entnimmt. Dadurch wird die Beschleunigungsspannung periodisch verändert.

Der am Widerstand  $R$  entstehende Spannungsabfall ist proportional zum Anodenstrom  $I_a$ , benutzt man ihn nach entsprechender Verstärkung für die Vertikalablenkung und die Sägezahnspannung für die Horizontalablenkung der Oszilloskopraphenröhre, so erhält man auf dem Leuchtschirm die Kurve  $I_a = f(U)$ .

Man kann auf diese Weise bequem die günstigsten Bedingungen für die Messung von  $U_0$  ermitteln. Außer von der Größe der Gegenspannung  $U_g$  und vom Kathodenstrom der Meßröhre hängt der Kurvenverlauf stark von der mittleren freien Weglänge der Elektronen in der Röhre und damit vom Dampfdruck des Quecksilbers ab, der sich durch Änderung der Temperatur

der Röhre regulieren lässt. Zu diesem Zwecke befindet sich diese in einem kleinen Ofen, der elektrisch geheizt wird.

Nachdem man die optimalen Meßbedingungen ermittelt hat, nimmt man mit der Schaltung von Abb. 200 den Verlauf der Kurve  $I_a = f(U)$  punktweise auf und bestimmt daraus das Anregungspotential.

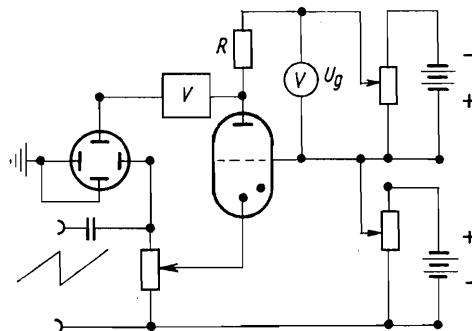


Abb. 202. Schaltung zur oszillographischen Messung des Anregungspotentials

Die bei der Elektronenstoßanregung von Quecksilber ausgestrahlte Resonanzlinie liegt im ultravioletten Spektralbereich und lässt sich nur mit einem Quarzspektrographen beobachten. Die für die Berechnung von  $h/e$  erforderliche Wellenlänge wird daher als bekannt vorausgesetzt, es ist  $\lambda = 257 \text{ nm}$ .

## O. 6.4. Rydberg-Konstante und Plancksches Wirkungsquantum

*Aufgabe:* Die Rydberg-Konstante  $R_H$  für das Wasserstoffatom ist zu messen und daraus das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$  zu berechnen.

Das Spektrum des atomaren Wasserstoffs besteht im Sichtbaren aus einer Reihe von Linien  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$  usw., deren Wellenzahlen  $\tilde{\nu}$  sich durch die experimentell gefundene Beziehung

$$\tilde{\nu} = R_H \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (19)$$

beschreiben lassen (*Balmer-Formel*).

Eine theoretische Begründung dieser Formel wurde von *Bohr* gegeben, der damit die Grundlagen der Quantentheorie schuf.

Nach der Bohrschen Theorie besteht das Wasserstoffatom aus einem positiv geladenen Kern (Proton) und einem Elektron, das sich auf einer Kreisbahn um diesen Kern bewegt. Es besteht Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und elektrischer Anziehungskraft (Coulomb-Kraft):

$$m_e \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad (20)$$

Das erste Bohrsche Postulat verlangt, daß für Elektronen nur Bahnen erlaubt sind, auf denen der Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches der Größe  $\hbar = \hbar/2\pi$  ist. Dies bedeutet

$$m_e \cdot v \cdot r = n \cdot \hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (21)$$

$n$  ist die sog. Hauptquantenzahl, die den „Zustand“ des Atoms charakterisiert.

Aus den Gl. (20) und (21) kann man den Bahnradius  $r$  und die Geschwindigkeit  $v$  berechnen, es ist

$$r = \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2 \cdot n^2}{e^2 \cdot m_e} = a_0 \cdot n^2 \quad (22)$$

und

$$v = n \cdot \frac{\hbar}{m_e r} = \frac{\hbar}{m_e a_0 n}. \quad (23)$$

$a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$  cm ist der Radius der kernnächsten Bahn (1. Bohrscher Radius).

Auf der Bahn mit der Hauptquantenzahl  $n$  hat das Elektron die Energie

$$E_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}.$$

Setzt man  $r$  und  $v$  ein, so ergibt sich

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (24)$$

Gl. (24) gibt die für das Elektron erlaubten Energiewerte an, die man in Form eines Termschemas (Abb. 203) darstellt.  $E$  ist negativ, da das Elektron gebunden ist und zu seiner Ablösung vom Kern Energie aufgewendet werden muß.

Geht das Elektron von einem Zustand hoher Energie (kernferne Bahn) in einen Zustand niedriger Energie (kernnahe Bahn) über, so wird Energie frei, die in Form von Licht ausgestrahlt wird. Die Frequenz des ausgestrahlten Lichtes ist durch die Gleichung

$$\hbar \cdot \nu = \Delta E = E_m - E_n \quad (25)$$

gegeben (2. Bohrsches Postulat).

In der Spektroskopie rechnet man statt mit der Frequenz meist mit der Wellenzahl  $\tilde{\nu} = \nu/c = 1/\lambda$  ( $\tilde{\nu}$  gibt die Zahl der Wellenlängen auf einer Strecke von 1 cm an) und erhält dann aus den Gln. (24) und (25)

$$\tilde{\nu} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R_\infty \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (26)$$

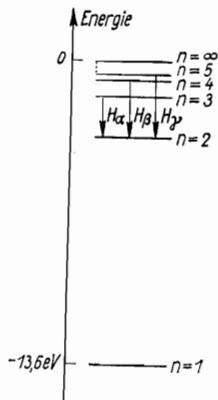


Abb. 203. Termschema des Wasserstoffatoms.  
 $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Ws}$  ist diejenige Energie, die ein Elektron beim Durchlaufen einer Spannungsdifferenz von 1 V gewinnt

$R_\infty$  ist die *Rydbergkonstante* für unbewegten (unendlich schweren) Kern. Berücksichtigt man die Mitbewegung des Kerns, so erhält man für Wasserstoff

$$\tilde{\nu} = R_H \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (26a)$$

mit

$$R_H = R_\infty \left( 1 + \frac{m_e}{m_p} \right)^{-1} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c \left( 1 + \frac{m_e}{m_p} \right)}. \quad (27)$$

Betrachtet man alle Übergänge, die zum gleichen Endzustand  $n$  führen, so ist  $n$  konstant, und man erhält eine Serie von Spektrallinien. Insbesondere erhält man für  $n = 2$  und  $m \geq 3$  die Balmer-Formel (19).

#### Versuchsausführung

Mit einem Gitter- oder Prismenspektrometer (Versuch O. 2.3 bzw. O. 3.2) bestimmt man die Wellenlängen der Balmerlinien  $H_\alpha$  ( $m = 3$ ),  $H_\beta$  ( $m = 4$ ) und  $H_\gamma$  ( $m = 5$ ). Als Lichtquelle ist dazu eine wasserstoffgefüllte Geißlerröhre zu verwenden. Man beobachtet dabei eine Vielzahl von Linien, die vom molekularen Wasserstoff herrühren, die Balmerlinien unterscheiden sich davon durch größere Intensität.

Aus jeder der gemessenen Linien berechnet man nach Gl. (19)  $R_H$ , bildet den Mittelwert und berechnet daraus das Plancksche Wirkungsquantum, indem man Gl. (27) nach  $\hbar$  auflöst.

## O. 7. RADIOMETRIE

### O. 7.0. Allgemeine Grundlagen

Unter *Radiometrie* wollen wir den Nachweis und die Analyse der primären Korpuskular- und Quantenstrahlung beim Atomkernzerfall sowie die mit der Röntgendifosimetrie verbundenen meßtechnischen Aufgaben verstehen.

#### O. 7.0.1. Wechselwirkung von Strahlung und Stoff

Bei der Wechselwirkung dieser Strahlungen mit Stoffen werden physikalische, chemische und biologische Veränderungen beobachtet, die von der Strahlenart und vom bestrahlten Stoff abhängen. Hier interessieren solche primären und sekundären Prozesse, die in radiometrischen Detektoren ausgenutzt werden, und der biologische Einfluß der Strahlen insofern, als er zu erheblichen irreversiblen Schädigungen biologischer Objekte führen kann.

Deshalb müssen beim Umgang mit derartigen Strahlungsquellen die jeweiligen *Strahlenschutzhinweise* streng beachtet werden. Die im Praktikum verwendeten Quellen unterliegen entweder wegen ihrer geringfügigen Strahlung keinen besonderen Bestimmungen oder sind so abgeschirmt und nicht direkt zugänglich, daß sie keine Gefahr bilden, wenn die Arbeitsvorschriften exakt eingehalten werden.

Die Partikeln der  $\alpha$ -Strahlung sind  ${}^4_2\text{He}$ -Kerne mit diskretem Energiespektrum bei einer vom jeweiligen Radionuklid abhängenden Energie zwischen 2 und 10,5 MeV. Sie werden bereits von dünnen Metall- und Kunststofffolien vollständig absorbiert.

Die  $\beta^+$ -(*Positronen-*) und  $\beta^-$ (*Elektronen-*) Strahlungen besitzen kontinuierliche Energiespektren mit einer von der Strahlungsquelle abhängenden Maximalenergie zwischen 18 keV und 5 MeV. Der  $\beta$ -Zerfall ist aus Gründen der Energie- und Impulserhaltung stets von einer Neutrinoemission begleitet. Die  $\beta$ -Strahlung ist in der Lage, dünne Folien (bis zum mm-Bereich) zu durchdringen.

Die  $\gamma$ -Strahlung ist eine elektromagnetische Wellenstrahlung (Quanten- oder Photonenstrahlung), die nur in Verbindung mit einem  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zer-

fall auftritt. Sie besitzt als Folge angeregter Kernniveaus eine diskrete, vom jeweiligen Radionuklid abhängende Energieverteilung im Bereich von 0,1 bis 3 MeV und durchdringt unter Umständen noch einige Dezimeter dicke Stoffe.

*Röntgenstrahlung* ist der  $\gamma$ -Strahlung wesensgleich, ihre Photonen sind jedoch energieärmer. Sie entsteht bei Übergängen der Hüllelektronen zwischen kernnahen Energieniveaus entweder als Folge einer Kernreaktion (K-Einfang) oder durch Beschuß der Stoffe mit Elektronen-, Ionen- und Quantenstrahlungen entsprechender Energie. Diese für den emittierenden Stoff „charakteristische“ Röntgenstrahlung besitzt ein diskretes Energiespektrum im Gegensatz zur sogenannten „Bremsstrahlung“ (vgl. Abschn. O. 7.3).

Im Ergebnis einer elektrostatischen Wechselwirkung mit der Elektronenhülle von Atomen gasförmiger, flüssiger oder fester Stoffe werden die zuvor genannten Strahlungen gestreut und (oder) absorbiert. Kernstöße oder Kernreaktionen sind unter gewöhnlichen Bedingungen selten.

Bei der Wechselwirkung mit Stoffen zerlegen die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlen die von ihnen getroffenen Atome in ein Ladungsträgerpaar aus positivem Ion und Elektron (*direkte Ionisation*). In Stoffen mit molekularem Aufbau werden auch negative Ionen beobachtet. Durch jeden Stoß erleiden die Partikel der Strahlung einen Energieverlust von größtenteils 10 eV, so daß bis zur Abbremsung auf thermische Energien eine große Anzahl von Stößen erforderlich ist. Die Zahl der Ladungsträgerpaare ist der Partikelenergie proportional und ermöglicht daher eine Energiebestimmung.

Die Quanten der elektromagnetischen Strahlung geben bei der Wechselwirkung mit Stoffen ihre gesamte Energie oder einen erheblichen Teil davon auf einmal ab. Da diese Wechselwirkungsprozesse im Vergleich zu den  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Stößen weniger wahrscheinlich sind (kleinerer „Wirkungsquerschnitt“), sind  $\gamma$ - und Röntgenstrahlen durchdringungsfähiger als Teilchenstrahlen. Bei der Wechselwirkung der Quanten mit Stoffen entstehen erst geladene Teilchen, die ihrerseits Ionenpaare erzeugen und so beispielsweise den Nachweis der  $\gamma$ -Quanten ermöglichen (*indirekte Ionisation*).

Bei  $\gamma$ -Strahlen werden drei Prozesse beobachtet:

*Photoeffekt*: Ein Quant (Photon) wird vollständig absorbiert und befreit ein Elektron, das die um die Ablösearbeit verminderte, aber dennoch große Energie des Photons besitzt. Der Wirkungsquerschnitt des  $\gamma$ -Quants ist dabei  $\sigma \sim Z^6$  ( $Z$  Kernladungszahl des Absorbers).

*Compton-Effekt*: Ein  $\gamma$ -Quant überträgt beim Stoß einen Teil seiner Energie an ein quasifreies Elektron. Dabei stellen sich eine typische, vom Streuwinkel abhängende Verteilung der Elektronen- und Photonenenergie und eine entsprechende richtungsabhängige Änderung der Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung ein. Der Wirkungsquerschnitt bei der Compton-Streuung ist  $\sigma \sim Z$ .

*Paarbildung*: Bei einer Quantenenergie  $E_\gamma = h\nu > 1,02 \text{ MeV}$  ( $h$  Planck'sches Wirkungsquantum,  $\nu$  Frequenz der Strahlung) können Elektron-Posi-

tron-Paare erzeugt werden, die ihrerseits ihre Umgebung ionisieren und dadurch ihre kinetische Energie verlieren. Das Positron zerstrahlt zusammen mit einem Elektron und bildet dabei zwei  $\gamma$ -Quanten zu je 0,5 MeV, die einen Photoeffekt auslösen können. Der Wirkungsquerschnitt bei der Paarbildung ist  $\sigma \sim Z^2$ . Radioaktive Strahlen können außerdem Hüllelektronen bestimmter Stoffe anregen und strahlende Übergänge erzeugen (Lumineszenz).

### O. 7.0.2. Strahlungsdetektoren

In radiometrischen Detektoren wird die Energie der Strahlung durch die zuvor behandelten Wechselwirkungen mit dem Detektormedium in Signale umgewandelt, die es ermöglichen, Partikeln und Photonen zu zählen, ihre Energie und die Energieverteilung zu bestimmen, die Partikelspuren und die räumliche Verteilung der Bahnen aufzunehmen sowie die Intensität der Strahlung zu messen.

In der folgenden Tabelle sind in der Labor- und Betriebsmeßtechnik gebräuchliche Detektoren und charakteristische Parameter aufgeführt, die ihre Einsatzgebiete vorwiegend bestimmen.

*Eigenschaften von Detektoren*

| Typ                             | Detektor-<br>medium          | Raum-<br>auf-<br>lösung<br>mm | Energie-<br>auf-<br>lösung<br>% | Totzeit<br>s            | Arbeits-<br>geschwin-<br>digkeit<br>Ereignisse/s | Nachweis-<br>bare<br>Strahlen-<br>art |
|---------------------------------|------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------|--|---------------------------------------|
| Ionisations-<br>kammer          | gasförmig                    | –                             | –                               | –                       | –  | $\alpha, \beta, \gamma$               |
| Proportional-<br>zählrohr       | gasförmig                    | 1 ... 10                      | 1 ... 10                        | $10^{-6}$               | $\approx 10^5$                                   | $\alpha, \beta$                       |
| Auslöse-<br>zählrohr            | gasförmig                    | 1 ... 10                      | –                               | $10^{-4} \dots 10^{-3}$ | $\approx 10^3$                                   | $\alpha, \beta, \gamma$               |
| Halbleiter-<br>detektor         | fest                         | 1 ... 2                       | 0,2 ... 0,3                     | –                       | $\approx 10^6$                                   | $\alpha, \beta, \gamma$               |
| Szintil-<br>lations-<br>zählert | gasförmig<br>flüssig<br>fest | >10                           | 5 ... 10                        | –                       | $\approx 10^8$                                   | $\alpha, (\beta), \gamma$             |
| Nebel-<br>kammer                | gasf. + $H_2O$               | 1                             |                                 | >10                     |  | $\alpha, \beta$                       |

*Zählrohr* und *Ionisationskammer* sind mit einem Zylinderkondensator zu vergleichen, dessen Dielektrikum vom Detektorgas gebildet wird und an dem eine Spannung (kV-Bereich) liegt. Der Gasdruck ist so bemessen, daß die mittlere freie Weglänge der Gasmolekülen klein gegenüber den Abmessun-

gen des Detektors ist. Eine in das Detektorvolumen eindringende Strahlung ionisiert das Gas, die positiven Ionen und Elektronen wandern infolge der elektrischen Feldkraft in entgegengesetzte Richtungen zu den Elektroden entsprechenden Vorzeichens. Unterwegs rekombiniert ein Teil der Ladungspaaare. Bei genügend hoher Spannung ist dies kaum noch möglich, so daß sich ein Sättigungsstrom  $I_s$  im Detektor einstellt, dessen Größe der Zahl der Ionenpaare proportional ist. Unter solchen Bedingungen arbeitet eine Ionisationskammer vorwiegend (vgl. Abb. 204). Der Ionisationsstrom wird

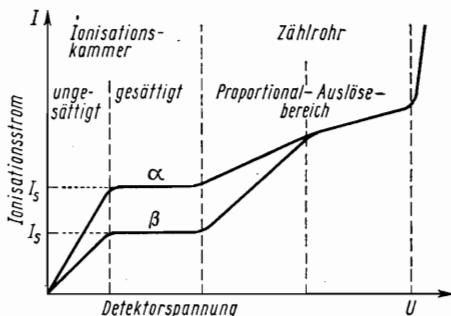


Abb. 204.  
Arbeitsbereiche von  
Gas-Ionisationsdetektoren  
(schematisch)

entweder über einen Gleichstromverstärker (vgl. Abschn. E. 2.1) gemessen oder mit einem empfindlichen Elektrometer (vgl. Abschn. E. 1.4), das durch ihn entweder aufgeladen (Auflademethode) oder entladen (Entlademethode) wird (Abb. 205).

Die Ionisation des „Zählgases“ und der Strom  $I$  in der Ionisationskammer sind der Intensität  $I^*$  (Dimension: Leistung/Fläche) der einfallenden Strahlung bzw. auch der Aktivität  $A$  der Strahlungsquelle (angegeben in Zerfällen/Zeit) direkt und der Auf- bzw. Entladezeit  $\Delta t$  des Elektrometers umgekehrt proportional:

$$I \sim I^* \sim A \sim \frac{1}{\Delta t} \quad (1)$$

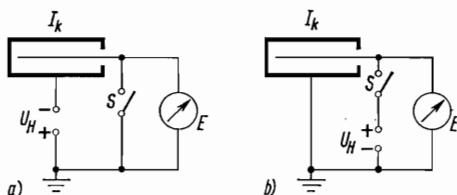


Abb. 205. Schaltung von Ionisationskammer  $I_k$  und Elektrometer  $E$   
(vgl. Abb. 87)

a) Auflademethode; b) Entlademethode

Eine Erhöhung der Spannung der Ionisationskammer über den Sättigungsbereich hinaus (vgl. Abb. 204) führt zu einer „Gasverstärkung“, indem die primär erzeugten Elektronen zwischen zwei Zusammenstößen so viel kinetische Energie gewinnen, daß sie ihre Stoßpartner ionisieren (*Stoßionisation*). In einem gewissen Spannungsbereich ist die Anzahl der sekundär durch

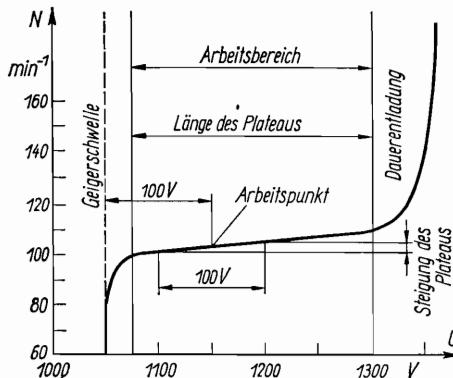


Abb. 206. Zählrohrcharakteristik  $N = f(U)$ ,  
 $N$ : Impulsrate [vgl. Gl. (5)];  $U$ : Zählrohrspannung

Stoß erzeugten Ionen der Anzahl der Primäronen proportional. In diesem Bereich arbeiten die *Proportionalzähler* (und gasgefüllte Photozellen, vgl. O. 5.1). Wird eine für jede Anordnung und Gasfüllung charakteristische Spannung, die Geiger-Schwelle (Abb. 206), überschritten, wächst die Zahl der Ionen unabhängig von der Größe der primären Ionisation lawinenartig. Dadurch wird in der Schaltung von Abb. 207 der Kondensator  $C$  auf-

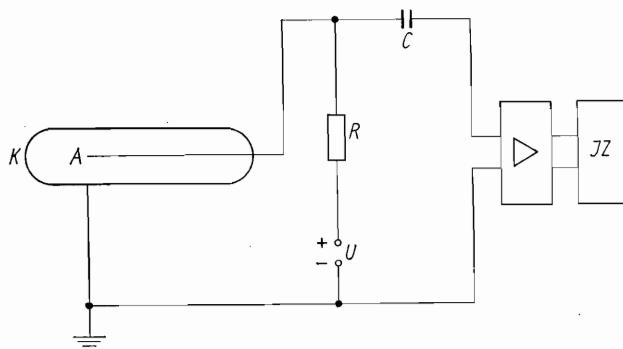


Abb. 207. Prinzipschaltung eines Zählrohres,  
 $K$ : Zählrohrmantel, als Kathode geschaltet;  $A$ : Zähldraht, als Anode  
 geschaltet;  $IZ$ : Impulszähler

geladen, die Ladung aber über den Widerstand  $R$  abgeleitet. Durch diesen Strom sinkt die Klemmenspannung  $U$  unter den Wert der Geiger-Schwelle, wodurch die Entladung gelöscht wird und ein zeitlich begrenzter Impuls entsteht (*Auslöse- oder Geiger-Müller-Zählrohr*).

Das Löschen kann statt durch einen hohen Widerstand  $R$  auch durch den Zusatz eines „Löschgases“ (z. B. von Alkoholen) erreicht werden, dessen Moleküle die Energie der Ionen lediglich als Rotations- und Schwingungsenergie übernehmen und dadurch Dauerentladungen verhindern (*selbstlösches Zählrohr*).

Eine weitere Steigerung der Spannung bewirkt eine gefährdende Dauerentladung.

Die Ladungsmenge, die durch ein Primärereignis in einem *Proportionalzählohr* erzeugt wird, ist durch Art und Energie des auslösenden Teilchens bestimmt. Mit Proportionalzähloren werden daher Energieverteilungen mit akzeptablem Auflösungsvermögen aufgenommen.

Beim *Auslösezählrohr* bestimmen die Betriebsspannung und die Zählrohrgeometrie die Ladungsmenge. Es dient daher der Impulszählung.

$\gamma$ -Quanten lassen sich im Prinzip nach Abschn. O. 7.0.1 durch Detektormedien von hoher Ordnungszahl und größerer Dichte besser nachweisen. Dem kommen *Halbleiterdetektoren* (Si, Ge) entgegen, die eine Art Festkörperionisationszähler kleinen Zählvolumens – und das ist ihr Nachteil – darstellen. Ein pn-Übergang ist in Sperrichtung geschaltet (die Spannung beträgt größtenteils 50 V). Dadurch bildet sich im pn-Übergangsgebiet eine an Ladungsträgern verarmte Zone aus, die das empfindliche Detektorvolumen darstellt. Eine ionisierende Strahlung erzeugt auf ihrem Wege durch die „Zähldiode“ Elektronen-Defektelektronen-Paare, die im p- und n-Gebiet rekombinieren, in der Grenzschicht getrennt werden und so einen Stromimpuls erzeugen. Seine Höhe ist der Energie der ionisierenden Strahlen proportional. Das Energieauflösungsvermögen dieser Detektoren ist ausgezeichnet. Sie erfordern nur etwa 3 eV Ionisationsenergie/Ionenpaar, besitzen aber eine so große Eigenleistung, daß sie bei tiefen Temperaturen betrieben werden.

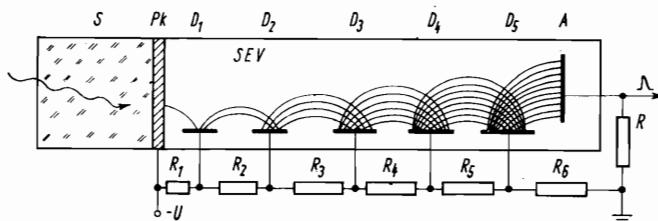


Abb. 208. Szintillationszähler,

S: Szintillatorkristall; PK: Photokathode; SEV: Sekundärelektronenvervielfacher;  $D_1, \dots, D_5$ : Dynoden; A: Anode;  $R_1, \dots, R_5$ : Spannungsteiler

Abb. 208 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines *Szintillationszählers*. Die ionisierende Strahlung erzeugt in einem Gas, einer Flüssigkeit oder – wie hier vorausgesetzt – in einem Festkörper<sup>1)</sup> Szintillationen (Lichtblitze), die in der Photokathode eines angekoppelten Sekundärelektronenvervielfachers (SEV) Elektronen auslösen. Der Elektronenstrom wird in dem mehrstufigen Dynodensystem verstärkt (vgl. Abschn. O. 5.2 und Abb. 193). Die Anordnung ermöglicht je nach Betriebsbedingungen Teilchenzählungen oder Energiemessungen.

*Nebelkammern* dienen zur Sichtbarmachung der Bahnen hochenergetischer geladener Teilchen. Man nutzt dabei aus, daß die von den Teilchen erzeugten Ionen als Kondensationskerne bei der Bildung von Nebeltröpfchen aus übersättigten Dämpfen dienen können. Die Übersättigung kann durch adiabatische Expansion (*Wilsonkammer*) oder durch Diffusion erzeugt werden.

Abb. 209 zeigt das Schema einer *Diffusionsnebelkammer*. Sie besteht aus dem gekühlten Kammerboden, den Wänden mit dem Beleuchtungsfenster,

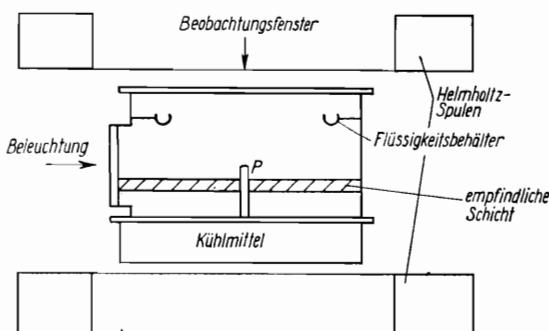


Abb. 209. Schema der Diffusionsnebelkammer

dem Deckel mit dem Beobachtungsfenster und einem Flüssigkeitsbehälter. In dem Flüssigkeitsbehälter befindet sich eine leicht verdampfende Flüssigkeit, z. B. Methanol, über der sich ein der Temperatur des Behälters entsprechender Dampfdruck einstellt. Am gekühlten Boden erfolgt die Kondensation des Dampfes, so daß oberhalb des Bodens der Temperatur entsprechende Gleichgewichtsdampfdruck sehr klein ist.

Infolge des so erzeugten Konzentrationsgefälles diffundiert Dampf vom Flüssigkeitsbehälter zum Boden, so daß dicht oberhalb des Bodens der durch Diffusion erzeugte Dampfdruck größer als der Gleichgewichtsdampfdruck ist. In dieser sog. empfindlichen Schicht dicht über dem Kammer-

<sup>1)</sup> Als Festkörperszintillatoren dienen beispielsweise mit Thallium (<1%) aktivierte NaJ-Kristalle, ein flüssiger Szintillator enthält beispielsweise p-Terphenyl.

boden tritt daher Übersättigung ein, wenn infolge des Fehlens von Kondensationskernen keine Tröpfchenbildung stattfinden kann.

Dieser Zustand wird einige Zeit nach der Füllung der Kammer mit Alkohol erreicht, da die ursprünglich vorhandenen Kondensationskerne zusammen mit den an ihnen gebildeten Alkoholtröpfchen zu Boden sinken. Nach der „Selbstreinigung“ der Kammer bilden sich Tröpfchen nur noch an neu gebildeten Kondensationskernen. Als solche wirken die durch Kernstrahlung gebildeten Ionen.

### O. 7.0.3. Gesetz des radioaktiven Zerfalls

Der radioaktive Zerfall eines Nuklids ist ein stochastischer Prozeß. Ein statistisches, für jedes Nuklid charakteristisches Maß der Radioaktivität ist die Zeit, in der sich jeweils die Hälfte der anfangs ( $t = 0$ ) vorhandenen Anzahl  $N_0^*$  der Nuklide einer Sorte umgewandelt hat (*Halbwertszeit*  $T$ ). Demnach sind zur Zeit  $t$  nur noch

$$N^* = N_0^* e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Ausgangskerne vorhanden. In diesem *Zerfallsgesetz* stellt  $\lambda$  die *Zerfallskonstante* dar. Je größer sie ist, um so kleiner ist die Halbwertszeit  $T$  und um so mehr Umwandlungen ereignen sich in einem Zeitintervall. Die *Aktivität* ist als Anzahl der Zerfälle je Zeit definiert:

$$A = - \frac{dN^*}{dt} = \lambda N^*. \quad (2a)$$

Ihre *Einheit* ist das Becquerel (Bq) =  $1 \text{ s}^{-1}$ . Sie ist mit der inkohärenten Einheit Curie (Ci) über

$$1 \text{ Bq} = \frac{1 \text{ Ci}}{3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}}$$

verbunden.

Nach der Halbwertszeit  $T$  hat die Aktivität definitionsgemäß um die Hälfte abgenommen. Daher folgt

$$\frac{A_{1/2}}{A_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$$

und

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{T}. \quad (2b)$$

## O. 7.1. Diffusionsnebelkammer

*Aufgabe:* Die Energie einzelner von einem radioaktiven Präparat ausgesandter  $\beta$ -Strahlen ist zu bestimmen.

Bringt man ein schwach radioaktives Präparat, z. B. Urandioxid, in die Kammer, so entstehen um die von den  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen gebildeten Ionen Tröpfchen, die bei seitlicher Beleuchtung sichtbar werden und die Bahn der Teilchen markieren.  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen sind leicht zu unterscheiden, da  $\alpha$ -Teilchen infolge ihres starken Ionisationsvermögens sehr kräftige Spuren bilden.

Um die Energie der  $\beta$ -Teilchen zu bestimmen, bringt man die Nebelkammer in ein Magnetfeld  $\mathbf{B}$ , dessen Kraftlinien senkrecht zum Kammerboden und damit auch senkrecht zur empfindlichen Schicht verlaufen. Unter dem Einfluß der Lorentz-Kraft [vgl. Gl. (E. 4.-7 a, b)]

$$\mathbf{F} = e \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

beschreiben die  $\beta$ -Teilchen, die senkrecht zum Magnetfeld emittiert werden, Kreisbahnen, aus deren Krümmung man die Energie ermitteln kann. Teilchen, die nicht senkrecht zum Magnetfeld emittiert werden, verlaufen nur ein sehr kurzes Stück innerhalb der empfindlichen Schicht und entziehen sich dadurch der Beobachtung.

Es liegen hier analoge Verhältnisse wie bei der  $e/m_e$ -Bestimmung von Elektronen vor (vgl. Vers. O. 6.2); infolge der hohen Energie der  $\beta$ -Teilchen muß jedoch die relativistische Massenveränderlichkeit des Elektrons berücksichtigt werden.

Auch bei relativistischer Rechnung bleibt Gl. (O. 6.-10) erhalten, es ist

$$m \cdot v = p = e \cdot B \cdot r. \quad (3)$$

Der Energiesatz muß in seiner relativistischen Form geschrieben werden:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2, \quad (4a)$$

wobei  $E_0 = m_0 \cdot c^2$  die der Ruhemasse  $m_0$  entsprechende Ruheenergie des Elektrons ist.

Für die kinetische Energie der  $\beta$ -Teilchen erhält man

---


$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - E_0. \quad (4b)$$


---

### Versuchsausführung

Nach dem Einbringen des radioaktiven Präparats wird der Flüssigkeitsbehälter gefüllt, die Kammer verschlossen und das Kühlmittel (Trockeneis) unter dem Kammerboden angebracht. Die Beleuchtung der empfindlichen Schicht geschieht mittels einer intensiven Lichtquelle (Bogenlampe

oder Hg-Höchstdrucklampe) durch einen schmalen horizontalen Spalt. Streulicht vom Kammerboden oder von den Wänden ist zu vermeiden (Wände schwärzen).

Die Beobachtung der Spuren geschieht durch den Deckel der Kammer. Um die Bahnen auszumessen, werden sie mit einer lichtstarken Kamera photographiert.

Vor dem Photographieren ist es zweckmäßig, den Selbstreinigungsprozeß der Kammer durch Anlegen eines elektrischen Feldes zwischen Boden und Deckel der Kammer zu beschleunigen, um die vor der Messung gebildeten Ionen schnell zum Kammerboden zu treiben.

Das zur Energiebestimmung erforderliche Magnetfeld wird durch ein Helmholtz-Spulenpaar (vgl. Vers. O. 6.2) erzeugt, dessen Kraftflußdichte  $B$  über Gl. (O. 6.-14) berechnet wird. Um aus dem Krümmungsradius  $r'$  auf dem Film den wahren Bahnradius  $r$  zu berechnen, muß der Vergrößerungsfaktor der photographischen Aufnahme bekannt sein. Man ermittelt ihn am einfachsten, indem man einen Gegenstand bekannter Größe, z. B. den Präparaträger, mit photographiert. Aus Gl. (3) folgt  $p$ , und mit Gl. (4 b) wird die kinetische Energie der  $\beta$ -Strahlen berechnet.

## O. 7.2. Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr

*Aufgaben:* 1. Es ist die Charakteristik eines Geiger-Müller-Zählrohres aufzunehmen. Die Einsatz- und Arbeitsspannung sowie die Mindestplateaulänge und die Plateausteigung sind anzugeben.

2. Zur radiometrischen Kaliumbestimmung ist die Abgleichkurve eines Flüssigkeitszählrohres aufzustellen.

Die Meßergebnisse von Partikelzählungen werden als (zeitliche) *Impulsdichte* oder *Zählrate*  $N$  angegeben. Definitionsgemäß ist dies die auf die Meßzeit  $\Delta t$  bezogene Anzahl  $m$  der Impulse:

$$N = \frac{m}{\Delta t}. \quad (5)$$

Ihre Einheit ist  $\text{min}^{-1}$ .

Der *Nulleffekt*  $N' = m'/\Delta t'$  ist die Zählrate, die auch bei Abwesenheit des Meßobjektes beobachtet wird. Er wird durch die Höhenstrahlung und die natürliche radioaktive Verseuchung der Meßanordnung und der Umgebung verursacht und ist vom Meßergebnis abzuziehen.

In einem gewissen Bereich der Charakteristik (Abb. 206), dem Arbeitsbereich oder *Plateau*, ist die Zählrate nahezu unabhängig von der Spannung. Die Plateaulänge soll bei guten Zählrohren etwa 200 V betragen und die Plateausteigung 5 % nicht überschreiten. Die Steigung wird für den *Arbeitspunkt* angegeben. Er liegt gewöhnlich 100 V über der Geiger-Schwelle oder

50 V über dem Anfang des Plateaus. Sind  $N$  die Impulsrate im Arbeitspunkt,  $N_1$  und  $N_2$  die Impulsraten bei um 50 V geringerer und höherer Spannung, so beträgt die vereinbarungsgemäß auf 100 V bezogene und daher in %/100 V angegebene *Steigung des Plateaus im Arbeitspunkt*

$$S = \frac{N_2 - N_1}{N} \cdot 100. \quad (6)$$

Die Empfindlichkeit der Stabzählrohre nimmt nach dem Ende zu ab (Feldverzerrungen, Abdiffundieren von Ladungen aus dem aktiven Volumen). Ähnliche Erscheinungen treten auch in den Randpartien von Glockenzählrohren auf. Die Längs- und Querempfindlichkeit der Zählrohre lassen sich durch Abtasten mit einem scharf ausblendeten Strahl nachweisen.

*Fehlerquellen bei Zählrohrmessungen* sind:

- a) Absorption der Strahlung im Präparat und im Zählrohrmantel,
- b) Rückstreuung der Strahlen am Präparatträger,
- c) Koinzidenzfehler: Ein Quant oder Teilchen kann mit einem anderen koinzidieren oder in die durch den vorangegangenen Zählvorgang verursachte „Totzeit“ des Zählrohres fallen,
- d) Verteilungsfehler infolge zeitlich schwankender Intensität der Strahlung und des „Hintergrundes“ (Nulleffekt).

#### Verteilungsfehler

Die Grenzen, innerhalb derer der Mittelwert einer Meßreihe mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,26% anzunehmen ist, sind durch den *mittleren Fehler*

$$\delta = \pm \sqrt{m} = \pm \sqrt{N \cdot t} \quad (7)$$

festgelegt. Meist wird bei Zählrohrmessungen der in Prozent angegebene mittlere relative Fehler

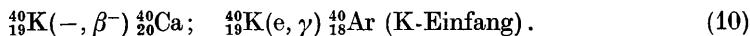
$$\delta_{\text{rel}} = \pm \frac{\delta \cdot 100}{m} \% = \pm \frac{100}{\sqrt{m}} \% = \pm \frac{100}{\sqrt{N \cdot t}} \% \quad (8)$$

benutzt. Bei kleiner Impulsdichte ist daher im Interesse eines möglichst kleinen Fehlers die Meßzeit groß zu wählen. Ist der relative Fehler des Nulleffektes  $\delta_{1\text{rel}}$  und der des Präparates  $\delta_{2\text{rel}}$ , gilt für den relativen Gesamtfehler

$$\delta_{1,2\text{ rel}} = \pm \sqrt{\delta_{1\text{ rel}}^2 + \delta_{2\text{ rel}}^2} \%. \quad (9)$$

Für exakte Messungen sollte daher der Nulleffekt relativ klein und hinreichend bekannt sein.

Die *Isotopenzusammensetzung des Kaliums* und seiner Verbindungen ist konstant und unabhängig von Herkunft oder Darstellung. Das  $^{40}_{19}\text{K}$ -Isotop tritt mit einem Anteil von 0,011 % auf. Es zerfällt unter  $\beta$ - und  $\gamma$ -Emission nach den Reaktionsschemata



Für analytische Zwecke eignet sich vor allem die  $\beta$ -Strahlung mit einer Reichweite in einem Kalium-Salz von einigen  $1/10$  mm. Fremdstoffzusätze stören die K-Gehaltsbestimmung in feingepulvertem Material nicht, in Flüssigkeiten nur, wenn durch den Zusatz die Dichte der Flüssigkeit merklich geändert wird. Der Gehalt ist der Impulsrate proportional.

### *Versuchsausführung*

Nach einem Vorversuch, bei dem wir uns mit der Arbeitsweise der Meßapparatur vertraut machen, legen wir nach Gl. (8) bzw. (9) den relativen Fehler fest, der bei jeder Einzelmessung nicht überschritten werden soll [Beachte: Die Fehler der Gln. (7) bis (9) beziehen sich auf die Impulszahl  $m$ ]. Der Fehler sollte so bemessen werden, daß die Meßzeit je Meßpunkt tragbar ist. Es wird daher empfohlen, mit einer entsprechenden „Impulsvorwahl“ zu arbeiten und die zugehörige Meßzeit zu stoppen.

Für *Aufgabe 1* benutzen wir einen Uranglaswürfel als Präparat. Von der Geiger-Schwelle an wird die Spannung am Zählrohr in Schritten von etwa 10 zu 10 V, im Bereich des Plateaus um jeweils 20 V verändert und bei jeder Spannung mehrmals die Impulsrate bestimmt. Dauerentladungen müssen vermieden werden. Wir begnügen uns daher mit der Angabe der Mindestplateaulänge. Bei *Aufgabe 2* gehen wir von einer bei Zimmertemperatur gesättigten Lösung bekannter Konzentration eines Kaliumsalzes aus, von der wir eine Verdünnungsreihe (etwa 5 Verdünnungsgrade) herstellen. Der Nulleffekt wird bei dem mit destilliertem Wasser gefüllten, zuvor gründlich gesäuberten Flüssigkeitszählrohr gemessen. Bei allen Messungen ist es von einer Bleiabschirmkammer zu umgeben. Die Messungen beginnen wir mit der Lösung geringster Konzentration. In der Abgleichkurve (Zählrate als Funktion der Konzentration) werden die um den Nulleffekt vermindernden Impulsraten dargestellt.

## **O. 7.3. Messungen mit der Ionisationskammer**

*Aufgaben:* 1. Die relative Intensität von Röntgenstrahlen ist  
 a) in Abhängigkeit von der Anodenspannung bei konstantem Röhrenstrom,  
 b) in Abhängigkeit vom Röhrenstrom bei konstanter Anodenspannung zu messen.  
 2. Schwächungskoeffizienten und Halbwertsdicken von Metallproben sind für Röntgen- und (*oder*)  $\gamma$ -Strahlung zu bestimmen.

In Röntgenröhren werden die aus einer Glühwendel austretenden Elektronen (Ladung  $e$ ) durch die zwischen Kathode und Anode (Antikathode) wirkende Hochspannung  $U$  zur Anode hin beschleunigt. Dabei gewinnen sie eine Energie  $E = eU$ , die sie bestenfalls in einem Schritt beim Aufprall

auf die Anode abgeben können. Für die kürzeste Wellenlänge  $\lambda_{\min}$  gilt daher

$$eU = h\nu_{\max} = h \frac{c}{\lambda_{\min}}, \quad (11)$$

$\lambda_{\max}$  ist die maximale Frequenz,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.

Meist wird die Energie in mehreren Schritten abgegeben, so daß ein kontinuierliches, das *Bremsspektrum* entsteht, aus dem im allgemeinen für das betreffende Anodenmaterial charakteristische Linien (*Linienspektrum*) herausragen. Diese beruhen auf diskreten Quantenübergängen der Elektronen der kernnahen Schalen im Anodenmaterial. Die Gesamtintensität der Strahlung einer Röhre ist der in der Zeiteinheit zur Anode gelangenden Anzahl der Elektronen und damit dem Röhrenstrom  $I_A$  proportional. Dieser wird im allgemeinen unabhängig von der Hochspannung über die Stromstärke im Kathodenheizkreis geregelt (Abb. 210). Bei konstanter

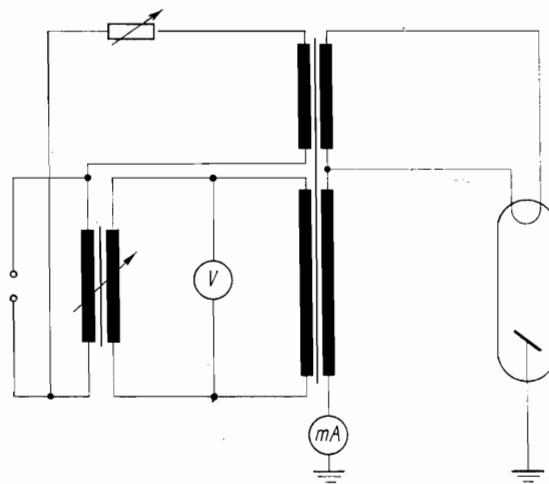


Abb. 210. Prinzipschaltung einer Röntgenanlage

Heizleistung wächst die Intensität der Strahlung etwa mit dem Quadrat der Hochspannung. Diese wird über die Spannung auf der Primärseite eines Hochspannungstransformators verändert. Nach Gl. (11) wird dadurch gleichzeitig die Strahlenqualität (Verteilung der Energie auf die einzelnen Wellenlängen) geändert.

In ihren Anwendungen lassen sich Röntgenanlagen meist durch transportable  $\gamma$ -Strahlungsquellen ersetzen.

Beim Durchgang durch feste, flüssige und gasförmige Stoffe erleiden  $\gamma$ - und Röntgenstrahlen eine *Schwächung*. Wenn  $I_0^*$  die Intensität einer ein-

fallenden (monochromatischen) Strahlung ist, wird nach dem Durchgang durch eine Schicht der Dicke  $d$  die Intensität

---


$$I^* = I_0^* e^{-\mu d} \quad (12)$$


---

festgestellt.  $\mu$  ist der material- und wellenlängenabhängige lineare *Schwächungskoeffizient*, der sich additiv aus einem Absorptions- und einem Streuanteil zusammensetzt. In diese Anteile gehen der im Abschn. O. 7.0.1 diskutierte Photo-, der Compton-Effekt und eventuell auch die Paarbildung ein. Das Schwächungsgesetz [Gl. (12)] gilt annähernd auch für  $\beta$ -Strahlen.

Aus ihm folgt durch Logarithmieren eine Bestimmungsgleichung für den linearen Schwächungskoeffizienten:

$$\ln \frac{I^*}{I_0^*} = -\mu d \quad (13)$$

und

---


$$\mu = -\frac{1}{d} \ln \frac{I^*}{I_0^*} = -\frac{2,30}{d} \lg \frac{I^*}{I_0^*}. \quad (14)$$


---

Die *Einheit* ist  $[\mu] = 1 \text{ cm}^{-1}$ . Der *Massenschwächungskoeffizient*  $\mu/\varrho$  eines Stoffes ( $\varrho$  ist seine Dichte) hat die *Einheit*  $\text{cm}^2/\text{g}$  und ist im Gegensatz zum linearen Schwächungskoeffizienten vom chemischen und physikalischen Zustand des Materials unabhängig. Er gehört zu den Atomeigenschaften. Verschiedene Modifikationen eines Stoffes (z. B. Graphit und Diamant) haben gleiche Massenschwächungskoeffizienten, aber verschiedene lineare Schwächungskoeffizienten.

Unter der *Halbwertsdicke*  $d'$  wird definitionsgemäß die Materialstärke verstanden, die die Intensität  $I^*$  auf die Hälfte herabsetzt. Dafür erhalten wir aus Gl. (12)

$$I^* = \frac{I_0^*}{2} = I_0^* e^{-\mu d'}, \quad (15)$$

woraus

---


$$d' = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0,693}{\mu} \quad (16)$$


---

folgt.

### Versuchsausführung

Durch Bleiblenden wird ein annähernd paralleles Röntgen- bzw.  $\gamma$ -Strahlenbündel ausgeblendet, das zur Vermeidung eines Photoeffektes weder die

seitliche Wandung noch den Draht der Ionisationskammer trifft. Die Grenzen, innerhalb derer bei den Versuchen die Betriebsdaten geändert werden dürfen, entnehmen wir einer gesonderten Arbeitsvorschrift, die auch in den übrigen Teilen aus Gründen des Strahlenschutzes genau einzuhalten ist. Je nach Schaltung der Ionisationskammer (Abb. 205) messen wir die bis zu einem bestimmten Skalenwert verstrichene Auf- oder Entladzeit des Elektrometers. Die relativen Intensitäten ermitteln wir nach der Beziehung (1).

Ob sich die erwarteten Zusammenhänge ergeben, entnehmen wir für *Aufgabe 1a* einer Darstellung der relativen Intensität  $I$  über  $U^2$ , für *Aufgabe 1b* tragen wir  $I$  über dem Röhrenstrom  $I_A$  auf.

Bei der *Aufgabe 2* benutzen wir verschiedene Materialstärken und ermitteln den Schwächungskoeffizienten entweder aus der graphischen Darstellung der Gl. (13b) (einfach-logarithmisches Papier) oder aus Gl. (14). Die Halbwertsdicke ergibt sich aus Gl. (16).

## O. 7.4. Aktivierungsanalyse

- Aufgaben:*
1. Halbwertszeit und Zerfallskonstante des  $\beta$ -Zerfalles von neutronenaktiviertem, in Kaliumjodid gebundenem Jod-128 sind zu ermitteln.
  2. Die Konzentration des Silbers in einer silberhaltigen Probe soll mittels Neutronenaktivierungsanalyse bestimmt werden.

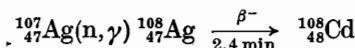
Die *Aktivierungsanalyse* nutzt die künstliche Radioaktivität entsprechender Nuklide aus. Da sich die Radionuklide durch Art, Energie und Halbwertszeit ihrer Strahlung unterscheiden, sind eine qualitative Analyse und wegen der Proportionalität von Aktivität und Nuklidkonzentration auch eine quantitative Analyse möglich. Die Nachweisgrenzen liegen zwischen  $10^{-7}$  und  $10^{-9}$  g und reichen bei einigen Elementen bis herunter zu  $10^{-10}$  und  $10^{-11}$  g. Eine Aktivierungsanalyse setzt konstante Isotopenverhältnisse der Elemente und ihrer Verbindungen voraus.

*Neutronenaktivierung:* Die Aktivierung erfolgt bevorzugt im Neutronenstrom, in dem Neutroneneinfangreaktionen ablaufen. Das sind solche, bei denen ein Neutron in den Kern eindringt und kein anderes Teilchen mit einer von Null verschiedenen Ruhmasse im Augenblick der Reaktion den Kern verläßt. Dabei tritt in Verbindung mit einem initiierten  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfall regelmäßig  $\gamma$ -Strahlung und gegebenenfalls eine Neutrinoemission auf, so daß als allgemeine Reaktionsgleichung

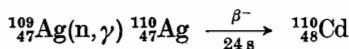
$${}^{A^*}_{Z}X(n, \gamma) {}^{A^*+1}_{Z}X \quad \text{bzw.} \quad {}^{A^*}_{Z}X + n \rightarrow {}^{A^*+1}_{Z}X + \gamma \quad (17)$$

folgt ( $X$  Nuklidsymbol,  $A^*$  Massezahl,  $Z$  Kernladungszahl,  $n$  Neutron).

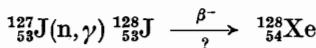
Reaktionen und Daten unseres Versuchsmaterials sind:



Ag-107: Isotopenhäufigkeit 51,35 %,



Ag-109: Isotopenhäufigkeit 48,65 %



Eine Probe mit  $N^*$  Kernen des Nuklids  ${}_{z}^{A*}\text{X}$  werde während einer Bestrahlungs- oder Aktivierungszeit  $t_B$  einem Neutronenfluß  $\Phi$  (angegeben in Anzahl der Neutronen je Fläche und Zeit) ausgesetzt. Nach der Bestrahlung wird eine von den aktivierten Nukliden ausgehende Aktivität [vgl. Gl. (2a)]

$$A(t_B) = \Phi \sigma N^* (1 - e^{-\lambda t_B}) \quad (18)$$

beobachtet. Dabei sind  $\sigma$  der Wirkungsquerschnitt des Ausgangsnuklids für Neutronen und  $\lambda$  die Zerfallskonstante der aktivierten Kerne. Nach einer unendlichen Aktivierungszeit ( $t_B \rightarrow \infty$ ) wird nach Gl. (18) eine Sättigungsaktivität

$$A_0 = \Phi \sigma N^* \quad (18a)$$

erwartet. Im Verlauf einer Bestrahlungszeit von  $t_B = 5 T$  ( $T$  = Halbwertszeit) erreicht die Aktivität bereits 97 % des Endwertes  $A_0$ .

Die Proben werden meist im Neutronenstrom von Kernreaktoren aktiviert. Als kleine, im Prinzip transportable Neutronenquelle kann – wie hier im Versuch – die historisch bedeutungsvolle Berylliumreaktion



dienen, bei der Neutronen einer Energie bis zu 10 MeV entstehen. Beryllium wird mit  $\alpha$ -Strahlen beschossen, die beispielsweise aus dem Zerfall eines  ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ -Präparates (Halbwertszeit: 24 410 a) stammen.

Bei der Aktivierung ist der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  der schnellen Neutronen im Vergleich zu thermischen Neutronen (Energie: etwa 0,025 eV,

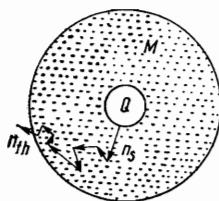


Abb. 211. Abbremsung schneller Neutronen (schematisch)  
Q: Pu-Be-Neutronenquelle; M: Moderator (Paraffin);  $n_s$ : schnelles Neutron;  $n_t$ : thermisches Neutron

entsprechend einer thermischen Geschwindigkeit von etwa  $2200 \text{ ms}^{-1}$ ) im allgemeinen gering. Deshalb werden überthermische Neutronen durch Stoß mit möglichst massegleichen Partikeln (z. B. mit H-Atomen in Paraffin) zunächst abgebremst (moderiert). Dies ist schematisch in Abb. 211 dargestellt. Die Wirkungsquerschnitte der Nuklide unserer Proben sind für diese abgebremsten thermischen bzw. epithermischen Neutronen:  $\sigma_{\text{Ag}-107} = 45 \text{ b}$ ,  $\sigma_{\text{Ag}-109} = 113 \text{ b}^1$ .

*Versuchsanordnung und Meßprinzip:* Ein für Aktivierungsanalysen geeigneter Meßplatz ist im Prinzip wie folgt aufgebaut (Abb. 212): Die Signale eines Detektors  $D$  werden in einem Impulsverstärker  $IV$  geformt und verstärkt. In weiteren Stufen ( $Z$ ) werden die über dem Störpegel liegenden

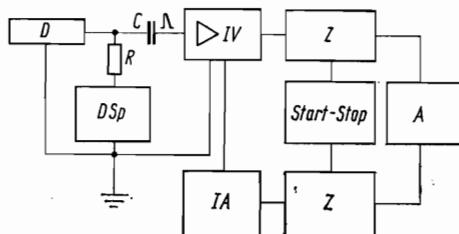


Abb. 212. Blockschaltbild (vereinfacht) eines Aktivitätsmeßplatzes,

$D$ : Detektor;  $DSp$ : Detektorspannung;  $IV$ : Impulsformer und Impulsverstärker;  $IA$ : Impulshöhenanalysator;  $Z$ : Zählwerk;  $A$ : Anzeige/Registrierung

Signale gezählt und angezeigt ( $A$ ) bzw. registriert. Eine Start/Stop-Einrichtung sorgt dafür, daß entweder die Zeit für eine wählbare Zahl von Impulsen gemessen wird (Impulsvorwahl) oder die während einer vorher bestimmten Zeitspanne anfallenden Impulse gezählt werden (Zeitvorwahl). Die Energieverteilung wird mit einem Impulshöhenanalysator ( $IA$ ) ermittelt. Die Impulse eines geeigneten Detektors (vgl. Abschn. O. 7.0.2) werden nach ihrer Höhe (Energie) sortiert und diejenigen in jeweils einen „Kanal“ eingespeist, die zu einem bestimmten Energieintervall gehören. Mit Einkanalanalysatoren werden nacheinander die zu einer bestimmten Kanalbreite gehörenden Impulsraten ermittelt, während Vielkanalanalysatoren (einige  $10^2$  bis einige  $10^3$  Kanäle) das gesamte Energiespektrum gleichzeitig erfassen.

Im Versuch nutzen wir die  $\beta$ -Strahlung der aktivierte Stoffe aus und beschränken uns auf eine Impulszählung. Dabei wird ein Glockenzählrohr vom Geiger-Müller-Typ verwendet, das in eine Bleikammer eingebaut ist. Es besitzt ein dünnes Glimmerfenster, in dem die  $\beta$ -Strahlen nur mäßige

<sup>1)</sup>  $1 \text{ b} (\text{Barn}) = 1 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 = 1 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  ist eine Flächeneinheit der Atom- und Kernphysik.

Energieverluste erleiden. Die so ermittelte Impulsrate ist wesentlich kleiner als die Zerfallsrate des Präparates (vgl. Abb. 213), weil wir mit dem Zählrohr nur einen Ausschnitt aus dem Strahlungsfeld erfassen (Geometriefaktor  $G$ ). Weiterhin sind die Ansprechwahrscheinlichkeit  $\epsilon$  des Detektors,

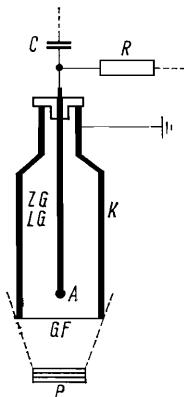


Abb. 213. Stirnfenster- oder Glockenzählrohr,  
A: Anode; K: Kathode; GF: Glimmerfenster;  
ZG: Zählgas (100 Torr Argon); LG: Löschgas  
(10 Torr Alkohol)

die Absorption  $A'$  im Fenster, die Selbstabsorption  $S$  im Präparat und die Rückstreuung  $R$  durch die Unterlage von Einfluß, die wir jeweils durch einen Faktor  $f$  berücksichtigen. Für die gemessene Impulsrate [vgl. Gl. (5)] wird daher

$$N = \epsilon f_{A'} f_S f_R G A \quad (20)$$

gesetzt.  $A$  ist die  $\beta$ -Aktivität des Präparates. Da die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohres für die  $\gamma$ -Begleitstrahlung nur etwa 1 % des  $\beta$ -Wertes beträgt, wird die  $\gamma$ -Strahlung vernachlässigt. Außerdem wird auf eine Totzeitkorrektur des Zählrohres verzichtet, der Nulleffekt ist in Gl. (20) nicht berücksichtigt.

Um die verschiedenenartigen Einflüsse der Gl. (20) zu eliminieren, wird eine Relativbestimmung der  $\beta$ -Aktivität vorgenommen: Wir vergleichen die Impulsrate  $N_x$  des Präparates unbekannter Konzentration  $c_x$  mit der Zählrate  $N_{\text{st}}$  eines unter gleichen Bedingungen aktivierten und vermessenen Standardpräparates bekannter Konzentration  $c_{\text{st}}$ . Mit  $c \sim A$  und Gl. (20) folgt

$$\frac{N_x}{N_{\text{st}}} = \frac{c_x}{c_{\text{st}}}. \quad (21)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Präparate gleiche Fläche und eine Dicke besitzen, die größer als die „Sättigungsdicke“ ist. Aus einem tiefer liegenden Bereich dringen infolge Selbstabsorption keine Zerfallselektronen durch die Oberfläche. Die Sättigungsdicke wird üblicherweise als „Flächendichte“ in  $\text{mg} \cdot \text{cm}^{-2}$  angegeben.

### Versuchsausführung

In einem Vorversuch legen wir den Arbeitspunkt des Zählrohres (Zählrohrspannung) fest. Der Wert wird der Betriebsanleitung entnommen oder experimentell ermittelt, indem die Geiger-Schwelle (vgl. Abb. 206) gesucht oder die Zählrohrcharakteristik aufgenommen wird. Im ersten Falle legen wir den Arbeitspunkt 100 V über die Geiger-Schwelle, im zweiten Falle in die Mitte des Plateaus. Für diese Messungen steht ein  $\beta$ -Präparat zur Verfügung, dessen Aktivität sich über die Meßzeit praktisch nicht verändert (große Halbwertszeit!). Das Präparat darf nur von der Praktikumsaufsicht in die Abschirmkammer eingeführt und aus dieser entfernt werden! Dauerentladungen zerstören das Zählrohr. Deshalb darf die Zählrohrspannung nicht über das Plateau hinaus erhöht werden. Weiterhin wird vor jedem Versuch die Impulsrate  $N'$  des Nulleffektes ermittelt. Bei *Aufgabe 1* erfolgt diese Messung wegen der  $\beta$ -Aktivität des  $^{40}\text{K}$  an einem nicht aktivierte KJ-Präparat, bei *Aufgabe 2* bei leerer Meßkammer. In beiden Fällen streben wir einen statistischen Fehler  $\delta_{\text{rel}} < 10\%$  an. Dazu sind nach Gl. (8)

$$\frac{1}{\sqrt{m'}} \leq 0,1 \quad \text{bzw.} \quad m' \geq 100$$

Impulse und eine entsprechende Meßzeit  $\Delta t'$  notwendig, so daß

$$N' = \frac{m'}{\Delta t'} \tag{22}$$

ist.

In dem Augenblick, da die Praktikumsaufsicht die für *Aufgabe 1 und 2* bestimmten Präparate aus der Neutronenquelle entfernt, wird eine Stoppuhr betätigt. Beim Einführen der Präparate in die Meßkammer darf das Glimmerfenster nicht berührt werden (Zerstörungsgefahr!). Um für die Zerfallskurven hinreichend viel Meßpunkte zu erhalten, sind die Zählraten wegen der geringen Halbwertszeit der Proben in möglichst kurzen Zeitabständen zu ermitteln. Die Meßzeit  $\Delta t''$  der Einzelmessung erstrecken wir im Interesse der Genauigkeit auf eine Impulszahl  $m'' \geq 1000$  Impulse (ein Richtwert für  $\Delta t''$  der ersten Messung wird gegeben). Die Zählrate

$$N'' = \frac{m''}{\Delta t''} \tag{23}$$

stellt dann einen über das Zeitintervall  $\Delta t''$  gemittelten Wert dar und gilt für eine Versuchsdauer  $t + \Delta t''/2$  ( $t$  ist die Zeit, bei der die Einzelmessung beginnen). Die jeweilig effektive, den Nulleffekt [Gl. (22)] berücksichtigende Impulsrate folgt aus

$$N = N'' - N' = \frac{m''}{\Delta t''} - \frac{m'}{\Delta t'} . \tag{24}$$

Auf einfach-logarithmisch geteiltem Koordinatenpapier zeichnen wir die jeweiligen Zerfallskurven, die nach Gl. (2) Geraden sein sollen. Für jeden Meßpunkt tragen wir einen mittleren Fehler  $\pm \Delta N$  ein, der aus Gl. (24) bzw. Gl. (9) abgeleitet wird.

Bei *Aufgabe 1* verfolgen wir den Zerfall etwa 45 Minuten lang und entnehmen der Darstellung die Halbwertszeit  $T_{J-128}$  (Fehler angeben!), womit wir nach Gl. (2b) die Zerfallskonstante  $\lambda_{J-128}$  berechnen.

Die erste Messung der *Aufgabe 2* beginnen wir am besten erst, nachdem die Aktivität des Ag-110 abgeklungen ist ( $t \geq 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$ ). Danach ist aufgrund der Gln. (2), (2b) und (18) mit einem zeitlichen Verlauf der Aktivität

$$A(t) \approx A_{0 \text{ Ag-108}} e^{-0,289 \frac{t}{\text{min}}} \quad (25)$$

und der Zählrate

$$N(t) = N_0 e^{-0,289 \frac{t}{\text{min}}}$$

zu rechnen. Die Extrapolation der Zerfallskurven (einfach-logarithmische Darstellung; bei der graphischen Mittelung der Meßwerte die Halbwertszeit beachten!) auf  $t = 0$  ergibt  $N_0$  für die Standard-( $N_{0 \text{ St}}$ ) und unbekannte Probe ( $N_{0x}$ ).

Mit diesen Daten erhalten wir aus Gl. (21) die unbekannte Konzentration

$$c_x = \frac{N_{0x}}{N_{0 \text{ St}}} c_{\text{St}}, \quad (26)$$

$c_{\text{St}}$  wird gegeben. Als Meßzeit einer jeden Probe werden  $12 \text{ min} < t < 15 \text{ min}$  empfohlen.

# **Tabellen**

*1. Einige Eigenschaften fester Stoffe*

|  | Dichte<br>bei 20 °C                   | Linearer<br>Ausdehnungs-<br>koeffizient<br>zwischen 0 °C<br>und 100 °C | Spezifische<br>Wärmekapa-<br>zität<br>bei 20 °C     |
|--|---------------------------------------|--|---|
|  | $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ | $10^{-6} \text{ K}^{-1}$   | $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
| Aluminium                                | 2,70                                  | 24   | 895   |
| Blei                                     | 11,35                                 | 31   | 128   |
| Eisen                                    | 7,86                                  | 12   | 450   |
| Glas                                     | 2,4 ... 2,6                           | 9  | 795   |
| Gold                                     | 19,29                                 | 14,3   | 130   |
| Kochsalz                                 | 2,165                                 | 40   | 855   |
| Kupfer                                   | 8,92                                  | 17   | 385   |
| Magnesium                                | 1,74                                  | 26   | 1020  |
| Messing<br>(62% Cu, 38% Zn)              | 8,4                                   | 18   | 380   |
| Neusilber<br>(62% Cu, 15% Ni,<br>22% Zn) | 8,41                                  | 18   | 400   |
| Nickel                                   | 8,90                                  | 13   | 445   |
| Platin                                   | 21,45                                 | 9,0  | 135   |
| Silber                                   | 10,5                                  | 19,5   | 235   |
| Wolfram                                  | 19,3                                  | 4,3  | 135   |
| Zink                                     | 7,14                                  | 26   | 385   |
| Zinn                                     | 5,75                                  | 27   | 225   |

*2. Einige Eigenschaften von Flüssigkeiten*

|                            | Dichte<br>bei 20 °C                   | Kubischer<br>Ausdehnungs-<br>koeffizient<br>bei 20 °C | Oberflächen-<br>spannung<br>gegen Luft<br>bei 20 °C | Dynamische<br>Viskosität<br>bei 20 °C                        |
|----------------------------|---------------------------------------|---|---|--|
|                            | $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ | $10^{-3} \text{ K}^{-1}$                              | $10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$             | $10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Äthanol                    | 0,789                                 | 1,1   | 22  | 1,20   |
| Äthyläther                 | 0,714                                 | 1,6   | 17  | 0,240  |
| Benzol                     | 0,879                                 | 1,2   | 29  | 0,649  |
| Chloroform                 | 1,490                                 | 1,3   | 27  | 0,565  |
| Glyzerin                   | 1,261                                 | 0,5   | 66  | 1480   |
| Methanol                   | 0,791                                 | 1,2   | 23  | 0,588  |
| Methylenjodid              | 3,325                                 |   |   |  |
| Nitrobenzol                | 1,202                                 | 0,8   | 43  | 2,02   |
| Quecksilber<br>0 °C        | 13,546<br>13,596                      | 0,18  | 465   | 1,554<br>1,685   |
| Schwefel-<br>kohlenstoff   | 1,263                                 | 1,2   | 32  | 0,367  |
| Tetrachlor-<br>kohlenstoff | 1,595                                 | 1,2   | 27  | 0,969  |
| Toluol                     | 0,867                                 | 1,1   | 29  | 0,585  |
| Wasser                     | 0,998                                 | 0,2   | 73  | 1,005  |
| m-Xylol                    | 0,864                                 | 1,0   | 29  |  |

<sup>1)</sup> Werkzeugstahl. <sup>2)</sup> Zersetzt sich.

| Schmelz-temperatur<br>°C | Spezifische Schmelz-wärme<br>$10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ | Elastizitäts-modul<br>$10^{10} \text{ Pa}$ | Torsions-modul<br>$10^{10} \text{ Pa}$ |
|--------------------------|--|--|--|
| 600                      | 3,97   | 7,3  | 2,4                                    |
| 327                      | 0,23   | 1,5 ... 1,7                                | 0,5 ... 0,8                            |
| 1535                     | 2,77   | 20 ... 22 <sup>1)</sup>                    | 7,7 ... 8,1 <sup>1)</sup>              |
| 800 ... 1400             |  | 5 ... 8                                    | 1,8 ... 3,0                            |
| 1063                     | 0,67   | 7,9  | 2,7                                    |
| 801                      | 5,19   |  |  |
| 1083                     | 2,05   | 12   | 3,8 ... 4,7                            |
| 651                      | 3,68   | 4,2  | 1,6 ... 1,9                            |
| ~910                     |  | 8 ... 10,3                                 | 2,6 ... 4,1                            |
| ~1000                    |  | 11   | 3,9 ... 4,7                            |
| 1455                     | 3,00   | 20 ... 22                                  | 7,6                                    |
| 1769,3                   | 1,11   | 17   | 6,4                                    |
| 960,8                    | 1,05   | 6 ... 8                                    | 2,4 ... 2,8                            |
| 3380                     | 1,92   | 35,5                                       | 13 ... 15                              |
| 419                      | 1,10   | 8 ... 13                                   | 3,9                                    |
| 231,9                    | 0,61   | 4,6 ... 5,4                                | 1,8                                    |

| Spezifische Wärme-kapazität bei 20 °C<br>$10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ | Schmelz-temperatur<br>°C | Spezifische Schmelz-wärme<br>$10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ | Siede-temperatur<br>°C | Spezifische Verdampfungs-wärme<br>$10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ |
|--|--------------------------|--|------------------------|---|
| 2,43   | -114,5                   | 1,08   | 78,3                   | 8,4   |
| 2,30   | -116,3                   | 0,98   | 34,6                   | 3,8   |
| 1,72   | 5,53                     | 1,27   | 80,1                   | 3,9   |
| 0,96   | -63,5                    | 0,75   | 61,3                   | 2,8   |
| 2,40   | 18                       | 2,00   | 290                    |   |
| 2,50   | -97,7                    | 0,92   | 64,6                   | 11,0  |
| 0,46   | 5 ... 6                  |  | 180 <sup>2)</sup>      |   |
| 1,47   | 5,7                      | 0,94   | 210,9                  | 4,0   |
| 0,139  | -38,87                   | 0,118  | 356,6                  | 2,85  |
| 1,00   | -111,6                   | 0,58   | 46,3                   | 3,5   |
| 0,86   | -23,0                    | 0,21   | 76,6                   | 1,9   |
| 1,69   | -95,0                    |  | 110,6                  | 3,6   |
| 4,182  | 0,00                     | 3,337  | 100,0                  | 22,56   |
| 1,70   | -47,9                    | 1,09   | 139,1                  | 3,4   |

## 3. Dichte einiger Gase bei 0 °C und 760 Torr

|              | Dichte<br>kg · m <sup>-3</sup> | Relative<br>Gasdichte |
|--------------|--------------------------------|-----------------------|
| Helium       | 0,1785                         | 0,1380                |
| Kohlendioxid | 1,9767                         | 1,5290                |
| Leuchtgas    | 0,6                            | 0,46                  |
| Luft         | 1,2928                         | 1,0000                |
| Sauerstoff   | 1,4289                         | 1,1053                |
| Stickstoff   | 1,2505                         | 0,9673                |
| Wasserstoff  | 0,0899                         | 0,0695                |

## 4. Dichte und Viskosität von Wasser

| Tempe-<br>ratur<br>°C | Dichte<br>$10^3 \text{ kg/m}^3$<br>(g · cm <sup>-3</sup> ) | Viskosität<br>$10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$<br>(cP) | Tempe-<br>ratur<br>°C | Dichte<br>$10^3 \text{ kg/m}^3$<br>(g · cm <sup>-3</sup> ) | Viskosität<br>$10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$<br>(cP) |
|-----------------------|--|---|-----------------------|--|---|
| 0                     | 0,999 84   | 1,792   | 23                    | 0,997 54   | 0,936   |
| 1                     | 0,999 90   | 1,731   | 24                    | 0,997 30   | 0,914   |
| 2                     | 0,999 94   | 1,673   | 25                    | 0,997 05   | 0,894   |
| 3                     | 0,999 96   | 1,619   | 26                    | 0,996 79   | 0,874   |
| 4                     | 0,999 97   | 1,567   | 27                    | 0,996 52   | 0,855   |
| 5                     | 0,999 96   | 1,519   | 28                    | 0,996 24   | 0,836   |
| 6                     | 0,999 94   | 1,473   | 29                    | 0,995 95   | 0,818   |
| 7                     | 0,999 90   | 1,428   | 30                    | 0,995 65   | 0,801   |
| 8                     | 0,999 85   | 1,386   | 35                    | 0,994 0  | 0,723   |
| 9                     | 0,999 78   | 1,346   | 40                    | 0,992 2  | 0,656   |
| 10                    | 0,999 70   | 1,308   | 45                    | 0,990 2  | 0,599   |
| 11                    | 0,999 61   | 1,271   | 50                    | 0,988 0  | 0,549   |
| 12                    | 0,999 50   | 1,236   | 55                    | 0,985 7  | 0,506   |
| 13                    | 0,999 38   | 1,203   | 60                    | 0,983 2  | 0,468   |
| 14                    | 0,999 24   | 1,171   | 65                    | 0,980 6  | 0,436   |
| 15                    | 0,999 10   | 1,140   | 70                    | 0,977 8  | 0,406   |
| 16                    | 0,998 94   | 1,111   | 75                    | 0,974 9  | 0,380   |
| 17                    | 0,998 78   | 1,083   | 80                    | 0,971 8  | 0,357   |
| 18                    | 0,998 60   | 1,056   | 85                    | 0,968 6  | 0,336   |
| 19                    | 0,998 41   | 1,030   | 90                    | 0,965 3  | 0,317   |
| 20                    | 0,998 21   | 1,005   | 95                    | 0,961 9  | 0,300   |
| 21                    | 0,997 99   | 0,981   | 100                   | 0,958 3  | 0,284   |
| 22                    | 0,997 77   | 0,958   |                       |  |   |

*5. Umrechnung der Barometerablesung auf 0 °C und Kapillardepression  
der Quecksilbersäule*

Infolge der Ausdehnung sowohl des Quecksilbers als auch der Barometerskale ist der bei der Temperatur  $t$  abgelesene Barometerstand  $h$  um

$$\Delta h = (\gamma - \alpha) \cdot t \cdot h$$

zu verkleinern.  $\gamma$  ist der kubische Ausdehnungskoeffizient von Quecksilber, während der lineare Ausdehnungskoeffizient des Skalenmaterials mit  $\alpha$  bezeichnet ist. Für eine Messingskale gilt mit den Werten der Tabellen 1 und 2

$$\Delta h = 0,000162 \text{ K}^{-1} \cdot t \cdot h.$$

Besteht die Skale aus Glas, ist mit

$$\Delta h = 0,000171 \text{ K}^{-1} \cdot t \cdot h$$

zu arbeiten.

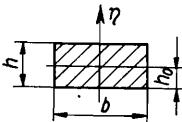
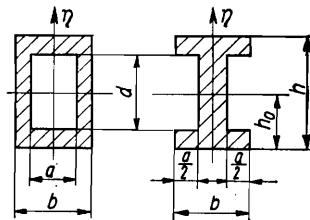
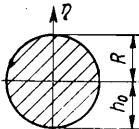
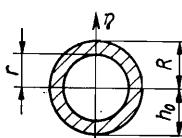
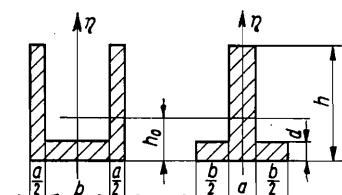
Zu dem an der Kuppe des Quecksilbermaniskus abgelesenen Barometerstand ist der zu dem Innendurchmesser des Rohres und der Höhe der Quecksilberkuppe gehörende Wert (angegeben in Torr) aus der nachstehenden Tabelle hinzuzufügen.

| Innen-<br>durch-<br>messer<br>mm | Höhe der Kuppe in mm |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------------|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|
|                                  | 0,2                  | 0,4  | 0,6  | 0,8  | 1,0  | 1,2  | 1,4  | 1,6  |
| 7                                | 0,17                 | 0,34 | 0,49 | 0,62 | 0,74 | 0,85 | 0,96 | 1,04 |
| 8                                | 0,13                 | 0,27 | 0,39 | 0,49 | 0,59 | 0,68 | 0,76 | 0,82 |
| 9                                | 0,10                 | 0,21 | 0,30 | 0,38 | 0,46 | 0,54 | 0,60 | 0,65 |
| 10                               | 0,08                 | 0,16 | 0,23 | 0,30 | 0,36 | 0,42 | 0,47 | 0,52 |
| 11                               | 0,06                 | 0,11 | 0,17 | 0,22 | 0,27 | 0,32 | 0,37 | 0,41 |
| 12                               | 0,04                 | 0,08 | 0,12 | 0,15 | 0,19 | 0,23 | 0,27 | 0,31 |
| 13                               | 0,03                 | 0,06 | 0,09 | 0,11 | 0,14 | 0,17 | 0,20 | 0,22 |

*6. Spezifische Wärmekapazität des  
Wassers bei Normaldruck in Abhängigkeit  
von der Temperatur*

| Temperatur<br>°C | Spezifische<br>Wärmekapazität<br>$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ |
|------------------|---|
| 0                | 4218  |
| 20               | 4182  |
| 40               | 4178*   |
| 60               | 4184  |
| 80               | 4196  |

## 7. Flächenträgheitsmomente für verschiedene Querschnitte

| Querschnitt   | Massenmittelpunktsabstand<br>$h_0$ | Flächenträgheitsmoment<br>$I_\eta$                            |
|---|------------------------------------|---|
|    | $\frac{1}{2} h$                    | $\frac{1}{12} b h^3$  |
|    | $\frac{1}{2} h$                    | $\frac{1}{12} (b h^3 - a d^3)$                                |
|    | $R$                                | $\frac{\pi}{4} R^4$   |
|  | $R$                                | $\frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$                                   |
|  | $\frac{ah^2 + bd^2}{2(ah + bd)}$   | $\frac{1}{3} \{(a + b) h_0^3 + a(h - h_0)^3 - b(h_0 - d)^3\}$ |

8. Siedetemperatur  $t$  des Wassers in Abhängigkeit vom Luftdruck  $p$ 

| $p$<br>Torr | $t$<br>°C | $p$<br>Torr | $t$<br>°C | $p$<br>Torr | $t$<br>°C | $p$<br>Torr | $t$<br>°C |
|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|-----------|
| 700         | 97,71     | 720         | 98,49     | 740         | 99,25     | 760         | 100,00    |
| 701         | 97,75     | 721         | 98,53     | 741         | 99,29     | 761         | 100,04    |
| 702         | 97,79     | 722         | 98,57     | 742         | 99,33     | 762         | 100,07    |
| 703         | 97,83     | 723         | 98,61     | 743         | 99,37     | 763         | 100,11    |
| 704         | 97,87     | 724         | 98,64     | 744         | 99,41     | 764         | 100,15    |
| 705         | 97,91     | 725         | 98,68     | 745         | 99,44     | 765         | 100,18    |
| 706         | 97,95     | 726         | 98,72     | 746         | 99,48     | 766         | 100,22    |
| 707         | 97,98     | 727         | 98,76     | 747         | 99,52     | 767         | 100,26    |
| 708         | 98,02     | 728         | 98,80     | 748         | 99,55     | 768         | 100,29    |
| 709         | 98,06     | 729         | 98,84     | 749         | 99,59     | 769         | 100,33    |
| 710         | 98,10     | 730         | 98,87     | 750         | 99,63     | 770         | 100,37    |
| 711         | 98,14     | 731         | 98,91     | 751         | 99,67     | 771         | 100,40    |
| 712         | 98,18     | 732         | 98,95     | 752         | 99,70     | 772         | 100,44    |
| 713         | 98,22     | 733         | 98,99     | 753         | 99,74     | 773         | 100,48    |
| 714         | 98,26     | 734         | 99,03     | 754         | 99,78     | 774         | 100,51    |
| 715         | 98,30     | 735         | 99,07     | 755         | 99,82     | 775         | 100,55    |
| 716         | 98,34     | 736         | 99,10     | 756         | 99,85     | 776         | 100,59    |
| 717         | 98,37     | 737         | 99,14     | 757         | 99,89     | 777         | 100,62    |
| 718         | 98,41     | 738         | 99,18     | 758         | 99,93     | 778         | 100,66    |
| 719         | 98,45     | 739         | 99,22     | 759         | 99,96     | 779         | 100,69    |

## 9. Spezifischer elektrischer Widerstand und Temperaturkoeffizient

|                                   | Spezifischer<br>Widerstand<br>bei 0 °C<br>$10^{-4} \Omega \text{cm}$ | Temperatur-<br>koeffizient<br>$10^{-3} \text{ K}^{-1}$ |
|-----------------------------------|--|--|
| Aluminium                         | 0,029  | 4,1  |
| Blei                              | 0,210  | 4,2  |
| Eisen                             | 0,090 ... 0,150  | 5,6 ... 6,6  |
| Konstantan (60% Cu, 40% Ni)       | 0,490  | 0  |
| Kupfer                            | 0,017  | 4,3  |
| Manganin (84% Cu, 4% Ni, 12% Mn)  | 0,42 ... 0,44  | 0  |
| Messing (62% Cu, 38% Zn)          | 0,070 ... 0,090  | 1,5  |
| Nickel                            | 0,070  | 6,7  |
| Nickelin (62% Cu, 20% Zn, 18% Ni) | 0,033  | 0,2  |
| Osmium                            | 0,100  | 4,2  |
| Platin                            | 0,105  | 3,9  |
| Quecksilber                       | 0,958  | 0,99   |
| Silber                            | 0,016  | 4,0  |
| Tantal                            | 0,150  | 3,5  |
| Wolfram                           | 0,053  | 4,6  |
| Zink                              | 0,060  | 4,1  |

10. Beweglichkeiten der Ladungsträger bei  $T = 300 \text{ K}$  in ausgewählten Stoffen

| Stoff       | $\mu_n$<br>$\text{cm}^2/\text{Vs}$ | $\mu_p$<br>$\text{cm}^2/\text{Vs}$ |
|-------------|------------------------------------|------------------------------------|
| Cu          | 32                                 | -                                  |
| C (Diamant) | 1800                               | 1200                               |
| Si          | 1600                               | 400                                |
| Ge          | 3800                               | 1800                               |
| GaP         | 190                                | 120                                |
| GaAs        | 9000                               | 435                                |
| GaSb        | 4000                               | 1420                               |
| InP         | 4500                               | 150                                |
| InAs        | 33000                              | 450                                |
| InSb        | 77000                              | 700                                |
| ZnS         | 280                                | -                                  |
| CdS         | 315                                | -                                  |
| PbS         | 600                                | 200                                |

Ladungsträgerkonzentration in Metallen:

$$n_n \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3},$$

Ladungsträgerkonzentration in Halbleitern:

$$n_{n,p} \approx 10^{15} \dots 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

## 11. Physikalische Grundkonstanten

Elementarladung

$$e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

Plancksches Wirkungsquantum

$$\hbar = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ Vs}^2$$

Boltzmann-Konstante

$$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Vs/K}$$

Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Gravitationskonstante

$$\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$$

Ruhemasse des Elektrons

$$m_e = 9,1096 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Ruhemasse des Protons

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Ruhemasse des Neutrons

$$m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Avogadro-Konstante<sup>1)</sup>

$$N_A = 6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Faraday-Konstante

$$F = 96487 \text{ As/mol}$$

Molare Gaskonstante

$$R = 8,3143 \text{ Vs/mol} \cdot \text{K}$$

Molvolumen idealer Gase unter Normbedingungen

$$V_m = 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$$

Elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Magnatische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

Temperatur des absoluten Nullpunktes

$$t_0 = -273,15^\circ\text{C}$$

<sup>1)</sup> Diese Größe wurde in der deutschsprachigen Literatur früher Loschmidtsche Konstante genannt, und die Avogadrosche Zahl bedeutete die Zahl der Moleküle je Kubikzentimeter.

## 12. Schaltzeichen

| Schaltzeichen | Benennung                                 | Schaltzeichen | Benennung  |
|---------------|---|---------------|--|
| —             | Gleichstrom                               |               | stufige Verstellbarkeit                          |
| ~             | Wechselstrom                              |               | ohmscher Widerstand allgemein                    |
| ≈             | Gleich- oder Wechselstrom Allstrom        |               | ohmscher Widerstand verstellbar                  |
| ≈≈            | Tonfrequenz-Wechselstrom                  |               | ohmscher Widerstand stufig verstellbar           |
| ≈≈≈           | Hochfrequenz-Wechselstrom                 |               | ohmscher Spannungsteiler stetig verstellbar      |
| ≈≈≈≈          | Höchstfrequenz-Wechselstrom               |               | Kondensator, kapazitiver Widerstand allgemein    |
| — — —         | Leitung allgemein                         |               | Drehko., kapazitiver Widerstand verstellbar      |
| — — — —       | Leitung geschirmt                         |               | Elektrolytkondensator, gepolt                    |
| — ○ —         | Leitung mit lösbarer Verbindung           |               | induktiver Widerstand allgemein                  |
| — + —         | Leitungskreuz ohne elektrische Verbindung |               | induktiver Widerstand verstellbar                |
| — ● —         | Leitungsabzweig                           |               | induktiver Widerstand verstellbar                |
| — — —         | Erdung                                    |               | ind. Wid. für Hoch- und Höchstfrequenz           |
| —   —         | Masse                                     |               | desgl. verstellbar                               |
| — ○ — ○ —     | Schalter                                  |               | Drosselspule mit Eisenkern                       |
| — ○ — ○ — ○ — | Umschalter                                |               | Drosselspule mit Massekern                       |
| — ↗ —         | Einstellbarkeit (mit Werkzeug)            |               | Transformator, Übertrager, Wandler allgemein     |
| — ↗ —         | Verstellbarkeit (mit Drehknopf)           |               | Transformator, Übertrager, Wandler mit Eisenkern |

## 12. Schaltzeichen (Fortsetzung)

| Schaltzeichen | Benennung  | Schaltzeichen | Benennung   |
|---------------|--|---------------|---|
|               | Transformer,<br>Übertrager, Wandler<br>allgemein     |               | lichtelektrische<br>Zelle allgemein               |
|               | Transformer,<br>Übertrager, Wandler<br>mit Eisenkern |               | elektr. Ventil<br>Kristalldiode                   |
|               | galvanische Strom-<br>quelle, Einzelzelle            |               | Transistor pnp                                    |
|               | Batterie mit<br>n-Zellen                             |               | Transistor npn                                    |
|               | Thermoelement  |               | elektronischer<br>Generator allgemein             |
|               | Strommesser  |               | Tonfrequenz-<br>generator                         |
|               | Spannungsmesser                                      |               | Gleichrichter                                     |
|               | Galvanometer   |               | Verstärker allgemein                              |
|               | Kolben für<br>a) Diode<br>b) Vielpolröhre            |               | Verstärker mit<br>Angabe des<br>Frequenzbereiches |
|               | Anode  |               | Mikrophon   |
|               | Kathode  |               | Fernhörer   |
|               | direkt geheizte<br>Kathode                           |               | Lautsprecher                                      |
|               | indirekt geheizte<br>Kathode                         |               |   |
|               | Grid, Steuergitter                                   |               |   |
|               | Schirmgitter,<br>Schutzgitter                        |               |   |
|               | Bremsgitter  |               |   |

### 13. Spektren zur Aufstellung der Dispersionskurve eines Prismas

Die Angaben in Spalte 4 geben nur die relative Intensität der Linien innerhalb eines Spektrums an. Die Intensitäten schwanken sehr stark je nach der benutzten Lampe.

Die für die Überprüfung des Auflösungsvermögens geeigneten Linienpaare sind durch \* gekennzeichnet.

| Element |                   | Bezeichnung und Wellenlänge<br>in nm | Farbe     | Intensität |
|---------|-------------------|--------------------------------------|-----------|------------|
| H       | $H_{\alpha}$ (C)  | 656,3                                | rot       | stark      |
|         | $H_{\beta}$ (F)   | 486,1                                | blaugrün  | mittel     |
|         | $H_{\gamma}$ (G') | 434,1                                | violett   | schwach    |
|         | $H_{\delta}$ (h)  | 410,2                                | violett   | schwach    |
| He      |                   | 667,8                                | rot       | stark      |
|         | $D_3$             | 587,6                                | gelb      | sehr stark |
|         |                   | *504,8                               | grün      | schwach    |
|         |                   | *501,6                               | grün      | mittel     |
|         |                   | 492,2                                | blaugrün  | mittel     |
|         |                   | 471,3                                | blau      | schwach    |
|         |                   | 447,1                                | blau      | stark      |
| Li      |                   | 610,4                                | gelbrot   | schwach    |
|         |                   | 670,8                                | rot       | stark      |
| Na      | $D_1$             | *589,6                               | gelb      | sehr stark |
|         | $D_2$             | *589,0                               | gelb      | sehr stark |
| K       |                   | *769,9                               | dunkelrot | stark      |
|         |                   | *766,5                               | dunkelrot | stark      |
|         |                   | 404,7                                | violett   | mittel     |
| Zn      |                   | 636,2                                | rot       | stark      |
|         |                   | 518,2                                | grün      | stark      |
|         |                   | 481,1                                | blaugrün  | stark      |
|         |                   | 472,2                                | blau      | stark      |
|         |                   | *468,0                               | blau      | stark      |
|         |                   | *463,0                               | blau      | mittel     |
| Cd      |                   | 643,8                                | rot       | stark      |
|         |                   | 515,5                                | grün      | mittel     |
|         |                   | 508,6                                | grün      | mittel     |
|         |                   | 480,0                                | blaugrün  | stark      |
|         |                   | *467,8                               | blau      | mittel     |
|         |                   | *466,2                               | blau      | mittel     |
| Hg      |                   | 623,4                                | rot       | schwach    |
|         |                   | *579,1                               | gelb      | sehr stark |
|         |                   | *577,0                               | gelb      | sehr stark |
|         |                   | 546,0                                | grün      | sehr stark |
|         |                   | 496,0                                | blaugrün  | schwach    |
|         |                   | 491,6                                | blaugrün  | mittel     |
|         |                   | *435,8                               | blau      | stark      |
|         |                   | *434,8                               | blau      | mittel     |
|         |                   | *433,9                               | blau      | schwach    |
|         |                   | *410,8                               | violett   | schwach    |
|         |                   | *407,8                               | violett   | mittel     |
|         |                   | *404,7                               | violett   | stark      |

## 14. Umrechnung von Energieeinheiten

|                                    | J = Ws                     | erg                        | kWh                        | kpm                        |
|------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 J = 1 Ws =                       | 1                          | 10 <sup>7</sup>            | 2,7778 · 10 <sup>-7</sup>  | 1,0197 · 10 <sup>-1</sup>  |
| 1 erg =                            | 10 <sup>-7</sup>           | 1                          | 2,7778 · 10 <sup>-14</sup> | 1,0197 · 10 <sup>-8</sup>  |
| 1 kWh =                            | 3,6 · 10 <sup>6</sup>      | 3,6 · 10 <sup>13</sup>     | 1                          | 3,6711 · 10 <sup>6</sup>   |
| 1 kpm =                            | 9,8062                     | 9,8062 · 10 <sup>7</sup>   | 2,7239 · 10 <sup>-6</sup>  | 1                          |
| 1 cal =                            | 4,1840                     | 4,1840 · 10 <sup>7</sup>   | 1,1622 · 10 <sup>-6</sup>  | 4,2666 · 10 <sup>-1</sup>  |
| 1 eV $\triangleq^1)$               | 1,6022 · 10 <sup>-19</sup> | 1,6022 · 10 <sup>-12</sup> | 4,4506 · 10 <sup>-26</sup> | 1,6339 · 10 <sup>-20</sup> |
| 1 cm <sup>-1</sup> $\triangleq^2)$ | 1,9865 · 10 <sup>-23</sup> | 1,9865 · 10 <sup>-16</sup> | 5,5179 · 10 <sup>-30</sup> | 2,0257 · 10 <sup>-24</sup> |
| 1 K $\triangleq^3)$                | 1,3807 · 10 <sup>-23</sup> | 1,3807 · 10 <sup>-16</sup> | 3,8352 · 10 <sup>-30</sup> | 1,4079 · 10 <sup>-24</sup> |

|                                    | cal                        | $\triangleq$ eV           | $\triangleq$ cm <sup>-1</sup> | $\triangleq$ K            |
|------------------------------------|----------------------------|---------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| 1 J = 1 Ws =                       | 2,3901 · 10 <sup>-1</sup>  | 6,2414 · 10 <sup>18</sup> | 5,0340 · 10 <sup>22</sup>     | 7,2429 · 10 <sup>22</sup> |
| 1 erg =                            | 2,3901 · 10 <sup>-8</sup>  | 6,2414 · 10 <sup>11</sup> | 5,0340 · 10 <sup>15</sup>     | 7,2429 · 10 <sup>15</sup> |
| 1 kWh =                            | 8,6042 · 10 <sup>5</sup>   | 2,2469 · 10 <sup>25</sup> | 1,8123 · 10 <sup>29</sup>     | 2,6074 · 10 <sup>29</sup> |
| 1 kpm =                            | 2,3438                     | 6,1204 · 10 <sup>19</sup> | 4,9365 · 10 <sup>23</sup>     | 7,1025 · 10 <sup>23</sup> |
| 1 cal =                            | 1                          | 2,6114 · 10 <sup>19</sup> | 2,1062 · 10 <sup>23</sup>     | 3,0304 · 10 <sup>23</sup> |
| 1 eV $\triangleq^1)$               | 3,8294 · 10 <sup>-20</sup> | 1                         | 8,0655 · 10 <sup>3</sup>      | 1,1605 · 10 <sup>4</sup>  |
| 1 cm <sup>-1</sup> $\triangleq^2)$ | 4,7478 · 10 <sup>-24</sup> | 1,2399 · 10 <sup>-4</sup> | 1                             | 1,4388                    |
| 1 K $\triangleq^3)$                | 3,2999 · 10 <sup>-24</sup> | 8,6173 · 10 <sup>-5</sup> | 6,9503 · 10 <sup>-1</sup>     | 1                         |

<sup>1)</sup> 1 Elektronenvolt (eV) ist diejenige Energie, die eine Elementarladung beim Durchlaufen einer Spannungsdifferenz von 1 V gewinnt.

<sup>2)</sup> Nach der Beziehung  $E = h\nu = hc\nu$  (vgl. Versuch O. 6.4) entspricht jeder Wellenzahl  $\nu$  eine Energie  $E = hc\nu$ .

<sup>3)</sup> Nach der Beziehung  $E = kT$  entspricht jeder Temperatur  $T$  eine mittlere Energie  $kT$ .

## 15. Umrechnung von Druckeinheiten

|                             | Pa = N/m <sup>2</sup>    | dyn/cm <sup>2</sup>      | mbar                     |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup>   | 1                        | 10                       | 10 <sup>-2</sup>         |
| 1 dyn/cm <sup>2</sup>       | 10 <sup>-1</sup>         | 1                        | 10 <sup>-3</sup>         |
| 1 mbar                      | 10 <sup>2</sup>          | 10 <sup>3</sup>          | 1                        |
| 1 at = 1 kp/cm <sup>2</sup> | 9,8067 · 10 <sup>4</sup> | 9,8067 · 10 <sup>5</sup> | 9,8067 · 10 <sup>2</sup> |
| 1 atm                       | 1,0133 · 10 <sup>5</sup> | 1,0133 · 10 <sup>6</sup> | 1,0133 · 10 <sup>3</sup> |
| 1 Torr                      | 133,32                   | 1333,2                   | 1,3332                   |

|                             | at = kp/cm <sup>2</sup>   | atm                       | Torr                      |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup>   | 1,0198 · 10 <sup>-5</sup> | 0,9869 · 10 <sup>-5</sup> | 7,5006 · 10 <sup>-3</sup> |
| 1 dyn/cm <sup>2</sup>       | 1,0198 · 10 <sup>-6</sup> | 0,9869 · 10 <sup>-6</sup> | 7,5006 · 10 <sup>-4</sup> |
| 1 mbar                      | 1,0198 · 10 <sup>-3</sup> | 0,9869 · 10 <sup>-3</sup> | 0,75006                   |
| 1 at = 1 kp/cm <sup>2</sup> | 1                         | 0,96784                   | 735 56                    |
| 1 atm                       | 1,0332                    | 1                         | 760,00                    |
| 1 Torr                      | 1,3595 · 10 <sup>-3</sup> | 1,3258 · 10 <sup>-3</sup> | 1                         |

# Sachverzeichnis

- Abbe-Refraktometer 374  
Abbildungsmäßstab 333  
Ablösearbeit von Elektronen 424  
Absorptionsgrad 165  
Absorptionskoeffizient 371  
Adhäsionskraft 120  
Adiabatengleichung 151, 179  
Akkumulator 246  
Aktivierungsanalyse 437  
Aktivität der Kernstrahlung 430, 438  
Aktivitätsmeßplatz 439  
Akzeptor 261  
 $\alpha$ -Strahlung 423  
Amici-Prisma 374  
Amplitudengitter 155  
Analysator 391  
Analyse, thermische 214  
Analysenwaage 43  
Anlaufstromgesetz 256  
Anpassung 245  
Anregungspotential 418  
Antiferromagnetismus 271  
aperiodischer Grenzfall beim Drehspulinstrument 279, 283  
Apertur, numerische 344  
Arbeitsgerade 259  
Arbeitspunkt einer Röhre 259  
Archimedisches Prinzip 41  
Auflösungsvermögen 344, 363, 377  
Auftrieb 41  
Auftriebsmethode 49  
Ausdehnungskoeffizient, kubischer 160, 168, 175, 444  
-, linearer 160, 444  
Ausgangsleitwert 264  
Außenwiderstand 259  
Aussteuerung 259, 263  
Ausströmungsgesetz von Bunsen 66  
Austrittsarbeit bei Elektronen 256, 424  
Autokollimation 336, 339, 365  
Avogadro-Konstante 13, 410, 450  
Avogadrosches Gesetz 48  
Balmer-Formel 420  
Bandbreite 314, 329  
Barkhausensche Röhrenformel 259  
Barkhausen-Sprung 271  
Barn 439  
Barometerablesung 447  
Basis 263  
Basisschaltung 265  
Beckesche Linie 219  
Beckmann-Thermometer 161, 194  
Beersches Gesetz 370  
Beleuchtungsstärke 393  
Bernouillische Gleichung 64, 129  
Bestrahlungsstärke 393  
 $\beta$ -Strahlung 423  
Beugung 155, 352  
Beugungsgitter 362  
Beweglichkeit von Ladungsträgern 300, 450  
Biegefeil 106  
Biegeversuch 103  
Bild, reelles 331  
-, virtuelles 331, 343  
Bildkonstruktion 332, 333, 335  
Bindungsrefraktion 369  
Blindleitwert 309  
Blindwiderstand 308  
Bohrsche Postulate 421  
Boltzmann-Konstante 174, 411, 450  
Boylesches Gesetz 175  
Brekraft 331  
Brechungsgesetz 367  
Brechungsindex 155, 368  
Bremsgitter 260  
Bremsspektrum 435  
Brennpunkt 331  
Brennweite 331  
Brewstersches Gesetz 387  
Carnotscher Kreisprozeß 181  
Celsius-Skale 159  
Clausius-Clapeyronscche Gleichung 180, 206  
Clément-Desormes, Versuch von 188  
Compton-Effekt 424, 436  
Couette-Strömung 142  
Curiesches Gesetz 272  
Curie-Temperatur 271, 318  
Daltonsches Gesetz 62  
Dampfdichte, relative 47  
-, -, nach Dumas 57  
-, -, nach Meyer 60  
Dampfdruck 63, 180  
Dampfdruckniedrigung 205  
Dampfdruckkurve 180, 191, 204, 206  
Dämpfung eines Galvanometers 279, 290  
Dämpfungsfaktor 290, 328  
Dämpfungskonstante 313  
Debye-Sears-Effekt 155  
Defektelektron 261  
Dehnung 100, 148  
Dekrement, logarithmisches 282, 329  
Detektor 425, 428  
Dewar-Gefäß 194, 253, 255  
Diamagnetismus 270  
Dichte 46, 444, 446  
Dielektrizitätskonstante 309  
-, Bestimmung der 319, 322

- Differentialthermoanalyse 216  
 Differenzmanometer 143  
 Diffusionsnebelkammer 431  
 Diode 256, 261  
 Dioptrie 331  
 Direktionsmoment 68, 86, 111  
 Dispersion 368  
 -, mittlere 369  
 Dissoziationsgrad 209  
 Donator 261  
 Doppelbrechung 387  
 Doppelspalt 352  
 Dotierung 260  
 Drehspulgalvanometer 274  
 Drehtisch 70, 86  
 Dreiweghahn 66, 189  
 Druck 47  
 -, kritischer 178  
 -, osmotischer 205  
 Druckeinheit 47, 454  
 Durchbruchsspannung 262  
 Durchgangsprüfer 230  
 Durchgriff 258  
 Durchlaßrichtung 256
- Effusiometer**  
 nach Bunsen 64  
 Eigeninduktivität 315  
 Einfallslot 367  
 Einfallswinkel 362  
 Eingangswiderstand 264  
 Einschalen-Analysenwaage 44  
 Einsteinsche Gleichung 396  
 Eisen-Wasserstoff-Widerstand 231  
 Elastizitätsmodul 99, 102, 445  
 Elektromagnet 288  
 Elektrometer 243, 426  
 elektromotorische Kraft 244  
 Elektronenleitung 261, 300  
 Elektronenmasse 411, 450  
 Elektronenröhre 256  
 Elektronenstrahl-ferroskop 293  
 Elektronenstrahloszilloskop 293
- elektronische Bauelemente 256  
 Element, galvanisches 246  
 Elementarladung 410, 450  
 Emission, induzierte 351  
 -, spontane 351  
 Emissionsgrad 173  
 Emitter 263  
 Emitterschaltung 265  
 Empfindlichkeit einer Waage 39, 45  
 -, eines ballistischen Galvanometers 287  
 -, eines Galvanometers 276  
 -, eines Kriechgalvanometers 291  
 -, eines Oszilloskops 294  
 Enantiomorphie 389  
 Energie, innere 178  
 Energieeinheiten 193, 454  
 Energiesatz 178  
 Entmagnetisierung 292  
 Erwartungswert 20  
 Eulersche Formel 281  
 eutektischer Punkt 210  
 Extinktion 369, 384  
 Extinktionskoeffizient 370
- Fadenkorrektur 161  
 Fadenpendel 69, 74  
 Fadenstrahl 416  
 Faraday-Effekt 389  
 Faraday-Konstante 410, 450  
 Farbpyrometer 166  
 Federkonstante 113  
 Fehler bei Zählrohrmessungen 433  
 Feld, magnetisches, Kraftwirkung 273  
 Feldkonstante, elektrische 309, 450  
 -, magnetische 270, 450  
 Feldstärke, magnetische 269, 288  
 -, -, in einer Spule 273  
 Fernrohr, astronomisches 346  
 -, Galileisches 346  
 -, Keplersches 346  
 Ferrimagnetismus 271  
 Ferrit 271  
 Ferromagnetismus 270
- Ferroskop 293  
 Flächenträgheitsmoment 105, 448  
 Fluß, magnetischer 270  
 Flußdichte, magnetische 270  
 Flüssigkeitsthermometer 161  
 Flüssigkeitsthermostat 166  
 Fluxmeter (Flußmesser) 290  
 Franck-Hertz-Versuch 411, 418  
 Freiheitsgrad 204  
 Frequenz 151  
 Frequenzmessung 97  
 Fresnelsche Formeln 387
- Galvanometer 274  
 -, ballistisches 285  
 Galvanometerablesung 275  
 Galvanometerinnenwiderstand 233, 274  
 Galvanometerkonstante 275  
 γ-Strahlung 423  
 Gas, ideales 176  
 -, reales 176  
 Gasdichte, relative 47, 446  
 -, -, nach Bunsen 64  
 Gaskonstante, molare 176, 179, 450  
 Gasthermometer 163, 169  
 Gasverstärkung 427  
 Gaußsches Okular 337  
 Gay-Lussacsches Gesetz 175  
 Gefrierpunktserniedrigung 208, 213  
 Geiger-Müller-Zählrohr 428, 432, 439  
 Geiger-Schwelle 427, 432  
 Geschwindigkeitsgefälle 130, 141  
 Gesichtsfeld 348  
 Gibbsche Phasenregel 204  
 Gitterkonstante 155, 362  
 Glan-Thomson-Prisma 388  
 Glühfadenpyrometer 166, 173  
 Gradwert 162

- Grenzfrequenz 396  
 Grenzwellenlänge 396  
 Grenzwinkel 368  
 Gütefaktor 329  
 Gütekasse 16, 230  
 Gyroskop 96
- H**agenbachsche Korrektur 138  
 Hagen und Poiseuille, Gesetz von 131  
 Halbleiter 226, 260  
 -, Temperaturverhalten 226  
 Halbleiterdetektor 428  
 Halbleiterdiode 260  
 Halbleiterthermometer 163  
 Halbwertsbreite 314, 329  
 Halbwertsdicke 434, 436  
 Halbwertszeit 430  
 Hall-Effekt 298  
 Hall-Konstante 300  
 Hall-Sonde 301  
 Hall-Spannung 300  
 Hauptebene 335  
 Hauptquantenzahl 421  
 Hauptträgeitsebene 90  
 Hauptträgheitsmoment 90, 94  
 Helmholtz-Spule 416  
 Hochohmwiderstand 241  
 Höckerspannung 262  
 Höckerstrom 262  
 Hookesches Gesetz 99, 148  
 Höppler-Viskosimeter 135  
 h-Parameter 264  
 Huth-Kühn-Schaltung 323  
 Huygensches Prinzip 352  
 Hybriddarstellung 263  
 Hysterese, magnetische 271, 292, 296
- I**mpedanz 307, 315  
 Impulsdichte, zeitliche 432  
 Impulsrate 439  
 Impulsvorwahl 439  
 Impulszähler 439  
 Indikatrix 393  
 Induktion, magnetische 270
- Induktionskonstante 270  
 Induktivität 305, 315  
 Induktivitätsmeßgerät 316  
 Innenwiderstand, bei Elektronenröhren 258  
 -, einer Stromquelle 245  
 -, eines Galvanometers 237, 274  
 Integrator 297  
 Intensitätspyrometer 166  
 Interferenz 350  
 Interferometer 379  
 intermetallische Verbindung 240  
 Ionisation 424  
 Ionisationskammer 425, 434  
 IPT-Skale 160  
 Isotherme 177, 186  
 Isotopenzusammensetzung 433, 438
- Kalorimeter 193  
 Kalorimetrie 193  
 Kapazität 305, 317, 319  
 - eines galvanischen Elements 247  
 Kapazitätsmessung 318, 322  
 Kapillardepression 447  
 Kapillare, Radiusbestimmung 126  
 Kapillarviskosimeter 137  
 Kathodenstrahlzosilloskop 293  
 Kathodentemperatur 256  
 K-Einfang 424  
 Kelvin-Skale 159  
 Kennlinie einer Halbleiterdiode 262, 267  
 - einer Hochvakuumdiode 257, 265  
 - von bipolaren Bauelementen 231  
 - von Stromquellen 247  
 - von Triode, Tetrode, Pentode 258, 266  
 - von Widerständen 230  
 Klemmenspannung 244  
 Koerzitivfeldstärke 271, 293  
 Kohärenzbedingung 351  
 Kohärenzlänge 351  
 Kohärenzzeit 351
- Kohäsionsdruck 176  
 Kohäsionskraft 120  
 Koinzidenzzeit 80  
 Kollektor 263  
 Kollektorschaltung 265  
 Kombinationsthermostat 188  
 Kompensationsmethode nach Poggendorff 251  
 Kompensator 252  
 Komponente 203  
 Kompressibilität 101  
 Kompressionsmodul 101, 149  
 Kondensationswärme 202  
 Kondensator 308  
 Kondensatorentladung 241  
 Kontaktpotential 257  
 Kontaktthermometer 166  
 Kopplungsgrad 85  
 Kovolumen, van-der-Waalssches 177  
 Kreisfrequenz 151  
 Kriechfall (Drehspulinstrument) 281, 283, 290  
 Kriechgalvanometer 290  
 Krümmung einer Kurve 105  
 Kugelwelle 147  
 Kundtsches Rohr 152  
 Kurzschlußstrom 245  
 Küvette 125
- Ladung, spezifische 414  
 Ladungsträgerbeweglichkeit 300, 450  
 Ladungsträgerkonzentration 300  
 Lambert'sches Gesetz 393  
 Laser 351  
 Legierung 209, 214, 240  
 Leistungsanpassung 245  
 Leitfähigkeit von Halbleitern 300  
 Leitwert 222, 308  
 Leuchtdichte 393  
 Lichtblitzstroboskop 97  
 lichtelektrischer Effekt 396, 424, 436  
 Lichtgeschwindigkeit 367, 450  
 Lichtstärke 393  
 Lichtstrom 393

- Lichtzeigereinrichtung  
   (Galvanometer) 276  
 Linse 331  
 Linsengleichung 333  
 Liquiduskurve 210  
 Lissajous-Figur 97, 325  
 Löcherleitung 261  
 Lorentz-Kraft 273, 299,  
   414, 431  
 Loschmidt'sche Konstante  
   13, 450  
 Lösung 204  
 Lumineszenz 425  
 Lupe 342
- Magnetisierung 269, 293,  
   316  
   -, remanente 271  
 Magnetismus 270  
 Magnetometer 301  
 Magnetwerkstoff 271, 273  
 Massenmittelpunkt 68  
 Massenveränderung, relati-  
   vistische 431  
 Meßbereicherweiterung  
   229  
 Meßwertwandler 227  
 Metallwiderstandsthermo-  
   meter 163  
 Mikroskop 344  
 Mikrothermoanalyse 217  
 Mischkristall 209, 240  
 Mohr-Westphalsche  
   Waage 51  
 Molekülmasse, relative 48  
   -, -, Bestimmung der 57,  
   60, 183, 211, 213  
 Molrefraktion 369
- Nebelkammer 425, 429  
 Neukurve, magnetische  
   270  
 neutrale Faser 104  
 Neutronenaktivierung 437  
 Neutroneneinfang 437  
 Neutronenfluß 438  
 Neutronenquelle 438  
 Newtonsches Abküh-  
   lungsgesetz 214  
 Newtonsche Ringe 356  
 Nicolsches Prisma 388  
 n-Leitung 261, 300  
 Normalelement 246, 252  
 Normalwiderstand 227
- NTC-Widerstand 164, 226  
 Nulleffekt 432
- Oberflächenspannung 121,  
   444  
   -, Abreißmethode 122  
   -, Steighöhenmethode 123  
 Objektiv 344  
 Ohmmeter 230  
 Okular 344
- Paarbildung 424, 436  
 Parallelschaltung von  
   Kondensatoren 308  
   -- Spulen 308  
   -- Widerständen 224  
 Parallelschwingkreis 315,  
   328  
 Paramagnetismus 270  
 Pendel, gekoppelte 82  
   -, mathematisches 69  
   -, physikalisches 67  
 Pentode 260, 266  
 Permeabilität, relative  
   270  
 Phase 147  
   -, thermodynamische 203  
 Phasenbeziehung zwischen  
   Strom und Spannung  
   324  
 Phasengeschwindigkeit  
   150  
 Phasengitter 155  
 Phasensprung 86, 357  
 Phasenumwandlung 182  
 Phasenverschiebung 327,  
   350  
 Phasenwinkel 307, 325  
 Photoeffekt 424, 436  
 Photokathode 428  
 Photometerwürfel 409  
 Photowiderstand 397  
 Photozelle 400, 427  
 Plancksches Strahlungs-  
   gesetz 394  
 Plattenkondensator 309  
 p-Leitung 261, 300  
 pn-Ubergang 261, 428  
 Poissonsche Zahl 100, 116  
 Polarisation 386  
 Polarisationsapparat 391  
 Polarisationswinkel 387  
 Polarisator 391  
 Polarisierbarkeit 368
- Potentiometerschaltung  
   228, 251  
 Prandtl'sches Staurohr 143  
 Prinzip der virtuellen  
   Arbeit 124  
 Protonenmasse 411, 450  
 Pyknometer 54  
 Pyrometer 173, 406
- Quantenausbeute 396  
 Querverkürzung 100
- Radioaktivität 430  
 Radiometrie 423  
 radiometrische Gehalts-  
   bestimmung 432  
 Raumladungsgesetz 257  
 Rayleigh-Konstante 272,  
   318  
 Rayleigh-Schleife 272  
 Reduktion eines Aus-  
   schlages auf den Bogen  
   276  
 reduzierte Pendellänge 73  
 Reflexionsgitter 362  
 Reflexionsgrad 165  
 Reflexionskoeffizient 386  
 Refraktionsdiagramm 219  
 Refraktometer 372  
 Reibungskraft nach Stokes  
   133  
 Reihenschaltung von Kon-  
   densatoren 308  
   -- Spulen 308  
   -- Widerständen 223  
 Reihenschwingkreis 310,  
   328  
 Rekombination 261  
 Remanenzinduktion 271  
 Resonanz im elektrischen  
   Kreis 312, 315  
 Resonanzfrequenz 312,  
   316  
 Resonanzüberhöhung 312,  
   315  
 Reversionspendel 76  
 Reynoldssche Zahl 132,  
   134, 145  
 Richtstrahldiagramm 393  
 Röhrenvoltmeter 248, 303  
 Rohrradiusbestimmung  
   126  
 Röntgenanlage 435  
 Röntgenröhre 434

- Röntgenstrahlung 424,  
  435
- Rotationsviskosimeter  
  140
- Rydberg-Konstante 420,  
  422
- Sammellinse 331
- Sättigungsstrom 256
- Schallgeschwindigkeit  
  151, 155  
  – in Luft 152
- Schallwelle 147
- Scheinwiderstand 307
- Schirmgitter 260
- Schleusenspannung 261
- Schmelzkurve 204
- Schmelzpunktendiagramm  
  209  
  – von Pb-Sn-Legierungen  
  210
- Schmelztemperatur 445
- Schmelzwärme 201  
  –, spezifische 445  
  –, –, des Wassers 201
- Schraubenfeder 113
- Schubmodul 100
- Schubspannung 100
- Schwächungsgesetz 436
- Schwächungskoeffizient  
  436
- schwarzer Körper 165, 394
- Schwebemethode 53
- Schwebungsdauer 86
- Schwebungsschwingung  
  84
- Schwellspannung 261
- Schwerebeschleunigung  
  74, 76
- Schwingfall (Drehspul-  
instrument) 283
- Schwingkreis, elektrischer  
  310
- Schwingkreismethode  
  322
- Schwingung, erzwungene  
  elektrische 310  
  –, freie elektrische 310  
  –, gedämpfte 279  
  –, gegensinnige 84  
  –, gleichsinnige 84  
  –, komplexe Darstellung  
  281
- Schwingungsdauer 71,  
  151, 284
- Schwingungsgleichung  
  311
- Seebeck-Effekt 164, 253
- Sehwinkel 343
- Sekundärelektronen-  
vervielfacher 407, 429
- Siedepunktserhöhung  
  207, 211
- Siedetemperatur 445, 449
- Soliduskurve 210
- Spannungs-Dehnungs-  
Diagramm 102
- Spannungskoeffizient 169,  
  175
- Spannungsmessung 228  
  – durch Kompensation  
  251
- Spannungsresonanz 328
- Spannungsrückwirkung  
  264
- Spannungsteilerschaltung  
  228, 251
- Spektralphotometer 383
- Spektrometer 364
- Sperrichtung 256
- Sperrschiicht 261
- Sperrschiicht-Photoeffekt  
  397
- Sperrspannung 262
- Standardabweichung 20
- Staudruck 129
- Stefan-Boltzmannsches  
Gesetz 174, 394
- Steilheit 258
- Steinerscher Satz 72
- Stereoisomere 388
- Stirnfensterzährohr 440
- Stokessche Kugelfall-  
methode 133
- Stöpselrheostat 252
- Störstellenleitung 260, 300
- Stoßgalvanometer 285
- Stoßionisation 427
- Strahl 147  
  –, außerordentlicher 387  
  –, ordentlicher 387
- Strahldichte 393
- Strahlenschutz 423, 437
- Strahlstärke 393
- Strahlungsdetektor 425
- Strahlungsempfänger 395
- Strahlungspyrometer 165,  
  173
- Streubreite 20
- Stroboskop 97
- Strommesser 228
- Strommesser, Meßbereicherweiterung 229
- Stromresonanz 328
- Strömung, laminare 130,  
  145  
  –, turbulente 132, 145
- Stromverstärkung 264
- Strukturviskosität 143
- Sublimationsdruck 207
- Sublimationskurve 204,  
  207
- Sublimationswärme,  
  molare 181, 207
- Suszeptibilität,  
  magnetische 270
- Szintillationszähler 425,  
  428
- Temperatur 12, 47, 159  
  –, kritische 178
- Temperaturkoeffizient bei  
ohmschen Wider-  
ständen 225, 238, 240  
–, bei Halbleiterwider-  
ständen 226
- Temperaturmessung 159,  
  254
- Temperaturskale 159
- Termschema 422
- Thermistor 233
- Thermoelektrizität 164
- Thermoelement 164,  
  253
- Thermometerfüllflüssig-  
keit 161
- Thermophor 199
- Thermospannung 164,  
  253
- Thermostat 166
- Thomson-Brücke 238
- Thomsonsche Schwin-  
gungsformel 312, 316
- Torsionsmodul 100, 108,  
  115, 445
- Torsionspendel 70
- Totalreflexion 368
- Trägheitsellipsoid 89
- Trägheitsmoment 68, 86
- Trägheitsprodukt 89
- Transistor 263, 268
- Transistorgrundschal-  
tungen 264
- Transistorvoltmeter 248,  
  303
- Trigger 295

- 
- Tripelpunkt 204, 208  
 Trockenbatterie 246  
 Tunneldiode 262  
  
 Ubbelohde-Viskosimeter 137  
 Überstruktur 240  
 Ultraschallwelle 155  
 Umwandlungswärme 201  
 Universalmeßeinrichtung 115  
 Urspannung 244  
 -, eines Thermoelements 254  
  
 Vakuumthermoelement 403  
 van't-Hoffsches Gesetz 206  
 Varistor 231  
 Verdampfungswärme, molare 180, 191, 207  
 -, spezifische 445  
 -, -, des Wassers 202  
 Verdet-Konstante 389, 392  
 Vergrößerung 343  
 Verlustfaktor 308  
 Verlustwinkel 308  
 Verstärkung 259  
 Verstärkfaktor 258  
 Vielfachmeßinstrument, elektrisches 230  
 -, elektronisches 250  
 Viskosität, dynamische 130, 444  
 -, -, des Wassers 446  
 -, kinematische 130  
 Volumen, kritisches 178  
 Volumenbestimmung 46  
  
 Wägung 38  
 -, absolute 45  
 Wärmekapazität 178, 195  
 -, eines Kalorimeters 194  
 -, molare 179, 182  
 -, spezifische 151, 178, 193  
 -, -, fester Stoffe 197, 444  
 -, -, von Flüssigkeiten 199, 445  
 Wärmemenge 193  
 Wechselstrombrücke 115, 316  
 Wechselstromwiderstand 304  
 -, komplexe Darstellung 304  
 Wegaufnehmer, induktiver 115  
 Weißscher Bezirk 271  
 Welle, ebene 147  
 -, harmonische 150, 349  
 -, longitudinal 150  
 -, stehende 152  
 -, transversale 150  
 Wellenfläche 147  
 Wellengleichung, lineare 147  
 Wellengruppe 351  
 Wellenlänge 151  
 Wellenzahl 422  
 Weston-Normalelement 246, 252  
 Wheatstone-Brücke 172, 233, 317  
 Widerstand, Ausführungsformen 226  
 -, differentieller 231, 232, 258, 262  
 -, induktiver 304  
 -, innerer 233, 245, 258, 274  
 -, kapazitiver 304  
 -, komplexe Darstellung 304  
  
 Widerstand, ohmscher 222  
 Widerstandsbestimmung 227, 233, 238, 241  
 Widerstandsthermometer 172  
 Wilsonsche Nebelkammer 429  
 Wirkungsgrad, Gleichstrom 246  
 -, Kreisprozeß 182  
 -, optischer 407  
 Wirkungsquantum, Plancksches 394, 400, 411, 450  
  
 Zählrate 432  
 Zählrohr 425  
 Zählrohrmessungen 432, 439  
 Zeigerdiagramm 307  
 Zeitkonstante 242  
 Zeitvorwahl 439  
 Zenerdiode 262  
 Zenerspannung 262  
 Zentralwert 20  
 Zerfallsgesetz 430  
 Zerreißmaschine 101  
 Zerstreuungslinse 331  
 Zugspannung 100, 147  
 Zustandsänderung, adiabatische 179, 189  
 -, isobare 175  
 -, isochore 175  
 -, isotherme 175  
 Zustandsdiagramm von Wasser 204  
 Zustandsgleichung 175  
 -, idaeler Gase 48, 169, 176  
 -, van-der-Waalssche 177  
 Zustandsgröße 174  
 Zweischalenwaage 38, 45