

# KOMPENDIUM DER MATHEMATIK

Bittner · Ilse · Kubicek · Tietz



## VORBEMERKUNGEN

Das nebenstehende Inhaltsverzeichnis gibt einen Überblick über die Kapitel dieses Buches und orientiert auf die farbigen Marken des Randregisters.

Zu Beginn eines jeden Kapitels gibt eine farbige Strukturübersicht über den Aufbau des jeweiligen Stoffgebietes Auskunft.

Jedes Kapitel ist durch Zwischenüberschriften in Abschnitte untergliedert, die am Kopf jeder Seite zur Orientierung mitgeführt werden. Durch eine Stichwortleiste wurde der Text weiter aufgeschlossen.

Definitionen und Sätze werden durch das Zeichen ►, Beispiele durch das Zeichen ■ gekennzeichnet. Auf mehrmaliges Auftreten einzelner Begriffe, Beweise, Sätze usw. wird mit Hilfe des Zeichens ↗ zuzüglich der betreffenden Seitenzahl aufmerksam gemacht.

Auf diese Weise wurde eine enge Verflechtung aller Kapitel erreicht und ein zusammenhängendes Erarbeiten ermöglicht.

**GRUNDBEGRIFFE DER MENGENLEHRE**

**A**

**ZAHLENBEREICHE**

**B**

**FUNKTIONEN**

**C**

**GEOMETRIE**

**D**

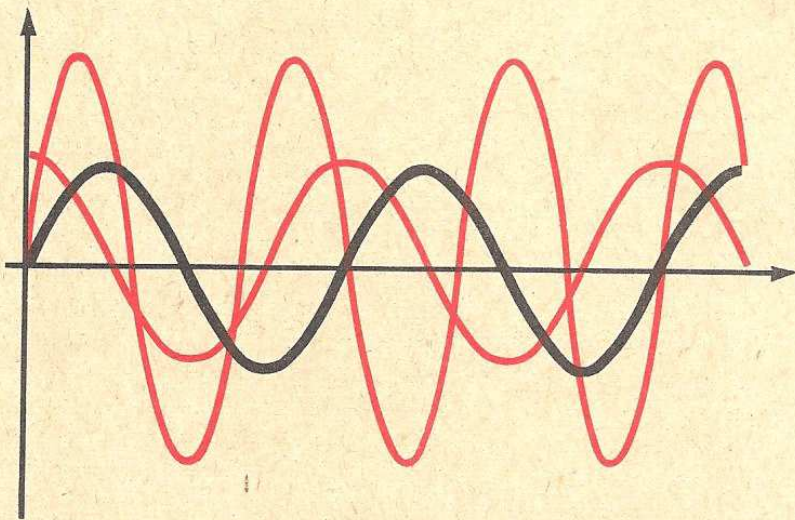
**REGISTER**

**R**

# KOMPENDIUM DER MATHEMATIK

Dr. Rudolf Bittner  
Dr. Dieter Ilse  
Siegmar Kubicek  
Werner Tietz

Eine systematische Darstellung  
des Bildungsinhalts der zehnklassigen  
polytechnischen Oberschulen



**Autoren:**

**Dr. Rudolf Bittner, Dr. Dieter Ilse, Siegmur Kubicek,  
Dipl. Math. Werner Tietz**

**Dieses Buch wurde unter Nr. 46 in die mathematische Schüler-  
bücherei aufgenommen. Es eignet sich für Schüler vom 12. Lebens-  
jahr an.**

**5. Auflage**

**Copyright 1970 by Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin**

**Lizenz-Nr. 1000/71 (UN)**

**ES 9 F**

**Redaktion: Karlheinz Martin**

**Einband und typografische Gestaltung:**

**Manfred Behrendt**

**Zeichnungen: Heinz Grothmann**

**Satz: VEB Druckerei „Thomas Münzer“ Bad Langensalza**

**Druck und Binden:**

**Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden III/9/1**

**Gesetzt aus der Gill Grotesk**

**Redaktionsschluß: 3. Juni 1971**

**Bestell-Nr. 00 18 07 — 5**

## Vorwort

Dieses *Kompendium der Mathematik* soll als ein weiterer Beitrag zur umfassenden Verwirklichung des Mathematikbeschlusses verstanden werden, in dem auch der Aufbau einer „Mathematischen Schülerbibliothek“ vorgesehen wurde.

Als Bestandteil der inzwischen beträchtlich angewachsenen „Mathematischen Schülerbibliothek“ wendet sich das *Kompendium* in erster Linie an alle jene Schüler in den Klassen 7 bis 10 unserer polytechnischen Oberschulen, die die im Unterricht gewonnenen Kenntnisse und Erkenntnisse, zum Teil ergänzt, in fachwissenschaftlicher Systematik zusammenhängend dargestellt besitzen möchten. Durch die fachsystematische Darstellung der Anfangsgründe der Mathematik wird das *Kompendium* nicht nur gute Dienste bei der Wiederholung, Festigung, Auffrischung des im Unterricht gewonnenen Wissens und Könnens leisten. Es wird darüber hinaus viele Schüler anregen, sich in außerunterrichtlicher Beschäftigung noch umfassenderes und tieferes Wissen und Können in der Mathematik anzueignen.

Mit dem *Kompendium der Mathematik* wird zugleich der ständig größer werdenden Zahl der Werktätigen unserer Republik, die sich in den vielfältigen Formen der Erwachsenenqualifizierung eine umfangreichere mathematische Bildung erwerben wollen, ein moderner Leitfaden in die Hand gegeben. Das gilt in besonderem Maße für jene Bürger unserer Republik, die noch nicht das Glück hatten, die im Prozeß der sozialistischen Schulreform geschaffene zehnklassige polytechnische Oberschule zu absolvieren und an dem im Ergebnis des Mathematikbeschlusses im Jahre 1962 modernisierten Mathematikunterricht teilzuhaben. Das *Kompendium* soll gerade jenen Werktätigen helfen, das heute für viele Berufe notwendige mathematische Wissen zu erlangen, über das ein Absolvent unserer zehnklassigen Oberschulen verfügt.

Um dem Leser das Erkennen des logischen Gefüges von Definitionen und Sätzen zu erleichtern, wurden an vielen Stellen Beweise explizit vorgeführt. Allerdings konnte dies nicht systematisch und mit aller Ausführlichkeit geschehen. Der Leser findet Stellen, die sehr genau ausgeführt sind, daneben aber andere, an denen stärker auf die Anschauung Bezug genommen wird. Die Anschauung wurde überall dort mehr in den Vordergrund gerückt, wo die Notwendigkeit einer Definition nicht ohne tieferes Eindringen in den Stoff erkannt werden kann.

Bei der Darstellung des mathematischen Inhalts wurde größtmögliche Übersichtlichkeit angestrebt. Verweise machen auf bestehende Zusammenhänge aufmerksam. Durch

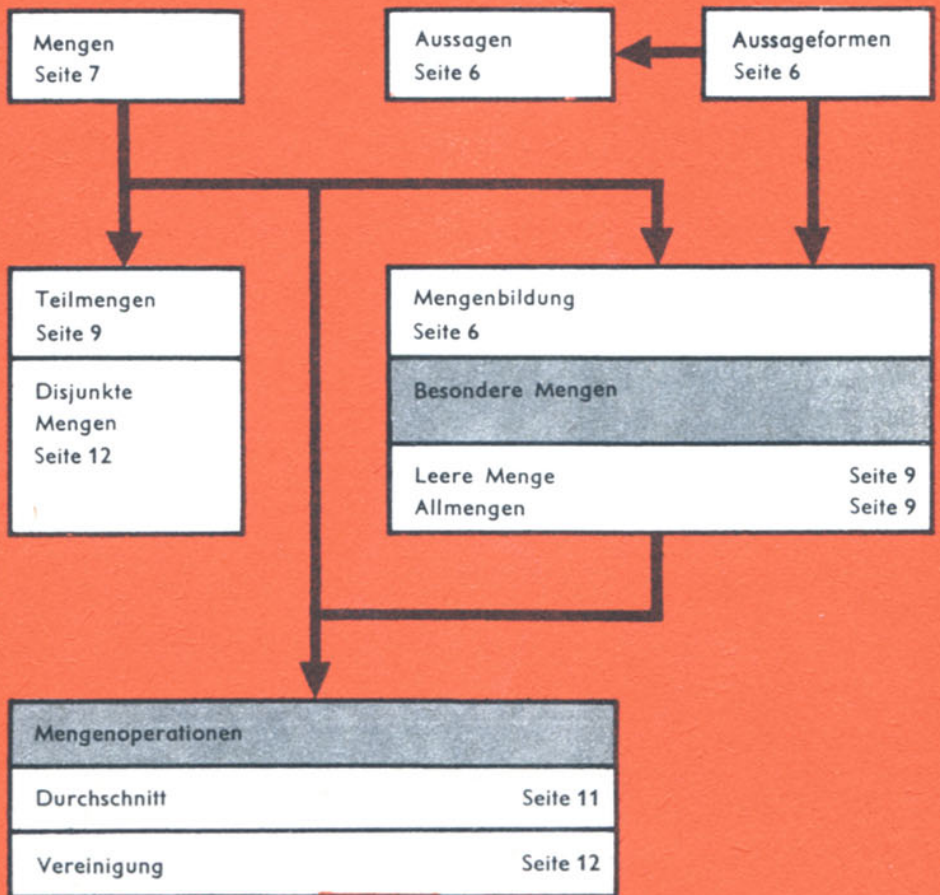
die Art der Aufbereitung des Inhalts und die graphische Gestaltung wird mit dem *Kompendium der Mathematik* ein weiterer Wissensspeicher für Zwecke der mathematischen Allgemeinbildung vorgelegt.

Möge dieser Wissensspeicher sich als eine wirkungsvolle Hilfe bei der Verbreitung einer modernen mathematischen Allgemeinbildung erweisen.

*Die Autoren*



# Grundbegriffe der Mengenlehre







# 1. MENGENBILDUNG

## Aussagen, Aussageformen

Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

Aussagen	wahr oder falsch
a) Die Stadt Dresden liegt an der Elbe	wahr
b) Das chemische Element Schwefel ist ein Metall	falsch
c) Die natürliche Zahl 7 ist eine Primzahl	wahr
d) $5 = 6$	falsch

Von Aussageformen kann man nicht sagen, ob sie wahr oder falsch sind.

Aussageformen
a) Die Stadt $S$ liegt an der Elbe
b) Das chemische Element $E$ ist ein Metall
c) Die natürliche Zahl $n$ ist eine Primzahl
d) $x = 6$

Aussageformen werden durch bestimmte Einsetzungen für die Variablen zu wahren oder falschen Aussagen.

Aussageformen	Aussagen	wahr oder falsch
a) Die Stadt $S$ liegt an der Elbe	Die Stadt <b>Wittenberg</b> liegt an der Elbe	wahr
	Die Stadt <b>Berlin</b> liegt an der Elbe	falsch
b) Die natürliche Zahl $n$ ist eine Primzahl	Die natürliche Zahl <b>20</b> ist eine Primzahl	falsch
	Die natürliche Zahl <b>31</b> ist eine Primzahl	wahr
c) $x = 6$	<b>6</b> = 6	wahr
	<b>41</b> = 6	falsch

# 1. MENGENBILDUNG



## Bilden von Mengen

Mengen werden gebildet, indem man aus einem zugrunde gelegten Bereich von Dingen, dem **Grundbereich**, nach bestimmten Gesichtspunkten Dinge auswählt und zu einer Gesamtheit zusammenfaßt.

Grundbereich	ausgewählte Dinge
a) alle Schüler einer bestimmten Schule	Mitglieder des Chors dieser Schule
b) alle Geraden einer Ebene	alle Geraden dieser Ebene, die eine vorgegebene Richtung haben
c) alle natürlichen Zahlen	alle natürlichen Zahlen, die durch 3 teilbar sind und zwischen 10 und 30 liegen

## Der Begriff „Menge“

Eine Gesamtheit von aus dem Grundbereich ausgewählten Dingen nennt man **Menge**.

Als Variable für Mengen benutzen wir große lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes, z.B.:

$M; N; A; B;$

$M_0; M_1; M_2.$

## Elemente

Die Dinge, die dieser Gesamtheit angehören, nennt man **Elemente** der betreffenden Menge.

Als Variable für Elemente benutzen wir kleine lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes, z.B.:

$x; y; a; b;$

$x_0; x_1; x_2.$

## Angabe von Mengen

Durch Angabe aller Elemente

$M = \{12; 15; 18; 21; 24; 27\}$

Um mitzuteilen, daß z. B.  $a$  Element der Menge  $M$  ist oder z. B.  $y$  nicht Element der Menge  $N$  ist, schreibt man:

$a \in M$  gelesen:

„ $a$  ist Element von  $M$ “ oder „ $a$  Element  $M$ “

$y \notin N$  gelesen:

„ $y$  ist nicht Element von  $N$ “ oder „ $y$  nicht Element  $N$ “

Durch Angabe des Grundbereichs und einer Aussageform

Enthält eine Menge sehr viele oder unendlich viele Elemente, die nicht einzeln aufgeführt werden können, so gibt man den Grundbereich und eine Aussageform an, mit deren Hilfe man die betreffende Menge bilden kann.



Grundbereich	Aussageform	Angabe der Menge
a) Menge der natürlichen Zahlen	$x < 70000$	$x \in M$ genau dann, wenn $x < 70000$
b) Menge der natürlichen Zahlen	$10 < x < 300$ und $x \mid 3$	$x \in M$ genau dann, wenn $10 < x < 300$ und $x \mid 3$
c) Menge der ganzen Zahlen	$x < 70000$	$x \in M$ genau dann, wenn $x < 70000$

**Bemerkung:** Zur Festlegung beispielsweise der Menge unter a) in der Tabelle genügt es nicht zu sagen:

(1) Wenn eine natürliche Zahl kleiner als 7 ist, so ist sie Element der zu bildenden Menge.

Dadurch wird nämlich nicht ausgeschlossen, daß, eventuell noch andere natürliche Zahlen zur Menge gehören können. Betrachten wir beispielsweise die Menge

$$M^* = \{0; 1; 2; 38; 19; 4; 3; 100; 5; 6\},$$

so ist die Forderung, daß jede natürliche Zahl, die kleiner als 7 ist, Element der Menge sein soll, auch für  $M^*$  erfüllt. Um wirklich *nur* die Zahlen, die kleiner als 7 sind, als Elemente der Menge zu erhalten, müssen wir noch zusätzlich sagen:

(2) Wenn eine natürliche Zahl Element der zu bildenden Menge ist, so ist sie kleiner als 7.

Mit (1) und (2) ist die im Beispiel angeführte Menge  $M$  genau festgelegt. Es ist üblich, (1) und (2) zu folgender Sprechweise zusammenzufassen:

(3) Eine natürliche Zahl ist Element der Menge  $M$  **genau dann, wenn** sie kleiner als 7 ist.

Kürzer:  $x \in M$  genau dann, wenn  $x < 7$ .

Durch die Sprechweise „genau dann, wenn“ wird zum Ausdruck gebracht, daß *alle* die Dinge aus dem Grundbereich Elemente der jeweils zu bildenden Menge sind, die die Aussageform zu einer wahren Aussage machen, aber auch *nur diese*.

Man sagt auch: „Zur Menge  $M$  gehören *genau die* Dinge, die die Aussageform zu einer wahren Aussage machen.“

## 1. MENGENBILDUNG

### Beispiele für die Mengenbildung

- Einermengen enthalten nur ein einziges Element.  
 Grundbereich: Menge der natürlichen Zahlen  
 $x \in A$  genau dann, wenn  $x + x = x$   
 Die Menge  $A$  besitzt als einziges Element die Null,  $A = \{0\}$ ;  
 denn  $0 + 0 = 0$ . Für jede andere natürliche Zahl  $x$  gilt:  
 $x + x = 2x \neq x$ .
- Grundbereich: Menge der natürlichen Zahlen  
 $x \in B$  genau dann, wenn  $x \cdot x = x$   
 $B = \{0; 1\}$ .  $B$  ist eine Zweiermenge.
- Grundbereich: Menge der natürlichen Zahlen  
 $x \in C$  genau dann, wenn  $x \neq 7$   
 $C$  ist die Menge der natürlichen Zahlen außer der Zahl 7.

### Spezielle Mengen Leere Menge

- Die **leere Menge** (in Zeichen:  $\emptyset$ ) enthält kein Element.  
 Grundbereich: Menge der ganzen Zahlen  
 $x \in D$  genau dann, wenn  $x + 1 = x$   
 Die Aussageform  $x + 1 = x$  wird durch *keine* Einsetzung  
 zu einer wahren Aussage;  $D$  enthält also *kein* Element. Es  
 gilt also:  $D = \emptyset$ .  
 Über einem beliebigen Grundbereich kann die leere Menge  
 durch die Aussageform „ $x \neq x$ “ gebildet werden:  
 $x \in \emptyset$  genau dann, wenn  $x \neq x$ .

### Allmengen

**Allmengen** enthalten alle Dinge des jeweiligen Grundbereichs. Über jedem Grundbereich kann die zugehörige Allmenge gebildet werden, indem alle Dinge des jeweiligen Grundbereichs in ihr zusammengefaßt werden.  
 Die Allmenge  $E$  kann z. B. mit Hilfe der Aussageform „ $x = x$ “ gebildet werden:  
 $x \in E$  genau dann, wenn  $x = x$ .

### Teilmengen

- ▶ **DEFINITION 1:** Eine Menge  $M$  ist Teilmenge von einer Menge  $N$  genau dann, wenn jedes Element von  $M$  auch Element von  $N$  ist.

Schreibweise:  $M \subseteq N$

Gelesen:

„ $M$  ist Teil(Unter-)menge von  $N$ “ oder

„ $N$  ist Obermenge von  $M$ “ oder

„ $N$  umfaßt  $M$ “.

- Die Menge  $M_4$  der durch 4 teilbaren Zahlen ist Teilmenge der Menge  $M_2$  der geraden Zahlen:  
 $M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$   
 $M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$   
 Wir schreiben:  $M_4 \subseteq M_2$ .

# 1. MENGENBILDUNG



*Bemerkung:* Die Definition der Teilmenge besagt lediglich, daß in der Obermenge  $N$  kein Element der Untermenge  $M$  fehlen darf. Das ist aber auch dann der Fall, wenn Ober- und Untermenge gleich sind. Deshalb gilt für jede Menge  $M$  auch die Beziehung  $M \subseteq M$ .

Echte  
Teilmenge

► **DEFINITION 2:** Eine Menge  $M$  ist **echte Teilmenge** von  $N$  genau dann, wenn jedes Element von  $M$  auch Element von  $N$  ist und darüber hinaus wenigstens ein Element in  $N$  liegt, das nicht auch in  $M$  liegt.

Schreibweise:  $M \subset N$

Gelesen:

„ $M$  ist echte Teilmenge (Untermenge) von  $N$ “ oder

„ $N$  ist echte Obermenge von  $M$ “ oder

„ $N$  umfaßt echt  $M$ “.

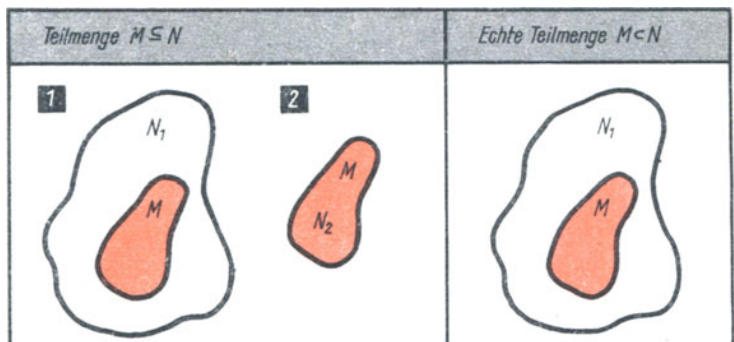
■ Es sei  $N$  die Menge aller Bücher einer Schülerbibliothek und  $M$  die Menge aller Mathematikbücher dieser Bibliothek. Es gilt dann: Die Menge  $M$  aller Mathematikbücher dieser Schülerbibliothek ist eine *echte* Teilmenge der Menge  $N$  aller Bücher dieser Bibliothek:  $M \subset N$ .

*Bemerkung:* Nach der Definition 1 auf Seite 9 können wir in unserem Beispiel auch  $M \subseteq N$  schreiben, denn jedes Element der Menge  $M$  (die Mathematikbücher) gehört ja auch zur Menge  $N$  (aller Bücher dieser Bibliothek).

Will man betonen, daß  $M$  eine *echte* Teilmenge von  $N$  ist, so schreibt man:  $M \subset N$ .

## Veranschaulichung von Mengen

Zur Veranschaulichung von Mengen werden häufig Punkt- mengen einer Ebene verwendet, die durch geschlossene Kurven begrenzt sind.



## 2. MENGENOPERATIONEN

### Durchschnitt von Mengen

Gegeben seien Mengen  $M$  und  $N$ .

Zur Menge  $D$  gehören also genau die Elemente, die sowohl

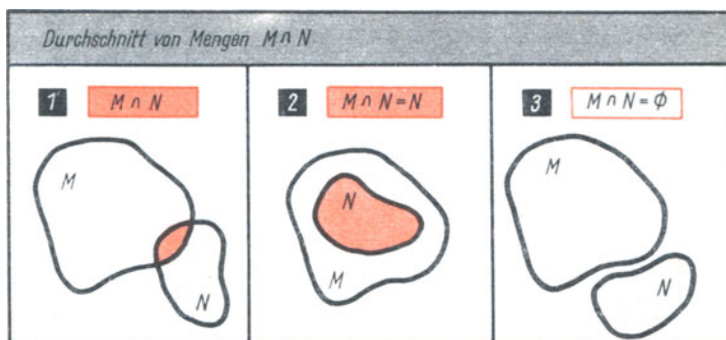
in  $M$  als auch in  $N$  liegen.

Die Menge  $D$  heißt der **Durchschnitt** der Mengen  $M$  und  $N$ .

Schreibweise:  $M \cap N$ .

Gelesen: „ $M$  geschnitten mit  $N$ “.

► **DEFINITION 3:**  
 $x \in M \cap N$  genau dann, wenn  $x \in M$  und  $x \in N$



Durch die Bildung des Durchschnitts wird den Mengen  $M$  und  $N$  eine Menge  $M \cap N$  zugeordnet, ähnlich wie durch die Addition den Zahlen  $a$  und  $b$  deren Summe  $a + b$  zugeordnet wird. Die Addition nennt man eine **Rechenoperation**; entsprechend heißt die Durchschnittsbildung eine **Operation** mit Mengen.

Gegebene Mengen	Durchschnitt
a) $M$ ist die Menge aller <b>Rhomben</b> . $N$ ist die Menge aller <b>Rechtecke</b> .	$M \cap N$ ist die Menge aller <b>Quadrate</b> .  (Diagramm: Fall ①)
b) $M$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen $n$ , für die gilt: $n < 15$ . $N$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen $n$ , für die gilt: $n > 8$ .	$M \cap N = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$  (Diagramm: Fall ①)
c) $M$ ist die Menge aller <b>Vierecke</b> . $N$ ist die Menge aller <b>Rhomben</b> .	$M \cap N = N$  (Diagramm: Fall ②)

## 2. MENGENOPERATIONEN

Gegebene Mengen	Durchschnitt
d) $M$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen. $N$ ist die Menge aller Quadratzahlen.	$M \cap N = N$  (Diagramm: Fall ②)
e) $M$ ist die Menge aller Vierecke. $N$ ist die Menge aller Fünfecke.	$M \cap N = \emptyset$ Es gibt keine geometrische Figur, die sowohl Viereck als auch Fünfeck ist. (Diagramm: Fall ③)
f) $M$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen $n$ , für die gilt: $n > 15$ . $N$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen $n$ , für die gilt: $n < 8$ .	$M \cap N = \emptyset$  (Diagramm: Fall ③)

### Disjunkte Mengen

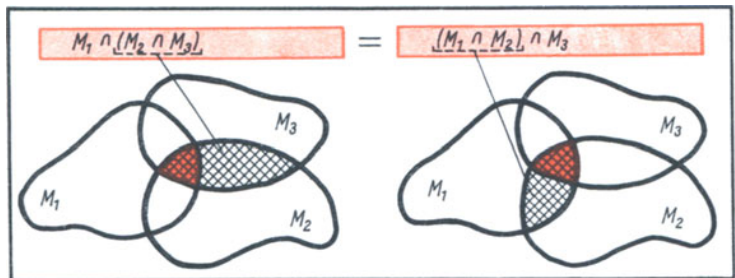
Wenn Mengen  $M$  und  $N$  kein gemeinsames Element besitzen, nennt man sie **elementfremde** oder **disjunkte Mengen**.

Bei disjunkten Mengen ist also der Durchschnitt stets leer:  
 $M \cap N = \emptyset$ .

### Eigenschaften der Durchschnittsbildung

Es gilt stets:

- (1)  $M \cap N = N \cap M$  (Kommutativität, / 20)
- (2)  $M \cap M = M$
- (3)  $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$  (Assoziativität, / 20)



### Vereinigung von Mengen

Gegeben seien Mengen  $M$  und  $N$ .

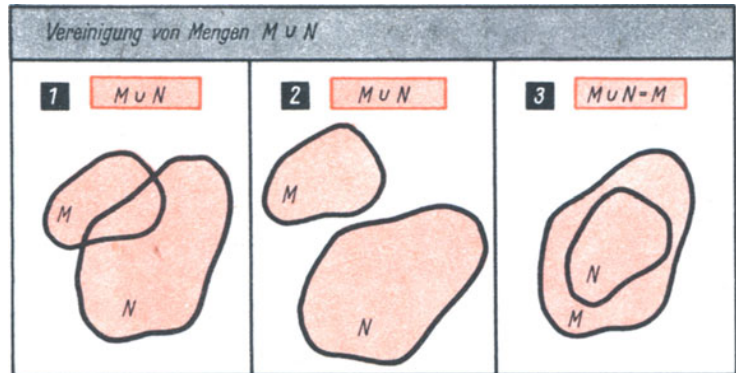
Aus  $M$  und  $N$  werde wie folgt eine Menge  $V$  gebildet:  
 $x \in V$  genau dann, wenn  $x \in M$  **oder**  $x \in N$ .

## 2. MENGENOPERATIONEN



Zur Menge  $V$  gehören also genau die Elemente, die in wenigstens einer der gegebenen Mengen  $M$  und  $N$  liegen. Die Menge  $V$  heißt die **Vereinigung** der Mengen  $M$  und  $N$ .  
 Schreibweise:  $M \cup N$   
 Gelesen: „ $M$  vereinigt mit  $N$ “

► **DEFINITION 4:**  
 $x \in M \cup N$  genau dann, wenn  $x \in M$  oder  $x \in N$



**Bemerkung:** Das „oder“ in Definition 4 bedeutet also, daß wenigstens einer der Fälle  $x \in M$  bzw.  $x \in N$  zutreffen muß, damit das Element  $x$  zur Vereinigung  $M \cup N$  gehört. Das schließt aber nicht aus, daß beide Fälle zutreffen können. „Entweder – oder“ bedeutet dagegen, daß genau einer der beiden Fälle zutrifft.

Gegebene Mengen	Vereinigung
<p>a) <math>S</math> sei die Menge aller Schienenfahrzeuge in der DDR.  <math>D</math> sei die Menge aller Fahrzeuge mit Dieselmotor in der DDR.</p>	<p>Zu <math>S \cup D</math> gehören z. B. alle Straßenbahnen, alle Traktoren und auch alle Diesellokomotiven der Deutschen Reichsbahn.                      (Diagramm: Fall ①)</p>
<p>b) <math>M_6</math> sei die Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 30 sind.  <math>M_9</math> sei die Menge aller durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 30 sind.</p>	<p><math>M_6 \cup M_9 = \{0, 6, 9, 12, 18, 24, 27\}</math>                      (Diagramm: Fall ①)</p>



## 2. MENGENOPERATIONEN

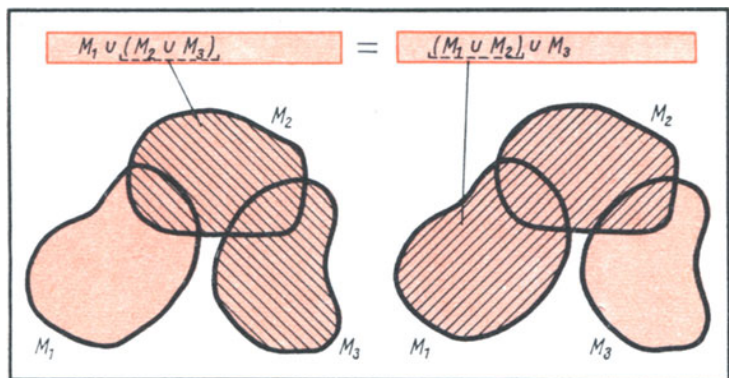
A

Gegebene Mengen	Vereinigung
c) $M$ ist die Menge aller <b>Vierecke</b> . $N$ ist die Menge aller <b>Dreiecke</b> .	$M \cup N$ ist die Menge aller <b>Vierecke</b> und aller <b>Dreiecke</b> . (Diagramm: Fall ②)
d) $M$ ist die Menge aller <b>Vierecke</b> . $N$ ist die Menge aller <b>Rhomben</b> .	$M \cup N = M$ ist die Menge aller <b>Vierecke</b> . (Diagramm: Fall ③)

Eigenschaften  
der Mengenvereinigung

Es gilt stets:

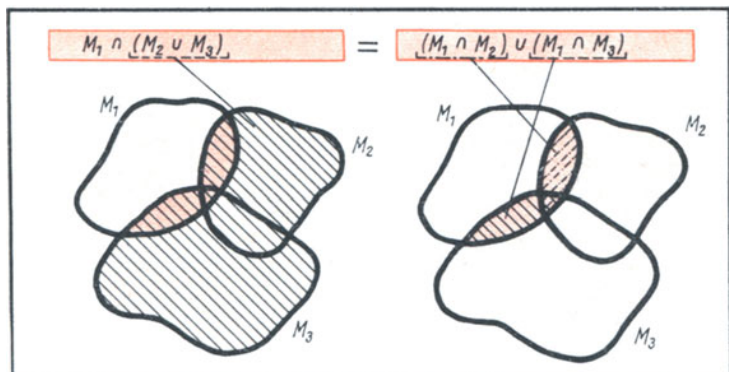
- (1)  $M \cup N = N \cup M$  (Kommutativität, / 20)
- (2)  $M \cup M = M$
- (3)  $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$  (Assoziativität, / 20)



Verknüpfung  
von Durchschnitts- und  
Vereinigungsoperation

Es gilt stets: (Distributivität, / 24)

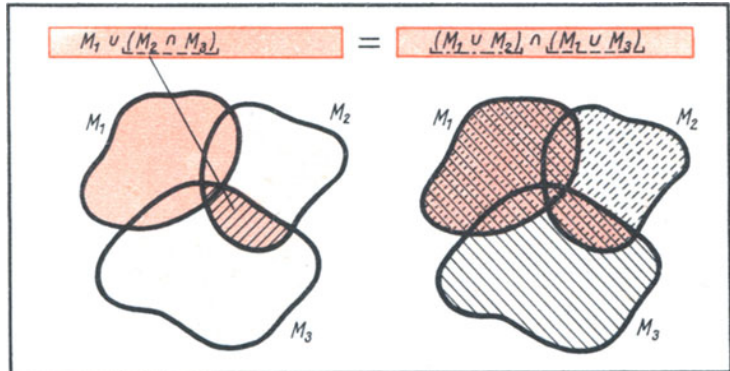
- (1)  $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$



## 2. MENGENOPERATIONEN



$$(2) M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$



Es ist also sowohl die Durchschnittsoperation bezüglich der Vereinigungsoperation distributiv (Fall 1) als auch die Vereinigungsoperation bezüglich der Durchschnittsoperation (Fall 2).

## Übersicht

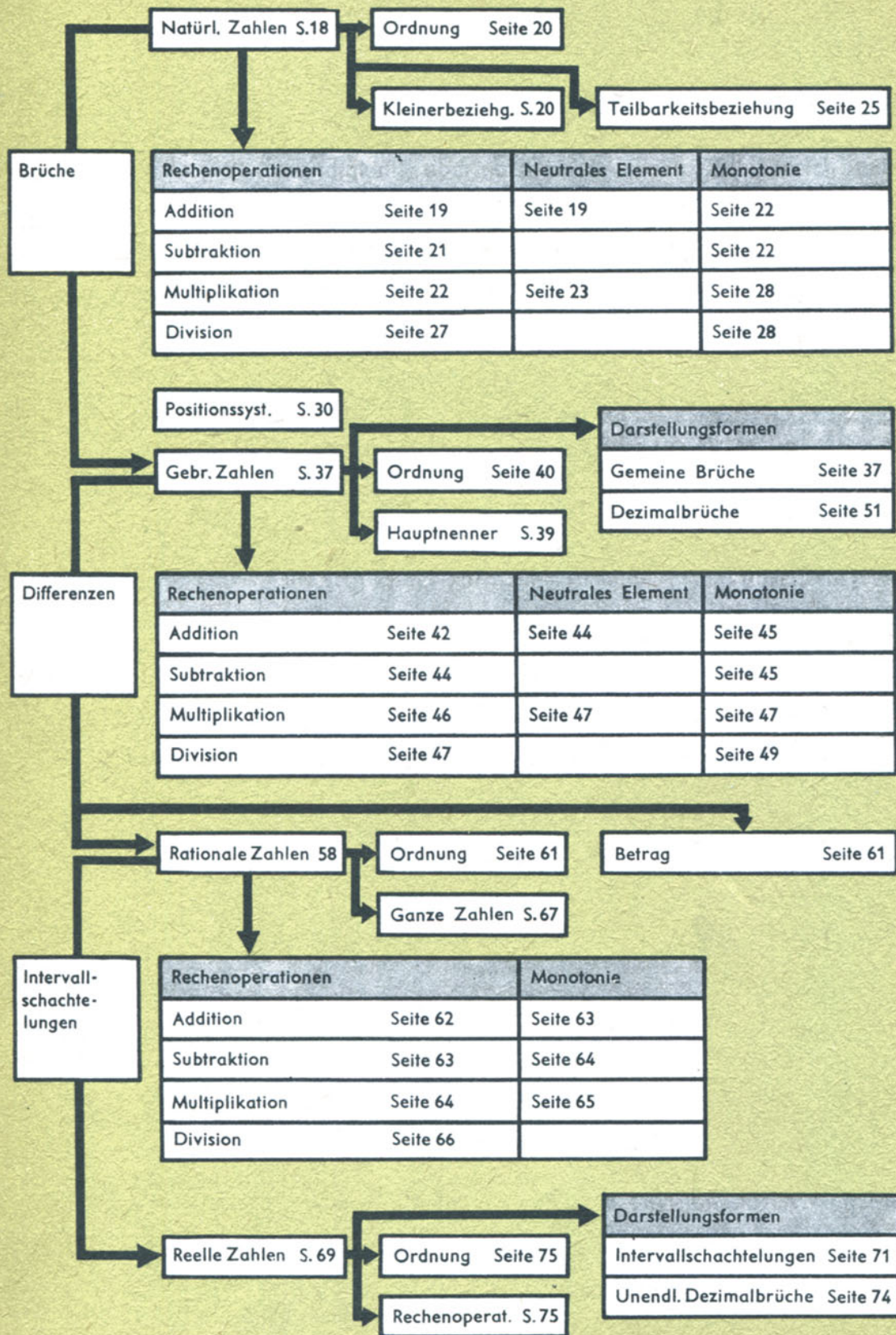
Mengenbildung		
Mengen werden stets über einem bestimmten Grundbereich gebildet. Zur Mengenbildung können Aussageformen mit Variablen benutzt werden. Dabei werden genau die Dinge aus dem Grundbereich zu einer Menge zusammengefaßt, die die jeweilige Aussageform beim Einsetzen zu einer wahren Aussage machen.		
Mengenbeziehungen		
Teilmenge $M \subseteq N$	Jedes Element von $M$ ist auch Element von $N$ .	
Echte Teilmenge $M \subset N$	Jedes Element von $M$ ist auch Element von $N$ , und darüber hinaus besitzt $N$ wenigstens ein Element, das nicht Element von $M$ ist.	

## 2. MENGENOPERATIONEN

Mengenoperationen		
<p>Durchschnitt <math>M \cap N</math></p>	<p><math>x \in M \cap N</math> genau dann, wenn <math>x \in M</math> und <math>x \in N</math></p> <p><math>M \cap N = N \cap M</math>  <math>M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3</math>  <math>M \cap M = M</math></p>	
<p>Vereinigung <math>M \cup N</math></p>	<p><math>x \in M \cup N</math> genau dann, wenn <math>x \in M</math> oder <math>x \in N</math></p> <p><math>M \cup N = N \cup M</math>  <math>M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3</math>  <math>M \cup M = M</math></p>	
$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$		<p>Die Durchschnittsoperation ist distributiv bezüglich der Vereinigungsoperation.</p>
$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$		<p>Die Vereinigungsoperation ist distributiv bezüglich der Durchschnittsoperation.</p>

# B

## Zahlenbereiche



# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... bezeichnet man als natürliche Zahlen.










*Bemerkung:* Es ist auch üblich, die Folge der natürlichen Zahlen mit der Zahl 1 zu beginnen.

Ob die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gerechnet werden soll oder nicht, kann *beliebig* festgelegt werden.

Veranschaulichung

Jede natürliche Zahl kann durch eine Menge veranschaulicht werden.

B

Zahl	Veranschaulichung		
1			
3			
5			

Für jede natürliche Zahl außer Null gibt es unendlich viele Mengen, die zu deren Veranschaulichung benutzt werden können.

Die betreffende natürliche Zahl gibt das *einzigste Gemeinsame* aller der Mengen an, durch die sie veranschaulicht werden kann. Das ist die Anzahl der Elemente.

Die natürliche Zahl 0 wird nur durch eine einzige Menge „veranschaulicht“, durch die leere Menge.

**Kardinalzahl**

Mit natürlichen Zahlen kann man die Anzahl der Elemente in einer Menge angeben.

Benutzt man eine natürliche Zahl, um die Anzahl der Elemente einer Menge anzugeben, so nennt man sie **Kardinalzahl**.

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

## Ordinalzahl

Benutzt man eine natürliche Zahl, um den Platz eines Elements in einer durchnummerierten Menge anzugeben, so nennt man sie **Ordinalzahl**.

Die natürliche Zahl	
als Kardinalzahl	als Ordinalzahl
Peter las in einem Buch 150 Seiten.	Peter fand auf der 150. Seite eines Buches einen Druckfehler.

## Addition

Operationszeichen: „+“ Gelesen: „plus“  
 Durch die Addition wird jedem Paar  $[a; b]$  natürlicher Zahlen die natürliche Zahl  $a + b$ , die *Summe* von  $a$  und  $b$ , zugeordnet.

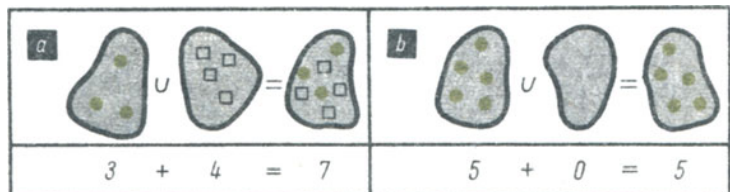
$[a; b] \rightarrow a + b$

Bezeichnet man die Summe mit  $c$ , so kann man auch schreiben:  $a + b = c$

Die Zahlen  $a$  und  $b$  heißen *Summanden*.

## Veranschaulichung

Die Addition natürlicher Zahlen läßt sich durch die Vereinigung zweier beliebiger disjunkter ( $\neq 12$ ) Mengen veranschaulichen.



## Neutrales Element

Die Zahl 0 heißt *neutrales Element* bezüglich der Addition. Es gilt allgemein:

$$a + 0 = a.$$

## Eigenschaften der Addition

Die Addition ist im Bereich der natürlichen Zahlen stets ausführbar.

Das bedeutet: Wie immer man auch natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  wählt, stets gibt es eine natürliche Zahl  $c$  als Summe von  $a$  und  $b$ . Es gibt aber auch *nur eine* solche Zahl  $c$ .

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

---

- ▶ **Zu beliebig gegebenen natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  gibt es genau eine natürliche Zahl  $c$  mit  $a + b = c$ .**

Kommutativität (✓ 12)

Es gilt stets:

$$a + b = b + a$$

Assoziativität (✓ 12)

Es gilt stets:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu addieren, so sind zwei Additionen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Additionen ist dabei beliebig.

Wegen der Kommutativität und Assoziativität kann man bei mehreren Additionen die Summanden beliebig vertauschen und zusammenfassen.

**Ordnung**

▶ **DEFINITION 1:**

**Die natürliche Zahl  $a$  heißt kleiner als die natürliche Zahl  $b$  genau dann, wenn es eine natürliche Zahl  $x \neq 0$  gibt, so daß gilt:**

$$a + x = b.$$

Schreibweise:  $a < b$  oder  $b > a$

Gelesen: „ $a$  ist kleiner als  $b$ “ bzw. „ $b$  ist größer als  $a$ “

oder „ $a$  kleiner  $b$ “ bzw. „ $b$  größer  $a$ “

$a \leq b$  (gelesen: „ $a$  kleiner gleich  $b$ “) bedeutet, daß entweder  $a < b$  oder  $a = b$  gilt, die Zahl  $a$  also nicht größer als  $b$  ist.

$a \geq b$  (gelesen: „ $a$  größer gleich  $b$ “) bedeutet, daß entweder  $a > b$  oder  $a = b$  gilt, die Zahl  $a$  also nicht kleiner als  $b$  ist.

- a)  $x \in M$  genau dann, wenn  $x \in M$
- b)  $x \in M$  genau dann, wenn  $x \in M$

Der Bereich der natürlichen Zahlen ist durch die **Kleiner-Beziehung geordnet**.

Die Zahl 0 ist die kleinste natürliche Zahl.

- a) Es gilt:  $3 < 5$ ; denn  $3 + 2 = 5$ .
- b) Es gilt:  $99 < 100$ ; denn  $99 + 1 = 100$ .
- c) Es gilt nicht:  $17 < 15$ ; denn es gibt keine natürliche Zahl  $x \neq 0$ , für die gilt:  $17 + x = 15$ .

## 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

---

d) Es gilt nicht:  $415 < \cdot 415$ ; denn es gibt keine natürliche Zahl  $x \neq 0$ , für die gilt:  $415 + x = 415$ .

- ▶ **SATZ 2:** Für beliebige natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  gilt genau einer der folgenden drei Fälle:  
 $a < b$ ;       $a = b$ ;       $b < a$
- ▶ **SATZ:** Für beliebige natürliche Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt:  
Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so  $a < c$ .

### Unmittelbarer Nachfolger

- ▶ **DEFINITION 3:** Die natürliche Zahl  $a + 1$  heißt der unmittelbare Nachfolger der natürlichen Zahl  $a$ .

*Bemerkung:* Statt „unmittelbarer Nachfolger“ sagt man auch kürzer nur „Nachfolger“.

Für jede natürliche Zahl und ihren Nachfolger gilt  $a < a + 1$ ,

d. h., jede natürliche Zahl ist kleiner als ihr Nachfolger ( $\neq 41$ ).

Die Zahl 0 ist als kleinste natürliche Zahl nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl.

Durch die Nachfolgerbeziehung sind die natürlichen Zahlen zu einer **Folge** angeordnet.

B

### Subtraktion

Operationszeichen: „-“ Gelesen: „minus“

Bei der Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen ist zu einer gegebenen Summe  $b$  und einem gegebenen Summanden  $a$  eine natürliche Zahl  $x$  zu finden, so daß gilt:

$$a + x = b.$$

Anders geschrieben:  $x = b - a$

Daher heißt die Subtraktion *Umkehrung* der Addition.

Die Zahl  $b$  heißt *Minuend*,  
die Zahl  $a$  heißt *Subtrahend*.

Die Zahl  $b - a$  heißt *Differenz*.

Durch die Subtraktion wird (im Falle ihrer Ausführbarkeit) jedem Paar  $[a; b]$  natürlicher Zahlen die natürliche Zahl  $a - b$ , die Differenz von  $a$  und  $b$ , zugeordnet.

$$[a; b] \rightarrow a - b.$$

Die Subtraktion ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar.

Wenn die Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar ist, so gibt es nur eine natürliche Zahl  $x$ , für die  $a + x = b$  gilt. In diesem Fall ist also die Differenz  $b - a$  *eindeutig* bestimmt.



## 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

---

- **SATZ 4:** Die Subtraktion ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur ausführbar, wenn der Subtrahend kleiner ist als der Minuend oder wenn der Subtrahend gleich dem Minuenden ist.

Bei der Subtraktion gilt stets:

$$a - a = 0 \quad a - 0 = a .$$

### Monotonie der Addition

Wenn man zu zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung stehen, dieselbe Zahl addiert, so stehen auch die erhaltenen Summen in der Kleiner-Beziehung.

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a + x < b + x$$

- a) Da  $5 < 8$ , auch  $5 + 2 < 8 + 2$   
b) Da  $156 < 157$ , auch  $156 + 1 < 157 + 1$

### der Subtraktion

Wenn man von zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung stehen, dieselbe Zahl subtrahiert, so stehen auch die erhaltenen Differenzen in der Kleiner-Beziehung.

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a - x < b - x \\ (\text{Ausführbarkeit der Subtraktion vorausgesetzt})$$

- a) Da  $5 < 8$ , auch  $5 - 3 < 8 - 3$   
b) Da  $19 < 20$ , auch  $19 - 1 < 20 - 1$

### Multiplikation

Operationszeichen: „·“

Gelesen: „multipliziert mit“, „mal“

Durch die Multiplikation wird jedem Paar  $[a; b]$  natürlicher Zahlen die natürliche Zahl  $a \cdot b$ , das *Produkt* von  $a$  und  $b$ , zugeordnet.

$$[a; b] \rightarrow a \cdot b$$

Bezeichnet man das Produkt mit  $c$ , so kann man auch schreiben:

$$a \cdot b = c.$$

Die Zahlen  $a$  und  $b$  heißen *Faktoren*.

### Neutrales Element

Die Zahl 1 heißt *neutrales Element* bezüglich der Multiplikation.

Es gilt allgemein:

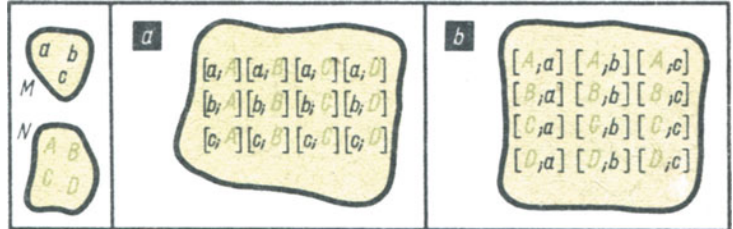
$$a \cdot 1 = a$$

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

Veranschaulichung

Wie die Addition, kann auch die Multiplikation durch Mengenbildungen veranschaulicht werden.

- $3 \cdot 4 = 12$       $M = \{a; b; c\}$       $N = \{A; B; C; D\}$   
Wir bilden aus den Elementen beider Mengen Paare:



Wir erhalten im Fall (a) und im Fall (b) jeweils eine Menge mit 12 Elementen (Paaren), die das Produkt 12 veranschaulicht.

## Eigenschaften der Multiplikation

Die Multiplikation ist im Bereich der natürlichen Zahlen stets ausführbar.

Das bedeutet: Wie immer man auch natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  wählt, stets gibt es eine natürliche Zahl  $c$  als Produkt von  $a$  und  $b$ . Es gibt aber auch *nur eine* solche Zahl  $c$ .

- **Zu beliebig gegebenen natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  gibt es genau eine natürliche Zahl  $c$  mit  $a \cdot b = c$ .**

Kommutativität

Es gilt stets:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativität

- $32 \cdot 25 = (8 \cdot 4) \cdot 25 = 8 \cdot (4 \cdot 25)$

Es gilt stets:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu multiplizieren, so sind zwei Multiplikationen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Multiplikationen ist dabei beliebig.

Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation dürfen auch in einem Produkt mit mehr als zwei Faktoren diese beliebig vertauscht und zusammengefaßt werden.

## 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition

$$\blacksquare 3 \cdot 17 = 3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$$

Es gilt stets:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Soll eine Summe mit einem Faktor multipliziert werden, so ist jeder Summand mit dem Faktor zu multiplizieren. Dann sind die erhaltenen Teilprodukte zu addieren.

► **SATZ 5: Wenn die Subtraktion  $b - c$  ausführbar ist, so gilt:**

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

*Beweis:* Wir setzen  $b - c = x$ , also  $b = c + x$  (↗ 21).

Dann gilt:

$$a \cdot b = a \cdot (c + x)$$

$$a \cdot b = a \cdot c + a \cdot x$$

$$a \cdot x = a \cdot b - a \cdot c$$

Einsetzen von  $c + x$  für  $b$

Distributivität

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Daher ist  $a \cdot x$  die Differenz von  $a \cdot b$  und  $a \cdot c$ .

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

w. z. b. w. (lies: „was zu beweisen war“)

► **SATZ 6: Für jede natürliche Zahl  $a$  gilt:**

$$a \cdot 0 = 0$$

*Beweis:* Wir setzen  $0 = b - b$ , wobei  $b$  eine beliebige natürliche Zahl ist. Dadurch können wir beim Beweis den Satz B 5 verwenden.

$$a \cdot 0 = a \cdot (b - b)$$

$$a \cdot 0 = a \cdot b - a \cdot b$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Einsetzen von  $b - b$  für  $0$

nach Satz B 5

w. z. b. w.

Wenn also in einem Produkt wenigstens ein Faktor 0 ist, so ist das Produkt gleich 0.

Umgekehrt ist aber ein Produkt auch nur dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.

Zusammenfassend gilt:

► **SATZ 7: Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.**

Dieser Satz gilt auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren.

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

**Teilbarkeits-  
beziehung  
Teiler**

► **DEFINITION 8:** Die natürliche Zahl  $a$  heißt Teiler der natürlichen Zahl  $b$  genau dann, wenn es eine natürliche Zahl  $x$  gibt, so daß gilt:

$$a \cdot x = b$$

Schreibweise:  $a \mid b$

Gelesen: „ $a$  ist Teiler von  $b$ “ oder „ $a$  teilt  $b$ “ oder „ $a$  ist in  $b$  enthalten“

Es gilt:	denn es ist	
a) $4 \mid 12$	$4 \cdot 3 = 12$	$x = 3$
b) $5 \mid 30$	$5 \cdot 6 = 30$	$x = 6$

**B**

Vielfaches

Wenn  $a$  Teiler von  $b$  ist, so nennt man  $b$  **Vielfaches** von  $a$ .

► **SATZ 9:** Für jede natürliche Zahl  $a$  gilt:

(1) $a \mid a$	(2) $a \mid 0$	(3) $1 \mid a$
----------------	----------------	----------------

$a \mid a$	$a \mid 0$	$1 \mid a$
$4 \mid 4$ ; denn $4 \cdot 1 = 4$ $x = 1$	$2 \mid 0$ ; denn $2 \cdot 0 = 0$ $x = 0$	$1 \mid 4$ ; denn $1 \cdot 4 = 4$ $x = 4$

*Bemerkung:* Nach dem letzten Satz heißt auch das 1-fache ( $x = 1$ ) und das 0-fache ( $x = 0$ ) jeder natürlichen Zahl  $a$  Vielfaches von  $a$ .

Gerade Zahlen,  
Ungerade Zahlen

► **DEFINITION 10:** Alle natürlichen Zahlen, die den Teiler 2 besitzen, heißen gerade Zahlen. Alle anderen natürlichen Zahlen heißen ungerade Zahlen.

*Bemerkung:* Ist die Zahl  $b$  gerade, so läßt sie sich also in der Form  $2 \cdot n$  darstellen. Ist die Zahl  $b$  dagegen ungerade, so läßt sie sich in der Form  $2 \cdot n + 1$  darstellen. Für die Zahl 0 gilt:  $2 \cdot 0 = 0$ . Also ist die 0 eine gerade Zahl.

Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:

$2n$ ist gerade	$2n + 1$ ist ungerade
-----------------	-----------------------

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

Primzahl

► **DEFINITION 11:** Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist (↗ 34; Satz 23) und die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt Primzahl.

*Bemerkung:* 2 ist die einzige gerade Primzahl. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

**Eigenschaften der Teilbarkeitsbeziehung**  
Teilbarkeit einer Summe

► **SATZ 12:** Wenn  $a \mid b$  und  $a \mid c$ , so  $a \mid b + c$ .

*Beweis:* Aus der Voraussetzung  $a \mid b$  und  $a \mid c$  folgt, daß es natürliche Zahlen  $x$  und  $y$  gibt mit:

$$a \cdot x = b \quad (\text{I}) \quad \text{und}$$

$$a \cdot y = c \quad (\text{II})$$

$$a \cdot x + a \cdot y = b + c \quad \text{Addition von (I) und (II)}$$

$$a(x + y) = b + c \quad \text{Distributivität (↗ 24)}$$

$z = x + y$  ist wieder eine natürliche Zahl, also:

$$a \cdot z = b + c. \quad \text{Das bedeutet aber gerade } a \mid b + c,$$

w. z. b. w.

*Bemerkung:* Die Umkehrung des Satzes B 12 gilt nicht. Die Umkehrung von Satz B 12 lautet:

Wenn  $a \mid b + c$ , so  $a \mid b$  und  $a \mid c$ . Um zu zeigen, daß diese Umkehrung nicht gilt, geben wir ein Gegenbeispiel an: Für  $a = 7$ ,  $b = 39$ ,  $c = 3$  gilt zwar  $a \mid b + c$ , es gilt aber weder  $a \mid b$  noch  $a \mid c$ .

Teilbarkeit einer Differenz

► **SATZ 13:** Falls die Subtraktion  $b - c$  ausführbar ist, gilt: Wenn  $a \mid b$  und  $a \mid c$ , so  $a \mid b - c$ .

*Bemerkung:* Die Umkehrung des Satzes B 13 gilt nicht. Also folgt aus  $a \mid b - c$  nicht, daß  $a \mid b$  und  $a \mid c$ .

Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$ , so $a \mid b + c$	Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$ , so $a \mid b - c$
13   117 und 13   91, also auch 13   117 + 91, d. h. 13   208	7   42 und 7   28, also auch 7   42 - 28, d. h. 7   14

Teilbarkeit eines Produktes

► **SATZ 14:** Wenn  $a \mid b$  oder  $a \mid c$ , so  $a \mid b \cdot c$

*Das bedeutet:* Wenn eine natürliche Zahl  $a$  Teiler von mindestens einem Faktor eines Produktes ist, so teilt  $a$  das ganze Produkt.

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

- $7 \mid 8400$ , denn  $8400 = 84 \cdot 100$  und  $7 \mid 84$

*Bemerkung:* Die Umkehrung des Satzes B 14 gilt nicht. Also folgt aus  $a \mid b \cdot c$  nicht, daß  $a \mid b$  oder  $a \mid c$ . Für  $a = 14$ ,  $b = 16$  und  $c = 21$  gilt zwar  $a \mid b \cdot c$ , es gilt aber weder  $a \mid b$  noch  $a \mid c$ .

## Transitivität

- ▶ **SATZ 15:** Wenn  $a \mid b$  und  $b \mid c$ , so  $a \mid c$ .

*Beweis:* Aus der Voraussetzung  $a \mid b$  und  $b \mid c$  folgt, daß es natürliche Zahlen  $x$  und  $y$  gibt mit

$$a \cdot x = b \quad (I) \quad \text{und} \quad b \cdot y = c \quad (II)$$

$$a \cdot x \cdot y = c \quad a \cdot x \text{ aus (I) für } b \text{ in (II) eingesetzt}$$

$z = x \cdot y$  ist wieder eine natürliche Zahl, also

$$a \cdot z = c.$$

Das bedeutet aber gerade  $a \mid c$ .

w. z. b. w.

- a)  $9 \mid 27$  und  $27 \mid 135$ , also auch  $9 \mid 135$   
b)  $4 \mid 16$  und  $16 \mid 32$ , also auch  $4 \mid 32$

## Division

Operationszeichen: „:“

Gelesen: „dividiert durch“ oder nur „durch“

Bei der Division im Bereich der natürlichen Zahlen ist zu einem gegebenen Produkt  $b$  und einem gegebenen Faktor  $a$  eine natürliche Zahl  $x$  zu finden, so daß gilt:

$$a \cdot x = b, \text{ anders geschrieben}$$

$$x = b : a.$$

Daher heißt die Division *Umkehrung* der Multiplikation ( $\neq 22$ ).

Die Zahl  $b$  heißt *Dividend*.

Die Zahl  $a$  heißt *Divisor*.

Die Zahl  $b : a$  heißt *Quotient*.

Durch die Division wird (im Fall ihrer Ausführbarkeit) jedem Paar  $[a; b]$  natürlicher Zahlen die natürliche Zahl  $a : b$ , der Quotient von  $a$  und  $b$ , zugeordnet:

$$[a; b] \rightarrow a : b$$

Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen *nicht* immer ausführbar.

**Bei der Division gilt stets:**

(1) $a : a = 1; (a \neq 0)$	(2) $a : 1 = a$	(3) $0 : a = 0; (a \neq 0)$
-----------------------------	-----------------	-----------------------------

Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen genau dann ausführbar, wenn es eine einzige natürliche Zahl  $x$

## 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

---

gibt, für die  $a \cdot x = b$  gilt. Das heißt, daß der Quotient  $b : a$  eindeutig bestimmt ist.

■ a)  $0 \cdot x = 15$   
 $x = 15 : 0$

Eine solche natürliche Zahl gibt es nicht.

b)  $0 \cdot x = 0$   
 $x = 0 : 0$

Für alle natürlichen Zahlen  $x$  gilt  $0 \cdot x = 0$ .

Die Division durch 0 ist also nicht ausführbar. Das gilt für alle Zahlbereiche.

- **SATZ 16: Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar, wenn der Dividend Vielfaches des Divisors ist. Anderenfalls ist sie nicht ausführbar. Die Division durch Null ist grundsätzlich nicht ausführbar.**

**Monotonie**  
der Multiplikation

Wenn man zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung ( $\neq 0$ ) stehen, mit derselben Zahl multipliziert, so stehen auch die erhaltenen Produkte in der Kleiner-Beziehung.

Wenn $a < b$ , so $a \cdot x < b \cdot x$ ;    ( $x \neq 0$ )
---

- Aus  $35 < 63$  folgt  $35 \cdot 3 < 63 \cdot 3$ , aber aus  $35 < 63$  folgt nicht  $35 \cdot 0 < 63 \cdot 0$ , denn  $0 = 0$ .

der Division

Wenn man zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung stehen, durch dieselbe Zahl dividiert, so stehen auch die erhaltenen Quotienten in der Kleiner-Beziehung.

Wenn $a < b$ , so $a : x < b : x$ (falls Division ausführbar)
--

- Da  $35 < 63$ , auch  $35 : 7 < 63 : 7$ .

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN



Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen		
Beziehung	Definition	Eigenschaften
Kleiner- Beziehung $a < b$	$a < b$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $x \neq 0$ gibt mit $a + x = b$ .	Es gilt genau einer der Fälle: 1) $a < b$ 2) $a = b$ 3) $b < a$ Wenn $a < b$ und $b < c$ , so $a < c$ .
Teilbar- keitsbe- ziehung $a \mid b$	$a \mid b$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $x$ gibt mit $a \cdot x = b$ . $a$ heißt Teiler von $b$ $b$ heißt Vielfaches von $a$	Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$ , so $a \mid c$ . Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$ , so $a \mid b \pm c$ (falls $b - c$ ausführbar). Wenn $a \mid b$ oder $a \mid c$ , so $a \mid b \cdot c$ . $a \mid a$ $a \mid 0$ $1 \mid a$
Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen		
Operation	Ausführbarkeit	Eigenschaften
<b>Addition</b> Summe $\begin{array}{r} a \\ + b \\ \hline c \end{array}$ Summanden	Uneingeschränkt ausführbar	$a + b = b + a$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a + 0 = a$ $a + 1$ heißt der Nachfolger von $a$ . Wenn $a < b$ , so $a + x < b + x$ .
<b>Multiplikation</b> Produkt $\begin{array}{r} a \\ \cdot b \\ \hline c \end{array}$ Faktoren	Uneingeschränkt ausführbar	$a \cdot b = b \cdot a$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $a \cdot 1 = a$ $a \cdot 0 = 0$ Wenn $a < b$ , so $a \cdot x < b \cdot x$ ; ( $x \neq 0$ ).
<b>Subtraktion</b> Differenz $\begin{array}{r} b \\ - a \\ \hline x \end{array}$ Minuend Subtrahend	Nicht uneingeschränkt ausführbar. Ausführbar genau dann, wenn $b \geq a$ .	$a - a = 0$ $a - 0 = a$ Wenn $a < b$ , so $a - x < b - x$ (falls $a - x$ und daher auch $b - x$ ausführbar).
<b>Division</b> Quotient $\begin{array}{r} x \\ : a \\ \hline \end{array}$ Dividend Divisor	Nicht uneingeschränkt ausführbar. Ausführbar genau dann, wenn $b$ Vielfaches von $a$ und $a \neq 0$ .	$a : a = 1$ ; ( $a \neq 0$ ) $a : 1 = a$ $0 : a = 0$ ; ( $a \neq 0$ ) Wenn $a < b$ , so $a : x < b : x$ (falls $a : x$ und $b : x$ ausführbar).



# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

**Dekadisches Positionssystem**  
Grundziffern

Die Zeichen „0“, „1“, „2“, „3“, „4“, „5“, „6“, „7“, „8“, „9“ heißen **Grundziffern**.  
Mit Hilfe der zehn Grundziffern werden die natürlichen Zahlen im dekadischen Positionssystem dargestellt.

Ziffern

Die Darstellung jeder natürlichen Zahl mit Hilfe der zehn Grundziffern heißt **Ziffer** dieser natürlichen Zahl. Dazu gehören auch die Grundziffern selbst. Sie sind die Darstellung der natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 sind.

Zehnerpotenz

Als **Zehnerpotenz** (↗ 133; Def. 21) wird jede Zahl bezeichnet, die sich als Produkt schreiben läßt, in dem jeder Faktor gleich 10 ist.  
Man legt fest (↗ 134; Def. 24):

(1) $10^1 = 10$	(2) $10^0 = 1$
-----------------	----------------

Darstellung natürlicher Zahlen

Jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen darstellen. Dabei treten als Faktoren der Zehnerpotenzen nur die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 auf.  
Jeder Grundziffer in der Ziffer einer natürlichen Zahl ist eine Zehnerpotenz als **Stellenwert** zugeordnet.  
Der Stellenwert einer jeden Grundziffer ist stets das Zehnfache des Stellenwerts der rechts von ihr stehenden Grundziffer. Daraus erklärt sich der Name „dekadisches Positionssystem“, das auch „dekadisches Stellenwertsystem“ genannt wird.

HT	ZT	T	H	Z	E	kürzer
$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$	
			$5 \cdot 10^2$	$+ 3 \cdot 10^1$	$+ 9 \cdot 10^0$	539
$4 \cdot 10^5$	$+ 1 \cdot 10^4$	$+ 0 \cdot 10^3$	$+ 7 \cdot 10^2$	$+ 0 \cdot 10^1$	$+ 8 \cdot 10^0$	410708

**Dualsystem**

Im Dualsystem werden zur Darstellung der natürlichen Zahlen Zweierpotenzen verwendet.

Zweierpotenz

Als Zweierpotenz wird jede Zahl bezeichnet, die sich als Produkt schreiben läßt, in dem jeder Faktor gleich 2 ist.  
Man legt fest:

(1) $2^1 = 2$	(2) $2^0 = 1$
---------------	---------------

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

Darstellung natürlicher Zahlen

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von Vielfachen von Zweierpotenzen darstellen. Dabei treten als Faktoren der Zweierpotenzen nur die Zahlen 0 und 1 auf, da das Zweifache jeder Zweierpotenz bereits gleich der nächsthöheren Zweierpotenz ist.

Um Verwechslungen mit dem dekadischen Positionssystem zu vermeiden, benutzt man im Dualsystem als Ziffern die Zeichen „0“ und „L“ statt „0“ und „1“.

Jeder Ziffer ist bei der Darstellung einer natürlichen Zahl im Dualsystem eine Zweierpotenz als Stellenwert zugeordnet.

Der Stellenwert einer jeden Ziffer ist stets das Zweifache des Stellenwerts der rechts von ihr stehenden Ziffer. Daraus erklärt sich der Name „Dualsystem“, das auch „duales Positionssystem“ oder „binäres Stellenwertsystem“ genannt wird.



Darstellung natürlicher Zahlen im	
dekadischen	dualen System
75	$L \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + L \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + L \cdot 2^1 + L \cdot 2^0$ Kurzschreibweise: L00L0LL
312	$L \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + L \cdot 2^5 + L \cdot 2^4 + L \cdot 2^3$ $+ 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ Kurzschreibweise: L00LLL000
2	$L \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ Kurzschreibweise: L0

Statt der Zahlen 10 oder 2 kann man jede beliebige andere natürliche Zahl, die größer als 1 ist, als Grundzahl für ein Positionssystem verwenden.

## Teilbarkeitsregeln

Ist eine Zahl  $b$  durch 10 teilbar, so gibt es eine Zahl  $x$  mit  $10 \cdot x = b$  ( $\not\sim 25$ ; Def. 8).

T. durch 10

► **SATZ 17:** Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Ziffer mit „0“ endet.

T. durch 2

Nach der Definition B 10 ( $\not\sim 25$ ) sind nur die geraden Zahlen durch 2 teilbar. Die geraden Zahlen sind die Zahlen 0; 2; 4; 6; 8 und alle Zahlen, deren Ziffern mit „0“; „2“; „4“; „6“ oder „8“ enden.

## 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

---

T. durch 5

Ist eine Zahl  $b$  durch 5 teilbar, so gibt es eine Zahl  $x$  mit  $5 \cdot x = b$ .

Je nachdem, ob  $x$  gerade ( $x = 2n$ ) oder ungerade

( $x = 2n + 1$ ) ist, gilt

$5 \cdot 2n = b$ , also  $10n = b$

oder  $5 \cdot (2n + 1) = b$ , also  $10n + 5 = b$ .

Im ersten Fall endet die Ziffer der Zahl  $b$  mit „0“, im zweiten Fall mit „5“. Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

- **SATZ 18:** Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Ziffer mit „0“ oder „5“ endet.

T. durch 4

Jedes Vielfache von 100 ist durch 4 teilbar; denn  $4 \mid 100$ , und damit teilt 4 auch jedes Vielfache von 100 ( $\nearrow$  26; Satz 14). Daraus folgt, daß alle Zahlen, deren letzte beiden Grundziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen, ebenfalls durch 4 teilbar sind.

- 75336 ist durch 4 teilbar

75300 ist durch 4 teilbar (Vielfaches von 100)

36 ist durch 4 teilbar

$75300 + 36 = 75336$  ist dann auch durch 4 teilbar ( $\nearrow$  26; Satz 12)

Alle Zahlen, deren letzte beiden Grundziffern eine nicht durch 4 teilbare Zahl darstellen, sind nicht durch 4 teilbar.

- 75343 ist nicht durch 4 teilbar.

Um das nachzuweisen, nehmen wir das Gegenteil der Behauptung an:

$4 \mid 75343$ .

Außerdem  $4 \mid 75300$  (Vielfaches von 100).

Daraus folgt  $4 \mid (75343 - 75300)$  ( $\nearrow$  26; Satz 13),

d. h.  $4 \mid 43$ .

Das ist falsch, also war die Annahme  $4 \mid 75343$  falsch.

- **SATZ 19:** Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Grundziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen.

T. durch 8

Jedes Vielfache von 1000 ist durch 8 teilbar. Entsprechend wie bei der Teilbarkeit durch 4 ergibt sich:

- **SATZ 20:** Eine Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Grundziffern eine durch 8 teilbare Zahl darstellen.

## 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

T. durch 9

Alle Zehnerpotenzen lassen bei Division durch 9 den Rest 1.

$$\begin{aligned}1 &= 9 \cdot 0 + 1 \\10 &= 9 \cdot 1 + 1 \\10^2 &= 9 \cdot 11 + 1 \\10^3 &= 9 \cdot 111 + 1\end{aligned}$$

Das  $k$ -fache einer beliebigen Zehnerpotenz läßt daher bei Division durch 9 den Rest  $k$ :

$$\begin{aligned}30 &= 9 \cdot 3 + 3 \\800 &= 9 \cdot 88 + 8 \\4000 &= 9 \cdot 444 + 4\end{aligned}$$

■ 9765 ist durch 9 teilbar

$$\begin{array}{r}9765 = 9000 + 700 + 60 + 5 \\ \hline 9000 = 9 \cdot 999 + 9 \\ 700 = 9 \cdot 77 + 7 \\ 60 = 9 \cdot 6 + 6 \\ 5 = 9 \cdot 0 + 5 \\ \hline\end{array}$$

$$\text{Summe: } 9765 = 9 \cdot 1082 + 27$$

Da  $9 \mid 9 \cdot 1082$  und  $9 \mid 27$ , gilt  $9 \mid 9765$  (✓ 26; Satz 12)

Eine derartige Zerlegung ist für jede Zahl möglich, so daß die Teilbarkeit durch 9 nur von der Teilbarkeit der Restsumme abhängt. Die einzelnen Reste werden immer von den Grundziffern der gegebenen Zahl dargestellt. Die Summe dieser Reste erhält man dadurch, daß man die durch die Grundziffern der gegebenen Zahl bezeichneten Zahlen ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert addiert. Die so entstandene Summe heißt **Quersumme** der gegebenen Zahl. Also ist eine Zahl durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Bei allen anderen Zahlen ist die Quersumme nicht durch 9 teilbar.

► **SATZ 21:** Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

T. durch 3

Ebenso wie bei der Division durch 9 lassen alle Zehnerpotenzen auch bei der Division durch 3 den Rest 1. Wie bei der Teilbarkeit durch 9 ergibt sich

► **SATZ 22:** Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

**Zerlegung in Primfaktoren**

Wird eine Zahl in Faktoren zerlegt, die sämtlich Primzahlen (✓ 26; Def. 11) sind, so nennt man eine solche Zerlegung kurz *Primfaktorenzerlegung*.

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

B

$$\begin{aligned}
 17640 &= 2 \cdot 8820 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 4410 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2205 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 735 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 245 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 49 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7
 \end{aligned}$$

kürzer:  $17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

Wenn man die Reihenfolge der Faktoren außer Acht läßt, gibt es für natürliche Zahlen außer 0 und 1 nur eine einzige Möglichkeit der Primfaktorenzerlegung. Um keine Ausnahme machen zu müssen, wird bei einer Primzahl diese Zahl selbst als Primfaktorenzerlegung aufgefaßt.

► **SATZ 23:** Die Primfaktorenzerlegung einer jeden natürlichen Zahl ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt.

*Bemerkung:* Der Satz B 23 würde nicht mehr gelten, wenn man die Zahl 1 zu den Primzahlen hinzunehmen würde. So wären z. B.

$$1 \cdot 2^2 \cdot 5 \text{ und } 1^4 \cdot 2^2 \cdot 5$$

dann zwei verschiedene Primfaktorenzerlegungen der Zahl 20.

Das k. g. V.

► **DEFINITION 24:** Eine Zahl, die Vielfaches mehrerer Zahlen ist, heißt gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen.

Zu gegebenen Zahlen gibt es unendlich viele gemeinsame Vielfache. Das kleinste unter ihnen heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** (k. g. V.) der gegebenen Zahlen.<sup>1</sup>

Vielfache von 12	12	24	36	48	60	72	84	96	..
Vielfache von 16		16	32	48		64	80	96	..
Vielfache von 24			24	48			72	96	..
Gemeinsame Vielfache k. g. V.: 48				48				96	..

<sup>1</sup> Da die Zahl Null Vielfaches (das 0-fache) einer jeden Zahl ist, wird sie bei der Bildung des k. g. V. ausgeschlossen.

# 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

Zur Bestimmung des k. g. V. gegebener Zahlen wird die Primfaktorenzerlegung verwendet.

Das k. g. V. von 24, 28 und 49 ist zu bestimmen.	$24 = 2^3 \cdot 3$
	$28 = 2^2 \cdot 7$
	$49 = 7^2$
	<hr/>
	k. g. V.: $2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 = 1176$

Zur Berechnung des k. g. V. wählt man aus den Primfaktorenzerlegungen der gegebenen Zahlen die jeweils höchste Potenz der auftretenden Primfaktoren aus. Das k. g. V. ist das Produkt der so ausgewählten Potenzen. Jede der gegebenen Zahlen ist in diesem Produkt als Teiler enthalten, daher ist es Vielfaches jeder der gegebenen Zahlen. Es ist aber auch *kleinstes* gemeinsames Vielfaches. Würde man nämlich auch nur einen Primfaktor aus dem Produkt fortlassen, so wäre es nicht mehr gemeinsames Vielfaches.

B

Der g. g. T.

**DEFINITION 25:** Eine Zahl, die Teiler mehrerer Zahlen ist, heißt **gemeinsamer Teiler** dieser Zahlen.

Der **größte gemeinsame Teiler** (g. g. T.) gegebener Zahlen ist die größte Zahl, die alle gegebenen Zahlen teilt.

Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen **zueinander teilerfremd**.<sup>1</sup>

Teiler von 28	1	2	4	7	14	28		
Teiler von 42	1	2	3	6	7	14	21	42
Gemeinsame Teiler g. g. T.: 14		2			7	14		

Zur Bestimmung des g. g. T. gegebener Zahlen wird die Primfaktorenzerlegung verwendet.

Der g. g. T. von 540, 144 und 198 ist zu bestimmen.	$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$
	$144 = 2^4 \cdot 3^2$
	$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$
	<hr/>
	g. g. T.: $2 \cdot 3^2 = 18$

<sup>1</sup> Da die Zahl 1 Teiler einer jeden Zahl ist, ist sie auch stets gemeinsamer Teiler beliebig gegebener Zahlen. Bei der Aufzählung gemeinsamer Teiler wird sie deshalb nicht aufgeführt.

## 1. NATÜRLICHE ZAHLEN

---

Zur Berechnung des g. g. T. wählt man aus den Primfaktorenzerlegungen der gegebenen Zahlen die jeweils niedrigste Potenz der in *allen* Zerlegungen auftretenden Primfaktoren aus. Der g. g. T. ist das Produkt der so ausgewählten Potenzen. Dieses Produkt teilt alle gegebenen Zahlen und ist daher gemeinsamer Teiler. Es ist aber auch *größter* gemeinsamer Teiler. Würde man nämlich auch nur einen weiteren Primfaktor zum Produkt hinzunehmen, so wäre es nicht mehr gemeinsamer Teiler.

B

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

### Brüche

Zum Aufbau des Bereichs der gebrochenen Zahlen stehen die natürlichen Zahlen zur Verfügung. Aus ihnen werden die Brüche gebildet. Brüche haben die Form „ $\frac{a}{b}$ “,  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen,  $b \neq 0$ . Der waagerechte Strich heißt *Bruchstrich*, die Zahl über dem Bruchstrich heißt *Zähler*, die unter dem Bruchstrich heißt *Nenner*.

- $\frac{1}{3}$  (gelesen: ein Drittel);  $\frac{11}{4}$  (gelesen: elf Viertel),  
 $\frac{1}{2}$  (gelesen: ein Halb)

*Bemerkung:* Die Begründung dafür, daß der Nenner eines Bruches stets ungleich Null sein muß, ergibt sich aus dem Rechnen mit gebrochenen Zahlen.

Der Nenner eines Bruches gibt an, in wieviel gleiche Teile ein Ganzes geteilt wurde.

Der Zähler eines Bruches gibt an, wieviel solcher Teile gemeint sind.

Echter Bruch,  
unechter Bruch

- **DEFINITION 26:**  $\frac{a}{b}$  heißt **echter Bruch**, falls  $a < b$ .  
 $\frac{a}{b}$  heißt **unechter Bruch**, falls  $a \geq b$ .

### Kürzen

Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler dividiert. Sind Zähler und Nenner eines Bruches teilerfremd, so läßt sich dieser Bruch nur durch 1 kürzen.

### Erweitern

Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben von 0 verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert.

Einen Bruch kann man stets erweitern.

- **SATZ 27:** Die Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  gehen genau dann durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervor, wenn gilt:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

### Gebrochene Zahlen als Klassen von Brüchen

Man kann den Brüchen Punkte eines Strahls zuordnen. Dazu wählt man auf einem Strahl eine beliebige Strecke  $\overline{AB}$ , die vom Anfangspunkt des Strahls ausgehend abgetragen

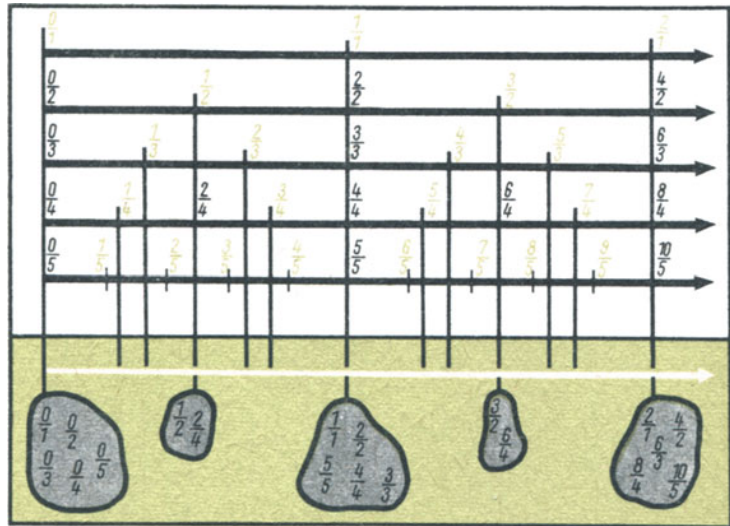


## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

wird. Diese Strecke betrachtet man als Ganzes (Einheit). Dann entspricht jedem Bruch eine Strecke, deren Anfangspunkt mit dem Anfangspunkt A des Strahls zusammenfällt. Jedem Bruch wird der Endpunkt der ihm entsprechenden Strecke zugeordnet.



Das folgende Bild zeigt, daß Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, derselbe Punkt zugeordnet wird.



Solche Brüche werden jeweils zu einer **Klasse** zusammengefaßt.

- ▶ **SATZ 28:** Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  liegen genau dann in einer Klasse, wenn gilt:  $a \cdot d = b \cdot c$ .
- ▶ **DEFINITION 29:** Jede Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, heißt gebrochene Zahl.

*Bemerkung:* In jeder Klasse liegen unendlich viele Brüche. Für zwei beliebige Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$ , die in ein und derselben Klasse liegen, gilt  $a \cdot d = b \cdot c$  ( $\nearrow$  37; Satz 27).

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Eine gebrochene Zahl, d. h. eine Klasse von Brüchen, kann durch jeden in dieser Klasse liegenden Bruch bezeichnet werden. Das Kürzen und Erweitern eines Bruches bedeutet, daß man zu einer anderen Bezeichnung derselben gebrochenen Zahl übergeht.

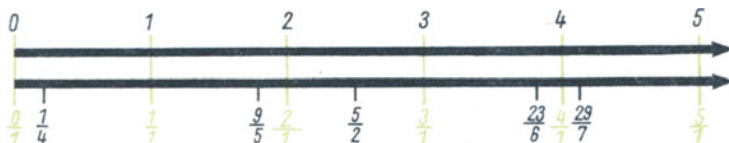
$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \dots$  bezeichnen dieselbe gebrochene Zahl.

Man schreibt daher  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \dots$

► **SATZ 30:**  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  gilt genau dann, wenn  $a \cdot d = b \cdot c$  gilt.

### Zuordnung von Punkten und Zahlen

Durch die Zusammenfassung der Brüche zu Klassen, den gebrochenen Zahlen, besteht jetzt eine Zuordnung ( $\neq$  82) von Punkten eines Strahls zu Zahlen. Einen solchen Strahl nennt man wieder **Zahlenstrahl**. Am Zahlenstrahl im ersten Bild auf Seite 38 sind zur Bezeichnung gebrochener Zahlen jeweils die am weitesten gekürzten Brüche geschrieben. Ein Vergleich eines Zahlenstrahls mit natürlichen Zahlen und eines Zahlenstrahls mit gebrochenen Zahlen zeigt, daß jeder gebrochenen Zahl  $\frac{a}{1}$  die natürliche Zahl  $a$  entspricht und umgekehrt.



### Der Hauptnenner Gleichnamige Brüche

► **DEFINITION 31:** Brüche mit gleichem Nenner heißen gleichnamig.

Gegebene gebrochene Zahlen lassen sich stets durch gleichnamige Brüche darstellen, indem man zweckmäßig erweitert.

Gegeben	Gleichnamige Darstellung	Veranschaulichung
$\frac{3}{2}; \frac{5}{6}; \frac{11}{9}$	a) $\frac{27}{18}; \frac{15}{18}; \frac{22}{18}$ b) $\frac{54}{36}; \frac{30}{36}; \frac{44}{36}$ c) $\frac{81}{54}; \frac{45}{54}; \frac{66}{54}$	

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Die gemeinsamen Nenner 18, 36, 54 sind gemeinsame Vielfache der Nenner der ursprünglichen Brüche. Da es zu vorgegebenen Zahlen unendlich viele gemeinsame Vielfache gibt, gibt es auch unendlich viele gemeinsame Nenner. Unter ihnen gibt es einen kleinsten, das k. g. V. ( $\nearrow$  34) der Nenner der gegebenen Brüche. Das ist in diesem Beispiel die Zahl 18.

Mitunter läßt sich ein gemeinsamer Nenner gegebener Brüche auch durch Kürzen finden.

■  $\frac{5}{4}; \frac{85}{20}; \frac{100}{50}$  Durch Kürzen ergibt sich:  $\frac{5}{4}; \frac{17}{4}; \frac{8}{4}$ .

► **DEFINITION 32:** Das k. g. V. der Nenner gegebener Brüche heißt der **Hauptnenner (HN)** dieser Brüche.

Um Brüche gleichnamig zu machen, bringt man sie zweckmäßig auf den Hauptnenner, damit die Zähler möglichst klein bleiben.

Gegebene Brüche:		Erweiterungsfaktoren:
$\frac{7}{168}$	$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$	15
$\frac{9}{20}$	$20 = 2^2 \cdot 5$	126
$\frac{23}{126}$	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$	20
	<b>HN: <math>2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520</math></b>	
$\frac{7}{168} = \frac{15 \cdot 7}{15 \cdot 168} = \frac{105}{2520}; \frac{9}{20} = \frac{126 \cdot 9}{126 \cdot 20} = \frac{1134}{2520}; \frac{23}{126} = \frac{20 \cdot 23}{20 \cdot 126} = \frac{460}{2520}$		

**Ordnung**  
( $\nearrow$  20)

► **DEFINITION 33:**  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  genau dann, wenn  $a \cdot d < b \cdot c$ .

Statt  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  schreibt man auch  $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$  und liest:

„ $\frac{c}{d}$  größer  $\frac{a}{b}$ “.

► **SATZ 34:** Beim Vergleichen verhalten sich die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbaren gebrochenen Zahlen wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.

**Beweis:** Nach der Definition der Ordnung gebrochener Zahlen gilt:

$$\frac{a}{1} < \frac{c}{1} \text{ genau dann, wenn } a \cdot 1 < 1 \cdot c \text{ d. h.}$$

$$\frac{a}{1} < \frac{c}{1} \text{ genau dann, wenn } a < c, \quad \text{w. z. b. w.}$$

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Daher kann man beim Vergleichen gebrochene Zahlen, die sich in der Form  $\frac{a}{1}$  darstellen lassen, durch die natürliche Zahl  $a$  ersetzen und umgekehrt.

- a) Statt  $\frac{7}{1} < \frac{9}{1}$  kürzer:  $7 < 9$  b) Statt  $\frac{0}{1} < \frac{4}{1}$  kürzer:  $0 < 4$   
c) Statt  $\frac{8}{2} < \frac{15}{3}$  kürzer  $4 < 5$   $\left(\frac{8}{2} = \frac{4}{1} \text{ und } \frac{15}{3} = \frac{5}{1}\right)$

Von zwei Punkten eines Zahlenstrahls, die verschiedenen gebrochenen Zahlen zugeordnet sind, liegt derjenige weiter links, der der kleineren der beiden Zahlen zugeordnet ist. Man sagt kürzer: Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt die kleinere auf dem Zahlenstrahl links von der größeren.

Gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit gleichem Nenner oder gleichem Zähler dargestellt sind, lassen sich besonders leicht vergleichen.

(1) gleiche Nenner:

Es gilt:  $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$  genau dann, wenn  $a \cdot b < b \cdot c$  und  $a \cdot b < b \cdot c$  genau dann, wenn  $a < c$  (↗ 28), also

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \text{ genau dann, wenn } a < c$$

(2) gleiche Zähler:

Es gilt für  $a \neq 0$ :  $\frac{a}{b} < \frac{a}{d}$  genau dann, wenn  $a \cdot d < b \cdot a$  und  $a \cdot d < b \cdot a$  genau dann, wenn  $d < b$  (↗ 28), also

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{d} \text{ genau dann, wenn } b > d \text{ und } a \neq 0$$

Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen hat keine gebrochene Zahl einen unmittelbaren Nachfolger (↗ 21).

Erläuterung: Zum Beispiel hat  $\frac{3}{10}$  keinen unmittelbaren Nachfolger. So kann etwa  $\frac{4}{10}$  nicht unmittelbarer Nachfolger sein, denn die Zahl  $\frac{7}{20}$  liegt zwischen beiden:

$$\frac{3}{10} < \frac{7}{20} < \frac{4}{10}$$

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Aber auch  $\frac{7}{20}$  ist nicht unmittelbarer Nachfolger von  $\frac{3}{10}$ , denn die Zahl  $\frac{13}{40}$  liegt zwischen beiden:  

$$\frac{3}{10} < \frac{13}{40} < \frac{7}{20}.$$

Auf diese Weise kann man für jede beliebige gebrochene Zahl, die größer als  $\frac{3}{10}$  ist, nachweisen, daß sie nicht unmittelbarer Nachfolger von  $\frac{3}{10}$  ist.

**Echt bzw. unecht gebrochene Zahlen**

► **DEFINITION 35:** Eine gebrochene Zahl heißt **echt gebrochen**, wenn sie sich durch **echte Brüche** darstellen läßt. Eine gebrochene Zahl heißt **unecht gebrochen**, wenn sie sich durch **unechte Brüche** darstellen läßt (≠ 37).

Echt gebrochene Zahlen sind kleiner als 1, unecht gebrochene Zahlen sind größer als 1 oder gleich 1. Die gebrochene Zahl 0 ist die kleinste gebrochene Zahl.

**Rechenoperationen; Addition**

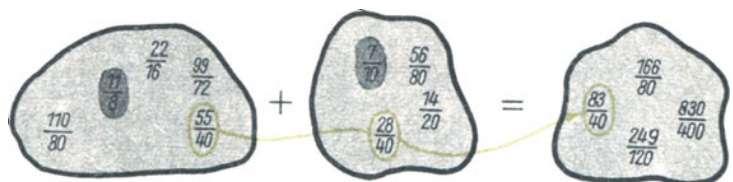
Durch die folgende Definition wird die Addition gebrochener Zahlen auf die Addition natürlicher Zahlen (Zähler der Brüche) zurückgeführt.

► **DEFINITION 36:** Gebrochene Zahlen werden **addiert**, indem man sie durch **gleichnamige Brüche** darstellt und deren **Zähler addiert**. Den **gemeinsamen Nenner** behält man bei.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Die Addition gebrochener Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar, da man stets gegebene Brüche gleichnamig machen und die natürlichen Zahlen in ihren Zählern addieren kann.

■ 
$$\frac{11}{8} + \frac{7}{10} = \frac{55}{40} + \frac{28}{40} = \frac{83}{40}$$



## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

**Eigenschaften der Addition**  
 Kommutativität (✓ 20)

► **SATZ 37: Die Addition gebrochener Zahlen ist kommutativ.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Beweis:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (\text{✓ 42; Def. 36})$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{bc + ad}{bd} \quad (\text{Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen})$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd} \quad (\text{✓ 42; Def. 36})$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \quad (\text{Kürzen}) \text{ w. z. b. w.}$$

Assoziativität (✓ 20)

► **SATZ 38: Die Addition gebrochener Zahlen ist assoziativ.**

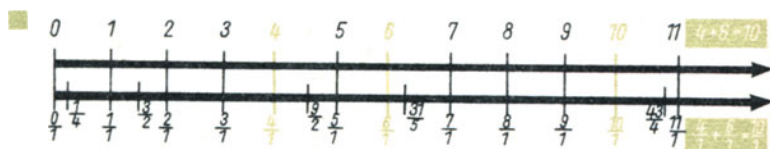
$$\frac{a}{b} + \left( \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f}$$

Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu addieren, so sind zwei Additionen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Additionen ist dabei beliebig.

$$\frac{7}{36} + \frac{57}{40} + \frac{13}{90} + \frac{21}{45} = \frac{70 + 513 + 52 + 168}{360} = \frac{803}{360} = 2 \frac{83}{360}$$

Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Addition dürfen in einer Summe mit mehr als zwei Summanden diese beliebig vertauscht werden.

► **SATZ 39: Bei der Addition verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.**



Daher kann man bei der Addition die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form  $\frac{a}{1}$  darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl  $a$  ersetzen und umgekehrt.

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \text{ a) } \frac{4}{1} + \frac{2}{7} = 4 + \frac{2}{7} & \text{b) } \frac{5}{8} + \frac{0}{1} = \frac{5}{8} + 0 \\ \text{c) } \frac{6}{2} + \frac{8}{4} = 3 + 2 & \left( \frac{6}{2} = \frac{3}{1} \text{ und } \frac{8}{4} = \frac{2}{1} \right) \end{array}$$

„Gemischte Zahl“

*Bemerkung:* Statt  $4 + \frac{2}{7}$  kann man kürzer schreiben  $4 \frac{2}{7}$ . Diese Schreibweise wird auch als „gemischte Zahl“ bezeichnet. Jede unecht gebrochene Zahl läßt sich entweder als gemischte Zahl schreiben oder sie entspricht einer natürlichen Zahl.

$$\blacksquare \text{ a) } \frac{15}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = 2 \frac{1}{7} \quad \text{b) } \frac{24}{8} = \frac{3}{1} = 3$$

*Bemerkung:* Gebrochene Zahlen, die als gemischte Zahlen geschrieben sind, lassen sich leichter vergleichen. So erkennt man sofort, daß z. B.  $25 \frac{11}{37}$  zwischen 25 und 26 liegt. In der Darstellung  $\frac{936}{37}$  ist dies nicht ohne weiteres zu erkennen. Außerdem vermeidet man unnötig große Zähler.

Neutrales Element  
(19)

► **SATZ 40:** Für jede gebrochene Zahl  $\frac{a}{b}$  gilt:

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

Die Zahl 0 ist also das neutrale Element bezüglich der Addition gebrochener Zahlen.

*Beweis:*

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b} \text{ w. z. b. w.}$$

Bei der Addition gebrochener Zahlen zeigt sich, daß Brüche mit dem Nenner 0 ausgeschlossen werden müssen. Würde man solche Brüche zulassen, so müßte man ebenfalls die Erweiterung von Brüchen mit 0 zulassen, um stets gleichnamig machen zu können. Damit könnte man jedoch alle Brüche auf die Form  $\frac{0}{0}$  bringen, alle Brüche würden also mit  $\frac{0}{0}$  in einer Klasse liegen. Es gäbe demnach überhaupt nur eine einzige gebrochene Zahl.

Subtraktion

► **DEFINITION 41:** Gebrochene Zahlen werden subtrahiert, indem man sie durch gleichnamige Brüche darstellt und die Zähler subtrahiert.

Den gemeinsamen Nenner behält man bei.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

■  $\frac{5}{6} - \frac{7}{15} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 15} = \frac{25}{30} - \frac{14}{30} = \frac{11}{30}$

Auf Grund dieser Definition ist die Subtraktion (wie im Bereich der natürlichen Zahlen) die Umkehrung der Addition (↯ 21).

Die Subtraktion gebrochener Zahlen ist wie im Bereich der natürlichen Zahlen nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.

- **SATZ 42:** Bei der Subtraktion verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen  $a$ .

Bei der Subtraktion kann man daher die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form  $\frac{a}{1}$  darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl  $a$  ersetzen und umgekehrt.

- **SATZ 43:** Für jede gebrochene Zahl  $\frac{a}{b}$  gilt:

$$\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b}$$

Beweis:

$$\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b} - \frac{0}{b} = \frac{a - 0}{b} = \frac{a}{b} \text{ w. z. b. w.}$$

**Monotonie**  
der Addition und  
Subtraktion

Wie für natürliche Zahlen (↯ 22) gilt auch im Bereich der gebrochenen Zahlen:

**SATZ 44:**

Wenn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , so  $\frac{a}{b} + \frac{x}{y} < \frac{c}{d} + \frac{x}{y}$

Wenn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , so  $\frac{a}{b} - \frac{x}{y} < \frac{c}{d} - \frac{x}{y}$ , falls die Subtraktionen ausführbar sind.



## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

### Multiplikation

- **DEFINITION 45:** Gebrochene Zahlen werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der darstellenden Brüche multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

■  $\frac{27}{8} \cdot \frac{13}{3} = \frac{27 \cdot 13}{8 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 13}{8} = \frac{117}{8}$

Die Multiplikation gebrochener Zahlen wird durch diese Definition auf die Multiplikation natürlicher Zahlen (Zähler und Nenner der Brüche) zurückgeführt.

Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar, da man die natürlichen Zahlen in den Zählern und Nennern stets multiplizieren kann.

Es ist zweckmäßig, vor dem Ausrechnen der Produkte so weit wie möglich zu kürzen.

Gemischte Zahlen wandelt man vor dem Multiplizieren in unechte Brüche um.

### Eigenschaften der Multiplikation

Kommutativität (✓ 23)

- **SATZ 46:** Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist kommutativ.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

Assoziativität (✓ 23)

- **SATZ 47:** Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist assoziativ.

$$\frac{a}{b} \cdot \left( \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right) = \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{e}{f}$$

Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu multiplizieren, so sind zwei Multiplikationen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Multiplikationen ist dabei beliebig.

Der Beweis dieser Sätze erfolgt ähnlich wie bei der Addition (✓ 43).

Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation dürfen auch in einem Produkt mit mehr als zwei Faktoren diese beliebig vertauscht werden.

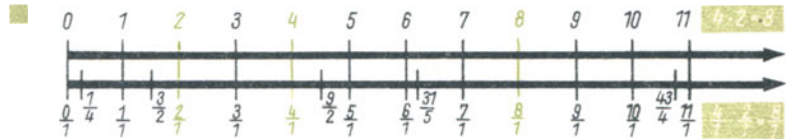
## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Distributivität (✓24)

- **SATZ 48: Die Multiplikation ist bezüglich der Addition distributiv.**

$$\frac{a}{b} \cdot \left( \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

- **SATZ 49: Bei der Multiplikation verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.**



Bei der Multiplikation kann man daher die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form  $\frac{a}{1}$  darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl  $a$  ersetzen und umgekehrt.

Neutrales Element (✓ 23)

- **SATZ 50: Für jede gebrochene Zahl  $\frac{a}{b}$  gilt:**

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \text{ und } \frac{a}{b} \cdot 0 = 0$$

Die Zahl 1 ist also das neutrale Element bezüglich der Multiplikation gebrochener Zahlen. Ein Produkt gebrochener Zahlen ist genau dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich Null ist.

Monotonie (✓ 28)

- **SATZ 51: Die Multiplikation ist bezüglich der Kleiner-Beziehung monoton. Für beliebige gebrochene Zahlen**

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  und  $\frac{x}{y}, \left( \frac{x}{y} \neq 0 \right)$  gilt:

$$\text{Wenn } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ so } \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} < \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y}$$

Division  
Reziprokes

- **DEFINITION 52: Ist  $\frac{a}{b}$  eine von Null verschiedene gebrochene Zahl, also  $a \neq 0$ , so heißt die gebrochene Zahl  $\frac{b}{a}$  das Reziproke der gebrochenen Zahl  $\frac{a}{b}$ .**

B

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Da  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$  gilt, ist das Produkt einer gebrochenen Zahl mit ihrem Reziproken stets gleich 1, z. B.:  
 $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ .

- **DEFINITION 53:** Gebrochene Zahlen werden dividiert, indem man den Dividenten mit dem Reziproken des Divisors multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

In Definition B 53 ist die Division so festgelegt, daß sie die Umkehrung der Multiplikation ist. Durch die angegebene Divisionsvorschrift findet man nämlich zu gegebenem Produkt und einem seiner Faktoren den zweiten Faktor:

In der Gleichung  $\frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$  ist der Faktor  $\frac{x}{y}$  zu bestimmen.

Anders geschrieben:  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

Nach Definition B 53:  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Einsetzen für  $\frac{x}{y}$  in die erste Gleichung:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}$$

Also ist das Produkt  $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$  tatsächlich gleich dem gesuchten Quotienten  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ .

Da durch die Definition B 53 die Division auf die Multiplikation zurückgeführt wird und die Multiplikation gebrochener Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, kann man jetzt jede Divisionsaufgabe lösen. Ausgenommen ist wieder die Division durch Null, denn sie liefert kein eindeutig bestimmtes Ergebnis.

- a)  $\frac{3}{7} : \frac{0}{5} = \frac{x}{y}$  Für  $\frac{x}{y}$  müßte gelten  $\frac{3}{7} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{5} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 5}$

Wegen  $x \cdot 0 = 0$  gibt es keine solche Zahl.

- b)  $\frac{0}{7} : \frac{0}{5} = \frac{x}{y}$  Für  $\frac{x}{y}$  müßte gelten  $\frac{0}{7} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{5} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 5}$

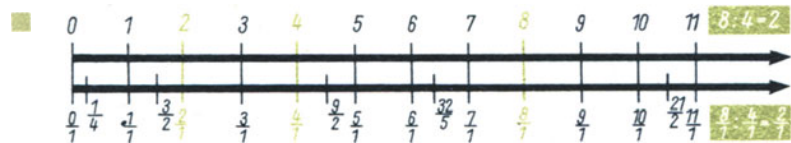
Diese Gleichung gilt für jede Zahl  $\frac{x}{y}$ .

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Die gebrochenen Zahlen bilden also einen Zahlbereich, in dem die Addition, die Multiplikation und die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) uneingeschränkt ausführbar sind.

Dagegen ist die Subtraktion wie im Bereich der natürlichen Zahlen nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, abermals einen neuen Zahlbereich aufzubauen, nämlich den Bereich der *rationalen Zahlen* (↗ 58).

- **SATZ 54:** Bei der Division verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.



Bei der Division kann man daher die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form  $\frac{a}{1}$  darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl  $a$  ersetzen und umgekehrt.

- a)  $\frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{3} : \frac{5}{1} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$   
 b)  $2 : \frac{8}{3} = \frac{2}{1} : \frac{8}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

- **SATZ 55:** Für jede gebrochene Zahl  $\frac{a}{b}$  gilt:

a) $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$	b) $0 : \frac{a}{b} = 0; \left(\frac{a}{b} \neq 0\right)$
------------------------------------	---

Beweis:

a)  $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b} : \frac{1}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$

b)  $0 : \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{0}{a} = 0$  w. z. b. w.

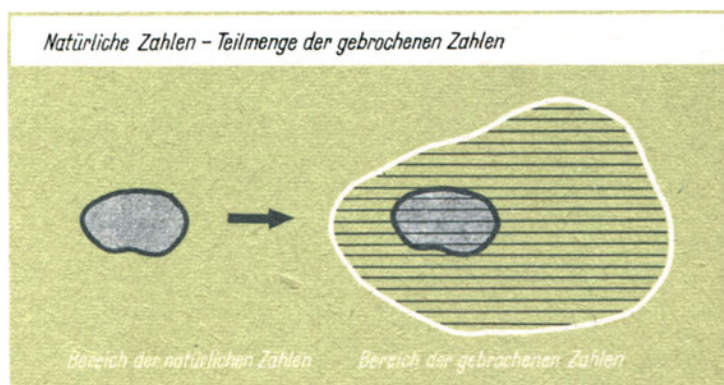
Monotonie  
(↗ 28)

Die Division gebrochener Zahlen ist bezüglich der Kleinerbeziehung monoton, da jede Division durch eine Multiplikation ersetzt werden kann.

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

### Die natürlichen Zahlen als Teilbereich der gebrochenen Zahlen

Beim Vergleichen gebrochener Zahlen und bei allen Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen kann man die gebrochenen Zahlen, die in der Form  $\frac{a}{1}$  darstellbar sind, durch die jeweilige natürliche Zahl  $a$  ersetzen. Nach dieser Ersetzung bilden die natürlichen Zahlen einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen, d. h., jede natürliche Zahl ist eine gebrochene Zahl.



Jetzt kann man jede Division natürlicher Zahlen auch als Division gebrochener Zahlen schreiben.

$$\blacksquare \quad 5 : 7 = \frac{5}{1} : \frac{7}{1} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7}, \text{ also } 5 : 7 = \frac{5}{7}$$

Damit ist jede Division natürlicher Zahlen (außer der Division durch 0) innerhalb des Bereichs der gebrochenen Zahlen ausführbar.

Umgekehrt kann jede gebrochene Zahl als Quotient natürlicher Zahlen geschrieben werden.

$$\blacksquare \quad \frac{2658}{23} = 2658 : 23 \quad \text{Führt man die Division } 2658 : 23 \text{ aus, so ergibt sich:}$$

$$2658 : 23 = 115 \frac{13}{23}$$

$$\begin{array}{r} 2658 : 23 = 115 \frac{13}{23} \\ \underline{35} \\ 128 \\ \underline{13} \end{array}$$

Es gilt also

$$\frac{a}{b} = a : b ; (b \neq 0)$$

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

### Doppelbrüche

Allgemein werden der Bruchstrich und das Zeichen „:“ gleichberechtigt als Divisionszeichen verwendet.

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ a) } & \frac{\frac{39}{12}}{\frac{50}{25}} = \frac{39}{12} : \frac{50}{25} = \frac{39 \cdot 25}{50 \cdot 12} = \frac{13}{2 \cdot 4} = \frac{13}{8} \\ \text{b) } & \frac{12}{\frac{6}{25}} = 12 : \frac{6}{25} = 12 \cdot \frac{25}{6} = 50 \end{aligned}$$

### Die gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung Zehnerbrüche

► **DEFINITION 56:** Ein Bruch, dessen Nenner eine Zehnerpotenz ( $\neq 30$ ) ist, heißt Zehnerbruch.

Brüche, die selbst nicht schon Zehnerbruch sind, deren Nenner aber nur die Primfaktoren 2; 5 (oder Potenzen dieser Zahlen) enthalten, lassen sich zu Zehnerbrüchen erweitern. Man sagt, sie lassen sich in Zehnerbrüche umwandeln.

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ a) } & \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000}; & \text{ b) } & \frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = \frac{6250}{10000} \\ \text{c) } & \frac{21}{50} = \frac{42}{100} = \frac{420}{1000} \end{aligned}$$

Enthält der Nenner eines Bruches noch andere Primfaktoren als 2 und 5, so kann man diesen Bruch nur dann in einen Zehnerbruch umwandeln, wenn der gegebene Bruch durch diese Primfaktoren kürzbar ist.

### Erweiterung des dekadischen Positionssystems

Das Positionssystem wird nach rechts fortgesetzt ( $\neq 30$ ). Die rechts von den Einern stehenden Grundziffern haben also der Reihe nach die Stellenwerte:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$$

Potenzschreibweise:

$$\frac{1}{10^1}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \dots$$

Zur Orientierung wird zwischen die Einer- und Zehntelstelle ein Komma gesetzt.

B

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Erweitertes dekadisches Positionssystem								
...	Tausen-der	Hunder-ter	Zeh-ner	Einer	Zehntel	Hundert-stel	Tausend-stel	...
...	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$	$\frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$	$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$	...
$4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot \frac{1}{10^1} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + 9 \cdot \frac{1}{10^3}$								
4      5      6      3,      7      8      9								
4563,789, gelesen: 4563 Komma 7 – 8 – 9								

**Dezimalbrüche**  
 Dezimalen,  
 Gemeine Brüche

► **DEFINITION 57:** Die Darstellung einer gebrochenen Zahl im dekadischen Positionssystem ( $\neq 30$ ) heißt **Dezimalbruch**. Die Stellen rechts vom Komma heißen **Dezimalstellen** (kürzer: **Dezimalen**). Im Unterschied zu den Dezimalbrüchen nennt man Brüche der Form „ $\frac{a}{b}$ “ ( $a$  und  $b$  natürliche Zahlen,  $b \neq 0$ ) **gemeine Brüche**.

1) Umwandlung von Zehnerbrüchen.

■ Erste Möglichkeit:

$$\text{a) } \frac{27}{10} = 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot \frac{1}{10^1} = 2,7 \quad \text{b) } \frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

Zweite Möglichkeit:

$$\text{a) } \frac{27}{10} = 27 : 10; \begin{array}{r} 27 \\ \underline{70} \\ 0 \end{array} = 2,7 \quad \text{b) } \frac{5}{8} = 5 : 8; \begin{array}{r} 5 \\ \underline{50} \\ 20 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array} = 0,625$$

2) Für gebrochene Zahlen, für die es keine Darstellung durch Zehnerbrüche gibt, verfährt man ähnlich wie bei der zweiten Möglichkeit. In diesem Falle bricht die Division nicht ab, sondern bestimmte Grundziffern bzw. Gruppen von Grundziffern wiederholen sich ständig. Diese sich wiederholenden Ziffern heißen **Perioden**. Nach der Anzahl der Grundziffern in einer Periode spricht man von 1; 2; 3; ...;  $n$ -stelligen Perioden.

Auf den Seiten 72 und 73 wird gezeigt, daß man auch in diesem Fall das schriftliche Verfahren der Division anwenden darf.

Perioden

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

■ a)  $\frac{4}{3} = 4 : 3$

$$4 : 3 = 1,333\dots; \text{ kürzer: } \frac{4}{3} = 1, \overline{3}$$

$\frac{10}{10}$  (gelesen: Eins – Komma – drei;  
Periode drei).

$\frac{1}{1}$  Die Periode ist 1-stellig.

⋮

b)  $\frac{178}{55} = 178 : 55$

$$178 : 55 = 3,23636\dots; \text{ kürzer: } \frac{178}{55} = 3,2\overline{36}$$

$\frac{130}{200}$  (gelesen: Drei – Komma – Zwei –  
Drei – Sechs; Periode Drei – Sechs).

$\frac{350}{200}$  Die Periode ist 2-stellig

$\frac{20}{350}$

$\frac{20}{20}$

⋮

c)  $\frac{5}{12} = 5 : 12$

$$5 : 12 = 0,41\overline{66}\dots; \text{ kürzer: } \frac{5}{12} = 0,41\overline{6}$$

$\frac{50}{20}$

$\frac{20}{80}$

$\frac{80}{80}$

$\frac{8}{8}$

⋮

Endliche und un-  
endliche Dezimalbrüche

► **DEFINITION 58:** Ein Dezimalbruch, der vor oder hinter dem Komma eine letzte Stelle mit von 0 verschiedener Ziffer besitzt, heißt **endlicher Dezimalbruch**.

Ein Dezimalbruch, in dessen Dezimalstellen Perioden auftreten, heißt **periodischer Dezimalbruch**. Periodische Dezimalbrüche sind **unendlich**.

Dezimalbrüche, bei denen die Periode unmittelbar hinter dem Komma beginnt, heißen **reinperiodisch**. Treten zwischen dem Komma und der Periode noch andere Ziffern, sogenannte **Vorperioden**, auf, so nennt man solche Dezimalbrüche **gemischtperiodisch**.



## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

### Umwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche

Man kann auch umgekehrt jeden endlichen oder periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch umwandeln.

1) *Endliche Dezimalbrüche:*

$$\text{a) } 0,64 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25} \qquad \text{b) } 35,22 = \frac{3522}{100} = \frac{1761}{50}$$

2) *Periodische Dezimalbrüche:*

Hier wird ohne Beweis benutzt, daß man einige Rechenoperationen mit periodischen Dezimalbrüchen genauso ausführen darf wie mit endlichen Dezimalbrüchen.

a)  $0,\bar{3}$  ist in einen gemeinen Bruch umzuwandeln.

$$\begin{array}{r} x = 0,\bar{3} \\ 10x = 3,\bar{3} \\ \hline x = 0,\bar{3} \quad (-) \\ \hline 9x = 3 \\ x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{array}$$

Also gilt:  $0,\bar{3} = \frac{1}{3}$ .

b)  $6,4\bar{27}$  ist in einen gemeinen Bruch umzuwandeln.

$$\begin{array}{r} x = 6,4\bar{27} \\ 1000x = 6427,\bar{27} \\ \hline 10x = 64,\bar{27} \quad (-) \\ \hline 990x = 6363 \\ x = \frac{6363}{990} = \frac{707}{110} \end{array}$$

Also gilt:  $6,4\bar{27} = \frac{707}{110}$ .

c)  $0,\bar{9}$  ist in einen gemeinen Bruch umzuwandeln.

$$\begin{array}{r} x = 0,\bar{9} \\ 10x = 9,\bar{9} \\ \hline x = 0,\bar{9} \quad (-) \\ \hline 9x = 9 \\ x = 1 \end{array}$$

Also gilt:  $0,\bar{9} = 1$ .

► **SATZ 59:** Für jede gebrochene Zahl gibt es eine Darstellung als Dezimalbruch. Dieser ist entweder endlich oder periodisch.

Umgekehrt stellt jeder endliche oder periodische Dezimalbruch eine gebrochene Zahl dar.

*Bemerkung:* Es gibt auch unendliche Dezimalbrüche, die nicht periodisch sind, z. B.  $0,51511511151115 \dots$ . Solche Dezimalbrüche stellen keine gebrochenen Zahlen dar. Es sind Darstellungen *irrationaler Zahlen* (74; Def. 85).

**Das Rechnen mit gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung**

Das Rechnen mit gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung nennt man auch kürzer „Rechnen mit Dezimalbrüchen“.

Für das Rechnen mit *endlichen* Dezimalbrüchen gelten die

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

folgenden Regeln: Treten in einer Aufgabe auch periodische Dezimalbrüche auf, so muß man diese entweder runden oder in gemeine Brüche umwandeln.

Vergleichen  
von Dezimalbrüchen

a) Von zwei Dezimalbrüchen mit verschiedener Stellenzahl vor dem Komma ist derjenige größer, der mehr Stellen vor dem Komma hat.

b) Zwei Dezimalbrüche mit gleicher Anzahl von Stellen vor dem Komma werden ohne Berücksichtigung des Kommas wie natürliche Zahlen verglichen. Dazu müssen sie jedoch durch Anfügen von Nullen gleichnamig gemacht werden.

- Es sind 13,9 und 13,11 zu vergleichen.  
Gleiche Anzahl von Dezimalen: 13,90 und 13,11.  
Vergleich:  $13,90 > 13,11$ ; denn  $1390 > 1311$

Addieren  
und Subtrahieren

Dezimalbrüche werden schriftlich addiert bzw. subtrahiert, indem sie zunächst so untereinander geschrieben werden, daß Stellen mit dem gleichen Stellenwert in derselben Spalte stehen (kurz: Komma unter Komma). Dann verfährt man genau so wie bei der Addition bzw. Subtraktion natürlicher Zahlen.

Das Komma wird im Ergebnis zwischen Einer- und Zehntelstelle gesetzt.

<ul style="list-style-type: none"> <li>■ a) <math display="block">\begin{array}{r} 25,38 \\ 103,009 \\ 0,5 \\ + 13,71 \\ \hline 142,599 \end{array}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>b) <math display="block">\begin{array}{r} 841,36 \\ - 27,053 \\ - 0,123 \\ - 122,4 \\ \hline 691,784 \end{array}</math></li> </ul>
---	---

Multiplizieren

Dezimalbrüche werden schriftlich multipliziert, indem man sie zunächst ohne Rücksicht auf das Komma wie natürliche Zahlen multipliziert.

Das Komma setzt man dann so, daß das Ergebnis so viel Dezimalstellen hat, wie die beiden Faktoren zusammen besitzen. Wenn nötig, müssen Nullen ergänzt werden.

<ul style="list-style-type: none"> <li>■ a) <math display="block">\begin{array}{r} 735,06 \cdot 5,204 \\ \hline 367530 \\ 1470120 \\ 294024 \\ \hline 3825,25224 \end{array}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>b) <math display="block">\begin{array}{r} 0,047 \cdot 0,0092 \\ \hline 423 \\ 94 \\ \hline 0,0004324 \end{array}</math></li> </ul>
--	---

Ein Dezimalbruch wird mit 10, 100, 1000, ... multipliziert, indem man das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts versetzt.

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Dividieren

Ein Dezimalbruch wird durch eine natürliche Zahl schriftlich dividiert, indem man wie bei der Division natürlicher Zahlen verfährt. Nach der Division der Einer des Dividenden wird im Ergebnis ein Komma gesetzt.

Ist der Divisor ein Dezimalbruch, so multipliziert man zunächst Dividenden und Divisor mit 10, 100, 1000, ..., je nachdem, ob der Divisor 1, 2, 3, ... Dezimalstellen hat. Damit ist der Divisor wieder eine natürliche Zahl.

■ a)  $1337,19 : 87$

$$1337,19 : 87 = 15,37$$

$$\begin{array}{r} 467 \\ \underline{321} \\ 609 \\ \underline{\phantom{0}} \\ 0 \end{array}$$

b)  $1,58445 : 35,21$

$$158,445 : 3521 = 0,045$$

$$\begin{array}{r} 1584 \\ \underline{15844} \\ 14084 \\ \underline{17605} \\ 17605 \\ \underline{\phantom{0}} \\ 0 \end{array}$$

c)  $273 : 1,2$

$$2730 : 12 = 227,5$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \underline{90} \\ 60 \\ \underline{\phantom{0}} \\ 0 \end{array}$$

d)  $26,47 : 5,6$

$$264,7 : 56 = 4,7267857142$$

$$\begin{array}{r} 407 \\ \underline{150} \\ 380 \\ \underline{440} \\ \rightarrow 480 \\ 320 \\ \underline{400} \\ 80 \\ \underline{240} \\ 160 \\ \rightarrow 48 \\ \vdots \end{array}$$

Ein Dezimalbruch wird durch 10, 100, 1000, ... dividiert, indem man das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach links versetzt.

Eine gebrochene Zahl ist eine Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Es werden nur Brüche gebildet, deren Nenner ungleich Null ist.

Beziehung	Definition	Eigenschaften
Kleiner-Beziehung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < b \cdot c$ .	Es gilt genau einer der Fälle 1) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ 2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 3) $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ , so $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ . Gebrochene Zahlen haben keinen Nachfolger.

## 2. GEBROCHENE ZAHLEN

Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen		
Operation	Ausführbarkeit	Eigenschaften
<b>Addition</b> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	Uneingeschränkt ausführbar	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ <p>Wenn <math>\frac{a}{b} &lt; \frac{c}{d}</math>, so <math>\frac{a}{b} + \frac{x}{y} &lt; \frac{c}{d} + \frac{x}{y}</math></p>
<b>Multiplikation</b> $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	Uneingeschränkt ausführbar	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$ $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1; (a \neq 0)$ $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$ <p>Wenn <math>\frac{a}{b} &lt; \frac{c}{d}</math>, so <math>\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} &lt; \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y}</math>  <math>\left(\frac{x}{y} \neq 0\right)</math></p>
<b>Subtraktion (Umkehrung der Addition)</b> $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$	Nicht uneingeschränkt ausführbar. Ausführbar genau dann, wenn $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ .	$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$ $\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b}$ <p>Wenn <math>\frac{a}{b} &lt; \frac{c}{d}</math>, so <math>\frac{a}{b} - \frac{x}{y} &lt; \frac{c}{d} - \frac{x}{y}</math>  (Falls die Subtraktionen ausführbar sind.)</p>
<b>Division (Umkehrung der Multiplikation)</b> $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $\left(\frac{c}{d} \neq 0\right)$	Uneingeschränkt ausführbar (auf die Multiplikation zurückgeführt)	$\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = 1; \left(\frac{a}{b} \neq 0\right)$ $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}; 1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \left(\frac{a}{b} \neq 0\right)$ $0 : \frac{a}{b} = 0; \left(\frac{a}{b} \neq 0\right)$ <p>Wenn <math>\frac{a}{b} &lt; \frac{c}{d}</math>, so <math>\frac{a}{b} : \frac{x}{y} &lt; \frac{c}{d} : \frac{x}{y}; \left(\frac{x}{y} \neq 0\right)</math></p>
Wegen der Definition $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ kann jede Division durch eine Multiplikation ersetzt werden.		

B

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

### 3. RATIONALE ZAHLEN

#### Verwendung der Variablen

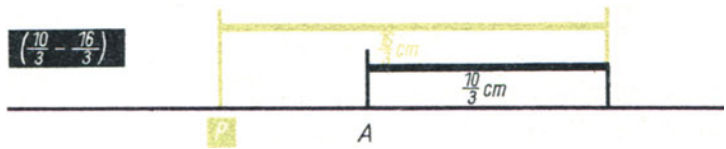
In den Abschnitten 1 und 2 wurden Buchstaben wie  $a, b, \dots, x, y$  als Variable nur für natürliche Zahlen verwendet. Daher konnten Variablen für gebrochene Zahlen nur mit Hilfe von zwei Buchstaben geschrieben werden, z. B.  $\frac{a}{b}$  oder  $x:y$ .

In diesem Kapitel werden nun Buchstaben als Variablen für gebrochene Zahlen verwendet.

#### Rationale Zahlen als Klassen von Differenzen

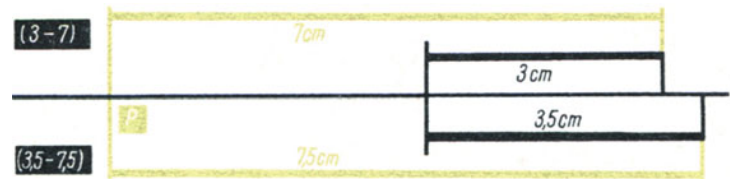
Zum Aufbau des Bereichs der rationalen Zahlen werden alle Differenzen gebrochener Zahlen gebildet. Diese Differenzen sollen nicht ausgerechnet werden, sondern sie werden zur Darstellung der Zahlen des neuen Bereichs, also der rationalen Zahlen, benutzt. Daher werden sie in Klammern gesetzt:  $(a - b)$ .

Faßt man in diesen Differenzen Minuend und Subtrahend als Maßzahlen für Streckenlängen auf, so lassen sich alle Differenzen durch Streckenabtragung auf einer Geraden veranschaulichen, auf der ein Punkt A festgelegt ist.



#### Zuordnung von Punkten und Zahlen

Dabei wird jeder Differenz eindeutig ein Punkt  $P$  der Geraden zugeordnet. Umgekehrt sind jedem dieser Punkte unendlich viele Differenzen zugeordnet.



Die Differenzen  $(3 - 7)$  und  $(3,5 - 7,5)$  sind demselben Punkt  $P$  zugeordnet, und es gilt  $3 + 7,5 = 7 + 3,5$ .

So wie in diesem Beispiel sind beliebige Differenzen  $(a - b)$  und  $(c - d)$  genau dann demselben Punkt der Geraden zugeordnet, wenn gilt:

$$a + d = b + c$$

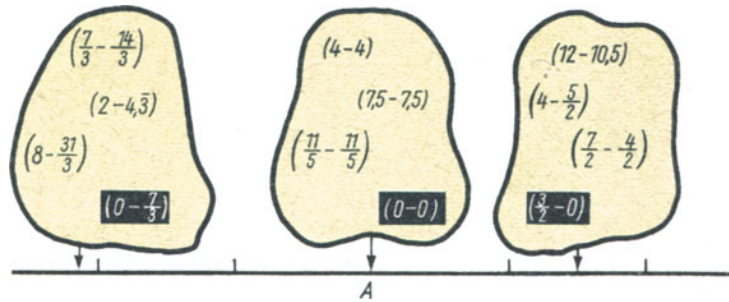
### 3. RATIONALE ZAHLEN

Alle Differenzen, die ein und demselben Punkt zugeordnet sind, werden jeweils zu einer Klasse zusammengefaßt. Differenzen  $(a - b)$  und  $(c - d)$  liegen also genau dann in einer Klasse, wenn gilt:  $a + d = b + c$ .

► **DEFINITION 60:** Jede Klasse von Differenzen, die demselben Punkt zugeordnet sind, heißt **rationale Zahl**.

Zahlengerade

Damit ist jede rationale Zahl einem Punkt der Geraden zugeordnet. Dadurch wird diese Gerade zu einer **Zahlengeraden**.



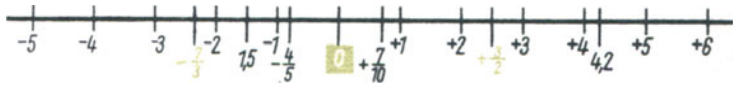
► **DEFINITION 61:** Die rationale Zahl, in der die Differenz  $(a - 0)$  vorkommt, wird mit „+a“ (gelesen: plus a) bezeichnet.

Die rationale Zahl, in der die Differenz  $(0 - b)$  vorkommt, wird mit „-b“ (gelesen: minus b) bezeichnet.

Die rationale Zahl, in der die Differenz  $(0 - 0)$  vorkommt, wird nur mit „0“ (Null) bezeichnet.

Vorzeichen

In den Bezeichnungen „+a“ bzw. „-b“ für rationale Zahlen heißen die Zeichen „+“ bzw. „-“ die **Vorzeichen** der rationalen Zahlen.



**Positive rationale Zahl**  
**negative rationale Zahl**

► **DEFINITION 62:** Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden rechts von 0 liegen, heißen **positiv**. Das sind die rationalen Zahlen mit dem Vorzeichen „+“.

Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden links von 0 liegen, heißen **negativ**. Das sind die rationalen Zahlen mit dem Vorzeichen „-“.

### 3. RATIONALE ZAHLEN

B

Beliebige Differenz	Differenz in derselben Klasse der Form $(a - 0)$ bzw. $(0 - b)$	Bezeichnung der rationalen Zahlen
$(16 - 3)$	$(13 - 0)$	$+ 13$
$\left(\frac{39}{7} - \frac{60}{7}\right)$	$\left(0 - \frac{21}{7}\right)$	$-\frac{21}{7} = -3$
$\left(\frac{23}{9} - \frac{31}{9}\right)$	$\left(0 - \frac{8}{9}\right)$	$-\frac{8}{9}$

In der Definition B 61 sind die Buchstaben  $a$  und  $b$  noch Variable für gebrochene Zahlen, d. h.,  $+a$  bedeutet eine positive und  $-b$  bedeutet eine negative rationale Zahl. In den folgenden Abschnitten werden Buchstaben als Variable für rationale Zahlen benutzt. Für diese Buchstaben können also die Bezeichnungen beliebiger rationaler Zahlen eingesetzt werden, d. h. also, daß z. B.  $a$  eine positive oder eine negative rationale Zahl oder auch die Zahl 0 bedeuten kann.

#### Entgegengesetzte rationale Zahlen

► **DEFINITION 63:** Rationale Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißen zueinander entgegengesetzt. Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt.

Zueinander entgegengesetzte Zahlen liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null.



Der Übergang von einer rationalen Zahl zur entgegengesetzten Zahl wird durch das Vorsetzen eines Minuszeichens angegeben.

Rationale Zahl $a$	Entgegengesetzte Zahl $-a$	Entgegengesetzte der entgegengesetzten Zahl $-(-a)$
$+ 2$	$- (+2) = - 2$	$- (-2) = + 2$
$+\frac{4}{9}$	$- \left(+\frac{4}{9}\right) = -\frac{4}{9}$	$- \left(-\frac{4}{9}\right) = +\frac{4}{9}$
$- 3,75$	$- (-3,75) = + 3,75$	$- (+3,75) = - 3,75$
$- 9,7$	$- (-9,7) = + 9,7$	$- (+9,7) = - 9,7$

### 3. RATIONALE ZAHLEN

Es gilt stets

$$-(-a) = a$$

#### Absoluter Betrag

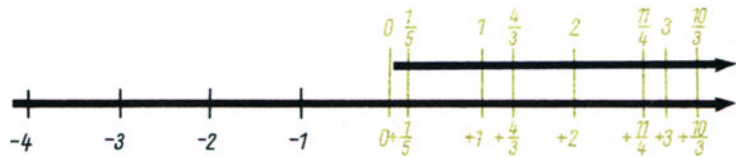
##### DEFINITION 64:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ positiv oder } a = 0 \\ -a, & \text{falls } a \text{ negativ} \end{cases}$$

$|a|$  heißt der absolute Betrag der Zahl  $a$ , kürzer: Betrag von  $a$ .

$a$	+3	-0,9	0	$-\frac{7}{9}$	$+\frac{7}{9}$	+8,1	-8,1
$ a $	+3	+0,9	0	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{7}{9}$	+8,1	+8,1

Der Betrag einer Zahl ist stets positiv oder Null. Zueinander entgegengesetzte Zahlen haben denselben Betrag. Jeder positiven rationalen Zahl und der Null (kürzer: jeder nichtnegativen Zahl) entspricht genau eine gebrochene Zahl und umgekehrt.



#### Ordnung (↗ 40)

Die nichtnegativen rationalen Zahlen werden entsprechend den gebrochenen Zahlen geordnet.

##### DEFINITION 65: Von zwei beliebigen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

Aus der Definition B 65 folgt:

Jede positive rationale Zahl ist größer als Null und auch größer als jede negative. Jede negative rationale Zahl ist kleiner als Null. Es gilt also

$0 < a$ , falls  $a$  positiv,  
und  $a < 0$ , falls  $a$  negativ.

- a)  $+19,3 < +19,35$
- b)  $0 < +0,001$
- c)  $-18 < -17$
- d)  $-30,4 < 0$
- e)  $-4 < +4$



### 3. RATIONALE ZAHLEN

Falls  $a$  und  $b$  negativ:  $a < b$  genau dann, wenn  $|a| > |b|$ .  
 Falls  $a$  und  $b$  positiv:  $a < b$  genau dann, wenn  $|a| < |b|$ .  
 Da die positiven rationalen Zahlen und die Null entsprechend den gebrochenen Zahlen geordnet sind, gilt folgender Satz:

- ▶ **SATZ 66: Beim Vergleichen verhalten sich die nicht negativen rationalen Zahlen wie die gebrochenen Zahlen.**

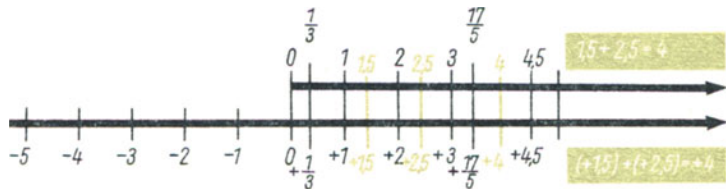
Daher kann man beim Vergleichen die nicht negativen rationalen Zahlen durch die entsprechenden gebrochenen Zahlen ersetzen und umgekehrt.

- a)  $19,3 < 19,35$     b)  $0 < 0,001$     c)  $-18 < -17$   
 d)  $-30,4 < 0$     e)  $-4 < 4$

Für keine rationale Zahl gibt es einen unmittelbaren Nachfolger (↗ 21).

#### Rechenoperationen mit rationalen Zahlen Addition

- ▶ **SATZ 67: Positive rationale Zahlen werden wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen addiert. Daher kann man positive rationale Zahlen bei der Addition durch die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen ersetzen und umgekehrt.**



Insbesondere kann man also die Beträge rationaler Zahlen durch gebrochene Zahlen ersetzen. Das gilt auch für die Subtraktion von Beträgen, sofern die Subtraktion der entsprechenden gebrochenen Zahlen ausführbar ist.

Zur Unterscheidung von Vor- und Operationszeichen werden die rationalen Zahlen in Klammern gesetzt.

- ▶ **SATZ 68: Die Summe negativer rationaler Zahlen ist gleich der zur Summe ihrer Beträge entgegengesetzten Zahl.**
- ▶ **SATZ 69: Die Summe zweier entgegengesetzter Zahlen ist 0.**
- ▶ **SATZ 70: Der Betrag der Summe zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen und verschiedenen Beträgen ist gleich der Differenz der Beträge der Summanden. Das Vorzeichen der Summe ist gleich dem Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.**

### 3. RATIONALE ZAHLEN

- a)  $(-2) + (+6)$   
 Betrag der Summe:  $+4$   
 Vorzeichen der Summe: plus }  $(-2) + (+6) = +4$
- b)  $(+4,2) + (-5)$   
 Betrag der Summe:  $+0,8$   
 Vorzeichen der Summe: minus }  $(+4,2) + (-5) = -0,8$

*Bemerkung:* Die in Satz B 70 ausgesprochene Regel läßt sich auch ohne den Begriff der Differenz, jedoch dann wesentlich umständlicher, formulieren.

**Eigenschaften der Addition**  
 Kommutativität (✓ 20)

► **SATZ 71: Die Addition rationaler Zahlen ist kommutativ.**

$$a + b = b + a$$

Assoziativität (✓ 20)

► **SATZ 72: Die Addition rationaler Zahlen ist assoziativ.**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Auf Grund der Kommutativität und der Assoziativität der Addition rationaler Zahlen ist in Summen mit mehr als zwei Summanden die Reihenfolge der Summanden beliebig.

Monotonie (✓ 22)

► **SATZ 73: Die Addition ist bezüglich der Kleiner-Beziehung monoton. Für rationale Zahlen  $a, b$  und  $x$  gilt stets:**

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a + x < b + x.$$

**Subtraktion**  
 (✓ 21)

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Man schreibt  $x = b - a$  statt  $a + x = b$ .

- $(+5) - (+2) = +3$ ; denn  $(+3) + (+2) = +5$   
 $(+5) + (-2) = -3$
- $(+3) - (+9) = -6$ ; denn  $(-6) + (+9) = +3$   
 $(+3) + (-9) = -6$
- $(+7) - (-4) = +11$ ; denn  $(+11) + (-4) = +7$   
 $(+7) + (+4) = +11$
- $(-2) - (+12) = -14$ ; denn  $(-14) + (+12) = -2$   
 $(-2) + (-12) = -14$
- $(-13) - (-4) = -9$ ; denn  $(-9) + (-4) = -13$   
 $(-13) + (+4) = -9$
- $(-6) - (-9) = +3$ ; denn  $(+3) + (-9) = -6$   
 $(-6) + (+9) = -3$



### 3. RATIONALE ZAHLEN

---

- **SATZ 74:** Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man die zu ihr entgegengesetzte Zahl addiert.

Da es zu jeder rationalen Zahl eine entgegengesetzte Zahl ( $\neq 0$ ) gibt und da die Addition rationaler Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, gilt der folgende Satz:

Ausführbarkeit

- **SATZ 75:** Im Bereich der rationalen Zahlen ist die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar.

Monotonie ( $\neq 22$ )

Da jede Subtraktion durch eine Addition ersetzt werden kann, ist auch die Subtraktion bezüglich der Kleiner-Beziehung monoton.

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a - x < b - x.$$

Multiplikation

- **SATZ 76:** Ein Produkt rationaler Zahlen, in dem beide Faktoren gleiches Vorzeichen haben, ist gleich dem Produkt der Beträge ( $\neq 61$ ).

Ein Produkt rationaler Zahlen, in dem die beiden Faktoren verschiedene Vorzeichen haben, ist gleich der zum Produkt der Beträge entgegengesetzten Zahl.

Für jede rationale Zahl  $a$  gilt:

$$a \cdot 0 = 0$$

*Bemerkung:* Beträge sind nicht negativ und werden daher wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen multipliziert.

- a)  $(+4,5) \cdot (+1,5) = +6,75$ ; denn  $4,5 \cdot 1,5 = 6,75$   
b)  $(-2) \cdot (-3) = +6$   
c)  $\left(+\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{9}\right) = -\frac{14}{9} = -1,5$

Eigenschaften der Multiplikation

Kommutativität ( $\neq 23$ )

- **SATZ 77:** Die Multiplikation rationaler Zahlen ist kommutativ.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativität ( $\neq 23$ )

- **SATZ 78:** Die Multiplikation rationaler Zahlen ist assoziativ.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

### 3. RATIONALE ZAHLEN

---

Auf Grund der Kommutativität und der Assoziativität der Multiplikation ist in Produkten mit mehr als zwei Faktoren die Reihenfolge der Faktoren beliebig.

Vorzeichen eines Produktes

Das Vorzeichen ( $\nearrow$  59) eines Produkts wird durch die Anzahl der negativen Faktoren bestimmt. Ist diese gerade, so ist das Produkt positiv, anderenfalls negativ. Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.

Distributivität ( $\nearrow$  24)

► **SATZ 79: Die Multiplikation ist bezüglich der Addition distributiv.**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Monotonie ( $\nearrow$  28)

► **SATZ 80: Für rationale Zahlen  $a, b$  und positive rationale Zahlen  $x$  gilt stets:**

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a \cdot x < b \cdot x.$$

**Für rationale Zahlen  $a, b$  und negative rationale Zahlen  $x$  gilt:**

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a \cdot x > b \cdot x.$$

Die Multiplikation ist also bezüglich der Kleiner-Beziehung nur mit der Einschränkung  $x > 0$  monoton. Für negative Faktoren  $x$  und für  $x = 0$  bleibt die Kleiner-Beziehung nicht erhalten.

a)  $a = -3; b = +5; x = -2$

Es gilt  $-3 < +5$ , aber  $(-3) \cdot (-2) > (+5) \cdot (-2)$   
 $6 > -10$

b)  $a = -4; b = -1; x = -2$

Es gilt  $-4 < -1$ , aber  $(-4) \cdot (-2) > (-1) \cdot (-2)$   
 $8 > 2$

c)  $a = +3; b = +8; x = -2$

Es gilt  $+3 < +8$ , aber  $(+3) \cdot (-2) > (+8) \cdot (-2)$   
 $-6 > -16$

d)  $a = -2; b = +3,4; x = 0$

Es gilt  $-2 < +3,4$ , aber  $(-2) \cdot 0 = (+3,4) \cdot 0$   
 $0 = 0$

### 3. RATIONALE ZAHLEN

#### Division (↗ 27)

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Man schreibt

$$a : b = x \text{ statt } x \cdot b = a$$

Daraus ergibt sich nach den Regeln über das Vorzeichen eines Produkts (↗ 64; Satz 76) das Vorzeichen des Quotienten  $x$ . Der Betrag von  $x$  ist gleich dem Quotienten der Beträge von  $a$  und  $b$ . Dies sind nichtnegative rationale Zahlen, sie werden also wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen dividiert. Damit ist die Division rationaler Zahlen auf die Multiplikation zurückgeführt.

#### Ausführbarkeit

► **SATZ 81: Die Division rationaler Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar.**

► **SATZ 82: Ein Quotient rationaler Zahlen, in dem Dividend und Divisor gleiches Vorzeichen haben, ist gleich dem Quotienten der Beträge.**

**Ein Quotient rationaler Zahlen, in dem Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben, ist gleich der zum Quotienten der Beträge entgegengesetzten Zahl.**

Die Division durch 0 liefert kein eindeutig bestimmtes Ergebnis und ist daher auch im Bereich der rationalen Zahlen ausgeschlossen.

Wie im Bereich der gebrochenen Zahlen kann man auch im Bereich der rationalen Zahlen den Bruchstrich als Divisionszeichen auffassen.

$$a : b = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

Aus Satz B 82 folgt:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

Ist  $a \neq 0$ , so heißt  $\frac{1}{a} = 1 : a$  das **Reziproke von  $a$** . (↗ 47; Def. 52)

#### Die gebrochenen Zahlen als Teilbereich der rationalen Zahlen

Beim Vergleichen und bei allen Rechenoperationen kann man die nichtnegativen rationalen Zahlen durch die gebrochenen Zahlen ersetzen. Nach dieser Ersetzung bilden die gebrochenen Zahlen einen Teilbereich des Bereichs der rationalen Zahlen.

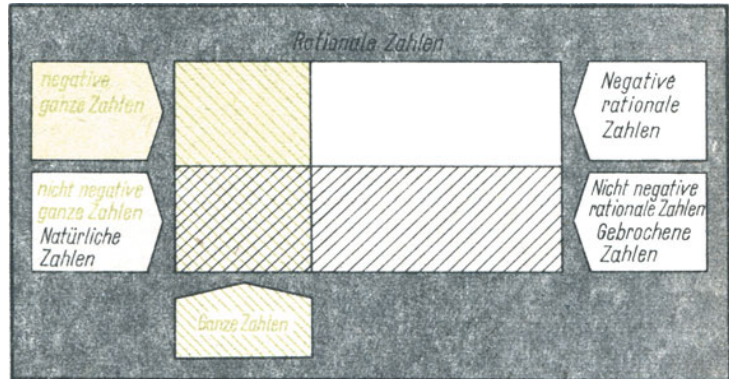
### 3. RATIONALE ZAHLEN

#### Ganze Zahlen

Die rationalen Zahlen

$\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$

heißen ganze rationale Zahlen (kurz: ganze Zahlen).



B

Jede rationale Zahl läßt sich in der Form  $\frac{p}{q}$ , ( $q \neq 0$ ) darstellen, wobei  $p$  und  $q$  ganze Zahlen sind. Durch Kürzen kann man stets erreichen, daß  $p$  und  $q$  teilerfremd ( $\nearrow$  35) sind. Durch Ausführung der Division  $p : q$  erhält man Dezimalbruchdarstellungen ( $\nearrow$  51) für rationale Zahlen. Dies sind entweder endliche oder periodische Dezimalbrüche ( $\nearrow$  53) mit dem entsprechenden Vorzeichen.

Definition	Eigenschaften
Rationale Zahlen $a$ und $b$ heißen <b>entgegengesetzt</b> , falls sie sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.	Zu jeder rationalen Zahl $a$ gibt es genau eine entgegengesetzte Zahl $-a$ . Null ist zu sich selbst entgegengesetzt. $-(-a) = a$ Entgegengesetzte Zahlen liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null.
<b>Absoluter Betrag</b> $ a  = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$	Für jede Zahl $a$ gilt $ a  \geq 0$ .

### 3. RATIONALE ZAHLEN

<p><b>Kleiner-Beziehung</b>  <math>a &lt; b</math> genau dann, wenn</p> <p>1) <math>a &lt; 0</math> und <math>b &gt; 0</math>          oder          2) <math>a &lt; 0</math> und <math>b = 0</math>          oder          3) <math> a  &lt;  b </math>, falls  <math>a &gt; 0</math> und <math>b &gt; 0</math>          oder          4) <math> a  &gt;  b </math>, falls  <math>a &lt; 0</math> und <math>b &lt; 0</math>.</p>		<p>Es gilt genau einer der Fälle  <math>a &lt; b</math>, <math>a = b</math>, <math>a &gt; b</math>.          Wenn <math>a &lt; b</math> und <math>b &lt; c</math>, so <math>a &lt; c</math>.          Es gibt keine kleinste rationale Zahl.          Rationale Zahlen haben keinen unmittelbaren Nachfolger.</p>	
Definition	Ausführbarkeit	Eigenschaften	
<p>Addition          (↗ 67 und 63;          Sätze 67 bis 73)</p>	<p>uneingeschränkt          ausführbar</p>	<p><math>a + b = b + a</math>  <math>a + (b + c) = (a + b) + c</math>  <math>a + 0 = a</math>  <math>a + (-a) = 0</math>          Wenn <math>a &lt; b</math>, so  <math>a + x &lt; b + x</math></p>	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
<p>Multiplikation          (↗ 64; Sätze 76 bis 80)</p>	<p>uneingeschränkt          ausführbar</p>	<p><math>a \cdot b = b \cdot a</math>  <math>a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c</math>  <math>a \cdot 1 = a</math>; <math>a \cdot 0 = 0</math>;  <math>a \cdot \frac{1}{a} = 1</math>, (<math>a \neq 0</math>)          Wenn <math>a &lt; b</math>, so  <math>a \cdot x &lt; b \cdot x</math>, (<math>x &gt; 0</math>)</p>	
<p>Subtraktion  <math>a - b = a + (-b)</math>          (↗ 63; Sätze 74 und 75)</p>	<p>uneingeschränkt          ausführbar          (Auf die Addition          zurückgeführt.)</p>	<p><math>a - a = a + (-a) = 0</math>  <math>a - 0 = a</math></p>	
<p>Division          (↗ 66; Sätze 81 und 82)</p>	<p>uneingeschränkt          ausführbar</p>	<p><math>a : a = 1</math> } (<math>a \neq 0</math>)  <math>a : 1 = a</math> }  <math>0 : a = 0</math> } (<math>a \neq 0</math>)  <math>a : b = \frac{a}{b}</math> }  <math>\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}</math> } <math>b \neq 0</math></p>	

## 4. REELLE ZAHLEN

Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen  $a$  und  $b$  liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.

■  $a = 1,5; b = 1,6$

Zwischen 1,5 und 1,6 liegt  $\frac{1,5 + 1,6}{2} = 1,55$

Zwischen 1,50 und 1,55 liegt  $\frac{1,50 + 1,55}{2} = 1,525$

Zwischen 1,500 und 1,525 liegt  $\frac{1,500 + 1,525}{2} = 1,5125$

Zwischen 1,5000 und 1,5125 liegt  $\frac{1,5000 + 1,5125}{2} = 1,50625$

⋮ ⋮ ⋮

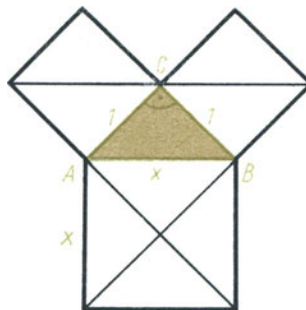
Zwischen 1,5 und 1,6 liegen also die Zahlen 1,55; 1,525; 1,5125; 1,50625; ...



Dieses Verfahren lässt sich beliebig weit fortsetzen. Damit erhält man also unendlich viele rationale Zahlen, die zwischen 1,5 und 1,6 liegen.

Punkte auf der Zahlengeraden

Es gibt aber auf der Zahlengeraden unendlich viele Punkte, denen keine rationale Zahl zugeordnet ist.



In diesem Bild ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  (Kathetenlänge 1) mit den Quadraten über seiner Hypotenuse und seinen Katheten dargestellt. Alle eingezeichneten Teildreiecke sind kongruent. Daher ist das Hypotenusenquadrat doppelt so groß wie ein Kathetenquadrat, die Maßzahl seines Flächeninhalts also gleich 2.



Die Quadratseite  $\overline{AB}$  hat bei der gewählten Längeneinheit keine rationale Zahl als Maßzahl ihrer Länge. Das wird indirekt bewiesen.

**Beweis:** Angenommen, die Länge der Quadratseite  $\overline{AB}$  hätte die rationale Maßzahl  $x$ . Dann ließe sich  $x$  folgendermaßen darstellen ( $\nearrow$  67; Übersicht):

$$(1) \quad x = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ ganze teilerfremde Zahlen } (\nearrow 35), q \neq 0)$$

Quadratfläche:  $x^2 = 2$

Einsetzen aus (1):  $\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad | \cdot q^2$

$$(2) \quad p^2 = 2q^2$$

Da  $2q^2$  durch 2 teilbar ist, ist auch  $p^2$  und damit  $p$  durch 2 teilbar. (Wäre nämlich  $p$  nicht durch 2 teilbar, enthielte also  $p$  nicht den Faktor 2, so auch  $p^2$  nicht). Wenn aber  $p$  durch 2 teilbar ist, so ist  $p^2$  sogar durch 4 teilbar.

Daraus folgt nun nach (2), daß auch  $2q^2$  durch 4, also  $q^2$  durch 2 teilbar ist. Damit ist  $q$  durch 2 teilbar.

Insgesamt haben also  $p$  und  $q$  den gemeinsamen Teiler 2. Das ist aber ein Widerspruch zur Gleichung (1), in der  $p$  und  $q$  als teilerfremd vorausgesetzt wurden.

Die Annahme, daß die Länge der Quadratseite  $\overline{AB}$  eine rationale Maßzahl hat, hat also zu einem Widerspruch geführt und ist daher falsch, w. z. b. w.

**Lücken der Zahlengeraden**

Trägt man die Strecke  $\overline{AB}$  aus dem zweiten Bild von Seite 69 von 0 aus auf der Zahlengeraden ab, so ist dem Punkt B also keine rationale Zahl zugeordnet. Solche Punkte der Zahlengeraden heißen **Lücken**.

**Rationale Punkte**

Punkte, denen rationale Zahlen zugeordnet sind, heißen **rationale Punkte**.

**Reelle Zahlen als Klassen von Intervallschachtelungen**  
Intervall,  
Intervalllänge

**DEFINITION 83:** Sind  $a$  und  $b$  zwei rationale Zahlen mit  $a < b$ , so heißt die Menge aller rationalen Zahlen, die aus  $a$  und  $b$  selbst und allen dazwischen liegenden rationalen Zahlen besteht, ein Intervall.

Die den Zahlen  $a$  und  $b$  auf der Zahlengeraden zugeordneten Punkte heißen Endpunkte des Intervalls. Sie bestimmen eine Strecke, deren Länge auch als Intervalllänge bezeichnet wird.

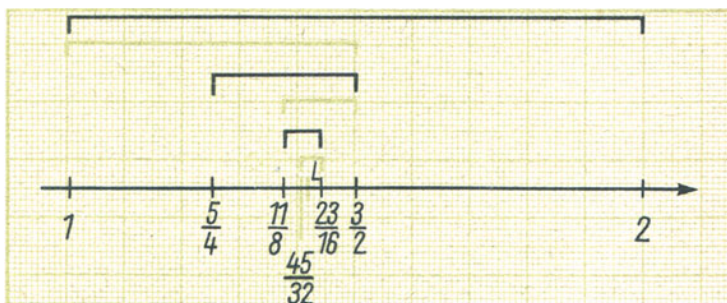
#### 4. REELLE ZAHLEN

##### Intervallschachtelung

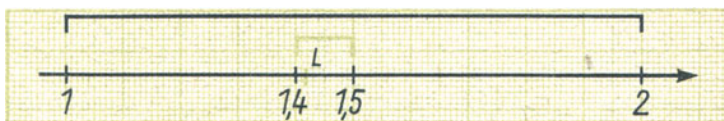
Obleich den Lücken auf der Zahlengeraden keine rationalen Zahlen zugeordnet sind, kann man jedoch rationale Zahlen angeben, die einer solchen Lücke sowohl von links als auch von rechts immer näher kommen. Eine Lücke auf der Zahlengeraden läßt sich mit solchen rationalen Zahlen in immer kürzer werdende Intervalle einschließen.

- Es gibt keine rationale Zahl  $x$  mit  $x^2 = 2$ . Durch eine Folge von Intervallen, die man durch fortgesetztes Halbieren erhält, läßt sich diese Lücke  $L$  folgendermaßen einschließen:

$a$	$b$	$a^2 (< 2)$	$b^2 (> 2)$
1	2	1	4
$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{121}{64}$	$\frac{144}{64}$
$\frac{22}{16}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{484}{256}$	$\frac{529}{256}$
$\frac{45}{32}$	$\frac{46}{32}$	$\frac{2025}{1024}$	$\frac{2116}{1024}$
⋮	⋮	⋮	⋮



Die Lücke  $L$  kann man auch durch andere Folgen immer kürzer werdender Intervalle einschließen, beispielsweise durch fortgesetzte Zehnteilung.



#### 4. REELLE ZAHLEN

$a$	$b$	$a^2 (> 2)$	$b^2 (> 2)$
1	2	1	4
1,4	1,5	1,96	2,25
1,41	1,42	1,9881	2,0164
1,414	1,415	1,999396	2,002225
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Dieses Verfahren zur Einschließung einer Lücke heißt **Intervallschachtelung**. Statt durch eine fortgesetzte Teilung der Intervalle in 2 oder 10 Teile, kann man eine Lücke auch durch fortgesetzte Teilung in 3, 4, 5, 6, ... Teile einschließen.

**Jede Lücke läßt sich durch unendlich viele Intervallschachtelungen einschließen.**

Auch rationale Punkte lassen sich durch Intervallschachtelungen einschließen.

- Der der Zahl  $\frac{4}{9}$  zugeordnete Punkt läßt sich folgendermaßen einschließen.

$a$	$b$	$a < \frac{4}{9} < b$
0	1	$0 < \frac{4}{9} < 1$
0,4	0,5	$\frac{4}{10} < \frac{4}{9} < \frac{5}{10}$
0,44	0,45	$\frac{44}{100} < \frac{4}{9} < \frac{45}{100}$
0,444	0,445	$\frac{444}{1000} < \frac{4}{9} < \frac{445}{1000}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Die Zahl  $\frac{4}{9}$  kann durch keinen endlichen Dezimalbruch dargestellt werden, denn jeder Dezimalbruch  $a$  ist kleiner und jeder Dezimalbruch  $b$  ist größer als  $\frac{4}{9}$ . Deshalb ist die Dezimaldarstellung für  $\frac{4}{9}$  der periodische Dezimalbruch  $0,\bar{4}$ :

$$0,\bar{4} = \frac{4}{9}.$$

Diesen periodischen Dezimalbruch erhält man auch durch das einfachere schriftliche Divisionsverfahren. Damit ist die Anwendung dieses Verfahrens, auch wenn es nicht abbricht, gerechtfertigt.

Ebenso lassen sich solche Punkte durch Intervallschachtelungen einschließen, denen durch endliche Dezimalbrüche darstellbare Zahlen zugeordnet sind. Jede Intervallschachtelung schließt genau einen Punkt ein. Umgekehrt läßt sich jeder Punkt der Zahlengeraden durch Intervallschachtelungen einschließen. Diese Intervallschachtelungen werden dem jeweiligen Punkt zugeordnet.

B

### Reelle Zahlen

► **DEFINITION 84:** Jede Klasse von Intervallschachtelungen, die ein und demselben Punkt zugeordnet sind, heißt reelle Zahl.

Im Bereich der reellen Zahlen ist jeder Zahl eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden, aber auch *umgekehrt* jedem Punkt eindeutig eine Zahl zugeordnet.

Jetzt gibt es also auf der Zahlengeraden keine Lücken mehr, und jede Streckenlänge hat eine reelle Maßzahl. Auch dem Endpunkt, der auf der Zahlengeraden abgetragenen Diagonale des Einheitsquadrates (↗ Beispiel S. 69) ist jetzt eine Zahl zugeordnet. Diese Zahl wird z. B. durch die Intervallschachtelungen im Beispiel auf Seite 71 dargestellt und mit „ $\sqrt{2}$ “ bezeichnet. Das Quadrat dieser Zahl ist gleich 2. Der Beweis dieser Behauptung erfordert gründlichere Kenntnisse über Intervallschachtelungen und wird deshalb hier übergangen. Damit ist die Gleichung  $x^2 = 2$  lösbar. Eine Lösung ist  $\sqrt{2}$ , die andere  $-\sqrt{2}$ .

*Bemerkung:* Allgemein ist jede Gleichung  $x^n = a$ ; ( $a \geq 0$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) (↗ 133; Def. 21 und 134; Def. 24) im Bereich der reellen Zahlen lösbar. Es gibt genau eine nichtnegative Zahl  $x$ , die diese Gleichung erfüllt. Das ist  $\sqrt[n]{a}$  (↗ 147; Def. 32). Ist  $n$  ungerade, so gibt es auch für  $a < 0$  genau eine negative reelle Zahl  $x$ , die die Gleichung erfüllt. Das ist die Zahl  $x = -\sqrt[n]{-a}$ .

■ a)  $x^4 = 81$       b)  $x^7 = -128$   
 $x = \sqrt[4]{81} = 3$        $x = -\sqrt[7]{-(-128)} = -\sqrt[7]{128} = -2$

**Irrationale Zahlen** ► **DEFINITION 85:** Reelle Zahlen, die rationalen Punkten zugeordnet sind, heißen rationale reelle Zahlen. Alle anderen reellen Zahlen heißen irrational. Die rationalen reellen Zahlen und die irrationalen reellen Zahlen bilden zusammen den Bereich der reellen Zahlen.

Man kann zeigen, daß sich die rationalen reellen Zahlen beim Rechnen und Vergleichen wie die ihnen entsprechenden rationalen Zahlen verhalten. Deshalb spricht man kurz von rationalen und irrationalen Zahlen. Diese bilden zusammen also den Bereich der reellen Zahlen.

**Unendliche Dezimalbrüche als Bezeichnungen für reelle Zahlen**

*Gebrochene Zahlen* sind Klassen von Brüchen. Jeder Bruch einer Klasse dient zur Bezeichnung der jeweiligen gebrochenen Zahl.

*Rationale Zahlen* sind Klassen von Differenzen. Die Bezeichnung einer rationalen Zahl wird aus einer bestimmten Differenz der jeweiligen Klasse gewonnen. Das ist die Differenz, in der Minuend oder Subtrahend gleich Null ist.

*Reelle Zahlen* sind Klassen von Intervallschachtelungen. Die Bezeichnungen für die reellen Zahlen werden aus denjenigen Intervallschachtelungen gewonnen, die durch fortgesetzte Zehnteilung entstehen. Dabei erhält man für die reellen Zahlen folgende Bezeichnungen:

**a)** Für die **rationalen** Zahlen erhält man endliche oder periodische Dezimalbrüche. Wegen  $0,\bar{9} = 1$  können dabei periodische Dezimalbrüche mit der Periode 9 durch endliche ersetzt werden (s. 54; Beispiel c).

**b)** Für die **irrationalen Zahlen** erhält man unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche.

Jede reelle Zahl hat also einen bestimmten Dezimalbruch als Bezeichnung. Umgekehrt ist auch jeder Dezimalbruch die Bezeichnung einer bestimmten reellen Zahl. Daher sagt man statt „Dezimalbruch“ auch „Dezimalzahl“. Da ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch nicht vollständig angegeben werden kann, müssen für irrationale Zahlen rationale Zahlen als Näherungswerte angegeben werden.

Das kann mit beliebiger Genauigkeit geschehen. Es müssen dabei nur genügend viele Dezimalstellen berücksichtigt werden.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2} \approx 1,4 & \sqrt{2} \approx 1,4142 \\ \sqrt{2} \approx 1,41 & \sqrt{2} \approx 1,41421 \\ \sqrt{2} \approx 1,414 & \sqrt{2} \approx 1,414213 \end{array}$$

## 4. REELLE ZAHLEN

### Ordnung

Von zwei verschiedenen reellen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

- ▶ **SATZ 86:** Für reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt genau einer der folgenden drei Fälle:  
 $a < b$  oder  $a = b$  oder  $a > b$ .

### Rechenoperationen mit reellen Zahlen

- ▶ Mit Hilfe der Rechenoperationen im Bereich der rationalen Zahlen lassen sich die entsprechenden Rechenoperationen im Bereich der reellen Zahlen definieren. Es gelten auch hier wieder die bekannten Rechengesetze (Kommutativität, Assoziativität, Monotonie usw.).

### Rechnen mit Näherungswerten

- ▶ **SATZ 87:** Beim Rechnen mit Näherungswerten, die mit verschiedener Genauigkeit vorgegeben sind, hat das Ergebnis der Rechnung höchstens die Genauigkeit, mit der jeweils der Näherungswert mit geringster Genauigkeit in die Rechnung eingegangen ist.

Ist ein Näherungswert mit  $n$  zuverlässigen wesentlichen Ziffern ( $\nearrow 77$ ) als Näherungswert von geringster Genauigkeit eingegangen, so kann das Ergebnis sinnvoll nur durch einen Näherungswert mit ebenfalls  $n$  wesentlichen Ziffern angegeben werden.

Näherungswerte werden durch das Zeichen „ $\approx$ “ gekennzeichnet. Gelesen: „angenähert gleich“ oder „rund“ oder „nahezu gleich“ oder „etwa gleich“.

*Bemerkung:* Falls auf Grund des gegebenen Sachzusammenhanges keine Mißverständnisse möglich sind, setzt man auch das Gleichheitszeichen, z. B. bei logarithmischen Berechnungen. Derartige Näherungswerte werden unter Beachtung der Rundungsregeln durch Dezimalbrüche mit ausschließlich zuverlässigen Ziffern angegeben, so daß aus deren Darstellung bereits auf ihre Genauigkeit geschlossen und auf eine besondere Kennzeichnung durch das Zeichen „ $\approx$ “ verzichtet werden kann.

### Rundungsregeln

Abrunden	
Steht am Ende einer Ziffer eine der Grundziffern 1, 2, 3, 4, so bleibt die unmittelbar davor stehende Grundziffer beim Runden <i>unverändert</i> . Die gerundete Zahl ist <i>kleiner</i> als die vorgegebene Zahl.	Beispiel: $\left. \begin{array}{l} 4281 \\ 4282 \\ 4283 \\ 4284 \end{array} \right\} \approx 4280$

4. REELLE ZAHLEN

B

Aufrunden	
<p>Steht am Ende einer Ziffer eine der Grundziffern 6, 7, 8, 9, so wird die unmittelbar davor stehende Grundziffer beim Runden um 1 erhöht. Die gerundete Zahl ist größer als die vorgegebene Zahl.</p>	<p>Beispiel:  <math>4286</math>  <math>4287</math>  <math>4288</math> } <math>\approx 4290</math>  <math>4289</math>                  Beachte!  <math>5497 \approx 5500</math></p>
Regel für 5 (TGL 1333)	
<i>In Wissenschaft und Technik</i>	
<p><b>1. Fall:</b>                  Folgen nach 5 weitere wesentliche Ziffern, so wird aufgerundet.</p> <p><b>2. Fall:</b>                  Ist 5 letzte wesentliche Ziffer und ist nicht bekannt, ob sie durch Rechnung entstanden ist, so wird auf eine gerade Zahl gerundet (Gerade-Zahl-Regel)</p> <p><b>3. Fall:</b>                  Ist 5 letzte wesentliche Ziffer und ist bekannt, daß sie durch Aufrunden (Abrunden) entstanden ist, so wird abgerundet (aufgerundet).                  Bemerkung: Nach TGL 1333 ist eine durch Aufrunden entstandene 5 durch einen Punkt über der 5 zu kennzeichnen: 5.                  Eine durch Abrunden entstandene 5 ist durch einen Strich unter der 5 zu kennzeichnen: <u>5</u>. Von dieser Festlegung darf nur aus technischen Gründen abgewichen werden.</p>	<p><math>17\,503 \approx 18\,000</math>  <math>0,1951 \approx 0,2</math></p> <p><math>8975 \approx 8980</math>                  (aufrunden, weil 7 ungerade)  <math>89,65 \approx 89,6</math>                  (abrunden, weil 6 gerade)</p> <p><math>397,482 \approx 397,5</math>  <math>\approx 397</math>                  (entstanden durch Aufrunden, also Abrunden)  <math>397,528 \approx 397,5</math>  <math>\approx 398</math>                  (entstanden durch Abrunden, also Aufrunden)</p>
<i>Im Bankwesen und Geschäftsleben</i>	
<p>Steht am Ende einer Ziffer die Grundziffer 5, so wird stets aufgerundet.</p>	<p><math>34\,528,00\text{ M} \approx 35\,000,00\text{ M}</math>  <math>34\,482,00\text{ M} \approx 34\,500,00\text{ M}</math>  <math>\approx 35\,000,00\text{ M}</math></p>

Beispiele für das Rechnen mit Näherungswerten

- Das Volumen eines Quaders ist zu berechnen.  
 Gegeben:  $a = 123,5\text{ cm}$ ;  $b = 2,5\text{ m}$ ;  $c = 2563,0\text{ mm}$   
 Vereinheitlichen der Größenangaben:  
 $a = 1,235\text{ m}$ ;  $b = 2,5\text{ m}$ ;  $c = 2,5630\text{ m}$   
 Eingabewert mit geringster Genauigkeit:  $b = 2,5\text{ m}$ .

## 4. REELLE ZAHLEN

---

Die Kante  $b$  ist mit einer Maßzahl mit  $n = 2$  wesentlichen Ziffern gegeben. Das Ergebnis kann sinnvoll auch nur mit zwei wesentlichen Ziffern angegeben werden.

*Lösung:* Runden der anderen Eingabewerte auf  $n + 1 = 3$  wesentliche Ziffern, Ergebnis runden auf  $n = 2$  wesentliche Ziffern:  $a \approx 1,24$  m;  $b = 2,5$  m;  $c \approx 2,6$  m

Als Ergebnis erhält man rechnerisch  $V = 8,0600$  m<sup>3</sup>. Auf zwei geltende Ziffern gerundet:  $V \approx 8,1$  m<sup>3</sup>.

- Der Flächeninhalt eines Kreises ist zu berechnen.

Gegeben:  $r = 1250$  mm;  $\pi = 3,14$

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 1250^2 \text{ mm}^2 = 3,14 \cdot 1562500 \text{ mm}^2$$

$$A = 4906250 \text{ mm}^2$$

$$A \approx 4910000 \text{ mm}^2 = 4,91 \text{ m}^2$$

Da  $\pi$  nur mit drei zuverlässigen Ziffern als Eingabewert verwendet wurde, würden mehr als drei Ziffern im Ergebnis eine ungerechtfertigte Genauigkeit vortäuschen.

### Wesentliche Ziffern

Unter den **wesentlichen Ziffern** (auch **geltende Ziffern** genannt) versteht man alle Ziffern der Ziffernfolge dieser Zahl mit Ausnahme der Nullen, die links von der ersten und rechts von der letzten von Null verschiedenen Grundziffer in der Ziffernfolge stehen.

Alle wesentlichen Ziffern einer Ziffernfolge sind zuverlässige Ziffern, d. h. die (von rechts) erste ist nach den Rundungsregeln gerundet.

- a)  $354608519 \approx \underbrace{354609000}_{\substack{6 \text{ wesentliche} \\ \text{Ziffern}}} \approx \underbrace{355000000}_{\substack{3 \text{ wesentliche} \\ \text{Ziffern}}}$

- b)  $0,000370050 \approx 0,00037$   
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{5 \text{ wesentliche Ziffern}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2 \text{ wesentliche Ziffern}}$

- c)  $40000,00 \text{ km} = 40000000 \text{ m} = 4000000000 \text{ cm}$   
1 wesentliche Ziffer

### Zuverlässige Ziffern

Unter den **zuverlässigen Ziffern** einer reellen Zahl versteht man diejenige, die bis zu einer bestimmten Stelle zu deren Ziffernfolge gehören, wobei die letzte nach den Rundungsregeln ( $\nearrow 75$ ) gerundet ist.



## 4. REELLE ZAHLEN

Rechnen mit reellen Zahlen

- a) Zu 12 soll die Summe  $8 + 5$  addiert und die Differenz  $10 - 3$  subtrahiert werden.

$$12 + (8 + 5) - (10 - 3) = 12 + 13 - 7 = 18$$

- b) Die Summe aus der Summe  $3 + 4$  und der Differenz  $5 - 2$  ist mit dem Faktor 3 zu multiplizieren.

$$\{(3 + 4) + (5 - 2)\} \cdot 3 = \{7 + 3\} \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$$

Auflösen von Klammern

(1) Steht vor der Klammer ein *Pluszeichen*, so kann die Klammer weggelassen werden.

(2) Steht vor der Klammer ein *Minuszeichen*, so kann die Klammer weggelassen werden, wenn man die Plus- und Minuszeichen in der Klammer in die jeweils entgegengesetzten Zeichen verändert.

Setzen von Klammern

(1) Soll vor der Klammer ein Pluszeichen stehen, so kann man die Klammer ohne weiteres setzen.

(2) Soll vor der Klammer ein Minuszeichen stehen, so sind alle Plus- und Minuszeichen, die in der Klammer stehen sollen, in die entgegengesetzten Zeichen zu verändern.

► **Auflösen**

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

$$a - (-b + c) = a + b - c$$

$$a - (-b - c) = a + b + c$$

← **Setzen**

Multiplikation von Summen

Für alle reellen Zahlen  $a, b, c, d$  gilt:

► **Ausmultiplizieren**

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

← **Ausklammern**

Binomische Formeln

► Für alle reellen Zahlen  $a, b$  gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

## 4. REELLE ZAHLEN

Pascalsches Dreieck

Berechnet man  $(a + b)^n$  für  $n \geq 0$ ,  $n$  ganz, so erkennt man nach folgender Anordnung ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten. (Blaise Pascal, 1623–1662, franz. Mathematiker)

$$\begin{array}{r}
 (a \pm b)^0 = 1 \dots\dots\dots 1 \\
 (a \pm b)^1 = a \pm b \dots\dots\dots 1 \ 1 \\
 (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 a b + b^2 \dots\dots\dots 1 \ 2 \ 1 \\
 (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 a^2 b + 3 a b^2 \pm b^3 \dots\dots\dots 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 \pm 4 a b^3 + b^4 \ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{array}$$

Division von Summen durch eine Zahl

Für alle reellen Zahlen  $a, b, c, x$ ; ( $x \neq 0$ ) gilt:

$$(a + b + c) : x = a : x + b : x + c : x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}$$

Summen werden durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert.

Division von Summen durch Summen

$$\begin{array}{r}
 \blacksquare \text{ a) } (6x^2 + 7x + 2) : (3x + 2) = 2x + 1 \\
 \underline{-(6x^2 + 4x)} \phantom{+ 2} \\
 \phantom{6x^2 +} 3x + 2 \\
 \underline{-(3x + 2)} \\
 \phantom{6x^2 + 3x +} 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } (3x^2 + 8x + 6) : (3x + 2) = x + 2 + \frac{2}{3x + 2} \\
 \underline{-(3x^2 + 2x)} \phantom{+ 6} \\
 \phantom{3x^2 +} 6x + 6 \\
 \underline{-(6x + 4)} \\
 \phantom{3x^2 + 6x +} 2
 \end{array}$$

Algorithmus (Rechenvorschrift):

- (1) Man sucht ein Glied des Dividenden [ $6x^2$ ], das durch ein Glied des Divisors dividiert werden kann [ $3x$ ].
- (2) Man bildet das Produkt aus dem erhaltenen Quotienten [ $2x$ ] und dem Divisor [ $3x + 2$ ].
- (3) Man subtrahiert dieses Produkt [ $6x^2 + 4x$ ] vom Dividenden.

Nun sind zwei Fälle möglich:

1. Fall: Differenz ist Null; die Division ist ohne Rest durchgeführt.
2. Fall: Differenz ist nicht Null; die Schritte (1), (2) und (3) werden wiederholt.

Fall 2.1.: Nach endlich vielen Schritten wird die Differenz Null (✓ Beispiel a)

Fall 2.2.: Differenz wird nie Null (✓ Beispiel b); das Verfahren wird an geforderter Stelle abgebrochen (Division mit Rest)



Weitere Beispiele

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & 135 m^2 n^2 - 45 m^2 n + 45 m n^2 - 15 m n \\
 &= 15 m n (9 m n - 3 m + 3 n - 1) \\
 &= 15 m n [3 m (3 n - 1) + (3 n - 1)] \\
 &= 15 m n [(3 n - 1) (3 m + 1)] \\
 &= 15 m n (3 n - 1) (3 m + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \frac{4 x^2 + 12 x y + 9 y^2}{20 x + 30 y} = \frac{(2 x + 3 y)^2}{10 (2 x + 3 y)} \\
 &= \frac{1}{10} (2 x + 3 y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \frac{a^2 - 2 a b + b^2}{a^2 + 2 a b + b^2} = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2} : \frac{(a + b) (a - b)}{a + b} \\
 &= \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2} \cdot \frac{a + b}{(a + b) (a - b)} \\
 &= \frac{a - b}{(a + b)^2}
 \end{aligned}$$

**Arithmetisches Mittel (Durchschnitt)**

► **DEFINITION 88:** Das arithmetische Mittel  $\bar{a}$  von  $n$  Zahlen oder Größenangaben  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ist der Quotient aus der Summe dieser Zahlen und deren Anzahl.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

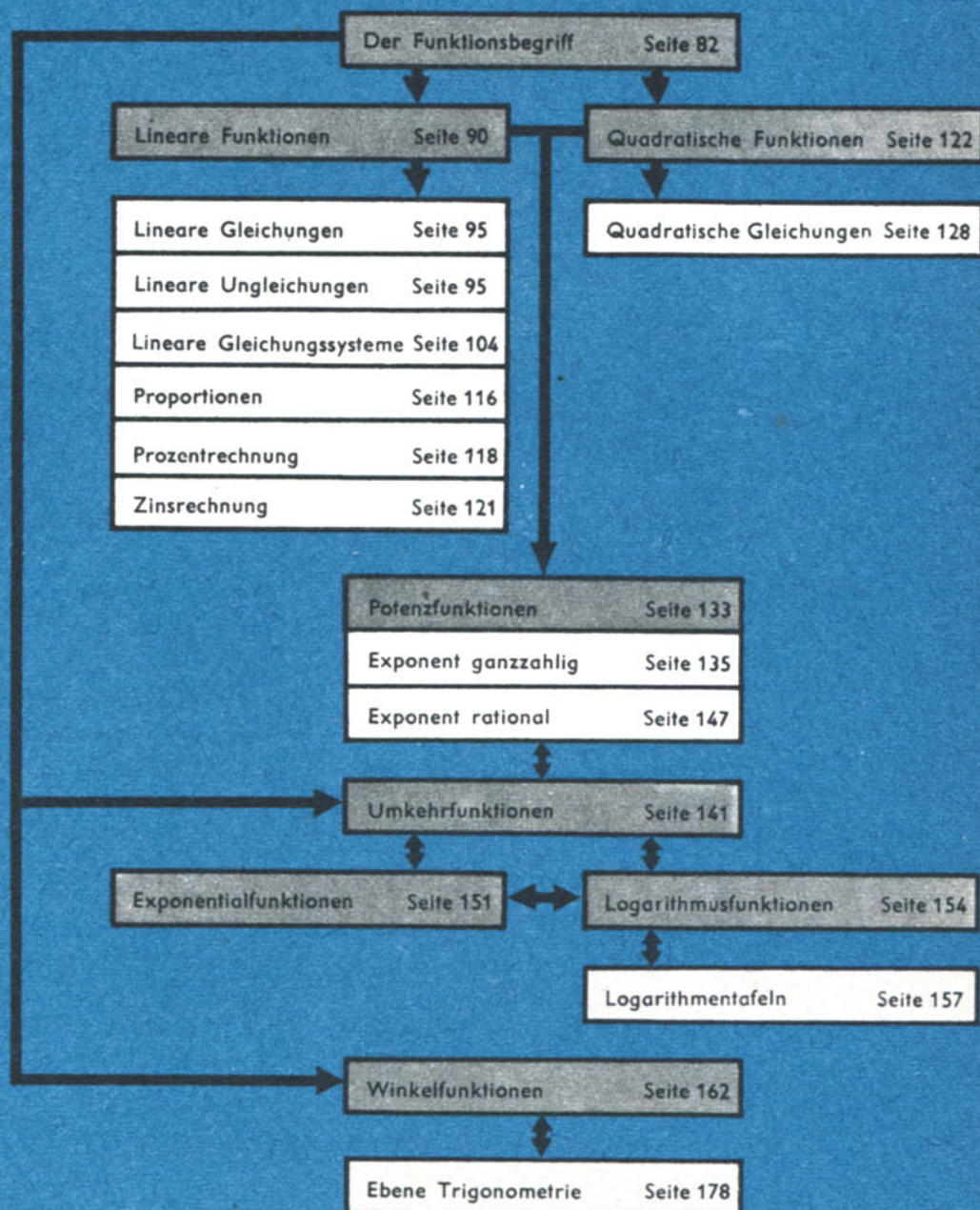
■ Während eines Tages wurden folgende Temperaturen gemessen:

Uhrzeit	0 <sup>00</sup>	3 <sup>00</sup>	6 <sup>00</sup>	9 <sup>00</sup>	12 <sup>00</sup>	15 <sup>00</sup>	18 <sup>00</sup>	21 <sup>00</sup>
Temp. $t$ in °C	10	8	6	11	16	20	17	12

Die Durchschnittstemperatur  $\bar{t}$  dieses Tages (das arithmetische Mittel) ist:

$$\bar{t} = \frac{10 + 8 + 6 + 11 + 16 + 20 + 17 + 12}{8} = \frac{100}{8} = 12,5$$

# Funktionen



# 1. DER FUNKTIONSBEGRIFF

## Darstellung von Zuordnungen

Darstellung von Zuordnungen																
durch Pfeile	durch eine Tabelle	durch geordnete Paare														
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>▲</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>○</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>■</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>▲</td> </tr> <tr> <td>e</td> <td>■</td> </tr> <tr> <td>f</td> <td>*</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	a	▲	b	○	c	■	d	▲	e	■	f	*	<p> <math>[a_i \text{▲}]</math>  <math>[b_i \text{○}]</math>  <math>[c_i \text{■}]</math>  <math>[d_i \text{▲}]</math>  <math>[e_i \text{■}]</math>  <math>[f_i \text{*}]</math> </p>
A	B															
a	▲															
b	○															
c	■															
d	▲															
e	■															
f	*															

In der Darstellung durch geordnete Paare stehen jeweils an erster Stelle die Elemente von A und an zweiter Stelle die Elemente von B.

- Die Menge A sei die Menge der reellen Zahlen. Jeder Zahl  $x$  aus dieser Menge werde die reelle Zahl  $y$  zugeordnet, für die z. B. folgende Gleichung gelte:

$$y = x^2.$$

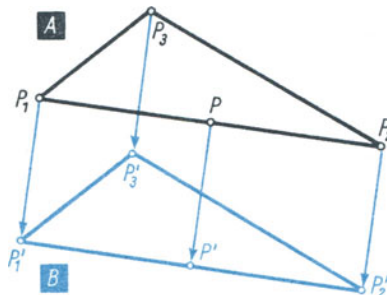
Sowohl die Menge A als auch die Menge B enthält unendlich viele Elemente.

Auswahl zusammengehöriger Elemente:

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$
y	9	4	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{25}{16}$	2

Man kann auch hier zusammengehörige Elemente als geordnete Paare schreiben, z. B.  $[-3; 9]$ ,  $[0; 0]$  usw.

- Die Menge A sei die Menge der Punkte eines Dreiecks. Durch eine Verschiebung der Ebene, in der das Dreieck liegt, wird jedem Dreieckspunkt  $P$  ein Bildpunkt  $P'$  eindeutig zugeordnet. Die Menge B der Bildpunkte ist wiederum ein Dreieck.



# 1. DER FUNKTIONSBEGRIFF

**Funktion**

► **DEFINITION 1:** Werden den Elementen einer Menge  $A$  eindeutig die Elemente einer Menge  $B$  zugeordnet, so heißt die dabei entstehende Menge von geordneten Paaren eine **Funktion**.





**Zur Bezeichnung von Funktionen** benutzt man u. a. die Buchstaben  $f, g, h, \varphi$ .

**Definitionsbereich, Wertevorrat**



**Die Menge  $A$  heißt Definitionsbereich, die Menge  $B$  Wertevorrat der Funktion.**

*Bemerkung:* Im folgenden werden Funktionen behandelt, bei denen Definitionsbereich und Wertevorrat Teilmengen ( $\neq \mathbb{R}$ ) der Menge der reellen Zahlen sind.

Zur Angabe von Definitionsbereich und Wertevorrat benutzt man auch folgende Intervallschreibweise ( $\neq$  70; Def. 83):

Schreibweise	Bedeutung
<b>abgeschlossenes Intervall</b>	
$-3 \leq x \leq 5$ oder $\langle -3; 5 \rangle$ 	Menge aller reellen Zahlen von $-3$ bis $5$ (einschließlich $-3$ und $5$ )
<b>offenes Intervall</b>	
$-3 < x < 5$ oder $(-3; 5)$ 	Menge aller reellen Zahlen zwischen $-3$ und $5$ (also ausschließlich $-3$ und $5$ )
<b>rechts halboffenes Intervall</b>	
$-3 \leq x < 5$ oder $\langle -3; 5)$ 	Menge aller reellen Zahlen zwischen $-3$ und $5$ (einschließlich $-3$ )
<b>unendliche Intervalle</b>	
$-\infty < x < \infty$ oder $(-\infty; \infty)$ 	Menge aller reellen Zahlen

# 1. DER FUNKTIONSBEGRIFF

unendliche Intervalle	
$-\infty < x \leq 5$ oder $(-\infty; 5]$ 	Menge aller reellen Zahlen, die kleiner oder gleich 5 sind.
$-3 < x < \infty$ oder $(-3; \infty)$ 	Menge aller reellen Zahlen, die größer als -3 sind.

Argumente,  
Funktionswerte

- ▶ **DEFINITION 2:** Die Elemente des Definitionsbereichs einer Funktion nennt man auch **Argumente**. Die Elemente des Wertevorrats nennt man die zu den betreffenden Argumenten gehörigen **Funktionswerte**.

- Beispiele für Variablen für

Argumente	$x$	$t$	$a$
Funktionswerte	$y = f(x)$	$s = \varphi(t)$	$V = g(a)$

Die Schreibweise  $y = f(x)$  (gelesen  $y$  gleich  $f$  von  $x$ ) bedeutet, daß die Zahl  $y$  bei der Funktion  $f$  dem Argument  $x$  zugeordnet ist.

Die Argumentvariable, für die man aus dem Definitionsbereich beliebig einsetzen kann, heißt **unabhängige** Variable. Die Variable für Funktionswerte heißt **abhängige** Variable.

**Darstellung  
von Funktionen**

## 1. Wertetabelle (Zahlenpaare)

Falls eine Funktion aus endlich vielen Zahlenpaaren besteht, kann man diese Paare in Form einer Tabelle angeben. Diese Tabelle nennt man Wertetabelle.

- Temperaturmessungen während eines Tages

Uhrzeit	0.00	3.00	6.00	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00
Temperatur in °C	12	10	9	14	18	23	19	15

# 1. DER FUNKTIONSBEGRIFF

Besteht eine Funktion aus unendlich vielen Zahlenpaaren, so gibt man oft eine Auswahl der Zahlenpaare in einer Wertetabelle an.

## 2. Funktionsgleichungen

Kann man bei einer Funktion zu jedem Argument den Funktionswert mit Hilfe einer Gleichung errechnen, so nennt man die betreffende Gleichung eine **Funktionsgleichung**.

- Jeder reellen Zahl  $x$  soll ihr Dreifaches, vermindert um 5, zugeordnet werden. Diese Vorschrift läßt sich durch  $y = 3x - 5$  angeben. Aus dieser Gleichung läßt sich zu jedem Argument  $x$  der zugehörige Funktionswert  $y$  berechnen. Beispiele:

x	-3	0,5	0	$\sqrt{3}$	2
y	-14	-3,5	-5	$\approx 0,2$	1

**Bemerkungen:**

(1) Statt „die Funktion mit der Gleichung  $y = f(x)$ “ sagt man auch kürzer „die Funktion  $y = f(x)$ “.

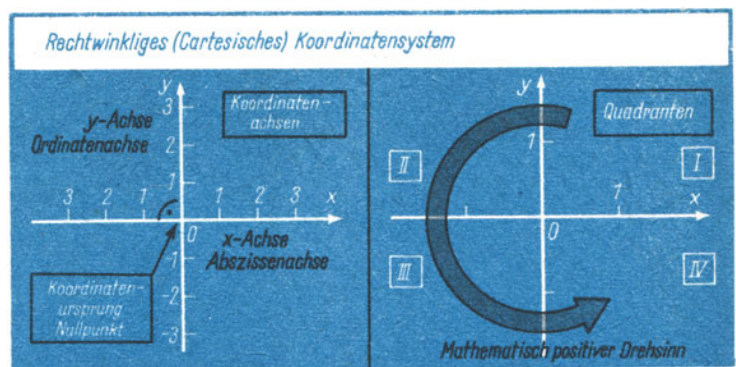
(2) Nicht jede Gleichung, in der zwei Variable auftreten, ist eine Funktionsgleichung.

- $x^2 + y^2 = 25$

Setzt man für  $x$  die Zahl 3 ein, so erhält man  $9 + y^2 = 25$ . Diese Gleichung wird sowohl von  $+4$  als auch von  $-4$  erfüllt. Der Zahl 3 werden also zwei verschiedene Zahlen zugeordnet, d. h. die Zuordnung ist nicht eindeutig.

## 3. Graphische Darstellung (Bild einer Funktion)

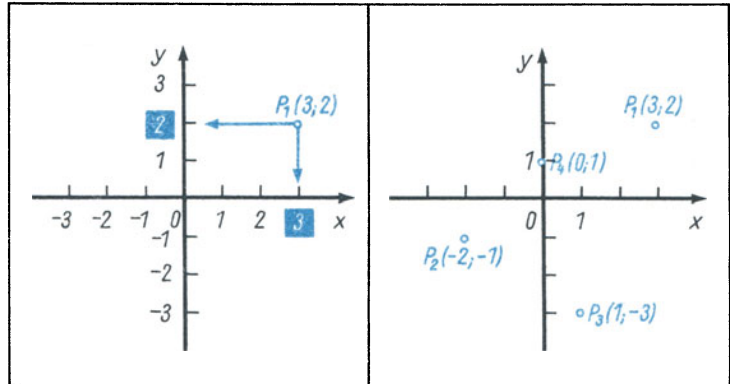
Zur graphischen Darstellung einer Funktion kann man ein Koordinatensystem verwenden, das aus zwei einander rechtwinklig schneidenden Zahlengeraden besteht.



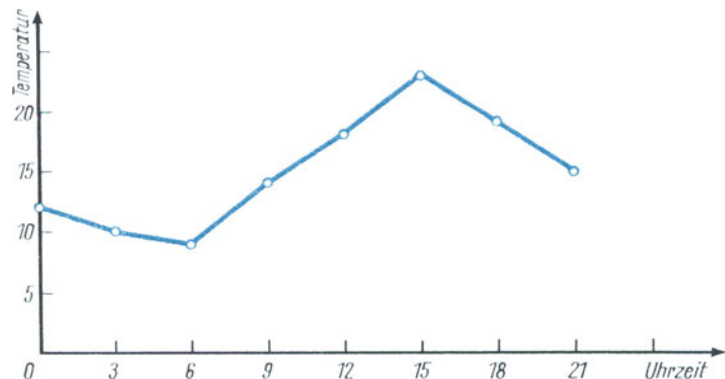


## 1. DER FUNKTIONSBEGRIFF

Durch ein solches Koordinatensystem wird jedem Punkt der Ebene eindeutig ein geordnetes Zahlenpaar und umgekehrt jedem geordneten Zahlenpaar eindeutig ein Punkt der Ebene zugeordnet.

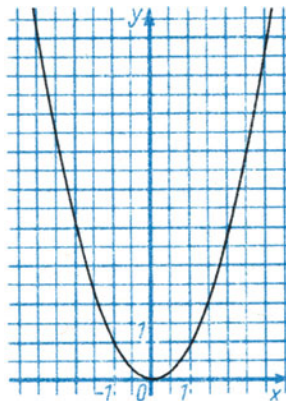


Damit ist auch jedem Zahlenpaar einer gegebenen Funktion ein Punkt im Koordinatensystem eineindeutig zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Punkte nennt man **graphische Darstellung** oder **Bild** der Funktion. Die graphische Darstellung einer Funktion ermöglicht einen anschaulichen Überblick über die Änderung der Funktionswerte.



Das Bild dieser Funktion besteht aus acht einzelnen Punkten. Damit der Temperaturunterschied zwischen den einzelnen Messungen deutlicher sichtbar wird, verbindet man diese Punkte durch Strecken. Die Zwischenpunkte auf diesen Strecken gehören i.a. aber nicht zum Bild der Funktion und geben daher nicht den *tatsächlichen* Temperaturverlauf an.

- Graphische Darstellung der Funktion  $y=x^2$ .



Wertetabelle:

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Die Wertetabelle enthält eine für das Zeichnen notwendige Auswahl aus der Menge der zur Funktion gehörenden Paare.

Mit Hilfe der Funktionsgleichung kann man außer den eingezeichneten Punkten beliebig viele weitere Punkte ermitteln. Das Bild dieser Funktion besteht nicht aus getrennt liegenden Punkten wie das Bild im Beispiel über den Temperaturverlauf. Es besteht aus einer zusammenhängenden Kurve, von der hier ein Ausschnitt gezeigt wird. Man kann diese Kurve nicht vollständig zeichnen, da der Definitionsbereich der Funktion aus der Menge aller reellen Zahlen besteht.

Man kann den Definitionsbereich der Funktion mit der Gleichung  $y = x^2$  z. B. auf die Menge aller reellen Zahlen  $x$  einschränken, für die  $-2 \leq x \leq 2$  gilt. Auf diese Weise erhält man eine andere Funktion; denn wegen der Einschränkung des Definitionsbereichs besteht sie nur aus einem Teil der Paare, die die ursprüngliche Funktion bildeten, obwohl sie dieselbe Funktionsgleichung besitzt. Das Bild der eingeschränkten Funktion läßt sich nun vollständig zeichnen.

Wird der Definitionsbereich nicht angegeben, so sollen alle die reellen Zahlen  $x$  zum Definitionsbereich gehören, für die sich aus der Funktionsgleichung ein Funktionswert  $y = f(x)$  berechnen läßt.

- $y = \sqrt{25 - x^2}$

Da Wurzeln nur für nichtnegative Radikanden erklärt sind ( $\nearrow$  147, Def. 32), lassen sich Funktionswerte nur für die reellen Zahlen  $x$  berechnen, für die gilt:  $x^2 \leq 25$ .

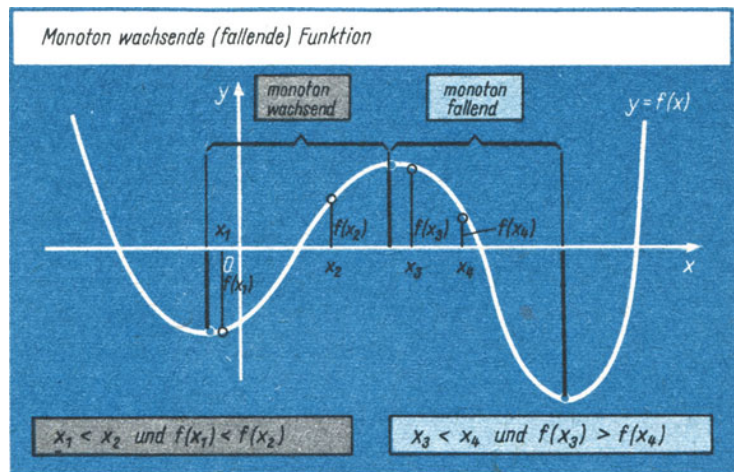
Daraus ergibt sich als Definitionsbereich die Menge der reellen Zahlen  $x$  mit  $-5 \leq x \leq 5$ .

## 1. DER FUNKTIONSBEGRIFF

### Monotonie bei Funktionen

- **DEFINITION 3:** Eine Funktion  $f$  heißt in einem Intervall ( $\neq \emptyset$ ) ihres Definitionsbereichs **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, wenn für je zwei Argumente  $x_1$  und  $x_2$  aus diesem Intervall mit  $x_1 < x_2$  gilt:  
 $f(x_1) < f(x_2)$  bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Ist eine Funktion in einem Intervall **monoton wachsend** bzw. **fallend**, so steigt bzw. fällt ihr Bild ständig in diesem Intervall (im Sinne wachsender Argumente).



### Nullstellen von Funktionen

Es gibt Funktionen, bei denen für gewisse Werte der unabhängigen Variablen  $x$  der zugehörige Funktionswert  $y = f(x)$  gleich Null ist. Das bedeutet, daß unter den Zahlenpaaren der Funktion solche vorkommen, die die Form  $[x; 0]$  haben. Diesen Paaren entsprechen bei der graphischen Darstellung der Funktion Punkte auf der  $x$ -Achse. Das Bild der Funktion schneidet also in diesen Punkten die  $x$ -Achse bzw. berührt diese.

- **DEFINITION 4:** Wenn die Werte  $y = f(x)$  einer Funktion für bestimmte Werte von  $x$  gleich Null sind, so heißen diese  $x$ -Werte **Nullstellen** der Funktion.

Die Nullstellen einer Funktion sind die Abszissen derjenigen Punkte, in denen das Funktionsbild die  $x$ -Achse schneidet bzw. berührt.

# 1. DER FUNKTIONSBEGRIFF

Nullstellen einer Funktion																
Funktionsgleichung	Wertetabelle	Bild der Funktion														
<p>a) <math>y = x^2 + x - 2</math></p> <p>Die Funktion hat 2 Nullstellen</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>4</td></tr> <tr><td>-2</td><td>0</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td></tr> <tr><td>0</td><td>-2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	x	y	-3	4	-2	0	-1	-2	0	-2	1	0	2	4	
x	y															
-3	4															
-2	0															
-1	-2															
0	-2															
1	0															
2	4															
<p>b) <math>y = \frac{1}{x}</math></p> <p>Die Funktion hat keine Nullstellen</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>-0,33</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-0,5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,33</td></tr> </tbody> </table>	x	y	-3	-0,33	-2	-0,5	-1	-1	1	1	2	0,5	3	0,33	
x	y															
-3	-0,33															
-2	-0,5															
-1	-1															
1	1															
2	0,5															
3	0,33															

Um die Nullstellen einer Funktion  $y = f(x)$  zu bestimmen, setzt man  $y$  gleich Null. Dadurch erhält man die Gleichung  $f(x) = 0$ , also eine Gleichung mit einer Variablen. Die Lösungen dieser Gleichung (96; Def. 7) sind die gesuchten Nullstellen.



## 2. LINEARE FUNKTIONEN

**Die Funktion**  $y = m x$   
Schar von Funktionen

Für jede reelle Zahl  $m$  erhält man eine bestimmte Funktionsgleichung. Durchläuft  $m$  alle reellen Zahlen, so ist durch die Gleichung  $y = m x$  eine **Schar** von Funktionen gegeben.

Definitionsbereich und Wertevorrat jeder dieser Funktionen mit  $m \neq 0$  ist die Menge der reellen Zahlen:

**Definitionsbereich:**  $-\infty < x < \infty$

**Wertevorrat:**  $-\infty < y < \infty$

Für  $m = 0$  enthält der Wertevorrat nur die Zahl 0.

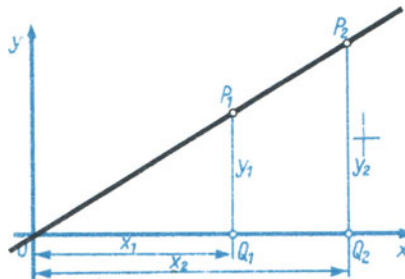
► **SATZ 5: Die Bilder der Funktionen  $y = m x$  sind Geraden, die durch den Ursprung (↗ 85) verlaufen.**

**Beweis:** Alle Punkte des Bildes einer Funktion  $y = m x$  liegen auf ein und derselben Geraden, die durch den Ursprung verläuft. Das erkennt man folgendermaßen: Die Koordinaten des Ursprungs  $(0; 0)$  erfüllen die Funktionsgleichung, denn es gilt:  $0 = m \cdot 0$ . Der Ursprung gehört also zum Bild der Funktion.

Die vom Ursprung verschiedenen Punkte  $P_1(x_1; y_1)$  und  $P_2(x_2; y_2)$  sollen ebenfalls zum Bild der Funktion gehören. Ihre Koordinaten erfüllen also die Funktionsgleichung:

$$y_1 = m x_1$$

$$y_2 = m x_2$$



Die rechtwinkligen Dreiecke  $OQ_1P_1$  und  $OQ_2P_2$  sind ähnlich, denn es gilt

$$\frac{y_1}{x_1} = m \text{ und } \frac{y_2}{x_2} = m \text{ (Ähnlichkeitssatz, ↗ 273).}$$

Deshalb ist  $\sphericalangle P_1OQ_1 = \sphericalangle P_2OQ_2$  und die Strecken  $\overline{OP_1}$  und  $\overline{OP_2}$  bilden mit der  $x$ -Achse denselben Winkel, d. h., sie liegen beide auf einer gemeinsamen Geraden. Damit liegen auch ihre Endpunkte  $P_1$  und  $P_2$  auf dieser Geraden durch den Ursprung. Wählt man statt  $P_2$  einen beliebigen anderen Punkt, dessen Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen, so ergibt sich durch die gleichen Überlegungen,

## 2. LINEARE FUNKTIONEN

daß er ebenfalls auf der durch  $O$  und  $P_1$  bestimmten Geraden liegt. Das bedeutet also, daß *alle* Punkte, die zum Bild der Funktion gehören, auf dieser Geraden liegen.

Damit steht aber noch keineswegs fest, daß auch alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen, zum Bild der Funktion gehören. Es ist also noch zu beweisen: *Alle Punkte der Geraden gehören zum Bild der Funktion.*

Ist  $P_1(x_1; y_1)$  ein vom Ursprung verschiedener Punkt des Funktionsbildes, so gilt für seine Koordinaten  $y_1 = m x_1$ ,

$$\text{d. h. } \frac{y_1}{x_1} = m.$$

Ist  $P_2(x_2; y_2)$  ein beliebiger anderer Punkt auf der durch  $O$  und  $P_1$  gehenden Geraden, so gilt für seine Koordinaten wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $OQ_1P_1$  und  $OQ_2P_2$ :

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}, \text{ also } \frac{y_2}{x_2} = m.$$

Daraus folgt  $y_2 = m x_2$ . Also gehört  $P_2$  zum Bild der Funktion. Da  $P_2$  beliebig gewählt war, gilt dies für *jeden* Punkt der Geraden.

w. z. b. w.

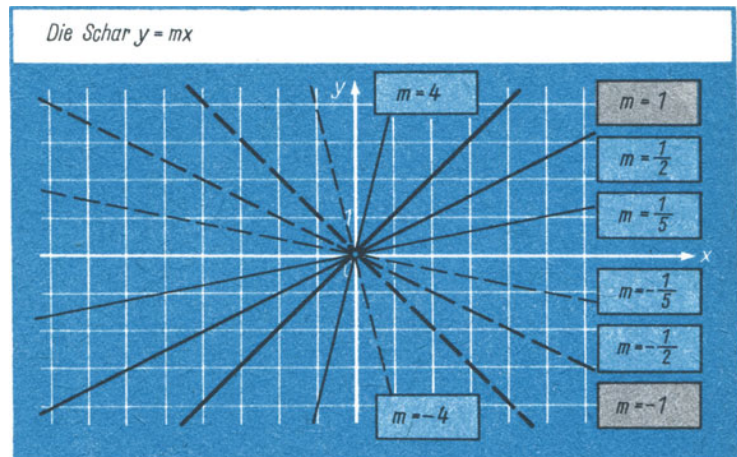


Bild einer Schar von Funktionen

Die Bilder der Funktionen  $y = m x$  und  $y = -m x$  sind symmetrisch in bezug auf die  $x$ -Achse und auf die  $y$ -Achse. Die Richtung der jeweiligen Geraden hängt vom Koeffizienten  $m$  ab.

Für  $m > 0$  steigt die Gerade.

Für  $m < 0$  fällt die Gerade.

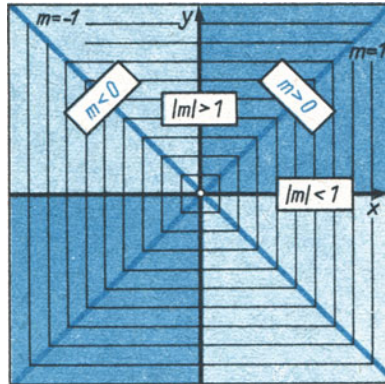
Für  $m = 0$  erhält man die Gleichung  $y = 0$ .

## 2. LINEARE FUNKTIONEN

Das bedeutet: Die Funktionswerte sind unabhängig von  $x$  stets gleich 0. Das Bild dieser Funktion ist die  $x$ -Achse.

Anstieg

► **DEFINITION 6:** Der Koeffizient  $m$  heißt der **Anstieg der Geraden** mit der Gleichung  $y = m x$ .



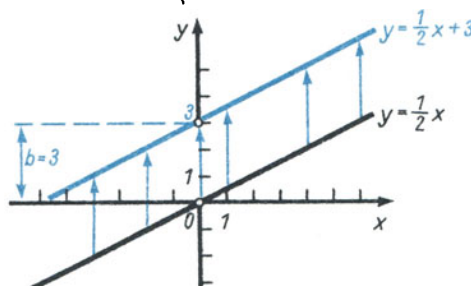
Die Bilder der durch  $y = m x$  gegebenen Schar von Funktionen sind also alle Geraden durch den Ursprung mit Ausnahme der  $y$ -Achse. Die  $y$ -Achse kann nämlich nicht Bild einer Funktion mit der Gleichung  $y = m x$  sein, denn auf ihr liegen alle Punkte  $P(0; y)$ , wobei für  $y$  alle reellen Zahlen eingesetzt werden können. Die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

**Die Funktionen**  
 $y = m x + b$

Der Summand  $m x$  heißt das **lineare Glied**, der Summand  $b$  das **absolute Glied** der Funktionsgleichung.

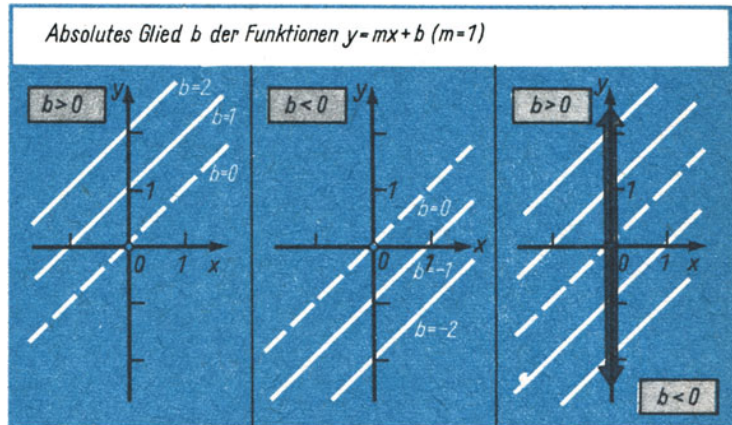
Das Bild einer bestimmten Funktion  $y = m x + b$  erhält man dadurch, daß man das Bild der Funktion  $y = m x$  um  $b$  parallel zur  $y$ -Achse verschiebt. Für  $b > 0$  erfolgt die Verschiebung in Richtung wachsender  $y$ -Werte, für  $b < 0$  erfolgt die Verschiebung in Richtung fallender  $y$ -Werte.

■  $y = \frac{1}{2} x + 3 \left( m = \frac{1}{2} ; b = 3 \right)$



## 2. LINEARE FUNKTIONEN

Da die Größe der Verschiebung auch auf der  $y$ -Achse abgelesen werden kann, gibt  $b$  an, wo die Gerade  $y = m x + b$  die  $y$ -Achse schneidet.

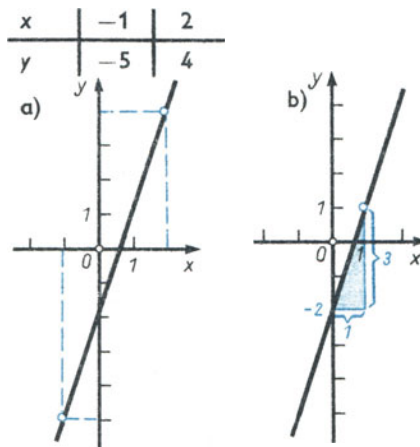


Die Funktionen  $y = m x + b$  heißen **lineare Funktionen**. Ihre Bilder sind Geraden mit dem Anstieg  $m$ , die die  $y$ -Achse im Abstand  $b$  vom Ursprung schneiden. Die Funktionen  $y = m x + b$  sind für  $m > 0$  monoton wachsend, für  $m < 0$  monoton fallend.

Bild linearer Funktionen

■  $y = 3 x - 2$

a) Graphische Darstellung mit Hilfe einer Wertetabelle. Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, braucht die Wertetabelle nur zwei Paare zu enthalten



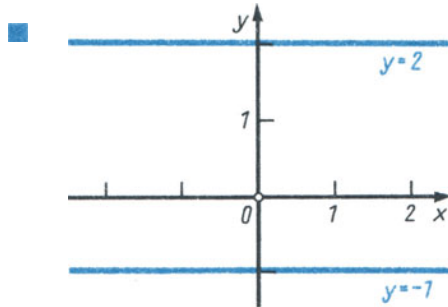
b) Graphische Darstellung unter Verwendung von  $m$  und  $b$



## 2. LINEARE FUNKTIONEN

### Die Funktionen $y = b$

Für  $m = 0$  erhält man die speziellen linearen Funktionen  $y = b$ . Bei ihnen sind die Funktionswerte unabhängig von  $x$  stets gleich  $b$ , oder mit anderen Worten, jeder reellen Zahl  $x$  wird dieselbe Zahl  $b$  zugeordnet. Das bedeutet, die Bilder der Funktionen  $y = b$  sind Parallelen zur  $x$ -Achse im Abstand  $b$ .



Explizite und implizite Form einer Funktionsgleichung

Ist eine Funktionsgleichung nach der abhängigen Variablen aufgelöst, so sagt man, die Gleichung sei in *expliziter* Form gegeben. In allen anderen Fällen hat die Gleichung *implizite* Form.

Implizite Form	Explizite Form
$Ax + By = C \quad (B \neq 0)$	$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B} = mx + b$
$4x + 3y = -9$	$y = -\frac{4}{3}x - 3$

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

#### Gleichungen

Ausdrücke, in denen das Gleichheitszeichen „=“ vorkommt, heißen **Gleichungen**.

Die durch das Gleichheitszeichen getrennten Teile einer Gleichung heißen *linke* bzw. *rechte* Seite dieser Gleichung.

#### Ungleichungen

Ausdrücke, in denen die Zeichen „<“, „>“, „≤“, „≥“ vorkommen, heißen **Ungleichungen**.

Wie bei den Gleichungen, unterscheidet man auch hier linke bzw. rechte Seiten der Ungleichungen. Gleichungen und Ungleichungen ohne Variable sind wahre oder falsche Aussagen (✓ 6).

- a)  $4 + 3 = 7$  (wahr)      b)  $5 \cdot 7 > 30$  (wahr)
- c)  $3 \cdot 0 = 3$  (falsch)    d)  $(5 + 4)^2 \leq 10$  (falsch)

Von Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen kann man zunächst nicht sagen, ob sie wahr oder falsch sind. Setzt man aber für die Variablen bestimmte reelle Zahlen ein, so entstehen entweder wahre oder falsche Aussagen.

x	3x + 7 = 0	
-2	$3(-2) + 7 = 0$	f
0	$3 \cdot 0 + 7 = 0$	f
$-\frac{7}{3}$	$3\left(-\frac{7}{3}\right) + 7 = 0$	w

a	3a < 9	
-2,5	$3(-2,5) < 9$	w
1	$3 \cdot 1 < 9$	w
3	$3 \cdot 3 < 9$	f

u	v	(u + v) <sup>2</sup> ≥ u <sup>2</sup> + v <sup>2</sup>	
-2	3	$(-2 + 3)^2 \geq (-2)^2 + 3^2$	f
-2	-3	$(-2 - 3)^2 \geq (-2)^2 + (-3)^2$	w
0	0	$(0 + 0)^2 \geq 0^2 + 0^2$	w

Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer Variablen werden durch Einsetzen einer Zahl für diese Variable zu wahren oder falschen Aussagen.

Gleichungen bzw. Ungleichungen mit zwei Variablen werden durch Einsetzen von Zahlenpaaren zu wahren oder falschen Aussagen.

**Bemerkung:**

Enthalten Gleichungen bzw. Ungleichungen mehr als zwei Variablen, so muß man entsprechend der Anzahl der Variablen mehr als zwei Zahlen einsetzen, um wahre oder falsche Aussagen zu erhalten.

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

---

Wird eine Gleichung oder Ungleichung mit Variablen beim Einsetzen zu einer wahren Aussage, so sagt man, daß sie durch die betreffende Zahl oder durch das betreffende Zahlenpaar erfüllt wird.

**Lösung einer Gleichung bzw. Ungleichung**

▶ **DEFINITION 7:** Jede Zahl (jedes Zahlenpaar), das eine Gleichung oder Ungleichung erfüllt, heißt Lösung.

Allen Untersuchungen über Lösbarkeit von Gleichungen und Ungleichungen liegt der Bereich der reellen Zahlen zugrunde, wenn nichts anderes gesagt ist. Gibt es keine Lösung, so heißt die betreffende Gleichung oder Ungleichung *unlösbar*.

Eine Gleichung oder Ungleichung lösen, bedeutet, *sämtliche* Lösungen zu finden.

**Äquivalenz von Gleichungen (Ungleichungen)**

▶ **DEFINITION 8:** Zwei Gleichungen (zwei Ungleichungen) heißen *gleichwertig* oder *äquivalent*, wenn sie dieselben Lösungen besitzen.

Beim Lösen einer Gleichung oder Ungleichung wird diese durch schrittweises Umformen vereinfacht. Eine Umformung, die eine Gleichung oder Ungleichung in eine dazu äquivalente Gleichung oder Ungleichung überführt, heißt **äquivalente Umformung**.

Um eine Gleichung mit einer Variablen (z. B.  $x$ ) zu lösen, formt man sie so lange um, bis man Gleichungen der Form  $x = a$  erhält, aus denen man die Lösungen unmittelbar ablesen kann. Deshalb sagt man kurz:  $x = a$  ist eine Lösung der gegebenen Gleichung. Man bezeichnet diese Umformungen als **Auflösen** nach der Variablen  $x$  oder als **Isolieren** der Variablen  $x$ .

Isolieren

Werden beim Lösen nur äquivalente Umformungen ausgeführt, so erhält man die gesuchten Lösungen. Anderenfalls können Lösungen fortfallen oder auch im Endergebnis Zahlen auftreten, die nicht zu den gesuchten Lösungen gehören.

■ a) Die Gleichung  $3x(x - 4) = 6(x - 4)$  ist zu lösen.

$$\begin{array}{l} 3x(x - 4) = 6(x - 4) \quad | : (x - 4) \\ 3x = 6 \quad | : 3 \\ x = 2 \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich die Zahl 2. Dagegen hat die gegebene Gleichung die Zahlen 2 und 4 als Lösung. Die Division durch  $x - 4$  ist also keine äquivalente Umformung.

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

$$\begin{array}{l|l} \blacksquare \text{ b) } \sqrt{x+42} = x & \text{Quadrieren} \\ x+42 = x^2 & \text{Ordnen} \\ x^2 - x - 42 = 0 & \end{array}$$

Die letzte Gleichung hat die Lösungen  $x_1 = 7$  und  $x_2 = -6$ . Die gegebene Gleichung hat aber nur die Lösung  $x_1 = 7$ .

Probe

Umformungen, bei denen wie in Beispiel a) Lösungen fortfallen, dürfen nicht vorgenommen werden. Dagegen lassen sich Umformungen wie in Beispiel b) oft nicht vermeiden. Um die dadurch auftretenden Zahlen, die nicht Lösungen sind, wieder auszusondern, macht man eine *Probe*. Dazu setzt man die erhaltenen Zahlen in die Ausgangsgleichung ein und prüft nach, ob dabei eine wahre Aussage entsteht.

$$\begin{array}{l} \blacksquare \sqrt{x+42} = x \\ \text{Lösungen:} \\ x_1 = 7 \qquad x_1 = 7: \qquad \text{Probe:} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \sqrt{7+42} = 7 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 7 = 7 \text{ (wahr)} \\ x_2 = -6 \qquad x_2 = -6: \qquad \sqrt{-6+42} = -6 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 6 = -6 \text{ (falsch)} \end{array}$$

Außerdem ist die Probe eine Rechenkontrolle. Bei der Probe müssen nach dem Einsetzen beide Seiten der Gleichung getrennt ausgerechnet werden. Wiederholt man nämlich bei der Probe nichtäquivalente Umformungen aus dem Lösungsgang, so können aus falschen Aussagen wahre Aussagen entstehen. Dasselbe kann auch durch Wiederholung von Rechenfehlern aus dem Lösungsgang bewirkt werden.

- Die Gleichung  $\sqrt{x+3} = -5$  ist nicht lösbar, da die Wurzel nicht negativ sein kann. Jemand „löst“ die Gleichung folgendermaßen:

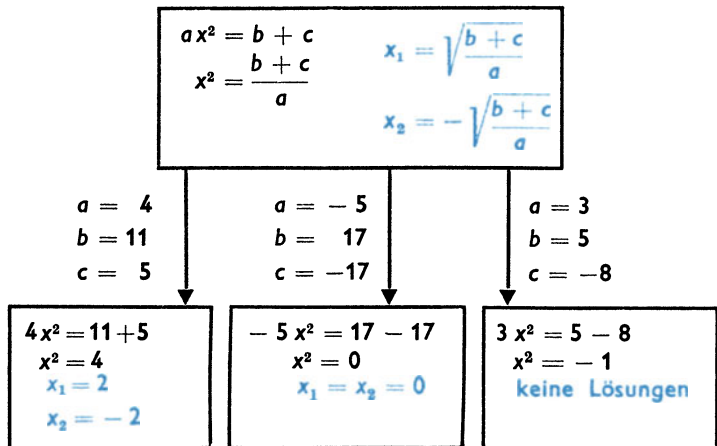
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{x+3} = -5 & \text{Quadrieren} \\ x+3 = 25 & -3 \\ x = 22 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Probe:} \\ \sqrt{22+3} = -5 \\ 22+3 = 25 \\ 25 = 25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quadrieren (bei} \\ \text{der Probe nicht} \\ \text{zugelassen)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Richtig ausgeführte Probe:} \\ \sqrt{22+3} = -5 \\ \sqrt{25} = -5 \\ 5 = -5 \end{array}$$

Da bei der Probe im ersten Fall eine nichtäquivalente Umformung des Lösungsganges (Quadrieren) wiederholt wurde, ist aus der falschen Aussage  $\sqrt{22+3} = -5$  die wahre Aussage  $22+3 = 25$  entstanden, obwohl  $x = 22$  nicht Lösung der Gleichung ist.

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Außer Variablen wie  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , für die Lösungen gesucht werden, kommen in Gleichungen und Ungleichungen oft noch andere Variablen vor, die als beliebige, aber feste Zahlen betrachtet werden.



Setzt man für die Variablen  $a$ ,  $b$  und  $c$  bestimmte Zahlen ein, so erhält man jeweils eine spezielle Gleichung. Erfüllen die für  $a$ ,  $b$  und  $c$  eingesetzten Zahlen die Ungleichung  $\frac{b+c}{a} \geq 0$ , so ist die betreffende Gleichung lösbar, und man erhält ihre Lösungen durch Einsetzen aus

$$x_1 = \sqrt{\frac{b+c}{a}} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{b+c}{a}}.$$

#### Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Jede lineare Funktion  $y = mx + b$ ; ( $m \neq 0$ ) hat genau eine Nullstelle; denn ihr Bild ist eine Gerade, die zur  $x$ -Achse nicht parallel ist, die mit dieser also genau einen Schnittpunkt hat.

Zur Bestimmung dieser Nullstelle setzt man  $y$  gleich 0 ( $\sphericalangle 89$ ) und erhält  $mx + b = 0$ .

Gleichungen der Form  $mx + b = 0$  und alle Gleichungen, die sich durch äquivalente Umformungen auf diese Form bringen lassen, heißen **lineare Gleichungen mit einer Variablen**.

#### Rechnerische Lösung von Gleichungen

Das Lösen von Gleichungen erfolgt mit Hilfe äquivalenter Umformungen.

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Äquivalente  
Umformungen

1. Zusammenfassung entsprechender Glieder, die auf derselben Seite der Gleichung stehen.

Entsprechende Glieder sind jeweils: Die absoluten Glieder ( $\neq 92$ ), die linearen Glieder und Glieder, die die Variable in derselben Potenz enthalten.

2. Addition oder Subtraktion derselben Zahl oder desselben Vielfachen der Variablen bzw. gleicher Potenzen von ihr auf beiden Seiten.

3. Multiplikation beider Seiten mit derselben von Null verschiedenen Zahl. Division beider Seiten durch dieselbe von Null verschiedene Zahl.

4. Vertauschung der Seiten.

Diese Umformungen werden in der Reihenfolge angewendet, die einen möglichst bequemen Lösungsweg für die gegebene Gleichung ergibt.

$$\begin{array}{l} \blacksquare \text{ a) } mx + b = 0, m \neq 0 \quad \left| \begin{array}{l} -b \\ :m \end{array} \right. \\ mx = -b \\ x = -\frac{b}{m} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Probe:} \\ m\left(-\frac{b}{m}\right) + b = 0 \\ -b + b = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$$\text{b) } 3x - \frac{2x+5}{7} = 16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}$$

Mit Hauptnenner (42) multiplizieren:

$$42\left(3x - \frac{2x+5}{7}\right) = 42\left(16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}\right)$$

Auflösen der Klammern:

$$126x - 6(2x+5) = 672 - 21(7x+19) - 14(2x+1)$$

Auflösen der Klammern:

$$126x - 12x - 30 = 672 - 147x - 399 - 28x - 14$$

Zusammenfassen:

$$\begin{array}{l} 114x - 30 = -175x + 259 \quad \left| \begin{array}{l} +175x + 30 \\ :289 \end{array} \right. \\ 289x = 289 \\ x = 1 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1 + 5}{7} = 16 - \frac{7 \cdot 1 + 19}{2} - \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} \\ 3 - 1 = 16 - 13 - 1 \\ 2 = 2 \end{array}$$

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

$$\begin{array}{l} \text{c) } 5x + a = 2b - 3a \quad | -a \\ 5x = 2b - 4a \quad | :5 \\ x = \frac{2b - 4a}{5} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Probe:} \\ 5 \cdot \frac{2b - 4a}{5} + a = 2b - 3a \\ 2b - 3a = 2b - 3a \end{array}$$

Auflösung derselben Gleichung nach  $a$ :

$$\begin{array}{l} 5x + a = 2b - 3a \quad | -5x + 3a \\ 4a = 2b - 5x \quad | :4 \\ a = \frac{2b - 5x}{4} \end{array}$$

Die Probe verläuft wie oben.

#### Nicht-äquivalente Umformungen

- 1) Division beider Seiten einer Gleichung durch die Variable. Dabei fällt die Zahl Null als Lösung fort.
- 2) Division beider Seiten einer Gleichung durch eine Summe oder ein Produkt, in denen die Variable vorkommt. Dabei fallen die Zahlen als Lösungen fort, für die die betreffende Summe bzw. das betreffende Produkt Null wird.

■ a)  $x(x - 7) = x(x - 3)$

Klammern auflösen

$$\begin{array}{l} x^2 - 7x = x^2 - 3x \quad | -x^2 + 3x \\ -4x = 0 \quad | :(-4) \\ x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Probe:} \\ 0(0 - 7) = 0(0 - 3) \\ 0 = 0 \end{array}$$

Division der gegebenen Gleichung durch die Variable  $x$ :

$$\begin{array}{l} x(x - 7) = x(x - 3) \quad | :x \\ x - 7 = x - 3 \end{array}$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar. Die Lösung  $x = 0$  ist also fortgefallen.

b)  $(x - 3)(x + 4) = (x - 7)(x - 3)$

Klammern auflösen

$$\begin{array}{l} x^2 + 4x - 3x - 12 = x^2 - 3x - 7x + 21 \\ x^2 + x - 12 = x^2 - 10x + 21 \quad | -x^2 + 10x + 12 \\ 11x = 33 \quad | :11 \\ x = 3 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{l} (3 - 3)(3 + 4) = (3 - 7)(3 - 3) \\ 0 \cdot 7 = -4 \cdot 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Division der gegebenen Gleichung durch  $x - 3$ :

$$\begin{array}{l} (x - 3)(x + 4) = (x - 7)(x - 3) \quad | : (x - 3) \\ x + 4 = x - 7 \end{array}$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar. Die Lösung  $x = 3$  ist also fortgefallen.

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Umformungen, bei denen durch Division beider Seiten der Gleichung Lösungen wegfällen, dürfen nur dann vorgenommen werden, wenn man zuvor untersucht hat, für welche Werte der Variablen der Divisor gleich Null wird. Diese Werte sind Lösungen der gegebenen Gleichung.

3) Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der Variablen. Dabei kommt die Zahl Null als Lösung hinzu.

„Die Zahl kommt als Lösung hinzu“ bedeutet, daß die betreffende Zahl Lösung der durch Multiplikation entstandenen Gleichung ist. Diese Zahl ist im allgemeinen jedoch nicht Lösung der ursprünglich gegebenen Gleichung.

4) Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einer Summe oder einem Produkt, in denen die Variable vorkommt. Dabei kommen die Zahlen als Lösungen hinzu, für die die betreffende Summe bzw. das betreffende Produkt Null wird.

■  $x - 1 = x$  Diese Gleichung hat keine Lösung.

Multiplikation der gegebenen Gleichung mit  $x - 1$

$$\begin{array}{l|l} x - 1 = x & \cdot (x - 1) \\ (x - 1)^2 = x(x - 1) & \text{Auflösen der Klammern} \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 - x & -x^2 + 2x \text{ (Seiten vertauschen)} \\ x = 1 & \end{array}$$

Probe:

$$1 - 1 = 1$$

$$0 = 1$$

Die Zahl 1 ist zwar Lösung der Gleichung

$$(x - 1)^2 = x(x - 1),$$

aber nicht Lösung der gegebenen Gleichung.

#### Lineare Gleichungen mit Brüchen

Lineare Gleichungen, in denen Brüche auftreten, werden zunächst mit dem Hauptnenner dieser Brüche multipliziert.

■ a)  $\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}; \quad (x \neq 0)$

Hauptnenner:  $18x$

$$\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9} \quad | \cdot 18x$$

Diese Multiplikation ist eine äquivalente Umformung, da  $x = 0$  nicht als Lösung hinzukommen kann. Diese Zahl mußte nämlich von vornherein ausgeschlossen werden, da für  $x = 0$  die gegebene Gleichung keinen Sinn hat.

$$\begin{array}{l|l} 18x \cdot \frac{9}{x} + 18x \cdot \frac{1}{2} = 18x \cdot \frac{10}{x} + 18x \cdot \frac{4}{9} & \text{Kürzen} \\ 162 + 9x = 180 + 8x & -8x - 162 \\ x = 18 & \end{array}$$



### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Probe:

$$\frac{9}{18} + \frac{1}{2} = \frac{10}{18} + \frac{4}{9}$$

$$1 = 1$$

b)  $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4}; (x \neq 2; x \neq 4)$

Hauptnenner:  $(x-2)(x-4)$

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4} \quad | \cdot (x-2)(x-4)$$

Auch hier ist diese Multiplikation eine äquivalente Umformung, da  $x=2$  und  $x=4$  ausgeschlossen sind.

$$(x-2)(x-4) \frac{x+3}{x-2} = (x-2)(x-4) \frac{x-7}{x-4}$$

Kürzen und Klammern auflösen:

$$x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - 2x - 7x + 14$$

Zusammenfassen:

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 9x + 14 \quad | -x^2 + 9x + 12$$

$$8x = 26$$

$$x = \frac{13}{4}$$

Probe:

$$\frac{13}{4} + 3 = \frac{13}{4} - 7$$

$$\frac{13}{4} - 2 = \frac{13}{4} - 4$$

$$\frac{25}{4} = \frac{-15}{4}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$5 = 5$$

Graphische Lösung  
von Gleichungen

Jede lineare Gleichung mit einer Variablen (z. B.  $x$ ) lässt sich durch äquivalente Umformungen auf die Form  $m x + b = 0$ ; ( $m \neq 0$ ) bringen.

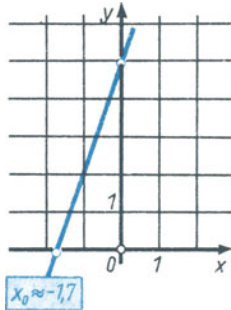
Die Lösung dieser Gleichung ist die Nullstelle der Funktion  $y = m x + b$  ( $\neq 98$ ).

Zur graphischen Lösung der Gleichung  $m x + b = 0$  zeichnet man das Bild der Funktion  $y = m x + b$  und liest die Nullstelle aus der Zeichnung ab.

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Wegen der Zeichengenauigkeit bekommt man nach diesem Verfahren im allgemeinen nicht die genaue Lösung.

- $3x + 5 = 0$ ; zugehörige Funktionsgleichung:  $y = 3x + 5$



Nullstelle:  $x \approx -1,7$

Probe:

$$3 \cdot (-1,7) + 5 = 0$$

$$-5,1 + 5 = 0$$

$$-0,1 = 0$$

Die Probe führt zu einer falschen Aussage. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit kann man sie jedoch durch die wahre Aussage  $-0,1 \approx 0$  ersetzen. Daher ist  $-1,7$  Näherungslösung ( $\nearrow 75$ ) der gegebenen Gleichung.

#### Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Jede Gleichung, die durch äquivalente Umformungen auf die Form  $Ax + Bx = C$  gebracht werden kann, heißt **lineare Gleichung mit zwei Variablen** ( $x$  und  $y$ ). In dieser Gleichung sind  $B$ ,  $A$  und  $C$  feste reelle Zahlen. Die Variablen  $x$  und  $y$  treten nur in der ersten Potenz auf. Jedes Zahlenpaar  $[x; y]$ , das die Gleichung  $Ax + By = C$  erfüllt, heißt *Lösung* dieser Gleichung ( $\nearrow 96$ ; Def. 7). Jede lineare Gleichung mit zwei Variablen hat unendlich viele Lösungen, ausgenommen der Fall  $A=B=0$  und  $C \neq 0$ .

#### Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

$A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$	$A \neq 0, B \neq 0, C = 0$	$A \neq 0, B = 0, C \neq 0$
$3x + 4y = 7$ Lösungen sind z. B. die Paare $[1; 1], [-1; 2,5],$ $[0; \frac{7}{4}], [\frac{7}{3}; 0]$	$5x - y = 0$ $y = 5x$ Lösungen sind Paare $[x; 5x]$ ( $x$ beliebig reell)	$\frac{1}{2}x + 0 \cdot y = 3$ $x = 6$ Lösungen sind Paare $[6; y]$ ( $y$ beliebig reell)

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen		
$A \neq 0, B = 0, C = 0$	$A = 0, B \neq 0, C \neq 0$	$A = 0, B \neq 0, C = 0$
$\frac{2}{3}x + 0 \cdot y = 0$ $x = 0$	$0 \cdot x + \frac{7}{5}y = \frac{3}{2}$ $y = \frac{15}{74}$	$0 \cdot x - \frac{1}{10}y = 0$ $y = 0$
Lösungen sind Paare $[0; y]$ , ( $y$ beliebig reell)	Lösungen sind Paare $[x; \frac{15}{74}]$ , ( $x$ beliebig reell)	Lösungen sind Paare $[x; 0]$ , $x$ beliebig reell
$A = 0, B = 0, C \neq 0$	$A = 0, B = 0, C = 0$	
$0 \cdot x + 0 \cdot y = 5$ $0 = 5$	$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ $0 = 0$	
keine Lösung	Lösungen sind alle Zahlenpaare $[x, y]$ ; ( $x, y$ beliebig reell) Die graphische Darstellung ist die ganze Ebene.	

Die graphische Darstellung der Gleichung  $Ax + By = C$  ist also stets eine Gerade, falls wenigstens einer der Koeffizienten  $A$  und  $B$  ungleich Null ist.

#### Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Betrachtet man zwei Gleichungen und sucht die Zahlenpaare, die *beide* Gleichungen erfüllen, so nennt man diese Gleichungen ein **System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen**.

(1)  $A_1 x + B_1 y = C_1$  Variable:  $x, y$

(2)  $A_2 x + B_2 y = C_2$  feste Zahlen:  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ .

Jedes Zahlenpaar, das beide Gleichungen des Systems erfüllt, heißt **Lösung** dieses Gleichungssystems. Die Probe muß an *beiden* Gleichungen vorgenommen werden. Ein Gleichungssystem kann a) keine Lösung, b) genau eine Lösung, c) unendlich viele Lösungen haben.

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

- a)  $\begin{cases} (1) & 3x + 4y = 3 \\ (2) & 3x + 4y = 8 \end{cases}$  keine Lösung
- b)  $\begin{cases} (1) & 2x - 4y = -8 \\ (2) & -0,5x + 3y = 8 \end{cases}$  Lösung:  $x = 2$   
 $y = 3$
- c)  $\begin{cases} (1) & x + y = 2 \\ (2) & 4x + 4y = 8 \end{cases}$  Unendlich viele Lösungen  
(Jedes Paar, das die erste Gleichung erfüllt, erfüllt auch die zweite Gleichung)

Im Fall a) sagt man: Die Gleichungen des Systems widersprechen einander. So kann in Beispiel a) die Summe  $3x + 4y$  nicht gleich 3 und gleich 8 sein.

Im Fall c) sagt man: Die Gleichungen des Systems sind abhängig. Im Beispiel c) ist Gleichung (2) durch Multiplikation mit 4 aus Gleichung (1) entstanden, also besteht das System eigentlich aus nur einer Gleichung.

Rechnerische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Zur Lösung von Gleichungssystemen gibt es drei Verfahren:

- a) *das Gleichsetzungsverfahren,*
- b) *das Einsetzungsverfahren,*
- c) *das Verfahren der gleichen Koeffizienten.*

Das Ziel jedes dieser Verfahren ist es, das Lösen von einem System mit zwei Variablen auf das Lösen von Gleichungen mit einer Variablen zurückzuführen. Man sagt: Eine der Variablen wird **eliminiert**.

Jedes Gleichungssystem kann mit jedem der drei Lösungsverfahren gelöst werden, falls es überhaupt lösbar ist.

In den folgenden Beispielen treten zunächst nur solche Systeme auf, die genau eine Lösung haben.

Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{cases} (1) & y = 1 + x \\ (2) & y = 13 - 2x \end{cases}$$

Wenn man die Existenz einer Lösung voraussetzt, so erfüllen die Zahlen des Lösungspaares beide Gleichungen. Auf den linken Seiten der beiden Gleichungen steht dann dieselbe Zahl, also auch auf den rechten Seiten, d. h. es gilt  $1 + x = 13 - 2x$ .

Die beiden rechten Seiten wurden gleichgesetzt. Dadurch ist die Variable  $y$  eliminiert worden und eine Gleichung mit einer Variablen entstanden, die wie üblich gelöst wird:

$$\begin{array}{rcl} 1 + x = 13 - 2x & & | + 2x - 1 \\ 3x = 12 & & \\ x = 4 & & \end{array}$$

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Damit ist eine Zahl des Lösungspaares gefunden. Zur Bestimmung der anderen setzt man sie in eine der gegebenen Gleichungen ein: *Probe:*

$$(1) \begin{array}{l} y = 1 + 4 \\ y = 5 \end{array} \quad (1) \begin{array}{l} 5 = 1 + 4 \\ 5 = 5 \end{array} \quad (2) \begin{array}{l} 5 = 13 - 2 \cdot 4 \\ 5 = 5 \end{array}$$

**Einsetzungsverfahren** ■  $(1) 9x - 5y = 3$   
 $(2) \quad \quad y = 8x - 13$

Unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung werden beide Gleichungen von den Zahlen des Lösungspaares erfüllt. Gleichung (2) besagt dann, daß man in Gleichung (1)  $8x - 13$  für  $y$  einsetzen und so die Variable  $y$  eliminieren kann:

$$\begin{array}{r|l} (1) 9x - 5(8x - 13) = 3 & \text{Klammer auflösen} \\ 9x - 40x + 65 = 3 & \text{Zusammenfassen} \\ -31x + 65 = 3 & -65 \\ -31x = -62 & : (-31) \\ x = 2 & \text{Einsetzen in (2)} \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{l} y = 8 \cdot 2 - 13 \\ y = 3 \end{array}$$

*Probe:*

$$(1) \begin{array}{l} 9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 3 \\ 3 = 3 \end{array} \quad (2) \begin{array}{l} 3 = 8 \cdot 2 - 13 \\ 3 = 3 \end{array}$$

**Verfahren der gleichen Koeffizienten** ■  $(1) 6x - 4y = -28$   
 $(2) 7x + 2y = -6$

Nimmt man wieder an, daß eine Lösung existiert, so werden von den Zahlen des Lösungspaares die gegebenen Gleichungen und auch alle bei den folgenden Umformungen auftretenden Gleichungen erfüllt.

Durch geeignetes Multiplizieren oder Dividieren beider Gleichungen erhält man für eine der Variablen gleiche Koeffizienten. Durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen wird dann diese Variable eliminiert.

<i>Eliminieren von x:</i>	<i>Eliminieren von y:</i>
$(1) 6x - 4y = -28 \quad   \cdot 7$	$(1) 6x - 4y = -28 \quad   : 2$
$(2) 7x + 2y = -6 \quad   \cdot 6$	$(2) 7x + 2y = -6$
$(1) 42x - 28y = -196$	$(1) 3x - 2y = -14$
$(2) 42x + 12y = -36$	$(2) 7x + 2y = -6$
$(1) - (2):$	$(1) + (2):$
$-40y = -160$	$10x = -20$
$y = 4$	$x = -2$

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

Einsetzen in (2):

$$\begin{array}{l} (2) \quad 7x + 2 \cdot 4 = -6 \quad | -8 \\ \quad \quad 7x = -14 \quad | :7 \\ \quad \quad x = -2 \end{array}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{array}{l} (2) \quad 7 \cdot (-2) + 2y = -6 \quad | +14 \\ \quad \quad 2y = 8 \quad | :2 \\ \quad \quad y = 4 \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 6 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 = -28 \\ \quad \quad -28 = -28 \end{array} \quad \begin{array}{l} (2) \quad 7 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -6 \\ \quad \quad -6 = -6 \end{array}$$

Man kann mit Hilfe der drei genannten Verfahren entscheiden, ob ein gegebenes Gleichungssystem genau eine oder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

■ (1)  $\frac{11}{4}x + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4}$

(2)  $\frac{x}{2} = 1 - y \quad | \cdot 2$

(2)  $x = 2 - 2y \quad | \text{Einsetzen in (1)}$

(1)  $\frac{11}{4}(2 - 2y) + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4}$

$$\frac{11}{2} - \frac{11}{2}y + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4}$$

$$\frac{11}{2} = \frac{17}{4}$$

Es hat sich ein Widerspruch ergeben. Das bedeutet, daß es kein Zahlenpaar gibt, das beide Gleichungen des gegebenen Systems erfüllt. Die beiden Gleichungen widersprechen einander.

Das erkennt man deutlich auch daran, daß man das gegebene Gleichungssystem auf folgende Form bringen kann:

(1)  $x + 2y = \frac{17}{11}$

(2)  $x + 2y = 2 \quad (\neq 105, \text{ Fall a})$

■ (1)  $x - 3y = 15$

(2)  $y = \frac{1}{3}x - 5 \quad | \text{Einsetzen in (1)}$

$$x - 3\left(\frac{1}{3}x - 5\right) = 15$$

$$\begin{array}{l} x - x + 15 = 15 \\ 15 = 15 \end{array}$$

Es ist die wahre Aussage  $15 = 15$  entstanden.

Das System hat unendlich viele Lösungen. Jedes Zahlenpaar, das die eine Gleichung erfüllt, erfüllt auch die an-



### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

dere. Die Gleichungen sind voneinander abhängig. Das zeigt auch folgende Umformung:

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad x - 3y = 15 \\
 (2) \quad y = \frac{1}{3}x - 5 \quad | \quad (-3) \\
 \hline
 (1) \quad x - 3y = 15 \\
 (2) \quad -3y = -x + 15 \quad | \quad +x \\
 \hline
 (1) \quad x - 3y = 15 \\
 (2) \quad x - 3y = 15 \quad (\neq 105, \text{ Fall c})
 \end{array}$$

Die Anwendung jeweils eines der drei Lösungsverfahren auf ein Gleichungssystem ergibt

- a) einen Widerspruch, falls das System nicht lösbar ist,
- b) die Lösung, falls das System genau eine Lösung hat,
- c) eine wahre Aussage, falls das System unendlich viele Lösungen hat.

Zur graphischen Lösung eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen stellt man die Lösungen beider Gleichungen ( $\nearrow$  104) in ein und demselben Koordinatensystem dar. Dadurch erhält man zwei Geraden, falls nicht in einer Gleichung  $A = 0$  und  $B = 0$  ist. Die Lösungen des Gleichungssystems sind diejenigen Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen. Die graphischen Darstellungen dieser Lösungen sind also diejenigen Punkte, die auf beiden Geraden liegen.

Hat das gegebene Gleichungssystem genau eine Lösung, so findet man diese als Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden in der graphischen Darstellung

Graphische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Graphische Lösung von Gleichungssystemen		
1. Fall: 2 parallele nicht zusammenfallende Geraden	Gleichungen widersprechen einander	keine Lösungen
2. Fall: 2 einander schneidende Geraden		genau eine Lösung
3. Fall: 2 zusammenfallende Geraden	Gleichungen sind voneinander abhängig	unendlich viele Lösungen

### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

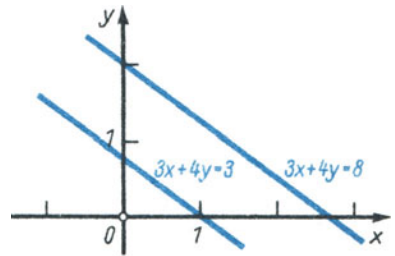
Wegen der Zeichengenauigkeit erhält man im allgemeinen Näherungslösungen. Das ist auch bei der Probe zu berücksichtigen.

■ (✓ 105, erstes Beispiel)

a) (1)  $3x + 4y = 3$   
 (2)  $3x + 4y = 8$

(1)  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

(2)  $y = -\frac{3}{4}x + 2$



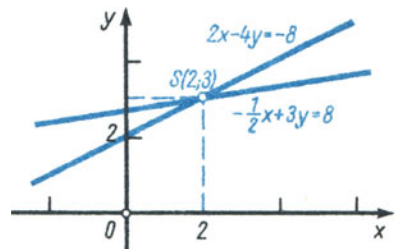
b) (1)  $2x - 4y = -8$

(2)  $-\frac{1}{2}x + 3y = 8$

(1)  $y = \frac{1}{2}x + 2$

(2)  $y = \frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$

Man liest ab:  
 $x \approx 2; y \approx 3$

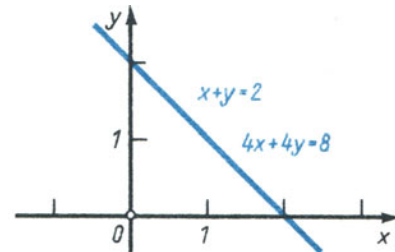


c) (1)  $x + y = 2$

(2)  $4x + 4y = 8$

(1)  $y = -x + 2$

(2)  $y = -x + 2$



■ (1)  $x + 5y = 2,3$

(2)  $x + y = 1,5$

(1)  $y = -\frac{1}{5}x + 0,46$

(2)  $y = -x + 1,5$

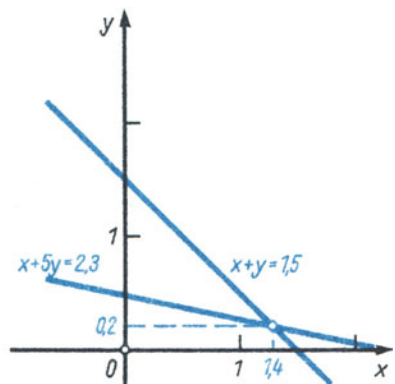
Man liest ab:

$x \approx 1,4; y \approx 0,2$

Probe:

(1)  $1,4 + 5 \cdot 0,2 \approx 2,3$   
 $2,4 \approx 2,3$

(2)  $1,4 + 0,2 \approx 1,5$   
 $1,6 \approx 1,5$





### 3. LINEARE GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

#### Systeme von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen

Mit Hilfe derselben Lösungsverfahren wie bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen werden die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Variablen schrittweise verringert.

$$\begin{array}{l}
 \blacksquare \quad (1) \quad 3x + 4y + 3z = 1 \\
 \quad \quad (2) \quad 2x - y - z = 6 \\
 \quad \quad (3) \quad x + 3y + 2z = -1 \\
 \hline
 (1) \quad 6x + 8y + 6z = 2 \\
 (2) \quad -6x + 3y + 3z = -18 \\
 \hline
 (1') \quad 11y + 9z = -16 \\
 (1) \quad 3x + 4y + 3z = 1 \\
 (2) \quad 2x - y - z = 6 \\
 (3) \quad x + 3y + 2z = -1 \\
 \hline
 (2) \quad 2x - y - z = 6 \\
 (3) \quad -2x - 6y - 4z = 2 \\
 \hline
 (2') \quad -7y - 5z = 8 \\
 (1') \quad 11y + 9z = -16 \\
 (2') \quad -7y - 5z = 8 \\
 \hline
 (1') \quad 55y + 45z = -80 \\
 (2') \quad -63y - 45z = 72 \\
 \hline
 \quad \quad -8y = -8 \\
 \quad \quad y = 1 \\
 (2') \quad -7 \cdot 1 - 5z = 8 \\
 \quad \quad -5z = 15 \\
 \quad \quad z = -3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \cdot 2 \\
 \cdot (-3) \\
 \text{Addition} \\
 \text{von (1) und (2)} \\
 \\
 \cdot (-2) \\
 \text{Addition von} \\
 \text{(2) und (3)} \\
 \\
 \cdot 5 \\
 \cdot 9 \\
 \text{Addition von} \\
 \text{(1') und (2')} \\
 : (-8) \\
 \text{Einsetzen in (2')} \\
 +7 \\
 : (-5)
 \end{array}$$

$y = 1$  und  $z = 3$  in (3) einsetzen:

$$\begin{aligned}
 x + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) &= -1 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

**Lösung:**

$$x = 2; y = 1; z = -3$$

**Probe:**

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3(-3) = 1 & (2) \quad 2 \cdot 2 - 1 + 3 = 6 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 = 1 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6 = 6 \\
 (3) \quad 2 + 3 \cdot 1 + 2(-3) = -1 & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -1 = -1 &
 \end{array}$$

## 4. PROPORTIONALITÄT

### Zahlenvergleich durch Differenzen

Zum Vergleich von Zahlen  $a$  und  $b$  kann man die Differenzen  $a - b$  oder  $b - a$  bilden.

Der Betrag  $|a - b| = |b - a|$  dieser Differenzen gibt den „Unterschied“ der Zahlen  $a$  und  $b$  an.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad a &= -10,5 \\ b &= 3,9 \end{aligned} \quad |a - b| = |b - a| = 14,4$$

Die beiden Zahlen unterscheiden sich um 14,4.

### durch Quotienten

Zum Vergleich von Zahlen  $a$  und  $b$  ( $a, b \neq 0$ ) kann man auch die Quotienten  $\frac{a}{b}$  oder  $\frac{b}{a}$  bilden.

### Das Verhältnis zweier Zahlen

► **DEFINITION 9:** Sind die Zahlen  $a$  und  $b$  von 0 verschieden, so heißt der Quotient  $\frac{a}{b}$  (auch  $a:b$  geschrieben) das **Verhältnis** von  $a$  zu  $b$ .

Sind  $a$  und  $b$  rationale Zahlen (✓ 59), so sind auch ihre Verhältnisse  $\frac{a}{b}$  bzw.  $\frac{b}{a}$  rationale Zahlen. Sie lassen sich daher als Quotienten ganzer Zahlen (✓ 67) schreiben. Das Verhältnis  $\frac{\sqrt{2}}{7}$  z. B. ist dagegen irrational (✓ 74) und daher nicht als Quotient ganzer Zahlen darstellbar.

$$\blacksquare \quad \begin{aligned} a &= -2,4 \\ b &= 6 \end{aligned} \quad \frac{a}{b} = \frac{-2,4}{6} = \frac{-2}{5} = -0,4$$

Das Verhältnis von  $-2,4$  zu 6 ist also gleich  $-0,4$ .

### Vergleich von Größen- angaben

In der Praxis werden nicht nur Zahlen, sondern auch Größenangaben miteinander verglichen. Größen sind z. B. Länge, Geschwindigkeit, Temperatur, Arbeit. Ihre charakteristische Eigenschaft besteht darin, daß sie gemessen werden können. Größenangaben bestehen aus einer Zahl, der **Maßzahl**, und einer **Einheit**. Zwei gleichartige Größenangaben können verglichen werden, indem man das Verhältnis ihrer Maßzahlen bildet. Dabei muß für Zahlenangaben ein und derselben Größe die gleiche Einheit verwendet werden. Sollen verschiedenartige Größenangaben verglichen werden, so wird dem Verhältnis der Maßzahlen eine Benennung hinzugefügt, die sich aus den Einheiten der zu vergleichenden Größenangaben ergibt.

#### 4. PROPORTIONALITÄT

---

Werden Größenangaben verglichen, so sagt man auch: es wird das Verhältnis der Größen gebildet.

- a) Verhältnis der Spurweiten bei Modellbahn Spur TT und Reichsbahn:

$$\frac{12 \text{ mm}}{1435 \text{ mm}} \approx \frac{1}{120}$$

- b) Von einem 2 Hektar großen Acker wurden 60 dt Weizen geerntet.

$$\frac{60 \text{ dt}}{2 \text{ ha}} = 30 \frac{\text{dt}}{\text{ha}}.$$

#### Der absolute Fehler

Bei Angaben von Meß- und Näherungswerten treten stets Abweichungen vom wahren Wert auf.

- ▶ **DEFINITION 10:** Die Differenz zwischen einem Meß- oder Näherungswert und dem wahren Wert einer Größe heißt **absoluter Fehler**.

Je nach Vorzeichen dieser Differenz ist der absolute Fehler positiv oder negativ. Er hat dieselbe Maßeinheit wie die betrachtete Größe.

#### Der relative Fehler

**DEFINITION 11:** Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum wahren Wert heißt **relativer Fehler**.

Der relative Fehler ist eine unbenannte Zahl, die dasselbe Vorzeichen hat wie der zugehörige absolute Fehler. Er wird oft in Prozenten angegeben. (↗ 118)

- Mit Zirkel und Lineal wurde ein rechter Winkel konstruiert. Nachträgliche Messung ergab  $89,5^\circ$ .

*absoluter Fehler*

*relativer Fehler*

$$89,5^\circ - 90^\circ = -0,5^\circ$$

$$-\frac{0,5}{90} = -0,00\bar{5} \approx -0,6\%$$

#### Direkte Proportionalität

**DEFINITION 12:** Eine Größe  $y$  heißt zu einer anderen Größe  $x$  **direkt proportional** (geschrieben:  $y \sim x$ ), wenn bei festgewählten Maßeinheiten folgendes gilt:

1. Jeder Maßzahl der ersten Größe ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe zugeordnet (↗ 82) und umgekehrt.

## 4. PROPORTIONALITÄT

---

**2. Jede Maßzahl der einen Größe ergibt sich aus der zugeordneten Maßzahl der anderen Größe durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor  $k$ . Dieser Faktor heißt Proportionalitätsfaktor.**

$$y = k \cdot x$$

*Bemerkung:* Aus dem jeweiligen Zusammenhang geht hervor, ob die Variablen zur Bezeichnung von Größen oder zur Bezeichnung von Maßzahlen verwendet werden. Der Proportionalitätsfaktor hat eine Benennung, die sich aus den Einheiten der proportionalen Größen ergibt. Je nach Wahl dieser Einheiten kann der Proportionalitätsfaktor bei ein und demselben Sachverhalt verschieden sein.

- Ein Pkw fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v$  von  $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Die beiden Größen **Fahrzeit  $t$**  und **Weg  $s$**  sind proportional:  $s \sim t$ .

Mißt man den Weg in **Kilometern** und die Fahrzeit in **Stunden**, so ist  $90$  Proportionalitätsfaktor mit der Benennung  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ :

$$s = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t.$$

Mißt man dagegen den Weg in **Kilometern** und die Fahrzeit in **Minuten**, so ist wegen  $90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,5 \frac{\text{km}}{\text{min}}$  die Zahl  $1,5$  Proportionalitätsfaktor:

$$s = 1,5 \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot t.$$

Graphische Darstellung  
der direkten  
Proportionalität

Jede Gleichung  $y = k \cdot x$ , die den Zusammenhang zweier direkt proportionaler Größen angibt, ist die Gleichung einer linearen Funktion ( $\sphericalangle 90$ ), deren Bild eine Gerade durch den Ursprung ( $\sphericalangle 91$ ) ist. Stellt man einander zugeordnete Maßzahlen zweier direkt proportionaler Größen als Punkte in einem Koordinatensystem dar, so liegen diese Punkte auf einer solchen Geraden.

Indirekte (umgekehrte)  
Proportionalität

- **DEFINITION 13:** Eine Größe  $y$  heißt zu einer anderen Größe  $x$  **indirekt proportional**, wenn bei festgewählten Maßeinheiten folgendes gilt:

**1. Jeder Maßzahl der ersten Größe ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe zugeordnet und umgekehrt.**

## 4. PROPORTIONALITÄT

### 2. Das Produkt der Maßzahlen ist konstant.

$$x \cdot y = c$$

Aus  $x \cdot y = c$  folgt  $y = c \cdot \frac{1}{x}$ , d. h.  $y$  ist zum Reziproken ( $\nearrow$  47) von  $x$  direkt proportional:  $y \sim \frac{1}{x}$ . Daher bezeichnet man die Konstante  $c$  auch bei der indirekten Proportionalität als **Proportionalitätsfaktor**. Er hat i. a. eine Benennung, die sich aus den Einheiten der indirekt proportionalen Größen ergibt, und hängt von der Wahl dieser Einheiten ab.

Die Gleichungen  $y = c \cdot \frac{1}{x}$ , die den Zusammenhang zweier indirekt proportionaler Größen angeben, sind nicht Gleichungen von linearen Funktionen, sondern von Potenzfunktionen ( $y = c \cdot x^{-1}$ ) ( $\nearrow$  137; Def. 26).

■ Für einen bestimmten Weg braucht

- a) ein Omnibus 1 Stunde bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,
- b) ein Mopedfahrer 2 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,
- c) ein Radfahrer 6 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

In allen drei Fällen ist das Produkt der Maßzahlen von Geschwindigkeit und Zeit gleich 60, also konstant. Das bedeutet: Bei einer bestimmten Weglänge sind Durchschnittsgeschwindigkeit und Zeit indirekt proportional. Bezeichnet man die Zeit mit  $t$  und die Durchschnittsgeschwindigkeit mit  $v$ , so gilt  $v \cdot t = s$ . Dabei ist der konstante Proportionalitätsfaktor  $s = 60 \text{ km}$  der in allen drei Fällen zurückgelegte Weg.

#### Gegenüberstellung

##### Direkte Proportionalität

x	1	2	3	3,5	7	10
y	6	12	18	21	42	60

##### Indirekte Proportionalität

x	0,5	1	2	5	7,5	10
y	18	9	4,5	1,8	1,2	0,9

## 4. PROPORTIONALITÄT

### Direkte Proportionalität

Je *größer* die Werte von  $x$  sind, desto *größer* sind die Werte von  $y$ .

Werden die Werte von  $x$  verdoppelt, verdreifacht usw., so werden auch die entsprechenden Werte von  $y$  verdoppelt, verdreifacht usw.

Werden die Werte von  $x$  halbiert, gedrittelt usw., so werden auch die entsprechenden Werte von  $y$  halbiert, gedrittelt usw.

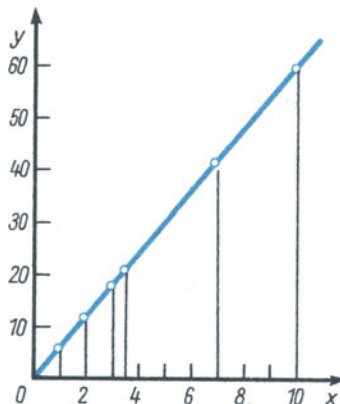
Die Werte von  $y$  ergeben sich aus den entsprechenden Werten von  $x$  durch Multiplikation mit  $k$ .

$$y \sim x; y = k \cdot x$$

Die **Verhältnisse** einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor  $k$ .

$$\frac{y}{x} = k$$

Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von  $x$  ist gleich dem Verhältnis der zugeordneten Werte von  $y$ .



### Indirekte Proportionalität

Je *größer* die Werte von  $x$  sind, desto *kleiner* sind die Werte von  $y$ .

Werden die Werte von  $x$  verdoppelt, verdreifacht usw., so werden die entsprechenden Werte von  $y$  halbiert, gedrittelt usw.

Werden die Werte von  $x$  halbiert, gedrittelt usw., so werden die entsprechenden Werte von  $y$  verdoppelt, verdreifacht usw.

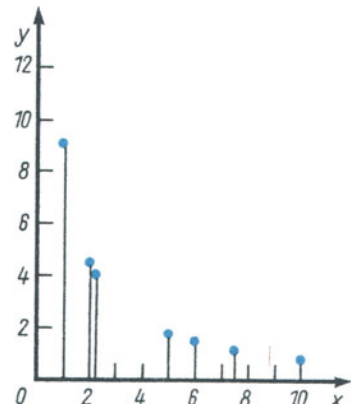
Die Werte von  $y$  ergeben sich aus den Reziproken der entsprechenden Werte von  $x$  durch Multiplikation mit  $c$ .

$$y \sim \frac{1}{x}; y = c \cdot \frac{1}{x}$$

Die **Produkte** einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor  $c$ .

$$x \cdot y = c$$

Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von  $x$  ist gleich dem reziproken Verhältnis der zugeordneten Werte von  $y$ .

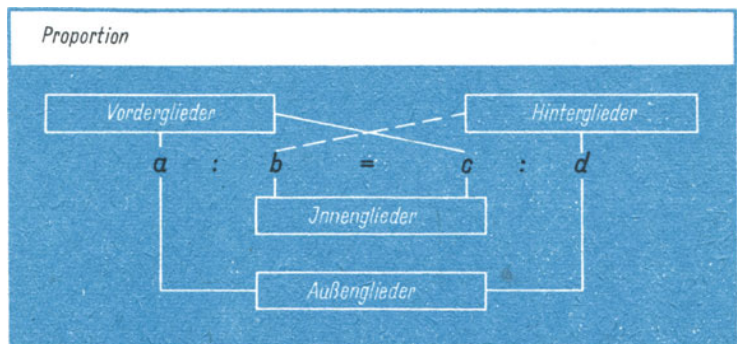


## 5. PROPORTIONEN

**Proportion  
(Verhältnisleichung)**

► **DEFINITION 14:** Eine Gleichung der Form  $a:b = c:d$  ( $a, b, c, d \neq 0$ ) heißt **Verhältnisleichung** oder **Proportion**. Die Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  heißen die **Glieder** der Proportion.

Die Gleichung  $a : b = c : d$  wird auch folgendermaßen gelesen:  $a$  verhält sich zu  $b$  wie  $c$  zu  $d$ , kürzer:  $a$  zu  $b$  wie  $c$  zu  $d$ . Statt  $a : b = c : d$  schreibt man auch  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  (S. 111; Def. 9). Die Glieder werden nach ihrer Anordnung in der Proportion benannt.

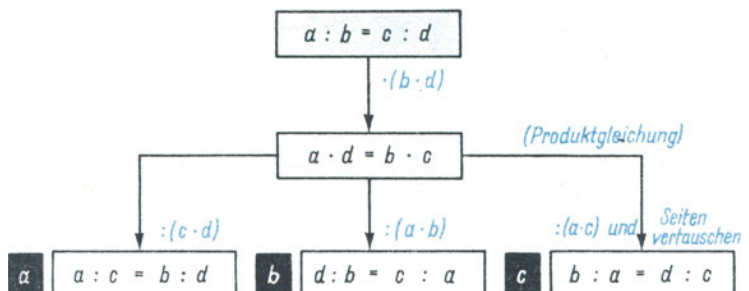


**Produktgleichung**

Wird die Proportion  $a : b = c : d$  mit  $b \cdot d$  multipliziert, so ergibt sich die Gleichung  $a \cdot d = b \cdot c$ . Sie heißt die zur gegebenen Proportion gehörige **Produktgleichung**.

► **SATZ 15:** In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.

Aus der Produktgleichung lassen sich durch Anwendung der Umformungsregeln für Gleichungen weitere Regeln für das Rechnen mit Proportionen ableiten.



## 5. PROPORTIONEN

- **SATZ 16:** In jeder Proportion kann man vertauschen
- die Innenglieder untereinander,
  - die Außenglieder untereinander,
  - die Innenglieder gegen die Außenglieder.

Gegebene Proportion	$2:4 = 5:10$	Produktgleichung $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$
Innenglieder vertauschen:	$2:5 = 4:10$	$5 \cdot 4 = 2 \cdot 10$
Außenglieder vertauschen:	$10:4 = 5:2$	$4 \cdot 5 = 10 \cdot 2$
Innen- gegen Außenglieder vertauschen:	$4:2 = 10:5$	$2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$

### Fortlaufende Proportionen

Treten in einer fortlaufenden Gleichung mehr als zwei Verhältnisse auf, so ist es üblich, diese fortlaufende Gleichung auch als **fortlaufende Proportion** zu schreiben.

Statt  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$  schreibt man  $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ . Aus dieser fortlaufenden Proportion lassen sich beispielsweise folgende Proportionen ablesen:

$$\begin{aligned} a_1 : b_1 &= a_2 : b_2 \\ a_3 : a_2 &= b_3 : b_2 \\ a_1 : a_3 &= b_1 : b_3 \end{aligned}$$

- Statt  $3 : 5 = 6 : 10 = 15 : 25 = 9 : 15$  schreibt man auch  $3 : 6 : 15 : 9 = 5 : 10 : 25 : 15$

### Anwendungen der Proportionen

In Aufgaben aus zahlreichen Gebieten der Praxis tritt Proportionalität zweier Größen auf. Solche Aufgaben werden mit Hilfe von Proportionen gelöst.

### Vierte Proportionale

Sind dabei drei der vier Glieder einer Proportion gegeben und ist das vierte zu berechnen, so heißt dieses die **vierte Proportionale** der Proportion.

- Bei der Verbrennung von Kohlenstoff entsteht das Gas Kohlendioxid. Dabei ist das Verhältnis der Kohlenstoffmenge zur Menge des entstehenden Kohlendioxids gleich  $3 : 11$ .  
Wieviel Gramm Kohlendioxid entstehen bei der Verbrennung von 10 g Kohlenstoff?



## 5. PROPORTIONEN

---

*Lösung:* Es mögen  $x$  g Kohlendioxid entstehen. Dann gilt folgende Proportion:

$$\begin{array}{l|l} 10 : x = 3 : 11 & \text{Produktgleichung} \\ 3x = 110 & : 3 \\ x \approx 36,7 & \end{array}$$

Bei der Verbrennung von 10 g Kohlenstoff entstehen etwa 36,7 g Kohlendioxid.

- Welche Zeit benötigt ein Pkw für einen Autobahnabschnitt von 128,0 km, wenn er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von  $85,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  fährt?

*Lösung:*  $85 \cdot x = 128$

$$x = 1,5 = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Der Pkw benötigt bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von  $85,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  für die 128,0 km 1 Stunde und 30 Minuten.

### Prozentrechnung Vergleichszahl 100

Um zwei Verhältnisse ( $\neq 111$ ), d. h. zwei Quotienten, bequem vergleichen zu können, kann man sie auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Zweckmäßigerweise wählt man oft als gemeinsamen Nenner die Zahl 100.

- In drei fünften Klassen werden die Anzahl der Schwimmer Stufe II verglichen.

### Prozentbegriff

- ▶ **DEFINITION 17:** Ein Hundertstel einer Zahl (Größenangabe)  $G$  heißt ein Prozent,<sup>1</sup> dieser Zahl (Größenangabe).

Für 1 Prozent schreibt man 1 %.

$$1\% \text{ von } G \text{ sind } \frac{G}{100}. \quad p\% \text{ von } G \text{ sind } p \cdot \frac{G}{100} = \frac{p \cdot G}{100}.$$

Bezeichnungen:  $G$  heißt Grundwert,  $p$  heißt Prozentsatz.

## 5. PROPORTIONEN

Mit den Bezeichnungen gilt die Gleichung

$$W = \frac{p \cdot G}{100} \text{ oder als Proportion}$$

$$\frac{W}{P} = \frac{G}{100}$$

Da bei einem bestimmten Sachverhalt der Grundwert (die Zahl  $G$ ) fest gegeben ist, ist  $\frac{G}{100}$  eine feste Zahl. Das bedeutet, daß Prozentwerte und Prozentsatz direkt proportional sind ( $\sphericalangle$  112f; Def. 12).

- a) 1% von 17 sind  $\frac{17}{100} = 0,17$   
 $G = 17$ ;  $W = 0,17$ ;  $p = 1$
- b) 5% von 17 sind  $5 \cdot \frac{17}{100} = \frac{85}{100} = 0,85$   
 $G = 17$ ;  $W = 0,85$ ;  $p = 5$
- c) 23% von 53 m sind  $23 \cdot \frac{53}{100} \text{ m} = \frac{1219}{100} \text{ m} = 12,19 \text{ m}$   
 $G = 53 \text{ m}$ ;  $W = 12,19 \text{ m}$ ;  $p = 23$

Die Ergebnisse des letzten Beispiels auf Seite 118 lassen sich mit Hilfe des Prozentbegriffs folgendermaßen ausdrücken:  
 Die Klasse 5a hat 57% Schwimmer:  $G = 35$ ;  $W = 20$ ;  $p \approx 57$ .  
 Die Klasse 5b hat 61% Schwimmer:  $G = 31$ ;  $W = 19$ ;  $p \approx 61$ .  
 Die Klasse 5c hat 48% Schwimmer:  $G = 33$ ;  $W = 16$ ;  $p \approx 48$ .

Grundaufgaben  
der Prozentrechnung

Allgemein gilt:  $W : p = G : 100$ .

Zu bestimmen  
ist  $p$ :

$$p = \frac{W}{G} \cdot 100$$

Zu bestimmen  
ist  $W$ :

$$W = \frac{p \cdot G}{100}$$

Zu bestimmen  
ist  $G$ :

$$G = \frac{W}{p} \cdot 100$$

Vermehrter (verminderter) Grundwert

Bei der Lösung von Aufgaben ist besonders auf Formulierungen wie „Erhöhung um“ oder „Steigerung auf“ bzw. „Verringerung um“ oder „Senkung auf“ zu achten. Derartige Formulierungen deuten auf vermehrten bzw. verminderten Grundwert hin. Der vermehrte Grundwert ist die Summe aus Grund- und Prozentwert. Der verminderte Grundwert ist die Differenz aus Grund- und Prozentwert.

- Der Abgabepreis von 56,70 M je Stück an den Großhandel liege um 7,5% höher als der Selbstkostenpreis für einen Betrieb. Wieviel beträgt der Selbstkostenpreis?

Gegeben: Vermehrter Grundwert (Abgabepreis)

$$G_2 = G + W = 56,70$$

$$\text{Prozentsatz: } p = 100 + 7,5 = 107,5$$

Gesucht: Grundwert G (Selbstkostenpreis)

Lösung:  $G_2 : p = G : 100$

$$G = \frac{G_2 \cdot 100}{p} = \frac{56,70 \cdot 100}{107,5} \approx 52,74$$

Der Selbstkostenpreis beträgt 52,74 M je Stück.

- Nach Einführung einer verbesserten Technologie verringern sich die Selbstkosten für ein Erzeugnis um 18% auf 32,80 M. Wieviel betragen die Selbstkosten mit der alten Technologie?

Gegeben: Verminderter Grundwert (neue Selbstkosten)

$$G_1 = G - W = 32,80$$

$$\text{Prozentsatz: } p = 100 - 18 = 82$$

Gesucht: Grundwert G (alte Selbstkosten)

Lösung:  $G_1 : p = G : 100$

$$G = \frac{G_1 \cdot 100}{p} = \frac{32,80 \cdot 100}{82} = 40$$

Vor der Einführung einer neuen Technologie betragen die Selbstkosten je Stück 40,00 M.

- Ein D-Zug durchfährt eine Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

Wieviel Prozent der ursprünglichen Fahrzeit beträgt die Zeitersparnis, wenn der Zug seine Geschwindigkeit um durchschnittlich  $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  erhöht?

Lösung:

Der Geschwindigkeit  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  sind 100% der Fahrzeit zugeordnet.

Der Geschwindigkeit  $65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  sind  $x\%$  der Fahrzeit zugeordnet.

Da Geschwindigkeit und Zeit indirekt proportional sind, sind die Produkte der einander zugeordneten Zahlen gleich ( $\nearrow$  113f; Def. 13):

$$60 \cdot 100 = 65 \cdot x$$

$$x = \frac{60 \cdot 100}{65} \approx 92,3$$

Der Zug benötigt nur noch etwa 92,3% der ursprünglichen Zeit. Die Zeitersparnis beträgt also rund 7,7%.

In der Prozentrechnung wird die Zahl 100 als Vergleichszahl zugrunde gelegt. In vielen Fällen ist es nützlich, die Zahl 1000 als Vergleichszahl zu benutzen.

Prozentaufgaben  
mit indirekter  
Proportionalität

Promille

## 5. PROPORTIONEN

- **DEFINITION 18:** Ein Tausendstel einer Zahl (Größenangabe) heißt ein Promille dieser Zahl (Größenangabe). Für 1 Promille schreibt man  $1^0/_{00}$ .

### Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung auf das Geldwesen, wobei der Prozentwert den Zinsen eines Geldbetrages für ein volles Jahr entspricht.

Prozentrechnung		Zinsrechnung	
Grundwert	$G$	Grundbetrag	$G$
Prozentsatz	$p$	Zinssatz	$p$
Prozentwert	$W$	Zinsen	$Z$

Die Zinsen für ein Jahr erhält man aus der Proportion

$$Z:p = G:100 \quad (\sphericalangle 119); \quad Z = \frac{G \cdot p}{100}$$

Für beliebige andere Zeiträume werden die Zinsen proportional zur Zeit berechnet.

Zinsen für		
t Jahre:	t Monate:	t Tage:
$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot t$	$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{12}$	$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360}$

#### Bemerkungen:

(1) Bei Zinsberechnungen wird zugrunde gelegt:

1 Jahr = 12 Monate

1 Monat = 30 Tage

(2) Bei der Berechnung der Zinsen nach den angegebenen Gleichungen wird vereinfachend angenommen, daß der Grundbetrag während des gesamten Zeitraums unverändert bleibt. In der Praxis werden jedoch die fälligen Zinsen jeweils dem Grundbetrag zugeschlagen und dann mit verzinst. Dadurch ergeben sich höhere Zinsbeträge, die nach der sogenannten *Zinseszinsrechnung* berechnet werden.

## 6. QUADRATISCHE FUNKTIONEN

Jede Funktion mit der Gleichung  $y = A x^2 + B x + C$  heißt **quadratische** Funktion, wobei die Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  beliebige reelle Zahlen mit  $A \neq 0$  sind.

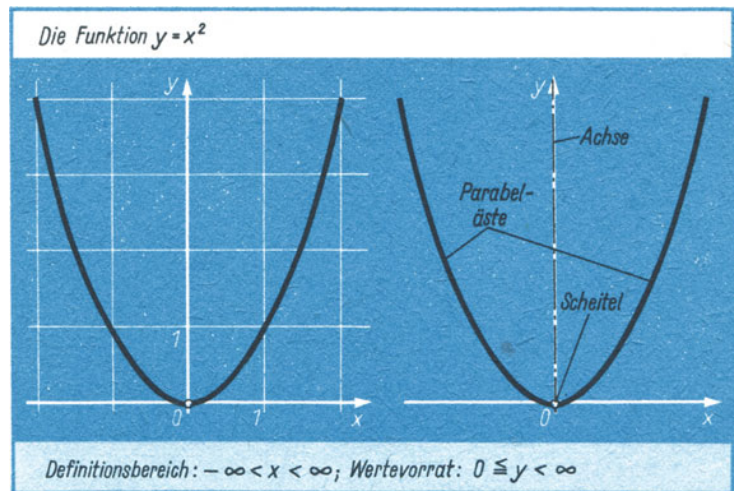
Man nennt

$A x^2$  das *quadratische*,

$B x$  das *lineare* und

$C$  das *absolute Glied* der Funktionsgleichung.

### Die Funktion $y = x^2$



Einerseits ist das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ. Im Wertevorrat treten also *nur* nichtnegative Zahlen auf. Andererseits ist jede nichtnegative reelle Zahl Quadrat einer reellen Zahl. Im Wertevorrat treten also auch *alle* nichtnegativen reellen Zahlen auf.

### Normalparabel

Das Bild der Funktion  $y = x^2$  ist eine **quadratische Parabel**. Man nennt sie auch **Normalparabel**.

Für  $x = 0$  ergibt sich der kleinste Funktionswert, nämlich  $y = 0$ .

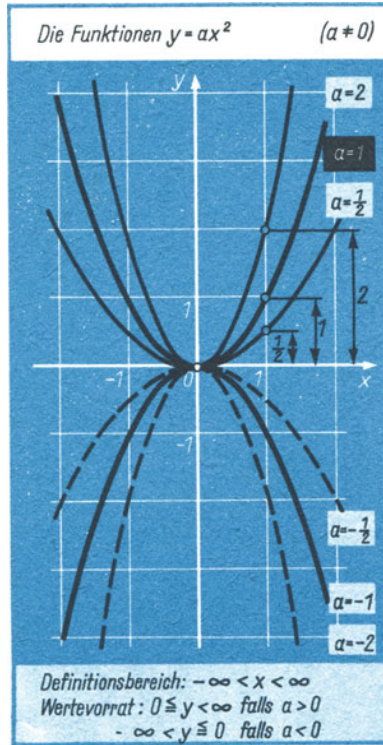
Wegen  $x^2 = (-x)^2$  haben Parabelpunkte mit gleicher Ordinate den gleichen Abstand von der  $y$ -Achse. Das bedeutet, daß die  $y$ -Achse Symmetrieachse ( $\sphericalangle$  222) der Parabel ist. Man nennt diese Symmetrieachse auch **Parabelachse**. Die beiden zueinander symmetrischen Teile der Parabel heißen **Parabeläste**.

Der Punkt, in dem eine Parabel ihre Symmetrieachse schneidet, heißt **Scheitel** dieser Parabel. Der Scheitel der Normalparabel liegt im Ursprung. Sie öffnet sich nach

## 6. QUADRATISCHE FUNKTIONEN

oben. Die Richtungsangaben „nach oben“ bzw. „nach unten“ beziehen sich immer auf die übliche Lage der Koordinatenachsen. Im Intervall  $-\infty < x \leq 0$  ist die Funktion  $y = x^2$  monoton fallend, im Intervall  $0 \leq x < \infty$  monoton wachsend (↗ 88, Def. 3).

### Die Funktionen $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )



Der Übergang von  $y = x^2$  zu  $y = ax^2$  bedeutet, daß für jedes Argument  $x$  der zugehörige Funktionswert der Funktion  $y = x^2$  mit  $a$  multipliziert wird. Dadurch wird die Normalparabel folgendermaßen verändert:

$ a  > 1$	$a > 0$	Streckung (↗ 268) der Normalparabel in Richtung der y-Achse Öffnung nach oben
	$a < 0$	Streckung der Normalparabel in Richtung der y-Achse und Spiegelung (↗ 219) an der x-Achse Öffnung nach unten
$ a  = 1$	$a = 1$	keine Änderung Öffnung nach oben
	$a = -1$	Spiegelung der Normalparabel an der x-Achse Öffnung nach unten

## 6. QUADRATISCHE FUNKTIONEN

$ a  < 1$	$a > 0$	Stauchung der Normalparabel in Richtung der y-Achse Öffnung nach oben
	$a < 0$	Stauchung der Normalparabel in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse Öffnung nach unten

In allen Fällen liegt der Scheitel der Normalparabel im Ursprung.

**Die Funktionen**  
 $y = x^2 + px + q$

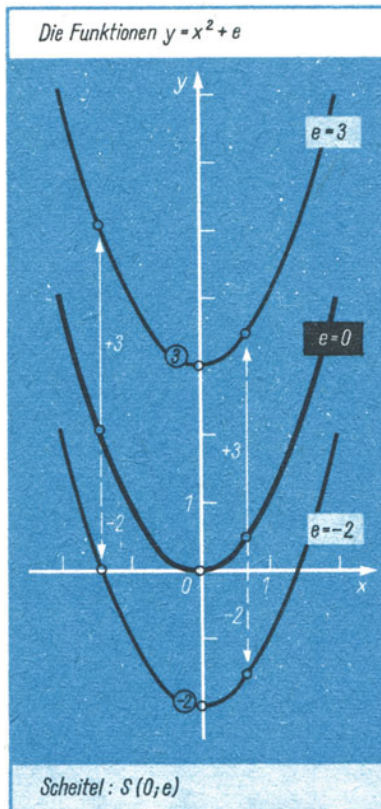
**Definitionsbereich:**

$$-\infty < x < \infty$$

**Wertevorrat:**

$$-\frac{p^2}{4} + q \leq y < \infty \quad (\nearrow 126)$$

**Die Funktionen**  
 $y = x^2 + e$

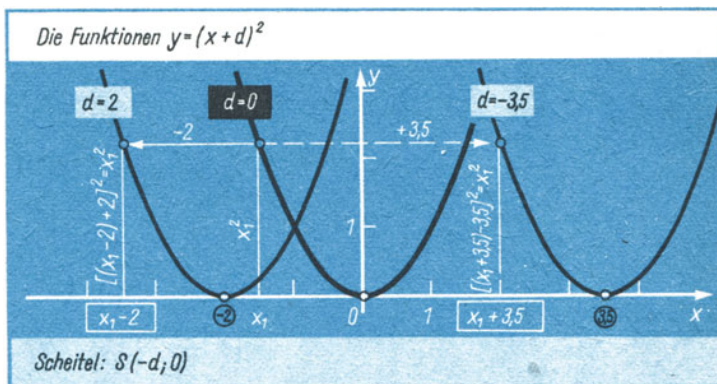


Der Übergang von  $y = x^2$  zu  $y = x^2 + e$  bedeutet, daß für jedes Argument  $x$  zum zugehörigen Funktionswert der Funktion  $y = x^2$  die Zahl  $e$  addiert wird. Dadurch wird die Normalparabel um  $e$  in Richtung der y-Achse verschoben ( $\nearrow 92$ ).

## 6. QUADRATISCHE FUNKTIONEN

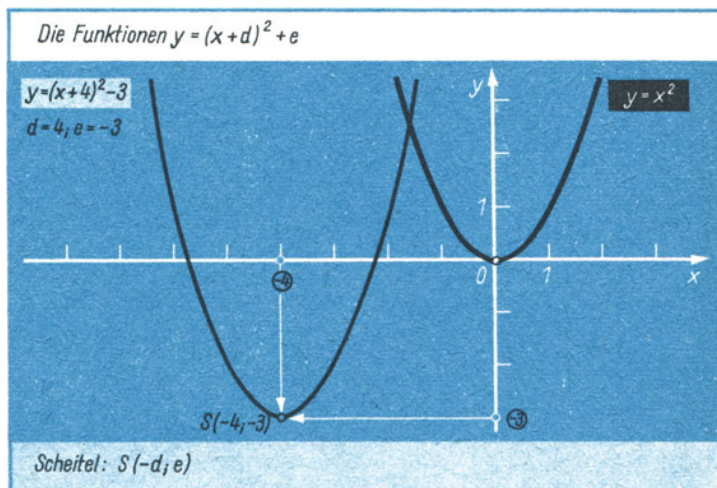
Die Funktionen  
 $y = (x + d)^2$

Die Funktionen  
 I)  $y = x^2$  und II)  $y = (x + d)^2$   
 unterscheiden sich dadurch, daß für jedes Argument  $x$  der  
 zugehörige Funktionswert  $x^2$  der Funktion I) von der Funk-  
 tion II) für  $x - d$  angenommen wird. Es ist nämlich  
 $[(x - d) + d]^2 = x^2$   
 Das Bild der Funktion  $y = (x + d)^2$  ist also die um  $-d$  in  
 Richtung der  $x$ -Achse verschobene Normalparabel.



Die Funktionen  
 $y = (x + d)^2 + e$

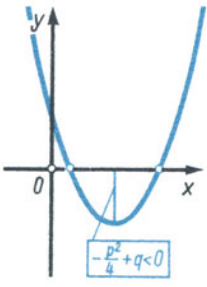
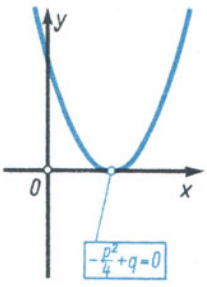
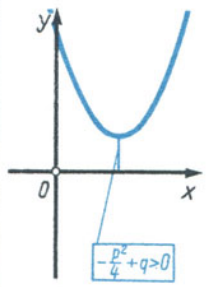
Der Übergang von  $y = x^2$  zu  $y = (x + d)^2 + e$  bedeutet,  
 daß die Normalparabel um  $e$  in Richtung der  $y$ -Achse und  
 um  $-d$  in Richtung der  $x$ -Achse verschoben wird.  
 Der Scheitelpunkt  $S$  hat dann die Koordinaten  $-d$  und  $e$ :  
 $S(-d; e)$





6. QUADRATISCHE FUNKTIONEN

Aus  $y = (x + d)^2 + e$   
 erhält man durch Ausrechnen  
 $y = x^2 + 2 d x + d^2 + e$  | Zur Abkürzung setzt man  $2 d = p$   
 $y = x^2 + p x + q$  und  $d^2 + e = q$ .  
 Umgekehrt hat jede Funktion  $y = x^2 + p x + q$  als Bild eine  
 Normalparabel mit dem Scheitelpunkt  $S\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4} + q\right)$ ,  
 deren Symmetrieachse parallel zur  $y$ -Achse liegt und die sich  
 nach oben öffnet.  
 Die Koordinaten des Scheitelpunktes ergeben sich aus den  
 Gleichungen  $2 d = p$  und  $d^2 + e = q$ .  
 Die Anzahlen der Nullstellen der Funktionen  
 $y = x^2 + p x + q$   
 lassen sich jeweils an der Ordinate des Scheitelpunktes  
 ablesen:

$-\frac{p^2}{4} + q < 0$	$-\frac{p^2}{4} + q = 0$	$-\frac{p^2}{4} + q > 0$
zwei Nullstellen	eine Nullstelle	keine Nullstelle
Scheitelpunkt unterhalb der $x$ -Achse	Scheitelpunkt liegt auf der $x$ -Achse	Scheitelpunkt liegt oberhalb der $x$ -Achse
		

**Die Funktionen**  
 $y = A x^2 + B x + C$ ;  
 ( $A \neq 0$ )

**Definitionsbereich;**

$$-\infty < x < \infty$$

**Wertevorrat;**

$$-\frac{B^2}{4A} + C \leq y < \infty, \text{ falls } A > 0$$

$$-\infty < y \leq -\frac{B^2}{4A} + C, \text{ falls } A < 0.$$

## 6. QUADRATISCHE FUNKTIONEN

Die Funktionen mit einer solchen Gleichung heißen **quadratische Funktionen**. Die Gleichungen der zuvor behandelten quadratischen Funktionen sind Spezialfälle dieser Gleichung:

- a)  $y = x^2$  erhält man für  $A = 1; B = C = 0$
  - b)  $y = a x^2$  erhält man für  $A = a; B = C = 0$
  - c)  $y = x^2 + p x + q$  erhält man für  $A = 1; B = p; C = q$
- Durch Ausklammern von  $A$  erhält man aus  $y = A x^2 + B x + C$  die Gleichung

$$y = A \left( x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} \right) = A (x^2 + p x + q); \left( \frac{B}{A} = p; \frac{C}{A} = q \right)$$

Das Bild dieser Funktion ergibt sich dadurch, daß die Ordinaten aller Punkte der Normalparabel mit der Gleichung  $y = x^2 + p x + q$  auf das  $|A|$ -fache gestreckt oder gestaucht und eventuell (falls  $A < 0$ ) an der  $x$ -Achse gespiegelt werden (↗ 123f, Tabelle).

Der Scheitel  $S$  der Normalparabel mit der Gleichung

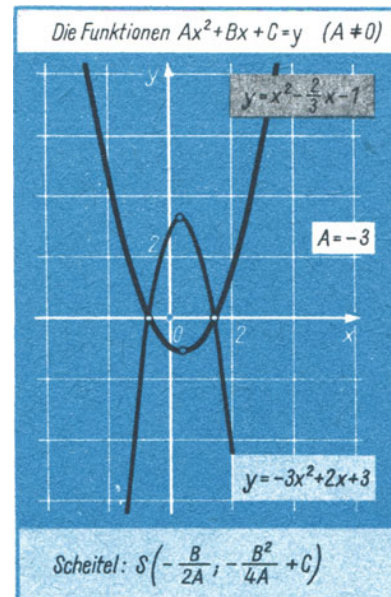
$$y = x^2 + p x + q \text{ hat die Koordinaten } -\frac{p}{2} \text{ und } -\frac{p^2}{4} + q \text{ oder:}$$

$$S \left( -\frac{B}{2A}; -\frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} \right).$$

Der Scheitel  $S'$  der Parabel mit der Gleichung

$y = A x^2 + B x + C$  hat dann die Koordinaten

$$S' \left( -\frac{B}{2A}; -\frac{B^2}{4A} + C \right)$$



Die Anzahl der Nullstellen einer allgemeinen quadratischen Funktion

$$y = A x^2 + B x + C = A \left( x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} \right)$$

ist gleich der Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$y = x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A};$$

$$\text{denn } A \left( x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} \right) = 0$$

gilt genau für die Werte von  $x$ , für die auch

$$x^2 + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} = 0$$

gilt. (Beachte  $A \neq 0$ !)

## 7. QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

**Rechnerische Lösung** Zur Bestimmung eventuell vorhandener Nullstellen ( $\nearrow$  89) einer allgemeinen quadratischen Funktion  $y = Ax^2 + Bx + C$ ; ( $A \neq 0$ ) ist die Gleichung  $Ax^2 + Bx + C = 0$  zu lösen.

Je nach der Anzahl der Nullstellen hat diese Gleichung zwei Lösungen oder eine Lösung oder sie hat keine Lösung. Wegen  $A \neq 0$  läßt sich die Gleichung durch  $A$  dividieren:

$$x^2 + px + q = 0; \left( p = \frac{B}{A}; q = \frac{C}{A} \right)$$

**Normalform der quadratischen Gleichung**

Da sich jede quadratische Gleichung auf diese Normalform bringen läßt, genügt es, die Lösungen für die Normalform anzugeben.

Äquivalente Umformungen der Normalform zur Bestimmung der Lösungen:

$$\begin{array}{l} x^2 + px + q = 0 \\ x^2 + px = -q \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{array} \left| \begin{array}{l} -q \\ + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (Quadratische Ergänzung)} \\ \text{(binomische Formel, } \nearrow 78) \end{array} \right.$$

Für  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$  gibt es keine Lösung  $x$ , da  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

für keine Zahl  $x$  negativ wird.

Für  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$  kann man wie folgt weiter äquivalent

umformen:

$$\begin{array}{l} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = 0 \\ \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\ \text{(binomische Formel)} \end{array} \right.$$

Da ein Produkt genau dann gleich 0 ist, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist ( $\nearrow$  24; Satz 7), sind folgende Zahlen Lösungen:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \text{ für } x_1 \text{ wird der erste Faktor gleich 0.}$$

## 7. QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ ; für  $x_2$  wird der zweite Faktor gleich 0.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

### Diskriminante

Der Radikand ( $\nearrow$  147)  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  ist für die Anzahl der Lösungen entscheidend. Er heißt daher **Diskriminante**. Die Scheitelpunktsordinate des Bildes der zur gegebenen Gleichung gehörenden Funktion ist gleich  $-D$  ( $\nearrow$  126; Tabelle).

Diskriminante $D$	Anzahl der Lösungen von $x^2 + p x + q = 0$	Anzahl der Nullstellen von $y = x^2 + p x + q$
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$	zwei Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	zwei Nullstellen
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$	eine Lösung $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$	eine Nullstelle
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$	keine Lösung	keine Nullstelle

■ a)  $x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{21}{32} = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{1+168}{256}}$$

$$= -\frac{1}{16} \pm \frac{13}{16}$$

$$x_1 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = -\frac{7}{8}$$

Probe:

(Lösung  $x_1$ )

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} - \frac{21}{32} = 0$$

$$\frac{18}{32} + \frac{3}{32} - \frac{21}{32} = 0$$

$$0 = 0$$

(Lösung  $x_2$ )

$$\left(-\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(-\frac{7}{8}\right) - \frac{21}{32} = 0$$

$$\frac{49}{64} - \frac{7}{64} - \frac{21}{32} = 0$$

$$0 = 0$$

## 7. QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

- **b)**  $x^2 - 4,2x + 4,41 = 0$  Probe:  
 $2,1^2 - 4,2 \cdot 2,1 + 4,41 = 0$   
 $x_{1,2} = 2,1 \pm \sqrt{4,41 - 4,41}$   $0 = 0$   
 $x_{1,2} = 2,1$
- c)**  $x^2 - 1,3x + 9,5 = 0$   
 $x_{1,2} = 0,65 \pm \sqrt{0,65^2 - 9,5}$   
 Wegen  $0,65^2 - 9,5 < 0$  hat die Gleichung keine Lösung.

- **SATZ 19:** Sind  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ , so läßt sich die linke Seite dieser Gleichung folgendermaßen in ein Produkt aus zwei in  $x$  linearen Faktoren zerlegen:

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

*Beweis:*

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \quad (*)$$

Da  $x_1$  und  $x_2$  die Lösungen der Gleichung

$x^2 + px + q = 0$  sind, gilt:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \quad \left[ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \right]$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p & x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) \\ & & &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - D \\ & & &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\ & & x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

Setzt man dies in Gleichung (\*) ein, so erhält man:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q \quad \text{w. z. b. w.}$$

- Vietscher Wurzelsatz<sup>1</sup>** ► **SATZ 20:** Für die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Die Lösungen einer Gleichung werden häufig auch **Wurzeln** dieser Gleichung genannt.

Der *Vietsche Wurzelsatz* kann zur Probe benutzt werden.

<sup>1</sup> Francois Viète (1540—1603), Französischer Mathematiker

## 7. QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x^2 + \frac{2}{5}x - 0,32 &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1+8}{25}} \\ &= -\frac{1}{5} \pm \frac{3}{5} \\ x_1 &= \frac{2}{5}; \quad x_2 = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{2}{5} = -p \\ x_1 \cdot x_2 &= -\frac{8}{25} = -0,32 = q \end{aligned}$$

### Spezialfälle der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

Die folgenden Spezialfälle sind wie jede quadratische Gleichung mit der Lösungsformel (↗ 129) lösbar. Sie lassen sich jedoch kürzer folgendermaßen lösen.

1)  $p = 0$ , also  $x^2 + q = 0$

$$x^2 = -q \begin{cases} \text{Für } q > 0: \text{ keine Lösung} \\ \text{Für } q = 0: \text{ eine Lösung } x_{1,2} = 0 \\ \text{Für } q < 0: \text{ zwei Lösungen } x_{1,2} = \pm\sqrt{-q} \end{cases}$$

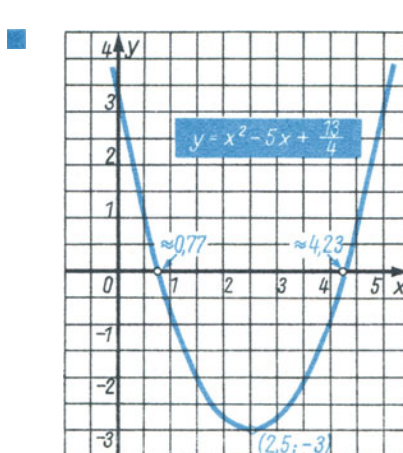
2)  $q = 0$ , also  $x^2 + px = 0$

$$x(x+p) = 0 \begin{cases} \text{Für } p = 0: \text{ eine Lösung } x_{1,2} = 0 \\ \text{Für } p \neq 0: \text{ zwei Lösungen } x_1 = 0, x_2 = -p \end{cases}$$

### Graphische Lösung

Schnittpunkte auf der x-Achse

Jede quadratische Gleichung mit einer Variablen läßt sich durch äquivalente Umformungen auf die Normalform  $x^2 + px + q = 0$  bringen. Die Lösungen dieser Gleichungen sind die Nullstellen (↗ 88) der Funktion  $y = x^2 + px + q$ . Zur graphischen Lösung der Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  zeichnet man daher das Bild der Funktion  $y = x^2 + px + q$  (verschobene Normalparabel, Öffnung nach oben) und liest die Nullstellen aus der Zeichnung ab. Wegen der Zeichengenauigkeit bekommt man nach diesem Verfahren im allgemeinen nicht die genauen Lösungen.



$$x^2 - 5x + \frac{13}{4} = 0$$

Wir bestimmen die Scheitelpunktkoordinaten (↗ 126):  $S(2,5; -3)$

Wir tragen  $S(2,5; -3)$  in ein Koordinatensystem ein. Wir zeichnen das Funktionsbild (Schablone an  $S$  anlegen).

Ablesen der Nullstellen:

$$x_1 \approx 0,8; \quad x_2 \approx 4,2$$

Probe: (Vietscher Wurzelsatz)

$$x_1 + x_2 = 0,8 + 4,2 = 5 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = 0,8 \cdot 4,2 = 3,36 \approx q$$

## 7. QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

Schnittpunkte  
auf der Normalparabel

Eine Umformung der Gleichung

$$x^2 + p x + q = 0$$

ergibt

$$x^2 = -p x - q$$

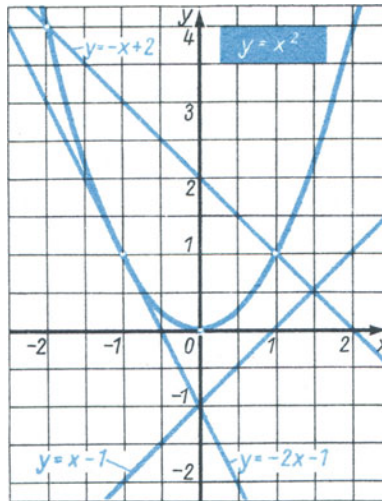
Die Lösungen dieser Gleichung sind diejenigen Zahlen  $x$ , für die die Funktionen

$$y = x^2 \quad \text{und}$$

$$y = -p x - q$$

gleiche Funktionswerte haben. In der graphischen Darstellung sind das die Abszissen der Schnittpunkte beider Funktionsbilder. Ein Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem ersten besteht darin, daß man die Normalparabel  $y = x^2$  nur einmal zu zeichnen braucht. Es genügt dann, bei jeder Gleichung die jeweilige Gerade  $y = -p x - q$  durch die Kante eines Lineals darzustellen, um die gesuchten Abszissen abzulesen.

Je nach Anzahl der Lösungen der gegebenen Gleichung hat die betreffende Gerade mit der Parabel zwei Punkte (Sekante), einen Punkt (Tangente) oder keinen Punkt (Passante) gemeinsam (s. 253).



a)  $x^2 + x - 2 = 0$

Parabel:  $y = x^2$

Gerade:  $y = -x + 2$

$x_1 \approx -2$

$x_2 \approx 1$

b)  $x^2 + 2x + 1 = 0$

Parabel:  $y = x^2$

Gerade:  $y = -2x - 1$

$x_1 = x_2 \approx -1$

**Bemerkung:** Wegen der Zeichengenauigkeit ist es nicht sicher, ob tatsächlich nur eine Lösung vorliegt. Es kann vorkommen, daß die Schnittpunkte sehr dicht beieinander liegen.

c)  $x^2 - x + 1 = 0$

Parabel:  $y = x^2$       Gerade:  $y = x - 1$

keine Lösung

## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; ( $k$ GANZE ZAHL)

**Der Potenzbegriff** ► **DEFINITION 21:** Ein Produkt  $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  aus  $n$  Faktoren  $a$  ( $n \geq 2$ ) heißt **Potenz**.

Man schreibt: 
$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

$a$  heißt die **Basis**,  $n$  der **Exponent** der Potenz  $a^n$ .

- a)  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$
- b)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$
- c)  $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3 = -125$
- d)  $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0^6 = 0$

**Vorzeichen  
von Potenzen**

Es gilt:

Wenn  $a \geq 0$ , so  $a^{2m} \geq 0$   
 Wenn  $a < 0$ , so  $a^{2m} > 0$   
 Wenn  $a \geq 0$ , so  $a^{2m+1} \geq 0$   
 Wenn  $a < 0$ , so  $a^{2m+1} < 0$  } (Für alle natürlichen Zahlen  $m \geq 1$ )

	$n$ gerade	$n$ ungerade
$a \geq 0$	$a^n \geq 0$	$a^n \geq 0$
$a < 0$	$a^n > 0$	$a^n < 0$

► **SATZ 22:** Für beliebige reelle Zahlen  $a \neq 0$  gilt:

$$\boxed{(-a)^{2m} = a^{2m} \text{ und } (-a)^{2m+1} = -a^{2m+1} \quad (m \geq 1).}$$

- a)  $6^4 = 1296$   
 $(-6)^4 = 1296$   
 $\frac{(-6)^4}{(-6)^4} = 6^4$
- b)  $0,2^5 = 0,00032$   
 $(-0,2)^5 = -0,00032$   
 $\frac{(-0,2)^5}{(-0,2)^5} = -0,2^5$

Für 0 und 1 gilt:

$$\boxed{0^n = 0 \text{ und } 1^n = 1 \quad (n \geq 2)}$$

Daher folgt aus Satz C 22 für  $a = -1$ :

$$\begin{aligned} (-1)^{2k} &= 1^{2k} = 1 \\ (-1)^{2k+1} &= -1^{2k+1} = -1 \end{aligned}$$

**Rechnen mit Potenzen  
(Potenzgesetze)**

Für das Rechnen mit Potenzen gelten die folgenden Regeln (Potenzgesetze), wobei  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$  ist. Für die natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$  wird zunächst wie in Definition C 21  $m \geq 2$  und  $n \geq 2$  festgesetzt. Diese Einschränkung für die Exponenten wird später fallen gelassen ( $\neq$  134, Def. 24).



## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; ( $k$ GANZE ZAHL)

### ► SATZ 23:

gleiche Basis und gleicher Exponent		
Addition Subtraktion	$x \cdot a^n \pm y \cdot a^n = (x \pm y) \cdot a^n$ ( $x, y$ beliebig reell)	
	gleiche Basis	gleicher Exponent
Multiplikation	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ( $m - n \geq 2$ )	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzierung	$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$	

#### ■ Addition/Subtraktion:

$$\text{a) } 3a^5 + 0,8a^5 = 3,8a^5 \quad \text{b) } \frac{1}{3}x^7 - \frac{4}{9}x^7 + \frac{1}{18}x^7 = \frac{-1}{18}x^7$$

#### Multiplikation:

$$\text{c) } a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$$

$$\text{d) } a^3 \cdot b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3$$

#### Division:

$$\text{e) } \frac{a^8}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^3$$

$$\text{f) } \frac{x^4}{y^4} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

#### Potenzierung:

$$\text{g) } (a^3)^4 = (a^3) \cdot (a^3) \cdot (a^3) \cdot (a^3) = a^{3+3+3+3} = a^{4 \cdot 3} = a^{4+4+4} = (a^4) \cdot (a^4) \cdot (a^4) = (a^4)^3$$

**Bemerkung:** Beachte den Unterschied zwischen  $(a^m)^n$  und  $a^{(m^n)}$ .

$$\text{■ } (2^3)^2 = 8^2 = 64 \text{ dagegen } 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$$

Statt  $a^{(m^n)}$  schreibt man kürzer  $a^{m^n}$ .

### Erste Erweiterung des Potenzbegriffes

Der Potenzbegriff wird durch folgende Festlegung auf alle natürlichen Zahlen als Exponenten ausgedehnt.

### ► DEFINITION 24:

(1) $a^0 = 1$ ; ( $a \neq 0$ );	(2) $a^1 = a$
---------------------------------	---------------

Diese Definitionen sind sinnvoll. Für den so erweiterten Potenzbegriff gelten nämlich die Rechenregeln aus Satz C 23 weiter.

## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; ( $k$ GANZE ZAHL)

- a) Beispiel für die Regel  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ :  
 $a^0 \cdot a^4 = 1 \cdot a^4 = a^4 = a^{0+4}$
- b) Beispiel für die Regel  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ :  
 $(a^1)^7 = a^7 = a^{1 \cdot 7}$

**Bemerkung:**

Bei der Definition  $a^0 = 1$  muß  $a = 0$  ausgeschlossen werden, da sich sonst Widersprüche ergeben würden.

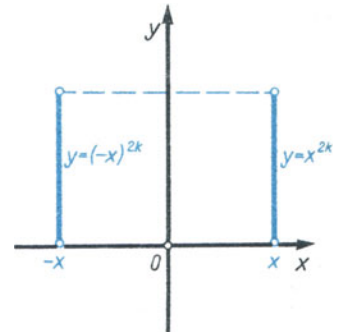
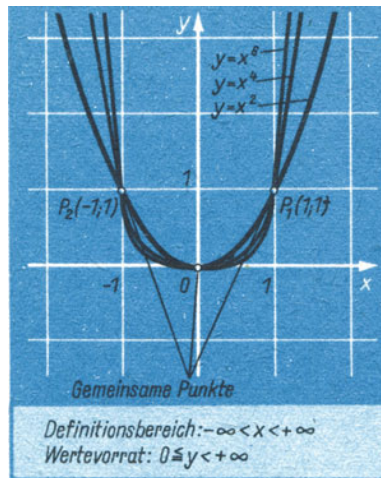
### Die Potenzfunktionen

$y = x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

Die Funktionen

$y = x^{2m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ )

Die Bilder der Funktionen  $y = x^2, y = x^4, \dots$  heißen Parabeln 2., 4., 6., ... Grades. Sie liegen symmetrisch zur  $y$ -Achse; denn nach Satz C 22 ( $\nearrow$  133) gilt  $(-x)^{2m} = x^{2m}$ . Also gehört zu einer beliebigen Zahl  $x$  und der zu ihr entgegengesetzten Zahl  $-x$  derselbe Funktionswert.



### Die Funktionen

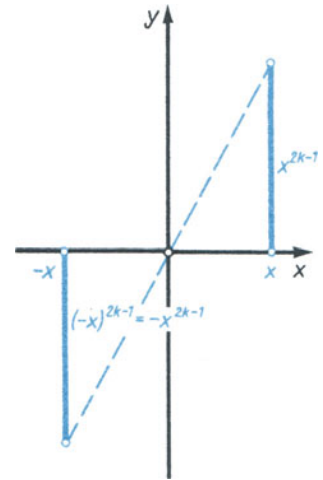
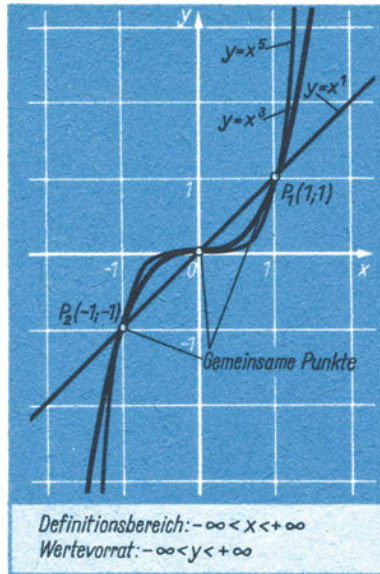
$y = x^{2m-1}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

Definitionsbereich:  $-\infty < x < \infty$

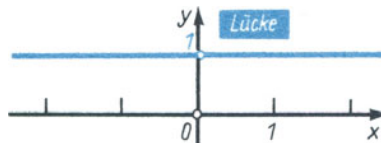
Wertevorrat:  $-\infty < x < \infty$

Die Bilder der Funktionen  $y = x^3, y = x^5, \dots$  heißen Parabeln 3., 5., ... Grades. Sie liegen punktsymmetrisch zum Ursprung; denn nach Satz C 22 gilt  $(-x)^{2m-1} = -x^{2m-1}$ . Also unterscheiden sich der zu einer beliebigen Zahl  $x \neq 0$  gehörende Funktionswert und der zur entgegengesetzten Zahl ( $\nearrow$  60)  $-x$  gehörende Funktionswert nur durch das Vorzeichen.

## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; ( $k$ GANZE ZAHL)



Die Funktion  $y = x^0$



Definitionsbereich: alle reellen Zahlen  $x$  mit  $x \neq 0$ .  
Wertevorrat: Die Zahl 1

Das Bild dieser Funktion besteht aus allen Punkten auf der Parallelen zur  $x$ -Achse im Abstand  $+1$ , ausgenommen der Punkt  $(0; 1)$ . Nach Definition C 24 ( $\nearrow$  134) ist nämlich die Potenz  $x^0$  für alle  $x \neq 0$  gleich 1, für  $x = 0$  jedoch nicht definiert. Man sagt, das Bild der Funktion  $y = x^0$  hat bei  $x = 0$  eine Lücke.

**Gerade, ungerade Funktionen**  
( $\nearrow$  170; 222)

**DEFINITION 25:** Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt **gerade**, wenn für jedes  $x$  aus ihrem Definitionsbereich  $f(-x) = f(x)$  gilt. Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt **ungerade**, wenn für jedes  $x$  aus ihrem Definitionsbereich  $f(-x) = -f(x)$  gilt.

Die Bilder gerader Funktionen besitzen die  $y$ -Achse als Symmetrieachse.

Die Bilder ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

Die Potenzfunktionen  $y = x^{2m}$ ; ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) sind gerade Funktionen.

Die Potenzfunktionen  $y = x^{2m-1}$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) sind ungerade Funktionen.

## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; ( $k$ GANZE ZAHL)

**Bemerkung:**

Im allgemeinen ist eine Funktion weder gerade noch ungerade, wie es das Beispiel der Funktion  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  zeigt:

$$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3; \quad f(-2) = 4 + 8 + 1 = 13.$$

**Die Potenzfunktionen**  
 $y = x^{-n}$ ; ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  
**Zweite Erweiterung**  
**des Potenzbegriffs**

Die Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten werden so definiert, daß die Rechenregeln aus Satz C 23 auch für Potenzen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten gelten. (Dies läßt sich auf Grund der folgenden Definition beweisen. Hier werden nur einige Beispiele gerechnet.)

► **DEFINITION 26:**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad (a \neq 0, n \text{ natürlich})$$

■ **a) Beispiel für die Regel  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ :**

$$a^{-3} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^{3+5}} = a^{-(3+5)} = a^{(-3)+(-5)}$$

$$x^2 \cdot x^{-4} = x^2 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^2} = x^{-2} = x^{2+(-4)}$$

**b) Beispiel für die Regel  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ :**

$$(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{a^6}} = a^6 = a^{(-2) \cdot (-3)}$$

$$(b^5)^{-4} = \frac{1}{(b^5)^4} = \frac{1}{b^{5 \cdot 4}} = b^{-5 \cdot 4} = b^{5 \cdot (-4)}$$

► **SATZ 27: Für alle ganzen Zahlen  $k$  und beliebige reelle Zahlen  $a$ ; ( $a \neq 0$ ) gilt**

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

**Beweis:**

**a)  $k > 0$ :** In diesem Fall gilt die Gleichung auf Grund von Definition C 26

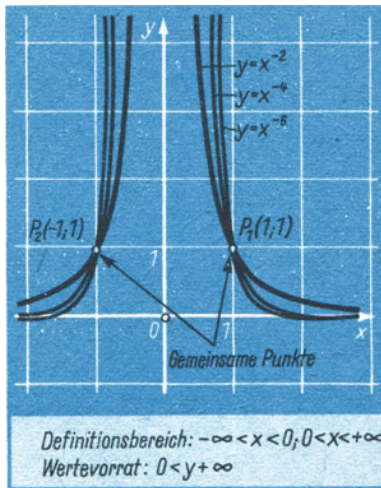
**b)  $k = 0$ :** In diesem Fall gilt die Gleichung nach Definition C 24

## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; ( $k$ GANZE ZAHL)

c)  $k < 0$ ; In diesem Fall gibt es eine positive ganze Zahl  $m$  mit  $k = -m$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^k} &= \frac{1}{a^{-m}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a^m}} \quad (\text{nach Definition C 26}) \\ &= a^m \\ &= a^{-k} \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Die Funktionen  $y = x^{-2m}$ ;  
( $m = 1, 2, 3, \dots$ )



Definitionsbereich:  
alle reellen Zahlen  $x$   
mit  $x \neq 0$

Wertevorrat:  $0 < y < \infty$

Wegen

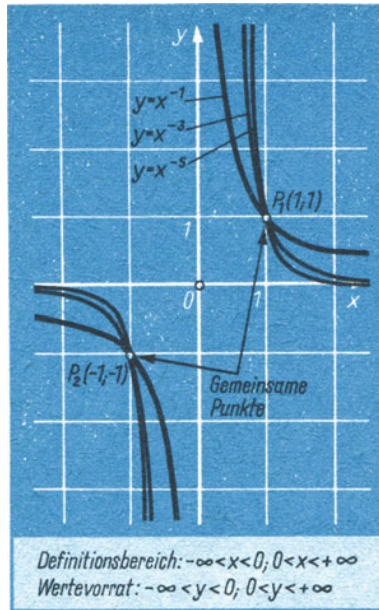
$$(-x)^{-2m} = \frac{1}{(-x)^{2m}} = \frac{1}{x^{2m}} = x^{-2m}$$

sind diese Potenzfunktionen gerade, ihre Bilder liegen also symmetrisch zur  $y$ -Achse. Die Bilder dieser Funktionen bestehen jeweils aus zwei getrennten Teilen (zwei Ästen). Sie nähern sich beliebig dicht der  $x$ -Achse und zwar um so mehr, je mehr der Betrag von  $x$  zunimmt. Dabei wird die  $x$ -Achse selbst jedoch nicht erreicht, da die Funktionswerte stets größer als 0 sind.

Man sagt, die Bilder nähern sich **asymptotisch** der  $x$ -Achse. Entsprechend nähern sich die Bilder asymptotisch der  $y$ -Achse, wenn der Betrag von  $x$  immer kleiner wird.

## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; ( $k$ GANZE ZAHL)

Die Funktionen  
 $y = x^{-(2m-1)}$ ;  
 ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )



Definitionsbereich:  
 alle reellen Zahlen  $x$   
 mit  $x \neq 0$   
 Wertevorrat:  
 alle reellen Zahlen  $y$   
 mit  $y \neq 0$

Wegen

$$(-x)^{-(2m-1)} = \frac{1}{(-x)^{2m-1}} = \frac{1}{-x^{2m-1}} = -x^{-(2m-1)}$$

sind diese Potenzfunktionen ungerade, ihre Bilder liegen also punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Bilder bestehen aus zwei Ästen, die sich asymptotisch den Koordinatenachsen annähern.

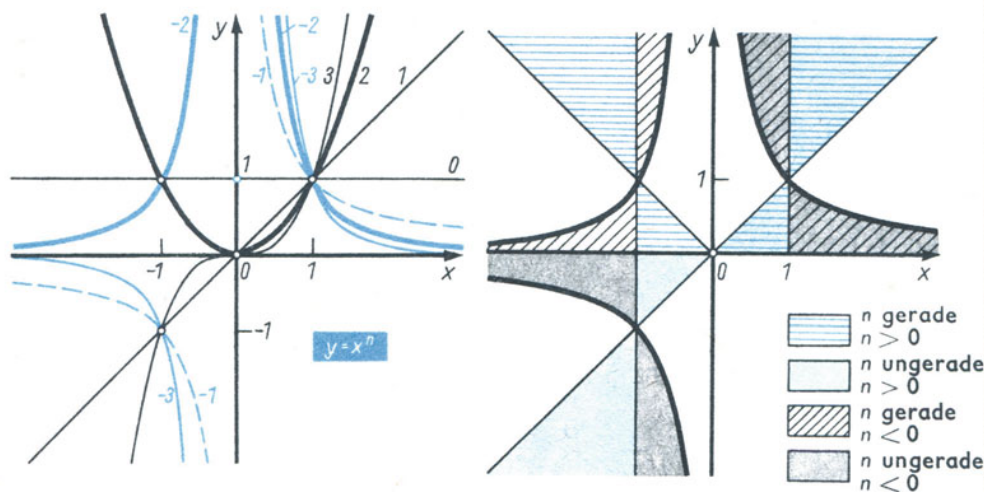
**Zusammenfassender Überblick über die Potenzfunktionen  $y = x^k$**   
 ( $k$  beliebige ganze Zahl)

$y = x^k$	k positiv		k negativ		k = 0
	gerade	ungerade	gerade	ungerade	
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$
Wertevorrat	$0 \leq y < \infty$	$-\infty < y < \infty$	$0 < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$ außer $y = 0$	$y = 1$

## 8. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^k$ ; (k GANZE ZAHL)

Die **Definitionsbereiche** der Potenzfunktionen ergeben sich einfach aus der Tatsache, daß man außer der Null jede reelle Zahl mit einem beliebigen ganzzahligen Exponenten potenzieren kann. Die Zahl Null kann nicht mit negativen Exponenten potenziert werden, da das eine Division durch Null bedeuten würde. Ebenso ist  $0^0$  nicht definiert.

Die **Wertevorräte** der Potenzfunktionen bestehen aus allen den Zahlen  $y$ , für die es eine Zahl  $x$  gibt, so daß  $y = x^k$  gilt. Daß das auch alle in der Tabelle jeweils angegebenen reellen Zahlen sind, folgt aus der Lösbarkeit der Gleichung  $x^k = y$  bei vorgegebenem  $y$  und  $k$  (73).



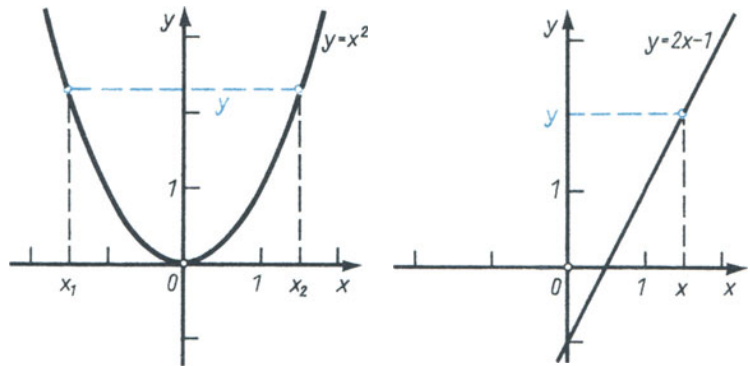
$y = x^k$	k positiv		k negativ	
	gerade	ungerade	gerade	ungerade
<b>Gemeinsame Punkte</b>	$(-1; 1)$ $(1; 1)$ $(0; 0)$	$(-1; -1)$ $(1; 1)$ $(0; 0)$	$(-1; 1)$ $(1; 1)$	$(-1; -1)$ $(1; 1)$
<b>steigend</b>	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < 0$	
<b>fallend</b>	$-\infty < x \leq 0$		$0 < x < \infty$	$-\infty < x < 0$ und $0 < x < \infty$

## 9. DER BEGRIFF DER UMKEHRFUNKTION

Umkehrbar  
eindeutige Funktionen,  
eindeutige  
Funktionen

► **DEFINITION 28:** Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt umkehrbar eindeutig oder eineindeutig, wenn nicht nur jedem Element des Definitionsbereichs (Argument) genau ein Funktionswert zugeordnet ist, sondern auch umgekehrt zu jedem Funktionswert genau ein Argument gehört (↗ 84).

- a) Die Funktion  $y = x^2$  ist nicht eineindeutig; denn zu jedem Funktionswert  $y > 0$  gehören zwei Argumente  $x_1$  und  $x_2$  mit  $x_1 = -x_2$ .
- b) Die Funktion  $y = 2x - 1$  ist eineindeutig, denn zu jedem Funktionswert  $y$  gehört genau ein Argument  $x$ .



Vertauscht man die Reihenfolge der Elemente in allen Paaren einer Funktion, so ist die dabei entstehende Paarmenge genau dann wieder eine Funktion, wenn die gegebene Funktion eineindeutig ist. Denn nur dann ist die durch die Vertauschung entstandene Zuordnung auch wieder eindeutig.

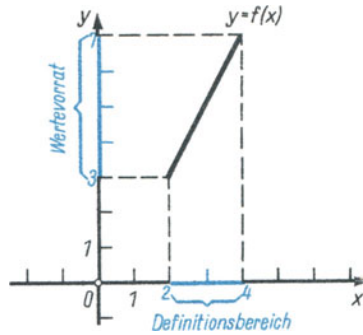
► **DEFINITION 29:** Durch Vertauschung der Elemente in allen Paaren  $[x; y]$  einer eineindeutigen Funktion  $f$  entsteht eine Funktion, die aus den Paaren  $[y; x]$  besteht. Diese Funktion heißt Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu der gegebenen Funktion.

Nach der in dieser Definition angegebenen Vertauschung ist der Definitionsbereich der gegebenen Funktion der Wertevorrat ihrer Umkehrfunktion und der Wertevorrat der gegebenen Funktion der Definitionsbereich ihrer Umkehrfunktion.

Zur Unterscheidung von der ursprünglichen Funktion  $f$  bezeichnet man ihre Umkehrfunktion mit  $f$  oder mit einem anderen Buchstaben wie etwa  $g$ ,  $h$ ,  $y$ . Sehr gebräuchlich ist auch die Bezeichnung  $f^{-1}$ .



## 9. DER BEGRIFF DER UMKEHRFUNKTION



$$y = f(x) = 2x - 1$$

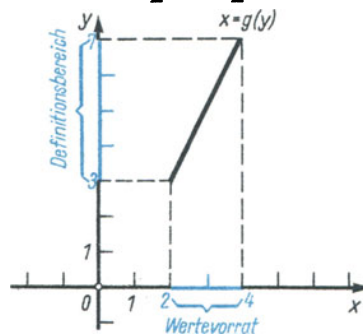
Definitionsbereich:

$$2 \leq x \leq 4$$

$$\text{Wertevorrat: } 3 \leq y \leq 7$$

Die zugehörige Umkehrfunktion besteht aus allen Paaren  $[y; x]$ , in denen einem beliebigen Argument  $y$  mit  $3 \leq y \leq 7$  ein Funktionswert  $x$  mit  $2 \leq x \leq 4$  zugeordnet ist. Zu vorgegebenem Argument  $y$  erhält man den zugehörigen Funktionswert  $x$  am einfachsten, indem man die Gleichung der gegebenen Funktion nach  $x$  auflöst:

$$x = g(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \quad (\text{Gleichung der Umkehrfunktion})$$



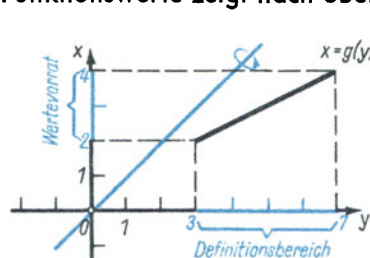
Definitionsbereich:

$$3 \leq y \leq 7$$

$$\text{Wertevorrat: } 2 \leq x \leq 4$$

Im Unterschied zur Funktion  $y = f(x)$  sind jetzt bei der Funktion  $x = g(y)$  die Argumente auf der  $y$ -Achse und die Funktionswerte auf der  $x$ -Achse aufgetragen. Daher haben beide Funktionen dasselbe Bild.

Das Achsenkreuz wird durch Klappung um die Gerade  $y = x$  in die gewohnte Lage gebracht, d. h., die Achse für die Argumente zeigt nach rechts und die Achse für die Funktionswerte zeigt nach oben:



$$x = g(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

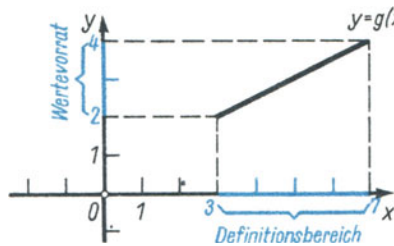
(Gleichung der Umkehrfunktion)

Definitionsbereich:

$$3 \leq y \leq 7$$

$$\text{Wertevorrat: } 2 \leq x \leq 4$$

## 9. DER BEGRIFF DER UMKEHRFUNKTION



Übergang zur gewohnten Bezeichnung der Variablen und Achsen:

$$y = g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(Gleichung der Umkehrfunktion)

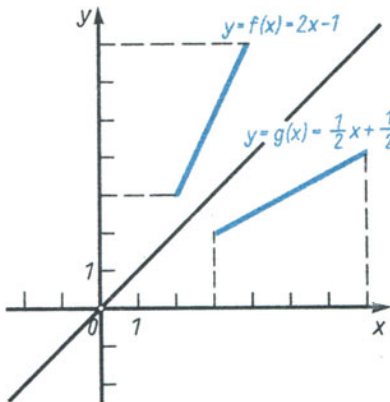
Definitionsbereich:

$$3 \leq x \leq 7$$

$$\text{Wertevorrat: } 2 \leq y \leq 4$$

Zeichnet man das Bild der Funktion  $y = f(x)$  und das Bild ihrer Umkehrfunktion  $y = g(x)$  in ein und dasselbe Achsenkreuz, so liegen diese Bilder wegen der Klappung des Achsenkreuzes achsensymmetrisch zur Geraden  $y = x$ .

Bildet man die Umkehrfunktion von  $y = g(x)$ , so erhält man wieder die ursprünglich gegebene Funktion  $y = f(x)$ :



$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Auflösen nach  $x$ :

$$x = 2y - 1$$

Vertauschung der Variablenbezeichnung:

$$y = 2x - 1$$

Das ist die gegebene Funktion.

- **SATZ 30:** Bildet man zu einer gegebenen Funktion deren Umkehrfunktion und von dieser wiederum die Umkehrfunktion, so erhält man die gegebene Funktion.

Dieser Satz ergibt sich aus der Tatsache, daß man nach zweimaliger Vertauschung der Elemente in allen Paaren einer Funktion wieder die ursprüngliche Paarmenge erhält. Die Funktion  $y = x^2$  ist in dem Definitionsbereich  $-\infty < x < \infty$  nicht eindeutig (↗ 141, Beispiel a), hat also keine Umkehrfunktion.

Funktionen, die eine Umkehrfunktion besitzen, nennt man auch kurz **umkehrbar**.

- **SATZ 31:** Wenn eine Funktion monoton (↗ 88) ist, so ist sie eindeutig und damit umkehrbar.

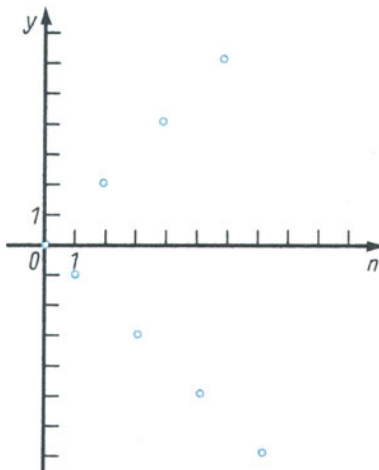
## 9. DER BEGRIFF DER UMKEHRFUNKTION

**Beweis:**

Angenommen, die betrachtete Funktion sei monoton wachsend. Das bedeutet, daß diese Funktion für irgend zwei verschiedene Argumente nicht denselben Wert annehmen kann; denn zum größeren Argument gehört auch immer ein größerer Funktionswert. Zu jedem Funktionswert gehört also nur ein Argument. Nach Definition C 28 ( $\neq$  141) ist die Funktion damit eineindeutig. Falls die betrachtete Funktion monoton fallend ist, verläuft die Überlegung ganz entsprechend.

w. z. b. w.

**Bemerkung:** Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, d. h., es gibt eineindeutige Funktionen, die nicht monoton sind.



$$y = f(n) = (-1)^n n$$

Definitionsbereich: Menge der natürlichen Zahlen

Wertevorrat: Menge der positiven geraden und der negativen ungeraden Zahlen

Wertetabelle

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$y$	0	-1	2	-3	4	-5	6	-7	...

Diese Funktion ist eineindeutig und damit umkehrbar:

**a)** Zu jedem Argument  $n$  gehört genau ein Funktionswert  $y$ .

**b)** Umgekehrt gehört auch zu jedem Funktionswert  $y$  genau ein Argument  $n$ .

Die Funktion ist aber nicht monoton.

**a)** Sie ist nicht monoton wachsend.

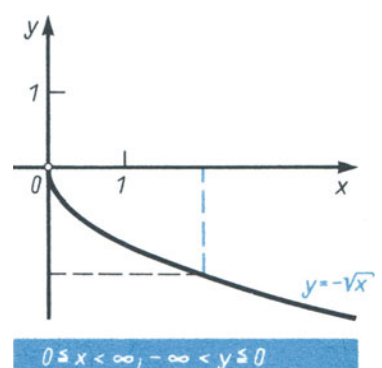
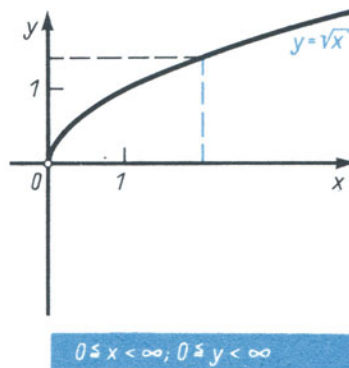
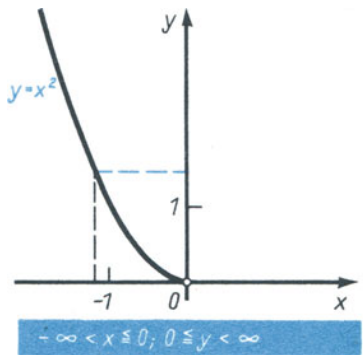
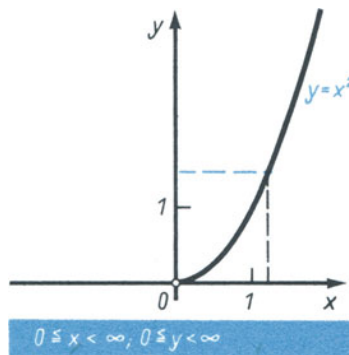
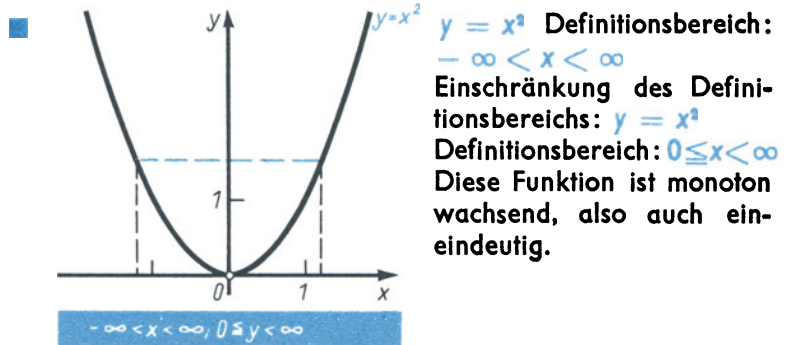
Beispielsweise gilt für  $n_1 = 2$  und  $n_2 = 5$ :  $n_1 < n_2$  aber  $f(n_1) > f(n_2)$ , denn  $f(n_1) = 2$  und  $f(n_2) = -5$ .

**b)** Sie ist auch nicht monoton fallend.

Beispielsweise gilt für  $n_1 = 3$  und  $n_2 = 4$ :  $n_1 < n_2$  aber  $f(n_1) < f(n_2)$ , denn  $f(n_1) = -3$  und  $f(n_2) = 4$ .

## 9. DER BEGRIFF DER UMKEHRFUNKTION

Aus nicht eindeutigen Funktionen kann man oft durch Einschränkung des Definitionsbereichs eindeutige und damit umkehrbare Funktionen gewinnen.



**Beweis:**

Für beliebige Argumente  $x_1$  und  $x_2$  mit  $x_1 < x_2$  aus dem Definitionsbereich  $0 \leq x < \infty$  gilt:

$f(x_1) < f(x_2)$ , d. h.  $x_1^2 < x_2^2$ .

## 9. DER BEGRIFF DER UMKEHRFUNKTION

---

Das kann man folgendermaßen zeigen:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

Nun ist aber  $x_1 + x_2 > 0$ , da beide Argumente nicht negativ sind und  $x_2$  nicht gleich 0 ist. Außerdem ist wegen  $x_1 < x_2$  die Differenz  $x_1 - x_2$  negativ.

Das Produkt  $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$  ist also negativ. Daher gilt

$$x_1^2 - x_2^2 < 0, \quad \text{also}$$

$$x_1^2 < x_2^2. \quad \text{w. z. b. w.}$$

Entsprechend ist die Funktion

$$y = x^2 \quad \text{Definitionsbereich: } -\infty < x \leq 0$$

monoton fallend .

*Bildung der Gleichung der Umkehrfunktion:*

$$y = x^2$$

*Auflösen nach x:*

$$\text{für } 0 \leq x < \infty$$

$$x = \sqrt{y}$$

*Umbenennung der Variablen:*

$$y = \sqrt{x}$$

$$\text{für } -\infty < x \leq 0$$

$$x = -\sqrt{y}$$

$$y = -\sqrt{x}$$

## 10. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^{\frac{1}{n}}$ ( $n \neq 0$ ; $n$ NATÜRL. ZAHL)

### Der Wurzelbegriff

Zu jeder nichtnegativen Zahl  $a$  und zu jeder positiven ganzen Zahl  $n$  gibt es genau eine nichtnegative reelle Zahl, die Lösung der Gleichung  $x^n = a$  ist.

- **DEFINITION 32:** Ist  $a$  eine beliebige nichtnegative reelle Zahl und  $n$  eine positive ganze Zahl, so bezeichnet man die nichtnegative reelle Zahl  $b$ , für die  $b^n = a$  gilt, mit  $b = \sqrt[n]{a}$  (gelesen:  $n$ -te Wurzel aus  $a$ ).

Die Zahl  $a$  heißt **Radikand**, die Zahl  $n$  heißt **Wurzelexponent**. Die Operation, die den Zahlen  $n$  und  $a$  die Zahl  $b = \sqrt[n]{a}$  zuordnet, heißt **Radizieren** oder **Wurzelziehen**.

Nach Definition C 32 ist  $\sqrt[n]{a}$  diejenige nichtnegative Zahl, deren  $n$ -te Potenz gleich  $a$  ist. Es gilt also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Statt  $\sqrt{a}$  (auch gelesen: Quadratwurzel aus  $a$ ) schreibt man kürzer  $\sqrt{a}$  (gelesen: Wurzel aus  $a$ ). Für  $\sqrt[3]{a}$  liest man auch: Kubikwurzel aus  $a$ .

Nach Definition C 32 ist  $\sqrt[1]{a} = a$ . Daher wird das Zeichen  $\sqrt[1]{a}$  üblicherweise nicht benutzt.

### Dritte Erweiterung des Potenzbegriffes auf beliebige rationale Exponenten

- **DEFINITION 33:** Ist  $a$  eine beliebige positive Zahl,  $m$  eine beliebige ganze Zahl und  $n$  eine beliebige positive ganze Zahl, so wird die Potenz  $a^{\frac{m}{n}}$  durch folgende Gleichung definiert:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Falls  $\frac{m}{n} > 0$ , so ist die Definitionsgleichung auch für  $a = 0$  sinnvoll, denn es gilt

$$0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = \sqrt[n]{0} = 0$$

- **DEFINITION 34:**

$$0^{\frac{m}{n}} = 0, \text{ falls } \frac{m}{n} > 0$$

Für  $m = 1$  ergibt sich aus der Definition C 33 der Spezialfall

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \geq 0)$$

10. DIE POTENZFUNKTIONEN  $y = x^{\frac{1}{n}}$ ; ( $n \neq 0$ ;  $n$  NATÜRL. ZAHL)

Die Definition C 33 erweitert den Potenzbegriff auf rationale Exponenten so, daß die Potenzgesetze ( $\nearrow$  134, Satz 23) weiter gelten.

Die Potenzgesetze für Potenzen mit gebrochen rationalen Exponenten in Wurzelschreibweise werden auch **Wurzelgesetze** genannt.

■ a) 
$$\sqrt[3]{\frac{x^3 y^4}{4 z^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 y^5}{2 z^4}} = \sqrt[3]{\frac{x^2 y^4}{4 z^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 y^5}{2 z^4}} = \sqrt[3]{\frac{x^2 y^4 \cdot x^4 y^5}{4 z^2 \cdot 2 z^4}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x^6 y^9}{8 z^6}} = \frac{x^2 y^3}{2 z^2}$$

b) 
$$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

c) 
$$(\sqrt[3]{5})^6 = \sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$$

Für  $a \geq 0$  gilt  $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

Falls der Wurzelexponent gerade ist, existiert  $\sqrt[n]{a^n}$  auch für  $a < 0$ . In diesem Fall gilt jedoch:  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ; ( $n$  gerade).

■ a) 
$$\sqrt[6]{2^6} = (\sqrt[6]{2})^6 = 2$$

b) 
$$\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = 2 = |-2|$$
 und nicht etwa

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = (\sqrt[6]{-2})^6 = -2$$
, denn  $\sqrt[6]{-2}$  existiert nicht.

**Rationalmachen des Nenners**

Steht im Nenner eines Bruches eine Wurzel, so gelingt es mitunter, durch Erweitern oder Kürzen die Wurzel zu beseitigen. Das nennt man **Rationalmachen** des Nenners.

■ a) 
$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b \cdot b^2}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{b}$$

b) 
$$\frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} + \sqrt{12}} = \frac{(\sqrt{18} - \sqrt{12})(\sqrt{18} - \sqrt{12})}{(\sqrt{18} + \sqrt{12})(\sqrt{18} - \sqrt{12})}$$

$$= \frac{18 - 2\sqrt{12 \cdot 18} + 12}{18 - 12} = \frac{30 - 12\sqrt{6}}{6} = 5 - 2\sqrt{6}$$

**Die Potenzfunktionen**

$y = x^{\frac{1}{n}}$

Die Funktionen  $y = x^{\frac{1}{2m}}$   
( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

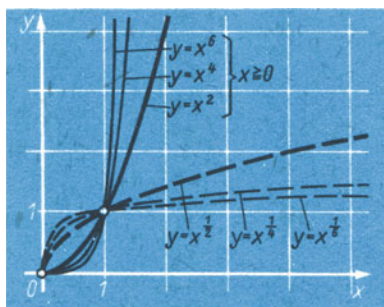
Jede Potenzfunktion  $y = x^{2m}$ ; ( $m = 1, 2, \dots$ ) ist für  $x \geq 0$  monoton steigend und daher eineindeutig ( $\nearrow$  135, Bild). In diesem Bereich ist sie also umkehrbar ( $\nearrow$  143).

$y = x^{2m}$  Definitionsbereich:  $0 \leq x < \infty$

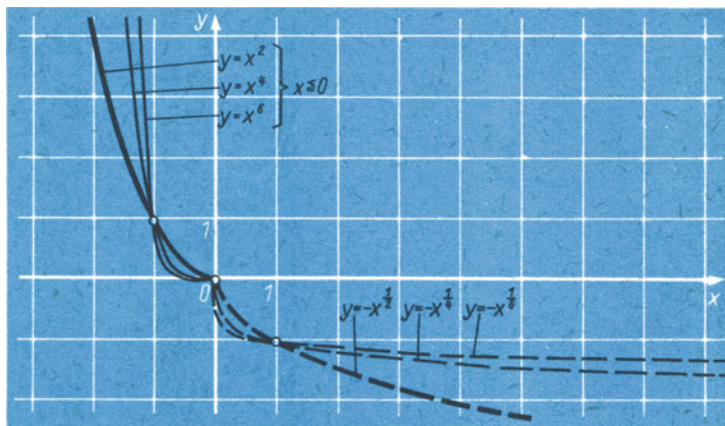
Umkehrfunktion  $\begin{cases} x = \sqrt[2m]{y} = y^{\frac{1}{2m}} & \text{Definitionsbereich: } 0 \leq y < \infty \\ y = \sqrt[2m]{x} = x^{\frac{1}{2m}} & \text{Definitionsbereich: } 0 \leq x < \infty \end{cases}$

## 10. DIE POTENZFUNKTIONEN $y = x^{\frac{1}{n}}$ ; ( $n \neq 0$ ; $n$ NATÜRL. ZAHL)

Die Potenzfunktionen  $y = x^{\frac{1}{2m}} = \sqrt[2m]{x}$  heißen auch **Wurzelfunktionen**. Sie sind die Umkehrfunktionen ( $\nearrow$  141) der Potenzfunktionen  $y = x^{2m}$  mit dem Definitionsbereich  $0 \leq x < \infty$ . Die Bilder dieser Wurzelfunktionen liegen daher achsensymmetrisch zu den Bildern der entsprechenden Potenzfunktionen bezüglich der Geraden  $y = x$ .



Auch die Funktionen  $y = x^{2m}$  mit dem Definitionsbereich  $-\infty < x \leq 0$  sind monoton (fallend) und daher umkehrbar. Als Umkehrungen erhält man die Funktionen  $y = -x^{\frac{1}{2m}} = -\sqrt[2m]{x}$  Definitionsbereich  $0 \leq x < \infty$ .



Die Funktionen  $y = x^{\frac{1}{2m-1}}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

Jede Potenzfunktion  $y = x^{2m-1}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) ist für  $x \geq 0$  monoton steigend und daher eineindeutig. ( $\nearrow$  136). Sie ist also in diesem Bereich umkehrbar.

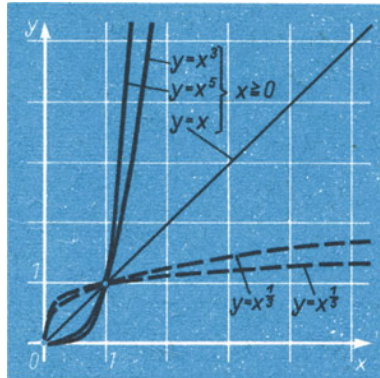
$y = x^{2m-1}$  Definitionsbereich:  $0 \leq x < \infty$

Umkehrfunktion	$\begin{cases} x = \sqrt[2m-1]{y} = y^{\frac{1}{2m-1}} \\ y = \sqrt[2m-1]{x} = x^{\frac{1}{2m-1}} \end{cases}$	Definitionsbereich:
		$0 \leq y < \infty$
		Definitionsbereich:
		$0 \leq x < \infty$



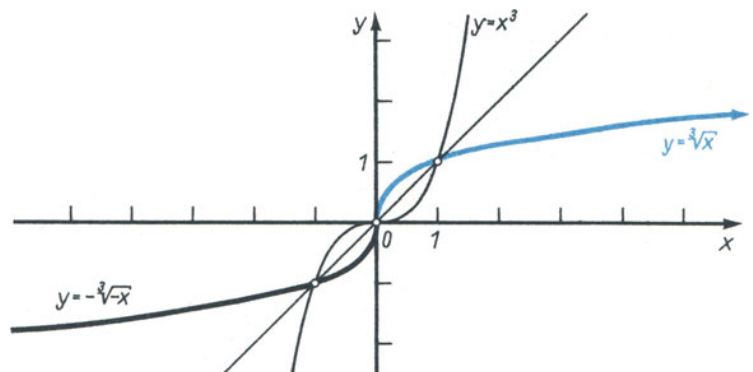
10. DIE POTENZFUNKTIONEN  $y = x^{\frac{1}{n}}$ ; ( $n \neq 0$ ;  $n$  NATÜRL. ZAHL)

Diese Wurzelfunktionen sind also die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen  $y = x^{2m-1}$  mit dem Definitionsbereich  $0 \leq x < \infty$ . Die Bilder der Funktionen  $y = \sqrt[2m-1]{x}$  liegen also achsensymmetrisch zu den Bildern der Funktionen  $y = x^{2m-1}$  bezüglich der Geraden  $y = x$ .



Die Potenzfunktionen  $y = x^{2m-1}$  sind im Gegensatz zu den Potenzfunktionen  $y = x^{2m}$  für  $-\infty < x < \infty$ , also auf der ganzen  $x$ -Achse, monoton (steigend) und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktionen sind aber nicht durch eine einzige Gleichung darstellbar, da Wurzeln nur für nicht negative Radikanden definiert sind (S. 147; Def. C 33).

Potenzfunktion	Umkehrfunktion
$y = x^{2m-1}$ Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$	$y = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{x}, & \text{für } 0 \leq x < \infty \\ -\sqrt[2m-1]{-x}, & \text{für } -\infty < x < 0 \end{cases}$



# 11. DIE EXPONENTIALFUNKTIONEN $y = a^x; (a > 0)$

## Vierte Erweiterung des Potenzbegriffs

Auf Grund folgender Überlegungen läßt sich der Potenzbegriff für  $a > 0$  sogar auf beliebige reelle Zahlen als Exponenten erweitern.

- Die Potenz  $3^{\sqrt{2}}$  wird folgendermaßen durch eine Intervallschachtelung ( $\nearrow 72$ ) definiert.

Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$		Näherungswerte für $3^{r_n}$	Näherungswerte für $3^{s_n}$
$r_n$	$s_n$		
1	2	3	9
1,4	1,5	4,6	5,2
1,41	1,42	4,71	4,76
1,414	1,415	4,728	4,733
1,4142	1,4143	4,7287	4,7293
1,41421	1,41422	4,72879	4,72884

Die Näherungswerte für die reellen Zahlen  $3^{r_n}$  und  $3^{s_n}$  bilden ihrerseits eine Intervallschachtelung, die dieselbe reelle Zahl erfaßt, wie die durch die reellen Zahlen  $3^{r_n}$  und  $3^{s_n}$  selbst gebildete Schachtelung. Diese Zahl wird als  $3^{\sqrt{2}}$  definiert. Sie ist unabhängig von der für  $\sqrt{2}$  gewählten Schachtelung eindeutig bestimmt.

Es gilt  $3^{\sqrt{2}} = 4,728 \dots$

Auf die Beweis dieser Behauptungen muß wegen ihrer Schwierigkeiten verzichtet werden.

Für den so erweiterten Potenzbegriff gelten die Potenzgesetze ( $\nearrow 134$ ; Satz 23).

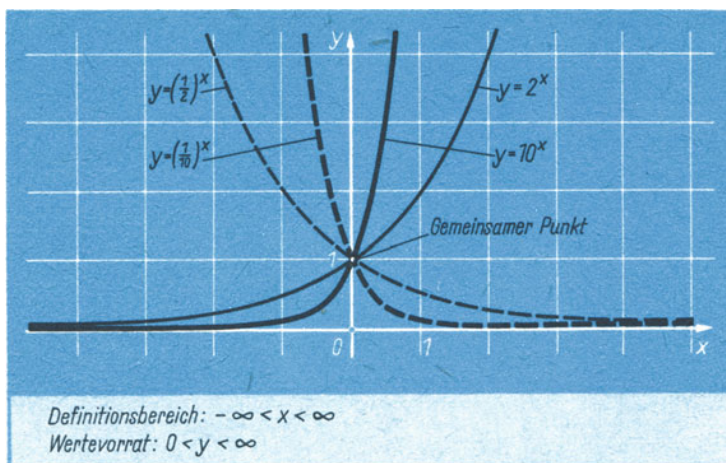
## Exponentialfunktionen

Für jedes feste  $a > 0$  bilden die durch die Gleichung  $y = a^x$  gegebenen Paare  $[x; y]$  eine Funktion, deren Definitionsbereich das Intervall  $-\infty < x < \infty$ , also die Menge aller reellen Zahlen ist.

Diese Funktionen heißen **Exponentialfunktionen**.

- $$\begin{array}{l}
 a = 2 : y = 2^x \\
 a = 10 : y = 10^x
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 a = \frac{1}{2} : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \\
 a = \frac{1}{10} : y = \left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x} \\
 a = 1 : y = 1^x
 \end{array}
 \right.$$

## 11. DIE EXPONENTIALFUNKTIONEN $y = a^x$ ( $a > 0$ )



Die Bilder der Funktionen  $y = a^x$  liegen achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse zu den Bildern der entsprechenden Funktionen  $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ , denn für entgegengesetzte Argumente werden die gleichen Funktionswerte angenommen.

Für  $a > 1$  sind die Exponentialfunktionen monoton wachsend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch ( $\nearrow$  138) der x-Achse.

Für  $0 < a < 1$  sind die Exponentialfunktionen monoton fallend. Für größer werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch der x-Achse.

Für  $a = 1$  ergibt sich  $y = 1^x$ , also die *konstante Funktion*  $y = 1$ .

Keine Exponentialfunktion hat eine Nullstelle. Die Bilder aller Exponentialfunktionen verlaufen durch den Punkt  $(0; 1)$ , denn für beliebiges  $a \neq 0$  gilt  $a^0 = 1$ , insbesondere also für  $a > 0$ .

Der Wertevorrat jeder Exponentialfunktion  $y = a^x$ ; ( $a > 0$ ) ist die Menge der positiven reellen Zahlen.

Das erkennt man folgendermaßen

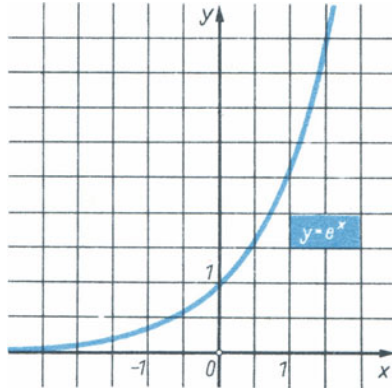
- 1) Jede solche Funktion hat wegen der positiven Basis *nur* positive Funktionswerte.
- 2) Es treten auch *alle* positiven reellen Zahlen als Funktionswerte auf, denn zu jedem positiven  $y$  gibt es genau eine reelle Zahl  $x$ , für die  $y = a^x$  bei fest vorgegebenem  $a > 0$  und  $a \neq 1$  gilt.

Beide Behauptungen werden mit Hilfe von Intervallschachtelungen bewiesen.

## 11. DIE EXPONENTIALFUNKTIONEN $y = a^x$ ( $a > 0$ )

### Die Zahl $e$

In den Naturwissenschaften und in der Technik tritt häufig eine Exponentialfunktion auf, deren Basis irrational ( $\neq 74$ ) ist und mit  $e$  bezeichnet wird. Ein Näherungswert dieser Zahl ist  
 $e \approx 2,718281828459$ .



- Der Zerfall eines radioaktiven Elements wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(t) = n e^{-kt}$$

Dabei gibt der jeweilige Funktionswert  $f(t)$  die Anzahl der zur Zeit  $t$  vorhandenen radioaktiven Atome an, wenn  $n$  die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t = 0$  vorhandenen radioaktiven Atome ist. Die Zahl  $k$  ist eine für das betreffende Element charakteristische Konstante.

**Bemerkung:** Prinzipiell kann man Exponentialfunktionen auch für Basen  $a \leq 0$  definieren. Dies erweist sich jedoch als wenig sinnvoll, da diese Funktionen im Fall  $a < 0$  nur für ganzzahlige Argumente definiert sind.

Im Fall  $a = 0$  erhält man die Funktion  $y = 0^x$ ; ( $x \neq 0$ ). Ihr Bild ist die  $x$ -Achse ohne den Ursprung.

### Additionstheorem für Exponentialfunktionen

Wegen  $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ ; ( $a > 0$ ) gilt für alle Exponentialfunktionen  $y = f(x) = a^x$  folgendes **Additionstheorem**:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

## 12. DIE LOGARITHMUSFUNKTIONEN $y = \log_a x$ ( $a > 0; a \neq 1$ )

Zu jeder positiven Zahl  $b$  und zu jeder positiven Zahl  $a \neq 1$  gibt es genau eine Zahl  $x$ , die Lösung der Gleichung  $b = a^x$  ist.

**Der Logarithmus** ► **DEFINITION 35:** Ist  $a > 0, a \neq 1$  und  $b > 0$ , so bezeichnet man die eindeutig bestimmte Zahl  $x$ , für die  $b = a^x$  gilt, mit  $x = \log_a b$  (gelesen: **Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$** ). Dabei heißt die Zahl  $b$  der zum Logarithmus gehörige Numerus. Die Operation, die den Zahlen  $a$  und  $b$  die Zahl  $x = \log_a b$  zuordnet, heißt **Logarithmieren**.

■  $b = 2^x; \quad x = \log_2 b$

$2^x$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$x$	-6	-5	-4	-3	-2	-1

1	2	4	8	16	32	64	$b$
0	1	2	3	4	5	6	$\log_2 b$

**Logarithmengesetze** ► **SATZ 36:**

1)  $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$   
 2)  $\log_a \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$   
 3)  $\log_a b^c = c \log_a b$ ,  
 für  $c = \frac{1}{n}$  ergibt sich hieraus:  $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

**Beweis zu 1)**

Setzt man  $\log_a b_1 = x_1$  und  $\log_a b_2 = x_2$ , so folgt

$$b_1 = a^{x_1} \text{ und } b_2 = a^{x_2}.$$

Dann ist  $b_1 \cdot b_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ , also

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = x_1 + x_2.$$

Setzt man in dieser Gleichung für  $x_1$  und  $x_2$  aus den ersten Gleichungen  $\log_a b_1$  bzw.  $\log_a b_2$  ein, so folgt:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2,$$

w. z. b. w.

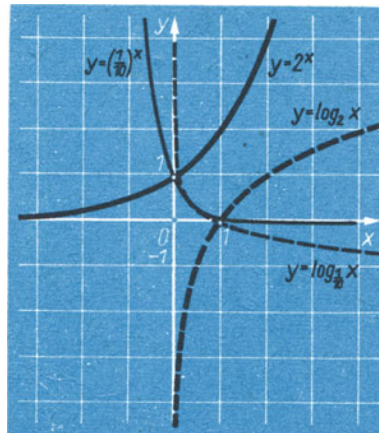
## 12. DIE LOGARITHMUSFUNKTIONEN $y = \log_a x$ ( $a > 0; a \neq 1$ )

### Die Logarithmusfunktion

Jede Exponentialfunktion  $y = a^x$ ; ( $a \neq 1$ ) ist monoton, also eineindeutig und damit umkehrbar.

$$\text{Umkehrfunktion} \left\{ \begin{array}{l} y = a^x \quad (a \neq 1) \\ x = \log_a y \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Def.-Ber.} \quad -\infty < x < \infty \\ \text{Wertevorr.} \quad 0 < y < \infty \\ \text{Def.-Ber.} \quad 0 < y < \infty \\ \text{Wertevorr.} \quad -\infty < x < \infty \end{array} \right\} (\text{ } \nearrow 141\text{f})$$

Die Logarithmusfunktionen  $y = \log_a x$ ; ( $a \neq 1$ ) sind also die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen  $y = a^x$ ; ( $a \neq 1$ ) und umgekehrt. Ihre Bilder liegen zueinander achsensymmetrisch bezüglich der Geraden  $y = x$ .



Für  $a > 1$  sind die Logarithmusfunktionen monoton wachsend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch ( $\nearrow 138$ ) der negativen  $y$ -Achse.

Für  $0 < a < 1$  sind die Logarithmusfunktionen monoton fallend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch der positiven  $y$ -Achse.

Alle Logarithmusfunktionen haben als einzige Nullstelle  $x = 1$ , d. h., ihre Bilder verlaufen durch den Punkt  $(1; 0)$ . Für jede Basis  $a$  gilt also  $\log_a 1 = 0$  (wegen  $a^0 = 1$ ). Ebenso gilt  $\log_a a = 1$  (wegen  $a^1 = a$ ).

### Dekadischer und natürlicher Logarithmus

Für das Rechnen mit Logarithmen werden üblicherweise die Basen 10 (dekadischer Logarithmus) und  $e$  (natürlicher Logarithmus) ( $\nearrow 153$ ) verwendet. Zur Abkürzung wird dabei folgende Schreibweise verabredet:

## 12. DIE LOGARITHMUSFUNKTIONEN $y = \log_a x$ ( $a > 0; a \neq 1$ )

statt  $\log_{10} x$  schreibt man  $\lg x$

(gelesen: Logarithmus  $x$  oder l – g –  $x$ ),

statt  $\log_e x$  schreibt man  $\ln x$

(gelesen: Logarithmus naturalis  $x$  oder l – n –  $x$ ).

Die Logarithmen mit diesen Basen lassen sich auf Grund folgender Zusammenhänge ineinander umrechnen.

Man setzt

$$(1) \quad x = 10^y; \text{ daraus folgt}$$

$$(2) \quad y = \lg x$$

Aus Gleichung (1) folgt durch Logarithmieren

$$\ln x = \ln 10^y$$

$$\text{oder } \ln x = y \cdot \ln 10$$

Daraus erhält man durch Einsetzen für  $y$  aus Gleichung (2):

$$\ln x = \lg x \cdot \ln 10$$

$$\lg x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln 10}$$

Aus den Umrechnungsgleichungen erhält man für  $x = e$ :

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10}$$

Damit kann man die Umrechnungsgleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$\ln x = \lg x \cdot \frac{1}{\lg e}$$

$$\lg x = \ln x \cdot \lg e$$

Es gilt  $\lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,4343$  (auf vier Dezimalen genau)

$$\ln 10 = \frac{1}{\lg e} = 2,3026 \text{ (auf vier Dezimalen genau)}$$

Allgemein gilt für beliebige Basen folgende Umrechnungsgleichung:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \frac{1}{\log_b a}$$

- Gegeben:  $\lg x = 1,5832$       Gesucht:  $\ln x$   
 $\ln x = 1,5832 \cdot 2,3026 = 3,6455$

### 13. GEBRAUCH DER LOGARITHMENTAFELN

Jede positive Zahl  $x$  läßt sich in der Form  $r \cdot 10^k$  darstellen, wobei  $k$  eine ganze Zahl und  $r$  eine reelle Zahl ist mit  $1 \leq r < 10$ .

- **SATZ 37: Der dekadische Logarithmus jeder positiven reellen Zahl  $x$  läßt sich folgendermaßen darstellen:**  
 $\lg x = \lg r + k$  mit  $1 \leq r < 10$ , (also  $0 \leq \lg r < 1$ ) und  $k$  ganzzahlig.

**Beweis:**

Die Zahl  $x$  wird dargestellt als  $x = r \cdot 10^k$ ; ( $1 \leq r < 10$ )

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } \lg x &= \lg (r \cdot 10^k) \\ &= \lg r + \lg 10^k \\ &= \lg r + k \cdot \lg 10 \\ &= \lg r + k \end{aligned}$$

w. z. b. w.

**Mantisse, Kennzahl**

- **DEFINITION 38: In der Darstellung des dekadischen Logarithmus für  $\lg x$  heißt  $\lg r$  die Mantisse und  $k$  die Kennzahl des betreffenden Logarithmus.**

Wenn man also die dekadischen Logarithmen für Numeri zwischen 1 und 10, d. h. die Mantissen kennt, so kann man durch Addition der entsprechenden Kennzahl zur Mantisse die Logarithmen für beliebige Numeri finden. Da die Dezimaldarstellungen ( $\nearrow$  52) der Mantissen mit „0, . . .“ beginnen, genügt es, in einer Logarithmentafel nur die Ziffern anzugeben, die auf das Komma folgen. Die Logarithmen sind im allgemeinen irrationale Zahlen ( $\nearrow$  74). Daher müssen diese Angaben gerundet werden. Je nach Genauigkeit spricht man von vier-, fünf- oder siebenstelligen Logarithmentafeln.

- $\lg 4863 = \lg (4,863 \cdot 10^3)$   
 $= \lg 4,863 + \lg 10^3 = \lg 4,863 + 3 = 3,6869$
- $\lg 486,3 = \lg (4,863 \cdot 10^2)$   
 $= \lg 4,863 + \lg 10^2 = \lg 4,863 + 2 = 2,6869$
- $\lg 48,63 = \lg (4,863 \cdot 10^1)$   
 $= \lg 4,863 + \lg 10^1 = \lg 4,863 + 1 = 1,6869$
- $\lg 4,863 = \lg (4,863 \cdot 10^0)$   
 $= \lg 4,863 + \lg 10^0 = \lg 4,863 + 0 = 0,6869$
- $\lg 0,4863 = \lg (4,863 \cdot 10^{-1})$   
 $= \lg 4,863 + \lg 10^{-1} = \lg 4,863 - 1 = 0,6869 - 1$
- $\lg 0,04863 = \lg (4,863 \cdot 10^{-2})$   
 $= \lg 4,863 + \lg 10^{-2} = \lg 4,863 - 2 = 0,6869 - 2$



### 13. GEBRAUCH DER LOGARITHMENTAFELN

Für das Rechnen mit Logarithmen ist es zweckmäßig, positive Kennzahlen vor das Komma zu schreiben, die negativen dagegen hinter die Mantisse zu schreiben.

**Regeln für das Aufsuchen von dekadischen Logarithmen in der Tafel**

a) Die Mantisse ergibt sich aus der geltenden Ziffernfolge des Numerus ohne Rücksicht auf die Stellung des Kommas. Dabei beginnt die „geltende Ziffernfolge“ mit der ersten von 0 verschiedenen Ziffer von links.

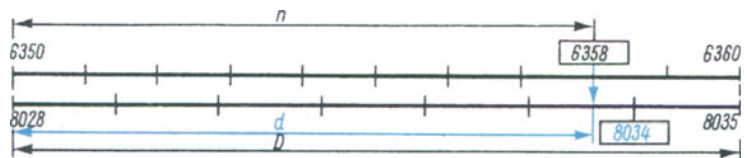
b) Die Kennzahl ergibt sich aus der Stellung des Kommas.  
 Numerus:  $N \geq 1$                       Numerus:  $0 < N < 1$   
 Kennzahl:  $k \geq 0$                       Kennzahl:  $k < 0$   
 Die Kennzahl  $k$  ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen des Numerus vor dem Komma.      Der Betrag der Kennzahl  $k$  ist gleich der Anzahl der Nullen vor der geltenden Ziffernfolge des Numerus, einschließlich der Null vor dem Komma.

■ a)  $x = 635,8$   
 Gesucht:  $\lg x$   
 Kennzahl:  $k = 2$   
 $\lg x = 2, \dots$

Geltende Ziffernfolge  
 des Numerus: 6358  
 Mantisse: 8034  
 $\lg x = 2,8034$

$$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}; \quad d = \frac{D \cdot n}{10}$$

$$d = \frac{7 \cdot 8}{10} \approx 6$$

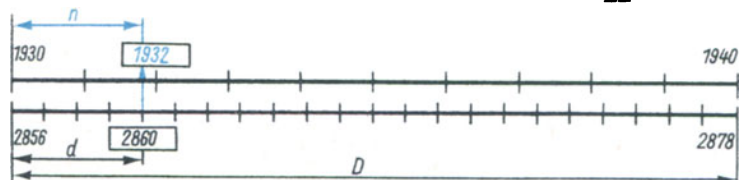


b)  $\lg x = 0,2860 - 3$   
 Gesucht:  $x$   
 Mantisse: 2860  
 Geltende Ziffernfolge  
 des Numerus: 1932

$$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}; \quad n = \frac{10 \cdot d}{D}$$

$$n = \frac{10 \cdot 4}{22} \approx 2$$

$x = 0,001932$



### 13. GEBRAUCH DER LOGARITHMENTAFELN

Mit Hilfe der Logarithmen lassen sich numerische Rechnungen leichter ausführen.

■ a)  $x = \frac{84,52^3 \cdot \sqrt[3]{164,2} \cdot 0,3}{\sqrt{111,2} \cdot 0,0092^3} = \frac{z}{n}$

$x = 120800000000$

N	lg N	
84,52	1,9270	:3
164,2	2,2153	:3
111,2	2,0461	:2
0,0092	0,9638 - 3	:3
84,52 <sup>3</sup>	5,7810	} +
$\sqrt[3]{164,2}$	0,7384	
0,3	0,4771 - 1	
z	6,9965 - 1	} +
$\sqrt{111,2}$	1,0230	
0,0092 <sup>3</sup>	2,8914 - 9	
n	3,9144 - 9	} -
x	11,0821	

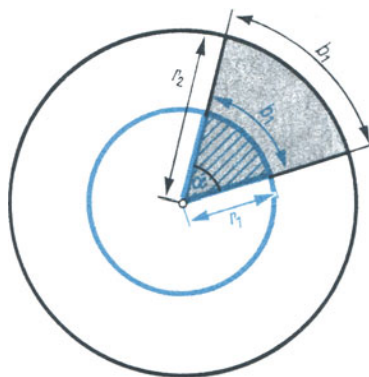
■ b)  $x = \frac{6,438 \cdot 0,1749 + \sqrt[4]{83510}}{14,98^2 \cdot 4,502} = \frac{z}{n}$

$x = 0,01795$

N	lg N	
83510	4,9218	:4
14,98	1,1755	:2
6,438	0,8088	} +
0,1749	0,2427 - 1	
1,126	0,0515	} +
$\sqrt[4]{83510}$	1,2304	
17,00	1,2304	
18,126	1,2584 =	} -
z ≈ 18,13	3,2584 - 2	
14,98 <sup>2</sup>	2,3510	} +
4,502	0,6534	
n	3,0044	} -
x	0,2540 - 2	

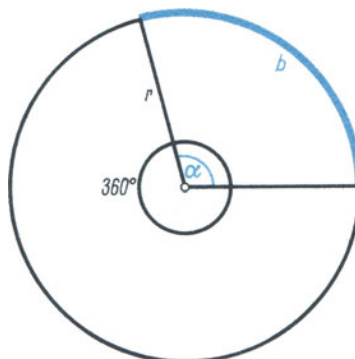
## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

<b>Winkelmaße</b>	Die Maßeinheiten für die Winkelmessung werden als Bruchteile eines Vollwinkels ( $\sphericalangle 212$ ) definiert.
<b>Altgrad</b>	<b>Maßeinheit <math>1^\circ</math> (ein Grad):</b> der 360. Teil eines Vollwinkels $1^\circ = 60'$ (Minuten); $1' = 60''$ (Sekunden)
<b>Neugrad</b>	<b>Maßeinheit <math>1^\circ</math> (ein Neugrad oder Gon):</b> der 400. Teil eines Vollwinkels $1^\circ = 100^c$ (Neuminuten); $1^c = 100^{cc}$ (Neusekunden)
<b>Bogenmaß</b>	<b>Maßeinheit 1 rad (ein Radiant):</b> der $2\pi$ -te Teil eines Vollwinkels $1 \text{ rad} \approx 57,30^\circ$ Durch diese Maßeinheit wird jedem Winkel $\alpha$ eine Maßzahl $\text{arc } \alpha$ , das <b>Bogenmaß</b> des betreffenden Winkels, zugeordnet. Zeichnet man diesen Winkel als Zentriwinkel in einen beliebigen Kreis ein, so ergibt sich sein Bogenmaß auch als Verhältnis der Länge des zugehörigen Bogens zur Länge des Radius. Dieses Verhältnis ist für alle Kreise gleich, da alle Kreissektoren mit demselben Zentriwinkel ähnlich sind.



Es gilt also

$$\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2}$$



Für einen beliebigen Kreis gilt:

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{b}{2\pi r},$$

daraus folgt

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

$$\frac{b}{r} = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ \quad (*)$$

Das Verhältnis  $\frac{b}{r}$  ist also genau dann gleich 1, wenn  $\alpha$  der  $2\pi$ -te Teil eines Vollwinkels ist, d. h.  $\frac{b}{r} = 1$  genau dann, wenn  $\alpha = 1$  rad.

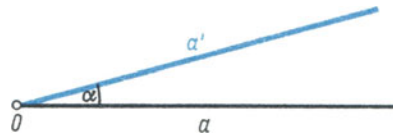
Allgemein gilt:  $\frac{b}{r} = \text{arc } \alpha$ .

Aus Gleichung (\*) folgt dann

$$\text{arc } \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$$

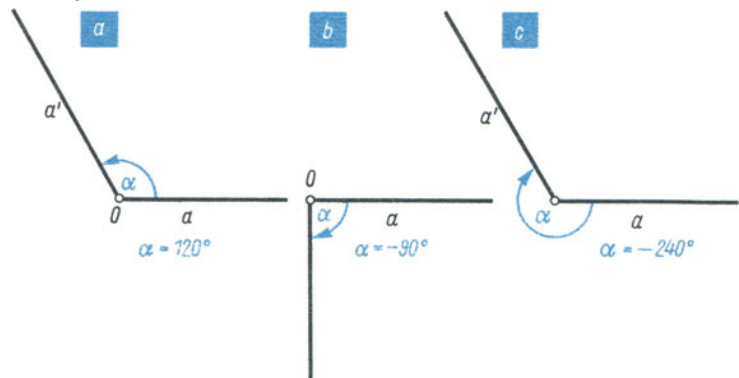
### Erweiterung des Winkelbegriffs

Die Schenkel eines Winkels ( $\sphericalangle$ 199) können auch als Original und Bild bei der Drehung ( $\sphericalangle$ 216) eines Strahls um seinen Anfangspunkt angesehen werden. So ist im folgenden Bild der Strahl  $a'$  das Bild des Strahls  $a$  bei einer Drehung um den Winkel  $\alpha$  mit dem Anfangspunkt  $O$  des Strahls  $a$  als Drehzentrum.



### Positive, negative Drehrichtung

Als **positive Drehrichtung** wird die der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzte Richtung festgesetzt.. Die **negative Drehrichtung** ist die Richtung, in der sich der Uhrzeiger bewegt.



Bei einer bestimmten Drehung wird die Drehrichtung durch das entsprechende Vorzeichen des Winkelmaßes angegeben. Das Zeichen „+“ wird wie üblich weggelassen.

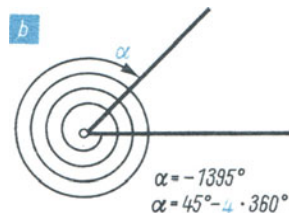
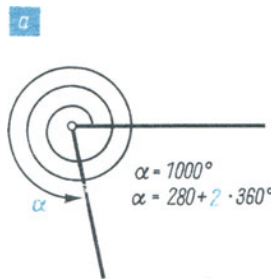
## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

### Winkel über $360^\circ$

Bei der Betrachtung trigonometrischer Funktionen erweist es sich als notwendig, auch Winkel zu definieren, deren Maß dem Betrag nach größer als  $360^\circ$  (bzw.  $2\pi$  oder  $400^\circ$ ) ist. Dazu zählt man bei einer Drehung über den Vollwinkel hinaus im Sinne der ursprünglichen Messung über  $360^\circ$  bzw.  $-360^\circ$  je nach Drehrichtung weiter.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1000^\circ \\ &= 280^\circ + 2 \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -1395^\circ \\ &= 45^\circ - 4 \cdot 360^\circ \end{aligned}$$



### Hauptwert des Winkels

Das Maß  $x$  eines beliebigen Winkels läßt sich folgendermaßen angeben:

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} + k \cdot 360^\circ \quad (\text{Gradmaß}) \\ x &= \bar{x} + k \cdot 2\pi \quad (\text{Bogenmaß}) \end{aligned} \right\} \quad k \text{ ganze Zahl}$$

Dabei ist  $\bar{x}$  ein Winkelmaß zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  bzw. zwischen 0 und  $2\pi$ . Man nennt  $\bar{x}$  den **Hauptwert** von  $x$ .

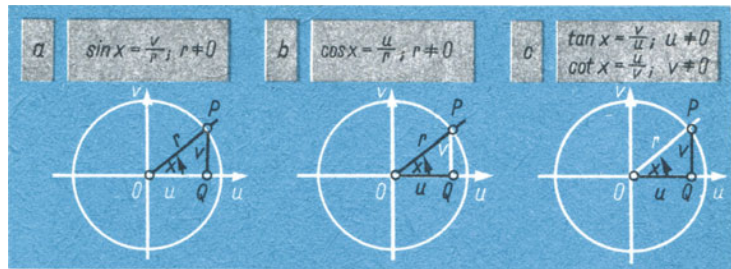
### Winkelfunktionen

Zur Definition der Winkelfunktionen zeichnet man den jeweiligen Winkel in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Dabei fällt der eine Schenkel mit der positiven Richtung der Abszissenachse ( $u$ -Achse) zusammen. Der andere Schenkel wird *beweglicher Schenkel* genannt.

Der Punkt  $P$  ist der Schnittpunkt des beweglichen Schenkels eines beliebigen Winkels mit einem um den Ursprung  $O$  des Koordinatensystems gezeichneten Kreis mit dem Radius  $r$ . Der Punkt  $P$  hat die Koordinaten  $u$  und  $v$ .

Durch die im folgenden angegebenen Zuordnungen entstehen Funktionen, deren Definitionsbereiche Mengen von reellen Zahlen sind. Da aber in diesem Fall die reellen Zahlen als Maßzahlen von Winkeln aufgefaßt werden, sprechen wir von „Winkel“funktionen.

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN



### Sinus, Kosinus

**DEFINITION 39:** Der Sinus eines Winkels mit dem Maß  $x$  ist das Verhältnis der Ordinate  $v$  des Punktes  $P$  zum Radius  $r$  des Kreises.

$$\sin x = \frac{v}{r}, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (\text{gelesen: Sinus } x)$$

**DEFINITION 40:** Der Kosinus eines Winkels mit dem Maß  $x$  ist das Verhältnis der Abszisse  $u$  des Punktes  $P$  zum Radius  $r$  des Kreises.

$$\cos x = \frac{u}{r}, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (\text{gelesen: Kosinus } x)$$

### Tangens, Kotangens

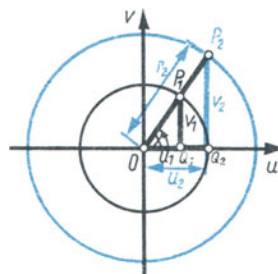
**DEFINITION 41:** Der Tangens eines Winkels mit dem Maß  $x$  ist das Verhältnis der Ordinate  $v$  zur Abszisse  $u$  des Punktes  $P$ , ( $u \neq 0$ ).

$$\tan x = \frac{v}{u}, \quad [-\infty < x < \infty \text{ und } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \text{ ganz}], \quad (\text{gelesen: Tangens } x)$$

**DEFINITION 42:** Der Kotangens eines Winkels mit dem Maß  $x$  ist das Verhältnis der Abszisse  $u$  zur Ordinate  $v$  des Punktes  $P$ , ( $v \neq 0$ ).

$$\cot x = \frac{u}{v}, \quad (-\infty < x < \infty \text{ und } x \neq k \cdot \pi; k \text{ ganz}), \quad (\text{gelesen: Kotangens } x)$$

*Bemerkung:* Diese Definitionen der Winkelfunktionen sind unabhängig von der Wahl des Kreises und damit von der Größe des Radius  $r$ . Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke  $OQ_1P_1$  und  $OQ_2P_2$  gilt nämlich

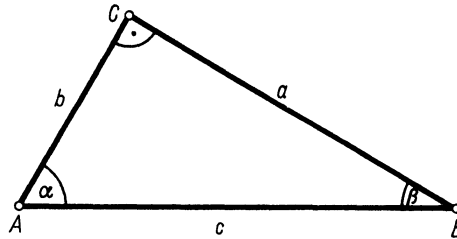


$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} \\ \cos x &= \frac{u_1}{r_1} = \frac{u_2}{r_2} \\ \tan x &= \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \\ \cot x &= \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \end{aligned}$$

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

### Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

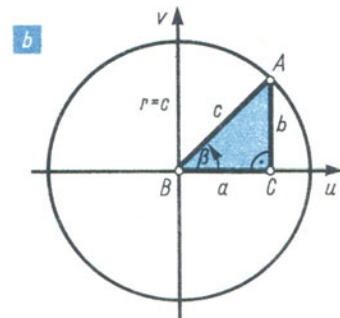
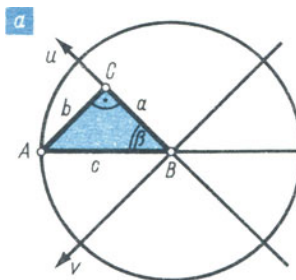
Für Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  lassen sich die Funktionswerte der Winkelfunktionen als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck auffassen.



► **SATZ 43:** Im rechtwinkligen Dreieck mit  $\gamma = 90^\circ$  gilt

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\sin \beta = \frac{b}{c}$	Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von <b>Gegenkathete</b> zu <b>Hypotenuse</b> .
$\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\cos \beta = \frac{a}{c}$	Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von <b>Ankathete</b> zu <b>Hypotenuse</b> .
$\tan \alpha = \frac{a}{b}$ $\tan \beta = \frac{b}{a}$	Der Tangens eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von <b>Gegenkathete</b> zu <b>Ankathete</b> .
$\cot \alpha = \frac{b}{a}$ $\cot \beta = \frac{a}{b}$	Der Kotangens eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von <b>Ankathete</b> zu <b>Gegenkathete</b> .

**Beweis:**



Jedes rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse  $c$  läßt sich wie im linken Bild in einen Kreis mit dem Radius  $r = c$  und in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzeichnen.

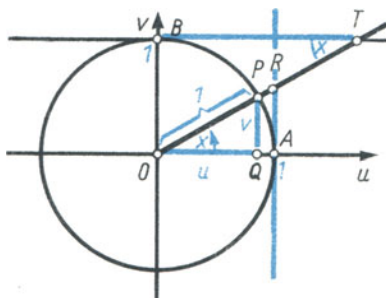
## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

Nach der Drehung dieses Koordinatensystems in die gewohnte Lage liest man auf Grund der Definitionen C 39 bis 42 die Behauptungen unmittelbar ab.

Beim Beweis für den Winkel  $\alpha$  muß das Dreieck zunächst um eine seiner Seiten geklappt werden.

### Darstellung der Winkelfunktionswerte am Einheitskreis

Im folgenden Bild ist ein Winkel  $x$  in einen Kreis mit dem Radius  $r = 1$ , einen sogenannten Einheitskreis, eingezeichnet. Die in den Punkten A bzw. B an diesen Kreis gelegten Tangenten heißen **Haupt-** bzw. **Nebentangente**.



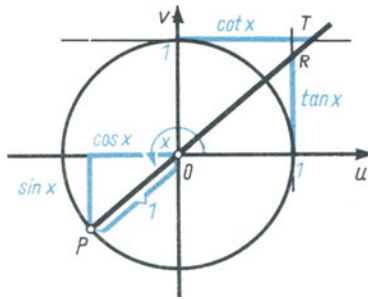
Wegen der Unabhängigkeit von der Wahl des Kreises gilt:

$\sin x = \frac{v}{1} = v$	Der Sinus eines Winkels ist gleich der Ordinate des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit dem Einheitskreis.
$\cos x = \frac{u}{1} = u$	Der Kosinus eines Winkels ist gleich der Abszisse des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit dem Einheitskreis.
$\tan x = \frac{v}{u} = \frac{\overline{AR}}{\overline{OA}}$ $= \frac{\overline{AR}}{1} = \overline{AR}$ <p>(<math>\triangle OQP \sim \triangle OAR</math>)</p>	Der Tangens eines Winkels ist gleich der Ordinate des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit der Haupttangente.
$\cot x = \frac{u}{v} = \frac{\overline{BT}}{\overline{OB}}$ $= \frac{\overline{BT}}{1} = \overline{BT}$ <p>(<math>\triangle OQP \sim \triangle OTB</math>)</p>	Der Kotangens eines Winkels ist gleich der Abszisse des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit der Nebentangente.

Falls der bewegliche Schenkel die Haupt- bzw. Nebentangente nicht schneidet, wird der Schnittpunkt der Verlängerung des beweglichen Schenkels über O hinaus mit der jeweiligen Tangente betrachtet (Bild Seite 166).



## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN



Die Darstellung der Winkelfunktionswerte am Einheitskreis zeigt, daß die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion dem Betrage nach nicht größer als 1 werden können. Dagegen wachsen die Funktionswerte der Tangens- und der Kotangensfunktion dem Betrage nach über alle Grenzen, da die Abschnitte auf den Tangenten beliebig lang werden können.

Funktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = \sin x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \cos x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \tan x$	$-\infty < x < \infty$ und $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ (k ganz)	$-\infty < y < \infty$
$y = \cot x$	$-\infty < x < \infty$ und $x \neq k \cdot \pi$ (k ganz)	$-\infty < y < \infty$

Obwohl man anschaulich zu erkennen glaubt, daß jede reelle Zahl aus den angegebenen Intervallen als Maßzahl der entsprechenden Streckenlänge im Wertevorrat auch wirklich auftritt, muß dies bewiesen werden. Darauf soll aber hier verzichtet werden.

An der Darstellung am Einheitskreis kann man unmittelbar ablesen, welche Vorzeichen die Funktionswerte für Winkel aus den einzelnen Quadranten haben.

	I	II	III	IV
sin x	+	+	-	-
cos x	+	-	-	+
tan x	+	-	+	-
cot x	+	-	+	-

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

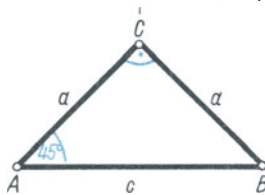
Weiterhin liest man ab:

	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
sin x	0	1	0	-1	0
cos x	1	0	-1	0	1
tan x	0	-	0	-	0
cot x	-	0	-	0	-

Funktionswerte  
einiger spezieller Winkel

In einem gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck gilt:

$c^2 = 2a^2$ ;  $c = a\sqrt{2}$  (Satz des Pythagoras, ↗ 278)



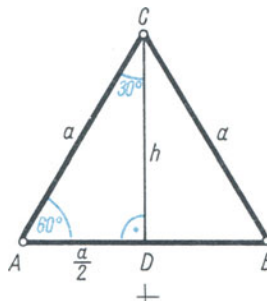
$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

In einem gleichseitigen Dreieck gilt:



$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4};$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Im Dreieck ADC gilt:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

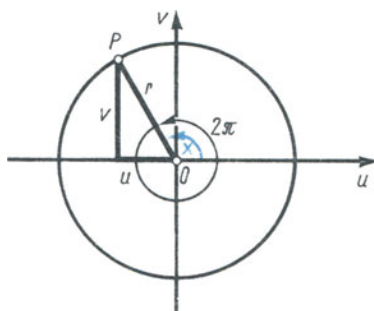
$$\cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}; \quad \tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1
cos x	1	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
cot x	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	0



### Periodizität der Winkelfunktionen

Dreht man den beweglichen Schenkel eines beliebigen Winkels  $x$  um  $2\pi$  ( $360^\circ$ ), so befindet er sich in der gleichen Lage wie vor der Drehung. Damit sind alle in den Definitionen C 39 bis C 42 ( $\nearrow$  163) auftretenden Verhältnisse für den Winkel  $x + 2\pi$  dieselben wie für den Winkel  $x$ . Das gilt nicht nur für eine Drehung um  $2\pi$ , sondern auch für jede Drehung um ein ganzzahliges Vielfaches  $k \cdot 2\pi$  von  $2\pi$ . Also gilt für jeden Winkel  $x$  aus dem jeweiligen Definitionsbereich:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= \sin(x + k \cdot 2\pi) \\ \cos x &= \cos(x + k \cdot 2\pi) \\ \tan x &= \tan(x + k \cdot 2\pi) \\ \cot x &= \cot(x + k \cdot 2\pi) \end{aligned} \right\} (k \text{ ganzzahlig})$$

► **DEFINITION 44:** Eine Funktion  $f$  heißt periodisch, wenn es eine Zahl  $a > 0$  gibt, so daß für jedes  $x$  gilt:

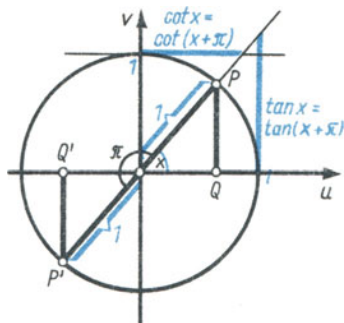
$$f(x) = f(x + a)$$

Jede solche Zahl  $a$  heißt Periode.

► **SATZ 45:** Die Winkelfunktionen sind periodische Funktionen.

■ Perioden der Winkelfunktionen sind beispielsweise  $2\pi$ , ( $k = 1$ );  $4\pi$ , ( $k = 2$ );  $100\pi$ , ( $k = 50$ ).

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

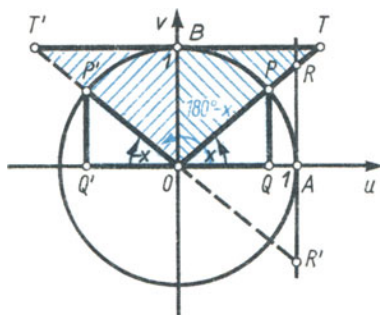


Für die Sinus- und Kosinusfunktion ist  $2\pi$  die kleinste Periode. Für die Tangens- und Kotangensfunktion ist  $\pi$  die kleinste Periode.

Für sie gilt also:

$$\left. \begin{aligned} \tan x &= \tan(x + k\pi) \\ \cot x &= \cot(x + k\pi) \end{aligned} \right\} \quad (k \text{ ganz})$$

**Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten (Quadrantenbeziehungen)**



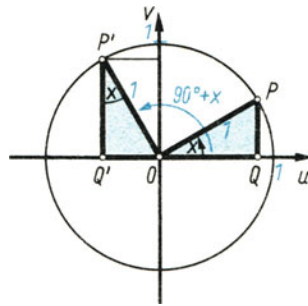
Wegen der Kongruenz ( $\sphericalangle$ 205) der Dreiecke	gilt
$OP'Q'$ und $OQP$	$\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ , also
$OP'Q'$ und $OQP$	$\overline{OQ'} = \overline{OQ}$ , also
$OAR'$ und $OAR$	$\overline{AR'} = \overline{AR}$ , also
$OBT'$ und $OBT$	$\overline{BT'} = \overline{BT}$ , also

Entsprechend ergeben sich die Beziehungen für Winkel im III. und IV. Quadranten..

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + x) &= -\sin x \\ \cos(180^\circ + x) &= -\cos x \\ \tan(180^\circ + x) &= \tan x \\ \cot(180^\circ + x) &= \cot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ - x) &= -\sin x \\ \cos(360^\circ - x) &= \cos x \\ \tan(360^\circ - x) &= -\tan x \\ \cot(360^\circ - x) &= -\cot x \end{aligned}$$

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN



Wegen der Kongruenz ( $\sphericalangle 205$ ) der Dreiecke  $OQ'P'$  und  $OQP$  gilt:

$$\sin(90^\circ + x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ + x) = -\sin x$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\sin(90^\circ \pm x) = \pm \cos x$$

$$\cos(90^\circ \pm x) = \mp \sin x$$

$$\tan(90^\circ \pm x) = \mp \cot x$$

$$\cot(90^\circ \pm x) = \mp \tan x$$

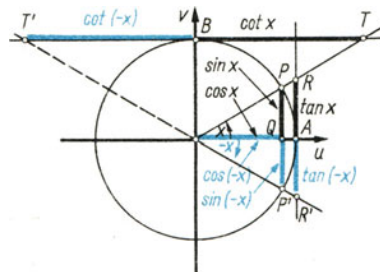
$$\sin(270^\circ \pm x) = -\cos x$$

$$\cos(270^\circ \pm x) = \pm \sin x$$

$$\tan(270^\circ \pm x) = \mp \cot x$$

$$\cot(270^\circ \pm x) = \mp \tan x$$

**Funktionswerte negativer Winkel**



Wegen der Kongruenz ( $\sphericalangle 205$ ) entsprechender Dreiecke gilt:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

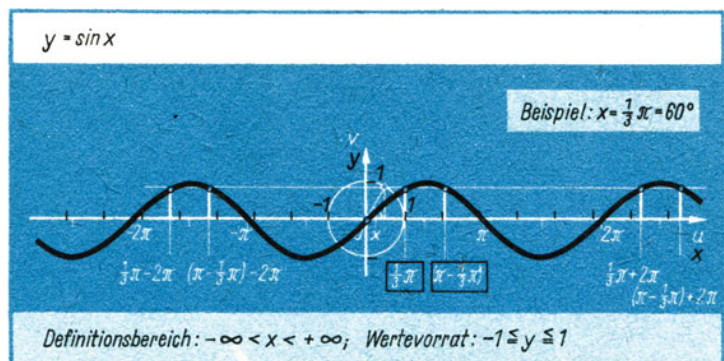
$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

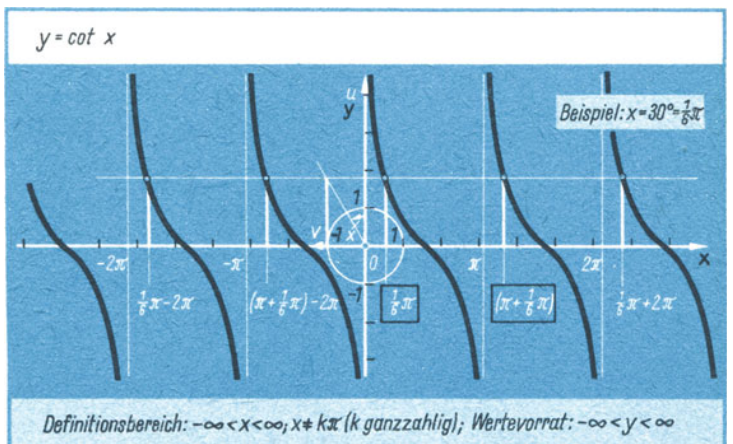
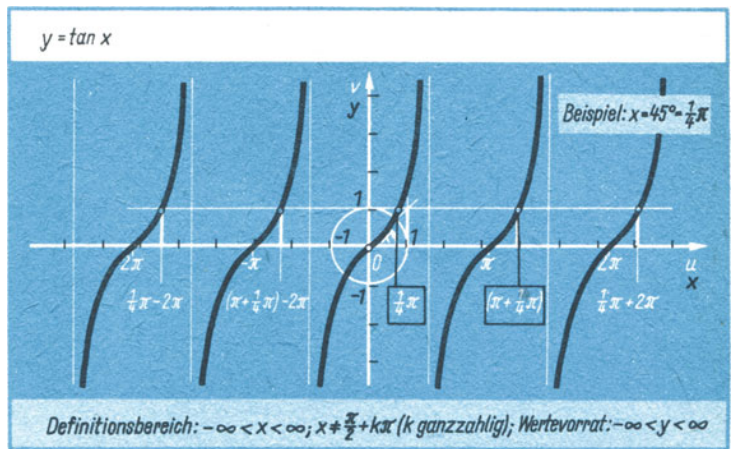
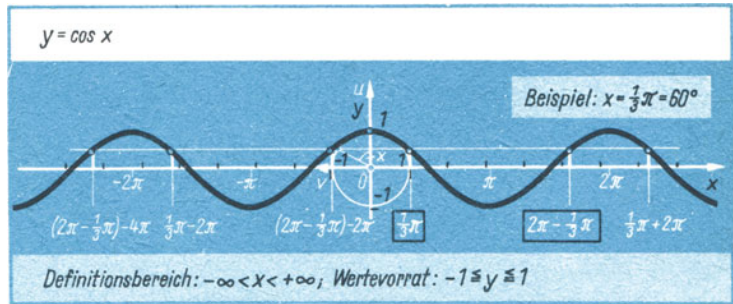
- **SATZ 46:** Die Funktion  $y = \cos x$  ist eine gerade Funktion. Die Funktionen  $y = \sin x$ ;  $y = \tan x$ ;  $y = \cot x$  sind ungerade Funktionen. ( $\sphericalangle 136$ , Def. 25; 222)

**Graphische Darstellung der Winkelfunktionen**

Zur graphischen Darstellung der Winkelfunktionen kann man die Funktionswerte dem Einheitskreis entnehmen.



## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN



### Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Auf Grund der Definitionen der Winkelfunktionen gilt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v}{r} : \frac{u}{r} = \frac{v}{u} = \tan x, \text{ falls } \cos x \neq 0,$$

d. h.  $x \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$  und

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u}{r} : \frac{v}{r} = \frac{u}{v} = \cot x, \text{ falls } \sin x \neq 0, \text{ d. h. } x \neq k \cdot \pi.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:  $\tan x \cdot \cot x = 1$ .

Weiterhin gilt ( $\nearrow$  163):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{v^2 + u^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

„ $\sin^2 x$ “ ist eine abkürzende Schreibweise für „ $(\sin x)^2$ “.

$\left. \begin{array}{l} \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \\ \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tan x \cdot \cot x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{array}$
---

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$
$\sin^2 x$	—	$1 - \cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{1}{1 + \cot^2 x}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	—	$\frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$	$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$	—	$\frac{1}{\cot^2 x}$
$\cot^2 x$	$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan^2 x}$	—

Will man aus dem in der Tabelle angegebenen Quadrat eines Funktionswertes diesen selbst bestimmen, so muß man beachten, in welchem Quadranten der betreffende Winkel liegt bzw. für welche Winkel die in der Formel auftretenden Funktionen definiert sind.

■  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$  gilt für jeden Winkel  $x$  aus dem Definitionsbereich der Tangensfunktion.

$\cos x = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}}$  gilt nur für solche Winkel, für die  $\cos x > 0$  gilt. Das sind alle Winkel  $x$  aus dem I. und IV. Quadranten mit  $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ .

$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}}$  gilt nur für solche Winkel, für die  $\cos x < 0$  gilt. Das sind alle Winkel  $x$  aus dem II. und III. Quadranten mit  $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ .

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

Additionstheoreme  
der Winkelfunktionen

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad (1a)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \quad (1b)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (2a)$$

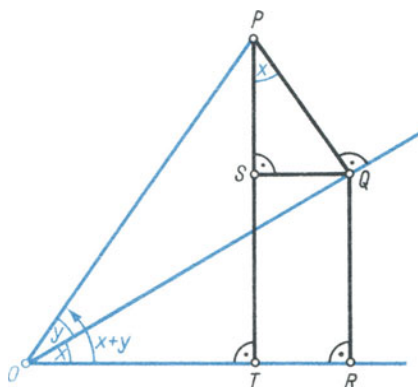
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (2b)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad (3a)$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad (3b)$$

$$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x} \quad (4a)$$

$$\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x} \quad (4b)$$



Beweis zu (1) für spitze Winkel  $x$  und  $y$ :

$\sphericalangle ROQ = \sphericalangle SPQ$  (Schenkel stehen paarweise aufeinander senkrecht,  $\sphericalangle$  231, Satz 33).

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \frac{\overline{PT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{ST} + \overline{SP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{SP}}{\overline{OP}} \\ &= \frac{\overline{QR}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PQ}} \quad (\text{Erweiterung mit } \overline{OQ}, \\ &\quad \text{bzw. } \overline{PQ}). \end{aligned}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung läßt sich auch für beliebige Winkel  $x$  und  $y$  nachweisen. Dieser Beweis soll hier nicht geführt werden.

Ersetzt man in der ersten Gleichung  $y$  durch  $-y$ , so erhält man wegen

$$\cos(-y) = \cos y \text{ und } \sin(-y) = -\sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x.$$

Folgerungen aus den  
Additionstheoremen

Setzt man in (1a) bis (4a)  $y = x$ , so erhält man die sogenannten **Doppelwinkelformeln**:



## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \cot 2x &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}\end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraktion von (1 a) und (1 b), bzw. (2 a) und (2 b) und anschließende Umbenennung ergibt sich:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

*Beweis der ersten Gleichung*

Addition von (1 a) und (1 b):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad (1a)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \quad (+) \quad (1b)$$

---


$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

Wir setzen  $x + y = \alpha$  und  $x - y = \beta$ .

$$x + y = \alpha$$

$$x - y = \beta$$

$$2x = \alpha + \beta$$

$$2y = \alpha - \beta$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Daraus ergibt sich:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

**Die Funktionen**

$$y = a \sin x$$

*Definitionsbereich:*  $-\infty < x < \infty$ ;

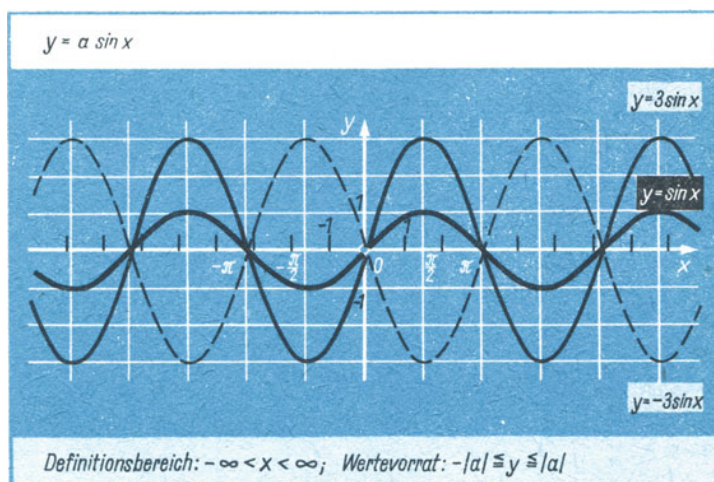
*Wertevorrat:*  $-|a| \leq y \leq |a|$

Die Werte der Funktion  $y = a \sin x$  erhält man, indem man die Werte der Funktion  $y = \sin x$  mit  $a$  multipliziert ( $\nearrow$  123). Gilt  $|a| \neq 1$ , so ergibt sich dadurch ein anderer Wertevorrat.

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

$ a  > 1$	$a > 0$	Dehnung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse
	$a < 0$	Dehnung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse
$ a  = 1$	$a = 1$	keine Änderung
	$a = -1$	Spiegelung der Sinuskurve an der x-Achse
$ a  < 1$	$a > 0$	Stauchung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse
	$a < 0$	Stauchung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse

- $y = \sin x$   
Wertevorrat:  $-1 \leq y \leq 1$
- $y = 3 \sin x$   
Wertevorrat:  $-3 \leq y \leq 3$
- $y = -3 \sin x$   
Wertevorrat:  $-3 \leq y \leq 3$



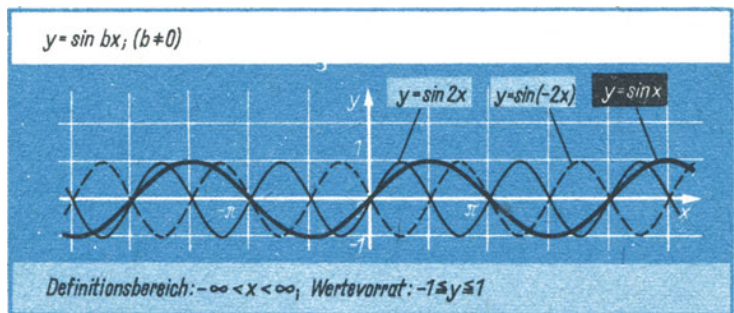
**Die Funktionen**  
 $y = \sin b x$  ( $b \neq 0$ )

Den Wert  $\sin x_1$ , den die Funktion  $y = \sin x$  an der Stelle  $x_1$  annimmt, nimmt die Funktion  $y = \sin b x$  an der Stelle  $\frac{x_1}{b}$  an; denn es gilt:

$$\sin\left(b \cdot \frac{x_1}{b}\right) = \sin x_1$$

## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

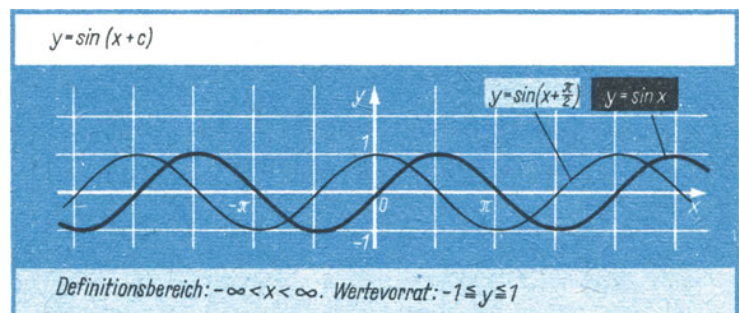
$ b  > 1$	$b > 0$	Stauchung in Richtung der x-Achse
	$b < 0$	Stauchung in Richtung der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse
$ b  = 1$	$b = 1$	keine Änderung
	$b = -1$	Spiegelung an der y-Achse
$ b  < 1$	$b > 0$	Dehnung in Richtung der x-Achse
	$b < 0$	Dehnung in Richtung der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse



**Bemerkung:** Da  $y = \sin x$  eine ungerade Funktion ist ( $\nearrow$  136), gilt  $\sin(-bx) = -\sin bx$ . Daher kann die Spiegelung an der y-Achse durch die Spiegelung an der x-Achse ersetzt werden.

$$y = \sin(x + c)$$

Das Bild der Funktion  $y = \sin(x + c)$  ist gegenüber dem Bild der Funktion  $y = \sin x$  um  $-c$  parallel zur x-Achse verschoben ( $\nearrow$  125).



## 14. DIE WINKELFUNKTIONEN

**Bemerkung:** Aus dem Bild auf Seite 176 kann man die Beziehung  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$  ablesen ( $\sphericalangle$  170).

$$y = a \sin(bx + c);$$

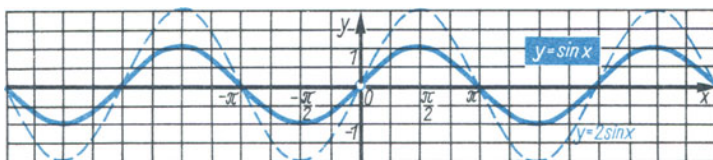
$(b \neq 0)$

Das Bild der Funktion  $y = a \sin(bx + c) = a \sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$  erhält man aus dem Bild der Funktion  $y = \sin x$  durch folgende Transformationen:

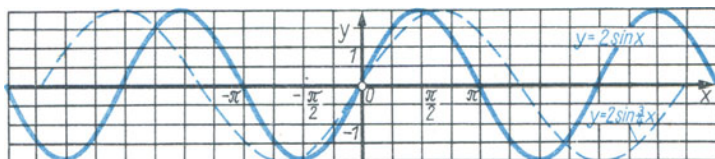
- |  |  |
|--|--|
| 1. Dehnung oder Stauchung in Richtung der y-Achse: $y = a \sin x$  | } Für $a < 0$<br>oder $b < 0$<br>kommen die<br>entsprechenden<br>Spiegelungen<br>hinzu |
| 2. Dehnung oder Stauchung in Richtung der x-Achse: $y = a \sin bx$   |  |
| 3. Verschiebung um $-\frac{c}{b}$ parallel zur x-Achse: $y = a \sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$ |  |

■  $y = 2 \sin\left[\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right] = 2 \sin\left[\frac{3}{4}(x - 2)\right]$

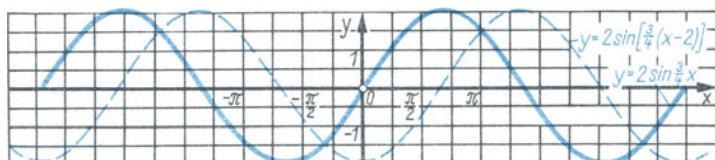
1.  $y = 2 \sin x$



2.  $y = 2 \sin \frac{3}{4}x$



3.  $y = 2 \sin\left[\frac{3}{4}(x - 2)\right]$



## 15. EBENE TRIGONOMETRIE

Die Frage, ob ein Dreieck durch gegebene Stücke eindeutig bestimmt ist, kann mit Hilfe der Kongruenzsätze entschieden werden.

Ist das Dreieck eindeutig bestimmt, so kann es aus den gegebenen Stücken sowohl konstruiert als auch mit Hilfe der Winkelfunktionen berechnet werden. Mit solchen Berechnungen beschäftigt sich die ebene Trigonometrie. Daher nennt man die Winkelfunktionen auch **trigonometrische Funktionen**.

### Die Tafeln der Winkelfunktionswerte und ihrer Logarithmen

Zur numerischen Durchführung trigonometrischer Berechnungen sind die Funktionswerte der Winkelfunktionen tabelliert worden. Auf Grund der Quadrantenbeziehungen ( $\sphericalangle 170$ ) genügt es, nur die Werte für Winkel von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  anzugeben. Dabei können wegen der Beziehungen  $\cos x = \sin(90^\circ - x)$  und  $\cot x = \tan(90^\circ - x)$  ( $\sphericalangle 170$ ) die Werte der Sinus- und Kosinusfunktionen bzw. der Tangens- und Kotangensfunktionen jeweils in ein und derselben Tafel aufgeführt werden. Die Kosinus- und Kotangensfunktionen sind im Intervall von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  monoton fallend. Daher ist  $d$  beim Interpolieren die Differenz zum größeren Funktionswert.

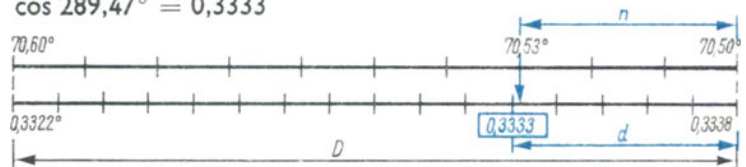
■ a) Es soll  $\cos 289,47^\circ$  ermittelt werden.

$$\cos 289,47^\circ = \cos(360^\circ - 70,53^\circ) = \cos 70,53^\circ$$

$$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}; \quad d = \frac{D \cdot n}{10}$$

$$d = \frac{16 \cdot 3}{10} \approx 5$$

$$\cos 289,47^\circ = 0,3333$$

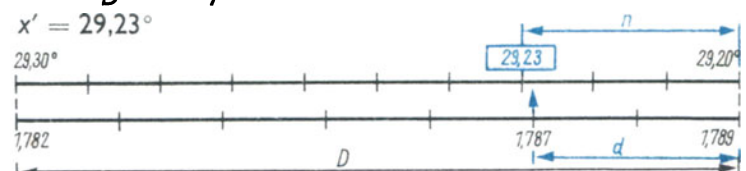


b) Es sollen alle Winkel  $x$  mit  $\cot x = -1,787$  ermittelt werden.

$$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}$$

$$n = \frac{10 \cdot d}{D} = \frac{10 \cdot 2}{7} \approx 3$$

$$x' = 29,23^\circ$$



## 15. EBENE TRIGONOMETRIE

Da der Kotangenswert negativ ist, gilt für die gesuchten Winkel aus dem II. und IV. Quadranten

$$x_1 = 180^\circ - x' \quad x_2 = 360^\circ - x'$$

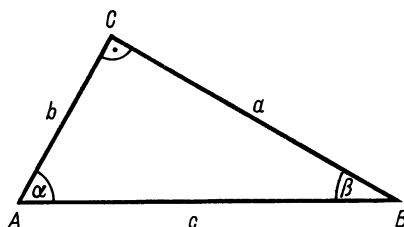
$$x_1 = 150,77^\circ \quad x_2 = 330,77^\circ$$

Da  $180^\circ$  die kleinste Periode der Kotangensfunktion ist ( $\neq 169$ ), erhält man sämtliche gesuchten Winkel durch

$$x = 150,77^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad (k \text{ ganzzahlig}).$$

### Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Je nach Art der gegebenen Dreiecksstücke sind folgende Fälle möglich (Bild C 92):



Gegeben	
1. Fall: Hypotenuse und eine Kathete: $a, c$	$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \beta = 90^\circ - \alpha$ $b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ oder } \cos \alpha = \frac{b}{c}$ $b = c \cdot \cos \alpha$
2. Fall: Beide Katheten: $a, b$	$\tan \alpha = \frac{a}{b}; \beta = 90^\circ - \alpha$ $c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oder } \sin \alpha = \frac{a}{c}; c = \frac{a}{\sin \alpha}$
3. Fall: Ein Winkel und die Gegenkathete: $\alpha, a$	$\cot \alpha = \frac{b}{a}; b = a \cot \alpha; \beta = 90^\circ - \alpha$ $c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oder } \sin \alpha = \frac{a}{c}; c = \frac{a}{\sin \alpha}$
4. Fall: Ein Winkel und die Ankathete: $\alpha, b$	$\tan \alpha = \frac{a}{b}; a = b \cdot \tan \alpha$ $\beta = 90^\circ - \alpha$ $c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oder } \cos \alpha = \frac{b}{c}; c = \frac{b}{\cos \alpha}$

## 15. EBENE TRIGONOMETRIE

Gegeben	
5. Fall: Ein Winkel und die Hypotenuse $\alpha, c$	$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad a = c \cdot \sin \alpha; \quad \beta = 90^\circ - \alpha$ $b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad \text{oder} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$ $b = c \cos \alpha$

- Eine Eisenbahnlinie soll über eine Brücke von 13,70 m Höhe geführt werden. Wie lang muß die zur Brücke ansteigende Strecke mindestens sein, wenn der Steigungswinkel nicht mehr als  $1^\circ$  betragen soll?

**Lösung:**

$$\alpha = 1^\circ \quad \sin \alpha = \frac{h}{s}$$

$$h = 13,70 \text{ m} \quad s = \frac{h}{\sin \alpha}$$

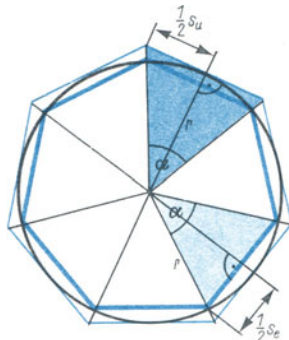
N	lg N
13,70	1,1367
$\sin 1^\circ$	0,2419 - 2
s	0,8948 + 2
s	2,8948

$$s = 785 \text{ m}$$

Die ansteigende Strecke muß mindestens 785 m lang sein.

### Berechnung gleichschenkliger Dreiecke

Jedes gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse ( $\sphericalangle$  288) in zwei kongruente ( $\sphericalangle$  306) rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Dadurch treten bei der Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks dieselben Fälle auf wie beim rechtwinkligen Dreieck.



Einem Kreis mit dem Radius  $r = 3 \text{ cm}$  ist je ein regelmäßiges 7-Eck ein- bzw. umbeschrieben. Die Seitenlängen sind zu berechnen.

**Lösung:**

$$r = 3,00 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{7} = 51,43^\circ \quad \frac{\alpha}{2} = 25,71^\circ$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2} s_e}{r} = \frac{s_e}{2r}$$

$$s_e = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2} s_u}{r} = \frac{s_u}{2r}$$

$$s_u = 2r \tan \frac{\alpha}{2}$$

## 15. EBENE TRIGONOMETRIE

$N$	$\lg N$	$N$	$\lg N$
$2r$	0,7782	$2r$	0,7782
$\sin \frac{\alpha}{2}$	0,6373	$\tan \frac{\alpha}{2}$	0,6826
	- 1		- 1
	} +		} +
$s_e$	1,4155	$s_u$	1,4608
	- 1		- 1
$s_e$	0,4155	$s_u$	0,4608
$s_e = 2,60 \text{ cm}$		$s_u = 2,89 \text{ cm}$	

**Berechnung von schiefwinkligen Dreiecken**  
Sinussatz

Mit Hilfe der folgenden Sätze lassen sich Stücke eines beliebigen Dreiecks berechnen.

► **SATZ 47 (Sinussatz):**  
In jedem Dreieck sind die Verhältnisse der Seiten zu den Sinus ihrer Gegenwinkel untereinander gleich.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

In anderer Fassung:

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten zueinander wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Beweis:

Es gilt

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}; h_c = b \sin \alpha \quad (\triangle ADC)$$

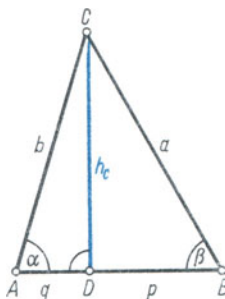
$$\sin \beta = \frac{h_c}{a}; h_c = a \sin \beta \quad (\triangle BCD)$$

$$a \sin \beta = b \sin \alpha \quad | : \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Führt man dieselbe Überlegung mit der Höhe  $h_a$  durch, so erhält man:

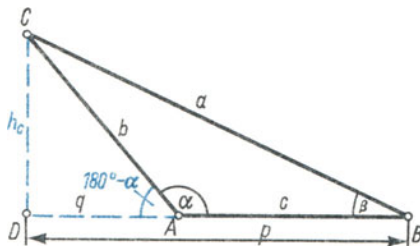
$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$





Insgesamt also  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

Damit ist der Sinussatz jedoch nur für alle spitzwinkligen Dreiecke bewiesen.



Für stumpfwinklige Dreiecke gilt:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_c}{b}; \quad h_c = b \sin(180^\circ - \alpha) \quad (\triangle ADC)$$

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a}; \quad h_c = a \sin \beta \quad (\triangle BCD)$$

$$a \sin \beta = b \sin(180^\circ - \alpha)$$

Wegen  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  (169) folgt

$$a \sin \beta = b \sin \alpha, \text{ also wieder } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Wie beim spitzwinkligen Dreieck ergibt sich dann weiter

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Der Sinussatz gilt auch für rechtwinklige Dreiecke. Setzt man beispielsweise  $\gamma = 90^\circ$ , so ergibt sich aus

$$\frac{a}{\sin \alpha} = c \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sin \beta} = c$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = c$$

Da  $c = \frac{c}{1} = \frac{c}{\sin \gamma}$  ( $\gamma = 90^\circ$ , also  $\sin \gamma = 1$ ), gilt auch hier

wieder die behauptete Gleichung. Damit ist der Sinussatz für jedes beliebige Dreieck in der einen Fassung bewiesen.

Die andere Fassung ergibt sich folgendermaßen:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Vertauschung der Innenglieder:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

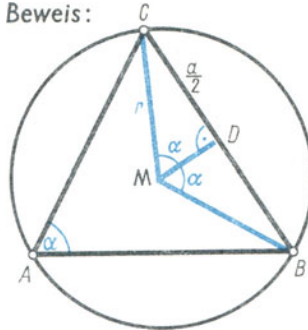
Als fortlaufende Proportion (117):

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

- **SATZ 48:** In jedem Dreieck ist das Verhältnis einer jeden Seite zum Sinus ihres Gegenwinkels gleich dem Durchmesser des Dreiecksumkreises (✓ 310).

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

Beweis:



- $\sphericalangle BMC = 2\alpha$ , denn  $\sphericalangle BMC$  ist der zum Peripheriewinkel  
 $\sphericalangle BAC = \alpha$  gehöriger Zentriwinkel über dem Bogen BC.  
 $\sphericalangle BMD = \sphericalangle CMD = \alpha$ ,  
 denn  $\overline{MD}$  ist Symmetrieachse im gleichschenkligen Dreieck  
 $\triangle BCM$ .

$$\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r} \quad (\triangle MBD),$$

daraus folgt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r.$$

Daraus folgt zusammen mit dem Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Der Beweis dieses Satzes für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke wird hier nicht mehr ausgeführt.

- **SATZ 49 (Kosinussatz):**  
 In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Beweis:

a) spitzwinklige Dreiecke ( $\sphericalangle$  181; Bild unten):

$$h_c^2 = b^2 - q^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras, } \triangle ADC)$$

$$h_c^2 = a^2 - p^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras, } \triangle BCD)$$

$$a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2; \quad (p = c - q)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 c q + q^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 c q \quad (*)$$

$$\cos \alpha = \frac{q}{b} \quad (\triangle ADC) \quad q = b \cdot \cos \alpha,$$

in Gleichung (\*) eingesetzt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha.$$

Die anderen beiden Gleichungen erhält man unter Verwendung der Höhen  $h_a$  bzw.  $h_b$ .

b) stumpfwinklige Dreiecke ( $\sphericalangle$  182; Bild oben):

$$h_c^2 = b^2 - q^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras, } \triangle ADC)$$

$$h_c^2 = a^2 - p^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras, } \triangle BCD)$$

$$a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + (c + q)^2 - q^2; \quad (p = c + q)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 c q + q^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 c q \quad (**)$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \frac{q}{b} \quad (\triangle ADC)$$

$$-\cos \alpha = \frac{q}{b} \quad q = -b \cos \alpha,$$

in Gleichung (\*\*) eingesetzt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha.$$

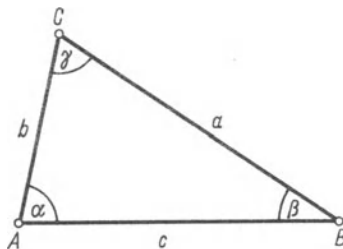
Entsprechend findet man auch in diesem Fall die anderen Gleichungen.

c) rechtwinklige Dreiecke:

Da  $\alpha = 90^\circ$  und damit  $\cos \alpha = 0$ , folgt aus

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$$



Für die Seiten  $b$  und  $c$  verläuft der Beweis mit den spitzen Winkeln  $\beta$  und  $\gamma$  wie im Fall a). Damit ist der Kosinussatz für alle möglichen Fälle bewiesen.

**Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks**

▶ **SATZ 50: Der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.**

$A = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$	$A = \frac{1}{2} a c \sin \beta$	$A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$
-----------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------

Beweis (↗ 181; Bild unten):

$$A = \frac{1}{2} c \cdot h_c \quad (*)$$

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}; \quad h_c = b \sin \alpha (\triangle ADC)$$

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a}; \quad h_c = a \sin \beta (\triangle BCD)$$

Für  $h_c$  in (\*) eingesetzt:

$$A = \frac{1}{2} b c \sin \alpha \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{2} a c \sin \beta.$$

Die dritte Gleichung erhält man bei Verwendung von  $h_a$  oder  $h_b$ . Der Beweis für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke verläuft wie bei den entsprechenden Fällen im Beweis des Sinussatzes (↗ 181), w. z. b. w.

Nach dem Sinussatz gilt für jedes Dreieck

$$b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta.$$

Setzt man dies für  $b$  in die erste Gleichung von Satz 50 ein, so ergibt sich

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta \cdot c \cdot \sin \alpha \quad \text{oder}$$

$$A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Entsprechend gilt

$$A = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$A = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Nach Satz C 48 (↗ 183) gilt für jedes Dreieck

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2r \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2r, \quad \text{d. h.}$$

$$b = 2r \sin \beta \quad \text{bzw.} \quad c = 2r \sin \gamma.$$



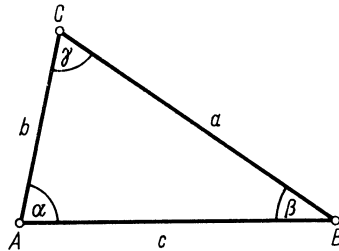
## 15. EBENE TRIGONOMETRIE

Setzt man dies für  $b$  und  $c$  in die erste Gleichung von Satz C 50 ein, so erhält man

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \beta \cdot 2r \sin \gamma \cdot \sin \alpha \quad \text{oder}$$

$$A = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma .$$

Je nach Art der gegebenen Dreiecksstücke sind folgende Fälle der Dreiecksberechnung möglich (vier Grundaufgaben,  $\nearrow$  Kongruenzsätze, Seite 237).



Gegeben	Anfangsschritt	Berechnung der übrigen Stücke
$c, \beta, \gamma$ (sww) Im Fall wsw wird zunächst der dritte Winkel berechnet und dann wie hier weitergerechnet.	Sinussatz: $b = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \beta$	$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma);$ $a = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \alpha$
$\alpha, c, a$ (wss)	Sinussatz: $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{a} c$	$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma);$ $b = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \beta$
$a, \gamma, b$ (sws)	Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$	$\sin \alpha = \frac{\sin \gamma}{c} a;$ $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$
$a, b, c$ (sss)	Kosinussatz: $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ oder $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{a} \cdot b$

- a) Gegeben:  $\alpha = 63,7^\circ$ ;  $c = 7,3$  cm;  $a = 11,4$  cm  
Gesucht:  $\gamma, \beta, b$

## 15. EBENE TRIGONOMETRIE

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{a} \cdot c$$

N	lg N
$\sin \alpha$	1,9525 - 2
a	1,0569
} -	
$\frac{\sin \alpha}{a}$	0,8956 - 2
c	0,8633
} +	
$\sin \gamma$	0,7589 - 1
$\gamma_1 = 35,0^\circ; [\gamma_2 = 145,0^\circ]$	

$\gamma_2$  kommt nicht in Betracht, da  $\alpha + \gamma_2 > 180^\circ$ . Außerdem würde für  $\gamma_2$  der größere Winkel der kleineren Seite gegenüberliegen, was im Widerspruch zu dem Satz, daß in jedem Dreieck der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegt (↗ 235), stünde.

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \quad \beta = 81,3^\circ$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta$$

N	lg N
a	1,0569
$\sin \alpha$	0,9525 - 1
} -	
$\frac{a}{\sin \alpha}$	1,1044
$\sin \beta$	0,9950 - 1
} +	
b	1,0994
$b = 12,6 \text{ cm}$	

b) Gegeben:  $\alpha = 36,4^\circ$ ;  $c = 9,2 \text{ cm}$ ;  $a = 3,5 \text{ cm}$   
 Gesucht:  $\gamma, \beta, b$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{a} \cdot c$$

N	lg N
$\sin \alpha$	0,7734 - 1
a	0,5441
} -	
$\frac{\sin \alpha}{a}$	0,2293 - 1
c	0,9638
} +	
$\sin \gamma$	0,1931

Es gibt keinen Winkel  $\gamma$  mit  $\lg \sin \gamma = 0,1931$ ; denn das würde  $\sin \gamma > 1$  bedeuten. Das ist aber unmöglich (↗ 166; Tabelle). Es gibt also kein Dreieck mit den gegebenen Stücken.

15. EBENE TRIGONOMETRIE

c) Gegeben:  $\alpha = 43,9^\circ$ ;  $c = 14,8$  cm;  $a = 12,3$  cm  
 Gesucht:  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $b$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{a} \cdot c$$

N	lg N
$\sin \alpha$	1,8410 - 2
$a$	1,0899
} -	
$\frac{\sin \alpha}{a}$	0,7511 - 2
$c$	1,1703
} +	
$\sin \gamma$	0,9214 - 1
$\gamma_1 = 56,6^\circ$	$\gamma_2 = 123,4^\circ$

$\alpha + \gamma_1$  und  $\alpha + \gamma_2$  sind beide kleiner als  $180^\circ$ . Ebenso ist für beide Winkel der Satz erfüllt, daß der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. Daher muß mit beiden Winkeln weitergerechnet werden.

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \quad \beta_1 = 79,5^\circ \quad \beta_2 = 12,7^\circ$$

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta$$

I

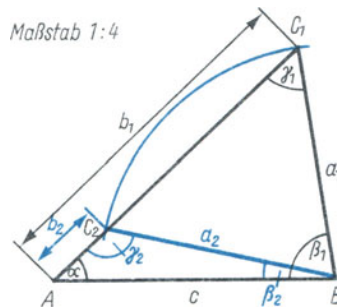
N	lg N
$a$	1,0899
$\sin \alpha$	0,8410 - 1
} -	
$\frac{a}{\sin \alpha}$	1,2489
$\sin \beta_1$	0,9927 - 1
} +	
$b_1$	1,2416

$$b_1 = 17,4 \text{ cm}$$

II

N	lg N
$a$	1,0899
$\sin \alpha$	0,8410 - 1
} -	
$\frac{a}{\sin \alpha}$	1,2489
$\sin \beta_2$	0,3421 - 1
} +	
$b_2$	0,5910

$$b_2 = 3,9 \text{ cm}$$



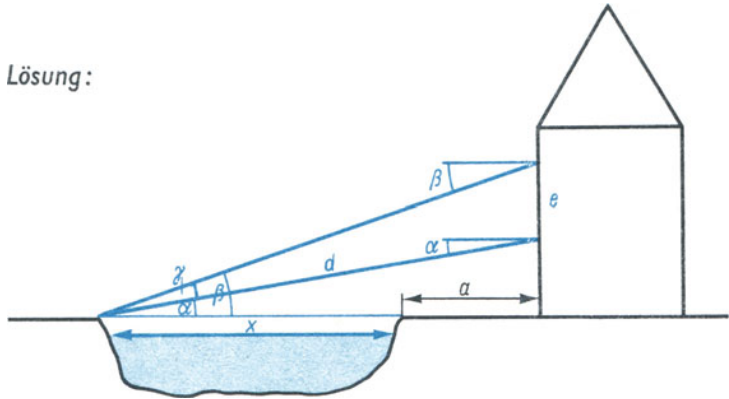
Bemerkung: Wie das letzte Beispiel zeigt, ist ein Dreieck nur dann eindeutig durch zwei Seiten und einen Winkel be-

## 15. EBENE TRIGONOMETRIE

stimmt, wenn dieser Winkel Gegenwinkel der größeren von beiden gegebenen Seiten ist. Anderenfalls gibt es entweder kein Dreieck oder zwei nicht kongruente Dreiecke mit den gegebenen Stücken ( $\sphericalangle$  Kongruenzsatz ssw, Seite 237).

- In einer Entfernung von  $a = 10$  m vom Ufer eines Flusses steht ein Haus. Visiert man von zwei senkrecht übereinanderliegenden Fenstersimsen, deren Höhenunterschied  $e = 8$  m ist, das andere Ufer an, so erhält man Neigungswinkel von  $\alpha = 18,4^\circ$  und  $\beta = 24,6^\circ$ . Wie breit ist der Fluß?

Lösung:



$$\gamma = \beta - \alpha \quad \gamma = 6,2^\circ$$

$$\frac{d}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{e}{\sin \gamma}$$

$$d = \frac{e}{\sin \gamma} \sin(90^\circ - \beta)$$

$$\cos \alpha = \frac{a + x}{d}$$

$$x = d \cos \alpha - a = y - a$$

$$x = \frac{e}{\sin \gamma} \sin(90^\circ - \beta) \cos \alpha - a$$

$$x = \frac{e}{\sin \gamma} \cos \beta \cos \alpha - a$$

N	lg N
e	0,9031
cos $\alpha$	0,9772 - 1
cos $\beta$	0,9587 - 1
} +	
e cos $\alpha$ cos $\beta$	2,8390 - 2
sin $\gamma$	0,0334 - 1
y	1,8056
} -	

$$\frac{e}{\sin \gamma} \cos \alpha \cos \beta = y = y - a$$

$$x \approx 63,9 \text{ m} - 10 \text{ m}$$

$$x \approx 54 \text{ m}$$

Ergebnis: Der Fluß ist etwa 54 m breit.



## 16. RECHENSTAB

Der Rechenstab ist ein auf den Logarithmengesetzen ( $\nearrow$  154) beruhendes mechanisches Rechenhilfsmittel vornehmlich für das Multiplizieren und Dividieren sowie Potenzieren und Radizieren.

### Genauigkeit

Die logarithmisch geteilten Skalen des Rechenstabs ermöglichen eine Rechengenauigkeit bis auf drei geltende Ziffern ( $\nearrow$  77), wobei die dritte Ziffer häufig geschätzt werden muß.

### Grundregeln

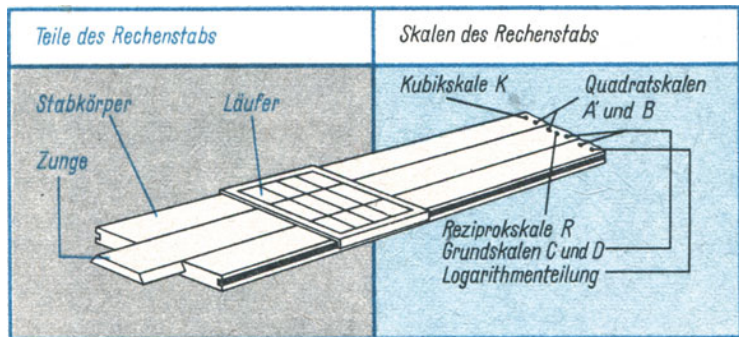
Zuerst wird die Größenordnung des Ergebnisses mit Hilfe eines Überschlages ermittelt.

Eingestellt werden nur Ziffernfolgen, z. B.  $5738 \cdot 0,023$ .

Überschlag:  $6 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 15 \cdot 10 = 150$

Einstellen: 5—7—4 bzw. 2—3, ablesen 1—3—2, also 132

### Teile und Skalen Bemerkungen zu den Skalen



Die **Grundskalen C und D** stimmen überein und stellen das Grundintervall 1 bis 10 einer logarithmischen Skale *einmal* auf der *gesamten* Stablänge dar. Sie bieten deshalb die *größtmögliche Rechengenauigkeit* und werden *bevorzugt benutzt*.

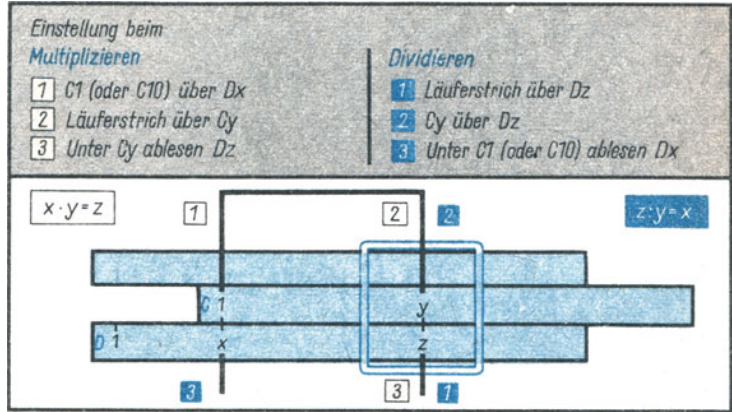
Die **Reziprokskale R** stellt das Grundintervall 1 bis 10 *einmal* auf der *gesamten* Stablänge dar, aber in *entgegengesetzter* Richtung wie auf den Grundskalen C und D. Sie bietet Vereinfachungen bei *mehrfachem Multiplizieren und Dividieren*.

Die **Quadratskalen A und B** stimmen überein und stellen das Grundintervall 1 bis 10 *zweimal* auf jeweils einer *Halfte* der Stablänge dar (Beschriftung 1 bis 10 bzw. 10 bis 100). Der Teilungsmaßstab auf A und B ist also halb so groß wie der auf C und D; einer Einstellung von  $\log n$  auf C bzw. D entspricht also  $2 \log n = \log n^2$  auf A bzw. B.

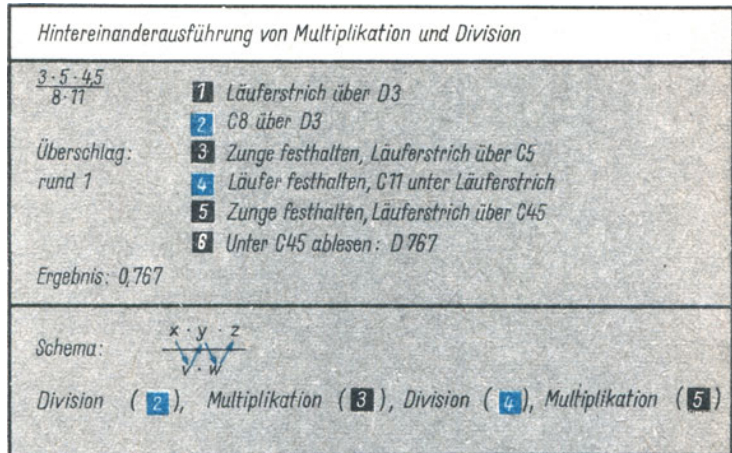
Die **Kubikskale K** stellt das Grundintervall 1 bis 10 *dreimal* auf jeweils einem *Drittel der Stablänge* dar (Beschriftung 1 bis 10 bzw. 10 bis 100 bzw. 100 bis 1000). Einer Einstellung von  $\log n$  auf C bzw. D entspricht also  $3 \log n = \log n^3$  auf K.

**Multiplikation und Division**

Multiplikation mit Rückschlag



Von einer **Multiplikation mit Rückschlag** spricht man, wenn nicht C 1, sondern C 10 über die einem Faktor entsprechende Ziffer auf D gestellt werden muß, um ablesen zu können. Durch Benutzung der Reziprokskale können „Rückschläge“ umgangen werden.



**Bemerkung:** Beim Hintereinanderausführen von Multiplikationen und Divisionen wird auf das Ablesen der Zwischenergebnisse verzichtet. Zu beachten ist dabei, daß beim Ver-

Verhältnisgleichungen  
(Proportionen)

schieben der Zunge der die Zwischenergebnisse markierende Läufer *nicht berührt* und somit *nicht verschoben* wird!

Für die Erfassung von untereinander proportionalen Größen können alle geforderten Werte nach einer *einzig* Einstellung der Zunge mit Hilfe des Läufers ermittelt werden.

<p>Bestimmen von Kreisumfängen:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>d</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>u</td> <td>6,28</td> <td>9,42</td> <td>12,56</td> </tr> </table>	d	2	3	4	u	6,28	9,42	12,56	<p>Es gilt: <math>u = \pi \cdot d</math></p> <p>Einmalige Einstellung</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 <math>B_1</math> unter <math>A\pi</math></li> <li>2 Über <math>Bd</math> ablesen <math>Au</math></li> </ol>
d	2	3	4						
u	6,28	9,42	12,56						

Potenzieren und Radizieren

Das Potenzieren und Radizieren erfolgt jeweils mit einer einzigen Einstellung des Läufers mit sofortigem Ablesen.

*Bemerkung zur Wahl der Skalenabschnitte beim Radizieren:*

1) Beim Ziehen einer *Quadratwurzel* sind die Radikanden durch Abspalten von Zehnerpotenzen ( $\nearrow 30$ ) mit *geradzahlig*en Exponenten jeweils in ein Produkt aus einem Faktor  $F$  mit  $1 < F < 100$  und einer Zehnerpotenz  $10^{2n}$  zu zerlegen. Die Ziffernfolge von  $F$  ist dann im entsprechend beschrifteten Grundintervall auf A einzustellen.

2) Beim Ziehen einer *Kubikwurzel* sind die Radikanden durch Abspalten von Zehnerpotenzen mit *ganzzahlig*en Vielfachen von 3 als Exponenten jeweils in ein Produkt aus einem Faktor  $F$  mit  $1 < F < 1000$  und einer Zehnerpotenz  $10^{3n}$  zu zerlegen. Die Ziffernfolge von  $F$  ist dann im entsprechend beschrifteten Grundintervall auf K einzustellen.

<p>Einstellung beim Potenzieren</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 Läuferstrich auf <math>Dx</math></li> <li>2 Unter Läufer ablesen auf A für <math>x^2</math> auf K für <math>x^3</math></li> </ol>	<p>Radizieren</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 Läuferstrich auf <math>Ay_1</math>, bzw. <math>Ky_2</math> (Bemerkung beachten)</li> <li>2 Unter Läuferstrich ablesen auf D</li> </ol>



# Geometrie

Punkte, Geraden	Seite 194	Richtung, schneiden, parallel	Seite 195
↓			
Anordnungsbeziehungen	Seite 196	Messen	
Strecke	Seite 196	Streckenlänge	Seite 210
Strahl	Seite 198	Winkel	Seite 211
Winkel	Seite 199	Flächeninhalt	Seite 281
Winkelpaare	Seite 229	Rauminhalt	Seite 287
ebene Figur	Seite 200		
↓			
Abbildungen	Seite 203	Konstruktionen	Seite 224
Bewegungen; Kongruenz	Seite 204	Verschiebung	Seite 226
Verschiebung	Seite 215	Drehung	Seite 227
Drehung	Seite 216	Punktspiegelung	Seite 227
Punktspiegelung	Seite 217	Geradenspiegelung	Seite 228
Geradenspiegelung	Seite 219		
↓			
Ebene Figuren und Körper		Symmetrie	Seite 221
Dreieck	Seite 232, 283	Ähnlichkeit	Seite 268
Viereck	Seite 245, 281 f	ähnliche Dreiecke	Seite 273
Kreis	Seite 213, 253, 285	rechtwinklige Dreiecke (Sätze)	Seite 277
Prisma	Seite 289		
Pyramide	Seite 290		
Kegel	Seite 292		
Kugel	Seite 294	Darstellende Geometrie	Seite 299



# 1. PUNKTE UND GERADEN

## Bezeichnungen

Geometrische Grundfiguren	Bezeichnungen
Punkte	große lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes: $A, B, \dots, A_1, B_1, \dots$
Geraden	kleine lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes: $a, b, \dots, a_1, b_2, \dots$
Ebenen	kleine griechische Buchstaben, evtl. mit Indizes: $\alpha, \beta, \dots, \alpha_1, \beta_1$

Wir betrachten nur Punkte und Geraden, die in ein und derselben Ebene liegen. Punkte und Geraden sind die Elemente der ebenen Geometrie.

## Gegenseitige Lage von Punkten und Geraden

A liegt auf $a$ bzw. $a$ geht durch A	
A liegt nicht auf $a$ bzw. $a$ geht nicht durch A	

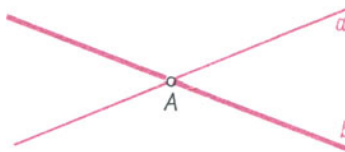
► **Durch zwei Punkte A und B geht genau eine Gerade.**



Die Gerade, die durch A und B geht, bezeichnen wir als Gerade  $AB$ .

Zu verschiedenen Geraden  $a$  und  $b$  gibt es höchstens einen Punkt A, der sowohl auf  $a$  als auch auf  $b$  liegt.

Haben zwei Geraden genau einen gemeinsamen Punkt, so nennen wir ihn den Schnittpunkt von  $a$  und  $b$ .

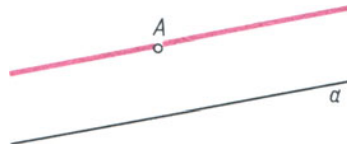


## Parallelität von Geraden

► **DEFINITION 1: Geraden  $a$  und  $b$  einer Ebene heißen parallel zueinander genau dann, wenn sie entweder zusammenfallen oder keinen Punkt gemeinsam haben.**

# 1. PUNKTE UND GERADEN

▶ **Durch jeden Punkt  $A$  gibt es zu jeder Geraden  $a$  genau eine Parallele.**

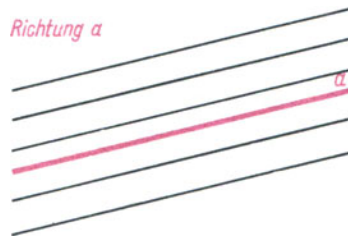


**Gegenseitige Lage zweier Geraden einer Ebene**

$a$ und $b$ schneiden einander in $A$	$a$ und $b$ sind voneinander verschieden und haben den gemeinsamen Punkt $A$	
$a$ und $b$ sind parallel zueinander	$a$ und $b$ haben keinen gemeinsamen Punkt	
	$a$ und $b$ fallen zusammen	

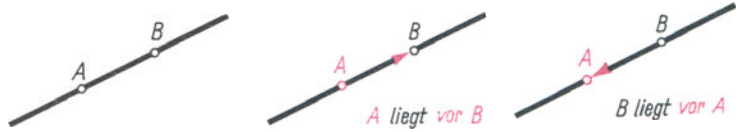
**Richtung**

▶ **DEFINITION 2:** Die Menge aller Geraden, die zu einer Geraden  $a$  parallel sind, nennen wir eine Richtung.



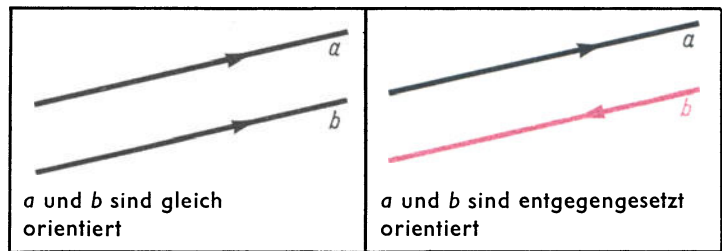
## 2. ANORDNUNGSBEZIEHUNGEN · EBENE FIGUREN

Wird festgelegt, welcher von zwei Punkten  $A$  und  $B$  einer Geraden  $a$  vor dem anderen liegen soll, so wird die Gerade  $a$  dadurch **orientiert**.



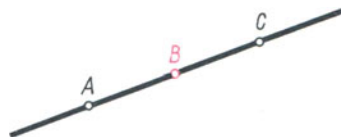
### Orientierte Geraden Richtungssinn

Auf jeder Geraden gibt es genau zwei verschiedene Orientierungen, die einander entgegengesetzt heißen. Die Orientierung einer Geraden kann durch eine Pfeilspitze veranschaulicht werden. Wir sagen auch, daß durch eine orientierte Gerade ein **Richtungssinn** festgelegt wird. Nur *parallele* Geraden können entweder gleich oder entgegengesetzt orientiert sein.



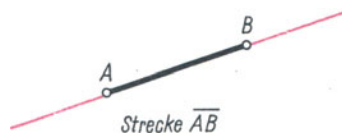
### Zwischenbeziehung

Man sagt nur dann, daß ein Punkt zwischen zwei anderen liegt, wenn sie alle drei auf einer Geraden liegen.



### Strecken

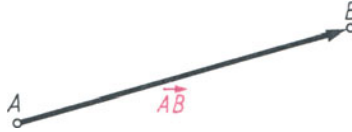
► **DEFINITION 3:** Eine Figur, der zwei Punkte  $A$  und  $B$  und alle die Punkte angehören, die zwischen  $A$  und  $B$  liegen, heißt **Strecke  $\overline{AB}$** .



Die Punkte  $A$  und  $B$  nennen wir Endpunkte.

## 2. ANORDNUNGSBEZIEHUNGEN

**Orientierte Strecken** Ist festgelegt, welcher Endpunkt einer Strecke vor dem anderen liegen soll, so heißt die Strecke **orientiert** oder **gerichtet**.



Schreibweise:  $\vec{AB}$  (A liegt vor B).

Die gerichteten Strecken  $\vec{AB}$  und  $\vec{BA}$  heißen zueinander entgegengesetzt orientierte Strecken.

	Gleich orientierte Strecken	Entgegengesetzt orientierte Strecken
$\vec{AB}$ und $\vec{CD}$ liegen auf derselben Geraden		
$\vec{AB}$ und $\vec{CD}$ liegen auf verschiedenen Geraden		


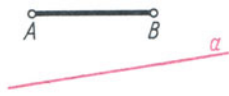
Von gleich oder entgegengesetzt orientierten Strecken kann man nur dann sprechen, wenn die Geraden, auf denen sie liegen, parallel sind.

### Weitere Lagebeziehungen

A und B liegen auf der Geraden AC auf verschiedenen Seiten des Punktes C	Der Punkt C liegt zwischen den Punkten A und B	
A und B liegen auf der Geraden AC auf derselben Seite des Punktes C	Entweder A liegt zwischen C und B oder B liegt zwischen C und A	

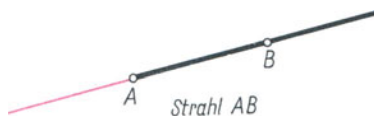


## 2. ANORDNUNGSBEZIEHUNGEN

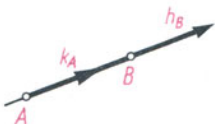
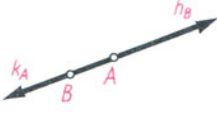
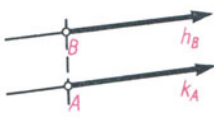
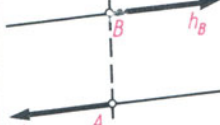
A und B liegen auf verschiedenen Seiten einer Geraden $a$	Die Gerade $a$ schneidet die Strecke $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt	
A und B liegen auf derselben Seite einer Geraden $a$	Die Gerade $a$ und die Strecke $\overline{AB}$ haben keinen gemeinsamen Punkt	

### Strahlen

► **DEFINITION 4:** Ein **Strahl**  $AB$  ist die Menge aller Punkte der Geraden  $AB$ , die mit  $B$  auf derselben Seite des Punktes  $A$  dieser Geraden liegen einschließlich des Punktes  $A$  selbst.



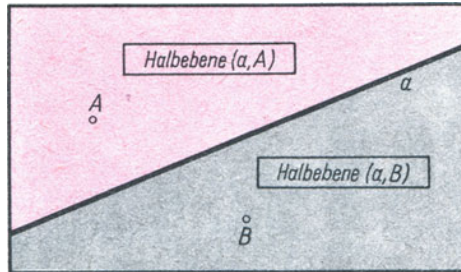
Der Punkt  $A$  heißt **Anfangspunkt** des Strahls  $AB$ . Strahlen werden mit  $h, k, \dots, h_1, k_1, \dots$  bezeichnet.  $h_A$  soll bedeuten, daß  $A$  der Anfangspunkt des Strahls  $h$  ist. Jeder Punkt  $A$  einer Geraden  $a$  teilt diese Gerade  $a$  in zwei Strahlen mit entgegengesetzter Orientierung (entgegengesetzte Strahlen).  $A$  ist gemeinsamer Anfangspunkt beider Strahlen.

	gleich orientierte Strahlen	entgegengesetzt orientierte Strahlen
$h$ und $k$ liegen auf derselben Geraden		
$h$ und $k$ liegen auf verschiedenen Geraden		

## 2. ANORDNUNGSBEZIEHUNGEN

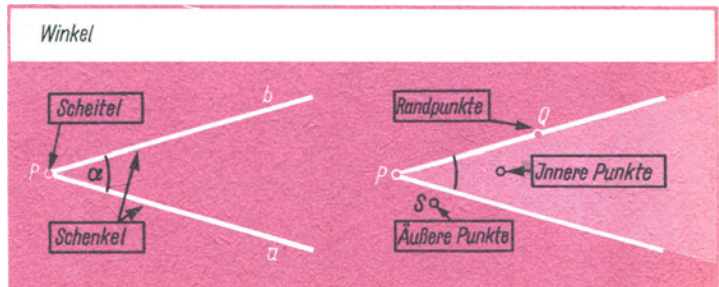
### Halbebenen

Jede Gerade einer Ebene teilt diese Ebene in zwei **Halbebenen**.



### Winkel (↗ 160, 212)

► **DEFINITION 5:** Ein Paar von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, die nicht auf einer Geraden liegen, heißt **Winkel**.



### Scheitel, Schenkel

Die beiden Strahlen, die einen Winkel bilden, heißen **Schenkel**, der gemeinsame Anfangspunkt heißt **Scheitel** des Winkels.

Durch einen Winkel wird die Ebene in zwei Teile zerlegt. Für die Messung eines Winkels, also die eindeutige Zuordnung einer Zahl (↗ 211), ist es erforderlich, einen der beiden Teile auszuzeichnen. Diesen Teil der Ebene nennt man das **Innere** des Winkels.

### Bezeichnung

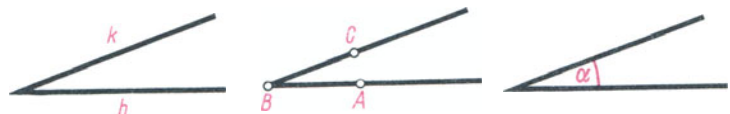
a) Winkel  $(h, k)$  bzw.  $\sphericalangle (h, k)$

( $h$  und  $k$  sind die Schenkel)

b) Winkel  $ABC$  bzw.  $\sphericalangle ABC$

( $B$  ist der Scheitel, und die Strahlen  $BA$  und  $BC$  sind die Schenkel)

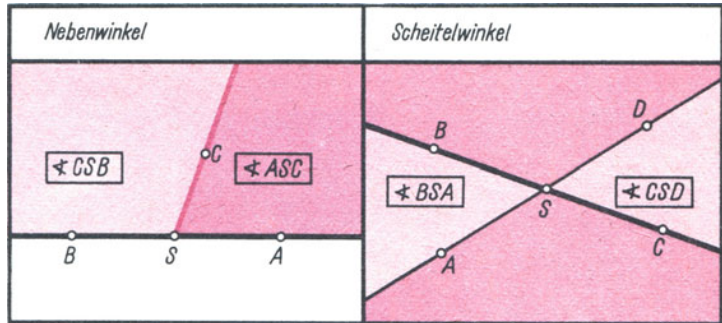
c) Winkel  $\alpha$



## 2. ANORDNUNGSBEZIEHUNGEN

Nebenwinkel ( $\sphericalangle$  229)

**DEFINITION 6:** Zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, heißen Nebenwinkel genau dann, wenn die nicht gemeinsamen Schenkel entgegengesetzte Strahlen sind.



Scheitelwinkel ( $\sphericalangle$  229) ▶

**DEFINITION 7:** Zwei Winkel, die den Scheitel gemeinsam haben, heißen Scheitelwinkel genau dann, wenn ihre Schenkel paarweise entgegengesetzte Strahlen sind.

Dreiecke ( $\sphericalangle$  232) ▶

**DEFINITION 8:** Eine Figur, die aus drei nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegenden Punkten A, B, C und deren Verbindungsstrecken besteht, heißt Dreieck ABC.

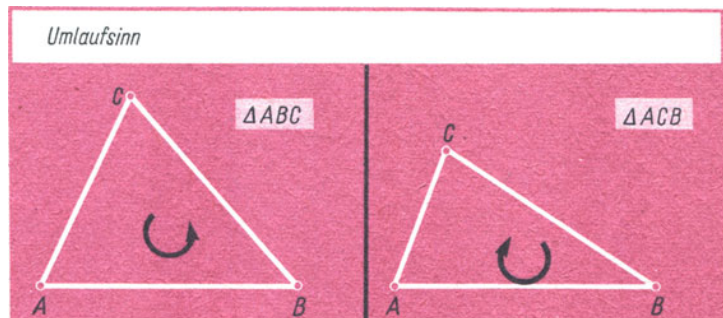
Die Punkte A, B und C heißen die Eckpunkte, die Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  und  $\overline{CA}$  die Seiten des Dreiecks ABC.

Fläche

Als die Fläche eines Dreiecks bezeichnen wir den von den Dreiecksseiten eingeschlossenen Teil der Ebene.

Umlaufssinn

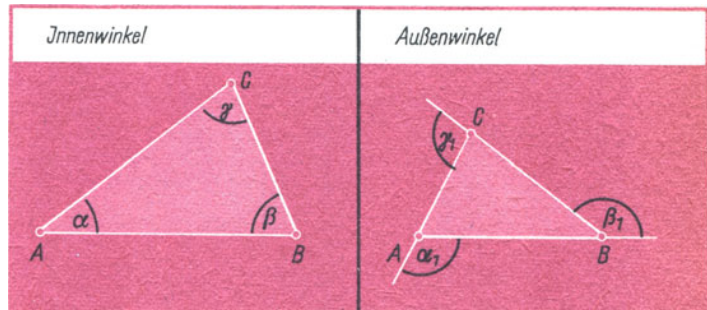
Durch die Reihenfolge, in der die Eckpunkte eines Dreiecks aufgezählt werden, wird ein Umlaufssinn für das Dreieck festgelegt.



## 2. ANORDNUNGSBEZIEHUNGEN

**Winkel eines Dreiecks**  
 Innenwinkel ( $\sphericalangle$  233)  
 Außenwinkel ( $\sphericalangle$  233)

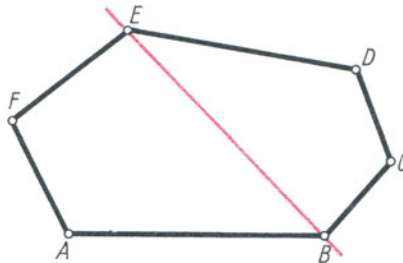
In einem Dreieck  $ABC$  heißen  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle BCA$  und  $\sphericalangle CAB$  die **Innenwinkel**, kurz die Winkel des Dreiecks. Zu jedem Innenwinkel gibt es zwei Nebenwinkel, die als Scheitelwinkel kongruent sind. Sie heißen **Außenwinkel** des Dreiecks.



**$n$ -Ecke**



**DEFINITION 9:** Werden  $n$  Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , von denen keine drei aufeinanderfolgenden auf einer gemeinsamen Geraden liegen, in der gegebenen Reihenfolge durch die Strecken  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_1}$  verbunden, so heißt die dadurch entstehende Figur ein  **$n$ -Eck**.



Eckpunkte, Seiten,  
 Diagonale

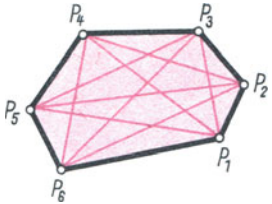
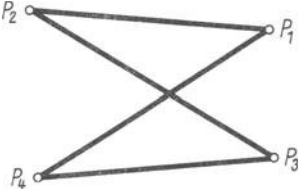
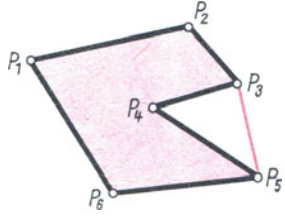
$n$ -Ecke werden auch als **Vielecke** oder **Polygone** bezeichnet.

In einem  $n$ -Eck  $P_1P_2 \dots P_n$  heißen die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  die **Eckpunkte** und die Strecken  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_nP_1}$  die **Seiten** des  $n$ -Ecks. Eine Strecke, die zwei beliebige, nicht aufeinanderfolgende Eckpunkte verbindet, heißt **Diagonale** des  $n$ -Ecks ( $n > 3$ ). Mitunter wird auch die Gerade, auf der die betreffende Verbindungsstrecke liegt, **Diagonale** genannt.

D

## 2. ANORDNUNGSBEZIEHUNGEN

Einteilung der Polygone

<p><b>Konvexe Polygone:</b> Jedes Polygon, bei dem alle Diagonalen innerhalb des Polygons liegen.</p>	
<p><b>Überschlagene Polygone:</b> Jedes Polygon, bei dem sich zwei nicht aufeinander folgende Seiten schneiden.</p>	
<p><b>Konkave Polygone:</b> Jedes nicht überschlagene Polygon, bei dem es eine Diagonale gibt, die nicht innerhalb des Polygons liegt.</p>	

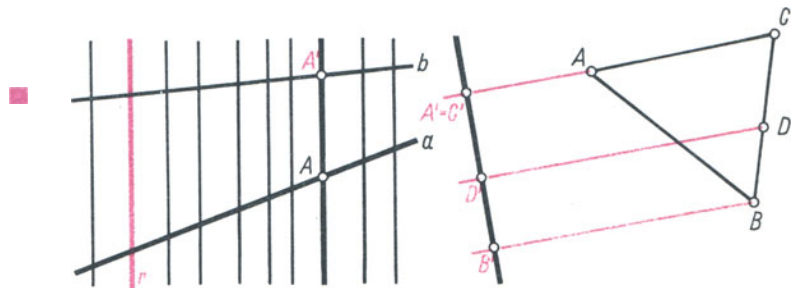
Fläche eines nicht überschlagenen Polygons

Der Teil der Ebene, der von den Seiten eines nicht überschlagenen Polygons eingeschlossen wird, heißt **Fläche** dieses Polygons.

### 3. BEWEGUNGEN UND KONGRUENZ

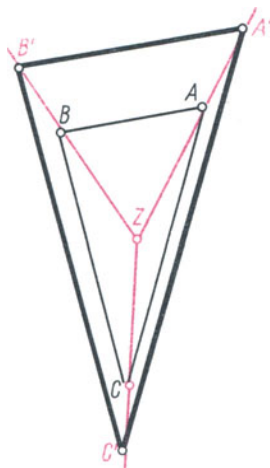
#### Parallelprojektionen

- Gegeben sind zwei verschiedene Geraden  $a$  und  $b$  sowie eine Gerade  $r$ , die weder zu  $a$  noch zu  $b$  parallel ist. Wird durch Parallelen zur Geraden  $r$  jedem Punkt  $A$  der Geraden  $a$  der entsprechende Schnittpunkt  $A'$  der Geraden  $b$  zugeordnet, so heißt diese Zuordnung **Parallelprojektion** der Geraden  $a$  auf die Gerade  $b$  in Richtung von  $r$ . Wir nennen  $A$  Originalpunkt, kurz *Original* und  $A'$  Bildpunkt, kurz *Bild* von  $A$ . Wir sagen: Die Gerade  $a$  wird auf die Gerade  $b$  **abgebildet**. Dabei wird jedem Punkt von  $a$  genau ein Punkt von  $b$  zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem Punkt von  $b$  genau ein Punkt von  $a$ .



Bei einer Parallelprojektion eines Dreiecks  $ABC$  auf eine Gerade wird jedem Punkt  $D$  des Dreiecks genau ein Punkt  $D'$  der Geraden zugeordnet. Umgekehrt kann bei dieser Abbildung ein Bildpunkt mehrere Originalpunkte besitzen. Die Abbildung im ersten Beispiel ist umkehrbar eindeutig oder eineindeutig, die im zweiten Beispiel nur eindeutig ( $\neq 141$ ).

#### Eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich



Bei einer **eineindeutigen Abbildung** der Ebene auf sich wird jedem Punkt  $A$  der Ebene genau ein Punkt  $A'$  der Ebene als Bildpunkt zugeordnet und jeder Punkt der Ebene besitzt genau einen Originalpunkt.  $A$  und  $A'$  heißen einander entsprechende Punkte bei der betreffenden Abbildung. Wird bei dieser Abbildung der Ebene auf sich eine Figur  $F$  auf eine Figur  $F'$  abgebildet, so nennt man  $F$  und  $F'$  einander entsprechende Figuren bei dieser Abbildung.

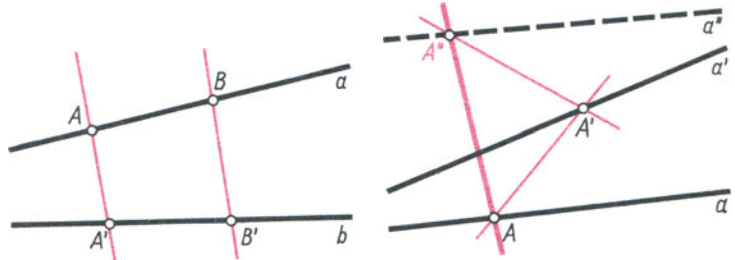


### 3. BEWEGUNGEN UND KONGRUENZ

Umkehrung  
einer Abbildung

Abbildungen lassen sich umkehren.

- Bei einer Parallelprojektion einer Geraden  $a$  auf eine Gerade  $b$  wird jedem Punkt  $A$  von  $a$  genau ein Punkt  $A'$  von  $b$  zugeordnet. Umgekehrt besitzt jeder Punkt  $A'$  von  $b$  genau ein Original  $A$  auf  $a$ . Die Abbildung, die jedem Punkt  $A'$  von  $b$  sein Original  $A$  von  $a$  zuordnet, ist ebenfalls eine Parallelprojektion (der Geraden  $b$  auf die Gerade  $a$ ). Sie heißt Umkehrung der ursprünglich gegebenen Parallelprojektion.



Nacheinanderausführung  
zweier Abbildungen

Abbildungen lassen sich nacheinander ausführen

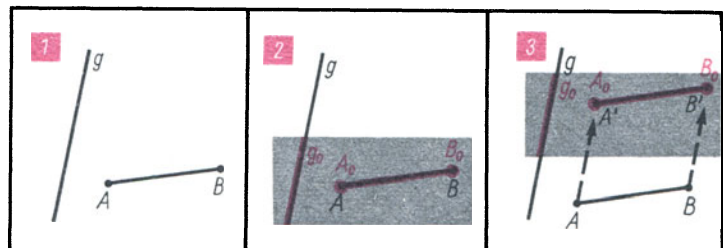
- Eine Gerade  $a'$  sei das Bild einer Geraden  $a$  bei einer Parallelprojektion  $f_1$ . Dabei sei der Punkt  $A'$  das Bild von  $A$ . Die Gerade  $a''$  sei das Bild der Geraden  $a'$  bei einer Parallelprojektion  $f_2$ . Dabei sei  $A''$  das Bild des Punktes  $A'$ . Die Abbildung, bei der der Punkt  $A''$  das Bild des Punktes  $A$  ist, nennen wir die Nacheinanderausführung der Abbildungen  $f_1$  und  $f_2$ .

Werden eine Abbildung der Ebene auf sich und die zu ihr gehörige Umkehrabbildung nacheinander ausgeführt, so wird im Endergebnis jeder Punkt auf sich selbst abgebildet. Wir sagen: Die Ebene wird identisch auf sich selbst abgebildet.

Diese Abbildung heißt **identische Abbildung** oder **Identität**.

**Bewegungen**  
( $\sphericalangle$  215f)

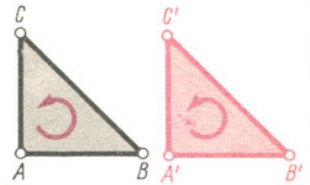
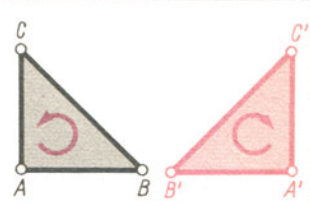
Unter allen möglichen Abbildungen der Ebene auf sich, die von der Identität verschieden sind, gibt es solche, bei



### 3. BEWEGUNGEN UND KONGRUENZ

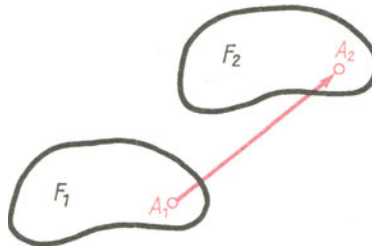
denen nur die Lage von Original- und Bildfiguren verschieden ist. Solche Abbildungen nennen wir **Bewegungen**. Sie lassen sich mit Hilfe von Transparentpapier veranschaulichen.

Eine Vergrößerung ( $\neq$  268) ist zum Beispiel keine Bewegung.

Wir unterscheiden		
gleichsinnige Bewegungen	Original und Bild eines beliebigen Dreiecks haben gleichen Umlaufsinn	
ungleichsinnige Bewegungen	Original und Bild eines beliebigen Dreiecks haben entgegengesetzten Umlaufsinn.	

#### Kongruenz

► **DEFINITION 10:** Zwei geometrische Figuren heißen kongruent genau dann, wenn die eine das Bild der anderen bei einer Bewegung ist.



Schreibweise:  $F_1 \cong F_2$

(lies: die Figuren  $F_1$  und  $F_2$  sind einander kongruent)

#### Eigenschaften der Kongruenz

Jede Figur ist zu sich selbst kongruent.

Aus  $F_1 \cong F_2$  folgt  $F_2 \cong F_1$

Aus  $F_1 \cong F_2$  und  $F_2 \cong F_3$  folgt  $F_1 \cong F_3$



### 3. BEWEGUNGEN UND KONGRUENZ

Wir unterscheiden		
$F_1$ und $F_2$ sind gleichsinnig kongruent	$F_2$ ist das Bild von $F_1$ bei einer gleichsinnigen Bewegung	
$F_1$ und $F_2$ sind ungleichsinnig kongruent	$F_2$ ist das Bild von $F_1$ bei einer ungleichsinnigen Bewegung	

**Strecken**  
Streckenabtragung  
( $\sphericalangle$  224)

Zu jeder Strecke  $\overline{AB}$  gibt es auf jedem Strahl  $CD$  genau einen Punkt  $B'$ , so daß  $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$  gilt. Wird dieser Punkt bestimmt, so sagen wir, daß die Strecke  $\overline{AB}$  auf dem Strahl  $CD$  von  $C$  aus abgetragen wird. Die Streckenabtragung ist eindeutig.



Streckenvergleich

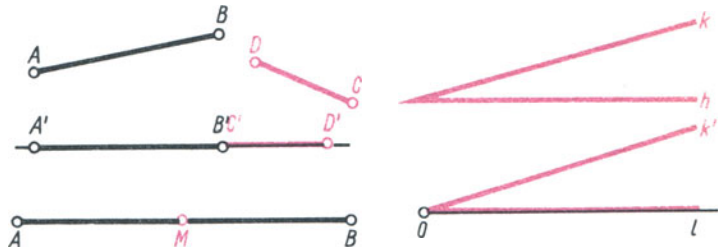
Zwei Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  lassen sich vergleichen, indem die eine von beiden, z. B.  $\overline{AB}$  von  $C$  aus auf dem Strahl  $CD$  abgetragen wird.

Vergleich zweier Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$		
$\overline{AB}$ ist kleiner als $\overline{CD}$ $\overline{AB} < \overline{CD}$	Bei der Streckenabtragung liegt $B'$ zwischen $C$ und $D$	
$\overline{AB}$ ist kongruent $\overline{CD}$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Bei der Streckenabtragung fallen $B'$ und $D$ zusammen	
$\overline{AB}$ ist größer als $\overline{CD}$ $\overline{AB} > \overline{CD}$	Bei der Streckenabtragung liegt $D$ zwischen $C$ und $B'$	

### 3. BEWEGUNGEN UND KONGRUENZ

Summe und Differenz  
zweier Strecken

Die Summe zweier Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  findet man durch Abtragen dieser Strecken auf einer gemeinsamen Geraden. Wie man diese Gerade auch wählt und in welcher Reihenfolge man die Abtragung auch vornimmt, stets erhält man kongruente Strecken als Summe.



Mittelpunkt einer Strecke  
(↗ 225)

Ein Punkt  $M$  einer Strecke  $\overline{AB}$  heißt ihr **Mittelpunkt** genau dann, wenn die Strecken  $\overline{AM}$  und  $\overline{MB}$  kongruent sind. Jede Strecke besitzt genau einen Mittelpunkt. Wir sagen, daß der Mittelpunkt die betreffende Strecke halbiert.

**Winkel**  
Antragen eines Winkels  
(↗ 224)

Zu jedem Winkel  $(h, k)$  gibt es auf jeder Seite eines Strahls  $l$  mit dem Anfangspunkt  $O$  genau einen Strahl  $k'$ , der von  $O$  ausgeht, so daß  $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(l, k')$  gilt. Wird einer dieser Strahlen bestimmt, so sagen wir, daß der Winkel  $(h, k)$  in der betreffenden Halbebene an den Strahl  $l$  angetragen wird.

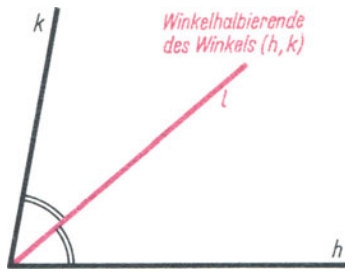
Vergleichen zweier  
Winkel

Zwei Winkel werden verglichen, indem beide an einen Strahl  $l$  in derselben Halbebene angetragen werden.

Vergleich zweier Winkel $(h, k)$ und $(l, m)$	
$\sphericalangle(h, k)$ ist kleiner als $\sphericalangle(l, m)$ $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(l, m)$	
$\sphericalangle(h, k)$ ist kongruent $\sphericalangle(l, m)$ $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(l, m)$	
$\sphericalangle(h, k)$ ist größer als $\sphericalangle(l, m)$ $\sphericalangle(h, k) > \sphericalangle(l, m)$	

### 3. BEWEGUNGEN UND KONGRUENZ

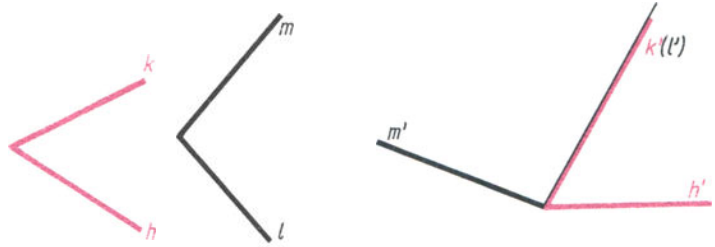
Winkelhalbierende eines Winkels (↗ 223, 225, 243)



Ein Strahl  $l$  heißt Winkelhalbierende eines Winkels  $(h, k)$  genau dann, wenn er vom Scheitel des Winkels ausgeht, innerhalb des Winkels verläuft und wenn die Winkel  $(h, l)$  und  $(l, k)$  kongruent sind. Jeder Winkel besitzt genau eine Winkelhalbierende.

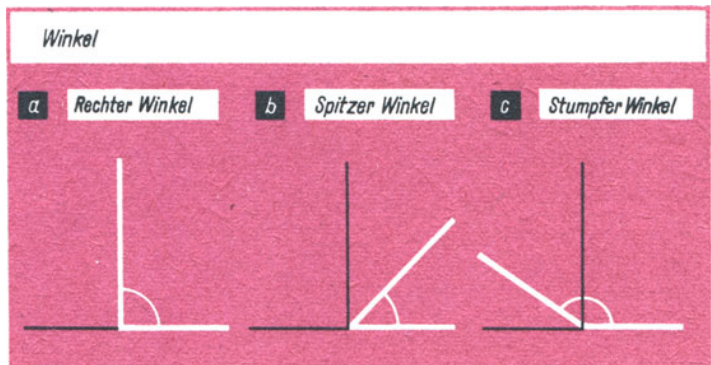
Summe zweier Winkel

Die Summe zweier Winkel  $(h, k)$  und  $(l, m)$  erhält man dadurch, daß man sie an einen beliebigen Strahl, wie folgendes Bild zeigt, anträgt. Wie man diesen Strahl auch wählt und in welcher Reihenfolge die Winkel auch angetragen werden, stets erhält man kongruente Winkel als Summe.



Einteilung der Winkel (↗ 212)

Ein Winkel, der einem seiner Nebenwinkel kongruent ist, heißt ein **rechter Winkel**.  
 Durch Vergleich mit einem rechten Winkel können die Winkel eingeteilt werden.  
 Ein Winkel, der kleiner als ein rechter Winkel ist, heißt ein **spitzer Winkel**.  
 Ein Winkel, der größer als ein rechter Winkel ist, heißt ein **stumpfer Winkel**.



### 3. BEWEGUNGEN UND KONGRUENZ

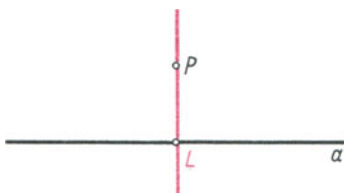
---

**Senkrechte Geraden** (↗ 225) ▶ **DEFINITION 11:** Zwei Geraden heißen zueinander senkrecht genau dann, wenn sie sich unter einem rechten Winkel schneiden.

▶ In jedem Punkte  $A$  einer Geraden  $a$  gibt es in jeder Ebene durch  $a$  genau eine Gerade  $b$ , die auf  $a$  senkrecht steht.

**Lot** (↗ 226)

▶ **DEFINITION 12:** Eine Gerade, die durch einen nicht auf einer Geraden  $a$  liegenden Punkt  $P$  geht, heißt Lot von  $P$  auf die Gerade  $a$  genau dann, wenn sie auf der Geraden  $a$  senkrecht steht.



Fußpunkt eines Lotes

Den Schnittpunkt  $L$  eines Lotes auf  $a$  mit dieser Geraden  $a$  nennen wir den **Fußpunkt** des Lotes.

▶ Von jedem Punkte  $P$  gibt es auf jede Gerade, die nicht durch  $P$  geht, genau ein Lot.

D

## 4. STRECKEN- UND WINKELMESSUNG

### Streckenlänge Einheitsstrecke

Eine Strecke wird gemessen, indem sie mit einer gegebenen Strecke, der **Einheitsstrecke** oder **Längeneinheit**, verglichen wird.

Die Zahl, die angibt, wie oft die Längeneinheit bzw. Bruchteile von ihr auf der gegebenen Strecke nacheinander abgetragen werden können, heißt die **Maßzahl der Länge** dieser Strecke bei der gegebenen Längeneinheit.

Kongruente Strecken haben die gleiche Maßzahl. Man sagt daher: kongruente Strecken sind gleich lang, kürzer: sie sind gleich.

Beim Abtragen kann der Fall eintreten, daß auch bei Benutzung beliebiger Bruchteile der Längeneinheit der jeweils durch die Abtragung erhaltene Punkt nie mit dem betreffenden Endpunkt der Strecke zusammenfällt. In diesem Fall ist die Maßzahl der Länge eine irrationale Zahl ( $\sphericalangle$  74), und man nennt die Strecke zur gegebenen Längeneinheit **inkommensurabel**.

### Längeneinheiten

Die Längenangabe für eine Strecke ist eindeutig, wenn die Maßzahl der Länge und die Längeneinheit angegeben werden.

Übersicht über Längeneinheiten		
Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Kilometer	km	$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$
Meter	m	
Dezimeter	dm	$1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m}$
Zentimeter	cm	$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$
Millimeter	mm	$1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$

Zur Bezeichnung einer Strecke benutzt man auch kleine lateinische Buchstaben. Den gewählten Buchstaben verwendet man dann auch zur Bezeichnung der Streckenlänge (mitunter auch für deren Maßzahl).

■  $\overline{AB} = a; a = 3,0 \text{ cm}$

### Die Summe zweier Strecken

Die Länge der Summe zweier Strecken ergibt sich durch Addition der Längen der beiden Strecken.

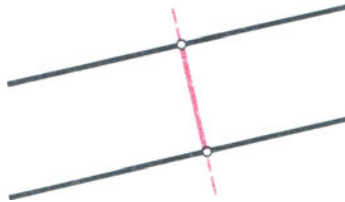
### Entfernung und Abstand

Die **Entfernung** zweier Punkte  $A$  und  $B$  voneinander ist die Länge der Strecke  $\overline{AB}$ .

Der **Abstand eines Punktes  $P$  von einer Geraden  $a$**  ist die Länge der Strecke  $\overline{PL}$ , wobei  $L$  der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf die Gerade  $a$  ist ( $\sphericalangle$  Bild Seite 209).

#### 4. STRECKEN- UND WINKELMESSUNG

Der **Abstand zweier paralleler Geraden** ( $\sphericalangle 194$ )  $a$  und  $b$  ist die Länge einer Strecke  $\overline{AB}$ , wobei  $A$  auf  $a$  und  $B$  auf  $b$  liegt und die Gerade  $AB$  senkrecht auf den Geraden  $a$  und  $b$  steht.



#### Messen eines Winkels

Ein Winkel wird gemessen, indem er mit einem gegebenen Winkel, dem **Einheitswinkel**, verglichen wird.

#### Gradmaß

Man kann den Einheitswinkel so wählen daß ein rechter Winkel das 90-fache dieses Einheitswinkels ist. Man nennt diesen Einheitswinkel **1 Grad** und bezeichnet ihn mit  $1^\circ$ . In diesem Fall sagt man, daß die Winkel im **Gradmaß** gemessen werden ( $\sphericalangle 160$ ).

Unterteilung des Gradmaßes		
Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Grad	$1^\circ$	
Minute	$1'$	$1^\circ = 60'$
Sekunde	$1''$	$1^\circ = 3600''$

Die Maßzahl für die Größe eines Winkels ergibt sich ähnlich wie bei der Streckenmessung durch Antragen des Einheitswinkels bzw. geeigneter Bruchteile innerhalb des ausgezeichneten Teiles der Ebene ( $\sphericalangle 199$ ).

Kongruente Winkel haben die gleiche Maßzahl. Man sagt daher: kongruente Winkel sind gleich groß, kürzer: sie sind gleich.

Zur Bezeichnung eines Winkels benutzt man auch kleine griechische Buchstaben. Den gewählten Buchstaben verwendet man dann auch zur Bezeichnung der Winkelgröße.

■  $\sphericalangle (h, k) = \alpha; \alpha = 32^\circ 5' 16''$

#### Summe zweier Winkel

Die Maßzahl der Summe zweier Winkel ergibt sich durch Addition der Maßzahlen der beiden Winkel.






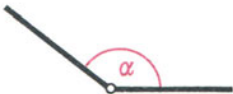

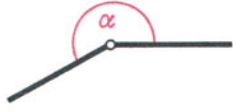

#### 4. STRECKEN- UND WINKELMESSUNG

- Die Summe der Maßzahlen zweier Winkel nennt man kurz „Summe der beiden Winkel“. Man sagt: Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt  $180^\circ$ .

#### Erweiterung des Winkelbegriffes

Nullwinkel  
Gestreckter Winkel

- Haben die Strahlen  $h$  und  $k$  denselben Anfangspunkt und fallen sie zusammen, so heißt diese Figur **Nullwinkel**. Ein Nullwinkel hat das Maß  $0^\circ$ .
- Ein Paar entgegengesetzter Strahlen mit demselben Anfangspunkt heißt **gestreckter Winkel**. Ein gestreckter Winkel hat das Maß  $180^\circ$ .

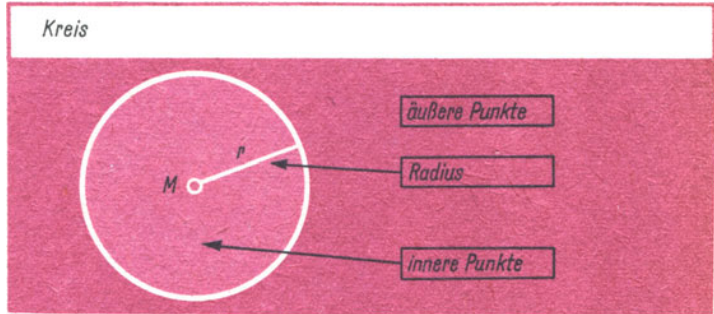
Einteilung der Winkel nach ihrer Größe		
Winkelart	Größe	
Nullwinkel	$0^\circ$	
spitzer Winkel	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
rechter Winkel	$90^\circ$	
stumpfer Winkel	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
gestreckter Winkel	$180^\circ$	
überstumpfer Winkel	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	
Vollwinkel	$360^\circ$	

# 5. KREISE UND ELLIPSEN

## Kreis

► **DEFINITION 13:** Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt  $M$  dieser Ebene gleich weit entfernt sind, heißt ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$ .

Die Verbindungsstrecke  $\overline{MA}$  eines Kreispunktes  $A$  mit dem Mittelpunkt  $M$  des Kreises heißt Radius. Ist  $r$  die Länge der Radien eines Kreises, so sprechen wir auch von dem Radius  $r$  des Kreises.

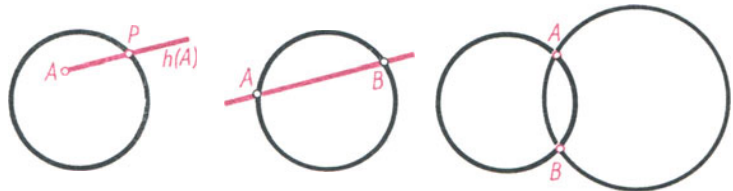


## Kreisfläche

Der Teil der Ebene, der von einem Kreis eingeschlossen wird, heißt die **Fläche** dieses Kreises. Die Punkte der Kreisfläche haben einen Abstand von  $M$ , der kleiner als  $r$  ist.

## Eigenschaften der Kreise

1. Jeder Strahl, der von einem Punkt der Kreisfläche ausgeht, hat mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam.
2. Eine Gerade hat höchstens zwei Punkte mit einem Kreis gemeinsam.
3. Zwei verschiedene Kreise haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.



Haben eine Gerade und ein Kreis zwei gemeinsame Punkte, so sagt man, daß die Gerade den Kreis schneidet. Haben eine Gerade und ein Kreis genau einen Punkt gemeinsam, so sagt man, daß die Gerade den Kreis berührt. Haben zwei Kreise zwei gemeinsame Punkte, so sagt man, daß sie einander schneiden.



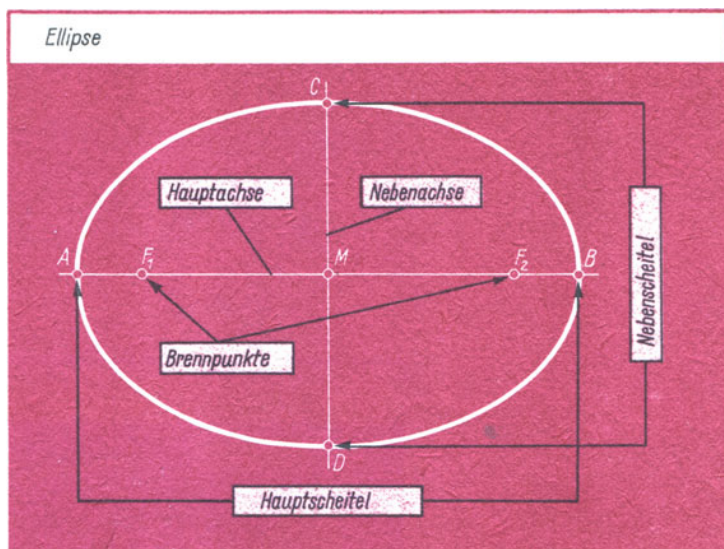


## 5. KREISE UND ELLIPSEN

### Ellipsen

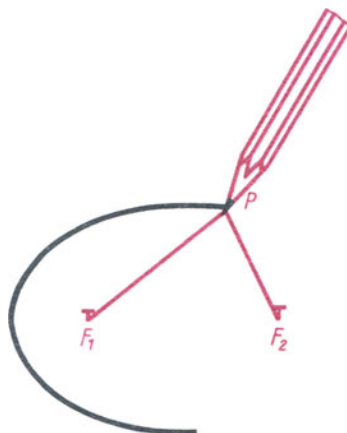
► **DEFINITION 14:** Die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist, heißt **Ellipse**.

Die beiden festen Punkte  $F_1$  und  $F_2$  werden **Brennpunkte** der Ellipse genannt.



### Gärtnerkonstruktion

Man wählt zwei feste Punkte  $F_1$  und  $F_2$  als Brennpunkte und befestigt in ihnen eine Schnur, die länger als  $\overline{F_1F_2}$  sein muß. Führt man nun einen Bleistift so über das Papier, daß die Schnur stets gestrafft ist, so beschreibt er eine Ellipse.

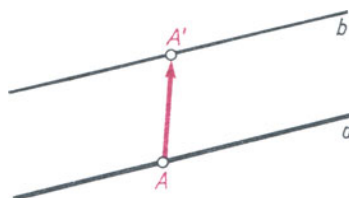


## 6. EIGENSCHAFTEN ELEMENTARER BEWEGUNGEN

**Verschiebung**  
(/ 205)

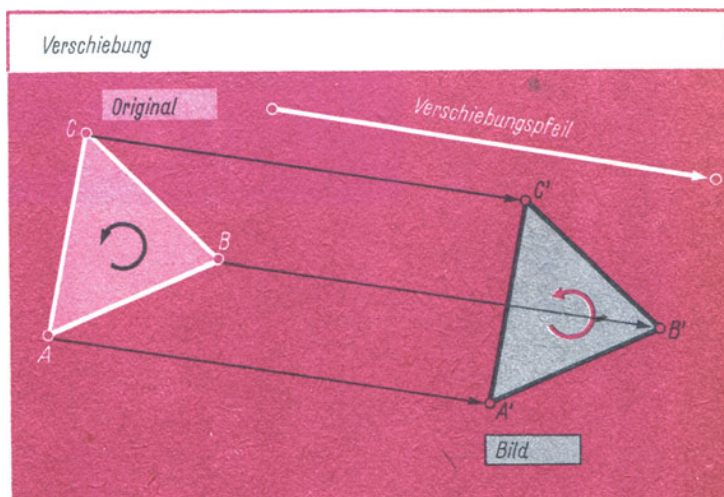
► **DEFINITION 15:** Eine Bewegung heißt eine **Verschiebung** genau dann, wenn jede Gerade zu ihrer Bildgeraden parallel ist und wenn entweder kein Punkt auf sich selbst abgebildet wird oder wenn alle Punkte mit ihren Bildpunkten zusammenfallen.

Eigenschaften  
von Verschiebungen



(1) Zu je zwei parallelen Geraden gibt es (mindestens) eine Verschiebung, bei der die eine das Bild der anderen ist.

Ist  $A'$  das Bild eines Punktes  $A$  bei einer Verschiebung, so heißt die Richtung der Geraden  $AA'$  die **Verschiebungsrichtung** und die Länge der Strecke  $\overline{AA'}$  die **Verschiebungsweite**.

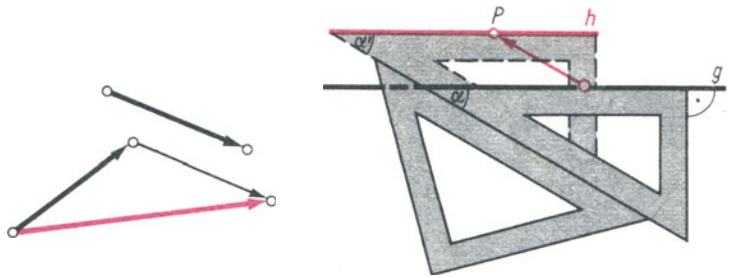


Eine Verschiebung ist durch einen Punkt  $A$  und seinen Bildpunkt  $A'$  eindeutig bestimmt; wir bezeichnen sie mit  $\overrightarrow{AA'}$ . Die orientierte Strecke  $\overrightarrow{AA'}$  wird auch als **Verschiebungspfeil** bezeichnet.

(2) Die orientierten Strecken (/ 197), die Originalpunkte mit ihren Bildpunkten bei einer Verschiebung verbinden, sind parallel, gleichorientiert und kongruent.

(3) Die Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen ergibt eine Verschiebung.

## 6. ELEMENTARE BEWEGUNGEN



Die Konstruktion des Bildes erfolgt durch Zusammensetzung der Verschiebungspfeile.

*Bemerkung:* Die Anwendung von zwei Zeichendreiecken zum Zeichnen von Parallelen bei praktischen Zeichenaufgaben beruht auf den Eigenschaften der Verschiebungen. Das obenstehende Bild zeigt, wie zu einer Geraden  $g$  die Parallele  $h$  durch einen Punkt  $P$  mit Hilfe zweier Zeichendreiecke gezeichnet werden kann.

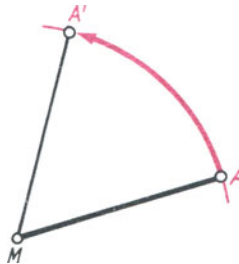
### Drehung um einen Punkt



**DEFINITION 16:** Eine Bewegung heißt eine **Drehung um einen Punkt genau dann**, wenn entweder genau ein Punkt auf sich selbst abgebildet wird oder wenn alle Punkte mit ihren Bildpunkten zusammenfallen.

### Eigenschaften von Drehungen

(1) Zu je zwei Punkten eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  gibt es eine Drehung um  $M$ , bei der der eine Punkt das Bild des anderen ist.



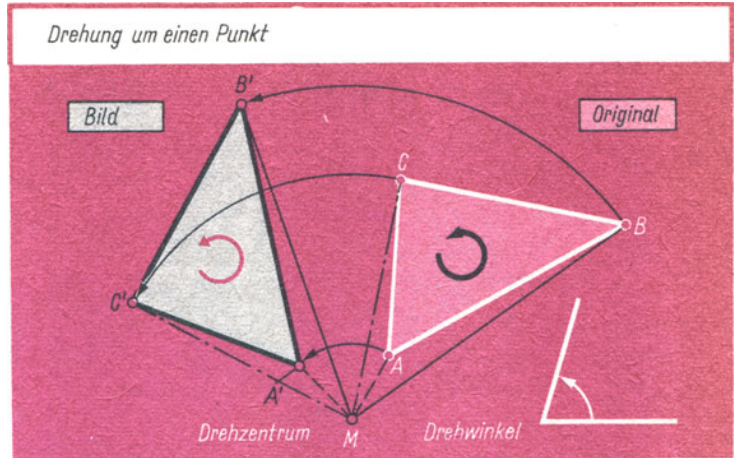
Der Punkt  $M$  heißt das **Drehzentrum** der Drehung. Ist  $A'$  das Bild eines Punktes  $A$  bei einer Drehung um  $M$ , so heißt der Winkel  $AMA'$  ein **Drehwinkel**.

(2) Bei ein und derselben Drehung sind alle Drehwinkel untereinander kongruent.

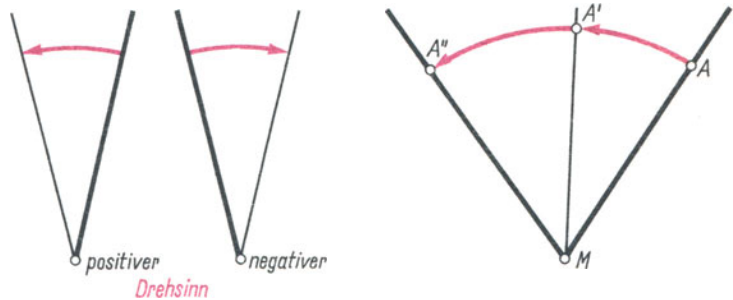
Daher sprechen wir auch von *dem* Drehwinkel bei einer Drehung.

Ist  $A'$  das Bild eines Punktes  $A$  bei einer Drehung um  $M$ , so liegt  $A'$  auf dem Kreis um  $M$  mit dem Radius  $\overline{AM}$ .

## 6. ELEMENTARE BEWEGUNGEN



Wird der Kreis von  $A$  nach  $A'$  entgegen dem Umlaufsinn eines Uhrzeigers durchlaufen, so sagen wir, daß die Drehung einen positiven **Drehsinn** besitzt. Im anderen Falle heißt der Drehsinn negativ.  
Eine Drehung ist durch Angabe des Drehzentrums, der Größe des Drehwinkels und des Drehsinns eindeutig bestimmt.



(3) Die Nacheinanderausführung zweier Drehungen mit demselben Drehzentrum  $M$  ergibt eine Drehung um  $M$ . Haben beide Drehungen um  $M$  denselben (entgegengesetzten) Drehsinn, so ist die Größe des Drehwinkels bei der Nacheinanderausführung gleich der Summe (der Differenz) aus den Größen der beiden Drehwinkel.

### Punktspiegelung

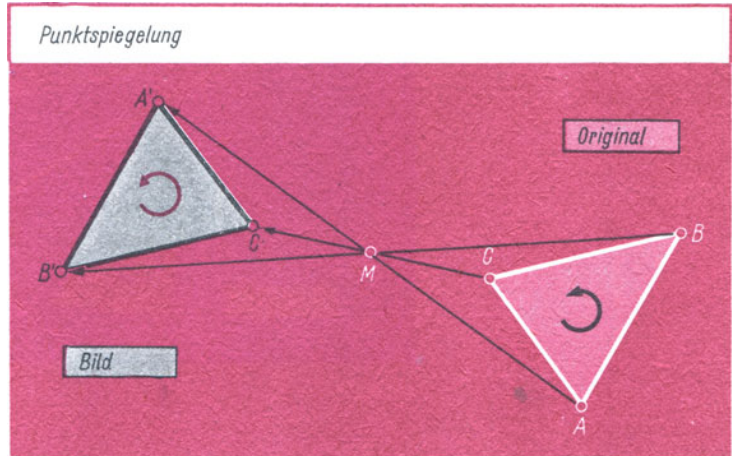
► **DEFINITION 17:** Eine Drehung um einen Punkt  $M$  heißt eine **Punktspiegelung** an  $M$  genau dann, wenn der Drehwinkel ein gestreckter Winkel ist.

## 6. ELEMENTARE BEWEGUNGEN

Eigenschaften  
von Punktspiegelungen  
( $\sphericalangle$  227)

Den Punkt  $M$  nennen wir das Zentrum der Punktspiegelung. Eine Punktspiegelung ist durch Angabe des Zentrums eindeutig bestimmt.

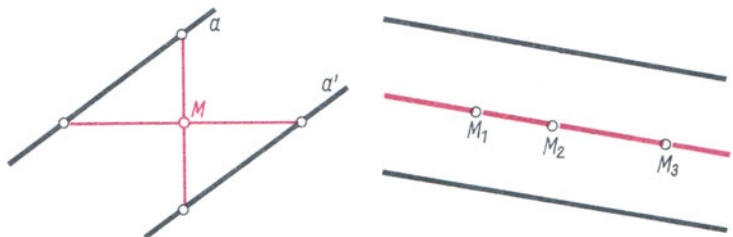
(1) Ist  $A'$  das Bild von  $A$  bei einer Punktspiegelung an  $M$ , so liegen  $A$  und  $A'$  auf einander entgegengesetzten Strahlen mit dem Anfangspunkt  $M$ , wobei sie von  $M$  gleich weit entfernt sind.



(2) Jede Gerade, die durch das Zentrum einer Punktspiegelung geht, wird auf sich selbst abgebildet.

Jede Gerade  $a$ , die nicht durch das Zentrum geht, wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet, die von  $a$  verschieden ist (Bild unten links).

(3) Zu je zwei parallelen Geraden gibt es (mindestens) eine Punktspiegelung, bei der die eine das Bild der anderen ist.

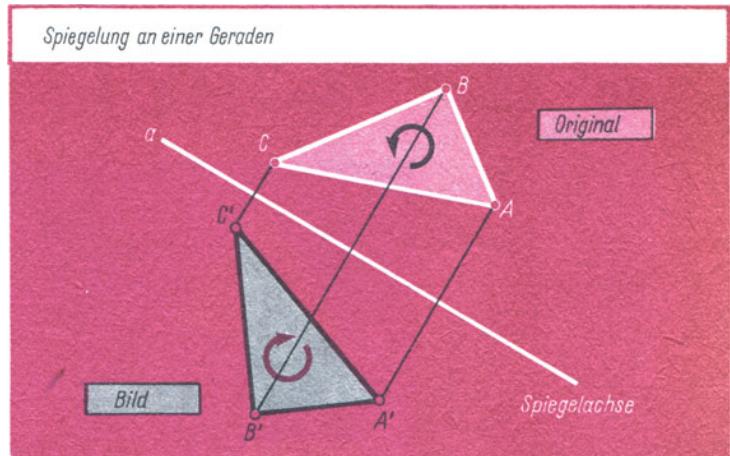


**Bemerkungen:** Die Zentren aller Punktspiegelungen, bei denen zwei parallele Geraden aufeinander abgebildet werden, liegen auf ihrer Mittellinie, das heißt auf derjenigen Geraden, die von beiden Geraden gleichen Abstand hat (Bild rechts).

## 6. ELEMENTARE BEWEGUNGEN

### Spiegelung an einer Geraden

► **DEFINITION 18:** Eine Bewegung heißt eine Spiegelung an einer Geraden  $a$  genau dann, wenn die Gerade  $a$  punktweise auf sich selbst abgebildet wird und die Seiten der Geraden vertauscht werden.



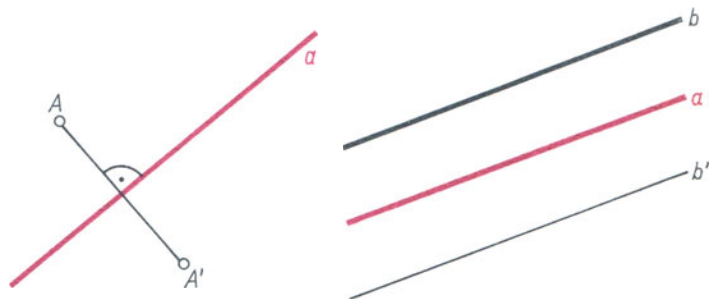
### Eigenschaften von Geradenspiegelungen (S. 228)

(1) An jeder Geraden  $a$  gibt es genau eine Spiegelung. Die Gerade  $a$  heißt die **Spiegelachse** oder die **Spiegelgerade** der Spiegelung.

Wird ein Punkt  $A$  an einer Geraden  $a$  gespiegelt, heißt sein Bild  $A'$  das **Spiegelbild** von  $A$  und man sagt, daß  $A$  und  $A'$  **spiegelbildlich** zur Geraden  $a$  liegen.

(2) Bei der Spiegelung an einer Geraden  $a$  gilt für jeden Punkt  $A$ , der nicht auf  $a$  liegt, folgendes:

- Der Punkt  $A$  und sein Spiegelbild  $A'$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $a$ .
- Die Gerade  $AA'$  steht senkrecht auf  $a$ .
- $A$  und  $A'$  haben denselben Abstand von  $a$ .

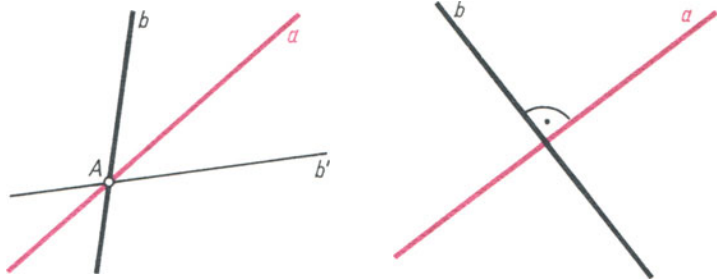


(3) Jede zur Spiegelachse  $a$  parallele Gerade ist auch parallel zu ihrem Spiegelbild (Bild rechts).

## 6. ELEMENTARE BEWEGUNGEN

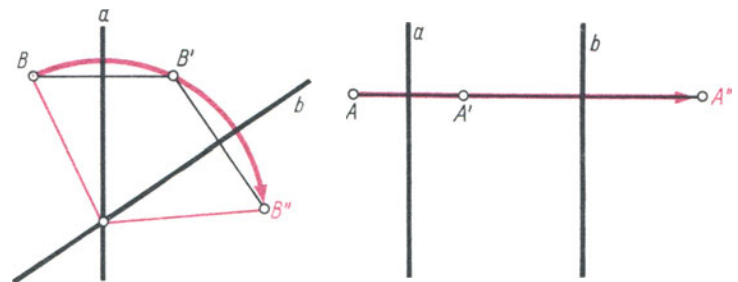
Jede zur Spiegelachse  $a$  nicht parallele Gerade schneidet ihr Spiegelbild auf der Spiegelachse (Bild links).

(4) Eine Gerade  $b$  wird bei der Spiegelung an  $a$  genau dann auf sich selbst abgebildet, wenn  $b$  auf  $a$  senkrecht steht (Bild rechts).



*Bemerkungen:* Die Nacheinanderausführung zweier Spiegelungen an den Geraden  $a$  und  $b$  ergibt

- 1) eine Drehung, falls  $a$  und  $b$  einander schneiden, mit ihrem Schnittpunkt als Drehzentrum (Bild links);
  - 2) eine Verschiebung, falls  $a$  und  $b$  parallel sind (Bild rechts).
- Verschiebungen und Drehungen sind gleichsinnige, Geradenspiegelungen ungleichsinnige Bewegungen ( $\sphericalangle$  205).



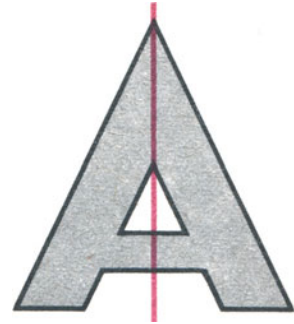
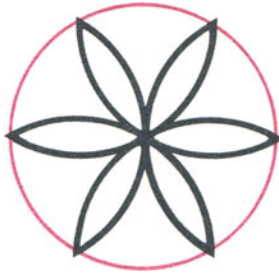
- **Jede Bewegung ist entweder eine elementare Bewegung oder sie ergibt sich aus der Nacheinanderausführung elementarer Bewegungen.**

Die Eigenschaften der elementaren Bewegungen werden ebenso wie die anderen bisher genannten Eigenschaften für die Beweise der folgenden geometrischen Sätze verwendet. Die Eigenschaften der elementaren Bewegungen sind ihrerseits selbst geometrische Sätze, die bewiesen werden könnten.

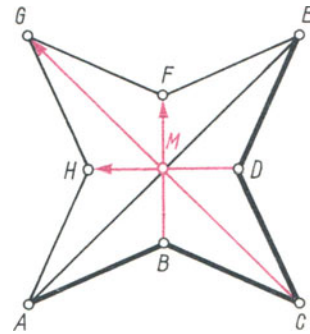
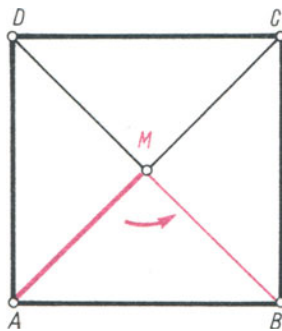
## 7. SYMMETRIE

### Symmetrie

► **DEFINITION 19:** Eine geometrische Figur heißt **symmetrisch genau dann**, wenn es eine von der Identität verschiedene Bewegung gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird.



■ Wird ein Quadrat  $ABCD$  um seinen Mittelpunkt (Schnittpunkt der Diagonalen) mit einem positiven Drehwinkel von  $90^\circ$  gedreht, so wird  $A$  auf  $B$ ,  $B$  auf  $C$ ,  $C$  auf  $D$  und  $D$  auf  $A$  abgebildet. Das Bild des Quadrats ist das Quadrat selbst.

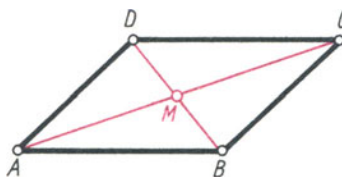


### Punktsymmetrie

**DEFINITION 20:** Eine geometrische Figur heißt **punktsymmetrisch genau dann**, wenn es eine **Punktspiegelung** gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird.

Das Zentrum der Punktspiegelung heißt dann **Symmetriezentrum** der Figur.

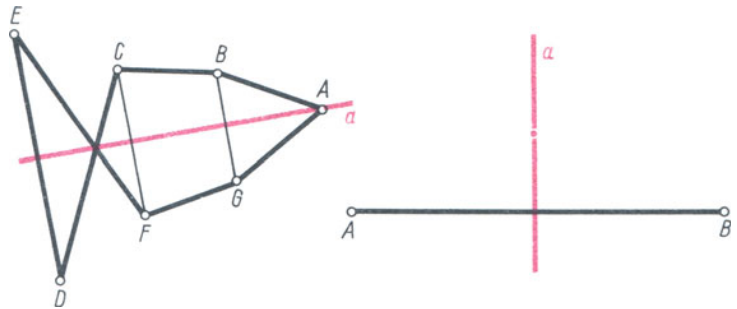
Beispiele für punktsymmetrische Figuren sind Parallelogramme (↗ 248), Strecken, Kreise (↗ 213), das Bild der Sinusfunktion und anderer ungerader Funktionen (↗ 136, 170).



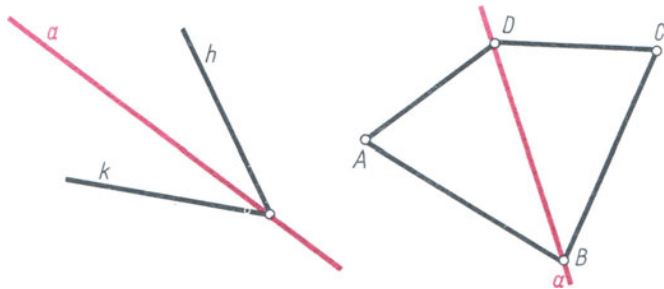


**Axialsymmetrie**

► **DEFINITION 21:** Eine geometrische Figur heißt **axialsymmetrisch** genau dann, wenn es eine Geradenspiegelung gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird.



Die Spiegelgerade heißt dann **Symmetrieachse** der Figur. Beispiele für axialsymmetrische Figuren mit einer Symmetrieachse sind Strecken, Winkel und Drachenvierecke (↗ 247).

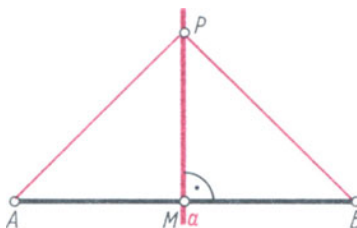


Beispiele für axialsymmetrische Figuren mit beliebig vielen Symmetrieachsen sind Kreise und die Bilder gerader Funktionen (z. B. der Kosinusfunktion) (↗ 136, 170).

Die Mittelsenkrechte einer Strecke (↗ 225)

► **DEFINITION 22:** Diejenige Senkrechte auf einer Strecke  $\overline{AB}$ , die diese halbiert, heißt ihre **Mittelsenkrechte**.

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist ihre Symmetrieachse. Ein Punkt  $P$  liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$ , wenn er von  $A$  und von  $B$  gleich weit entfernt ist.



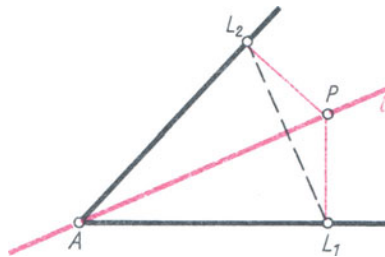
D

## 7. SYMMETRIE

---

Sätze über die  
Winkelhalbierende  
( $\sphericalangle$  225, 243)

- (1) Die Winkelhalbierende eines Winkels ist seine Symmetrieachse.
- (2) Ein Punkt  $P$  liegt genau dann auf der Winkelhalbierenden eines Winkels, wenn er von beiden Schenkeln dieses Winkels denselben Abstand hat.



## 8. KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL

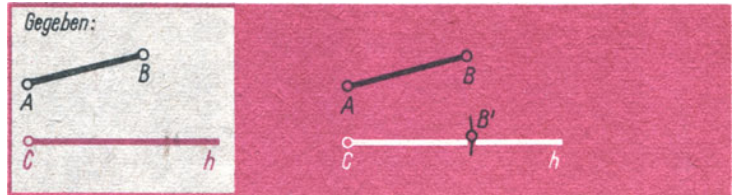
Unter einer geometrischen Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist folgende Aufgabe zu verstehen:

Aus gegebenen Punkten (einer Ebene) sind weitere Punkte (dieser Ebene) zu bestimmen. Dabei dürfen die folgenden Grundaufgaben endlich oft ausgeführt werden:

- (1) Durch zwei gegebene Punkte ist die Gerade zu zeichnen.
- (2) Um einen gegebenen Punkt ist der Kreis mit einem gegebenen Radius zu zeichnen.

### Abtragen von Strecken auf einem Strahl

(↗ 206)

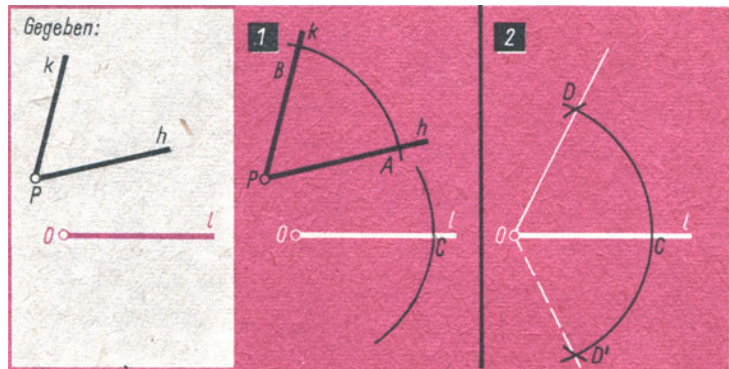


**Beschreibung:**

Wir zeichnen einen Kreis um  $C$  mit dem Radius  $\overline{AB}$ . Dieser schneidet den Strahl  $h$  im gesuchten Punkt  $B'$ .

### Antragen von Winkeln an einen Strahl

(↗ 207)



**Beschreibung:**

1) Wir zeichnen um  $P$  einen Kreis, der die Schenkel des gegebenen Winkels in  $A$  bzw.  $B$  schneidet.

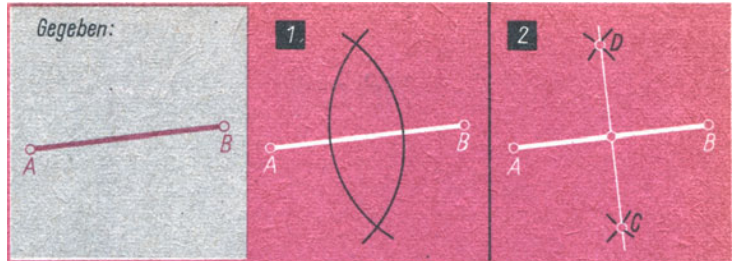
Mit dem Radius  $\overline{PA}$  zeichnen wir einen Kreis um  $O$ , der  $l$  in  $C$  schneidet. Diesen Kreis bezeichnen wir mit  $K$ .

2) Wir zeichnen um  $C$  einen Kreis mit dem Radius  $\overline{AB}$ , der den Kreis  $k$  in den Punkten  $D$  und  $D'$  schneidet. Die Strahlen  $OD$  und  $OD'$  bilden mit dem gegebenen Strahl  $l$  jeweils einen Winkel, der zum gegebenen Winkel kongruent ist.

**Bemerkung:** Ist nicht der Winkel selbst, sondern nur seine Größe gegeben, so wird zum Antragen der Winkelmesser benutzt.

## 8. KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL (GRUNDKONSTRUKTIONEN)

### Mittelsenkrechte einer Strecke (↗ 222)



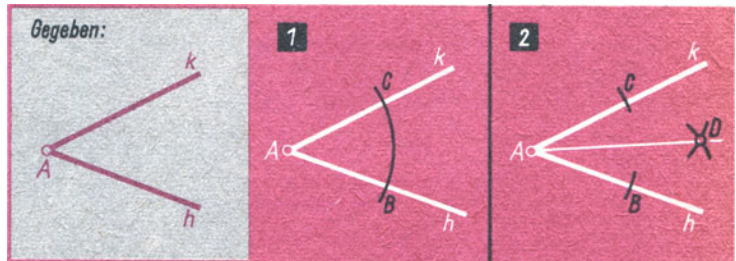
**Beschreibung:**

- 1) Wir zeichnen um  $A$  und  $B$  jeweils einen Kreis mit einem Radius  $r > \frac{\overline{AB}}{2}$ .
- 2) Die Schnittpunkte beider Kreise seien  $C$  und  $D$ . Die Gerade  $CD$  ist die Mittelsenkrechte der Strecke  $\overline{AB}$ .

### Mittelpunkt einer Strecke (↗ 207)

Der Mittelpunkt einer Strecke ist der Schnittpunkt der Strecke mit ihrer Mittelsenkrechten.

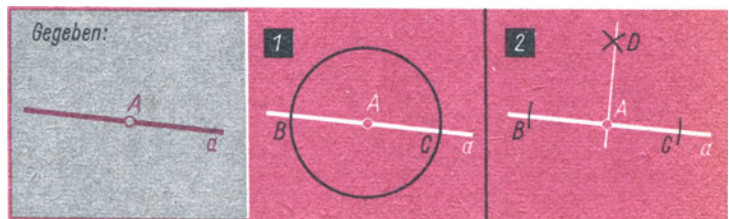
### Winkelhalbierende (↗ 208, 223, 243)



**Beschreibung:**

- 1) Wir zeichnen einen Kreis um den Scheitel  $A$ , der die Schenkel  $h$  und  $k$  in  $B$  und  $C$  schneidet.
- 2) Um  $B$  und  $C$  zeichnen wir Kreise mit gleichem Radius  $r$  (z. B.  $r = \overline{AB}$ ).  $D$  sei Schnittpunkt beider Kreise. Der Strahl  $AD$  ist dann Winkelhalbierende des Winkels  $(h, k)$ .

### Senkrechte in einem Punkt einer Geraden (↗ 209)

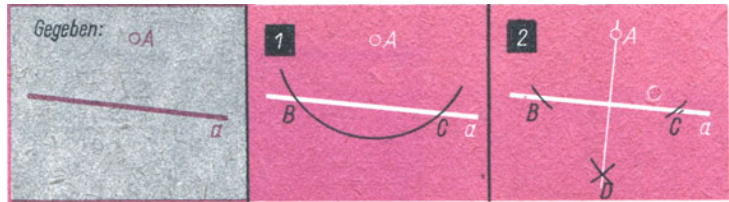


## 8. KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL (GRUNDKONSTRUKTIONEN)

**Beschreibung:**

- 1) Wir zeichnen um den gegebenen Punkt  $A$  einen Kreis, der die Gerade  $a$  in den Punkten  $B$  und  $C$  schneidet.
- 2) Nun konstruieren wir die Mittelsenkrechte der Strecke  $\overline{BC}$ . Sie ist die gesuchte Senkrechte in  $A$  auf  $a$ .

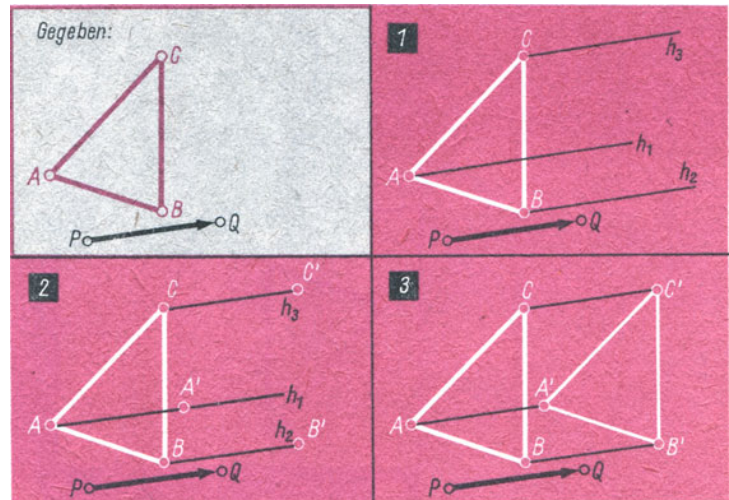
**Lot von einem Punkt auf eine Gerade**  
(/ 209)



**Beschreibung:**

- 1) Wir zeichnen um den gegebenen Punkt  $A$  einen Kreis mit einem Radius  $r$ , der größer als der Abstand des Punktes  $A$  von  $a$  sein muß. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden  $a$  seien  $B$  und  $C$ .
- 2) Die Konstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{BC}$  ergibt das Lot von  $A$  auf  $a$ .

**Bild eines Dreiecks bei einer Verschiebung**  
(/ 215)

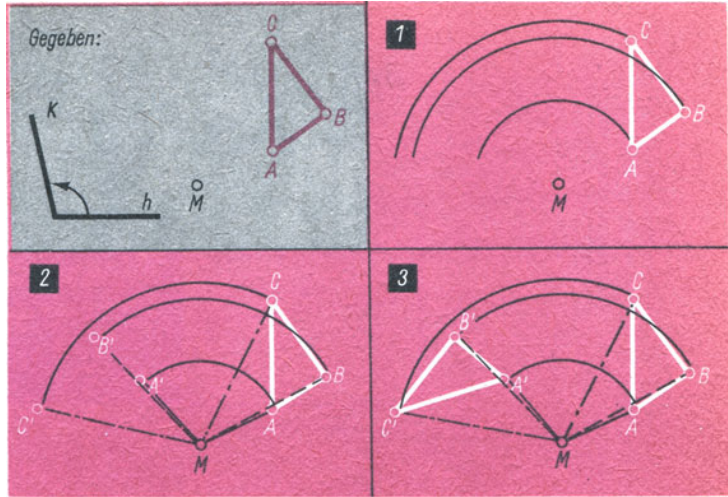


**Beschreibung:**

- 1) Wir zeichnen von  $A$ ,  $B$  und  $C$  aus Strahlen  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$ , die mit dem Strahl  $\vec{PQ}$  gleich orientiert sind.
- 2) Wir tragen auf den Strahlen  $\vec{PQ}$  ab. Das ergibt die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Das Dreieck  $A'B'C'$  ist das Bild des Dreiecks  $ABC$  bei der Verschiebung  $\vec{PQ}$ .

8. KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL(GRUNDKONSTRUKTIONEN)

**Bild eines Dreiecks bei einer Drehung um einen Punkt ( $\nearrow$  216)**



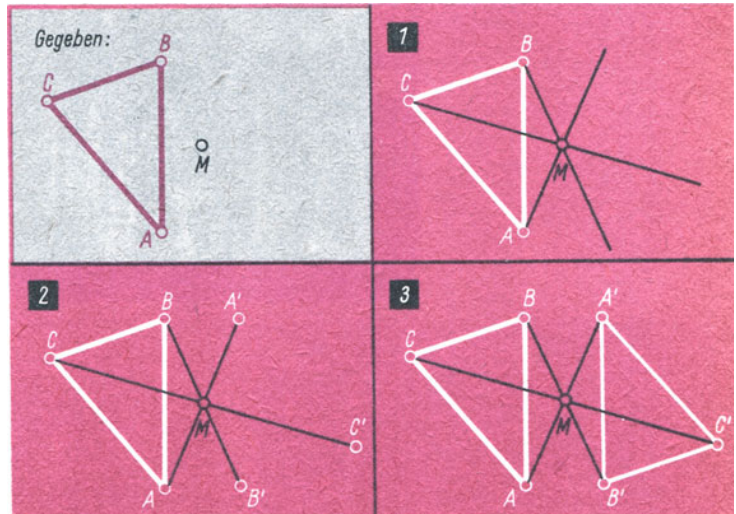
**Beschreibung:**

1) Wir zeichnen Kreise um  $M$  mit den Radien  $\overline{MA}$ ,  $\overline{MB}$  und  $\overline{MC}$ .

2) Wir tragen den Winkel  $\sphericalangle(h, k)$  in  $M$  an die Strahlen  $MA$ ,  $MB$  und  $MC$  an. Die freien Schenkel der angetragenen Winkel schneiden die entsprechenden Kreise in den Punkten  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ . Das Dreieck  $A'B'C'$  ist das Bild des Dreiecks bei der Drehung.

**Bemerkung:** Ein Schenkel eines Winkels heißt frei, wenn auf ihm noch kein Punkt gewählt wurde.

**Bild eines Dreiecks bei einer Punktspiegelung an  $M$  ( $\nearrow$  218)**



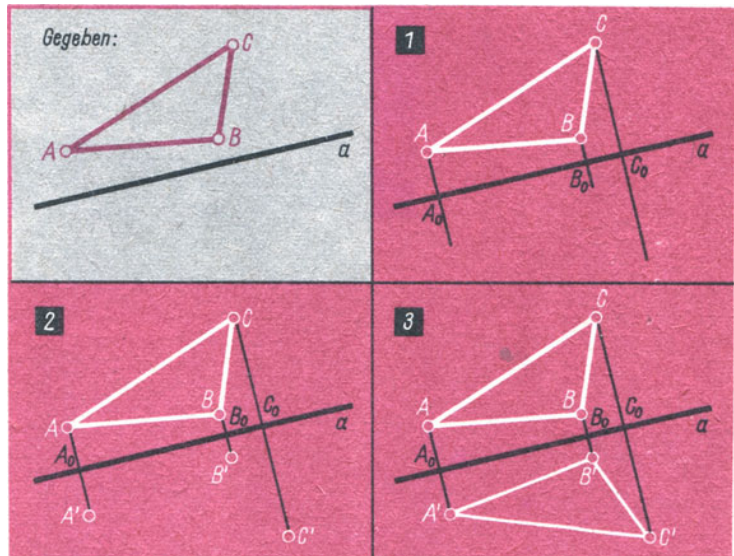
## 8. KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL (GRUNDKONSTRUKTIONEN)

**Beschreibung:**

1) Wir zeichnen von  $A$ ,  $B$  und  $C$  aus die Strahlen  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$ , die durch  $M$  verlaufen.

2) Wir tragen die Strecken  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BM}$  bzw.  $\overline{CM}$  auf den Strahlen  $h_1$ ,  $h_2$  bzw.  $h_3$  von  $M$  aus ab und erhalten die Punkte  $A'$ ,  $B'$  bzw.  $C'$ . Das Dreieck  $A'B'C'$  ist das Bild des Dreiecks  $ABC$  bei der Punktspiegelung an  $M$ .

**Bild eines Dreiecks bei einer Geraden-  
spiegelung (↗ 219)**



**Beschreibung:**

1) Wir fällen die Lote  $l_1$ ,  $l_2$  bzw.  $l_3$  von  $A$ ,  $B$  und  $C$  aus auf die Gerade  $a$  und erhalten die Fußpunkte  $A_0$ ,  $B_0$  bzw.  $C_0$ .

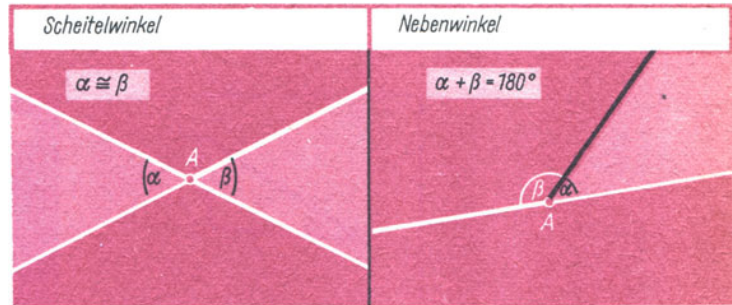
2) Wir tragen auf den Loten  $l_1$ ,  $l_2$  bzw.  $l_3$  von  $A_0$ ,  $B_0$  bzw.  $C_0$  aus die Strecken  $\overline{AA_0}$ ,  $\overline{BB_0}$  bzw.  $\overline{CC_0}$  ab. Wir erhalten die Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$  bzw.  $C'$ . Das Dreieck  $A'B'C'$  ist das Bild des Dreiecks  $ABC$  bei der Geraden-  
spiegelung an  $a$ .

## 9. WINKELPAARE

**Scheitelwinkel**  
(↗ 200)

▶ **SATZ 23: Scheitelwinkel sind kongruent.**

Beweis: Da zwei Scheitelwinkel mit dem Scheitel A bei einer Punktspiegelung an A einander entsprechen, sind sie kongruent.



**Nebenwinkel**  
(↗ 200)

▶ **SATZ 24: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.**

Jeder Winkel besitzt zwei kongruente Nebenwinkel.

**Supplementwinkel**

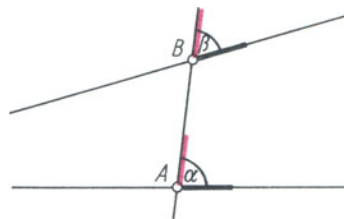
▶ **DEFINITION 25: Zwei beliebige Winkel, deren Summe 180° beträgt, heißen Supplementwinkel.**

**Komplementwinkel**

▶ **DEFINITION 26: Zwei beliebige Winkel, deren Summe 90° beträgt, heißen Komplementwinkel.**

**Stufenwinkel**

▶ **DEFINITION 27: Zwei Winkel heißen Stufenwinkel genau dann, wenn folgendes gilt:**



- (1) Die Scheitel A und B der Winkel sind verschieden.
- (2) Ein Paar Schenkel liegt auf der Geraden AB. Die beiden Schenkel sind gleich orientiert.
- (3) Die beiden anderen Schenkel liegen auf derselben Seite der Geraden AB.

D

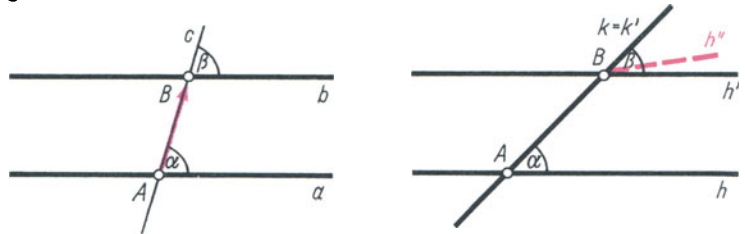


## 9. WINKELPAARE

- **SATZ 28:** Stufenwinkel sind kongruent genau dann, wenn die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, parallel sind.

**Beweis:**

a) Zwei parallele Geraden  $a$  und  $b$  werden von einer Geraden  $c$  in den Punkten  $A$  und  $B$  geschnitten (Bild links). Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  seien Stufenwinkel mit den Scheiteln  $A$  und  $B$ . Da die Winkel bei der Verschiebung  $\overrightarrow{AB}$  oder bei der Verschiebung  $\overrightarrow{BA}$  einander entsprechen, sind sie kongruent.

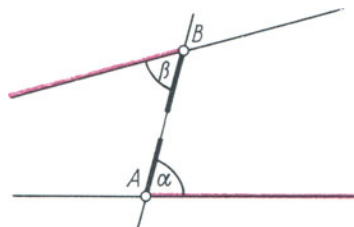


b) Zwei Stufenwinkel  $\alpha = \sphericalangle(h, k)$ ,  $\beta = \sphericalangle(h', k')$  mit den Scheiteln  $A$  und  $B$  seien kongruent (Bild rechts). Die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, seien  $h$  und  $h'$ . Wären  $h$  und  $h'$  nicht parallel, so gäbe es zu  $h$  durch  $B$  einen parallelen Strahl  $h''$ , der mit  $h'$  auf derselben Seite von  $AB$  liegt. Nach a) wären dann die Winkel  $\sphericalangle(h, k)$  und  $\sphericalangle(h'', k')$  kongruent. Dann müßten auch die Winkel  $\sphericalangle(h', k')$  und  $\sphericalangle(h'', k')$  kongruent sein. Das ist nicht möglich. Folglich sind die Schenkel  $h$  und  $h'$  parallel.

**Wechselwinkel**

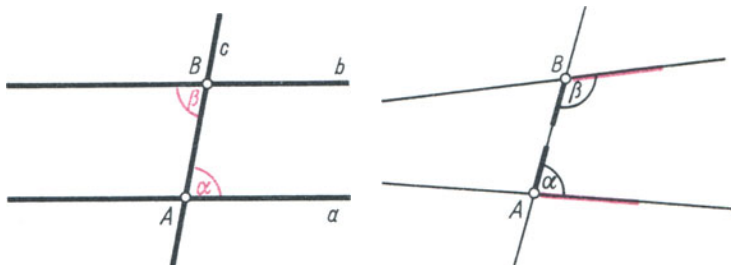
- **DEFINITION 29:** Zwei Winkel heißen Wechselwinkel genau dann, wenn folgendes gilt:

- (1) Die Scheitel  $A$  und  $B$  der Winkel sind verschieden.
- (2) Ein Paar Schenkel liegt auf der Geraden  $AB$ . Die beiden Schenkel sind entgegengesetzt orientiert.
- (3) Die beiden anderen Schenkel liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden  $AB$ .



## 9. WINKELPAARE

- **SATZ 30: Wechselwinkel sind kongruent genau dann, wenn die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, parallel sind (Bild links).**

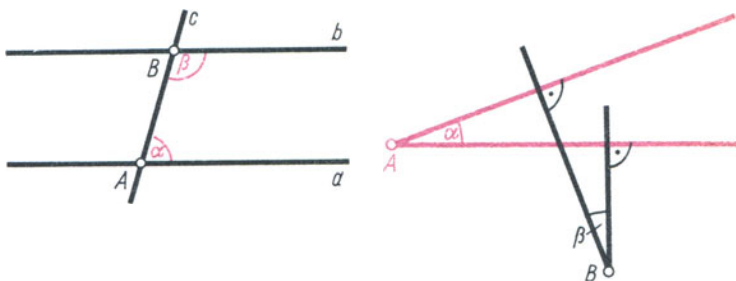


**Entgegengesetzt liegende Winkel**

- **DEFINITION 31: Zwei Winkel heißen entgegengesetzt liegende Winkel genau dann, wenn folgendes gilt (Bild rechts):**

- (1) Die Scheitel der Winkel  $A$  und  $B$  sind verschieden.
- (2) Ein Paar Schenkel liegt auf der Geraden  $AB$ . Die Schenkel sind entgegengesetzt orientiert.
- (3) Die beiden anderen Schenkel liegen auf derselben Seite der Geraden  $AB$ .

- **SATZ 32: Entgegengesetzt liegende Winkel sind Supplementwinkel genau dann, wenn die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, parallel sind (Bild links).**

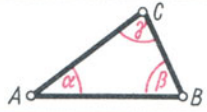
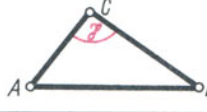
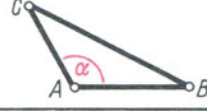


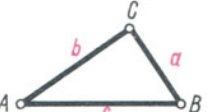
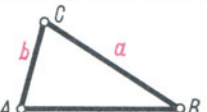
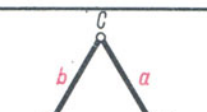
**Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen**

- **SATZ 33: Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, so sind sie kongruent, falls der Scheitel des einen nicht im Innern oder auf einem Schenkel des anderen Winkels liegt (Bild rechts).**

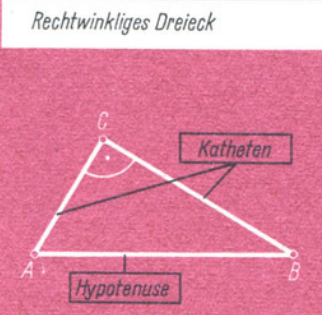
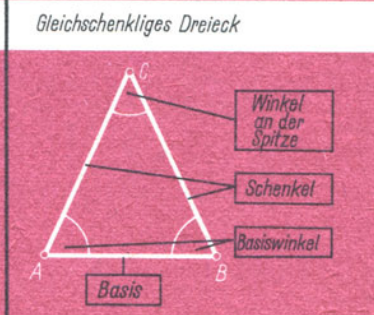
# 10. DREIECKE

## Einteilung der Dreiecke (/ 200)

Einteilung der Dreiecke nach den Innenwinkeln		
Art der Dreiecke	Erklärung	
spitzwinklige Dreiecke	die drei Innenwinkel sind spitze Winkel	
rechtwinklige Dreiecke	ein Innenwinkel ist ein rechter Winkel	
stumpfwinklige Dreiecke	ein Innenwinkel ist ein stumpfer Winkel	

Einteilung der Dreiecke nach den Seiten		
Art der Dreiecke	Erklärung	
unregelmäßige Dreiecke	Die Seiten $a$ , $b$ , $c$ sind paarweise verschieden	
gleichschenklige Dreiecke	es gibt zwei Seiten, die gleich lang sind	
gleichseitige Dreiecke	die Seiten $a$ , $b$ , $c$ sind gleich lang	

D

Rechtwinkliges Dreieck	Gleichschenkliges Dreieck
	

## 10. DREIECKE



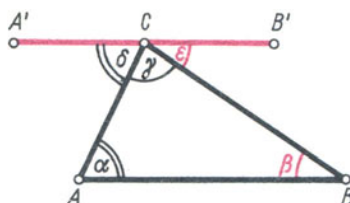
**Bemerkung:** Die Menge aller Dreiecke ist die Vereinigung der Menge ( $\nearrow$  12f) aller spitzwinkligen, der Menge aller rechtwinkligen und der Menge aller stumpfwinkligen Dreiecke.

Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke ist (echte) Teilmenge der Menge ( $\nearrow$  7) aller gleichschenkligen Dreiecke, die ihrerseits (echte) Teilmenge aller Dreiecke ist.

### Innenwinkel ( $\nearrow$ 201)

► **SATZ 34:** Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt  $180^\circ$ .

**Beweis:** Man zeichnet durch  $C$  die Parallele  $A'B'$  zu  $AB$ .



Dann gilt ( $\nearrow$  Bild):

$\alpha = \delta$  und  $\beta = \epsilon$  (Wechselwinkel an Parallelen).

Aus  $\delta + \gamma + \epsilon = 180^\circ$

folgt daher

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

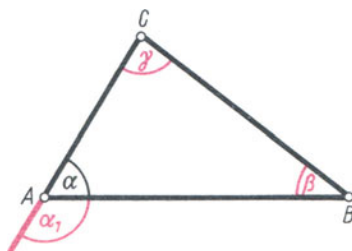
**Bemerkung:**

Aus diesem Satz folgt:

- 1) Ein Dreieck hat höchstens einen rechten oder einen stumpfen Winkel.
- 2) Aus zwei gegebenen Innenwinkeln eines Dreiecks läßt sich der dritte berechnen. ( $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ )
- 3) Die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind Komplementwinkel ( $\nearrow$  229).

### Außenwinkel ( $\nearrow$ 201)

► **SATZ 35:** Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.



**Beweis** ( $\nearrow$  Bild):

Es gilt  $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$

Weiter gilt

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Daraus folgt:

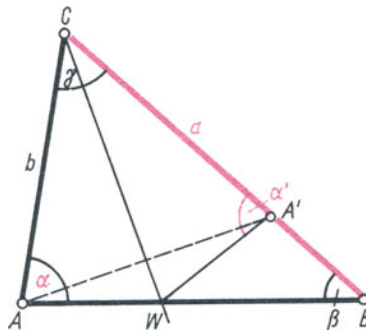
$\alpha_1 = \beta + \gamma$ .

Aus diesem Satz folgt:

- ▶ **SATZ 36:** Ein Außenwinkel ist stets größer als jeder der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.
- ▶ **SATZ 37:** Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt  $360^\circ$ .

**Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln**

- ▶ **SATZ 38:** Der größeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.



**Beweis:** In einem Dreieck  $ABC$  sei  $a > b$ . Die Gerade  $CW$  sei Winkelhalbierende des Winkels  $\gamma$ . Bei der Spiegelung an der Geraden  $CW$  liegt das Bild  $A'$  des Punktes  $A$  zwischen  $C$  und  $B$ . Das Bild  $\alpha'$  des Winkels  $\alpha$  bei dieser Spiegelung ist der Winkel  $CA'W$ . Dieser Winkel ist gleichzeitig Außenwinkel des Dreiecks  $WBA'$ . Dann gilt  $\alpha' > \beta$  ( $\nearrow$  Satz D 36). Wegen  $\alpha' = \alpha$  ist  $\alpha > \beta$ .

Aus diesem Satz folgt:

- ▶ **SATZ 39:** Der größten Seite eines Dreiecks liegt der größte Winkel gegenüber.
- ▶ **SATZ 40:** Dem größeren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber.

**Beweis:** In einem Dreieck  $ABC$  sei  $\alpha > \beta$ .

- 1) Angenommen, es wäre  $b > a$ . Dann müßte nach Satz 38  $\beta > \alpha$  gelten. Das widerspricht der Voraussetzung.
- 2) Angenommen, es wäre  $a = b$ . Dann wäre das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig und  $\alpha = \beta$  als Basiswinkel in diesem Dreieck ( $\nearrow$  232). Auch dies widerspricht der Voraussetzung.
- 3) Also kann nur  $a > b$  gelten.

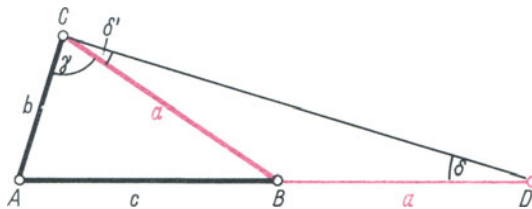
Aus diesem Satz folgt:

- ▶ **SATZ 41: Dem größten Winkel eines Dreiecks liegt die größte Seite gegenüber.**

Speziell für rechtwinklige Dreiecke folgt aus diesem Satz, daß die Hypotenuse größer als jede der beiden Katheten ist.

**Dreiecksungleichung**

- ▶ **SATZ 42: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist stets größer als die dritte Seite.**



**Beweis:** Die Seite  $\overline{AB}$  des Dreiecks  $ABC$  wird über  $B$  hinaus um  $a$  bis zum Punkt  $D$  verlängert.

Es gilt also  $\overline{AD} = a + c$ .

Das Dreieck  $BDC$  ist gleichschenkelig, also gilt

$\delta = \delta'$  (Basiswinkel).

Im Dreieck  $ADC$  gilt daher

$\delta < \delta' + \gamma$ .

Für die gegenüberliegenden Seiten folgt daraus

$\overline{AC} < \overline{AD}$ , d. h.  $b < a + c$ .

Entsprechend wird bewiesen:

$a < b + c$ .

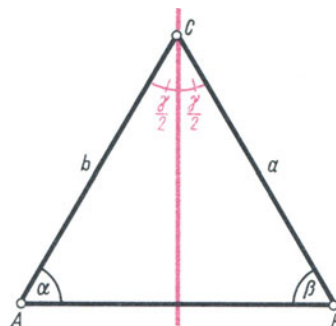
$c < a + b$ .



**Gleichschenkliges Dreieck** (↗ 32)

Symmetrieachse (↗ 221)

- ▶ **SATZ 43: Jedes gleichschenklige Dreieck besitzt eine Symmetrieachse.**



**Beweis:** In einem Dreieck  $ABC$  seien die Seiten  $a$  und  $b$  gleich lang. Bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $w$  des Winkels  $ACB$  wird der Punkt  $C$  auf sich selbst, der Punkt  $A$  auf den Punkt  $B$  und der Punkt  $B$  auf den Punkt  $A$  abgebildet.

Folglich ist die Winkelhalbierende  $w$  Symmetrieachse des Dreiecks.

Aus dem Beweis ergibt sich, daß die Winkelhalbierende  $w$  gleichzeitig Mittelsenkrechte der Basis ist.

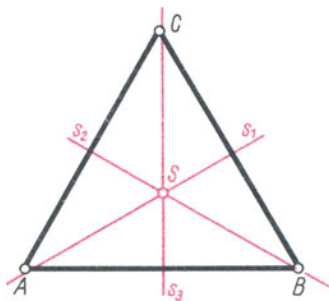
Basiswinkel

► **SATZ 44: Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind kongruent.**

Beweis: Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks entsprechen bei der Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis einander. Folglich sind sie kongruent.

**Gleichseitiges Dreieck** (↗ 232)  
Symmetrieachsen

► **SATZ 45: Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen.**



(Dieser Satz folgt aus Satz C 43.)

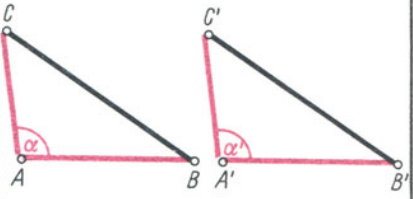
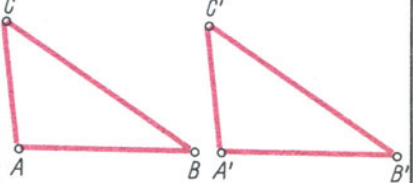
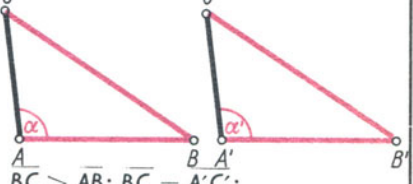
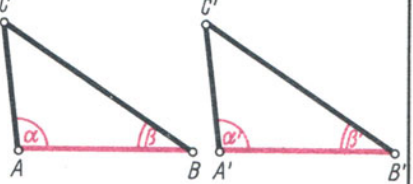
Innenwinkel (↗ 201)

► **SATZ 46: Jeder Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks hat eine Größe von  $60^\circ$ .**

Abbildungen eines gleichseitigen Dreiecks ABC auf sich selbst			
Drehungen um den Schnittpunkt S der Symmetrieachsen	Drehwinkel von $120^\circ$	Drehwinkel von $240^\circ$	Drehwinkel von $360^\circ$
Spiegelungen an Geraden	Spiegelachse AS	Spiegelachse BS	Spiegelachse CS

## 10. DREIECKE

### Kongruenzsätze für Dreiecke (↗ 205)

(sws)	Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen	 <p><math>\overline{AB} = \overline{A'B'}</math>; <math>\overline{AC} = \overline{A'C'}</math>; <math>\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'</math></p>
(sss)	Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen	 <p><math>\overline{AB} = \overline{A'B'}</math>; <math>\overline{BC} = \overline{B'C'}</math>; <math>\overline{AC} = \overline{A'C'}</math></p>
(ssw)	Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren übereinstimmen	 <p><math>\overline{BC} &gt; \overline{AB}</math>; <math>\overline{BC} = \overline{B'C'}</math>; <math>\overline{AB} = \overline{A'B'}</math>; <math>\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'</math></p>
(wsw)	Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen	 <p><math>\overline{AB} = \overline{A'B'}</math>; <math>\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'</math>; <math>\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'</math></p>

Die Kongruenzsätze können mit Hilfe von Bewegungen bewiesen werden.

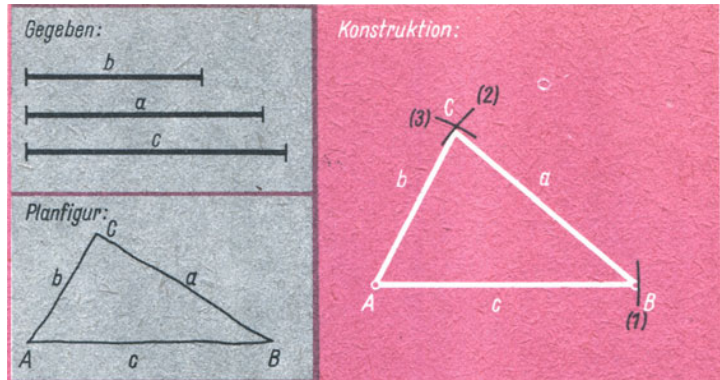
### Konstruktion von Dreiecken

Auf Grund der Kongruenzsätze lassen sich aus geeigneten Stücken Dreiecke konstruieren. Sind zum Beispiel drei Strecken gegeben, so sagen wir, daß ein Dreieck aus drei Seiten zu konstruieren ist.



## 10. DREIECKE

Gegeben: sss

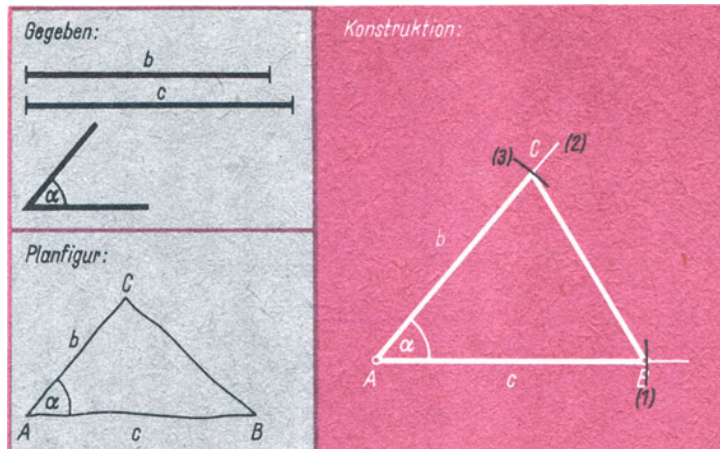


**Beschreibung:**

- (1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius  $c$ . Der Kreis schneidet den Strahl in B.
- (2) Wir zeichnen den Kreis um B mit dem Radius  $a$  und
- (3) den Kreis um A mit dem Radius  $b$ . Beide Kreise schneiden einander in C.

**Bemerkung:** Die gegebenen Strecken müssen der Dreiecksungleichung genügen.

Gegeben: sws

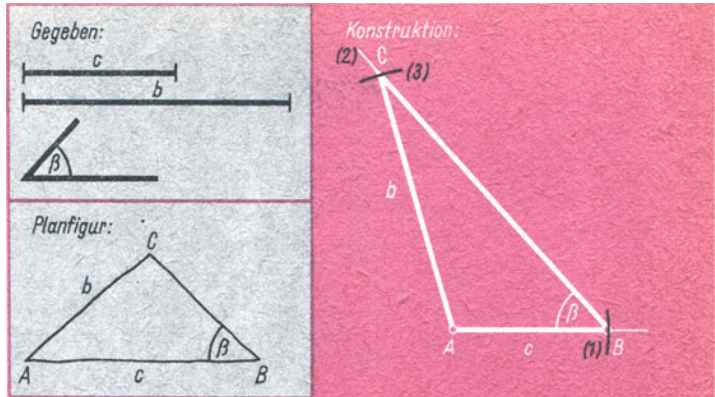


**Beschreibung:**

- (1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius  $c$ . Der Kreis schneidet den Strahl in B.
- (2) Wir tragen in A an den Strahl AB den Winkel  $\alpha$  an.
- (3) Der Kreis um A mit dem Radius  $b$  schneidet den freien Schenkel des angetragenen Winkels in C.

# 10. DREIECKE

Gegeben: wsw



**Beschreibung:**

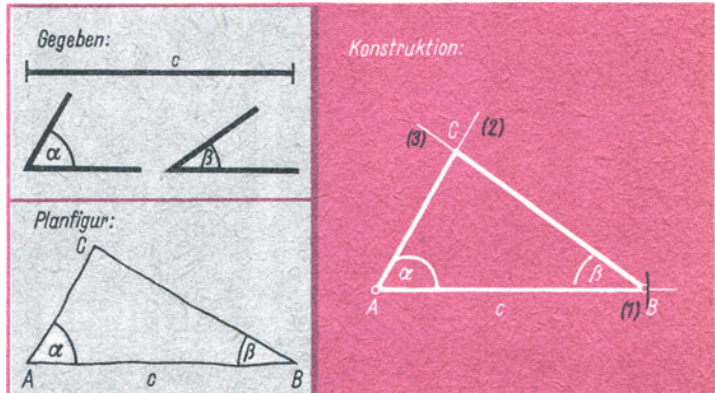
(1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius  $c$ . Der Kreis schneidet den Strahl in B.

(2) Wir tragen in B an den Strahl BA den Winkel  $\beta$  an.

(3) Der Kreis um A mit dem Radius  $b$  schneidet den freien Schenkel des angetragenen Winkels in C.

**Bemerkung:** Ist der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben, so ergibt die Konstruktion entweder *kein* Dreieck oder *zwei* nicht kongruente Dreiecke oder *ein* Dreieck, wie etwa in dem Fall, in dem die kleinere Seite halb so lang wie die größere ist und ihr Gegenwinkel  $30^\circ$  beträgt.

Gegeben: ssw



**Beschreibung:**

(1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius  $c$ . Der Kreis schneidet den Strahl in B.

D

(2) Wir tragen in  $A$  an den Strahl  $AB$  den Winkel  $\alpha$  an. Der freie Schenkel sei  $h$ .

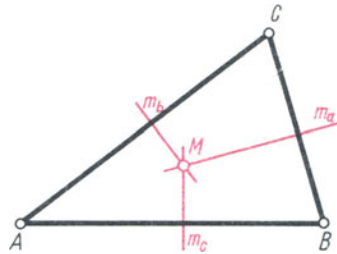
(3) Wir tragen in  $B$  an den Strahl  $BA$  auf der Seite von  $AB$ , die den Strahl  $h$  enthält, den Winkel  $\beta$  an und erhalten den Strahl  $k$ . Die Strahlen  $h$  und  $k$  schneiden einander in  $C$ .

*Bemerkung:*

Die Summe der gegebenen Winkel muß kleiner als  $180^\circ$  sein.

**Mittelsenkrechten eines Dreiecks**  
( $\sphericalangle$  222)

► **DEFINITION 47:** Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite heißt eine Mittelsenkrechte des Dreiecks.



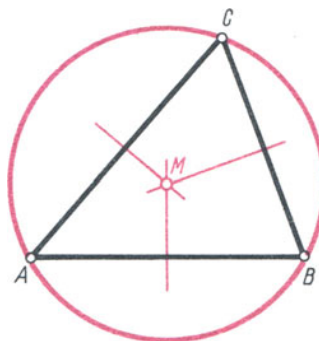
Wir bezeichnen die Mittelsenkrechten mit  $m_a$ ,  $m_b$  und  $m_c$ . ( $m_a$  ist die Mittelsenkrechte der Seite  $a$  usw.)

► **SATZ 48:** Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

*Beweis:* Die Geraden  $m_a$ ,  $m_b$  und  $m_c$  seien die Mittelsenkrechten eines Dreiecks  $ABC$ . Der Schnittpunkt von  $m_c$  und  $m_a$  sei  $M$ . Aus Symmetriegründen gilt  $\overline{AM} \cong \overline{BM}$  und  $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ . Dann gilt auch  $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ . Der Punkt  $M$  liegt also ebenfalls auf der Mittelsenkrechten der Seite  $AC$ .

**Umkreis eines Dreiecks**

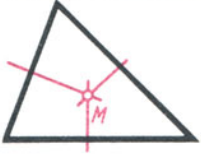
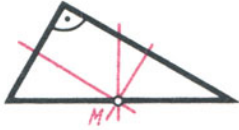


Aus dem Beweis des Satzes über die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ergibt sich, daß die Eckpunkte eines Dreiecks  $ABC$  von dem Schnittpunkt  $M$  der Mittelsenkrechten des betreffenden Dreiecks gleich weit entfernt sind.



Der Kreis um  $M$  mit dem Radius  $\overline{AM}$ , der also durch alle Eckpunkte des Dreiecks  $ABC$  geht, heißt der Umkreis des Dreiecks  $ABC$ .

► **SATZ 49: Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.**

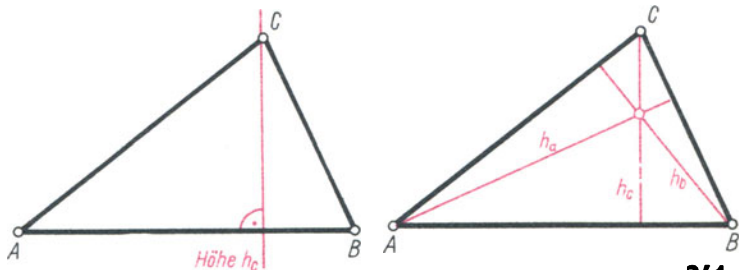
Lage des Umkreismittelpunktes

Art des Dreiecks	Lage des Mittelpunktes	
spitzwinkliges Dreieck	innerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
rechtwinkliges Dreieck	auf der Hypotenuse	
stumpfwinkliges Dreieck	außerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
gleichschenkeliges Dreieck	auf der Symmetrieachse des Dreiecks	

Höhen eines Dreiecks (✓ 349) ►

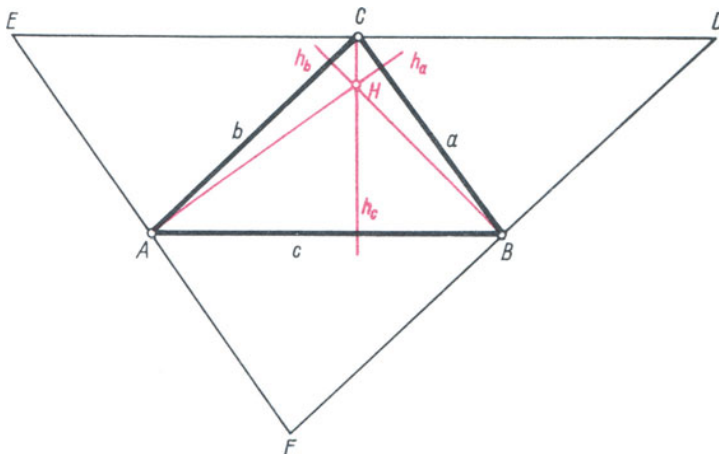
**DEFINITION 50: Das Lot von einem Eckpunkt eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite oder auf deren Verlängerung heißt eine Höhe des Dreiecks (Bild links).**

Wir bezeichnen die Höhen eines Dreiecks ABC mit  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$  (Bild rechts).



Der Schnittpunkt einer Höhe mit der zugehörigen Dreiecksseite oder deren Verlängerung heißt der Fußpunkt dieser Höhe. Als Länge einer Höhe bezeichnen wir den Abstand des betreffenden Eckpunktes von der Gegenseite.

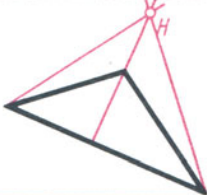
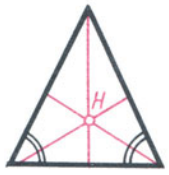
► **SATZ 51: Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**



*Beweis:* Die Geraden  $h_a$ ,  $h_b$  und  $h_c$  seien die Höhen eines Dreiecks  $ABC$ . Die Schnittpunkte der Parallelen durch die Eckpunkte des Dreiecks  $ABC$  zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten seien die Punkte  $D$ ,  $E$  und  $F$ . Die Dreiecke  $ABC$ ,  $BDC$ ,  $CEA$  und  $AFB$  sind paarweise kongruent.  $A$  ist Mittelpunkt der Seite  $\overline{EF}$ ,  $B$  ist Mittelpunkt der Seite  $\overline{FD}$  und  $C$  ist Mittelpunkt von  $\overline{DE}$ . Die Höhen  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  sind daher gleichzeitig Mittelsenkrechten des Dreiecks  $DEF$  und schneiden einander in einem Punkt, w. z. b. w. ( $\sphericalangle$  240).

Lage des Höhengschnittpunktes

Art des Dreiecks	Lage des Höhengschnittpunktes	
spitzwinkliges Dreieck	innerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
rechtwinkliges Dreieck	Scheitel des rechten Winkels	

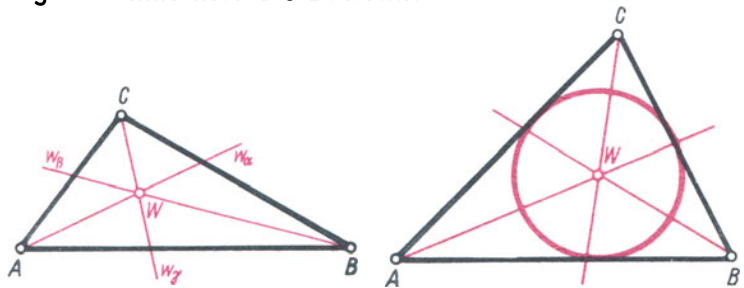
Art des Dreiecks	Lage des Höhen-schnittpunktes	
stumpfwink-liches Dreieck	außerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
gleichschen-kliges Dreieck	auf der Symme-trieachse	

**Winkelhalbierende eines Dreiecks**  
( $\nearrow$  208, 223, 225, 276)

Wir bezeichnen die Winkelhalbierenden im Dreieck  $ABC$  mit  $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ .

► **SATZ 52: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

**Beweis:** Die Geraden  $w_\alpha, w_\beta$  und  $w_\gamma$  seien die Winkelhalbierenden eines Dreiecks  $ABC$ . Der Schnittpunkt von  $w_\alpha$  und  $w_\beta$  sei  $W$ . Aus Symmetriegründen hat  $W$  einerseits von  $c$  und  $b$  und andererseits von  $c$  und  $a$  gleichen Abstand. Dann hat  $W$  auch von  $a$  und  $b$  gleichen Abstand. Der Punkt  $W$  liegt demnach auch auf  $w_\gamma$ , w. z. b. w. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks liegt stets innerhalb des Dreiecks.



**Inkreis eines Dreiecks**

Der Schnittpunkt  $W$  der Winkelhalbierenden eines Dreiecks  $ABC$  hat von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand. Der Kreis um  $W$  mit diesem Abstand als Radius

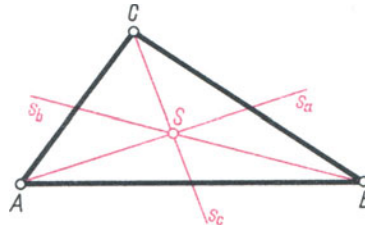
## 10. DREIECKE

berührt die Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  (von innen). Wir nennen diesen Kreis den **Inkreis** des Dreiecks  $ABC$ .

- ▶ **SATZ 53: Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks.**

Seitenhalbierende eines Dreiecks

- ▶ **DEFINITION 54: Die Gerade, die durch einen Eckpunkt eines Dreiecks und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite geht, heißt eine Seitenhalbierende des Dreiecks.**



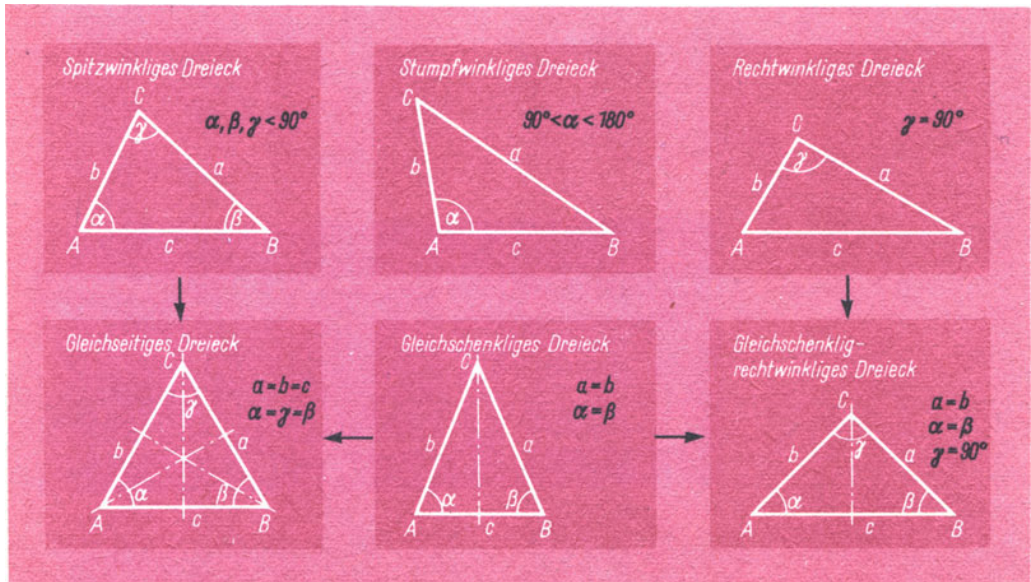
Wir bezeichnen die Seitenhalbierenden eines Dreiecks  $ABC$  mit  $s_a$ ,  $s_b$  und  $s_c$ .

- ▶ **SATZ 55: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.**

Lage des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden

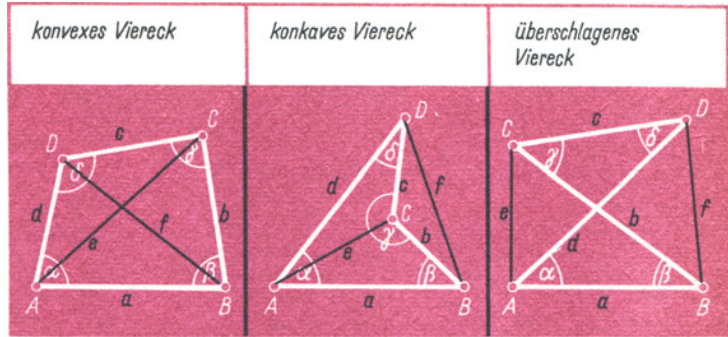
Der Schnittpunkt  $S$  der Seitenhalbierenden eines Dreiecks liegt stets innerhalb des Dreiecks. Er heißt der **Schwerpunkt** des Dreiecks.

Übersicht über die Arten der Dreiecke



# 11. VIERECKE

## Arten der Vierecke



### Winkel eines Vierecks

► **SATZ 56: Die Winkelsumme in einem Viereck beträgt  $360^\circ$ .**

**Beweis:** In jedem konvexen oder konkaven Viereck gibt es eine Diagonale, die das Viereck in zwei Teildreiecke teilt. Da die Winkelsumme in jedem der beiden Dreiecke  $180^\circ$  beträgt, ist die Winkelsumme im Viereck doppelt so groß, also  $360^\circ$ . Auch jedes überschlagene Viereck setzt sich aus zwei Teildreiecken zusammen. Die Winkelsumme in beiden Dreiecken und damit im Viereck ist also auch in diesem Falle  $360^\circ$ , w. z. b. w.

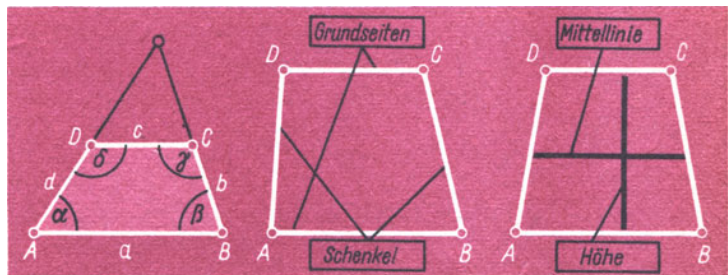
Alle jetzt folgenden Sätze dieses Abschnitts beziehen sich auf konvexe Vierecke.

Welche Sätze auch für andere Vierecke gelten, wird hier nicht erörtert.

Die Konstruktion eines Vierecks läßt sich auf die Konstruktion von Teildreiecken zurückführen.

### Trapeze

► **DEFINITION 57: Ein Viereck mit (mindestens) einem Paar paralleler Seiten heißt ein Trapez.**



Parallele Seiten eines Trapezes heißen **Grundseiten**, die beiden anderen Seiten werden **Schenkel** genannt.



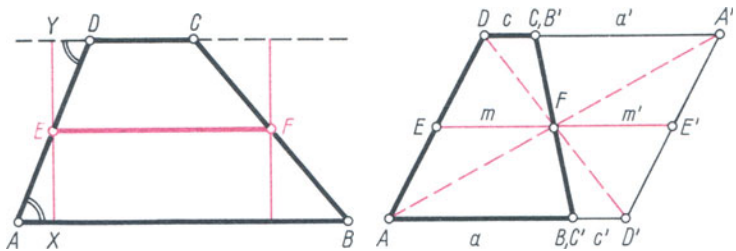


Mittellinie

Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes nennen wir **Mittellinie** des Trapezes. Der Abstand zweier Grundseiten heißt **Höhe** des Trapezes.

- ▶ **SATZ 58: Die Mittellinie eines Trapezes verläuft parallel zu den Grundseiten.**

*Beweis:* Die Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes  $ABCD$  mit den Grundseiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  seien  $E$  und  $F$  (Bild links). Es genügt zu zeigen, daß  $E$  und  $F$  von beiden Grundseiten denselben Abstand haben. Die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes von  $E$  auf die beiden Grundseiten seien  $X$  und  $Y$ . Aus der Kongruenz der Dreiecke  $AXE$  und  $DYE$  nach (wsw) folgt die Kongruenz der Strecken  $\overline{XE}$  und  $\overline{YE}$ . Der Punkt  $E$  hat also von beiden Grundseiten denselben Abstand. Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, daß auch  $F$  denselben Abstand von beiden Grundseiten hat.



- ▶ **SATZ 59: Die Mittellinie eines Trapezes ist halb so lang wie die Summe aus den beiden Grundseiten.**

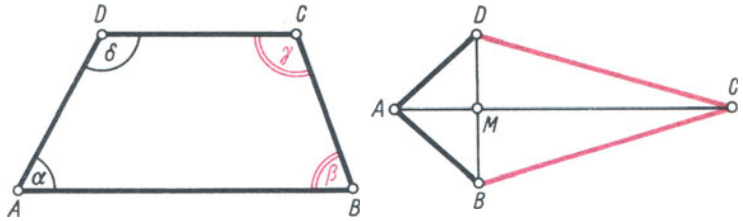
*Beweis:*  $a$  und  $c$  seien die Grundseiten,  $m$  sei die Mittellinie und  $E$  bzw.  $F$  seien die Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes  $ABCD$  (Bild rechts). Wir spiegeln das Trapez an dem Punkt  $F$  und erhalten das Bild  $A'B'C'D'$ . Die Strecke  $\overline{AD'}$  ist die Summe aus den Grundseiten. Die Strecke  $\overline{EE'}$  ist doppelt so lang wie die Strecke  $\overline{EF}$ . Da die Strecken  $\overline{AD'}$  und  $\overline{EE'}$  bei der Verschiebung  $\overrightarrow{AE}$  einander entsprechen, sind sie gleich lang. Daraus folgt

$$m = \frac{1}{2}(a + c), \quad \text{w. z. b. w.}$$

- ▶ **SATZ 60: Die Winkel, die demselben Schenkel eines Trapezes anliegen, sind Supplementwinkel.**

*Beweis:* Die beiden Winkel, die demselben Schenkel anliegen, sind entgegengesetzt liegende Winkel an parallelen Geraden (Bild Seite 247 links) ( $\sphericalangle$  231).

## 11. VIERECKE



**Gleichschenklige Trapeze** Sind in einem Trapez die nicht parallelen Seiten gleich lang, so nennt man es gleichschenklig.

► **SATZ 61:** Ein Trapez ist gleichschenklig genau dann, wenn die Winkel, die einer Grundseite anliegen, kongruent sind

**Drachenvierecke** ► **DEFINITION 62:** Ein Viereck mit zwei Paaren benachbarter gleich langer Seiten heißt ein Drachenviereck (Bild rechts)

Symmetrie (↗ 221) ► **SATZ 63:** Jedes Drachenviereck besitzt (mindestens) eine Symmetrieachse.

**Beweis:** In einem Drachenviereck  $ABCD$  sei  
 $\overline{AB} = \overline{AD}$   
 und  
 $\overline{BC} = \overline{DC}$ .

Die Mittelsenkrechte der Strecke  $\overline{BD}$  geht dann sowohl durch  $A$  als auch durch  $C$ . Demnach ist die Diagonale  $\overline{AC}$  des Drachenvierecks gemeinsame Symmetrieachse der beiden gleichschenkligen Teildreiecke und damit Symmetrieachse des Drachenvierecks.

Diagonale (↗ 207) ► **SATZ 64:** Die Diagonalen eines Drachenvierecks stehen senkrecht aufeinander.

**Beweis:** Ein Drachenviereck  $ABCD$  habe die Symmetrieachse  $AC$ . Bei der Spiegelung an dieser Geraden entsprechen die Punkte  $B$  und  $D$  einander. Die Gerade  $BD$  steht demnach senkrecht auf der Geraden  $AC$ .

► **SATZ 65:** In jedem Drachenviereck gibt es ein Paar gegenüberliegender Winkel, die kongruent sind.

**Beweis:** Ein Drachenviereck  $ABCD$  habe die Symmetrieachse  $AC$ . Bei der Spiegelung an  $AC$  entsprechen die gegenüberliegenden Winkel  $ABC$  und  $ADC$  einander. Folglich sind sie kongruent.



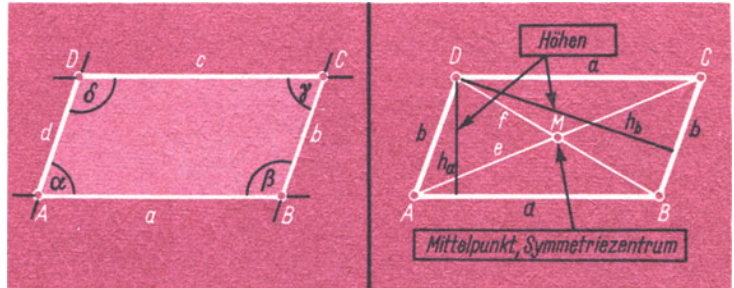
## 11. VIERECKE

**Rhombus**  
(↗ 251)

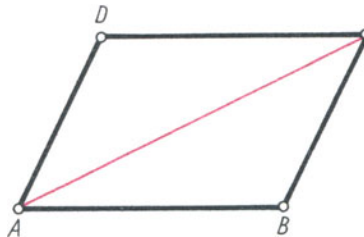
Ein **Rhombus** ist ein Drachenviereck mit vier kongruenten Seiten.

**Parallelogramme**

▶ **DEFINITION 66:** Ein Trapez mit zwei Paaren paralleler Seiten heißt ein **Parallelogramm**.



▶ **SATZ 67:** In jedem **Parallelogramm** sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.



**Beweis:** Ist  $ABCD$  ein Parallelogramm, so gilt  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$  (wsw)  
Daraus folgt  $\overline{AB} = \overline{CD}$  und  $\overline{BC} = \overline{DA}$ .

▶ **SATZ 68:** Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind, so ist das Viereck ein **Parallelogramm**.

**Beweis:** In einem Viereck  $ABCD$  gelte  $\overline{AB} = \overline{DC}$  und  $\overline{BC} = \overline{AD}$ . Daraus folgt  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$  und daher  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ , d. h., daß die Seiten  $\overline{BC}$  und  $\overline{AD}$  des Vierecks parallel sind. Entsprechend ergibt sich die Parallelität der Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{DC}$ . Das Viereck  $ABCD$  ist also ein Parallelogramm.

**Diagonalen** (↗ 201)

▶ **SATZ 69:** Die **Diagonalen** eines **Parallelogramms** halbieren einander.

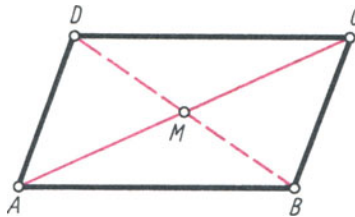
Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms wird **Mittelpunkt** des Parallelogramms genannt.

**Symmetrie** (↗ 221)

▶ **SATZ 70:** Jedes **Parallelogramm** ist **punktsymmetrisch**.

**Beweis:** Bei der Spiegelung am Mittelpunkt  $M$  eines Parallelogramms  $ABCD$  ist  $C$  das Bild von  $A$ ,  $D$  das Bild von  $B$ ,  $A$  das Bild von  $C$  und  $B$  das Bild von  $D$ . Das Parallelogramm wird also auf sich selbst abgebildet und ist demnach punktsymmetrisch.

- ▶ **SATZ 71:** Wenn ein Viereck punktsymmetrisch ist, so ist es ein Parallelogramm.



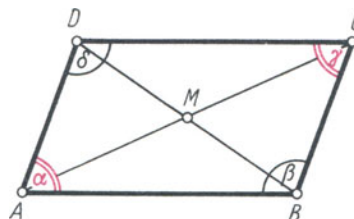
**Beweis:** Ein Viereck  $ABCD$  sei punktsymmetrisch bezüglich eines Punktes  $M$ . Es seien einerseits  $A$  und  $C$  und andererseits  $B$  und  $D$  einander entsprechende Punkte bei der Punktspiegelung an  $M$ . Da dann die Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  bzw.  $\overline{AD}$  und  $\overline{CB}$  einander entsprechen, sind sie jeweils gleich lang. Nach Satz D 68 folgt, daß das Viereck ein Parallelogramm ist.

- ▶ **SATZ 72:** Wenn in einem Viereck die Diagonalen einander halbieren, so ist dieses Viereck ein Parallelogramm.

**Beweis:** Der Diagonalschnittpunkt  $M$  eines solchen Vierecks  $ABCD$  ist Zentrum einer Punktspiegelung, bei der sich  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $D$  entsprechen. Daher ist  $ABCD$  punktsymmetrisch, also nach Satz D 71 ein Parallelogramm.

- ▶ **SATZ 73:** In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich groß und benachbarte Winkel Supplementwinkel ( $\sphericalangle$  229).

**Beweis:** Bei der Spiegelung am Mittelpunkt  $M$  eines Parallelogramms entsprechen gegenüberliegende Winkel ein-



ander. Sie sind folglich kongruent. Daß benachbarte Winkel Supplementwinkel sind, folgt daraus, daß sie entgegengesetzt liegende Winkel mit parallelen Schenkeln sind.

- ▶ **SATZ 74:** Wenn in einem Viereck gegenüberliegende Winkel jeweils gleich groß sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

**Beweis:** In einem Viereck  $ABCD$  gelte  $\alpha = \gamma$  und  $\beta = \delta$ . Da die Summe der Winkel  $360^\circ$  beträgt, gilt  $\alpha + \beta = 180^\circ$  und  $\alpha + \delta = 180^\circ$ . Da weiter  $\alpha$  und  $\beta$  entgegengesetzt liegende Winkel bezüglich der Geraden  $AD$  und  $BC$  sind, müssen die Geraden  $AD$  und  $BC$  parallel sein. Entsprechend sind die Geraden  $AB$  und  $DC$  parallel. Das Viereck ist also ein Parallelogramm.

**Rechtecke**

- ▶ **DEFINITION 75:** Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel heißt ein Rechteck.

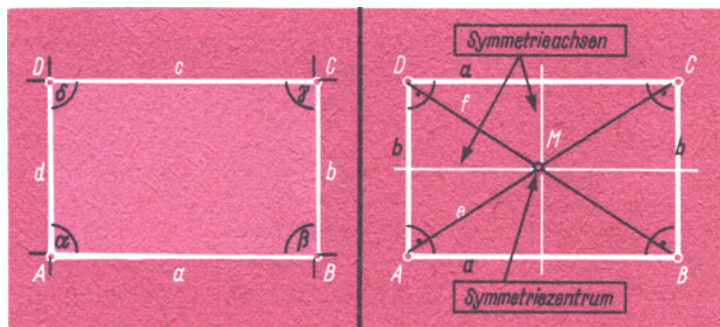
Aus dem Satz D 73 folgt:

Alle Winkel eines Rechtecks sind rechte Winkel.

Winkel, Diagonalen  
(↗ 201)

- ▶ **SATZ 76:** In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.

**Beweis:** Im Rechteck  $ABCD$  sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DAB$  kongruent. Daraus folgt  $\overline{AC} = \overline{DB}$ .



- ▶ **SATZ 77:** Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, so ist das Parallelogramm ein Rechteck.

**Beweis:** In einem Parallelogramm  $ABCD$  seien die Strecken  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  gleich lang. Dann sind die Dreiecke  $ABC$  und



## 11. VIERECKE

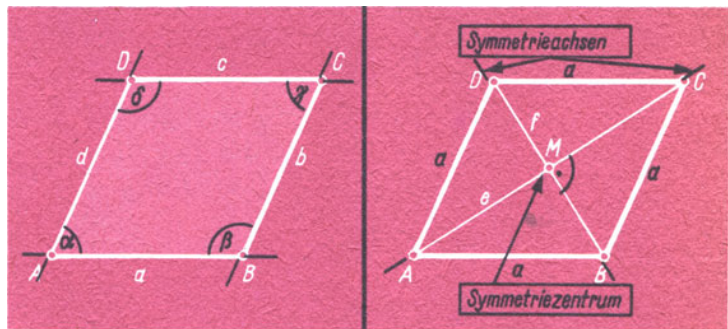
$\triangle DAB$  kongruent. Daraus folgt  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$ . Da diese Winkel Supplementwinkel sind, ist jeder ein Rechter. Also ist das Parallelogramm ein Rechteck.

Symmetrieverhältnisse  
(↗ 221)

Jedes Rechteck ist als Parallelogramm punktsymmetrisch. Außerdem besitzt es zwei Symmetrieachsen, die jeweils durch die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten gehen (Bild Seite 250).

Rhomben

► **DEFINITION 78:** Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind, heißt Rhombus.



Diagonalen (↗ 201)

► **SATZ 79:** In jedem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Der **Beweis** ergibt sich daraus, daß jeder Rhombus ein Drachenviereck ist.

► **SATZ 80:** Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, so ist das Parallelogramm ein Rhombus.

Symmetrieverhältnisse  
(↗ 221)

Jeder Rhombus ist als Parallelogramm punktsymmetrisch. Außerdem sind seine Diagonalen Symmetrieachsen.

Quadrate

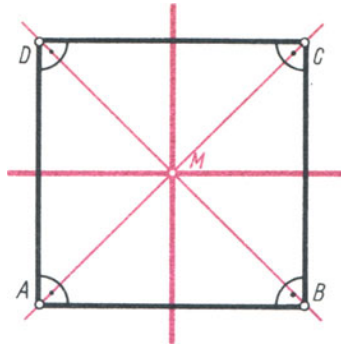
► **DEFINITION 81:** Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel und vier gleich langen Seiten heißt ein Quadrat (Bild Seite 252).

Ein Quadrat ist also sowohl ein Rechteck als auch ein Rhombus.

D

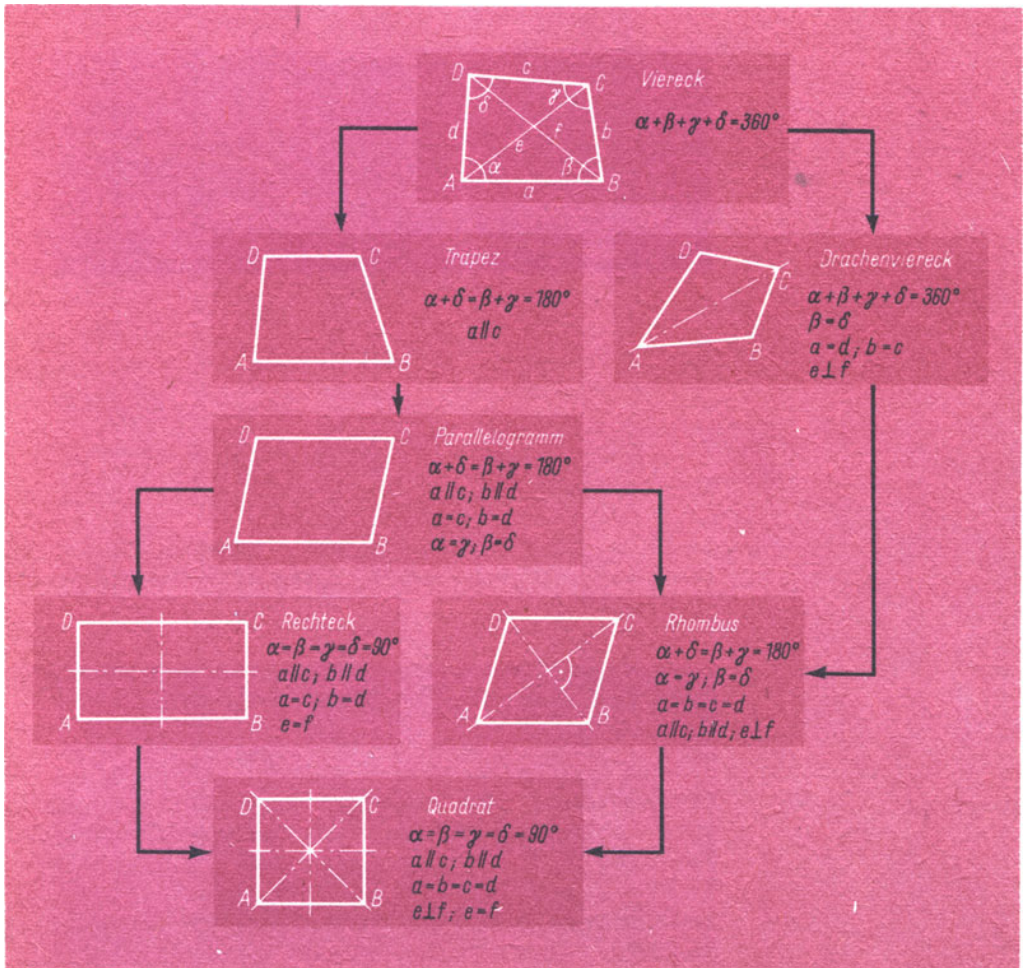
# 11. VIERECKE

Symmetrieverhältnisse  
(/ 221)



Ein Quadrat ist punktsymmetrisch, und es besitzt vier Symmetrieachsen, und zwar die Diagonalen und die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.

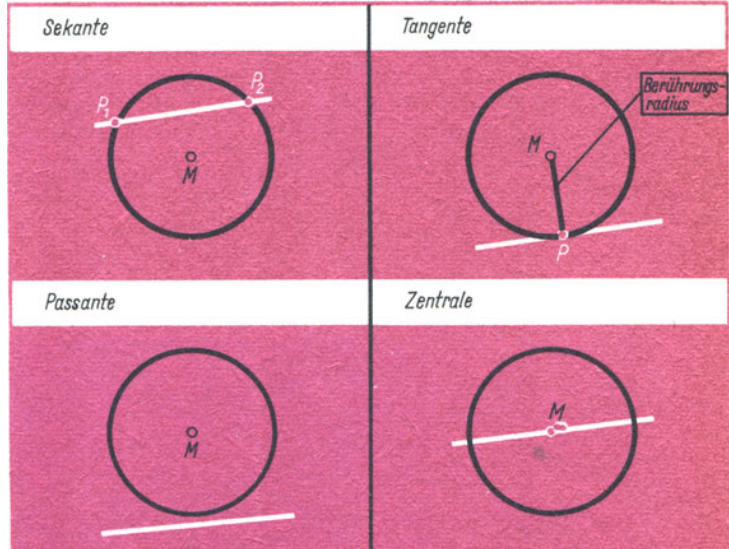
## Übersicht über die Arten der Vierecke



## 12. KREISE

### Kreis und Gerade

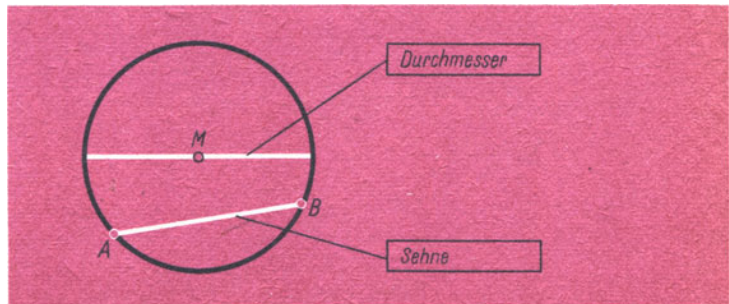
**DEFINITION 82:** Eine Gerade heißt **Sekante**, **Tangente** bzw. **Passante** eines Kreises je nachdem, ob sie mit dem Kreis zwei Punkte, genau einen Punkt bzw. keinen Punkt gemeinsam hat. Eine Sekante, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, nennen wir eine **Zentrale** ( $\nearrow$  259).



Ein Radius, der den Berührungspunkt einer Tangente mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, heißt **Berührungsradius** der Tangente.

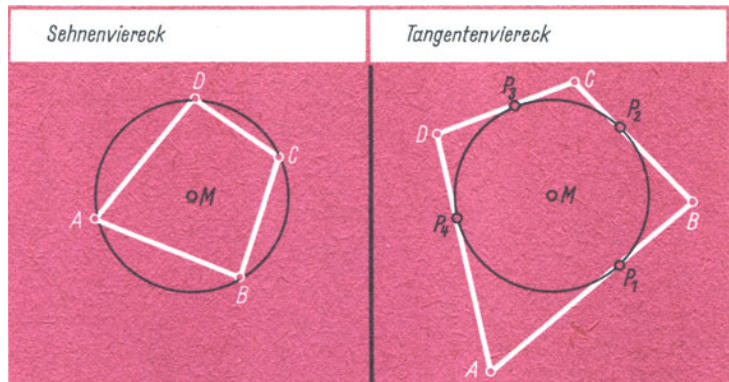
### Kreis und Strecke

**DEFINITION 83:** Eine Strecke, die zwei Punkte eines Kreises verbindet, heißt **Sehne** dieses Kreises (Bild unten). Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, heißt **Durchmesser** des Kreises. Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen (Tangenten) eines Kreises sind, heißt ein **Sehnenviereck** (Tangentenviereck) des Kreises (Bild Seite 254).



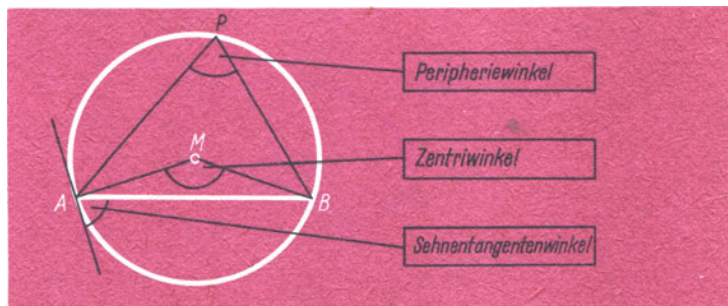
D





Kreis und Winkel

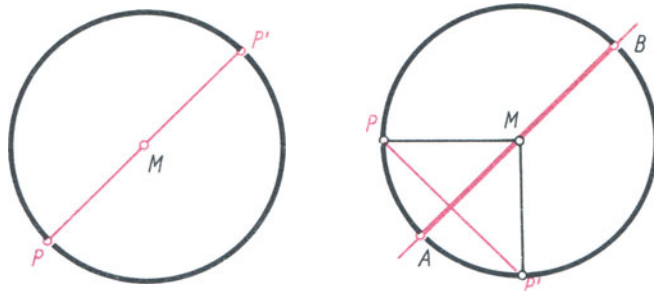
DEFINITION 84:



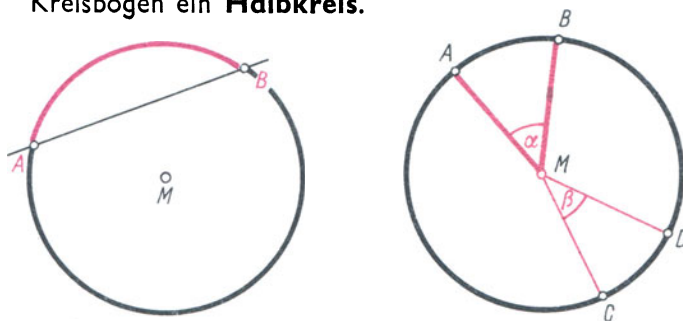
1. Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt eines Kreises liegt, heißt **Zentriwinkel** dieses Kreises.
2. Ein Winkel, dessen Scheitel Punkt eines Kreises ist und dessen Schenkel den Kreis schneiden, heißt **Peripheriewinkel**.
3. Ein Winkel, dessen Scheitel Punkt eines Kreises ist, dessen einer Schenkel den Kreis schneidet und dessen anderer Schenkel auf einer Tangente des Kreises liegt, heißt **Sehnenfangentenwinkel**.

Symmetrie eines Kreises (↗ 221)

**SATZ 85:** Jeder Kreis ist punktsymmetrisch (Bild Seite 255). Außerdem ist jede Zentrale eines Kreises Symmetrieachse des Kreises. Ein Kreis wird bei jeder beliebigen Drehung um seinen Mittelpunkt auf sich selbst abgebildet.

**Kreisbögen**

Wird ein Kreis von einer Geraden in den Punkten  $A$  und  $B$  geschnitten, so wird der Kreis in zwei Teile zerlegt, die wir **Kreisbögen** nennen (Bild unten links). Jeden der beiden Kreisbögen bezeichnet man mit  $\widehat{AB}$ . Aus dem jeweiligen Zusammenhang ist ersichtlich, welcher von beiden gemeint ist. Geht die Gerade durch den Mittelpunkt, so ist jeder Kreisbogen ein **Halbkreis**.



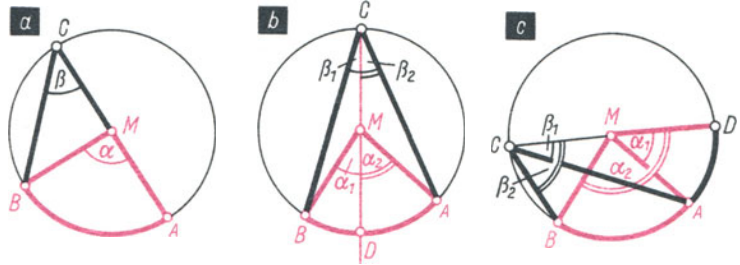
► **SATZ 86:** Zwei Kreisbögen  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{CD}$  eines Kreises um  $M$  sind kongruent genau dann, wenn die zugehörigen Zentriwinkel  $AMB$  und  $CMD$  kongruent sind (Bild rechts).

*Beweis:*

- a)  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{CD}$  seien kongruente Bögen eines Kreises um  $M$ . Dann gibt es eine Bewegung, bei der sie einander entsprechen. Da bei dieser Bewegung nur der Punkt  $M$  auf sich selbst abgebildet wird, ist dies eine Drehung. Daraus ergibt sich, daß die Zentriwinkel  $AMB$  und  $CMD$  kongruent sind.
- b)  $A, B, C, D$  seien Punkte eines Kreises um  $M$ . Die Zentriwinkel  $AMB$  und  $CMD$  seien kongruent. Dann gibt es eine Drehung um  $M$ , bei der die Bögen  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{CD}$  einander entsprechen, da ein Kreis bei einer Drehung um seinen Mittelpunkt auf sich selbst abgebildet wird. Daraus folgt, daß sie kongruent sind.

**Peripherie- und Zentriwinkel**

► **SATZ 87: Jeder Zentriwinkel ist doppelt so groß wie ein Peripheriewinkel über demselben Bogen.**



**Beweis:** Zu einem Bogen  $\widehat{AB}$  eines Kreises um  $M$  gehöre der Zentriwinkel  $\alpha$  und ein Peripheriewinkel  $\beta$  mit dem Scheitel  $C$ .

a) Der Mittelpunkt  $M$  des Kreises liege auf  $\overline{AC}$ . Da  $\alpha$  Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck  $BMC$  ist, gilt  $\alpha = 2\beta$  ( $\beta$  ist Basiswinkel).

b) Der Mittelpunkt  $M$  liege im Innern von  $\beta$ . Die Gerade  $CM$  schneide  $\widehat{AB}$  in  $D$ .

Es gilt nach Fall a):

$$\alpha_1 = 2\beta_1 \text{ und } \alpha_2 = 2\beta_2.$$

Wegen  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  und  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  folgt  $\alpha = 2\beta$ .

c) Der Mittelpunkt  $M$  liege außerhalb von  $\beta$ . Die Gerade  $CM$  schneide den Kreis in  $D$ .

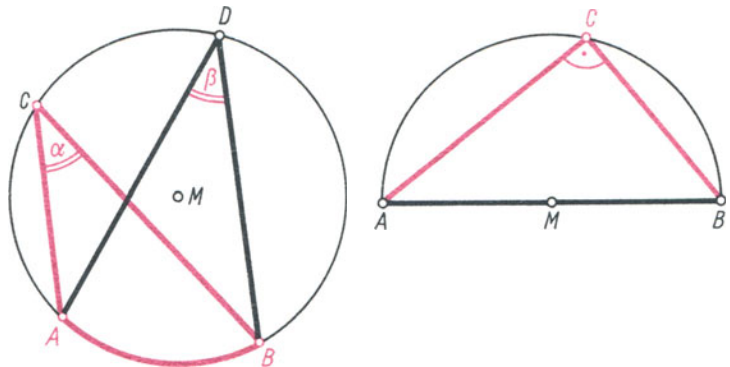
Es gilt nach Fall a):

$$\alpha_1 = 2\beta_1 \text{ und } \alpha_2 = 2\beta_2.$$

Wegen  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  und  $\beta = \beta_2 - \beta_1$  folgt  $\alpha = 2\beta$ .

Dieser Satz wurde hier nur für Zentriwinkel bewiesen, die kleiner als  $180^\circ$  sind. Er gilt jedoch für beliebige Zentriwinkel.

► **SATZ 88: Zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen sind kongruent (Bild links).**



Ein Beweis ergibt sich daraus, daß jeder der beiden Peripheriewinkel über demselben Bogen halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel ist.

Thales

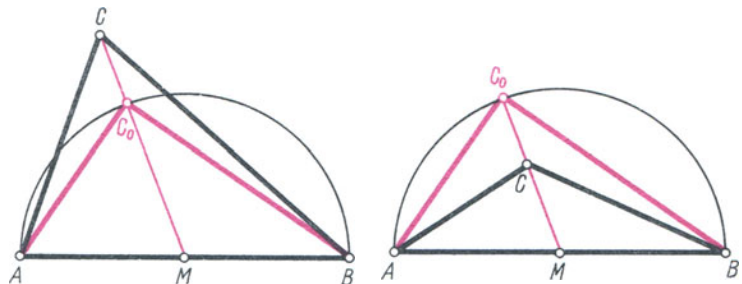
- ▶ **SATZ des THALES (89): Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser ist ein rechter Winkel.**

**Beweis:** Da der Zentriwinkel ein gestreckter Winkel ist, muß jeder zugehörige Peripheriewinkel halb so groß sein. Er ist also ein rechter Winkel.

- ▶ **Umkehrung des Satzes von THALES (90): Der Scheitel  $C$  des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  liegt auf dem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.**

**Beweis:**  $C$  sei der Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  und  $M$  sei Mittelpunkt von  $\overline{AB}$ . Wir nehmen an, daß  $C$  nicht auf dem Kreis um  $M$  mit dem Radius  $\overline{MA}$  liegt. Dann liegt  $C$  entweder außerhalb oder innerhalb dieses Kreises.

a)  $C$  liege außerhalb des Kreises (Bild links). Dann schneidet die Gerade  $CM$  den Kreis in einem Punkt  $C_0$ . Der Winkel  $AC_0B$  ist dann ein rechter Winkel. Da der Winkel  $ACM$  kleiner als der Außenwinkel  $AC_0M$  des Dreiecks  $AC_0C$  und entsprechend der Winkel  $BCM$  kleiner als der Winkel  $BC_0M$  ist, ergibt sich, daß der Winkel  $ACB$  kleiner als ein rechter Winkel ist. Das ergibt einen Widerspruch zur Voraussetzung. Dieser Fall ist demnach nicht möglich.



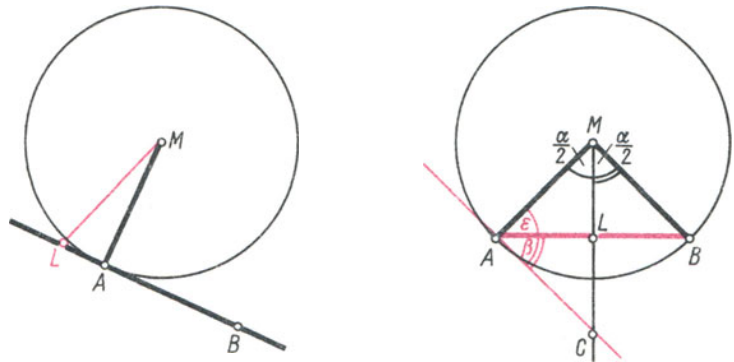
b)  $C$  liege innerhalb des Kreises (Bild rechts). Die Gerade  $MC$  schneidet dann den Kreis in einem Punkt  $C_0$ . Entsprechend wie bei a) ergibt sich, daß der Winkel  $ACB$  größer als der Winkel  $AC_0B$  und damit größer als ein rechter Winkel ist. Auch dieser Fall ist nicht möglich. Aus a) und b) folgt, daß  $C$  auf dem Kreis um  $M$  mit dem Radius  $\overline{MA}$  liegt.



**Tangenten**  
(↗ 253)

- ▶ **SATZ 91: Tangente und Berührungsradius eines Kreises stehen senkrecht aufeinander.**

**Beweis:**  $\overline{MA}$  sei Radius eines Kreises um  $M$ , und die Gerade  $AB$  sei Tangente in  $A$  an den Kreis. Angenommen, die Gerade  $MA$  stünde nicht senkrecht auf  $AB$  (Bild links). Dann gäbe es von  $M$  ein Lot auf  $AB$ , dessen Fußpunkt  $L$  von  $A$  verschieden wäre. Bei der Spiegelung an  $ML$  müßte das Bild  $A'$  des Punktes  $A$  sowohl auf dem Kreis als auch auf der Geraden  $AB$  liegen. Das ist nicht möglich, da die Tangente mit dem Kreis nur den Punkt  $A$  gemeinsam hat. Folglich steht die Gerade  $MA$  senkrecht auf der Tangente  $AB$ .



**Zentri- und Sehnentangentenwinkel**  
(↗ 254)

Der Zentriwinkel  $AMB$  und der Sehnentangentenwinkel  $BAC$  (Bild rechts) heißen einander zugehörig, wenn der Kreisbogen  $\widehat{AB}$  im Innern des Sehnentangentenwinkels liegt.

- ▶ **SATZ 92: Ein Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der zugehörige Sehnentangentenwinkel.**

**Beweis:** Nach Satz D 91 gilt

$$\epsilon + \beta = 90^\circ$$

Im Dreieck  $ALM$  gilt andererseits

$$\epsilon + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ.$$

Folglich ist  $\frac{\alpha}{2} = \beta$ .

**Peripheriewinkel und Sehnentangentenwinkel**  
(↗ 254)

Wenn der Winkel  $ACB$  ein Peripheriewinkel mit dem zugehörigen Bogen  $\widehat{AB}$  ist, so nennen wir den Sehnentangentenwinkel, in dessen Innerem der Bogen  $\widehat{AB}$  liegt, dem Peripheriewinkel zugehörig und umgekehrt.

- ▶ **SATZ 93: Jeder Peripheriewinkel und der zugehörige Sehnentangentenwinkel sind gleich groß.**

Beweis: Es gilt (Bild links):

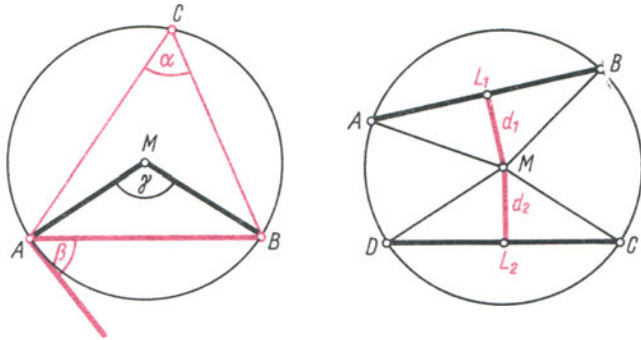
$$\gamma = 2\alpha \text{ (Satz D 87)}$$

und

$$\gamma = 2\beta \text{ (Satz D 92).}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \beta$$



Sehnen (↗ 253)

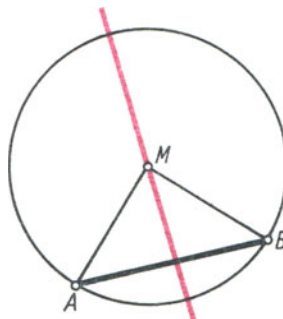
► **SATZ 94: Zwei Sehnen eines Kreises haben vom Mittelpunkt des Kreises gleichen Abstand genau dann, wenn sie gleich lang sind.**

Beweis:

a) Zwei Sehnen  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  eines Kreises um  $M$  seien gleich lang (Bild rechts). Sind  $d_1$  und  $d_2$  die Abstände des Mittelpunktes  $M$  von  $AB$  bzw.  $CD$ , so folgt aus der Kongruenz der gleichschenkligen Dreiecke  $ABM$  und  $CDM$  die Beziehung:  $d_1 = d_2$ .

b) Die Abstände  $d_1$  und  $d_2$  des Mittelpunktes  $M$  eines Kreises von zwei Sehnen  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  seien gleich.  $L_1$  und  $L_2$  seien die Fußpunkte der Lote von  $M$  auf  $AB$  bzw.  $CD$ . Dann gilt sowohl  $\triangle AL_1M \cong \triangle DL_2M$  als auch  $\triangle BL_1M \cong \triangle CL_2M$ . Daraus ergibt sich die Kongruenz der Sehnen  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ .

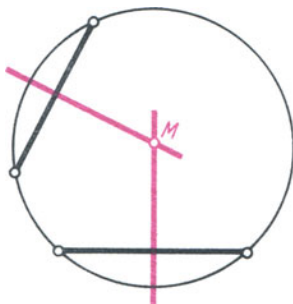
► **SATZ 95: Die Mittelsenkrechte einer Sehne ist Zentrale des Kreises (↗ 253).**



Beweis:  $\overline{AB}$  sei eine Sehne eines Kreises um  $M$ . Die Mittelsenkrechte (↗ 222) auf  $\overline{AB}$  ist Symmetrieachse des Dreiecks  $ABM$  und geht daher durch die Spitze  $M$ . Folglich ist die Mittelsenkrechte Zentrale des Kreises.

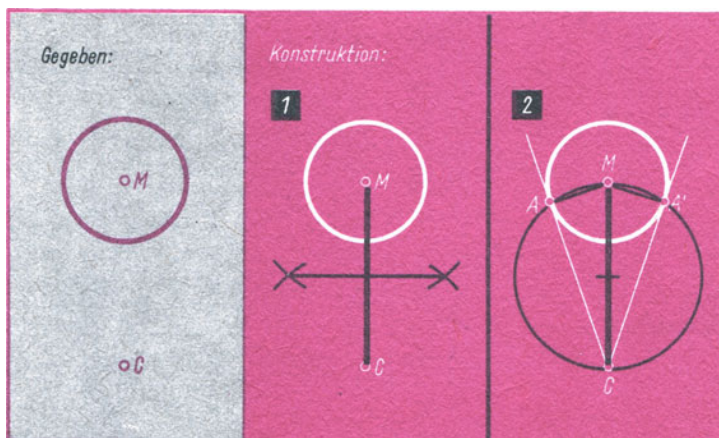
## 12. KREISE

**Bemerkung:** Aus diesem Satz ergibt sich die Konstruktion des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises. Zur Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises werden zwei beliebige Sehnen eingezeichnet. Auf ihnen werden die Mittelsenkrechten konstruiert. Deren Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises



Tangenten  
an einen Kreis

► **SATZ 96:** Von einem beliebigen Punkt  $C$  außerhalb eines Kreises gibt es genau zwei Tangenten an den Kreis.

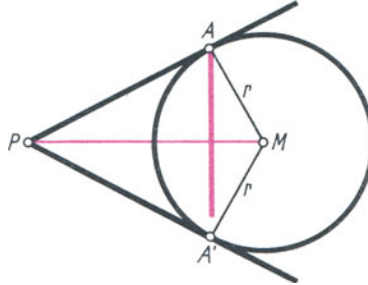


**Beweis:** Gegeben sei ein Kreis um  $M$  und ein Punkt  $C$  außerhalb des Kreises. Der Kreis um den Mittelpunkt der Strecke  $\overline{MC}$  schneidet den gegebenen Kreis in genau zwei Punkten  $A$  und  $A'$ , die die Berührungspunkte der Tangenten sind, denn die Winkel  $CAM$  und  $CA'M$  sind nach dem Satz des *Thales* rechte Winkel.

Ist  $A$  der Berührungspunkt einer Tangente von einem Punkt  $P$  an einen Kreis, so heißt die Strecke  $PA$  der **Tangentenabschnitt** dieser Tangente.

Tangentenabschnitt

- ▶ **SATZ 97:** Die beiden Tangenten von einem Punkt  $P$  an einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  liegen zur Geraden  $MP$  axial-symmetrisch.



**Beweis:** Die Berührungspunkte der beiden Tangenten von einem Punkt  $P$  außerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  seien  $A$  und  $A'$ . Da die Dreiecke  $M\overline{AP}$  und  $M\overline{A'P}$  kongruent sind, sind auch die Winkel  $M\overline{PA}$  und  $M\overline{PA'}$  kongruent. Die Gerade  $MP$  ist demnach Winkelhalbierende des Winkels  $A\overline{PA'}$  und damit seine Symmetrieachse. Folglich liegen die Geraden  $PA$  und  $PA'$  bezüglich der Geraden  $MP$  spiegelbildlich.

- ▶ **SATZ 98:** Wenn  $A$  und  $A'$  die Berührungspunkte der beiden Tangenten von einem Punkt  $P$  an einen Kreis um  $M$  sind, so ist die Gerade  $MP$  Symmetrieachse der Strecke  $\overline{AA'}$ . Die Strecken  $\overline{AP}$  und  $\overline{A'P}$  sind kongruent.

Ein Beweis kann unter Verwendung des Satzes D 97 erfolgen.

**Zwei Kreise  
Gegenseitige Lage**

<p><i>Konzentrische Kreise</i></p> <p>Beide Kreise haben einen gemeinsamen Mittelpunkt Es gilt: <math>r_2 &lt; r_1</math> und <math>M_2 = M_1</math></p>	
<p><i>Exzentrische Kreise</i></p> <p>Ein Kreis liegt ganz im Innern des anderen. Die Mittelpunkte sind verschieden. Es gilt <math>M_1 M_2 &lt; r_1 - r_2</math></p>	



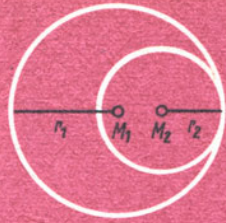


## 12. KREISE

Ein Kreis berührt den anderen Kreis von innen.

Es gilt:

$$\overline{M_1 M_2} = r_1 - r_2.$$

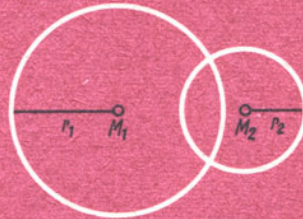


$$\overline{M_1 M_2} = r_1 - r_2$$

Zwei Kreise schneiden einander.

Es gilt:

$$r_1 - r_2 < \overline{M_1 M_2} < r_1 + r_2.$$

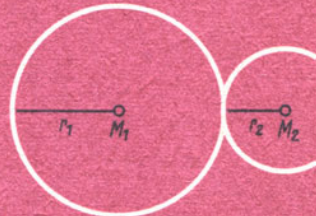


$$\overline{M_1 M_2} < r_1 + r_2$$

Ein Kreis berührt den anderen von außen.

Es gilt:

$$\overline{M_1 M_2} = r_1 + r_2.$$

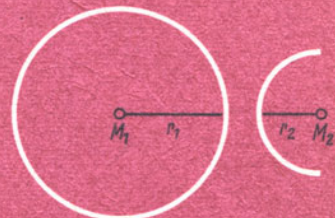


$$\overline{M_1 M_2} = r_1 + r_2$$

Zwei Kreise haben keinen gemeinsamen Punkt.

Es gilt:

$$\overline{M_1 M_2} > r_1 + r_2.$$

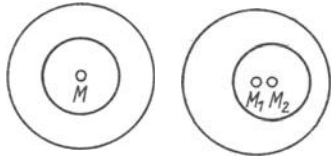
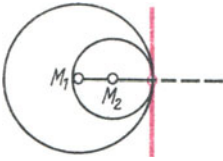
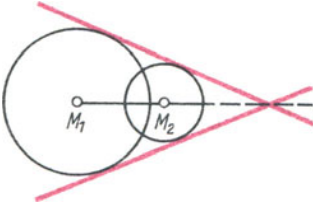
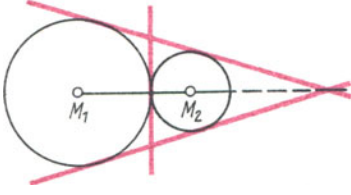
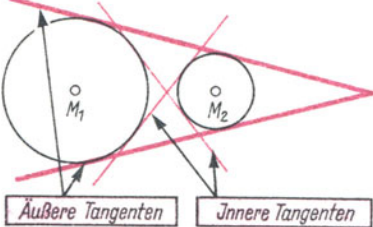


$$\overline{M_1 M_2} > r_1 + r_2$$

## 12. KREISE

Gemeinsame Tangenten  
(/ 253)

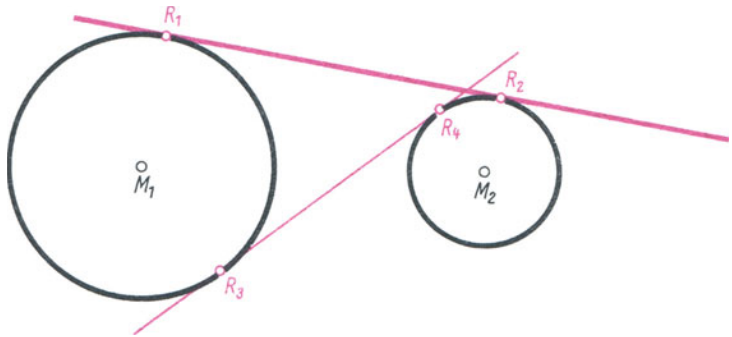
**DEFINITION 99:** Eine Gerade  $t$  heißt **gemeinsame innere Tangente** zweier Kreise mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  genau dann, wenn sie Tangente beider Kreise ist und die Strecke  $\overline{M_1M_2}$  zwischen  $M_1$  und  $M_2$  schneidet. Eine Gerade  $t$  heißt **gemeinsame äußere Tangente** zweier Kreise mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  genau dann, wenn sie Tangente beider Kreise ist und die Gerade  $\overline{M_1M_2}$  nicht zwischen den Punkten  $M_1$  und  $M_2$  schneidet.

	<p>Konzentrische und exzentrische Kreise haben keine gemeinsamen Tangenten.</p>
	<p>Zwei Kreise, die sich von innen berühren, haben genau eine gemeinsame äußere Tangente in ihrem Berührungspunkt.</p>
	<p>Zwei Kreise, die sich schneiden, haben genau zwei gemeinsame äußere Tangenten, die axial-symmetrisch bezüglich der gemeinsamen Zentralen (/ 253) liegen.</p>
	<p>Zwei Kreise, die sich von außen berühren, haben eine und nur eine gemeinsame innere Tangente (im Berührungspunkt) und zwei gemeinsame äußere Tangenten.</p>
	<p>Zwei Kreise ohne gemeinsame Punkte haben genau zwei gemeinsame innere und zwei gemeinsame äußere Tangenten, wenn die Kreisflächen keine gemeinsamen Punkte besitzen.</p>

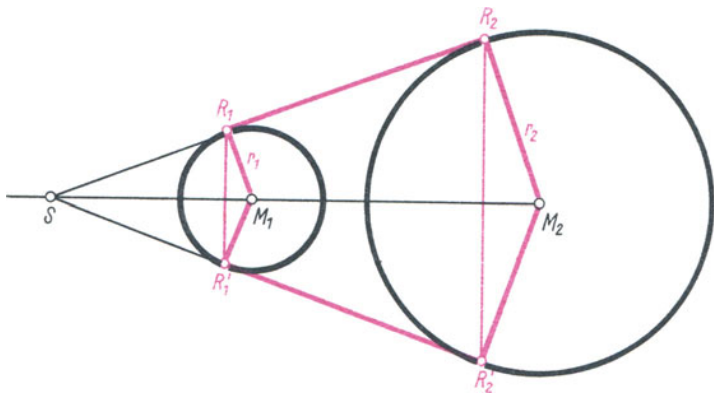
D

**Tangentenabschnitte**

Die durch die Berührungspunkte  $R_1$  und  $R_2$  einer gemeinsamen Tangente an zwei Kreise gebildete Strecke  $\overline{R_1R_2}$  heißt **Tangentenabschnitt** dieser Tangente.



► **SATZ 100:** Wenn zwei Kreise zwei gemeinsame äußere (innere) Tangenten besitzen, so sind die Tangentenabschnitte kongruent.



**Beweis:**

a)  $r_1 \neq r_2$ . Nach Satz D 98 ( $\sphericalangle$  261) gilt

$$\overline{SR_2} = \overline{SR_2'} \text{ und } \overline{SR_1} = \overline{SR_1'}$$

Durch Subtraktion erhält man:

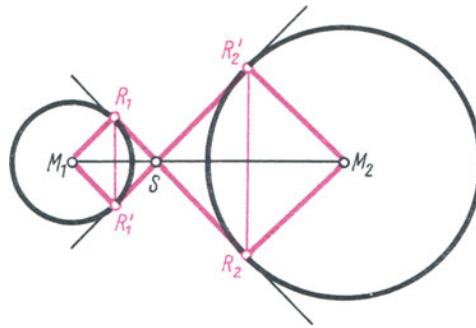
$$\overline{SR_2} - \overline{SR_1} = \overline{SR_2'} - \overline{SR_1'}, \text{ also}$$

$$\overline{R_1R_2} = \overline{R_1'R_2'}$$

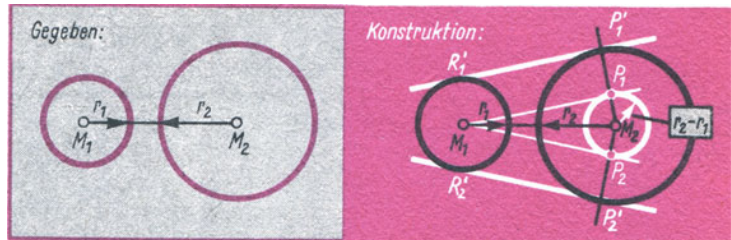
b)  $r_1 = r_2$ . In diesem Fall existiert kein Schnittpunkt S der Tangenten. Die Behauptung  $\overline{R_1R_2} = \overline{R_1'R_2'}$  folgt jetzt daraus, daß  $R_1R_1'R_2'R_2$  ein Rechteck ist, da die Berührungsradien auf den parallelen Tangenten jeweils senkrecht stehen.

Der Beweis für Tangentenabschnitte auf inneren Tangenten ergibt sich entsprechend durch Addition der Teilabschnitte (Bild Seite 265 oben).

## 12. KREISE



### Konstruktion der gemeinsamen äußeren Tangenten

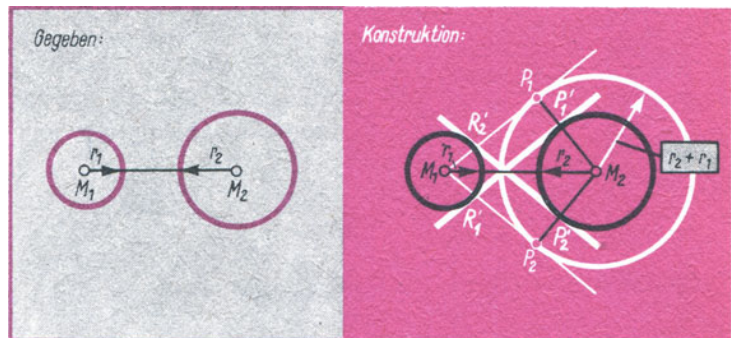


### Beschreibung:

- (1) Wir zeichnen um den Mittelpunkt  $M_2$  des Kreises mit dem größeren Radius einen Kreis mit dem Radius  $r_2 - r_1$ .
- (2) Wir konstruieren nun die beiden Tangenten von  $M_1$  an den Kreis mit dem Radius  $r_2 - r_1$  ( $\sphericalangle 260$ ).
- (3) a) Der Strahl  $M_2P_1$  schneide den Kreis mit dem Radius  $r_2$  in  $P_1'$ . Eine gemeinsame äußere Tangente ist das Bild  $R_1P_1'$  der Geraden  $M_1P_1$  bei der Verschiebung  $\vec{P_1P_1'}$ .  
 (b) Entsprechend erhält man die zweite Tangente.

**Bemerkung:** Sind die Radien beider Kreise gleich lang, so sind die beiden Parallelen zur Zentralen  $M_1M_2$  im Abstand  $r$  die beiden gemeinsamen äußeren Tangenten.

### Konstruktion der gemeinsamen inneren Tangenten



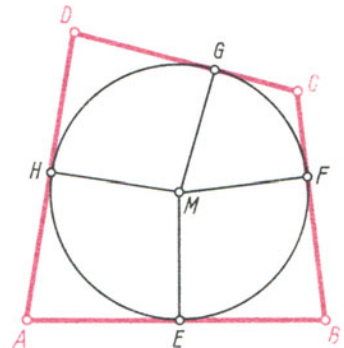
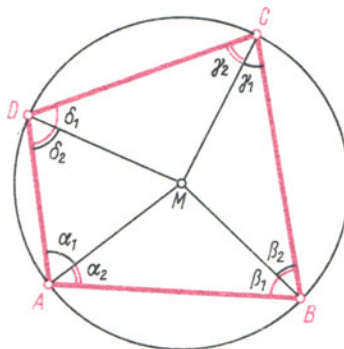
Beschreibung (Bild Seite 265 unten):

- (1) Wir zeichnen um den Mittelpunkt  $M_2$  des größeren Kreises einen Kreis mit dem Radius  $r_1 + r_2$ .
- (2) Die Berührungspunkte der beiden Tangenten von  $M_1$  an den Kreis mit dem Radius  $r_1 + r_2$  seien  $P_1$  und  $P_2$ .
- (3) a) Der Strahl  $M_2P_1$  schneidet den Kreis mit dem Radius  $r_2$  in  $P_1'$ . Eine gemeinsame innere Tangente ist das Bild  $R_1'P_1'$  der Geraden  $M_1P_1$  bei der Verschiebung  $\overrightarrow{P_1P_1'}$ .  
b) Entsprechend erhält man die zweite Tangente.

**Sehnenvierecke**  
(↗ 253)

► **SATZ 101:** In jedem konvexen Sehnenviereck sind die gegenüberliegenden Winkel Supplementwinkel.

Beweis:  $ABCD$  sei ein Sehnenviereck, mit dem Umkreismittelpunkt  $M$  (Bild links). Werden die Eckpunkte mit  $M$  verbunden, so ergeben sich vier gleichschenklige Dreiecke. Aus der Kongruenz der jeweiligen Basiswinkel und aus dem Satz über die Winkel eines Vierecks (↗ 245) folgt, daß gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind.



**Tangentenvierecke**  
(↗ 253)

► **SATZ 102:** In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten jeweils gleich groß.

Beweis: Es gilt (Bild rechts):

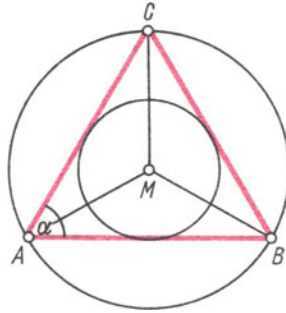
$$\begin{aligned}
 \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} \\
 &= \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH} \quad (\text{↗ 261, Satz 98}) \\
 &= \overline{AH} + \overline{DH} + \overline{BF} + \overline{CF} \\
 &= \overline{AD} + \overline{BC}
 \end{aligned}$$

**Regelmäßige Vielecke**

Ein konvexes Vieleck mit  $n$  kongruenten Seiten und paarweise kongruenten Innenwinkeln heißt ein **regelmäßiges  $n$ -Eck**.

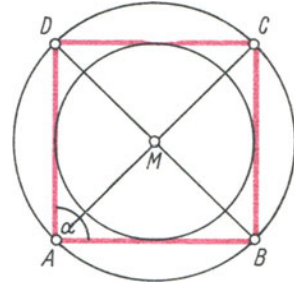
► **SATZ 103:** Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen  $n$ -Ecks hat eine Größe von

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$



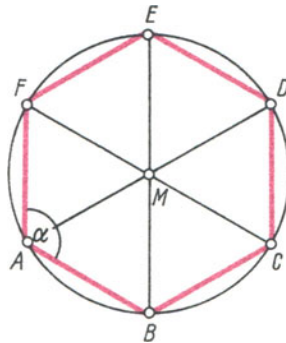
$$n = 3 \quad \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$



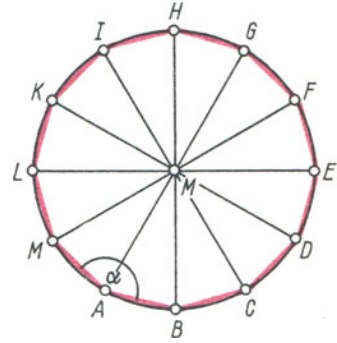
$$n = 4 \quad \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{4}$$

$$\alpha = 90^\circ$$



$$n = 6 \quad \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6}$$

$$\alpha = 120^\circ$$



$$n = 12 \quad \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{12}$$

$$\alpha = 150^\circ$$

► **SATZ 104:** Jedem regelmäßigen  $n$ -Eck läßt sich ein Kreis umschreiben.

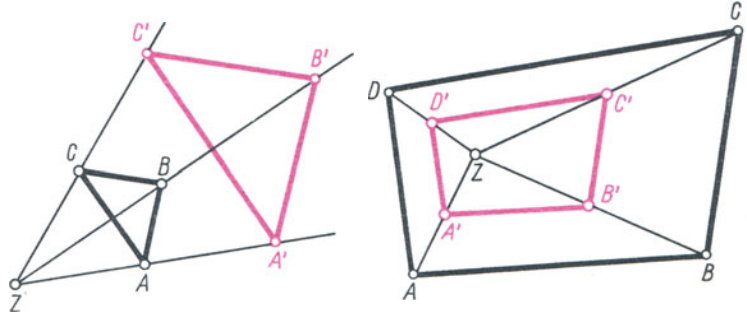
► **SATZ 105:** Jedem regelmäßigen  $n$ -Eck läßt sich ein Kreis einbeschreiben.



# 13. ÄHNLICHKEIT

## Vergrößerungen

- Ein Punkt  $Z$  werde mit den Eckpunkten eines Dreiecks  $ABC$  verbunden (Bild links). Wir verdoppeln die Strecken  $\overline{ZA}$ ,  $\overline{ZB}$ ,  $\overline{ZC}$  und erhalten die Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ . Das Dreieck  $A'B'C'$  wird als eine Vergrößerung des Dreiecks  $ABC$  bezeichnet.

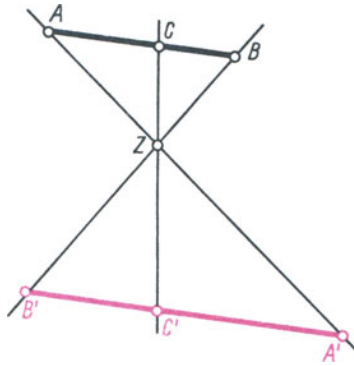


## Verkleinerungen

- Ein Punkt  $Z$  werde mit den Eckpunkten eines Vierecks  $ABCD$  verbunden (Bild rechts). Wir halbieren die Strecken  $\overline{ZA}$ ,  $\overline{ZB}$ ,  $\overline{ZC}$ ,  $\overline{ZD}$  und erhalten die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  und  $D'$ . Das Viereck  $A'B'C'D'$  wird als eine Verkleinerung des Vierecks  $ABCD$  bezeichnet.

## Zentrale Streckung

Vergrößerungen und Verkleinerungen, bei denen sich die Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten in einem Punkt schneiden, sind Beispiele für **zentrale Streckungen**.



Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden heißt **Zentrum** der zentralen Streckung. Das Längenverhältnis  $k$  der Verbindungsstrecken von Bild- und Originalpunkt mit dem Zentrum heißt **Streckungsfaktor** oder **Maßstab** einer zentralen Streckung. Mit der folgenden Definition werden die zentralen Streckungen ,erfaßt.

- DEFINITION 106:** Eine eindeutige Abbildung der Ebene auf sich heißt eine zentrale Streckung genau dann, wenn folgendes gilt:

- (1) Jede Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.
- (2) Es gibt entweder genau einen Punkt, das Zentrum, der auf sich selbst abgebildet wird, oder aber alle Punkte der Ebene fallen mit ihren Bildpunkten zusammen (Identität).

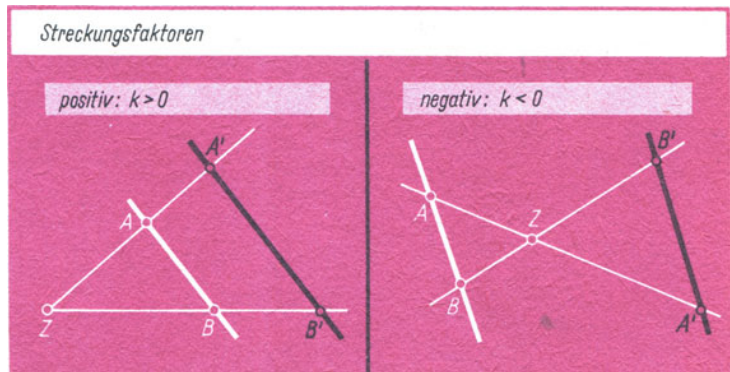
### 13. ÄHNLICHKEIT

#### Positive und negative Streckungsfaktoren

Das Zentrum einer zentralen Streckung liegt entweder zwischen einander entsprechenden Punkten, oder einander entsprechende Punkte liegen auf einer Geraden durch das Zentrum  $Z$  auf derselben Seite von  $Z$ .

**Positiv** ist ein Streckungsfaktor dann, wenn Original- und Bildpunkt auf derselben Seite des Zentrums liegen.

**Negativ** ist ein Streckungsfaktor dann, wenn das Zentrum einer zentralen Streckung zwischen einander entsprechenden Punkten liegt.

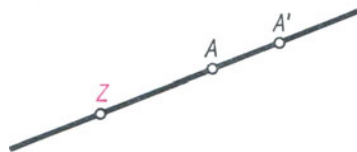


Die Strecke  $\overline{A'B'}$  sei Bild der Strecke  $\overline{AB}$  bei einer zentralen Streckung; dann gilt:

$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Die Bildstrecke  $\overline{A'B'}$  wird das  $k$ -fache der Originalstrecke  $\overline{AB}$  genannt.

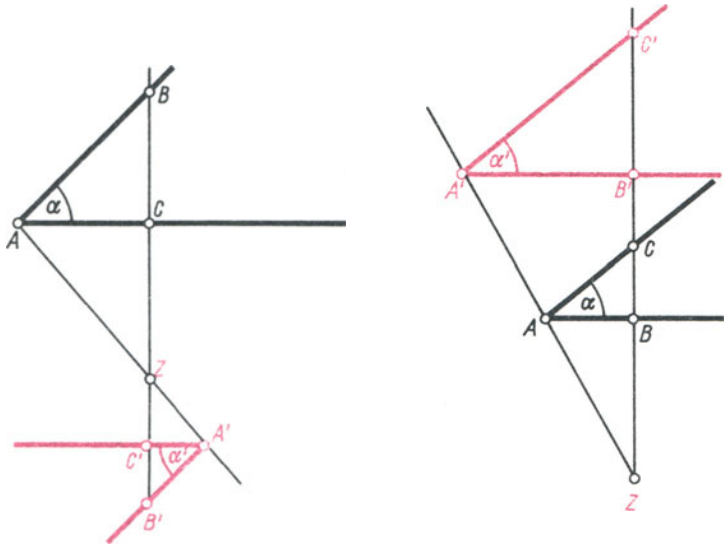
- **SATZ 107:** Jede Gerade, die durch das Zentrum einer zentralen Streckung geht, wird auf sich selbst abgebildet.



**Beweis:** Würde der Bildpunkt  $A'$  eines Punktes  $A$  bei einer zentralen Streckung mit dem Zentrum  $Z$  nicht auf der Geraden  $AZ$  liegen, wären die einander entsprechenden Geraden  $AZ$  und  $A'Z$  nicht parallel. Das ist bei einer zentralen Streckung nicht möglich, folglich muß die Gerade  $AZ$  auf sich selbst abgebildet werden.



- **SATZ 108:** Zwei Winkel, die bei einer zentralen Streckung einander entsprechen, sind kongruent.



Beweis: Die Schenkel zweier Winkel, die bei einer zentralen Streckung einander entsprechen, sind entweder paarweise gleich oder entgegengesetzt orientiert. Ihre Kongruenz folgt dann aus Satz D 23, 28 oder 30.

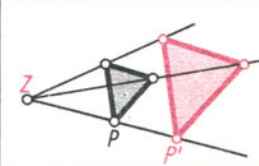
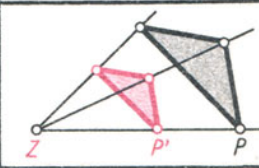
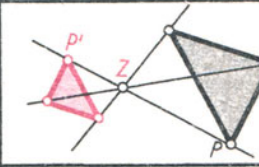
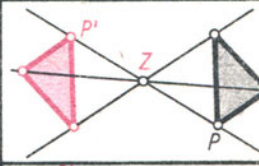
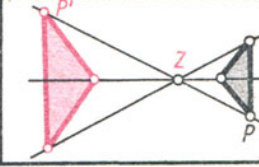
D

- **SATZ 109:** Bei jeder zentralen Streckung ist das Längenverhältnis von Bild- und Originalstrecke für alle einander entsprechenden Strecken gleich dem Streckungsfaktor  $k$ .

*Bemerkungen:*

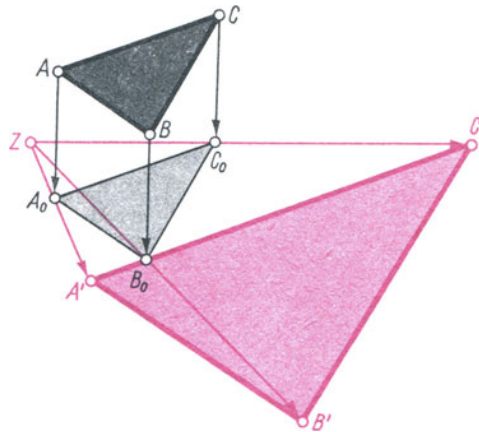
- 1) Eine zentrale Streckung ist entweder durch Angabe eines Punktes als Zentrum und einer Zahl als Streckungsmaßstab oder durch Angabe eines Punktes als Zentrum und zweier Punkte auf einer Geraden durch das Zentrum als Original- und Bildpunkt eindeutig bestimmt.
- 2) Die Nacheinanderausführung zweier Streckungen mit dem Zentrum  $Z$  und den Maßstäben  $k_1$  und  $k_2$  ist eine zentrale Streckung mit dem Zentrum  $Z$  und dem Maßstab  $k = k_1 \cdot k_2$ .
- 3) Die Umkehrung einer zentralen Streckung mit dem Zentrum  $Z$  und dem Maßstab  $k$  ist eine zentrale Streckung mit dem Zentrum  $Z$  und dem Maßstab  $\frac{1}{k}$ .

### 13. ÄHNLICHKEIT

Übersicht über zentrale Streckungen			
Streckungs- faktor	Bezeich- nung	Gegenseitige Lage einander entsprechender Punkte bezüglich des Zentrums	
$k > 1$	Ver- größe- rung	Original $P$ liegt zwischen Bild $P'$ und Zentrum $Z$	
$k = 1$	Identität	Original $P$ und Bild $P'$ fallen zusammen	
$0 < k < 1$	Ver- kleine- rung	Bild $P'$ liegt zwischen Original $P$ und Zentrum $Z$	
$-1 < k < 0$	Ver- kleine- rung	Zentrum $Z$ liegt zwischen $P$ und $P'$ . $\overline{PZ} > \overline{P'Z}$	
$k = -1$	Punkt- spiege- lung	Zentrum $Z$ liegt zwischen $P$ und $P'$ . $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$ .	
$k < -1$	Ver- größe- rung	Zentrum $Z$ liegt zwischen $P$ und $P'$ . $\overline{PZ} < \overline{P'Z}$ .	

#### Ähnlichkeits- abbildungen

- **DEFINITION 110:** Eine eindeutige Abbildung der Ebene auf sich heißt eine Ähnlichkeitsabbildung genau dann, wenn sie entweder
- eine Bewegung (↗ 204) oder
  - eine zentrale Streckung (↗ 268) oder
  - die Nacheinanderausführung einer Bewegung und einer zentralen Streckung ist (Bild Seite 272).



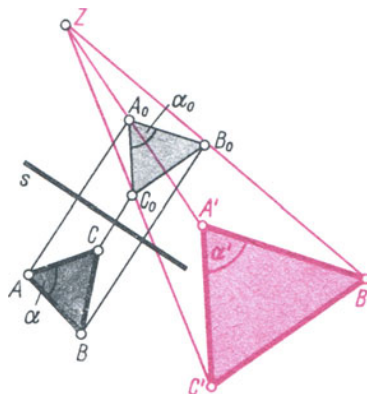
Ähnlichkeitsfaktor

**Ähnlichkeitsfaktor** oder **Maßstab** einer Ähnlichkeitsabbildung heißt der Quotient  $k$  aus den Längen von Bild- und Originalstrecke.

- ▶ **SATZ 111:** Jede Bewegung ist eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Ähnlichkeitsfaktor  $k = 1$ .
- ▶ **SATZ 112:** Bei jeder Ähnlichkeitsabbildung ist der Quotient aus den Längen der Original- und zugehörigen Bildstrecke für alle einander entsprechende Strecken konstant.
- ▶ **SATZ 113:** Bei jeder Ähnlichkeitsabbildung sind einander entsprechende Winkel kongruent.

*Bemerkungen:*

- 1) Die Nacheinanderausführung einer Drehung und einer zentralen Streckung heißt Drehstreckung.
- 2) Die Nacheinanderausführung einer Geradenspiegelung und einer zentralen Streckung wird Streckspiegelung genannt.



$$\overline{A_0B_0} = \overline{AB}$$

$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_0B_0}}$$

Aus  $\alpha = \alpha_0$   
und  $\alpha_0 = \alpha'$   
folgt  $\alpha = \alpha'$ .

## 13. ÄHNLICHKEIT

Übersicht über Ähnlichkeitsabbildungen		
Ähnlichkeitsfaktor	gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen	ungleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen
$k = 1$	gleichsinnige Bewegungen	ungleichsinnige Bewegungen
$k \neq 1$	Zentrale Streckungen, Drehstreckungen	Streckspiegelungen

### Ähnlichkeit

- **DEFINITION 114:** Zwei geometrische Figuren heißen **ähnlich genau** dann, wenn sie **Original** und **Bild** bei einer **Ähnlichkeitsabbildung** sind.

Schreibweise:  $F_1 \sim F_2$  (lies: Die Figuren  $F_1$  und  $F_2$  sind einander ähnlich).

- **SATZ 115:**
- Jede Figur ist sich selbst ähnlich.
  - Aus  $F_1 \sim F_2$  folgt  $F_2 \sim F_1$ .
  - Aus  $F_1 \sim F_2$  und  $F_2 \sim F_3$  folgt  $F_1 \sim F_3$ .

- **SATZ 116:** Ähnliche Figuren stimmen in einander entsprechenden Winkeln und in den Quotienten aus den Längen einander entsprechender Seiten überein.

Der Beweis des Satzes 116 folgt aus den Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen.

*Bemerkung:* Entsprechen zwei ähnliche Figuren bei einer zentralen Streckung einander, so sagen wir, daß sich die Figuren in Ähnlichkeitslage befinden.



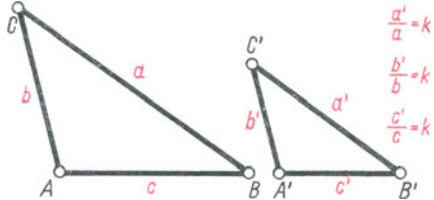
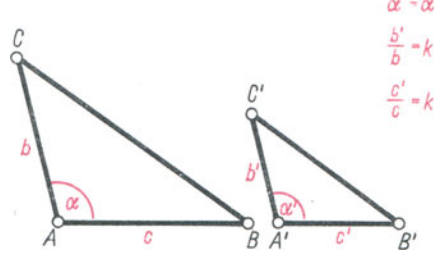
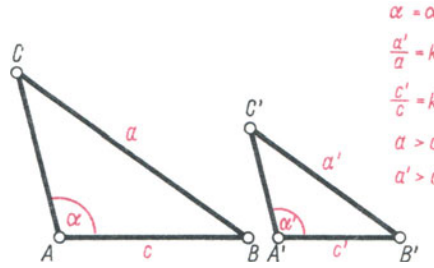
### Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Die folgenden **Ähnlichkeitssätze für Dreiecke** werden häufig für Beweise anderer geometrischer Sätze verwendet.

1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

$\alpha = \alpha'$   
 $\beta = \beta'$

## 13. ÄHNLICHKEIT

<p>2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Verhältnisse einander entsprechender Seiten gleich sind.</p>	 <p> <math>\frac{a'}{a} = k</math>  <math>\frac{b'}{b} = k</math>  <math>\frac{c'}{c} = k</math> </p>
<p>3. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und wenn die Verhältnisse einander entsprechend anliegender Seiten gleich sind.</p>	 <p> <math>\alpha = \alpha'</math>  <math>\frac{b'}{b} = k</math>  <math>\frac{c'}{c} = k</math> </p>
<p>4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen je zweier entsprechender Seiten und dem Gegenwinkel der jeweils größeren übereinstimmen.</p>	 <p> <math>\alpha = \alpha'</math>  <math>\frac{a'}{a} = k</math>  <math>\frac{c'}{c} = k</math>  <math>a &gt; c</math>  <math>a' &gt; c'</math> </p>

Die Beweise dieser Sätze können alle nach ein und demselben Gedankengang geführt werden.

Als Beispiel beweisen wir den ersten Ähnlichkeitssatz:

In zwei Dreiecken  $ABC$  und  $A'B'C'$  seien die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  und die Winkel  $\beta$  und  $\beta'$  kongruent. Wir nehmen  $\overline{A'B'} > \overline{AB}$  an. Bei der zentralen Streckung  $f_1$  mit dem

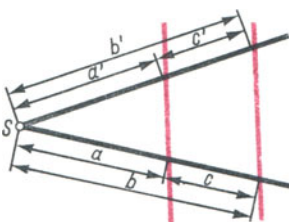
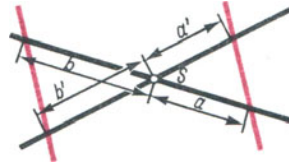
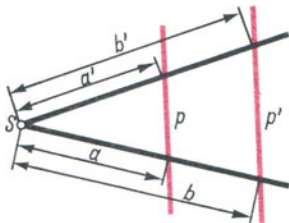
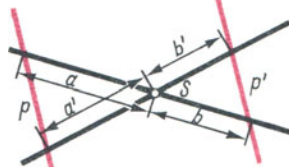
Zentrum  $A$  und dem Maßstab  $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$  sei  $B_0$  das Bild

von  $B$  und  $C_0$  das Bild von  $C$ . Da  $\overline{AB_0} \cong \overline{A'B'}$  gilt, sind die Dreiecke  $AB_0C_0$  und  $A'B'C'$  nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent. Dann gibt es eine Bewegung  $f_2$ , bei der das Dreieck  $A'B'C'$  das Bild des Dreiecks  $AB_0C_0$  ist. Folglich ist das Dreieck  $A'B'C'$  das Bild des Dreiecks  $ABC$  bei der Nacheinanderausführung der zentralen Streckung  $f_1$  und der Bewegung  $f_2$ . Die beiden Dreiecke sind also einander ähnlich.

### 13. ÄHNLICHKEIT

#### Strahlensätze

Die folgenden **Strahlensätze** werden häufig zur Lösung praktischer Aufgaben, beispielsweise zur Bestimmung der Höhe eines Baumes oder zur Teilung einer Strecke verwendet.

<p>1. Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.</p>		$a:b = a':b'$ $c:a = c':a'$ Daraus folgt z. B.: $a:a' = b:b'$ $c:c' = a:a'$
<p>Ein entsprechender Satz gilt auch für zwei Geraden.</p>		$a:b = a':b'$
<p>2. Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt S von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die zwischen den Strahlen liegenden Abschnitte auf den Parallelen wie die von S ausgehenden Abschnitte auf jedem der beiden Strahlen.</p>		$p:p' = a:b$ $p':p = b':a'$ Daraus folgt z. B.: $p':b' = P:a'$
<p>Ein entsprechender Satz gilt auch für zwei Geraden.</p>		$p:p' = a:b$





### 13. ÄHNLICHKEIT

**Bemerkung:** Die beiden Sätze lassen sich auf die Fälle von mehr als zwei Strahlen und mehr als zwei Parallelen verallgemeinern.

Die Beweise der Strahlensätze ergeben sich entweder unmittelbar aus dem Satz 109 oder aber aus den Ähnlichkeitssätzen.

Beide Strahlensätze sind in der angegebenen Formulierung umkehrbar.

#### Streckenteilung

Innere Teilung	Äußere Teilung
Der Teilpunkt $T$ einer Strecke liegt zwischen ihren Endpunkten.	Der Teilpunkt $T$ einer Strecke liegt außerhalb der Strecke.
	

Teilverhältnis  $k$

► **DEFINITION 117:**

$$k = \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} \text{ und } k < 0, \text{ falls } T \text{ innerer Teilpunkt.}$$

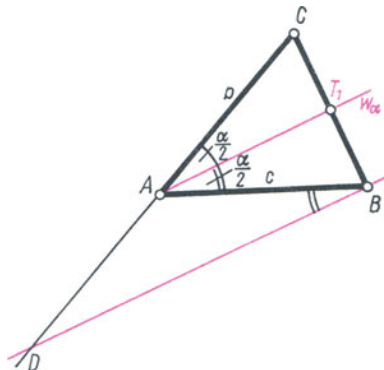
$$k > 0, \text{ falls } T \text{ äußerer Teilpunkt.}$$

Gilt  $\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{BT}$ , so heißt die Strecke  $\overline{AB}$  durch  $T$  stetig oder nach dem „Goldenen Schnitt“ geteilt.

Sätze über Winkelhalbierende im Dreieck (↗ 243)

► **SATZ 118:** Die Winkelhalbierende eines Innenwinkels eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite innen im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten

**Beweis:**  $w_\alpha$  sei Winkelhalbierende des Winkels  $\alpha$  des Dreiecks  $ABC$ . Der Schnittpunkt von  $w_\alpha$  mit  $\overline{BC}$  sei  $T_1$ . Der Schnittpunkt der Geraden  $AC$  mit der Parallelen zur Winkelhalbierenden durch  $B$  sei  $D$ .



Es gilt:

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAT_1$   
(Stufenwinkel an den Parallelen  $AT_1$  und  $BD$ )

$\sphericalangle CAT_1 = \sphericalangle T_1AB$   
(nach Konstruktion der Winkelhalbierenden)

$\sphericalangle T_1AB = \sphericalangle DBA$   
(Wechselwinkel an den Parallelen  $AT_1$  und  $BD$ )

also:  $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBA$

### 13. ÄHNLICHKEIT

Daher ist das Dreieck  $ADB$  gleichschenkelig, und es folgt

$$\overline{AB} = \overline{AD} = c.$$

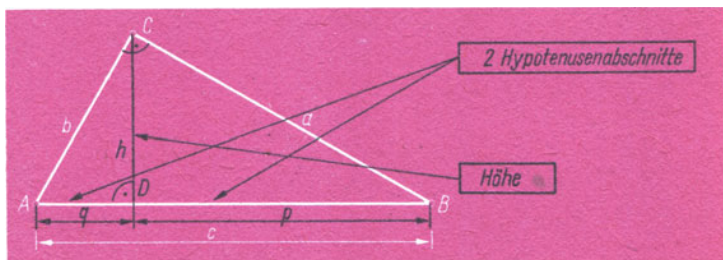
Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{\overline{T_1B}}{\overline{T_1C}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

und wegen  $\overline{AD} = c$  und  $\overline{AC} = b : \frac{\overline{T_1B}}{\overline{T_1C}} = \frac{c}{b}$ , w. z. b. w.

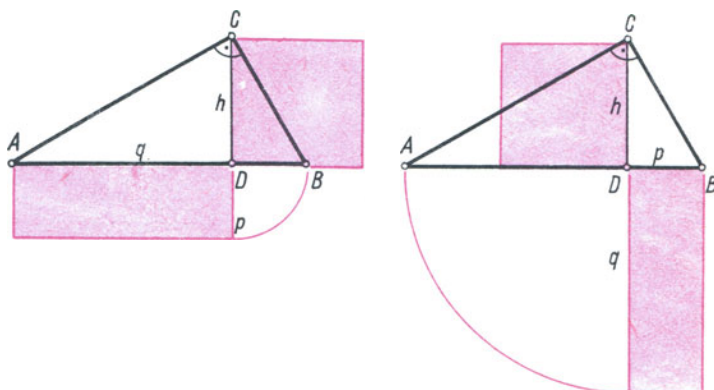
#### Sätze für rechtwinklige Dreiecke (↗ 232)

Den Fußpunkt der Höhe  $h$  vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse bezeichnen wir mit  $D$ . Die Strecken  $\overline{AD} = q$  bzw.  $\overline{BD} = p$  heißen die zu den Katheten  $b$  bzw.  $a$  gehörigen **Hypotenusenabschnitte**.



#### Höhensatz

► **SATZ 119:** In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe  $h$  auf die Hypotenuse gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.



**Beweis:** In einem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  sei  $D$  der Fußpunkt der Höhe  $h$  von  $C$  auf die Hypote-



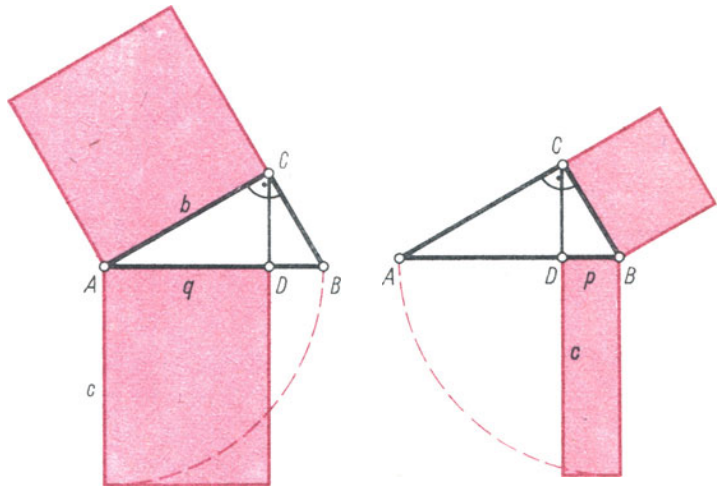
### 13. ÄHNLICHKEIT

nuse  $\overline{AB}$ . Die Dreiecke  $ADC$  und  $BDC$  sind einander ähnlich. Dann gilt die Proportion  $h : q = p : h$ . Daraus ergibt sich  $h^2 = p \cdot q$ , w. z. b. w.

Kathetensatz

► **SATZ 120:** In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt.

(1) $a^2 = c \cdot p$	(2) $b^2 = c \cdot q$
-----------------------	-----------------------



**Beweis:** Das Dreieck  $ABC$  sei rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei  $C$ . Die Höhe von  $C$  auf  $\overline{AB}$  habe den Fußpunkt  $D$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $ABC$  und  $BDC$  bzw.  $ABC$  und  $ADC$  folgen die Proportionen  $a : c = p : a$  bzw.  $b : c = q : b$ . Damit ergeben sich die Beziehungen  $a^2 = c \cdot p$  bzw.  $b^2 = c \cdot q$ , w. z. b. w.

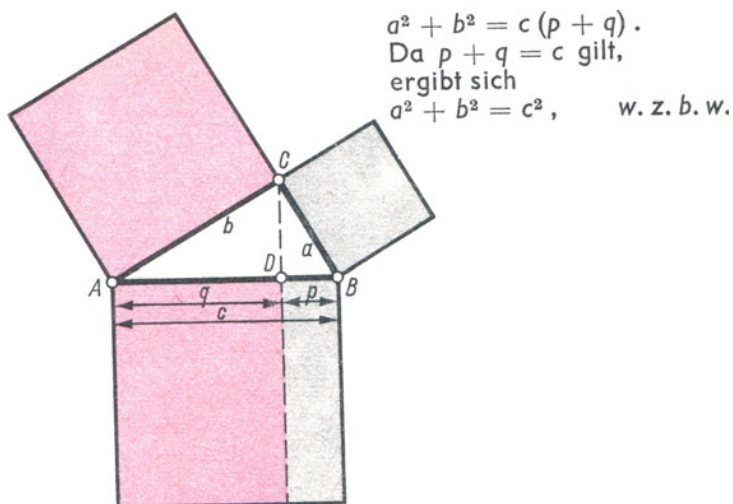
Satz des Pythagoras

► **SATZ 121:** In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

$c^2 = a^2 + b^2$
-------------------

**Beweis:** Ein Dreieck  $ABC$  sei rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei  $C$ . Aus  $a^2 = c \cdot p$  und  $b^2 = c \cdot q$  folgt

### 13. ÄHNLICHKEIT



Umkehrung des Satzes des Pythagoras

**SATZ 122:** Wenn in einem Dreieck  $ABC$  für die Seitenlängen  $c$ ,  $a$  und  $b$  die Beziehung  $c^2 = a^2 + b^2$  gilt, so ist das Dreieck bei  $C$  rechtwinklig.

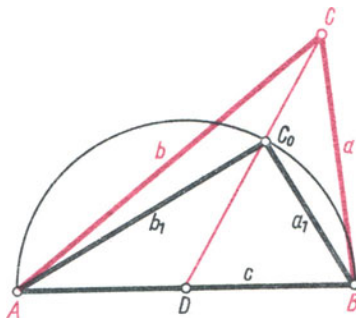
**Beweis:** In einem Dreieck  $ABC$  gelte  $c^2 = a^2 + b^2$ . Angenommen, der Winkel  $\gamma$  bei  $C$  sei kein Rechter. Dann liegt der Punkt  $C$  nicht auf dem Thaleskreis über  $AB$ .

a)  $C$  liege außerhalb des Thaleskreises. Da  $\sphericalangle BC_0C$  größter Winkel im Dreieck  $BCC_0$  ist, ( $\sphericalangle BC_0C$  ist stumpf, da sein Nebenwinkel  $\sphericalangle BC_0D$  als Teil eines rechten Winkels spitz ist), ist  $a$  größte Seite in diesem Dreieck, also gilt  $a > a_1$ .

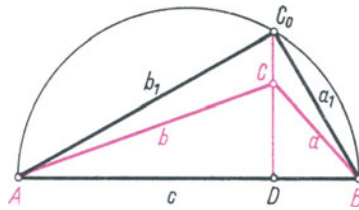
Entsprechend gilt  $b > b_1$ .

Daraus folgt  $a^2 + b^2 > a_1^2 + b_1^2$ .

Da aber  $a_1^2 + b_1^2 = c^2$  gilt ( $\triangle ABC_0$  ist rechtwinklig), ergibt sich  $a^2 + b^2 > c^2$  im Widerspruch zur Voraussetzung.



### 13. ÄHNLICHKEIT



b)  $C$  liege innerhalb des Thaleskreises,  $C_0$  sei der Schnittpunkt des Lotes durch  $C$  auf  $AB$  mit dem Thaleskreis. Dann gilt

$$a_1^2 + b_1^2 = c^2$$

Da  $\sphericalangle BCC_0$  größter Winkel im Dreieck  $BCC_0$  ist ( $\sphericalangle BCC_0$  ist stumpf, da sein Nebenwinkel  $\sphericalangle BCD$  als Winkel im rechtwinkligen Dreieck  $BCD$  spitz ist), ist  $a_1$  größte Seite im Dreieck  $BCC_0$ , also gilt

$$a_1 > a.$$

Entsprechend ergibt sich  $b_1 > b$ .

Daraus folgt  $a^2 + b^2 < a_1^2 + b_1^2$ ,

$$\text{also } a^2 + b^2 < c^2$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Das Dreieck  $ABC$  ist also bei  $C$  rechtwinklig, w. z. b. w.

# 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

*Vorbemerkung:* Bei der Herleitung der Formeln für Rechtecke und Quader wird vorausgesetzt, daß Einheitsquadrate bzw. Einheitswürfel existieren, deren Seiten- bzw. Kantenlänge kommensurabel ist mit den Seiten- bzw. Kantenlängen der zu berechnenden Flächen bzw. Körper. Die Formeln für Rechtecke (jedes Quadrat ist ein spezielles Rechteck) und Quader gelten wie auch die Formeln für alle anderen geometrischen Gebilde jedoch auch für beliebige reelle Zahlen als Maßzahlen für die jeweiligen Seitenlängen.

## Flächenmaße

Flächenmaße	Zeichen	Beziehung
Quadratkilometer	km <sup>2</sup>	1 km <sup>2</sup> = 10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup>
Hektar	ha	1 ha = 100 a = 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>
Ar	a	1 a = 10 <sup>2</sup> m <sup>2</sup>
Quadratmeter	m <sup>2</sup>	
Quadratdezimeter	dm <sup>2</sup>	1 dm <sup>2</sup> = $\frac{1}{100}$ m <sup>2</sup> = 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup>
Quadratcentimeter	cm <sup>2</sup>	1 cm <sup>2</sup> = $\frac{1}{100}$ dm <sup>2</sup> = 10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup>
Quadratmillimeter	mm <sup>2</sup>	1 mm <sup>2</sup> = $\frac{1}{100}$ cm <sup>2</sup> = 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup>

Übersicht über die verwendeten Variablen			
Seiten, Kanten	$a, b, c$	Flächeninhalt	$A$
Radius	$r$	Umfang	$u$
Durchmesser	$d$	Grundflächeninhalt	$A_G$
Höhe	$h$	Mantelinhalt	$A_M$
Mantellinie	$s$	Oberflächeninhalt	$A_O$
		Volumen	$V$

## Quadrat (↗ 251)

Ein Quadrat von der Seitenlänge  $a$  kann durch Einheitsquadrate geeigneter Seitenlänge vollständig ausgelegt werden, d. h. durch  $a$  Streifen mit jeweils  $a$  Einheitsquadraten (Bild Seite 282 oben).

$A = a^2$	$u = 4a$
-----------	----------

14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

Quadrat:  $a = 3\text{ cm}$

(1)  $u = 4a$   
 $= 4 \cdot 3\text{ cm}$   
 $u = 12\text{ cm}$   
 (2)  $A = a^2$   
 $= 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$   
 $A = 9\text{ cm}^2$

**Rechteck**  
 (✓ 250)

Ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  kann durch Einheitsquadrate geeigneter Seitenlänge vollständig ausgelegt werden, d. h. durch  $a$  Streifen mit jeweils  $b$  Einheitsquadraten.

$A = a \cdot b$	$u = 2(a + b)$
-----------------	----------------

Rechteck:  $a = 4\text{ cm}; b = 3\text{ cm}$

(1)  $u = 2(a + b)$   
 $= 2(4\text{ cm} + 3\text{ cm})$   
 $u = 14\text{ cm}$   
 (2)  $A = a \cdot b$   
 $= 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$   
 $= 12\text{ cm}^2$

**Parallelogramm**  
 (✓ 248)

Die Berechnung des Flächeninhalts eines jeden Parallelogramms kann zurückgeführt werden auf die Berechnung der Fläche eines jeweils flächengleichen Rechtecks (Bild Seite 283).

$A = g \cdot h_g$	$u = 2(a + b)$
-------------------	----------------

**Bemerkungen:**

- 1) Es ist gleichgültig, welche Seite des Parallelogramms als Grundseite gewählt wird.  $A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$
- 2) Aus  $A = g \cdot h_g$  ergibt sich:  
 Parallelogramme mit gleich langen Grundseiten und gleich langen zugehörigen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.

## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

Parallelogramm:  $a = 5,0\text{cm}$ ;  $b = 3,6\text{cm}$ ;  $h_a = 3,0\text{cm}$

$a, b$ : Grundseiten  $g$   
 $h_a, h_b$ : zugehörige Höhen  $h_g$

(1)  $u = 2(a+b) = 2(5\text{cm} + 3,6\text{cm})$   
 $u = 17,2\text{cm}$   
 (2)  $A = g \cdot h_g = 5\text{cm} \cdot 3\text{cm}$   
 $A = 15\text{cm}^2$

### Dreieck (↗ 185, 232)

Die Berechnung des Flächeninhaltes eines jeden Dreiecks kann zurückgeführt werden auf die Berechnung eines Parallelogramms, das den doppelten Inhalt des Dreiecks hat.

$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$	$u = a + b + c$
-------------------------------	-----------------

#### Bemerkungen:

1) Es ist gleichgültig, welche Seite des Dreiecks als Grundseite gewählt wird.

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

2) Aus  $A = \frac{1}{2} g h_g$  ergibt sich:

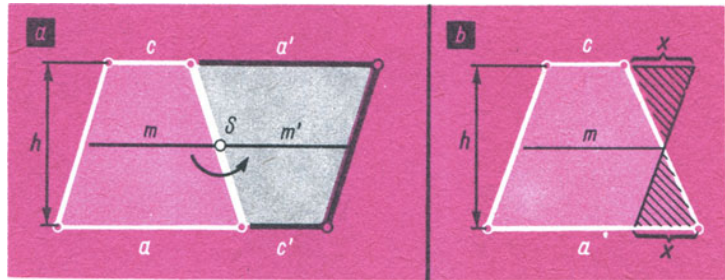
Dreiecke mit gleich langen Grundseiten und gleich langen zugehörigen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.

Dreieck:  $a = 3,9\text{cm}$ ;  $b = 2,7\text{cm}$ ;  $c = 4,0\text{cm}$ ;  $h_c = 2,5\text{cm}$

(1)  $u = a + b + c$   
 $u = 3,9\text{cm} + 2,7\text{cm} + 4,0\text{cm} = 10,6\text{cm}$   
 (2)  $A = \frac{1}{2} g h_g$   
 $A = 2,0\text{cm} \cdot 2,5\text{cm} = 5,0\text{cm}^2$

**Trapez**  
(↗ 245)

Die Berechnung jedes Trapezes kann auf die Berechnung eines Parallelogramms zurückgeführt werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:



- 1) Drehung des Trapezes um  $180^\circ$  um den Mittelpunkt eines Schenkels; man erhält ein Parallelogramm mit doppeltem Flächeninhalt des zu berechnenden Trapezes (Bild a).
- 2) Erzeugung eines Parallelogramms, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das zu berechnende Trapez (Bild b).

$A = \frac{1}{2} (a + c) h = m \cdot h$	$u = a + b + c + d$
---	---------------------

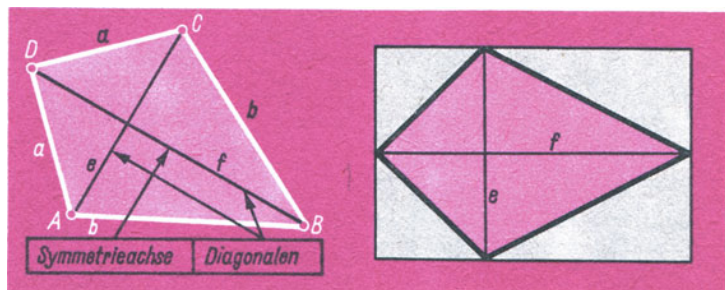
*Bemerkungen:*

Aus  $A = m \cdot h$  ergibt sich:

Zwei Trapeze mit gleich langen Mittellinien  $m$  und gleich langen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.

**Drachenviereck**  
(↗ 247)

Die Berechnung jedes Drachenvierecks kann auf die Berechnung eines Rechtecks zurückgeführt werden, das den doppelten Flächeninhalt des jeweils zu berechnenden Drachenvierecks hat.



## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

$A = \frac{1}{2} e \cdot f$	$u = 2(a + b)$
-----------------------------	----------------

**Bemerkung:** Die Formel für den Flächeninhalt eines Drachenvierecks gilt auch für Rhomben und Quadrate. Bei diesen Figuren stehen die Diagonalen ebenfalls aufeinander senkrecht. Beim Quadrat (Diagonale  $d$ ) erhält man speziell:

$$A = \frac{1}{2} d^2.$$

### Beliebiges Vieleck

Die Berechnung beliebiger Vielecke wird im allgemeinen zurückgeführt auf die Berechnung von Dreiecken und Trapezen, indem man das jeweils gegebene Vieleck in geeigneter Weise in Dreiecke (Dreiecksmethode) bzw. Trapeze (Trapezmethode) zerlegt.

<i>Dreiecksmethode</i>	<i>Trapezmethode</i>
$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$	$u = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

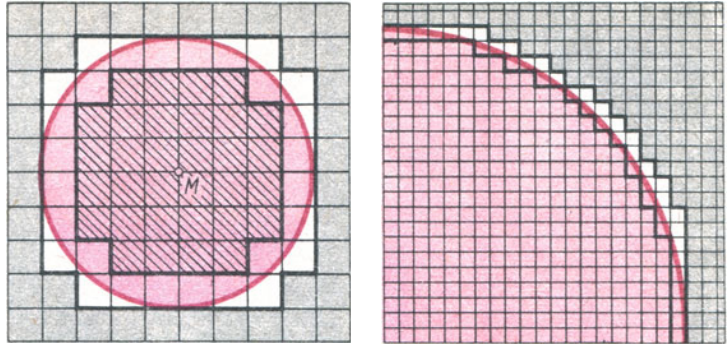
### Kreis (↗ 213)

Der Flächeninhalt und der Umfang eines Kreises läßt sich mit elementaren Mitteln nur näherungsweise bestimmen. In beiden Fällen spielt die Zahl  $\pi \approx 3,1416$  als Proportionalitätsfaktor (↗ 113) eine entscheidende Rolle.

Je kleiner man Quadrate wählt, mit denen eine Kreisfläche von innen und von außen ausgelegt wird, desto kleiner wird die Differenz der Summe aller Quadrate „von innen“ und „von außen“ und desto genauer wird der Flächeninhalt des Kreises durch diese Summen begrenzt.



14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG



$$A_i < A < A_o; A \sim r^2; u \sim r$$

$A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$	$u = 2 \pi r = \pi d$
-----------------------------------	-----------------------

Kreisteile

Die Formeln für die Berechnung der Flächeninhalte von Kreisteilen gewinnt man für Kreisring und Kreisabschnitt (Kreissegment) durch Differenzbildung und für den Kreisabschnitt (Kreissektor) mit Hilfe einer Proportion.

Kreisring	Kreisabschnitt	Kreisabschnitt
$A = \frac{\pi}{4} (d_1 + d_2) (d_1 - d_2)$	$A = \left( \frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right) \frac{r^2}{2}$	$A = \frac{br}{2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$ $b = \frac{\alpha}{180^\circ} \pi r$

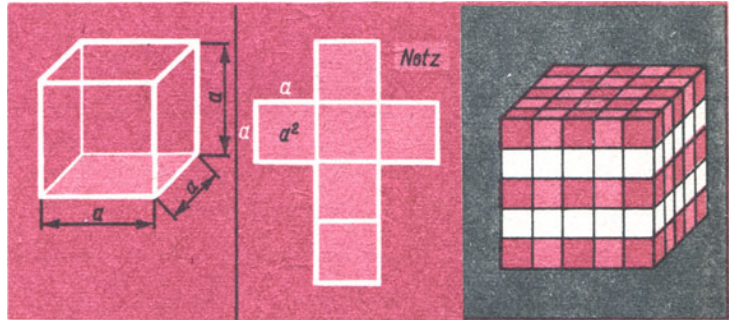
Raummaße

Raummaße	Zeichen	Beziehung
Kubikkilometer	km <sup>3</sup>	1 km <sup>3</sup> = 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>
Kubikmeter	m <sup>3</sup>	
Kubikdezimeter	dm <sup>3</sup>	1 dm <sup>3</sup> = $\frac{1}{1000}$ m <sup>3</sup> = 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
Kubikzentimeter	cm <sup>3</sup>	1 cm <sup>3</sup> = $\frac{1}{1000}$ dm <sup>3</sup> = 10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup>
Kubikmillimeter	mm <sup>3</sup>	1 mm <sup>3</sup> = $\frac{1}{1000}$ cm <sup>3</sup> = 10 <sup>-9</sup> m <sup>3</sup>

## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

### Würfel

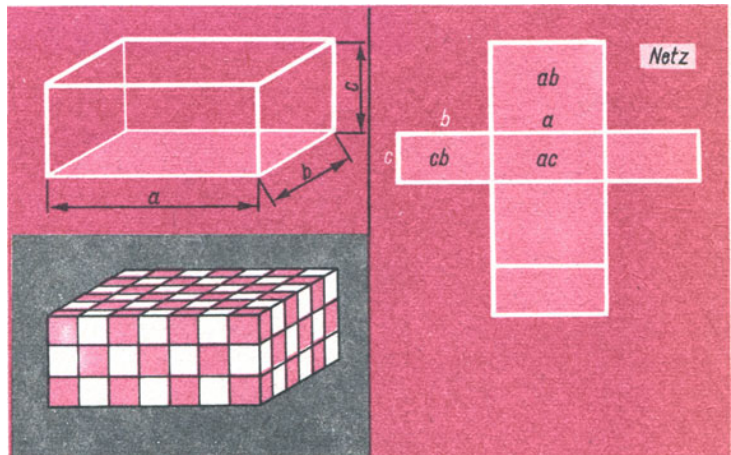
Ein Würfel von der Kantenlänge  $a$  kann durch Einheitswürfel geeigneter Kantenlänge vollständig ausgelegt werden, d. h. durch  $a$  Schichten mit jeweils  $a$  Stangen zu je  $a$  Einheitswürfel.  
Die Oberfläche eines Würfels läßt sich in die Ebene abwickeln.



$V = a^3$	$A_0 = 6 a^2$
-----------	---------------

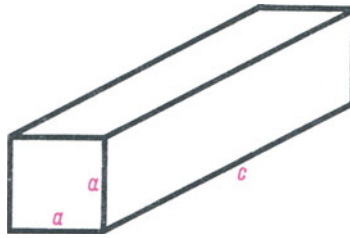
### Quader

Ein Quader mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  kann durch Einheitswürfel geeigneter Kantenlänge vollständig ausgelegt werden, d. h. durch  $c$  Schichten mit jeweils  $b$  Stangen zu je  $a$  Einheitswürfel.  
Die Oberfläche eines Quaders läßt sich in die Ebene abwickeln.



D

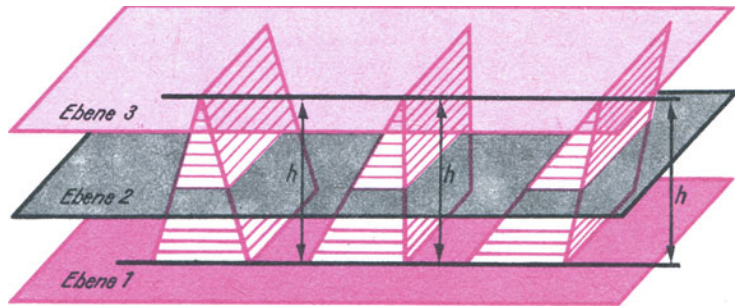
14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG



Sind von den drei Kanten eines Quaders zwei gleich groß, d. h., sind zwei der einander kongruenten Begrenzungsflächen Quadrate, so nennt man einen solchen Quader auch **quadratische Säule**.

**Cavalierisches Prinzip**

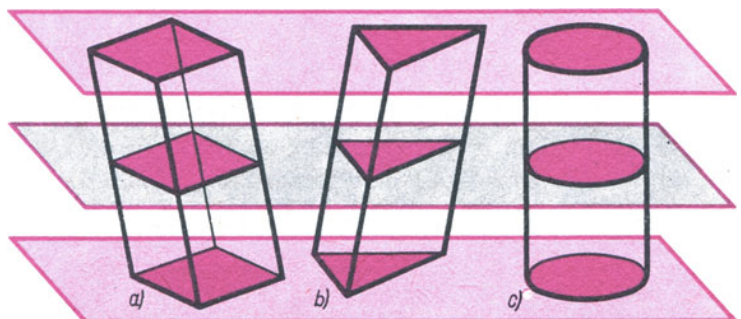
► Liegen Körper zwischen zwei parallelen Ebenen und erzeugen alle zur gemeinsamen Grundebene dieser Körper parallel verlaufende Schnitte in gleichen Höhen flächengleiche Schnittfiguren, so sind diese Körper volumengleich.



	Körper 1	=	Körper 2	=	Körper 3
Ebene 1	$A_{G_1}$	=	$A_{G_2}$	=	$A_{G_3}$
Ebene 2	$A_{S_1}$	=	$A_{S_2}$	=	$A_{S_3}$
	$h_1$	=	$h_2$	=	$h_3$

**Bemerkungen:**

1) Dieser Satz wurde erstmals von dem italienischen Mathematiker *Bonaventura Cavalieri* (1598–1647) ausgesprochen.



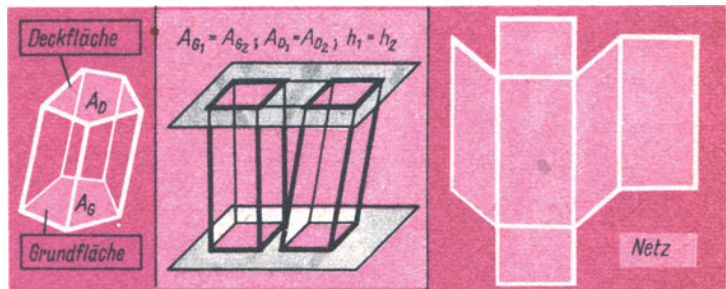
## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

2) Das *Cavalierische* Prinzip kann zur Bestimmung des Volumens beliebiger Körper verwendet werden (Bild Seite 288).

### Prismen

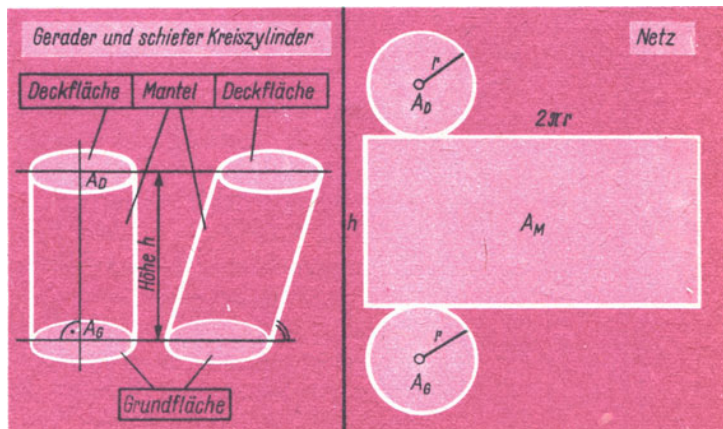
Für die Volumenberechnung gerader Prismen gilt die Formel für den Quader, der zu den Prismen gehört. Die Berechnung schiefer Prismen wird unter Benutzung des *Cavalierischen* Prinzips auf die Berechnung des jeweils entsprechenden geraden Prismas zurückgeführt. Die Oberfläche jedes Prismas läßt sich in die Ebene abwickeln.

$V = A_G \cdot h$	$A_O = 2 A_G + A_M$
-------------------	---------------------



### Kreiszyylinder

Die Berechnung des Volumens jedes Kreiszyinders läßt sich auf Grund des *Cavalierischen* Prinzips nach der Formel für das Volumen eines Prismas durchführen. Die Oberfläche jedes Kreiszyinders läßt sich in die Ebene abwickeln.



Bemerkungen :

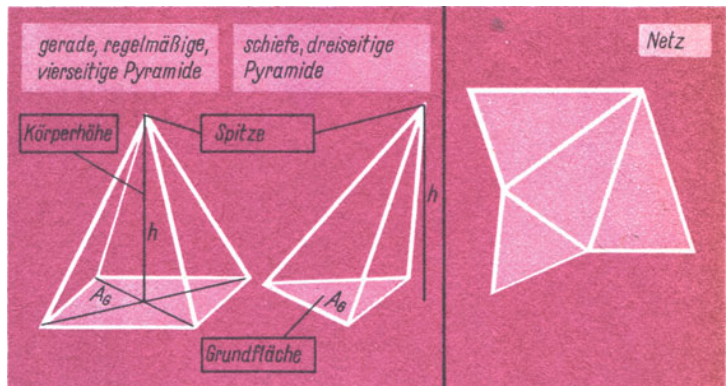
1) Bei Anwendung des *Cavalierischen* Prinzips kommt es nur auf den Nachweis der Gleichheit der Höhen und der Gleichheit der Flächeninhalte der durch parallele Schnitte entstehenden Figuren an, also nicht auf die Gestalt der Flächen. Der Kreiszyylinder kann als spezielles Prisma angesehen werden, das als Grundfläche einen Kreis hat, also  $A_G = \pi r^2$ .

$$V = A_G \cdot h = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h$$

$$A_O = 2 A_G + A_M = 2 \pi r (r + h) = \frac{\pi}{2} d (d + 2 h)$$

2) Die Formel für die Berechnung der *Oberfläche* gilt nur für *gerade* Kreiszyylinder, da der Mantel eines *schiefen* Kreiszyinders eine Fläche ergibt, die sich nicht mit elementaren Mitteln berechnen läßt.

**Pyramiden**

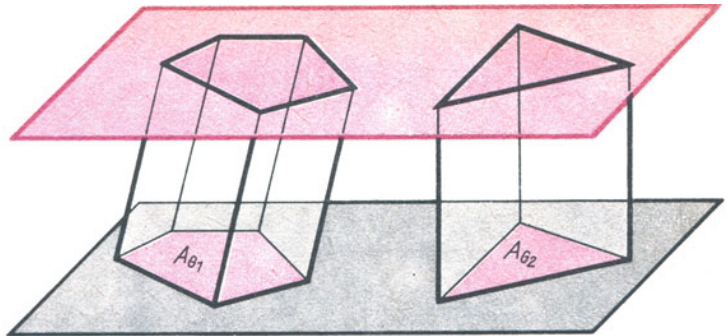


Die Berechnung jeder Pyramide wird auf folgende Weise auf die Berechnung des jeweils entsprechenden Prismas zurückgeführt:

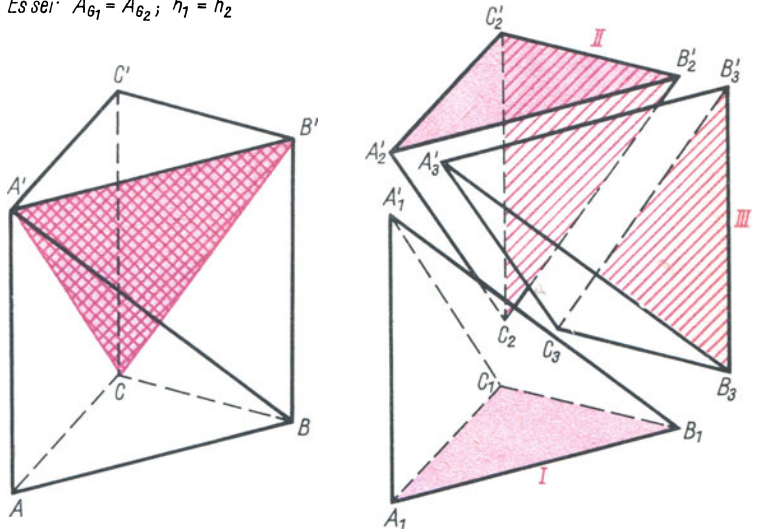
I) Auf Grund des Cavalierischen Prinzips existiert für jedes beliebige Prisma ein volumengleiches gerades, regelmäßiges, dreiseitiges Prisma, das eine flächengleiche Grundfläche und gleiche Höhe besitzt.

II) Jedes dreiseitige Prisma läßt sich durch geeignete Schnitte in drei volumengleiche Pyramiden zerlegen. Die Oberfläche jeder Pyramide läßt sich in die Ebene abwickeln (Bild Seite 291).

# 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG



Es sei:  $A_{G1} = A_{G2}$ ;  $h_1 = h_2$



$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$	$A_0 = A_G + A_M$
-------------------------------	-------------------

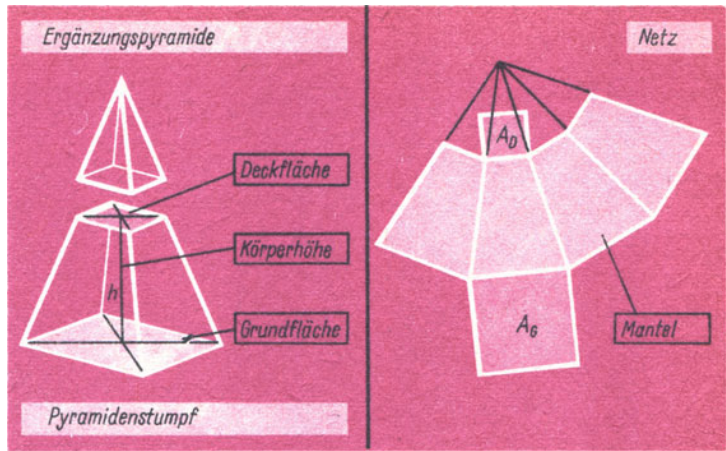
## Pyramidenstumpf

Die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes wird auf die Berechnung einer Pyramide zurückgeführt. Jeder Pyramidenstumpf läßt sich durch eine entsprechende **Ergänzungspyramide** zu einer Pyramide ergänzen. Die Oberfläche jedes Pyramidenstumpfes läßt sich in die Ebene abwickeln (Bild Seite 292).

$V = \frac{h}{3} (A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + A_D)$	$A_0 = A_G + A_D + A_M$
--	-------------------------

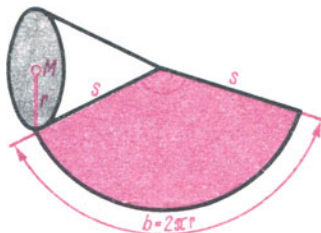
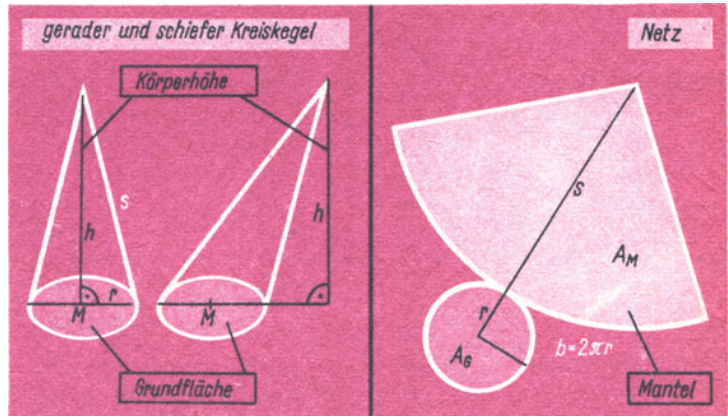


## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG



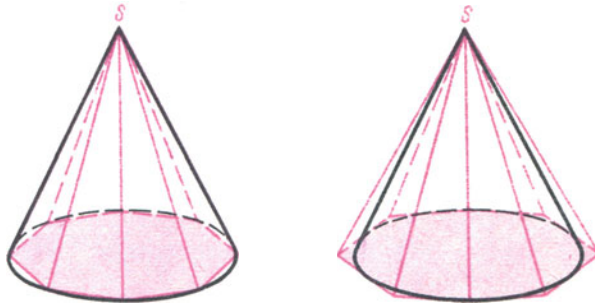
### Kreiskegel

Die Berechnung des Volumens jedes Kreiskegels läßt sich auf Grund des Cavalierischen Prinzips nach der Formel für das Volumen einer Pyramide durchführen.  
Die Oberfläche jedes Kreiskegels läßt sich in die Ebene abwickeln.



$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{12} \pi d^2 h$$

$$A_0 = A_G + A_M = \pi r (s + r) = \frac{\pi}{4} d (2s + d)$$



Es gilt:  $A_j < A_\theta < A_a$       $V_j < \frac{h}{3} A_\theta < V_a$

**Bemerkung:**

Die Formel für die Berechnung der Oberfläche gilt nur für gerade Kreiskegel, da der Mantel eines schiefen Kreiskegels eine Fläche ergibt, die sich nicht mit elementaren Mitteln berechnen läßt.

**Kreiskegelstumpf**

Die Berechnung des Volumens eines Kreiskegelstumpfes wird auf die Berechnung eines Kreiskegels zurückgeführt. Jeder Kreiskegelstumpf läßt sich durch einen entsprechenden Ergänzungskegel zu einem Kreiskegel ergänzen. Die Oberfläche jedes Kreiskegelstumpfes läßt sich in die Ebene abwickeln.

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi}{12} h (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

$$A_0 = A_G + A_D + A_M$$

$$\pi [r_1^2 + r_2^2 + s (r_1 + r_2)] + \frac{\pi}{4} [d_1^2 + d_2^2 + 2s (d_1 + d_2)]$$

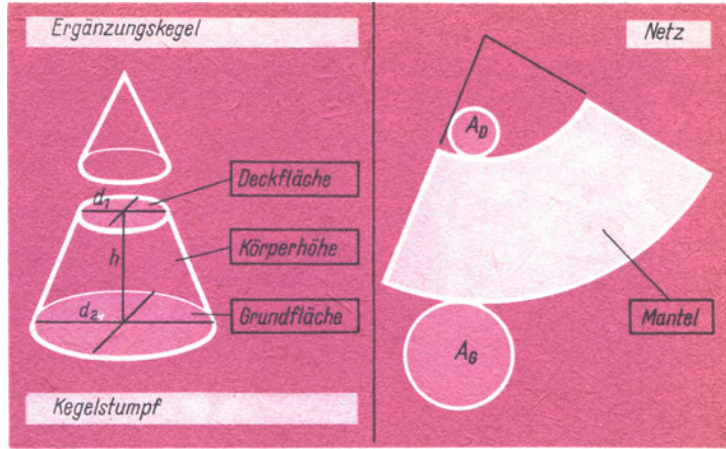
**Bemerkung:**

Die Formel für die Berechnung der Oberfläche gilt nur für gerade Kreiskegelstümpfe, da der Mantel eines schiefen Kreiskegelstumpfes eine Fläche ergibt, die sich nicht mit elementaren Mitteln berechnen läßt (Bild Seite 294).



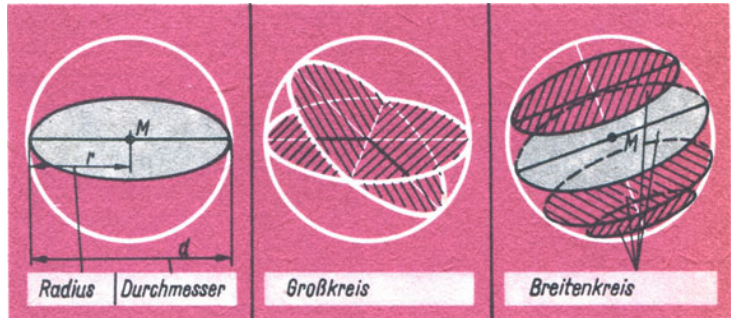


## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG



### Kugel

D



Die Berechnung des Volumens einer Kugel wird auf die Berechnung der Volumina eines entsprechenden Kreiszylinders und Kreiskegels zurückgeführt; denn mit dem Cavalierischen Prinzip kann bewiesen werden, daß das Volumen einer Halbkugel gleich ist dem Volumen eines Kreiszylinders verringert um das Volumen eines Kreiskegels. Die Oberfläche einer Kugel läßt sich nicht in die Ebene abwickeln.

$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$	$A_O = 4 \pi r^2 = \pi d^2$
---	-----------------------------

# 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

$$g = h$$

$$R^2 = r^2 - h^2$$

$$A_{G_1} = A_{G_2} = \pi r^2$$

$$A_{S_1} = \pi r^2 - \pi g^2$$

$$= \pi (r^2 - h^2)$$

$$A_{S_2} = \pi R^2$$

$$= \pi (r^2 - h^2)$$

$$\frac{A_{S_1}}{A_{S_2}} = 1$$

$$V_{\text{Halbk.}} = V_{\text{Zyl.}} - V_{\text{Kegel}} = \pi r^3 - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

**Bemerkung:** Im Gegensatz zu der Formel für das Volumen einer Kugel, die mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips hergeleitet wird, kann die Formel für die Kugeloberfläche mit elementaren Mitteln nicht bewiesen werden.

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} A_G \cdot h$$

$$h \rightarrow r$$

$$V_{\text{Kugel}} \approx \frac{1}{3} r (A_{G_1} + A_{G_2} + \dots + A_{G_n})$$

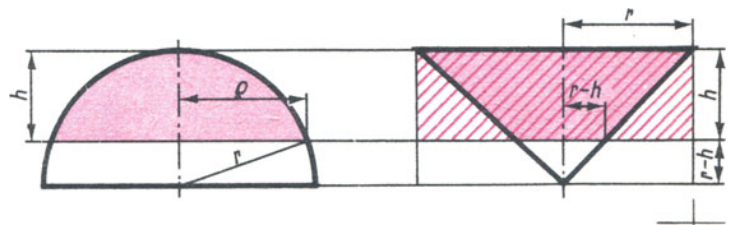
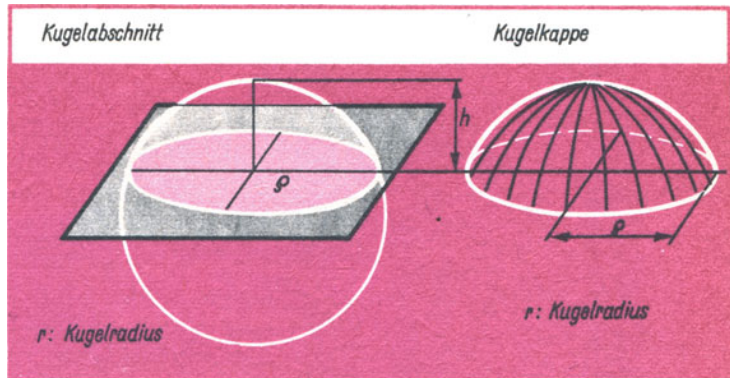
$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} r A_0$$

$$A_0 = 4 \pi r^2$$

**Kugelteile**  
 Kugelabschnitt(-segmente)  
 Kugelkappe

Die Berechnung des Volumens jedes Kugelabschnitts (Kugel-segments) wird auf die Berechnung des Volumens eines entsprechenden Kreiszyllinders und Kreiskegelstumpfes zurückgeführt; mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips kann bewiesen werden, daß das Volumen eines Kugelabschnitts

## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG



gleich ist dem Volumen eines Kreiszyinders verringert um das Volumen eines Kreiskegelstumpfes.

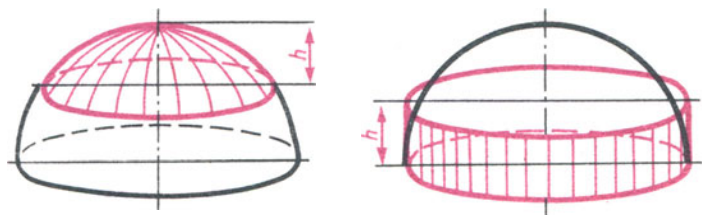
$$V_{\text{Abschnitt}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegelstumpf}}$$

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} h [r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]$$

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) = \frac{\pi}{6} h^2 (3d - 2h)$$

$$A_M = 2\pi r h = \pi d h \text{ (Kugelkappe)}$$

**Bemerkung:** Die Formel für die Berechnung des Inhalts der Oberfläche einer Kugelkappe ist gleich der für den Mantel eines Kreiszyinders. Das bedeutet: Die Kugelkappe ist flächengleich dem Mantel des Kreiszyinders, der die gleiche Höhe hat wie die Kugelkappe und der zugehörigen Kugel umschrieben ist.



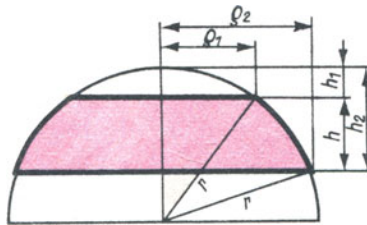
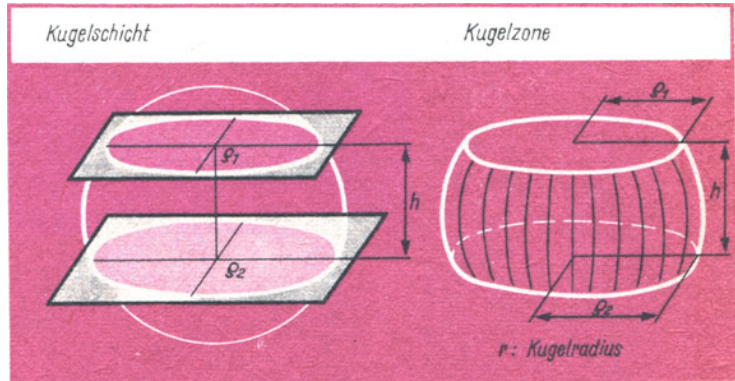
## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

### Kugelschicht

Das Volumen einer Kugelschicht ergibt sich als Differenz aus dem Volumen zweier Kugelabschnitte.

$$h_2 - h_1 = h$$

$$V_{\text{Abschnitt II}} - V_{\text{Abschnitt I}} = V$$



### Kugelzone

Entsprechend ergibt sich der Flächeninhalt einer Kugelzone als Differenz aus zwei Kugelkappen.

$$V = \frac{\pi}{6} h (3 d_1^2 + 3 d_2^2 + h^2)$$

$$A_M = 2 \pi r h = \pi d h \text{ (Kugelzone)}$$

### Kugelausschnitt (-sektor)

Die Berechnung des Volumens eines Kugelausschnitts erfolgt durch Addition der Volumina eines Kugelabschnitts und des entsprechenden Kreiskegels.

Entsprechend ist der Oberflächeninhalt eines Kugelausschnitts die Summe der Oberflächen der zugehörigen Kugelkappe und eines Kegelmantels (Bild Seite 298).

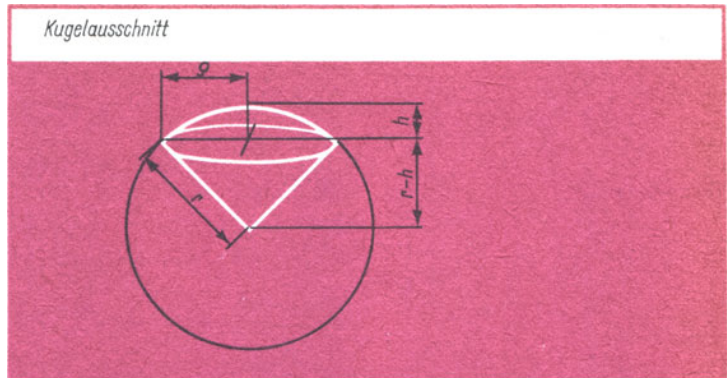
$$V_{\text{Ausschnitt}} = V_{\text{Abschnitt}} + V_{\text{Kegel}}$$

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3 r - h) + \frac{\pi}{3} d^2 (r - h)$$

$$d^2 = h (2 r - h)$$

## 14. FLÄCHEN- UND RAUMINHALTSBERECHNUNG

---



$V = \frac{2\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{6} d^2 h$	$A_0 = \pi r (2h + a)$
--	------------------------

D

# 15. DARSTELLEND GEOMETRIE

## Aufgaben

Die darstellende Geometrie hat die Aufgabe, räumliche Gebilde (die *Originale*) hinsichtlich ihrer zeichnerischen Darstellung zu untersuchen und Verfahren für die Konstruktion ihrer *Bilder* (auch *Risse*) auf der Zeichenfläche zu entwickeln.

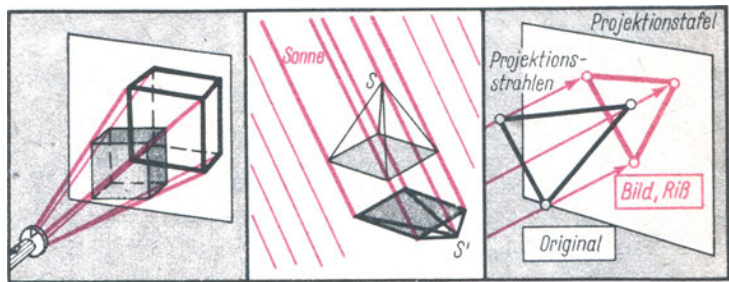
## Grundprinzip

Grundprinzip der darstellenden Geometrie ist die *Abbildung* (*Zuordnung*) von Punkten des Raumes (dreidimensional) auf Punkte der Zeichenebene (zweidimensional) durch Projizieren.

## Projizieren

„Projizieren“ heißt das Abbildungsverfahren, bei dem man sich das Bild des Originals als Schattenwurf durch Lichtstrahlen entstanden denkt. Die in der darstellenden Geometrie angenommenen Lichtstrahlen nennt man **Projektionsstrahlen**.

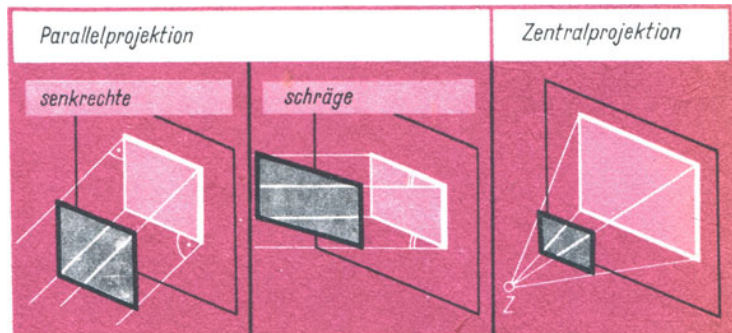
## Projektionsstrahlen



## Projektionsarten

Je nach der Lage der Projektionsstrahlen zueinander und zur Projektionstafel unterscheidet man:

1. Parallelprojektion ( $\sphericalangle$  203)
  - a) senkrechte (orthogonale) Parallelprojektion
  - b) Schräge Parallelprojektion (Schrägbild)
2. Zentralprojektion



## 15. DARSTELLEND GEOMETRIE

### Allgemeine einfache Lage

Je nach der Lage des Originals zur Projektions(Riß-)tafel unterscheidet man zwischen allgemeiner Lage und einfacher Lage.



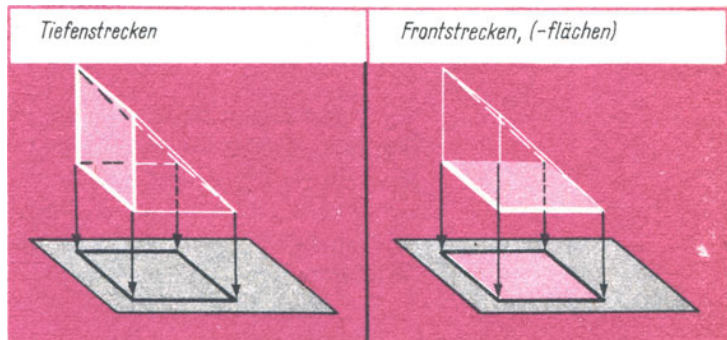
Tiefenstrecken  
(-geraden, -flächen)

Strecken (Geraden, Flächen), die senkrecht zu einer Projektionstafel verlaufen, nennt man Tiefenstrecken (-geraden, -flächen).

Frontstrecken  
(-geraden, -flächen)

Strecken (Geraden, Flächen), die parallel zu einer Projektionstafel verlaufen, nennt man Frontstrecken (-geraden, -flächen).

*Bemerkung:* In bezug auf Frontstrecken spricht man auch von Strecken in *Frontlage*.



Parallelprojektion  
(↗ 203)

Für die Parallelprojektion (senkrecht und schräg) gelten allgemein folgende Sätze:

Sätze

- ▶ **Jedem Punkt als Original wird eindeutig ein Punkt als Bild zugeordnet.**

*Bemerkung:* Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht; denn jedem Bildpunkt können alle Punkte des jeweiligen Projektionsstrahls als Original zugeordnet werden.

- ▶ **Jeder Geraden als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen entweder ein Punkt oder eine Gerade als Bild zugeordnet.**

Liegt die Originalgerade parallel zu den Projektionsstrahlen, so hat sie als Bild einen Punkt, sonst eine Gerade.

- ▶ **Jeder Strecke als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen entweder ein Punkt oder eine Strecke als Bild zugeordnet.**

Liegt die Originalstrecke parallel zu den Projektionsstrahlen, so hat sie als Bild einen Punkt; sonst eine Strecke.

- ▶ **Parallelen Geraden als Originale werden je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen zwei Punkte, eine einzige Gerade oder parallele Geraden als Bild zugeordnet.**

Liegen die Originale parallel zu den Projektionsstrahlen, so haben sie zwei Punkte als Bilder; sonst eine einzige Gerade oder parallele Geraden, je nachdem, ob die durch die Originale aufgespannte Ebene parallel zu den Projektionsstrahlen liegt oder nicht.

- ▶ **Jeder ebenen Figur als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen eine Strecke oder eine ebene Figur als Bild zugeordnet.**

Liegt die Ebene des Originals parallel zu den Projektionsstrahlen, so hat die ebene Figur als Bild eine Strecke, sonst eine ebene Figur.

- ▶ **Jedem Körper als Original wird eine ebene Figur als Bild zugeordnet.**

### **Senkrechte Parallelprojektion Konstruktionsverfahren**

Die Projektionsstrahlen verlaufen senkrecht zur Projektionstafel. Bei der senkrechten Parallelprojektion wird jedem Raumpunkt  $P$  (Original) ein Bildpunkt  $P'$  in der Projektionstafel  $T$  zugeordnet, indem man von  $P$  aus das Lot auf die Ebene  $T$  fällt. Der Fußpunkt des Lotes ist der Bildpunkt  $P'$ .

*Bemerkung:* Die Projektionstafel wird stets als unbegrenzte Ebene angenommen. Lediglich in Abbildungen wird zur Verdeutlichung jeweils ein Teil der Ebene hervorgehoben.





Nach der Anzahl der verwendeten Projektionstafeln unterscheidet man:

Eintafelprojektion – Grundriß

Zweitafelprojektion – Grund- und Aufriß

Dreitafelprojektion – Grund-, Auf- und Kreuzriß

**Eintafelprojektion**

Dabei erfolgt die zeichnerische Darstellung durch senkrechte Parallelprojektion auf **eine** Projektionstafel.

**Grundriß**

Wird die Projektionstafel waagrecht (horizontal) angenommen, so nennt man das durch senkrechte Parallelprojektion erhaltene Bild den Grundriß des Originals. Die waagrecht angenommene Projektionstafel nennt man Grundrißtafel, meist mit  $T_1$  bezeichnet.

Den Grundriß eines Originals bezeichnet man mit einem Strich am Symbol des Originals ( $P'$ ,  $g'$ ; Grundriß des Punktes  $P$  bzw. der Geraden  $g$ ).

Grundriß eines Punktes	Grundriß einer Geraden	Grundriß eines Würfels

**Aufriß**

Wird die Projektionstafel senkrecht (vertikal) angenommen, so nennt man das durch senkrechte Parallelprojektion erhaltene Bild den Aufriß des Originals.

Die senkrecht angenommene Projektionstafel nennt man Aufrißtafel, meist mit  $T_2$  bezeichnet.

Den Aufriß eines Originals bezeichnet man mit zwei Strichen am Symbol des Originals ( $P''$ ,  $g''$ : Aufriß des Punktes  $P$  bzw. der Geraden  $g$ ).

15. DARSTELLENDEN GEOMETRIE

Aufriß eines Punktes	Aufriß einer Geraden	Aufriß eines Würfels

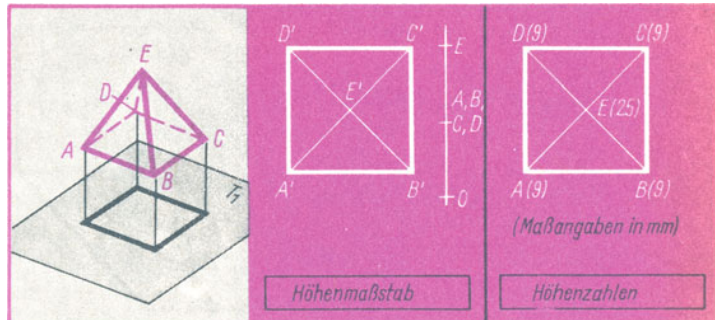
Da der Grundriß eines Originals die räumliche Lage der Punkte des Originals nicht eindeutig bestimmt, fügt man dem Grundriß einen Höhenmaßstab oder Höhenzahlen (Koten) hinzu.

Grundriß und Höhenmaßstab

Der **Höhenmaßstab** ist eine senkrecht neben dem zugehörigen Grundriß gezeichnete Maßlinie, auf der durch entsprechende Strecken die Höhen der Originale über der Grundrißtafel angegeben werden. Den Punkten der Grundrißtafel wird die Höhe 0 zugeordnet.

Grundriß mit Höhenzahlen (Koten)

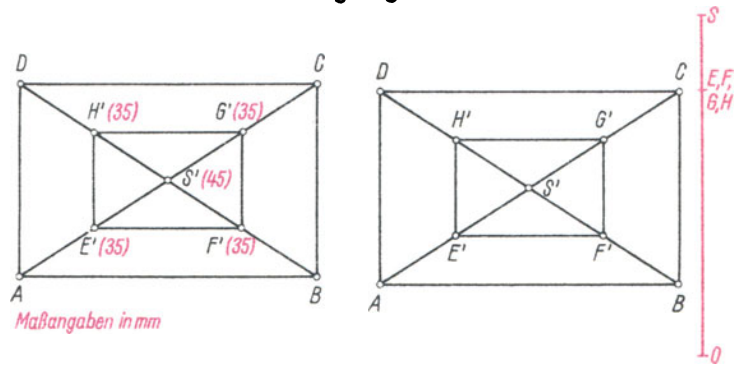
Höhenzahlen (Koten) sind Zahlen, die den jeweiligen Grundrissen der Originalpunkte in einer festzulegenden Einheit in Klammern beigefügt werden. Sie geben den Abstand der Originalpunkte von der Grundrißtafel an.



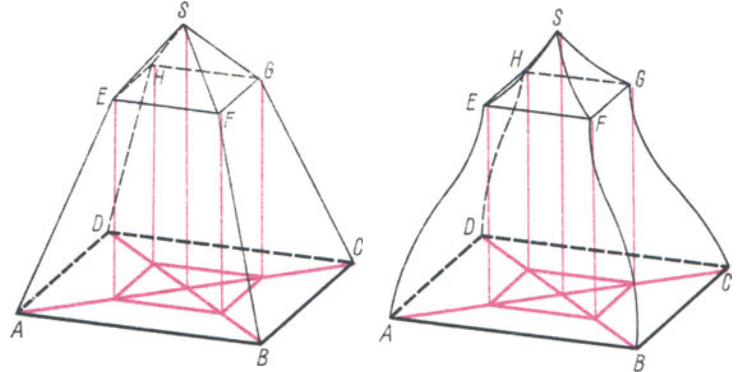
*Bemerkung:* Es ist üblich, Originalpunkte, die mit ihrem Grundriß zusammenfallen, also in der Grundrißtafel liegen, nicht mit einem Strich zu versehen.

**Zwei- und Dreifafelprojektion**

Weder der Grundriß allein noch der Grundriß mit Höhenmaßstab bzw. mit Höhenzahlen bestimmt in jedem Fall die Gestalt eines räumlichen Gebildes (eines Körpers als Original) eindeutig. Das folgende Bild zeigt die Darstellung eines Körpers als Grundriß mit Höhenzahlen bzw. mit Höhenmaßstab. Dieser Darstellung würden zum Beispiel beide Körper im unteren Bild genügen. Um Eindeutigkeit herbeizuführen, werden weitere Risse hinzugefügt.



Maßangaben in mm



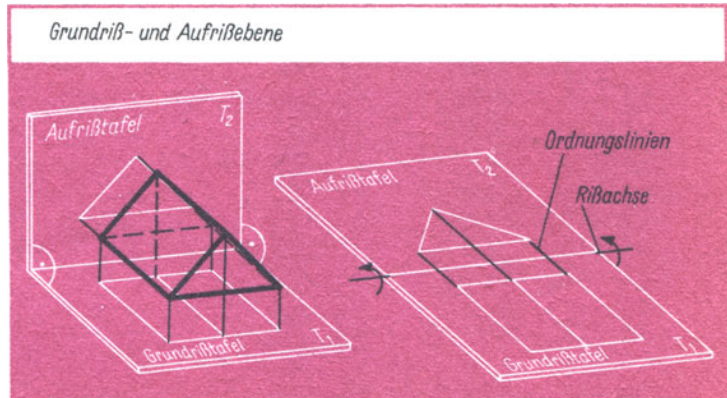
**Zweifafelprojektion**

Bei der **Zweifafelprojektion** erfolgt die zeichnerische Darstellung durch senkrechte Parallelprojektion auf **zwei** Projektionstafeln, die Grund- und Aufrißtafel, die senkrecht zueinander angenommen werden. Die Schnittgerade von Grund- und Aufrißtafel nennt man **Rißachse**, auch **Projektionsachse**.



## 15. DARSTELLEND GEOMETRIE

Die Verbindungsgerade von Grund- und Aufriß eines jeden Punktes, die senkrecht zur Rißachse verläuft heißt **Ordnungslinie**.

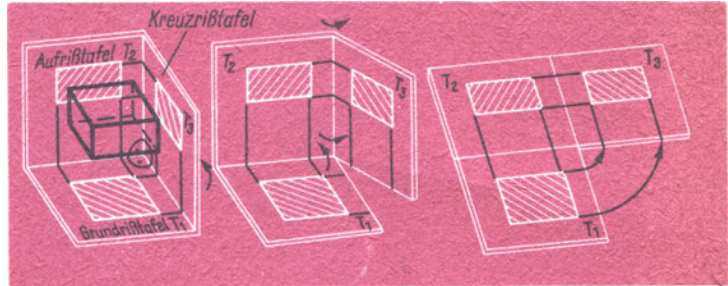


- ▶ **Haupteigenschaft der Zweitafelprojektion: Grund- und Aufriß eines Punktes liegen auf einer Senkrechten zur Rißachse (auf einer Ordnungslinie).**
- ▶ **Liegen ein Grundrißpunkt und ein Aufrißpunkt nicht auf derselben Senkrechten zur Rißachse, so gehören sie als Bilder nicht dem gleichen Originalpunkt an.**
- ▶ **Der Abstand des Grundrisses  $P'$  von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes  $P$  von der Aufrißtafel  $T_2$  an.**
- ▶ **Der Abstand des Aufrisses  $P''$  von der Rißachse gibt den Abstand des Punktes  $P$  von der Grundrißtafel  $T_1$  an.**

Zweitafelprojektion		
eines Punktes	einer Geraden	eines Quaders

**Dreitafelprojektion**

Da die Zweitafelprojektion nicht in allen Fällen die notwendige Klarheit über die Gestalt eines räumlichen Gebildes vermittelt, bedient man sich oft der Dreitafelprojektion. Dabei wird die Zweitafelprojektion durch eine dritte senkrechte Parallelprojektion, auf die Kreuzrißtafel, ergänzt.



Die Kreuzrißtafel ist eine Projektionstafel, die senkrecht zur Grund- und Aufrißtafel steht; Grund-, Aufriß- und Kreuzrißtafel bilden zusammen eine **rechtwinklige räumliche Ecke**.

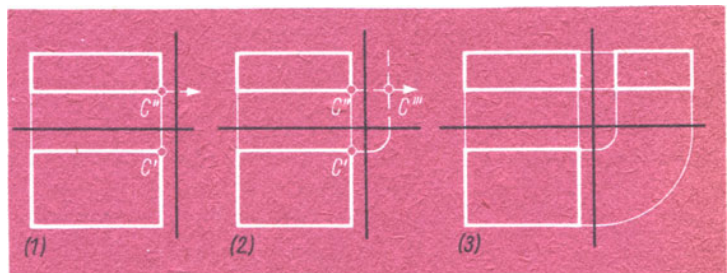
**Kreuzriß**

Das durch senkrechte Parallelprojektion auf die Kreuzrißtafel erhaltene Bild nennt man den Kreuzriß des Originals.

Den Kreuzriß eines Originals bezeichnet man mit drei Strichen am Symbol des Originals ( $P'''$ ,  $g'''$ : Kreuzriß des Punktes  $P$  bzw. der Geraden  $g$ ).

Der Kreuzriß  $P'''$  ist mit den dazugehörigen Grund- und Aufrissen  $P'$  bzw.  $P''$  auch durch Ordnungslinien verbunden.

*Bemerkung:* Die Ordnungslinie, die den Grundriß  $P'$  mit dem Kreuzriß  $P'''$  verbindet, ist durch einen Viertelkreisbogen um den Schnittpunkt der zwei Rißachsen unterbrochen.



- ▶ Der Kreuzriß eines jeden Originalpunktes ist dem Grund- und Aufriß desselben Originalpunktes eindeutig zugeordnet.
- ▶ Wenn zwei Risse eines Originalpunktes gegeben sind, so läßt sich der dritte Riß stets aus den beiden gegebenen Rissen konstruieren.

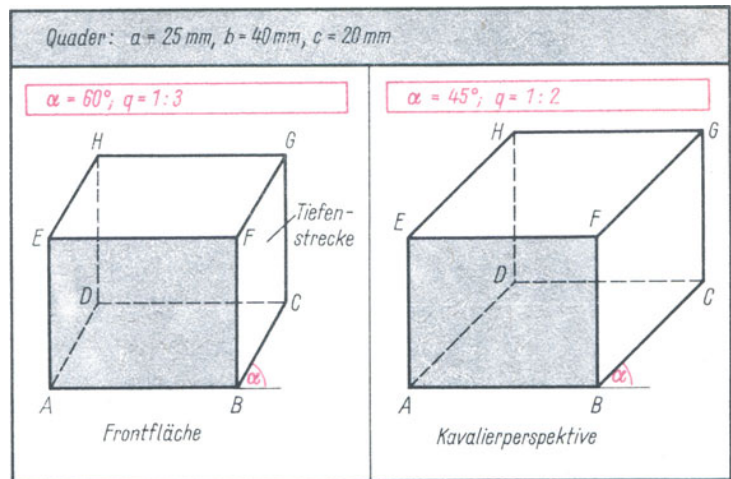
**Schräge Parallelprojektion**

Bei der schrägen Parallelprojektion verlaufen die Projektionsstrahlen nicht senkrecht zur Projektionstafel. Das abzubildende Original wird dabei als vor der Projektionstafel befindlich angenommen.

**Schrägriß (Schrägbild)**

Das durch schräge Parallelprojektion erhaltene Bild nennt man den **Schrägriß** (auch Schrägbild) des Originals. Den Schrägriß eines Originals bezeichnet man im allgemeinen mit denselben Symbolen, mit denen auch sein Original bezeichnet ist, sonst fügt man diesen Symbolen einen Strich hinzu.

Ein Schrägriß eines Originals ist durch seinen **Verzerrungswinkel**  $\alpha$  und durch das **Verkürzungsverhältnis**  $q$ , in dem die Tiefenstrecken gegenüber den Frontstrecken im Bild erscheinen, bestimmt.



**Kavalierperspektive**

Die Kavalierperspektive ist eine spezielle schräge Parallelprojektion mit dem Verzerrungswinkel  $\alpha = 45^\circ$  und dem Verkürzungsverhältnis  $q = 1 : 2$ .

## 15. DARSTELLEND GEOMETRIE

### Konstruktionsverfahren

Bei der schrägen Parallelprojektion wird jedem Raumpunkt  $P$  (Original) ein Bildpunkt  $P'$  zugeordnet, indem man je nach dem vorgegebenen Verzerrungswinkel  $\alpha$  und dem Verkürzungsverhältnis  $q$

a) die Bilder aller Tiefengeraden um den Verzerrungswinkel  $\alpha$  gegen die Horizontale der Zeichenebene (gleich Projektionstafel) neigt und

b) die Länge aller Tiefenstrecken nach dem Verkürzungsverhältnis  $q$  verändert.

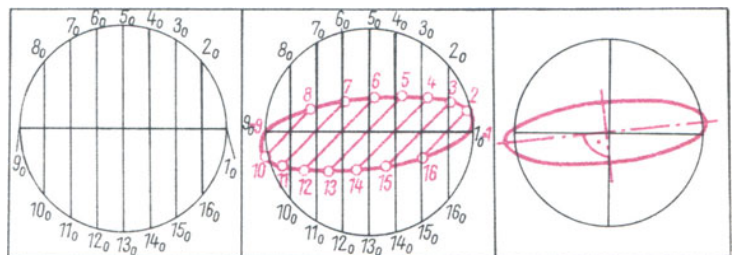
Die Konstruktion von Schrägrissen erfolgt also mit Hilfe von Front- und Tiefenstrecken. Falls das abzubildende geometrische Gebilde keine Front- bzw. Tiefenstrecken hat, müssen *Hilfslinien* in Front- bzw. Tiefenlage eingezeichnet werden.

*Bemerkungen:* 1) Es ist bei schräger Parallelprojektion allgemein üblich, die Projektionstafel vertikal anzunehmen; Frontstrecken (-geraden, -flächen) werden deshalb wie beim Aufriß kongruent abgebildet. 2)  $q$  und  $\alpha$  werden meist so gewählt, daß sich die Schrägrisse leicht konstruieren lassen, aus ihnen leicht Maße entnommen werden können und die Schrägrisse möglichst anschaulich sind.

Ein Kreis enthält weder Front- noch Tiefenstrecken.

Der Kreis  
in Kavalierperspektive  
(Die Ellipse als Bild  
eines Kreises)

Zur Abbildung eines Kreises in Kavalierperspektive benutzt man deshalb als Hilfslinien einen Durchmesser als eine Frontstrecke und zu diesem Durchmesser senkrechte Sehnen als Tiefenstrecken.



*Bemerkungen:* 1) Der als Frontstrecke dienende Durchmesser ist gleichmäßig zu unterteilen, so daß die als Tiefenstrecken dienenden Sehnen gleiche Abstände haben. 2) Die große Achse der Ellipse, die der Kreis in Kavalierperspektive als Bild besitzt, ist um einen Winkel von etwa  $7^\circ$  entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gegen den waagerechten Durchmesser des Kreises gedreht.

**Zentralprojektion**

Bei der Zentralprojektion (Zentralperspektive) verlaufen die Projektionsstrahlen nicht parallel zueinander und treffen im allgemeinen nicht senkrecht auf die Projektionstafel.

Das Projektionszentrum  $P$  (der gemeinsame Ausgangspunkt aller Projektionsstrahlen) befindet sich in endlicher Entfernung von der Projektionstafel (im Gegensatz zur Parallelprojektion, wo man den Ausgangspunkt in unendlich großem Abstand von der Projektionstafel angenommen hat.) (↗ Bild Seite 299).

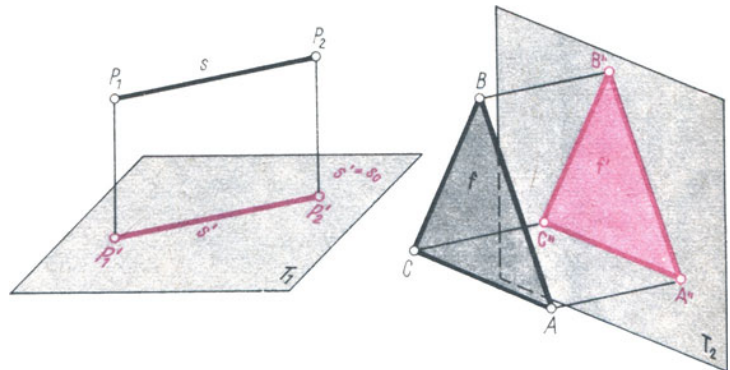
Bei der Zentralprojektion ist auf die vom Projektionszentrum  $P$  durch die Punkte eines in Frontlage befindlichen Originals verlaufenden Projektionsstrahlen der Strahlensatz anwendbar.

Es gilt:  $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{BC} = \overline{C'D'} : \overline{CD} = \dots$

▶ Bei der Zentralprojektion ist das Bild einer in Frontlage befindlichen ebenen Figur (Original) eine zum Original ähnliche Figur. (↗ 271 f)

Wahre Größe einer Strecke (ebenen Fläche)

Befindet sich ein Original (Strecke, ebene Figur) in einfacher Lage, Frontlage zur Projektionstafel, so wird es auf diese Tafel in wahrer Größe abgebildet. Befindet sich ein Original in **allgemeiner Lage** zur Projektionstafel, so wird es auf diese Tafel **nicht** in wahrer Größe abgebildet.



Verfahren zur Bestimmung der wahren Größe

Die wahre Größe eines Originals in allgemeiner Lage kann durch folgende Verfahren bestimmt werden:

- 1) Umklappung
- 2) Drehung.

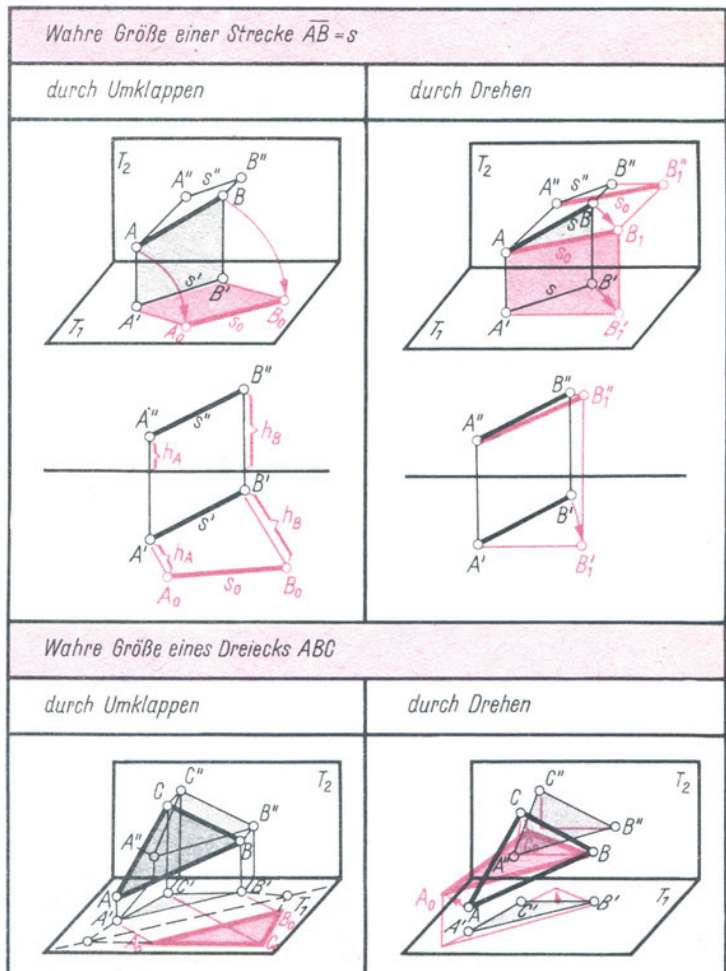
Ziel beider Verfahren ist es, das Original in einfache Lage, Frontlage zu einer Projektionstafel zu bringen, in der es dann in wahrer Größe abgebildet werden kann.





## 15. DARSTELLENDGEOMETRIE

Die durch Umklappen oder Drehen erhaltenen Bilder bezeichnet man mit dem Index „0“ am Symbol des jeweiligen Originals ( $P_0$ ;  $s_0$ : Umklappung bzw. Drehung des Punktes  $P$  bzw. der Strecke  $s$  in die Projektionstafel).



Spurpunkt

Jede Gerade in allgemeiner Lage zur Projektionstafel durchstößt die Projektionstafel in einem Punkt. Einen solchen „Durchstoßpunkt“ nennt man **Spurpunkt** (bezeichnet mit „S“). Liegt der Spurpunkt in der Grundrißtafel, so nennt man ihn Grundrißspurpunkt (entsprechend Aufriß- bzw. Kreuzrißspurpunkt).

## 15. DARSTELLENDGEOMETRIE

### Spurgerade (Spur)

Jede Ebene (Fläche) in allgemeiner Lage zur Projektionstafel durchstößt die Projektionstafel in einer Geraden (einer Strecke). Eine solche „Durchstoßgerade“ (-strecke) nennt man **Spurgerade** oder kurz **Spur** (bezeichnet mit  $s$ ).  
Liegt die Spurgerade (Spur) in der Grundrißtafel, so nennt man sie Grundrißspur (entsprechend Aufriß- bzw. Kreuzrißspur).

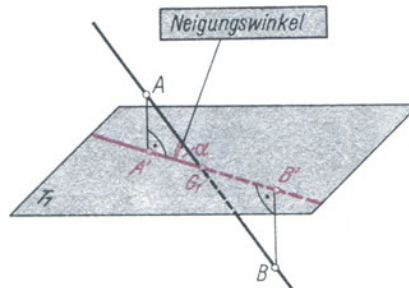
### Falllinie

Eine Gerade einer Ebene (in allgemeiner Lage zur Projektionstafel), die senkrecht auf der Spurgeraden dieser Ebene steht, nennt man Falllinie (bezeichnet mit  $l$ ). Die Falllinie  $l$  einer Ebene konstruiert man, indem man von einem Punkt  $P$  der Falllinie das Lot auf die Spurgerade dieser Ebene fällt.

### Neigungswinkel einer Geraden (Strecke)

Jede Gerade in allgemeiner Lage zu einer Projektionstafel durchstößt diese Projektionstafel unter einem bestimmten Winkel. Diesen Winkel nennt man **Neigungswinkel** (meist mit  $\alpha$  bezeichnet) dieser Geraden. Man spricht auch vom Neigungswinkel einer Strecke in allgemeiner Lage.  
Der Neigungswinkel einer Geraden  $g$  kann konstruiert werden, wenn man

- 1) den Spurpunkt  $S$  der Geraden  $g$  und den Grund- und Aufriß eines Punktes  $P$  dieser Geraden kennt;
- 2) den Grundriß  $g'$  der Geraden  $g$  und den Höhenmaßstab zweier Punkte  $P$  dieser Geraden kennt.



### Neigungswinkel einer Ebene (Fläche)

Als **Neigungswinkel**  $\alpha$  einer Ebene bezeichnet man den Winkel, den eine Falllinie dieser Ebene mit ihrem Bild in der jeweiligen Projektionstafel einschließt.

Der Neigungswinkel  $\alpha$  einer Ebene kann konstruiert werden, wenn man

- 1) den Spurpunkt  $S$  der Falllinie  $l$  und den Grund- und Aufriß eines Punktes  $P$  der Falllinie kennt,

2) den Grundriß  $l'$  der Falllinie und den Höhenmaßstab eines Punktes  $P$  der Falllinie kennt.

Stützdreieck

Als **Stützdreieck** einer Ebene (Geraden, Strecke) bezeichnet man das rechtwinklige Dreieck, das aus folgenden Stücken gebildet wird:

1) Hypotenuse:

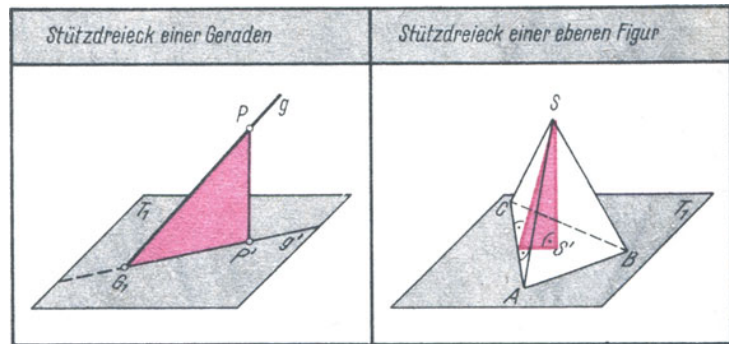
Abstand eines Punktes  $P$  einer Falllinie von deren Spurpunkt  $S$ ;  $\overline{PS}$ .

2) Katheten:

a) Abstand der Projektion  $P'$  des Punktes  $P$  der Falllinie von  $S$ ;  $\overline{P'S}$ .

b) Abstand des Punktes  $P$  der Falllinie von  $P'$  in der Projektionstafel.

Das Stützdreieck einer Ebene (Geraden) liegt stets senkrecht zur jeweiligen Projektionstafel.



**Bemerkung:** Das Stützdreieck dient zur Bestimmung des Neigungswinkels und der wahren Größe von ebenen Figuren in allgemeiner Lage.

Umklopfung einer Strecke

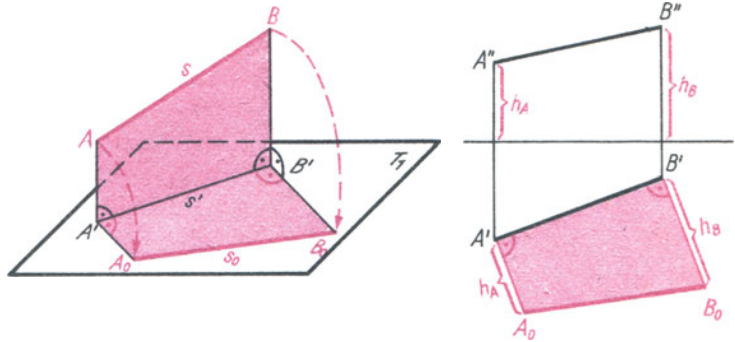
Befindet sich die Strecke  $\overline{AB} = s$  in allgemeiner Lage zur Projektionstafel  $T$ , so erhält man ihre wahre Größe durch Umklappen auf folgende Weise:

1) Von den Punkten  $A$  und  $B$  fällt man die Lote auf die Tafel; man erhält das Trapez  $AA'B'B$ , das senkrecht zur Projektionstafel steht; dabei ist  $\overline{A'B'} = s'$ .

2) In der Projektionstafel  $T$  errichtet man in  $A'$  und  $B'$  Senkrechten zu  $s'$ , auf denen die Abstände von  $A$  bzw.  $B$  von  $T$  abgetragen werden; man erhält die Punkte  $A_0$  und  $B_0$ .

3) Verbindet man nun die Punkte  $A_0$  und  $B_0$ , so erhält man die Strecke  $\overline{A_0B_0} = s_0$ , das Bild der Strecke  $s$  in wahrer Größe:  $s_0 = s$ .

15. DARSTELLENDGEOMETRIE

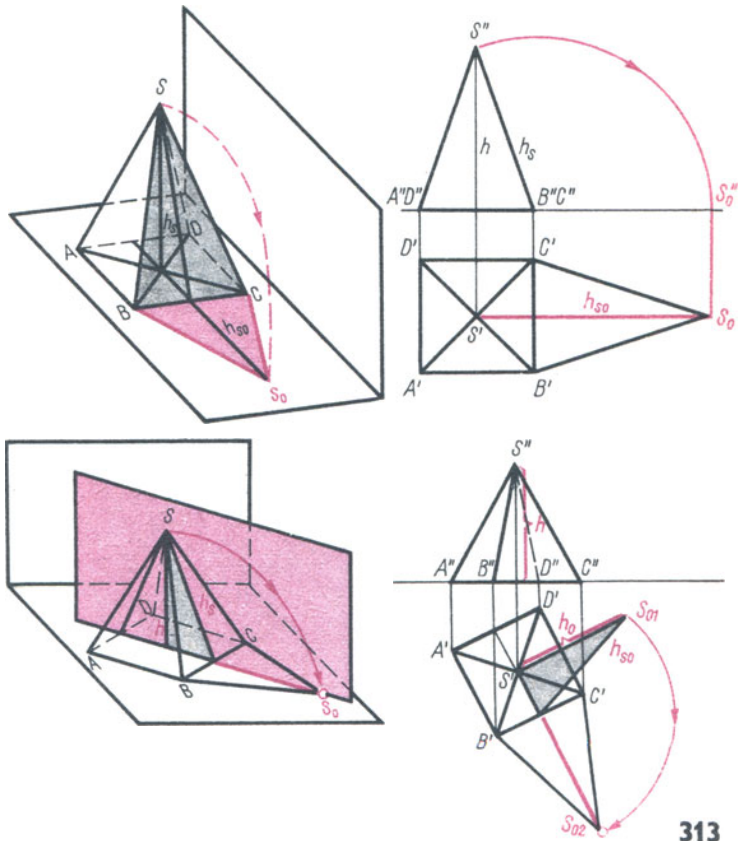


Umklappung einer Geraden

Befindet sich eine Gerade  $g$  in allgemeiner Lage zur Projektionstafel  $T$ , so wird  $g$  in die Tafel  $T$  umgeklappt, indem man einen Punkt  $P$  von  $g$  in die Tafel klappt und den erhaltenen Punkt  $P_0$  mit dem Spurpunkt  $s$  von  $g$  verbindet. ( $\sphericalangle$  Neigungswinkel einer Geraden 311).

Umklappung einer ebenen Figur

Befindet sich eine ebene Figur in allgemeiner Lage zur Projektionstafel, so erhält man ihre wahre Größe, indem man

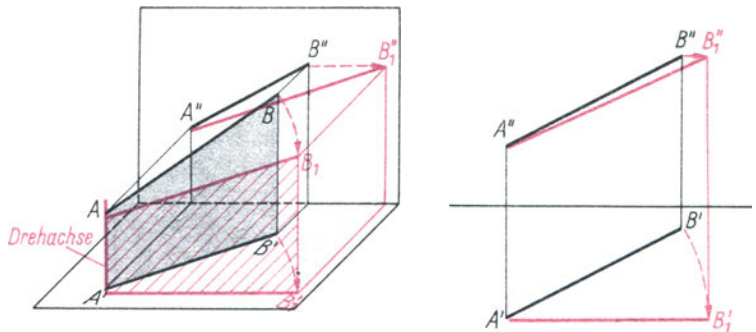


D

- 1) die Figur selbst oder
- 2) das Stützdreieck der Figur  
in die Projektionstafel klappt (Bild Seite 313).

Drehung einer Strecke

Befindet sich eine Strecke  $\overline{AB} = s$  in allgemeiner Lage, so erhält man ihre wahre Größe, indem man z. B. ihren Grundriß  $s'$  um  $A'$  in Frontlage zur Aufrißtafel dreht. Der Aufriß  $s''$  stellt dann die wahre Größe der Strecke  $AB = s$  dar,  $s_0 = s''$ .



D

# REGISTER

## A

Abbildung 203, 268, 299  
–, Umkehrung einer 204  
abrunden 75  
absoluter Betrag 61  
absolutes Glied 92  
Abstand 210  
Abszisse 88  
Addition  
– von gebrochenen Zahlen 42  
– von natürlichen Zahlen 18  
– von Potenzen 133  
– von rationalen Zahlen 62  
– von reellen Zahlen 75  
Additionstheorem 153, 173  
Ähnlichkeit 90, 273  
Ähnlichkeitsabbildung 271  
Ähnlichkeitsfaktor 272  
Ähnlichkeitssätze 273  
Algorithmus 79  
Allmenge 9  
Altgrad 160  
Ankathete 164, 179, 232  
Anstieg 92 ff  
Antragen eines Winkels 207, 224  
Äquivalenz 96  
Argument 84  
Assoziativität  
Addition gebrochener Z. 43  
Addition natürlicher Z. 19  
Addition rationaler Z. 63  
Durchschnitt von Mengen 12  
Multiplikation gebrochener Z. 46  
Multiplikation natürlicher Z. 23  
Multiplikation rationaler Z. 64  
Vereinigung von Mengen 13  
Asymptote 138, 152, 155  
Aufriß 302

auf abrunden 76  
Ausklammern 78  
Ausmultiplizieren 78  
Aussagen 6, 95  
– form 6, 95  
Außenwinkel 201, 233  
Axialsymmetrie 222

## B

Basis  
– eines Dreiecks 232  
– eines Logarithmen-systems 154  
– einer Potenz 133  
Berührungsradius 253  
Betrag 61, 64  
Bewegung 204, 271  
–, gleichsinnige 205, 220  
Bild  
– einer Bewegung 161  
– einer Funktion 86  
– eines Punktes 203  
binäres Stellenwertsystem 31  
binomische Formel 78, 128  
Bogenmaß 160  
Brennpunkt 214  
Bruch 37, 52

## C

Cavalierisches Prinzip 288

## D

Darstellende Geometrie 299 ff  
Definitionsbereich 83  
dekadischer Logarithmus 155  
dekadisches Positionssystem 30  
Dezimalbruch 52  
– darstellung 51, 67  
Diagonale 201, 247 ff  
Differenz 21, 58  
direkte Proportionalität 112  
disjunkte Mengen 12

Diskriminante 129  
Distributivität  
Verknüpfung von Addition und Multiplikation 24, 47, 65  
Verknüpfung von Durchschnitts- und Vereinigungsoperation 14

## Division

– mit dem Rechenstab 191  
– von gebrochenen Zahlen 47  
– von natürlichen Zahlen 26  
– von Potenzen 133  
– von rationalen Zahlen 66  
– von reellen Zahlen 75

Dividend 27

Divisor 27

Doppelwinkelformeln 173

Drachenviereck 222, 247, 284

Drehung 161, 216, 227

Drehrichtung 161

Drehsinn 217

drehsymmetrisch 135

Dreieck 200, 226 f, 232 ff  
–, gleichschenkliges 167, 180, 232, 236  
–, gleichseitiges 167, 232, 236  
–, rechtwinkliges 69, 164, 179, 232, 272  
–, spitzwinkliges 182, 184, 232  
–, stumpfwinkliges 182, 184, 232  
–, unregelmäßiges 232  
Flächeninhalt des – 185, 283

Dreitafelprojektion 304 f

Dualsystem 30

Durchmesser 253

Durchschnitt von Mengen 11

## E

e (Konstante) 153  
Ebene 199, 203

echter Bruch 37  
 eindeutig 82  
 eineindeutig 141, 203  
 Einheit 111  
 Einheitskreis 165  
 Einheitsstrecke 210  
 Einheitswinkel 211  
 Einsetzverfahren 105  
 Eintafelprojektion 302  
 Element 7  
 eliminieren 105  
 Ellipse 214  
 Entfernung 210  
 entgegengesetzt liegende Winkel 231  
 entgegengesetzt rationale Zahlen 60  
 Ergänzungskegel 293  
 Ergänzungspyramide 291  
 erweitern 37  
 explizite Form 94  
 Exponent 133  
 Exponentialfunktionen 151 ff  
 exzentrische Kreise 263

**F**

Faktoren 22  
 Fallinie 311  
 Fehler  
 —, absoluter 112  
 —, relativer 112  
 Fläche 200, 202, 213  
 Flächeninhalt  
 — des Drachenvierecks 284  
 — des Dreiecks 185, 283  
 — des Kreises 285  
 — des Parallelogramms 283  
 — des Quadrats 281  
 — des Rechtecks 282  
 — des Rhombus 285  
 — des Trapezes 284  
 — des Vielecks 285  
 Flächenmaße 281  
 Folge 21  
 Frontstreifen 300  
 fortlaufende Proportion 117, 182

Funktion 83  
 —, gerade 136  
 —, konstante 152  
 —, lineare 90, 93  
 —, quadratische 122  
 —, ungerade 136, 221  
 Exponentialfunktionen 151  
 Logarithmusfunktionen 154  
 Potenzfunktionen 133, 147  
 Winkelfunktionen 160  
 Wurzelfunktionen 150  
 Funktionsgleichung 85  
 Funktionswert 84

**G**

g.g.T 35  
 Gärtnerkonstruktion 214  
 ganze Zahlen 67  
 gebrochene Zahlen 37 ff  
 echt — 42  
 unecht — 42  
 Gegenkathete 164, 179  
 Gegenwinkel 181  
 geltende Ziffern 77  
 gemeine Brüche 52  
 gemeinsamer Teiler 35  
 gemeinsames Vielfaches 34  
 gemischte Zahl 44  
 genau dann, wenn 8  
 Geraden 194 ff  
 —, orientierte 196  
 —, senkrechte 209  
 -spiegelung 219, 228  
 gerade Funktionen 136, 170, 222  
 gerade Zahlen 25, 31  
 Gerade-Zahl-Regel 76  
 gerichtete Strecken 197  
 gestreckter Winkel 212  
 gleichnamige Brüche 39  
 gleichschenkliges Dreieck 167, 180, 232  
 — Trapez 247  
 gleichseitiges Dreieck 167, 232  
 Gleichsetzungsverfahren 105  
 gleichsinnige Bewegungen 205, 220

Gleichung 95  
 —, lineare 98, 103  
 —, quadratische 128  
 Goldener Schnitt 276  
 Gradmaß 211  
 Graphische Darstellung 85  
 — der direkten Proportionalität 113  
 — der Winkelfunktionen 171  
 graphische Lösung  
 — linearer Gleichungen 102  
 — linearer Gleichungssysteme 108  
 — quadratischer Gleichungen 131  
 Größen 111  
 Grundbereich 7  
 Grundbetrag 121  
 Grundriß 302  
 Grundseiten 246  
 Grundwert 119  
 Grundziffern 30

**H**

Halbebene 199  
 Halbkreis 255  
 Hauptnenner 39  
 Haupttangente 165  
 Hauptwert eines Winkels 162  
 Höhe 241 f  
 Höhensatz 277  
 Hypotenuse 164, 179, 232  
 Hypothenusenabschnitt 277

**I**

implizite Form 94  
 indirekte Proportionalität 113  
 inkommensurabel 210  
 Inkreis 243  
 Innenwinkel 201, 233 236  
 Interpolieren 178  
 Intervall 70, 83, 88  
 — schachtelung 71  
 inverse Funktion 141  
 irrationale Zahl 74, 210  
 isolieren 96

**K**

k.g.V. 34, 40  
 Kardinalzahl 18  
 Kathete 164, 179, 232  
 Kathetensatz 278  
 Kavalierverspektive 308  
 Kegel 292  
 – stumpf 293  
 Kennzahl 157  
 Klammern 77  
 Klasse  
 – von Brüchen 38  
 – von Differenzen 59  
 – von Intervallschachtelungen 72  
 Kleiner-Beziehung 20  
 Koeffizient 92  
 kommensurabel 281  
 Kommutativität  
 Addition gebrochener Zahlen 43  
 Addition natürlicher Zahlen 19  
 Addition rationaler Zahlen 63  
 Durchschnitt von Mengen 11  
 Multiplikation gebrochener Zahlen 46  
 Multiplikation natürlicher Zahlen 23  
 Multiplikation rationaler Zahlen 64  
 Vereinigung von Mengen 13  
 Komplementwinkel 229  
 Kongruenz 170, 180, **205**  
 – sätze 237  
 konstante Funktion 152  
 konzentrische Kreise 263  
 Koordinaten  
 – system 85  
 – ursprung 85  
 Kosinus 163  
 – satz 183  
 Kotangens 163  
 Koten 303  
 Kreis **213**, **222**, 253 ff, **285**  
 – abschnitt 286

– ausschnitt 286  
 – bogen 255, **286**  
 – fläche 213  
 – kegel 292  
 – ring 286  
 – zylinder 289  
 Flächeninhalt 285  
 Inkreis 243  
 Umfang 285  
 Umkreis 183, **240**  
 Kreußriß 306  
 Kubikwurzel 147  
 Kugel 294  
 – teile 295 ff  
 kürzen 37

**L**

Länge 210  
 Längeneinheit 210  
 leere Menge 9  
 lineare Funktion 90 ff, 93  
 lineare Gleichung 98  
 lineares Glied <sup>92</sup>  
 Logarithmengesetze 154  
 logarithmieren 154  
 Logarithmus 154  
 –, dekadischer 155  
 –, natürlicher 155  
 – funktionen 154  
 Lösung 96  
 – eines Gleichungssystems 104  
 Lösungsformel 128  
 Lot **209**, **226**  
 Lücken 70

**M**

Mantisse 157  
 Maßstab 268  
 Maßzahl 111, 210  
 Mengen 7, 82  
 Allmenge 9  
 disjunkte Mengen 11  
 leere Menge 9  
 Obermenge 10  
 Teilmenge 9  
 Untermenge 10

Minuend 21  
 Mittellinie  
 – im Trapez 245  
 Mittelpunkt  
 – eines Kreises 253  
 – eines Parallelogramms 248  
 – einer Strecke 207  
 Mittelsenkrechte **222**, 225, **240**, 259  
 Monotonie  
 – bei Funktionen 88  
 – der Addition 22, 45, 63  
 – der Division 28, 49  
 – der Multiplikation 28, 47, 65  
 – der Subtraktion 22, 45, 64  
 Multiplikation  
 – mit dem Rechenstab 191  
 – von gebrochenen Zahlen 45  
 – von natürlichen Zahlen 22  
 – von rationalen Zahlen 64  
 – von reellen Zahlen 80  
 – von Potenzen 133

**N**

Nachfolger 21, 41, 62  
 Näherungswert 75, 112  
 natürliche Zahlen 18 ff  
 natürlicher Logarithmus 155  
 Nebentangente 165  
 Nebenwinkel **200**, 229  
 n-Eck 201  
 –, regelmäßiges 267  
 negative  
 – Drehrichtung 161  
 – rationale Zahl 59  
 – Winkel 161, 170  
 Neigungswinkel 311  
 Nenner 37





Neugrad 160  
 neutrales Element 19, 23,  
 44, 47  
 Normalform der quadra-  
 tischen Gleichung 128  
 Normalparabel 122  
 Nullpunkt 85  
 Nullstelle **88**, 98  
 Nullwinkel 212  
 Numerus 154

**O**

Oberfläche  
 – eines Kegels 292  
 – einer Kugel 294  
 – eines Prismas 289  
 – einer Pyramide 290  
 – eines Quaders 287  
 – eines Würfels 287  
 – eines Zylinders 290  
 Obermenge 9  
 Ordinalzahl 19  
 Ordinate 85  
 Ordnung  
 – gebrochener Zahlen  
 40  
 – natürlicher Zahlen  
 20  
 – rationaler Zahlen  
 61  
 Ordnungslinie 305  
 orientierte  
 – Geraden 196  
 – Strecken 197  
 Original 161, 196, 299  
 $\pi$  (Konstante) 285

**P**

Paar 19, 82  
 Zahlenpaar 95  
 Parabel **122**, 135  
 – achse 122  
 – ast 122  
 parallel **194**  
 Parallelogramm 221, **248**,  
 282

Parallelprojektion 203, 299,  
**300**  
 Pascalsches Dreieck 79  
 Passante 132, **253**  
 Periode 52  
 periodische Funktionen 169  
 Periodizität der Winkelfunk-  
 tionen 168  
 Peripheriewinkel 254 ff  
 Polygon 201  
 Positionssystem  
 –, dekadisches 30  
 –, duales 31  
 positive  
 – Drehrichtung 161  
 – rationale Zahl 59  
 Potenz 133  
 – funktionen 114, **133** ff,  
**147** ff  
 – gesetze 133  
 Potenzierung einer Potenz  
 134  
 Primfaktoren 33  
 – zerlegung 33, 34  
 Primzahl 26, 33  
 Prisma 289  
 Probe 97  
 Produkt 22  
 – gleichung 116  
 Projektion 299  
 projizieren 299  
 Promille 120  
 Proportion 116  
 –, fortlaufende 117  
 Proportionalität  
 –, direkte 112  
 –, indirekte 113  
 Proportionalitätsfaktor **113**,  
 114, 285  
 Prozent 119  
 – rechnung 118 ff  
 – satz 119  
 – wert 119  
 Punkt 194  
 – spiegelung **217**, 227  
 – symmetrie **221**, 248  
 Pyramide 290  
 Pyramidenstumpf 291  
 Pythagoras (Satz des –)  
 278

**Q**

Quader 287  
 Quadrant 166  
 Quadrantenbeziehung 169  
 Quadrat **251**, 281  
 quadratische  
 – Ergänzung 128  
 – Funktionen 122 ff  
 – Parabel 122  
 Quadratwurzel 73, **147**  
 Quadrieren mit dem Rechen-  
 stab 192  
 Quersumme 33  
 Quotient 27

**R**

Radikand 129, **147**  
 radizieren 147  
 rationaler Punkt 70  
 rationale Zahlen 59 ff  
 rationalmachen 148  
 Raummaße 286  
 räumliche Ecke 306  
 Rechenstab 190  
 Rechteck **250**, 282  
 rechter Winkel 208  
 rechtwinkliges Dreieck 69,  
 164, 179, 232, 277  
 reelle Zahlen 69 ff  
 Reziprokes **47**, 66, 114  
 Rhombus 248, **251**, 285  
 Richtung 195  
 Richtungssinn 196  
 Riß 299  
 – achse 304  
 Rundungsregeln 75

**S**

Schar von Funktionen 90  
 Scheitel  
 – einer Parabel 122  
 – eines Winkels 199  
 – winkel **200**, 229



## REGISTER

- Schenkel  
 (Dreieck) 232  
 (Trapez) 245  
 (Winkel) 161, 199  
 schiefwinkliges Dreieck 181, 186, 232  
 Schwerpunkt eines Dreiecks 244  
 Sehen **253**, 258  
 – tangentialwinkel **254**, 258  
 – viereck **253**, 266  
 Seitenhalbierende **244**  
 Sekanten 132, **253**  
 senkrechte Geraden 209, 225  
 Sinus 163  
 – satz 181  
 Spiegelbild 219  
 Spiegelung 123  
 Geradenspiegelung **219**, 228  
 Punktspiegelung **217**, 227  
 spitzer Winkel 208  
 spitzwinkliges Dreieck 182, 184, **232**  
 Spur 311  
 Stauchung 123  
 Stellenwert 30  
 Strahl 161, 198  
 Strahlensätze 275 ff  
 Strecken 197  
 – abtragung 206, 224  
 – länge 210  
 – teilung 276  
 – vergleich 206  
 –, Mittelpunkt einer 207  
 – Einheitsstrecke 210  
 Streckung 123, 268 ff  
 Stufenwinkel 229  
 stumpfer Winkel 208  
 stumpfwinkliges Dreieck 182, 184, **232**  
 Stützdreieck 312  
 Subtrahend 21  
 Subtraktion  
 – von gebrochenen Zahlen 44  
 – von natürlichen Zahlen 21  
 – von Potenzen 134  
 – von rationalen Zahlen 63  
 – von reellen Zahlen 75  
 Summand 19  
 Summe 19  
 Supplementwinkel **229**, 249  
 Symmetrie **221**, 247, 248, 251, 254  
 – achsen 122, **222**, 236  
 System linearer Gleichungen 104
- T**  
 Tangens 163  
 Tangenten 132, **253**, 258, 263  
 – abschnitt 264  
 – viereck 253, 266  
 teilbar 31  
 Teilbarkeitsbeziehung 25  
 Teilbarkeitsregeln 31  
 Teiler 25  
 –, gemeinsamer 35  
 teilerfremd 35, 37, 67  
 Teilmengen 9  
 –, echte 9  
 Teilverhältnis 276  
 Term 77  
 Thales (Satz des –) 257  
 Tiefenstrecken 300  
 Trapez **245**, 284  
 –, gleichschenkliges 247  
 Trigonometrie **178** ff  
 trigonometrische Funktionen 162, 178
- U**  
 überstumpfe Winkel 212  
 Umfang  
 – des Drachenvierecks 284  
 – des Dreiecks 283  
 – des Kreises 285  
 – des Parallelogramms 284  
 – des Quadrats 281  
 – des Rechtecks 282  
 – des Trapezes 284  
 – des Vielecks 285  
 umkehrbar 143  
 Umkehrung einer Abbildung 204  
 Umkehrfunktion 141 ff  
 Umkreis 183, **240** f  
 unechter Bruch 37  
 unendlicher Dezimalbruch 53  
 ungerade  
 – Funktion 136, 170, 221  
 – Zahl 25  
 ungleichsinnige Bewegung **205**, 220  
 Ungleichung 95  
 Untermenge 9  
 Ursprung 85
- V**  
 Variable  
 – für Argumente 84  
 – für Elemente 7  
 – für Mengen 7  
 – für Zahlen 58, 60  
 Vereinigung von Mengen 12  
 Verfahren der gleichen Koeffizienten 105, **106**  
 vergleichen  
 – zweier Strecken 206  
 – zweier Winkel 207  
 Vergrößerung 268  
 Verhältnis 111  
 – gleichung 116  
 Verkleinerung 268  
 Verschiebung 92, **215**, 226  
 Verzerrungswinkel 307  
 Vieleck **201**, 285  
 –, regelmäßiges 266  
 Vielfaches 25  
 –, gemeinsames 34  
 Viereck **245** ff, 284  
 –, konkaves **245**  
 –, konvexes **245**, 266  
 –, überschlagenes 245  
 Flächeninhalt des – 281 ff



## REGISTER

---

- Drachenviereck 222, **247**, 284  
Parallelogramm 221, **248**, 282  
Quadrat **251**, 281  
Rechteck **250**, 282  
Rhombus 248, **251**, 285  
Trapez **245**, 284  
vierte Proportionale 117  
Vietascher Wurzelsatz 130  
Vollwinkel 160  
Volumen  
– eines Kegels 292  
– einer Kugel 294  
– eines Prismas 289  
– einer Pyramide 290  
– eines Quaders 287  
– eines Würfels 287  
– eines Zylinders 290  
Vorzeichen  
(Potenz) 133  
(Produkt) 59, 65  
(Quotient) 66  
(Winkelmaß) 161
- W**
- Wechselwinkel 230  
Wertetabelle 84
- Wertevorrat 83  
wesentliche Ziffern 77  
Winkel 199  
– funktionen 160 ff, **162**  
– halbierende **208**, 223, 225, 243, 276  
– maße 160  
–, antragen eines 207, 224  
–, Einteilung der 208, 212  
–, entgegengesetzt liegende 231  
–, gestreckter 212  
–, vergleichen zweier 207  
Außenwinkel 233  
Einheitswinkel 211  
Innenwinkel 233  
Komplementwinkel 229  
Nullwinkel 212  
Stufenwinkel 229  
Supplementwinkel 229  
Wechselwinkel 230  
Würfel 287  
Einheitswürfel 287  
Wurzel 130, **147**  
– exponent 147  
– funktionen 149  
– gesetze 148  
– ziehen 147
- Wurzelziehen mit dem Rechenstab 192
- Z**
- Zahlengerade 59, 70  
Zahlenpaar 95  
Zahlenvergleich 111  
Zähler 37  
Zehnerbruch 51  
Zehnerpotenz 30, 51  
Zentrale **253**, 259  
– Streckung 268, 271  
Zentralprojektion 299, **309**  
Zentriwinkel **254** f, 258  
Ziffern 30  
–, geltende 77  
– zuverlässige Ziffern 77  
Zinsen 121  
Zinseszinsrechnung 121  
Zinsrechnung 121  
Zinssatz 121  
Zuordnung 82, 112, 199, 299  
zuverlässige Ziffern 77 f  
Zweierpotenz 30  
Zweitafelprojektion 302, **304**  
Zylinder 289

**A**

**GRUNDBEGRIFFE DER MENGENLEHRE**

**B**

**ZAHLENBEREICHE**

**C**

**FUNKTIONEN**

**D**

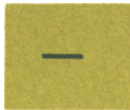
**GEOMETRIE**

**R**

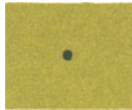
**REGISTER**



plus



minus



mal



geteilt durch; zu; durch (Bruchstrich)



ist gleich



identisch gleich



nicht gleich, ungl.



proportional



angenähert, rund



entspricht



kleiner als



größer als



kleiner  
oder gleich,  
höchstens  
gleich



größer  
oder gleich,  
mindestens  
gleich



Prozent



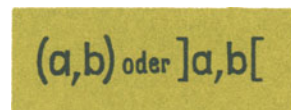
Promille



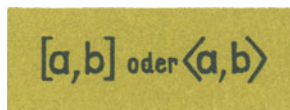
unendlich



Dreieck



offenes Intervall ab



abgeschlossenes Intervall ab



parallel



nicht parallel



rechtwinklig zu



kongruent



Winkel



Gerade AB



Strecke AB



gerichtete Strecke



Bogen AB



Betrag von z



Arkus z



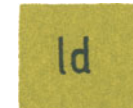
Wurzel aus



Log. zur Basis a



Zehnerlogarithm.



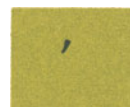
Zweierlogarithm.



natürl. Logarithm.



Grad (Altgrad)



Minute



Sekunde



Neugrad



Neuminute



Neusekunde



Element aus



nicht Element aus



enthalten in



echt enthalten in



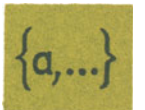
vereinigt



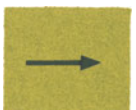
geschnitten



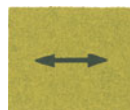
äquivalent



Menge aus a, ...



wenn ... so ...



genau dann wenn



die leere Menge



Sinus



Kosinus



Tangens



Kotangens