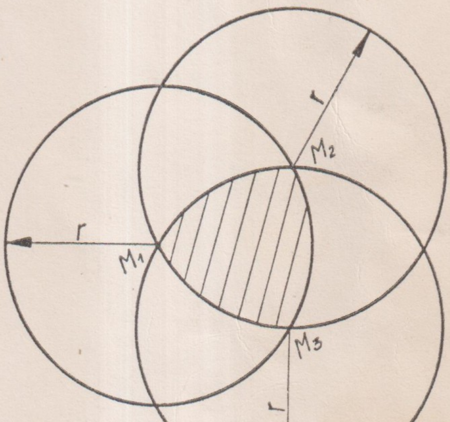
Unsere sozialistische Schule

Sonderheft Mathematik



Aufgabensammlung

Unsere sozialistische Schule

Heft 2/1964

Sonderheft Mathematik

Aufgabensammlung

Herausgegeben
vom Pädagogischen Kreiskabinett Hildburghausen
in Zusammenarbeit
mit der Abteilung Volksbildung beim Rat des Kreises Hildburghausen
und der BGL Unterricht und Erziehung

Liebe Kolleginnen und Kollegen!

Im Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962 heißt es:

> „Eine umfassende und hohe mathematische Bildung wird immer mehr zu einem wesentlichen Bestandteil der allseitigen Bildung des Menschen der sozialistischen Gesellschaft. Vom Inhalt und von der Qualität der mathematischen Bildung, die in unlösbarem Zusammenhang mit der polytechnischen Bildung und Erziehung steht, hängt es in starkem Maße ab, wie die Aufgaben in Wissenschaft und Technik bewältigt werden. Die Erreichung des wissenschaftlich-technischen Höchststandes und die Beherrschung moderner Produktionsinstrumente und -verfahren in allen Bereichen unserer sozialistischen Industrie und Landwirtschaft erfordern hohes mathematisches Wissen und Können der Ingenieure, Techniker und aller Facharbeiter."

Die Bedeutung der Mathematik und der Naturwissenschaften für die weitere Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR wird auch im Programm zum umfassenden Aufbau des Sozialismus in der DDR und in den Materialien der 5. Tagung des ZK der SED besonders betont. Immer wieder wird gesagt, daß ein umfangreiches mathematisches Wissen für Produktion und Wissenschaft heute und in der Zukunft in noch weit größerem Maße erforderlich ist. Die Mathematik muß sich immer mehr zu einer wahren Volkswissenschaft entwickeln.

Auf dem Wege zur Verbesserung des Mathematikunterrichts spielen regelmäßig durchgeführte Leistungsvergleiche und Olympiaden eine große Rolle. Bei solchen Ausscheiden in den Schulbereichen, in den Kreisen und Bezirken der Republik wurden teilweise recht interessante Aufgaben gestellt, die von uns in einer bereits im Sommer 1962 herausgebrachten mathematischen Aufgabensammlung zusammengefaßt wurden. Mit diesen Aufgaben wurde sehr häufig im Unterricht, in Arbeitsgemeinschaften und in der Erwachsenenqualifizierung gearbeitet. Oft wurde uns vorgeschlagen, recht bald eine neue Aufgabensammlung zur Verfügung zu stellen. So reifte der Entschluß, noch einmal eine erweiterte Aufgabensammlung herauszugeben. Diese neue Auflage enthält neben den Aufgaben von Olympiaden und Leistungsvergleichen auch einige Aufgaben, die unter Benutzung von anderen Aufgabensammlungen formuliert wurden.

Wir wünschen Ihnen und Ihren Schülern recht viel Freude bei der Arbeit mit diesen Aufgaben!

Hildburghausen, im März 1964

G. Zeitz
Fachberater für Mathematik

H. Göhring
Direktor des Päd. Kreiskabinetts

INHALTSÜBERSICHT

Aufgaben für die Klasse 5

1. 33 264 — 433 — 1 512 — 22 749 — 7 644 =

2. Ersetze die fehlenden Ziffern!

$$\begin{array}{l}
\,x\,x\,x\cdot x\,2 \\ \hline
\,x\,0\,8 \\
x\,6\,x \\ \hline
x\,1\,2\,x
\end{array}$$

Wie hast Du die fehlenden Ziffern gefunden?

3. Welche Ziffern fehlen in dieser Aufgabe?

Beschreibe auch, wie Du die Ziffern gefunden hast!

$$\begin{array}{r}
x\,1\,x\cdot 3\,x\,2 \\ \hline
x\,3\,x \\
3\,x\,2\,x\, \\
x\,2\,x\,5\,\, \\ \hline
1\,x\,8\,x\,3\,0
\end{array}$$

4. Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich geworden. Sie sollen ergänzt werden.
Beschreibe, wie Du die fehlenden Ziffern gefunden hast!

$$\begin{array}{l}
6\,x\,x\cdot x\,2\,x \\ \hline
\,x\,x\,x \\
\,x\,x\,2\,4 \\
\,\,x\,x\,3\,x \\ \hline
\,x\,x\,x\,x\,6
\end{array}$$

5. Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 12 subtrahiert und schließlich durch 9 dividiert. Man erhält dann 22. Wie heißt die gedachte Zahl?

6. Ergänze die fehlenden Zahlen des vorliegenden Quadrates! Die Zahlen der Zeilen und Spalten sind Glieder von Zahlenfolgen!

2		8		14
	8			20
	11	16		
10		24		

7. Eine Klasse sparte im Januar des Jahres 1961 122,80 MDN, im Februar 79,70 MDN, im März 83,— MDN. Welchen Betrag hat die Klasse im ersten Vierteljahr des Jahres 1961 gespart?

8. Während der Herbstferien waren viele Berliner Oberschüler im Ernteeinsatz. Dabei sammelte jeder der 1200 Schüler eines Berliner Stadtbezirkes durchschnittlich 8 dt Kartoffeln täglich. Die Schüler arbeiteten 4 Tage.
   a) Wieviel Kartoffeln wurden von den Schülern dieses Stadtbezirkes insgesamt gesammelt? (in Dezitonnen)
   b) Wieviel Familien können von diesem Vorrat Kartoffeln erhalten, wenn der Jahresbedarf je Familie 250 kg Kartoffeln beträgt?

9. Eine HO-Verkaufsstelle erhält eine Lieferung von 12 Kisten mit Äpfeln. Eine Kiste enthält 12 kg.
   Im Laufe des Vormittags werden folgende Mengen verkauft: 7,5 kg; 0,5 kg; 3,75 kg; 9 kg; 2,5 kg.
   Welche Menge hat die Verkaufsstelle noch vorrätig?

10. Wieviel dt Ware hat ein Lieferwagen der GHG-Lebensmittel geladen, wenn er an die Konsumverkaufsstelle 18/4 folgende Waren zu liefern hat: 2,5 dt Zucker, 200 kg Salz, 1 dt 75 kg Mehl, 8,125 kg Kaffee, 5 Kisten Äpfel zu je 15,5 kg und 1000 Päckchen Tee zu je 25 g?

11. Eine LPG hat 786 ha Land mit Getreide bestellt. Zur Ernte wurden für einen Hektar Getreide 4 kg Bindegarn benötigt. Wieviel Kilogramm Bindegarn wurden verbraucht?

12. Die LPG „Völkerfreundschaft" bebaut einen Teil ihrer Nutzfläche mit Mais. Ein rechteckiges Feld ist 400 m lang und 200 m breit. Berechne den Flächeninhalt in ha!

13. Im Rechenschaftsbericht an den XXII. Parteitag der KPdSU heißt es, daß an die Bevölkerung der Sowjetunion im Jahre 1953 insgesamt 1 757 000 t, im Jahre 1960 aber 4 158 000 t Fleisch und Fleischerzeugnisse verkauft wurden.
    Wieviel Tonnen Fleisch und Fleischerzeugnisse wurden 1960 mehr verkauft als 1953?

14. Eine LPG lieferte an den Staat ab:

Winterroggen	1 437 dt (Preis je dt: 21,— MDN)
Futtergerste	204 dt (Preis je dt: 22,40 MDN)
Frühkartoffeln	387 dt (Preis je dt: 12,— MDN)
Spätkartoffeln	1 600 dt (Preis je dt: 7,20 MDN)

    Berechne die Gesamteinnahme!

15. Ein quadratischer Teich soll auf die doppelte Größe gebracht werden. An den Ecken steht je ein Baum. Der Teich soll quadratisch bleiben. Die Bäume sollen ebenfalls an ihrem Platz bleiben. Wie ist das möglich? Fertige eine Zeichnung an, und begründe die Lösung!

16. Titow umkreiste mit dem Weltraumschiff „Wostok II“ in 25 Stunden und 18 Minuten unsere Erde siebzehnmal. Wie lange dauerte eine Umkreisung?
In welcher Zeit hat er die Erde zehnmal umkreist?

17. Die interplanetare sowjetische Station „Mars I“ hatte am 11. Dezember 1962 eine Entfernung von vierzehn Millionen zweihundertundsechstausend Kilometer von der Erde erreicht. Sie flog in der Sekunde viertausendachthundertunddreißig Meter. Welche Entfernung hatte die Station genau vierundzwanzig Stunden später?

18. Ein Kalk- und Zementwerk benötigt täglich 240 Tonnen Kalksteine, die durch eine Seilbahn zugeführt werden. Wieviel Loren müssen täglich gefüllt werden? Eine Seilbahnlore faßt 250 kg.

19. Peter hat sechs Freunde zum Geburtstag eingeladen. Bei der Begrüßung gibt jeder Junge jedem einmal die Hand. Wievielmal erfolgt ein Händedruck?

20. Petra spielt mit Werner eine Partie Schach. Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?“ Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, daß die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Haus in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren.“ (Die Bahn fährt alle 20 Minuten). Wie lange haben Petra und Werner gespielt?

21. Im Werkunterricht sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang. Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm. Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen Abstand haben.
   a) Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?
   b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?

22. Für den Unterricht soll aus Zeichenkarton das Modell eines Würfels mit der Kantenlänge von 3 cm gebaut werden. Zeichne drei Möglichkeiten auf! Kennzeichne jeweils diejenigen Flächen mit gleicher Farbe, die bei dem zusammengebauten Körper einander gegenüber liegen!

23. Eine Klasse hat im letzten Schuljahr 683,20 MDN für die Ferienwanderungen gespart. Es bilden sich drei Wandergruppen, eine zu 8, eine zu 11 und eine zu 13 Schülern. Verteile das Geld gerecht auf die drei Gruppen!

24. Ein Schuljahr hat 37 Unterrichtswochen. In jeder Woche sind immer 30 Unterrichtsstunden zu je 45 Minuten. Wieviel Unterrichtsstunden gehen im Schuljahr verloren, wenn in jeder Stunde durchschnittlich 3 Minuten verbummelt werden?

25. „Genau eine Millionzweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen", sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.

Wann treffen die beiden wieder zusammen?

26. Du sollst für 6,50 MDN Briefmarken einkaufen, und zwar 5-Pf-Marken, 15-Pf-Marken und 25-Pf-Marken!

Welche Mengen kannst Du verlangen?

Nenne 5 Einkaufsmöglichkeiten! Gibt es noch mehr?

27. Die Erdölleitung „Trasse der Freundschaft" wird etwa 4 000 km lang sein. In jeder Stunde wird die DDR durch diese Leitung 540 t Erdöl erhalten.

a) Wieviel Tonnen sind das in einer Minute?

b) Wieviel Kilogramm sind das in einer Sekunde?

28. Beim Aufbau des Berliner Stadtzentrums entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers". Zuerst wurde die Baugrube ausgehoben. Dabei mußten etwa 7100 m^3 Boden abtransportiert werden.

a) Wieviel Muldenkipperladungen waren das, wenn ein Kipper 4 m^3 Boden transportieren kann?

b) Wie lang wäre der für den gesamten Transport nötige „Muldenkipperzug" gewesen, wenn jeder Muldenkipper eine Länge von 3 m hat?

c) Wieviel Muldenkipperladungen wären es, wenn ein Kipper 5 m^3 Boden fassen würde?

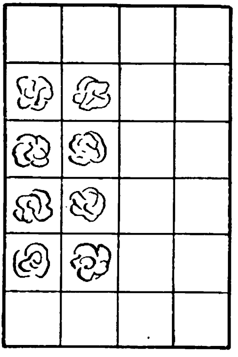
29. An einem Tische sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian. Weiter wissen wir nur, daß unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.

a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?

b) Warum muß er so heißen?

30. Vier Geschwister haben sich gemeinsam ein Gartengrundstück gekauft, in dem 8 große Obstbäume stehen, die nicht verpflanzt werden können (siehe beigefügte Figur). Sie wollen das Grundstück so aufteilen, daß jeder ein Stück von gleicher Größe und zwei Bäume erhält. Welche Möglichkeiten der Aufteilung des Grundstückes gibt es?

Zeichne die Lösungen in die beigefügte Figur ein!

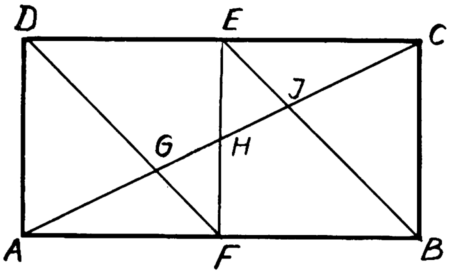


31. Klaus besucht seinen Bruder in Erfurt. Er läuft eine gerade Straße entlang, biegt um eine Ecke (90^0) und muß zum zweiten Mal um eine Ecke (90^0) biegen. Wie verlaufen erste und letzte Straße zueinander?

32. Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem zwölf Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legte in jeder Stunde 4 km zurück. Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen.

Wann muß sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

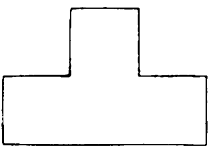
33. Wieviel Dreiecke sind in der Figur enthalten?



Schreibe alle Dreiecke auf (z. B. ABC)!

34. Wer kann die untenstehende Figur mit einem Scherenschnitt so zerschneiden, daß die Teile zu einem Quadrat zusammengelegt werden können? Wer findet dazu zwei völlig verschiedene Möglichkeiten?

(Es ist gut, wenn man sich eine entsprechende Figur aus Papier ausschneidet und es damit versucht.)



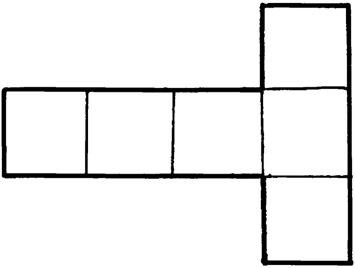
35. Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6 cm! Schraffiere davon $^4/_9$ (vier Neuntel)!

36. Zeichne zwei Winkel, $\alpha = 30^0$ und $\beta = 50^0$! Addiere sie mit Hilfe des Zirkels!

37. Trage auf einer Geraden nacheinander die Strecken AB = 3 cm, BC = 5 cm und CD = 4 cm ab!

Wie groß ist die Entfernung zwischen den Mitten der Strecken AB und CD? Begründe Deine Antwort durch Rechnung!

38. Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Netz eines Würfels zu zeichnen. Versuche noch 5 andere Würfelnetze zu finden, und zeichne sie möglichst genau (Kantenlänge a = 2 cm)!

39. Zeichne drei verschiedene Körpernetze für einen Quader mit den Kantenlängen

$a = 3$ cm (Länge),
$b = 2$ cm (Breite),
$c = 1$ cm (Höhe)!

40. Nach der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100."

a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?

b) Wie hast Du das Ergebnis gefunden?

41. Die Kosmonautin Valentina Tereschkowa umkreiste mit dem Raumschiff „Wostok 6" rund 48mal die Erde. Durchschnittlich benötigte sie für jede Umkreisung rund 88 Minuten.

Wie lange dauerte der gesamte Weltraumflug?

42. In einem volkseigenen Betrieb wurden bis Ende Juni von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, täglich 2 Stück mehr zu produzieren.

a) Wieviel Maschinenteile dieser Art wurden nunmehr monatlich — 26 Arbeitstage — angefertigt?

b) Wieviel solche Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan hinaus produziert werden?

43. Der VEB Simson Suhl produziert gegenwärtig täglich 235 Kleinstroller KR 50. Im Jahre 1958 betrug die Produktion dagegen nur 42 Kleinstroller täglich. Wieviel Kleinstroller wurden im Jahr 1963 mehr produziert als im Jahr 1958?

Die Anzahl der Arbeitstage eines Jahres sei dabei mit 300 angenommen.

44. Klaus hat sich für die „Knobelecke“ eine interessante Aufgabe ausgedacht: Es sollen bei der Multiplikationsaufgabe

$$13\,x \cdot 7\,x = 1\,x\,x\,x\,x$$

alle x so durch Ziffern ersetzt werden, daß alle drei Zahlen auf die gleiche Ziffer enden und daß beim Ergebnis an der Zehnerstelle die gleiche Ziffer steht wie an der Hunderterstelle.

Was hast Du bei der Lösung dieser Aufgabe überlegt?

45. Klaus, Ingrid, Peter und Susanne sollen bei einem Sportfest an einem Staffellauf teilnehmen.

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen? Begründe Deine Antwort!

b) Wieviel Möglichkeiten gäbe es, wenn die Staffel aus fünf Läufern bestehen würde?

46. Heidi, Fritz und Dieter sammeln Briefmarken. Auf die Frage, wieviel Briefmarken sie alle zusammen besitzen, antwortet Fritz: „Jeder von uns hat eine ungerade Anzahl von Briefmarken, zusammen sind es genau 500 Stück?“

Was meinst Du zu dieser Behauptung?

47. Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater: „Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die Du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde Dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist.“

Wieso weiß Peter das?

48. Von fünf Thälmann-Pionieren sind folgende zehn Altersvergleiche bekannt:

Doris ist jünger als Marga, Bärbel älter als Inge, Renate älter als Doris, Inge jünger als Marga, Bärbel jünger als Renate, Renate jünger als Marga, Doris älter als Inge, Marga älter als Bärbel, Inge jünger als Renate, Doris älter als Bärbel.

a) Wie lautet die Reihenfolge der fünf Mädchen nach ihrem Alter? Beginne mit der Jüngsten!

b) Welche angegebenen Vergleiche sind überflüssig? Warum?

49. Nach der Eichordnung sind im Bereich von 1 g bis 1 kg nur Wägestücke in den Größen von 1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g und 1 kg zugelassen. Mit einer Waage soll man alle Massebeträge zwischen 1 g und 2 kg in Abstufungen von 1 g ermitteln können. Dabei sollen die Wägestücke nur auf einer Seite aufgestellt werden.
Wieviel Wägestücke der oben angegebenen Sorten werden dann benötigt, wenn ihre Gesamtzahl möglichst gering sein soll?

50. In 2 Minuten greifen und befördern 3 Bagger 108 m^3 Erde.
Ein Erdarbeiter kann an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m^3 Erde ausheben. Verschaffe Dir eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit eines solchen Baggers, indem Du ausrechnest, wieviel Erdarbeiter erforderlich wären, um einen Bagger zu ersetzen!

51. Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl. Bestimme diese beiden Zahlen!

Aufgaben für die Klasse 6

1. $9\,{}^{4}/_{45} - {}^{138}/_{130} =$

2. $68\,{}^{24}/_{49} - {}^{1808}/_{35} =$

3. $3451\,{}^{23}/_{25} - 2868\,{}^{24}/_{49} =$

4. $13\,{}^{3}/_{4} + 7\,{}^{1}/_{2} + 6\,{}^{5}/_{9} + 4\,{}^{7}/_{12} =$

5. Ein Summand ist $44\,{}^{3}/_{4}$, die Summe ist $131\,{}^{3}/_{8}$.
   Wie heißt der andere Summand?

6. Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\,{}^{1}/_{2}$ mal so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.
   a) Wie lautet die Zahl?
   b) Wie hast Du sie gefunden?
   Zeige, daß es nur eine solche Zahl gibt!

7. In einer Rechenaufgabe auf einer Schiefertafel sind durch x ersetzte Ziffern unleserlich geworden.
   Wie müssen sie heißen?

$$\begin{array}{rr} & 123x7 \\ - & 6439 \\ - & 1x62 \\ - & x254 \\ \hline & 180x \end{array}$$

8. Brigitte liebt lustige Knobelaufgaben. Sie erzählt: „Mein Vater, meine Mutter und ich sind zusammen 88 Jahre alt. Meine Mutter ist genau dreimal so alt wie ich und vier Jahre jünger als mein Vater."
   Wie alt ist Brigitte?
   Wie alt sind ihre Eltern?
   Beschreibe, wie man die Lösung finden kann!

9. Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden."
   Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

10. Die Summe von vier Zahlen beträgt 1365. Der zweite Summand ist doppelt so groß wie der erste, und jeder folgende Summand ist immer doppelt so groß wie der vorhergehende.
   Wie lautet der erste Summand? Wie hast Du die Lösung gefunden?

11. Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

12. 6 kleine Tannen sollen so gepflanzt werden, daß sie 3 Reihen zu je 3 Tannen bilden! Zeichne wenigstens drei Lösungen auf!

13. Wieviel verschiedene Arten von Personenzug-Fahrkarten II. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll?

    Wie hast Du die Anzahl ermittelt?

14. Edgar hat während einer Mathematikarbeit eine Nebenrechnungsaufgabe so flüchtig hingeschrieben, daß er viele Ziffern selbst nicht mehr lesen kann. Kannst Du die unleserlichen Ziffern herausfinden? Wie lautet die Aufgabe?

```
x x 5 x x : x 9 = x x x
1 x x
-----
  1 0 x
    x 7
   -----
    2 x 3
    x x x
    -----
```

15. Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU 104 von Prag nach Kairo. Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

    a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
    b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
    c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
    d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.

    Wie heißt der Ingenieur?

    Wie heißt der Elektriker?

    Wie heißt der Monteur?

    Die Lösung ist zu begründen!

16. Die Seiten a und b eines Dreiecks sind zusammen 10 cm lang, die Seiten b und c zusammen 12 cm, die Seiten a und c zusammen 14 cm. Wie groß ist der Umfang, und wie lang ist jede Seite? Erläutere den Lösungsweg!

17. Ein Zimmer, das 4,16 m lang und 2,80 m breit ist, soll mit 64 cm breitem Linoleum belegt werden, so daß die ganze Fläche bedeckt ist.
Gib an, wieviel Meter Linoleum zu kaufen und wie groß die Stücke zu schneiden sind, damit kein Abfall entsteht und die Zahl der Stücke möglichst klein ist!

18. Der Umfang eines Quadrates beträgt 76 cm. Wie groß ist die Fläche?

19. Eine Verkäuferin verkauft von einem Stoffballen nacheinander $2\,^1/_2$ m, $4\,^1/_4$ m und $3\,^2/_5$ m Stoff. Auf dem Stoffballen waren vor dem Verkauf 19 m Stoff.
   a) Wieviel m Stoff verkaufte sie?
   b) Wieviel m Stoff waren nach dem Verkauf noch auf dem Ballen?

20. Wieviel Weinflaschen können aus einem Tank von 5 hl Fassungsvermögen abgefüllt werden? (1 Flasche $\mathrel{\widehat{=}}$ 700 ml)

21. In einer LPG waren auf einer Fläche von 21 ha Zuckerrüben zu verziehen.
Die Pioniere verzogen $12\,^1/_2$ ha, die DFD-Gruppe verzog $2\,^3/_4$ ha, die FDJ-Gruppe verzog $3\,^1/_5$ ha.
Wieviel Hektar verblieben der Feldbaubrigade?

22. Vier Personen spielen gemeinsam im VEB-Zahlen-Lotto. A bezahlt 1,50 MDN; B zahlt 2,— MDN; C zahlt 2,50 MDN und D 3,— MDN.
Die Spielgemeinschaft erhält einen Gewinn von 7 200 DM. Wie muß der Gewinn entsprechend den Einzahlungen verteilt werden?

23. Von 3 Zwergbäumen des Schulgartens ernten die Pioniere $38\,^1/_2$ kg, $24\,^3/_4$ kg und $26\,^2/_5$ kg Äpfel. Wieviel kg sind in der Obsthorde, wenn vorher schon $59\,^2/_3$ kg eingelagert wurden?

24. Die Umzäunung eines quadratischen Gartens wird erneuert. Sie kostet 992,— MDN. Ein Meter Zaun wird mit 4,— MDN berechnet. Ermittle die Fläche dieses Gartens, und wandle das Ergebnis in Hektar um!

25. Zur Aufbewahrung von Physikgeräten braucht eine Klasse 15 Kästen. Zu jedem Kasten werden $40\,^2/_3$ dm^2 Holz benötigt. Wieviel m^2 Holz muß die Klasse für alle Kästen einplanen?

26. 1 kg Mehl ergibt $1\,^1/_3$ kg Brot. Wieviel kg Brot kann man aus 21 kg Mehl backen?

27. Ein „Trabant“ fährt bei einem Kilometerstand von 17 880 km los. Nach der Rückkehr steht sein Kilometerzähler auf 18 030 km. Der Benzinverbrauch betrug 10 $\frac{1}{2}$ l.

a) Wieviel km hat der „Trabant“ zurückgelegt?

b) Wieviel l Treibstoff muß der Fahrer tanken, wenn er eine Strecke von 350 km fahren will?

28. Bei den im Oktober 1961 durchgeführten sowjetischen Raketenversuchen lagen bei einer Zielentfernung von etwa 12 500 km alle Treffer innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als 1 km war. Wie groß wäre der Radius des Trefferkreises bei einem Schüler, der mit gleicher Treffsicherheit auf ein 25 m entferntes Ziel einen Schlagball werfen würde?

29. Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Nikolajew und Popowitsch umkreisten die Raumschiffe Wostock III und Wostock IV in rund 88 Minuten einmal die Erde (rund 41 000 km).

a) Welche Strecke legte jedes Raumschiff in einer Stunde zurück?

b) Welche Strecke legte es in jeder Sekunde zurück?

Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden!

30. Beim Werkunterricht benutzt Regine eine Tischbohrmaschine. Sie weiß, daß der Bohrer bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tief in das Werkstück eindringt. Sie soll ein Werkstück von 30 mm Dicke durchbohren. Die Bohrmaschine macht in einer Minute 240 Umdrehungen.
In welcher Zeit kann Regine eine Bohrung durchführen?

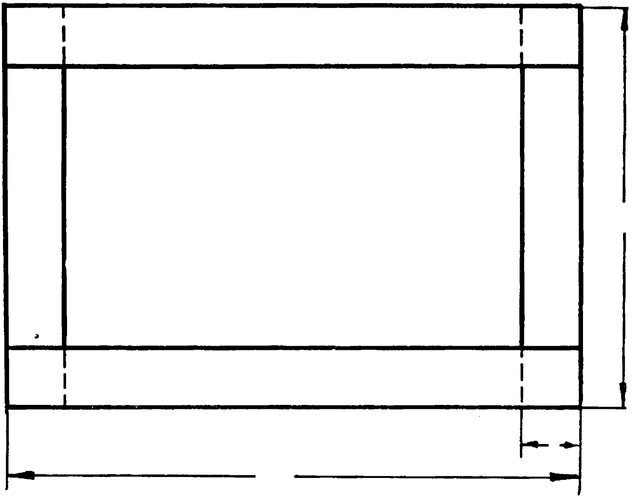
31. Im Werkunterricht soll ein Brett für Garderobenhaken vorbereitet werden. Es soll eine Länge von 40 cm und eine Breite von 15 cm haben. Drei Garderobenhaken sind vorgesehen.

a) Zeichne das Brett im Maßstab 1:5!

b) Bestimme die Stellen für die Befestigung der Haken, die im gleichen Abstand angebracht werden sollen!

c) Reiße die Stellen für die Befestigung der Haken an, wenn ihre gegenseitigen Abstände und der Abstand der äußeren Haken von der Brettkante gleich sein sollen!

32. Der in der Figur dargestellte Rahmen soll im Werkunterricht mehrfach gefertigt werden.



Maßstab 1 : 10

a) Ermittle die fehlenden Maße in cm, indem Du mit dem Lineal die Strecken abmißt (beachte den Maßstab)!

b) Berechne, wieviel Meter Rahmenleiste für 20 Rahmen erforderlich sind!

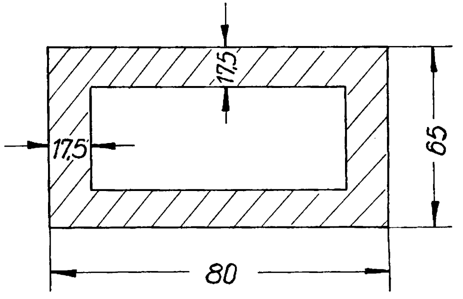
c) Jeder Holzrahmen soll auf der Vorderseite mit Farbe gestrichen werden. Welche Gesamtfläche in dm^2 müßte bei 80 solchen Rahmen gestrichen werden?

d) Die Holzstärke beträgt 1 cm. Wie groß wäre die Gesamtfläche in dm^2 bei 60 Rahmen, wenn sämtliche Flächen (Vorder- und Rückseiten sowie Seitenflächen) gestrichen würden?

e) Zur Herstellung eines solchen Rahmens werden 4 dm^3 Holz berechnet. Wieviel dm^3 Holz werden für 20 Rahmen benötigt? Rechne das Ergebnis in m^3 um!

33. Im Werkunterricht wird von der 6. Klasse ein Klassensatz (25 Stück) von flachen Holzrahmen hergestellt (siehe Figur). Jedes Modell wird auf der Vorder- und Rückseite mit Farbe angestrichen (schraffierte Fläche). Welche Gesamtfläche (in dm^2) muß insgesamt gestrichen werden?

Die Maße in der Zeichnung sind in mm angegeben!



34. Inge fragt ihren Bruder Klaus, der mit seiner Klasse in den Herbstferien einer LPG bei der Kartoffelernte geholfen hat, nach dem Ergebnis der Erntehilfe.

Klaus antwortet: „Insgesamt wurden 15 000 dt Kartoffeln geerntet. $^1/_5$ dieser Menge sammelten wir Schüler, $^1/_3$ dieser Menge wurde von einigen Genossenschaftsbauern mit der Kartoffelkombine geerntet, den Rest sammelten die anderen Genossenschaftsbauern.“

Wieviel Dezitonnen Kartoffeln ernteten

a) die Schüler,
b) die Bauern mit der Kartoffelkombine,
c) die übrigen Genossenschaftsbauern?

35. Von den bisher festgesetzten 296 Minuten wurden im Rahmen des Produktionsaufgebotes von den Arbeitern des VEB Druck- und Prägemaschinen Berlin bei einem Arbeitsgang 96 Minuten eingespart. Das macht je hergestellte Maschine 2,40 MDN aus.

a) Wie groß ist die Einsparung, wenn 60 Prägemaschinen hergestellt werden?

b) Infolge des Produktionsaufgebotes konnten sogar 83 statt 60 Maschinen hergestellt werden.

Wie groß ist dabei die Einsparung?

36. Drei Pionierfreundschaften aus den Orten A, B und C machen eine Sternwanderung. Von den Orten A bis B sind es 6 km, von B bis C 8 km und A bis C 7 km kürzeste Wegstrecke.
   a) Konstruiere den Treffpunkt im Maßstab 1:100000 (1 km ≙ 1 cm)! Alle Pioniergruppen sollen den gleichlangen Anmarschweg bis zum Treffpunkt haben!
   b) Wie lang ist der Anmarschweg aller Pioniere bis zum Treffpunkt?

37. Zeichne ein beliebiges Dreieck, und halbiere die Winkel α, β und γ!

38. Zeichne zwei Nebenwinkel, und konstruiere ihre Winkelhalbierenden! Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe Deine Antwort!

39. Zeichne mit Lineal und Zeichendreieck ein Rechteck mit den Seiten $a = 6{,}7$ cm und $b = 3{,}5$ cm! Halbiere die Seiten des Rechteckes durch Konstruktion!

40. Zeichne den Grundriß eines Quaders mit 4,3 cm Breite, 3,9 cm Höhe und 2,6 cm Länge!
   a) Der Quader steht mit seiner größten Fläche auf der Grundrißtafel.
   b) Der Quader steht mit seiner kleinsten Fläche auf der Grundrißtafel.
   c) Berechne Rauminhalt und Oberfläche des Quaders!

41. Zeichne einen beliebigen spitzen Winkel, und nenne seinen Scheitelpunkt A! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt, und nenne ihn P!
   Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so, daß die Strecke PX gleich der Strecke AX ($PX = AX$) ist! Begründe die Konstruktion!

42. Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in A an AB den Winkel $\alpha = 45°$ an! Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt B liegt, ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:
   Verbindet man P und B, dann soll

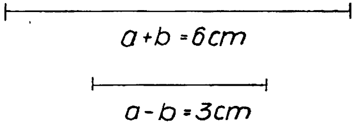
   $\sphericalangle ABP = \sphericalangle APB$ sein.

   Wie kann man den Punkt P konstruieren?

43. Konstruiere nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal einen Winkel von $157^1/_2°$!

44. Gegeben sind ein beliebiges Dreieck und zwei Geraden g_1 und g_2, die das Dreieck weder schneiden noch berühren und zueinander nicht parallel sind. Konstruiere die Dreiecke, die zu dem gegebenen symmetrisch liegen, und zwar einmal bezüglich g_1 als Symmetrieachse, zum anderen bezüglich g_2 als Symmetrieachse!

45. Gegeben sind zwei Strecken. Die eine ist gleich der Summe zweier Strekken, die andere ist gleich ihrer Differenz. (Siehe Figur)
Wie lang sind die Strecken a und b? Beschreibe, wie Du die Lösung gefunden hast!



46. In einer Ebene sollen vier verschiedene Geraden so gezeichnet werden, daß genau
a) kein Schnittpunkt,
b) 1 Schnittpunkt,
c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
e) 5 Schnittpunkte,
f) 6 Schnittpunkte entstehen!
Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

47. Gegeben seien zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung. Zeichne die Gerade, die durch A und B geht, und begründe die Konstruktion!

48. Gegeben sind neun Quadrate mit den Seitenlängen

a = 36 mm	f = 16 mm
b = 30 mm	g = 14 mm
c = 28 mm	h = 8 mm
d = 20 mm	i = 2 mm
e = 18 mm	

Füge diese Quadrate so zusammen, daß sie ein Rechteck bilden!
Fertige dazu eine Zeichnung an!

49. Einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit den Katheten a ist ein Quadrat so einbeschrieben, daß es mit ihm einen gemeinsamen Winkel hat. Ermittle den Umfang des Quadrates zeichnerisch!

50. Wieviel Streichhölzer von je 5 cm Länge werden gebraucht, um eine quadratische Fläche von 1 m^2 in gleichgroße Quadrate aufzuteilen, die von je vier Streichhölzern begrenzt werden? (Dabei dürfen zwei benachbarte Quadrate nur durch *ein* Streichholz getrennt werden.)

51. Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden MDN aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.

a) Wieviel MDN wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?

b) Wieviel MDN waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

52. Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager. Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mußten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein. Wieviel km fuhren die Pioniere mit dem Bus? Wie lange dauerte die Fahrt?

53. Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück, die Rundfunkwellen dagegen rund 300 000 km.

Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher,

a) ein Zuhörer in der ersten Reihe im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt, oder

b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1000 km mit Kopfhörern abhört?

Begründe Deine Behauptung!

54. Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.

a) Zeige, daß unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!

b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

55. Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die beim Dividieren
durch 2 den Rest 1,
durch 3 den Rest 2,
durch 4 den Rest 3,
durch 5 den Rest 4 und
durch 6 den Rest 5 aufweist.

Aufgaben für die Klasse 7

1. a) $(-5/6)^2$ b) $(3/4)^2$ c) $(-2/3)^5$ d) $(-4/5)^4$

   Ordne die Ergebnisse der Größe nach!

2. $(+27\,3/4) - (6{,}25) - (-8{,}125) - (+8\,1/2) - (+0{,}75) - (-22\,1/4)$
   $+ (-3{,}625) =$

3. Löse folgende Aufgabe:

   $$3/10 \cdot 1\,2/3 + \frac{7 \cdot 0{,}6}{16\,4/5} - \frac{3{,}9}{5{,}2} : 5/6 =$$

4. Berechne:
   a) $(-15\,3/4) \cdot (-2\,2/3) \cdot (-1) =$
   b) $(-3) \cdot (+0{,}9) + (-5) \cdot (-1{,}2) =$

5. Berechne:

   $-47{,}225 - (-36\,3/4) - (+19{,}08) - (-132\,4/5) + (-0{,}85) - (+3/8) =$

6. Ordne folgende Zahlen der Größe nach:
   $29/8;\ -0{,}6\overline{6};\ -3/2;\ 2/3;\ 3{,}52;\ 0{,}67;\ 3{,}\overline{52}$!

7. Der Unterschied zwischen 0,3 und 0,7 ist bekanntlich 0,4. Wie groß ist der Unterschied zwischen 0,9 und 0,12?

8. In der Zahl x 3 7 8 x sind an Stelle der x-Zeichen Ziffern zu setzen, so daß die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist!

   Wie hast Du die fehlenden Zahlen ermittelt?

9. Die Summe von 9 aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen beträgt 396. Wie lauten die Zahlen?

10. Bilde die Summe der Zahlen von 1 bis 100! Erkläre Deinen Lösungsweg!

11. Vermehrt man das 8fache einer Zahl um 20 und vermindert man diese Summe um das 4fache der gleichen Zahl, so erhält man dasselbe, wie wenn man 98 um das 9fache dieser Zahl vermindert. Wie heißt diese Zahl?

12. Hannelore sagt: „Ich bin 5 Jahre älter als mein Bruder Klaus, vor 3 Jahren war ich doppelt so alt wie er.“ Wie alt ist Hannelore?

13. Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter drei Kinder (ungleichmäßig) verteilen, daß jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält.

Was meinst Du dazu? Begründe Deine Antwort!

14. Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von vier verschiedenen Bauwerken vier genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 % der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und viermal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.

a) Wieviel Lösungen waren eingesandt worden?

b) Wieviel Einsender hatten 0, 1, 2 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

15. Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuß ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:

Einmal die 3	einmal die 8
zweimal die 5	einmal die 9
zweimal die 6	einmal die 10
zweimal die 7	

Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuß; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoß die 9.

a) Wer gewann den Wettkampf?

b) Wer schoß die 10?

Die Antworten sind zu begründen!

16. Emil erzählt: „Mein Bruder Heinz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 85 Jahre alt."

Wie alt ist Emil?

Beschreibe, wie Du die Lösung gefunden hast!

17. An einer Berliner Mathematik-Olympiade nahmen im Stadtbezirk Köpenick 3808 von 5828 Schülern und im Stadtbezirk Lichtenberg 5097 von 7387 Schülern teil.

Welcher Stadtbezirk wies die bessere Beteiligung auf?

Die Antwort ist zu begründen!

18. Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, daß er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen. Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: „Wenn Du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als Du vor Deiner.“ Sie vereinbaren, daß sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und daß der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen).

a) Wer gewinnt?

b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?

c) Wieviel Stufen müßte die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben).

Begründe Deine Antworten!

19. In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so daß an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden.

Wieviel neue Fensterläden braucht man?

Begründe Deine Antwort!

20. Ein 8-Liter-Maß ist mit Wasser gefüllt. Es sind noch ein 3-Liter-Maß und ein 5-Liter-Maß vorhanden. Wie werden 4 Liter abgemessen?

21. Für den Bau einer Schule war geplant, ein quadratisches Grundstück abzustecken. Bei der Bestätigung des Planes wurde beschlossen, den Flächeninhalt des Grundstücks um 2600 m^2 zu vergrößern. Zu diesem Zweck wurde die eine Seite des quadratischen Grundstückes um 10 m und die andere um 20 m vergrößert. Ermittle die Maße des rechtwinkligen Grundstücks!

22. Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km^2. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha. Wieviel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

23. Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht. Wieviel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

24. Die waagerechte Fahrbahn einer eisernen Bogenbrücke hat eine Länge von 42 m. Der Bogen ist 7 m hoch. Suche durch eine Konstruktion den Halbmesser des Kreises, der zu dem Bogen gehört!

25. Die Bohrspindel einer Drehmaschine hat den dritten Teil der Drehzahl des Motors. Das Zahnrad der Motorachse hat 36 Zähne. Berechne die Anzahl der Zähne des Zahnrades an der Bohrspindelachse!

26. In einem Braunkohlenbergwerk sind zwei Abraumbagger eingesetzt, die zusammen täglich 24 500 m^3 Abraum bewegen. Der erste Bagger schafft täglich 2500 m^3 weniger als der zweite. Stelle die Gleichung auf und berechne, wieviel m^3 Abraum jeder der beiden Bagger täglich bewegt!

27. In Berlin werden beim Aufbau des Stadtzentrums die neuen Wohnhäuser in der Karl-Marx-Allee mit Fliesen verkleidet. Eine Fliese hat folgende Abmessungen:
Länge $l = 29{,}5$ cm
Breite $b = 12{,}0$ cm
a) Berechne die Fläche einer Fliese!
b) Welche Fläche bedecken 100 Fliesen?
c) Wieviel Fliesen benötigt man für eine Fläche von 10,62 m Breite und 11,16 m Länge?

Die Fliesen dürfen dabei nicht zerteilt werden. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.

28. Neun Streichhölzer sind so zu legen, daß sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf!

29. Im vorigen Schuljahr meldete die „Berliner Zeitung" folgende Ergebnisse des Berliner Schülerfußballturniers nach dem 2. Spieltag:

Ergebnisse:

12. Oberschule Treptow gegen Max-Kreuziger-Oberschule 1 : 0
4. Oberschule Köpenick gegen 8. Oberschule Lichtenberg 2 : 0

Tabellenstand	*Punkte*	*Tore*
4. Oberschule Köpenick	2:2	2:1
12. Oberschule Treptow	2:2	2:2
Max-Kreuziger-Oberschule	2:2	1:1
8. Oberschule Lichtenberg	2:2	2:3

Welche Ergebnisse gab es am ersten Spieltag?

Anmerkung: Für jeden Sieg gibt es 2:0 Punkte, für jedes unentschiedene Spiel 1:1 Punkte, für jede Niederlage 0:2 Punkte.

30. In einer Schule finden 2 Fußballspiele statt. Der Sportlehrer hat eine Wette nach dem System des VEB Fußballtoto ausgeschrieben.

	Tipzettel	1	0	2
1	Klasse 8 a - Klasse 8 b			
2	Klasse 7 a - Klasse 8 b			

Ein Schüler wollte unbedingt gewinnen und überlegte sich die Anzahl der möglichen Spielausgänge. Wieviel Tipzettel mußte er abgeben, und wie lauteten seine Tips?

31. Ordne die Zahlen der Dreierreihe von 3 bis 27 so in das untenstehende Quadrat ein, daß die Summen der Zeilen, Spalten und der Diagonalen gleich sind! Schreibe auch kurz auf, wie Du das überlegt hast!

32. In einem Aufenthaltsraum stehen mehrere gleichlange Bänke. Setzen sich auf je eine Bank 6 Personen, so bleibt eine Bank übrig, auf der nur 3 Personen sitzen; setzen sich auf jede Bank 5 Personen, so müssen 4 Personen stehen. Wieviel Bänke und wieviel Personen sind in dem Raum?

33. Bei den VIII. Olympischen Winterspielen 1960 in Squaw Valley erreichten die besten drei Springer mit ihrem besten Sprung zusammen 274,50 m. Helmut Recknagel sprang 100 cm weiter als Halonen und dieser 4 m weiter als Leodolter.

Wie weit ist jeder gesprungen? Probe!

34. Eine Brigade von 8 Genossenschaftsbauern der LPG „Thomas Müntzer" in Gehren stellte in 6 Tagen auf einer Fläche von 24 ha Roggengarben auf. Eine zehnköpfige Arbeitsbrigade aus dem Patenbetrieb, die die LPG bei der Ernteeinbringung unterstützte, stellte in 5 Tagen auf einer Fläche von 20 ha Roggengarben auf.

a) Welche Brigade hat eine bessere Leistung erzielt?

b) In welchem Verhältnis stehen die Leistungen?

35. Drei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften lieferten zusammen 2400 dt Kartoffeln ab. Die erste lieferte 220 dt mehr als die zweite, die dritte 100 dt weniger als die zweite. Wieviel dt Kartoffeln lieferte jede Produktionsgenossenschaft ab?

Stelle die Gleichung auf, löse sie und mache die Probe!

36. Vier Traktoristen einer RTS-Brigade stehen im Wettbewerb. An einem Tag schaffen sie 11,4 ha. Der erste pflügte 0,5 ha mehr als der zweite, dieser schaffte 0,9 ha mehr als der dritte. Der vierte aber erreichte 0,2 ha weniger als der zweite Traktorist. Wie groß war die Leistung jedes Traktoristen?

37. Drei Traktoristen pflügen an einem Tage zusammen 11,4 ha. Die Leistung des ersten Traktoristen lag 0,8 ha höher als die des zweiten, die des zweiten 0,5 ha höher als die des dritten Traktoristen.

Wieviel schaffte jeder?

38. Zwei Traktoristen pflügen an einem Tag zusammen 5,4 ha. Der zweite Traktorist pflügt 1,5 ha weniger als das Doppelte vom ersten. Wieviel ha schaffte jeder?

39. Beim freiwilligen Kartoffeleinsatz trugen drei Gruppen von Schülern einer 7. Klasse einen kleinen Wettbewerb aus. Sie sammelten gemeinsam 52 dt Kartoffeln. Dabei sammelte die zweite Gruppe $1^1/_2$mal soviel wie die erste, die dritte 3 dt Kartoffeln mehr als die erste. Wieviel dt Kartoffeln sammelte jede Gruppe?

40. Eine Mäherbrigade mähte am ersten Tag die Hälfte einer Wiese und 2 ha und am zweiten Tage 25 % des übriggebliebenen Teils der Wiese und die letzten 6 ha. Berechne die Gesamtfläche der Wiese!

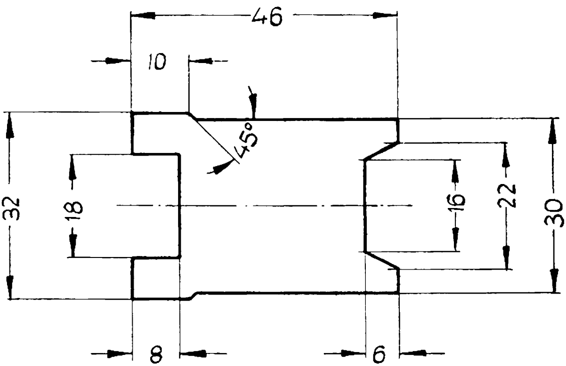
41. In den LPG des Bezirkes Suhl wurden im Jahre 1959 insgesamt 110 Rinderställe, Schweineställe und massive Silos fertiggestellt. An Schweineställen war es einer mehr als die Hälfte der Anzahl an Silos und 28 mehr Rinderställe als Schweineställe. Wieviel Rinderställe, Schweineställe und Silos wurden erbaut?

42. Am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion sägt ein Schüler ein Stück Vierkantstahl ab, das 475 p schwer ist. Am nächsten Tag wird ein zweites Stück Vierkantstahl gleicher Wichte bearbeitet, dessen Abmessungen das Vierfache betragen. Wie schwer ist das Stück? Begründe die Antwort!

43. In einem volkseigenen Maschinenbaubetrieb wurden im IV. Quartal 1960 monatlich durchschnittlich 14 Maschinen mehr produziert als der Monatsdurchschnitt des III. Quartals 1960 ergab. Dieser Erfolg wurde vor allem durch die Beteiligung der Werktätigen am sozialistischen Wettbewerb möglich. Um wieviel Prozent wurde die monatliche Produktion des III. Quartals im IV. Quartal übertroffen, wenn im 2. Halbjahr 1960 insgesamt 438 Maschinen produziert wurden?

44. Im Werkunterricht wird ein rechteckiges Schlüsselbrett von 12 cm Länge und 5 cm Breite angefertigt. (Zeichne das Rechteck mit Winkeldreieck und Zentimetermaß!) An dem Brett sind 4 Haken auf der Mittelsenkrechten der kleineren Seite so anzubringen, daß sie untereinander den gleichen Abstand und die beiden äußeren vom Rand nur die Hälfte des Hakenabstandes haben! Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Bohrstellen für die Haken, und benenne sie mit B_1, B_2, B_3 und B_4!

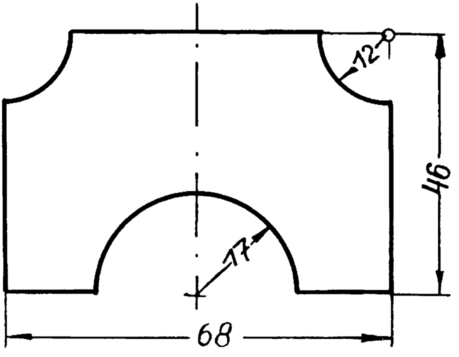
45. Das dargestellte Blech wird aus vorgeschnittenen Stücken von 32 mm Höhe und 46 mm Breite hergestellt. Berechne den auftretenden Schnittverlust für 75 Bleche!



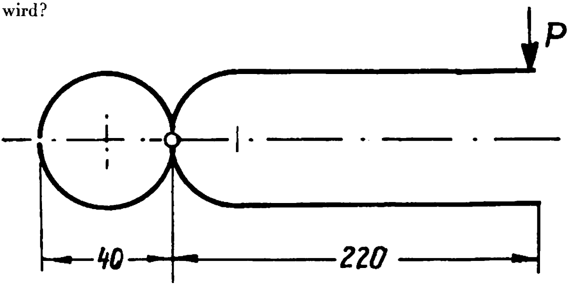
46. In einen Flachstahlstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser d = 20 mm gebohrt werden. In welchem Abstand muß angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

47. Eine Exportlieferung des VEB Spielwaren in Sonneberg wird in Kisten mit den lichten Maßen von 120 cm Länge, 70 cm Breite und 75 cm Höhe vorgenommen.
In einer dieser Kisten sind Spielautos in kleinen Kartons mit den Außenmaßen 15 cm · 10 cm · 8 cm eingeschichtet. In welcher Lage müssen die Kartons in die Kiste eingebaut werden, damit 525 Stück hineinpassen? (Alle Kartons haben die gleiche Lage). Erläutere Dein Ergebnis eventuell auch durch eine Zeichnung!

48. In einem Industriebetrieb werden Deckbleche von der angegebenen Form gestanzt. Berechne den Inhalt der Fläche!

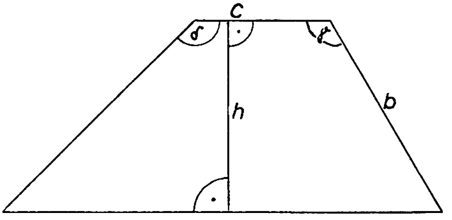


49. Wie groß ist die Druckkraft Q der Zangenschneiden, wenn die Zange, deren Maße im Bild angegeben sind, mit einer Kraft von P = 8 kp betätigt wird?



50. Gabriele hat im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion das abgebildete Werkstück hergestellt. Rolf will feststellen, ob sie in der Lage ist, mit Hilfe der von ihm ermittelten Maße die Fläche zu berechnen.

Wie groß ist die Fläche?



Geg.: $b = 60$ mm, $c = 34$ mm, $h = 52$ mm, $\delta = 135°$, $\gamma = 120°$.
Ges.: F

51. Zeichne in einen Kreis von 4 cm Radius eine Sehne von 5,5 cm Länge! Konstruiere den Zentriwinkel und einen Peripheriewinkel über dieser Sehne! (Ein Schenkel des Peripheriewinkels soll durch den Mittelpunkt des Kreises gehen).
    a) Bestimme durch Messung die Größe der beiden Winkel!
    b) Formuliere den Lehrsatz!
    c) Beweise den Lehrsatz mit allgemeinen Winkelbezeichnungen mit Hilfe bekannter Winkelsätze vom Dreieck!

52. Benutze den Satz des Thales, um von einem Punkt P außerhalb des Kreises mit dem Radius $r = 4$ cm die Tangenten an den Kreis zu konstruieren!

    Der Punkt P soll vom Mittelpunkt 7 cm entfernt sein. Miß die Länge des Tangentenabschnittes vom Punkt P bis zum Berührungspunkt!

53. Konstruiere ein Dreieck, von dem folgende Stücke gegeben sind:
    $a = 4$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $\beta = 35°$!

    Was stellst Du fest? Begründe Deine Feststellung! Beschreibe die Konstruktion!

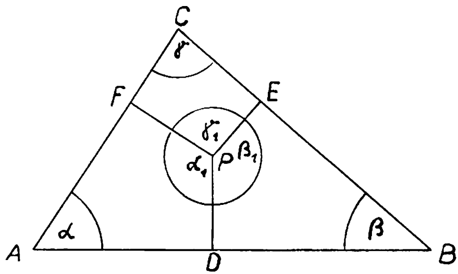
54. Konstruiere ein Dreieck aus $c = 8$ cm; $\alpha = 110°$; $\gamma = 50°$!
    Beschreibe die Konstruktion!

55. Wieviel verschiedene spitze Außenwinkel kann ein Dreieck höchstens haben?

    Begründe Deine Antwort!

56. a) Fälle von einem beliebigen Punkt P im Innern eines Dreiecks die Senkrechten auf die Seiten des Dreiecks durch Konstruktion!

b) Beweise, daß $\alpha + \alpha_1 = 180°$,
$\beta + \beta_1 = 180°$,
$\gamma + \gamma_1 = 180°$!



c) Leite aus Deinem Ergebnis einen Beweis für den Satz von der Winkelsumme im Dreieck ab!

57. Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6$ cm, $h_a = 5$ cm, $\gamma = 80°$!
Fertige eine Planfigur an!

58. Konstruiere ein Dreieck aus
$a = 5$ cm, $h_a = 4$ cm und der Seitenhalbierenden (Mittellinie) $s_a = 6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!

59. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b, der Winkel γ und die Höhe h_a gegeben sind ($s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm, $\gamma = 100°$)!

60. Konstruiere

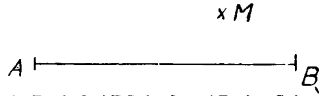
a) ein Dreieck mit den Seiten $b = 5{,}2$ cm, $c = 6{,}4$ cm und dem Winkel $\alpha = 78°$,

b) ein Dreieck mit der Seite $a = 7{,}1$ cm und den Winkeln $\alpha = 64°$, $\beta = 54°$!

61. Beweise, daß die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

62. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a, und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst! Der Endpunkt sei D, der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2. Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

63. Gegeben seien eine Strecke AB und außerhalb von ihr ein Punkt M.



a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Höhen ist!

b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist!

Beschreibe die Konstruktionen, und begründe sie!

64. Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, stets gleichschenklig ist!

65. Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel! Weise (ohne zu messen) nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!

66. Gegeben ist ein Trapez ABCD und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M.
Beweise, daß der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

67. Konstruiere den Kreis, der durch die 3 Punkte A, B und C geht, die nicht auf einer Geraden liegen dürfen!

68. Konstruiere aus dem Umkreisradius $r = 3$ cm, der Seite $a = 5{,}5$ cm und dem Peripheriewinkel $\gamma = 40°$ ein Dreieck, und beschreibe den Konstruktionsverlauf! Untersuche, ob es mehrere Lösungen gibt!

69. Beweise, daß bei einem Viereck die Summe der 4 Außenwinkel gleich der Summe der Innenwinkel ist!

70. Konstruiere ein Parallelogramm, von dem bekannt sind:
$AB = a = 5$ cm; $AD = d = 3{,}7$ cm und der Flächeninhalt $F = 14\ \text{cm}^2$!

71. Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:

a) zwei benachbarte Seiten,

b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,

c) beide Diagonalen,
d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel,
e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?

Durch wieviel Stücke wird ein Parallelogramm eindeutig bestimmt? Nenne drei Beispiele!

72. Konstruiere ein beliebiges Quadrat!
Konstruiere dann
a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche,
b) ein Quadrat mit der halben Fläche des Ausgangsquadrates!
Begründe die Konstruktionen!

73. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Strecke AB zur Sehne hat und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt! (AB = 5 cm).

74. Beweise, daß der Zentriwinkel doppelt so groß ist wie der Peripheriewinkel auf demselben Bogen!
Anleitung: Ein Schenkel des Peripheriewinkels soll durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

75. Zeichne in einen Kreis ein beliebiges unregelmäßiges Viereck, dessen Eckpunkte auf der Kreislinie liegen! Beweise, daß die Summe der gegenüberliegenden Winkel des Vierecks 180° beträgt!
(Wende Deine Kenntnisse über die Winkel im Kreis an!)

76. Entwickle eine Formel für den Flächeninhalt des Rhombus!

77. Konstruiere ein Dreieck aus
$a = 7$ cm; $b = 6$ cm; $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist h_b? (Messung und Berechnung!) Wieviel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren?

78. Konstruiere ein Dreieck aus
Außenwinkel $\gamma' = 147°$,
$\alpha = 72°$,
$a = 4{,}3$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!

79. Konstruiere ein Dreieck aus $h_c = 4$ cm, $s_c = 5$ cm und $b = 6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!

80. Jeder Punkt der Winkelhalbierenden hat von den Schenkeln des zugehörigen Winkels den gleichen Abstand. Beweise diesen Satz für einen Punkt der Winkelhalbierenden!

81. Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt P unter einem Winkel von 35°. Konstruiere alle Kreise, deren Mittelpunkte vom Punkt P 3 cm entfernt sind und die die Geraden berühren!

82. Zwei Kreise mit dem Durchmesser $d_1 = 4$ cm und $d_2 = 6$ cm berühren einander von außen.

    Konstruiere einen dritten Kreis mit $d_3 = 5$ cm so, daß er die beiden ersten Kreise von außen berührt! Begründe die Konstruktion!

83. Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!

    Beschreibe und begründe die Konstruktion!

84. Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt.
    a) Beweise, daß die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!
    b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

85. Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.
    a) Wieviel Schnitte muß man dabei ausführen?
       (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)
    b) Wieviel Würfel erhält man?

86. Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm. Auch hier bleibt beiderseits ein halber Staudenabstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d. h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln. Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

87. Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen.

    Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen „Schnitt" von 40 km je Stunde. In welcher Zeit und nach wieviel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe Deine Antwort!

88. Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

89. Mit wieviel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

90. Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

größer oder kleiner als 1 ist?

91. a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils den Rest 1 läßt, aber durch 7 teilbar ist!

b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

92. In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, daß unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben!

Wieviel Kugeln muß sie mindestens herausnehmen? Begründe Deine Antwort!

93. Nur unter Verwendung der Ziffer 7 sollen Zahlen gebildet werden, die miteinander verknüpft die Zahl 1964 ergeben. Folgende Arten der Verknüpfung dürfen dabei auftreten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind nicht zu verwenden. Gib eine der möglichen Lösungen an!

94. Jede natürliche Zahl heißt vollkommene Zahl, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat zum Beispiel die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist — wie man sieht — keine vollkommene Zahl. Welche vollkommenen Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

95. In einem Quadrat ABCD sind M und N die Mitten der Seiten BC bzw. CD. Es ist zu beweisen, daß die Strecken AM und BM aufeinander senkrecht stehen!

Aufgaben für die Klasse 8

1. $(7{,}3\,a - 9{,}8\,c) - (2{,}1\,b + 7{,}2\,c) - (3{,}9\,a - 4{,}7\,b)$
   a) Fasse zusammen!
   b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2;\ b = 1{,}5;\ c = 7$?

2. Berechne:
   $\frac{5}{4} \cdot (\frac{1}{2} - 1{,}4) + (1\frac{2}{5} - 0{,}875) : \frac{21}{25} =$

3. Berechne: $$\frac{(\frac{1}{5} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4}) : (0{,}3 - 0{,}125)}{(0{,}125 - \frac{3}{8}) : (\frac{1}{8} + 0{,}375)} =$$
   Bei der Auswertung sollen nur gemeine Brüche verwendet werden!

4. Berechne:
   a) $(1\frac{2}{3}\,ah + 6{,}25\,hr - 2\frac{1}{2}\,h) : 5\,h - (3\frac{1}{2}\,ab - 1{,}25\,br + 0{,}75\,b)$
   $: (-\frac{3}{8}\,b) =$
   b) $(a + \frac{b}{2})^2 - (a - \frac{h}{2})^2 =$

5. Löse folgende Gleichung nach x auf und führe die Probe durch!
   $(4x + 3)^2 - (8x - 7)^2 = (x + 7)^2 - (7x - 3)^2$

6. Die richtige Lösung folgender Gleichung läßt sich kürzen!
   $6\,(3x - 4)\,(3x + 4) - (5x - 7)^2 = (9x - 4)^2 - 13\,(2x - 5)^2 - 13$

7. Löse folgende Aufgabe und mache die Probe!
   $$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

8. Löse folgende Gleichung nach x auf und überprüfe die Lösung!
   $2\,(3\,a + 10\,x) - 13\,(a + b) + 7\,(a - x) = 0$

9. Löse nach x auf und überprüfe die Lösung!
   $$\frac{a - x}{b} = x$$

10. Zu beweisen ist folgender Satz:
    Wenn sich der Bruch $\frac{a - b}{a + b}$ nicht kürzen läßt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar!

11. Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen.
    a) 2 Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

$18 \cdot 17 = ?$	$18 + 7$	25
	Null anhängen	250
	$7 \cdot 8$ addieren	306

b) Zweistellige Zahlen ein und desselben Zehners, deren Einer sich zu 10 ergänzen, kann man so multiplizieren:

$43 \cdot 47 = ?$

$4 \cdot 5$	20
(Das sind die benachbarten ganzen Zehner)	
$3 \cdot 7 = 21$ anhängen	2021

Weise die Richtigkeit beider Rechenvorteile nach!

12. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
xxxxxxxxx : ? =  xxxx8xx
xxx
----
  xxx
  xxx
  ----
   xxx
   xxx
   ----
     xx
     xx
     ----
      xxx
      xxx
     ----
        0
```

13. Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein?

    Die Antwort ist zu begründen!

14. Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen Zahlen (positiven ganzen Zahlen) eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl! Probiere es! Beweise die Behauptung!

15. Für den Zusammenbau von 1000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27\,^1/_2$ Stunden. Beim „I. Wettstreit der Aktivisten von Morgen“ im Stadtbezirk Treptow unterbreitete der Schüler Lothar Schlapinski einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16\,^1/_2$ Stunden verringert werden konnte.

    a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?

    b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?

    Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

16. Anläßlich des Produktionsaufgebotes erhöhte ein Produktionsarbeiter seine Norm um 20 %, die er bisher mit 110 % erfüllt hatte. Da er aber gleichzeitig auch die Produktion erhöhte, blieb die Normerfüllung mit 110 % bestehen.

    a) Um wieviel Prozent wurde durch diese Maßnahme die Produktion gesteigert?

    b) Wie hoch wäre die Normerfüllung gewesen, wenn der Arbeiter wohl seine Produktion, aber nicht die Norm erhöht hätte?

17. Eine Prämie wird unter 4 Kollegen einer sozialistischen Brigade verteilt. A erhält $^1/_2$ der Summe, B $^1/_4$ der Summe, C $^1/_5$ und den Rest in Höhe von 120,— MDN erhält D.

    a) Wie hoch war die Prämie?

    b) Wieviel MDN erhält jeder Kollege?

18. Bei einem Brückenbau werden die Arbeiter nach 3 Lohngruppen bezahlt. Der Wochenlohn der ersten ist 105,— MDN, der zweiten 115,— MDN, der dritten 130,— MDN. In der zweiten Gruppe sind doppelt so viele Arbeiter wie in der dritten, in der ersten 25 mehr als in der zweiten. Wöchentlich werden 8 325,— MDN Lohn bezahlt. Wieviel Arbeiter sind in jeder Gruppe?

19. Ein Araber besitzt 24 Kamele. Er verfügt, die Kamele nach seinem Tod wie folgt auf seine drei Söhne aufzuteilen:

    Der erste soll die Hälfte, der zweite ein Drittel und der dritte ein Achtel erhalten. Die Söhne, die den Entschluß des Vaters respektieren, konnten sich trotzdem nicht einig werden. Warum nicht? Welchen Irrtum beging der Vater?

20. Zeichne einen Kreis mit einem Radius von 3 cm, und konstruiere an ihn zwei Tangenten, die einen Winkel von 70° einschließen!

21. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt! Begründe die Konstruktion!

22. Konstruiere ein regelmäßiges 10-Eck, dessen gegenüberliegenden Seiten 8 cm voneinander entfernt sind!

23. Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm mißt!

24. Zeige geometrisch die Richtigkeit der Flächenformel für das Parallelogramm $F = g \cdot h$! Gehe dabei vom Rechteck aus!

25. Konstruiere ein Dreieck aus

    $c = 5{,}4$ cm,
    $h_c = 4{,}5$ cm,
    $\alpha = 75°$!

26. Konstruiere ein Dreieck aus

    $c = 7$ cm,
    $h_c = 5$ cm,
    $\gamma = 60°$!
    (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

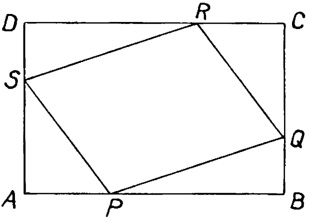
27. Die Seiten eines Drachenvierecks sind 5 cm und 8 cm lang, die größere Diagonale ist 9 cm lang. Konstruiere in dieses Drachenviereck einen Kreis, der alle vier Seiten berührt!

28. Gegeben sei ein Rechteck ABCD, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis 1:2 geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.

    a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten AB = 10 cm und BC = 7 cm durch!

    b) Was für ein Viereck ist das Viereck PQRS? (Beweis!)

    c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks PQRS zu dem des Rechtecks ABCD? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke (Begründung)?



29. Beweise folgenden Satz:

    Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!

30. a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A.

Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.

b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!

31. Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, daß die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat!

32. Gegeben ist ein Parallelogramm. Beweise, daß eine Strecke, die zwei beliebige Punkte paralleler Seiten miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen verläuft, im Schnittpunkt der Diagonalen halbiert wird!

33. Beweise folgenden Satz: Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden!

34. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge a (a beliebig groß)! Zeichne eine Diagonale d ein, und konstruiere über dieser Diagonalen ein zweites Quadrat (Seitenlänge d)!

a) Vergleiche die Flächeninhalte der beiden Quadrate!

b) Beweise Deine Feststellung!

35. Zeichne ein Parallelogramm und in ihm eine Diagonale! Wähle auf der Diagonalen einen beliebigen Punkt, und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Parallelogrammseiten! Dadurch entstehen vier kleinere Parallelogramme. Vergleiche die Flächen der beiden Parallelogramme, die nicht von der Diagonalen geschnitten werden, und beweise das Ergebnis des Vergleichs!

36. a) Beweise, daß in einem Parallelogramm ABCD die gegenüberliegenden Eckpunkte B und D von der Diagonalen AC gleiche Abstände haben!

b) Wenn man durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms zwei Geraden zieht und der Reihe nach die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Seiten des Parallelogramms verbindet, so ist das entstandene Viereck ein Parallelogramm. Beweise das!

c) Gegeben sind zwei einander schneidende Geraden und ein nicht auf ihnen liegender Punkt. Konstruiere ein Parallelogramm, in dem zwei Seiten auf den gegebenen Geraden liegen und der gegebene Punkt Eckpunkt ist!

d) Gegeben sind eine Strecke AB und ein Punkt M, der nicht auf AB liegt. Konstruiere ein Parallelogramm so, daß die eine von seinen Seiten die Strecke AB ist und der Punkt M zum Schnittpunkt der Diagonalen wird!

e) Gegeben sind eine Strecke AB und ein Punkt M, der nicht auf AB liegt. Konstruiere ein Parallelogramm, dessen eine Seite mit der Strecke AB zusammenfällt und dessen andere Seite im Punkt M halbiert wird!

37. Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, daß sie einander berühren.

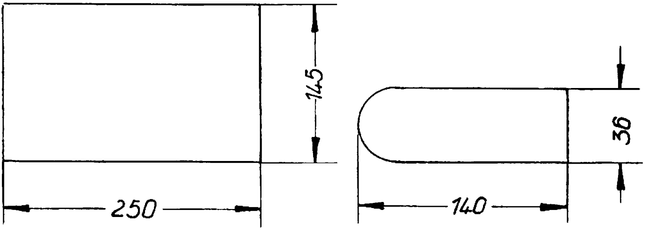
a) Wieviel Adern braucht man?

b) Beweise die Behauptung!

38. Im UTP sollen aus einem Blechstreifen von 2,55 m Länge und 8,5 cm Breite 30 runde Scheiben herausgestanzt werden. Jede Scheibe soll einen Durchmesser von 8 cm haben. Berechne den Abfall in Prozent!

39. Eine Bohrspindel macht 400 Umdrehungen in der Minute. Sie wird durch einen Motor mit 1400 Umdrehungen in der Minute angetrieben. Auf der Achse des Motors sitzt ein Zahnrad mit 36 Zähnen. Berechne die Zahl der Zähne, die das Zahnrad auf der Bohrspindelachse haben muß!

40. Im UTP werden zur Anfertigung von Riegeln Stahlplatten ausgegeben: (Maße in mm)



Stahlplatte Riegel

Die Riegelfläche ist 4900 mm^2 groß.

Teile die Stahlplatte so auf, daß möglichst viele Riegel daraus gefertigt werden können! Fertige eine Skizze an! Berechne den Abfall in %!

41. Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,2 mm Durchmesser gezogen. Wie lang ist dieser Draht?

42. Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Seite a = 600 mm werden an den Ecken Quadrate mit der Seite x herausgeschnitten. Die stehenbleibenden rechteckigen Flächen werden rechtwinklig umgebogen, so daß ein offener quaderförmiger Kasten entsteht.

a) Wie groß ist das Kastenvolumen für x = 100 mm?

b) Für welchen Wert von x ist das Kastenvolumen am größten?

c) Wie groß ist für den größten Kasten die Höhe im Vergleich zur Seite der Grundfläche?

d) Wie groß ist für den größten Kasten die Höhe im Vergleich zur Seite a des gegebenen quadratischen Stückes Blech?

43. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in dem sich die Hypotenuse zu der ihr zugeordneten Höhe wie 5:2 verhält! Die Hypotenuse kann z. B. 10 cm lang sein.

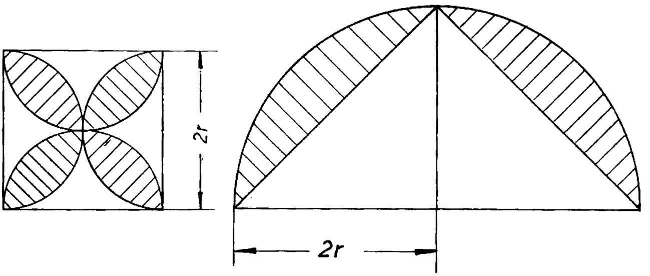
44. Konstruiere ein Dreieck ABC aus a = 8 cm, b = 10 cm, c = 6 cm! Die Eckpunkte dieses Dreiecks sollen die Mittelpunkte der Kreise sein, die sich gegenseitig berühren. Bestimme die Größe der Radien!

45. Es ist nachzuweisen, daß in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalabschnitten und den nicht parallelen Seiten gebildet werden, flächengleich sind!

46. Beweise, daß ein Außenwinkel am Dreieck so groß ist wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel!

47. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist 12 cm lang, die andere ist 8 cm kürzer als die Hypotenuse. Berechne den Umfang des Dreiecks!

48. a) Berechne die Fläche der Rosette und die Gesamtfläche der Kreisabschnitte!



b) Begründe die Berechnungen!

c) Vergleiche die beiden Flächen miteinander!

d) Welche Ergebnisse erhält man für die Flächen, wenn $r = 5$ cm ist?

e) Berechne den jeweiligen Umfang der schraffierten Flächen und vergleiche beide Werte miteinander!

f) Um wieviel Prozent ist der Umfang der Rosette größer als der des umbeschriebenen Quadrates?

49. In der Nähe von Saßnitz stehen zwei Leuchttürme, von denen der eine 80 m und der andere 60 m hoch ist. Beide Türme stehen in einer Entfernung von 480 m. Wie weit ist das Schiff vom 60 m hohen Turm entfernt, wenn es so steht, daß der Kapitän nur ein Licht sieht?

50. Ein früherer Einzelbauer hatte eine Viehkoppel in der Form eines Rechtecks mit den Abmessungen: Länge 88 m, Breite 15 m. Das Dorf wurde vollgenossenschaftlich, und die Viehkoppel wurde nun ein Teil einer großen Wiesenfläche. Im Zuge der Steigerung der Viehwirtschaft will nun die LPG die Weidefläche verdoppeln. Man will aber sehr sorgsam mit dem vorhandenen Material umgehen. Deshalb soll der gesamte Weidezaun der alten Koppel vollständig zur Umschließung der neuen Koppel verwendet werden. Wieviel Meter Weidezaun braucht man zusätzlich, wenn die eine Seite 20 m beträgt und die Fläche ein Rechteck bleiben soll?

51. Zur Versorgung des Wasserhaushaltes einer LPG-Gärtnerei wird eine Kreiselpumpe eingesetzt.

Dieselbe fördert in der Minute 5,4 m^3 Wasser.

Das Wasser wird durch eine Rohrleitung von 9 dm^2 Querschnitt gedrückt.

a) Welche Geschwindigkeit hat das Wasser in der Rohrleitung?

b) Wie könnte man die Geschwindigkeit des Wassers im Rohr erhöhen, ohne die Pumpe schneller laufen zu lassen?

52. Eine MTS hackt mit dem Vielfachgerät in 6 Stunden 5 ha. Wieviel Arbeitskräfte ersetzt die Maschine, wenn eine Person mit der Handhacke 309 m^2 in 1 Stunde hackt?

53. Aus 250 kg Leinsamen werden 85 kg Öl gewonnen. Der als Nebenprodukt gewonnene Preßkuchen hat noch einen Ölgehalt von 6 %. Wieviel % Öl sind in dem Leinsamen enthalten?

54. Drei Leute hatten im Wirtshaus Kartoffelklöße bestellt. Sie kamen aber nicht gleichzeitig zu Tisch. Zuerst kam einer, aß sein Drittel und ging hinaus. Dann kam der zweite, der wußte nicht, daß vor ihm schon einer dagewesen war, und aß ein Drittel von dem, was noch dastand und ging hinaus. Dann kam der Letzte. Wieder aß dieser, ohne von den anderen zu wissen, ein Drittel von dem, was noch da war. Zum Schluß waren noch 8 Kartoffelklöße übrig. Wieviel hatte jeder gegessen?

55. Wenn Du den Geburtstag Deines Freundes erraten willst, forderst Du ihn auf, folgendermaßen zu rechnen:

Multipliziere die Tageszahl mit 7! Addiere zu dem Ergebnis 3! Multipliziere die Summe mit 2!

Addiere die Monatszahl, und subtrahiere 6!

Das Endergebnis läßt Du Dir sagen. Wie kannst Du daraus das Geburtsdatum erhalten? Wann hat Heinz Geburtstag, wenn er Dir als Ergebnis 263 nennt?

Was ergibt sich aus Christians Ergebnis 97?

56. Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, daß einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind. Er stellt fest, daß die Schuhe verschiedene Größen aufweisen; nämlich 37, 38, 39 und 40. 6 Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.

Von den außerdem vorhandenen 5 rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39.
Die außerdem noch vorhandenen 8 linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.

a) Wieviel Fußballschuhe sind mindestens beim Schuhmacher?

b) Was für Fußballschuhe sind das?

Begründe Deine Antwort!

57. 12 Freunde gratulieren untereinander alljährlich schriftlich zum Geburtstag. Wieviel Gratulationen tauschen alle zusammen in 4 Jahren aus?

58. Bei einem Hallenhandballturnier in der Sporthalle der SV Dynamo sollen fünf Mannschaften im Punktsystem gegeneinander spielen (d. h., jede Mannschaft spielt einmal gegen jede andere). Dauer eines Spiels: 2 mal 10 Minuten. Für den Wechsel der Spielfeldhälften zur Halbzeit wird je eine Minute gerechnet. Die Pausen zwischen den Spielen betragen im allgemeinen 3 Minuten, zwei davon sind größere Pausen von je 20 Minuten Dauer. Wann ist das Turnier planmäßig beendet, wenn es um 17.00 Uhr beginnt?

59. Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1\,^1/_2$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, stehen.

Nach weiteren $1\,^1/_2$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.

a) Welche Strecke legte Klaus zurück?

b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

60. Die Dörfer A und B liegen an zwei Straßen, die einander unter einem Winkel von 62° schneiden. Sie sollen durch einen Weg verbunden werden.

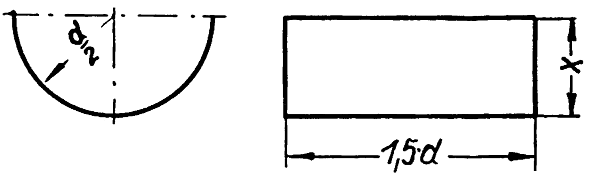
a) Wegen eines dazwischenliegenden Gehölzes kann die Strecke $\overline{AB}$ nicht gemessen werden. Bestimme sie durch maßstabgerechte Zeichnung! (M 1:10 000)
A ist vom Schnittpunkt C der beiden Straßen 520 m, B 700 m entfernt. Vor der Konstruktion ist eine Planfigur anzufertigen!

b) Wieviel Meter Umweg werden durch den neuen Weg gespart?

61. In den Punkten A und B, von denen A diesseits und B jenseits eines Flusses liegen, sollen Stützpfeiler einer Eisenbahnbrücke errichtet werden. Es ist die Entfernung zwischen den Punkten A und B festzustellen! Man wählt am diesseitigen Ufer eine Standlinie AC = 54 m und mißt von dieser aus die Winkel CAB = 74 Grad und ACB = 56 Grad.

Löse die Aufgabe durch eine Zeichnung im Maßstab 1:1000! Beschreibe die Konstruktion!

62. Eine Abflußrinne von halbkreisförmigem Querschnitt soll durch eine querschnittgleiche rechteckige von der Breite 1,5 d ersetzt werden. Berechne die Seite x des Rechtecks!



63. Eine Talsperre, die 50 000 000 m^3 faßt, ist zur Hälfte mit Wasser gefüllt, als Hochwasser gemeldet wird, das schätzungsweise einen Zufluß von 100 m^3 in der Sekunde bringt. Um der Flut zu begegnen, werden sofort die Schleusen gezogen, die in der Sekunde 35 m^3 abfließen lassen. Wie lange müßte das Hochwasser anhalten, damit die Sperre gefüllt würde, wenn die Flutwelle 10 Stunden nach der Öffnung der Schleusen eintritt?

64. Der irische Naturwissenschaftler Robert Boyle untersuchte die Abhängigkeit des Gasdruckes vom Volumen bei konstanter Temperatur. Er stellte 1662 fest:

„Wird das Gas bei konstanter Temperatur zusammengedrückt, so sind die Drücke den Volumina umgekehrt proportional“! (Boylesches Gesetz)
$p_1 : p_2 = V_2 : V_1$ (T = konstant)

Die zum autogenen Schweißen und Schneiden verwendeten Gase (Wasserstoff. Äthin, Sauerstoff) werden Stahlflaschen entnommen. Das Hochdruckmanometer einer solchen 40 l-Flasche zeigt einen Druck von 120 at an. Wieviel Liter Gas stehen bei einem Arbeitsdruck von 1,2 at zur Verfügung?

65. Auszug aus dem „Statistischen Jahrbuch 1960 für den Kreis Hildburghausen“:

Beschäftigte nach Wirtschaftsbereichen im Jahr 1960

Industrie	6686
Bauwirtschaft	381
Produzierendes Handwerk	533
Land-, Forst- und Wasserwirtschaft	1605
Verkehr	639
Post	354
Handel	2448
Bereiche außerhalb der mat. Produktion	4127

Berechne den prozentualen Anteil der einzelnen Wirtschaftsbereiche an der Beschäftigtenzahl des Kreises, und stelle diesen in einem Kreisdiagramm dar!

66. In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoff gewebt. Jemand behauptet, daß man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde „auslegen“ könnte. Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384 000 km).

67. Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der 10 Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt. Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je 6,73 m^2, alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von 6,37 m^2. Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m. Den oberen Abschluß der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je 3,73 m^2, alle übrigen von je 3,53 m^2. Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m. Es sind zu berechnen:

a) die Höhe der Fassade,

b) die Länge der Fassade!

Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

68. Ein 130 m langer Güterzug fährt mit 42 km/h Geschwindigkeit durch einen 220 m langen Tunnel. Wie lange dauert es, bis der Zug mit seiner ganzen Länge den Tunnel durchfahren hat, d. h. von der Einfahrt der Lokomotive bis zur Ausfahrt des letzten Wagens? (Zeitangabe in einer üblichen Maßeinheit)

69. Der neue Doppelstock-Zug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze. Um wieviel Prozent ist das „Sitzplatzgewicht“ (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Zug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

70. Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 % Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 % verloren. Wieviel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1000 kg Zink zu gewinnen?

71. Drei Traktoristenbrigaden pflügten gemeinsam 720 ha. Die erste Brigade pflügte 60 ha mehr als die zweite und 60 ha weniger als die dritte Brigade. Wieviel ha pflügte jede Brigade?

72. Eine Zuckerfabrik verarbeitete 856 000 dt Rüben. Wieviel dt Zucker wurden gewonnen, wenn die Rüben einen Zuckergehalt von 19,6 % hatten?

73. Multipliziert man eine Zahl mit 17 und subtrahiert das Produkt von 226, so erhält man 39! Wie heißt die Zahl?

74. Setze in ein „magisches Quadrat“ mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, daß die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld! Begründe die Anordnung der Zahlen!

75. Es ist nachzuweisen, daß $a^2 - 1$, wenn a eine ungerade Zahl $\geqq 3$ ist, stets durch 8 teilbar ist!

76. Gib Brüche x an, für die die Beziehung

$$1/7 > x > 1/8 \quad \text{gilt!}$$

77. Gegeben sind drei beliebige natürliche Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind! Beweise, daß entweder die Summe dieser drei Zahlen oder die Summe zweier von ihnen stets durch 3 teilbar ist!

78. Beweise die folgende Behauptung:
Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z. B. 781 781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar!

79. Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.
Wie alt ist jeder?

80. In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.
Wieviel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe?
Begründe Deine Behauptung!

81. Klaus wird von seinen Eltern nach dem Ergebnis der letzten Mathematikarbeit gefragt. Er weiß, daß 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 4 und die übrigen Schüler die Note 3 erhielten. Außerdem erinnert er sich noch, daß die Durchschnittsnote genau 2,5 betrug.
Wieviel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?

82. Im Jahre 1962 landeten die Fangfahrzeuge unserer volkseigenen Hochseefischerei 117 291 t Fisch an. Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1963 betrug 74 445 t Fisch; das waren um 44 Prozent mehr als im ersten Halbjahr 1962.
   a) Wie groß war die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962?
   b) Wie groß wäre die gesamte Fangmenge im Jahre 1963, wenn man für das zweite Halbjahr 1963 die gleiche prozentuale Steigerung gegenüber dem ersten Halbjahr annimmt wie im Jahre 1962?

83. Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen

Bestand von 58 kg je 10 m^2 ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.

a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?

b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit). Wieviel Hänger braucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

84. Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgendein Punkt der Strecke AB und Y irgendein Punkt der Strecke CD. Beweise, daß die Strecke XY stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!

85. In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.
Beweise, daß diese Sehnen stets gleichlang sind!

86. Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern. Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen!
Beschreibe und begründe die Konstruktion!

87. Eine 12 cm lange durchsichtige Skala mit Zentimeter-Teilung soll durch eine fast punktförmige Lichtquelle auf einer 2,4 m hinter der Skala stehenden Projektionswand so abgebildet werden, daß sie auf eine Ausdehnung von 60 cm vergrößert wird. Entwirf eine nichtmaßstäbliche Skizze und berechne, in welcher Entfernung vor der Teilung die Lichtquelle aufgestellt werden muß!

88. Wenn man die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels (Kante a = 8 cm) miteinander verbindet, erhält man eine Doppelpyramide. Beschreibe sie genauer und gib die Anzahl ihrer Ecken, Kanten und Flächen an! Wie verhalten sich die Rauminhalte der Doppelpyramide und des Würfels zueinander?

89. Es ist der folgende Satz zu beweisen: Wenn in einem Dreieck eine Seitenhalbierende halb so lang wie die zugehörige Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinkelig.

Aufgaben für die Klasse 9

1. Welche der beiden Zahlen $^{23}/_{31}$ und $^{35}/_{47}$ ist die größere? Welcher vierstellige Dezimalbruch kommt beiden Zahlen möglichst nahe?

2. Berechnen Sie:

$$\frac{a-b}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{6a^2-6b^2} \cdot \left(1+\frac{b}{a-b}-\frac{1+b}{b}\right) : \frac{b(b+1)-a}{6b} =$$

3. Bestimmen Sie x aus der folgenden Gleichung:

$$\frac{4}{x-5}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-7}=\frac{4}{x-4}$$

Führen Sie für die gefundene Lösung die Probe durch!

4. Berechnen Sie x und überprüfen Sie das Ergebnis durch Probe!

$$\frac{7}{2x-14}-\frac{13}{24}+\frac{1}{12x-84}=\frac{7}{3x-21}-\frac{3}{8x-56}$$

5. Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf und überprüfen Sie das Ergebnis!

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{p}{q}$$

6. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem und machen Sie die Probe!

$$\text{I.} \quad \frac{x+y+1}{x-y-7}=\frac{1}{2}$$

$$\text{II.} \quad \frac{2x+3y+4}{3x+4y+4}=\frac{1}{2}$$

7. Lösen Sie die Gleichung $ax^2 - c = 0$ und geben Sie an, unter welchen Bedingungen die Aufgabe im Bereich der reellen Zahlen lösbar ist!

8. a) Unter welcher Bedingung gilt

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} \quad ?$$

b) Formulieren Sie das Ergebnis als eine Rechenregel!

c) Zerlegen Sie den Bruch $\frac{1}{x^2+x}$ in die Differenz von zwei Teilbrüchen!

9. Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
  O T T O     M A I S     O T T O     M A I S     O T T O
- R O S E   - S A L Z   - S A L Z   - R O S E   - M A I S
---------   ---------   ---------   ---------   ---------
  4 7 0 9     2 9 6 3     3 4 9 7     4 1 7 5       5 3 4
```

Die Lösung ist zu begründen!

10. Durch Wasser wurde die Aufgabe z. T. unleserlich. Wie muß die wiederhergestellte Aufgabe lauten?

```
117xxx:xx3 = xxx
 xx6
-----
 187x
 xxxx
-----
  xxxx
  xxxx
  ----
     0
```

11. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt (Begründung!)?

```
xx xxx xxx : xxx = xx xxx
 x xx
 ----
    xx xx
     x xx
     ----
     x xxx
     8 xxx
     -----
         0
```

12. Jemand wird nach der Nummer seines Fernsprechanschlusses gefragt. Er antwortet: „Die Nummer vergessen Sie doch wieder. Ich sage sie Ihnen in einem Rechenrätsel.“

„Bilden Sie aus der Zahl die Quersumme und aus der Quersumme wieder die Quersumme, bis Sie zu einer einstelligen Zahl kommen! Die ersten beiden Ziffern bilden dann eine Zahl, die das Produkt der Quersumme mit ihrer Wurzel ist. Die nächsten beiden Ziffern erhalten Sie, wenn Sie die zweite Ziffer der zuerst gegebenen Zahl mit der Quersumme multiplizieren.“

Welches ist die Nummer des Fernsprechanschlusses?

13. Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar!

14. Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern von 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, daß die Lösung vollständig ist!

15. Stellen Sie die Funktionen $y = +\sqrt{x} - 2$ und $y = -\sqrt{x} + 2$ graphisch dar! Errechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes!

16. Zeichnen Sie auf besonderem Bogen je ein Bild der Funktionen

1) $y = f(x) = x^2$
2) $y = f(x) = (x - 3)^2$
3) $y = f(x) = (x - 2)^2 + 3$
4) $y = f(x) = (x + 3{,}5)^2 - 4$

$-3 \leqq x \leqq +3$!

Diskutieren Sie das Bild jeder einzelnen Funktion und die Lösungsmöglichkeiten der entsprechenden quadratischen Gleichungen für $y = 0$!

17. Zwei ineinandergreifende Zahnräder mit einem Übersetzungsverhältnis von 5 : 11 werden durch zwei andere Zahnräder ersetzt, die je 5 Zähne mehr haben. Das Übersetzungsverhältnis ist nun 1 : 2.

Wieviel Zähne hat jetzt jedes Zahnrad?

18. Gegeben ist ein Kreis mit beliebigem (nicht zu kleinem) Radius. Auf der Kreislinie liegen die 4 Punkte E, F, G, H.

a) Konstruieren Sie in diesen Punkten Tangenten an den Kreis!

b) Beweisen Sie, daß in dem entstandenen Tangentenviereck ABCD die Summe von je 2 gegenüberliegenden Seiten gleich groß ist!

19. Im rechtwinkligen Koordinatensystem ist ein Dreieck durch die Punkte $P_1\ (+2;\ +5)$, $P_2\ (-3;\ -1)$ und $P_3\ (+4;\ -3)$ bestimmt.

Berechnen Sie seinen Flächeninhalt mit Hilfe der Koordinaten!

20. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Die erste Röhre braucht allein 3 Stunden, die zweite allein 5 Stunden zur Füllung. In welcher Zeit wird der Behälter voll, wenn beide Röhren zugleich den Behälter füllen?

21. Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23$ m und der Höhe $h = 21$ m.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wieviel Tonnen Erdöl faßt ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa $0{,}85\ g \cdot cm^{-3}$)?

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10 200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 $t \cdot h^{-1}$.

In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wieviel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

22. Die Tragfähigkeit eines Balkens ist am größten, wenn das Verhältnis von Breite zu Höhe $1 : \sqrt{2}$ beträgt. Berechnen Sie das Gewicht eines solchen Balkens mit größter Tragfähigkeit von 7,5 m Länge, der aus einem Eichenstamm von 35 cm Durchmesser geschnitten werden kann!

1 cm^3 Eichenholz wiegt 0,7 p.

23. Wieviel Strecken muß man zeichnen, wenn man in einem Vieleck jede Ecke mit jeder anderen verbinden will?

Probieren Sie es praktisch für ein 3-, 4-, 5-Eck aus!

Wie groß ist die Anzahl der Verbindungsstrecken beim 40-Eck?

24. Der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist 3 m länger als die Basis. Wie lang sind die 3 Seiten, wenn der Umfang des Dreiecks 18 m beträgt?

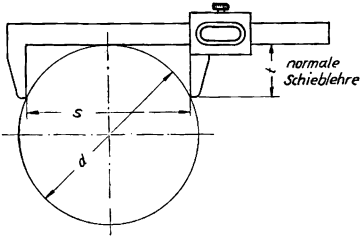
25. Eine Lotosblume ragt 1 m aus dem Wasser. Vom Wind geneigt, taucht sie in 2 m Entfernung von ihrem ursprünglichen Standort ins Wasser. Wie tief ist das Wasser? Löse die Aufgabe rechnerisch und zeichnerisch!

26. Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte 0,98 $g \cdot cm^{-3}$) und möglichst weichem Wasser gekühlt. Die Mischung muß für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,992 $g \cdot cm^{-3}$, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,996 $g \cdot cm^{-3}$ haben. Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser braucht man für 10 Liter Emulsion?

27. Für ein kleines Reibungsgetriebe in einer Handwickelmaschine steht die Breite von 60 mm zur Verfügung. Das Übersetzungsverhältnis soll 3 : 5 betragen.

Berechnen Sie den Durchmesser der großen Scheibe!

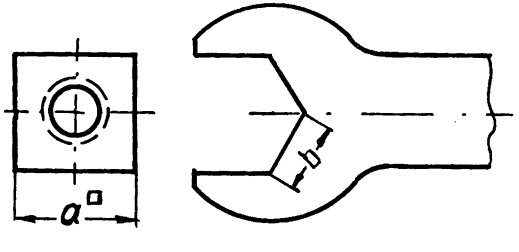
28. Um zylindrische Werkstücke mit starkem Durchmesser zu messen, bedient man sich besonders großer Schieblehren. Nicht immer stehen diese zur Verfügung. Mit einer normalen Schieblehre läßt sich ein solcher Durchmesser d einigermaßen genau bestimmen (vergleiche Figur). Es werden folgende Größen gemessen:
Sehnenlänge s = 155,9 mm,
Meßschenkellänge t = 45,0 mm.
Berechnen Sie den Werkstückdurchmesser d!



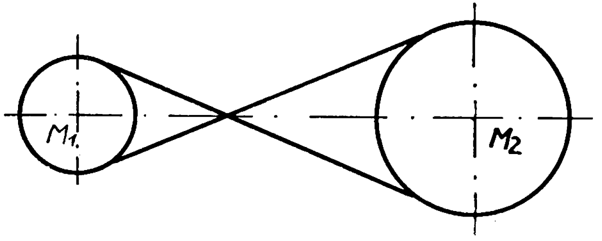
29. In den Berliner Metallhütten- und Halbzeugwerken VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen. Wie lang sind die gezogenen Rohre?

30. Unter einer tropfenden Ölleitung steht ein Behälter, in dem sich in 4 Stunden $3 \cdot 10^5$ mm³ Öl sammeln. Wieviel Liter Öl werden in einem Monat (30 Tage) aufgefangen?

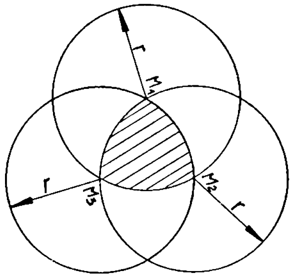
31. Eine Vierkantmutter (Kantenlänge a) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechsecks sei b) gelöst werden. Welche Abmessungen muß b haben, damit der Schlüssel paßt?



32. Konstruiere die inneren Tangenten an zwei Kreise! ($r_1 = 1{,}5$ cm; $r_2 = 3$ cm; Abstand der Mittelpunkte der Kreise 10 cm).



33. Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke, das folgende Form (schraffiert) besitzt! Der Radius beträgt 20 mm. Die Wichte des Materials ist 7,8 p · cm^{-3}.



34. Durch einen Verbesserungsvorschlag wird ein zylindrisches Werkstück von 24 mm Durchmesser und 80 mm Länge durch ein prismenförmiges Werkstück mit den Abmessungen 14 mm, 24 mm, 80 mm ersetzt. Welchen Raum nimmt die Materialeinsparung bei 1000 Stück ein? Wie groß ist die prozentuale Einsparung?

35. Auf einer Seiltrommel von 384 mm Länge und 180 mm Durchmesser befindet sich eine Lage 16 mm starkes Seil. Wie lang ist dieses Seil?

36. a) Das Achtel einer um $^{10}/_{3}$ verkleinerten Zahl ist um $^{5}/_{8}$ größer als das Zwölftel der um $^{25}/_{6}$ vergrößerten Zahl. Wie heißt diese Zahl?

    b) Die Differenz zwischen einer positiven Zahl und ihrem reziproken Wert beträgt $^{5}/_{6}$. Wie heißt die Zahl? Gibt es nur eine solche?

37. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 17 und das geometrische Mittel 15. Ermitteln Sie die Zahlen!

38. Lösen Sie folgende alte chinesische Aufgabe:

    In einem Käfig sind Kaninchen und Hühner eingesperrt. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Füße. Wieviel Kaninchen und wieviel Hühner sind in dem Käfig?

39. Von zwei Orten A und B, die 140 km voneinander entfernt sind, fahren zwei Lastwagen einander entgegen, der erste mit der Geschwindigkeit 60 km $\cdot$ h^{-1}, der zweite mit 45 km $\cdot$ h^{-1}. Die Abfahrt erfolgt gleichzeitig.

    Wann und wo begegnen sie sich?

40. Zwei Radfahrer A und B fahren mit einer Geschwindigkeit von 30 bzw. 35 km $\cdot$ h^{-1}. In einem bestimmten Zeitpunkt soll A vor B einen Vorsprung von 100 m haben. Wie weit muß B noch fahren, um A einzuholen?

41. Ein 60 m langer Eilzug fährt mit 72 km $\cdot$ h^{-1} an einem stehenden Personenzug vorüber. Die Begegnung dauert 9 s. Wie lang war der Personenzug?

42. Ein Personenkraftwagen erreicht seine Höchstgeschwindigkeit im großen Gang mit 110 km $\cdot$ h^{-1}, im kleinen mit 35 km $\cdot$ h^{-1}. Der mittlere Gang ist so errechnet, daß sich seine Höchstgeschwindigkeit zu der des kleinen Ganges wie die des großen zu der des mittleren verhält (geometrische Stufung des Getriebes). Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit des mittleren Ganges?

43. Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km $\cdot$ h^{-1}. Es wird plötzlich stark gebremst.

    a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 m $\cdot$ s^{-1} abnimmt?
    (Das entspricht der Straßenverkehrsordnung).

    b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

44. Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig — Riesa — Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindkeit von 60 km · h^{-1} zurück. Infolge Bauarbeiten muß der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig — Bornitz) mit einer Durschnittsgeschwindigkeit von 50 km · h^{-1} zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz — Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 km · h^{-1} erhöht.

    Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

45. Bei dem Gruppenflug hatten die Raumschiffe Wostok III und IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumkreisung (41 000 km) in rund 88 Min. zurück.

    Welchen Abstand müßten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 km · h^{-1} auf einer Versuchsstrecke fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

46. Der sowj. Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 Sekunden. Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in km · h^{-1}? Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von $\pm$ 0,5 s behaftet war?

47. Die Fahrzeit eines Zuges zwischen den Stationen A und B der Berliner S-Bahn beträgt 30 Minuten. Verläßt ein Zug die Station A, so fährt gleichzeitig von der Station B ein Zug in Richtung A ab. Dies findet alle zwei Minuten ununterbrochen statt. Wieviel Gegenzüge trifft ein Zug, der von A nach B fährt, auf freier Strecke?

48. Manfred wohnt in einem Ort, der ständig von Flugzeugen überflogen wird, die den Zentralflughafen Schönefeld anfliegen oder dort gestartet sind. Die Flugzeuge haben fast immer die gleiche Flughöhe. Manfred möchte diese gern ermitteln. Er benutzt dazu seine Kamera, eine Praktika, deren Objektiv eine Brennweite von 50 mm besitzt. Eine Maschine vom Typ IL-14 fotografiert er genau in dem Augenblick, als sie sich senkrecht über ihm befindet. Auf dem entwickelten Film hat sie eine Spannweite von 2 mm. Da ihm die wirkliche Spannweite von 31,70 m, also rund 32 m, bekannt ist, kann er daraus die Flughöhe ermitteln. In welcher Höhe flog die IL-14?

49. Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL-18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet um 16.10 Uhr (Beachte: 12.00 Uhr mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).

   a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL-18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?

   b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, daß das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?

   (Die Flugstrecke beträgt 1630 km)

50. Aus 200 ml (1 ml = 1 Milliliter = 1 cm^3) einer 30%igen Lösung soll durch Zugabe von 70%iger Lösung eine 40%ige Lösung hergestellt werden. Wieviel ml der 70%igen Lösung muß man zu diesem Zweck der 30-%igen Lösung zusetzen?

51. Man berechne, wieviel kp Wasser man mit 15 kp 96%igem Alkohol mischen muß, um 50%igen Alkohol zu erhalten!

52. Wieviel kp Zink muß man 65 kp Kupfer hinzufügen, um eine Messinglegierung von 30 % Zinkgehalt zu erhalten?

53. Wieviel kg Zink (Dichte = 7 kg · dm^{-3}) sind mit 53,4 kg Kupfer (Dichte = 8,9 kg · dm^{-3}) zu legieren, damit man Messing mit einer Dichte von 8,4 kg · dm^{-3} erhält?

54. Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:

   Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $^1/_2$ Elle herunter und in der Nacht wieder $^1/_6$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $^1/_4$ Elle hinunter.

   Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

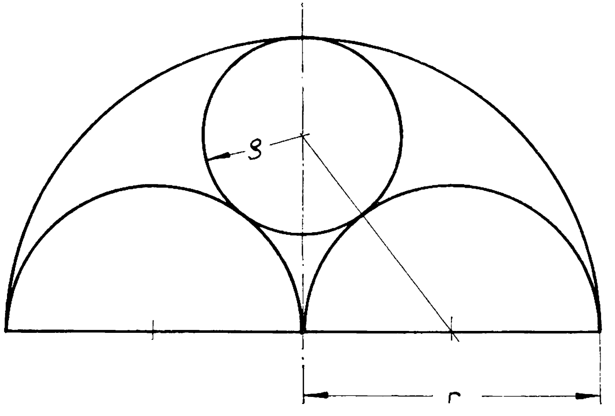
55. Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10 000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat. Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleichschnell gehen.

   Wer gewinnt die Wette?

   Begründen Sie die Behauptung!

56. In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert. Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle. Wieviel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wieviel in der ganzen Pyramide?

57. Nachstehende Figur zeigt ein romanisches Motiv. Der Radius des äußeren großen Halbkreises sei $r = 50$ cm. Berechnen Sie den Radius ϱ des inneren Vollkreises!



58. Beschreiben Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm, so daß dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms, verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend! Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

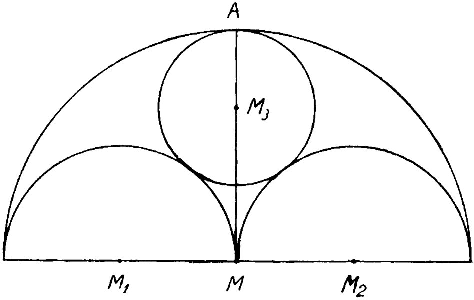
59. Zeichnen Sie eine Gerade g, und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet! Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen A P und g gleich dem Winkel zwischen B P und g ist!

Begründen Sie die Konstruktion!

60. Ermittle die in der gegebenen Zeichnung enthaltenen Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 konstruktiv, und zeichne die Figur nach für den Fall MA = 5 cm!

Begründen Sie die Richtigkeit des Verfahrens an Hand der Ermittlung von M_3!

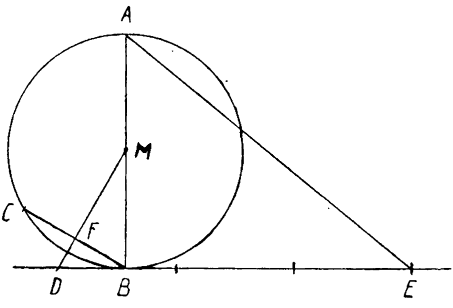
(Hilfslinien der Konstruktion müssen ersichtlich bleiben!)



61. Die untenstehende Figur liefert einen brauchbaren Wert (Näherungswert) für den halben Kreisumfang:

AB ist ein Durchmesser, BC ist Radius. Die Mittelsenkrechte von BC schneidet die Tangente in B im Punkt D, DE ist gleich 3 BC. Die Maßzahl der Strecke AE liefert einen Näherungswert für den halben Umfang.

Beweisen Sie diese Behauptung!



62. Zeichnen Sie ein Parallelogramm ABCD! Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'! Was für eine Figur stellt A' B' C' D' dar? Beweisen Sie ihre Feststellung!

63. Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, daß eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.

    Es ist zu beweisen, daß Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

64. Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von 135° miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je 45°.

    Beweisen Sie, daß die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

65. Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.

    Beweisen Sie, daß $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!

66. Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende (Mittellinien) gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!

67. Gegeben sind ein Dreieck ABC und sein Umkreis.

    Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallele in A′ bzw. B′.

    Es ist zu beweisen, daß

    a) die Dreiecke AA′D und DB′B gleichschenklig sind und

    b) es einen Kreis gibt, der durch A,A′, B,B′ geht!

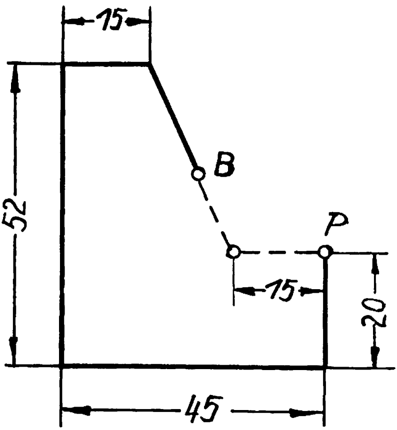
68. Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Trapez aus seiner Grundseite $a = 6$ cm und dem Radius des einbeschriebenen Kreises $r = 1{,}8$ cm!

69. Konstruieren Sie ein Dreieck aus

$a = 5{,}4$ cm,
$b = 6{,}2$ cm,
$c = 6{,}9$ cm!

In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, daß er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und daß die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt (Hilfslinien müssen erkennbar sein)!

70. Die Figur zeigt einen Querschnitt eines Profils. Vom Punkt P aus soll durch eine Ausrundung mit dem Radius $r = 30$ mm der Übergang zur schrägen Kante hergestellt werden. Konstruieren Sie den Mittelpunkt M des Anschlußbogens und den Berührungspunkt B!



71. Verwandeln Sie durch Konstruktion ein Quadrat mit $F = 25$ cm^2 in zwei gleich große Quadrate! Überprüfen Sie die Genauigkeit der konstruierten Quadratseiten durch Rechnung!

72. Ein Quadrat hat die Fläche von 81 cm^2, ein zweites von 16 cm^2. Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Fläche gleich der Differenz der beiden gegebenen Quadrate ist! Welche Länge hat seine Seite?
(Hilfslinien der Konstruktion müssen sichtbar sein.)

73. Beweisen Sie, daß sich die Diagonalen eines Parallelogramms gegenseitig halbieren!

74. Beweisen Sie den Lehrsatz des Pythagoras mit Hilfe der Ähnlichkeit von Dreiecken!

75. Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden? Die Behauptung ist zu beweisen!

76. Im Kreis mit dem Radius r ist senkrecht zum Durchmesser eine Sehne gezogen, die genau so lang ist wie das längere abgeschnittene Stück des Durchmessers. Berechnen Sie die Sehne!

77. Aus den beiden auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks erzeugten Projektionsabschnitten $p = 3{,}8$ cm und $q = 6{,}2$ cm ist ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren!

78. Hans fragt eines Tages seinen Klassenkameraden Peter: „Wie alt ist eigentlich Deine Schwester?" Peter lächelt und antwortet: „In 2 Jahren besitzt sie $^1/_3$ des augenblicklichen Alters meines Vaters; vor 5 Jahren jedoch war mein Vater 5mal so alt wie sie. Nun überlege, wie alt meine Schwester und wie alt mein Vater ist!"

79. Begründen Sie folgenden Sachverhalt:

Denken Sie sich eine Zahl, addieren Sie 11, das Ergebnis multiplizieren Sie mit 2, subtrahieren Sie vom Produkt 20. Das Ergebnis multiplizieren Sie mit 5. Subtrahieren Sie das Zehnfache der gedachten Zahl! Die Lösung ist 10.

80. Stahlschienen von 1 m Länge dehnen sich bei einer Temperaturerhöhung von 1 °C um $1{,}23 \cdot 10^{-5}$ m aus. Welche Stoßfugen müssen zwischen Schienen von 20 m Länge gelassen werden, wenn sie bei 17 °C verlegt werden und mit Erwärmung bis auf 50 °C gerechnet wird?

81. Wie sind 120 p auf die Enden eines zweiseitigen Hebels zu verteilen, wenn Gleichgewicht herrschen soll und die Hebelarme 45 cm und 63 cm lang sind?

82. Zum Entleeren einer Jauchegrube braucht man mit einer Handpumpe 10 Stunden. Wie lange dauert die Entleerung, wenn man zusätzlich eine elektrische Pumpe mit vierfacher Leistung verwendet?

83. Auf einem Lagerplatz befinden sich 214 Raummeter Kiefernholz und 235 Raummeter Birkenholz. Davon werden täglich 6,5 Raummeter Kiefern- und 7,5 Raummeter Birkenholz abgefahren. Nach wieviel Tagen befinden sich auf dem Lagerplatz gleich viele Raummeter Kiefern- und Birkenholz?

84. In der gleichen Zeit umrunden zwei Freunde die 400 m lange Aschenbahn eines Sportplatzes zwei- bzw. dreimal. Laufen sie von einem Punkt dieser Aschenbahn gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung los, so begegnen sie sich alle 40 s.

Mit welcher Geschwindigkeit laufen die beiden Freunde?

85. Zwei Eisenbahnzüge, von denen der eine 180 m lang ist und mit einer Geschwindigkeit von 30 km $\cdot$ h^{-1} fährt, während der andere 120 m lang ist und eine Geschwindigkeit von 50 km $\cdot$ h^{-1} besitzt, begegnen sich. Wieviel Sekunden wird es dauern, bis sie aneinander vorbeigefahren sind?

86. Die Leistungen des Güterverkehrs der DDR steigerten sich von 1950 an wesentlich.

(Alle Angaben in Megatonnen)

	Gesamtleistung	Deutsche Reichsbahn	See- u. Binnenschiffahrt	Kraftverkehr
1950	225,8	128,5	10,0	87,3
1958	469,0	227,0	15,5	226,5

a) Berechnen Sie die prozentuale Steigerung der Gesamtleistung und der Leistungen der einzelnen Verkehrszweige!

b) Stellen Sie die Leistungen von Bahn, Schiffahrt und Kraftverkehr im Vergleich (1950 bis 1958) in einem Diagramm graphisch dar!
(10 Megatonnen $\triangleq$ $^1/_2$ cm)

87. Die Leipziger Frühjahrsmessen in unserem Arbeiter-und-Bauern-Staat weisen von Jahr zu Jahr größere Ausstellungsflächen, höhere Besucherzahlen und enorm steigende Exportumsätze auf.

Nach amtlichen Meldungen zeigte sich folgende Gegenüberstellung:

Jahr	a Ausstellungsfläche	b Besucherzahl	c Exportumsatz
1952	187 000 m^2	470 000	245 Mill. DM
1961	300 000 m^2	600 000	3066 Mill. DM

Berechnen Sie die jeweilige Steigerung in Prozenten, und stellen Sie ein möglichst anschauliches Diagramm zu a bis c auf!

88. In einer Kreisstadt wird in den nächsten Jahren eine neue Schule mit einer Gesamtkostensumme von 1,8 Millionen gebaut. 25% dieser Summe sollen durch die Bevölkerung der Kreisstadt im NAW erarbeitet werden.

Bestimmen Sie den bisher erreichten prozentualen Anteil an der Erfüllung der notwendigen NAW-Leistungen, wenn zur Zeit 88 320,— MDN für den Schulneubau erarbeitet wurden!

89. In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff „mittlere Präzision" pm. Nimmt man pm als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20% aller Treffer. Sämtliche Treffer erfaßt man mit einem Kreis, der einen etwa $4\frac{1}{2}$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von pm = 0,5% der Schußweite. Später wollen sie Werte von pm = 0,1% und in ferner Zukunft sogar pm = 0,05% erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20%-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenen Kreises, wenn die Schußweite 12 500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision pm wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, daß der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

90. Der Umfang unserer volkswirtschaftlichen Vorhaben im Siebenjahrplan ist den Erfordernissen entsprechend festgelegt.

Die Investitionen verteilen sich auf die wichtigsten Gebiete wie folgt:

Industrie	60 Milliarden MDN,
Verkehrswesen	14 Milliarden MDN,
Landwirtschaft	14 Milliarden MDN,
Wohnung und Städtebau	30 Milliarden MDN,
sonstige Vorhaben	24 Milliarden MDN.

Stellen Sie diese Werte in einem Kreisdiagramm anschaulich dar!

91. Im Rahmen des Produktionsaufgebotes senkte im VEB Uhren- und Maschinenfabrik „Klement Gottwald" eine Jugendabteilung die Ausschußquote um 6 Prozent der Produktionsmenge und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschußquote nur noch $\frac{2}{5}$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,— MDN.

a) Wieviel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuß vorher?

b) Wieviel Prozent beträgt er jetzt?

c) Welchem Wert (in MDN) entspricht der Ausschuß jetzt noch?

92. Im Rechenschaftsbericht zum XXII. Parteitag der KPdSU führt N. S. Chruschtschow Zahlen an, die das Wachstum der industriellen Produktion in den Ländern des Sozialismus und in den kapitalistischen Staaten kennzeichnen.

Jahr	Länder des Sozialismus	Länder des Kapitalismus
	(In vergleichbaren Territorien 1937 $\triangleq$ 100)	
1937	100	100
1955	362	199
1956	404	208
1957	445	215
1958	521	210
1959	610	231
1960	681	244

a) Stellen Sie diese gemachten Angaben graphisch dar!

b) Leiten Sie aus den graphischen Darstellungen das Wachstum der industriellen Produktion für die Länder des Sozialismus und das der kapitalistischen Staaten für die Jahre 1970 und 1980 ab!

93. In schneller Fahrt verläßt ein Triebwagen den Bahnhof. In der 2. Klasse sitzen viermal so viel Fahrgäste wie in der 1. Klasse. Auf der nächsten Station steigen 12 Personen in die 1. Klasse ein, 32 Personen verlassen die 2. Klasse. Am Zielbahnhof sind in der 1. Klasse gerade halb so viel Fahrgäste wie in der 2. Klasse. Wieviel Reisende waren zu Beginn der Fahrt in die 2. Wagenklasse eingestiegen? Begründen Sie den Lösungsweg!

94. Ein Gießereiarbeiter hört fleißig die Mathematiksendungen der Fernsehakademie. Tagsüber transportiert er mit einem Karren, der für 400 kp gebaut ist, große und kleine Gußstücke. Vier große und neun kleine Gußstücke wiegen gerade 390 kp; dagegen wiegen sechs große und drei kleine genau 396 kp. Berechnen Sie daraus das Gewicht eines großen und eines kleinen Gußstückes!

95. Die waagerechte Fahrbahn einer eisernen Bogenbrücke hat die Länge von 21 m. Der Bogen ist in der Mitte 3,5 m hoch. Suchen Sie durch eine Konstruktion den Radius des Kreises, zu dem der Bogen gehört, und begründen Sie die Konstruktion! Ermitteln Sie den Radius auch rechnerisch!

96. Beweisen Sie den folgenden Satz: Alle Winkel, deren Scheitelpunkte S auf der Peripherie eines Kreises liegen und deren Schenkel durch die Endpunkte A und B eines Kreisdurchmessers verlaufen, betragen 90 Grad! Dabei wird vorausgesetzt, daß S nicht mit A bzw. B zusammenfällt!

97. Kann man aus 36 gleichlangen Streichhölzern, ohne sie zu zerbrechen, ein rechtwinkliges Dreieck legen? Begründen Sie Ihre Antwort!

98. Der Umfang eines Vorderrades eines Wagens mißt 1,60 m, der eines Hinterrades 2,25 m. Bestimmen Sie die kürzeste Strecke, die der Wagen zurücklegt, bis beide Räderpaare eine ganzzahlige Anzahl Umdrehungen ausgeführt haben!

99. Ein Fahrgast erblickt aus der fahrenden Straßenbahn seinen Freund, der entgegengesetzt zur Fahrtrichtung die Straße entlanggeht. Nach einer Minute steigt er aus und läuft zurück, um den Freund zu treffen. Er läuft doppelt so schnell wie der Freund, aber nur mit dem vierten Teil der Geschwindigkeit der Straßenbahn. Nach wieviel Minuten, vom Zeitpunkt des Aussteigens an gerechnet, holt er den Freund ein?

100. Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, daß dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich der Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

101. Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostok 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug rund 200 km.

a) Wieviel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, daß Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) während des Raumfluges?

(Mittlerer Erdradius $R = 6370$ km)

102. Beim Preisschießen der GST hat ein Schütze mit 5 Schuß auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuß hat er mindestens 7 Ringe getroffen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

103. a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wieviel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?

b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?

c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wieviel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

104. a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus

$a = 5{,}6$ cm,
$r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises),
$\gamma = 60°$!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!

d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

105. Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, daß eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen!

Begründen Sie die Konstruktion!

106. Von dem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:

$AB = 6$ cm $\qquad CD = 4{,}5$ cm
$BC = 4$ cm $\qquad DA = 3$ cm

Konstruieren Sie das Trapez, und begründen Sie die Konstruktion!

107. Beweisen Sie folgenden Satz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis!

108. Beweisen Sie, daß die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

109. Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

110. a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen?

b) Wieviel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3000 Kugeln zusammenstellen kann?

Aufgaben für die Klasse 10

1. Berechnen Sie logarithmisch!

$$x = \sqrt[3]{\frac{17{,}46 \cdot \sqrt{0{,}384} - 18{,}49 \cdot \sqrt[3]{0{,}0324}}{8{,}59 \cdot \sqrt{2{,}345} - 1{,}962 \cdot \sqrt[3]{0{,}4567}}}$$

2. Lösen Sie folgende Gleichung (mit Probe)!

$$\frac{5}{x+1} + \frac{6}{x+2} - \frac{14}{x+3} = 0$$

3. Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf und führen Sie alle möglichen Proben durch!

$$\frac{x-8a}{8x-48a} - \frac{2ax+5a^2}{x^2-36a^2} + \frac{72a+13x}{24x+144a} = \frac{5}{12}$$

4. Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$2\sqrt{2x+5} - \sqrt{13-6x} = \sqrt{37-6x} \quad !$$

5. Man bestimme x aus der goniometrischen Gleichung

$$7 \sin x + 2 \cos 2x = 0 \quad !$$

6. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 10 m. Die eine Kathete ist 2 m lang. Wie lang ist die Hypotenuse bzw. die andere Kathete?

7. Ist der Ikarus 55 voll belastet, so kommt auf 187,5 kp seines Leergewichts eine Person (Nutzungsverhältnis). Fehlen an der vollen Besetzung 18 Personen, so beträgt das Nutzungsverhältnis 322,5 kp pro Person.
Berechnen Sie die Personenzahl bei der vollen Besetzung und das Leergewicht des Ikarus 55!

8. In einem Dreieck ist ein Winkel um 30° kleiner als die Summe und um 50° größer als die Differenz der beiden anderen Winkel. Wie groß sind die drei Winkel?

9. Ein Futtersilo für eine LPG hat einen kreisförmigen Querschnitt und wird aus 10 cm dicken Betonrohren angefertigt, die einen inneren Durchmesser d = 2,50 m und eine Höhe h = 1,00 m haben. Ein Silo ist H = 3,00 m tief. Die LPG baut vier dieser Silos. Bestimmen Sie

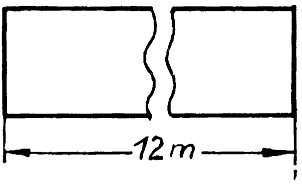
a) den Betonverbrauch für ein Rohr,

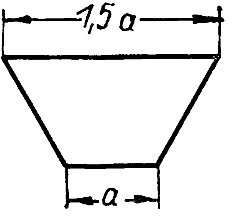
b) das Gewicht eines Rohrs, ($\gamma = 2{,}4\ \mathrm{Mp} \cdot \mathrm{m}^{-3}$)

c) den Zementverbrauch für alle 4 Silos!

Für 1 m^3 Beton werden 0,3 t Zement benötigt.

10. Bestimmen Sie die Maße des in der Figur gegebenen Gärfuttersilos, der randgefüllt 585 dt gedämpfte Kartoffeln faßt! (Schüttdichte $0{,}975\ \mathrm{t} \cdot \mathrm{m}^{-3}$). Die Maße sind in m angegeben. Die numerische Rechnung ist logarithmisch durchzuführen!





11. In einem Steinkohlenbergwerk soll für einen 800 m tiefen Schacht eine Förderanlage gebaut werden. Es sollen Lasten bis zu 12 Mp gefördert werden. Das Förderseil besteht aus Stahldrähten und verträgt unter Berücksichtigung der notwendigen Sicherung eine Belastung von 20 kp je mm^2 Querschnitt.

Wie groß muß der metallische Querschnitt des Seils sein, damit es sowohl die eigene Last als auch die zu fördernde Last tragen kann?

(Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}8\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$)

12. Durch Konstruktion ist ein Quadrat mit A = 9 F. E. (F. E. = Flächeneinheit) in ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die dreifache Länge der Quadratseite besitzt, zu verwandeln!

13. In einen gegebenen Kreis ist eine Sehne zu konstruieren, die einer außerhalb des Kreises gegebenen Strecke $AB < 2r$ gleich und parallel ist!

14. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Diagonalen eines Trapezes mit der Mitte der einen parallelen Seite halbiert auch die andere parallele Seite.

Beweisen Sie das!

15. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie AC über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E! Konstruieren Sie über CE das gleichseitige Dreieck CDE (die Punkte sollen im mathematisch positiven Drehsinn in dieser Reihenfolge liegen)! Verbinden Sie A mit D und B mit E, und halbieren Sie die beiden Strecken! Ihre Mittelpunkte seien M und N. Beweisen Sie, daß das Dreieck CMN stets gleichseitig ist!

16. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ sein soll.

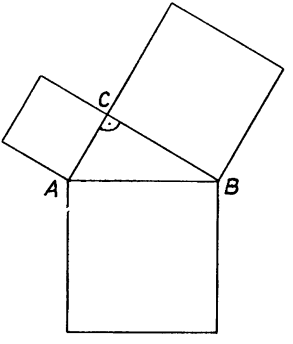
a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt (zwei verschiedene Fälle!)!

b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser gesuchten Kreise (wieder zwei verschiedene Fälle!)?

17. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Es ist zu beweisen, daß für den oberhalb der Hypotenuse konstruierten Halbkreis, der die Katheten $AC = b$ und $BC = a$ berührt,

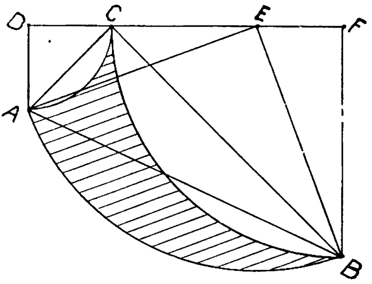
stets $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ist,

wobei r der Radius dieses Halbkreises sein soll!



18. Aus der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck! Sein Flächeninhalt soll durch die beiden Katheten a und b ausgedrückt werden!

19.



Vergleichen Sie die Flächeninhalte der schraffierten Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC!

(Die Dreiecke ACD, ABE und CBF sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)

20. Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes R_x bei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

R^x kann man durch folgende Konstruktion gewinnen:

Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand) die Senkrechten AB und CD errichtet, wobei AB und CD in einem geeigneten Maßstab die Widerstände R_1 und R_2 darstellen sollen. Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E.

Fällt man von E aus das Lot auf die gegebene Gerade (Fußpunkt sei F), dann wird behauptet, daß EF die Größe des gesuchten Widerstandes R angibt!

a) Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

b) Wie bestimmen Sie graphisch den Gesamtwiderstand, wenn drei Widerstände von 8 Ω, 10 Ω, 12 Ω parallel geschaltet werden?

21. Die Länge eines Riemens ist zu berechnen, der straff um zwei Seilscheiben vom Radius R und $\frac{R}{2}$ gespannt ist, wenn der Achsenabstand der Scheiben 2 R ist!

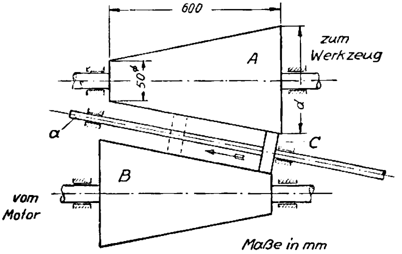
a) Allgemeine Lösung

b) R = 1 m

22. Die beigefügte Figur stellt ein stufenloses Getriebe dar, das aus zwei Kegelwalzen besteht, die durch ein zylinderförmiges Kupplungsrad C miteinander gekuppelt sind (Reibungs-Kupplung). Das Kupplungsrad C läßt sich auf der Achse a verschieben; damit wird das Übersetzungsverhältnis geändert.

Mit diesem Getriebe soll das Übersetzungsverhältnis von 5:1 bis 1:5 verändert werden können. Die Kegelwalzen A und B sind gleichartig; die Figur ist nicht maßstabgerecht.

a) Berechnen Sie den Durchmesser d!



Stufenloses Getriebe

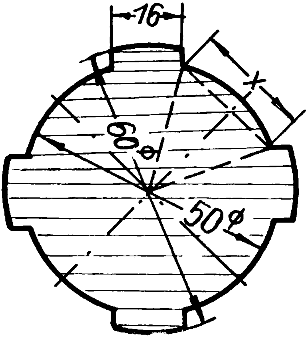
b) Welchen Winkel muß die Achse a mit den Wellen der Kegelwalzen bilden?

c) Wie wirkt sich eine Veränderung des Kupplungsraddurchmessers auf das Übersetzungsverhältnis aus? Begründen Sie die Antwort!

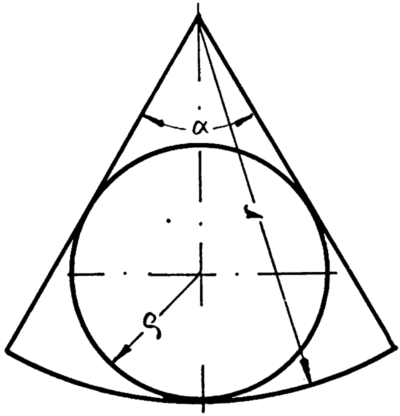
d) Berechnen Sie das Übersetzungsverhältnis, wenn der Durchmesser d = 200 mm beträgt! Welchen Winkel bildet jetzt die Achse a mit den Wellen der Kegelwalzen?

e) Ermitteln Sie mit Hilfe des in a) berechneten d-Wertes das Volumen einer Kegelwalze unter Verwendung der in der Figur angegebenen Abmessungen!

23. Die Gütekontrolle eines Betriebes hat die Prüfung des Profils einer Keilwelle mit vier Nutkeilen (siehe Figur) durchzuführen. Die anzufertigende Lehre mißt als Prüfstrecke x den Abstand zweier benachbarter Keile von Innen- zu Innenkante. Berechnen Sie das Prüfmaß!



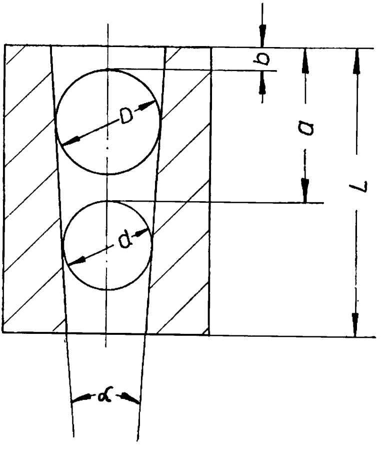
24. a) Wie groß ist der Radius ϱ des Kreises, den man dem Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel α einbeschreiben kann?



b) In einen Kreis vom Radius r werden von innen n gleich große, sich untereinander berührende Kreise gelegt. Wie groß ist der Radius ϱ eines jeden dieser Kreise? ϱ ist in Abhängigkeit von r und n darzustellen!

25. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser von 24 mm soll ein Sechskantstahl bei geringstem Materialverschleiß hergestellt werden. Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Abfalls!

26. Die genaue Prüfung einer kegeligen Bohrung der Länge L = 120 mm wird mit zwei Kugeln vom Durchmesser D = 52,5 mm bzw. d = 22,5 mm vorgenommen; ihre Abstände von der oberen Stirnfläche betragen a = 90 mm bzw. b = 7,5 mm.

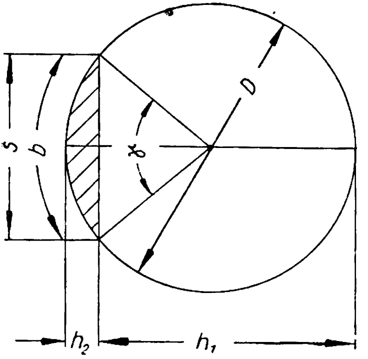


a) Berechnen Sie, unter welchem Winkel α die Bohrung angefertigt wurde!

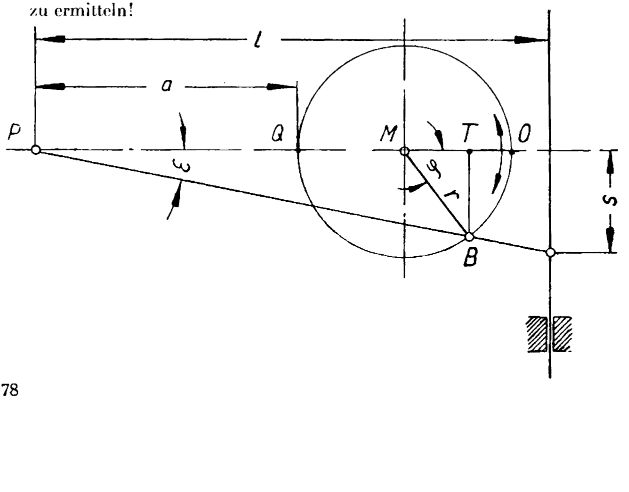
b) Wie weit sind die Kugelmittelpunkte von der oberen Stirnfläche entfernt? Bestimmen Sie den Abstand der beiden Mittelpunkte!

c) Berechnen Sie aus den gegebenen Durchmessern die Kugelvolumina! Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumina!

27. Von einer Welle mit dem Durchmesser D = 160 mm wird das schraffierte Stück abgefräst, so daß h_1 = 140 mm ist. Wie groß ist der Zentriwinkel γ Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

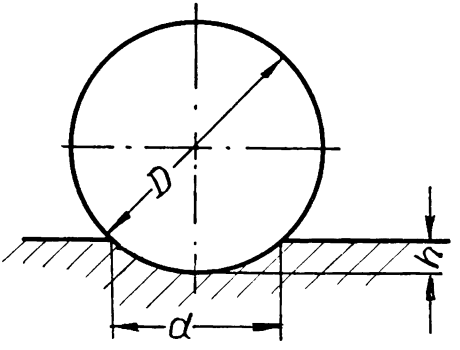


28. Zur Umsetzung von Drehbewegungen in geradlinige Bewegungen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Bei Werkzeugmaschinen wird häufig die „schwingende Kurbelschleife" (Konstruktionsprinzip siehe Figur) angewendet.
Es ist die Auslenkung s des schwingenden Maschinenteils in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ anzugeben; das heißt, die Funktion s = f (φ) ist zu ermitteln!



29. Es soll ein Kanal von 3,75 m Tiefe ausgeschachtet werden, der unten eine Breite von 6 m hat. Der Böschungswinkel beträgt 24°. Berechnen Sie die obere Breite des Kanals!

30. Bei der Härtebestimmung nach Brinell wird eine kleine Stahlkugel in das Material eingedrückt. Wie groß ist die Eindrucktiefe h, wenn D = 12 mm und d = 5 mm ist?



31. Die Oberfläche zweier Kugeln beträgt zusammen 15 400 cm^2. Wie groß sind die Durchmesser, wenn sich diese um 14 cm unterscheiden? $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

32. Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm). Wie muß sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

33. In einer Kugel befindet sich ein Würfel, der die Kugeloberfläche mit allen Ecken berührt. Der Würfel hat 463,7 m^3 Volumen. Wie groß ist der Radius der Kugel?

34. Der Mittelpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a wird mit den 8 Würfelecken verbunden. Wie groß ist das Volumen einer Pyramide, die eine Würfelseite zur Grundfläche hat und deren Spitze der Mittelpunkt des Würfels ist?

35. Auf einem Flugplatz der Deutschen Lufthansa stehen doppelt soviel viermotorige wie einmotorige Flugzeuge und doppelt soviel zweimotorige wie viermotorige Flugzeuge. Die Gesamtzahl der Motoren beträgt 34. Wieviel Flugzeuge jeder Gattung sind vorhanden?

36. a) Um wieviel Grad Abstand ging die Rakete XXI. Parteitag am Mond vorbei?

Die Entfernung des Mondes zur Erde beträgt etwa 380 000 km.
Die kürzeste Entfernung der Rakete vom Mond betrug etwa 7000 km.

b) Vergleiche dazu den Abstand der Rakete Pionier 4 (USA), deren kürzeste Entfernung zum Mond 56 000 km betrug!

37. In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird. Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?

Radius der Erde $R = 6370$ km.

38. Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden! Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das! Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?

39. Drei Kreise mit den Durchmessern 7,6 cm, 10,4 cm und 13 cm berühren einander gegenseitig von außen. Führen Sie die Konstruktion durch, und beschreiben Sie diese!

40. Konstruieren Sie die Strecke mit der Maßzahl $\sqrt{5}$!
(Führen Sie die Konstruktion auf unliniertem Papier aus!)

41. Zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 15$ mm und $r_2 = 25$ mm, deren Mittelpunkte $a = 70$ mm voneinander entfernt liegen, werden von einem dritten Kreis (Anschlußkreis) mit $r = 70$ mm umhüllt. Konstruieren Sie den Mittelpunkt dieses Anschlußkreises!

42. Es ist

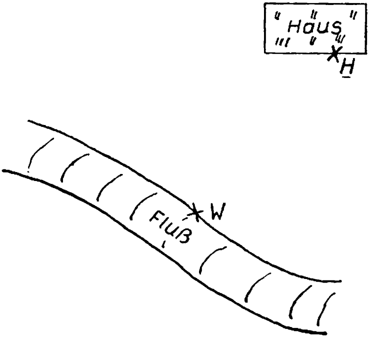
a) auf einer gegebenen Geraden ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf der Geraden liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist,

b) auf einem gegebenen Kreis ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf dem Kreise liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist!

Ist dieser Punkt stets vorhanden?

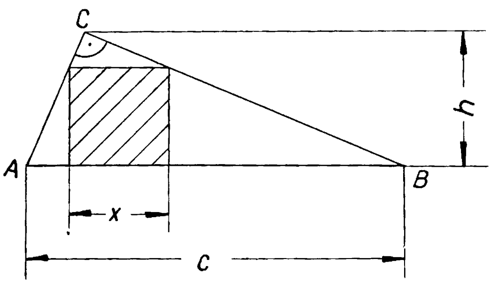
Gibt es nur einen solchen Punkt?

43. Von einem Haus soll nach einem Fluß die geradlinige Verbindung HW, die 60 m beträgt, durch zwei Seile von je 30 m Länge hergestellt werden! Um den Pfosten zwischen H und W einschlagen zu können, muß die Strecke HW durch Zwischenpunkte festgelegt werden. Ein übliches Visieren ist jedoch nicht möglich, da man sich nicht hinter H und hinter W stellen kann.



44. Zur Ausschöpfung örtlicher Reserven sollen aus vorhandenen Pappstücken in Form rechtwinkliger Dreiecke durch 3 Schnitte Quadrate gewonnen werden.

Zeigen Sie die Richtigkeit der Formel $x = \frac{c \cdot h}{c + h}$ für die Seite x des Quadrates!



45. Leiten Sie eine Formel her für die Bestimmung eines Innenwinkels in einem regelmäßigen n-Eck!

46. Eine sechsstellige Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Ziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten an die Zahl an, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl!

a) Wie heißen die beiden Zahlen?

b) Kann man mit der Ausgangszahl weitere ähnliche Aufgaben bilden? (Beispiele!)

c) Aus welcher Aufgabe ist die Ziffernfolge der Ausgangszahl bekannt?

47. Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl! Beweisen Sie, daß die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

48. Beweisen Sie, daß die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

49. Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:

a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar!

b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl!

Wieviel Lösungen gibt es?

50. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen m die Zahl

$$n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} \qquad \text{immer eine natürliche Zahl ist!}$$

51. Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer!

52. Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:

a) Ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6.

b) Wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

53. Berechnen Sie
$^2\log {}^1/_{256} + {}^2\log {}^1/_{128} + {}^2\log {}^1/_{64} + {}^2\log {}^1/_{32} + \ldots + {}^2\log {}^1/_2 + {}^2\log 1 + {}^2\log 2 + \ldots + {}^2\log 64 + {}^2\log 128$!

54. Eine Spule enthält $2{,}4 \cdot 10^4$ Windungen eines Kupferdrahtes mit 0,15 mm Durchmesser. Sie ist zylindrisch gewickelt und hat einen mittleren Durchmesser von 3,9 cm.
Berechnen Sie mit Hilfe der Formel $R = \varrho \cdot \frac{l}{q}$ den Widerstand der Spule logarithmisch!
Der spezifische Widerstand von Kupfer $\varrho = 1{,}75 \cdot 10^{-2}\ \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$

55. Von A fährt ein Kraftwagen mit einer Geschwindigkeit von $60\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ nach B. Zu gleicher Zeit fährt ein zweiter Kraftwagen mit $70\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ von B nach A. Die Entfernung $\overline{AB}$ beträgt 140 km. Nach wieviel Minuten Fahrzeit und wieviel km von A entfernt treffen sie sich?

56. In einem liegenden zylindrischen Faß von der Länge l und dem Durchmesser d wird mit einem Maßstab der Benzinstand mit einer Höhe h gemessen.
a) Stellen Sie die Gleichung für das Volumen der Treibstoffmenge auf!
b) Berechnen Sie das Volumen für folgende Maße:
$l = 1{,}80$ m,
$d = 0{,}85$ m,
$h = 0{,}35$ m!

57. In welchem Verhältnis steht das Volumen eines geraden Kreiskegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zu dem Volumen der ihm einbeschriebenen Kugel?

58. Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke). An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von $1\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.
a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug (in $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$)?
b) Wie lang ist der Zug?

59. Ein Flugzeug benötigt für eine Flugstrecke von 140 km auf dem Hinflug mit dem Winde 15 min, auf dem Rückflug gegen den Wind 21 min. Wie groß sind die Eigengeschwindigkeit und die Windgeschwindigkeit?

60. An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 Zentimeter vom oberen Rand entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.

Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann? (Die Maße des Zylinders: h = 20 cm, d = 10 cm, $\pi \approx \frac{22}{7}$)

61. Eine Messinglegierung enthält 35,5 % Zink und 1,4 % Blei; der Rest ist Kupfer. Wieviel p der genannten Metalle enthält eine Messingplatte $400 \cdot 300 \cdot 4$ (in mm), $\gamma = 8{,}5\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$?

(Die angegebenen Prozente sind Gewichtsprozente!)

62. Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

a) $\sin x = \sin 69^0$

b) $\tan\left(\frac{x}{2} + 32^0\right) = 1$

c) $\sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2$

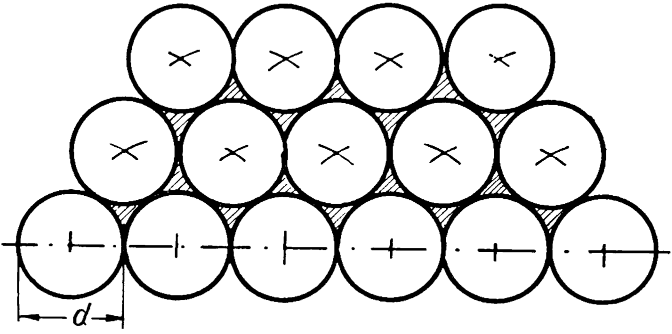
63. Die Tatsache, daß ein beliebiger Winkel mit Zirkel und Lineal nicht in 3 gleiche Teile geteilt werden kann, ist den Mathematikern schon lange bekannt (Problem der Trisektion eines Winkels).

Konstruieren Sie jeweils einen Winkel von 180°, 90° und 45°, und geben Sie eine Konstruktion für die Dreiteilung dieser speziellen Winkel an! Begründen Sie diese Konstruktionen!

64. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ist gegeben. Um eine Ecke ist ein Kreis mit dem Radius $^1/_2$ a beschrieben. Ziehen Sie von den beiden anderen Ecken die sich schneidenden Tangenten an den Kreis, und berechnen Sie das Flächenstück, das von einem Teil des Kreises und den beiden Tangenten begrenzt wird!

Beispiel:
a = 10 cm

65. 15 gleiche Fässer mit dem Durchmesser d sind so gestapelt, wie es die Figur zeigt!
Berechnen Sie die Höhe des Stapels und die Größe der schraffierten Fläche!



66. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 180 cm^2. Wie groß ist sein Umfang, wenn eine Kathete 31 cm länger ist als die andere?

67. Ein Drittel einer Zahl ist um 3 größer als ein Viertel der gleichen Zahl. Bestimmen Sie die gesuchte Zahl!

68. Vergleichen Sie die Zahlen folgender Zahlenpaare miteinander: $^3/_4$ und $^5/_6$; $^4/_{25}$ und 0,16; $7 \cdot \sqrt{8}$ und $5 \cdot \sqrt{18}$!

69. Jemand behauptet, daß die Summe aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Quadrat stets eine gerade Zahl ist. Stimmt diese Behauptung? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

70. Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Länge der Grundkante beträgt 6 cm. Die Höhe der Pyramide ist 9 cm.
a) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide!
b) Stellen Sie diese Pyramide im Grund- und Aufriß dar! (alle Eckpunkte benennen!)

71. Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat eine Grundkantenlänge von 8 cm und eine Körperhöhe von 12 cm. Ihr ist ein 8 cm hohes gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche so einbeschrieben, daß die Eckpunkte seiner Deckfläche auf den Höhen der Seitenflächen der Pyramide liegen.
Fertigen Sie davon eine Zeichnung in senkrechter Zweitafelprojektion an (Benennung aller Eckpunkte)!

72. Beweisen Sie:

a) Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks ABCD (konvex und konkav) miteinander, so ist das entstehende Viereck stets ein Parallelogramm!

b) Die Fläche dieses Parallelogramms ist stets halb so groß wie die Fläche des Vierecks ABCD!

c) Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines Sehnenvierecks ABCD miteinander, so ist der Umfang des Parallelogramms $\leqq 4r$, wenn r der Radius des Umkreises ist! Für welche Vierecke gilt das Gleichheitszeichen?

73. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. In dieses Quadrat sollen fünf gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß ein Kreis in der Mitte liegt und die vier übrigen sowohl diesen Kreis als auch je zwei aneinanderstoßende Quadratseiten berühren!

a) Drücken Sie den Radius dieser Kreise durch a aus!

b) Führen Sie die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal durch (Konstruktionsbeschreibung)!

74. Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!

75. In einem Dreieck sei die Seite a größer als die Seite b.
Die zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b.

a) Es ist zu beweisen, daß stets

$$a + h_a \geqq b + h_b \text{ ist!}$$

b) Wann gilt das Gleichheitszeichen?

76. Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c !

Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

77. In einem Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt die Höhe des Kegels im Verhältnis 1:2 (von der Spitze aus) teilt. Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels sei a.

Wie groß ist der Radius der Kugel?

78. Beim Fußball-Toto ist auf dem Tipschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird.

Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten: Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.

Wieviel Tipscheine müßte jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte?

Der Lösungsweg ist zu begründen!

79. Welcher von den folgenden Brüchen ist größer

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \quad \text{oder} \quad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} \ ?$$

Begründen Sie ihre Behauptung!

80. a) Beweisen Sie, daß die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!

b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

81. Durch welche Zahlen ist das Produkt dreier beliebiger, aber aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen teilbar, deren Summe ungerade ist?

82. Setzt man vor eine beliebige dreistellige Zahl ihr Doppeltes, so entsteht eine sechs- oder siebenstellige Zahl, die durch 23 und 29 teilbar ist.

Ist diese Aussage richtig?

83. a) Berechnen Sie ohne Rechenhilfsmittel einen ganzzahligen Näherungswert für

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$$

b) Ist dieser Näherungswert kleiner oder größer als der exakte Wert?

84. Die Zahl $2^{3217}-1$ wurde als Primzahl ermittelt.

a) Stellen Sie fest, wieviel Stellen diese Zahl hat!

b) Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

Aufgaben für die Klasse 11

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+a} - \sqrt{n}\right) =$ $\qquad$ $(a > 0)$

   b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n\right) = \frac{5}{2}$

2. Eine Funktion ist in folgender Form gegeben:

$$y = f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

   Bilden Sie (nach Vereinfachung) die 1. und 2. Ableitung der Funktion!

3. Differenzieren Sie die folgende Funktion:

$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

4. Für welche Zahlenwerte ist die Ungleichung

   $-2x^2 + 14x - 20 > 0$

   erfüllt?

5. Für welche Werte ist die Ungleichung

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} > 0$$

   richtig?

6. Man bestimme alle x-Werte, die die Ungleichung

$$\frac{3 - 2x}{5} + 8 > \frac{5x + 2}{2} - x$$

   befriedigen!

7. Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

   $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > 1/2$ erfüllen!

   Das Ergebnis ist zu überprüfen!

8. Für welche Werte von x gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geqq 1?$$

9. Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2 \text{ ist!}$$

10. Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c} \quad \text{ist!}$$

11. Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung
$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ zu bestimmen!

12. Beweisen Sie, daß stets
$\sin \alpha + \cos \alpha \neq 1{,}5$ ist!

13. Es ist zu beweisen, daß für

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{ stets } \quad \sin x + \cos x \geqq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x} \quad \text{ist!}$$

14. In einem Halbkreis vom Radius r ist ein Trapez größten Inhalts zu zeichnen. Wie groß ist der Inhalt des Trapezes? (Die eine der parallelen Trapezseiten ist der Durchmesser des Halbkreises).

15. Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden. Wie groß muß man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
   a) der Rauminhalt,
   b) die Mantelfläche,
   c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

16. Ein Silo besteht aus einem Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel und untergesetztem Kegel, dessen Höhe gleich dem Radius ist. Das Volumen des Silos sei konstant. Wie sind die Abmessungen des Silos zu wählen, damit der Materialverbrauch möglichst gering wird?

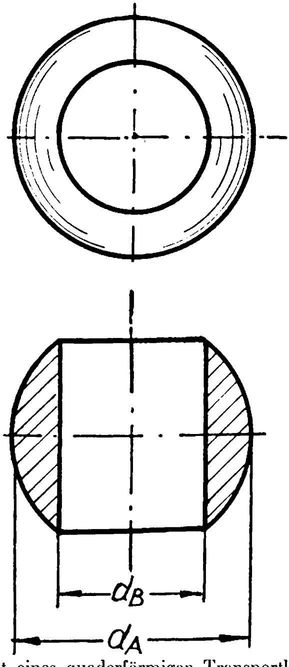
17. Zur Verwendung als verschiebbare Laufgewichte auf einer Stange sollen zylindrisch durchbohrte Kugelringe hergestellt werden.

   a) Stellen Sie die Gesamtfläche dieses Kugelringes als Funktion vom Bohrlochdurchmesser dar!

   (Kugeldurchmesser konstant vorgegeben).

   b) Wie groß muß der Bohrlochdurchmesser sein, wenn die Gesamtoberfläche maximal sein soll?

   c) Wie groß ist die maximale Oberfläche?



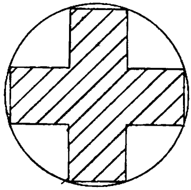
18. Das Kantengerüst eines quaderförmigen Transportkäfigs soll aus 36 m Winkeleisen hergestellt werden.

   Bei welchen Abmessungen für Länge, Breite und Höhe erhält man das größte Volumen des Käfigs, wenn dessen Höhe halb so groß wie die Länge sein soll?

19. Ein zylindrischer, oben offener Behälter von Inhalt V und der Wandstärke a (Bodendicke = Wandstärke) ist mit möglichst wenig Material M herzustellen!

20. Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.

Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?



Den wievielten Teil des Spuleninnern kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen? (Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten).

21. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Formel

$$\sum_{k=2}^{k=n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n, \text{ wenn } n \geqq 2 \text{ ist!}$$

22. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

23. Wenn die drei natürlichen Zahlen x, y und z der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, ist ihr Produkt $x \cdot y \cdot z$ stets durch 60 teilbar!

Beweisen Sie diese Behauptung!

24. Auf wieviel verschiedene Weisen läßt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen?

(Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

25. 3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2+4^2 = 5^2$ ist. Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden.
Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist? Welche Gesetzmäßigkeiten können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu gewinnen, mit dessen Hilfe Sie schnell derartige Tripel finden können!

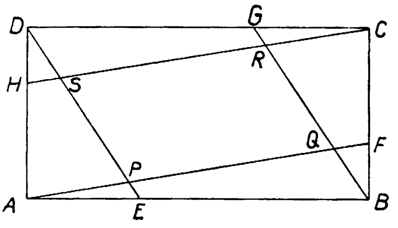
26. Es ist zu beweisen, daß bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n}-1$ durch 7 teilbar ist!

27. Die Verbindungslinie der Mitte einer Dreieckseite mit der gegenüberliegenden Ecke nennt man eine Seitenhalbierende. In der Technik ist für diese Linie die Bezeichnung Schwerlinie gebräuchlich. Die Schwerlinien im Dreieck teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2:1. Beweisen Sie das!

28. Beweisen Sie den Satz:
In einem Dreieck ist der stumpfe Winkel zwischen den Halbierungslinien der Winkel β und γ gleich der Summe aus 90° und $\frac{\alpha}{2}$!

29. Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Innenkreis den Radius r_2.
Beweisen Sie, daß für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise $d = \sqrt{r_1 (r_1 - 2 r_2)}$ gilt!
Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

30. Die Seiten eines Rechtecks ABCD werden im Verhältnis 1:2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H. Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks PQRS.
   a) Was für ein Viereck ist PQRS?
   b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?



31. Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, daß der erhaltene Schnitt ein

a) gleichseitiges Dreieck,
b) Quadrat,
c) regelmäßiges Fünfeck,
d) regelmäßiges Sechseck

ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

32. Es seien ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Inneren des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden durch $P_1 P$, $P_2 P$ bzw. $P_3 P$ mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.

Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist!

33. Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind. Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, daß in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wieviel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wieviel haben eine, wieviel zwei und wieviel drei angestrichene Flächen?

b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegende Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

Anmerkung: Statt Dimension kann man auch Kantenrichtung sagen!

34. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet. In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes DBCE?

35. Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

36. Gegeben seien ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5$ cm vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.

a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet,

daß $PR = PQ$ ist!

b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

37. Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, daß von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben!

Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen!

38. In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, daß keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt. Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke? (Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.)

39. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl um $^1/_{12}$ seiner Intensität J geschwächt. Wieviel Platten sind notwendig, um die Intensität J auf die Hälfte herabzusetzen?

40. Es sind 10 Stöße mit jeweils 10 Münzen gegeben. 9 Stöße enthalten nur echte, der eine Stoß nur unechte Münzen. Echte und unechte Münzen unterscheiden sich im Gewicht (echte Münze wiegt a Gramm, unechte Münze wiegt b Gramm).

Wie läßt sich durch *eine* Wägung der Stoß der unechten Münzen feststellen?

41. Ein Dampfer fährt auf einem Fluß von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A 4 $^1/_2$ Stunden. Wie lang braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

42. Ein Bruch von der Form $\frac{1}{a^2 + a}$ läßt sich in die Differenz zweier Teilbrüche zerlegen.

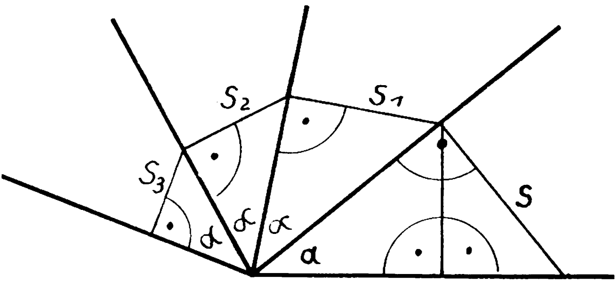
Berechnen Sie

$$\int \frac{dx}{x^2 + x} \quad !$$

Überprüfen Sie die Richtigkeit der Lösung!

43. Je zwei benachbarte Halbstrahlen eines Strahlenbüschels schließen miteinander den Winkel α *ein.* Von irgendeinem Punkt eines Strahles fällt man auf den nachfolgenden das Lot S, von dessen Fußpunkt auf den nächstfolgenden das Lot S_1 usw.

$$\lim_{n \to \infty} (S + S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = ?$$



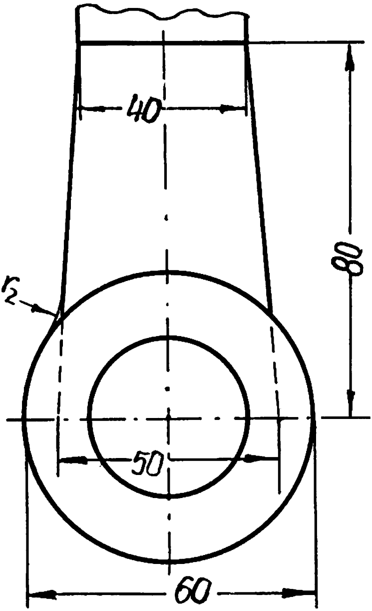
44. Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, daß mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10 000-fache gesteigert werden kann.

a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?

b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd kWh erzeugt).

Vergleichen Sie die Ergebnisse!

45. In der Skizze sind die Nabe und der anschließende Schaft eines Hebels aufgezeichnet. Der Übergang vom Schaft zur Nabe soll durch eine Abrundung mit $r_2 = 30$ mm erfolgen. Konstruieren Sie die Mittelpunkte der Anschlußbögen und die Übergangspunkte!



46. Wie erklärt es sich, daß man in dem Ausdruck

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}\right)$$

die beiden Brüche weglassen kann, ohne den Wert des Ausdruckes zu ändern?

47. Der XXII. Parteitag der Kommunistischen Partei der Sowjetunion zeigt uns die gewaltige Perspektive der Entwicklung der Volkswirtschaft. Die Industrieproduktion wird in den nächsten 20 Jahren jährlich um 9,6 % wachsen, d. h. in jedem Jahr wird die Produktion um 9,6 % höher als im Vorjahr sein.

   a) Auf das Wievielfache des Standes von 1960 wird die Industrieproduktion im Jahr 1970 und auf das Wievielfache wird sie im Jahr 1980 angewachsen sein?

   b) Die Industrieproduktion der USA ist in den letzten Jahren nur um 2,5 % jährlich gestiegen. Auf das Wievielfache wird die Produktion der USA im Jahr 1970 und im Jahr 1980 steigen, wenn man eine jährliche Steigerung von 2,5 % annimmt?

   c) Die Industrieproduktion der UdSSR betrug 1960 rund 60 % der Industrieproduktion der USA. Wann wird die UdSSR die USA in der Industrieproduktion einholen?

   d) Wieviel mal so groß als die der USA wird die Produktion der Sowjetunion im Jahr 1980 sein?

48. Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.

   a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)

   b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt? Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde $R = 6370$ km.)

49. Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.

   a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)

   b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

50. Gegeben sei ein Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD und den nicht parallelen Seiten BC und AD.
Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten.
Die Parallele zu AB durch H schneide die Seiten BC und AD in E und F.
Die Projektion von S auf EF sei G.
Beweisen Sie, daß die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

51. In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.
a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!
b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

52. In der Ebene seien *n* Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.
Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

53. Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{r}
\text{A T O M} \cdot \text{A T O M} \\
\hline
\text{x x x x x}\qquad\quad \\
\text{x x x x x}\qquad \\
\text{x x x x x}\quad \\
\text{x x x x x} \\
\hline
\text{x x x x A T O M}
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen x eine der Ziffern von 0 bis 9 ($A \neq 0$). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

Wie lautet die Aufgabe?

54. Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage 1 000 050.
Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

55. Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geqq 5$ durch 24 teilbar ist!

56. Es ist zu beweisen, daß $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

57. Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

58. Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:
$1 - \sin 5x = (\cos \frac{3}{2} x - \sin \frac{3}{2} x)^2$!

Aufgaben für die Klasse 12

1. Man berechne folgende Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!\,(n^2+1)}{(n+2)!}$

   b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} [\ln(\sin x + \cos x) - \ln \sin x] \tan x$!

2. Gegeben ist die Funktion

   $$y = \frac{|x-2|\,(x+1)}{(x-2)\,(x-1)\,(x+2)}$$

   Man bestimme Nullstellen, Pole, Verhalten für $x \to \pm\infty$, und fertige eine Skizze an!

3. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion

   $$y = \frac{2}{3}\left\{\frac{x^2+|x|-6}{x^2+|x|+2} + \sqrt{36-x^2}\right\}\ !$$

   Stellen Sie den Kurvenverlauf graphisch dar, und diskutieren Sie die Symmetrieeigenschaften!

4. Beweisen Sie, daß die Funktion

   $$y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

   die folgenden Eigenschaften hat:

   a) Sie ist für alle reellen Zahlen definiert.

   b) Sie ist für alle $x \geqq 1$ wachsend.

   c) Sie hat den Wertevorrat $0 \leqq y < 1$.

   d) Ihr Bild ist achsensymmetrisch.

   Bestimmen Sie die Symmetrieachse, und beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurve!

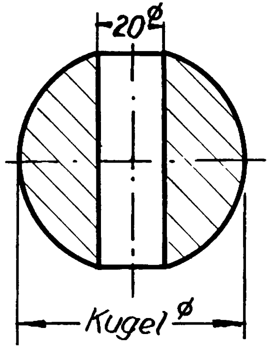
5. Verlängert man den Radius einer Kugel zunächst um 5 cm und dann um weitere 3 cm, so erhält man zwei Kugeln, deren Rauminhalte sich um den Inhalt der gegebenen Kugel unterscheiden!

   Wie groß ist deren Radius?

6. Eine Halbkugel soll durch einen ebenen Schnitt parallel zur Grundfläche halbiert werden. In welcher Entfernung vom Kugelmittelpunkt ist der Schnitt zu legen?

7. Das Laufgewicht einer Brückenwaage soll die Form einer durchbohrten Kugel haben; die Bohrung hat einen Durchmesser von 20 mm. Wie groß muß der Durchmesser der Kugel sein, damit das Laufgewicht gerade 1 kp wiegt?

   (Wichte des Materials: $\gamma = 7{,}8 \text{ p} \cdot \text{cm}^{-3}$)



8. Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

   $\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x$
   $= \cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$
   für $0° \leqq x \leqq 360°$ zu bestimmen!

9. Beweisen Sie, daß für jedes ebene Dreieck

   $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geqq \frac{3}{4}$ ist!

   In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

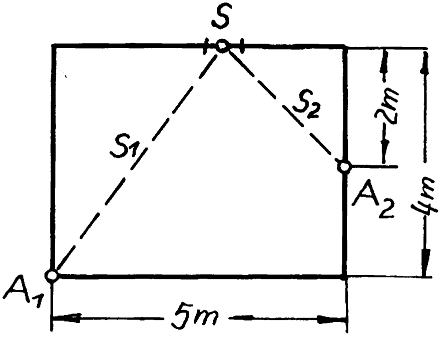
10. Geben Sie (für alle positiven Winkel x) für

   $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x} \geqq \frac{8}{3}$ alle Lösungen an!

11. In einem Arbeitsraum von 5 m Länge und 4 m Breite sind 2 Arbeiter tätig, deren Arbeitsplätze ständig A_1 und A_2 sind. An der Rückwand des Raumes soll ein Materialschrank eingebaut werden.

Beide Arbeiter legen den Weg zum Schrank in gleichem Tempo und gleichoft zurück.

An welcher Stelle der Wand ist der Schrank einzubauen, damit der Zeitverlust für die Wege ein Minimum ist?



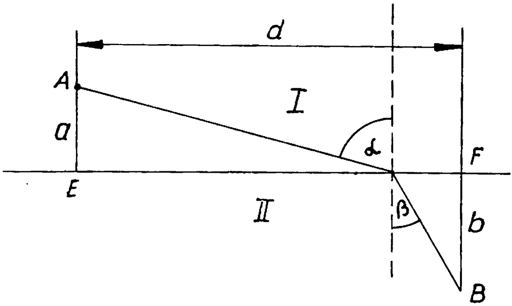
12. Der absolute Druck von gesättigtem Wasserdampf beträgt nach Dulong in Atmosphären $P = \left(\frac{40 + t}{140}\right)^5$ für eine gegebene Temperatur t, solange t oberhalb von 80 °C liegt. Gesucht wird das Verhältnis von Druckänderung zu Temperaturänderung bei 100 °C!

13. An die Kurve $y = e^x$ wird ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b so herangeschoben, daß die Kathete a auf der x-Achse gleitet und die Hypotenuse die Kurve berührt.

Wo liegt der Berührungspunkt?

14. Ein Lichtstrahl, der in einem Medium I die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium II die Geschwindigkeit c_2. Beweisen Sie, daß die für den Weg benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{ist!}$$



15. Ein runder Turm vom Innendurchmesser d hat eine Eingangstür von der Höhe h. Wie lang darf ein Balken höchstens sein, wenn man ihn durch diese Tür in das Turminnere bringen will?
Beispiel: h = 4 m, d = 10 m.

16. Welche Bedingungen bestehen zwischen den Mittelpunktskoordinaten und den Radien der Kreise $(x - c_1)^2 + (y - d_1)^2 = r_1^2$ und $(x - c_2)^2 + (y - d_2)^2 = r_2^2$,
die sich a) von außen und b) von innen berühren? $(r_1 > r_2)$

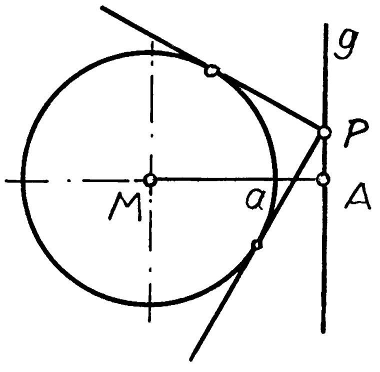
17. Es ist der geometrische Ort der Punkte zu bestimmen, deren Abstand von den Achsen des Koordinatensystems eine konstante Summe s besitzt! Durch Zeichnung ist nachzuprüfen, ob für spezielle Werte die Bedingung erfüllt ist!

18. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r = 3 cm und eine Gerade im Abstand a vom Kreismittelpunkt M.

a) Konstruieren Sie den Punkt P auf der Geraden, von dem aus der Kreis unter einem rechten Winkel erscheint!

b) Bestimmen Sie die Entfernung des Punktes P auf der Geraden von dem senkrechten Abstand MA der Geraden vom Kreismittelpunkt!

c) Unter welcher Bedingung ist die Konstruktion des Punktes P ausführbar?



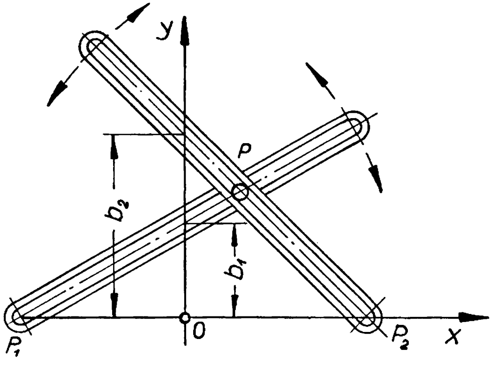
19. Gegeben seien eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb AB so, daß CE = CB ist!

Auf der Strecke CE bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, daß CA = CD ist!

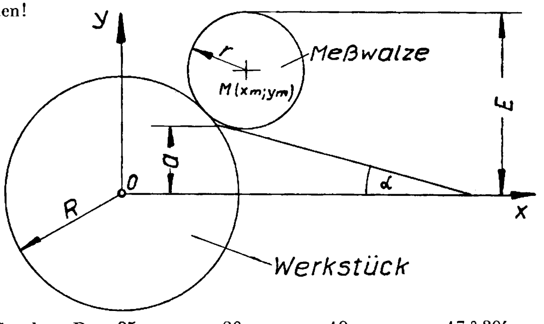
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Strecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?

b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage des Punktes C zu beweisen!

20. Zwei um P_1 und P_2 drehbar gelagerte Schenkel eines Getriebes sollen sich so bewegen, daß die Abschnitte b_1 und b_2 auf der Ordinatenachse das Verhältnis 1:2 bilden. Der Bolzen P, der die Verbindung beider Schenkel herstellt, ist so zu führen, daß das Verhältnis 1:2 in jeder Getriebestellung erhalten bleibt!
Welche Form und Lage muß die Führung des Bolzens P erhalten, wenn $OP_1 = OP_2$ ist?



21. An einem Werkstück ist der Winkel α mit Hilfe einer Meßwalze zu prüfen! Das Maß E ist mit Endmaßen meßbar und muß vorher errechnet werden!



Gegeben: R = 35 mm, r = 20 mm, a = 19 mm, α = 17 ° 30′
Gesucht: E in mm

22. Gegeben seien eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt M. Man konstruiere über derselben Seite der Strecke AB die Quadrate AMDE und MBGH!

Die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien R und S. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS?

23. Gegeben sei ein Würfel ABCD A'B'C'D' mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$.
Der Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats ABCD in dieser Reihenfolge, der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats A'D'C'B' in dieser Reihenfolge. Beide Punkte beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Punkten A und A' aus.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

24. Gegeben sind ein Quadrat ABCD und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, daß PQR ein gleichseitiges Dreieck wird. Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs ABCD bewegt?

25. Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben. Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, daß ABCD sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist!
(Näherungslösungen z. B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung. Es düfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden!)

26. In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben. Behauptung: Der Inhalt des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreise mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!

27. Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des urspünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60° konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke! Beweisen Sie diese Behauptung!

28. Verbindet man eine Ecke eines Parallelogramms mit der Mitte einer Gegenseite und zeichnet die nicht durch diese Ecke gehende Diagonale, so teilen sich diese Strecken im Verhältnis 1:2! Beweisen Sie das nach zwei Methoden!

29. Konstruieren Sie ein (konvexes) Viereck aus seinen Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und zwei Seiten!
Begründen Sie die Konstruktion, und diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

30. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus $AC = b$, $AB = c$ und $\sphericalangle AMB = \omega$, wobei M die Mitte der Strecke BC ist! Es sei $\omega < 90°$.

Man beweise, daß die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leqq c < b$ ist!

In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

31. Wieviel Prozent
a) aller 2-stelligen Zahlen,
b) aller 3-stelligen Zahlen,
c) aller 5-stelligen Zahlen,
d) aller 10-stelligen Zahlen,
e) aller 20-stelligen Zahlen,
f) aller 50-stelligen Zahlen
enthalten nicht die Null (0) als Ziffer?

32. Wieviel verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern
a) 1, 2,
b) 1, 2, 3,
c) 1, 2, 3, 4 bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen?

Versuchen Sie eine Gesetzmäßigkeit zu finden!
d) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?
e) Was läßt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man 4 verschiedene Ziffern zur Verfügung hat?

Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

33. Beweisen Sie folgende Behauptung:
Wenn eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, dann ist die Summe ihrer Ziffern nicht kleiner als 18!

34. Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar?
Die Antwort ist zu begründen!

35. Es ist zu beweisen, daß das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens durch 720 teilbar ist!

36. Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist. Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

37. Es ist zu beweisen, daß es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für das die Zahl $N = x^4 + 4y^4$ Primzahl ist!

38. Bei der Planung unserer sozialistischen Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung. Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode: Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:

1. Ziegelei zur 1. Baustelle	25 km,
1. Ziegelei zur 2. Baustelle	24 km,
2. Ziegelei zur 1. Baustelle	26 km,
2. Ziegelei zur 2. Baustelle	20 km.

Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind? Dabei wird angenommen, daß die Transportkosten der Entfernung proportional sind!

39. In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:

a) 3 Fräsmaschinen,

b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf — Spannvorrichtung,

c) 1 Automat.

Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:

a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,

b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,

c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.

Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

40. In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12 000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,— MDN je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr und zwar am 1. Januar und am 1. Juli. Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachnug des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,— MDN. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, „Schwund", durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen	60,— MDN
Kosten der Lagerhaltung	
also 20% von 3000,— MDN, das sind	600,— MDN
zusammen	660,— MDN
zusammen	660,— DM.

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, daß viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.

a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?

b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten?

Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

41. Gegeben sind 13 gleichgroße Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen

a) welche Kugel im Gewicht abweicht,

b) ob sie leichter oder schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, daß ihr Gewicht nicht abweicht.

Es ist bekannt, daß bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend numeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält. Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, — 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.

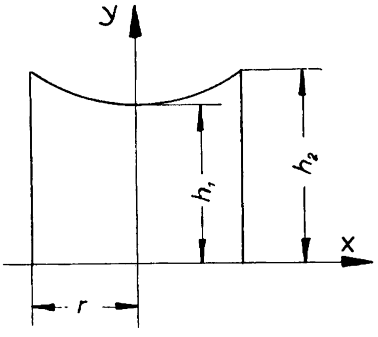
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

42. Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leqq 1 \end{cases} \quad !$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = +2$ begrenzt wird!

43. In einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Zylindergefäß vom Radius r ist jeder Achsenquerschnitt durch die Flüssigkeitsoberfläche eine Parabel. Wie lautet deren Gleichung, wenn ihr Scheitel den Bodenabstand h_1 hat und die Flüssigkeit am Rande bis zur Höhe h_2 reicht?



44. Ein Porzellangefäß mit der äußeren Höhe $h = 10$ cm ($\gamma_P = 2{,}5\ p \cdot cm^{-3}$), dessen äußere und innere Umgrenzung durch Rotation der Parabeln

$$y = \tfrac{1}{10}\, x^2 \text{ und } y = \tfrac{1}{10}\,(x^2 + 10)$$

um die y-Achse entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.

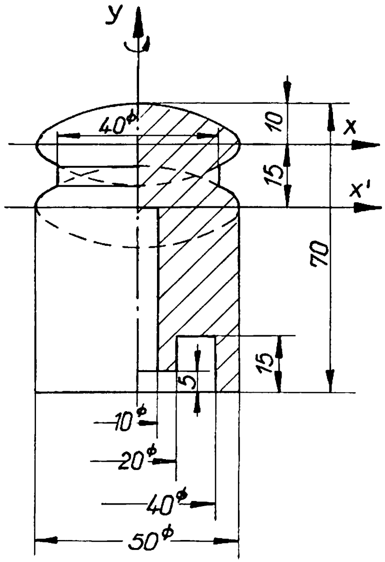
a) Zeichnen Sie den Achsenschnitt des Gefäßes!

b) Wie tief taucht das Gefäß ein, wenn es 0,5 cm; 1 cm; 1,5 cm; 2 cm hoch mit Quecksilber gefüllt wird? ($\gamma_Q = 13{,}5\ p \cdot cm^{-3}$)

c) Stellen Sie die Eintauchtiefe T in Abhängigkeit von der Füllhöhe h graphisch dar!

45. Ein Keramikisolator aus Porzellan für Leitungsmaste ist ein Rotationskörper. Die Drehachse ist die y-Achse. Die Begrenzungskurven des Achsenschnittes sind Ellipsenbögen und Geraden.

Berechnen Sie Volumen und Gewicht des Isolators! Die Maße in mm sind der untenstehenden Figur zu entnehmen!
(γ Porzellan $= 2{,}4\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$)



46. In der Integralrechnung wird häufig die Transformation $y = \tan \frac{x}{2}$ verwendet. Man drücke mit Hilfe der Additionstheoreme sin x, cos x, tan x, cot x durch y aus!

47. Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen — bei völliger Windstille — in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen. Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$), wenn der Zug in 3 Minuten 2 Kilometer zurücklegt?

48. Der Innenraum eines Gefäßes hat die Gestalt eines Rotationsparaboloids.
   a) Das Gefäß ist bis zur Höhe $h_1 = 40$ mm mit einer Flüssigkeit gefüllt. Der Durchmesser des Flüssigkeitsspiegels beträgt 80 mm. Berechnen Sie das Volumen V_1 der Flüssigkeit!
   b) Bis zu welcher Höhe h_2 ist das Gefäß gefüllt, wenn die Flüssigkeitsmenge verdoppelt worden ist?

49. Die Gleichung einer Hyperbel lautet $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
   a) Konstruieren Sie diese Hyperbel!
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, die im Punkte P_1 $(5; y_1 > 0)$ die Hyperbel berührt!
   c) Weisen Sie rechnerisch nach, daß diese Tangente den Winkel $F_1P_1F_2$ halbiert (F_1 und F_2 bezeichnen die Brennpunkte der Hyperbel)!

50. Einer geraden Pyramide ist ein gerades Prisma einbeschrieben. Beide Körper haben quadratische Grundflächen. Die Seiten der Grundflächen verlaufen parallel zueinander.
   Die Pyramide ist 12 cm hoch, ihre Grundkante ist 8 cm lang.
   a) Die Höhe des Prismas sei 8 cm lang. Fertigen Sie eine Zeichnung in Grund- und Aufriß an (alle Eckpunkte benennen)!
   b) Welche Maße müssen Höhe und Grundkante des Prismas erhalten, wenn dessen Volumen möglichst groß sein soll?

51. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{n\,(n+3)}{4\cdot(n+1)\,(n+2)}$$

52. Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen in der natürlichen Reihenfolge ist stets gleich n^2. Beweisen Sie das durch vollständige Induktion!

53. Gegeben ist der Mittelpunkt M (3; 4) des Kreises, der durch P_1 (7; 7) geht.
   a) Bestimmen Sie durch Zeichnung und Rechnung den Schnittpunkt P_2 (mit $y_2 > 0$) dieses Kreises mit der y-Achse!
   b) Zeichnen Sie die Geraden durch P_1 und P_2, die auf den Radien MP_1 bzw. MP_2 senkrecht stehen! Stellen Sie für jede dieser Geraden eine Gleichung auf!
   c) Wie groß ist die von diesen beiden Geraden und $\overset{\frown}{P_1P_2}$ (dem kleineren der beiden Kreisbögen) eingeschlossene Fläche?
   d) Begründen Sie ausführlich den Ansatz zur Lösung der Teilaufgabe c!

54. Das Dreieck ABC mit A (−2; −3), B (−1; −1), C (−4; 1) wird durch eine Streckung mit dem Streckfaktor −2 und dem Zentrum P_0 (2;1) abgebildet. Die Koordinaten der Ecken des Bilddreiecks sind zeichnerisch und rechnerisch zu bestimmen!

55. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2 sowie ein Punkt P (nicht auf g_1 oder g_2). Es ist ein Kreis zu zeichnen, der durch P geht und g_1 und g_2 berührt! Wie erfolgt die Lösung der Aufgabe, wenn g_1 und g_2 parallel verlaufen? Welche Lage muß dann P haben?

56. Von den Punkten A und B einer Strecke AB, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte C und D, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man mißt folgende Winkel:
$\sphericalangle DAB = 80°$, $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle ABD = 20°$.
Die Länge der Strecke CD beträgt 2 km.
Wie kann man die Länge der Strecke AB ermitteln?
a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!
b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmäßige Berechnung wird nicht verlangt.)

57. Es sei AD die Höhe eines Dreiecks ABC. Ein Kreis, der die Seite BC in D berührt, möge die Seite AB in M und N und die Seite AC in P und Q schneiden. Man beweise, daß

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB} \quad \text{ist!}$$

58. Gegeben sind ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P im Inneren des Kreises.
Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch P verlaufenden Sehnen?

59. Beim Eichen eines Dynamometers wurden die Größen der Belastung P gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt folgende Werte:

Zahl der Teilstriche N	Belastung in kp P
0	0
5	4,87
10	10,52
15	17,24
20	25,34

Die Belastung P kann durch die folgende ganze rationale Funktion von N dargestellt werden:

$$P(N) = a_1N + a_2N^2 + a_3N^3 + a_4N^4.$$

a) Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 zu berechnen!
b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16$!

60. Geben Sie ohne Benutzung einer Tafel der Kubikzahlen alle zweistelligen Zahlen an, deren dritte Potenzen mit den Ziffern der ursprünglichen Zahl in derselben Anordnung beginnen!

61. Es ist $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen".

Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen" irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne daß sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

62. Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen: Der erste Hirt erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen, dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist. Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.

Wieviel kostet das Messer?

63. Man bestimme alle reellen Werte von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen

$$x_2 + x_3 = px_1,$$
$$x_1 + x_3 = px_2,$$
$$x_1 + x_2 = px_3$$

genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl p (Parameter)!

64. Bestimmen Sie die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$\cos\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2} = 1/2$$
$$\cos x \cdot \cos y = 1/4 \quad !$$

65. Man beweise: Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 \text{ und}$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha .$$

66. Ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes ist das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

zu berechnen!

Anhang

Mathematik-Olympiade 1964
3. Stufe

Klasse 7

1. Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, daß seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen. Wie muß er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt?

2. Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!

   Wieviel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten?

   Gib genau an, wie Du diese Anzahl ermittelt hast!

3. Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, daß sie die Gerade schneiden!

   Beweise, daß die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!

4. Eine Zahl 30x0x03 soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die x jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen! (Für beide x-Zeichen muß nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)

   Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben!

5. a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111 111!

   b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

6. Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

   a) Konstruiere dieses Trapez!

   b) Begründe die Konstruktion!

Klasse 8

1. Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist?

   Begründe, daß es die kleinste derartige Zahl ist!

2. Beweise folgende Behauptung:

   Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets

   $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0$.

3. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird.

   Beweise, daß diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!

4. In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen! Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rccccc} & f & o & r & t & y \\ + & & & t & e & n \\ + & & & t & e & n \\ \hline & s & i & x & t & y \end{array}$$

5. Gegeben sind die Strecken $(s - a) = 3$ cm, $(s - b) = 2$ cm, $(s - c) = 1$ cm, wobei $2s = a + b + c$ der Umfang des Dreiecks ist.

   a) Konstruiere das Dreieck!

   b) Begründe die Konstruktion!

6. Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

   a) Konstruiere das Trapez!

   b) Begründe die Konstruktion!

Klasse 9

1. Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

2. Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam.

   Drei von ihnen haben den Radius r.

   a) Führen Sie die Konstruktion durch
   ($r = 3$ cm), und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!

   b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!

3. Welche Punkte $P(x; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a; 0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b; 0)$?

   Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte!
   ($b > a$)

4. Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110 355 024.

   Wie lauten die Zahlen?

   Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

5. Es ist der folgende Satz zu beweisen:
   Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten)!

6. Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.

   Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

   1) Anna hat den Ball.
   2) Brigitte hat den Ball nicht.
   3) Claudia hat die Schere nicht.

   Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

Klasse 10

1. Man löse die Gleichung
   $\lg(2x + 1) - \lg x = 2$!

2. Zwei Geraden schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Gegeben sei ferner eine Strecke $XY = 6$ cm, deren Endpunkte auf je einer der beiden Geraden liegen.
   Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte S aller möglichen Dreiecke AXY! (X und Y sind stets von A verschieden.)

3. Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren
   $(a > 0, b > 0)$.
   Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor.

Dabei erhält der 1. Schüler	575	Rest	227.
Der 2. Schüler erhält	572	Rest	308.

   Jeder hatte nämlich bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der 1. Schüler im Ergebnis 100 zu wenig und der 2. Schüler 1000 zu wenig erhalten.
   Wie heißen die Zahlen a und b?

4. Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n der Term $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar ist!

5. Einem Kreis sind drei einander berührende Kreise mit dem gleichen Radius r einbeschrieben. Drei kleinere Kreise mit dem Radius x sind so eingezeichnet, daß sie je zwei der Kreise mit r sowie den umhüllenden Kreis berühren.
   Es ist x rechnerisch zu bestimmen, wenn r gegeben ist!

6. Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), für die gilt
   $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1/2 \text{ und } x > 2, y > 2!$$

Klasse 11/12

1. Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen: Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten drei, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl!

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

   Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ ist!

3. Bestimmen Sie — in Abhängigkeit von der reellen Zahl p — alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen

$$xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2 + y^2)$$

$$xy - \frac{x}{y} = p(x^2 + y^2).$$

4. Für welche reellen Zahlen x ist

   a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x + 1/2}$,

   b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x + 1/2}$,

   c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x + 1/2}$?

5. Gegeben sei ein Würfel ABCDA′B′C′D′ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $XY = AB$ und X ein Punkt der Strecke AA′ sowie Y ein Punkt der Fläche ABCD sind.

   Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

6. Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b. Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B.

   Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit folgenden Eigenschaften:

   a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.

   b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.

   c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.

   d) Es ist $r_1 = 2 r_2$.

Mathematik-Olympiade 1963

4. Stufe

Klasse 10

1. Bestimmen Sie alle Paare (x; y) der positiven ganzen Zahlen x und y, für die
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50} \quad \text{ist!}$$

2. Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel von 60° wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, daß die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind.
Welcher von den beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt? (Beweis!)

3. Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein gegebenes Quadrat mit der Seite a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des gegebenen Quadrats ist.
Wieviel Lösungen hat diese Aufgabe?

4. Beweisen Sie, daß für alle positiven geraden Zahlen n die Zahl $z = 3^n + 63$ stets durch 72 teilbar ist!

5. Beweisen Sie, daß die Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!

6. Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a soll durch eine Ebene so geschnitten werden, daß eine quadratische Schnittfigur entsteht.
   a) Geben Sie die Lage der Schnittebene an!
   Warum ist die Schnittfigur ein Quadrat?
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

Klasse 12

1. a) Beweisen Sie, daß der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!
   b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60?
   Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt
$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2 \cot 2x}{\cot x} \leq 1 \quad ?$$

3. Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten 2a und 2b, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, daß die Restfigur ein Achteck mit gleichlangen Seiten bildet. Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren! Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist!

4. Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geqq \frac{3}{2} \cdot$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

5. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, daß ihre Endpunkte (P und Q) stets auf den Seiten des Quadrats liegen. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

6. Gegeben sei eine Pyramide ABCD, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, daß N auf DB und P auf DC liegen und ABNM sowie ACPM Sehnenvierecke sind.

   a) Beweisen Sie, daß auch BCPN ein Sehnenviereck ist!

   b) Beweisen Sie, daß die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!

Wiederholungsaufgaben für die Klasse 10

1. a) Berechnen Sie:

$$\frac{7s}{15} - \frac{2s}{3} - \frac{4s}{5}$$

b) Lösen Sie die Formel für die Berechnung des Volumens der Kugel nach d auf!

c) Berechnen Sie:
$(3a - 5b)^2$

2. a) Berechnen Sie:
$(5a - 1)^3$

b) Berechnen Sie:

$$\frac{4r^2}{27t} : \frac{16r^5}{54}$$

3. a) Bestimmen Sie den Wert der Unbekannten:
$d : (d - 2) = 4 : 3$

b) Berechnen Sie:
$(6x^4 - 43x^3 + 98x^2 - 95x + 28) : (2x^2 - 9x + 4)$

4. Berechnen Sie:

$$\frac{2a^3 + 4ab^2 - 3a^2b - 5b^3}{9a^2b^2} - \frac{a - 23b}{36a^2} + \frac{8a^2 - 5ab - 3b^2}{12a^2b}$$
$$\frac{4a^2 + 6ab - 3b^2}{18ab^2}$$

5. a) Berechnen Sie:

$$\sqrt{\frac{25a^2\,b^3\,c^4}{16a^4\,b^5\,c^2}}$$

b) Machen Sie den Nenner rational!

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

6. Berechnen Sie logarithmisch:

$$\frac{3{,}24^3 \cdot 7{,}628}{5{,}47}$$

7. Berechnen Sie logarithmisch:

$$\frac{93{,}8 \cdot \sqrt[3]{0{,}0299}}{6{,}15^2 \cdot 0{,}0398}$$

8. Berechnen Sie:
$(6x^3 + x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$

9. Berechnen Sie:

$$\frac{2}{3a} - \frac{1}{2b} - \frac{2a+3}{6a^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3a-2b}{6ab}$$

10. Berechnen Sie und machen Sie für einen Lösungswert die Probe:

$$\frac{x+1}{9} + \frac{12}{x+4} = \frac{x-4}{4} + \frac{x-2}{6}$$

11. Lösen Sie folgende Bestimmungsgleichung:
$x^2 + 2x - 15 = 0$

12. Lösen Sie folgende Bestimmungsgleichung:
$5x^2 - 12x = 9$

13. Lösen Sie folgende Gleichung, und machen Sie die Proben:
$26 - (x + 3)^2 = (x - 1)^2$

14. Lösen Sie folgende Gleichung, und machen Sie die Proben:
$(4x + 1)(2x - 2) - (x + 0{,}5)(6x - 5) = 3$

15. Lösen Sie die Gleichung $2 \sin \varphi \cdot \cos 2\varphi = 0$ und machen Sie die Proben!

16. Gegeben ist die Funktion $y = -\,{}^1\!/_2 x - {}^3\!/_2$
a) Berechnen Sie die Nullstelle!
b) Stellen Sie die lineare Funktion graphisch dar!
c) Wie prüfen Sie die Richtigkeit der rechnerischen Lösung an der Zeichnung?

17. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem rechnerisch und graphisch:
$x + y = 1$
$3x - 2y = 8$

18. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem rechnerisch und graphisch:

$$6x + 2y = -4$$
$$y = 2x + 8$$

19. Die galvanische Abteilung eines volkseigenen Betriebes hat die Aufgabe, die Oberfläche von Stahlkugeln zu vernickeln. Das Volumen einer Kugel wurde auf Grund ihres Gewichtes mit $V = 3{,}053\ \mathrm{dm}^3$ festgestellt. Zur Berechnung der galvanischen Lösung ist es notwendig, die Größe der Oberfläche einer Kugel zu bestimmen.

    Berechnen Sie diese logarithmisch!

20. Zwei Rohrleitungen von 15 mm bzw. 25 mm lichter Weite (innerer Durchmesser) sollen durch ein einziges Rohr ersetzt werden. Der Querschnitt des neuen Rohres soll mindestens so groß sein wie die Summe der Querschnitte der beiden anderen Rohre. Dadurch soll gewährleistet werden, daß im neuen Rohr mindestens dieselbe Wassermenge wie in den beiden alten Wasserrohren fließen kann. Wie groß ist der Durchmesser des neuen Rohres?

21. Länge und Breite eines Rechtecks verhalten sich wie 5:3. Der Umfang beträgt 72 cm. Wie lang sind die Seiten?

22. Bei der Kartoffelernte erwartete man einen Hektarertrag von 240 dt. Das Feld hatte eine Fläche von 15 ha. Da der ausgestreute Stallmist nicht rechtzeitig untergepflügt wurde, trat eine Ertragsminderung von 7,5 % ein.

    Berechnen Sie den Ernteverlust!

23. Es liegt eine arithmetische Zahlenfolge vor. Ihr drittes und ihr achtes Glied ergeben zusammen 67,5; ihr fünftes und ihr zehntes Glied ergeben zusammen 53,5.

    Wie heißt das fünfzehnte Glied?

24. Eine Drehbank kann mit 4 Drehzahlen laufen, die beiden mittleren sind 45 und 58 $\mathrm{U} \cdot \mathrm{min}^{-1}$. Diese Drehzahlen hat man dadurch erhalten, daß die Glieder einer geometrischen Zahlenfolge auf ganze Zahlen gerundet wurden. Berechnen Sie die beiden fehlenden Drehzahlen!

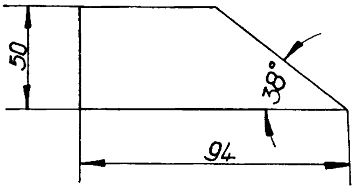
25. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 13 cm lang, die eine Kathete ist 7 cm kürzer als die andere. Berechnen Sie die Katheten!

26. Konstruieren Sie ein Dreieck aus
$b:c = 6:7$, $\alpha = 48°$ und $s_a = 4$ cm!
Beschreiben Sie die Konstruktion!

27. Berechnen Sie mit Hilfe von Logarithmen den Durchmesser einer Messingkugel vom Gewicht G = 828 p nach der Formel $d = 2\sqrt[3]{\frac{G \cdot 3}{\gamma \cdot 4\pi}}$!
$\gamma = 8{,}54\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ (Wichte des Messings)

28. Lösen Sie folgende Gleichung, und machen Sie die Proben:
$4x^2 = 2 - 7x$

29. Berechnen Sie, wieviel cm² Material für das in der Skizze dargestellte Stützblech benötigt werden!



30. Im Zentrum Berlins entstand am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers". Die für dieses Bauwerk ausgehobene 20 m breite Baugrube hatte annähernd die Form eines Pyramidenstumpfes. Sie besaß eine Tiefe von 7,3 m. Die rechteckige Bausohle hatte eine Länge von 47 m und eine Breite von 15 m.

Berechnen Sie das Volumen des ausgebaggerten Bodens!

31. Ein zylinderförmiger liegender Dampfkessel ist 1800 mm lang und besitzt einen lichten Durchmesser $D = 1500$ mm. Der Kessel ist als Einflammrohrkessel mit glattem Flammrohr von 700 mm Durchmesser ausgeführt.

Die Wasserstandslinie des Kessels liegt bei 1000 mm.

a) Zeichne einen Querschnitt des Kessels, und trage die Wasserstandslinie ein!

b) Drücke für den gezeichneten Querschnitt die Sehnenlänge, die Bogenlänge und die Fläche des Kreissegments als Funktionen des Zentriwinkels aus, welcher einer Wasserstandshöhe h in diesem Querschnitt zugeordnet ist, und stelle die Funktionen geometrisch dar!

c) Drücke die Verdampfungsfläche des Kessels (m^2) als Funktion des Zentriwinkels aus, und stelle die Funktion geometrisch dar!

d) Berechne für die angegebenen Zahlenwerte die Verdampfungsfläche (m^2) und den Wasserinhalt des Dampfkessels (m^3)!

e) Berechne für die Wasserstandshöhen 1000 mm; 1100 mm; 1200 mm; 1300 mm; 1400 mm die zugehörigen Verdampfungsflächen (m^2) und Wasserinhalte (m^3), und stelle diese als Funktionen der Wasserstandshöhe geometrisch dar!

32. Für eine große Vorrichtung wird aus einem Messingstab mit kreisförmigem Querschnitt von 28 mm Durchmesser ein Werkstück gefertigt, bei dem an einem Ende ein regelmäßiges Sechskant von 800 mm Länge und 28 mm Eckenmaß zu fräsen ist.

Wieviel Kilopond Messingspäne können als Abfall der Verwertung wieder zugeführt werden?

(Wichte für Messing: $\gamma = 8{,}3\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$)

33. Beim Ausschachten einer Baugrube läuft die ausgehobene Erde über ein Förderband. Dadurch wird sie in Form eines Kegels auf der Baustelle gelagert. Zur Ermittlung der aufgeschütteten Erdmenge werden mit dem Bandmaß der Umfang des Grundkreises $u = 24{,}5$ m und die Mantellinie $s = 4{,}7$ m des Kegels gemessen.

Fertigen Sie eine Skizze des Kegels an, und berechnen Sie die Erdmenge!

Geben Sie die Zwischenergebnisse und das Endergebnis auf eine Dezimalstelle genau an!

34. Zwei Funkpeilstationen F_1 und F_2 der Nationalen Volksarmee liegen 12,80 km voneinander entfernt. Ein feindlicher Sender S wird von F_1 und F_2 aus angepeilt. Der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_1 und der Standlinie F_1F_2 beträgt 40,50°; der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_2 und der Standlinie beträgt 106,30°.

a) Berechnen Sie die Entfernung des Senders von F_1 und F_2!

b) Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstabgerechte Zeichnung, und geben Sie den gewählten Maßstab an!

35. Die Diagonale KM eines Parallelogramms KLMN hat die Länge von 7 cm. Diese Diagonale bildet mit den Seiten des Parallelogramms einen Winkel von 28° bzw. 115°.

a) Konstruieren Sie das Parallelogramm!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie die längere Seite des Parallelogramms!

36. Von einem Würfel ist die Kantenlänge a bekannt. Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Raumdiagonalen her!

37. „Unwiederbringlich hat der Imperialismus die Herrrschaft über einen großen Teil der Völker verloren.“ (N. S. Chruschtschow auf dem XXII. Parteitag)

Vervollständigen Sie folgende Übersicht!

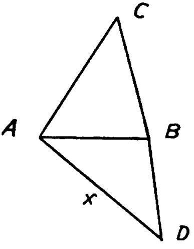
	Bevölkerung in Mill.	%
Welt insgesamt	3020	
Sozialistische Welt	1070	
Imperialistische Großmächte		18
Übrige Welt	1410	

38. a) Zeichnen Sie den Grund- und Aufriß eines Gedenksteines in Form eines Würfels mit aufgesetzter Pyramide!
(Würfelkante 125 cm; Pyramidenhöhe 250 cm; Maßstab 1 : 50)
b) Berechnen Sie das Gewicht des Gedenksteines!
(Material Granit, $\gamma = 2{,}7\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$)

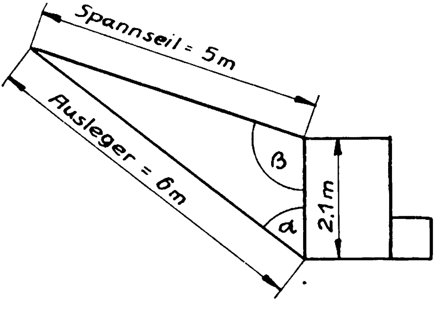
39. Ein Feld hat die Form eines Dreiecks. Die Seiten haben folgende Abmessungen: 65,8 m; 89,7 m; 73,3 m.
Wie groß sind a) ein Winkel und b) die Fläche des Feldes in ha?

40. Gegeben:
$\sphericalangle$ CAB = 58,4°
$\sphericalangle$ ABC = 73,8°
CB = 6,47 m
$\sphericalangle$ ABD = 98,2°
BD = 5,35 m

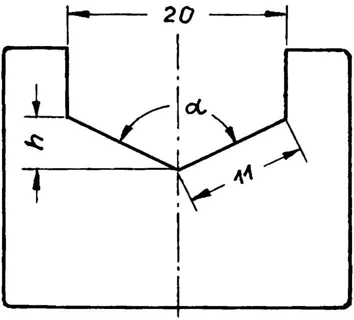
Aus den gegebenen Stücken ist die Länge der Seite AD = x zu bestimmen!



41. Ein Dunglader hat bei einer bestimmten Arbeitsstellung die in der vereinfachten Zeichnung angegebenen Maße. Um die Belastungsverhältnisse berechnen zu können, benötigt man die Größe der Winkel.
Berechnen Sie
a) den Winkel α zwischen Ausleger und Gehäuse,
b) den Winkel β zwischen Spannseil und Gehäuse!



42. Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre gemäß Abbildung angefertigt werden.
Berechnen Sie die Spitzenhöhe h und den Winkel α für die dort eingetragenen Maße!



Maße in mm

43. Unter welchem Winkel greifen die beiden Kräfte $P_1 = 34$ kp und $P_2 = 82$ kp an einem Punkt A an, wenn ihre Resultierende $R = 96$ kp beträgt? Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung!

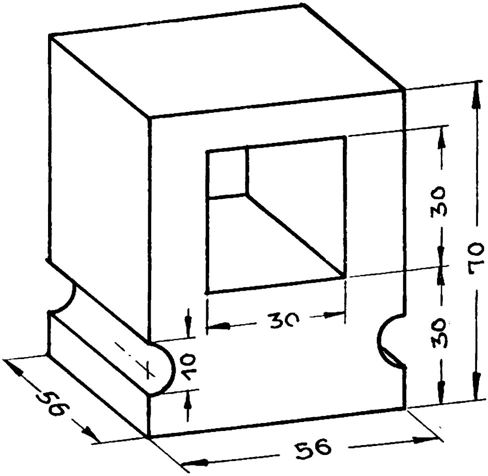
44. Zwei Kräfte P_1 und P_2 greifen unter dem Winkel α an einem Punkt an.
a) Wie groß ist ihre Resultierende R?
b) Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung nach!
$P_1 = 75{,}3$ kp; $P_2 = 129{,}4$ kp; $\alpha = 50{,}3°$

45. Ein Schiff S wird von zwei Punkten A und B einer horizontalen Standlinie angepeilt. Gemessen werden:
$AB = 438$ m, $\sphericalangle\, SAB = 68°$, $\sphericalangle\, SBA = 74°$.
Wie weit ist das Schiff von der Standlinie entfernt?
Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine zweite Rechnung!

46. In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
a) Berechnen Sie die Länge des Verbindungsstollens der beiden Endpunkte!
b) Berechnen Sie, unter welchen Winkeln der Verbindungsstollen von den Hauptstollen abzweigt!
c) Prüfen Sie die Ergebnisse durch eine maßstäbliche Zeichnung!

47. Wieviel kp wiegt das in der Zeichnung dargestellte Maschinenteil aus Stahl? Entnehmen Sie die Maße aus der Abbildung! (Wichte des Stahls $7{,}85\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$).

Wie groß wäre das Gewicht, wenn das Maschinenteil aus Aluminium ($\gamma = 2{,}7\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$) bestände? Bilden Sie das Verhältnis der Volumina! Was stellen Sie fest? Formulieren Sie das Ergebnis! Zeichnen Sie das Dreitafelbild für das in der Abbildung dargestellte Maschinenteil!



Maße in mm

48. Nebenstehende Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Nietes aus Eisen. Entnehmen Sie daraus die Maße, und berechnen Sie das Gewicht von 1000 Stück!

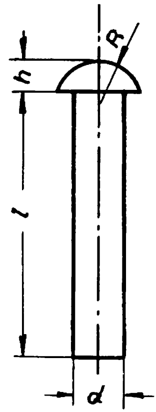
($\gamma = 7{,}8\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$)

$d = 13\ \mathrm{mm}\ \varnothing$

$l = 70\ \mathrm{mm}$

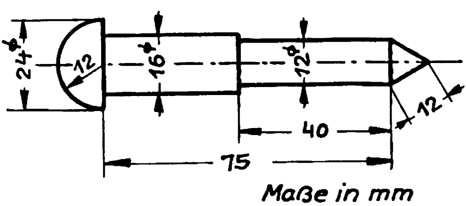
$R = 11\ \mathrm{mm}$

$h = 8{,}5\ \mathrm{mm}$

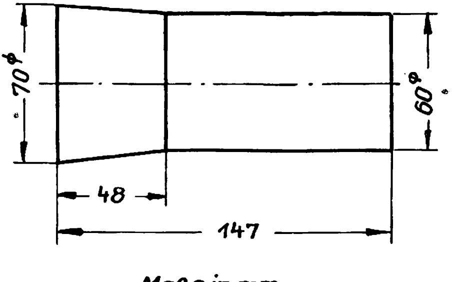


49. Eine Maschinenfabrik fertigt Bolzen, die aus Rundstahl gedreht werden. Die Abmessungen (in Millimeter) sind dem untenstehenden Achsenschnitt zu entnehmen! Berechnen Sie das Gewicht des Bolzens!
(Wichte $\gamma = 7{,}8\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$)

Ermitteln Sie, wieviel Prozent der Abfall beim Abdrehen einer Bolzenlänge beträgt!

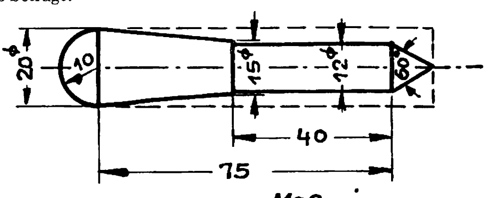


50. Wieviel kp wiegt der in der Zeichnung dargestellte runde Maschinenzapfen aus Stahl? Entnehmen Sie die Maße aus der Skizze! (Wichte des Stahls 7,8 p · cm^{-3})



51. Eine Maschinenfabrik fertigt Bolzen, die aus Rundstahl gedreht werden. Der Durchmesser des Rundstahls ist gleich dem größten Durchmesser der Bolzen. Die Ausmaße (in Millimeter) sind dem untenstehenden Achsenschnitt zu entnehmen!

Berechnen Sie, wieviel Prozent der Abfall beim Abdrehen einer Bolzenlänge beträgt!



52. Ein Kochtopf hat einen lichten Durchmesser von 17,5 cm und eine lichte Höhe von 15 cm.

a) Wieviel Liter Wasser faßt der Topf, wenn er bis 2 cm unter dem Rand gefüllt wird?

b) Wie hoch steht das Wasser, wenn nur $1^1/_4$ Liter Wasser eingefüllt werden?

c) Aus wieviel dm^2 Blech besteht der Topf?

Wiederholungsaufgaben für die Klasse 12

1. Ermitteln Sie das Bild der Funktion
   $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$!

2. Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion
   $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$!

3. Bestimmen Sie von der Funktion
   $y = f(x) = {}^1/_{12}\, x\,(x^3 - 12x^2 + 48x - 64)$
   a) die Abszissen der Wendepunkte,
   b) den Anstieg der Kurve in den Wendepunkten!

4. Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte der Funktion
   $$y = f(x) = x^4 - 2x^3 \quad !$$

5. Berechnen Sie die Wendepunktsabszisse der Kurve
   $$y = f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{2}{x} \quad !$$

6. Unter welchen Winkeln schneidet die Parabel
   $$y = \frac{x^2}{2} - 2 \quad \text{die x-Achse} \quad ?$$

7. Unter welchem Winkel schneidet die Kurve
   $$y = f(x) = \frac{2}{1 - x} \quad \text{die y-Achse?}$$

8. Für welche Werte von p hat die Funktion
   $y = f(x) = x^3 + 3\,px$ zwei Extremwerte, für welche Werte von p keinen Extremwert?

9. Stellen Sie die Funktion $y = f(x) = \frac{x^2}{4} + 2\,x$
   auf Grund einer Wertetabelle im Bereich $x = -9$ bis $x = +1$ graphisch dar!

   Berechnen Sie den Anstieg der Kurve in den Schnittpunkten mit der Abszissenachse, und benutzen Sie die Ergebnisse zur Zeichnung der Tangenten in diesen Punkten!

10. Von der Funktion $y = f(x) = \frac{2}{3}(x - 2)\left(x^2 + \frac{x}{2} - 5\right)$

sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Extremwerte und der Wendepunkt zu bestimmen!

Ferner ist das Verhalten der Funktion für $x \longrightarrow +\infty$ zu untersuchen!

Die Ergebnisse sind in ein Koordinatensystem einzutragen und ohne Aufstellung einer Wertetafel zu einer Skizze des Kurvenverlaufes zu verwenden!

11. a) Untersuchen Sie die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 4x^2 - 11x + 30)$$

auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte!

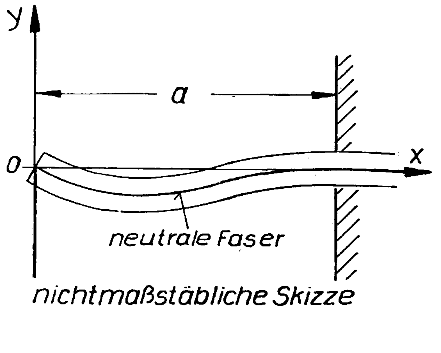
b) Die Ergebnisse sind in ein Koordinatensystem einzutragen und ohne Aufstellung einer Wertetafel zu einer Skizze des Kurvenverlaufs zu verwenden!

c) Welchen Winkel bildet die Tangente an die Kurve an der Stelle $x = 1$ mit der positiven Richtung der x-Achse?

12. Ein Träger ist an einem Ende fest eingespannt und liegt an seinem anderen Ende fest auf. Infolge seines Eigengewichts biegt sich der Träger nach unten durch (siehe Figur!). Die Lage der neutralen Faser des Balkens wird für das angenommene Koordinatensystem durch die Gleichung

$$y = f(x) = -k\left(x - \frac{3x^3}{a^2} + \frac{2x^4}{a^3}\right)$$

gegeben. Dabei sind a und x in Metern gemessen; k ist eine positive, dimensionslose Konstante.



nichtmaßstäbliche Skizze

a) An welcher Stelle hängt der Träger am weitesten durch, wenn $a = 8$ m ist?

b) An welcher Stelle zwischen Wand und Auflage befindet sich ein Wendepunkt?

c) Wie groß ist k, wenn der Winkel zwischen der Kurventangente im Auflagepunkt und der Horizontalen 1° beträgt?

13. Von der Kurve $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$ sind zu bestimmen

die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrempunkte, Wendepunkte und Pole! Ferner ist das Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$ zu untersuchen! Die Ergebnisse sind in ein Koordinatensystem einzutragen und zu einer Skizze des Kurvenverlaufes zu verwenden!

14. Die Funktion $y = \dfrac{x^3 - 1}{x}$ ist auf Nullstellen, Unendlichkeitsstellen, Extrema und Wendepunkte zu untersuchen! Ferner ist das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ zu prüfen!

Die Ergebnisse sind in ein Koordinatensystem einzutragen und ohne Aufstellung einer Wertetafel zu einer Skizze des Kurvenverlaufes zu verwenden!

15. a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Pole, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2}\ !$$

Prüfen Sie das Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$!

b) Fertigen Sie eine Skizze des Kurvenverlaufes an!

c) An welcher Stelle hat die Funktionskurve den Anstieg $m = +2$?

16. Bestimmen Sie unter allen Rechtecken mit dem Flächeninhalt 1 dm^2 dasjenige, das die kürzeste Diagonale hat!

17. In einer Ecke eines umzäunten rechteckigen Platzes soll ein Flächenstück von 25 m^2 Inhalt in Form eines rechtwinkligen Dreiecks abgegrenzt werden.

a) Drücken Sie die Abhängigkeit der einen Kathete y von der anderen x durch eine Funktionsgleichung aus!

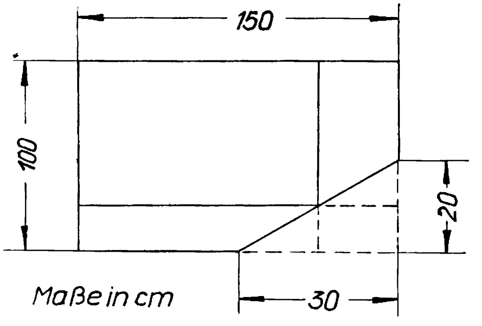
b) Wie hängt die Länge des erforderlichen neuen Grenzzaunes z von der Kathete x ab?

c) Stellen Sie die Länge z des neuen Zaunes im Bereich $x = 2$ bis $x = 14$ graphisch dar!

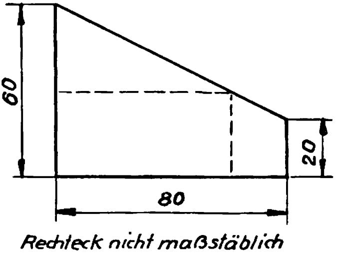
d) Bestimmen Sie mit Hilfe der graphischen Darstellung die Abmessungen für den Fall, daß der neue Zaun 14 m lang wird!

e) Bei welchen Abmessungen des rechtwinkligen Dreiecks würde der neue Zaun am kürzesten werden?

18. Von einer rechteckigen Marmorplatte ist an einer Ecke ein Stück abgesprungen. Aus dieser Restplatte soll ein möglichst großes neues Rechteck (Lage siehe Figur) geschnitten werden. Wie groß sind seine Seiten zu wählen?



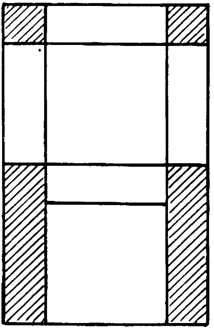
19. Aus trapezförmigen Blechabfällen sollen Rechtecke größter Fläche (siehe Figur) zur weiteren Verwertung herausgeschnitten werden.
Berechnen Sie die Seiten des geforderten Rechteckes!



20. Aus einer rechteckigen Blechtafel mit der Länge 8 dm und der Breite 5 dm soll ein quaderförmiger geschlossener Kasten hergestellt werden. Untenstehende Skizze zeigt das Netz des Quaders.

a) Bei welcher Höhe wird das Volumen des Kastens möglichst groß?

b) Berechnen Sie das Volumen!



21. Nach der Postgebührenordnung dürfen Länge, Breite und Höhe eines Päckchens zusammen nicht mehr als 90 cm betragen. Die Länge darf 60 cm nicht überschreiten.

a) Welche Maße muß ein Päckchen von der Form eines Quaders bei der zulässigen Höchstlänge haben, wenn sein Fassungsvermögen möglichst groß sein soll?

b) Es soll ein anderes Päckchen mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Wie groß muß dann die Höhe gewählt werden, damit das Fassungsvermögen ein Maximum wird?

22. Ein Blechstück ist mit der langen Seite so in eine Mauer eingelassen, daß ein Rechteck von 24 cm Breite und 48 cm Länge horizontal hervorsteht. An den beiden Ecken sollen zwei gleiche Quadrate ausgeschnitten werden, damit man die Ränder, nachdem das Blechstück an der Mauer entsprechend eingeschnitten wurde, hochbiegen kann, so daß ein oben offener, an einer Seite von der Mauer begrenzter Kasten entsteht.

Wie muß man die Seite der auszuschneidenden Quadrate bemessen, damit der Kasten den größtmöglichen Inhalt bekommt?

Wie groß ist er dann?

23. Ein Grundstück hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b. Auf diesem Grundstück soll ein rechteckiger Bauplatz so abgesteckt werden, daß zwei seiner Seiten auf die Katheten fallen.

    Wie lang und wie breit muß der Bauplatz sein, damit seine Fläche möglichst groß wird?

24. Ein Wasserbehälter soll die Form eines Zylinders mit unten angesetztem Kegel haben. Die Höhe des Zylinders soll 2 m, die Mantellinie des Kegels 6 m betragen.

    a) Welche Abmessungen muß der Behälter bei größtem Fassungsvermögen haben?

    b) Wie groß ist das Maximalvolumen?

25. Der Querschnitt eines Stollens ist 2 m^2 groß und hat die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis.

    a) Zeigen Sie, daß man aus der Breite 2 x des Stollens die Höhe y der Seitenwände und die Länge b des Halbkreisbogens berechnen kann!

    b) Stellen Sie die gesamte Oberfläche eines 1 m langen Stollenstücks (Boden, Seitenwände und Gewölbe) als Funktion von x dar!

    c) Welche Form müßte der Querschnitt haben, wenn die Oberfläche einen Extremwert annehmen soll?
    Welcher Art ist der Extremwert?
    Zeichnen Sie den Querschnitt im Maßstab 1:50!

26. Für den Verkauf von Ölfarbe verwendet man zylindrische Blechdosen mit einem Fassungsvermögen von $V = 250$ cm^3. Sie haben eine kreisförmige Öffnung, die durch einen Kunststoffdeckel verschlossen wird. Der Durchmesser dieser Öffnung steht zu dem des Zylinders im Verhältnis 4:5.

    Wie groß müßten Durchmesser und Höhe der Dosen gewählt werden, damit für die Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht wird?

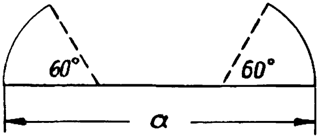
27. Ein gleichschenkliges Trapez hat einen Flächeninhalt von 9 m^2. Seine Höhe beträgt 1,5 m. Wie lang muß ein Schenkel sein, wenn die Summe aus den beiden Schenkeln und der kürzeren der beiden parallelen Seiten ein Minimum sein soll?

28. Gegeben ist der Mittelpunkt M eines Kreises mit veränderlichem Radius r; ferner ein Punkt P durch seinen Abstand a vom Mittelpunkt des Kreises ($a > r$). Vom Punkt P aus sind die Tangenten an den Kreis gezeichnet.

    Wie groß muß der Radius gewählt werden, damit die Berührungssehne möglichst groß wird?

29. Aus einem zylindrischen Baumstamm mit dem Durchmesser d soll ein Balken größter Tragfähigkeit hergestellt werden. Für die Tragfähigkeit T gilt die Formel $T = c \cdot x \cdot y^2$ (c ist eine Materialkonstante, x die Breite, y die Höhe des rechtwinkligen Balkenquerschnittes). Wie groß müssen x und y gewählt werden?

30. Aus einem $a = 90$ cm breiten rechteckigen Blech soll eine Rinne von trapezförmigem Querschnitt hergestellt werden. Dazu biegt man an den Längsseiten gleichbreite Ränder um 60 ° hoch. (Siehe Figur!)



Wie breit müssen die Randstreifen gemacht werden, wenn der Querschnitt der Rinne möglichst groß werden soll?

31. Stellen Sie die Funktion
$$y = f(x) = -x^2 + 12$$
graphisch dar!

Die x-Achse und die Kurve schließen eine endliche Fläche ein. Ihr soll ein Rechteck, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt, von möglichst großem Inhalt einbeschrieben werden. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

32. Ein Stromlinienkörper entsteht bei der Rotation der Kurve $y = 0{,}1\, x\sqrt{12 - x}$ um die x-Achse im Bereiche $x = 0$ bis $x = +12$.
   a) Zeichnen Sie den Achsenschnitt!
   b) Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Körpers!
   c) Welche Winkel bilden die Kurventangenten in den Punkten P_1 (0; 0) und P_2 (12; 0) mit der positiven Richtung der x-Achse?

33. Die Kurven der Funktionen $y = +\frac{1}{4}\sqrt{x}\,(4 - x)$ und $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x}\,(4 - x)$ bilden eine Schleife.
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen, und zeichnen Sie die Bilder der Funktionen im Bereich $x = 0$ bis $x = 5$!
   b) Berechnen Sie die Fläche innerhalb der Schleife!
   c) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Schleife um die x-Achse entsteht!

34. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x(x - 3)^2 - 2$.
   a) Zeichnen Sie den Kurvenverlauf im Intervall von $x = 0$ bis $x = 4$! Ermitteln Sie dazu die Schnittpunkte mit den Achsen, die Extrem- und Wendepunkte!
   b) Berechnen Sie die Fläche, die begrenzt wird von der Kurve, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse durch Hoch- und Tiefpunkt der Kurve!

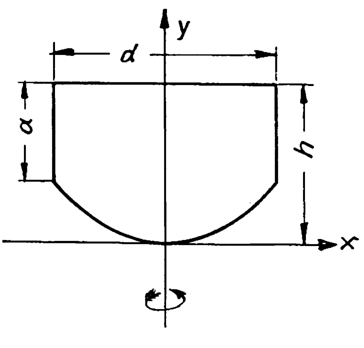
35. Ein zylindrisches Gefäß vom Radius 3 cm und der Höhe 6 cm ist zum Teil mit Wasser gefüllt.
   Bei der Rotation des Gefäßes um seine Achse bildet die Begrenzungsfläche zwischen Luft und Wasser ein Umdrehungsparaboloid.
   Das Wasser steigt gerade bis zum oberen Gefäßrand, wenn der Scheitel des Paraboloides noch 2 cm über dem Gefäßboden steht.
   a) Stellen Sie an Hand einer Skizze des Achsenschnittes die Gleichung der Parabel auf, die das Paraboloid erzeugt!
   b) Berechnen Sie, zu welchem Teil das Gefäß mit Wasser gefüllt ist!

36. Die beigegebene, nicht maßstäbliche Skizze gibt den Achsenschnitt eines Kessels an. Das Kurvenstück ist eine Parabel mit der Gleichung

$$y = \frac{2h}{d^2} x^2.$$

   Berechnen Sie
   a) die Fläche des Achsenschnittes,
   b) die Größe a,
   c) den Rauminhalt des Kessels, wenn die y-Achse die Rotationsachse dieses Drehkörpers ist!

   Zahlenbeispiel: $h = 0{,}6$ m, $d = 1{,}0$ m.



37. Das Innere eines Fasses, das an den Böden einen Durchmesser von 40 cm hat, ist ein Drehkörper, der durch Rotation der Parabel

$$x^2 = 16\,y + 48$$

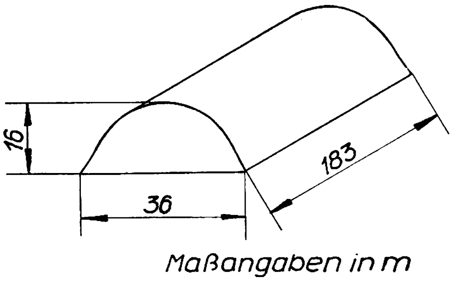
um die x-Achse entsteht (Koordinateneinheit 1 dm).

a) Zeichnen Sie einen Achsenschnitt des Fasses im Maßstab 1 : 10!

b) Wie groß ist die Höhe des Fasses und sein größter Durchmesser?

c) Berechnen Sie den Rauminhalt des Fasses mit Hilfe der Integralrechnung!

38. In der Tschechoslowakischen Sozialistischen Republik wurden erstmalig beim Bau großer Speicher parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton verwendet. Ein solcher Speicher ist innen 16 m hoch, 36 m breit und 183 m lang (siehe Figur!).



a) Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Fläche des Querschnitts!

b) Bestimmen Sie den Rauminhalt des Speichers!

c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

39. Die x-Achse schneidet von der Parabel $y = \frac{x^2}{4} - 1$ ein Segment ab.

Berechnen Sie den Rauminhalt des spindelförmigen Körpers, der durch Rotation des Segments um die x-Achse entsteht!

40. Berechnen Sie das Flächenstück, das von der Kurve

$y = -\,{}^1\!/_4\,x^2 + 2\,x$ und der Geraden $y = \frac{x}{2}$ begrenzt wird!

41. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Achsenschnittes des Parabolspiegels, der durch Rotation der Parabel $y^2 = 8x$ in den Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$ entsteht!

42. Berechnen Sie das Volumen des Stromlinienkörpers, der durch Rotation der Kurve $y = 0{,}2\,x\,\sqrt{10 - x}$ um die x-Achse entsteht!

43. Berechnen Sie das Flächenstück, das von der Parabel $y = 4 - \frac{x^2}{4}$, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse $x = -1$ und $x = +2$ begrenzt wird!

44. Das im I. Quadranten gelegene Stück der Geraden $x + y = 1$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung den Rauminhalt des dadurch entstehenden Kegels!

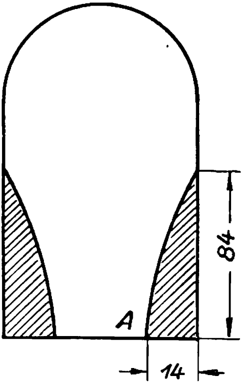
45. Ein Porzellangefäß von der äußeren Höhe $h = 9$ cm hat innen die Gestalt eines Rotationsparaboloides und außen die eines Kegelstumpfes, erzeugt durch Drehung der Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ und $y = 3x - 9$ um die y-Achse (Koordinateneinheit 1 cm). Die Standfläche des Gefäßes entsteht durch die Rotation der x-Achse. Die Wichte des Porzellans beträgt $\gamma = 2{,}6\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$.

a) Zeichnen Sie einen Achsenschnitt des Gefäßes im Maßstab 1:1!

b) Berechnen Sie das Gewicht des Gefäßes!

46. Nachfolgende Skizze zeigt den Grundriß einer sogenannten Sparbadewanne. Zwecks Einsparung von Wasser und Energie sind am Fußende links und rechts zwei gleiche Backen eingebaut, deren waagerechte Grund- und Deckflächen gleiche Parabelsegmente sind und deren Höhe bis zum

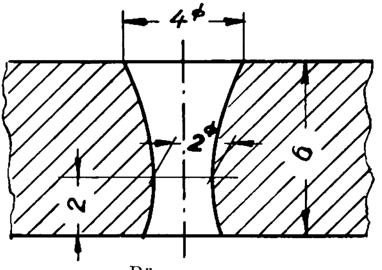
normalen Wasserstand 38 cm beträgt. Die Seitenwände der Backen verlaufen senkrecht zum ebenen Wannenboden.
(Geringfügige Rundungen am Boden der Wanne werden vernachlässigt.)
Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei A.



a) Wieviel Liter Wasser werden bei einem Bad durch diese Vorrichtung eingespart?
b) Wieviel Prozent beträgt die Einsparung von Wasser und Energie, wenn für ein Bad in einer gleichgroßen Wanne ohne diese Sparvorrichtung 175 Liter Wasser nötig sind?

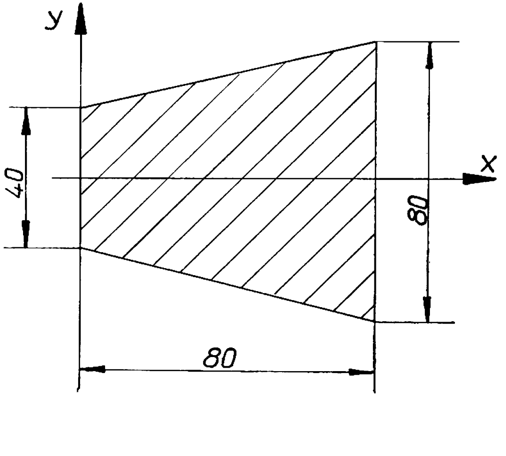
47. Drähte werden mit Hilfe von Ziehsteinen gezogen (d. h. gestreckt). Für weiches Drahtmaterial und stärkere Drähte verwendet man Ziehsteine aus hochwertigem Hartmetall. Aus dem Ziehstein wird die Ziehdüse in Form eines Hyperboloids herausgearbeitet. Die engste Stelle der Ziehdüse hat einen Durchmesser von d = 2 mm.
a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf!
b) Berechnen Sie das aus dem Ziehstein herausgearbeitete Volumen!
c) Berechnen Sie ferner dieses Volumen näherungsweise als Zylinder, dessen Höhe mit der des Hyperboloids und dessen Durchmesser mit dem des Düsenausganges übereinstimmen!

d) Ein Draht von 2,8 mm Durchmesser wird durch die Düse gezogen. Infolge elastischer Nachwirkung nimmt der Draht nach dem Durchgang durch die engste Stelle den Durchmesser des Düsenausganges an. Auf welche Länge wird ein ursprünglich 1 m langes Drahtstück durch das Durchziehen gestreckt?



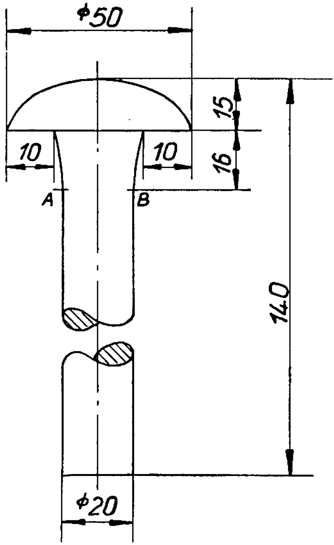
Düsenausgang

48. Ein gleichschenkliges Trapez, dessen Abmessungen der Abbildung zu entnehmen sind, soll um seine Symmetrieachse rotieren. Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen des entstehenden Rotationskörpers! Wie groß ist die Masse eines solchen Körpers, wenn er aus Aluminium besteht?
(Dichte des Aluminiums: $\varrho = 2{,}7\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$)



49. Niete werden aus Rundstahl durch Pressen in eine Form (Gesenk) hergestellt.

Untenstehende Skizze zeigt die Ansicht eines solchen Nietes. Die Maße sind der Skizze zu entnehmen. Der zylindrische Teil des Niets hat den gleichen Querschnitt wie der verwendete Rohling und verbreitert sich hyperbolisch (A und B sind die Scheitel der Hyperbel), während der Setzkopf die Form eines halben Ellipsoids hat.



a) Wie lang muß der Rohling sein, aus dem dieser Niet hergestellt wird?

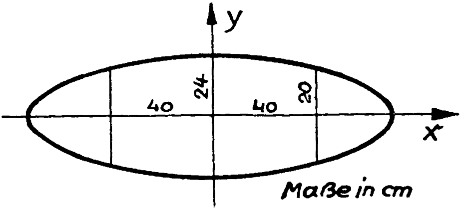
b) Wieviele Rohlinge können aus 3 m langem Rundstahl hergestellt werden?

c) Wieviel Prozent Abfall entsteht dabei?

50. Untenstehende Figur zeigt den Achsenschnitt eines Fasses, das durch Rotation der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die große Achse in den eingezeichneten Grenzen entstehen soll.

a) Bestimmen Sie aus den gegebenen Stücken die noch unbekannte Halbachse a!

b) Berechnen Sie das Volumen des Fasses in Litern! (Wandstärke bleibt unberücksichtigt.)

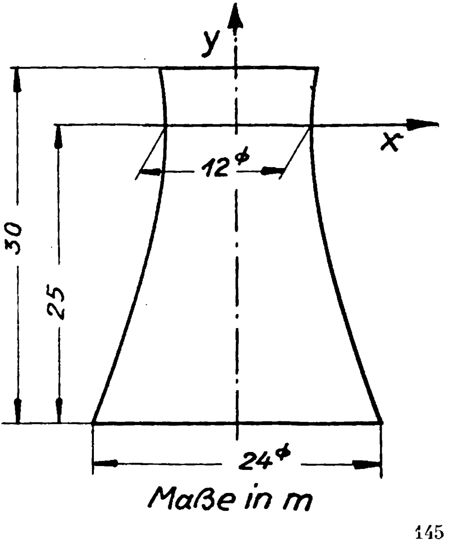


51. Ein Kühlturm hat die Gestalt eines Rotationshyperboloids.

Die Figur stellt den Achsenschnitt seines Innenraumes dar. Seine schmalste Stelle liegt in einer Höhe von 25 m.

a) Berechnen Sie das Volumen des Innenraumes!

b) Berechnen Sie den Durchmesser der oberen Öffnung!



52. Die Figur zeigt den Achsenschnitt eines Pollers, an dem beim Anlegen eines Schiffes die Haltetaue befestigt werden.

Die seitlichen Bögen des Achsenschnittes sind Hyperbeläste. Den oberen Abschluß des Achsenschnittes bildet eine halbe Ellipse. Der untere zylindrische Teil wird in die Hafenmauer eingelassen.

Die Form des Pollers ergibt sich durch Rotation des Achsenschnittes um die y-Achse.

Berechnen Sie das Volumen

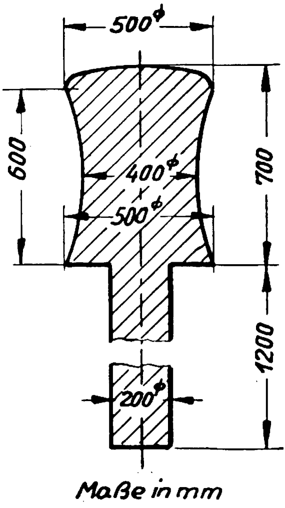
a) des Rotationshyperboloids,

b) des halben Rotationsellipsoids unter Benutzung eines zweiten, hierfür besonders geeigneten Koordinatensystems,

c) des Zylinders!

d) Wie groß ist das Gesamtgewicht des gußeisernen Pollers ($\gamma = 7{,}1 \text{ kp} \cdot \text{dm}^{-3}$)?

(Anleitung: Für die Rechnung ist es zweckmäßig, die Maßangaben in dm umzuwandeln.)

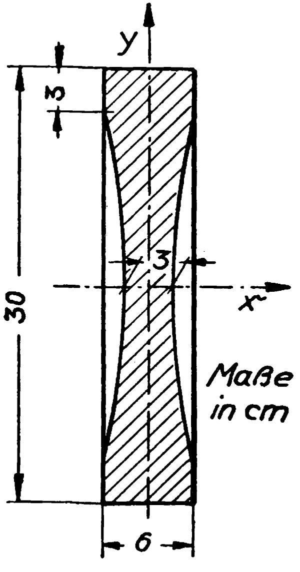


53. Es soll das Gewicht einer eisernen Schwungscheibe ($\gamma = 7{,}8\ \mathrm{p \cdot cm^{-3}}$) aus den Maßangaben des untenstehenden Achsenschnittes berechnet werden. Sie wird aus einer zylindrischen Scheibe (Durchmesser d = 30 cm, Dicke h = 6 cm) durch Ausdrehen der Vertiefungen hergestellt; die gezeichneten Bögen sind Teile einer Hyperbel.

a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf!

b) Wieviel verliert die Scheibe durch das Ausdrehen an Gewicht?

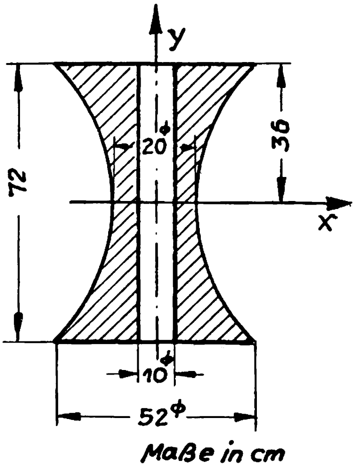
c) Wie schwer ist die fertige Schwungscheibe?



54. Eine Seiltrommel entsteht durch Rotation einer Hyperbel um die y-Achse (siehe Figur). Sie besteht aus Eisen ($\gamma = 7{,}3\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$).

a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf!

b) Berechnen Sie das Gewicht der Seiltrommel, wobei die für die Achse vorgesehene zylindrische Bohrung zu berücksichtigen ist!



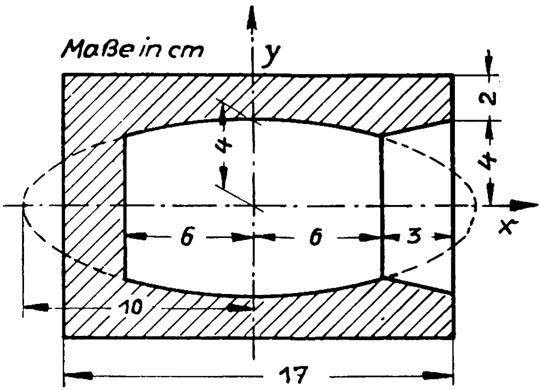
55. Eine Gipsgußform ist ein Zylinder. Die Skizze zeigt den Achsenschnitt der Gipsform mit dem Hohlraum.

a) Stellen Sie die Gleichung der Ellipse auf!

b) Berechnen Sie das Volumen des Hohlraums, der durch Rotation der Ellipse um die x-Achse in den angegebenen Grenzen entsteht!

c) Wie groß ist das Gesamtvolumen des Hohlraums? (Kegelstumpf elementar berechnen.)

d) Wie groß ist das Volumen des Gipskörpers?



56. Untenstehende Figur zeigt den Achsenschnitt einer Düse.

a) Berechnen Sie die Masse der Düse!

b) Bei Einzelfertigung wird die Düse aus einem zylindrischen Rohling mit 110 mm Durchmesser und 80 mm Länge gedreht. Bei Serienfertigung stellt man sie durch Gießen her.

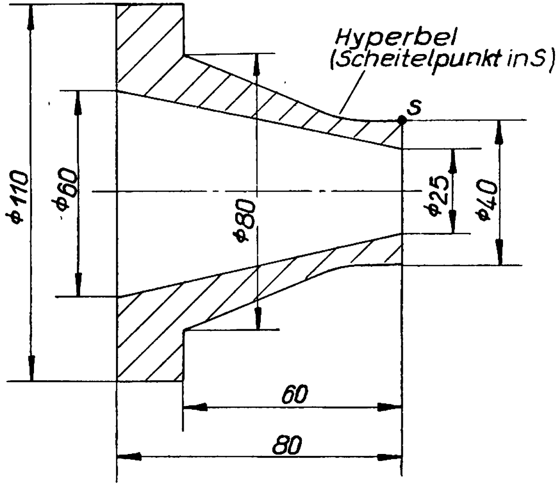
Wieviel Material spart man dadurch pro Düse ein?

(Hinweis: Rechenstabgenauigkeit genügt; Kegelstumpf kann elementar berechnet werden!)

Düse

Werkstoff: Messing

Dichte $\varrho = 8{,}5\ \mathrm{kg \cdot dm^{-3}}$



57. Eine Ellipse ist durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{gegeben.}$$

a) Konstruieren Sie die Ellipse!

b) Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Koordinaten der Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinanderstehen!

58. a) Zeichnen Sie den Kreis $x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$
in ein Koordinatensystem (Koordinateneinheit 2 cm)!
Konstruieren Sie die Parabel $x^2 = -2y$ mit Hilfe des Brennpunktes und der Leitlinie!

b) Einer der Schnittpunkte hat einen positiven x-Wert.
Ermitteln Sie diesen x-Wert auf zwei Dezimalstellen genau!

c) Berechnen Sie den zugehörigen y-Wert!

59. Zeichnen Sie den Kreis $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$ und durch punktweise Konstruktion die Parabel $x^2 = 5y$!

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte, gegebenenfalls durch Näherungsverfahren, auf zwei Dezimalstellen!

60. a) Zeichnen Sie den Kreis $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ und die Parabel $y = -\frac{1}{2} x^2$ (Koordinateneinheit 1 cm)!

b) Berechnen Sie die Abszissenwerte der Schnittpunkte der beiden Kurven! Diese Werte sind durch Näherungsverfahren auf drei Dezimalstellen genau zu bestimmen!

61. Der Kesselteil eines Hochdruckdampf-Speichers hat ein Fassungsvermögen von $V = 10\ m^3$. Er besteht aus einem Zylinder von $l = 4{,}0$ m Länge mit angesetzten Halbkugeln.

Berechnen Sie durch Näherungsverfahren den für Zylinder und Halbkugeln gemeinsamen Radius auf cm genau!

62. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens die Lösung der Gleichung $\sin x + 1{,}8\,x - 1{,}5 = 0$
im Bogenmaß auf drei Dezimalstellen genau!

63. a) Wie hoch stehen 500 Liter Flüssigkeit in einem kugelförmigen Behälter, dessen innerer Radius $r = 1$ m beträgt? Die Höhe h ist durch Näherung auf cm genau zu bestimmen!

b) Leiten Sie die zur Berechnung eines Kugelabschnitts gebräuchliche Formel

$$V = \frac{\pi\, h^2}{3}\,(3\,r - h)$$

mit Hilfe der Integralrechnung her!

64. Ein Baumstamm hat die Form einer Walze vom Halbmesser r und der Länge l. Seine Wichte ist $\gamma = {}^{3}/_{4}\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$.

Bis zu welcher Tiefe sinkt er in Wasser ein?

65. Wie groß ist der Radius einer Holzkugel von der Wichte $\gamma = 0{,}6\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$, wenn sie in Wasser 1 dm tief eintaucht?

66. Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Rechteck von 34 dm Umfang. Wie lang sind die Rechteckseiten, wenn der Zylinder ein Volumen von 440 dm^3 hat und seine Höhe kleiner als sein Durchmesser ist?

(Berechnen Sie diese Rechteckseiten in Dezimeter auf zwei Dezimalstellen genau durch Näherungslösung!)

67. In der Praxis bestimmt man den Festmetergehalt eines Baumstammes als Zylindervolumen. Dazu mißt man seine Länge l und seinen Durchmesser d, den man etwa in der Mitte des Stammes mit einer Kluppe (große Schieblehre) ermittelt.

a) Wie groß ist der Querschnitt des Baumstammes, wenn sein Durchmesser $d = 43$ cm beträgt?

b) Wie groß ist der Festmetergehalt des Stammes, wenn seine Länge $l = 19$ m beträgt?

c) Die Länge des Stammes weist einen Meßfehler von 10 cm auf. Der Querschnitt ist infolge der Meßungenauigkeit und der Abweichung von der Kreisform mit einem Fehler von 5 % behaftet.

Wie groß sind der absolute und der relative Fehler des Festmetergehaltes?

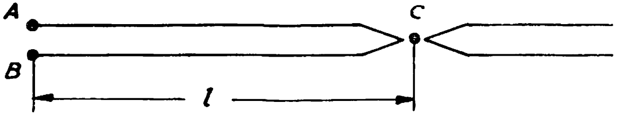
68. Nach der Wettkampfordnung für Leichtathletik (Kugelstoßen für Männer) müssen die Kugeln ein Gewicht von mindestens 7,25 kp haben. Sie werden aus Eisen ($\gamma = 7{,}8\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$) hergestellt.

a) Berechnen Sie den Radius der Kugeln!

b) Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler des Gewichtes, wenn der Radius um $\pm$ 0,25 mm vom berechneten Wert abweicht!

c) Um welchen Betrag darf der Radius größer sein, damit das Mindestgewicht um nicht mehr als 2 % überschritten wird?

69. Zwei Adern eines im Erdreich liegenden Fernsprechkabels aus Kupferdraht mit einem Durchmesser von $d = (0{,}9 \pm 0{,}01)$ mm zeigen am Punkt C Kurzschluß gegeneinander (siehe Figur).



Zur Bestimmung der Schadenstelle C ermittelt man durch mehrere Messungen einen Widerstand von $R = (13{,}0 \pm 0{,}2)\,\Omega$ in den Leitungsstrecken ACB.

Der spezifische Widerstand beträgt $\varrho = 0{,}0178\ \Omega\ \mathrm{mm^2 \cdot m^{-1}}$. In diesem Fall gilt für den Widerstand R die Beziehung $R = \frac{\varrho \cdot 2\,l}{q}$ (2 l wegen der Hin- und Rückleitung), wobei q den Querschnitt des Leiters in mm² und l seine Länge in m bedeuten.

a) In welcher Entfernung von A müßte die Schadenstelle C liegen, wenn man die angegebenen Fehler unberücksichtigt läßt?
b) Innerhalb welcher Grenzen müßte im ungünstigsten Falle bei der Suche nach der Schadenstelle aufgegraben werden, wenn man die angegebenen Fehler berücksichtigt?

70. Das Volumen eines Basaltstückes ist bestimmt zu $V = (48{,}1 \pm 0{,}5)\ \mathrm{cm^3}$. Für das Gewicht ergeben sich folgende Meßwerte

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6
Gewicht in Pond	140,4	139,9	141,1	140,2	140,5	140,4

Bestimmen Sie
a) den Mittelwert des Gewichtes und seinen durchschnittlichen Fehler,
b) die Wichte des Basaltstückes aus den Mittelwerten,
c) den absoluten und relativen Fehler der Wichte!

71. Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem das Dreieck mit den Eckpunkten

$P_1\ (7; 7)$, $P_2\ (7; -1)$, $P_3\ (-1; 3)$!

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks!
b) Stellen Sie die Gleichung des Umkreises auf!
c) Prüfen Sie die errechneten Ergebnisse durch Konstruktion des Umkreises!

72. a) Tragen Sie Brennpunkt und Leitlinie der Parabel
$$y^2 = 2x$$
in ein Koordinatensystem ein, und konstruieren Sie daraus die Parabel auf Grund der Ortsdefinition! (Konstruktionsbeschreibung!)
b) Zeichnen Sie den Kreis
$$x^2 + y^2 - 7x + 2{,}25 = 0$$
in das gleiche Koordinatensystem ein!
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von Kreis und Parabel!

73. Durch den Punkt P_1 $(+8; -10)$ des Kreises $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 156 = 0$ ist die Tangente gezeichnet.
a) Zeichnen Sie den Kreis und die Tangente mit der Koordinateneinheit 0,5 cm!
b) Berechnen Sie, wo und unter welchem Winkel die Tangente die x-Achse schneidet!

74. Der Kreis $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$ wird von der Geraden
$$y = -2x + 16 \quad \text{geschnitten}.$$
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von Kreis und Gerade!
b) Stellen Sie die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten auf!
c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangenten!
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Tangenten und der Berührungssehne gebildet wird!
d) Prüfen Sie die Ergebnisse durch eine Zeichnung nach!

75. a) Konstruieren Sie die Parabel $y^2 = 4x$!
b) Berechnen Sie unter Verwendung des Parabelanstiegs die Gleichung des Kreises, der die Parabel in den beiden Punkten mit der Abszisse $x = 5$ (von innen) berührt!

76. Gegeben sind die Punkte P_1 $(-5; +4)$ und P_2 $(+3; +8)$.
a) Konstruieren Sie den Kreis, der durch diese beiden Punkte geht und dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt!
b) Stellen Sie mit Hilfe der Methoden der analytischen Geometrie die Gleichung dieses Kreises auf!

77. Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven
$$x^2 + y^2 - 5(x + y) = 8 \quad \text{und}$$
$$x^2 + y^2 - 3(x + y) = 28 \quad ?$$
a) Lösung durch Rechnung!
b) Lösung durch Zeichnung!

78. Eine Ellipse ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Diese Ellipse wird von einem Kreis geschnitten, dessen Mittelpunkt mit dem der Ellipse zusammenfällt. Im ersten Quadranten hat der Schnittpunkt P_1 von Kreis und Ellipse die Ordinate $y_1 = + {}^9/_4$.

a) Konstruieren Sie die Ellipse und den Kreis!

b) Bestimmen Sie durch Rechnung die Gleichung des Kreises!

c) Verbinden Sie die beiden Brennpunkte der Ellipse mit P_1! Begründen Sie, weshalb diese beiden Strecken einen rechten Winkel einschließen!

79. Ermitteln Sie mit Hilfe der Asymptoten den Verlauf der Hyperbel

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1!$$

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Koordinaten der Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinanderstehen!

80. Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung folgenden Satz:
Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig!

81. Verbindet man eine Ecke eines Parallelogramms mit der Mitte einer Gegenseite und zeichnet die nicht durch diese Ecke gehende Diagonale, so teilen sich diese Strecken im Verhältnis 1:2! Beweisen Sie das vektoriell!

82. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander im Verhältnis 2:1!

Berechnen Sie vektoriell die Koordinaten des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC mit

A (2; − 1); B (8; 2) und C (5; 8)!

83. a) Das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2$, die x-Achse und die Ordinaten dieser Funktion an den Stellen x_1 und x_2 begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

b) Mit Hilfe der Formel $F = \frac{x_2 - x_1}{6}(y_1 + y_2 + 4y_m)$ [Simpsonsche Regel] erhalten Sie den gleichen Flächeninhalt.

Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!

Hinweis: Unter y_m versteht man die im Mittelpunkt des Integrationsintervalles errichtete Ordinate.

84. a) Tragen Sie Brennpunkt und Leitlinie der Parabel $y^2 = 2x$ in ein Koordinatensystem ein, und konstruieren Sie auf Grund der Ortsdefinition die Parabel!

b) Zeichnen Sie den Kreis $x^2 + y^2 - 7x + 2{,}25 = 0$ in das gleiche Koordinatensystem ein!

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von Kreis und Parabel!

d) Ermitteln Sie die Flächen, die zwischen den Schnittpunkten von Kreis und Parabelbögen eingeschlossen werden!

e) Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation eines solchen Flächenstückes um die x-Achse gebildet wird!

85. Um einen geraden Kreiszylinder vom Durchmesser 4 cm und der Höhe 8 cm soll ein Umdrehungsparaboloid kleinsten Rauminhaltes beschrieben werden. Die Achsen von Paraboloid und Kreiszylinder sollen zusammenfallen.

86. Um eine gerade quadratische Säule mit der Grundkante 4 cm und der Seitenkante 8 cm soll ein Umdrehungsparaboloid vom kleinsten Rauminhalt beschrieben werden, dessen Achse mit der Säulenachse zusammenfällt. Wie groß ist der Rauminhalt des Paraboloides?

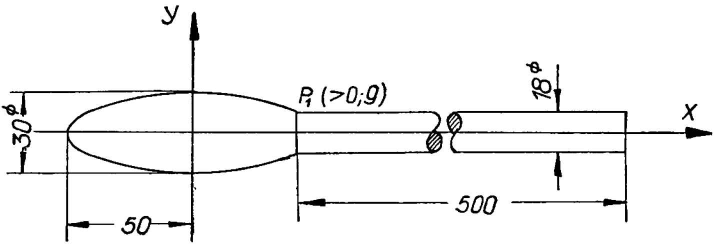
87. Die Gerade $x = \frac{p}{2}$ schneidet von der Parabel $y^2 = 2px$ ein Segment ab. Diesem Parabelsegment ist ein Rechteck mit größtem Flächeninhalt einzubeschreiben!

88. In welchem Punkte $P_1 (x_1; y_1)$ des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist die Tangente zu zeichnen, damit

a) der Flächeninhalt des von der Tangente und den Koordinatenachsen gebildeten Dreiecks, sowie

b) die Länge der Tangente zwischen den Achsen ein Minimum werden?

89. Der Handhebel einer Bohrmaschine besteht aus einem Rundstab von 18 mm Durchmesser und hat eine Länge von 500 mm. Als Handgriff ist der Stumpf eines Rotationsellipsoides angesetzt. Die Maße sind aus der Figur zu entnehmen. Berechnen Sie das Gewicht des Hebels, wenn die Wichte für Stahl $\gamma = 7{,}8 \text{ p} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt!



90. In die von den Scheiteln der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ gebildete Raute ist eine Ellipse so einzubeschreiben, daß die Fläche der neuen Ellipse ein Maximum wird.

a) Wie lautet die Gleichung der Ellipse?

b) Ermittle rechnerisch und geometrisch, wie sich die Flächeninhalte der beiden Ellipsen zueinander verhalten!

c) Man wende dieses Vorgehen auf die zweite Ellipse an und setze das Verfahren fort. Bestimmen Sie die Flächensumme aller so erhaltenen Ellipsen!

d) Beweisen Sie rechnerisch und geometrisch:

Die in den Scheiteln einer dieser Ellipsen gezogenen Tangenten schneiden sich auf der vorhergehenden Ellipse!

Quellenverzeichnis

Pädagogisches Kreiskabinett Hildburghausen:
„Unsere sozialistische Schule“, Sonderheft Mathematik, Schuljahr 1961/62

Pädagogisches Bezirkskabinett Suhl:
„Pädagogischer Berater“, 1961/62 — 1,
Anwendungsbeispiele für die Analytische Geometrie

Aufgaben der I., II. und III. Olympiade der Jungen Mathematiker der DDR 1962, 1963 und 1964

Storm, Regina:
Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf das Hochschulstudium für Studienbewerber der technischen Fachrichtungen, Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Universität Dresden

Germanowitsch, P. J.:
Aufgaben für mathematische Schülerwettstreite, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1962

Gasse, Erich:
Mathematik für metallbearbeitende Berufe,
Fachbuchverlag Leipzig 1954, Teil 1 und 2

Rothe, Rudolf:
Höhere Mathematik, Teil 4, Heft 1/2,
B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig, 1955

Bemerkung

Aus drucktechnischen Gründen wurde der Bruchstrich vorwiegend schräg gesetzt und der bei Strecken übliche Querstrich weggelassen. So bedeutet z. B. AB die Strecke zwischen den Punkten A und B.