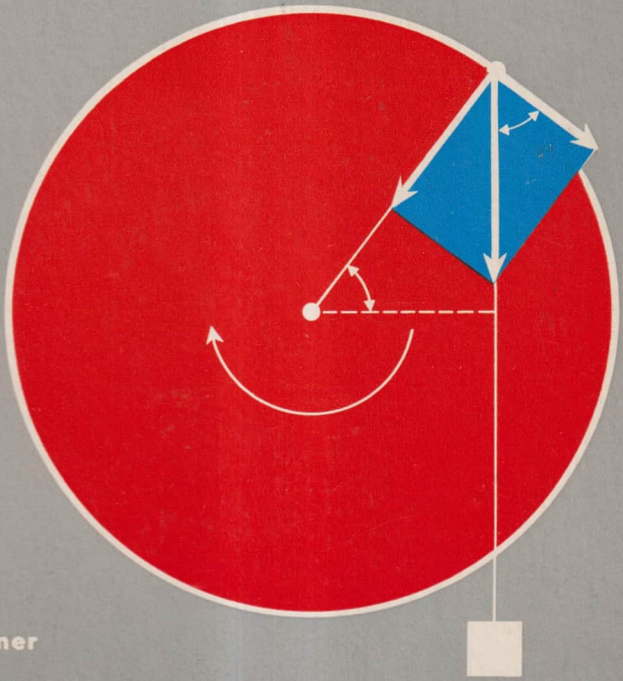


Lindner

Lehrbuch der Physik

für Techniker und Ingenieure

Band I

LEHRBUCH DER PHYSIK

FÜR TECHNIKER UND INGENIEURE

BAND I

Mechanik der festen Körper, Flüssigkeiten und Gase

VON HELMUT LINDNER

Dozent an der Ingenieurschule für Elektrotechnik, Mittweida

Achte, verbesserte Auflage

Mit 313 Bildern

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 1961

Als Lehrbuch an den Fachschulen
der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt

Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen

Berlin, den 25. 4. 1955

Zeichnungen: C. Dumann, Leipzig

Redaktionsschluß 15. 12. 1960

ES 20 C 3 (18 B 1)

Alle Rechte vorbehalten · VEB Fachbuchverlag Leipzig

Satz und Druck: VOB Fachbuchdruck Naumburg (IV/26/14), Auftr.-Nr. 486

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 114-210/45/61 des Ministeriums für Kultur der Deutschen Demokratischen Republik, Abteilung Literatur und Buchwesen

Vorwort

Die Physik bildet neben der Mathematik eine der wissenschaftlichen Grundlagen der Technik. Ohne ein bestimmtes Maß physikalischer Kenntnisse können die technischen Fachkräfte vom Facharbeiter bis zum leitenden Ingenieur nicht die erforderliche Sicherheit und Wendigkeit bei der Lösung ihrer Aufgaben erlangen, können sie vor allem auch nicht schöpferisch an der Entwicklung der Technik teilnehmen. Die Entwicklung der Technik ist aber eine der wichtigsten Voraussetzungen für den Aufbau unserer Friedenswirtschaft.

Dieses Lehrbuch der Physik ist für den werdenden Ingenieur bestimmt. Es ist zunächst für den Gebrauch an Ingenieur- und Fachschulen und in vorbereitenden Kursen der Betriebe oder Volkshochschulen gedacht, aber auch als Hilfsmittel für das Selbststudium geeignet.

Dementsprechend setzt es keine höhere Schulbildung voraus, sondern entwickelt möglichst voraussetzungslos und leicht verständlich die physikalischen Grundlagen der Technik. Schwierigere, für den Anfänger noch nicht verständliche Rechnungen sind durch Kleindruck vom übrigen Text abgesondert. Der Leser wird sie im späteren Verlauf seines Studiums verstehen lernen, wenn er die dazu nötigen mathematischen Kenntnisse erworben hat. Er kann diese Stellen zunächst übergehen. Die Gliederung des Stoffes folgt den neuesten Lehrplänen der Ingenieur- und Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik, die vor allem auch nach pädagogischen Gesichtspunkten aufgestellt worden sind.

Nach einer kurzen Einleitung über Wesen und Arten der Physik und einer knappen Darstellung der Grundgrößen des praktischen Maßsystems behandelt der vorliegende Band I nacheinander eingehend die Statik, die Kinematik, die Dynamik, die Lehre von den Kräften zwischen Körpern, den Schwingungen, Wellen und den Molekularerscheinungen, die Hydrostatik, die Mechanik ruhender Gase und die Strömungslehre. Der Band II ist der Akustik, der Wärmelehre und der Optik gewidmet. Eine Einführung in die Elektrizitätslehre und Atomphysik beschließt als Band III das Gesamtwerk.

Die Festigkeitslehre wurde bewußt beiseite gelassen, da sie an den Ingenieur- und Fachschulen als besonderes Fach mit im wesentlichen technischer Betonung behandelt wird. Über die Festigkeitslehre ist außerdem im VEB Fachbuchverlag bereits geeignete Fachliteratur erschienen.

Auch in der Methode folgt das Buch den an Ingenieur- und Fachschulen bewährten Grundsätzen. So ist z. B. die Anwendung der vektoriellen Schreibweise nicht möglich,

weil im Fachschulstudium die Vektorrechnung (bis auf gelegentliche Anwendung der Vektoraddition) nicht gelehrt wird.
Damit Verwechslungen vermieden werden, sind nach DIN 1338 die Formelzeichen kursiv (z. B. Masse m, Erdbeschleunigung g, Weg s) und die Maßeinheiten in senkrechter Schrift (z. B. Meter m, Gramm g, Sekunde s) gedruckt.
Abgesehen von methodischen Verbesserungen im einzelnen baut die vorliegende 8. Auflage konsequent auf der Verordnung vom 14. 8. 1958 über die physikalisch-technischen Einheiten auf, womit ein weiterer Schritt auf dem Wege zu einer einheitlichen und rationellen Darstellung getan werden konnte.
Verfasser und Verlag sind nach wie vor für jeden Verbesserungsvorschlag dankbar.

Mittweida i. S. und Leipzig, Dezember 1960 Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 13

2 Grundlagen des praktischen Maßsystems 13

2.1 Die Längeneinheit: das Meter 14

2.11 Längenmessung 15
2.12 Flächenmessung 16
2.13 Volumenmessung 17
2.14 Winkelmessung 17

2.2 Die Masseeinheit: das Kilogramm 18
2.3 Die Zeiteinheit: die Sekunde 19
2.4 Die Krafteinheiten: das Kilopond und das Newton 19
2.5 Die Dichte 20
2.6 Der Druck 23

3 Die Lehre vom Gleichgewicht (Statik) 24

3.1 Kennzeichnung einer Kraft 24
3.2 Die Zusammensetzung von Kräften 25

3.21 Gleichgewicht zweier Kräfte 25
3.22 Zusammensetzung von Kräften mit gleicher Wirkungslinie 25
3.23 Das Parallelogramm der Kräfte 26
3.24 Das Krafteck 27
3.25 Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten 28
3.26 Zusammensetzung paralleler Kräfte 28

3.3 Die Zerlegung von Kräften 29

3.31 Die schiefe Ebene 30
3.32 Der Keil 30
3.33 Ermittlung von Stabkräften mit dem Krafteck 31
3.34 Das Seileck 32

3.4 Das Hebelgesetz 32

3.41 Der zweiarmige Hebel 33
3.42 Der einarmige Hebel 33

3.5 Das Drehmoment 33

3.51 Der Momentensatz 35
3.52 Ermittlung von Auflagerkräften 35
3.53 Die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper 36

3.6 Die Waagen 36

3.61 Die Balkenwaage 36
3.62 Die Brückenwaage 37
3.63 Laufgewichtswaagen 38
3.64 Neigungswaagen 38

3.7 Der Schwerpunkt 39

3.8 Das bedingte Gleichgewicht 40
3.9 Kippen und Standfestigkeit 41

4 Die Lehre von den Bewegungen (Kinematik) 42

4.1 Die fortschreitende Bewegung 42

4.11 Die gleichförmig geradlinige Bewegung 42
4.12 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung 44

4.121 Die Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit ist gleich Null 45
4.122 Beschleunigte bzw. verzögerte Bewegung mit gegebener Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit 47

4.13 Der freie Fall 47

4.2 Die Relativität der Bewegungen 49
4.3 Zusammensetzung von geradlinigen Bewegungen 51

4.31 Das Parallelogramm der Bewegungen 51
4.32 Der Wurf 52

4.321 Der senkrechte Wurf 52
4.322 Der waagerechte Wurf 54
4.323 Der schräge Wurf 55

4.4 Die Drehbewegung 55

4.41 Die gleichförmige Drehbewegung 55
4.42 Die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung 59

5 Die Lehre von den bewegten Massen (Dynamik) 61

5.01 Die Trägheit der Masse 61

5.011 Das Trägheitsgesetz 61
5.012 Das Grundgesetz der Dynamik 61

5.02 Arbeit und Leistung 63

5.021 Die Arbeit 63
5.022 Die goldene Regel der Mechanik 65
5.023 Die Leistung 66
5.024 Arbeit und Leistung bei der Beschleunigung von Massen 67
5.025 Die Leistung bei der Drehbewegung 68
5.026 Der Wirkungsgrad 69
5.027 Die CGS-Einheiten 70

5.03 Die mechanische Energie 71

5.031 Potentielle und kinetische Energie 71
5.032 Das Gesetz von der Erhaltung der Energie 72

5.04 Die Reibung 74

5.041 Die Haftreibung 74
5.042 Gleit- und Rollreibung 75

5.05 Kräfte bei der gleichförmigen Drehbewegung 76

5.051 Die Radial- oder Zentralbeschleunigung 76
5.052 Die Fliehkraft 78
5.053 Fliehkraft und Schwerkraft 80
5.054 Die Corioliskraft 81

5.06 Die Energie der Drehbewegung 82
5.061 Das Massenträgheitsmoment 82
5.062 Massenträgheitsmoment zusammengesetzter Körper 85
5.063 Drehung um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse . . . 86
5.07 Das dynamische Grundgesetz der Drehbewegung 87
5.08 Die Bewegungsgröße (Impuls) 88
5.081 Das Gesetz von der Erhaltung des Impulses 89
5.082 Der gerade Stoß 90
5.0821 Der unelastische Stoß 90
5.0822 Energieverhältnisse beim unelastischen Stoß 91
5.0823 Der elastische Stoß 92
5.0824 Das Reflexionsgesetz 94
5.083 Der Drehimpuls (Drall) 94
5.09 Der Kreisel 95
5.091 Vektoren der Drehbewegung 95
5.092 Präzession des Kreisels 96
5.10 Die Massenanziehung (Gravitation) 97
5.101 Die Keplerschen Gesetze 98
6 Die Lehre von den Schwingungen 100
6.1 Die harmonische Bewegung 100
6.2 Elastische Schwingungen 102
6.21 Die lineare Federschwingung 103
6.22 Dreh- (Torsions-) Schwingungen 104
6.3 Schwerependel 105
6.31 Das mathematische Pendel 105
6.32 Das physische Pendel 106
6.33 Bestimmung von Massenträgheitsmomenten aus Schwingungen 108
6.4 Die Dämpfung 109
6.5 Erzwungene Schwingungen und Resonanz 110
6.6 Rückkopplung 112
6.7 Überlagerung von Schwingungen 112
6.71 Zusammensetzung von parallel zueinander verlaufenden Schwingungen 112
6.72 Senkrecht zueinander verlaufende Schwingungen 114
6.8 Schwebungen 116
6.9 Kippschwingungen 118
7 Wellenlehre 119
7.1 Wesen der Wellenbewegung 119
7.2 Arten der Wellen 121
7.3 Das Huygenssche Prinzip 122
7.31 Die Reflexion von Wellen 123
7.32 Die Brechung von Wellen 124
7.33 Die Beugung von Wellen 126
7.4 Überlagerung von Wellen 126
7.41 Überlagerung fortschreitender Wellen 126

7.42 Stehende Wellen 127
7.421 Reflexion am dünneren Medium 128
7.422 Reflexion am dichteren Medium 128
7.5 Das Fermatsche Prinzip 128

8 Molekularerscheinungen 129
8.1 Kohäsion 129
8.2 Die Molekularbewegung 131
8.3 Die Diffusion 132
8.4 Die Osmose 133
8.5 Echte Lösungen 133
8.6 Kolloide Lösungen 134
8.7 Erscheinungen an Grenzflächen 135
8.71 Adhäsion 135
8.72 Oberflächenspannung 136
8.73 Kapillarwirkung 137
8.74 Adsorption 138

9 Mechanik ruhender Flüssigkeiten (Hydrostatik) 139
9.1 Verbundene Gefäße 139
9.2 Der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit (hydrostatischer Druck) 141
9.21 Der Kolbendruck 141
9.22 Der Schweredruck 142
9.23 Gleichgewicht verschieden schwerer Flüssigkeiten 144
9.3 Der Auftrieb in Flüssigkeiten 144
9.31 Das Archimedische Prinzip 144
9.32 Dichtebestimmung mit Hilfe des Auftriebes 145
9.33 Das Schwimmen 146
9.331 Die Schwimmlage 146

10 Mechanik ruhender Gase (bei konstanter Temperatur) 149
10.1 Der Luftdruck 149
10.11 Umrechnung des Luftdrucks in andere Maßeinheiten 150
10.12 Barometer 152
10.2 Druck und Volumen der Gase 153
10.21 Messung des Gasdrucks 155
10.3 Auftrieb in Gasen 156
10.4 Dichtebestimmung von Gasen 157
10.5 Heber und Pumpen 158

11 Strömungslehre 160
11.1 Reibungsfreie Strömungen 160
11.11 Durchfluß bei veränderlichem Querschnitt 160
11.12 Ausfluß aus Gefäßen 161
11.13 Die Druckkraft von Wasserstrahlen 161
11.131 Kraft gegen eine ebene Platte 162
11.132 Kraft gegen eine bewegte Platte 162
11.133 Kraft gegen eine hohle Schaufel 162

11.14 Das Druckgesetz der Strömung 163

11.141 Anwendungen des Druckgesetzes 164
11.142 Strömungsmesser 165
11.143 Die Hohlraumbildung (Kavitation) 167

11.2 Die Schichtenströmung (laminare Strömung) 167

11.21 Die innere Reibung 167
11.22 Verlauf von Schichtenströmungen 169
11.23 Sinkgeschwindigkeit kleiner Teilchen 170

11.3 Wirbelnde (turbulente) Strömung 171

11.31 Entstehung der Wirbel 171
11.32 Der Strömungswiderstand von Körpern 171
11.33 Das Ähnlichkeitsgesetz der Strömungen 174
11.34 Der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung 176

Sachwortverzeichnis 177

Quellennachweis 182

1 Einleitung

Die Naturwissenschaft von heute ist die Technik von morgen, und die Technik von heute ist hervorgewachsen aus naturwissenschaftlichen Erkenntnissen vergangener Jahrhunderte und Jahrzehnte. Deshalb sollte der werdende Ingenieur, ehe er an eigentliche technische Aufgaben herangeht, sich vor allem ein sicheres Fundament physikalischer Kenntnisse schaffen.

„Physik“, vom griechischen „physis“ (Natur) stammend, bedeutete ursprünglich allgemein die Wissenschaft von der Natur. Heute verstehen wir darunter nur **die Lehre von den Gesetzen der unbelebten Natur**, soweit diese nicht auf chemischer Veränderung der beteiligten Körper beruhen.

Um diese Gesetze aufzufinden, bedarf es zunächst sorgfältiger und aufmerksamer **Beobachtung** aller erreichbaren Vorgänge. Die Erscheinungen der freien Natur aber sind zumeist nur flüchtig, wiederholen sich nie unter denselben Bedingungen und sind nicht reproduzierbar. Daher hat der künstlich geschaffene Naturvorgang, das **Experiment,** überragende Bedeutung gewonnen. Zum genauen Vergleich der beobachteten Zustände und Vorgänge dient die exakte **Messung.** Unter Zusammenfassung einzelner Messungen und Meßreihen sucht der Physiker Regelmäßigkeiten aufzufinden, die ihn schließlich auf das **Naturgesetz** führen.

Fast alle Naturgesetze stehen zueinander in Beziehung. Das eine folgt aus dem anderen, so wie alle Erscheinungen der Natur einen untrennbaren Zusammenhang bilden. Sofern eine Gruppe von Gesetzmäßigkeiten noch nicht sicher in dieses allgemeine Gebäude eingegliedert werden kann, sucht man eine vorläufige Erklärung, eine **Hypothese,** aufzustellen. Hypothesen müssen aber sofort verworfen werden, wenn sie in Widerspruch zu den Tatsachen geraten!

Die wissenschaftliche Physik gliedert sich in ihrer Arbeitsweise heute in die **theoretische Physik** (mathematische Entwicklung und Zusammenfassung von Naturgesetzen) und **Experimentalphysik** (Herleitung von Gesetzen aus der unmittelbaren Erfahrung). Die **angewandte Physik** entwickelt die gewonnenen Erkenntnisse zur Lösung technischer und kultureller Probleme.

2 Grundlagen des praktischen Maßsystems

Die in der Physik und Technik zu benutzenden Maßeinheiten bilden ein international vereinbartes Maßsystem, das durch die Verordnung vom 14. 8. 1958 in der DDR zum Gesetz erhoben wurde. Dieses Maßsystem baut sich auf folgenden **6 Grundeinheiten** auf:

1. Einheit der **Länge:** **1 Meter = 1 m**
2. Einheit der **Masse:** **1 Kilogramm = 1 kg**
3. Einheit der **Zeit:** **1 Sekunde = 1 s**

4. Einheit der **Temperatur: 1 Grad Kelvin = 1 °K**
5. Einheit der **Stromstärke: 1 Ampere = 1 A**
6. Einheit der **Lichtstärke: 1 Candela = 1 cd**

Alle anderen Maßeinheiten (z. B. die Einheiten für die Kraft, die elektrische Spannung usw.) stehen durch bestimmte Definitionen mit diesen Grundeinheiten in Zusammenhang und heißen deshalb **abgeleitete Einheiten.**
Da es oft vorkommt, daß die gesetzlichen Einheiten für das praktische Rechnen zu groß oder zu klein sind, dürfen in den meisten Fällen dezimale Vielfache oder Bruchteile gebildet werden, die man durch folgende Vorsätze kennzeichnet:

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung			Beispiel	
Tera	T	1 000 000 000 000	(10^{12})	Einheiten	TΩ	Teraohm
Giga	G	1 000 000 000	(10^{9})	Einheiten	GeV	Gigaelektronenvolt
Mega	M	1 000 000	(10^{6})	Einheiten	MW	Megawatt
Kilo	k	1 000	(10^{3})	Einheiten	km	Kilometer
Hekto	h	100	(10^{2})	Einheiten	hg	Hektogramm
Deka	da	10	(10^{1})	Einheiten	dag	Dekagramm
Dezi	d	0,1	(10^{-1})	Einheiten	dm	Dezimeter
Zenti	c	0,01	(10^{-2})	Einheiten	cm	Zentimeter
Milli	m	0,001	(10^{-3})	Einheiten	ms	Millisekunde
Mikro	μ	0,000 001	(10^{-6})	Einheiten	μA	Mikroampere
Nano	n	0,000 000 001	(10^{-9})	Einheiten	nm	Nanometer
Pico	p	0,000 000 000 001	(10^{-12})	Einheiten	pF	Picofarad

2.1 Die Längeneinheit: das Meter

Die Grundlage des praktischen Maßsystems ist das **Meter.** Es wurde im Mai 1790 von der französischen Nationalversammlung eingeführt und sollte ursprünglich den zehnmillionsten Teil eines Erdmeridianquadranten (Bild 1) darstellen.

Nach neueren Messungen beträgt aber die Länge des Viertelbogens etwa 10 002 300 m. Trotzdem hat man das einmal festgelegte Maß unverändert beibehalten, da es allein auf die Einheitlichkeit und Genauigkeit der zu verwendenden Maßstäbe ankommt. Deshalb wurde durch die Konvention vom 20. 5. 1875 das Meter als internationales Maß festgelegt.

Bild 1. Erdmeridianquadrant

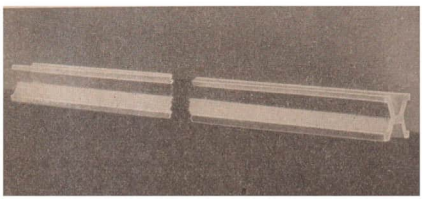


Bild 2. Das Urmeter

Das **Urmeter** ist ein Stab aus einer Legierung von 90 % Platin und 10 % Iridium, aufbewahrt in Paris, und wurde aus 31 gleichwertigen Exemplaren ausgewählt. Deutschland bekam das beim „Deutschen Amt für Meßwesen" in Berlin liegende Stück Nr. 18 zugeteilt (Bild 2).

Da damit gerechnet werden muß, daß derartige Legierungen im Laufe längerer Zeit Veränderungen im Feingefüge erleiden, hat die 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht festgesetzt, daß 1 Meter gleich der Länge von 1 650 763,73 Wellen der orange Linie des Krypton-Isotopes Kr 86 (gemessen im Vakuum) ist. Somit ist die Längeneinheit für alle Zeiten unveränderlich festgehalten. Das Urmeter wird aber auch weiterhin unter den bisherigen Bedingen aufbewahrt.

Die dezimalen Bruchteile des Meters sind:

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm	1 mm = 1000 μm (Mikrometer)
1 μm = 1000 nm (Nanometer)[1]	

Weitere, noch gebräuchliche Längenmaße sind:

1 Seemeile = 1852 m (Länge einer Bogenminute auf dem Erdmeridian)
25,4 mm = 1″ (englischer und russischer Zoll)

1 ÅE (Ångströmeinheit) = 0,1 nm = 10^{-10} m = 10^{-8} cm
1 XE (X-Einheit) = 10^{-4} nm = 10^{-13} m = 10^{-11} cm

2.11 Längenmessung

Als Urmaße der Technik dienen die mit größter Präzision hergestellten **Parallelendmaße.** Ihre Endflächen sind so genau gearbeitet, daß sie bei Berührung fest aneinanderhaften und bei 1 ··· 20 mm beispielsweise eine Genauigkeit von ± 0,08 μm verbürgen (Bild 3).

Zum genaueren Ablesen von geteilten Maßstäben verwendet man vielfach den **Nonius.** Dieser ist ein Hilfsmaßstab, auf welchem 9 Striche des Hauptmaßes in 10 Teile zerfallen (Bild 4). Derjenige Teilstrich des Nonius, der mit einem Strich des Hauptmaßes zusammenfällt, gibt die Zehntel an.

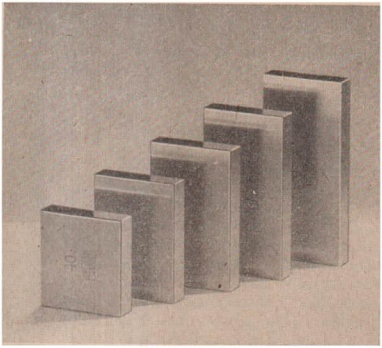


Bild 3. Parallelendmaße

[1]) Die bisher üblich gewesene Einheit 1 μ (Mikron) ist nicht mehr zulässig und heißt jetzt 1 μm (Mikrometer). Ebenso ist 1 mμ nicht mehr zulässig und heißt jetzt 1 nm.

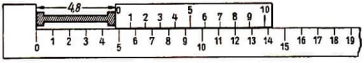


Bild 4. Schema eines Nonius. Ablesung = 4.8 Längeneinheiten

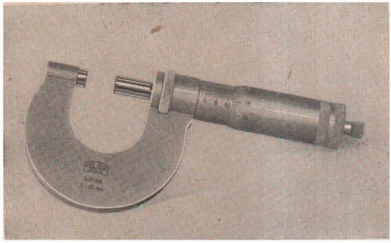


Bild 5. Schraubenlehre

Für Feinmessungen dient in vielen Fällen die **Schraubenlehre** (Bild 5). Bei einer vollen Umdrehung der Teilungstrommel bewegt sich die Spindel um 0,5 mm vorwärts. Die Trommel selbst hat 50 Teilstriche, so daß man 0,01 mm bequem messen kann. Gute Schraubenlehren weisen einen Fehler von höchstens $\pm$ 0,002 mm auf.

Bequem in der Handhabung, wenn auch nicht so genau, sind **Meßuhren** (Bild 6). Durch einen Druckknopf wird mittels Zahnstange und Triebes (oder Meßspindel) ein Zeiger bewegt, der Skalenteile von 0,01 mm anzeigt. Genauesteste Längenmessungen werden mit optischen (z. B. Interferenzkomparator von Zeiß) und elektrischen Geräten (z. B. Kapazitätsänderung eines Schwingkreises) ausgeführt.

2.12 Flächenmessung

Flächeneinheit: das **Quadratmeter**

1 m²	= 100 dm² = 10000 cm²
1 cm²	= 100 mm²
1 km²	= 100 ha = 10000 a
1 a	= 100 m²

Den Flächeninhalt unter einer beliebigen Kurve, die auf Papier gezeichnet vorliegt, kann man mit der **Simpsonschen Regel** ermitteln. Man zieht rechtwinklig zur waagerechten Achse h in gleichen Abständen eine ungerade Anzahl $(n + 1)$ paralleler Linien (Bild 7). Ihre Längen bis zur Kurve seien mit y_0 bis y_n bezeichnet. Man mißt diese ab und setzt ihre Werte in folgende Formel ein:

$$F = \frac{h}{3n}\left[(y_0 + y_n) + 2\,(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4\,(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})\right]$$

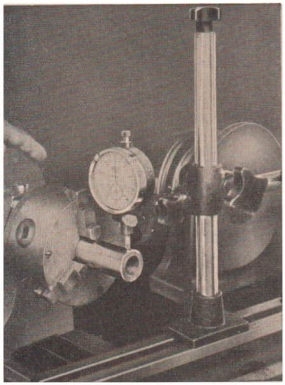


Bild 6. Meßuhr

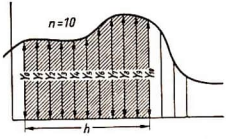


Bild 7. Simpsonsche Regel

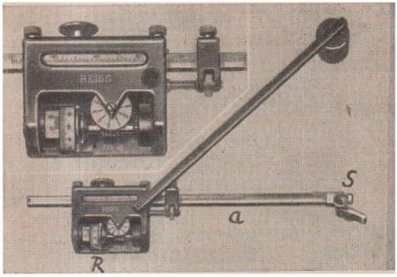


Bild 8. Planimeter. Links oben: Umdrehungszähler und Ablesung der Fahrarmlänge

Bei der Flächenmessung mit dem **Planimeter** (Bild 8) umfährt man mit dem Fahrstift S den Rand der Fläche, die Rolle R führt dabei n Umdrehungen aus. Die Fläche ist dann $F = n\,a\,u$, wobei a die Länge des Fahrarmes und u der Rollenumfang ist.

2.13 Volumenmessung

Volumeneinheit: das **Kubikmeter**

1 m³	= 1000 dm³
	= 1 Million cm³
1 cm³	= 1000 mm³
1 l (Liter)	= 1,000028 dm³

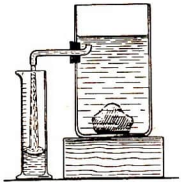


Bild 9 Überlaufgefäß

Das Volumen unregelmäßiger kleiner Körper mißt man mit dem **Überlaufgefäß** (Bild 9). Dieses wird zunächst bis zum Abfluß des letzten Tropfens mit Wasser gefüllt. Nach Einlegen des Körpers läuft dann gerade so viel Wasser ab, wie sein Volumen beträgt.

2.14 Winkelmessung

Winkel an Körpern mißt man mit dem **Anlegegoniometer** durch Anlegen seiner beiden beweglichen Schenkel an die den Winkel einschließenden Flächen. Gute Instrumente mit optischer Ablesung haben eine Genauigkeit von wenigen Minuten.

Ein weitverbreitetes Instrument ist die **Wasserwaage.** Der Hauptteil ist eine innen kreisförmig ausgeschliffene

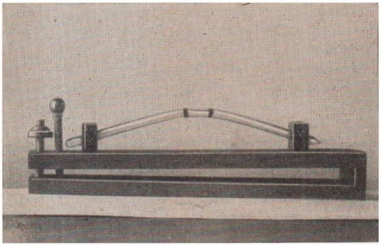


Bild 10. Modell einer Libelle

Bild 11. Winkellibelle

Glasröhre **(Libelle)**, gefüllt mit Äther (Bild 10). Eine Luftblase wandert stets nach dem höchsten Punkt der Wölbung, an der eine Skala angebracht ist. Bei einfachen Instrumenten ist die Empfindlichkeit in mm/m angegeben. 0,5 mm/m bedeutet, daß sich die Blase um 1 Skalenteil verschiebt, wenn die zu messende Fläche um 0,5 mm je m ansteigt. Gute Libellen geben je Skalenteil einen Winkelunterschied von 20 Sekunden an (Bild 11).

2.2 Die Masseeinheit: das Kilogramm

Gleichzeitig mit der Schaffung des Meters hat man auch die Masseeinheit festgelegt und mit **Kilogramm** bezeichnet. Diese sollte ursprünglich gleich der Masse von einem Kubikdezimeter Wasser [bei 4 °C und 760 Torr (S. 150) Luftdruck] sein. Obwohl sich später herausstellte, daß diese Wassermenge nur 0,999 972 kg beträgt, blieb man bei dem einmal eingeführten Urmaß. Das **Urkilogramm** ist ebenfalls in Paris aufbewahrt, und Deutschland besitzt den gleichzeitig hergestellten Prototyp Nr. 22 (Bild 12). Er ist ein Zylinder aus Platin-Iridium von 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser.

Masseeinheit: das **Kilogramm**

1 kg	=	1000 g (Gramm)
1 g	=	1000 mg (Milligramm)
1000 kg	=	1 t (Tonne)

Ursprünglich sollte das Kilogramm zugleich auch die Einheit des Gewichtes darstellen und wurde auch lange Zeit in diesem Sinne benutzt. Wir werden jedoch im Abschn. 2.4 sehen, daß das Gewicht eine Kraft ist und hierfür andere Maßeinheiten (z. B. N und kp) vorgesehen sind. Daher soll man auch die zum Wägen benutzten Massestücke nicht „Gewichte" nennen; denn jede solche Waage ist ein Gerät zum

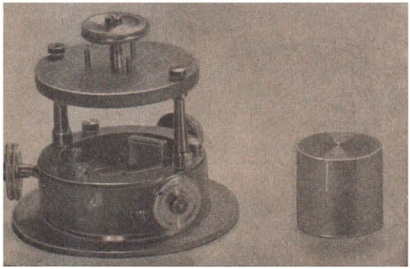


Bild 12. Der beim Deutschen Amt für Meßwesen befindliche Originalprototyp des Urkilogramms mit seiner Haltevorrichtung

Massenvergleich und dient somit zur Massenbestimmung mit Hilfe von „Wägestücken" (Bild 13, 14).
Sobald es im täglichen Leben (z. B. beim Einkauf von Lebensmitteln) und in der Technik (z.B. bei der Gewinnung und Verarbeitung von Kohle und anderen Rohstoffen) auf eine bestimmte Menge ankommt, rechnet man daher durchaus richtig mit deren Masse in Kilogramm und sagt einfach 1 kg Brot usw.

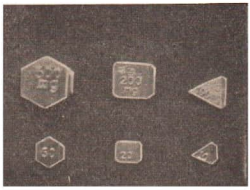


Bild 13. Zum Wägen benutzte Massen von 10 bis 500 mg

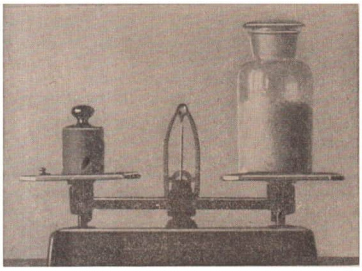


Bild 14. Nicht Gewichtsbestimmung, sondern Massenvergleich!

2.3 Die Zeiteinheit: die Sekunde

Als Zeiteinheit in Physik und Technik gilt die **Sekunde**, der 86400ste Teil eines mittleren Sonnentages[1]). Für Deutschland gilt die Mitteleuropäische Zeit (MEZ), d. h. die Ortszeit für 15° östliche Länge. Das Zeitsignal wird täglich ab 12.55 vom Deutschlandsender ausgestrahlt.

$$\boxed{1\ \text{h (Stunde)} = 60\ \text{min} = 3600\ \text{s}}$$

Für Präzisionsmessungen dient heute die **Quarzuhr**, deren wichtigster Teil ein vibrierender Quarzstab ist, der einen elektrischen Schwingkreis steuert.

2.4 Die Krafteinheiten: das Kilopond und das Newton

Geht man zunächst von der Masseeinheit, dem Kilogramm aus, so übt dieses infolge der Anziehungskraft der Erde eine bestimmte, senkrecht nach unten gerichtete Kraft aus. Diese Kraft nennt man das **Gewicht**. Dieses ist keineswegs konstant, sondern hängt ganz von dem Ort ab, an dem sich das Massenstück von 1 kg befindet. Ein und dasselbe Kilogrammstück ist am Nordpol rund 0,2 % schwerer und am Äquator rund 0,3 % leichter als bei uns.

[1]) Da die Anzahl der auf 1 Jahr entfallenden mittleren Sonnentage gewissen geringfügigen astronomischen Schwankungen unterworfen ist, ist die Sekunde nunmehr als der 31 556 925,974 7te Teil eines Jahres, bezogen auf den 1. Januar 1900, 12 Uhr festgelegt worden.

Um von diesen geographisch bedingten Zufälligkeiten unabhängig zu sein, hat man 1934 für die **Krafteinheit** das **Kilopond** eingeführt.

Es ist dies diejenige Kraft, mit der die Masse 1 kg bei einer Erdbeschleunigung von 9,806 65 m/s² (d. i. ein an sich willkürlich festgelegter Wert, der dem Schwerewert unter 45° nördlicher Breite in Meereshöhe nahekommt) auf ihre Unterlage drückt.

1 Kilopond ist die Kraft, mit welcher die Masse 1 kg bei der Schwerebeschleunigung 9,80665 m/s² auf ihre Unterlage drückt.

1 kp =	1000 p (Pond)
1 p =	1000 mp (Millipond)
1000 kp =	1 Mp (Megapond)

Dem Anfänger bereitet die Unterscheidung zwischen Kilopond und Kilogramm häufig Schwierigkeiten. Man merke sich daher, daß eine gegebene Masse an allen Punkten der Welt eine konstante, unveränderliche Größe darstellt, während die von ihr hervorgerufene Kraft ganz davon abhängt, an welchem Ort sie sich befindet. Auf dem Mond wiegt die Masse 1 kg z. B. nur etwa $^1/_6$ kp!

Deshalb werden mit einer gewöhnlichen Waage nur Massen verglichen und keine Gewichte bestimmt, weil die Schwerkraft auf beide Waagschalen in gleicher Weise einwirkt und sich daher örtliche Unterschiede der Erdbeschleunigung nicht bemerkbar machen können.

Kraftmesser heißen **Dynamometer.** Hierfür eignen sich in einfachen Fällen gespannte Federn.

Obwohl das Kilopond eine recht handliche Größe ist, die man sich jederzeit leicht anschaulich vorstellen kann, ist dem Kilopond in der Verordnung von 14. 8. 1958 eine andere Krafteinheit vorangestellt, und zwar das **Newton,** das mit dem Buchstaben N abgekürzt wird.

Das Newton ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² erteilt.

Vergleicht man diese Definition mit der obengenannten für das kp, so erkennt man, daß hier anstelle des ungeraden Wertes von 9,80665 m/s² für die Erdbeschleunigung der glatte Wert 1 m/s² gesetzt ist. Daher ergibt sich die Beziehung:

$$\mathbf{1\,kp = 9{,}80665\,N}$$
$$\mathbf{1\,N = \frac{1}{9{,}80665}\,kp = 0{,}10197\,kp}$$

Bei statischen Berechnungen bevorzugt man das anschauliche Kilopond, während sich bei Aufgaben aus der Dynamik die Kraft meist in Newton ergibt. Sie kann dann nach der hier gegebenen Beziehung leicht in kp umgerechnet werden.

2.5 Die Dichte

Vergleicht man verschiedene Stoffe gleichen Rauminhalts, so zeigen sich mitunter auffällige Massenunterschiede, wie etwa Blei gegenüber Kork. Andererseits kann ein entsprechend großes Korkstück durchaus genausoviel wiegen wie ein kleineres

Stück Blei. Brauchbare Vergleichszahlen erhält man erst dann, wenn man die Massen gleicher Raumteile gegenüberstellt. Man erhält dann die Dichte.

Unter der Dichte eines Körpers versteht man den Quotienten aus Masse und Volumen.

Da 1 dm^3 Wasser fast genau 1 kg wiegt, kann man auch sagen:

Die Dichtezahl eines Körpers gibt an, wievielmal so schwer ein Körper ist wie die von ihm verdrängte Wassermenge.

Nur in den seltensten Fällen hat man genau ein Kubikzentimeter des betreffenden Stoffes bei der Hand. Deshalb wägt man den Körper erst, bestimmt dann sein Volumen und rechnet dann:

$$\textbf{Dichte} = \frac{\textbf{Masse}}{\textbf{Volumen}} \quad \text{oder abgekürzt:}$$

$$\boxed{\varrho = \frac{m}{V}} \tag{1}$$

Maßeinheiten der Dichte: 1 g/cm³ = 1 kg/dm³ = 1 t/m³

Beim Ausrechnen von Aufgaben ist die Maßeinheit der Dichte genau zu beachten. Wenn die Masse z. B. in g eingesetzt wird, muß die Längeneinheit cm verwendet werden. Benutzt man das kg, so sind alle Längen in dm auszudrücken usw.

Dichte einiger fester Stoffe bei 20 °C[1])

	g/cm³		g/cm³		g/cm³
Lithium	0,534	Gold	19,291	Eichenholz	0,82
Kalium	0,862	Platin	21,5	Korkrinde	0,15
Natrium	0,971	Osmium	22,5	Granit	2,8
Magnesium	1,74	Messing	8,6	Beton	2,2
Aluminium	2,72	Germanium	5,35	Ziegelmauerwerk	1,5
Eisen	7,2···7,8	Magnesiumleg. MgAl („Elektron")	1,8	Ziegelstein	2,6
Kupfer	8,93	Aluminiumleg. AlCuMg („Duralumin")	2,79	Sandstein	2,4
Blei	11,34	Fichtenholz	0,5	Papier	1,0
Zink	7,12			Fensterglas	2,5
Wolfram	19,1			Steinkohle	1,5

Ein unmittelbarer Zusammenhang mit den in der Chemie gebräuchlichen Atomgewichten besteht nicht. Beispielsweise ist die Dichte des Kaliums trotz höheren Atomgewichts (39) geringer als die des Magnesiums mit dem Atomgewicht 24 (Unterschied im Atomvolumen und der Packungsdichte).

[1]) Da bei wechselnder Temperatur alle Körper ihr Volumen verändern, ist auch die Dichte von der Temperatur abhängig. Die meisten Körper dehnen sich bei Erwärmung aus, weshalb dann die Dichte abnehmen muß.

Beispiele: 1. Wieviel wiegen 300 m Kupferdraht von 1 mm Durchmesser? ($\varrho = 8{,}93\ \mathrm{g/cm^3}$.) – Bei einem Querschnitt von 0,785 mm² beträgt der Rauminhalt

$$V = 30000\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}00785\ \mathrm{cm^2} = 235{,}5\ \mathrm{cm^3} \text{ und die Masse } m = \frac{235{,}5\ \mathrm{cm^3} \cdot 8{,}93\ \mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}} = 2103\ \mathrm{g} = 2{,}103\ \mathrm{kg}\,.$$

2. Aus welchem Material besteht eine 2 mm dicke Blechtafel von 2 m · 1,5 m, deren Masse 46,8 kg beträgt? –

$$\varrho = \frac{46{,}8\ \mathrm{kg}}{(20 \cdot 15 \cdot 0{,}02)\ \mathrm{dm^3}} = 7{,}8\ \mathrm{kg/dm^3}\,, \text{ also Stahl}\,.$$

Die in der Tabelle genannten Zahlen sind nicht immer maßgebend, da es sehr auf die innere Struktur und die Herstellungsweise der betreffenden Stoffe ankommt.

Die Dichte von **Flüssigkeiten** kann man mit einem **Pyknometer** bestimmen (Bild 16). Dies ist ein Fläschchen, dessen Volumen zuvor sorgfältig gemessen wird. Man füllt es dann mit der Flüssigkeit, bis sie aus der im Stopfen befindlichen Durchbohrung austritt, wo man den Rest abwischt. Eine genauere Methode wird im Abschn. 9.32 behandelt.

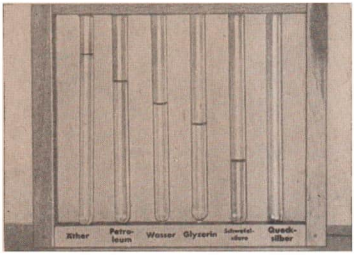


Bild 15. Gleich große Massen verschiedener Flüssigkeiten

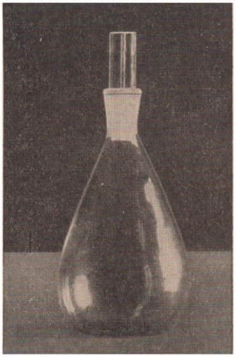


Bild 16. Pyknometer

Dichte einiger Flüssigkeiten

	g/cm³
Quecksilber bei 0 °C	13,5951
Quecksilber bei 20 °C	13,5457
Wasser bei 0 °C	0,999841
Wasser bei 20 °C	0,998205
Äthylalkohol bei 18 °C	0,79
Benzol bei 18 °C	0,8786
Äther bei 18 °C	0,72
Seewasser	1,02
Schwefelsäure, konzentr.	1,84
Petroleum	0,85
Benzin	0,70

Um handliche Zahlen zu bekommen, rechnet man bei **Gasen** meist in Kilogramm je **Kubikmeter** bei 0 °C und 760 Torr (S. 150). Ein Vergleich zeigt dann, daß Wasserstoff von allen Gasen die kleinste Dichte hat. Auch merke man sich die Dichte der Luft von 1,293 kg/m³. Die sogenannte **Gasdichte** wird auf Luft = 1 bezogen.

Dichte einiger Gase bei 0 °C und 760 Torr

	kg/m³		kg/m³
Wasserstoff	0,090	Ammoniak	0,771
Sauerstoff	1,429	Kohlendioxyd	1,977
Luft	1,293	Kohlenoxyd	1,250
Stickstoff	1,251	Chlor	3,22
Helium	0,179		

2.6 Der Druck

Es war oben erklärt worden, daß 1 Kilopond die Kraft sei, mit der die Masse von 1 Kilogramm auf ihre Unterlage drückt. Die Wirkung, die dabei eintreten kann, ist aber durchaus verschieden. Eine schwere Last wird um so weniger in den Untergrund einsinken, je größer man ihre Auflagefläche gestaltet. Dagegen dringt ein Nagel leichter ins Holz, wenn seine Spitze recht fein ist. In diesen Fällen wirkt die Kraft senkrecht zur Fläche. Bilden Kraft und Fläche einen rechten Winkel, so spricht man von einer **Normalkraft.** Um Vergleiche anstellen zu können, dividiert man die Normalkraft durch die Auflagefläche und erhält dann den **Druck** p.

Unter dem Druck p versteht man den Quotienten aus Normalkraft und Fläche.

$$\textbf{Druck} = \frac{\textbf{Normalkraft}}{\textbf{Fläche}}$$

(2) $$\boxed{p = \frac{P}{F}} \qquad \boxed{P = pF}$$

Als Maßeinheiten für den Druck ergeben sich kp/cm², kp/m² bzw. N/cm², N/m².

Insbesondere bezeichnet man den Druck 1 kp/cm² als eine **technische Atmosphäre:**

$$\boxed{\textbf{1 at = 1 kp/cm}^2 \textbf{ oder 10000 kp/m}^2}$$

Weitere Maßeinheiten für den Druck werden in Abschn. 10.1 behandelt.

Man merke sich daher, daß Kraft und Druck zwei verschiedene Größen sind. Während eine Kraft einfach in kp angegeben wird, bezieht sich der Druck stets auf die Flächeneinheit.

Steht die Unterlage schief, so ist der Druck gegen diese entsprechend geringer. Die Größe

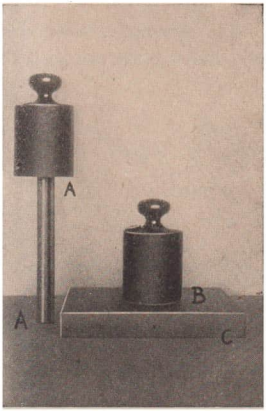


Bild 17. Verschiedener Druck bei gleicher Kraft!
Bei A: p = 0,57 kp/cm²
B: p = 0,057 kp/cm²
C: p = 0,0057 kp/cm²

der senkrecht zur Unterlage wirkenden Kraft, d. i. die Normalkraft, muß dann erst aus dem Neigungswinkel berechnet werden (S. 30).

Beispiele: 1. Auf einem Nagel steht ein Gewicht von 5 kp. Seine Spitze hat einen Querschnitt von 0,1 mm². Der Druck beträgt dann

$$p = \frac{5\,\text{kp}}{0{,}001\,\text{cm}^2} = 5000\,\text{kp/cm}^2$$

2. Die Grundplatte einer 2 Mp schweren Maschine ist 0,5 m² groß. Der Druck ist

$$p = \frac{2000\,\text{kp}}{5000\,\text{cm}^2} = 0{,}4\,\text{kp/cm}^2$$

3 Die Lehre vom Gleichgewicht (Statik)

Will man einen Körper in Bewegung setzen, bedarf es einer körperlichen Anstrengung, einer **Kraft.** Außer der Muskelkraft gibt es aber auch zahlreiche weitere Kräfte, welche dieselbe Wirkung hervorbringen: die magnetische und elektrische Anziehungskraft, Reibungs-, Zug- und Druckkräfte usw. Sofern diese Kräfte Bewegungen hervorrufen, wird im Abschnitt 5 davon die Rede sein. Vorläufig seien nur Kräfte an ruhenden Körpern betrachtet. Wenn aber trotz der Einwirkung von Kräften keine Bewegung eintreten soll, müssen die Kräfte im **Gleichgewicht** sein, d. h., ihre Wirkungen müssen sich gegenseitig aufheben.

3.1 Kennzeichnung einer Kraft

Eine Kraft läßt sich stets durch 3 Merkmale kennzeichnen, und zwar durch (Bild 18)

1. ihre **Richtung:** zeichnerisch dargestellt durch einen Pfeil;
2. ihre **Größe:** dargestellt durch die Länge dieses Pfeils nach einem beliebigen Maßstab (z. B. 1 kp ≙ 1 cm);
3. ihren **Angriffspunkt:** d. h. den Punkt, in welchem die Kraft am Körper angreift.

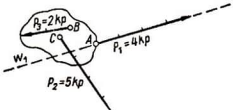


Bild 18. 3 Kräfte an einem Körper (nicht im Gleichgewicht). A, B, C = Angriffspunkte, w_1 = Wirkungslinie von P_1

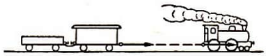


Bild 19. Verschiebung einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie

Demnach ist die **Kraft** eine gerichtete Größe, ein sogenannter **Vektor.**
Die Gerade, auf welcher der Kraftvektor liegt, nennt man die **Wirkungslinie** der Kraft. Hinsichtlich der eintretenden Wirkung ist es nun gleichgültig, ob eine Kraft (bei gleicher Richtung und Größe) den Körper schiebt oder zieht. Es ist ferner ohne Einfluß, ob die Kraft direkt angreift oder unter Vermittlung einer Stange oder eines Seils (Bild 19). Daher gilt der Satz:

(3) **Am starren Körper kann man eine Kraft längs ihrer Wirkungslinie nach Belieben verschieben.**

3.2 Die Zusammensetzung von Kräften

3.21 Gleichgewicht zweier Kräfte

Wirken an einem starren Körper 2 Kräfte P_1 und P_2 von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung in derselben Wirkungslinie, so halten sie sich im Gleichgewicht:

(4) **Im Gleichgewicht ist Kraft gleich Gegenkraft.**

Wenn also ein Körper im Ruhezustand ist, können gleichwohl Kräfte vorhanden sein. Diese befinden sich aber im Gleichgewicht.

Aber auch während der scheinbar „kräftefreien" gleichförmig geradlinigen Bewegung können Kräfte wirksam sein.

Fährt ein Zug gleichförmig geradeaus, so steht die Zugkraft der Lokomotive im Gleichgewicht mit den vorhandenen Reibungskräften. Ein zur Erde fallender Regentropfen bewegt sich gleichförmig, da die Schwerkraft im Gleichgewicht mit Luftwiderstand und Auftrieb steht.

Beispiele: 1. Ein auf der Tischplatte ruhender Körper übt auf diese eine nach unten gerichtete Kraft aus. Die unter der Last sich ein wenig durchbiegende Platte dagegen drückt mit gleicher Kraft nach oben.

2. Der an einem Seil hängende Gegenstand zieht nach unten, während die im Seil wirkende elastische Spannkraft nach oben wirkt.

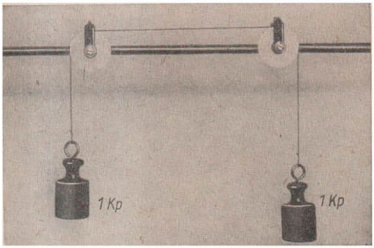


Bild 20. Kraft und Gegenkraft. Die Spannkraft des Fadens beträgt nur 1 kp!

3. Hängt beiderseits eines gespannten Fadens je ein Massestück von 1 kg, so beträgt die Spannkraft nicht etwa 2 kp, sondern nur 1 kp. Das eine Massestück wirkt hier nur als Gegenkraft zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts (Bild 20).

3.22 Zusammensetzung von Kräften mit gleicher Wirkungslinie

Wenn auf einen Körper mehrere Kräfte einwirken, kann man die Frage nach der Gesamtwirkung dieser Kräfte stellen. Man nennt dabei die Teilkräfte auch **Komponenten** und die Gesamtkraft **Resultierende.** Die Resultierende muß gerade so groß und so gerichtet sein, daß sie die Komponenten vollständig ersetzt, weshalb sie auch oft **Ersatzkraft** genannt wird. Statt mehrerer Einzelkräfte hat man dann nur noch eine Kraft vorliegen, wodurch sich die Lösung vieler Aufgaben vereinfacht. Am einfachsten ist es, wenn 2 Einzelkräfte in derselben Geraden liegen und nach derselben Richtung wirken. Der Betrag der Resultierenden ist dann gleich der Summe der Beträge der Komponenten (Bild 21 a). Davon macht jeder Fuhrmann Ge-

brauch, wenn er zwei Pferde an einen Wagen spannt. Bei entgegengesetzter Richtung der Komponenten ist die Resultierende gleich deren Differenz (Bild 21b).

Wirken mehrere Kräfte in derselben Wirkungslinie, so ist die Resultierende gleich der Summe bzw. Differenz der Einzelkräfte.

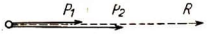


Bild 21a. Gleichgerichtete Kräfte

Bild 21b. Entgegengerichtete Kräfte

3.23 Das Parallelogramm der Kräfte

Häufig kommt es aber vor, daß 2 Kräfte im gleichen Punkt angreifen, aber einen Winkel miteinander bilden. Auch in diesem Fall läßt sich leicht eine Kraft finden, die die gleiche Wirkung hervorbringt, wie die beiden Einzelkräfte zusammengenommen. Es gilt hierbei der

(5) **Satz vom Parallelogramm der Kräfte:** **Bilden 2 Kräfte einen Winkel miteinander, so ist die Resultierende gleich der Diagonalen des aus den beiden Komponenten gebildeten Parallelogramms.**

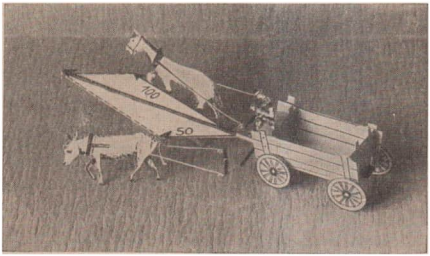


Bild 22. Kräfte an einem Fuhrwerk

Zu beachten ist, daß die Resultierende nicht einfach gleich der zahlenmäßigen Summe der Teilkräfte ist. Man muß sie vielmehr nach den jeweils vorliegenden geometrischen Verhältnissen berechnen oder (was in vielen Fällen genügt) die Komponenten grafisch zusammenfassen. Dabei ist der Betrag der Resultierenden immer kleiner als die Summe der Beträge der Teilkräfte.

Wenn die beiden Komponenten einen rechten Winkel miteinander bilden, ergibt sich der Betrag der Resultierenden nach dem Lehrsatz des Pythagoras (Bild 24):

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

Ist der von den beiden Komponenten eingeschlossene Winkel α kein rechter Winkel, so findet man die Resultierende am einfachsten auf grafischem Weg. Man zeichnet nach einem geeigneten Maßstab (z. B. 1 kp $\hat{=}$ 1 cm oder 10 kp $\hat{=}$ 1 cm) die beiden Kräfte, die den gegebenen Winkel α einschließen (Bild 25). Ergänzt man die Zeichnung zu einem Parallelogramm, so ergibt die Länge der Diagonale den Betrag der

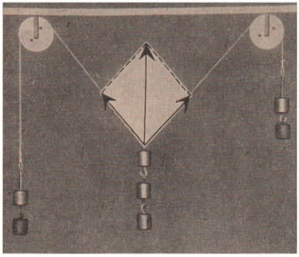


Bild 23. Parallelogramm der Kräfte

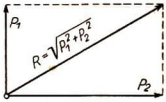


Bild 24

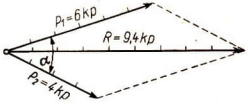


Bild 25

Resultierenden. Auf rechnerischem Weg erhält man die Resultierende nach dem Cosinussatz der Trigonometrie:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos\alpha}$$

Sind mehr als 2 Komponenten mit gleichem Angriffspunkt zusammenzufassen, so kann man erst 2 von ihnen zu einer Resultierenden R_1 und diese mit der 3. Kraft zu einer neuen Resultierenden R_2 vereinigen. So fortfahrend, erhält man die Gesamtresultierende R (Bild 26).

3.24 Das Krafteck

Beim Betrachten von Bild 25 findet man, daß es an sich gar nicht nötig ist, das vollständige Parallelogramm zu zeichnen. Um die Resultierende zu erhalten, genügt es durchaus, wenn man nach Zeichnen von P_1 die Kraft P_2 unter Parallelverschiebung an den Endpunkt von P_1 ansetzt. Der nunmehr erhaltene Endpunkt von P_2 ist auch der Endpunkt der Resultierenden R. Anstatt des Kräfteparallelogramms genügt also ein Kräftedreieck.

Sind mehr als 2 Komponenten gegeben, so werden gegenüber der schrittweisen Konstruktion von mehreren Parallelogrammen noch mehr Hilfslinien erspart, wenn man die Komponenten nach Bild 26, selbstverständlich unter genauer Beibehaltung ihrer ursprünglichen Richtung, schrittweise aneinandersetzt. Man erhält so einen gebrochenen Linienzug, den man **Krafteck** (Kräftezug) nennt. Die Resultierende weist

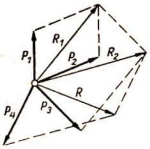
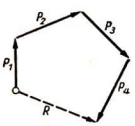


Bild 26. Entstehung des Kraftecks



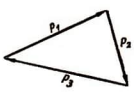


Bild 27. 3 Kräfte im Gleichgewicht

dann vom Ausgangspunkt nach dem erreichten Endpunkt. Ergibt sich der Fall, daß der Endpunkt des Kräftezuges mit dem Ausgangspunkt zusammenfällt, so ist die Resultierende gleich Null, d. h., alle Kräfte halten sich im **Gleichgewicht** (Bild 27).

(6) **Um die Resultierende aus mehreren Teilkräften zu finden, setzt man diese unter Parallelverschiebung schrittweise aneinander. Die Resultierende ist dann die Schlußlinie des gebildeten Krafteck s.**

Wenn sich das Krafteck schließt, besteht Gleichgewicht.

3.25 Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten

Vielfach ist auch der Fall gegeben, daß die zusammenfassenden Kräfte nicht am gleichen Punkt des Körpers angreifen. Hier macht man von dem Satz (3) Gebrauch, nach dem man eine Kraft nach Belieben längs ihrer eigenen Wirkungslinie verschieben darf. So zeigt die Darstellung auf Bild 28, wie die beiden Kräfte P_1 und P_2 durch rückwärtiges Verschieben bis zum Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien verlegt werden. Hier läßt sich dann das Kräfteparallelogramm in der üblichen Weise konstruieren.

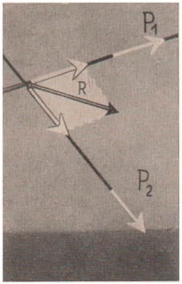


Bild 28. Addition zweier Kräfte nach Verschiebung längs ihrer Wirkungslinien

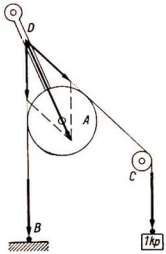


Bild 29
Schräger Zug an einer pendelnd aufgehängten Rolle

Beispiel: Über die in Bild 29 pendelnd aufgehängte Rolle A läuft eine bei B befestigte Schnur. Sie läuft im Winkel von 45° über die feste Rolle C und wird durch ein Gewicht von 1 kp gespannt. Welche Kraft wirkt in der sich schräg einstellenden Aufhängung D? – Der Befestigung bei B entspricht eine Gegenkraft von 1 kp. Durch Verschieben beider Kräfte nach ihrem Schnittpunkt läßt sich das Parallelogramm zeichnen. Die Diagonale gibt eine Resultierende von 1,85 kp. Wegen des bestehenden Gleichgewichts hängt das Pendel in der Richtung der Resultierenden.

3.26 Zusammensetzung paralleler Kräfte

Diese Methode des Verschiebens versagt jedoch, wenn die beiden Komponenten parallel nebeneinander herlaufen. Der Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien liegt im Unendlichen. Dieser Fall liegt beispielsweise bei einem Balken vor, auf welchem 2 Lasten nebeneinanderstehen. Man kann sich mit folgender Überlegung helfen:

Nach Bild 30 werden beiderseits 2 gleiche, entgegengerichtete Hilfskräfte H_1 und H_2 zugefügt. Da sich ihre Wirkung gegenseitig aufhebt, wird am ursprünglichen Sachverhalt nichts geändert. Aber man kann jetzt H_1 mit P_1 zur Resultierenden R_1 sowie H_2 mit P_2 zur Resultierenden R_2 vereinigen. Dann verschiebt man R_1 und R_2 bis zum Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien, wo sich das Parallelogramm zeichnen läßt und die Gesamtkraft R entsteht. Diese kann in ihrer eigenen Richtung beliebig verschoben werden. Ihre Größe ergibt sich als Summe von P_1 und P_2.

Der beiderseitige Abstand von R gegenüber P_1 und P_2 kann auch durch Rechnung gefunden werden:
Bei der Betrachtung der schraffierten bzw. punktierten Dreiecke findet man, daß diese ähnlich sind. Es gelten daher die Proportionen:

$$\frac{H_1}{P_1} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \quad \text{und} \quad \frac{H_2}{P_2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}},$$

was umgeformt ergibt

$$\overline{CD} = \frac{P_1 \cdot \overline{AD}}{H_1} \text{ und } \overline{CD} = \frac{P_2 \cdot \overline{BD}}{H_2}.$$

Setzt man die rechten Seiten einander gleich und bedenkt, daß $H_1 = H_2$, so hat man

$$P_1 : P_2 = \overline{BD} : \overline{AD}$$

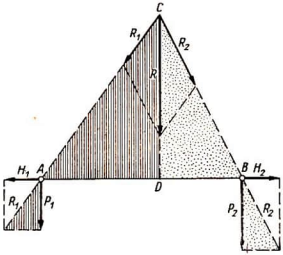


Bild 30. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte P_1 und P_2

(7) **Die Resultierende zweier paralleler Kräfte teilt deren Abstand im umgekehrten Verhältnis der Größe dieser Kräfte.**

Die letzte Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$P_1 \; \overline{AD} = P_2 \cdot \overline{BD}$$

Damit haben wir das Hebelgesetz gefunden, von dem im Abschnitt 3.4 ausführlicher die Rede sein wird. Das Hebelgesetz läßt sich somit aus dem Parallelogramm der Kräfte herleiten.

3.3 Die Zerlegung von Kräften

Alle Verfahren zur Zusammenfassung von Kräften beruhen, im Grunde genommen, auf einem einzigen Prinzip: dem Parallelogramm der Kräfte. Das ist auch bei der Zerlegung von Kräften der Fall. Hier ist gleichsam die Resultierende gegeben, während die Komponenten gesucht werden. Betrachten wir beispielsweise den an der Karre (Bild 31) ziehenden Mann. Er tut zweierlei: Erstens zieht er den Wagen mit einer Kraft P_1 vorwärts, und zweitens entlastet er durch den schräg nach oben gerichteten Zug die Räder. Die ziehende Kraft P läßt sich also in die beiden, hier im rechten Winkel zueinander stehenden Komponenten P_1 und P_2 zerlegen. Da deren Vereinigung wieder P ergeben muß, gilt auch hier der Parallelogrammsatz. Man muß nur die Wirkungslinien kennen, nach denen die gegebene Kraft zerlegt werden soll.

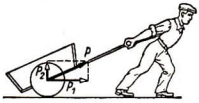


Bild 31. Zerlegung einer Kraft in 2 Komponenten

(8) **Um eine Kraft in ihre Komponenten zu zerlegen, zieht man zu den vorher ermittelten Wirkungslinien die Parallelen und ersieht aus dem gebildeten Parallelogramm die Größe der Komponenten.**

Beispiel: Der auf Bild 32 angegebene Mast wird durch 2 Spannseile verspannt, von denen das waagerechte die Zugkraft $P_1 = 250$ kp ausübt. Mit welcher Kraft P_2 muß das schräge Seil gespannt sein, damit im Mast eine vertikal gerichtete Druckkraft R entsteht? –

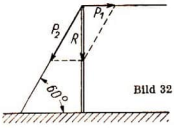


Bild 32

Gegeben sind P_1 und die Wirkungslinien von P_2 und R. Man zieht durch den Endpunkt von P_1 die Parallele zu P_2 und durch den Endpunkt von R die Parallele zu P_1. Das von den Kräften gebildete Dreieck liefert $P_2 = \frac{P_1}{\cos 60°} = 500\,\text{kp}$ und $R = P_1 \tan 60° = 433$ kp. Die Aufgabe kann auch grafisch gelöst werden.

3.31 Die schiefe Ebene

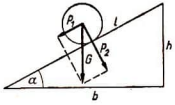


Bild 33. Kräfte an der schiefen Ebene

Auf einer schiefen Ebene ruhe eine schwere Walze (Bild 33). Die in ihrem Mittelpunkt angreifende Schwerkraft, d. h. ihr Gewicht G, zieht lotrecht nach unten. Man sieht, daß G nicht durch den Auflagepunkt läuft. Diese Kraft zerlegt sich in 2 Teile: den parallel zur Bahn gerichteten **Hangabtrieb** P_1 und die rechtwinklig zur Bahn gerichtete **Normalkraft** P_2. Das Parallelogramm ist in diesem Fall ein Rechteck. Das Kräftedreieck $G\,P_1\,P_2$ ist ähnlich dem Bahndreieck mit der Basis b, der Höhe h und der Länge l (gleiche Winkel). Damit folgt aus

(9) $P_1 : G = h : l$ der **Hangabtrieb** $P_1 = \frac{G\,h}{l} = G \sin \alpha$

(10) $P_2 : G = b : l$ die **Normalkraft** $P_2 = \frac{G\,b}{l} = G \cos \alpha$

Man nennt das Verhältnis $h : b$ den **Anstieg** einer schiefen Ebene. Ohne weiteres sieht man: Je geringer die Steigung ist, desto kleiner wird der Hangabtrieb, während die drückende Normalkraft mit zunehmender Steigung abnimmt.
Bei Eisenbahnlinien versteht man unter der Steigung das Verhältnis $h : l$, also den Sinus des Steigungswinkels.

Beispiel: Welche Zugkraft benötigt ein Güterzug von 800 Mp bei einer Steigung von 1 : 120? – Da bei diesem geringen Winkel die Steigung praktisch gleich der Neigung ist, errechnet sich der Hangabtrieb zu $P_1 = \frac{800\ \text{Mp} \cdot 1}{120} = 6{,}67$ Mp.

3.32 Der Keil

Durch die auf den Rücken wirkende Kraft P wird der Keil in einen Spalt gezwängt (Bilder 34 u. 35). Beide Flanken üben seitliche Kräfte $P_1 = P_2$ auf die Wände des Spaltes aus, welche senkrecht zu diesen stehen (Normalkräfte). Ihre Größe ergibt sich aus dem gezeichneten Parallelogramm. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke findet man $h : l = P : P_1$ und die

Flankenkraft $P_1 = \frac{l\,P}{h}$

Je schmaler der Keil ist, desto größer wird die seitlich ausgeübte Kraft. Die Anwendungen sind sehr zahlreich: Messer, Beil, Nagelspitze, Befestigungskeile.

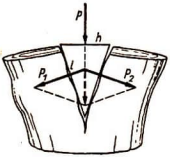


Bild 34. Kräfte am Keil

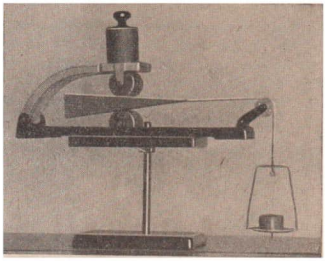


Bild 35
Kräftegleichgewicht am Keil

3.33 Ermittlung von Stabkräften mit dem Krafteck

Anstatt das Kräfteparallelogramm in die gegebene technische Skizze einzutragen, empfiehlt es sich oft, **Lageplan** und **Kräfteplan** getrennt zu zeichnen.
Bild 36 zeigt einen Wandarm, an dem eine Last Q von 1500 kp hängt. Es sollen die im **Knotenpunkt** A wirkenden Kräfte ermittelt werden. Diese sind miteinander im Gleichgewicht. Durch Parallelverschieben entsteht das danebengezeichnete Kraft-

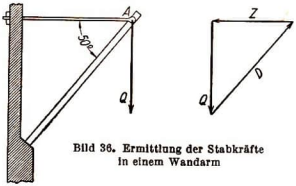


Bild 36. Ermittlung der Stabkräfte in einem Wandarm

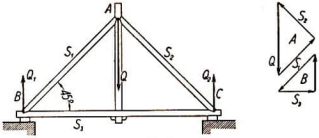


Bild 37
Kräfte im Hängewerk

eck, das sich (wie Bild 27) schließen muß. Da die Größe und Richtung der äußeren Kraft Q festgelegt ist, ergeben sich Größe und Richtung der beiden übrigen Kräfte zwangsläufig. Die Kraft Z im Zuganker (1260 kp) ist vom Knotenpunkt weg gerichtet und bedeutet „Zug", während die in der Strebe wirkende Kraft D (1960 kp) zum Knotenpunkt hin gerichtet ist und „Druck" bedeutet.
Bild 37 zeigt den Lageplan eines Hängewerkes, das mit $Q = 10000$ kp belastet sei. In den beiden Lagern B und C wirken demnach je 5000 kp auf das Hängewerk (also nach oben!) ein.
Für den Knotenpunkt A ergibt der Kräfteplan das Dreieck A und die in den Streben wirkenden Kräfte S_1 und S_2. Beide sind nach dem Knotenpunkt A hin gerichtet und bedeuten demnach Druck. Für den Knotenpunkt B findet man das Dreieck B und ersieht hieraus, daß S_1 hier ebenfalls drückend wirkt, während der waagerechte Balken auf Zug beansprucht wird (Kraftpfeil S_3 zeigt vom Knoten weg).

3.34 Das Seileck

Um die Wirkungslinie der Resultierenden von mehreren parallelen Kräften zu finden, bedient man sich vorteilhaft des **Seilecks (Seilzug, Seilpolygon).**
Als Beispiel sei ein Balken gegeben, der mit seinen beiden Enden auf Lagern ruht. Sein Eigengewicht wird durch die in seiner Mitte (Schwerpunkt) angreifende Kraft P_2 dargestellt. Zwei auf dem Balken ruhende Lasten rufen die beiden Kräfte P_1 und P_3 hervor. Neben den Lageplan (Bild 38 links) zeichnet man die zu addierenden Kräfte $P_1 \cdots P_3$. Die Endpunkte der Pfeile verbindet man mit einem beliebig gewählten Punkt O (Pol) und erhält die **Polstrahlen** $1 \cdots 4$. Auf der Wirkungslinie von P_1 im Lageplan nimmt man einen beliebigen Punkt A an und zieht durch A die Parallele zum Polstrahl 1 sowie zum Polstrahl 2. Letztere schneidet P_2 im Punkt B. Durch B zieht man die Parallele zum Polstrahl 3 usw. So entsteht ein gebrochener Linienzug, der Seilzug. Die beiden äußeren Strahlen 1 und 4 des Seilzugs schneiden sich in E. Durch diesen Punkt läuft die Resultierende R.

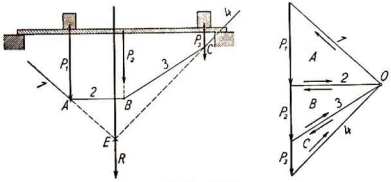


Bild 38. Seileck

Beweis: Die Polstrahlen sind Hilfskräfte. Betrachtet man die einzelnen Teildreiecke des Kraftecks, so wird in dem Dreieck A die Kraft P_1 in 1 und 2 zerlegt, im Dreieck B die Kraft P_2 in 2 und 3 usw. Wegen des Gleichgewichtes sind die Pfeilrichtungen von $1 \cdots 4$ festgelegt, und man sieht, daß sich im Krafteck sämtliche Kräfte bis auf 1 und 4 aufheben. Diese sind ihrerseits mit der Summe $R = P_1 + P_2 + P_3$ im Gleichgewicht. Folglich muß auch im Lageplan R mit 1 und 4 im Gleichgewicht, d. h. R die Resultierende von 1 und 4 sein.

3.4 Das Hebelgesetz

Unter einem Hebel versteht man eine feste, um einen Punkt drehbare Stange. Hängt an seinen beiden Enden je ein Gewicht, so hat man den Fall zweier paralleler Kräfte. Die Resultierende teilt nach Satz (7) die Länge des Hebels im umgekehrten Verhältnis der Kräfte (Bild 39). Bei Unterstützung gerade in diesem Punkt wird die Resultierende durch die nach oben wirkende Stützkraft ausgeglichen: Es besteht Gleichgewicht. Wegen $l_1 : l_2 = P_2 : P_1$ entsteht das

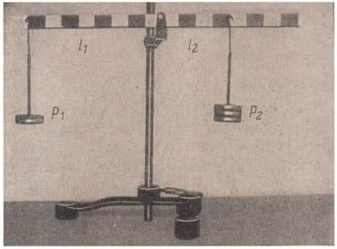


Bild 39. Hebelgesetz (links $1^1/_3$, rechts 3 Gewichtseinheiten)

(11) **Hebelgesetz: Kraft · Kraftarm = Last · Lastarm** $\boxed{P_1 l_1 = P_2 l_2}$

(entdeckt von Archimedes $287 \cdots 212$ v. u. Z.).

3.41 Der zweiarmige Hebel

Hier liegt der Drehpunkt immer irgendwo zwischen den beiden angreifenden Kräften. Liegt er genau in der **Mitte,** so besteht **Gleichgewicht,** wenn beide **Kräfte gleich groß** sind. Zweiarmige Hebel liegen vor bei der Zange, der Schere, der Waage,

Bild 40. Transport schwerer Steinblöcke

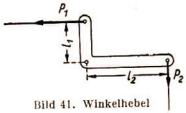
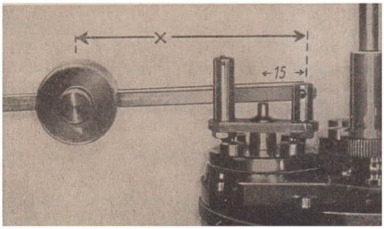


Bild 41. Winkelhebel

dem Pumpenschwengel und vielen Maschinenteilen (Bild 40).
Der zweiarmige Hebel kann auch winklig geknickt sein, wie der **Winkelhebel** in Bild 41. Maßgebend für die Gültigkeit des Hebelgesetzes ist vorläufig, daß die Kräfte rechtwinklig zu den Armen angreifen.

3.42 Der einarmige Hebel

Dieser ist leicht daran zu erkennen, daß der Drehpunkt am Hebelende liegt. Zur Berechnung müssen die Hebelarme stets vom Drehpunkt aus gemessen werden. Beispiele hierfür bieten die Brechstange, die Schubkarre, das Sicherheitsventil eines Dampfkessels, der Greifer eines Löffelbaggers usw.



Beispiel: Wie weit muß das Gegengewicht von 0,4 kp eines Sicherheitsventils verschoben werden, wenn der Dampf bei einer Kraft von 2 kp auf den Ventilteller abblasen soll? – Nach Bild 42 ergeben sich für die Hebelarme 15 mm bzw. x mm. Die Rechnung ergibt:

$$x = \frac{15\,\text{mm} \cdot 2\,\text{kp}}{0{,}4\,\text{kp}} = 75\,\text{mm}$$

Bild 42. Sicherheitsventil

3.5 Das Drehmoment

Zu einer anderen Fassung des Hebelgesetzes gelangt man, wenn man das Produkt aus Kraft und Hebelarm bildet und als

Drehmoment = Kraft · Hebelarm

bezeichnet. Dann erzeugt die eine Kraft am Hebel ein links- und die andere Kraft ein rechtsdrehendes Moment. Im Gleichgewicht gilt dann:

linksdrehendes Moment = rechtsdrehendes Moment.

Diese einfache Definition des Drehmomentes ist aber nur dann wörtlich zu nehmen, wenn Kraft und Hebelarm einen rechten Winkel miteinander bilden.
Bild 43 stellt eine um ihren Mittelpunkt leicht drehbare Kreisscheibe dar, an deren Umfang mittels Fäden 2 verschieden schwere Gewichte nach unten ziehen. Das Gleichgewicht stellt sich erst dann ein, wenn sich die Scheibe um einen bestimmten Winkel α gedreht hat. Zerlegt man die Kraft P_2 nach dem Parallelogrammsatz, so

Bild 44. Drehmoment beim Verschrauben eines Bohrgestänges

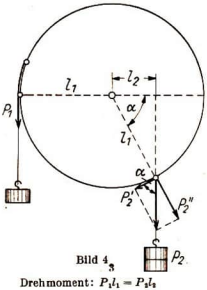


Bild 43
Drehmoment: $P_1 l_1 = P_2 l_2$

entsteht eine Komponente P_2'', die keine Drehung hervorrufen kann, weil deren Wirkungslinie durch den Drehpunkt geht. Die Drehwirkung der Kraft P_2 wird lediglich von der Komponente P_2' hervorgerufen, die rechtwinklig am Hebelarm l_1 angreift. Sie ergibt das rechtsdrehende Moment $M_2 = P_2' l_1$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt nun die Proportion $P_2' : P_2 = l_2 : l_1$, woraus $P_2' l_1 = P_2 l_2$ folgt. Damit ist das rechtsdrehende Moment der Kraft $M_2 = P_2 l_2$, oder in Worten:

(12) **Das Drehmoment ist gleich dem Produkt aus der angreifenden Kraft und dem Abstand des Drehpunktes von der Kraftrichtung.**

Für die kleinere Kraft P_1 läßt sich dagegen eine solche Zerlegung nicht durchführen, sie greift mit ihrem vollen Betrag am Hebelarm l_1 an und erzeugt das linksdrehende Moment $M_1 = P_1 l_1$, das wegen des vorliegenden Gleichgewichtes gleich M_2 sein muß.

Beispiele: 1. Drückt man von oben gegen eine Tretkurbel, so wird das Moment von der waagerechten Stellung aus nach unten immer kleiner, bis es schließlich am toten Punkt gleich Null wird. Dann läuft nämlich die Wirkungslinie durch den Drehpunkt selbst, und sein Abstand von der Kraftrichtung ist ebenfalls Null.

2. (Bild 45). Eine 5 m lange und 12 kp schwere Fahnenstange ist mit 10 kp belastet und wird durch das Seil BC gehalten. Welche Zugkraft wirkt im Haltesoil? –

Denkt man sich die Stange bei A drehbar, so ergibt das im Schwerpunkt (in der Stangenmitte) angreifende Eigengewicht ein rechtsdrehendes Moment, desgleichen die im Endpunkt angreifende Last. Die zugehörigen Hebellängen sind die vom Drehpunkt A auf die Wirkungslinien gefällten Lote, die sich nach dem pythagoreischen Lehrsatz zu 2 m bzw. 4 m berechnen. Das Halteseil liefert ein linksdrehendes Moment $M_2 = Z \cdot 1{,}5$ m, da es rechtwinklig an der Stange angreift.

Aus der Gleichung $Z \cdot 1{,}5\,\text{m} = 12\,\text{kp} \cdot 2\,\text{m} + 10\,\text{kp} \cdot 4\,\text{m}$ erhält man $Z = 42{,}7$ kp.

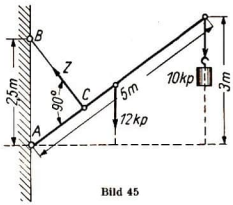


Bild 45

3.51 Der Momentensatz

Unter Zuhilfenahme gedachter Drehmomente kann man auf bequeme Art die Resultierende mehrerer paralleler Teilkräfte finden. Wir denken uns diese an einem Hebel angebracht (Bild 46). Das Gleichgewicht kann dadurch erreicht werden, daß man eine entgegengerichtete Zusatzkraft R anbringt, die gleich der Summe aller Teilkräfte $(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)$ ist. Sie muß nur den richtigen Abstand x vom Drehpunkt 0 haben. x läßt sich aber nach folgender Gleichung leicht berechnen:

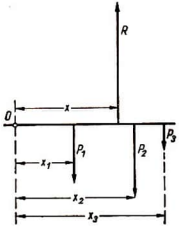


Bild 46. Ermittlung der Lage der Resultierenden R mit Hilfe von Momenten

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots) \cdot x = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots$$

Den Drehpunkt kann man beliebig wählen.

Diese Gleichung nennt man den

(13) **Momentensatz: Das Moment der Resultierenden ist gleich der Summe der Momente aller Einzelkräfte.**

3.52 Ermittlung von Auflagerkräften

Das Gesamtgewicht von Trägern, Maschinenwellen oder anderen Bauteilen, die ihrerseits eine oder mehrere Teillasten tragen können, verteilt sich in bestimmter Weise auf die beiden Lager. Man kann dies auch so auffassen, daß in den beiden Lagern je eine nach oben gerichtete **Auflagerkraft** wirkt und daß diese beiden Auflagerkräfte dem Gesamtgewicht das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich das linke Lager als Drehpunkt und den Träger im rechten Lager angehoben, so ist das hierzu erforderliche Drehmoment gleich dem Produkt aus der rechten Auflagerkraft mit dem Abstand der beiden Lager. Die linke Auflagerkraft erhält man, wenn man das rechte

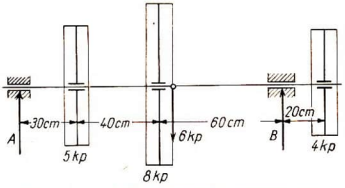


Bild 47. Auflagerkräfte einer mehrfach belasteten Welle

Lager als Drehpunkt wählt und sich den Träger an der Stelle des linken Lagers angehoben denkt.

Beispiel: Die auf Bild 47 angegebene Welle vom Eigengewicht 6 kp trägt 3 Riemenscheiben von 5 kp, 8 kp und 4 kp. In bezug auf das linke Lager gilt die Gleichung

$$B \cdot 130\text{ cm} = 5\text{ kp} \cdot 30\text{ cm} + 8\text{ kp} \cdot 70\text{ cm} + 4\text{ kp} \cdot 150\text{ cm} + 6\text{ kp} \cdot 75\text{ cm},$$

wonach $B = 13{,}5$ kp (das Eigengewicht der Welle greift in der Wellenmitte an). In bezug auf das rechte Lager gilt die Gleichung

$$A \cdot 130\text{ cm} = 8\text{ kp} \cdot 60\text{ cm} + 5\text{ kp} \cdot 100\text{ cm} - 4\text{ kp} \cdot 20\text{ cm} + 6\text{ kp}\quad 55\text{ cm},$$

wonach $A = 9{,}5$ kp (das Drehmoment der rechten Riemenscheibe ist rechtsdrehend).

3.53 Die Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper

Ein völlig frei beweglich gedachter Körper kann unter dem Einfluß einwirkender Kräfte sowohl eine fortschreitende als auch eine Drehbewegung ausführen. Der Körper bleibt nur dann in Ruhe, wenn weder die eine noch die andere Bewegung möglich ist. Damit keine fortschreitende Bewegung eintreten kann, genügt es, daß die Resultierende aller angreifenden Kräfte gleich Null ist, d. h., daß sich das Krafteck schließt. Aber auch, wenn dies der Fall ist, kann noch ein resultierendes Moment verbleiben, das dem Körper eine Drehung erteilen wird.

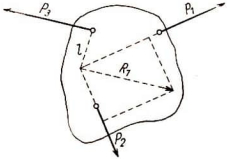


Bild 48. Mehrere Kräfte an einem Körper, deren Resultierende gleich Null ist

Dies zeigt z. B. Bild 48. Hier ergeben die 3 zum Krafteck vereinigten Kräfte P_1, P_2, P_3 zwar die Resultierende Null. Faßt man jedoch P_1 und P_2 durch Verschieben zur Resultierenden R_1 zusammen, so sieht man, daß diese zusammen mit P_3 ein linksdrehendes Moment $P_3 \cdot l = R_1 \cdot l$ ergibt. Erst wenn noch ein gleich großes, im entgegengesetzten Sinne wirkendes Moment vorhanden ist, besteht Gleichgewicht. Damit ergeben sich die beiden

Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper:

1. **Die Resultierende aller angreifenden Kräfte muß gleich Null sein.**
2. **Die Summe aller Drehmomente muß gleich Null sein.**

Ein frei beweglicher Körper befindet sich also nur dann im Gleichgewicht, wenn beide Bedingungen zugleich erfüllt werden.

3.6 Die Waagen

3.61 Die Balkenwaage

Sie ist die einfachste Form einer Waage, ein gleicharmiger, zweiseitiger Hebel (Bild 49). Bei Nichtbenutzung soll eine gute Waage zur Schonung der Schneiden stets arretiert sein oder wenigstens einseitig belastet aufruhen. Die vorgeschriebene

höchstzulässige Tragkraft darf nicht überschritten werden. Unter der **Empfindlichkeit** versteht man (nicht einheitlich) die zur Bewegung des Zeigers um 1 Skalenteil erforderliche Belastung (bei guten Analysenwaagen 0,1 mg je Skalenteil). Da manche Waagen bis zur Beruhigung längere Zeit schwingen, stellt man bei genauen Wägungen den Nullpunkt durch Beobachtung einer ungeraden Gesamtzahl linker und rechter Umkehrpunkte des vor der Skala schwingenden Zeigers fest. Nach dem Schema von Bild 50 liegt der Nullpunkt einer von 0 bis 20 durchlaufenden Skala z. B. bei 8,6.

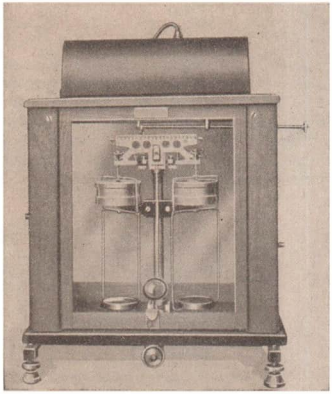


Bild 49
Analysenwaage mit Luftdämpfung

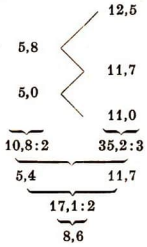


Bild 50. Bestimmung des Nullpunktes einer schwingenden Waage aus den linken und rechten Umkehrpunkten

3.62 Die Brückenwaage

In der Form der Dezimalwaage sind diese Waagen nach Bild 51 eingerichtet. Wesentlich ist, daß die Teilungsverhältnisse $1:n$ der Hebel I und III genau gleich sind. Es gelten dabei folgende Hebelgleichungen:

$$\text{II. } P + Q = L$$

$$\text{III. } P \cdot 1 = R\,n$$

$$\text{I. } x \cdot 10 = Q \cdot 1 + R\,n$$

oder wegen III: $x \cdot 10 = Q + P = L$

Somit ist $x = \frac{L}{10}$. An welcher Stelle der Brücke II sich die Last befindet, ist demnach gleichgültig.

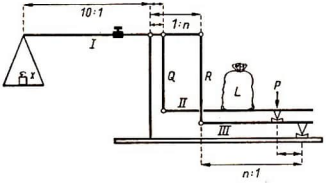


Bild 51. Schema der Dezimalwaage

3.63 Laufgewichtswaagen

Durch Verschieben eines Gewichtes längs einer Skala wird dessen Drehmoment dem Moment der zu wägenden Last angeglichen: Haushaltwaage, Personenwaage, römische Schnellwaage (Bild 52).

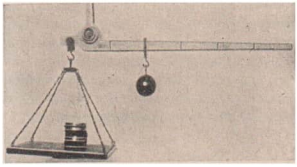


Bild 52. Römische Schnellwaage

3.64 Neigungswaagen

Hierzu gehört die allbekannte Briefwaage (Bild 53). Bei zunehmender Belastung hebt sich das am geknickten Hebel angebrachte feste Gewicht G. Dadurch vergrößert sich der Abstand l des Drehpunktes von der Wirkungslinie des Gewichtes, womit sich das vergrößerte Drehmoment der stärkeren Belastung angleicht. Die in den Lebensmittelgeschäften meist benutzten Schnellwaagen sind Neigungswaagen mit zusätzlichem Gewichtsausgleich (Bilder 54 und 55).

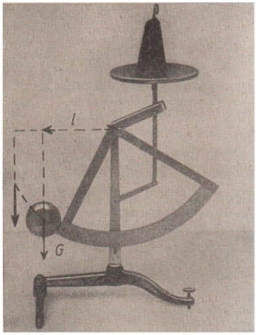


Bild 53. Briefwaage

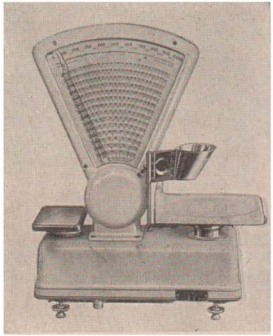


Bild 54. Neigungswaage

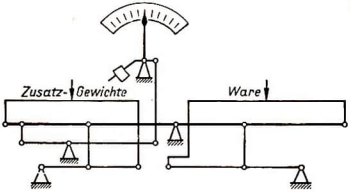


Bild 55. Hebelsystem der Neigungswaage von Bild 54

3.7 Der Schwerpunkt

Will man eine Holzlatte auf den ausgestreckten Zeigefinger legen, so muß man sie genau im Mittelpunkt unterstützen. Ihre ganze Last drückt jetzt nur auf einen Punkt, und es ist so, als sei die ganze Masse des Stabes in diesem Punkt konzentriert. Man nennt ihn den Schwerpunkt (Bild 56).

Um zu einer genaueren Erklärung des Schwerpunktes zu kommen, denken wir uns den Gegenstand in lauter kleine, parallel nach unten ziehende Teilgewichte zerlegt. Ihre Resultierende ist gleich dem Gesamtgewicht des Körpers, und man kann ihre Wirkungslinie nach den oben beschriebenen Verfahren finden. Diese Wirkungslinie nennt man eine Schwerlinie. Orientiert man den Körper anders, so ergibt sich eine neue **Schwerlinie.** Den Schnittpunkt der Schwerlinien nennt man den **Schwerpunkt** oder auch **Massenmittelpunkt:**

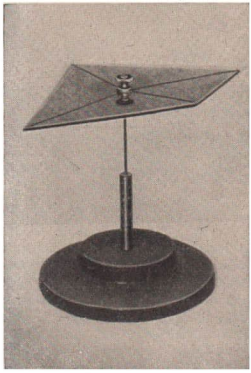


Bild 56. Im Schwerpunkt unterstützte Fläche

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Angriffspunkt der Resultierenden aller seiner Teilgewichte.

Oder, da der im Schwerpunkt unterstützte Körper im Gleichgewicht ist:

(14) **Die Summe aller Momente in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse ist gleich Null.**

Hiermit ist auch ein einfaches Verfahren gegeben, den Schwerpunkt einer unregelmäßigen Fläche zu finden. Man hängt die aus Holz oder Karton geschnittene Fläche an zwei verschiedenen Punkten ihres Randes an einem Faden auf (Bild 57). Die lotrechte Verlängerung des Fadens gibt je eine Schwerlinie. Der Schnittpunkt beider ist der Schwerpunkt.

Bei symmetrischen Flächen bzw. Körpern sind Symmetrieachsen gleichzeitig Schwerlinien, und der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der Symmetrieachsen (z. B. beim Rechteck der Schnittpunkt der Diagonalen, bei der Kugel der Mittelpunkt usw.; vgl. Bilder 58 und 59).

Die Kenntnis des Schwerpunktes vereinfacht viele mechanische Probleme außerordentlich. Anstatt mit dem ganzen Körper zu rechnen, genügt es zu wissen, wo sein

Bild 57
Ermittlung des Schwerpunktes einer Fläche durch zweimaliges Aufhängen

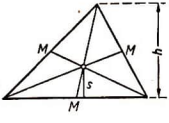
a

Halbkreis $s = \frac{4r}{3\pi}$

b

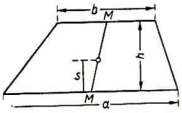
Kreissektor $s = \frac{120\, r \sin\alpha}{\alpha \cdot \pi}$

Bild 58a u. b



a

Dreieck $s = \frac{h}{3}$



b

Bild 59a u. b

Trapez $s = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$

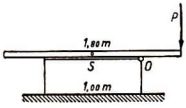


Bild 60

Schwerpunkt liegt. Dieser repräsentiert das Gesamtgewicht des Körpers in einem einzigen Punkt.

Beispiele: 1. Welche Kraft ist erforderlich, um durch Druck nach unten eine 6 kp schwere Stange um die Kante O (Bild 60) zu kippen? – Denkt man sich das Gewicht der Stange in ihrem Schwerpunkt S vereint, so lautet das Hebelgesetz:

$$P \cdot 40\,\text{cm} = 6\,\text{kp} \cdot 50\,\text{cm} \quad \text{und} \quad P = \frac{6\,\text{kp} \cdot 50\,\text{cm}}{40\,\text{cm}} = 7{,}5\,\text{kp}$$

2. 3 gleich große Gewichte haben beliebigen Abstand voneinander. Wo liegt ihr gemeinsamer Schwerpunkt? – Betrachtet man zuerst nur 2 von ihnen, so liegt ihr gemeinsamer Schwerpunkt in der Mitte M. Dort kann man sich beide Gewichte vereint denken und hat dann noch den gemeinsamen Schwerpunkt dieses doppelten Gewichts mit dem dritten zu suchen. Dieser liegt auf deren Verbindungslinie und muß diese Linie im Verhältnis 1:2 teilen (Hebelgesetz). So stößt man auf die Tatsache, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2 teilt.

3. Suche den Schwerpunkt der in Bild 61 skizzierten Fläche! – Man betrachte die Flächeninhalte als Gewicht und ermittle erst die Teilschwerpunkte S_1 und S_2. Nach dem Momentensatz ist dann in bezug auf die y-Achse:

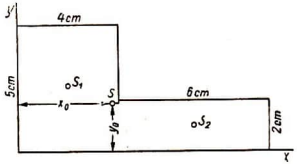


Bild 61

$$(20 + 12)\, x_0 = 20 \cdot 2 \;\; + 12 \cdot 7 \text{ und } x_0 = \frac{124}{32} = 3{,}88\,\text{cm} \text{ und bezüglich der } x\text{-Achse:}$$

$$(20 + 12)\, y_0 = 20 \cdot 2{,}5 + 12 \cdot 1 \text{ und } y_0 = \frac{62}{32} = 1{,}94\,\text{cm}$$

3.8 Das bedingte Gleichgewicht

Wenn alle an einem Körper angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sind, befindet sich dieser in Ruhe (bzw. in gleichförmiger Bewegung). Bei einer **kleinen Lagenänderung** kann aber das Verhalten des Körpers durchaus verschieden sein, wie man am Beispiel einer Kugel sieht, die nach Bild 62 auf verschiedenen Oberflächen liegt. Es können dann 3 Fälle unterschieden werden:

1. **Stabiles Gleichgewicht.** Die Kugel rollt bei jeder, etwa durch einen Stoß verursachten Verlagerung von selbst wieder in die ursprüngliche Lage zurück. Hier hat der Schwerpunkt seine tiefstmögliche Lage.

2. **Indifferentes Gleichgewicht.** Die Kugel bleibt in jeder neuen Lage ruhig liegen. Der Schwerpunkt bleibt immer auf gleicher Höhe.

3. **Labiles Gleichgewicht.** Die Kugel kehrt auch nach der geringfügigsten Lagenänderung nicht mehr in die alte Stellung zurück, sondern sucht von selbst eine neue Gleichgewichtslage. Ihr Schwerpunkt befindet sich in der höchstmöglichen Lage.

Beispiele: 1. Eine hängende Lampe, ein Tisch, ein Stehaufmännchen sind im stabilen Gleichgewicht. Ein genau zentriertes Rad, ein Kraftwagen sind im indifferenten Gleichgewicht. Ein Radfahrer ist im labilen Gleichgewicht.

2. Weshalb befindet sich der auf der Spitze stehende Kegel von Bild 63 im stabilen Gleichgewicht? – Er bildet mit dem daran befestigten Gewicht einen starren Körper, dessen Schwerpunkt in der tiefstmöglichen Lage hängt.

Bild 62. Die 3 Gleichgewichtsarten

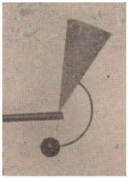


Bild 63
Stabiles Gleichgewicht

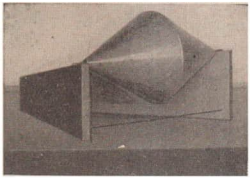


Bild 64. Ein Doppelkegel rollt bergauf. In Wirklichkeit bewegt sich sein Schwerpunkt infolge Auseinanderlaufens der Bahn nach unten

Bild 65. Labiles Gleichgewicht

3.9 Kippen und Standfestigkeit

Strenggenommen gilt die Unterscheidung der 3 Gleichgewichtsarten nur im Hinblick auf minimale Lagestörungen. Bei Störungen gröberer Art kann man einen Körper auch aus dem stabilen Gleichgewicht bringen. Selbst eine stabil stehende Kiste läßt sich umkippen, wenn man nur genügend Arbeit aufwendet. Wir sehen auf Bild 66 einen Quader. Um ihn über die Kante O zu kippen, muß man seinen Schwerpunkt um h, d. h. so weit heben, bis dieser lotrecht über der **Kippkante** steht. In diesem Augenblick besteht labiles Gleichgewicht, und die kleinste Störung bringt ihn zum Umfallen. Ein Körper kippt also dann um, wenn das von seinem Schwerpunkt ausgehende Lot nicht in die **Unterstützungsfläche** fällt. Als Unterstützungsfläche gilt dabei stets die geradlinige Umgrenzung aller Stützpunkte. Bei einem Tisch ist diese das die Fußflächen umrahmende Rechteck.
Als Maß für die **Standfestigkeit** kann man die im Schwerpunkt angreifende **Kippkraft** ansehen, welche erforderlich ist, den Körper um die Kippkante zu drehen. Das

Moment dieser Kraft Ph muß dann gleich dem **Standmoment** Ga (Bild 67) sein. Daraus berechnet sich die

(15) **Kippkraft:** $$\boxed{P = \frac{Ga}{h}}$$

Man ersieht hieraus sofort, daß die Standfestigkeit (d. h. die Kippkraft P) um so größer ist,

1. je tiefer der Schwerpunkt liegt,
2. je größer die Unterstützungsfläche ist,
3. je größer das Gewicht des Körpers ist.

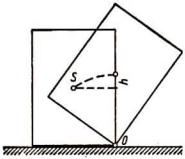


Bild 66. Kippen bedeutet Heben um die Höhe h

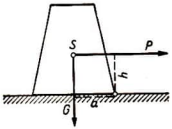


Bild 67
Stand- und Kippmoment

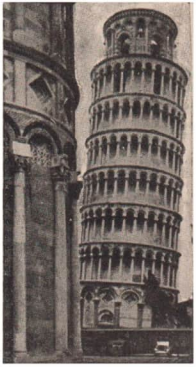


Bild 68. Der schiefe Turm von Pisa
Höhe 54,5 m; Überhang 4,3 m

Beispiele: 1. Die Standfestigkeit eines arbeitenden Mannes ist bei breitbeinigem Stehen größer als in gerader Haltung.
2. Ein liegender Quader ist doppelt so breit wie hoch. Um wieviel wird die Standfestigkeit geringer, wenn man ihn hochkant stellt? – Im ersten Fall ist $P = \frac{G \cdot 2}{1}$, und im zweiten Fall $P = \frac{G \cdot 1}{2}$, d. h., die Standfestigkeit ist nur noch ein Viertel so groß.

4 Die Lehre von den Bewegungen (Kinematik)

Das Hauptaugenmerk des beobachtenden Physikers beanspruchten seit jeher bewegte Dinge. Da die wirklichen Bewegungen durchaus unregelmäßig sind, muß man gewisse vereinfachende Annahmen machen, um die vorhandenen Fälle ordnen zu können. Vor allem ist zunächst von allen Reibungs- und Luftwiderständen abzusehen. Die Kinematik behandelt demnach Bewegungen, ohne nach deren Ursache zu fragen.

4.1 Die fortschreitende Bewegung

4.11 Die gleichförmig geradlinige Bewegung

Um die Bewegung eines Körpers zu beurteilen, mißt man seine **Geschwindigkeit.** Am einfachsten bestimmt man sie, indem man feststellt, welche Strecke s in der Zeit t durchlaufen wird. Dann berechnet man den in 1 Sekunde zurückgelegten Weg:

(16) **Geschwindigkeit** $= \frac{\textbf{Weg}}{\textbf{Zeit}}$ $\boxed{v = \frac{s}{t}}$

woraus folgt: $\boxed{s = vt}$ $\boxed{t = \frac{s}{v}}$

Maßeinheit der Geschwindigkeit: 1 m/s

Eine Bewegung ist gleichförmig, wenn in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden. Das ist beispielsweise bei einem auf freier Strecke fahrenden Zug der Fall.

Den Bewegungsablauf kann man auch grafisch darstellen. Trägt man die zurückgelegte Strecke s als Ordinate und die verflossene Zeit t als Abszisse auf, so erhält

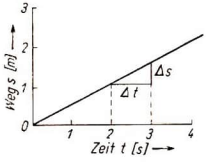


Bild 69a. Gleichförmige Bewegung

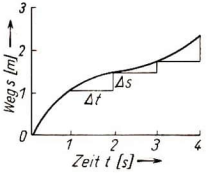


Bild 69b. Ungleichförmige Bewegung

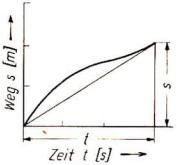


Bild 69c. Mittlere Geschwindigkeit

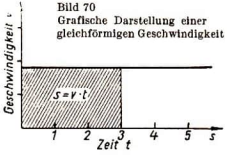
man das **Weg-Zeit-Diagramm.** Für den Fall einer vollkommen gleichförmigen Bewegung ergibt das s-t-Diagramm eine ansteigende Gerade (Bild 69a). Betrachtet man einen kurzen Zeitabschnitt Δt, so ist diesem Zeitelement ein entsprechendes Wegstück Δs zugeordnet. Hiernach ergibt sich die

(17) **allgemeine Definition der Geschwindigkeit:** $\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$

Diese ist auch für jede andere, nicht gleichförmige Bewegung gültig. So stellt z. B. Bild 69b das s-t-Diagramm einer unregelmäßigen Bewegung dar, und man erkennt, daß der Quotient $v = \Delta s/\Delta t$ hier in jedem Augenblick einen anderen Wert hat.

Sieht man der Einfachheit halber von den einzelnen Geschwindigkeitsschwankungen ab und betrachtet den in einem größeren Zeitraum t zurückgelegten Gesamtweg s, so erhält man nach Bild 69c die **mittlere** oder **Durchschnittsgeschwindigkeit** $v = s/t$, von der in den eingangs aufgestellten Formeln (16) ausgegangen wurde.

Bild 70
Grafische Darstellung einer gleichförmigen Geschwindigkeit



Eine andere Darstellung ergibt sich, wenn man die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t zeichnet. Das auf Bild 70 dargestellte **v-t-Diagramm** zeigt, daß die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung einen stets konstanten Wert hat. Da nun

$s = vt$, kann man den zurückgelegten Weg als den Flächeninhalt des Rechtecks unter der v-Linie betrachten.

Bei Fahrzeugen ist es meist üblich, die Geschwindigkeit in km/h auszudrücken. Es bedeutet z. B. 72 km/h soviel wie $\frac{72\,000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 20$ m/s. Man erhält also die Geschwindigkeit in m/s, wenn man den in km/h gegebenen Zahlenwert einfach durch 3,6 dividiert.

$$1\text{ km/h} = \frac{1}{3{,}6}\text{ m/s}$$

$$1\text{ m/s} = 3{,}6\text{ km/h}$$

Beispiele: 1. Legt ein Zug 400 m in 25 s zurück, so ist seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{400\text{ m}}{25\text{ s}} = 16\text{ m/s}.$$

2. Welche Strecke legt ein Kraftwagen mit der Geschwindigkeit 80 km/h in 15 s zurück? –

$$v = \frac{80\text{ m}}{3{,}6\text{ s}} = 22{,}2\text{ m/s}; \qquad s = \frac{22{,}2\text{ m } 15\text{ s}}{\text{s}} = 333{,}3\text{ m}$$

3. Welche Zeit benötigt dieser Wagen, um eine Strecke von 50 m zurückzulegen? –

$$t = \frac{50\text{ m s}}{22{,}2\text{ m}} = 2{,}25\text{ s}$$

4.12 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Betrachtet man einen gleichförmig dahinfahrenden Zug oder ein anderes Fahrzeug, so kann man sich fragen, wie diese Bewegung entstanden ist. Ursprünglich befand sich der Körper im Ruhezustand. Dann begann er, sich zu bewegen, und seine Geschwindigkeit nahm von Sekunde zu Sekunde zu, bis sie ihren endgültigen Wert erreichte. Man spricht in diesem Fall von einer beschleunigten Bewegung. Umgekehrt nimmt beim Bremsen die Geschwindigkeit bis zum Stillstand immer mehr ab, die Bewegung ist verzögert.

Um diese Geschwindigkeitsänderung genau zu beschreiben, hat man festgesetzt:

$\frac{\text{Beschleunigung}}{\text{Verzögerung}}$ ist die Geschwindigkeits-$\frac{\text{zunahme}}{\text{abnahme}}$ je Sekunde.

Maßeinheit der Beschleunigung: 1 m/s².

Es kommt demnach darauf an, um welchen Betrag sich die Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitraum t ändert. Diese Änderung ist gleich der Differenz zwischen der Geschwindigkeit v am Ende und der Geschwindigkeit v_0 am Anfang der Bewegung. Man ersieht sie am deutlichsten, wenn man den Ablauf einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung im v-t-Diagramm darstellt. Bild 71a ergibt eine ansteigende Gerade. Für den Fall einer gleichmäßig verzögerten Bewegung ist es eine fallende Gerade. Betrachtet man einen kurzen Zeitabschnitt Δt, so ist diesem die kleine Geschwindigkeitsänderung Δv zugeordnet. Damit ergibt sich die

(18) **allgemeine Definition der Beschleunigung:** $\boxed{b = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$

Aus Bild 71 a ist zu erkennen, daß die Beschleunigung b einen konstanten Wert hat. Die Definition gilt aber auch für den Fall der ungleichmäßig beschleunigten Bewegung. So liest man z. B. aus Bild 71 b ab, daß eine anfangs stark beschleunigte Bewegung allmählich in eine gleichförmige übergeht. Hier hat die Beschleunigung $b = \Delta v/\Delta t$ in jedem Augenblick natürlich einen anderen Wert.

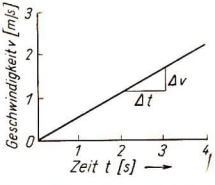


Bild 71 a. Gleichmäßige Beschleunigung

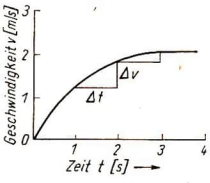


Bild 71 b. Abnehmende Beschleunigung

4.121 Die Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit ist gleich Null

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn die beschleunigte Bewegung aus der Ruhelage beginnt bzw. die verzögerte Bewegung mit der Ruhelage endet. Dann gelten die einfachen Formeln

$$b = \frac{v}{t} \tag{19}$$

Ungefähre Beschleunigungs- und Verzögerungswerte

	m/s²		m/s²
Anfahren von Güterzügen	0,08	Bremsen von Güterzügen	0,15
desgl. von Personenzügen	0,12	desgl. von Personenzügen	0,30
desgl. von Berliner S-Bahn	0,55	Auto mit 4-Rad-Bremse	5,15

Beispiele: 1. Die Geschwindigkeit eines Kraftwagens wächst in 5 s von 8 auf 26 m/s. Es ergibt sich hieraus eine Beschleunigung von

$$b = \frac{26\ \text{m/s} - 8\ \text{m/s}}{5\ \text{s}} = 3{,}6\ \text{m/s}^2$$

2. Welche Zeit braucht ein Personenzug, um nach der Abfahrt eine Geschwindigkeit von 72 km/h zu erreichen? –

$$t = \frac{72\ \text{m} \cdot \text{s}^2}{3{,}6\ \text{s} \cdot 0{,}12\ \text{m}} = 167\ \text{s}$$

3. Welche Geschwindigkeit erreicht ein Güterzug 3 min nach dem Abfahren? –

$$v = \frac{0{,}08\ \text{m} \cdot 180\ \text{s}}{\text{s}^2} = 14{,}4\ \text{m/s}$$

4. Welche Bremszeit erfordert ein Kraftwagen, der aus einer Geschwindigkeit von 65 km/h anhalten will? –

$$t = \frac{65\ \mathrm{m\,s^2}}{3{,}6\ \mathrm{s} \cdot 5{,}15\ \mathrm{m}} = 3{,}5\ \mathrm{s}$$

Wie bei der gleichförmigen Bewegung kann man auch den Inhalt der v-t-Fläche wieder als zurückgelegten Weg betrachten. Wenn die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist, wird die Fläche zu einem Dreieck, und man erhält:

(20) $$\boxed{s = \frac{v}{2}\,t}$$

Um den zurückgelegten Weg aus der Beschleunigung zu errechnen, setzen wir in Formel (20) $v = bt$ ein und bekommen $s = \frac{b\,t}{2}\,t$ oder

(21) $$\boxed{s = \frac{b}{2}\,t^2}$$

Das heißt: Die durchlaufene Strecke wächst mit dem Quadrat der Zeit.

Bild 73 zeigt einen kleinen Wagen, der ein sanftes Gefälle hinabrollt. Ein schwingendes Pendel gibt durch einen Hebel den Wagen frei. Außerdem zeichnet es mit einem Pinsel

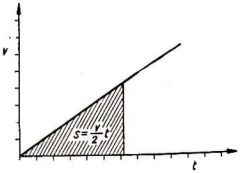


Bild 72. Darstellung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung (Anfangsgeschwindigkeit = 0)

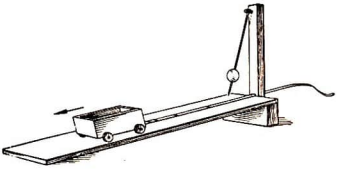


Bild 73
Aufzeichnung einer beschleunigten Bewegung mit einem schwingenden Pendel

in gleichen Zeitabständen Strichmarken auf ein nachgezogenes Papierband. Man sieht dann auf dem Band, wie die aufeinanderfolgenden Strichabstände sich wie die Quadratzahlen 1:4:9:16 usw. verhalten. Reibungseinflüsse machen den Versuch etwas ungenau. Setzt man in der letzten Formel $t = \frac{v}{b}$, so erhält man $v^2 = 2bs$. Es ist demnach die

(22) **Endgeschwindigkeit** $$\boxed{v = \sqrt{2\,b\,s}}$$

Beispiele: 1. Welche Strecke durchfährt ein Kraftwagen, bis er die Endgeschwindigkeit 90 km/h erreicht und wenn er hierzu 28 s benötigt? – Die Beschleunigung errechnet sich nach (19) zu

$$b = \frac{90\ \mathrm{m}}{3{,}6\ \mathrm{s} \cdot 28\ \mathrm{s}} = 0{,}893\ \mathrm{m/s^2}$$

und die Fahrstrecke nach (21) zu

$$s = \frac{0{,}893\ \mathrm{m} \cdot 28^2\ \mathrm{s}^2}{2\ \mathrm{s}^2} = 350\ \mathrm{m} \text{ oder kürzer nach (20)}$$

$$s = \frac{90\ \mathrm{m} \cdot 28\ \mathrm{s}}{2 \cdot 3{,}6\ \mathrm{s}} = 350\ \mathrm{m}$$

2. Welche Geschwindigkeit hatte ein Fahrzeug, das mit einer Bremsverzögerung von 5 m/s² eine Bremsstrecke von 18 m zurücklegte? – Nach (22) ist

$$v = \sqrt{2 \cdot 5\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 18\ \mathrm{m}} = 13{,}4\ \mathrm{m/s} \text{ oder } 48{,}24\ \mathrm{km/h}$$

4.122 Beschleunigte bzw. verzögerte Bewegung mit gegebener Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit

Hat nun der bewegte Körper zur Zeit $t = 0$ bereits eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit v_0, so hat die Fläche im v-t-Diagramm die Gestalt eines Trapezes. Da sein Flächeninhalt gleich dem zurückgelegten Weg ist (Bild 74), erhält man für diesen Fall

(23) $$\boxed{s = \frac{v_0 + v}{2}\, t}$$

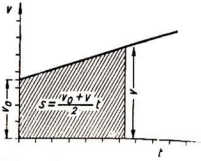


Bild 74. Darstellung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung (Anfangsgeschwindigkeit = v_0)

Hierbei ist $\frac{v_0 + v}{2}$ das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit, und man kann wiederum sagen:

Weg = mittlere Geschwindigkeit · Zeit

Das Trapez kann man sich aber auch aus dem Rechteck $v_0 t$ und dem Dreieck $\frac{v - v_0}{2}\, t$ zusammengesetzt denken. Dabei ist offenbar $v - v_0 = b\, t$, und man erhält damit die

(24) **allgemeine Gleichung der gleichmäßig beschleunigten bzw. verzögerten Bewegung:** $$\boxed{s = v_0 t \pm \frac{b}{2} t^2}$$

Diese Formel schließt alle bisher behandelten Sonderfälle in sich ein. Ist z. B. $b = 0$, so liegt eine gleichförmige Bewegung vor. Handelt es sich um eine verzögerte Bewegung, so gilt das Minuszeichen, und ist $v_0 = 0$, so erhält man Formel (21).

Beispiel: Welche Strecke muß ein D-Zug durchfahren, wenn er innerhalb 1 min seine Geschwindigkeit von 50 auf 80 km/h steigern soll? –

$$s = \frac{(80 + 50)\ \mathrm{m} \cdot 60\ \mathrm{s}}{3{,}6\ \mathrm{s} \cdot 2} = 1080\ \mathrm{m}$$

4.13 Der freie Fall

Fällt ein Körper frei herunter, so vollzieht sich ebenfalls eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung (Entdeckung des italienischen Physikers Galilei). Die Beschleunigung

beträgt hierbei in Mitteleuropa etwa 9,81 m/s². Wenn leichte Körper langsamer fallen als schwere, so liegt das nur am Luftwiderstand.

(25) **Im luftleeren Raum fallen alle Körper gleich schnell.**

Experimentell kann man das angenähert wie folgt bestätigen. Läßt man zwei gleich schwere Körper aus gleichem Material zu gleicher Zeit fallen, so bleibt ihre Geschwindigkeit unverändert, wenn man sie miteinander verbindet. Der nunmehr doppelt so schwere Körper fällt dann genauso schnell wie beide einzeln.
Man kann auch eine lange Glasröhre luftleer pumpen (Fallröhre) und darin eine Bleikugel zugleich mit einer Flaumfeder herabfallen lassen. Beide kommen gleichzeitig am Boden an (Bild 76).
Diese durch die Anziehungskraft der Erde hervorgerufene Beschleunigung ist die Ursache dafür, daß die Körper überhaupt ein Gewicht besitzen. Man nennt sie daher

Schwerebeschleunigung: $\boxed{g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}$

Für einfachere technische Berechnungen genügt es meistens, mit diesem runden Zahlenwert von 9,81 m/s² zu arbeiten. Man muß sich diese Zahl und ihre Bedeutung daher gut merken.
Besser als mit Fallversuchen mißt man den genauen Wert von g mit Hilfe von Pendeln[1]). Als Richtwert für europäische Schwereuntersuchungen gilt die im Potsdamer Geodätischen Institut ermittelte Zahl.
Weil die Erde keine homogene Kugel ist, hat die Schwerebeschleunigung an jedem Ort der Erdoberfläche einen etwas abweichenden Wert:

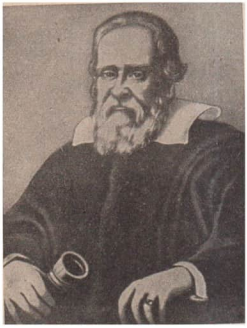


Bild 75. Galileo Galilei (1564···1642)

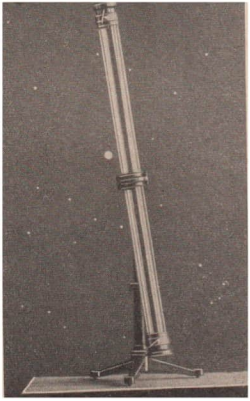


Bild 76. Fallröhre

[1]) Siehe Abschn. 6.32.

Potsdam	9,81274 m/s²	Normbeschleunigung zur Definition des Kiloponds	9,806 65 m/s²
Äquator	9,78 m/s²		
Pol	9,83 m/s²	Wahrer Wert bei 45° Breite und 0 m Höhe (letzte Berechnung)	9,806 29 m/s²

Für die in der Zeit t zurückgelegte Fallhöhe h gilt dann wieder Formel (21), wobei man g an Stelle von b schreibt:

(26) **Fallhöhe:** $$\boxed{h = \frac{g}{2}\,t^2}$$

(27) **Fallzeit:** $$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

(28) **Fallgeschwindigkeit:** $$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$ (vgl. Formel 22)

Bild 77. Aufzeichnung der Schreibspitze einer schwingenden Stimmgabel auf einer berußten, frei fallenden Glasplatte

In der 1. Sekunde fällt ein Körper demnach um $h = \frac{9{,}81\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot 2} = 4{,}9\ \mathrm{m}$.
Am Ende dieser Strecke beträgt seine Geschwindigkeit, da $v = g\,t$,

$$v = \frac{9{,}81\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{s}}{\mathrm{s}^2} = 9{,}81\ \mathrm{m/s}.$$

Beispiele: 1. Welche Zeit benötigt ein Ziegelstein von 4 kp Gewicht, um aus 15 m Höhe zur Erde zu fallen? –

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2}{9{,}81\ \mathrm{m}}} = 1{,}75\ \mathrm{s}$$

Das Gewicht spielt hierbei keine Rolle, da der Einfachheit der Berechnung halber vom Luftwiderstand abgesehen wird.

2. Mit welcher Endgeschwindigkeit schlägt ein Gegenstand auf, der in einen 300 m tiefen Schacht hineinfällt? – Nach (28) ergibt sich

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\ \ 300\ \mathrm{m}} = 76{,}7\ \mathrm{m/s}.$$

Infolge des Luftwiderstandes wird der volle Betrag jedoch nicht erreicht werden.

4.2 Die Relativität der Bewegungen

So einfach die Messung einer Geschwindigkeit zu sein scheint, gibt es doch Fälle, bei denen eine Geschwindigkeitsmessung grundsätzlich nicht möglich ist. Nehmen wir an, wir säßen in einem allseitig geschlossenen Kasten, der sich völlig gleichförmig geradeaus bewegt (Bild 78). Es wäre uns ohne irgendeine Verbindung mit der Außenwelt in der Tat unmöglich, seine Geschwindigkeit zu messen oder überhaupt nur

festzustellen. Wir nehmen im täglichen Leben die Erde als ruhend an, obwohl wir wissen, daß sie sich um ihre Achse dreht und zugleich mit einer Geschwindigkeit von etwa 30 km/s um die Sonne läuft. Die Sonne bewegt sich wiederum mitsamt der Erde (nach dem Sternbild der Leier) durch den Weltenraum, wobei eine Geschwindigkeit von 270 km/s geschätzt wird. Das heißt: Es ist überhaupt unmöglich, die „wahre Geschwindigkeit" eines Körpers anzugeben.

Bild 78. Die gleichförmig geradlinige Bewegung ist in einem allseitig geschlossenen Kasten nicht feststellbar

Alle gemessenen Geschwindigkeiten gelten **nur in bezug auf einen als ruhend angenommenen Beobachter.** Man kann nur **Relativ-** und niemals Absolutbewegungen bestimmen.

Am Himmelsgewölbe beschreiben alle Gestirne Kreisbahnen. Die Erkenntnis von Kopernikus, daß diese Bewegung nur eine scheinbare, eine Relativbewegung ist, setzte sich damals nur mit größten Schwierigkeiten durch. Kopernikus konnte sein Werk erst an seinem Lebensende (1543) veröffentlichen, und Giordano Bruno büßte die Verteidigung der kopernikanischen Lehre auf dem Scheiterhaufen.

Es gilt demnach das **Relativitätsprinzip** der gleichförmig geradlinigen Bewegung:

(29) **Eine gleichförmig geradlinige Bewegung ist für den bewegten Körper selbst physikalisch wirkungslos und ohne äußeren Bezugspunkt nicht feststellbar. Der Körper kann ebensogut als ruhend angenommen werden.**

Ein derartig gleichförmig bewegter Körper bildet für den mitbewegten Beobachter ein sogenanntes „gleichförmig bewegtes Bezugssystem **(Inertialsystem)**". Die Sache wird sofort anders, wenn der Körper gegen ein Hindernis stößt. Dann ist seine Geschwindigkeit nicht mehr gleichförmig, und es treten neue Erscheinungen auf. Man spricht hier allgemein von **„beschleunigten Bezugssystemen"**. So sind bewegte Fahrzeuge wegen ihrer schwankenden Geschwindigkeit genaugenommen immer beschleunigte Bezugssysteme.

Beispiele: 1. Bewegen sich zwei Fahrzeuge mit gleicher Geschwindigkeit nebeneinander, so sind sie relativ zueinander in Ruhe.

2. Überholt ein Auto mit 35 km/h einen Radfahrer, der mit 20 km/h fährt, so beträgt die Relativgeschwindigkeit des Wagens gegenüber dem Fahrrad 15 km/h.

3. Fällt ein mit Wasser gefüllter Eimer frei herunter und besitzt sein Boden ein Loch, so fließt während des Fallens nichts aus. Eimer und Wasser haben stets die gleiche Geschwindigkeit und sind relativ zueinander in Ruhe (Bild 79).

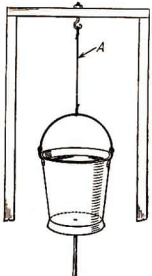


Bild 79. Wird der Faden bei *A* durchgebrannt, so fällt der Eimer herunter, und das Wasser hört auf zu fließen

4. Welche Relativgeschwindigkeit besitzen zwei frei fallende Steine, von denen der eine 5 s und der andere 7 s lang unterwegs ist? –

$$v_1 = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 5\ \mathrm{s} = 49{,}05\ \mathrm{m/s};$$

$$v_2 = 68{,}67\ \mathrm{m/s}; \qquad v_2 - v_1 = 19{,}62\ \mathrm{m/s}$$

4.3 Zusammensetzung von geradlinigen Bewegungen

Wir haben somit erkannt, daß eine geradlinig-gleichförmige Bewegung auf einem Körper keinerlei physikalische Wirkung hervorbringt. Mithin spielen sich alle Vorgänge auf und in einem solchen Körper ab, als ob er ruhe, d. h. vollkommen ungestört. In einem fahrenden Zug kann man ruhig auf und ab gehen, die Eigenbewegung des Zuges hat keinen Einfluß darauf. Ein außerhalb des Zuges ruhender Beobachter sieht jedoch beide Vorgänge zugleich. Ihm erscheint die Absolutgeschwindigkeit des Fahrgastes als Summe: Zugbewegung plus Gehbewegung innerhalb des fahrenden Wagens (Bild 80). Er sieht sie als Differenz, wenn die Bewegungen entgegengerichtet sind. Man kann das auch so ausdrücken:

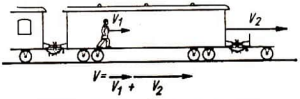


Bild 80. Ungestörte Überlagerung zweier Geschwindigkeiten

(30) **Zwei gleichförmig geradlinige Bewegungen (Geschwindigkeiten) setzen sich so zusammen, als ob beide Teilbewegungen nacheinander stattfinden würden (ungestörte Superposition der Geschwindigkeiten).**

Dieser Satz gilt aber auch für Bewegungen, die nicht längs derselben Geraden erfolgen!

4.31 Das Parallelogramm der Bewegungen

Auf einem gleichförmig geradeaus fahrenden Schiff geht ein Mann quer über das Deck auf die andere Seite. Da für ihn die Schiffsbewegung nicht spürbar ist, geht seine Querbewegung ungestört vor sich. Ein ruhender Beobachter stellt dagegen fest, daß seine wahre Bewegung längs einer schrägen Linie erfolgt (Bild 81). Der tatsächlich zurückgelegte Weg ergibt sich geometrisch als die Diagonale des aus den beiden Teilbewegungen gebildeten Parallelogramms:

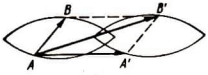


Bild 81
Parallelogramm der Bewegungen

(31) **Die Gesamtbewegung ist gleich der Diagonalen des aus den beiden Teilbewegungen gebildeten Parallelogramms.**

Um eine Geschwindigkeit anzugeben, genügt aber nicht allein deren Zahlenwert. Vielmehr muß man stets daran denken, daß jede Geschwindigkeit auch eine bestimmte Richtung besitzt. Derartige Größen bezeichnet man als **Vektoren.** Einen solchen Vektor stellt man durch einen **Pfeil** dar, dessen Richtung dorthin weist, wohin sich der Körper bewegt, und dessen Länge nach einem gewählten Maßstab die Größe der Geschwindigkeit angibt. Deshalb stellen Vektoren etwas ganz anderes dar als solche Größen, denen keine Richtung zu eigen ist und die man Skalare nennt. So sind z. B. Masse und Temperatur eines Körpers Skalare.

Stellt man die beiden Teilgeschwindigkeiten als Vektoren dar, so sieht man, daß die Gesamtgeschwindigkeit durch einfaches Aneinandersetzen der Teilvektoren entsteht (Bild 82). Die Richtung der Vektoren darf man dabei natürlich nicht ändern! Diesen grundlegend wichtigen Vorgang bezeichnet man kurz als **Addition von Vektoren:**

(32) **Vektoren werden addiert, indem man sie parallel zu sich selbst verschoben aneinandersetzt. Die Summe ist ein neuer Vektor, der vom Anfang des einen bis zum Ende des anderen zeigt (Diagonalvektor).**

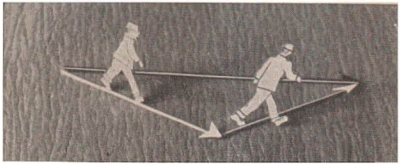


Bild 82. Addition zweier Vektoren

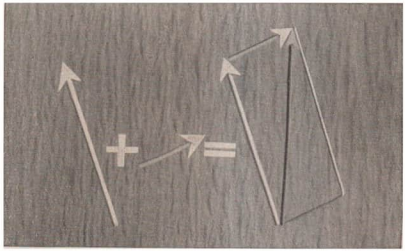


Bild 83. Geometrische Addition

Wie wir auf S. 24 sahen, ist auch die Kraft ein Vektor. Das Parallelogramm der Kräfte ist daher ein besonders wichtiges Beispiel des allgemeinen Gesetzes der Addition von Vektoren.

Man bezeichnet Vektoren mit deutschen Buchstaben und schreibt die Addition:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

In dieser Schreibweise, von der in diesem Buch der Einfachheit halber kein Gebrauch gemacht wird, ist aber nicht die algebraische Addition von Zahlenwerten zum Ausdruck gebracht, sondern die geometrische Addition, d. h. Aneinandersetzung von Pfeilen.

Eine derartige Aufgabe kann man rechnerisch, noch einfacher aber grafisch (durch Anfertigung einer maßstäblichen Skizze) lösen.

Beispiel: Eine Motorfähre überquert mit der Eigengeschwindigkeit 3 m/s in rechtwinkliger Richtung einen Fluß. Das Wasser strömt mit 3,8 m/s. Unter welchem Winkel wird die Fähre abgetrieben, und welche Gesamtgeschwindigkeit besitzt sie? –
Man zeichne maßstäblich (etwa 1 cm $\hat{=}$ 1 m/s) das Parallelogramm der Bewegungen, das in diesem Fall ein Rechteck wird. Durch Abmessen der Diagonalen findet man $v = 4{,}84$ m/s sowie die Winkel 38,3° bzw. 51,7°.

4.32 Der Wurf

4.321 Der senkrechte Wurf

Wird ein Körper senkrecht nach unten geworfen, so überlagern sich zwei Geschwindigkeiten. Die ihm erteilte Anfangsgeschwindigkeit v_0 behält er während des ganzen folgenden Vorganges unverändert bei. Dazu kommt noch die jeweilige Fallgeschwindigkeit $v = g\,t$ (Erdbeschleunigung · Fallzeit). Zu einem bestimmten Zeitpunkt t nach dem Abwurf besteht dann die

(33) **Endgeschwindigkeit:** $\boxed{v = v_0 \pm g\,t}$

(Das Minuszeichen gilt beim Wurf nach oben.)

Ebenso ist die durchmessene gesamte Fallhöhe h gleich der Summe der beiden Einzelwege, wie auch nach Formel (26):

(34) **Gesamtweg:** $$\boxed{h = v_0 t \pm \frac{g}{2} t^2}$$

(Das Minuszeichen gilt beim Wurf nach oben.)
Erweitert man diese Gleichung mit dem Faktor 2, so erhält man

$$2h = 2v_0 t + g t^2.$$

Quadriert man die erste Gleichung (33), so ergibt sich

$$v^2 = v_0^2 + 2v_0 g t + g^2 t^2 \quad \text{oder} \quad v^2 = v_0^2 + g(2v_0 t + g t^2).$$

Man sieht also, daß der Klammerausdruck gleich $2h$ ist, und findet damit die

(35) **Endgeschwindigkeit** bei gegebener Fallhöhe: $$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 \pm 2gh}}$$

(Das Minuszeichen gilt beim Wurf nach oben.)

Beim senkrechten Wurf nach oben wird die Endgeschwindigkeit v mit zunehmender Steighöhe immer kleiner. Schließlich wird eine bestimmte Höhe h erreicht, wo der Körper umkehrt und wieder nach unten zu fallen beginnt. In diesem Augenblick ist die Endgeschwindigkeit $v = 0$. Die letzte Gleichung lautet dann: $0 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$.

Quadriert man und löst nach v_0 auf, so ergibt sich diejenige Anfangsgeschwindigkeit, die notwendig ist, damit der Körper gerade die Höhe h erreicht:

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

Um die Höhe h zu erreichen, muß ein Körper mit derselben Geschwindigkeit abgeworfen werden, mit welcher er beim freien Fall aus dieser Höhe unten ankommt.

Zur Berechnung der Steighöhe muß man die letzte Formel nach h auflösen:

(36) **Steighöhe:** $$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$$

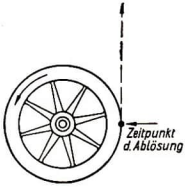


Bild 84. Ablösen eines Teiles des Schwungradkranzes

Beispiel: Bei einem Unfall löst sich ein Teil des Schwungradkranzes von 18 cm Durchmesser bei einer Drehzahl von 3600¹/min (Bild 84). Wie hoch fliegt das Bruchstück? –

Man hat zunächst die Umfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{0{,}18\,\text{m} \cdot \pi \cdot 3600}{60\,\text{s}} = 34\,\text{m/s}\,.$$

Das ergibt dann die theoretische Wurfhöhe $h = \dfrac{34^2\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81\,\text{m}} = 59\,\text{m}\,.$

4.322 Der waagerechte Wurf

Wenn ein Körper in horizontaler Richtung geworfen wird, führt er gleichzeitig 2 Bewegungen aus. Die eine ist ihm durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 aufgeprägt, mit der er freigegeben wird. Die andere wird ihm durch die Fallbewegung erteilt, der er wie jeder andere, nicht unterstützte Körper unterworfen ist. Dadurch kommt eine zusammengesetzte Bewegung zustande. Nach der 1. Sekunde (Bild 85) hat er die horizontale Strecke v_0 zurückgelegt und ist gleichzeitig um das Stück s_1 gefallen. Nach dem Parallelogrammsatz muß er dann bei Punkt 1 angelangt sein. Nach einer weiteren Sekunde hat er insgesamt den horizontalen Weg $2v_0$ und die Fallstrecke s_2 durchflogen und muß dann den Punkt 2 erreicht haben. So fortfahrend, findet man eine Bahnkurve, die sich mit zunehmender Entfernung vom Ausgangspunkt immer mehr nach unten neigt: eine **Parabel.**

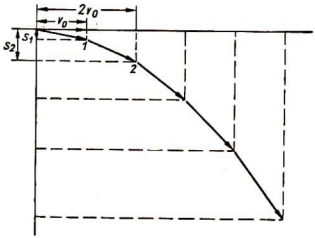


Bild 85. Parabel beim horizontalen Wurf

Läßt man von 2 Körpern den einen im selben Augenblick fallen, in dem der andere horizontal abgeworfen wird, so treffen beide im gleichen Moment auf den Boden: ein Nachweis des Prinzips der ungestörten Überlagerung von Bewegungen (Bild 86).

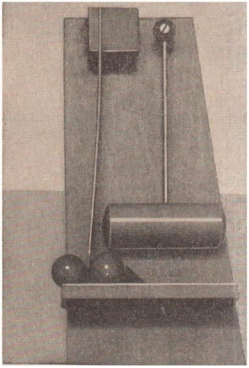


Bild 86. Die linke Kugel wird beim Anschlag des Hammers waagerecht abgeworfen, die rechte fällt (hier durch die Blattfeder noch festgeklemmt) durch ein Loch nach unten. Beide Kugeln erreichen den Boden gleichzeitig

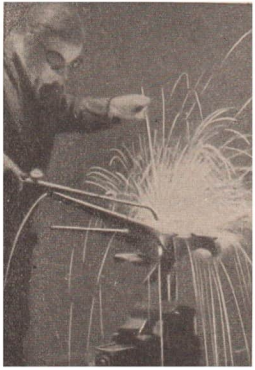


Bild 87
Fliegende Funken beschreiben Wurfparabeln

4.323 Der schräge Wurf

Beim schrägen Wurf nach oben beschreibt der Körper ebenfalls eine **Wurfparabel.** An schief in die Höhe geschickten Wasserstrahlen ist diese Kurve sehr schön zu sehen. Die Parabel ist, wenn man vom Luftwiderstand absieht, symmetrisch gestaltet (Bild 87).

Zur Berechnung der Einzelheiten muß man die schräge Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach dem Parallelogrammsatz in eine horizontale und vertikale Teilgeschwindigkeit zerlegen (Bild 88). Erstere ist $v_0 \cos \alpha$, letztere $v_0 \sin \alpha$. Da beide unabhängig voneinander betrachtet werden können, ist die Wurfhöhe entsprechend (36):

(37) **Wurfhöhe:** $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

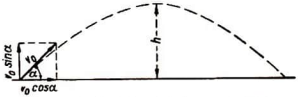


Bild 88. Wurf schräg aufwärts. v_0 = Anfangsgeschwindigkeit in Wurfrichtung

Die Zeitdauer des ganzen Wurfs setzt sich aus dem Anstieg und dem Wiederherabfallen zusammen. Sie ist also gleich der doppelten Fallzeit aus der Höhe h. Setzt man den eben berechneten Wert in Formel (27) ein und multipliziert mit 2, so erhält man die

(38) **Wurfzeit:** $t = \dfrac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$.

In dieser Zeit legt der Körper eine Strecke von $s = tv$, d. h. $tv_0 \cos \alpha$ zurück. Setzt man für t die Wurfzeit ein, so ergibt sich die

(39) **Wurfweite:** $s = \dfrac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$.

Diese ist am größten, wenn der Körper unter einem Winkel von 45° abgeworfen wird; denn $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, und der größte Wert, den ein Sinus annehmen kann, ist 1. Das ergibt einen größtmöglichen Winkel von $2\alpha = 90°$ oder $\alpha = 45°$:

Da nun $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ist die größte Wurfweite $s_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$.

Jede kleinere Wurfweite kann also entweder durch einen flacheren oder steileren Wurf erzielt werden.

4.4 Die Drehbewegung

4.41 Die gleichförmige Drehbewegung

Man kann auch hier wieder gleichförmige (z. B. Schwungrad einer Dampfmaschine) und beschleunigte Drehvorgänge (z. B. eine abwärtsrollende Kugel) unterscheiden. Um eine Drehbewegung zu beurteilen, wird man zunächst die Zahl der Umdrehungen z für eine bestimmte Zeitdauer t bestimmen (Bild 89). Dann versteht man unter der

Drehzahl: $\boxed{n = \dfrac{z}{t}}$

Weiterhin ist in vielen Fällen die **Umfangsgeschwindigkeit** (Bahngeschwindigkeit) v bedeutsam; das ist der Weg, den ein Punkt des Umfangs in 1 Sekunde zurücklegt.

Der Umfang des Drehkreises ist nun $2\pi r$ (r Radius) oder πd (d Durchmesser). Da dieser Weg in der gegebenen Zeit n-mal zurückgelegt wird, ergibt sich:

(40) **Umfangsgeschwindigkeit:** (Bahngeschwindigkeit) $\boxed{v = 2\pi r n}$ oder $\boxed{v = \pi d n}$

Die Umfangsgeschwindigkeit nimmt also bei festliegender Drehzahl mit dem Durchmesser zu.
Das ist von großer Bedeutung beim Antrieb von Maschinen, deren Drehzahl nach Wunsch geändert werden soll. Man legt den Treibriemen, dessen Umfangsgeschwindigkeit von der Drehzahl des Motors bestimmt ist, auf eine Antriebsscheibe von anderem Durchmesser. Die Drehzahl der Maschine ändert sich dann (Bild 90).

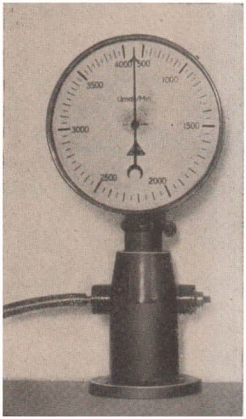


Bild 89. Drehzahlmesser

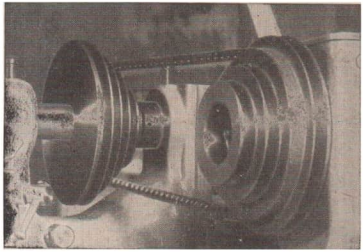


Bild 90. Veränderung der Drehzahl durch Stufenscheiben

Da der Riemen fest auf beiden Radumläufen haftet, ist deren Umfangsgeschwindigkeit v gleich groß. Es besteht daher die Gleichheit

$$\pi d_1 n_1 = \pi d_2 n_2 .$$

Hierbei kürzt sich auf beiden Seiten π heraus, und es ergibt sich

$$n_1 : n_2 = d_2 : d_1 .$$

Die Drehzahlen zweier durch Riemen verbundener Räder verhalten sich umgekehrt wie deren Durchmesser.

Beispiele: 1. Der Durchmesser des Schwungrades eines Motorrades sei $d = 15$ cm und derjenige der Welle 10 mm. Welches sind die Umfangsgeschwindigkeiten bei einer Drehzahl von $n = 2000$ 1/min? –
Da man die Geschwindigkeit v üblicherweise in m/s angibt, ist die Drehzahl n auf die Sekunde zu beziehen, indem man ihren Zahlenwert durch 60 dividiert.

Man hat also

$$v_1 = \frac{0{,}15\,\mathrm{m} \cdot 3{,}14 \cdot 2000}{60\,\mathrm{s}} = 15{,}7\,\mathrm{m/s}$$

$$v_2 = \frac{0{,}01\,\mathrm{m} \cdot 3{,}14 \cdot 2000}{60\,\mathrm{s}} = 1{,}05\,\mathrm{m/s}\,.$$

2. Die Schnittgeschwindigkeit beim Drehen eines Werkstückes sei 50 m/min. Der Durchmesser betrage 80 mm. Die Drehzahl n ist zu berechnen. –

Durch Auflösung von (40) nach n entsteht $n = \frac{v}{d\,\pi}$, so daß

$$n = \frac{50\,\mathrm{m}}{0{,}08\,\mathrm{m} \cdot 3{,}14\,\mathrm{min}} = 199\ {}^1/\mathrm{min}\,.$$

Bild 91. Schnittgeschwindigkeit = Umfangsgeschwindigkeit des Werkstückes

3. Bei einem **Kollergang** laufen zwei schwere Walzen im Kreise um eine senkrechte Achse und zerdrücken durch ihr Gewicht das Mahlgut. Bei dieser erzwungenen Bewegung ist die Umfangsgeschwindigkeit v des der Antriebswelle zugekehrten Teils der Walzen größer und die des abgekehrten Teils kleiner als die Laufgeschwindigkeit v' am Boden (Bild 92). Daher wird das Mahlgut zugleich **zerrieben**.

4. Wieviel Umdrehungen je Minute macht ein Fahrraddynamo bei einer Fahrgeschwindigkeit von 24 km/h, wenn der Durchmesser des An-

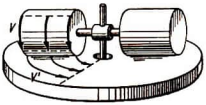


Bild 92. Umfangs- (v) und Laufgeschwindigkeit (v') beim Kollergang

triebsrädchens 2,5 cm beträgt? – Wenn man annimmt, daß das Rädchen am äußersten Umfang des Vorderrades anliegt, ist seine Umfangsgeschwindigkeit gleich der Fahrgeschwindigkeit und daher

$$n = \frac{24\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s} \cdot 0{,}025\,\mathrm{m} \cdot \pi} = 84{,}88\ {}^1/\mathrm{s} = 5093\ {}^1/\mathrm{min}\,.$$

In vielen Fällen rechnet man nicht mit der Drehzahl, sondern mit der **Winkelgeschwindigkeit** (Bild 93). Entsprechend der geradlinigen Bewegung $\left(v = \frac{\mathrm{Weg}}{\mathrm{Zeit}}\right)$ setzt

man hier $\omega = \frac{\text{Drehwinkel}}{\text{Zeit}} = \frac{\alpha}{t}$. Dabei muß man aber den Winkel α nicht in Gradmaß, sondern in **Bogenmaß** einsetzen.

Um Verwechslungen mit dem Gradmaß zu vermeiden, wird dieses oft mit der Bezeichnung **rad** (Radiant) versehen.

In einem Kreis vom Radius 1 (Einheitskreis) ist dann:

Gradmaß	Bogenmaß
360°	$2\pi = 6{,}28$
180°	$\pi = 3{,}14$
90°	$\pi/2 = 1{,}57$
57,3°	1
1°	0,01745
usw.	

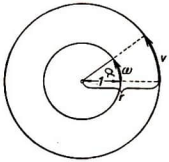


Bild 93
Winkelgeschwindigkeit
(die Pfeile deuten nur die Wege der Bahnpunkte an)

(41) **Winkelgeschwindigkeit:** (sprich: omega) $\boxed{\omega = \frac{\alpha}{t}}$

Wenn bei einer vollen Umdrehung der Winkel 2π zurückgelegt wird, ergibt sich somit bei z Umdrehungen der Gesamtwinkel $\alpha = z \cdot 2\pi$. Es ist damit die

(42) **Anzahl der Umdrehungen:** $\boxed{z = \frac{\alpha}{2\pi}}$

Da ferner die Drehzahl n die je Zeiteinheit stattfindenden Umdrehungen darstellt, ist der je Zeiteinheit überstrichene Drehwinkel $2\pi n$ gleich der Winkelgeschwindigkeit:

(43) **Winkelgeschwindigkeit:** $\boxed{\omega = 2\pi n}$

Um hieraus die Bahngeschwindigkeit zu berechnen, braucht man nur noch mit dem Radius zu multiplizieren, d. h., für einen rotierenden Körper (z. B. eine Kreisscheibe) haben alle Punkte gleiche Winkelgeschwindigkeit, aber verschiedene Bahngeschwindigkeiten. Wie man auch durch Vergleich von Formel (43) mit (40) finden kann, ist daher

(44) $\boxed{v = r\omega}$ $\boxed{\omega = \frac{v}{r}}$

Man soll aber auch daran denken, daß eine Drehbewegung nicht immer gleichförmig zu sein braucht. Der in dem sehr kurzen Zeitabschnitt Δt zurückgelegte Drehwinkel $\Delta\alpha$ kann dann in jedem Augenblick einen anderen Wert haben. Mit Rücksicht darauf erhält man analog zu Formel (17) die

(45) **allgemeine Definition der Winkelgeschwindigkeit:** $\boxed{\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}$

Beispiele: 1. Die Drehzahl eines Motors beträgt $n = 3000\,^1/\text{min}$. Dann ist nach (43)

$$\omega = \frac{2\,\pi\,3000}{60\,\text{s}} = 314\ ^1/\text{s}\,.$$

2. Mißt in Beispiel 1 der Durchmesser der Welle $d = 16$ mm, so ist deren Umfangsgeschwindigkeit

$$v = 0{,}008\ \text{m} \cdot 314\ ^1/\text{s} = 2{,}51\ \text{m/s}\,.$$

3. Was bedeutet $\omega = 1\ ^1/\text{s}$? – Für $\omega = 1\ ^1/\text{s}$ berechnet sich nach (43)

$$n = \frac{60\,\text{s} \cdot 1}{2 \cdot \pi\,\text{s}\,\text{min}} = 9{,}55\ ^1/\text{min},$$

d. h. rund 10 Umdrehungen je Minute.

4. Die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Erde beträgt 360° in 24 Stunden oder

$$\omega = \frac{2\,\pi}{86400\,\text{s}} = 0{,}000073\ ^1/\text{s}\,.$$

4.42 Die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

Beobachtet man das Schwungrad eines anlaufenden Motors, so sieht man, wie sich seine Drehzahl immer mehr steigert. Es führt eine **beschleunigte Drehbewegung** aus (Bild 94). Wenn dagegen eine angestoßene Billardkugel ihren Lauf allmählich verlangsamt, liegt eine **verzögerte Drehbewegung** vor.

Entsprechend der Beschleunigung b bei der fortschreitenden Bewegung rechnet man hier mit der Winkelbeschleunigung ε (sprich: epsilon). Diese ist die Zu- bzw. Abnahme der Winkelgeschwindigkeit in 1 Sekunde. Man hat dann dieselben Formeln wie für die geradlinige Bewegung, nur muß man die der Kreisbewegung entsprechenden Zeichen einsetzen.

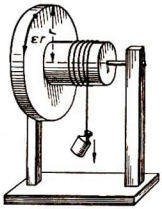


Bild 94. Gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung, hervorgerufen durch ein Fallgewicht

So ergibt sich z. B. in Anlehnung an Formel (18) die

(46) **allgemeine Definition der Winkelbeschleunigung:** $\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$

Jeder Punkt des rotierenden Körpers beschreibt dabei eine beschleunigt durchlaufene Kreisbahn. Entsprechend zu Formel (44) erhält man die

(47) **Bahnbeschleunigung:** $\boxed{b = r\,\varepsilon}$

Beginnt bzw. endet die beschleunigte Drehbewegung in der Ruhelage, so gilt analog zu Formel (19)

(48) **Winkelbeschleunigung der gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung:** $\boxed{\varepsilon = \frac{\omega}{t}}$

Der während des gesamten Vorganges **zurückgelegte Drehwinkel (Winkelweg)** ist bei gleichförmiger Drehbewegung nach Formel (41) $\alpha = \omega t$. Da diese aber jetzt beschleunigt ist, wächst die Winkelgeschwindigkeit vom Wert 0 auf den Endbetrag ω an, hat also den Durchschnittswert $\omega/2$, so daß $\alpha = \frac{\omega}{2} t$. Setzt man aus Formel (48) $\omega = \varepsilon t$ ein, so ergibt sich:

(49) **Gesamter Drehwinkel:** $$\boxed{\alpha = \frac{\varepsilon}{2} t^2 = \frac{\omega}{2} t}$$

Wie man sieht, entsteht diese Formel aus derjenigen für die geradlinige Bewegung, wenn man in (21) für s die Größe α und für b die Größe ε einsetzt.
Schließlich läßt sich auch der gesamte Drehwinkel berechnen, wenn die Bewegung mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit ω_0 beginnt. Unter entsprechendem Austausch der Formelzeichen erhält man aus (24) die

(50) **allgemeine Gleichung der gleichmäßig beschleunigten bzw. verzögerten Drehbewegung:** $$\boxed{\alpha = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon}{2} t^2}$$

Vergleich zwischen geradliniger und Drehbewegung

geradlinige Bewegung		Drehbewegung	
Größe	Formel	Größe	Formel
Weg (gleichförmig)	$s = v t$	Drehwinkel (gleichförmig)	$\alpha = \omega t$
Weg (beschleunigt)	$s = \frac{b}{2} t^2$	Drehwinkel (beschleunigt)	$\alpha = \frac{\varepsilon}{2} t^2$
Geschwindigkeit	$v = \Delta s/\Delta t$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \Delta \alpha/\Delta t$
Beschleunigung	$b = \Delta v/\Delta t$	Winkelbeschleunigung	$\varepsilon = \Delta \omega/\Delta t$
allgemeine Gleichung	$s = v_0 t \pm \frac{b}{2} t^2$	allgemeine Gleichung	$\alpha = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon}{2} t^2$

Beispiele: 1. Welche Winkelbeschleunigung ε besitzt ein Rad, das vom Stillstand aus innerhalb von 3 min eine Drehzahl von $n = 2500\,^1/\text{min}$ erreicht? –

$$\omega = \frac{2\,\pi\,2500}{60\text{ s}} = 261{,}8\ ^1/\text{s}; \qquad \varepsilon = \frac{261{,}8}{\text{s}\ 180\text{ s}} = 1{,}45\ ^1/\text{s}^2\,.$$

2. Ein Schwungrad von 0,5 m Durchmesser und anfänglich 500 Umdrehungen je Minute läuft in 15 s bis zum Stillstand aus. Wieviel Umdrehungen finden noch statt, und welches ist die Verzögerung am Radumfang? –

Der anfänglichen Drehzahl entspricht eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \frac{2\,\pi\,500}{60\text{ s}} = 52{,}3\ ^1/\text{s}$ und nach (48) eine Winkelverzögerung von $\varepsilon = \frac{52{,}3}{\text{s}\cdot 15\text{ s}} = 3{,}5\ ^1/\text{s}^2$. Die Zahl der noch erfolgenden Umdrehungen ist gleich dem gesamten Winkelweg α, dividiert durch $2\,\pi$, d. h. $z = \frac{52{,}3\cdot 15\text{ s}}{\text{s}\cdot 2\cdot 2\cdot \pi} = 62{,}5$. Die Verzögerung am Umfang ist $b = \varepsilon\cdot r = \frac{3{,}5\cdot 0{,}25\text{ m}}{\text{s}^2} = 0{,}88\text{ m/s}^2$.

5 Die Lehre von den bewegten Massen (Dynamik)

5.01 Die Trägheit der Masse

5.011 Das Trägheitsgesetz

Alle Körper bestehen aus irgendwelchen Substanzen, die chemisch durchaus verschieden sein und deren Moleküle verschiedenen Aufbau haben können. Sieht man aber von allen Unterschieden ab, so bleibt allein ihre **Masse.** Je dichter die Moleküle eines Körpers gepackt sind, desto größer ist seine Dichte.

Eine wichtige und alltäglich zu beobachtende Erscheinung aller Masse ist die **Trägheit** (oder das Beharrungsvermögen). Ein Körper bleibt so lange an seinem Ort ruhig liegen, bis er durch einen äußeren Anstoß in Bewegung gebracht wird. Und ein bewegter Körper bleibt so lange in geradlinig gleichförmiger Bewegung, bis irgendwelche Kräfte diesen Zustand ändern. Fehlen solche Kräfte, so gilt das

Bild 95. Isaac Newton (1643···1727)

(51) **Trägheitsgesetz:** (1. Newtonsches Bewegungsgesetz) **Ein Körper bleibt so lange im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung, als keine Kräfte auf ihn einwirken.**

Beispiele: 1. Wenn die Anziehungskraft der Erde und der Luftwiderstand nicht vorhanden wären, würde ein geschleuderter Stein geradeswegs in den Weltenraum fliegen und bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s nach etwa 15 Monaten auf dem Mond ankommen.

2. Beim plötzlichen Bremsen eines Zuges fallen schlecht gestaute Koffer vom Gepäcknetz, weil die Koffer ihre ursprüngliche Bewegung beibehalten haben.

3. Ein Eisenbahnwaggon läßt sich nur allmählich in Gang bringen. Seine Trägheit muß erst überwunden werden.

4. Wenn eine Billardkugel von selbst zum Stillstand kommt, sind äußere Kräfte, wie Luftwiderstand und Reibung, die Ursache.

5. Tragen 2 Personen einen großen Kessel mit Flüssigkeit, so bleibt diese bei allen Drehungen und Wendungen des Gefäßes in ihrer alten Lage. Bei plötzlichem Anhalten des gefüllten Kessels schwappt der Inhalt über.

5.012 Das Grundgesetz der Dynamik

Sobald eine Kraft auf einen Körper einwirkt, gerät er in gleichförmig beschleunigte Bewegung. Diese Beschleunigung hält genauso lange an, wie die Kraft einwirkt. Befindet sich der Körper bereits in Bewegung und wirkt die Kraft der Bewegung entgegen, so wird diese verzögert.

Kraft ist die Ursache der Beschleunigung (oder Verzögerung) eines Körpers.

Die Erfahrung lehrt nun, daß sich ein Körper um so leichter beschleunigen läßt, je kleiner seine Masse m ist, und daß die benötigte Kraft um so größer ist, je stärker man ihn beschleunigen will. Daraus ergibt sich das von Galilei entdeckte

Grundgesetz der Dynamik: Kraft = Masse · Beschleunigung

(52) (2. Newtonsches Bewegungsgesetz) $\boxed{P = m\,b}$

Auch das Gewicht G eines Körpers stellt eine Kraft dar; läßt man ihn los, so bewegt er sich, frei fallend, mit der gleichbleibenden Beschleunigung g (Abschn. 4.13). Folglich gilt das Grundgesetz in der Schreibweise:

(53) **Gewicht = Masse · Erdbeschleunigung** $\boxed{G = m\,g}$

Aus dem Newtonschen Grundgesetz folgt zwangsläufig, daß die **Kraft** eine **abgeleitete Größe** ist, und zwar abgeleitet aus den beiden Grundgrößen Masse und Beschleunigung. Gegenüber der primär gegebenen Masse m hat die Kraft P sekundären Charakter.[1]) Daraus folgt, daß auch die Maßeinheit für die Kraft P gegenüber der Grundeinheit für die Masse m, dem kg, eine abgeleitete Einheit sein muß. Wie schon auf S. 20 erwähnt, ist die

Einheit der Kraft: 1 Newton (1 N) = 1 kgm/s²

Der großen Bedeutung wegen sei hier die Definition des Newton und seine Umrechnung in das Kilopond nochmals wiederholt:

1 Newton ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² erteilt.

$$\boxed{1\,\mathrm{N} = \frac{1}{9{,}80665}\,\mathrm{kp}; \quad 1\,\mathrm{kp} = 9{,}80665\,\mathrm{N}}$$

Berechnungen, in denen die Masse m vorkommt, werden also nur dann richtig, wenn man die zugehörige Kraft in N einsetzt. Erhält man das N als Ergebnis, so kann dieses durch nachträgliche Division mit dem Umrechnungsfaktor 9,81 in kp umgerechnet werden.

Beispiele: 1. Welche Zugkraft ist erforderlich, wenn ein Triebwagen von 80 t mit einer Beschleunigung von 50 cm/s² anfahren soll? –

$$P = \frac{80\,000\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 40\,000\ \mathrm{kgm/s^2\,(N)} = 4\,080\,\mathrm{kp}\,.$$

[1]) Bis zum Inkrafttreten der Verordnung über die physikalisch-technischen Einheiten vom 14. 8. 1958 war es im Rahmen des „technischen Maßsystems" weitgehend Brauch, die Kraft als primäre Größe in kp einzusetzen und die Masse gemäß der Beziehung $m = \frac{G}{g}$ als abgeleitete Größe zu behandeln. Hierbei ergab sich für die der Kraft von 1 kp entsprechende Masse $m = \frac{1\,\mathrm{kp\,s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m}} = \frac{1}{9{,}81}\,\mathrm{kp\,s^2/m}$. Die Masse von 1 kp s²/m wurde demzufolge als 1 TME (1 Technische Masseneinheit) bezeichnet.

2. Zur Bestätigung des Grundgesetzes wird folgender Versuch durchgeführt: Über eine leicht bewegliche Rolle R (Bild 96) läuft ein Faden mit beiderseits 400 p. Ein kleines Zusatzgewicht von 2 p gleicht die Reibung aus, und weitere 10 p bringen eine allmählich zunehmende Bewegung der Gewichte hervor. Ein an einem Pendel schwingender Pinsel P zeichnet je Sekunde eine Strichmarke auf den nachgezogenen Papierstreifen S. Die Ausmessung der Marken ergibt, daß tatsächlich eine beschleunigte Bewegung vorliegt. Die Beschleunigung errechnet sich aus (52), indem man die wirkende Kraft P von 10 p in N umrechnet, was $0{,}01 \cdot 9{,}81 = 0{,}0981\ \mathrm{kgm/s^2}$ ergibt. Die bewegte Masse ist $m = 0{,}812$ kg und

$$b = \frac{P}{m} = \frac{0{,}0981\ \mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2\, 0{,}812\ \mathrm{kg}} = 0{,}12\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

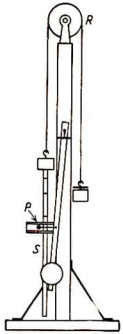


Bild 96. Zur Bestätigung des Grundgesetzes der Dynamik

3. Ein Mann stemmt sich mit einer Kraft von 50 kp gegen einen Lastwagen von 3 t. Welche Beschleunigung erfährt der Wagen, wenn die Reibung außer acht gelassen wird? –
Mit der gegebenen Kraft von $P = 50 \cdot 9{,}81 = 490{,}5\ \mathrm{kgm/s^2}$ wird

$$b = \frac{P}{m} = \frac{490{,}5\ \mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2\, 3000\ \mathrm{kg}} = 0{,}16\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

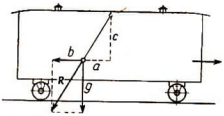


Bild 97. Lot im beschleunigten Wagen

4. Wie kann man mittels eines aufgehängten Lotes die Beschleunigung eines bewegten Fahrzeuges messen? – Das Gewicht wirkt mit der vertikalen Kraft mg. Infolge seiner Trägheit wird es andererseits mit der Kraft mb nach rückwärts abgelenkt. Das Pendel stellt sich dann in Richtung der Resultierenden b_R ein (Bild 97). Aus der Proportion $a : c = b : g$ läßt sich b berechnen.

5.02 Arbeit und Leistung

5.021 Die Arbeit

Ob es sich um ein ziehendes Pferd, einen treibenden Motor oder eine Schmiedepresse handelt: überall wird Arbeit verrichtet. Es kommt aber darauf an, ein Maß zu finden, mit dem man, unabhängig vom jeweiligen Charakter des Vorganges, die Arbeit messen kann. Bei näherer Betrachtung ergibt sich, daß in allen Fällen mit Hilfe einer Kraft ein Weg zurückgelegt wird. Ruhende Kräfte können niemals Arbeit leisten! Für die Berechnung der Arbeit gilt zunächst grundsätzlich:

(54) **Arbeit = Kraft in Richtung des Weges · Weg** $\boxed{A = Ps}$

Hieraus folgt zwangsläufig die

Maßeinheit der Arbeit: 1 Joule (1 J) = 1 kgm²/s²

Die Arbeit 1 Newtonmeter (1 Nm) oder 1 Joule (sprich: schul) wird verrichtet, wenn mit der Kraft 1 N ein Weg von 1 m zurückgelegt wird.

Verwendet man als Krafteinheit das Kilopond, so erhält man das **Kilopondmeter (kpm):** **Die Arbeit 1 Kilopondmeter (1 kpm) wird verrichtet, wenn mit der Kraft 1 kp ein Weg von 1 m zurückgelegt wird.**

Für Umrechnungszwecke merke man sich:

$$1\,\mathrm{J} = \frac{1}{9{,}80665}\,\mathrm{kpm}; \qquad 1\,\mathrm{kpm} = 9{,}80665\,\mathrm{J}$$

Soll beispielsweise ein Fahrzeug vorwärts bewegt werden, so darf man nicht etwa mit dem Gewicht rechnen (dieses wird ja von der Straße getragen), sondern mit der Zugkraft, die mit dem zurückgelegten Weg zu multiplizieren ist (Bild 98). Diese Zugkraft kann mittels eines Kraftmessers, der zwischen Wagen und Pferd eingespannt wird, gemessen werden. Es zeigt sich dann, daß die Zugkraft viel kleiner als das Gewicht des Wagens ist. Ihre Größe hängt vor allem von der Reibung ab, die bei der Vorwärtsbewegung des Wagens zu überwinden ist.

Bild 98. Arbeit beim Ziehen eines Wagens

Das Produkt Ps aus Kraft und Weg kann aber nur dann sofort berechnet werden, wenn die Kraft P entlang des Weges s gleich groß (konstant) bleibt. Wenn das nicht der Fall ist, muß man mit der mittleren Kraft rechnen (s. Beispiel 3).

Am einfachsten berechnet sich die zum Heben von Lasten u. dgl. erforderliche Arbeit, da die hierbei aufzuwendende Kraft gleich dem Gewicht G des Körpers und der Weg gleich dem entsprechenden Höhenunterschied h ist:

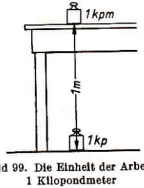


Bild 99. Die Einheit der Arbeit: 1 Kilopondmeter

(55) **Hubarbeit = Gewicht · Höhe** $\boxed{A = G\,h = mgh}$

Beispiele: 1. Um 50 m³ Wasser auf eine Höhe von 6 m zu pumpen, benötigt man 50 000 kp · 6 m = 300 000 kpm.

2. Eine Presse drückt mit 250 kp einen glühenden Stahlzylinder um 3 cm zusammen. Die aufgewandte Arbeit beträgt 250 kp · 0,03 m = = 7,5 kpm.

3. Welche Arbeit ist aufzuwenden, wenn eine Schraubenfeder um 12 cm ausgedehnt werden soll? Je cm Dehnung benötige man 2 kp Zugkraft (Bild 100). –

Man stellt den Dehnungsvorgang hier am besten grafisch dar. Man sieht, wie die erforderliche Zugkraft P nicht konstant ist, sondern vom Wert 0 bis zu 24 kp gleichmäßig zunimmt. Für P ist daher nicht der Endwert 24 kp, sondern der Mittelwert 12 kp einzusetzen.

$$A = \frac{P}{2} \cdot s = \frac{24\,\mathrm{kp}}{2} \cdot 0{,}12\,\mathrm{m} = 1{,}44\,\mathrm{kpm}.$$

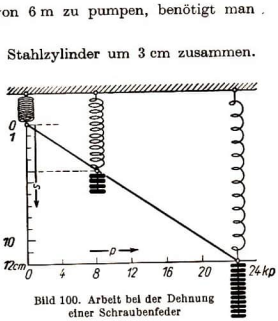


Bild 100. Arbeit bei der Dehnung einer Schraubenfeder

5.022 Die goldene Regel der Mechanik

Zum Heben und Fortbewegen schwerer Lasten benutzt man die **einfachen Maschinen.** Außer der behandelten schiefen Ebene, dem Keil und dem Hebel gehören hierzu auch die Rollen und Flaschenzüge.

Die von einer solchen Vorrichtung abgegebene Arbeit kann niemals größer sein als diejenige, die zu ihrem Antrieb aufgewendet werden muß. Im Gegenteil, infolge der stets vorhandenen Reibung geht ein Teil der in die Maschine hineingesteckten Arbeit verloren, so daß die gewonnene Arbeit immer kleiner ist als die zum Betrieb aufgewendete Arbeit. Arbeit ist aber das Produkt aus Kraft und Weg. Es ist demnach möglich, eine bestimmte Arbeit bei geringem Kraftaufwand zu verrichten, wenn man einen entsprechend größeren Weg zurücklegt. Deshalb gilt für alle einfachen Maschinen die

goldene Regel der Mechanik: Was man an Kraft spart, muß man an Weg zusetzen.

Mit einem Hebel kann man zwar bei sehr kleinem Kraftaufwand sehr große Lasten bewegen. Jedoch muß die am längeren Hebelarm wirkende Kraft einen sehr großen Weg zurücklegen, während die Last sich nur um ein kleines Stück bewegt. Das Produkt aus Kraft und Weg ist auf beiden Seiten des Hebels gleich groß.

Dies gilt auch für die Rollen und Flaschenzüge.

1. Feste Rolle (Bild 101). Da beim Heben der Last Q die Kraft P den gleichen Weg zurücklegen und die gelieferte Arbeit gleich der aufgewandten sein muß, ergibt sich ohne weiteres als Gleichgewichtsbedingung:

$$\text{Kraft} = \text{Last} \quad \text{bzw.} \quad P = Q.$$

2. Lose Rolle (Bild 102). Wenn sich die Last um 1 m hebt, muß die Kraft einen Weg von 2 m zurücklegen. Hinsichtlich der Arbeiten gilt demnach: $2\,P = 1\,Q$, d. h., die Kraft ist im Fall des Gleichgewichts gleich der halben Last:

$$P = \frac{Q}{2}.$$

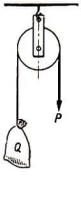


Bild 101
Feste Rolle

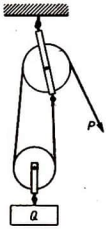


Bild 102
Lose Rolle

Bei einer genauen Berechnung muß man noch das Eigengewicht der losen Rolle sowie die Reibung berücksichtigen.

3. Flaschenzug. Mehrere nach Art von Bild 103 verbundene Rollen nennt man einen Flaschenzug. Enthält die untere und obere Flasche je 3 Rollen, so verteilt sich die Last Q auf 6 Seile. Die Kraft P beträgt demnach, wenn insgesamt n Rollen eingebaut sind, im Gleichgewicht:

$$P = \frac{Q}{n}.$$

4. Differentialflaschenzug (Bild 104). 2 Kettenräder, über die eine endlose Kette läuft, sind auf gemeinsamer Achse drehbar miteinander verbunden. Die Last Q liefert

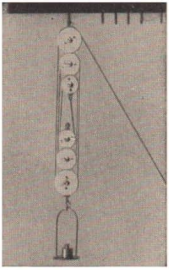


Bild 103
Flaschenzug mit 6 Rollen

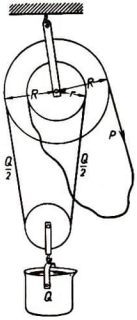


Bild 104
Differentialflaschenzug

Bild 105
Elektrozug

ein linksdrehendes Moment von $\frac{Q}{2}(R-r)$, während das Moment der Kraft gleich PR ist. Demnach gilt im Gleichgewicht:

$$P = \frac{Q(R-r)}{2R}.$$

Hieraus sieht man, daß die benötigte Kraft um so kleiner ist, je kleiner die Differenz der beiden Radien R und r wird.

5. Flaschenzüge mit Zahnradgetrieben (Bild 105). Bei vielen modernen Hebezeugen erfolgt der Antrieb unter Zwischenschaltung von Schnecken- und Zahnradgetrieben. Häufig wird ein Antriebsmotor direkt damit verbunden. Aber auch hier gilt der Energiesatz: Am Motorritzel wirkt nur eine geringe Kraft; dafür muß sein Umfang wegen der erforderlichen hohen Drehzahl einen entsprechend großen Weg zurücklegen.

5.023 Die Leistung

Bei der Berechnung der Arbeit spielt die benötigte Zeit keine Rolle. Für die Bewertung einer Arbeit ist es jedoch nicht gleichgültig, in welcher Zeit sie verrichtet wird. Für diesen Zweck berechnet man die **Leistung:**

Unter der Leistung versteht man den Quotienten aus der Arbeit und derjenigen Zeit, in der diese verrichtet wurde.

Man muß also die Arbeit noch durch die in Sekunden bemessene Zeit dividieren:

$$\textbf{Leistung} = \frac{\textbf{Arbeit}}{\textbf{Zeit}}$$

(56) $$\boxed{N = \frac{A}{t}}$$

Beim Einsetzen der Maßeinheiten für P [kgm/s²], s [m] und t [s] erhält man die

Maßeinheit der Leistung: 1 Watt (1 W) = 1 kgm²/s³

Geht man dagegen vom kp aus, so erhält man als Maßeinheit der Leistung **1 kpm/s.** Unter 1 kpm/s stellt man sich am einfachsten die Leistung vor, die vollbracht wird, wenn ein Gewicht von 1 kp innerhalb einer Sekunde um 1 m gehoben wird. Dagegen ist die von James Watt eingeführte **Pferdestärke** (PS) keine gesetzliche Einheit mehr, darf aber bis auf weiteres noch benutzt werden.

Umrechnung der Leistungseinheiten:

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s} = 1\,\mathrm{Nm/s} = \frac{1}{9{,}80665}\,\mathrm{kpm/s}$$

$$1\,\mathrm{kpm/s} = 9{,}80665\,\mathrm{W};\quad 1\,\mathrm{PS} = 75\,\mathrm{kpm/s}$$

$$1\,\mathrm{PS} = 735{,}5\,\mathrm{W}\ (\text{genau}: 735{,}499\,\mathrm{W});\quad 1\,\mathrm{kW} = 1{,}36\,\mathrm{PS}$$

Beispiele: 1. 50 m³ Wasser innerhalb von 3 min auf eine Höhe von 6 m zu pumpen, erfordert ohne Berücksichtigung der Verluste die Leistung

$$N = \frac{50\,000\,\mathrm{kp}\cdot 6\,\mathrm{m}}{180\,\mathrm{s}} = 1\,667\,\mathrm{kpm/s} = 170\,\mathrm{W}.$$

2. Ein 80 kp schwerer Mann eilt in 6 s eine 8 m hohe Treppe empor. Dann ist seine Leistung $\frac{80\,\mathrm{kp}\cdot 8\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{s}} =$ 106,7 kp m/s = 1,4 PS. Bei athletischen Übungen werden mitunter noch höhere Leistungen erzielt.

3. Aus einem Staubecken in 80 m Höhe fließen je Minute 100 m³ Wasser durch eine Turbine (Bild 106). Die theoretische Leistung beträgt

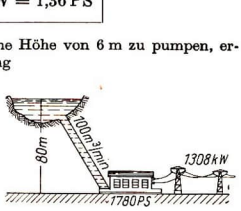


Bild 106. Leistung einer talwärts fließenden Wassermenge (bei vollständiger, d. h. verlustloser Ausnutzung!)

$$N = \frac{80\,\mathrm{m}\cdot 100\,000\,\mathrm{kp}}{60\,\mathrm{s}} = 133\,333\,\mathrm{kpm/s} = 1780\,\mathrm{PS} = 1308\,\mathrm{kW}.$$

5.024 Arbeit und Leistung bei der Beschleunigung von Massen

Um die zu beschleunigende Masse m vorwärtszubewegen, muß man mit der Kraft P stets einen bestimmten Weg zurücklegen. Die hierzu erforderliche Arbeit ist nach (54) $A = P\cdot s$ bzw. nach (55) $A = m\,b\,s$. Da hier von einer aus der Ruhelage beginnenden beschleunigten Bewegung die Rede ist, kann man nach (23) $s = \frac{v}{2}\,t$ einsetzen und erhält schließlich mit $b = \frac{v}{t}$ den Ausdruck $A = m\,\frac{v}{t}\cdot\frac{v}{2}\,t$ oder die

(57) **Beschleunigungsarbeit:** $$\boxed{A = \frac{m}{2}\,v^2}$$

Hierbei ist zunächst von allen Bewegungswiderständen, wie Reibung, Luftwiderstand usw. abgesehen. Formel (57) stellt also nur die Arbeit dar, die zur Überwindung der Massenträgheit notwendig ist.

Fragt man nach der zur Beschleunigung der Masse m erforderlichen Leistung, so erhält man nach (56) $N = \frac{A}{t} = \frac{P s}{t}$, wofür man kurz schreibt:

(58) **Leistung einer Kraft:** $\boxed{N = P v}$

Hieraus ist erkennbar, daß die aufzuwendende Leistung mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer wird. Es ist ja auch bekannt, daß z. B. die begrenzte Leistung eines Mopeds nicht ausreicht, um etwa die Geschwindigkeit 100 km/h zu erzielen.

Beispiele: 1. Welche Arbeit haben die Pulvergase eines Gewehres aufzuwenden, um dem 20 g schweren Geschoß die Endgeschwindigkeit 800 m/s zu erteilen? –

$$A = \frac{0{,}02\ \text{kg}\ 800^2\ \text{m}^2}{2\ \text{s}^2} = 6\,400\ \text{kgm}^2/\text{s}^2\ (\text{J}) = 653\ \text{kpm}\,.$$

2. Über welche Leistung muß ein Kraftwagen von 1000 kg verfügen, wenn er innerhalb von 50 s die Endgeschwindigkeit 90 km/h erreichen soll und die Bewegungswiderstände nicht berücksichtigt werden? –

Die Beschleunigung ist $b = \frac{90\ \text{m}}{3{,}6\ \text{s} \cdot 50\ \text{s}} = 0{,}5\ \text{m/s}^2$, so daß die Endleistung

$$N = m\,b\,v = \frac{1000\ \text{kg}\ 0{,}5\ \text{m}\ 90\ \text{m}}{\text{s}^2\ 3{,}6\ \text{s}} = 12\,500\ \text{kgm}^2/\text{s}^3\ (\text{W}) = 17\ \text{PS}\,.$$

5.025 Die Leistung bei der Drehbewegung

Die zuletzt genannte Formel (58) $N = P\,v$ gilt jedoch nicht nur bei der Beschleunigung von Massen, sondern in allen Fällen, bei denen sich der Angriffspunkt einer Kraft P mit der Geschwindigkeit v verschiebt. Um das deutlicher zu machen, denken wir z. B. an die am Umfang eines Rades wirksame Bremskraft. Die Formel (58) hat dann die Bedeutung

Bremsleistung = Bremskraft · Umfangsgeschwindigkeit

Um die Leistung von Kraftmaschinen zu messen, bedient man sich mit Vorteil des Bremszaumes (Pronyscher Zaum, Bild 107). Auf der Welle der Maschine wird eine Graugußscheibe festgekeilt. Gegen diese drücken sich zwei Bremsbacken mit einem daran befestigten Hebel. Läßt man die Maschine laufen, so wird die Reibung zwischen Scheibe und Bremsbacken bestrebt sein, den Zaum mitzunehmen. Damit das nicht geschieht, wird das Hebelende so lange mit Gewichten belastet, bis der Zaum zwischen den Anschlägen (A) in der Schwebe bleibt. Durch Anziehen der Schrauben (S) und wechselnde Belastung kann die gewünschte Drehzahl der Maschine hergestellt werden.

Im Gleichgewicht gilt bei gewichtslos gedachtem Hebel:

$$G\,l = P\,r\,,$$

Bild 107. Pronyscher Zaum

woraus sich die am Umfang der Bremsscheibe wirkende Reibungskraft P berechnen läßt. Gemäß (58) ist dann die Leistung der Maschine

$$N = \frac{G\,l\,v}{r}\,.$$

Beispiel: Wieviel PS muß der Antriebsmotor einer Drehmaschine leisten, wenn das Werkstück von 250 mm Durchmesser eine Drehzahl von 75[1]/min hat und die Schnittkraft des Drehmeißels 1250 kp beträgt? –
Die Schnittkraft ist $P = 1250 \cdot 9{,}81 = 12263$ kg m/s² und die Umfangsgeschwindigkeit nach (40) $v = \frac{0{,}25\,\text{m}\;3{,}14 \cdot 75}{60\,\text{s}} = 0{,}982$ m/s. Demnach ist die Leistung

$$N = \frac{12263\,\text{kgm} \cdot 0{,}982\,\text{m}}{\text{s}^2\,\text{s}} = 12039\,\text{kgm}^2/\text{s}^3\,(\text{W}) = 16{,}4\,\text{PS}\,.$$

5.026 Der Wirkungsgrad

Selbst bei den einfachsten Maschinen geht ein Teil der aufgewandten Arbeit durch die stets vorhandene Reibung verloren. Schon das um eine Rolle laufende Seil besitzt einen gewissen Biegungswiderstand. Dazu kommt noch die Lagerreibung der Rolle selbst, die sich bei Verwendung mehrerer Rollen entsprechend summiert.
So kommt es, daß z. B. bei der festen Rolle die Beziehung $P = Q$ niemals genau zutrifft. Die aufzuwendende Kraft P ist vielmehr immer größer als Q, so daß $P > Q$. Damit ist das Verhältnis $\frac{Q}{P} < 1$. Man nennt dies das **Güteverhältnis** oder den **Wirkungsgrad** η, der demnach bei jeder mechanischen Kraftübertragung kleiner als 1 sein muß.
Der Wirkungsgrad wird vielfach in Prozenten angegeben und beträgt bei Flaschenzügen grober Bauart etwa 75 % je Rolle, bei sorgfältigster mechanischer Ausführung nahezu 100 %.
Da man bei Maschinen und Motoren meist von der Leistung ausgeht, gilt für den

$$\textbf{Wirkungsgrad} = \frac{\textbf{abgegebene Leistung}}{\textbf{zugeführte Leistung}}$$

(59) **Wirkungsgrad:** (sprich: eta) $\boxed{\eta = \frac{N_a}{N_z}}$

Bei Antriebsmaschinen (Dampf- und Verbrennungskraftmaschinen usw.) versteht man unter dem Wirkungsgrad

(60) $\boxed{\eta = \frac{N_e}{N_i}}$

Hierbei bedeutet N_e die **effektive Leistung,** die z. B. mittels des Pronyschen Zaumes (S. 68) an der Antriebswelle gemessen wird (Bremsleistung), und N_i die **indizierte Leistung,** die sich aus dem Kolbenquerschnitt, dem Hub, dem Druckverlauf und der Drehzahl berechnen läßt.

Beispiele: 1. Welcher Wirkungsgrad ergibt sich für die auf Bild 102 angegebene lose Rolle, wenn für eine einzelne Rolle $\eta = 80\,\%$? – Die erste Rolle liefert 80 % Nutzarbeit, die zweite hiervon wieder 80 %, so daß $\eta_{ges} = \eta^2 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$ oder 64 %.

2. Eine Druckpumpe fördert mit einem Wirkungsgrad von 75 % je Minute 120 m³ Wasser auf eine Höhe von 8 m. Wieviel Watt nimmt der Antriebsmotor auf, wenn er seinerseits mit einem Wirkungsgrad von 95 % arbeitet? –
Die von der Pumpe abgegebene Leistung beträgt $N_a = \frac{120\,000\,\text{kp} \cdot 8\,\text{m}}{60\,\text{s}} = 16\,000\,\text{kpm/s}$ oder nach S. 67 $16\,000 \cdot 9{,}81\,\text{W} = 156{,}96\,\text{kW}$, so daß $N_z = \frac{156{,}96\,\text{kW}}{0{,}75} = 209{,}3\,\text{kW}$. Der Motor nimmt dann $\frac{209{,}3\,\text{kW}}{0{,}95} = 220{,}3\,\text{kW}$ auf.

5.027 Die CGS-Einheiten

Obwohl die Grundeinheiten des heutigen Maßsystems (kg, m, s) schon seit langem festliegen, hatte sich in der vergangenen Zeit nebenher ein auf den Grundeinheiten **Zentimeter** (cm), **Gramm** (g) und **Sekunde** (s) basierendes Maßsystem eingebürgert. Dieses sogenannte **CGS-System** mag vielleicht bei der Berechnung relativ kleiner Kräfte und anderer Größen gewisse Vorzüge haben. Doch geht das allgemeine Bestreben dahin, die CGS-Einheiten nach Möglichkeit durch die Einheiten des praktischen Maßsystems zu ersetzen. Da sie aber in der physikalisch-technischen Literatur noch oft verwendet werden, seien die wichtigsten im folgenden mit aufgeführt.

Größe	Formelzeichen	Maßeinheit		Umrechnung
		CGS-Einheit	praktische Einheit	
Geschwindigkeit	v	cm/s	m/s	
Beschleunigung	b	cm/s²	m/s²	
Masse	m	g	kg	
Kraft	P	gcm/s² = dyn	kgm/s² = N (Newton)	10⁵ dyn = 1/N
Arbeit	A	gcm²/s² = erg	kgm²/s² = J (Joule)	10⁷ erg = 1 J
Leistung	N	gcm²/s³ = erg/s	kgm²/s³ = W (Watt)	10⁷ erg/s = 1 W
Druck	p	dyn/cm² = μbar	N/m²	10 dyn/cm² = 1 N/m²

Durch Vergleich der entsprechenden Einheiten findet man z. B. leicht die Bedeutung der Krafteinheit dyn:

1 dyn ist die Kraft, die der Masse 1 g die Beschleunigung 1 cm/s² erteilt.

Für Umrechnungszwecke verwendet man folgende Beziehungen:

$$\boxed{\begin{aligned} 1\,\text{p} &= 981\,\text{dyn};\ 1\,\text{dyn} = {}^1/_{981}\,\text{p} \\ 1\,\text{kp} &= 981\,000\,\text{dyn};\ (\text{genau } 980\,665\,\text{dyn}) \\ 1\,\text{kpm} &= 9{,}81 \cdot 10^7\,\text{erg} \end{aligned}}$$

Beispiele: 1. Berechne das Beispiel 1 auf Seite 68 in CGS-Einheiten und mache die Probe auf die Richtigkeit des Ergebnisses! –
Die Masse des Geschosses ist mit 20 g und die Geschwindigkeit mit $8 \cdot 10^4$ cm/s einzusetzen, womit

$$A = \frac{20\,\text{g}\,(8 \cdot 10^4)\,\text{cm}^2}{2\,\text{s}^2} = 64 \cdot 10^9\,\text{g cm}^2/\text{s}^2\,(\text{erg}) = 653\,\text{kpm}\,.$$

2. Berechne das Beispiel 2 auf Seite 68 in CGS-Einheiten. –
Die Beschleunigung ist 50 cm/s², die Geschwindigkeit 2500 cm/s und die Masse 10^6 g, womit

$$N = \frac{10^6\,\mathrm{g}\;50\,\mathrm{cm}\;2500\,\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}} = 1{,}25 \cdot 10^{11}\,\mathrm{g\,cm^2/s^3\,(erg/s)} = 1{,}25 \cdot 10^4\,\mathrm{W} = 17\,\mathrm{PS}\,.$$

5.03 Die mechanische Energie

5.031 Potentielle und kinetische Energie

Um einen Gegenstand hochzuheben, muß man Arbeit leisten. Sie berechnet sich nach (55) als Produkt aus Gewicht und Höhe. Nun besteht aber die Möglichkeit, daß der gehobene Körper wieder herunterfällt. Die gesamte beim Heben aufgewandte Arbeit wird dann wieder frei und kann nutzbar verwertet werden.
Vor dem Herunterfallen war die Arbeit in ruhender Form aufbewahrt. Man nennt solchermaßen gespeicherte Arbeit **potentielle Energie** (Lagenenergie).

Energie ist die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten.

Jeder Körper besitzt derartige Energie, sofern für ihn die Möglichkeit besteht, vermöge der Erdanziehung tiefer zu gelangen. So ist in den zahlreichen Steinen eines Hauses die gesamte beim Ziegeltragen aufgewandte Arbeit in Form potentieller Energie aufgespeichert. Hochgelegene Wassermassen in Gebirgsseen enthalten große Vorräte an potentieller Energie, die sich besonders bequem nutzbar machen lassen.

(61) **Potentielle Energie:** $\boxed{E_{\mathrm{pot}} = G\,h = m\,g\,h}$

Während des Herunterfallens besitzt der Körper infolge seiner Bewegung eine andere Energieform: die **kinetische Energie** (Bewegungsenergie, Wucht). Zweifellos hängt sie von der Masse und der Geschwindigkeit des bewegten Körpers ab.
Um sie zu berechnen, ist zu bedenken, daß auch die Bewegungsenergie eine Arbeit darstellt; denn um einen Körper in Bewegung zu setzen, muß man ihn mit einer bestimmten Kraft P um eine gewisse Strecke s verschieben. Er wird dabei aus der Ruhelage beschleunigt, bis er eine bestimmte Endgeschwindigkeit v erreicht hat. Hierbei muß sich zwangsläufig derselbe Ausdruck ergeben, den wir in Formel (57) für die Beschleunigungsarbeit gefunden haben.

Jede in Bewegung befindliche Masse enthält kinetische Energie.

(62) **Kinetische Energie:** $\boxed{E_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2}\,v^2}$

Beispiele: 1. Welche kinetische Energie besitzt ein Kraftwagen von 800 kg Masse bei 72 km/h Geschwindigkeit? –

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{800\,\mathrm{kg} \cdot 20^2\,\mathrm{m}^2}{2\,\mathrm{s}^2} = 160000\,\mathrm{kgm^2/s^2\,(J)} = 16320\,\mathrm{kpm}$$

2. Ein Rammbär von 50 kg fällt aus einer Höhe von 1,80 m. Berechne potentielle und kinetische Energie! –

$$E_{\mathrm{pot}} = m\,g\,h = \frac{50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 1{,}8\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 882{,}9\,\mathrm{kgm^2/s^2\,(J)}$$

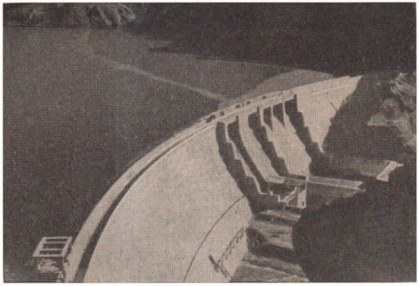


Bild 108. Potentielle Energie eines Staubeckens

Setzt man nach (28) $v^2 = 2\,gh$, so wird $E_{\text{kin}} = \dfrac{m \cdot 2\,gh}{2} = mgh = G\,h$. Das bedeutet: Die beim freien Fall frei werdende kinetische Energie ist gleich der potentiellen Energie vor dem Herabfallen!

5.032 Das Gesetz von der Erhaltung der Energie

Das Ergebnis des letzten Beispiels kann nur im ersten Augenblick überraschen; denn man kann nach aller Erfahrung nicht erwarten, daß ein Rammbär mehr Arbeit verrichtet, als man vorher in ihn hineingesteckt hat. Wenn das möglich wäre, könnte man ja mit der gewonnenen Energie den Klotz wieder auf die alte Höhe heben, zusätzlich noch eine Maschine antreiben, und dies noch beliebig lange! Daß dies im Prinzip unmöglich ist, beweisen die zahlreichen mißlungenen Versuche, ein **Perpetuum mobile** zu bauen, d. h. eine Vorrichtung, welche sich von selbst, ohne äußere Energiezufuhr fortdauernd bewegt und sogar noch Arbeit nach außen abgibt. Vielmehr gilt als eines der obersten Naturgesetze das

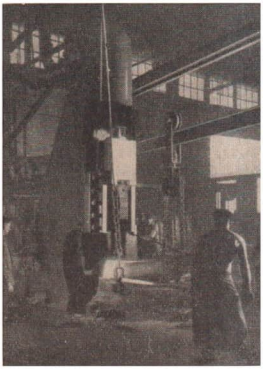


Bild 109. Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie beim Schmiedehammer

(63) **Gesetz von der Erhaltung der Energie** (in voller Allgemeingültigkeit aufgestellt von Robert Mayer 1842):

Energie kann weder verschwinden noch von selbst entstehen, sie kann nur ihre Form ändern.
Die Gesamtsumme der Energie bleibt stets konstant.

Betrachten wir als weiteren Fall ein schwingendes Pendel (Bild 111). Im höchsten Punkt

seiner Bewegung besitzt das Gewicht nur potentielle und, wenn es durch seine tiefste Lage schwingt, nur kinetische Energie. In den Zwischenlagen liegen beide Energiearten gleichzeitig vor. Doch muß ihre Gesamtsumme immer konstant bleiben. Es findet hier selbsttätig eine fortwährende periodische Energieumwandlung statt. Die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage berechnet sich durch Gleichsetzen der potentiellen und kinetischen Energie:

$$\frac{m v^2}{2} = m g h, \text{ wonach } v = \sqrt{2 g h}.$$

Bild 110. Robert Mayer (1814···1878)

Dies ist aber nach Formel (28) die Endgeschwindigkeit beim freien Fall aus der Höhe h. Eine einfache Überlegung zeigt, daß überhaupt allgemein die Endgeschwindigkeit eines von selbst nach unten eilenden Körpers nur von dem Höhenunterschied abhängt, nicht aber von der Form der durchlaufenen Bahn und auch nicht von der Größe seiner Masse.

Alle diese Betrachtungen setzen selbstverständlich voraus, daß keine Energieverluste durch Reibung usw. entstehen, die sich allerdings niemals vermeiden lassen.

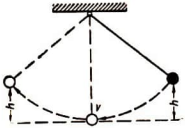


Bild 111. Energieumwandlung bei einem schwingenden Pendel

Das Pendel wird auf diese Weise im Laufe der Zeit zum Stillstand kommen.

Beispiele: 1. Aus welcher Höhe müßte ein Kraftwagen herabrollen, wenn seine Endgeschwindigkeit $v = 80$ km/h sein soll? – Nach dem Energiesatz ist $mgh = \frac{m v^2}{2}$, woraus

$$h = \frac{v^2}{2 g} \text{ und } h = \frac{80^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^2}{3{,}6^2 \cdot \text{s}^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \text{ m}} = 25{,}1 \text{ m}.$$

Die Neigung der Bahn ist belanglos, das Gewicht des Wagens spielt keine Rolle.

2. Ein Radfahrer rollt aus 25 m Höhe eine steile Straße hinab. Welche Endgeschwindigkeit erreicht er? – Die anfänglich vorhandene potentielle Energie wandelt sich in kinetische Energie um, so daß, wie bereits abgeleitet, $mgh = \frac{m}{2} v^2$ und hieraus $v = \sqrt{2gh}$ oder in Zahlen $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \, 25 \text{ m}} = 22{,}1$ m/s. In beiden Beispielen ist der Einfachheit halber von der Reibung abgesehen worden.

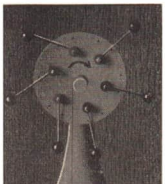


Bild 112
Vorschlag eines Perpetuum mobile

3. Ein Perpetuum mobile soll nach Ansicht seines Erfinders folgendermaßen arbeiten (Bild 112): 6 Gewichte sind an einer drehbaren Kreisscheibe derart angebracht, daß sie beim Übergang auf die rechte Hälfte um ein Gelenk umklappen und dadurch an einem längeren Hebelarm als auf der linken Seite wirken. Beim Übergang auf die linke Seite knicken die Hebel von selbst ein, so daß hier alle Hebelarme kürzer werden. Also müßte sich das Rad von selbst immer schneller rechtsum drehen. Wo liegt der Fehler des Erfinders?

5.04 Die Reibung

Der exakte Ablauf der mechanischen Gesetze wird meistens durch die **Reibung** beeinträchtigt. Anstatt sich frei zu bewegen, bleiben die Körper an ihren Berührungsstellen aneinander hängen und haften, es entstehen Widerstände gegen die Bewegung. Die Hauptursache ist die unebene Oberfläche der Körper. Bei mikroskopischer Betrachtung erweisen sich selbst mit großer Sorgfalt bearbeitete Oberflächen noch rauh und zerklüftet. Die Reibung äußert sich als eine der Bewegung entgegengerichtete Kraft.

Die Reibungskraft ist stets parallel zur berührenden Oberfläche gerichtet.

5.041 Die Haftreibung

Bei dem Versuch, einen auf einer Unterlage ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, macht sich zunächst die **Haftreibung** geltend. Man kann folgenden Versuch anstellen: Ein Holzklotz steht auf dem Tisch. Mittels Fadens und angehängten Gewichtes wird eine seitliche Zugkraft ausgeübt (Bild 113). Man belastet so lange weiter, bis der Klotz zu rutschen beginnt. In diesem Augenblick ist die Haftreibung R entgegengesetzt gleich der Zugkraft P. Stellt man beispielsweise fest, daß bei einem Gewicht des Körpers $G = 500$ p die erforderliche Kraft $R = 400$ p beträgt, so kann man schreiben: $R = 0{,}8\,G$. Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn man bei einem zweiten Versuch den Klotz auf die schmale Seite stellt:

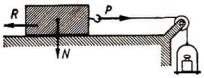


Bild 113
Bestimmung der Reibungskraft R

Die Reibungskraft ist bei gleichem Gewicht von der Größe der berührenden Oberflächen unabhängig. Sie hängt nur von der Natur der einander berührenden Oberflächen ab.[1])

Statt des Gewichtes spricht man besser von der senkrecht zur Oberfläche gerichteten Kraft (Normalkraft) N, welche die Reibung hervorruft. Da ferner der Zahlenfaktor (vorhin 0,8) je nach dem gewählten Material verschieden ist, bezeichnet man diesen allgemein als **Reibungszahl** μ, so daß die

Reibungskraft = Reibungszahl · Normalkraft

(64) **Coulombsches Reibungsgesetz:**

$$\boxed{R = \mu N}$$

Auf einfache Weise bestimmt man μ dadurch, daß man eine

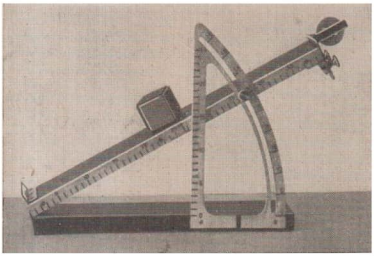


Bild 114. Bestimmung der Haftreibungszahl

[1]) Genauere Untersuchungen zeigen allerdings, daß die Reibung vom Anpreßdruck, von der Geschwindigkeit und anderen Faktoren abhängt.

schiefe Ebene (Bild 114) so lange neigt, bis der daraufgestellte Probekörper abzugleiten beginnt.
Dies geschieht bei demjenigen Neigungswinkel α, für den Hangabtrieb und Normalkraft gleich groß werden. Man nennt ihn auch den **Reibungswinkel** α.

Die Normalkraft ist nach (10) $P_2 = G\,\frac{b}{l} = G \cos \alpha$,

der Hangabtrieb ist nach (9) $P_1 = G\,\frac{h}{l} = G \sin \alpha$. Demnach ist

$$\text{Reibungskraft} = \text{Hangabtrieb}$$

$$\mu\, G \cos \alpha = G \sin \alpha$$

(65) $$\boxed{\mu = \tan \alpha}$$

5.042 Gleit- und Rollreibung

Die Reibung ist erheblich **kleiner,** wenn der Körper gleitet. Um die **Gleitreibung** zu messen, stellt man den gleichen Versuch wie vorhin an. Durch leichtes Beklopfen der Unterlage beseitigt man jedoch das Anhaften und belastet so lange, bis der Körper in gleichförmige Bewegung gerät. Während dieser besteht ebenfalls Gleichgewicht zwischen Zug- und Reibungskraft.
Noch viel kleiner wird die Reibung, wenn ein Körper auf seiner Unterlage rollt. Man spricht dann von der Rollreibung. Bei einem einfachen Wagenrad sind beide Reibungsvorgänge zu sehen: an der Achse Gleitreibung (Gleitlager!)[1]) und am Boden Rollreibung. Beide Vorgänge faßt man mit Hilfe der **Fahrwiderstandszahl** zusammen.

Ungefähre Haft- und Gleitreibungszahlen

Material	Haft-reibung	Gleitreibung trocken	Gleitreibung geschmiert	Gleitreibung mit Wasser
Stahl/Stahl	0,15	0,1	0,009	—
Stahl/Rotguß	0,18	0,16	0,01	—
Metall/Holz	0,6···0,5	0,5···0,2	0,08···0,02	0,25
Holz/Holz	0,65	0,4···0,2	0,16···0,04	0,25
Lederriemen/Grauguß	0,56	0,28	0,12	0,38
Eisen/Eis	—	—	—	0,014
gebremstes Auto auf Pflaster	—	0,5	—	0,2
desgl. auf Asphalt	—	0,3	—	0,15

Ungefähre Fahrwiderstandszahlen

Straßenbahn	0,006 (Rillenschienen)	Kraftwagen auf Pflaster	0,04
Eisenbahn	0,002	desgl. auf Asphalt	0,02
Fuhrwerk auf gutem Erdweg	0,05	Loren in Bergwerken	0,01
desgl. auf Asphalt	0,015		

Beispiele: 1. Wie lang wird die Schleifspur der Räder, wenn ein Auto von 10 m/s auf trockener Asphaltstraße plötzlich scharf abbremst (Bremsstrecke)? – Die kinetische

[1]) Wegen des immer vorhandenen Schmiermittels meistens Flüssigkeitsreibung.

Energie des Wagens setzt sich während des Bremsens in Reibungsarbeit um: $\frac{m}{2} v^2 = P s$, wobei die Reibungskraft $P = \mu G$ und s die Bremsstrecke ist.
Es ist demnach $\frac{m v^2}{2} = \mu m g s$ und

$$s = \frac{v^2}{2 g \mu} = \frac{100 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^2}{2 \cdot 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^2 \cdot 0{,}3} = 17 \text{ m}.$$

2. Welche Kraft ist aufzuwenden, um einen 15 Mp schweren Güterwagen in gleichförmiger Geschwindigkeit zu erhalten? –

$$R = 0{,}002 \cdot 15000 \text{ kp} = 30 \text{ kp}$$

3. Welche Geschwindigkeit erreicht ein auf schiefer Ebene (Holz) aus 0,8 m Höhe abgleitender Holzklotz (Anstieg 3:1)? – Die anfänglich vorhandene potentielle Energie Gh wird zum Teil von der Reibung aufgezehrt: $A = \mu P_2 l$, wobei nach (10) $P_2 = G \frac{b}{l}$. Die noch verbleibende Energie setzt sich in kinetische um: $Gh - \frac{\mu G b l}{l} = \frac{m}{2} v^2$ oder kürzer: $mg(h - \mu b) = \frac{m}{2} v^2$; $v = \sqrt{2g(h - \mu b)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 (0{,}8 - 0{,}4 \cdot 0{,}27) \text{ m}} = 3{,}68$ m/s.

4. Bei welcher Steigung einer Bahnstrecke beginnen die Räder einer 60 Mp schweren Lokomotive, die einen 800 Mp schweren Zug zieht, zu rutschen? – Hier kommt die Haftreibung (Stahl/Stahl 0,15) in Betracht. Es gilt:

Reibungskraft der Lokomotive = Hangabtrieb des ganzen Zuges (9),

wobei die Reibungskraft gleich dem μ-fachen der Normalkraft (10) ist, welche die Lokomotive allein gegen die Schienen ausübt. Für den Hangabtrieb kommt jedoch die gesamte Zuglast zur Geltung. Daher die Gleichung $\mu G_2 \frac{b}{l} = G_1 \frac{h}{l}$

$$\text{Anstieg} \approx \frac{h}{b} = \frac{\mu G_2}{G_1} = \frac{0{,}15 \cdot 60 \text{ Mp}}{860 \text{ Mp}} = 0{,}0105 \quad \text{oder} \quad 1:100.$$

5.05 Kräfte bei der gleichförmigen Drehbewegung

5.051 Die Radial- oder Zentralbeschleunigung

Beobachtet man die von einer Schleifscheibe wegsprühenden Funken, so sieht man, daß diese nicht etwa in radialer Richtung abgeschleudert werden, sondern in Richtung der Tangente wegfliegen. Wir sehen auf Bild 115 deutlich, daß die Geschwindigkeit aller Teilchen in jedem Augenblick die Richtung der an die Kreisbahn gelegten Tangente besitzt.
Deshalb stellen die Pfeile in Bild 93 gar nicht die Geschwindigkeitsvektoren dar. Es gibt keine gekrümmten Vektoren! Wenn man die Vektoren der Bahngeschwindigkeit für einige Bahnpunkte einzeichnet, erhält man Bild 116. Die Geschwindigkeit bleibt zwar ihrem Betrage nach gleich, aber ihre Richtung ändert sich stetig. Wie läßt sich diese Richtungsänderung rechnerisch erfassen?
Im Bild 116 sind für 2 kurz aufeinanderfolgende Bahnpunkte die Vektoren v_1 und v_2 noch einmal herausgezeichnet. Ihre Beträge sind gleich. Die Richtungsänderung

läßt sich nun dadurch herbeiführen, daß man einen kleinen Hilfsvektor Δv anfügt. Damit ist nach Seite 52 $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1 + \Delta \mathfrak{v}$. Ferner hat der in der kurzen Zeit Δt inzwischen zurückgelegte Kreisbogen AB die Länge $v \Delta t$. Man kann ihn bei kleinem Winkel α gleich der Bogensehne AB setzen. Dann sind die beiden schraffierten Dreiecke einander ähnlich, und es besteht die Proportion

$$\frac{v \Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad \text{oder umgeformt} \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

Bild 115 Funkengarbe am Schleifstein

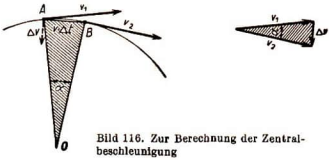


Bild 116. Zur Berechnung der Zentralbeschleunigung

Nach (18) stellt aber $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ eine Beschleunigung b dar, und diese ist wie der Hilfsvektor Δv nach dem Drehpunkt hin gerichtet. Δv ist in der Skizze allerdings nicht genau nach dem Drehzentrum gerichtet, weil hier der Deutlichkeit wegen der Winkel α sehr groß gezeichnet wurde. Wir sehen also: Wenn der betrachtete Massenpunkt auf der Kreisbahn bleiben soll, muß er nach dem Mittelpunkt O hin beschleunigt werden. Die Kreisbewegung ist für alle Massenpunkte des Umfangs nur eine erzwungene Bewegung. Als Ergebnis erhalten wir für die Größe der

(66) **Radial- oder Zentralbeschleunigung:** $\boxed{b_r = \frac{v^2}{r}}$ oder wegen $v = \omega r$

$$\boxed{b_r = \omega^2 r}$$

Die gleichförmige Kreisbewegung unterscheidet sich damit grundlegend von der gleichförmig geradlinigen Bewegung. Alle Teile eines Körpers müssen, wenn sie einer Kreisbewegung folgen sollen, nach dem Drehzentrum hin beschleunigt werden. Kurz:

Jede gleichförmige Drehbewegung enthält eine Beschleunigungskomponente.

Der hier betrachtete Fall der gleichförmigen Kreisbewegung stellt nur einen Sonderfall der allgemeinen krummlinigen Bewegung dar. Betrachten wir einen Massenpunkt, der eine beliebig gerichtete Beschleunigung erfährt, dann läßt sich die Geschwindigkeitsänderung $\Delta \mathfrak{v}$, die ja ein Vektor ist, nach Bild 117 in eine tangentiale

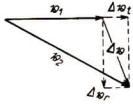


Bild 117

und radiale Komponente zerlegen. Diesen beiden Komponenten entsprechen zwei Beschleunigungen:

Tangentialbeschleunigung $b_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t}$

Radialbeschleunigung $b_r = \frac{\Delta v_r}{\Delta t}$,

so daß demnach die auf den Massenpunkt wirkende Beschleunigung den Betrag $b = \sqrt{b_t^2 + b_r^2}$ hat. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist offenbar $\Delta v_t = 0$ und Δv mit Δv_r identisch, so daß allein die radiale Beschleunigungskomponente b_r verbleibt.

Beispiele: 1. Die Trommel einer Zentrifuge macht 3000 Umdrehungen je Minute. Wie groß ist die Zentrifugalbeschleunigung b am Umfang der Trommel von 15 cm Radius? Vergleiche mit der Erdbeschleunigung! –

$b = r\omega^2$ oder in Zahlen

$$b = \frac{0{,}15\,\mathrm{m} \cdot 4\,\pi^2 \cdot 3000^2}{3600 \cdot \mathrm{s}^2} = 14800\,\mathrm{m/s^2}\,;$$

das ist das rund 1480fache der Erdbeschleunigung! Ultrazentrifugen gehen bis $n = 40000^1/\mathrm{min}$.

2. Welchen Einfluß hat die Erdumdrehung am Äquator ($r = 6378$ km) auf die Schwerebeschleunigung? – Nach dem Beispiel 4, S. 59, ist $\omega = 0{,}000073$ rad/s und damit

$$b = 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot 7{,}3^2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{rad/s^2} = 0{,}034\,\mathrm{m/s^2},\ \text{d.i.} \approx 3{,}4\,{}^0/_{00}\ \text{des Wertes von}\ g.$$

5.052 Die Fliehkraft

Bei der Umdrehung eines Körpers, besonders auffallend bei rascher Rotation, tritt eine Kraft in Erscheinung, deren eigentliches Wesen oft verkannt wird: die **Fliehkraft.** Wenn man beispielsweise an einer Schnur ein Gewicht im Kreise herumschleudert, entsteht die Empfindung einer nach außen ziehenden Kraft. Bei Materialfehlern in rasch umlaufenden Maschinenteilen führt die Fliehkraft zu gefährlichen Unfällen (Bild 118).

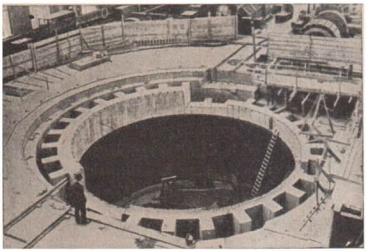


Bild 118. Schleudergrube zur Prüfung von Turbinenläufern

Zur Erklärung der Fliehkraft erinnern wir uns an den Abschn. 5.051. Dort hatten wir erkannt, daß jeder im Kreis bewegte Körper nach dem Mittelpunkt hin beschleunigt werden muß, wenn er **überhaupt auf der Kreisbahn bleiben soll. Es muß also eine** nach dem Drehzentrum hin gerichtete Kraft aufgewandt werden, um ihn auf der Kreisbahn zu halten. Da die Beschleunigung nach (66) den Betrag $b = \frac{v^2}{r}$ bzw.

$b = \omega^2 r$ hat, ergibt sich für die Masse m nach dem Grundgesetz (52) die

(67) **Zentripetalkraft:** $\boxed{Z = \frac{m v^2}{r}}$ bzw. $\boxed{Z = m \omega^2 r}$

Ihre Gegenkraft ist die **Flieh- oder Zentrifugalkraft.** Diese ist also nicht die wirkende Ursache, sondern nur die Folge des auf den Körper ausgeübten Zwangs.

Es ist übrigens nicht nötig, daß der Drehpunkt sichtbar vorhanden ist. Auch beim Durchlaufen irgendeiner Kurve, d. h. bei jeder Richtungsänderung, tritt die Fliehkraft auf. Zu ihrer Berechnung muß man den Krümmungsradius kennen.

Wie die Formel (67) lehrt, steigt die Fliehkraft mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Bei der 10fachen Drehzahl wird die Fliehkraft 100mal größer. Dabei kann man die Schwerkraft mit Leichtigkeit weit übertreffen. Die Technik macht von der Fliehkraft vielfachen Gebrauch. Beim Fliehkraftregler der Dampfmaschine streben zwei rotierende Gewichte nach außen und heben sich gleichzeitig nach oben. Dabei drosselt eine Hebelübertragung die Dampfzufuhr zur Maschine, wodurch die Drehzahl herabgesetzt wird und die Gewichte sich wieder senken usw. Zentrifugen dienen zur Entwässerung von Textilien, Kohle und anderen Industriegütern sowie zur Trennung verschieden schwerer Flüssigkeiten (Bilder 119, 120). Der Staubabscheider zur Reinigung von Luft, Gasen und Dämpfen zwingt das angesaugte Gas durch ein System von Kanälen zu Kreisbewegungen, wodurch alle Staubteilchen nach außen geschleudert werden (Bild 121). An der Wand anprallend, fallen sie dann zu Boden und sammeln sich dort.

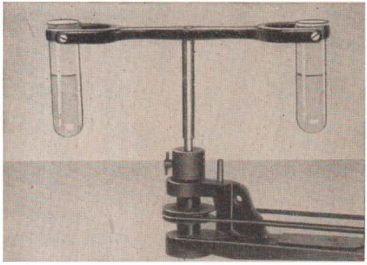


Bild 119. Modell einer Zentrifuge

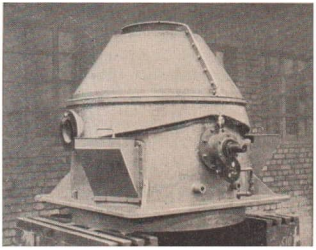
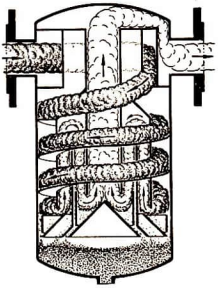


Bild 120. Zentrifuge zur Entwässerung von Feinkohle. Leistung 50···80 t/h bei $n = 250\,^1/\text{min}$

Beispiele: 1. Welche Fliehkraft entwickelt eine schwere Kugel von 2 kg, die mit einer Drehzahl von $n = 300\,^1/\text{min}$ an einer 2 m langen Kette waagerecht im Kreis herum-

geschwungen wird? – Es ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi \cdot 300}{60\,\mathrm{s}} = 31{,}4\ \mathrm{rad/s}$ und somit $Z = \frac{2\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 31{,}4^2}{\mathrm{s}^2} = 3948\ \mathrm{kg\,m/s^2\ (N)} = 402{,}4\ \mathrm{kp}$.



2. Bei welcher Drehzahl zerreißt die Kette im Beispiel 1, wenn sie eine Belastung von $P = 850$ kp aushält? – Wenn die Kette reißt, ist die Fliehkraft gleich der Zugfestigkeit, so daß $P = m\,r\,\omega^2$, wonach

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{m\,r}}\,.$$

Mit $P = 8338{,}5\ \mathrm{kgm/s^2}$ wird

$$\omega = \sqrt{\frac{8338{,}5\ \mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\mathrm{m}}} = 45{,}66\ \mathrm{rad/s}$$

und $$n = \frac{60 \cdot 45{,}66}{\mathrm{s} \cdot 2} = 436\ ^1/\mathrm{min}\,.$$

Bild 121. Schema eines Staubabscheiders

5.053 Fliehkraft und Schwerkraft

Im Bereiche der Erdanziehung wirken Flieh- und Schwerkraft zusammen. Zwar ist die Entstehungsursache der beiden Kräfte grundverschieden, in ihrer Wirkung aber sind sie insofern gleich, als beide den von ihnen erfaßten Körper beschleunigen. Wenn Fliehkraft und Schwerkraft in gleicher Richtung wirken, addieren sie sich. Bei entgegengesetzter Richtung ist die eine Kraft von der anderen zu subtrahieren, und bei beliebiger Richtung ist das Parallelogramm der Kräfte anzuwenden.

Beispiele: 1. Wie groß ist die maximale Belastung der in Bild 122 gezeigten Bahn, wenn die herabrollende Walze 5 kp wiegt? – Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt 0 ist nach (28)[1]) $v = \sqrt{2\,g\,h}$, so daß $v^2 = 2\,g\,h$ und die Fliehkraft nach Formel (67)

$$Z = \frac{G}{g\,r} \cdot 2\,g\,h = \frac{2\,G\,h}{r}$$

oder

$$Z = \frac{2 \cdot 5\ \mathrm{kp} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m}}{0{,}8\ \mathrm{m}} = 6{,}33\ \mathrm{kp}\,.$$

Im tiefsten Punkt 0 beträgt die Belastung demnach 11,33 kp.

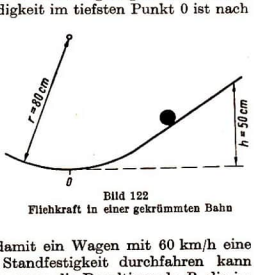


Bild 122
Fliehkraft in einer gekrümmten Bahn

2. Welche Schräglage muß das Bahnprofil haben, damit ein Wagen mit 60 km/h eine Kurve von 200 m Krümmungsradius in voller Standfestigkeit durchfahren kann (Bild 123)? – Fliehkraft und Schwerkraft bilden zusammen die Resultierende R, die im

[1]) Bei Vernachlässigung des Trägheitsmomentes (s. 5.061).

Schwerpunkt des Wagens angreift. Bei voller Standfestigkeit muß R senkrecht auf dem Bahnprofil stehen, so daß dann $h : b$ (= tan α) als

$$\frac{m v^2}{r} : m g = \frac{v^2}{r g}$$

oder in Zahlen:

$$\tan \alpha = \frac{60^2 \, \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^2}{3{,}6^2 \cdot \mathrm{s}^2 \cdot 200 \, \mathrm{m} \cdot 9{,}81 \, \mathrm{m}} = 0{,}142 \; ; \; (\alpha = 8°)$$

Bemerkenswert ist, daß die Masse des Wagens im Ergebnis keine Rolle spielt. Wenn bei zu geringer Neigung des Profils und zu hoher Schwerpunktslage die Resultierende außerhalb der Standfläche fällt, kippt der Wagen um (Abschn. 3.9).

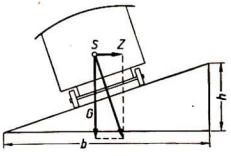


Bild 123. Zusammenwirken von Fliehkraft und Schwerkraft in einer Kurve

5.054 Die Corioliskraft

Bei der Drehbewegung tritt noch eine zweite Kraft auf, die nach ihrem Entdecker **Corioliskraft** genannt wird. Angenommen, eine Kreisscheibe rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Von ihrem Zentrum aus werde mit radialer Anfangsrichtung und der Geschwindigkeit u eine Kugel abgeschleudert (Bild 124). Diese wird nach dem Trägheitsgesetz ihre Richtung beibehalten. Die Scheibe aber dreht sich unter der Kugel vorbei; diese hinterläßt auf der Scheibe eine spiralige Spur. Ein auf der Scheibe stehender und mit ihr linksherum kreisender, nach außen blickender Beobachter wird aber feststellen, daß die Kugel von der radialen Richtung nach rechts abweicht. Es ist gleichsam eine Kraft wirksam, die ihre Masse ablenkt. Diese Kraft wird direkt fühlbar, wenn man, auf einem Drehstuhl sitzend, ein Gewicht radial nach außen streckt. Die hier wirkende Beschleunigung läßt sich so berechnen: Der radial bewegte Körper legt in der Zeit t vermöge seiner Trägheit die Strecke $r = ut$ zurück. Der anfänglich dabei angesteuerte Punkt des Kreisumfangs hat sich inzwischen um die Strecke $s = r\omega t = u\omega t^2$ weiterbewegt. Legt man dieser Abweichung eine wirkende Beschleunigung zugrunde, so ist $s = \frac{b}{2} t^2$. Durch Gleichsetzen erhält man

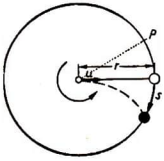


Bild 124
Entstehung der Corioliskraft

$$\frac{b t^2}{2} = u \omega t^2 \text{ und damit die}$$

Coriolisbeschleunigung: $b = 2 \, u \, \omega$ bzw. die

(68) **Corioliskraft:** $\boxed{C = 2 \, m \, u \, \omega}$

Diese Kraft tritt also immer dann auf, wenn ein Körper sich auf einer kreisenden Unterlage nach außen oder innen bewegt.

Beispiele: 1. Man will quer über ein Schiff auf die andere Seite gehen, während das Schiff eine Kurve durchfährt. Dies ist nur mit großer Mühe möglich, und man muß einen Fuß über den anderen setzen, um die beabsichtigte Richtung einzuhalten.

2. Auf einer Stange gleitet ein Massenstück von 2 kg mit der Geschwindigkeit 20 cm/s nach außen, während die Stange mit $n = 120^1$/min rotiert. Mit welcher Kraft wird das Gewicht gegen die Führung gepreßt? –

$$C = \frac{2 \cdot 2\,\text{kg} \cdot 0{,}2\,\text{m} \cdot 2\,\pi \cdot 120}{\text{s} \cdot 60 \cdot \text{s}} = 10{,}053\,\text{kgm/s}^2\,(\text{N}) = 1{,}025\,\text{kp}$$

3. Eine Lokomotive von 80 t fährt mit 72 km/h in nordsüdlicher Richtung. Nach welcher Richtung wirkt die durch die Erdumdrehung entstehende Corioliskraft, und wie groß ist diese? – Da sich die Erde von West nach Ost dreht, wird die Lokomotive westwärts gegen die Schienen gedrückt.

$$C = \frac{2 \cdot 80\,000\,\text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot 72\,\text{m} \cdot 0{,}000\,073}{3{,}6\,\text{s}} =$$
$$= 233{,}6\,\text{kgm/s}^2\,(\text{N}) = 23{,}8\,\text{kp}$$

4. Bild 125 zeigt die Spur eines geradlinig schwingenden Pendels auf einer kreisenden Unterlage. Foucault benutzte 1852 ein Pendel von 67 m Länge und wies damit die Erdumdrehung nach.

Bild 125. Spur eines geradlinig schwingenden Pendels auf einer linksum kreisenden Unterlage

Im Vergleich zu den sonst noch wirkenden Kräften spielt die von der Erdrotation hervorgerufene Corioliskraft also praktisch keine Rolle. Dagegen ist sie von großer Bedeutung für das Klima der Erde (Westabweichung der Passatwinde).

5.06 Die Energie der Drehbewegung

Zweifellos besitzen nicht nur geradlinig bewegte Massen kinetische Energie, sondern auch kreisende Massen, wie rotierende Maschinenteile, Schwungräder usw. Letztere sind ja gerade deswegen angebracht, um als Energiespeicher einen gleichmäßigen Lauf der Motoren zu erzielen (Bild 126).

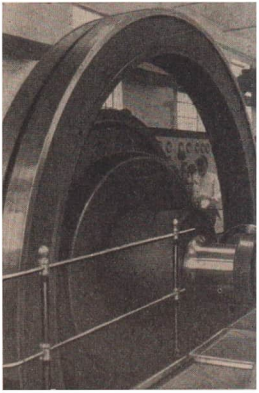


Bild 126. Schwungrad einer Dampfmaschine (Rotationsenergie)

5.061 Das Massenträgheitsmoment

Ein kleiner Körper mit der Masse m soll an einer gewichtslosen Stange um den Punkt 0 rotieren (Bild 127). Dann ist seine Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$. Die kinetische Energie ist dann nach (62)

$$\frac{m v^2}{2}, \text{ d. h.}$$

$$E_{\text{kin}} = m r^2 \frac{\omega^2}{2}.$$

Bild 127
Trägheitsmoment eines Massenpunktes $\Theta = m r^2$

Zur Vereinfachung faßt man nun den Ausdruck mr^2 für sich zusammen und bezeichnet ihn als **Massenträgheitsmoment** Θ (sprich: Theta).

(69) **Massenträgheitsmoment eines Massenpunktes:** $\boxed{\Theta = m r^2}$

Maßeinheit des Massenträgheitsmomentes: 1 kgm²

Man kann also im obigen Ausdruck für die kinetische Energie den Faktor mr^2 durch Θ ersetzen und erhält die

(70) **Energie eines rotierenden Körpers:** $\boxed{E_{\text{rot}} = \frac{\Theta}{2}\omega^2}$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Energie eines geradlinig bewegten Körpers $\frac{m}{2}v^2$, so kommt dem Trägheitsmoment die Bedeutung einer Masse zu, daher auch der öfter gebrauchte Ausdruck **Drehmasse.**

Man achte darauf, daß Formel (69) zunächst nur für einen Massenpunkt gilt. Sie ist allenfalls noch anwendbar auf kleine Körper, die im Verhältnis zu ihrem Abstand von der Drehachse nur geringe Abmessungen aufweisen. Ebenso gilt (69) noch für einen dünnen Kreisring, da alle seine Teile vom Drehzentrum gleich weit entfernt sind.

Da die Definition $\Theta = mr^2$ nur für einen **Massenpunkt** gilt, muß man für einen ausgedehnten Körper folgendermaßen überlegen: Man zerlegt ihn gedanklich in lauter einzelne Massenteilchen dm. Jedes von ihnen hat einen anderen Abstand r von der Drehachse. Daher ist das gesamte Trägheitsmoment gleich der Summe aller elementaren Trägheitsmomente.

Die Lösung dieser Aufgabe ist mit Hilfe der Integralrechnung möglich, indem man den Ansatz macht:

(71) $\boxed{\Theta = \int r^2 \, dm}$

Die exakte Berechnung ist nur für regelmäßig gestaltete Körper möglich.

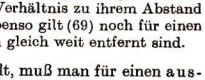


Bild 128

Näherungsweise Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines dünnen Stabes. Man zerlegt den Stab nach Bild 128 gedanklich in 5 kurze Teilstücke von der Masse $\Delta m = \varrho F \Delta l$ (ϱ Dichte, F Querschnitt, Δl Teillänge). Dann wird das Trägheitsmoment in bezug auf seinen Endpunkt $\Theta = \Sigma r^2 \cdot \Delta m$ mit $r = {}^1/_2\,\Delta l$, ${}^3/_2\,\Delta l$, ${}^5/_2\,\Delta l$, ${}^7/_2\,\Delta l$ und ${}^9/_2\,\Delta l$.

$$\Theta \approx [({}^1/_2)^2 + ({}^3/_2)^2 + ({}^5/_2)^2 + ({}^7/_2)^2 + ({}^9/_2)^2]\,\varrho F \Delta l^3 = \frac{165}{4}\varrho F \Delta l^3.$$

Mit $\Delta l = \frac{l}{5}$ und $\varrho F l = m$ wird $\Theta \approx \frac{165}{500} m l^2 = 0{,}33\, m l^2$. Der mathematisch genaue Wert ist $\frac{m l^2}{3}$.

In der folgenden Übersicht sind die fertigen Ergebnisse für einige häufig vorkommende, einfach geformte Körper aufgeführt.

Wesentlich ist aber zu wissen: Das Trägheitsmoment hängt von der Lage der Drehachse ab.

Jeder Körper besitzt eine Achse *I*, für die das Trägheitsmoment am größten, und eine zweite *II*, für die das Trägheitsmoment am kleinsten ist. Beide Hauptträgheitsachsen stehen senkrecht aufeinander. Zu ihrer Ebene senkrecht verläuft eine 3. Hauptträgheitsachse *III* (Bild 129).

Praktisch werden Trägheitsmomente technischer Körper am besten durch Schwingungsversuche ermittelt (siehe Abschn. 6.33).

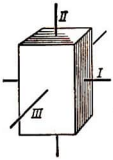


Bild 129
Hauptträgheitsachsen

Ebenso wie die Masse selbst ist das Trägheitsmoment sehr real und gleichsam fühlbar: nämlich als Widerstand gegen die beabsichtigte Drehung. Man versuche einmal, das Schwungrad einer Dampfmaschine mit der Hand in Gang zu bringen, und nicht ohne Grund ist der Hammerwurf eine der anstrengendsten athletischen Übungen. Wie bei der geradlinigen Bewegung kommt es ja darauf an, eine Masse m entgegen ihrem Beharrungsvermögen in Bewegung zu setzen. Der bei einer beabsichtigten Drehung fühlbare Widerstand rührt von derselben Massenträgheit her. Nur muß man sich merken, daß in solchen Fällen nicht die Masse m [kg], sondern das Trägheitsmoment Θ [kgm²] maßgebend ist.

Einige Massenträgheitsmomente

Körper	Lage der Achse	Trägheitsmoment Θ
Dünner Kreisring (Radius r)	Ringmitte, senkrecht zur Ringebene	mr^2
dünner Stab (Länge l)	Stabmitte, senkrecht zum Stab	$\frac{m}{12} l^2$
desgl.	Stabende, senkrecht zum Stab	$\frac{m}{3} l^2$
Kreisscheibe (Radius r)	senkrecht durch die Mitte der Scheibe	$\frac{m}{2} r^2$
desgl.	längs des Durchmessers	$\frac{m}{4} r^2$
Vollzylinder	Längsachse des Zylinders	$\frac{m}{2} r^2$
Rechteck (Diagonale d)	senkrecht durch die Flächenmitte	$\frac{m}{12} d^2$
Kugel (Radius r)	durch den Mittelpunkt	$\frac{2m}{5} r^2$
Rechteck $a\,b$	längs der Seite a	$\frac{m}{3} b^2$
Rechteck $a\,b$	längs der Seite b	$\frac{m}{3} a^2$

Beispiele: 1. Für eine Schleifscheibe von 20 cm Radius und 50 kg Masse berechnet sich

$$\Theta = \frac{50\,\text{kg} \cdot 0{,}2^2\,\text{m}^2}{2} = 1\,\text{kgm}^2 .$$

2. Welche kinetische Energie besitzt ein Schwungrad, dessen Trägheitsmoment 5 kgm² beträgt, bei einer Drehzahl von 5000¹/min? – $\omega = 523{,}6\ ^1/\mathrm{s}$. Nach (70) ist

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{5\ \mathrm{kgm}^2 \cdot 523{,}6^2}{2\ \mathrm{s}^2} = 685392\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2\ (\mathrm{J}) = 69\,867\ \mathrm{kpm}\,.$$

3. Eine Kreisscheibe ($r = 10$ cm) $m = 500$ g wird dadurch in Drehung versetzt, daß um ihre Achse ein Faden gewickelt ist, an dem ein Fallgewicht $m' = 40$ g hängt. Nach Durchlaufen der Höhe $h = 50$ cm fällt das Gewicht ab. Mit welcher Drehzahl rotiert die Scheibe weiter? –

Nach dem Energiesatz hat man

$$G\,h = \Theta\,\frac{\omega^2}{2} \quad \text{und damit} \quad \omega = \sqrt{\frac{2\,G\,h}{\Theta}} = \sqrt{\frac{2\,m'\,g\,h \cdot 2}{m\,r^2}} \quad \text{oder}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}04\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} \cdot 2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{0{,}5\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot (0{,}1\ \mathrm{m})^2}} = 12{,}5\ ^1/\mathrm{s} \quad \text{bzw.} \quad n = 119^1/\mathrm{min}\,.$$

4. Man dreht einen Stab um seinen Mittelpunkt. Die wievielfache Wucht enthält er bei Drehung mit gleicher Geschwindigkeit um seinen Endpunkt? –

Nach obiger Tabelle ist das Trägheitsmoment um seinen Endpunkt 4mal so groß wie bei einer Drehung um die Mitte. Daher braucht man auch die 4fache Energie.

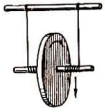


Bild 130
Maxwellsches Rad

Ein einfaches Gerät, welches die periodische Umwandlung potentieller in kinetische Drehenergie vorführt, ist das Maxwellsche Rad (Bild 130). Man steckt durch den Schwerpunkt einer Kreisscheibe eine Welle, wickelt beiderseits eine Schnur auf und hängt diese Vorrichtung auf. Beim Loslassen rollt die Scheibe mit zunehmender Geschwindigkeit nach unten. Nach Ablauf der Schnur wickelt sich diese wieder auf, und der Körper steigt (wenn von der Reibung abgesehen wird) wieder auf seine alte Höhe, wonach sich das gleiche Spiel wiederholt.

5.062 Massenträgheitsmoment zusammengesetzter Körper

Für kompliziertere Körper gilt:

Das gesamte Massenträgheitsmoment eines Körpers ist gleich der Summe der Massenträgheitsmomente seiner einzelnen Teile.

Um z. B. das Trägheitsmoment eines Schwungrades zu berechnen, wird man daher zunächst die Trägheitsmomente der Nabe (Hohlzylinder), der Speichen (Stäbe) und des Kranzes (Hohlzylinder) ermitteln und diese dann addieren.

Hierbei kommt oft das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders vor. Faßt man diesen als einen Vollzylinder auf, aus dem das Innere herausgeschnitten ist, so erhält man (Bild 131):

$$\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 = m_1\,\frac{r_1^2}{2} - m_2\,\frac{r_2^2}{2} = (\varrho\,\pi\,r_1^2\,h)\,\frac{r_1^2}{2} - (\varrho\,\pi\,r_2^2\,h)\,\frac{r_2^2}{2}$$

$$= \frac{\varrho\,\pi\,h}{2}\,(r_1^4 - r_2^4) = \varrho\,\pi\,h\,(r_1^2 - r_2^2)\,\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\,.$$

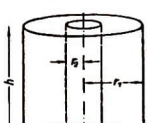


Bild 131. Hohlzylinder

Der vor dem Bruch stehende Ausdruck ist aber die Gesamtmasse m, so daß das

(72) **Trägheitsmoment eines Hohlzylinders:** $\boxed{\Theta = m\,\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$

Beispiel: Welches Trägheitsmoment besitzt die auf Bild 132 angegebene Riemenscheibe aus Gußeisen ($\varrho = 7{,}2\ \mathrm{g/cm^3}$)? –
Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers setzt sich laut Querschnittsskizze aus den 2 Hohlzylindern a und b sowie dem Vollzylinder c zusammen. Es ist

$$m_a = \frac{7{,}2\,(19^2 - 18^2)\,\pi \cdot 6}{4} = 1255{,}4\,\mathrm{g};$$

$$m_b = 1\,781{,}3\ \mathrm{g}$$

$m_c = 305{,}4$ g. Hieraus ergeben sich

$$\Theta_a = \frac{1{,}255\ \mathrm{kg}\,(0{,}095^2 + 0{,}09^2)\,\mathrm{m}^2}{2} = 0{,}01075\ \mathrm{kgm}^2;$$

$$\Theta_b = 0{,}00743\ \mathrm{kgm}^2$$

$\Theta_c = 0{,}00003\ \mathrm{kgm}^2$; zusammen also

$$\Theta = 0{,}01821\ \mathrm{kgm}^2.$$

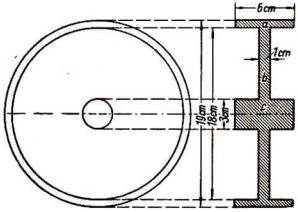


Bild 132. Riemenscheibe

5.068 Drehung um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse

In vielen Fällen liegt die Drehachse eines Körpers außerhalb seines Schwerpunktes. Weil dann die Masse weiter ab vom Drehpunkt liegt, ist das Trägheitsmoment größer.
Nehmen wir eine Kugel der Masse m an, die an einem Faden der Länge a um den Punkt 0 geschwungen wird (Bild 133). Sie hat die Umfangsgeschwindigkeit $v = a\omega$, und die kinetische Energie ihrer im Schwerpunkt S vereinigt gedachten Masse ist gleich $\frac{m a^2 \omega^2}{2}$. Während eines Umlaufs dreht sie sich aber einmal um ihre eigene Achse; d. h., sie besitzt für sich allein noch einmal dieselbe Winkelgeschwindigkeit und damit eine zusätzliche kinetische Energie von $\frac{\Theta_s \omega^2}{2}$. Die Gesamtenergie ist deshalb $\frac{\omega^2}{2}\,(\Theta_s + m a^2)$, wobei Θ_s das Trägheitsmoment um die durch ihren Schwerpunkt gehende Achse ist.

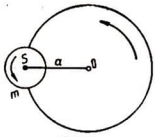


Bild 133
Zum „Satz von Steiner"

Das gesamte Trägheitsmoment ist

(73) **Satz von Steiner:** $\boxed{\Theta = \Theta_s + m a^2}$ (a Entfernung des Drehpunktes vom Schwerpunkt)

Beispiele: 1. Welches Trägheitsmoment hat eine 8 kg schwere und 4 m lange Stange, deren Drehpunkt 80 cm von dem einen Ende entfernt liegt? –
Die Entfernung des Drehpunktes vom Schwerpunkt ist $a = 1{,}2$ m, so daß

$$\Theta = 8\ \mathrm{kg}\left(\frac{4^2}{12} + 1{,}2^2\right)\mathrm{m}^2 = 22{,}19\ \mathrm{kgm}^2.$$

2. Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Kugel, die um einen Punkt ihrer Oberfläche schwingt? –

$$\Theta = \frac{2\,m\,r^2}{5} + m\,r^2 = \frac{7\,m\,r^2}{5}.$$

5.07 Das dynamische Grundgesetz der Drehbewegung

Wenn ein anfangs stillstehendes Rad in Rotation versetzt werden soll, muß man an seinem Umfang eine Kraft angreifen lassen, etwa mit Hilfe eines Treibriemens oder einer Drehkurbel. Solange diese Kraft wirkt und keine anderen Kräfte die Bewegung hemmen, wird die Drehbewegung eine beschleunigte sein. Umgekehrt muß eine entsprechende Kraft wirken, wenn die Bewegung eines Rades gebremst werden soll. Es sei zunächst der Massenpunkt m angenommen (Bild 127), der auf einer Kreisbahn vom Radius r in Bewegung gesetzt werden soll. Nach dem Grundgesetz der Dynamik (52) ist die erforderliche Kraft $P = m \cdot b$ oder nach (47) $P = mr\varepsilon$ (ε = Winkelbeschleunigung). Multipliziert man beide Seiten mit r, so erhält man $Pr = mr^2\varepsilon$. Auf der linken Seite steht das Drehmoment Pr, und auf der rechten bemerkt man den Ausdruck mr^2, der nach (69) das Trägheitsmoment des Massenpunktes darstellt. Dies auf ausgedehnte Körper angewandt, ergibt:

Drehmoment = Trägheitsmoment · Winkelbeschleunigung

(74) $$\boxed{Pr = \Theta\varepsilon}$$

Vergleicht man dieses Gesetz mit dem Grundgesetz der Dynamik für die geradlinige Bewegung, so fällt auf, daß auf der linken Seite nicht eine Kraft P, sondern das Drehmoment Pr steht. Das aber muß so sein, weil die Wirkung einer Kraft ganz von dem Hebelarm abhängt, an dem sie angreift. Ohne Kenntnis dieses Hebelarms r ist die Angabe der Kraft P gegenstandslos. Die Kraft P wird z. B. niemals eine Drehung hervorrufen, wenn sie an der Drehachse ($r = 0$) angreift. Daß auf der rechten Seite an Stelle der Masse m das Trägheitsmoment Θ stehen muß, ergibt sich aus dem in Abschn. 5.061 Gesagten.

Zum Vergleich der einander entsprechenden Größen seien noch einmal gegenübergestellt:

geradlinige Bewegung		*Drehbewegung*	
Größe	Bezeichnung	Größe	Bezeichnung
Kraft	P	Drehmoment	$M = Pr$
Beschleunigung	b	Winkelbeschleunigung	ε
Masse	m	Trägheitsmoment	Θ
Grundgesetz	$P = mb$	Grundgesetz	$M = \Theta\varepsilon$
Kinetische Energie	$\frac{m}{2} v^2$	Kinetische Energie	$\frac{\Theta}{2} \omega^2$

Beispiele: 1. Eine massive Schwungscheibe soll aus dem Stillstand innerhalb von 15 s auf eine Drehzahl von 500 1/min gebracht werden. Mit welcher Kraft muß sie am äußeren Umfang gedreht werden? (Maße der Scheibe: $r = 25$ cm; $m = 18$ kg).–

Für Θ ergibt sich (Formel für die Kreisscheibe) 0,5625 kgm².

Die Winkelbeschleunigung ist nach (48) $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi \cdot 500}{60\,\text{s} \cdot 15\,\text{s}} = 3{,}49\ 1/\text{s}^2$. Die Kraft am Umfang wird demnach $P = \frac{\Theta\varepsilon}{r} = \frac{0{,}5625\,\text{kgm}^2 \cdot 3{,}49}{\text{s}^2 \cdot 0{,}25\,\text{m}} = 7{,}85\ \text{kgm/s}^2\ (\text{N}) = 0{,}8$ kp.

2. Das Trägheitsmoment eines Turbinenrades beträgt 637 kgm². Das treibende Wasser ruft ein Drehmoment von 147 Nm hervor. Wie lange dauert es, bis eine Drehzahl von 320¹/min erreicht wird? – Nach (74) ist $\varepsilon = \frac{147\ \mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^2}\ 637\ \mathrm{kgm^2}} = 0{,}23\ {}^1/\mathrm{s^2}$. Nach (43) ergibt sich $\omega = \frac{2\pi \cdot 320}{60\,\mathrm{s}} = 33{,}5\ {}^1/\mathrm{s}$. Die Anlaufzeit beträgt dann nach (48) $t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{33{,}5\ \mathrm{s^2}}{\mathrm{s}\ 0{,}23} = 146\ \mathrm{s}$.

5.08 Die Bewegungsgröße (Impuls)

Nach dem Grundgesetz der Dynamik wirkt jede an einem Körper angreifende Kraft beschleunigend. Wenn aber diese Kraft einwirkt, so geschieht das während einer bestimmten Zeitdauer t. Je länger diese anhält, desto mehr wird die Geschwindigkeit anwachsen, weil ja die Beschleunigung länger aufrechterhalten bleibt.

Bild 134. Kraftstoß

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, die Kraft bleibe während der Zeit t konstant. Multipliziert man die Kraft mit der Zeitdauer ihrer Einwirkung, so erhält man $Pt = mbt$. Dabei ist bt gleich der erreichten Endgeschwindigkeit, womit sich das Produkt mv ergibt. Nach Newton bezeichnet man dieses als **Bewegungsgröße (Impuls)**, während man das Produkt Pt den **Antrieb (Kraftstoß)** nennt (Bild 134). Besaß der Körper vor dem einsetzenden Antrieb bereits die Geschwindigkeit v_0 und damit die Bewegungsgröße mv_0, so ergibt sich der

1. Impulssatz: Der Antrieb ist gleich der durch ihn hervorgerufenen Änderung der Bewegungsgröße.

(75) $$\boxed{Pt = mv - mv_0}$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man

(76) $$\boxed{P = \frac{\Delta mv}{\Delta t}}$$

und damit eine neue Definition der Kraft:

Die Kraft P ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses $m\,v$.

Dies ist die ursprüngliche, Newtonsche Fassung des 2. Bewegungsgesetzes. Die heute meistgebrauchte Form (52) geht hieraus unmittelbar hervor, wenn man bei konstanter Masse allein die Geschwindigkeitsänderung ins Auge faßt: $P = mb$.

Es ist natürlich ebenso möglich, daß die Kraft während ihres Einwirkens nicht konstant bleibt. Bei stoß- und ruckartigen Vorgängen hat man dann einen zeitlichen Verlauf, wie etwa Bild 135 zeigt. Das Produkt aus P und t wird dann durch die unter der Kurve liegende Fläche dargestellt, und der Kraftstoß wird zum Zeitintegral $\int P\,\mathrm{d}t$.

Beispiel: Welche treibende Kraft ist nötig, um einem Fahrzeug von 5 t innerhalb von 4 s eine Geschwindigkeit von 18 km/h mitzuteilen? –
Da die anfängliche Geschwindigkeit $v_0 = 0$, ist auch der Impuls zu Beginn des Vorgangs gleich Null.

$$P = \frac{m\,v}{t} = \frac{5000\,\text{kg} \cdot 18\,\text{m}}{3{,}6\,\text{s} \cdot 4\,\text{s}} = 6250\,\text{kg m/s}^2\ (\text{N}) = 637\,\text{kp}$$

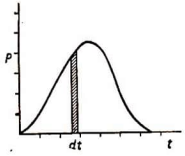


Bild 135. Kraftstoß als Zeitintegral der Kraft

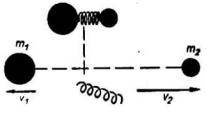


Bild 136. Impulserteilung durch eine sich entspannende Feder

5.081 Das Gesetz von der Erhaltung des Impulses

Wir betrachten zwei leichtbewegliche Massen, zwischen denen eine gespannte Feder eingeklemmt ist (Bild 136). Wenn man sie plötzlich sich entspannen läßt, werden die Massen m_1 und m_2 auseinandergetrieben. Dabei ist die treibende Kraft für beide Massen dieselbe und auch die Zeitdauer t bis zur schließlich erfolgenden Trennung. Jede Masse erfährt also denselben Antrieb, womit auch die Impulse gleich groß sein müssen. Wegen ihrer entgegengesetzten Richtung ergibt sich

$$(77) \qquad m_1 v_1 = -m_2 v_2 \quad \text{oder} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0\,.$$

Vorher war das System Masse 1 – Feder – Masse 2 in Ruhe, hatte also insgesamt den Impuls 0. Während und nach dem Vorgang ist die Impulssumme immer noch 0. Dies ergibt verallgemeinert das

Gesetz von der Erhaltung des Impulses:	**Wirken keine äußeren Kräfte ein, so bleibt die Gesamtsumme der Impulse aller Teile eines Systems konstant.**

Es ist ein wichtiges Gegenstück zum Energiesatz und von ebenso weitreichender Bedeutung für das gesamte physikalische Geschehen.
Es drückt zunächst die Unmöglichkeit aus, den Gesamtimpuls eines bewegten Systems oder ruhenden Körpers von innen heraus irgendwie zu ändern. Nur durch Verbindung mit seiner Umgebung, durch Hinzunehmen äußerer Kräfte, wie Reibung usw., kann man ihn bremsen oder beschleunigen.
Besteht das System aus gegeneinander beweglichen Teilen, so bringt jede Impulsänderung des einen eine entgegengesetzte Impulsänderung des anderen Teils hervor.

Beispiele: 1. Auf einem leicht beweglichen Wagen schwingt ein Pendel hin und her. Der Wagen vollführt die entsprechende Gegenbewegung.

2. Macht man den Versuch, einen Kahn, ohne zu rudern, allein durch Körperbewegungen voranzubringen, so wird dies mißlingen.

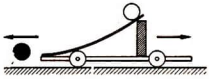


Bild 137. Beim Abrollen der Kugel bleibt der Gesamtimpuls Null

3. Eine Kugel rollt aus dem Stillstand auf einer schrägen Bahn vom Wagen herunter. Der Wagen rollt entgegengesetzt davon. In diesem Fall bilden Kugel und Wagen **ein System.** Der Gesamtimpuls bleibt Null (Bild 137).

4. Im letzten Beispiel betrage die Fallhöhe der Kugel 30 cm, ihre Masse 5 kg, die Masse des Wagens selbst 8 kg. Mit welcher Geschwindigkeit rollt der Wagen davon, wenn die Kugel die Bahn verläßt? –

Die anfängliche potentielle Energie der Kugel setzt sich um in die kinetische Energie $\frac{m_2 v_2^2}{2}$ und Rotationsenergie $\frac{2 m_2 r^2 \omega^2}{5 \cdot 5}$ der Kugel sowie die kinetische Energie des Wagens $\frac{m_1 v_1^2}{2}$. Mit $r\omega = v_2$ entsteht die Gleichung

$$\frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{2 m_2 v_2^2}{5 \cdot 2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} = m_2 g h .$$

Nach (77) kann man v_1 durch $v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1}$ ersetzen und erhält

$$v_2 = \sqrt{\frac{g h}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{m_2}{2 m_1}}} = 1{,}71 \text{ m/s} ;$$

$$v_1 = -\frac{5 \text{ kg } 1{,}71 \text{ m}}{8 \text{ kg} \cdot \text{s}} = -1{,}07 \text{ m/s} .$$

Das negative Vorzeichen im Ergebnis zeigt an, daß v_1 die entgegengesetzte Richtung von v_2 hat, der Wagen also nach rückwärts rollt.

Das letzte Beispiel veranschaulicht das Antriebsprinzip aller Luft- und Wasserfahrzeuge. Mittels Luft- bzw. Wasserschrauben werden hier überall Massen erfaßt und nach hinten geworfen, wodurch Schiff bzw. Flugzeug einen Impuls nach vorn erhalten.

Auch die gesamte Raketentechnik beruht auf dem Impulssatz, wobei man besonders an die großen Leistungen der sowjetischen Sputniks und Luniks denke. Diese kosmischen Raketen enthalten flüssigen Treibstoff, der bei der Verbrennung mit außerordentlich großer Geschwindigkeit nach rückwärts ausströmt. Diesem Impuls entspricht ein gleich großer Impuls nach vorwärts, der die Rakete antreibt. Die Berechnung ist kompliziert, da sich die Masse der Rakete mit zunehmender Brenndauer immer mehr verringert.

Bei Landfahrzeugen wirkt beim Anfahren ein gleich großer, entgegengesetzter Impuls auf den Erdkörper. Infolge der im Verhältnis zu einem Fahrzeug ungeheuren Masse der Erde wird jedoch die Umdrehung der Erde hierbei nicht merklich beeinflußt.

5.082 Der gerade Stoß

5.0821 Der unelastische Stoß

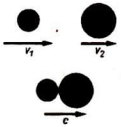


Bild 138
Nach dem unelastischen Stoß eilen beide Körper mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter

Der Impulssatz bietet eine einfache rechnerische Grundlage zur Behandlung von Stoßvorgängen. Beim **unelastischen Stoß** prallen 2 Massen zusammen und bewegen sich nach dem Stoß mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter (Bild 138). Zweifeuchte Tonkugeln bleiben nach dem Stoß aneinander haften. Eine Pistolenkugel, die in einen Holzklotz fährt, bewegt sich mit diesem zusammen weiter geradeaus.

Im folgenden seien: v die Geschwindigkeiten vor dem Stoß,
c die Geschwindigkeiten nach dem Stoß.

Dann ist nach dem Impulssatz

$$\underset{\text{vor dem Stoß}}{m_1 v_1 + m_2 v_2} = \underset{\text{nach dem Stoß}}{(m_1 + m_2)\, c}$$

und die

(78) **gemeinsame Geschwindigkeit beim unelastischen Stoß:**

$$\boxed{c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

Beispiele: 1. Ein Straßenbahnwagen fährt mit 5 m/s gegen einen zweiten, aber ruhenden Wagen von gleicher Masse. Mit welcher Geschwindigkeit fahren sie nach dem Einklinken der Kupplung weiter? – v_2 ist hier gleich 0; $m_1 = m_2$;

$$c = \frac{m_1 \cdot 5\,\text{m}}{2\, m_1\, \text{s}} = 2{,}5\ \text{m/s}$$

2. Auf einen mit 3 m/s rollenden Wagen von 1500 kg fällt von oben eine Last von 500 kg. Geschwindigkeitsänderung? – ($v_2 = 0$);

$$c = \frac{1500\ \text{kg} \cdot 3\ \text{m}}{2000\ \text{kg s}} = 2{,}25\ \text{m/s}.$$ Die Geschwindigkeit nimmt um 0,75 m/s ab.

5.0822 Energieverhältnisse beim unelastischen Stoß

Es sollen jetzt die vor und nach dem Stoß vorhandenen Energien verglichen werden. Der Einfachheit halber sei die gestoßene Masse m_2 als ruhend angenommen, so daß $v_2 = 0$. Es sind die kinetischen Energien

vor dem Stoß: nach dem Stoß:

$$E_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad \text{bzw.} \quad E = \frac{(m_1 + m_2)\, c^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\,(m_1^2 v_1^2)}{2\,(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2\,(m_1 + m_2)}$$

(79) **Energie nach dem unelastischen Stoß:**
($v_2 = 0$)

$$\boxed{E = E_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

Bild 139. Unelastischer Stoß

Es geht demnach mechanische Energie verloren, was auch begreiflich ist: Plastische Verformung, innere und äußere Reibung wandeln mechanische Energie in Wärme um. Diese Vorgänge sind überhaupt die Voraussetzung dafür, daß ein Stoß unelastisch erfolgen kann.
Beim Schmieden ist die Hauptabsicht die Verformung des Werkstückes. Möglichst viel Energie soll in Verformungsarbeit umgesetzt werden.

Beispiel: Ein Hammer von 15 kg schlägt mit $v_1 = 5$ m/s auf das Schmiedestück von 5 kg, das auf einem Amboß von 1,5 t ruht. Der Untergrund ist nachgiebig, so daß der Amboß der gemeinsamen Stoßgeschwindigkeit zu folgen vermag, wodurch ein unelastischer Stoß zustande kommt. –

$$c = \frac{15\,\text{kg} \cdot 5\,\text{m/s}}{1520\,\text{kg}} = 0{,}0493\,\text{m/s}$$

$$\text{Energie vor dem Stoß } E_0 = \frac{15\,\text{kg} \cdot 25\,\text{m}^2}{2 \cdot \text{s}^2} = 187{,}5\,\text{kg m}^2/\text{s}^2\,(\text{J})$$

$$\text{Energie nach dem Stoß } E = 187{,}5\,\text{J}\,\frac{15}{1500 + 15} = 1{,}86\,\text{J}$$

Der Energieverlust beträgt 185,64 J oder 99 %. Dieser Betrag wird zur Formänderung des Werkstückes verbraucht und stellt damit den Wirkungsgrad des Vorganges dar. Man sieht hier auch, wann der Wirkungsgrad recht günstig wird: Die Masse des Ambosses muß recht groß sein!

5.0823 Der elastische Stoß

Beim elastischen Stoß fahren beide Massen nach dem Zusammenprall wieder auseinander (Bild 140). Man kann den Vorgang in 3 Teilabschnitte zerlegen:

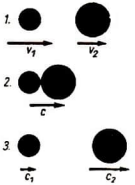


Bild 140. Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß

1. Zusammenstoß der Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2;
2. Veränderung der beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bis zu einem Augenblick, da beide Massen die gleiche Geschwindigkeit c haben. Diese ergibt sich wie beim unelastischen Stoß nach Formel (78).
3. Die federnd zusammengepreßten Massen drücken sich voneinander und nehmen dabei die neuen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 an.

Wie in Bild 140 angedeutet, wird die Kugel m_1 beim Zusammenstoß abgebremst. Sie büßt dabei den Geschwindigkeitsbetrag $v_1 - c$ ein. Während der Trennung werden die elastischen Kräfte in gleicher Stärke noch einmal wirksam. Die Kugel m_1 wird zurückgeworfen und verliert dabei den Betrag $c - c_1$ von gleicher Größe wie $v_1 - c$. Ähnlich verhält es sich mit der Kugel m_2. Es bestehen daher die Gleichungen

$$v_1 - c = c - c_1 \quad \text{bzw.} \quad c_2 - c = c - v_2$$

(80) **Geschwindigkeiten nach dem elastischen Stoß:**

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= 2\,c - v_1 \\ c_2 &= 2\,c - v_2 \end{aligned}}$$

Für den vereinfachenden Fall, daß der angestoßene Körper m_2 vor dem Stoß ruht, also $v_2 = 0$, erhalten wir unter Benutzung von (78)

(81) **Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß gegen eine ruhende Masse m_2:**

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ c_2 &= v_1 \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

Bild 141. Zeitlupenaufnahme des elastischen Stoßes gegen einen Golfball. Während der Berührungszeit von $^1/_{5000}$ s legen beide Körper gemeinsam 10 mm zurück

Beispiele: Elastische Stoßvorgänge kann man sehr schön beim Rangieren von Güterwagen beobachten.

1. Ein Wagen stößt gegen einen ruhenden Wagen von gleicher Masse. $m_1 = m_2$; $v_2 = 0$;

$c_1 = v_1 \dfrac{0}{2\,m_1} = 0.$ Der stoßende Wagen bleibt stehen.

$c_2 = v_1 \dfrac{2\,m_1}{2\,m_1} = v_1.$ Der gestoßene Wagen fährt mit der Geschwindigkeit v_1 davon. Die Wagen haben ihre Geschwindigkeiten ausgetauscht.

2. Zwei gleich schwere Wagen stoßen mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit zusammen: $v_1 = -v_2$; $m_1 = m_2$. Nach (79) ist die gemeinsame Geschwindigkeit während der Berührung $c = 0$ und damit nach (80) $c_1 = -v_1$ und $c_2 = v_1$.
Die Wagen fahren mit denselben Geschwindigkeiten entgegengesetzt auseinander.

3. Ein Wagen fährt gegen einen Prellbock. $m_2 = \infty$; $v_2 = 0$. – Nach (80) ist

$$c_1 = 2\,c - v_1;\quad c_1 = \frac{2\,m_1\,v_1}{m_1 + m_2} - v_1;\quad c_1 = \frac{2\,m_1\,v_1}{\infty} - v_1 = -v_1\,.$$

4. Wie groß muß die Masse m_2 des aus der Ruhe angestoßenen Wagens sein, wenn beide mit gleicher Geschwindigkeit auseinanderfahren sollen? – Setzt man $c_1 = -c_2$, so ergibt die Gleichsetzung der beiden Formeln (81): $m_1 - m_2 = -2\,m_1$ und $m_2 = 3\,m_1$.
Der angestoßene Wagen muß die 3fache Masse haben!

5. Wie groß ist die gesamte kinetische Energie vor und nach dem Stoß im Beispiel 4? – Da der zweite Wagen ruhte, bestand vor dem Stoß lediglich die Energie $\frac{m_1}{2}\,v_1^2$. Nach dem Stoß sind beide Wagen in Bewegung und damit die Energien $\frac{m_1}{2}\,c_1^2 + \frac{3\,m_1}{2}\,c_2^2$. Setzt man für c_1 und c_2 die in Formel (81) angegebenen Werte ein und rechnet aus, so ergibt sich wieder $\frac{m_1}{2}\,v_1^2$. Wie sich an Hand dieser Beispiele nachrechnen läßt, treten beim elastischen Stoß keine Energieverluste auf (Bild 142):

Beim elastischen Stoß bleiben Impuls und Energie erhalten.

Beim unelastischen Stoß bleibt nur der Impuls erhalten, während mechanische Energie verlorengeht.
Hier ist aus Gründen der einfachen Darstellung nur der **gerade Stoß** behandelt worden, bei dem die Stoßrichtung in die Verbindungsgerade der Schwerpunkte fällt. Das ist beim **schiefen** Stoß anders. Man denke z. B. an das seitliche Treffen zweier Billardkugeln, wobei dann die Kugeln in einem Winkel auseinanderweichen. Um

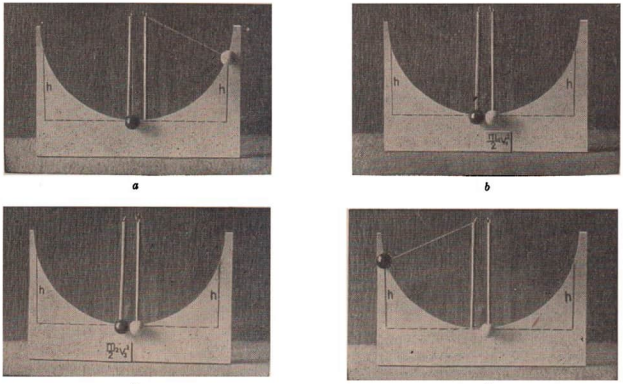


Bild 142. Erhaltung von Impuls und Energie beim elastischen Stoß

derartige Vorgänge zu erfassen, muß daran gedacht werden, daß **Impulse Vektoren** sind, d. h. gerichtete Größen. Die Zusammensetzung erfolgt dann gemäß dem Additionsprinzip für Vektoren nach dem Parallelogrammsatz.

5.0824 Das Reflexionsgesetz

Es sei hier nur noch der Fall behandelt, in dem eine elastische Kugel schief gegen eine feste Wand prallt (Bild 143). Man kann ihre Geschwindigkeit v in eine normale (v_1) und tangentiale (v_2) Komponente zerlegen. Nach dem Ergebnis des letzten Beispiels kehrt sich durch den Rückprall die Komponente v_1 um, während v_2 durch den Stoß nicht beeinflußt werden kann, da sie gleichsam ohne stoßende Berührung an der Oberfläche entlanggleitet. Nach dem Stoß entsteht also die Geschwindigkeit v' durch Zusammensetzung der Komponenten $-v_1$ und v_2. Aus den geometrischen Verhältnissen ergibt sich dann das

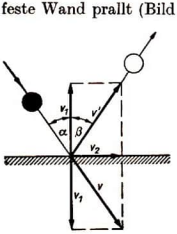


Bild 143. Reflexionsgesetz des elastischen Stoßes

Reflexionsgesetz des elastischen Stoßes: **Beim elastischen Stoß einer Kugel gegen eine feste Wand ist der Einfalls- gleich dem Reflexionswinkel. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt unverändert.**

5.083 Der Drehimpuls (Drall)

Wirkt ein Drehmoment $P\,r$ eine Zeitlang auf einen drehbaren Körper ein, so erfährt auch dieser einen Antrieb. Dieses **Antriebsmoment** ist bei konstantem Moment

gleich $P\,r\,t$. Der Körper erfährt hierdurch einen **Drehimpuls (Drall).** Da alle für die fortschreitende Bewegung erklärten Begriffe, sinngemäß abgewandelt, auch für die Drehbewegung gelten, tritt hier an Stelle der Masse m das Trägheitsmoment Θ und an Stelle der Geschwindigkeit v die Winkelgeschwindigkeit ω. Es kann also in Übereinstimmung mit (75) festgesetzt werden:

Antriebsmoment = Änderung des Drehimpulses

(82) **2. Impulssatz:** $$\boxed{P\,r\,t = \Theta\,(\omega - \omega_0)}$$

Auch hier gilt der entsprechende Erhaltungssatz:

(83) **Satz von der Erhaltung des Drehimpulses:** **Beim Fehlen äußerer Kräfte bleibt die Summe der Drehimpulse (Gesamtdrall) eines Systems konstant.**

Wenn also ein Teil eines drehbaren Systems in Rotation gerät, dreht sich der restliche Teil im entgegengesetzten Sinn (vorausgesetzt, daß die Drehachsen nicht quer zueinander stehen).

Beispiele: 1. Der in Bild 144 gezeigte Rasensprenger besteht aus einem langen, drehbaren Rohr mit an den Enden aufgesetzten Wasserrädchen. Geraten diese durch das ausströmende Wasser in Umdrehung, dreht sich das ganze Rohr im Gegensinn.

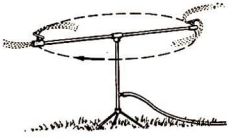


Bild 144. Erhaltung des Drehimpulses beim Rasensprenger

2. Wie bringt es eine Katze fertig, immer auf die Beine zu fallen? – Bei falscher Körperlage führt sie mit dem Schwanz eine heftige Kreisbewegung aus, wodurch sich der Körper (am leichtesten um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes) entgegengesetzt in die richtige Lage dreht.

3. Auf einem rotierenden Drehschemel sitzt ein Mann und hält mit angewinkelten Armen je ein schweres Gewicht. Streckt er jetzt beide Gewichte nach außen, verlangsamt sich die Drehzahl augenblicklich. (Vergrößerung des Trägheitsmomentes muß bei Erhaltung des Drehimpulses eine Verkleinerung der Winkelgeschwindigkeit zur Folge haben.) Erkläre Salto mortale und Pirouette!

4. Welche Winkelgeschwindigkeit erreicht eine Kreisscheibe von 10 kg und 1 m Radius, an deren Umfang 1 min lang eine Kraft von 1 kp treibend wirkt? – Nach (82) ergibt sich

$$\omega = \frac{P\,r\,t}{\Theta} = \frac{P\,r\,t \cdot 2}{m\,r^2} = \frac{9{,}81\ \mathrm{kgm/s^2} \cdot 60\ \mathrm{s} \cdot 2}{10\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m}} = 117{,}72\ \mathrm{rad/s}\ \text{oder}\ n = 1124^1/\mathrm{min}\,.$$

5.09 Der Kreisel

5.091 Vektoren der Drehbewegung

Vom Begriff des Vektors haben wir bisher nur bei geradlinig gerichteten Größen Gebrauch gemacht. Aber auch alle Drehungen haben eine Richtung, festgelegt durch ihren Drehsinn. Den Vektor der Drehbewegung aber legt man in die Richtung der Drehachse. Einheitlich erklärt man:

Der Vektor einer Drehbewegung weist positiv auf den Beschauer zu, wenn die Drehung gegen den Uhrzeiger erfolgt.

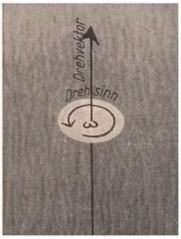


Bild 145. Die Winkelgeschwindigkeit (und damit der Drehimpuls) ist ein Vektor

Man kann sich dies leicht als „Korkenzieherregel" merken: Dreht man einen Korkenzieher rechtsherum, so zeigt seine fortschreitende Spitze in Richtung des positiven Drehvektors.

Das **Drehmoment** ist ein solcher **Vektor.** Die Länge des Pfeils entspricht der algebraischen Größe des Produktes Pl.

Winkelgeschwindigkeit und **Drehimpuls** (Drall) sind Vektoren, deren Länge den Beträgen von ω bzw. $\Theta\omega$ entsprechen. Derartige Vektoren werden nach der Additionsregel (32) zusammengesetzt (Bild 145).

5.092 Präzession des Kreisels

Unter einem Kreisel versteht man einen rotierenden Körper, der sich um einen festen Punkt frei drehen kann; meistens verwendet man Rotationskörper, wie Scheiben, Kegel, Kugeln usw. Die geometrische (Symmetrie-) Achse nennt man seine **Figurenachse.** Eine vollständige Theorie des Kreisels ist mathematisch sehr schwierig. Hier sollen nur einige Grundbegriffe und Bewegungen erläutert werden.

Ein nach Bild 146 in seinem Schwerpunkt unterstützter Kreisel ist ruhend im indifferenten Gleichgewicht. Er ist **kräftefrei.** Bei ungestörter Rotation um seine Figurenachse bleibt diese raumfest stehen. Dasselbe ist der Fall, wenn man ihn mit Hilfe eines Gegengewichtes nach Bild 147 horizontal lagert. Während dieser so ge-

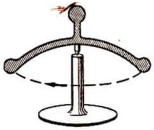


Bild 146. Kräftefreier (im Schwerpunkt unterstützter) Kreisel

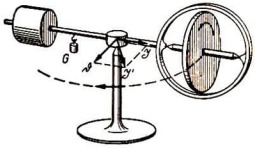


Bild 147
Präzession eines Kreisels

lagerte Kreisel rotiert, werde ein kleines Zusatzgewicht G an den Hebel gehängt. Der Kreisel kippt dadurch nicht etwa nach oben, wie es bei fehlender Rotation der Fall wäre, sondern seine Achse dreht sich horizontal mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Kreise. Diese Bewegung nennt man **Präzession.** Das Zusatzgewicht erteilt nämlich dem Kreisel ein Drehmoment, dessen Vektor im Bild nach links vorn weist. Dieses Drehmoment liefert einen zusätzlichen Drehimpuls $\mathfrak{D}$, der den Kreisel nach oben drehen möchte. Dieser und der Impuls $\mathfrak{J}$ des Kreisels setzen sich nach dem Parallelogrammsatz zu dem neuen Vektor $\mathfrak{J}'$ zusammen. Die Impulsachse $\mathfrak{J}$ wandert in diese neue Lage, wodurch sich zugleich $\mathfrak{D}$ mitdreht usw.

Der Drehimpuls $\mathfrak{J}$ hat die Tendenz, sich dem Vektor eines auf den Kreisel einwirkenden Momentes parallel zu richten.

Wenn man das Zusatzgewicht G wegläßt, bleibt die Drehimpulsachse $\mathfrak{J}$ unverändert stehen. Dreht man jetzt die Kreiselachse im Sinne der vorhin eingetretenen Präzession, so tritt die umgekehrte Wirkung ein (erzwungene Präzession). Es entsteht ein Drehmoment, das den Kreisel nach unten drückt. Diese Erscheinung tritt bei dem schon erwähnten Kollergang (S. 57) auf. Der Umlauf der Walzen stellt eine erzwungene Präzession dar, wodurch der Druck auf das Mahlgut verstärkt wird.

Sehr deutlich ist die Präzessionsbewegung bei einem Kreisel, dessen Achse schräg auf dem Boden steht (Bild 148). Sein Gewicht ruft ein Drehmoment $\mathfrak{D}$ hervor, das den ruhenden Kreisel umkippen würde. Die Spitze des Impulsvektors $\mathfrak{J}$ aber beschreibt einen Kreis in Richtung dieses Momentvektors. Die Figurenachse läuft auf einem Kegelmantel um.

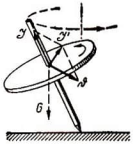


Bild 148. Präzession, verursacht durch das Eigengewicht des Kreisels

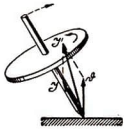


Bild 149. Aufrichten eines Kreisels durch Reibung am Boden

Infolge der Reibung am Boden läuft der anfangs schräg stehende Kreisel bogenförmig davon (Bild 149). Dadurch entsteht ein zusätzliches Drehmoment $\mathfrak{D}$, dem sich der ursprüngliche Vektor $\mathfrak{J}$ annähert. Der Kreisel richtet sich daher von selbst auf. Beim Kreiselkompaß von Anschütz wirkt das Moment der rotierenden Erde derart auf den Impulsvektor des Kreisels ein, daß sich dieser genau in die Nord-Süd-Richtung einstellt und diese auch beibehält.

5.10 Die Massenanziehung (Gravitation)

Tief im Wesen der Materie verwurzelt ist eine Kraft, die der Masse selbst innewohnt: Wo irgend zwei Massen einander gegenüberstehen, ziehen sie sich gegenseitig an. Newton stieß 1687 auf diese Kraft, als er die Planetenbewegung mathematisch untersuchte, und entdeckte dabei das

(84) **Attraktionsgesetz:** $$\boxed{P = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

Hierbei bedeuten m_1 und m_2 die beiden Massen, r den Abstand ihrer Schwerpunkte und γ die sogenannte **Gravitationskonstante.** Sie beträgt

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}\,.$$

Die Gravitation hat mit der elektrischen und magnetischen Anziehung nichts zu tun! Sie ist auch von der chemischen Beschaffenheit der Stoffe unabhängig. Im täglichen Leben und in der Technik macht sich die Massenanziehung wegen ihrer geringen Größe nicht geltend.

Beispiel: Mit welcher Kraft ziehen sich 2 einander berührende Eisenkugeln von je 10 kg Masse und 6,8 cm Radius gegenseitig an? – Der Abstand r ihrer Schwerpunkte ist 13,6 cm.

Nach (84) ergibt sich $P = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3} \cdot 10^2\,\mathrm{kg^2}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s^2} \cdot 0{,}136^2\ \mathrm{m^2}} = 3{,}62 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kgm/s^2\ (N)}\,.$

Derartig geringe Kräfte mißt man mit der **Drehwaage,** die seit ihrer Erfindung bis heute zu größter Vollkommenheit entwickelt wurde. Im Prinzip besteht sie aus einem feinen Metallfaden, der am unteren Ende einen Waagebalken mit 2 Gewichten trägt. Bei Annäherung einer Masse wird das eine Gewicht angezogen und verdrillt den Aufhängefaden (Bild 150). Die Verdrehung wird mittels eines Spiegels optisch bestimmt. Moderne Drehwaagen arbeiten vollautomatisch, da bereits die Nähe einer Person das Meßergebnis verfälscht.

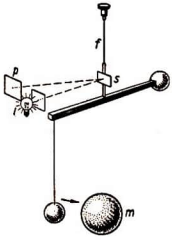


Bild 150
Schema einer Drehwaage

f Aufhängefaden
s Spiegel
l Lichtquelle
p Fotoplatte
m ablenkende Masse

Eine wichtige Anwendung findet die Drehwaage bei **geophysikalischen Untersuchungen,** wobei es möglich ist, die Lagerung tief unter der Erde befindlicher Gesteinsschichten von der Oberfläche aus festzustellen. (Aufsuchen von Lagerstätten wie Erdöl, Salze usw.)

Grob spürbar wird die Massenanziehung erst dann, wenn wenigstens eine der beiden Massen sehr groß ist. Das ist bei unserem Erdkörper der Fall. Seine Anziehung bewirkt das Gewicht aller Körper. Hat man z. B. mit der Drehwaage die Gravitationskonstante bestimmt, so kann man daraus die Masse des gesamten Erdkörpers berechnen. Geht man davon aus, daß die Masse von 1 kg (m_1) eine Kraft von 9,81 N erfährt, dann ergibt die Rechnung nach (84) (mittlerer Erdradius $r = 6370$ km):

$$m_2 = \frac{P\,r^2}{\gamma\,m_1} = \frac{9{,}81\,\mathrm{kg\,m} \cdot 6{,}37^2 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^2}}{\mathrm{s^2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,\mathrm{kg}} =$$

$$= 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \quad \text{oder} \quad \text{rund } 6 \cdot 10^{21}\,\mathrm{t}\,.$$

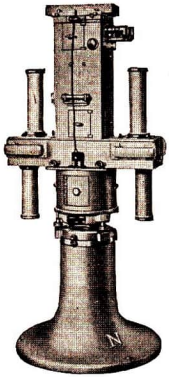


Bild 151
Moderne Drehwaage für geophysikalische Untersuchungen

5.101 Die Keplerschen Gesetze

Das großartigste Beispiel für die allgemeine Massenanziehung bieten die Gestirne. Bei ihrem Umlauf um die Sonne werden die Planeten einerseits von der Masse der Sonne angezogen, andererseits durch die Fliehkraft daran gehindert, sich dieser zu nähern. Dasselbe trifft auch für den Mond bei seinem Umlauf um die Erde zu, dessen Massenanziehung ihrerseits auf die Erde zurückwirkt. Beide Himmelskörper bewegen sich so um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, welcher etwa $^3/_4$ Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt liegt (d. h. noch im Erdinnern). Eine sichtbare Folge dieser Bewegung sind Ebbe und Flut.

An Hand sorgfältig gesammelter astronomischer Daten fand **Kepler** bereits 1609 die 3 Gesetze, welche die Bewegung der Planeten beherrschen:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der von der Sonne nach dem Standort des Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Die **Quadrate** der Umlaufszeiten verhalten sich wie die **Kuben** der mittleren Entfernung der Planeten von der Sonne.

Der Beweis des 1. Gesetzes sei hier übergangen, da er ohne Kenntnisse der analytischen Geometrie nicht geführt werden kann. Zudem ist die Abweichung gegenüber einer Kreisbahn bei allen Planeten nur sehr gering, wie aus folgenden Zahlen hervorgeht.

Übersicht über die Planeten

Planet	Sonnenentfernung Mittel in Mill. km	Umlaufszeit Jahre	Exzentrizität	Masse gegen die Erde
Merkur	58	0,24	0,21	0,056
Venus	108	0,62	0,01	0,817
Erde	149	1,00	0,02	1,000
Mars	227	1,88	0,09	0,108
Jupiter	777	11,86	0,05	318,36
Saturn	1430	29,46	0,06	95,22
Uranus	2860	84,02	0,05	14,58
Neptun	4490	164,78	0,01	17,27
Pluto	5880	248,4		0,9
Sonne	—	—	—	$3{,}334 \cdot 10^5$
Mond	Erdentfernung 384400 km	27,3 Tage	0,0549	0,0123

$$\left(\text{Exzentrizität} = \frac{\text{Abstand der Brennpunkte}}{\text{große Halbachse der Bahn}}\right)$$

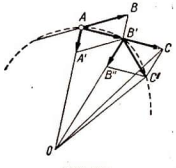


Bild 152
Zum 2. Keplerschen Gesetz

Beweis zum 2. Keplerschen Gesetz: Um die Sonne als Anziehungszentrum O (Bild 152) laufe der Planet auf krummliniger Bahn. Im ersten Augenblick sei er mit einer bestimmten Geschwindigkeit bei A angelangt und würde vermöge seiner Trägheit in der nächsten Zeiteinheit bis B kommen. Die nach dem Zentrum O hin gerichtete Bewegungskomponente erzeugt die resultierende Geschwindigkeit $\overline{AB'}$. Von B' aus würde er ungehemmt mit gleicher Geschwindigkeit $\overline{AB'}$ bis C fliegen, wenn nicht abermals eine nach O gerichtete Komponente $\overline{B'B''}$ hinzukäme, die ihn nach C' ablenkt. Wegen $\overline{AB'} = \overline{B'C}$ sind die Dreiecke OAB' und $OB'C$ flächengleich, desgleichen (wegen der Parallelogrammkonstruktion) $OB'C$ mit $OB'C'$, so daß $OAB' = OB'C'$. Da man die ganze Bahn aus derartigen, sehr schmal zu denkenden Dreiecken zusammensetzen kann, ergibt sich der „Flächensatz" als 2. Keplersches Gesetz.

Beweis zum 3. Keplerschen Gesetz: Fliehkraft und Massenanziehungskraft müssen (bei Annahme einer Kreisbahn) in jedem Augenblick einander gleich sein. Bedeutet m_1 die Masse der Sonne und m_2 die des Planeten, so gibt das die Gleichung (s. Formeln 67 und 84) $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 r \omega^2$. Man setzt nun für die Zeit eines Umlaufes $T = \frac{1}{n}$, wobei n die Zahl der Umläufe je Zeiteinheit bedeutet. Dann ist $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$.

Dies eingesetzt, ergibt $\frac{m_1 \gamma}{r^2} = \frac{4 r \pi^2}{T^2}$ oder umgeformt $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{m_1 \gamma}$.

Die rechte Seite ergibt einen Zahlenwert, der für alle Planeten gleich sein muß. Dann besagt die linke Seite, daß das Verhältnis $T^2 : r^3$ bei allen Planeten übereinstimmt.

6 Die Lehre von den Schwingungen

Bei vielen natürlichen und technischen Vorgängen kann man schwingende Bewegungen beobachten, ein rhythmisches Hinundherpendeln um eine bestimmte Ruhelage. Das Uhrpendel, an Seilen hängende Lasten, das vibrierende Auspuffrohr sind nur einige Beispiele. Derartige Schwingungen können, von zahllosen nützlichen und interessanten Anwendungen abgesehen, auch von gefährlicher Wirkung werden und zur Zerstörung von Bauwerken und Maschinenteilen führen.
Form und Verlauf von Schwingungen sind außerordentlich vielfältig. Es zeigt sich aber, daß ein bestimmter, einfacher Typ sich nicht nur mathematisch bequem handhaben läßt, sondern auch vielen wirklichen Schwingungsvorgängen ziemlich genau entspricht. Es ist dies die **harmonische Schwingung** (sinusförmige Schwingung). Schwingungen von anderer Gestalt nennt man **anharmonisch.**

6.1 Die harmonische Bewegung

Eine harmonische Bewegung ist nichts weiter als eine von der Seite her gesehene Kreisbewegung, wie etwa der an die Wand geworfene Schatten einer im Horizontalkreis umlaufenden Kugel. Die Kugel scheint dort hin- und herzupendeln. Der gleichzeitig dorthin geworfene Schatten eines schwingenden Pendels vollführt (bei richtiger Abstimmung des Tempos) genau die gleiche Bewegung. Sie wird durch folgende Angaben charakterisiert:

Frequenz f: Zahl der Schwingungen je Sekunde. Als eine Schwingung gilt ein Hin- und Hergang.

1 Hertz (Hz) = 1 Schwingung je Sekunde
1 Kilohertz (kHz) = 1000 Hertz

Schwingdauer (Dauer einer Periode) $T = \frac{1}{f}$: Zeitdauer für einen Hin- und Hergang

Amplitude (Schwingweite) A: größte Entfernung aus der Ruhelage

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$: Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Punktes [s. Formel (43), in der man $n = f$ zu setzen hat]

Phase: Schwingungszustand in einem bestimmten Augenblick

Phasenwinkel $\varphi = \omega t$: Winkel, den der umlaufende Punkt in der Zeit t durchlaufen hat (Bogenmaß!)

Elongation (Auslenkung) y: Entfernung des schwingenden Körpers zur Zeit t von der Ruhelage

Um den zeitlichen Verlauf einer Schwingung darzustellen, zeichnen wir den von einem Punkt durchlaufenen Kreis (Bild 153). Seine Projektion auf den senkrechten Durchmesser ergibt eine auf und ab schwingende Bewegung. Den verlängerten waagerechten Durchmesser unterteilen wir in Einheiten und Bruchteile der Schwingdauer T. Die jeweilige Lage des umlaufenden Punktes wird über der dazugehörigen Zeit ein-

getragen. Die Verbindung aller erhaltenen Punkte ergibt eine **Sinuskurve.** Aus Bild 153 ist sofort abzulesen:

(85) **Auslenkung zur Zeit t:** $\boxed{y = A \sin \omega t}$

Die Geschwindigkeit beim Durchqueren der Ruhelage ist gleich der Umfangsgeschwindigkeit des kreisendes Punktes.

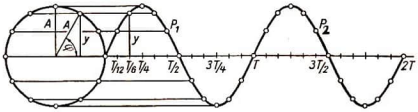


Bild 153. Zeitlicher Verlauf einer harmonischen Bewegung. Die Punkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Phase

In diesem Augenblick durcheilt der auf der Kreisbahn umlaufende Punkt den waagerechten Durchmesser. Die Projektion auf die Senkrechte liefert dann den vollen Betrag der Geschwindigkeit.

(86) **Geschwindigkeit beim Durchqueren der Ruhelage:** $\boxed{v_0 = A\,\omega}$

An den Umkehrpunkten ist $v = 0$. Es handelt sich also um eine abwechselnd beschleunigte und verzögerte Bewegung.

Für jeden anderen Punkt erhält man die Geschwindigkeit durch Differenzieren von y nach t: $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A\,\omega \cos \omega t$. Die Geschwindigkeitskurve hat also die gleiche Form wie die des Ausschlages, sie ist aber um den Phasenwinkel 90° zeitlich verschoben (Bild 154).

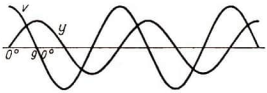


Bild 154. Auslenkung y und Geschwindigkeit v eines schwingenden Punktes

Da während einer vollen Periode T der umlaufende Punkt einen Winkel von $2\,\pi$ zurücklegt, ergibt sich die Zuordnung:

T	$2\,\pi$	360°
$T/2$	π	180°
$T/4$	$\pi/2$	90° usw.

Beispiele: 1. Welche Kreisfrequenz hat eine Schwingung, deren Periode 3,5 s dauert? –

$$\omega = \frac{2\,\pi}{3{,}5\ \mathrm{s}} = 1{,}8\ \mathrm{rad/s}$$

2. Welche Auslenkung zeigt ein schwingender Punkt 0,003 s nach Beginn der Schwingung aus der Ruhelage, wenn die Amplitude 3 cm und die Frequenz $25^1/\mathrm{s}$ beträgt? – Es ist zunächst $\omega t = 0{,}471$ rad (Bogenmaß), was, in Gradmaß umgerechnet, 27° ergibt. Laut Tabelle ist $\sin 27° = 0{,}454$. Damit wird $y = 3\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}454 = 1{,}36\ \mathrm{cm}$.

3. Wieviel Schwingungen hat ein Körper nach Zurücklegen eines Phasenwinkels von 26,8 (Bogenmaß) vollendet? – Das Bogenmaß von 26,8 rad entspricht einem Gradmaß von $\frac{26{,}8 \cdot 180°}{\pi} = 1535{,}5°$. Da eine volle Schwingung 360° entspricht, ergeben sich $\frac{1535{,}5}{360} =$ $= 4{,}27$ Schwingungen, oder kürzer: $\frac{26{,}8}{2\pi} = 4{,}27$ Schwingungen.

6.2 Elastische Schwingungen

Eine Kreisbewegung kann nur aufrechterhalten werden, solange die nach dem Mittelpunkt gerichtete Zentripetalkraft wirkt. Ebenso entsteht die harmonische Schwingung nur durch den Einfluß einer Kraft. Da die Schwingbewegung die Projektion der Kreisbewegung auf einen Durchmesser darstellt, ist auch die sie verursachende Kraft P die Projektion der Zentripetalkraft Z auf diesen Durchmesser. Aus der Proportion (Bild 155) ergibt sich $Z : r = P : y$ und $P = y\frac{Z}{r}$, wobei y die Entfernung des schwingenden Punktes von seiner Ruhelage ist.

Während der harmonischen Schwingung wirkt eine nach der Ruhelage hin gerichtete Kraft. Sie ist der jeweiligen Entfernung von der Ruhelage proportional.

Demnach müssen alle elastisch verformbaren Körper harmonische (sinusförmige) Schwingungen ausführen können; denn ihre Dehnung bzw. Verbiegung (von der Ruhelage aus gemessen) ist proportional der wirkenden Kraft (s. Hookesches Gesetz, S. 130). Die zur Dehnung um die Längeneinheit erforderliche Kraft nennt man die **Richtgröße** (Direktionskraft) D:

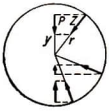


Bild 155. Zentripetal- und Richtkraft

(87) **Richtgröße:** $\boxed{D = \frac{P}{l}}$

wobei P die gesamte dehnende Kraft und l die hervorgerufene Dehnung des belasteten Gegenstandes bedeuten.

Wenn die dehnende Kraft in N (kgm/s²) und die Dehnung in m ausgedrückt wird, ergibt sich die

Maßeinheit der Richtgröße: 1 N/m oder kg/s²

Beispiele: 1. Welche Richtgröße hat die Federung eines Kraftwagens, wenn sich die Karosserie bei einer Belastung mit 380 kp um 80 mm senkt? – Mit $P = 3728$ kgm/s² wird $D = \frac{3728 \text{ kgm}}{\text{s}^2\, 0{,}08 \text{ m}} = 46600 \text{ kg/s}^2$.

2. Beim Umlauf eines schlecht ausgewuchteten Maschinenteils (z. B. einer Kurbelwelle) tritt nach der Seite des Massenüberschusses m die Fliehkraft Z auf (Bild 156). Wenn sich das Lager nur in vertikaler Richtung bewegen kann, ergibt sich in der gezeichneten Stellung eine nach oben gerichtete Kraftkomponente K. Da der Vektor Z im Kreise umläuft, entsteht eine sinusförmig auf und ab pendelnde Kraftwirkung. Um diese zu beseitigen, muß man den Körper durch Abschleifen oder Anbringen von Zusatzmasse auswuchten.

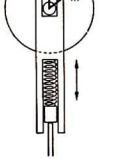


Bild 156. Die Fliehkraft erzeugt im Lager eine harmonische Schwingung

Zur Ermittlung von Größe und Lage der anzubringenden Masse verwendet man die **„Auswuchtmaschine“** (Bilder 157, 158). Die Federn F, anfänglich durch den umlaufenden Körper mit einer bestimmten Amplitude schwingend, werden nun vom unteren Ende her im Rhythmus des Umlaufes, also mit gleichem ω bewegt. Dies geschieht mit Hilfe der Exzenterscheibe E, welche auf das Hebelsystem H wirkt und die Federn von unten steuert. Durch Verstellen des Griffes G am verbindenden Differentialgetriebe erreicht man eine genau gegenläufige Bewegung der Federn, d. h. eine Phasenverschiebung um π, wobei die Schwingungen am geringsten werden. Somit ist die Lage der Unwucht aus der Stellung des Griffes G erkennbar. Um ihre Größe zu finden, bringt man die Hebelübertragung durch den Schieber S regulierbar an, womit man die Amplitude der Gegenbewegung mißt und daraus die Unwucht berechnet. Bei genauem Ausgleich läuft der Körper schwingungsfrei.

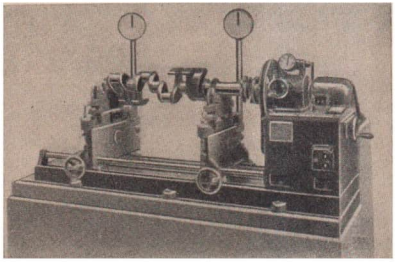


Bild 157. Auswuchtmaschine mit Federausgleich

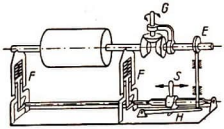


Bild 158
Schema der Auswuchtmaschine

6.21 Die lineare Federschwingung

An eine Schraubenfeder wird ein Gewichtsstück P gehängt, wodurch sie sich um das Stück l verlängert. Zieht man noch weiter daran und läßt dann los, so entsteht eine auf und nieder schwingende Bewegung. Die Amplitude A ist die (nach oben und unten gleiche) größte Auslenkung und die äußerste dehnende Kraft gleich $A\frac{P}{l} = AD$. Die zur Dehnung erforderliche Arbeit ist dann (mittlere Kraft mal Weg) gleich $\frac{A^2 D}{2}$, welche gleich der kinetischen Energie beim Durchlaufen der Ruhelage sein muß:

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{A^2 D}{2}. \text{ Hieraus ergibt sich } v = A\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Ferner ist nach (86) $v = A\omega$ sowie $\omega = 2\pi f$, so daß

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \text{ und die}$$

(88) **Schwingdauer eines harmonischen Schwingers:** $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$

Wie mit einigen einfachen Versuchen leicht zu bestätigen, ist dreierlei zu erkennen:

1. Die Schwingdauer ist von der Amplitude A unabhängig.

2. Die Feder schwingt um so langsamer, je größer die angehängte Masse m ist.

3. Die Feder schwingt um so schneller, je größer ihre Federhärte, d. h. je größer die Richtgröße D ist.

Beispiele: 1. Eine Masse von 50 kg hängt an einer Feder. Im Ruhezustand ruft sie eine Dehnung von 4 cm hervor. Schwingdauer und Frequenz? –

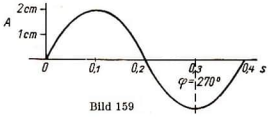


Bild 159

Mit $D = \frac{m\,g}{l}$ wird $T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}} =$

$$= 2\,\pi \sqrt{\frac{0{,}04\ \mathrm{m\,s^2}}{9{,}81\ \mathrm{m}}} = 0{,}4\ \mathrm{s};$$

$$f = {}^1/T = {}^1/0{,}4\ \mathrm{s} = 2{,}5\,{}^1/\mathrm{s}$$

2. Stelle diese Schwingung grafisch dar (Bild 159)! ($A = 2$ cm)

3. Wie groß ist der Phasenwinkel φ nach 5,5 s? – Dividiert man 5,5 s durch 0,4 s, so erhält man 13,75, d. h. 13 volle Schwingungen und $3/4\ T$. $\varphi = 270°$.

4. Welche Masse m' ist an die im 1. Beispiel erwähnte Feder anzuhängen, wenn die Schwingdauer gerade 1 s betragen soll? – Durch Auflösen von Formel (88) nach m entsteht $m' = \frac{T^2 D}{4\,\pi^2}$ bzw. mit den eingesetzten Werten

$$m' = \frac{1^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2 \cdot 0{,}04\ \mathrm{m} \cdot 4\,\pi^2} = 0{,}311\ \mathrm{kg}\,.$$

5. Ein Stahlträger wird bei einer Belastung mit einer Masse von 50 kg um 2 cm durchgebogen und gerät durch Erschütterung in Schwingungen. Frequenz? –

$$f = \frac{1}{2\,\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\,\pi} \sqrt{\frac{50\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2 \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} \cdot 50\ \mathrm{kg}}} = 3{,}5\,{}^1/\mathrm{s}\,.$$

6.22 Dreh- (Torsions-) Schwingungen

Wenn man eine schwere Scheibe zentrisch an einem fest aufgehängten Stahldraht befestigt, hat man ein **Torsionspendel** (Bild 160). Gibt man ihm eine anfängliche Verdrehung, so wird der Draht verdrillt, und die Scheibe führt langsame Schwingungen aus, wie die Unruhe einer Taschenuhr oder das Drehpendel einer Jahresuhr.

Wegen der Drehbewegung der schwingenden Masse hat man hier ihr Trägheitsmoment Θ (Drehmasse) zu setzen. Dementsprechend tritt an Stelle der Richtgröße die

(89) **Winkelrichtgröße:** $D^* = \frac{\text{Drehmoment } M}{\text{Drehwinkel } \alpha}$, so daß die

(90) **Schwingdauer des Torsionspendels:** $\boxed{T = 2\,\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}}$

Der in die Berechnung der Winkelrichtgröße eingehende Drehwinkel ist wieder in Bogenmaß einzusetzen.

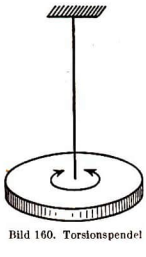


Bild 160. Torsionspendel

Beispiele: 1. Welche Winkelrichtgröße hat der Aufhängedraht, wenn ein zentrisch daran befestigter Metallzylinder von 500 g und 5 cm Durchmesser Drehschwingungen von 1,6 s Dauer ausführt? –
Das Trägheitsmoment des Körpers beträgt nach S. 84

$$\Theta = \frac{0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}025^2\,\mathrm{m}^2}{2} = 0{,}000156\,\mathrm{kgm}^2\,.$$

Aus (90) folgt dann

$$D^* = \frac{4\,\pi^2 \cdot 0{,}000156\,\mathrm{kgm}^2}{2{,}56\,\mathrm{s}^2} = 0{,}0024\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2\,.$$

2. Die Kreisscheibe der in Bild 217c gezeigten Vorrichtung hat einen Durchmesser von 80 mm und wiegt 750 g. Eine am Umfang hängende Masse von 50 g ruft eine Verdrillung der Feder um 25° hervor. Wie groß ist die Schwingdauer? –

$$\Theta = \frac{0{,}75\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}04^2\,\mathrm{m}^2}{2} = 0{,}0006\,\mathrm{kgm}^2$$

$$D^* = \frac{0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} \cdot 180}{\mathrm{s}^2 \cdot 25\,\pi} = 0{,}045\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2$$

$$T = 0{,}72\,\mathrm{s}; \quad f = 1{,}39\,{}^1/\mathrm{s}$$

6.3 Schwerependel

6.31 Das mathematische Pendel

Es wird annähernd verwirklicht durch einen leichten Faden der Länge l, an dem die kleine Pendelkugel vom Gewicht $G = mg$ hängt. Einmal angestoßen, schwingt es lange Zeit hin und her. Durch Veränderung der Fadenlänge findet man leicht, daß sich die Schwingdauer bei 4facher Länge des Fadens verdoppelt, bei 9facher verdreifacht usw.:

1. Die Werte der Schwingdauer verhalten sich wie Quadratwurzeln aus den Pendellängen.
2. Die Schwingdauer ist von der Masse und Art des anhängenden Gewichtes unabhängig.
3. Die Schwingdauer ist von der Amplitude unabhängig.

All das läßt sich durch einfache Versuche leicht bestätigen.

Ableitung der Pendelformel. Man kann die senkrecht nach unten gerichtete Kraft $G = mg$ nach Bild 161 in eine radiale (P_1) und tangentiale (P_2) Komponente zerlegen. Erstere kann auf die Bewegung keinen Einfluß haben, da sie in bezug auf den Aufhängepunkt das Drehmoment Null ergibt. Hinsichtlich der tangentialen Komponente ergibt die Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke die Proportion

$$\frac{P_2}{G} = \frac{d}{l} \quad \text{oder} \quad P_2 = \frac{G\,d}{l}\,.$$

Dies besagt, daß die Kraft P_2 der Elongation d proportional ist. Damit erweist sich das Pendel als ein harmonischer Schwinger, für den Formel (88) gelten muß. Die in

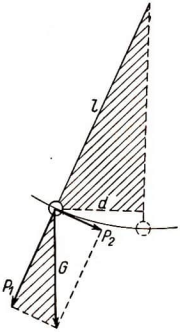


Bild 161. Kräfte am mathematischen Pendel

dieser Formel vorkommende Richtgröße D ist aber im Falle des Pendels die ablenkende Kraft P_2 je Längeneinheit, d. h.

$$D = \frac{P_2}{d} = \frac{G}{l} = \frac{m\,g}{l}\,.$$

Setzt man dies in (88) ein, so erhält man die

(91) **Schwingdauer des mathematischen Pendels:** $\boxed{T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$

Hierin ist insofern ein Fehler enthalten, als zur Berechnung der Richtgröße eigentlich nicht die Sekante d, sondern das durchlaufene Bogenstück eingesetzt werden müßte; doch kann diese Abweichung bei kleinen Amplituden vernachlässigt werden. Das einfache Pendel ist somit, genau besehen, ein anharmonischer Schwinger, was sich besonders bei großen Amplituden bemerkbar macht. Die rechnerisch genaue Erfassung führt zu schwierigen Formeln (elliptische Integrale).

Die Formel zeigt in der Tat, daß T nur von der Pendellänge und g allein abhängt!

Beispiele: 1. Ein Kran trägt eine Last an einem 15 m langen Seil. Schwingdauer? –

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{15\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2}{9{,}81\ \mathrm{m}}} = 7{,}8\ \mathrm{s}$$

2. Wie lang ist ein Pendel, das für eine Halbschwingung genau 1 Sekunde benötigt? – Durch Umformung erhält man

$$l = \frac{4\ \mathrm{s}^2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m}}{4\,\pi^2 \cdot \mathrm{s}^2} = 0{,}994\ \mathrm{m}\,.$$

Die Länge des **Sekundenpendels** beträgt rund 1 m.

6.32 Das physische Pendel

Strenggenommen ist das mathematische Pendel eine punktförmige Masse an einem gewichtslosen Faden. Jeden anderen unter dem Einfluß der Schwere schwingenden Körper nennt man ein **physisches** (körperliches) Pendel, wie z. B. ein aufgehängtes Brett oder das Perpendikel einer Uhr. Da hier eine Drehung um den Aufhängepunkt erfolgt, kann man die Formel für die Drehschwingung zugrunde legen. Der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkt 0 ist r und das Moment $M = G\,d = G\,r \sin\alpha$ (Bild 162). Für kleine Drehwinkel ist $\sin\alpha \approx \alpha$ (z. B. $\sin 3° = 0{,}05234$ und $3°$ im Bogenmaß $= 0{,}05236$), so daß $D^* = \frac{G\,r \sin\alpha}{\alpha} \approx G\,r$ und damit die

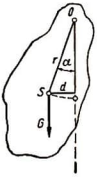


Bild 162
Physisches Pendel

(92) **Schwingdauer des physischen Pendels:** $\boxed{T = 2\,\pi \sqrt{\frac{\Theta}{G\,r}}}$

Die **reduzierte Pendellänge** l' ist diejenige Länge eines mathematischen Pendels, dessen Schwingdauer mit der eines mit ihm verglichenen physischen Pendels übereinstimmt.
Man kann sie durch einen einfachen Versuch bestimmen. An demselben Punkt, um den der Gegenstand schwingt, befestigt man ein Fadenpendel und verändert seine Länge so lange, bis beide Pendel die gleiche Schwingdauer aufweisen. Das ist durch Ausprobieren leicht zu erreichen.
Wenn dann beide Pendel auf gleiche Schwingdauer abgeglichen sind und in der Ruhelage nach unten hängen, gibt der Endpunkt des Fadenpendels auf dem physischen Pendel die Lage des sogenannten **Schwingungsmittelpunktes** an. Der Schwingungsmittelpunkt ist somit der im Abstand l' senkrecht unter der Aufhängung liegende Punkt eines schwingenden Körpers.
Durch Vergleich der Schwingdauer der beiden gleichschwingenden Pendel ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{m g r}} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}\,.$$ Hieraus berechnet sich die

(93) **reduzierte Pendellänge:** $$\boxed{l' = \frac{\Theta}{m r}}$$

Den Schwingungsmittelpunkt kann man auch als **Stoßmittelpunkt** St bezeichnen. Führt man nämlich gegen einen Stab, der an einem kurzen Faden aufgehängt ist, einen Stoß (Bild 163), so kann dreierlei eintreten: Ober- oder unterhalb von St getroffen, tritt am Aufhängepunkt ein kräftiger Rückstoß auf, der den Faden zerreißen kann; im Stoßmittelpunkt getroffen aber schwingt der Stab als Pendel um seine Aufhängung. Der schädliche Rückstoß bleibt aus.

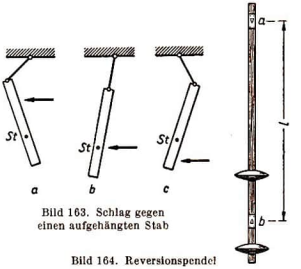


Bild 163. Schlag gegen einen aufgehängten Stab

Bild 164. Reversionspendel

Beispiele: 1. Ein dünner Stab schwingt um seinen Endpunkt. Beträgt seine Länge l, so ist sein Trägheitsmoment $\Theta = \frac{m}{3} l^2$ und die Winkelrichtgröße $D^* = Gr = mg\frac{l}{2}$, so daß $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$, d. h. $l' = \frac{2}{3} l$.
Er hat also dieselbe Schwingdauer wie ein Fadenpendel von $^2/_3$ seiner Länge.

2. Schwere Klöppel von Glocken sind physische Pendel. Sie müssen so geformt sein, daß sie mit dem Stoßmittelpunkt anschlagen, sonst würde die Aufhängung bald zerstört werden.

Da die Schwingdauer des mathematischen Pendels nur von seiner Länge abhängt, kann man sich die schwingende Masse beliebig klein denken und Aufhänge- und Endpunkt miteinander vertauschen. Dem entspricht der Satz:

Die Schwingdauer eines physischen Pendels bleibt ungeändert, wenn man Aufhänge- und Schwingungsmittelpunkt vertauscht.

Die reduzierte Pendellänge bleibt dabei natürlich erhalten.

Das **Reversionspendel** (Bild 164) ist ein Stabpendel mit 2 verstellbaren Gewichten und 2 Aufhängevorrichtungen. Man läßt es abwechselnd um je eines der beiden Schneidenpaare a und b schwingen und verstellt die Gewichte so lange, bis die Schwingzeiten genau übereinstimmen. Der Abstand l der beiden Schneiden läßt sich genauestens messen und ist gleich der Länge eines gleichschwingenden mathematischen Pendels, für das Formel (91) gilt. Das Reversionspendel dient zur Präzisionsbestimmung der Erdbeschleunigung g. Der S. 49 erwähnte Potsdamer Normalwert ist damit gemessen worden.

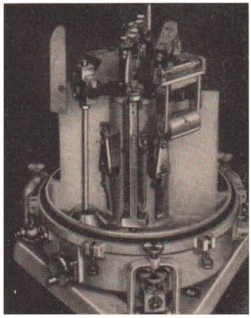


Bild 165. Vakuum-4-Pendel-Apparat für relative Schweremessungen

6.33 Bestimmung von Massenträgheitsmomenten aus Schwingungen

Bei komplizierten Körpern (z. B. Läufern von Elektromotoren, Propellern usw.) ist eine genaue Berechnung des Trägheitsmomentes mitunter zu umständlich. Es ist dann viel einfacher, das Trägheitsmoment dadurch zu bestimmen, daß man den Gegenstand in geeigneter Weise aufhängt und als **physisches Pendel** schwingen läßt. Durch Abzählen der Schwingungen in einer bestimmten Zeit läßt sich die Schwingungsdauer T leicht ermitteln und nach Formel (92) das Trägheitsmoment ausrechnen.

Bild 166 zeigt dies für den Fall einer Riemenscheibe, die pendelnd auf zwei Schneiden gehängt wird. Formel (92) liefert das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse $\Theta = \frac{T^2 m g r}{4\pi^2}$.

Dabei bedeuten r den Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt und m die leicht zu bestimmende Gesamtmasse der Scheibe. Soll nun das Trägheitsmoment dieser Scheibe bezüglich ihres Schwerpunktes ermittelt werden, so ist nach dem Satz von Steiner hiervon der Betrag $m r^2$ abzuziehen: $\Theta_s = \Theta - m r^2$.

Beispiel: Die Riemenscheibe wiegt 800 g, $r = 6$ cm. Sie führt in 1 min 105 Schwingungen aus. – Es ist zunächst $T = \frac{60\,\mathrm{s}}{105}$ und $\Theta = \frac{60^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 0{,}06\,\mathrm{m}}{105^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 4\,\pi^2} = 0{,}00390\,\mathrm{kg\ m^2}$; ferner ist $m r^2 = 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}06^2\,\mathrm{m}^2 = 0{,}00288\,\mathrm{kg\ m^2}$. Damit wird

$$\Theta_s = (0{,}00390 - 0{,}00288)\,\mathrm{kgm^2} = 0{,}00102\,\mathrm{kgm^2}.$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Körper an einem langen Stahldraht aufzuhängen (Bild 167). Nach einer kleinen Verdrehung führt er dann **Torsionsschwingungen** mit der Schwingdauer T aus, für welche Formel (90) gilt, aus der sich das Trägheitsmoment Θ bezüglich der Drehachse berechnen ließe. Da aber die direkte Bestimmung der Winkelgröße D^* des Drahtes zuviel Umstände macht, stellt man noch einen zweiten Versuch an, indem man den Gegenstand mit einem zusätzlichen Hilfskörper belastet (auf Bild 167 ist es ein Hohlzylinder), dessen Trägheits-

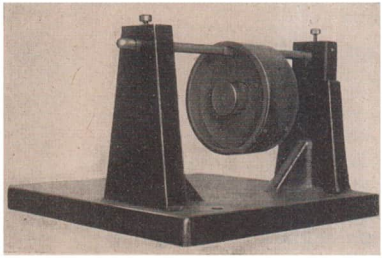


Bild 166. Ermittlung des Trägheitsmomentes einer Riemenscheibe

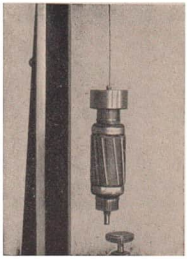


Bild 167. Ermittlung des Trägheitsmomentes eines Motorankers

moment Θ' sich genau ausrechnen läßt. Auf diese Weise erhält man die neue Schwingdauer T' und damit 2 Gleichungen, aus denen D^* herausfällt.

Es ist also $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$ und damit $D^* = \frac{4\pi^2 \Theta}{T^2}$

bzw. $T' = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta + \Theta'}{D^*}}$ und damit $D^* = \frac{4\pi^2 (\Theta + \Theta')}{T'^2}$.

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten ergibt sich dann das gesuchte Trägheitsmoment zu $\Theta = \frac{\Theta' T^2}{T'^2 - T^2}$.

6.4 Die Dämpfung

Die Schwingungen eines einmal angestoßenen Pendels klingen im Laufe der Zeit ab. Seine Amplitude wird stetig kleiner, bis das Pendel stehenbleibt. Die Ursache sind die Reibung an der Aufhängung, der Luftwiderstand und die an das Gestell abgegebene Energie, das stets ein wenig mitbewegt wird. So halten die Schwingungen einer Blattfeder, die fest in einem Schraubstock eingespannt ist, viele Sekunden lang an. Faßt man sie aber in Gummi, so kommt sie schon nach wenigen Schwingbewegungen zur Ruhe: eine Folge der starken **Dämpfung.**

Die Dämpfung läßt sich bei keiner Schwingung ganz vermeiden, so daß Schwingungen im Prinzip stets so verlaufen, wie Bild 168 zeigt. In den meisten Fällen sinusförmiger Schwingungen liegt ein einfaches Gesetz[1]) vor:

Die Amplituden zweier aufeinanderfolgender Schwingungen stehen stets im gleichen Verhältnis (Dämpfungskonstante k) zueinander.

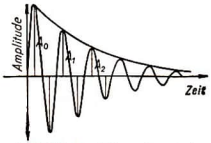


Bild 168. Darstellung einer stark gedämpften Schwingung

[1]) Das Gesetz gilt streng, wenn die dämpfende Kraft in jedem Augenblick der Geschwindigkeit der schwingenden Masse proportional ist (Geschwindigkeitsdämpfung).

Ist z. B. $k = 1{,}5$, so verhalten sich die Amplituden der Reihe nach wie 1 : 0,667 : 0,444 usw. Allgemein kann man dafür schreiben:

$$A_0 : A_1 : A_2 : A_3 \ldots = A_0 : \frac{A_0}{k} : \frac{A_0}{k^2} : \frac{A_0}{k^3} \ldots$$

(94) **Amplitude der z-ten Schwingung:** $\boxed{A_z = \frac{A_0}{k^z}}$

Bild 169. Anker und Steigrad eines Uhrpendels

Bei Meßinstrumenten wird starke Dämpfung der schwingenden Teile angestrebt, um rascher ablesen zu können. Waagen besitzen meist Luftdämpfung, wobei ein Kolben mit geringem Spielraum frei in einem Zylinder gleitet (Bild 49). Elektrische Meßgeräte haben meist eine Wirbelstromdämpfung. Will man andererseits Schwingungen beliebig lange aufrechterhalten, so muß man sie entdämpfen, indem man die verlorengehende Energie immer wieder von außen zuführt. Beim Uhrpendel geschieht das mit Hilfe des Steigrades, welches, durch Gewichte oder Federkraft angetrieben, der am Pendel befestigten Hemmung (Anker) periodisch Impulse zuführt (Bild 169).

Beispiele: 1. Die anfänglich 25 cm große Amplitude eines Pendels klingt nach 35 Schwingungen auf 12,5 cm ab. Welchen Wert hat die Dämpfungskonstante k? –

Nach Formel (94) ist $k^z = \frac{A_0}{A_z}$, d. h. $k = \sqrt[35]{2}$. Mit Hilfe logarithmischer Rechnung erhält man $k = 1{,}02$.

2. Nach wieviel Schwingungen wird die Amplitude dieses Pendels nur noch 10 cm betragen? –

Da die Dämpfungskonstante nunmehr bekannt ist, kann z berechnet werden. Durch Logarithmieren erhält man

$$z \lg 1{,}02 = \lg \frac{25}{10} \quad \text{bzw.} \quad z \cdot 0{,}00860 = 0{,}39794$$

und hieraus $z = 46$ Schwingungen.

6.5 Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Die bisher besprochenen schwingenden Systeme waren solche, die nach einmaligem Anstoß mit ihrer Eigenfrequenz weiterschwingen. Man kann einem solchen Pendel aber auch ganz andere Frequenzen aufzwingen, wenn man es mit einem anderen Schwinger verbindet (koppelt). Es entsteht das zusammengesetzte System: **Erreger** (Oszillator)-**Kopplung-Mitschwinger** (Resonator).

Beispiele: 1. Bei einer Geige ist die angestrichene Saite der Oszillator, der Steg die Kopplung und der mitschwingende Boden der Resonator.

2. Ein nicht genau ausgewuchteter Motor stellt einen Schwinger dar, der bei starrer Kopplung mit seinem Fundament dieses zum Mitschwingen bringt.

Die Schwingungen des Resonators werden um so kräftiger, je besser seine Eigenfrequenz mit der Frequenz des Erregers übereinstimmt und je kleiner die Dämpfung des Resonators ist.

Bei genauer Übereinstimmung der Frequenzen wird der Mitschwinger zu sehr hohen Amplituden aufgeschaukelt. In diesem Fall spricht man von **Resonanz.**

Die Verhältnisse kann man mit einem Resonanzapparat nach Bild 170 in allen Einzelheiten studieren. Ein langsam schwingendes Pendel (z. B. $f = 0{,}5^1/s$) mit dem Zeiger A wird über eine Schneckenfeder F von dem Exzenter E angeregt, der von einem regelbaren, langsam laufenden Motor getrieben wird. Man führt nun eine Versuchsreihe in der Weise durch, daß man den Motor mit einer bestimmten Drehzahl laufen läßt, die Amplitude des ein wenig mitbewegten Zeigers A mißt und ihren Wert a in die grafische

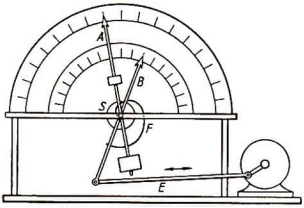


Bild 170. Anregung eines schwingenden Pendels durch Exzenter über eine Federkopplung

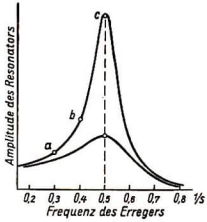


Bild 171. Resonanzkurve mit geringer und starker Dämpfung

Darstellung (Bild 171) einträgt. Dann verändert man die Drehzahl und trägt den neuen Amplitudenwert b ein. So fortfahrend, stößt man auf die Drehzahl, die mit der Eigenfrequenz des Zeigers A übereinstimmt, dessen Amplitude hier einen sehr großen Wert erreicht. Es entsteht eine bei c steil zugespitzte Resonanzkurve. Nun lassen sich die Schwingungen mit einem auf der Scheibe S schleifenden Wattebausch in verschiedenem Maße dämpfen. Eine zweite Versuchsreihe ergibt dann eine erheblich flachere Kurve. Wäre die Dämpfung gleich Null, so müßte die Amplitude des Resonators durch die fortwährende Energiezufuhr allmählich unerträglich hohe Werte annehmen. Darin besteht die große Gefahr bei schwingenden Fundamenten.

Weiterhin beobachte man die Ausschläge des mit dem Erreger verbundenen Zeigers B. Bei sehr kleinen Frequenzen bewegen sich A und B stets gleichsinnig und im gleichen Takt. Sie sind immer in gleicher Phase. Das Verhältnis ändert sich aber im Falle der Resonanz, wo der Erreger dem Resonator um 90° vorauseilt (Bild 172). Der erregende Zeiger geht schon wieder durch die Ruhelage, während das erregte Pendel eben erst seine Richtung umkehrt. Die Phasenverschiebung erreicht bei steigender Frequenz des Erregers schließlich 180°. Im Resonanzfall ist die Federspannung gerade dann am stärksten, wenn der Resonator zu einer neuen Schwingung ansetzt, wodurch das Pendel maximal beschleunigt wird.

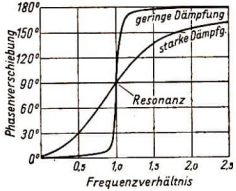
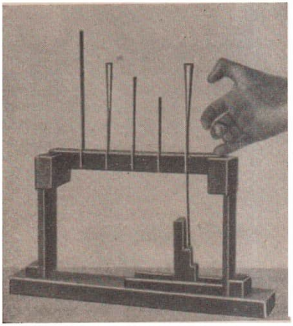


Bild 172. Gegenseitige Phasenverschiebung zwischen Oszillator und Resonator bei verschiedenem Frequenzverhältnis

Beispiele: 1. Eine Taschenuhr liegt flach in einer kleinen Schachtel, die an 3 Fäden aufgehängt ist. Schachtel samt Uhr führen im Resonanzfall starke Drehschwingungen im Takt der Unruhe aus.



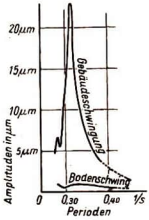


Bild 174. Resonanzkurve eines Hauses

Bild 173. Mechanisches Modell eines Frequenzmessers

2. Ein elektrischer Frequenzmesser enthält eine Reihe von Stahlzungen, deren jede auf eine andere Frequenz abgestimmt ist und die von einem Elektromagneten gemeinsam erregt werden. Es spricht stets diejenige Zunge an, deren Frequenz mit der des Wechselstroms übereinstimmt (Bild 173).

3. Bild 174 zeigt die Resonanzlage (bei $f = 0{,}32^1/s$) eines Hauses, das von den Erschütterungen des Bodens zum Mitschwingen angeregt wird.

6.6 Rückkopplung

Mittels geeigneter Vorrichtungen läßt sich es einrichten, daß der Schwinger selbst für seine Entdämpfung sorgt. Ein dünner Wasserstrahl ist z. B. gegen Erschütterungen sehr empfindlich. Hält man an die Ausflußdüse eines waagerecht auf eine Membran treffenden Strahles eine Taschenuhr, so wird der Strahl im Rhythmus des Geräusches in feine Tröpfchen aufgelöst. Das Ticken ist mit Lautsprecherstärke weithin hörbar. Umgekehrt können die Eigenschwingungen der Membran auch den Wasserstrahl steuern, wenn man Düse und Membranfassung durch einen aufgelegten Stab verbindet (Bild 175). Der Strahl zerfällt im Takt dieser Eigenschwingungen und bringt die Membrane zu lautem Tönen. Diese selbstgesteuerte Entdämpfung und Verstärkung nennt man Rückkopplung; sie ist ein wichtiges Prinzip elektrischer Verstärker.

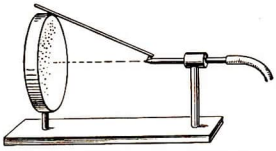


Bild 175. Rückkopplung einer schwingenden Membran über einen aufgelegten Stab

6.7 Überlagerung von Schwingungen

6.71 Zusammensetzung von parallel zueinander verlaufenden Schwingungen

Veranlaßt man einen Körper, gleichzeitig zwei verschiedenen Schwingungen zu folgen, so führt er zusammengesetzte Schwingungen aus. Man kann zu diesem Zweck zwei

schwere, verstellbare Pendel durch eine leichte Querlatte verbinden und an ihrer Mitte eine Schreibfeder befestigen (Bild 176). Die Bewegung der Feder wird auf einen Papierstreifen aufgezeichnet, welcher langsam darunter vorbeigleitet.

Es lassen sich u. a. folgende Versuche anstellen:

1. Beide Pendel haben gleiche Schwingdauer und werden zu gleicher Zeit ausgelöst. Sie schwingen also in gleicher Phase. Die Feder zeichnet die Schwingung als Sinuslinie.

2. Die Pendel werden aus von der Ruhelage gleich weit entfernten, aber entgegengesetzten Stellungen losgelassen, womit eine Phasenverschiebung von 180° erreicht wird. Die Feder bleibt in Ruhe. Rechnerisch entspricht das einer Addition der beiden Sinusfunktionen:

$$\sin(\omega t + 180°) + \sin \omega t = \sin \omega t \cos 180° + \cos \omega t \sin 180° + \sin \omega t = 0$$

3. Das eine Pendel wird losgelassen, wenn das andere gerade durch den Ruhepunkt schwingt. Die Phasenverschiebung beträgt jetzt 90°:

$$\sin(\omega t + 90°) + \sin \omega t = \sin \omega t \cos 90° + \cos \omega t \sin 90° + \sin \omega t = \\ = \cos \omega t + \sin \omega t$$

Erweitert man diesen Wert mit $\sqrt{2}$, so erhält man

$$\sqrt{2}\,(\cos \omega t \sin 45° + \sin \omega t \cos 45°) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 45°)$$

d. h. wieder eine Sinusschwingung gleicher Periode, aber mit einer Phasenverschiebung von 45°.

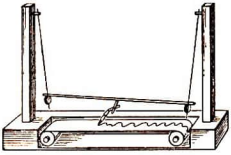


Bild 176. Aufzeichnung einer zusammengesetzten Schwingung

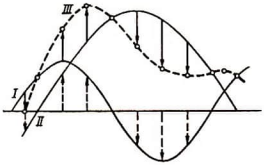


Bild 177. Grafische Addition zweier Schwingungen

4. Das eine Pendel wird auf die halbe Schwingdauer verkürzt und beide gleichzeitig ausgelöst. Die Feder führt keine sinusförmige Bewegung mehr aus, sondern zeichnet eine sich rhythmisch wiederholende, eigenartige Wellenlinie auf. Die Schwingung ist nicht mehr harmonisch.

5. Es entstehen immer neue Wellenbilder, wenn man Phase, Frequenz oder Amplitude willkürlich ändert.

Derartige Schwingungsbilder lassen sich leicht zeichnen (Bild 177). Man trägt die beiden Sinuskurven I und II längs der gleichen (Zeit-) Achse auf, addiert die jeweiligen Auslenkungen durch Übereinandersetzen und verbindet die erhaltenen Punkte miteinander (III).
Schnell verlaufende Schwingungen untersucht man zweckmäßig mittels Lichtzeigers und Drehspiegels (Bild 178). Um z. B. die Schwingungen eines Klingelklöppels sichtbar zu machen, läßt man ihn vor einem Spalt schwingen, beleuchtet diesen mit einem

Projektor und richtet das Bild über einen rotierenden Spiegel auf eine weiße Wand. Der Spiegel zieht den Spalt zu einem Lichtband auseinander, und die Bewegung des Klöppels erscheint als dunkle Kurve. Eine dazwischengeschaltete Linse sorgt für die nötige Vergrößerung und scharfe Abbildung. Auch hier zeigt sich keine Sinus-, sondern eine gezackte Kurve, die durch Überlagerung einzelner Teilschwingungen entstanden (Bild 179) gedacht werden kann. Die Schwingungen fast aller Körper haben derart zusammengesetzten Charakter. Die rein harmonische Schwingung ist ein idealer Grenzfall.

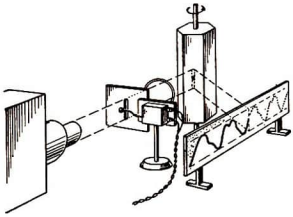


Bild 178. Sichtbarmachung von Schwingvorgängen mit dem Drehspiegel

Bild 179. Schwingungen des Klöppels einer Hausklingel

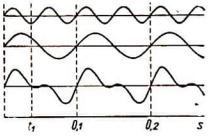


Bild 180. Addition zweier Schwingungen im Frequenzverhältnis 2:1

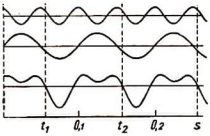


Bild 181. Frequenzverhältnis 2:1 mit gegenseitiger Phasenverschiebung

Wie man durch Überlagerung einzelner Sinusschwingungen die verschiedensten Schwingungskurven erzeugen kann, so lassen sich auch umgekehrt Schwingungen von beliebiger Kurvenform mit einer bestimmten mathematischen Methode in einzelne, sinusförmige Teilschwingungen auflösen (Fourieranalyse).

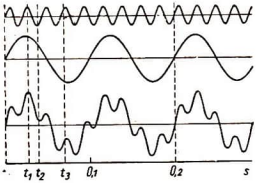


Bild 182. Überlagerung bei großem Frequenzunterschied

6.72 Senkrecht zueinander verlaufende Schwingungen

Man kann es auch so einrichten, daß ein Körper zwei zueinander senkrechte Schwingungen gleichzeitig ausführt. Eine geeignete Vorrichtung ist eine schwere, durchlochte Masse, die zwischen drei gleichgespannten Federn aufgehängt ist (Bild 183). Sie kann sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung mit gleicher Frequenz schwingen. Ein Projektor wirft einen Lichtfleck durch das Loch an die Wand. Gibt man der Masse einen beliebigen Anstoß, so beschreibt der Lichtfleck Kreise oder Ellipsen. Man nennt sie **zirkular** bzw. **elliptisch polarisierte** (gerichtete) Schwingungen.

Je nach dem Phasenunterschied können bei gleicher Amplitude und Frequenz der Komponenten folgende Formen auftreten (Bild 184):

1. Beide Schwingungen gehen gleichzeitig durch die Null-Lage. Es entsteht ein diagonal verlaufender Strich, d. h. eine **linear polarisierte** Schwingung. Wegen $y = \sin \omega t$ und $x = \sin \omega t$ ist in jedem Augenblick $y = x$, womit sich das Bild einer um 45° geneigten Geraden ergibt. Ebenso kommt bei einem Phasenunterschied von 180° eine Gerade zustande.

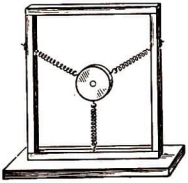


Bild 183. Herstellung elliptischer Schwingungen

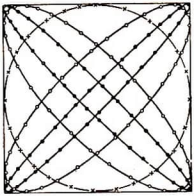
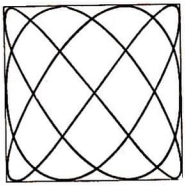
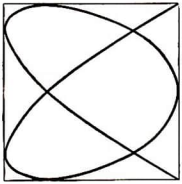


Bild 184. Lissajoussche Figuren bei einem Frequenzverhältnis von 1:1



a



b

Bild 185a u. b. Lissajoussche Figuren bei einem Frequenzverhältnis von 3:4 und verschiedener Phasenlage

2. Der Phasenunterschied beträgt $T/4 = 90°$. Die vertikale Schwingung setzt erst ein, wenn die horizontale schon den 1. Umkehrpunkt erreicht hat. Es entsteht eine Kreisbahn. Wegen $y = \sin \omega t$ und $x = \sin (\omega t + 90°) = \cos \omega t$ besteht die Beziehung $x^2 + y^2 = 1$, die für einen Kreis gültig ist.

3. Bei allen anderen Phasenunterschieden, z. B. $T/8$, entstehen Ellipsen verschiedener Form, wie sich auch mathematisch zeigen läßt.

Sobald die Frequenzen beider Komponenten aber verschieden sind, schließen sich die Ellipsen nicht, und es entstehen eigenartig verschlungene Kurven. Nach ihrem Entdecker heißen sie **Lissajoussche Figuren** (Bild 185). Ihre Umhüllende ist im Fall gleicher Amplituden ein Quadrat, sonst aber ein Rechteck. Solche Figuren lassen sich leicht herstellen, wenn man einen sandstreuenden Trichter an ein Pendel hängt, das zu gleicher Zeit nach zwei zueinander senkrechten Richtungen schwingen kann (Bild 186).

Wie man derartige Figuren zeichnet, sei am Beispiel $f_1 : f_2 = 3 : 4$ $(= 12 : 16)$ bei gleicher Amplitude erläutert (Bild 187). Man beschreibe in ein Quadrat einen Kreis und teile seinen Umfang in 12(○) bzw. 16(◎) Teile. Durch die Teilpunkte ziehe man Parallelen zu den Quadratseiten und erhält dadurch ein Netz aus Rechtecken. Sobald man, an der Ecke eines beliebigen Rechteckes beginnend, in Richtung der Diagonalen einen fortlaufenden Kurvenzug in das Netz legt, entsteht eine Lissajoussche Kurve. Der im Bild gemachte Anfang entspricht einer Phasenverschiebung von $^2/_{16}\ T_2$: Bei anfänglicher Phasengleichheit muß man im Mittelpunkt des Quadrates beginnen.

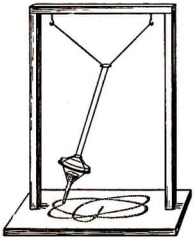


Bild 186. Sandstreuender Trichter zeichnet Lissajoussche Figuren

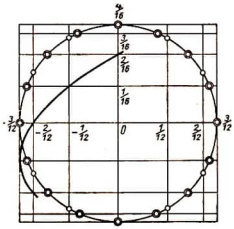


Bild 187. Konstruktion einer Lissajousschen Figur

Die Lissajousschen Figuren stellen nur dann einen geschlossenen Linienzug dar, wenn die beiden Grundfrequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Bei der geringsten Verstimmung aber ändert der Linienzug seine Gestalt ständig. Sehr schön kann man all diese Erscheinungen mit schwingenden Elektronenstrahlen in eigens dafür gebauten Röhren studieren (Oszillographen mit Braunscher Röhre zur Untersuchung von Schwingungsvorgängen aller Art).

6.8 Schwebungen

Wenn die Frequenzen der beiden sich überlagernden Schwingungen sich nur wenig voneinander unterscheiden, entsteht ein typisches Schwingungsbild, das man **Schwebung** nennt. Ein Bild solcher Schwebungen läßt sich nach dem in Abschn. 6.71 angegebenen Verfahren durch Zeichnung gewinnen (Bild 188). Hierbei muß aber große Sorgfalt aufgewandt werden, wenn die resultierende Kurve sauber ausfallen soll. Das Charakteristische der dabei entstehenden Schwingungskurve ist, daß ihre Amplituden in regelmäßigen Abständen von 0 auf einen Höchstwert anschwellen und dann wieder auf 0 abnehmen. Besser ist dies auf Bild 189 erkennbar.

Bild 188. Entstehung von Schwebungen aus 2 Schwingungen benachbarter Frequenz

Schwebungen sind Schwingungen mit periodisch an- und abschwellender Amplitude.

Man versteht ferner unter der

Schwebungsfrequenz: die Anzahl der in einer Sekunde auftretenden Schwingungsmaxima oder -minima.

Wie läßt sich nun die Schwebungsfrequenz f aus den beiden Frequenzen f_1 und f_2 ihrer Komponenten bestimmen? Ein Schwebungsmaximum entsteht offenbar immer dann, wenn die Maxima der beiden Komponenten zur Deckung kommen (s. Bild 188), d. h. dann, wenn die eine Schwingung die andere „überholt". Finden z. B. in einer Sekunde $f_1 = 15$ und $f_2 = 14$ ganze Schwingungen statt und beginnen die beiden Schwingungen in gleicher Phasenlage, so befinden sie sich am Ende der ersten Sekunde abermals in gleicher Phase. Es findet in diesem Zeitraum gerade eine Schwebung statt. Es ist also die

(95) **Frequenz der Schwebung:** $\boxed{f = f_1 - f_2}$

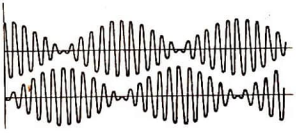


Bild 189. Schwebungen zweier gekoppelter Pendel

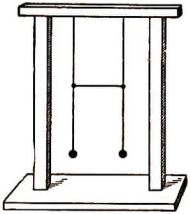


Bild 190. Gekoppelte Pendel

Die resultierende Frequenz innerhalb der Schwebung ist $\frac{f_1 + f_2}{2}$ bis auf die Übergangsstellen zwischen zwei Schwebungen, wo ein „Phasensprung" eintritt. Es fehlt hier (wie auf Bild 189 erkennbar) jeweils eine obere Halbwelle. So entspricht die Zahl der Amplituden je Schwebung immer der größeren Frequenz f_1.

Schwebungen lassen sich experimentell sehr schön mit zwei gleich langen Fadenpendeln vorführen, die durch einen etwa in halber Höhe befestigten Querfaden mehr oder weniger eng miteinander verbunden sind (Bild 190). Sie werden zunächst in gleicher Phase zum Schwingen angestoßen, wobei man die Frequenz f_2 mißt. Bei einem 2. Versuch werden sie im Gegentakt, d. h. mit einem Phasenunterschied von 180° zum Schwingen gebracht. Man sieht, wie der verbindende Querfaden die Pendellängen in anderer Weise beeinflußt als vorher und die größere Frequenz f_1 entsteht. Diese beiden Fälle nennt man die **Fundamentalschwingungen** des gekoppelten Systems.

Nun kommt der Hauptversuch: Man läßt das eine Pendel in Ruhe und stößt nur das andere an. Es dauert nur wenige Augenblicke, und das anfangs ruhende Pendel beginnt, immer stärker zu schwingen, während das angestoßene allmählich zur Ruhe kommt. Dann hört das zweite Pendel mit dem Schwingen auf, und das erste gerät wieder in Bewegung. So setzt sich das Wechselspiel weiter fort, ein Hinundherfluten der Bewegungsenergie von einem Pendel zum anderen. Es ist zugleich ein Beispiel für eintretende Resonanz.

Mit einer Uhr kann man leicht die beiden Frequenzen f_1 und f_2 bestimmen und bestätigen, daß $f = f_1 - f_2$ ist.
Die meisten technischen Schwingungsvorgänge elektrischer, akustischer und mechanischer Art werden heute mit elektrischen **Oszillographen** sichtbar gemacht, wobei alle hier besprochenen Schwingungstypen auftreten können. Die Deutung derartiger Oszillogramme wird sehr erleichtert, wenn sich der Studierende im Zeichnen von Schwingungsbildern gut geübt hat.

Beispiel: Zwei gekoppelte, gleich lange Pendel führen in 5 min im Gleichtakt 350 bzw. im Gegentakt 315 Schwingungen aus. Wieviel Sekunden nach dem Anstoßen des ersten Pendels kommt das ins Mitschwingen geratende zweite Pendel erstmalig wieder zur Ruhe? – Die Frequenzen sind $f_1 = \frac{350}{300\,\mathrm{s}} = 1{,}167\,^1/\mathrm{s}$ und $f_2 = \frac{315}{300\,\mathrm{s}} = 1{,}050\,^1/\mathrm{s}$. Nach (95) ist die Schwebungsfrequenz $f = (1{,}167 - 1{,}050)\,^1/\mathrm{s}$. Die Dauer einer Schwebung beträgt demnach $^1/f = 8{,}55$ s.

6.9 Kippschwingungen

Außer der harmonischen Schwingung ist der Typ der **Kippschwingung** von weitreichender Bedeutung. In einen dreieckigen, pendelnd aufgehängten Trog fließt ein Wasserstrahl (Bild 191). Sobald er sich bis zu einer gewissen Höhe gefüllt hat, wird das Gleichgewicht labil, das Gefäß kippt um und entleert seinen Inhalt. Es richtet sich wieder auf, und das Spiel beginnt von neuem. Man erkennt, daß es sich hier um

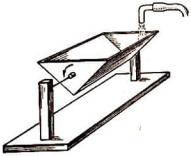


Bild 191. Entstehung von Kippschwingungen

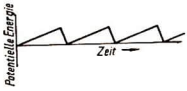


Bild 192. Energie-Zeit-Kurve einer Kippschwingung

einen Energiespeicher handelt, der sich periodisch lädt und entlädt. Die Ladung erfolgt allmählich von außen her, die Entladung geschieht nach außen und plötzlich. Stellt man die Bewegung grafisch dar, so entsteht eine Sägezahnkurve (Bild 192). Offenbar hängt die Frequenz von der je Zeiteinheit zufließenden Menge sowie vom Fassungsvermögen (Kapazität) des Gefäßes ab.
Fast alle rhythmischen Lebensvorgänge spielen sich als Kippschwingungen ab, z. B. das Pulsieren des Herzens. Selbst die krankhaften Abweichungen des normalen Herzschlages lassen sich mit elektrischen Kippschwinggeräten nachahmen.

Beispiele: 1. Beim Anstreichen einer Saite mit dem Geigenbogen nimmt dieser die Saite ein wenig mit, bis ihre Spannung (Energiegehalt) so groß wird, daß sie sich vom Bogen losreißt und zurückspringt. Der Vorgang wiederholt sich einige hundert Mal in der Sekunde. Auch hier hängt die Frequenz von der „Kapazität" (dem Energiegehalt der gespannten Saite) ab.

2. In ähnlicher Weise entstehen alle knarrenden und quietschenden Geräusche beim Anziehen von Bremsen, in schlecht geölten Türangeln usw.

3. Auch in dem mittels Steigrads und Ankers (S. 110) entdämpften Pendel steckt insofern eine Kippschwingung, als diesem periodisch Energie zugeführt wird, die periodisch wieder abfließt.

7 Wellenlehre

7.1 Wesen der Wellenbewegung

Der Ausdruck **Wellen** rührt von der allbekannten Erscheinung her, die man auf bewegten Wasseroberflächen sehen kann. Wellen entstehen dadurch, daß das ursprüngliche Gleichgewicht der Wasserteilchen – etwa durch einen hineingeworfenen Stein – gestört wird. Das an der Aufschlagstelle nach unten gedrückte Wasser wölbt sich als ringförmiger Wall nach oben. Es entsteht eine auf und nieder schwingende Bewegung, und die Störung pflanzt sich nach allen Seiten mit gleicher Geschwindigkeit fort.

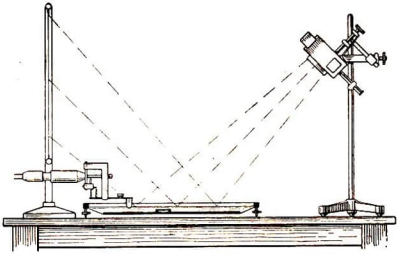


Bild 193. Wasserwellengerät

Zur anschaulichen Vorführung eignet sich das Wasserwellengerät. Die Oberfläche einer mit Wasser gefüllten, flachen Wanne wird schräg beleuchtet und wirft das Licht an eine weiße Wand. Ein Motor treibt einen auf und nieder wippenden Tupfer an. Die entstehenden **Kreiswellen** wandern als dunkle Ringschatten über den Bildschirm.

Derartige **Störungen** können auch in festen Körpern und in der Luft veranlaßt werden und erfassen dann, sich ausbreitend, alle Teilchen des betreffenden Mediums. Im einfachsten Fall führen die durch elastische Kräfte aneinandergebundenen Teilchen allesamt harmonische Schwingungen aus. Man spricht dann von **harmonischen Wellen.** Abgesehen von dieser periodischen Bewegung um ihre Ruhelagen, nehmen sie aber am Ausbreitungsvorgang selbst nicht teil. Nicht die einzelnen Teilchen, sondern der schwingende Bewegungszustand pflanzt sich fort.
Man kann das an einem schwimmenden Kork beobachten. Wird er von der Wellenbewegung erfaßt, so tanzt er auf und ab, ohne sich von der Stelle zu bewegen.

Man benutzt die Bezeichnungen

Wellenlänge λ = kürzeste Entfernung zweier Teilchen, die sich im gleichen Schwingungszustand befinden,

Frequenz f = Schwingzahl eines einzelnen Teilchens,

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen c.

Dann besteht das Gesetz:

(96) **Frequenz · Wellenlänge = Ausbreitungsgeschwindigkeit** $\boxed{f\,\lambda = c}$

Dieses Gesetz gilt für alle Arten von Wellen, für die des Lichtes wie überhaupt für alle elektromagnetischen Wellen, die Luftwellen des Schalls und die Wellen in flüssigen und festen Körpern.

Begründung: In einer Sekunde haben am Entstehungsort f Schwingungen stattgefunden. Diese f Schwingungen haben in der gleichen Zeit eine Strecke c zurückgelegt, d. h., f volle Schwingungen verteilen sich auf die Strecke c. Dann entfällt eine Schwingung auf den Abschnitt $\lambda = \frac{c}{f}$.

In einem bestimmten Augenblick t, gleichsam als fotografische Momentaufnahme, bietet eine harmonische Welle das gleiche Bild wie die Darstellung einer harmonischen Schwingung. Hier aber bedeutet die waagerechte Bildachse nicht die Zeit t, sondern die Strecke x, längs derer die Welle fortschreitet. Die Sinuskurve auf Bild 194 wandert als starres Gebilde mit der Geschwindigkeit c vorwärts.

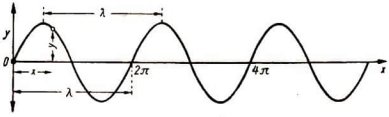


Bild 194. Augenblicksbild einer fortschreitenden harmonischen Welle

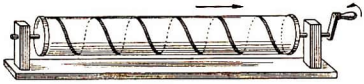


Bild 195. Veranschaulichung einer harmonischen Welle

Versuch: Man umwickelt einen Glaszylinder spiralig mit einer Schnur. Bei Umdrehung des Zylinders sieht man eine Welle nach rechts wandern (Bild 195).

Die mathematische Beschreibung einer harmonischen Welle ist im Prinzip die einer harmonischen Bewegung, wofür wir als Ausdruck für die Elongation $y = A \sin \omega t$ fanden (85). Jetzt ist die Auslenkung der schwingenden Teilchen nicht nur zeitlich, sondern auch örtlich verschieden. Bezeichnet in diesem Ausdruck y die Elongation an einem Ort, der um die Strecke x nach rechts verschoben ist, so ist zum Durchlaufen dieses Stückes die Zeit $\frac{x}{c}$ erforderlich. Um also die Elongation an diesem Ort zur Zeit t anzugeben, muß von t dieser Betrag abgezogen werden, weil hier ein Schwingungszustand herrscht, der im Ausgangspunkt ($x = 0$) bereits vor der Zeit $\frac{x}{c}$ bestanden hat. Somit erhält man die Elongation y am Ort x einer harmonischen Welle:

(97) **Elongation am Ort x zur Zeit t:** $$\boxed{y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Ein Teilchen am Ort x hat also gegenüber dem Ausgangspunkt der Welle eine Phasenverschiebung von $\frac{\omega x}{c}$ bzw. nach (S. 100) $\frac{2 \pi f x}{c}$. Wenn diese gleich 0, 2π, 4π usw. ist, muß y immer den gleichen Wert haben, d. h. stets die gleiche Phasenlage vorhanden sein, da sich der Sinus durch Hinzufügen dieser Werte nicht ändert. Nimmt man z. B. eine Phasenverschiebung von 2π an, so ergibt sich $\frac{2 \pi f x}{c} = 2\pi$ und hieraus $x = \frac{c}{f}$, d. h. λ. Im **Abstand einer Wellenlänge** findet man in der Tat die **gleiche Phase** vor.

Beispiele: 1. Welche Wellenlänge strahlt ein Rundfunksender aus, dessen Frequenz 650 kHz beträgt ($c = 300000$ km/s)? –

Nach (96) ist

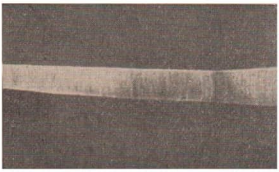
$$\lambda = \frac{300\,000\,000\ \mathrm{ms}}{650\,000\ \mathrm{s}} = 461{,}5\ \mathrm{m}\ .$$

2. Welcher Frequenz entsprechen 1,7 cm lange Wellen an einer Wasseroberfläche, die sich mit einer Geschwindigkeit von 23 cm/s ausbreiten? –

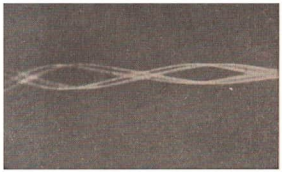
$$f = \frac{23\ \mathrm{cm}}{\mathrm{s} \cdot 1{,}7\ \mathrm{cm}} = 13{,}5\,{}^1/\mathrm{s}\,.$$

7.2 Arten der Wellen

Wenn die einzelnen Teilchen quer zur Fortpflanzungsrichtung schwingen, spricht man von **Transversalwellen (Querwellen).** Man fasse einen dünnen, horizontal ausgespannten Gummischlauch mit der Hand und führe einen Ruck nach unten aus. Man sieht dann eine schlängelnde Bewegung bis zum anderen Ende laufen: Eine Seilwelle verläuft transversal.
Bei den **Longitudinalwellen (Längswellen)** schwingen die Teilchen längs der Fortpflanzungsrichtung. Dies ist bei den Schallwellen der Fall, wo die Luft in Richtung



a



b

Bild 196. Rasch verlaufende, fortschreitende Seilwellen; a) Belichtungszeit 15 s. b) Zeitlupenaufnahme

der Ausbreitung des Schalls abwechselnd verdichtet und verdünnt wird. Beim Rangieren von Güterzügen kommt es häufig vor, daß ein einzelner Waggon gegen eine lange Wagenreihe stößt. Der Stoß pflanzt sich durch die ganze Wagenreihe fort, indem jeder Wagen zwischen seinen Puffern hin und her pendelt: ein grobes Bild einer Longitudinalwelle.
Erdbeben durchqueren das Erdinnere teils als Längs- und teils als Querwellen. Dabei vermögen die trans-

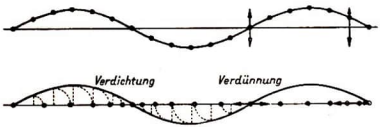


Bild 197. Transversalwelle und Konstruktion einer Longitudinalwelle

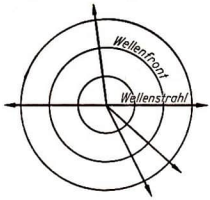


Bild 198. Wellenfronten und Wellenstrahlen einer Kreiswelle

versalen den Erdkern anscheinend nicht zu durchdringen. Schallwellen in festen Körpern und im Wasser sind Longitudinalwellen.
Wir haben gesehen, daß sich die Oberflächenwellen des Wassers als konzentrische Kreise ausbreiten. Längs eines solchen Kreises, z. B. auf einem der ringförmigen Wellenberge, befinden sich alle schwingenden Teilchen in gleicher Phase. Diesen geometrischen Ort aller Punkte gleicher Schwingphase nennt man eine **Wellenfront.** Zieht man vom Wellenzentrum ausgehende Geraden, so stellen diese die **Wellenstrahlen** dar (Bild 198). Da die Radien den Umfang eines Kreises rechtwinklig durchschneiden, ergibt sich:

(98) **Die Wellenstrahlen stehen stets senkrecht auf den Wellenfronten.**

Wenn die Erzeugung im Innern des Ausbreitungsmediums erfolgt, breitet sich die Welle allseitig im Raum aus. Es entstehen **Kugelwellen** (Bild 199). Alle Orte gleicher Phase, d. h. die Wellenfronten, stellen konzentrische Kugelschalen dar. Die Wellenstrahlen sind in diesem Fall Kugelradien und geben wie bei den Kreiswellen die Ausbreitungsrichtung der Wellen an.
Sieht man nur die unmittelbare Umgebung eines Strahles an, so fällt die Krümmung der Wellenflächen nicht ins Gewicht. Man kann sie als eben betrachten: **ebene Wellen.** Schmale Strahlenbündel, die aus weiter Ferne kommen, kann man aus dem gleichen Grund ohne Fehler als ebene Wellen ansehen. Die Strahlen eines solchen Bündels verlaufen nahezu parallel.

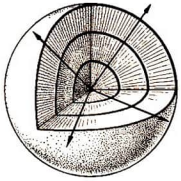


Bild 199. Wellenfronten und Strahlen einer Kugelwelle

(99) **Parallele Strahlenbündel werden von ebenen Wellenfronten begleitet.**

Das bekannteste Beispiel sind die Strahlen des Sonnenlichtes. Weil wir wegen der ungeheuren Entfernung des Wellenzentrums nur einen äußerst schmalen Ausschnitt aus dem gesamten Strahlenbündel empfangen, verlaufen die Strahlen praktisch parallel.

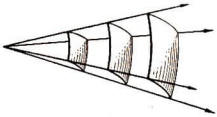


Bild 200. Sphärische Wellenfronten – auseinanderlaufende Strahlen

Bild 201. Ebene Wellenfronten – parallele Strahlen

Die Oberflächenwellen des Wassers haben verhältnismäßig spitze Wellenberge und sanft gerundete Täler. Sie stellen keine reinen Transversalwellen dar, da die einzelnen Wasserteilchen vertikale Kreise durchlaufen (sogenannte **Rayleigh-Wellen**).

7.3 Das Huygenssche Prinzip

Jeder beliebige, von einer Welle erreichte Punkt des Mediums beginnt zu schwingen. Er kann daher als ein neues, selbständiges Stör- und damit Wellenzentrum betrachtet werden. Die von ihm ausgehende Welle nennt man eine **Elementar-**

welle. Betrachtet man die von vielen benachbarten Punkten einer Wellenfront ausgehenden Elementarwellen, so haben sie nach einer bestimmten Zeit eine neue, gemeinsame Wellenfront erreicht. Man kann sich also vorstellen, daß umgekehrt jede Wellenfront als Umhüllende zahlreicher, gleichzeitig entstandener Elementarwellen zustande kommt.
Dieser von dem großen holländischen Physiker Christian Huygens[1]) ausgesprochene Gedanke heißt das

(100) **Huygenssche Prinzip: Jeder von einer Welle getroffene Punkt ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle. Die Umhüllende (gemeinsame Tangente) aller aus einer Wellenfront gleichzeitig entstehenden Elementarwellen ist wieder eine Wellenfront der vom ursprünglichen Erregungszentrum ausgehenden Wellen.**

Das Prinzip bedeutet aber nicht etwa nur eine gedankliche Hilfskonstruktion, sondern ist ein physikalischer Vorgang. Man kann den Vorgang mit der Wellenwanne leicht vorführen, wenn man eine Querwand mit kleiner

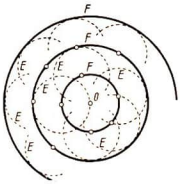


Bild 202. Das Huygenssche Prinzip
O Wellenzentrum *E* Elementarwellen *F* Wellenfronten

Bild 203. Entstehung einer Elementarwelle aus einem von der Welle getroffenen Punkt

Öffnung in das Wellenfeld hineinstellt (Bild 203). Die Öffnung ist ein von der Welle getroffener Punkt. Man sieht sehr schön, wie dieser vollkommen selbständig ein eigenes Wellenzentrum bildet.

Das Huygenssche Gesetz erweist sich vor allem bei der Deutung komplizierterer Wellenerscheinungen als außerordentlich wertvoll.

7.31 Die Reflexion von Wellen

Eine von zwei parallelen Strahlen **1** und **2** eingefaßte ebene Wellenfront AB fällt schräg auf eine Fläche, die von ihr nicht durchdrungen werden kann (Bild 204). Punkt A erreicht sie zuerst und sendet eine Elementarwelle von wachsendem Radius aus. Wenn Strahl **2** die Fläche in D erreicht hat, muß infolge der gleichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Radius der Elementarwelle AE gleich BD sein. Die neue Wellenfront ist nach Satz (100) die Tangente DE. Die im Punkt A errichtete Senkrechte l nennt man das **Einfallslot** des Strahles. Man sieht, daß Winkel α

[1]) 1629···1695.

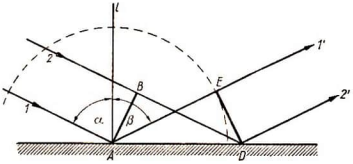


Bild 204. Reflexion paralleler Strahlen nach dem Huygensschen Prinzip

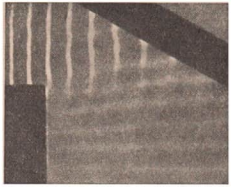


Bild 205. Reflexion von Wasserwellen mit geraden Fronten an schräger Wand

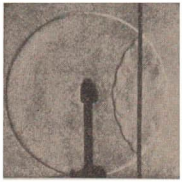


Bild 206. Reflexion einer Knallwelle (Luft) an einem Sieb (erkennbar sind die am Sieb entstehenden Elementarwellen)

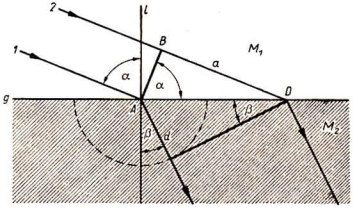


Bild 207. Brechung paralleler Strahlen nach dem Huygensschen Prinzip

gleich Winkel β sein muß; denn die Dreiecke AED und ABD sind kongruent, so daß die Wellenfronten AB und DE mit der reflektierenden Fläche den gleichen Winkel bilden.

Hieraus ergibt sich das

(101) **Reflexionsgesetz: Der Einfallswinkel** (Winkel des einfallenden Strahls mit dem Einfallslot) **ist gleich dem Reflexionswinkel** (dem entsprechenden Winkel des zurückgeworfenen Strahls).

[Vergleiche damit die Zurückwerfung elastischer Kugeln nach Seite 94.]

7.32 Die Brechung von Wellen

Ein paralleles Strahlenbündel (Bild 207) falle schräg auf die **Grenzfläche** g zweier Medien M_1 und M_2, die sich durch verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 unterscheiden. Die Geschwindigkeit im vollkommen durchlässigen Medium M_2 sei z. B. geringer als im Medium M_1. Wenn Strahl **1** der Wellenfront AB die Trennfläche in A erreicht, hat der andere noch die Strecke $BD = a$ zurückzulegen. Dazu wird die Zeit $\frac{a}{c_1}$ benötigt. Währenddessen breitet sich von A eine Elementarwelle aus. Ihr Radius wächst in der Zeit $\frac{a}{c_1}$ auf die Größe $d = \frac{c_2 a}{c_1}$ an. Die neue Wellen-

front im Medium M_2 ist nach (100) die Tangente an diesen Halbkreis. Wegen $c_2 < c_1$ muß der Radius d der Elementarwelle aber kleiner sein als a.
Man sieht, daß der Strahl von seiner geraden Richtung abgelenkt, d. h. **gebrochen** wird. Nun ist $\sin\alpha = \frac{a}{AD}$ und $\sin\beta = \frac{d}{AD}$. Man hat also einerseits $\frac{a}{d} = \frac{c_1}{c_2}$ und anderseits $\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, so daß

(102) **Brechungsgesetz:** $$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Aus dieser Herleitung geht hervor, daß das soeben gefundene Gesetz für jeden beliebigen Winkel α gilt. Wie auch bei der Reflexion ist es ferner üblich, den Einfalls- und Brechungswinkel vom Einfallslot l aus zu messen. Man erkennt leicht, daß es sich hierbei um die gleichen Winkel α und β handelt. Deshalb lautet das **Brechungsgesetz:**

(103) **Die Sinus von Einfalls- und Brechungswinkel verhalten sich wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den aneinandergrenzenden Medien.**

In der Wellenwanne stellt man ein Gebiet geringerer Geschwindigkeit durch Einlegen eines flachen Körpers her. Über der seichteren Stelle laufen die Wellen langsamer, wodurch sich auch der Brechungsvorgang darstellen läßt (Bild 208).

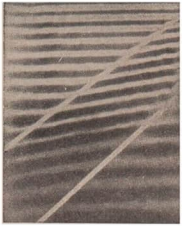


Bild 208. Brechung von Wasserwellen über einer seichten Stelle

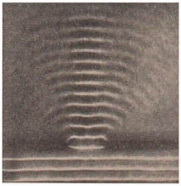


Bild 209. Beugung von Wasserwellen an einem einfachen Spalt

Beispiele: 1. Ein paralleles Strahlenbündel läuft mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s und unter einem Winkel von 60° gegen die Grenzfläche eines zweiten Mediums und in diesem mit 8,5 m/s weiter. Wie groß ist der Brechungswinkel? –
Nach (102) hat man $\sin\beta = \frac{c_2}{c_1}\sin\alpha$ oder $\sin\beta = \frac{0{,}866 \cdot 8{,}5}{15} = 0{,}4907$; lt. Tabelle ist der Winkel $\beta = 29{,}3°$.

2. Der Einfallswinkel einer Welle beträgt 35°, der Brechungswinkel 25°. In welchem Verhältnis stehen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in beiden Medien zueinander? –
Es ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ in diesem Fall gleich $\frac{0{,}574}{0{,}423} = \frac{1{,}36}{1}$, so daß auch $c_1 : c_2 = 1{,}36 : 1$.

7.33 Die Beugung von Wellen

Tritt ein Strahl mit ebener Wellenfront durch eine schmale Öffnung, so erwartet man im allgemeinen, daß er als entsprechend schmales paralleles Strahlenbündel weiterlaufe. Das Huygenssche Prinzip ergibt aber an den beiden Rändern Elementarwellen, die eine scharfe Begrenzung unmöglich machen. Je enger der Spalt im Vergleich zur Wellenlänge ist, desto mehr greifen die Randwellen über die Hauptrichtung hinaus. Ein Teil des Strahls wird seitlich **abgebeugt** (Bild 209). Mit zunehmendem Beugungswinkel nimmt aber die Intensität des auf diese Weise abgelenkten Strahlanteils ab.

7.4 Überlagerung von Wellen

7.41 Überlagerung fortschreitender Wellen

Breiten sich von einem Erregungszentrum zwei Wellen zugleich aus, so wird ein Teilchen des Mediums von zwei Bewegungen gleichzeitig erfaßt. Nach dem Prinzip der ungestörten Superposition (30) ist die resultierende Auslenkung gleich der Summe der beiden einzelnen. Man nennt diesen Vorgang der Überlagerung von Wellen **Interferenz.**

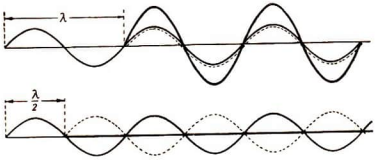


Bild 210. Oben: Verstärkung.
Unten: Auslöschung durch Interferenz

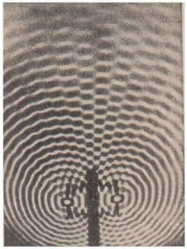


Bild 211. Interferenz zweier Systeme von Kreiswellen

Zeichnerisch kann man zwei sich überlagernde Wellen in der gleichen Weise zu einer resultierenden Welle zusammenfassen, wie dies bei der Überlagerung von Schwingungen (S. 113) beschrieben wurde.
Besonders wichtig ist der Fall, wenn zwei Wellen gleicher Amplitude und Wellenlänge miteinander interferieren. Aus Bild 210 ist ohne weiteres zu erkennen:

(104) **Bei der Interferenz zweier Wellenzüge ergibt sich**

$$\frac{\textbf{Verstärkung}}{\textbf{Auslöschung}} \textbf{ bei einem Gang- (Phasen-) Unterschied von } \frac{0,\ \lambda,\ 2\,\lambda,\ 3\,\lambda, \ldots}{\lambda/2,\ 3\,\lambda/2,\ 5\,\lambda/2, \ldots}$$

Zur Vorführung eignet sich wieder die Wellenwanne. Zwei punktförmige Erreger rufen 2 Kreiswellenzüge hervor (Bild 211). Beide Systeme interferieren miteinander, indem sich deutliche, schmale Streifen ausbilden, in denen das Wasser in Ruhe bleibt. Zwischen diesen „toten Zonen" liegen jeweils Gebiete mit verstärkter Amplitude. Die

solchermaßen entstehenden **Interferenzstreifen** sind **Hyperbeln;** denn es sind die geometrischen Örter aller Punkte, deren Abstände von den beiden Zentren die gleiche Differenz $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{3\lambda}{2}$ usw. haben.

Die gleiche Erscheinung tritt bei der Reflexion auf, indem die vom Erreger ausgehenden sich mit den von der Wand zurückgeworfenen Wellen überlagern (s. Bild 205). Auch bei der Beugung überlagern sich die von den Spalträndern ausgehenden Wellenzüge in derselben Weise. Es entsteht im freien Feld hinter dem Spalt ein fächerförmiges System von Streifen, ganz ähnlich dem Bild 211. Die Intensität dieser Streifen nimmt aber, wie bereits gesagt, nach den Seiten zu immer mehr ab.

7.42 Stehende Wellen

Interferenz kann aber auch längs eines einfachen Strahles eintreten, wenn dieser nach der Reflexion auf derselben Bahn wieder zurückläuft. Dabei ist zu

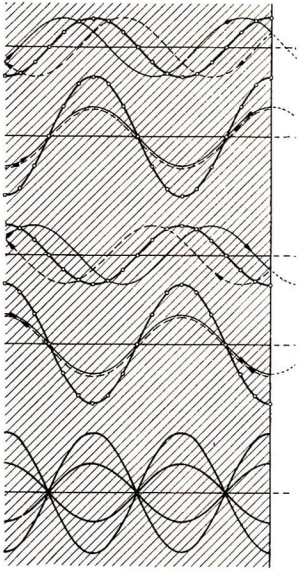


Bild 212. Entstehung einer stehenden Welle durch Reflexion am dünneren Medium. (Die reflektierte Welle kommt so zurück, wie die hinlaufende Welle im angrenzenden Medium weiterlaufen würde)

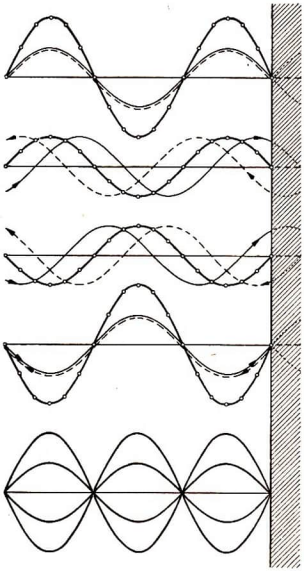


Bild 213. Entstehung einer stehenden Welle durch Reflexion am dichteren Medium. (Die reflektierte Welle läuft so zurück, wie die hinlaufende Welle nach Überspringen von $\frac{\lambda}{2}$ weiterlaufen würde)

unterscheiden, ob die **Dichte des Mediums** hinter der reflektierenden Grenzfläche **größer oder kleiner** als im Wellenfeld ist.

7.421 Reflexion am dünneren Medium

Bild 212 zeigt eine solche Welle in 4 verschiedenen Zeitpunkten. Nach der Reflexion läuft sie so zurück, wie sie jenseits der Grenzfläche weiterlaufen würde, d. h. ohne Phasenunterschied. Dies ist der Fall, wenn das angrenzende Medium dünner ist. Hin- und zurücklaufende Welle ergeben die dick ausgezogene Resultierende. Sie hat in jedem der 4 Augenblicke eine andere Phasenlage. Zeichnet man aber alle Resultierenden noch einmal zusammen (letzte Zeile), so bilden sie ein räumlich feststehendes System von **Knoten** (Stellen der Ruhe) und **Bäuchen** (größte Auslenkung), was man eine **stehende Welle** nennt. Dies erscheint auf den ersten Blick deswegen überraschend, weil zwei rasch hin und her laufende Wellenzüge ein fest stehendes Schwingungsbild ergeben. An der reflektierenden Grenzfläche liegt ein Schwingungsbauch. Der Abstand zweier Knoten beträgt eine halbe Wellenlänge.

7.422 Reflexion am dichteren Medium

Wenn das angrenzende Medium dichter ist, erfolgt bei der Reflexion ein Phasensprung von π. In diesem Sinn läuft die reflektierte Welle zurück und bildet mit der hinlaufenden ebenfalls eine stehende Welle. An der Grenzfläche liegt dieses Mal ein Wellenknoten (Bild 213).

Man kann stehende Wellen sehr schön mit einem durch ein Gewicht senkrecht gespannten Faden erzeugen, dessen unteres Ende von einem Schwinghebel rasch hin und her bewegt wird (Bild 214). Der Antrieb geschieht durch einen regelbaren kleinen Motor. Bei passender Frequenz bildet der weiße Faden vor der dunklen Wandtafel 2, 3 oder noch mehr weit ausladende Wellenbäuche.
Die Erzeugung stehender Wellen gelingt nur bei passender Schwingzahl. Die frei schwingende Länge des Seils kann nämlich nur **ganzzahlige Vielfache von halben Wellenlängen** aufnehmen. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit konstant ist, gehört zu jedem Schwingungsbild eine ganz bestimmte Frequenz, die man aber durch Probieren schnell herausfindet.

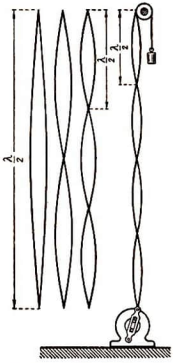


Bild 214. Stehende Seilwellen

Daß an der Grenze des dichteren Mediums ein Phasensprung eintritt, können wir rückschließend daraus folgern, daß hier stets ein Wellenknoten vorliegen muß; denn an der Grenze ist die freie Beweglichkeit der schwingenden Teilchen eingeschränkt. Umgekehrt ist bei angrenzendem dünnerem Medium an der Grenze maximale Beweglichkeit vorhanden, womit dort ein Wellenbauch entstehen muß.

7.5 Das Fermatsche Prinzip

Reflexion und Brechung von Strahlen lassen sich auch nach einem von dem französischen Mathematiker Fermat[1]) entdeckten Gesetz deuten.

[1]) 1601 ··· 1665.

(105) **Fermatsches Prinzip: Ein Strahl beschreibt zwischen zwei Punkten stets den Weg der kürzesten Laufzeit.**

Für den Fall der Reflexion ist das Prinzip sofort und leicht einzusehen (Bild 215). Der richtige Weg des reflektierten Strahls stellt den geometrisch und zugleich auch zeitlich kürzesten Weg dar; denn ($\overline{AC} + \overline{BC}$) ist kürzer als jeder andere Weg ($\overline{AC'} + \overline{BC'}$).

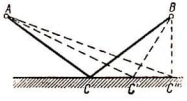


Bild 215. Das Fermatsche Prinzip im Fall der Reflexion

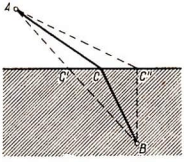


Bild 216. Das Fermatsche Prinzip im Fall der Brechung

Im Fall der Brechung fallen geometrisch und zeitlich kürzester Weg nicht zusammen. Bild 216 zeigt einen Strahl, der von Punkt A durch schrägen Einfall in ein dichteres Medium nach Punkt B gelangt. Der dem Brechungsgesetz richtig gehorchende Weg erfordert die Laufzeit $\frac{\overline{AC}}{c_1} + \frac{\overline{C'B}}{c_2}$. Der geometrisch kürzeste Weg $AC'B$ beansprucht in der Tat eine größere Laufzeit, da zwar $\overline{AC'}$ kürzer als $\overline{AC}$ ist, dafür aber im langsameren Medium der wesentlich größere Weg $\overline{C'B}$ zurückgelegt werden muß. Der allgemeine Beweis des Fermatschen Prinzips würde hier zu weit führen.

8 Molekularerscheinungen

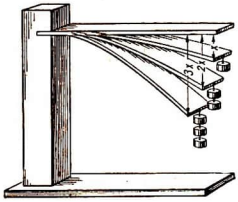
Eine weitere Gruppe von Kräften und Erscheinungen hängt mit dem inneren Aufbau aller Körper zusammen. Die innere Struktur der Körper ist sehr verschiedenartig. Doch alle bestehen sie aus Atomen und Molekülen, die (mit Ausnahme der Gase) durch elektrische Kräfte (Gitterkräfte, chemische Valenzen und Restvalenzen) mehr oder weniger fest aneinander gebunden sind. Hier spielt die Massenanziehung wegen ihrer geringen Größe keine Rolle.

8.1 Kohäsion

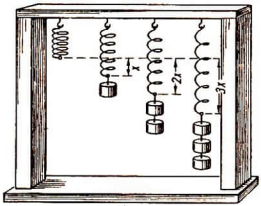
Diesen Zusammenhang der Moleküle bzw. Atome innerhalb eines Körpers nennt man **Kohäsion.**

Kohäsion: durch gegenseitige Anziehung bewirkter Zusammenhang der Moleküle eines Körpers.

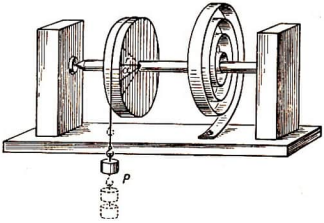
Äußeren Kräften gegenüber zeigt sie sich in einem erheblichen Widerstand gegen jede Formänderung. Je größer dieser ist, desto größer ist die **Festigkeit** des Körpers. Nimmt ein Körper nach Wegfall der äußeren Kräfte wieder seine alte Form an, so nennt man ihn **elastisch** (z. B. Stahl, Gummi innerhalb der Elastizitätsgrenzen). Bleibt die Verformung bestehen, so heißt ein Körper **plastisch** (Knetmasse, glühendes Eisen).



a) Die Biegung ist proportional der Belastung



b) Die Dehnung ist proportional der Belastung



c) Die Verdrillung ist proportional dem Drehmoment Pr

Bild 217a···c. Das Hookesche Gesetz

Für die elastische Verformung gilt das

(106) **Hookesche Gesetz:** **Die Dehnung bzw. Verkürzung ist proportional der wirkenden Kraft.**
Die Verdrillung ist proportional dem Drehmoment.

Besonders wichtig ist der Fall der Dehnung. Die auf die Stablänge von 1 m und einen Querschnitt von 1 cm² unter dem Einfluß einer Kraft von 1 kp bezogene Dehnung nennt man die

(107) **Dehnungszahl:** $$\boxed{\alpha = \frac{\Delta l F}{l P}}\ .$$

Dann bewirkt die Kraft P an einem Stab von der Länge l und dem Querschnitt F die

(108) **Verlängerung:** $$\boxed{\Delta l = \frac{\alpha P l}{F}}$$

Den Kehrwert von α, d. h. $\frac{1}{\alpha}$, bezeichnet man als **Elastizitätsmodul** E, so daß

$$\Delta l = \frac{P l}{E F}$$

Bild 218. Mikroaufnahme kugeliger Flüssigkeitströpfchen

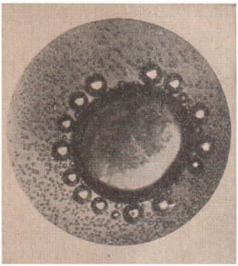


Bild 219. Zeitlupenaufnahme eines frei fallenden, schwingenden Wassertropfens

Es sei nur erwähnt, daß auch Flüssigkeiten noch eine beträchtliche Kohäsion besitzen: Quecksilbertropfen, frei fallende kuglige Wassertropfen (Bilder 218, 219). Auf der Kohäsion des Wassers beruht auch der **Heber** (Bild 220). Der eine Schenkel taucht in das Gefäß. Solange die andere Öffnung tiefer liegt als der Flüssigkeitsspiegel, fließt Flüssigkeit aus. Sie bildet einen zusammenhängenden, nicht abreißenden Faden, dessen eines Ende schwerer ist und die restliche Flüssigkeit hinter sich herzieht.

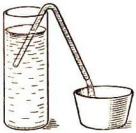


Bild 220. Winkelheber

Bei Wasser hat man eine Zerreißfestigkeit von 34 kp/cm² messen können. Dies scheint im Widerspruch mit der alltäglichen Erfahrung zu sein, nach der sich Wasser außerordentlich leicht zerteilen läßt. Beobachtet man aber das Abreißen eines Tropfens vom Wasserhahn, so erkennt man den wahren Grund: Eine zunächst stärker werdende Einschnürung (Taillenbildung) macht die Trennungsstelle immer dünner. Nicht etwa geringe Kohäsion, sondern die leichte, gegenseitige Verschieblichkeit der Wassermoleküle ist die Ursache!

8.2 Die Molekularbewegung

Gase, wie z. B. die Luft, besitzen fast keine Kohäsion. Ihre Moleküle sind nicht gegenseitig gebunden, sondern vollkommen frei und befinden sich in fortwährender, völlig ungeordneter Bewegung. Bei Zimmertemperatur beträgt ihre mittlere Geschwindigkeit in Luft rund 500 m/s.

Da die Moleküle der Flüssigkeiten trotz ihrer Kohäsion leicht gegenseitig verschiebbar sind, zeigen auch sie diese Bewegung. In einem Tropfen verdünnter Milch sieht man bei etwa 800facher Vergrößerung zahlreiche winzige Fettkügelchen schwimmen. Sie zeigen ein fortgesetztes unruhig hin und her fahrendes Zittern, verursacht von Dichteschwankungen, die infolge der Molekularbewegung in der Flüssigkeit entstehen. Nach ihrem Entdecker heißt diese Erscheinung **„Brownsche Bewegung“** (Bild 221).

8.3 Die Diffusion

Die Eigenbewegung der Moleküle hat zur Folge, daß sich alle Teile einer Flüssigkeit oder eines Gases im Laufe der Zeit von selbst durchmischen. Schichtet man in einem Standzylinder auf eine konzentrierte Lösung von Kupfersulfat eine Säule reinen Wassers, so wird die anfangs scharfe Trennfläche im Laufe des Tages immer verschwommener (Bild 222). Die Lösung **diffundiert** in das reine Wasser und umgekehrt. Bei einer Wassersäule von 20 cm Höhe dauert es mehrere Monate, bis die Diffusion beendet ist.

Bild 221. Brownsche Bewegung eines schwerelosen Teilchens (nach Perrin)

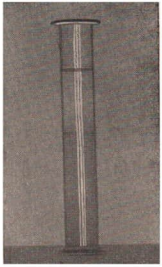


Bild 222. Diffusion zweier Flüssigkeiten

Diffusion: selbsttätige Durchmischung der Moleküle innerhalb einer Flüssigkeit oder eines Gases.

Es ist bemerkenswert, daß auch Gase in Metalle und durch Metalle hindurch (z. B. Wasserstoff durch Stahl) (Bild 223) sowie feste Metalle ineinander diffundieren können. Innerhalb von Gasen findet die Diffusion wegen der großen Molekulargeschwindigkeiten viel rascher statt. Setzt man einen umgekehrten, mit Leuchtgas gefüllten Zylinder auf einen zweiten, der nur Luft enthält, so findet bereits nach wenigen Minuten vollkommene Durchmischung statt (Probe durch Anzünden).

Daß die **Diffusionsgeschwindigkeit** mit abnehmendem Molekulargewicht erheblich zunimmt, zeigt ein Versuch mit einem Tonzylinder, dessen untere Öffnung in eine mit Wasser gefüllte Flasche mündet (Bild 224).

Leitet man unter ein darübergestülptes Becherglas Leuchtgas (wasserstoffhaltig!), so entsteht in der Tonzelle ein Überdruck, den das Steigrohr sofort anzeigt. Nach Wegnehmen des Glases entsteht ein

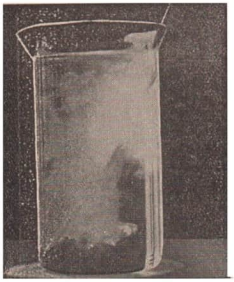


Bild 223. Mit Wasserstoff beladener Draht nach Eintauchen in heißes Wasser

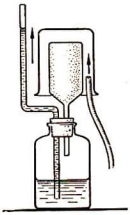


Bild 224. Diffusion von Wasserstoff durch einen Tonzylinder

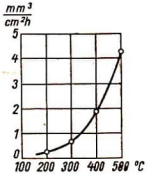


Bild 225. Gasdurchlässigkeit von Jenaer Pyrexglas

Unterdruck, da der Wasserstoff wieder nach außen diffundiert. Besondere Bedeutung haben Diffusionsvorgänge in der Vakuumtechnik. Unter anderem wird das Glas bei höherer Temperatur gasdurchlässig. Bild 225 zeigt, wie 1 mm starkes Jenaer Pyrexglas bei 400 °C und einem Druckunterschied von 1 at durch eine Fläche von 1 cm^2 je Stunde 2 mm^3 Heliumgas durchläßt.

8.4 Die Osmose

Bild 226. Osmose

Wenn man reines Wasser von Salzlösung durch eine Membran, z. B. Schweinsblase, abtrennt, wandern vorzugsweise die Wassermoleküle in die Salzlösung. Ihre Diffusionsgeschwindigkeit ist erheblich größer als die des Salzes. Man kann auch Membranen herstellen, die nur die Moleküle des Lösungsmittels durchlassen, nicht aber die des gelösten Stoffes (semipermeable Membranen). Man nennt diese einseitige Wanderung durch halbdurchlässige Wände **Osmose.** Dabei entwickelt sich in der Lösung ein ganz beträchtlicher Druck, wenn man sie fest einschließt. Man kann ihn mittels eines senkrechten Steigrohrs sichtbar machen und messen (Bild 226). Bei einer 50 %igen Zuckerlösung und 30 °C beträgt der osmotische Druck 90 at.

Osmose: Hindurchwandern von Molekülen durch eine zwei verschiedene Lösungen trennende Wand.

Im pflanzlichen und tierischen Körper spielt die Osmose eine große Rolle, beim Übertritt von Flüssigkeiten durch den Darm, dem Aufsteigen des Saftes in den Bäumen und vielen anderen Austauschvorgängen.

8.5 Echte Lösungen

Mit der Aufklärung des Diffusionsvorganges wird uns jetzt das Auflösen fester Stoffe in Flüssigkeiten verständlicher. Legt man ein Stück Zucker in Wasser, so ist dieser nach einiger Zeit verschwunden, er hat sich aufgelöst. Verdunstet das Lösungsmittel oder dampft man künstlich ein, so scheidet sich der gelöste Stoff unverändert wieder aus, wobei sich meist schöne Kristalle bilden. Allerdings vermögen Flüssigkeiten nicht beliebige, sondern nur jeweils bestimmte Höchstmengen fremder Körper in sich aufzunehmen. Dann ist die Lösung gesättigt. Den Sättigungsgrad nennt man die **Konzentration.** Bei den allermeisten Stoffen steigt die Löslichkeit mit der Temperatur.

Man kann den Gehalt einer Lösung auf zweierlei Weise ausdrücken, und zwar erstens durch diejenige Menge in Gramm, die sich in 100 Gramm Wasser löst. Wenn nichts Besonderes angegeben ist, bezieht sich der Prozentgehalt jedoch stets auf die fertige Lösung. Wie die Verhältnisse bei einigen bekannten Stoffen liegen, zeigen die folgenden Zahlen:

Löslichkeit einiger Stoffe in Wasser

Temperatur in Celsiusgraden	10	20	30	50	100
Zucker (g je 100 g Wasser)	190,5	203,9	219,5	260,4	487,2
Zucker (g je 100 g Lösung)	65,6	67,1	68,7	72,3	83,0
Kochsalz (g je 100 g Lösung) . . .	26,3	26,4	26,5	26,8	28,1
Kalisalpeter (g je 100 g Lösung) . .	17,4	24,0	30,4	46,1	71,0

Aus diesen Zahlen ist beispielsweise erkennbar, wie man sich eine konzentrierte Lösung leicht herstellen kann. Man löst in heißem Wasser auf und läßt abkühlen. Dann scheidet sich der Überschuß in fester Form aus, und die darüberstehende Lösung ist gesättigt.

In ihrem Wesen ist die echte Lösung **eine vollständige Durchmischung der Moleküle** zweier verschiedener Stoffe. Freilich treten dabei oft noch Nebenwirkungen auf, die für viele chemische und elektrische Vorgänge bedeutsam sind. Die Moleküle der Säuren, Basen und Salze werden z. B. während des Lösungsvorganges in positiv und negativ elektrisch geladene Ionen gespalten.
Ein äußeres Kennzeichen echter Lösungen ist bemerkenswert: Sie sind, wenn auch mitunter gefärbt, stets klar und durchsichtig, niemals trübe.
Es können sich aber auch Gase in Flüssigkeiten lösen, wobei man in diesem Fall von **Absorption** spricht. Allgemein bekannt ist beispielsweise die Fähigkeit des Wassers, Kohlendioxyd (gewöhnlich Kohlensäure genannt) in großen Mengen zu absorbieren. Bei 10 °C vermag 1 l Wasser 1,2 l CO_2 aufzunehmen, bei 30 °C jedoch nur noch 0,44 l. Unter 25 Atmosphären Druck löst sich bei 20 °C sogar das 16fache der gewöhnlichen Menge.
Schließlich vermögen sich auch feste Körper ineinander zu lösen sowie Gase in festen Körpern. So sind z. B. alle Gläser derartige feste Lösungen, während das Lösungsvermögen des Stahls für Wasserstoff beim Bau von Hydrieranlagen ein technisches Problem bildet.

Beispiele: 1. Wieviel feste Substanz und wieviel Wasser sind zur Bereitung von 80 g einer 15 %igen Salzlösung notwendig? – Die Prozentangabe bedeutet, daß auf 100 g Lösung 15 g Salz und 85 g Wasser entfallen; also sind $\frac{15\,\text{g} \cdot 80}{100} = 12\,\text{g}$ Salz und $\frac{85\,\text{g} \cdot 80}{100} = 68\,\text{g}$ Wasser erforderlich.

2. Gegeben sind 150 g einer 18 %igen Salzlösung. Wieviel Wasser muß zugegossen werden, damit eine 4 %ige Lösung entsteht? – Die gegebene Lösung enthält $150\,\text{g} \cdot 0{,}18 = 27\,\text{g}$ Salz und 123 g Wasser. Zu 27 g Salz gehören bei 4 %iger Lösung $\frac{27\,\text{g} \cdot 96}{4} = 648\,\text{g}$ Wasser. Da schon 123 g vorhanden sind, müssen 525 g Wasser zugegossen werden.

8.6 Kolloide Lösungen

Versucht man nun, gröbere Teilchen, wie etwa feinen Sand, mit Wasser zu vermischen, so gelingt das nur vorübergehend. Nach kurzer Zeit bilden sie wieder einen Bodensatz am Grund einer klaren Flüssigkeit. Nur bei äußerster Feinheit können sich kleine Partikel im Wasser schwebend erhalten. Das ist bei einem Durchmesser von etwa $10^{-5} \cdots 10^{-7}$ cm der Fall. Man nennt Stoffe in derart feiner Verteilung **Kolloide.** Wir nehmen jeden Morgen eine solche kolloide Lösung zu uns und nennen sie „Kaffee". Man spricht in diesem Falle von einer **Suspension,** wenn es sich um die Verteilung eines festen in einem flüssigen Stoff handelt. Auch in der Luft können kolloide Teilchen schweben. Wir bezeichnen das gewöhnlich als Rauch oder Nebel. Handelt es sich um flüssige Teilchen in einer anderen Flüssigkeit, so nennt man dies eine **Emulsion.** In diesem Zustand sind z. B. Öle und Fette wesentlich bekömmlicher und verdaulicher als kompakt genossen (Milch und Lebertranemulsion).
Die vielfältigen und interessanten Erscheinungen der Kolloide sind Gegenstand einer besonderen Wissenschaft.

Zwei einfache Rezepte seien als Beispiele zur Herstellung derart kolloider Lösungen angegeben:

a) Je eine schwache Lösung von gelbem Blutlaugensalz und Eisenchlorid geben zusammengegossen eine tiefblaue Lösung von kolloidem Berliner Blau. b) Etwas in Alkohol gelöstes Kolophonium, in Wasser gegossen, gibt eine milchige Suspension von Harzteilchen. Es sind Partikelchen, die man im Mikroskop noch erkennen kann.

Sind die Teilchen eines Kolloids voneinander getrennt, so spricht man von einem **Sol.** Sind sie aber miteinander verbunden, so können sie eine Art feinmaschiges Netz bilden, in welchem nunmehr die Flüssigkeit kolloid verteilt ist. Dies ist ein **Gel.** Beispiele hierfür sind Pudding, gequollener Leim, Gelatine usw.
Eine grobe Einteilung der kolloiden Systeme gibt nachstehendes Schema.

Verteilter Stoff	Verteilungsmittel	Bezeichnung
fest	fest	Legierungen, kolloid gefärbte Gläser
fest	flüssig	Suspensionen
fest	gasförmig	Rauche
flüssig	fest	Gele
flüssig	flüssig	Emulsionen
flüssig	gasförmig	Nebel
gasförmig	fest	Bimsstein, Gase in Metallen
gasförmig	flüssig	Schäume

Infolge ihrer Kleinheit laufen kolloide Teilchen durch gewöhnliche Filter. Es ist aber möglich, besonders feine Häutchen herzustellen (z. B. Kollodiummembranen), welche die kolloiden Anteile zurückhalten, die molekular gelösten aber passieren lassen. Mit Hilfe derartiger **Ultrafilter** lassen sich einerseits rein kolloide Lösungen herstellen, andererseits echte Lösungen von kolloiden Bestandteilen trennen.

8.7 Erscheinungen an Grenzflächen

8.71 Adhäsion

Bei der innigen Berührung zweier Körper tritt zwischen ihren Grenzflächen eine der Kohäsion entsprechende Anziehungskraft auf, die **Adhäsion.**

Adhäsion: durch gegenseitige molekulare Anziehung bewirktes Aneinanderhaften zweier verschiedener Körper.

Zu beobachten ist sie sehr deutlich bei dem Aneinanderheften zweier Parallelendmaße,

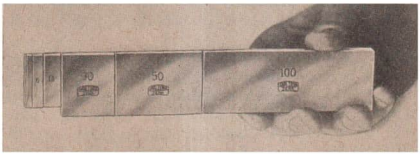


Bild 227. Aneinanderhaften der Parallelendmaße

deren Oberflächen sehr genau aufeinanderpassen (Bild 227). Zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten besteht auch Adhäsion, sofern diese ihre Unterlage **benetzen.** Ob dies eintritt, hängt von den schon erwähnten zwischenmolekularen elektrischen Kräften ab, die auch abstoßender Art sein können. So hängen sich Wassertropfen leicht ans Glas, die Tinte bleibt an der Feder haften usw. Wasserabweisende Stoffe nennt man **hydrophob** (wasserfeindlich), benetzbare Stoffe **hydrophyl** (wasserfreundlich).

8.72 Oberflächenspannung

Um einen Holzklotz zu spalten, wird Energie benötigt. Abgesehen von der erzeugten Reibungswärme, ist das Endergebnis das durchaus erwünschte: Zwei Spaltstücke sind entstanden und mit ihnen zwei neue Oberflächen. Um neue Oberflächen zu schaffen, bedarf es stets eines Arbeitsaufwandes. Man spricht in diesem Falle von **Oberflächenenergie.** Mit der Oberfläche einer Flüssigkeit steht es genauso; will

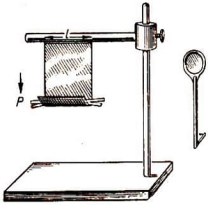


Bild 228. Versuch zur Messung der Oberflächenspannung

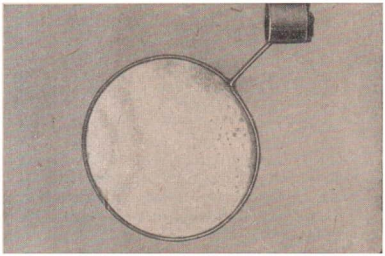


Bild 229. Seifenhaut im Drahtring

man sie vergrößern, muß Arbeit verrichtet werden. Da Arbeit das Produkt aus Kraft und Weg ist und der Weg der beabsichtigten Bewegung entspricht, ergibt sich, daß der Flüssigkeitsspiegel jedem Versuch, ihn in seiner Ausdehnung zu vergrößern, einen Widerstand entgegensetzen muß. Der horizontale, glatte Spiegel einer Flüssigkeit ist die unter den gegebenen Umständen kleinste Oberfläche. Er verhält sich damit ähnlich einer gespannten Membran.

Man kann eine Aluminiummünze (einer solchen haftet stets eine Spur Fett an!) vorsichtig auf eine Wasserfläche legen. Sie geht nicht unter. Ihr Gewicht steht im Gleichgewicht mit der von der Durchwölbung der Oberfläche hervorgerufenen Gegenkraft. Die Kugelform freier Flüssigkeitstropfen ist ebenfalls diejenige der kleinstmöglichen Oberfläche.

Wenn es sich darum handelt, diese Oberflächenspannung zu messen, muß man also die Kraft bestimmen, die zur Dehnung dieser Fläche notwendig ist. Hier besteht insofern ein Unterschied gegenüber dem Verhalten elastischer Körper, als die Dehnung nicht proportional der Belastung erfolgt, also auch nicht dem Hookeschen Gesetz (S. 130) unterliegt. Deshalb ist der Vergleich einer Flüssigkeitsoberfläche mit einer Gummihaut physikalisch unzutreffend. Das Prinzip einer Messung läßt sich mit einem einfachen Versuch nachahmen (Bild 228).

Ein glatter Stift (er muß fettfrei sein) wird gut benetzt und von unten her mit der Kante ein umgefalztes Papierblättchen angesetzt. Es bleibt hängen. Man kann dann weitere kleine Papierstreifchen in den Falz legen, bis das angehängte Gewicht so groß wird, daß die Last abreißt. Es hat sich beiderseits der Blättchenkante je eine Wasserhaut gebildet, die bei Überlastung abreißt. Es wird also die Kraft gemessen, die zur Vergrößerung der Oberfläche notwendig ist. Man bezieht sie einheitlich auf 1 cm Randlinie und drückt sie in dyn/cm aus. Man erhält auf diese Weise:

$$\text{(109)} \qquad \textbf{Oberflächenspannung } \sigma = \frac{\textbf{Zur Dehnung der Oberfläche notwendige Kraft } P}{\textbf{Länge der Randlinie } l}$$

Für genaue Messungen bedient man sich besserer Methoden.

Oberflächenspannung σ:

Wasser 20 °C gegen feuchte Luft	74,1	dyn/cm
Benzol 20 °C gegen Luft	28,8	dyn/cm
Äthylalkohol 20 °C gegen Alkoholdampf	22,0	dyn/cm
Quecksilber gegen Luft	500	dyn/cm
Quecksilber gegen Wasser	375	dyn/cm

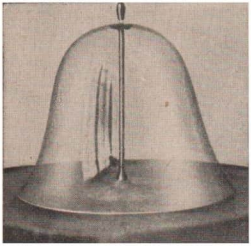


Bild 230. Trifft ein ruhig fließender Wasserstrahl auf einen kleinen Teller, so entsteht eine „Wasserglocke"

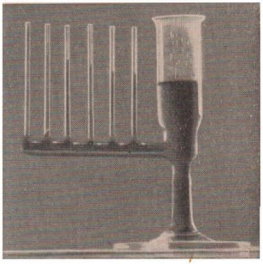


Bild 231. Kapillaren verschiedener Weite

Beispiele: 1. Ein gut benetzter Drahtring von 4 cm Durchmesser wird flach aus dem Wasser gehoben. Welche Kraft tritt im Moment des Abreißens auf? – Die dehnende Randlinie ist hier ein Kreis vom Umfang 12,6 cm. Aus obiger Formel ergibt sich $P = \sigma l$. Da die gebildete, ringförmige Lamelle Vorder- und Rückseite besitzt (dies ist übrigens auch bei Bild 228 der Fall), entstehen 2 Oberflächen, weshalb die gesamte Kraft $P = 2\sigma l = 2 \cdot 74{,}1$ dyn/cm $\cdot$ 12,6 cm = 1870 dyn = 1,9 p.

2. Der Wasserläufer gleitet auf dem Teich, ohne einzusinken.

3. Die Seifenblase steht unter einem inneren Druck.

8.73 Kapillarwirkung

Taucht ein benetzbares enges Röhrchen in eine Flüssigkeit, so steigt diese höher als der umgebende Spiegel. Bei sogenannten **Kapillaren** (Haarröhrchen) ist die Steig-

höhe h besonders auffallend (Bild 232). Dabei wird die Flüssigkeitssäule vom Gewicht $\pi r^2 \varrho g h$ von der längs ihres oberen Randes wirkenden Kraft $\sigma 2 \pi r$ getragen. Nach Gleichsetzung beider Ausdrücke erhält man unmittelbar die

(110) **kapillare Steighöhe:** $$\boxed{h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}}$$

Umgekehrt läßt sich aus der kapillaren Steighöhe die Oberflächenspannung berechnen.

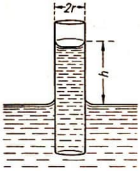


Bild 232. Kapillare Steighöhe und Oberflächenspannung

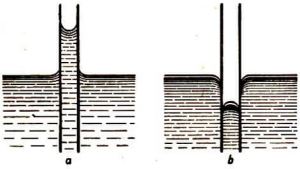


Bild 233. a) Benetzende Flüssigkeit
b) Nicht benetzende Flüssigkeit

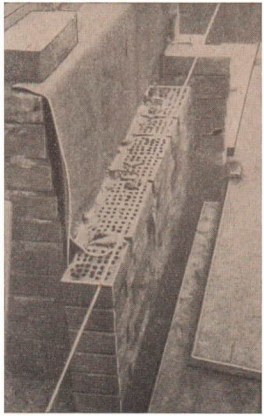


Bild 234. Isolierung von Mauerwerk mit Teerpappe gegen Durchfeuchtung

Bei nicht benetzenden Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber in Glasgefäßen, tritt die umgekehrte Wirkung, die **Kapillardepression,** ein. Die Oberfläche ist in der Kapillare halbkugelig auf- oder abwärts gekrümmt und wird **Meniskus** genannt (Bild 233). Auch in weiten Gefäßen zeigt sich dieser Meniskus am Rande.

Beispiele: 1. Wie hoch steigt Wasser in einer vollkommen benetzbaren Kapillare von 0,1 mm Durchmesser? –

$$h = \frac{2 \cdot 74\,\mathrm{g \cdot cm \cdot cm^3 \cdot s^2}}{\mathrm{s^2 \cdot cm \cdot 1\,g \cdot 981\,cm \cdot 0{,}005\,cm}} = 30{,}2\,\mathrm{cm}$$

2. Alle feinen Hohlräume in porösen Körpern sind Kapillaren, daher die Saugwirkung von Geweben, Dochten und Ziegelsteinen (Bild 234).

8.74 Adsorption

Im Gegensatz zur Absorption (S. 134), wobei ein Stoff homogen im Innern eines anderen aufgenommen wird, steht die Adsorption.

Adsorption: Anreicherung von Stoffen in festen oder flüssigen Grenzflächen.

Es kommt z. B. oft vor, daß zahlreiche Moleküle einer Flüssigkeit oder eines Gases an einer fremden Oberfläche festgehalten werden. Die Menge des adsorbierten Stoffes wird dann um so größer sein, je größer dessen Oberfläche ist.

Durch feine Aufteilung eines festen Körpers kann man aber seine Oberfläche sehr vergrößern. Zerlegt man einen Würfel von der Kantenlänge a durch 3 Schnitte in 8 kleine Würfel mit der Kante $\frac{a}{2}$, so wird die freie Oberfläche verdoppelt. Bei nochmaliger Zerlegung wächst sie auf das 4fache usw. So erklärt sich, wie bei mikroskopisch feiner Aufgliederung eines Körpers seine freie Oberfläche ungewöhnlich groß werden kann. Es gelingt z. B., feinporige pflanzliche Kohle so zu präparieren (aktivieren), daß 1 g **Aktivkohle** eine innere Oberfläche von über 1000 m² enthält. Derartige Kohle vermag deshalb große Mengen von Gasmolekülen zu **adsorbieren** (anzulagern), die man durch Erwärmung wieder austreiben kann. Insbesondere werden schwere Moleküle bevorzugt angereichert, wie bei der Gewinnung von Benzol aus Leuchtgas. Beim Entfärben von Flüssigkeiten, beispielsweise der Herstellung weißen Zuckers, filtriert man durch Aktivkohle.

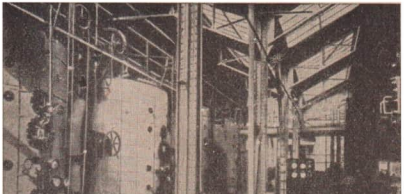


Bild 235. Anlage zur Rückgewinnung verdampfter Lösungsmittel

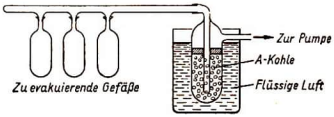


Bild 236. Kühlfalle

Die Adsorption von Gasen und Wasser durch die Oberfläche des Glases ist die Ursache der schwierigen Herstellung luftleerer Gefäße (z. B. Radioröhren). Die Gasreste werden dann durch Erwärmen der Kolben an der Pumpe ausgeheizt und in einer sog. Kühlfalle (mit Aktivkohle gefüllt und mit flüssiger Luft gekühlt) adsorbiert (Bild 236).

9 Mechanik ruhender Flüssigkeiten (Hydrostatik)

9.1 Verbundene Gefäße

Die Atome bzw. Moleküle eines festen Körpers sind in strenger Ordnung gegenseitig gebunden und nur mit großer Gewalt aus ihrer natürlichen Lage zu bringen. Bei Flüssigkeiten ist diese strenge Ordnung aufgehoben, und man hat Anlaß zu der

Bild 237. Sammelbehälter einer Wasserleitung

Annahme (s. Abschn. 8.2), daß die Moleküle in fortgesetzter, ungeordneter Bewegung sind. Sie sind wie Glasperlen in einem Gefäß leicht verschiebbar. Eine Flüssigkeit hat daher wohl ein bestimmtes Volumen, aber keine bestimmte Gestalt. Wegen der außerordentlich leichten Verschiebbarkeit der Moleküle können auf einer Wasserfläche auch keine Unebenheiten bestehen. Auf diese Weise liegt der Spiegel einer Flüssigkeit stets genau waagrecht, d. h. senkrecht zur wirkenden Schwerkraft:

(111) **Der Spiegel einer Flüssigkeit liegt stets senkrecht zur wirkenden Kraft und bei gleicher Kraft in allen seinen Teilen auf gleicher Höhe.**

Auch komplizierte Form des Gefäßes ändert daran nichts. Verbindet man mehrere Gefäße miteinander, so bildet die darin befindliche Flüssigkeit einen einzigen Körper, dessen Spiegel nach (111) in allen Teilen auf gleicher Höhe stehen muß:

(112) **In verbundenen Gefäßen steht eine Flüssigkeit überall gleich hoch.**

Beispiele: 1. Der Ausfluß einer Wasserleitung kann nie höher liegen als das Sammelbecken.

2. Zum Nivellieren benutzt man die Schlauchwaage (Bild 238).

3. Das Flüssigkeitsniveau eines Kessels beobachtet man mit dem Wasserstandsglas.

4. Eine rotierende Flüssigkeit bildet eine gekrümmte Oberfläche (Bild 239). Im Ruhezustand wirkt auf die im Gefäß befindliche Flüssigkeit allein die Schwerkraft G. Bei der Rotation tritt im Abstand r von der Drehachse die horizontal gerichtete Fliehkraft Z auf, womit sich die Resultierende R ergibt. Der nach (111) sich rechtwinklig zur wirkenden Kraft stellende Spiegel muß sich an dieser Stelle entsprechend neigen. Die Fliehkraft ist aber proportional der Entfernung von der Achse, so daß die Neigung des Spiegels nach außen steiler wird. Der Querschnitt ist eine Parabel. Bei großer Winkelgeschwindigkeit haftet die Flüssigkeit an den Wänden.

Bild 238. Prinzip einer Schlauchwaage

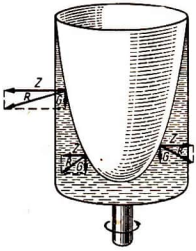


Bild 239. Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit

9.2 Der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit (hydrostatischer Druck)

9.21 Der Kolbendruck

Eine Flüssigkeit sei in ein Gefäß eingeschlossen. An einer Stelle ist die Wand durch einen Kolben ersetzt, der mit der Kraft P nach innen gedrückt wird. Es zeigt sich dann, daß der Druck p an allen Stellen der gleiche ist, und sei das Gefäß noch so verwickelt von Gestalt (Bild 240).

(113) **Der Druck in einer Flüssigkeit pflanzt sich in gleicher Stärke allseitig fort.**

Die Frage nach einer etwaigen Richtung des Druckes ist daher von vornherein falsch gestellt. **Der Druck p** ist eine richtungslose Größe, ein Skalar und **kein Vektor!**

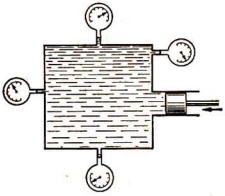


Bild 240
Allseitige Ausbreitung des Druckes

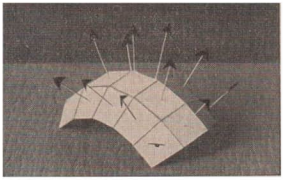


Bild 241. Nicht der Druck ist gerichtet, sondern die wirkende Kraft. Ihre Richtung ist diejenige der Flächennormalen

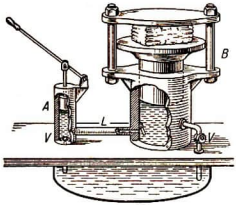


Bild 242. Schema einer hydraulischen Presse

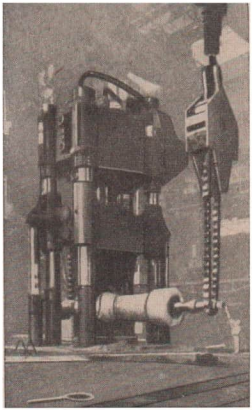


Bild 243. Hydraulische Schmiedepresse

Der Druck hat keine Richtung. Erst sein Produkt pF mit einer Fläche (2) gibt eine Kraft P, deren Richtung durch die Lage dieser Fläche bestimmt ist, und zwar hat der Kraftvektor stets die Richtung der Flächennormalen (Bild 241). Für die praktische Auswertung dieser Tatsache ist ferner bedeutsam, daß Flüssigkeiten trotz ihrer leichten Beweglichkeit sich kaum zusammendrücken lassen.

(114) **Kompressibilität** $\alpha = \frac{\Delta V}{V p}$

(ΔV Volumenabnahme, V Gesamtvolumen, p Druck)

Kompressibilität $\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{kp}}\right)$ verschiedener Flüssigkeiten

Wasser (1 ··· 25 at) 10 °C	0,000050
Wasser (400 ··· 500 at) 10 °C	0,000043
Quecksilber	0,000004
Glyzerin	0,000022
Äthylalkohol	0,000114

Beispiele: 1. **Die hydraulische Presse** (Bilder 242, 243). Mittels des Druckkolbens A (oder einer kleinen Druckpumpe) vom Querschnitt F_1 wird Öl oder Wasser unter den Druck p gesetzt. Ein Leitungsrohr L stellt die Verbindung mit dem Arbeitskolben B her, auf dessen Fläche F_2 (viel größer als F_1!) eine Kraft von $P_2 = pF_2$ wirkt. Die Ventile V regeln Zu- und Abfluß. Im ersten Fall ist $p = \frac{P_1}{F_1}$ und im zweiten derselbe Druck $p = \frac{P_2}{F_2}$. Wegen der Gleichheit beider gilt dann: $\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_2}{F_2}$ oder $\frac{P_2}{P_1} = \frac{F_2}{F_1}$. Die vom Arbeitskolben ausgeübte Kraft ergibt sich aus einfachem Vergleich der Kolbenflächen.

2. Um wieviel cm³ nimmt 1 Liter Wasser bei 5 at Druckzunahme ab? – Die Volumenverkleinerung beträgt $\Delta V = \alpha V p = \frac{50 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}^2 \cdot 1000\ \text{cm}^3\ 5\ \text{kp}}{\text{kp cm}^2} = 0{,}25\ \text{cm}^3$.

3. Kann man den tropfenden Hahn einer Wasserleitung, die unter 10 at Überdruck steht, mit dem Daumen verschließen? – Da der Druck auch durch die feinsten Kanäle sich unvermindert ausbreitet, wird bei einem angenommenen Querschnitt von 1 cm² eine Kraft von 10 kp wirksam werden, sobald sich der offene Teil des Hahnes einigermaßen gefüllt hat.

9.22 Der Schweredruck

Nicht nur durch eine Kraft von außen, sondern auch durch ihr eigenes Gewicht entsteht im Innern jeder Flüssigkeit ein Druck. Eine Wassersäule von 10 cm Höhe und 1 cm² Querschnitt enthält 10 cm³ und wiegt 10 p. Folglich entsteht in dieser Tiefe ein Druck von 10 p/cm². Daraus findet man für die hundertfache Höhe der Säule:

(115) **Eine Wassersäule von 10 m Höhe bewirkt einen Druck p von 1 kp/cm² = 1 at.**

Da die in der Hydrostatik auftretenden Kräfte vielfach durch die Schwerkraft verursacht werden, ist es hier von rechnerischem Vorteil, anstatt mit der Dichte ϱ (g/cm³) mit der **Wichte** γ (p/cm³) zu rechnen.

Wichte = $\frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}}$

(116) $$\boxed{\gamma = \frac{G}{V}}$$

Da in unseren Breiten die Masse von 1 kg das Gewicht von 1 kp hat, sind auch die Zahlenwerte der Dichte gleich denen der Wichte.
Hat die Flüssigkeit die Wichte γ, so entsteht in der Tiefe h der

(117) **Schweredruck:** $$\boxed{p = h\gamma}$$

bzw. auf einer Fläche F eine Kraft von

(118) $$\boxed{P = F h \gamma}$$

Beispiele: 1. Welcher Druck herrscht in 40 m Meerestiefe? ($\gamma = 1{,}02$ p/cm³) –

$$p = \frac{4000\ \text{cm} \cdot 1{,}02\ \text{p}}{\text{cm}^3} = 4080\ \text{p/cm}^2 = 4{,}08\ \text{at}.$$

2. Um wieviel ändert sich die Wichte des Wassers in 5000 m Tiefe? – Für 500 at ist die Kompressibilität $\alpha = 0{,}000043$, was eine relative Volumenverringerung von 0,0215 hervorruft. 1 cm³ hat dann nur noch das Volumen 0,9785 cm³.

$$\gamma = \frac{1{,}02\ \text{p}}{0{,}9785\ \text{cm}^3} = 1{,}04\ \text{p/cm}^3\ (\text{d.h. } 2\%\ \text{Zunahme}).$$

3. Welche Kraft erfährt ein im Wasser schwebendes Blatt? – Gar keine, weil auf Vorder- und Rückseite gleiche Kräfte wirken.

Je nach der Lage der gedrückten Fläche spricht man häufig vom

„Bodendruck“ und meint damit die auf die Bodenfläche eines Gefäßes ausgeübte Kraft,

„Seitendruck“ und meint damit die auf die Seitenfläche eines Gefäßes ausgeübte Kraft,

„Aufdruck“ und meint damit die auf die Unterseite eines in die Flüssigkeit getauchten Körpers ausgeübte Kraft.

Die Ausdrucksweise ist unkorrekt und birgt die Gefahr einer steten Verwechslung von Druck und Kraft in sich.

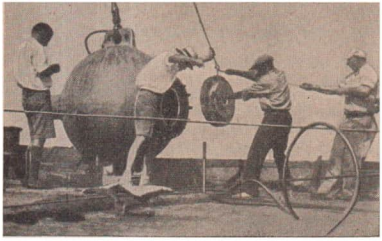


Bild 244. Tauchkugel für 1000 m Wassertiefe. Wanddicke 32 mm

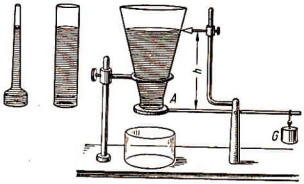


Bild 245. Hydrostatisches Paradoxon

Ein Versuch, dessen Deutung nur bei Verwechslung der Begriffe auf Schwierigkeiten stößt, ist das hydrostatische Paradoxon (Bild 245). Setzt man bei A verschieden gestaltete Gefäße gleicher Bodenöffnung auf, so erweist sich bei gleichem Wasserstand die auf den Boden wirkende Kraft stets von gleicher Größe. Bei zu großer Druckhöhe h öffnet sich der durch das Gewicht G angedrückte Verschlußdeckel. Es erschien früher merkwürdig, daß bei gleich großer Bodenfläche selbst ein ganz dünnes Röhrchen dieselbe Kraft am Boden erzeugt wie ein breites Gefäß mit einer großen Wassermenge.

9.23 Gleichgewicht verschieden schwerer Flüssigkeiten

Füllt man in den linken Schenkel einer U-Röhre eine Flüssigkeit der Wichte γ_1 und in den rechten eine zweite mit der Wichte γ_2, so verhalten sich die

Druckhöhen umgekehrt wie die Wichten (Bild 246)

$$h_1 : h_2 = \gamma_2 : \gamma_1$$

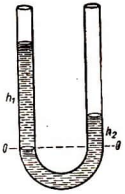


Bild 246. Druckhöhe und Wichte

Beweis: Die auf die Rohrquerschnitte wirkende Kraft ist im Niveau 0 — 0

$$P_1 = F h_1 \gamma_1 \quad \text{bzw.} \quad P_2 = F h_2 \gamma_2$$

Beide stehen im Gleichgewicht, so daß

$$h_1 \gamma_1 = h_2 \gamma_2 .$$

9.3 Der Auftrieb in Flüssigkeiten

9.31 Das Archimedische Prinzip

Es ist jedermann bekannt, daß im Wasser befindliche Gegenstände leichter als in der Luft erscheinen. Leichte Körper, die man unter Wasser hält und dann losläßt, schnellen sogar nach oben und schwimmen sodann an der Oberfläche. Diese nach oben gerichtete Kraft heißt **Auftrieb.** Die Ursache des Auftriebes ist der hydrostatische Druck des Wassers, der in jeder Tiefe einen anderen Wert hat.

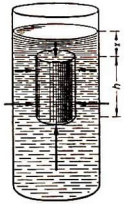


Bild 247. Entstehung des Auftriebes

Innerhalb einer Flüssigkeit von der Wichte γ befinde sich in der Tiefe x ein zylindrischer Körper der Höhe h und dem Querschnitt F (Bild 247). Dann wirkt auf seine Oberseite die nach unten gerichtete Kraft $P_1 = x F \gamma$ und auf seine Unterseite die nach oben gerichtete Kraft $P_2 = (x + h) F \gamma$. Die in jeweils gleicher Höhe gegen die Seiten wirkenden Kräfte haben die Resultierende Null. Insgesamt verbleibt also eine nach oben wirkende Kraft der Größe

$P_2 - P_1 = F \gamma (x + h - x) = F h \gamma$, die man den **Auftrieb** nennt. Da $F h$ das Volumen des Körpers darstellt, ergibt sich

(119) **Auftrieb = eintauchendes Volumen · Wichte** $\boxed{A = V \gamma}$

Man nennt dieses Gesetz nach seinem Entdecker das

(120) **Archimedische Prinzip: Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge.**

Als eine nach oben gerichtete Kraft bewirkt der Auftrieb stets eine Gewichtsverminderung:

Auftrieb = Gewichtsverlust.

Dieser Gewichtsverlust hängt demnach nur vom Volumen (der Wasserverdrängung) des eingetauchten Körpers ab, nicht aber von seinem Gewicht. Ein Bleiklotz hat bei gleichem eingetauchtem Volumen denselben Auftrieb A wie ein Stück Holz!

Je nach dem Eigengewicht G des Körpers können nun 3 Fälle eintreten:

1. $G > A$: Der Körper sinkt mit vermindertem Gewicht unter.
2. $G = A$: Der Körper schwimmt oder schwebt in der Flüssigkeit.
3. $G < A$: Der Körper steigt.

9.32 Dichtebestimmung mit Hilfe des Auftriebes

Das Gewicht eines ganz eingetauchten Körpers vermindert sich um seinen Auftrieb. Da dieser Auftrieb in reinem Wasser von der Wichte 1 p/cm³ zahlenmäßig gleich seinem Volumen sein muß und auch die Zahlenwerte der Wichte mit denen der Dichte übereinstimmen, ergibt sich eine bequeme Möglichkeit, die Dichte kleiner Gegenstände zu bestimmen. Man wägt den Körper mittels einer hydrostatischen Waage zuerst in Luft (m), hängt ihn dann an einem Faden ins Wasser und wägt ein zweites Mal (m') (Bild 248). Es ist dann mit der Dichte der Flüssigkeit ϱ_{Fl}:

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{m}{m - m'} \cdot \varrho_{Fl}$$

Beispiele: 1. Ein Schlüssel wiegt an der Luft 55 g und im Wasser 34,5 g; $m - m' = 20{,}5$ g und $\varrho = \frac{55\,\text{g} \cdot 1\,\text{g}}{20{,}5\,\text{g} \cdot \text{cm}^3} = 2{,}68$ g/cm³ (Aluminium).

2. Um die Dichte von Zucker zu bestimmen, wäge man ihn zweckmäßigerweise in Petroleum ($\varrho = 0{,}8$ g/cm³), damit er sich nicht auflöst. Wiegt ein Stück Zucker in Luft 5,6 g und in Petroleum 2,8 g, so ist sein Gewichtsverlust 2,8 g $= V \cdot 0{,}8$ g/cm³. Sein Volumen ist also $\frac{2{,}8}{0{,}8}$ cm³ und seine Dichte $\varrho = \frac{5{,}6\,\text{g} \cdot 0{,}8}{2{,}8\,\text{cm}^3} = 1{,}6$ g/cm³.

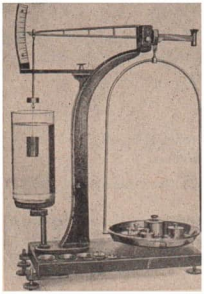


Bild 248. Hydrostatische Waage

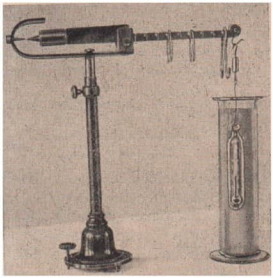


Bild 249. Mohr-Westphalsche Waage

3. Beim Emporwinden eines im Wasser liegenden Felsblockes von 0,3 m³ Größe riß die Kette, als der Stein an der Oberfläche auftauchte. Grund? – Man hat nicht daran gedacht, daß der Block in Luft 300 kp mehr wiegt!

Da die Gewichtsverminderung von der Wichte der Tauchflüssigkeit abhängt, hat man einen weiteren Weg, die Wichte von Flüssigkeiten sehr genau zu bestimmen.

An der **Mohr-Westphalschen Waage** (Bild 249) hängt ein kleiner gläserner Tauchkörper an einem Platinfaden. Taucht der Körper in Wasser, so kann man das Gleichgewicht durch einen an Kerbe 10 gehängten Drahthaken wiederherstellen, wenn die Dichte der Flüssigkeit gerade 1 ist. Zwei weitere Haken von $^1/_{10}$ bzw. $^1/_{100}$ Gewicht des großen Reiters dienen zum Ausgleich, wenn die Dichte von 1 abweicht. Die Reiterstellung von Bild 250 würde z. B. eine Dichte von 1,035 anzeigen. Vor Gebrauch muß die Waage erst mit reinem Wasser ins Gleichgewicht gebracht werden. Da dieses bei Zimmertemperatur nicht die Dichte 1 hat, muß man mit einer Dichtetabelle eine entsprechende Umrechnung machen.

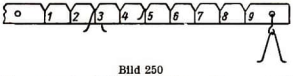


Bild 250
Ablesung an der Mohr-Westphalschen Waage = 1,035

9.33 Das Schwimmen

Wenn der Auftrieb größer als das Gewicht ist, bewegt sich der Körper nach oben, bis sich an der Oberfläche Gleichgewicht zwischen Auftrieb und Gewicht einstellt. Der Körper schwimmt. Wiegt also ein im Wasser schwimmender Holzklotz an der Luft 650 kp, so geht daraus unmittelbar hervor, daß sein eintauchendes Volumen 0,65 m³ betragen muß:

Schwimmgleichgewicht: Beim Schwimmen im reinen Wasser ist das Gewicht des verdrängten Wassers gleich dem Eigengewicht des Körpers.

Nachweis: Ein Überlaufgefäß wird mit Wasser gefüllt. Legt man dann einen schwimmenden Körper hinein, so fließt gerade so viel Wasser ab, wie das Gewicht des Körpers beträgt.

Wenn es sich um eine beliebige Flüssigkeit der Wichte γ' handelt und das Volumen des eintauchenden Teils mit V' bezeichnet wird, können wir den letzten Satz auch schreiben: $\gamma' V' = \gamma V$. Formt man diese Gleichung um in

$$\frac{V'}{V} = \frac{\gamma}{\gamma'}, \text{ so bedeutet das in Worten:}$$

$$\frac{\text{eintauchendes Volumen}}{\text{Gesamtvolumen}} = \frac{\text{Wichte des schwimmenden Körpers}}{\text{Wichte der Flüssigkeit}}$$

Hiernach läßt sich leicht feststellen, welcher Bruchteil eines schwimmenden Körpers aus der Flüssigkeit herausragt.

Dieser herausschauende Teil kann nun durch zusätzliche Belastung des Körpers noch vollends unter Wasser gedrückt werden. Sein Volumen stellt also die **Tragkraft** eines schwimmenden Gegenstandes dar, mit der man bei vollständigem Untertauchen rechnen kann.

Soll ein Floß z. B. einen Menschen vom Gewicht 80 kp tragen, so muß der über Wasser befindliche Teil mindestens noch 80 Liter ausmachen. Eine weitere Vergrößerung des Auftriebes ist nicht möglich; es sei denn, die zugeladene Last taucht ihrerseits mit ein und hilft dann den Auftrieb verstärken.

9.331 Die Schwimmlage

Das Schwimmgleichgewicht ist gegen Störungen äußerst empfindlich. Labiles Gleichgewicht ist wegen der leichten Beweglichkeit des Wassers überhaupt nicht möglich.

Ein Körper läßt sich somit nicht in irgendeiner Lage schwimmend halten, sondern er dreht sich von selbst in die richtige, stabile Schwimmlage. Für diese sind zwei Punkte entscheidend (Bild 251):

1. der **Schwerpunkt** des Körpers (der Angriffspunkt S der Schwerkraft). Er liegt im Körper fest.
2. der **Auftriebsmittelpunkt** (Angriffspunkt A des Auftriebs): der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit. Er verändert seine Lage je nach Größe und Gestalt des eintauchenden Teils.

Liegt der Schwerpunkt S lotrecht unter dem Auftriebsmittelpunkt A, so ist seine Schwimmlage auf jeden Fall stabil. Bei einer kleinen Verdrehung aus dieser Lage entsteht ein Kräftepaar, das ihn so lange zurückdreht, bis das Moment wieder gleich Null ist.
Die lotrechte Verbindungslinie SA nennt man eine **Schwimmachse** des Körpers.
Wenn aber S genau über A liegt, ist das Moment des Kräftepaares zwar auch gleich Null, doch muß jetzt zwischen 2 Fällen unterschieden werden. Man dreht den Körper ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage heraus. Schneidet die Wirkungslinie des neuen Auftriebsmittelpunktes A' die bisherige Schwimmachse unterhalb von S, so entsteht ein Moment, das den Körper umstürzt (Bild 251). Das Gleichgewicht war also labil. Liegt dieser Schnittpunkt oberhalb von S, so kehrt er in seine alte Lage zurück: Das Gleichgewicht war stabil (Bild 252). Man nennt diesen Schnittpunkt der Wirkungslinie von A' mit der Schwimmachse das **Metazentrum.**

Die Schwimmlage eines Körpers ist stabil, wenn das Metazentrum oberhalb seines Schwerpunktes liegt.

Allgemein gesagt: Ein Gegenstand schwimmt um so stabiler, je tiefer ein Schwerpunkt liegt. Segeljachten haben schwere Kiele, in Seenot muß man die Masten kappen.

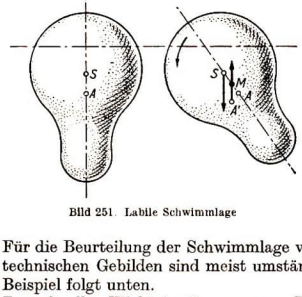


Bild 251. Labile Schwimmlage

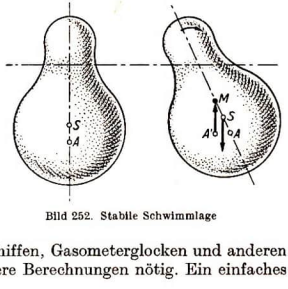


Bild 252. Stabile Schwimmlage

Für die Beurteilung der Schwimmlage von Schiffen, Gasometerglocken und anderen technischen Gebilden sind meist umständlichere Berechnungen nötig. Ein einfaches Beispiel folgt unten.
Zur schnellen Wichtebestimmung von Flüssigkeiten dienen die **Senkwaagen** (Aräometer). Es sind unten beschwerte, oben über den Spiegel ragende Glasröhren mit einer zweckentsprechenden Skala. Je nach der Wichte sinken sie mehr oder weniger tief ein (Bild 253). Die Empfindlichkeit ist um so größer, je dünner der herausragende Hals im Verhältnis zum eingetauchten Teil ist. Sie sind weit verbreitet als Säure-

und Milchprüfer, Alkoholometer, Saccharometer zur Bestimmung des Zuckergehaltes von Lösungen usw.

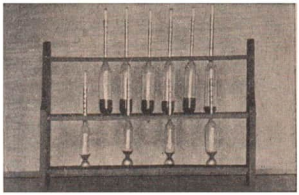


Bild 253. Satz von 10 Aräometern für verschiedene Flüssigkeiten

Beispiele: 1. Eine unten geschlossene Glasröhre von 2 cm² äußerem Querschnitt, die leer 50 p wiegt, wird durch Einfüllen von Bleischrot mit 30 p belastet. Wie weit taucht sie unter, wenn sie in Wasser schwimmt? –

$$G = 80\,\mathrm{p}\,;\; A = G = h \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 \cdot 1\,\mathrm{p/cm}^3$$

(nach Formel 119)

$$h = \frac{80\,\mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^3}{2\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{p}} = 40\,\mathrm{cm}$$

2. Der Hals eines Aräometers hat einen Querschnitt von 50 mm². Um wieviel hebt sich dieser höher, wenn die Wichte der Flüssigkeit von 1,15 auf 1,20 steigt und der eingetauchte Teil anfänglich 5 cm³ verdrängt? – Weil das Gewicht des Aräometers nach wie vor dasselbe ist, muß auch das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge in beiden Fällen gleich sein:

$$G = V\gamma_1 \text{ im ersten Fall und } G = (V - 0{,}5 \cdot h)\gamma_2 \text{ im zweiten Fall.}$$

Daher die Gleichung $V\gamma_1 = (V - 0{,}5 \cdot h)\gamma_2$

und
$$h = \frac{V\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)}{0{,}5} = 0{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

3. Untersuche die Schwimmlage eines quadratischen Holzprismas ($\gamma = 0{,}3\,\mathrm{p/cm}^3$)! – Man nimmt zuerst gerades Eintauchen an und bezeichnet die Seitenlänge des Quadrates mit a, die Länge des Prismas mit l und die Eintauchtiefe mit h. Das Schwimmgleichgewicht $a^2 l\gamma = ahl$ ergibt $h = a\gamma = 0{,}3\,a$. In dieser angenommenen Lage liegt S lotrecht über A, wenn S der Schwerpunkt des Quadrates und A derjenige des eingetauchten Rechtecks ist. SA = Schwimmachse. Dreht man jetzt den Körper ein wenig um die in der Wasserfläche liegende Achse O, so bleibt das Schwimmgleichgewicht erhalten; denn das neu eintauchende Volumen ist gleich dem auftauchenden. Zeichnet man in den nunmehr dreieckigen, eintauchenden Teil den neuen Auftriebsmittelpunkt A' ein und bringt die Wirkungslinie von A' mit der Schwimmachse zum Schnitt, so egt das Meazentrum M

t

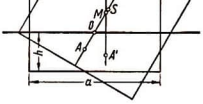


Bild 254. Labiles Schwimmgleichgewicht. Das Metazentrum ist unterhalb des Schwerpunktes

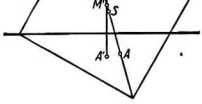


Bild 255. Stabiles Schwimmgleichgewicht. Metazentrum oberhalb des Schwerpunktes

unterhalb von S (Bild 254). Der Körper erfährt ein Moment, das ihn umstürzt. Die angenommene Schwimmlage war labil. Nun denkt man sich das Quadrat auf der Spitze schwimmend, so daß die Schwimmachse diagonal verläuft (Bild 255). Das Metazentrum M' liegt dann über S. Demnach schwimmt das Prisma auf seiner Längskante stabil (Bild 256).

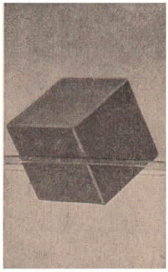


Bild 256. Schwimmender Holzwürfel

10 Mechanik ruhender Gase (bei konstanter Temperatur)

Das Verhalten der Gase, z. B. der Luft, hängt in hohem Maße von der Temperatur ab. Alle jene Erscheinungen, die bei Temperaturwechsel auftreten, können erst in der Wärmelehre behandelt werden.

10.1 Der Luftdruck

Von der den Gasen besonders eigentümlichen Molekularbewegung hatten wir im Abschn. 8.2 schon gesprochen. In einem gasförmigen Körper geht es gleichsam zu wie in einer zusammengepferchten Menschenmenge. Die Moleküle prallen in ihrer Bewegung fortgesetzt zusammen und stoßen auch gegen die Wandung des einschließenden Gefäßes. Wenn auch ein einzelnes Molekül nur eine verschwindend geringe Masse besitzt, ergibt doch ihre ungeheure Anzahl eine ansehnliche Kraft auf jede Flächeneinheit. (Man hat feststellen können, daß 1 cm³ aller Gase unter gewöhnlichen Verhältnissen 27 Trillionen Moleküle enthält!)

Daraus geht hervor, daß bereits die gewöhnliche Luft unserer Atmosphäre einen bestimmten Druck haben muß. Wir füllen ein glattrandiges Glas vollkommen mit Wasser und decken ein Blatt Papier darauf (Bild 257). Dann drücken wir das Papier leicht an und drehen das Glas herum. Beim Loslassen des Verschlusses fließt nichts aus. Das Papier wird vom **Luftdruck** wie von einer unsichtbaren Kraft festgehalten. An Stelle von Wasser hatte der italienische Gelehrte Torricelli (1643) Quecksilber verwendet (Bild 258). Ein einseitig geschlossenes Rohr wird mit Quecksilber gefüllt, mit dem Daumen zugehalten und die nach unten gekehrte Öffnung unter dem Spiegel eines ebenfalls mit Quecksilber gefüllten Napfes wieder freigegeben. Die Flüssigkeit in dem Rohr fällt dabei um ein Stück und hinterläßt im oberen Ende einen luftleeren Raum (**Vakuum**)[1]. Die Höhe der Quecksilbersäule zwischen dem Spiegel im Gefäß und der oberen Begrenzung des Meniskus im Rohr liefert die Größe des herrschenden Luftdrucks, den man in **Millimeter Quecksilbersäule** angibt. Zu Ehren Torricellis sagt man kurz:

Bild 257. Nachweis des Luftdrucks

Bild 258. Torricellis Versuch

[1]) Das Vakuum ist deshalb nicht vollkommen, weil sich der leere Raum sofort mit Quecksilberdampf füllt.

1 mm Quecksilbersäule = 1 Torr

Der Luftdruck ist keine konstante Größe, sondern je nach Höhen- und Wetterlage steten Schwankungen unterworfen. In Meereshöhe und bei einer Jahresmitteltemperatur von 15 °C beträgt dieser im Jahresdurchschnitt:

Normaldruck (Normatmosphäre) = 760 Torr

Höhenlage und Luftdruck (Jahresmittel)

Höhe in m	Druck		Höhe in m	Druck	
	Torr	mbar		Torr	mbar
0	760,0	1013,3	1400	642,0	855,9
100	751,0	1001,3	2000	596,2	794,9
200	742,1	989,4	3000	525,8	701,0
500	716,0	954,6	5000	405,1	540,1
800	690,6	920,7	10000	198,2	264,2
1000	675,1	898,7	20000	41,0	54,7

In etwa 5500 m Höhe ist der Luftdruck nur noch die Hälfte des Normalwertes, in der doppelten nur noch etwa $^1/_4$ usw. Die höchsten Polarlichter sind in 1000 km Höhe beobachtet worden, ein Zeichen dafür, daß auch hier noch Spuren von Luft vorhanden sein müssen. Zur Berechnung des Luftdrucks B in den einzelnen Höhenlagen h ist die

internationale Höhenformel: $$B = 760\left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288}\right)^{5{,}255}$$ [Torr] (gültig bis 11000 m)

entwickelt worden.

Wenn wir von der steten Anwesenheit des Luftdrucks persönlich gar nichts verspüren, so hat das einen einfachen Grund: Unser Körper ist nicht nur von außen her dem Druck unterworfen, sondern auch von innen her vom gleichen Druck erfüllt, womit sich die Wirkung vollkommen aufhebt.

Beispiel: Reduziere den in 500 m Höhe herrschenden Luftdruck von 732 Torr auf den Meeresspiegel. Laut Tabelle besteht die Proportion:

$$716 : 760 = 732 : x, \quad \text{woraus} \quad x = 777 \text{ Torr}$$

10.11 Umrechnung des Luftdrucks in andere Maßeinheiten

Nehmen wir an, der Querschnitt der Quecksilbersäule sei 1 cm². Dann erzeugt sie bei 76 cm Höhe und einer Wichte des Quecksilbers von 13,595 p/cm³ den Druck 76 cm · 13,595 p/cm³ = 1033 p/cm².

(121) **760 Torr = 1033 p/cm² = 1,033 kp/cm² = 1,033 at = 1 atm**

Wir sehen also: Der normale Luftdruck ist ein wenig größer als 1 technische Atmosphäre. Man nennt ihn auch 1 **physikalische Atmosphäre** (1 atm).

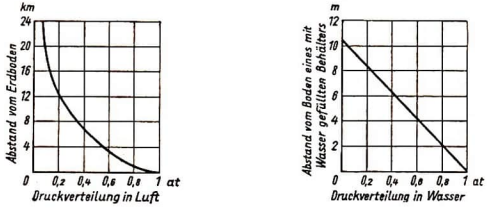


Bild 259a u. b. Druckverteilung in der Atmosphäre und im Wasser

Umgekehrt ergibt die Umrechnung von at in Torr die Beziehung

(122) **1 at = 735,6 Torr**

Im Wetterdienst wird der Luftdruck meist in **Millibar (mbar)** angegeben. Dabei ist:

$$10^5\ \mathrm{N/m^2} = 10^6\ \mathrm{dyn/cm^2} = 1\ \mathrm{Bar\ (bar)}$$
$$100\ \mathrm{N/m^2} = 1000\ \mathrm{dyn/cm^2} = 1\ \mathrm{Millibar\ (mbar)}$$
$$0{,}1\ \mathrm{N/m^2} = 1\ \mathrm{dyn/cm^2} = 1\ \mathrm{Mikrobar\ (\mu bar)}$$

Hieraus ergibt sich schließlich:

(123) **760 Torr = 1013,25 Millibar (mbar)**

Die Druckverteilung in der Atmosphäre ist grundsätzlich anders als im Wasser, wo man (abgesehen von der geringen Kompressibilität) in allen Tiefen die gleiche Dichte antrifft (Bild 259). Macht man aber einmal die gleiche Annahme für die Luft, so ergäbe sich die Gesamthöhe der Atmosphäre in folgender Weise. 1 m³ Luft wiegt 1,293 kp, und der Luftdruck beträgt 10330 kp/m². Das entspricht einer Gesamthöhe von $\frac{10330}{1{,}293}$ m $\approx$ 8000 m. Für je 1 Torr Druckabnahme ergibt sich daraus ein Höhenunterschied von $\frac{8000}{760}$ m = 10,5 m. Da aber, wie gesagt, die Lufthülle nicht homogen ist, darf man mit dieser Zahl nur innerhalb geringer Höhenunterschiede rechnen, wo die relative Dichteabnahme noch verhältnismäßig gering ist.

Bild 260. Auspumpen einer Kugel nach Guericke (1672)

Mit je 10,5 m Erhebung nimmt der Luftdruck um je 1 Torr ab (nur für kleine Höhenunterschiede und in der Nähe der Erdoberfläche gültig!).

Beispiele: 1. Wieviel technische Atmosphären beträgt der Luftdruck in 800 m Höhe? – Laut Tabelle ist der Druck hier 690,6 Torr. Da 735,6 Torr = 1 at, ergibt sich $\frac{690{,}6}{735{,}6}$ = = 0,94 at.

2. Wieviel technischen Atmosphären entspricht ein Luftdruck von 1025 mb? – Da 1013,25 mb = 760 Torr = 1,033 at, rechnet man

$$\frac{1{,}033\ \text{at} \cdot 1025}{1013{,}25} = 1{,}045\ \text{at}\,.$$

3. Welcher Kraft unterliegt die Außenfläche einer Kugel von 1 m Radius infolge des normalen Luftdrucks? – Man findet zunächst eine Oberfläche von 12,566 m². Da der Druck je m² 10330 kp beträgt, ist die Gesamtbelastung 129,811 Mp! Der Magdeburger Bürgermeister Otto von Guericke hat diese gewaltige Kraft der atmosphärischen Luft erstmalig demonstriert (Bild 260).

4. Höhen- und Tiefenmeßgeräte sind im Prinzip Luftdruckmesser.

10.12 Barometer

Der Torricellische Versuch stellt selbst schon ein einfaches **Barometer** dar. Um Quecksilber zu sparen, macht man die Hauptlänge der Röhre enger und biegt sie unten U-förmig um: das **Heberbarometer** (Bild 261). Abgelesen wird immer am Scheitel des Meniskus.

Da sich Quecksilber für 1 grd Erwärmung um das 0,000181 fache seines Volumens ausdehnt, muß man die abgelesene Länge l der Säule auf 0 °C reduzieren.

$$B = l - 0{,}000181 \cdot t\,l \quad (t \text{ Temperatur})$$

Bei sehr genauen Messungen sind noch die Kapillarwirkung, die Wärmeausdehnung der Skala usw. zu berücksichtigen.

Bild 261 Heberbarometer

Eine deutlichere Ablesung gestattet das **Kontrabarometer**, welches die Bewegung des im kurzen Schenkel stehenden Quecksilberspiegels auf einen Flüssigkeitsfaden (gefärbtes Toluol) überträgt.

Bequemer, wenn auch ungenauer ist das **Dosen- oder Aneroidbarometer** (Bild 262). Eine luftleere Blechdose wird vom wechselnden Druck der Luft mehr oder weniger zusammengedrückt und überträgt diese Bewegung auf einen Zeiger mit Skala.

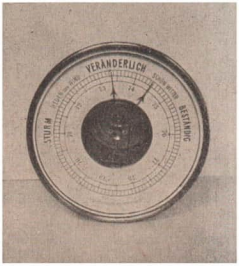


Bild 262. Dosenbarometer

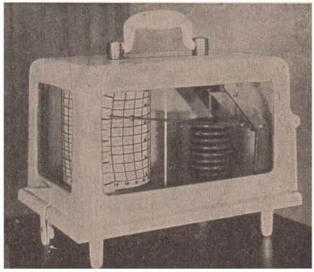


Bild 263. Barograph

Barographen (Bild 263) zeichnen die Bewegung des Luftdrucks mit einer Schreibspitze auf das Papierband einer rotierenden Trommel. Es entsteht eine Kurve, die den Verlauf des Luftdrucks während eines ganzen Tages wiedergibt.

10.2 Druck und Volumen der Gase

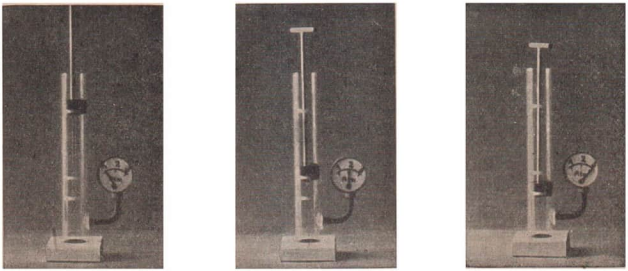
Von der recht beträchtlichen Größe des natürlichen Luftdrucks haben wir uns überzeugen können. Daß Gase aber unter gewissen Umständen noch viel gewaltigere Drücke ausüben können, zeigen uns die Luftschläuche der Autoreifen und die überall verwendeten Hochdruckgasflaschen. Weshalb der Druck im einen Fall verhältnismäßig niedrig und im anderen sehr viel größer ist, hat eine einfache Ursache: Es kommt ganz darauf an, wieviel Moleküle in dem betrachteten Raum zusammengedrängt sind:

(124) **Der Druck eines Gases ist bei konstanter Temperatur proportional der in der Raumeinheit anwesenden Zahl von Molekülen.**

Ohne aber an die Moleküle zu denken, können wir von einer einfachen Erfahrung ausgehen. Ein Gefäß vom Volumen V sei durch einen leicht beweglichen, aber dicht schließenden Kolben verschlossen (Bild 264). Ein unten angebrachtes Manometer zeige den Druck an, der zunächst p Atmosphären betragen möge. Dann schieben wir den Kolben wie bei einer Fahrradpumpe um die Hälfte nach unten. Der Druck steigt auf das Doppelte, d. h. auf $2\,p$, während das Volumen noch $\frac{V}{2}$ beträgt. Drücken wir jetzt den Kolben um $^2/_3$ nach unten, so steigt der Druck auf $3\,p$, während das Volumen noch $\frac{V}{3}$ ausmacht.

Das Volumen eines eingeschlossenen Gases ist seinem Druck umgekehrt proportional.

Allerdings muß dabei eines bedacht werden: Die Temperatur des Gases darf sich während des Versuches nicht ändern; denn beim Zusammenpressen von Luft erhöht sich deren Temperatur. Diese würde eine zusätzliche Dehnung des Gases bewirken.



a b c

Bild 264a···c. Das Gesetz von Boyle-Mariotte. Es verhalten sich die Rauminhalte wie $1:{}^1/_2:{}^1/_3$ und die Drücke wie $1:2:3$

Deshalb gilt das eben festgestellte Verhältnis von Druck und Volumen **nur bei konstanter Temperatur**! Stellt man also derartige Versuche an, so muß immer erst gewartet werden, bis sich die zusammengepreßte Luft wieder auf die ursprüngliche Temperatur abgekühlt hat.[1])

Bilden wir nun die Produkte aus dem jeweiligen Volumen mit dem dazugehörigen Druck, so erhalten wir der Reihe nach

$$V\,p = \frac{V}{2}\cdot 2\,p = \frac{V}{3}\cdot 3\,p \text{ usw.},$$

d. h., im Endergebnis hat das Produkt $p\,V$ **immer den gleichen Wert**. Dieses für die Mechanik der Gase wichtigste Gesetz wurde von dem englischen Physiker Boyle[2]) entdeckt und später von seinem Zeitgenossen, dem Franzosen Mariotte, gesichert:

(125) **Gesetz von Boyle-Mariotte: Das Produkt aus Druck und Volumen eines eingeschlossenen Gases ergibt bei gleichbleibender Temperatur stets den gleich Wert.**

$$\boxed{p\,V = \text{konst.}} \quad \text{oder}$$

(126) $$\boxed{p_1\,V_1 = p_2\,V_2}$$

Das Boyle-Mariottesche Gesetz ist gleichsam in jeder Druckgasflasche verwirklicht. Man kann damit jederzeit berechnen, wieviel aus dem Behälter noch entweichen kann.

Bild 265. Wasserstoff-Flaschen

Bei genauester experimenteller Prüfung stellt man allerdings fest, daß das Boyle-Mariottesche Gesetz nicht streng erfüllt wird. Die Abweichung ist bei Kohlendioxyd (CO_2) am auffallendsten, bei Wasserstoff und Helium (bei gewöhnlichen Temperaturen) jedoch kaum bemerkbar[3]). Ein Gas, welches dem Gesetz $p\,V = \text{const}$ streng gehorcht, bezeichnet man daher als **ideales Gas.** Wenn das ideale Gas in Wirklichkeit auch nicht existiert, so hat es doch für die Theorie der Wärme große Bedeutung; denn bei hohen Temperaturen verhalten sich alle Gase praktisch ideal und viele Gase bereits bei Zimmertemperatur.

Bei zusammengepreßten Gasen ist in vielen Fällen nur der zusätzlich erzeugte **Überdruck** von Interesse, wobei man von dem bereits vorhandenen natürlichen Druck der Atmosphäre absieht. Den Gesamtdruck, unter dem ein Gas steht, d. h. unter Einrechnung des herrschenden, äußeren Luftdrucks, bezeichnet man als **absoluten Druck.**

Es gilt also:

Absoluter Druck = Überdruck + jeweiliger Luftdruck

[1]) Wenn dies nicht beachtet wird, ist der Zusammenhang von p und V verwickelter Art und stellt ein besonderes Gesetz der Wärmelehre dar.

[2]) 1627···1671.

[3]) Grund: geringste Reste von Kohäsion zwischen den Molekülen. Je weiter das Gas von seinem Verflüssigungspunkt entfernt ist, desto besser wird die Übereinstimmung.

Soll es sich nur um eine ungefähre Abschätzung handeln, so genügt es, wenn man bei der Berechnung des absoluten Druckes den Überdruck um eine Einheit erhöht. Es ist dann z. B. 5 at Überdruck $\approx$ 6 at absolut. Die kleine Ungenauigkeit, die im Unterschied zwischen dem natürlichen Luftdruck und der technischen Atmosphäre besteht, fällt meist kaum ins Gewicht.

Wichtige Bemerkung. Bei der Anwendung des Gesetzes von Boyle-Mariotte sind stets die **absoluten Drücke** einzusetzen!

Beispiele: 1. Wieviel Wasser dringt in eine Taucherglocke von 6 m³ Inhalt, die umgestülpt in 20 m Tiefe versenkt wird? – Entsprechend dem Druck in dieser Tiefe, steht die eingeschlossene Luft unter 3 at absolut und wird auf 2 m³ zusammengepreßt. Das eingedrungene Wasser (4 m³) muß durch Druckluft herausgepreßt werden.

2. Wieviel at sind 12 at Überdruck bei einem Barometerstand von 765 Torr? – Der Barometerstand ergibt, in technische Atmosphären umgerechnet, $\frac{765}{735{,}6} = 1{,}04$ at. Das gibt zusammen 13,04 at.

3. Eine Sauerstoff-Flasche von 40 Litern Inhalt steht unter einem Überdruck von 25 at. Wieviel Sauerstoff entweicht bei einem Barometerstand von 720 Torr? – Der absolute Druck in der Flasche beträgt $25 + \frac{720}{735{,}6} = 25{,}979$ at; nach dem Entweichen steht das Gas unter einem Druck von 0,979 at. Somit ist nach (126)

$$V_2 = \frac{25{,}979\ \text{kp} \cdot 40\ \text{l cm}^2}{0{,}979\ \text{cm}^2\ \text{kp}} = 1061\ \text{l}$$

Davon verbleiben 40 l in der Flasche, so daß 1021 Liter ausströmen.

10.21 Messung des Gasdrucks

Zur Messung des Gasdrucks benutzt man **Manometer.** Das offene Manometer ist ein beiderseits offenes, mit Flüssigkeit gefülltes U-Rohr, das zur Messung geringer Druckunterschiede dient (Bild 266) (z. B. Leuchtgasleitung). Man erhält den Druckunterschied unmittelbar in „Wasser- oder Quecksilbersäule".

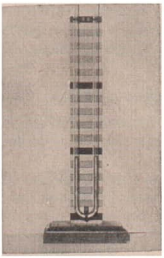


Bild 266. Offenes Manometer

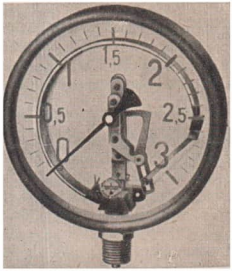


Bild 267. Röhrenfeder-Manometer (Bourdonsche Röhre)

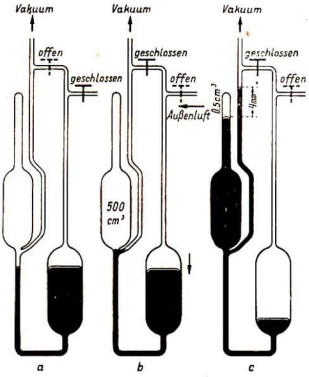


Bild 268. Messung geringer Drücke mit dem MacLeod-Manometer (schematisch). a) Alle Teile sind im Vakuum. b) Verbindung mit der Außenluft schafft im rechten Teil Überdruck. c) Es werden z. B. 500 cm³ evakuierten Raumes auf 0,5 cm³ zusammengedrückt, d. h. auf $^1/_{1000}$. Diese 0,5 cm³ stehen unter einem Druck von 4 Torr, also beträgt das Vakuum 0,004 Torr

Beim geschlossenen Manometer enthält der geschlossene Schenkel Luft, die bei Druckeinwirkung auf den Spiegel im offenen Rohr nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz zusammengepreßt wird. Die Skalenwerte drängen sich bei höheren Drücken immer enger zusammen, weshalb sich nur ungenau ablesen läßt. Außerdem ist der starke Temperatureinfluß von Nachteil.

Die **Metallmanometer** enthalten ein flaches, gebogenes Metallrohr, das einseitig geschlossen ist (Bourdonsche Röhre) (Bild 267). Wird dieses an eine Druckleitung angeschlossen, so biegt es sich ein wenig auf und bewegt einen Zeiger. Grund: Die äußere gekrümmte Seite des Rohres bietet dem Druck eine größere Fläche dar und erfährt demnach eine stärkere Kraft als die innere.

Zur Messung sehr kleiner Drücke verwendet man u. a. das **Manometer von MacLeod** (Bild 268).

Beispiel: Wieviel at Überdruck besitzt eine Gasleitung, wenn ein mit Wasser gefülltes offenes Manometer eine Wassersäule von 40 mm anzeigt? – Da 1 at einer Wassersäule von 10 m entspricht, ist der Überdruck $p = \frac{40}{10000} = 0{,}004$ at.

10.3 Auftrieb in Gasen

Der Auftrieb in den Flüssigkeiten hat seine Ursache in dem mit der Tiefe zunehmenden Schweredruck. Eine ähnliche Druckzunahme zeigt aber auch die Luft. Es müssen daher alle Körper in der Luft einen Auftrieb zeigen. In sinngemäßer Abwandlung gilt wieder das Archimedische Prinzip:

Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Luft- bzw. Gasmenge.

Ein Beweis aus der täglichen Erfahrung läßt sich deswegen schwer erbringen, weil das Gewicht der verdrängten Luftmenge im allgemeinen sehr klein ist und alle Gewichtsbestimmungen von vornherein in der Luft stattfinden.

Wenn es aber gelingt, einen Körper herzustellen, dessen Gewicht kleiner als der Auftrieb ist, wird dieser in der Luft aufsteigen. Das ist beim **Luftballon** der Fall. Sein Gewicht einschließlich Gasfüllung und Nutzlast muß kleiner als der Auftrieb sein. Das führt zwangsläufig zu großen Abmessungen, wenn ein nennenswerter Auftrieb entstehen soll. Unsere Wetterstationen verwenden den **Registrierballon** zur Erkundung der Verhältnisse in hohen Luftschichten (Bild 269).

Bild 269. Start eines Registrierballons. In 15000 m Höhe platzt der Hauptballon. Das Gerät sinkt mit Fallschirm und dem roten Signalballon zu Boden

Mit zunehmender Steighöhe wird aber der Auftrieb des Ballons immer kleiner, weil die Wichte der Luft stetig abnimmt. Die Steighöhe fände bei Gleichheit von Auftrieb und Gewicht ihr Ende. Andererseits dehnt sich das Füllgas (man bevorzugt hierzu das leichteste aller Gase, den Wasserstoff) mit kleiner werdendem Außendruck ebenfalls aus, so daß infolge der Elastizität der Ballonhülle der Auftrieb weiterhin erhalten bleibt. Schließlich aber hat die Dehnungsfähigkeit der Hülle ihre Grenze. Der Ballon platzt oder wird durch ein umgehängtes Flechtwerk aus Fäden an der weiteren Ausdehnung gehindert. In diesem Gleichgewichtszustand $A = G$ schwebt der Ballon in bestimmter Höhe dahin. Registrierballons läßt man meist platzen und die Meßgeräte von einem Fallschirm zu Boden tragen. Ein kleiner roter Hilfsballon erleichtert das Auffinden.

Bei sehr feinen Wägungen muß der Auftrieb mit in Rechnung gezogen werden. Man muß dann das **scheinbare Gewicht**, das unter gewöhnlichen Umständen in der Luft festgestellt wird, stets auf das **wahre Gewicht** reduzieren. Der jeweils zu berechnende Auftrieb muß dem scheinbaren Gewicht hinzugefügt werden; denn dieser ist seinem Wesen nach ein Gewichtsverlust.

Beispiele: 1. Welches ist das wahre Gewicht eines Messingstückes von 1 kp ($\gamma = 8{,}9$ p/cm³) bei normalem Luftgewicht? – Zur Berechnung des Auftriebs muß erst das Volumen bekannt sein. Man bekommt $V = \frac{1000\,\text{p} \cdot \text{cm}^3}{8{,}9\,\text{p}} = 112\ \text{cm}^3$. Der Auftrieb ist dann $\frac{0{,}001\,293\ \text{p} \cdot 112\ \text{cm}^3}{\text{cm}^3} = 0{,}145$ p und das wahre Gewicht 1000,145 p.

2. Ein Registrierballon faßt 5 m³ Wasserstoff von der Wichte 0,09 kp/m³. Wieviel dürfen Hülle und Ballast höchstens wiegen? – Der Auftrieb beträgt bei normalem Luftgewicht $5 \cdot 1{,}293$ kp $= 6{,}465$ kp. Die Füllung wiegt $5 \cdot 0{,}09$ kp $= 0{,}45$ kp. Es bleibt ein nutzbarer Überschuß von höchstens 6,015 kp.

3. Eine in einem frei fallenden Kasten brennende Kerze erlischt unterwegs. Grund? – Alle Erscheinungen des Auftriebs, auch diejenigen von heißen Gasen, sind Folgen unterschiedlichen Gewichts. Im fallenden Kasten ist die Schwerkraft aufgehoben.

10.4 Dichtebestimmung von Gasen

Mit Hilfe des Auftriebs kann man auf einfache Weise die Dichte der Luft feststellen. Ein Glasballon mit zwei Hähnen wird auf eine Waage gelegt und austariert (Bild 270).

Bild 270. Wägen der Luft

Dann saugt man die Luft soweit wie möglich heraus und wägt erneut, wobei sich ein Gewichtsverlust her-

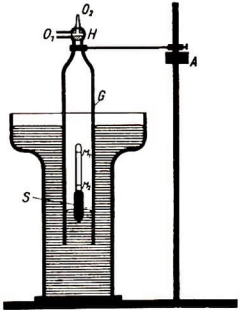


Bild 271. Apparat zur Bestimmung der Gasdichte

ausstellt, welcher der entfernten Luftmenge entspricht. So ist der Versuch einer der handgreiflichsten Beweise dafür, daß die Luft überhaupt ein Gewicht besitzt. Um das Volumen der herausgesaugten Luftmenge zu bestimmen, öffnet man den einen Hahn unter Wasser, worauf eine entsprechende Wassermenge in den Ballon strömt, die durch Ausgießen in ein geeichtes Glas gemessen werden kann. Die Dichte ergibt sich dann in bekannter Weise aus Masse und Volumen.

Zur schnellen Dichtebestimmung anderer Gase kann man auch das **Ausströmverfahren von Bunsen** verwenden (Bild 271). Man benutzt einen Glaszylinder G, der oben eine durch einen Hahn verschließbare feine Öffnung besitzt. Er steht in einem Gefäß mit Quecksilber oder Paraffinöl. Öffnet man den Hahn H, so füllt sich der Zylinder von unten her mit Flüssigkeit und verdrängt das oben ausströmende Gas.

Zu Beginn des Versuches ist eine bestimmte potentielle Energie vorhanden, gegeben durch den Höhenunterschied der Flüssigkeit im inneren und äußeren Gefäß. Diese potentielle Energie setzt sich in die Bewegungsenergie des ausströmenden Gases um. Füllt man ein anderes Gas ein und stellt den gleichen Höhenunterschied her, so müssen auch die kinetischen Energien beider Gase gleich sein. Deshalb kann man für 2 zu vergleichende Gase bilden:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad \text{und hieraus} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}$$

Da sich die Ausströmgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Ausströmzeiten und die Massen sich wie die Dichten verhalten, gilt:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

Man füllt den Apparat zunächst mit Luft und stellt die Ausströmzeit zwischen 2 am Schwimmer S angebrachten Marken M_1 und M_2 mit einer Stoppuhr fest. Die Dichte der Luft nimmt man mit 1,293 g/dm³ (d. h. im Normalzustand) als gegeben an. In einem zweiten Versuch füllt man den Meßzylinder mit dem zu untersuchenden Gas.

10.5 Heber und Pumpen

Beim einfachen **Winkelheber** hatten wir schon darauf hingewiesen (S. 131), daß für das Auslaufen der Flüssigkeit allein Schwere und Kohäsion verantwortlich sind. Um ihn aber erst in Gang zu bringen, pflegt man am langen Ende zu saugen. Man schafft im Rohr einen luftverdünnten Raum, womit der Druck unter den der atmosphärischen Luft sinkt. Dieser ist also größer und drückt die Flüssigkeit über die Krümmung hinweg. Wenn es nicht ratsam ist, mit dem Mund direkt zu saugen, benutzt man den **Giftheber.** Bei zunächst geschlossenem Hahn (Bild 272) saugt man an der Hilfsröhre, bis die Flüssigkeit in den abwärts weisenden Teil gedrungen ist, und öffnet dann.

Der Stechheber ist eine praktische Verwertung des Versuches von S. 149. Kleine Stechheber mit Maßstrichen heißen **Pipetten** (Bild 273).

Bild 272. Giftheber

Bild 273. Pipette

Bei der weitverbreiteten **Kolbensaugpumpe** (Bild 274) wird der dichtschließende Kolben A nach oben bewegt, wodurch im Pumpenstiefel B ein luftverdünnter Raum entsteht. Der äußere Luftdruck drückt das Wasser hinein. Wenn der Kolben nach unten geht, schließt sich Ventil b, während sich Ventil a öffnet. Das angesaugte Wasser bleibt im Stiefel stehen. Beim nächsten Hub dringt erneut Wasser ein, bis es schließlich bei C abfließt. Die größtmögliche Saughöhe, d. h. die Länge von b bis zum Wasserspiegel, beträgt theoretisch 10,33 m, praktisch nur etwa 7 bis 8 m (warum ?).

Um das Wasser noch höher zu fördern, nimmt man die **Kolbendruckpumpe** (Bild 275), deren Kolben kein Ventil besitzt, wohl aber der Ansatz des Steigrohrs. Beim Abwärtsgang des Kolbens A schließt sich b, wogegen sich a öffnet und das im Stiefel befindliche Wasser in das Steigrohr c gedrückt wird. Die Saughöhe ist wieder durch den natürlichen Luftdruck begrenzt, nicht aber die Steighöhe, da diese vom künstlich erzeugten Kolbendruck abhängt.

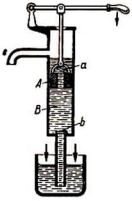


Bild 274. Kolbensaugpumpe

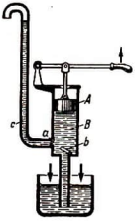


Bild 275. Kolbendruckpumpe

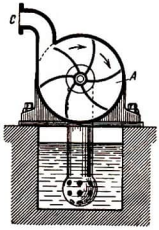


Bild 276. Kreiselpumpe

Auch bei der **Kreiselpumpe** (Bild 276) ist die Saughöhe nicht größer. Das Wasser tritt an der Achse eines rotierenden Flügelrades in die Kapsel A ein, wird von der Fliehkraft nach außen geschleudert und steigt im kontinuierlichen Strom durch das Rohr C.

Bei der **Mammutpumpe** (Bild 277) reißt ein bei A eingepreßter Luftstrom das Wasser samt Schlamm und Steinen durch das Rohr B nach oben. Ventile sind hier nicht nötig.

Luft läßt sich ebenfalls durch Kolben, Flügelräder und Propeller befördern und verdichten. Zur Herstellung luftverdünnter Räume dienen insbesondere die **Vakuumpumpen.**

Bei der **Drehschieberpumpe** (Bild 278) rotiert in der Kapsel A exzentrisch ein massiver Zylinder Z, in welchem federnd zwei flache Schieber S gleiten und den restlichen Raum der Kapsel in a und b teilen. Während durch die stetige Vergrößerung von a

ein luftverdünnter Raum entsteht, wird die in b befindliche Luft durch c hinausgedrückt. Zwecks guter Abdichtung ist das Ventil bei c mit Öl überlagert. Oft sind zwei Drehschiebersysteme hintereinandergeschaltet. Man erreicht damit ein Vakuum bis 10^{-5} Torr.

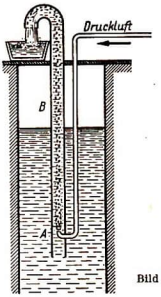


Bild 277. Mammutpumpe

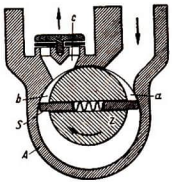


Bild 278. Drehschieberpumpe

11 Strömungslehre

Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen bezeichnet man als **Strömungen.** Zwischen beiden besteht fürs erste der Unterschied, daß Flüssigkeiten praktisch inkompressibel (S. 141) sind, während das Volumen der Gase stark vom Druck abhängt (S. 153).
Bei Gasströmungen bis zur Schallgeschwindigkeit (340 m/s) spielen jedoch Volumenänderungen nur eine geringfügige Rolle. Bis zu dieser Grenze behandelt man also beide als volumenbeständig, so daß für Flüssigkeiten und Gase meist die gleichen Gesetze gelten. Sieht man ferner von der inneren Reibung ab (11.21), so spricht man von einer **idealen Flüssigkeit** im Gegensatz zu einer **realen (wirklichen)** Flüssigkeit.

11.1 Reibungsfreie Strömungen

11.11 Durchfluß bei veränderlichem Querschnitt

Durch ein Rohr oder einen Kanal ströme eine Flüssigkeit. Sie besitze eine bestimmte Geschwindigkeit v. Der Querschnitt des Rohres sei F. Wir wollen das **Flüssigkeitsvolumen V** feststellen, das in einer Sekunde durch das Rohr fließt. Denken wir uns die Front der vorrückenden Flüssigkeit zunächst in Stellung *1* (Bild 279), so wird sie nach 1 Sekunde bei *2* angelangt sein und dabei die Strecke v zurückgelegt haben. Dann hat in dieser Zeit ein Flüssigkeitszylinder vom Querschnitt F und der Länge v die Stelle *1* passiert. Dies verstehen wir unter dem

(127) **sekundlich durchfließenden Volumen:** $\boxed{\frac{V}{t} = F\,v}$

Nun gehen wir einen Schritt weiter und betrachten einen **geschlossenen Kreislauf.** Er sei glatt und ungestört. Hohlräume und Stauungen können nirgends auftreten, da die ideale (und praktisch auch jede wirkliche) Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist.

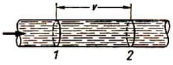


Bild 279. Sekundlich durchfließendes Volumen

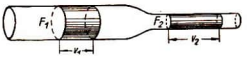


Bild 280. Strömung bei veränderlichem Querschnitt

Folglich muß durch jede beliebige Stelle des Kreislaufes in der **gleichen Zeit auch das gleiche Volumen V** fließen (Bild 280). Dort, wo der Rohrquerschnitt F_1 weit ist, muß die Geschwindigkeit v_1 gering sein, und an engen Stellen (F_2) muß die Strömung sehr rasch (v_2) verlaufen. Andererseits muß nach dem oben Gesagten das sekundlich passierende Volumen V immer gleich groß sein. Weil es sich hier um das Gesetz einer **kontinuierlichen** (in sich zusammenhängenden) Strömung handelt, bezeichnet man diesen Sachverhalt auch als

(128) **Kontinuitätsgleichung:** $\boxed{F_1 v_1 = F_2 v_2}$

Sie besagt, daß bei F_2 die Geschwindigkeit im selben Maße größer sein muß, wie F_2 kleiner ist. In engen Rohren und schmalen Stellen eines Flußbettes hat man demnach größere Strömungsgeschwindigkeiten als an weiteren Stellen.

11.12 Ausfluß aus Gefäßen

Die Flüssigkeit soll jetzt aus einem Behälter durch eine Öffnung ausfließen (Bild 281). Sie sei so klein, daß sich der Spiegel in dem Gefäß durch die verlorengehende Menge im Zeitraum der Beobachtung nicht merklich ändert. Notfalls denke man sich einen entsprechend geregelten Zufluß. Damit wird erreicht, daß im Behälter stets die gleiche Wasserhöhe **(Druckhöhe)** h steht. Mit welcher Geschwindigkeit wird das Wasser abfließen?

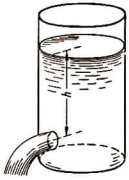


Bild 281. Ausfluß und Druckhöhe

Wir wollen die Frage durch Betrachten der Energieverhältnisse lösen. Die unten auslaufende Wassermasse hat die kinetische Energie $\frac{m}{2} v^2$. Um den Anfangszustand wiederherzustellen, müßte man das ausgeflossene Wasser wieder in den Behälter zurückgießen, was einem Aufwand an potentieller Energie mgh entspricht. Dann wäre am alten Zustand nichts geändert, und es läßt sich das Gesetz von der Erhaltung der Energie anwenden (Satz 63), indem man beide Ausdrücke miteinander gleichsetzt.

Wir stoßen damit auf das bereits auf S. 49 gewonnene Ergebnis $v = \sqrt{2gh}$, d. h. die Endgeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers! Man bezeichnet dieses Gesetz der **Ausflußgeschwindigkeit** als

(129) **Torricellisches Gesetz:** $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$

Bei experimenteller Prüfung ergeben sich jedoch für v weit kleinere Werte, und zwar vor allem aus zwei Gründen: Die innere Reibung (Zähigkeit) verursacht Verluste, die bei Wasser im Mittel 3 % ausmachen. Noch mehr ins Gewicht fällt die Einschnürung des Strahls, besonders wenn die Öffnung nicht abgerundet, sondern scharfkantig in dünner Wand sitzt. Je nach Form und Lage der Öffnung ergeben sich dann bestimmte **Ausflußzahlen** μ, so daß $v = \mu \sqrt{2gh}$. (Bei scharfkantiger Öffnung in dünner Wand ist $\mu = 0{,}60$ bis 0,64.)

11.13 Die Druckkraft von Wasserstrahlen

Von besonderem technischem Interesse ist die Wirkung von Wasserstrahlen auf die Schaufeln der Wasserräder und Turbinen. Obwohl auch hier die Flüssigkeitsreibung

von Einfluß ist, sei hier der Einfachheit halber davon abgesehen. Als **Strahldruckkraft** bezeichnet man die **Kraft** $\boldsymbol{P}$ gegen das den Strahl auffangende Hindernis. Sie wird dadurch erzeugt, daß je Sekunde die Flüssigkeitsmasse $m = \varrho V$ mit der Geschwindigkeit v gegen die Schaufeln prallt. Es kommt also auf die Größe des Impulses $mv = \varrho V v$ vor und nach dem Aufprall an; denn nach (76) ist die wirkende Kraft gleich der zeitlichen Impulsänderung.

Dabei ist zu beachten, daß v ein Vektor ist und es damit auf die Richtung des Strahles vor und nach dem Aufprall ankommt.

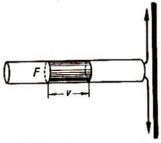


Bild 282. Strahl gegen eine ebene Platte

11.131 Kraft gegen eine ebene Platte

Bei einem Querschnitt F und der Geschwindigkeit v ströme der Strahl waagerecht gegen eine große ebene Platte (Bild 282). Das Wasser fließt also parallel zur Fläche ab. Die Geschwindigkeits- bzw. Impulskomponente in horizontaler Richtung ist vor dem Aufprall $mv = \varrho V v$ bzw. wegen (127) $= \varrho F v^2 t$ und nach dem Aufprall gleich Null. Somit ist $P = \frac{\varrho F v^2 t}{t}$ und die

(130) **Strahldruckkraft auf eine ebene Platte:** $\boxed{P = \varrho F v^2}$

Beispiel: Ein Wasserstrahl von 1 cm² Querschnitt strömt aus 20 m Druckhöhe gegen die ruhende Platte einer Stoßturbine ($\mu = 0{,}6$). — Zunächst ist $v = \mu \sqrt{2gh}$ und

$\varrho = 1000$ kg/m³ (Wasser), so daß

$P = \varrho F \cdot \mu^2 \cdot 2\,g\,h$ oder

$$P = \frac{1000\ \text{kg} \cdot 0{,}0001\ \text{m}^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81\ \text{m} \cdot 20\ \text{m}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} = 14{,}13\ \text{kgm/s}^2\ (\text{N}) = 1{,}44\ \text{kp}$$

11.132 Kraft gegen eine bewegte Platte

Bei Wasserrädern und Turbinen läuft die auffangende Fläche dem Strahl mit der Geschwindigkeit u davon. Es kommt also für die Impulsänderung nur die Relativgeschwindigkeit $(v - u)$ in Betracht, mit der auch das Wasser längs der Platte abfließt. Der Strahl verliert also je Sekunde den Impuls $m\,(v - u)$. Folglich ist mit $m = \varrho F v t$ die

(131) **Strahldruckkraft auf eine bewegte Platte:** $\boxed{P = \varrho F v (v - u)}$

Mit zunehmender Drehzahl wird demnach die gegen die Schaufeln wirkende Kraft immer kleiner. Die gegen das Schaufelrad abgegebene Leistung ist dagegen am größten, wenn $u = \frac{v}{2}$.

11.133 Kraft gegen eine hohle Schaufel

Läßt man den Strahl gegen eine halbkugelige Höhlung wirken (Bild 283), so wird seine Richtung nach dem Aufprall umgekehrt. Die Impulsänderung beträgt dann $mv - (-mv) = 2\,mv$, und die Kraftwirkung verdoppelt sich:

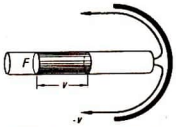


Bild 283. Strahl gegen eine hohle Schaufel

(132) **Strahldruckkraft auf eine hohle Schaufel:** $\boxed{P = 2\,\varrho\,F\,v^2}$

Hieraus ersieht man den Vorteil gewölbter Schaufeln, wie sie z. B. die **Pelton-Turbine** besitzt (Bild 284).

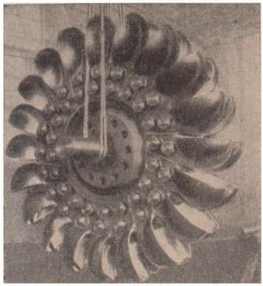


Bild 284. Laufrad einer Pelton-Turbine

11.14 Das Druckgesetz der Strömung

Wenn eine Flüssigkeit reibungsfrei durch ein überall gleich weites Rohr strömt, hat sie überall gleichen Druck und gleiche Geschwindigkeit und demnach auch an allen Stellen die gleiche kinetische Energie. Die Verhältnisse müssen sich aber ändern, wenn das Rohr seinen Querschnitt verengt. Nach der Kontinuitätsgleichung (128) nimmt dann die Geschwindigkeit der Strömung zu und damit auch ihre kinetische Energie. Wenn jedoch der Flüssigkeit von außen keine Energie zugeführt wird, muß die Frage auftauchen, woher dieser Energiezuwachs herrühren mag.

Zweifellos kommt die Bewegung der Flüssigkeit nur zustande, wenn ein bestimmter Druck vorhanden ist, der sie durch das Rohr schiebt. Hat dieser Druck im weiteren Teil des Rohres zunächst den Wert p_1, so wirkt auf den Querschnitt eines betrachteten Volumteils die Kraft $p_1 F_1$, die entsprechend der Geschwindigkeit v_1 das Volumteil um die Strecke x_1 verschiebt (Bild 285). Dies entspricht der Arbeit $p_1 F_1 x_1$. Im engeren Teil des Rohres legt dasselbe Volumen in der gleichen Zeit die Strecke x_2 zurück, was die Arbeit $p_2 F_2 x_2$ ergibt. Da das Volumen V aber konstant bleibt, ist $F_1 x_1 = F_2 x_2$, so daß der Zuwachs an kinetischer Energie nur aus der Differenz der beiden Arbeiten $A_1 = p_1 V$ und $A_2 = p_2 V$ stammen kann.

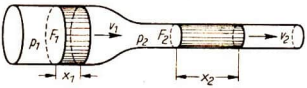


Bild 285. Berechnung der Volumenergie

Es gilt also die Gleichung

$$V\,(p_1 - p_2) = \frac{m}{2}\,v_2^2 - \frac{m}{2}\,v_1^2$$

Wird die Gleichung beiderseits durch V dividiert, so wird

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}\,v_2^2 - \frac{\varrho}{2}\,v_1^2 \text{ oder, anders geschrieben}$$

(133) $$p_1 + \frac{\varrho}{2}\,v_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2}\,v_2^2\,.$$

Dabei bezeichnet man den uns bereits bekannten Druck p als **statischen** (ruhenden) **Druck** und die Größe $\frac{\varrho}{2}\,v^2$ als **dynamischen** (Stau-) **Druck.** Daß das zweite Glied die Maßeinheit eines Druckes hat, erkennt man durch Einsetzen von $\varrho\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ und $v^2\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$, was gekürzt $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$ (N/m²) liefert.

Der Staudruck ist jener Druck, der gegen eine quer zur Strömung gestellte Fläche wirkt, während der statische Druck mit jedem Manometer gemessen werden kann, wenn es rechtwinklig zur Strömung angesetzt wird.

Noch kürzer gefaßt lautet die letzte Gleichung

(134) **Gesetz von Bernoulli:** $$\boxed{p + \frac{\varrho}{2} v^2 = \text{const.}}$$

oder in Worten:

Die Summe aus statischem und dynamischem Druck hat stets den gleichen Wert und ist gleich dem statischen Druck p in der ruhenden Flüssigkeit,

weil für $v = 0$ der statische Druck allein zur Geltung kommt.

Das Gesetz gilt nicht nur für Flüssigkeiten, sondern auch für Gase, wie z. B. die Luft, solange ihr Volumen konstant bleibt.

11.141 Anwendungen des Druckgesetzes

Das Zusammenwirken von statischem und dynamischem Druck ist bei vielen Vorgängen zu beobachten und führt manchmal zu paradox anmutenden Erscheinungen. Bläst man zwischen zwei gewölbte Postkarten, so werden sie nicht auseinandergetrieben, sondern legen sich zusammen (Bild 286). Im Zwischenraum ist der statische Druck kleiner als außerhalb. Bläst man in ein Rohr mit abgeflachter Ausmündung, so hebt sich ein davor gehaltenes Blatt flatternd gegen die Öffnung (Bild 287). Der Sturm kann ein Dach abheben, weil der statische Druck im Innern des Hauses größer ist als in der Strömung.

Beim **Zerstäuber** erzeugt der Luftstrom über einer Düse statischen Unterdruck, der die Flüssigkeit im Saugröhrchen anhebt. Am Düsenrand wird sie dann vernebelt. Zum **Heben von Wasser** kann man einen zur Verfügung stehenden Wasserstrom benutzen, der durch ein taillenförmig eingeschnürtes Rohr fließt (Bild 288). Hier ist der statische Druck kleiner als der Luftdruck. Eine Abzweigung wirkt als Saugrohr.

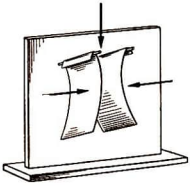


Bild 286. Strömung verursacht Unterdruck

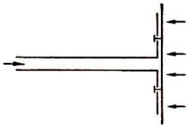


Bild 287. Der Luftstrom saugt das Blatt an

Zur einfachen Herstellung luftverdünnter Räume dient die **Wasserstrahlpumpe** (Bild 289). Ein schneller Wasserstrahl S fließt in die trichterartige Düse D. Die am freien Teil des Strahls anhaftende Luftschicht nimmt infolge der inneren Reibung auch die benachbarten Luftschichten mit, wodurch eine Zone statischen Unterdrucks entsteht. Bei Wasserdampf als Treibmittel erreicht man etwa 2 Torr, bei Verwendung von Quecksilberdampf kommt man bis auf 10^{-3} Torr.

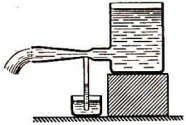


Bild 288. Heben von Wasser

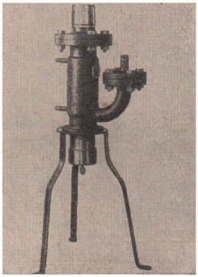


Bild 291. Öl-Diffusionspumpe

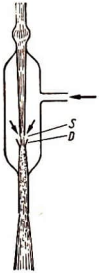


Bild 289
Wasserstrahlpumpe

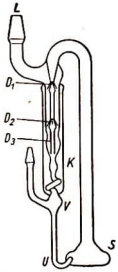


Bild 290. Schema einer 3stufigen Quecksilber-Dampfstrahlpumpe

Eine weitere Verbesserung stellt die **Diffusionspumpe** dar, bei der die wegzupumpende Luft von der Seite her rasch in den Dampfstrahl hineindiffundiert und von diesem mitgenommen wird. Bild 290 zeigt das Schema einer dreistufigen Quecksilberdampfpumpe. Die Düsen D_1 und D_2 sind hintereinander arbeitende Diffusionspumpen. Die Staudüse D_3 erzeugt ein Vorvakuum und arbeitet als gewöhnliche Strahlpumpe. Mittels des Kühlers K wird der Dampf verflüssigt und sammelt sich in dem Absperrrohr U. Die hierbei mitgeführte Luft wird aus V mit einer Vorpumpe abgesaugt. Gute Diffusionspumpen erreichen 10^{-8} Torr. Statt Quecksilber kann man auch Öl verwenden (Bild 291).

11.142 Strömungsmesser

Auf dem Druckgesetz beruhen einige im Bau sehr einfache Strömungsmeßgeräte.
Das **Venturirohr** ist ein eingeschnürtes Rohr, dessen seitliche Ansätze ein Manometer verbindet (Bild 292). Das Manometer zeigt den Druckunterschied $p_1 - p_2$ an. Das Venturirohr dient zur Messung großer Mengen in Wasserwerken, wobei der Druckunterschied die Geschwindigkeit anzeigt (Bild 293) (s. untenstehendes Beispiel).
Das **Pitot-Rohr** besitzt ein seitlich ansetzendes Steigrohr S, das den statischen Druck p_2 anzeigt, sowie ein in die Strömung hineinragendes Rohr (Bild 294). Die Strömung

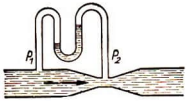


Bild 292. Venturirohr

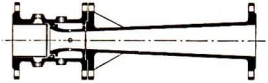


Bild 293. Technische Ausführung eines Venturirohres

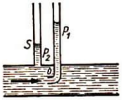


Bild 294. Pitot-Rohr

staut sich vor dessen Öffnung O, so daß dort die Geschwindigkeit $v_1 = 0$ und nach dem Bernoullischen Gesetz ein Druck p_1 entsteht, der dem der ruhenden Flüssigkeit entspricht. Die Differenz $p_1 - p_2$ gibt daher unmittelbar den Staudruck an; denn nach Gleichung (134) gilt:

$$\frac{\varrho}{2} v_1^2 + p_1 = \frac{\varrho}{2} v_2^2 + p_2 \tag{135}$$

wobei in diesem Fall das erste Glied verschwindet.

Das **Prandtlsche Staurohr** wird besonders zur Messung von Luftströmungen verwendet (Bild 295). An der Staudüse D ist, wie beim Pitot-Rohr, $v_1 = 0$, während die an der Oberfläche des Meßkörpers ausmündenden Düsen S den in der Strömung verminderten Druck anzeigen.

Zur Messung kleiner Druckdifferenzen, wie sie bei den genannten Geräten häufig vorkommen, verwendet man das **Mikromanometer,** dessen Öffnungen A und B mit den

Bild 295. Prandtlsches Staurohr

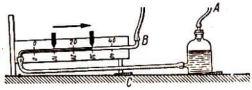


Bild 296. Mikromanometer

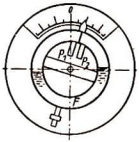


Bild 297. Ringwaage

Düsen verbunden werden (Bild 296). Infolge der geringen Neigung zeigt das Manometerrohr selbst kleinste Druckunterschiede deutlich an. Außer den hier aufgeführten gibt es noch zahlreiche weitere, mechanisch und elektrisch wirkende Apparate für die verschiedensten Sonderzwecke, wie z. B. die **Ringwaage** für technische Strömungsmessungen (Bild 297). Durch die eingefüllte Flüssigkeit F wird das Ringrohr in zwei Kammern geteilt, die durch bewegliche Schläuche mit den Druckleitungen in Verbindung stehen. Bei Druckunterschied wird die eine Ringhälfte schwerer, und der Ring dreht sich mitsamt einem daran befestigten Zeiger.

Beispiele: 1. Der Querschnitt eines Venturirohres verengt sich auf $^1/_4$, die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers beträgt 10 cm/s. Welchen Niveauunterschied zeigen die Schenkel des Wassermanometers? – Nach der Kontinuitätsgleichung strömt das Wasser an der engen Stelle mit 40 cm/s. Dann ist wegen (135)

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) \text{ bzw.}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1000 \text{ kg} \cdot (0{,}16 - 0{,}01) \text{ m}^2}{\text{m}^3 \cdot 2 \cdot \text{s}^2} = 75 \text{ kg/ms}^2 \text{ (N/m}^2\text{)},$$

was einen Niveauunterschied von 7,65 mm ergibt.

2. Das an ein Staurohr angeschlossene Wassermanometer zeigt einen Druckunterschied $p_1 - p_2$ von 9 mm WS an. Welche Geschwindigkeit hat der anströmende Wind? –

$$\text{Da } p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2} v^2, \text{ ist } v = \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\varrho}};$$

ferner ist 9 mm WS = 9 kp/m² = 88,29 N/m² (kg/ms²) und ϱ = 1,293 kg/m³, so daß

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 88{,}29\ \mathrm{kgm^3}}{\mathrm{ms^2} \cdot 1{,}293\ \mathrm{kg}}} = 11{,}7\ \mathrm{m/s}\,.$$

11.143 Die Hohlraumbildung (Kavitation)

Bei schnellen Strömungen in Wasser (und auch in Luft) tritt eine Erscheinung auf, die für den Schiffsschrauben- und Turbinenbau von großer Bedeutung ist. Das bei 760 Torr und 100 °C siedende Wasser hat auch bei niederen Temperaturen einen bestimmten Dampfdruck, d. h., auch kaltes Wasser siedet und bildet Dampfblasen, wenn der auf dem Wasser ruhende Druck nur klein genug ist. Wenn also der statische Druck p unter den Dampfdruck sinkt, den das Wasser bei der gerade herrschenden Temperatur besitzt, bilden sich Dampfblasen, die zu rasch wachsenden Zerstörungen der überströmten Oberflächen führen.
Man kann diese **Hohlraumbildung** (Kavitation) leicht an einem eingeschnürten Glasrohr beobachten, das man an eine Hauswasserleitung anschließt. Im engsten Teil bildet sich eine Zone von Bläschen, die im Gebiet größeren statischen Druckes wieder verschwindet. Die genaue Ursache der dadurch entstehenden Korrosionen (Anfressungen) ist noch nicht genügend geklärt. Grauguß ist besonders empfindlich (Bild 298). Schon nach wenigen Tagen können ernsthafte Schäden auftreten. Bei Schiffsschrauben ist die Kavitation in größerer Wassertiefe wegen des größeren statischen Druckes geringer.

Bild 298. Stark korrodiertes Gußlaufrad einer Francis-Turbine

Beispiel: Der Dampfdruck p_1 des Wassers bei 10 °C ist 9,2 Torr = = 12,5 p/cm². Bei welcher Strömungsgeschwindigkeit v_1 tritt in 1 m Wassertiefe Kavitation ein? – Bei normalem Luftdruck ist der Gesamtdruck p = (1033 + 100) p/cm² = 1133 p/cm² und $\varrho = \frac{1000\ \mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$. Wegen (134) ist $p = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2$ und $v_1 = \sqrt{\frac{2\,(p - p_1)}{\varrho}}$; mit $p - p_1$ = 1120,5 p/cm² = 109921 N/m² wird dann

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 109921\ \mathrm{kgm^3}}{\mathrm{ms^2} \cdot 1000\ \mathrm{kg}}} = 14{,}8\ \mathrm{m/s}\,.$$

11.2 Die Schichtenströmung (laminare Strömung)

11.21 Die innere Reibung

In ähnlicher Weise wie zwischen festen Körpern tritt bei der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen die innere Reibung auf, verursacht durch die gegenseitige Bewegung der einzelnen Moleküle. Beim Wasser ist sie nicht so auffällig wie bei dickflüssigen Ölen, Sirup oder Pech, deren **Viskosität** (Zähflüssigkeit) bedeutend größer ist. Selbst spröder Siegellack verbiegt sich im Laufe der Zeit.
Während des Fließens besteht zwischen Flüssigkeit und Gefäßwand keine direkte Reibung, da sich infolge der Adhäsion eine fest anliegende Haut bildet. Taucht man z. B. ein Messer in Sirup und zieht es langsam heraus, so haftet der Sirup fest an der Klinge, und eine Grenzschicht von erheblicher Dicke nimmt an der Bewegung

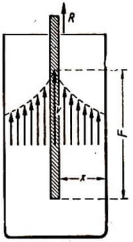


Bild 299. In zäher Flüssigkeit bewegte Klinge

mit teil. Innerhalb der Flüssigkeit kann man sich parallele Schichten denken, welche mit nach außen abnehmender Geschwindigkeit aufeinander gleiten (Bild 299). Dadurch kommt die Reibungskraft R zustande, welche das Herausziehen des Messers aus dem Sirup erschwert.

Diese Kraft hängt ab von der Fläche F der eintauchenden Platte, ihrer Geschwindigkeit v, ihrem Abstand von der Gefäßwand x, der Temperatur und der Natur der Flüssigkeit, wobei vorausgesetzt wird, daß x kleiner als die Dicke der oben erwähnten Grenzschicht ist. Für eine bestimmte Temperatur ergibt sich die

(136) **Reibungskraft:** $\boxed{R = \frac{\eta F v}{x}}$ (η dynamische Viskosität)

Aus dieser Formel erhält man die Maßeinheit der dynamischen Viskosität η als Ns/m^2. Der Kürze halber bezeichnet man sie (nach dem französischen Strömungsforscher Poiseuille) **1 Poise = 0,1 Ns/m^2.**

Zähigkeit einiger Stoffe

Stoff	Temperatur	Dynamische Viskosität η (Poise)
Luft	0 °C	0,000171
Luft	20 °C	0,000181
Wasser	0 °C	0,018
Wasser	20 °C	0,010
Wasser	98 °C	0,003
Alkohol	20 °C	0,012
Äther	20 °C	0,0026
Glyzerin	20 °C	8,6
Schmieröl, dick	20 °C	3,5 ··· 30
Pech	20 °C	300 Millionen
Wasserstoff	0 °C	0,0000857

Zur Messung der **Zähflüssigkeit** (Viskosität) dient u. a. das **Viskosimeter von Engler.** Es stellt ein Gefäß dar, aus welchem durch ein Röhrchen 200 cm^3 der zu messenden Flüssigkeit ausfließen. Als Vergleich dient Wasser von 20 °C, das bei vorschriftsmäßigem Bau des Apparates 50 ··· 52 s zum Abfluß benötigt. Die Zähigkeit in Engler-Graden stellt das Verhältnis der Abflußzeiten des Öles zu der des Wassers dar.

Von den weiteren Zähigkeitsmessern sei noch das heute meist verwendete **Höppler-Viskosimeter** erwähnt (Bild 300). Sein Hauptteil ist eine genau kalibrierte, etwas schräg stehende Glasröhre, die mit der zu messenden Flüssigkeit gefüllt wird. Durch ihr eigenes Gewicht sinkt eine Kugel nach unten. Gemessen wird die Sinkgeschwindigkeit zwischen zwei angebrachten Marken, die ein unmittelbares Maß für die in Poise ausgedrückte Viskosität ist. Durch Verwendung von Kugeln verschiedenen Durchmessers ist der Meßbereich außerordentlich groß (0,0001 ··· 10000 Poise), so daß die Viskosität von Gasen und auch von sehr zähen Flüssigkeiten und Pasten bestimmt werden kann.

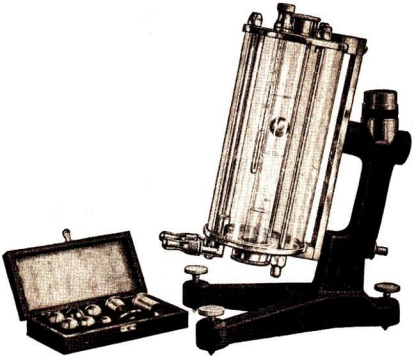
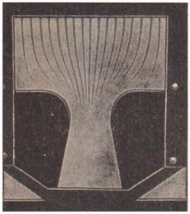


Bild 300. Höppler-Viskosimeter

11.22 Verlauf von Schichtenströmungen

Strömungen aller Art lassen sich durch Aufstreuen von Aluminiumpulver auf die Oberfläche oder Einbringen von Holzmehl oder gefärbten Flüssigkeitsfäden ins Innere leicht sichtbar machen. Jedes Teilchen beschreibt dann eine bestimmte Bahn, eine **Stromlinie,** die für jeden Punkt die Richtung der Geschwindigkeit angibt.
Bei langsamer Strömung beobachtet man nun, daß diese Stromlinien völlig ungestört ihre anfängliche Form beibehalten. Die Geschwindigkeit ist zu jeder Zeit nach Größe und Richtung konstant: **stationäre** oder **schleichende Strömung.** Von besonderem Interesse ist dabei die Form, mit der die Stromlinien einen in der Flüssigkeit befindlichen Körper umfließen.



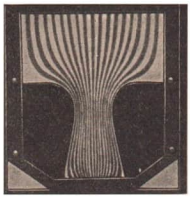


Bild 302a u. b. Beginn und weiterer Verlauf der Strömung bei Eintritt in eine verengte Stelle

Bild 301. Laminare Strömung um einen Kreiszylinder

Die Bilder 301 ··· 303 sind dadurch hergestellt, daß in eine schmale Kammer von oben her langsam reines und aus einer Reihe von Düsen gefärbtes Wasser einfließt. Man sieht hier das Aneinandervorbeigleiten einzelner getrennter Schichten, daher auch die Bezeichnung **Schichten- (laminare) Strömung.** Je enger die Stromlinien zusammenrücken, desto größer muß dort die Geschwindigkeit sein.

Bild 303. Strömung um eine schräge Platte

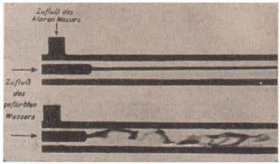


Bild 304. Umschlag der laminaren in die turbulente Strömung innerhalb eines Rohres

11.23 Sinkgeschwindigkeit kleiner Teilchen

Auch sehr kleine Kugeln werden beim Absinken in einer Flüssigkeit oder in Luft von einer Schichtenströmung umflossen (Nebeltröpfchen!). Für den **Widerstand** W, d. i. die Kraft, die auf die bewegte Kugel einwirkt, gilt das

(137) **Stokessche Gesetz:** $$\boxed{W = 6\pi\eta v r}$$

Seine Herleitung erfordert schwierigere mathematische Rechnungen. Das Gesetz ist u. a. von Bedeutung für die Absetzgeschwindigkeit von in Flüssigkeiten aufgeschlämmten Stoffen, die dann mehr oder weniger schnell **sedimentieren** (zu Boden sinken).

Man kann daraus auch die Fallgeschwindigkeit v berechnen, wenn die Dichte ϱ_1 der Teilchen und die der Flüssigkeit ϱ_2 bekannt ist. Das Gewicht eines kugelförmig angenommenen Teilchens ist dann $V g\,(\varrho_1 - \varrho_2)$ und gleich dem obigen Sinkwiderstand, so daß

$$\frac{g\,(\varrho_1 - \varrho_2)\,4\,\pi\,r^3}{3} = 6\,\pi\,\eta\,v\,r\,,$$

womit die konstante

(138) **Fallgeschwindigkeit kleiner Kugeln:** $$\boxed{v = \frac{2\,(\varrho_1 - \varrho_2)\,g\,r^2}{9\,\eta}}$$

Beispiele: 1. Berechne die Sinkgeschwindigkeit von Sandkörnchen ($r = 1\ \mu$m) in Wasser. – Es ist $\varrho_2 = 1$ g/cm³, $\varrho_1 = 2{,}65$ g/cm³, die Temperatur sei 20 °C, $\eta = 0{,}01$ dyn s/cm². Man erhält nach Einsetzen dieser Zahlenwerte $v = 0{,}00036$ cm/s und erkennt, wie langsam sich derartig feine Teilchen zu Boden setzen. In den Zentrifugen wirkt statt des Gewichts die viel größere Fliehkraft. Man kann so selbst feinste Aufschwemmungen von der Flüssigkeit trennen.

2. Im Höppler-Viskosimeter gilt das Stokessche Gesetz in seiner ursprünglichen Form nicht, da die Kugel auf dünner Flüssigkeitsschicht gleitet.

11.3 Wirbelnde (turbulente) Strömung

Sobald eine bestimmte Geschwindigkeit überschritten wird, ändert sich der Charakter der Strömung sprunghaft (Bild 304). Es treten spiralige **Wirbel** auf, die als zusätzliche Flüssigkeitsbewegung eine Vergrößerung des Reibungswiderstandes bewirken. Wirbel sind starke Energieverbraucher. Der Strömungswiderstand wird in den meisten Fällen vorwiegend von der Wirbelbildung verursacht.

11.31 Entstehung der Wirbel

An den Rohrwänden oder der Oberfläche umströmter Körper haftet auch in Medien geringer Viskosität eine Grenzschicht (Bild 305). Die Teilchen dieses Gebietes stehen sowohl unter der beschleunigenden Wirkung der freien Strömung als auch unter dem bremsenden Einfluß der Wand.

Die eintretende Wirkung betrachten wir für den Fall eines umströmten Kreiszylinders, indem wir die Stromlinie *1* verfolgen (Bild 306). Von *a* bis *c* nimmt die Geschwindigkeit v zu und der statische Druck ab. Die Teilchen werden in das Druckgefälle hineingezogen. Von *c* an nimmt v ab und der statische Druck wieder zu. Die Teilchen müssen nun gegen erhöhten Druck anlaufen und würden ohne weiteres bis *e* kommen, wenn ihre bis *c* erreichte kinetische Energie voll erhalten bliebe. Infolge der Bremsung in der Grenzschicht wird ihnen aber Energie entzogen, sie vermögen nicht bis *e* zu gelangen. Sie kommen vorzeitig zur Ruhe, und etwa bei *d* sammelt sich eine Schicht ruhender Flüssigkeit an. Die darüber gleitenden schnelleren Schichten bewirken daher ein Einrollen der steckenbleibenden Grenzschicht nach der Wand zu, es entsteht eine Drehbewegung im Linkssinn, d. h. ein kleiner Wirbel. Dieser wandert mit der Strömung, neue Wirbel bilden sich und wachsen. Sie lösen sich schließlich los und schwimmen mit der Strömung davon. Die vorher anliegende Strömung reißt ab, indem die Stromlinien um die verwirbelte Zone herum ausbiegen (Bild 307). Auf diese Weise zieht jeder bewegte Körper ein verwirbeltes Feld hinter sich her.

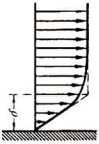


Bild 305. Geschwindigkeitsgefälle in der Grenzschicht

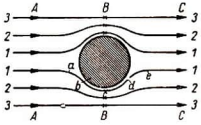
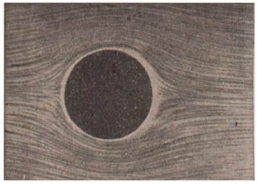


Bild 306. Strömung um einen Kreiszylinder

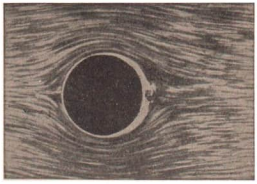
11.32 Der Strömungswiderstand von Körpern

Der Staudruck (134) ist die auf die Flächeneinheit in Richtung der Strömung wirkende Kraft. Hat ein Körper die **Stirnfläche** F (d. i. der größte der Strömung entgegenstehende Querschnitt), so wird der Widerstand des umströmten Körpers proportional zu $\frac{F \varrho v^2}{2}$ sein, wenn man von den Einflüssen der Reibung zunächst absieht. Dieser Ausdruck ist noch mit einem Faktor zu multiplizieren, der durch die Gestalt des Körpers bedingt ist: die **Widerstandszahl** c. Die Zahl wird um so größer sein, je stärker die Wirbelbildung hinter dem Körper ist.

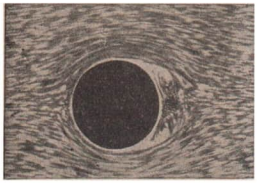
Wegen des komplizierten Verlaufes der **Turbulenz** (Verwirbelung) läßt sich die Zahl c nicht berechnen, sondern muß durch Versuche ermittelt werden, indem man



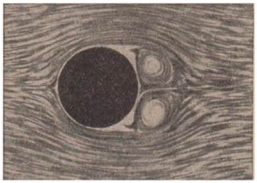
a



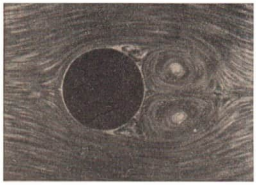
b



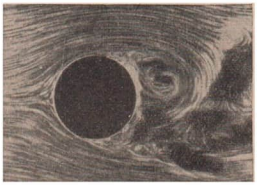
c



d



e



f

Bild 307 a···f. Entstehung von Wirbeln hinter einem umströmten Kreiszylinder

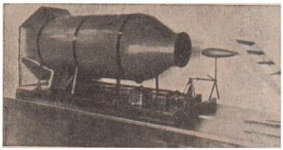


Bild 308. Windkanal mit stromlinienförmigem Versuchskörper

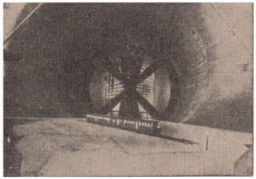


Bild 309. Triebwagenmodell im Windkanal der Reichsbahn

den Körper im Strömungs- bzw. Windkanal aufhängt und den Widerstand mit einer Waage bestimmt (Bilder 308, 309). Man hat auf diese Weise den

(139) **Widerstand eines umströmten Körpers:** $$W = c F \frac{\varrho}{2} v^2$$

Widerstandszahlen einiger Körper

Dünne ebene Platte, senkrecht zur Stromrichtung	1,1
Offene Halbkugel, Höhlung gegen die Strömung	1,3 ··· 1,6
desgl., Rundung gegen die Strömung	0,35
Kugel	0,2 ··· 0,4
Stromlinienkörper	0,055
Kraftwagen Ifa F 9 (Stirnfläche 1,74 m²)	0,48

Um den Widerstand zu vermindern, muß man den Körper jeweils so gestalten, daß sich möglichst keine Wirbel bilden. Die Strömung darf sich an keiner Stelle von der Oberfläche ablösen. Die Stromlinien verlaufen dann wie in einer laminaren Strömung. Man nennt einen solchen Körper **stromlinienförmig.** Er ist vorn nicht etwa spitz, sondern sanft gerundet und läuft hinten mit schlanker Spitze aus.

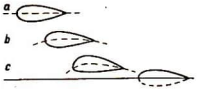


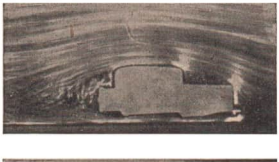
Bild 310. Stromlinienform in zunehmender Bodennähe

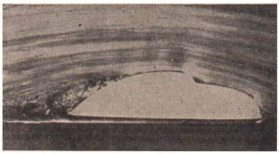
Mit zunehmender Bodennähe flacht sich die untere Seite ab (Bild 310). Die richtige Form wird durch Modellversuche ermittelt. Bei Lokomotiven, Kraftwagen und anderen Fahrzeugen ist die reine Stromlinienform aus technischen Gründen kaum zu verwirklichen (herausragende Teile, wie Räder, Stoßstangen usw.!). Die wesentlichste Erkenntnis ist hier, daß die Hauptursache des Widerstandes nicht vorn, sondern am hinteren Ende des Fahrzeuges zu suchen ist.

Die Formverbesserung der Fahrzeuge ist besonders deswegen wichtig, weil die erforderliche **Antriebsleistung mit der 3. Potenz der Geschwindigkeit ansteigt.** Da nach (58) $N = Pv$, ist auf Grund von (139) die

(140) **Leistung bei Bewegung gegen die Strömung:** $$N = \frac{c F \varrho v^3}{2}$$

Beispiele: 1. Berechne den Druck gegen 1 Quadratmeter der Stirnfläche eines Schornsteins bei einer für das Binnenland angenommenen





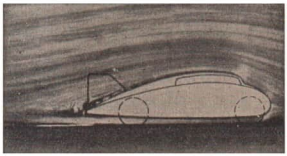


Bild 311 a···c. a) Ältere Kraftwagenform b) Unvollkommene Stromlinienform (Wirbel am Heck) c) Verbesserte Stromlinienform

maximalen Windgeschwindigkeit von 45 m/s und der im Modellversuch ermittelten Widerstandszahl $c = 0{,}67$! –

$$W = \frac{0{,}67 \cdot 1\,\mathrm{m}^2 \cdot 1{,}293\,\mathrm{kg} \cdot 45^2\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^2 \cdot 2} = 877{,}1\,\mathrm{N} = 89\,\mathrm{kp}$$

2. Wieviel PS Antriebsleistung erfordert die Überwindung des Luftwiderstandes bei einem Kraftwagen von $c = 0{,}5$, einer Geschwindigkeit von 108 km/h und einer Stirnfläche von 2,5 m²? –

$$N = \frac{0{,}5 \cdot 2{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot 1{,}293\,\mathrm{kg} \cdot 27000\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^3 \cdot 2 \cdot \mathrm{s}^3} = 21819\,\mathrm{kg\,m^2/s^3\,(W)} = 29{,}7\,\mathrm{PS}$$

11.33 Das Ähnlichkeitsgesetz der Strömungen

Bild 312. Tatra-Stromlinienwagen

Bei Betrachtung der Bilder 307 und 311 könnte die Frage gestellt werden, welche Größe bei sonst gleicher Form der umströmte Körper und welche Geschwindigkeit die Strömung haben muß, damit genau das gezeigte Strömungsbild entsteht und damit das Wirbelfeld gleiche Form und relativ zum Körper gleiche Ausdehnung besitzt. Offenbar wird die Wirbelbildung bei großen Abmessungen des Körpers und durch große Geschwindigkeiten gefördert. Kennzeichnet man die ersteren durch eine charakteristische Länge l (etwa Querschnitt oder Länge) und letztere mit v, so läßt sich vermuten, daß bei gleichem Produkt $l\,v$ auch das gleiche Strömungsbild entsteht. In dem Maße nämlich, in dem man den Körper vergrößert, muß man die Geschwindigkeit herabsetzen.

Aber auch die Dichte ϱ des strömenden Mediums spielt insofern eine Rolle, als große Trägheit der Teilchen das Ablösen der Grenzschicht begünstigt. Umgekehrt wird sich die Viskosität η auswirken, da in dicken Grenzschichten das Geschwindigkeitsgefälle sanfter verläuft. Man kommt auf diese Weise zur dimensionslosen

(141) **Reynoldsschen Zahl:** $\boxed{\mathrm{Re} = \frac{l\,v\,\varrho}{\eta}}$

Bei gleicher Reynoldsscher Zahl liefern geometrisch ähnliche Körper auch geometrisch ähnliche Strömungen. Ihre Wirbelfelder sind von relativ gleicher Größe, ihre Widerstandszahlen haben den gleichen Wert.

Man erhält demnach formgetreue Wiedergabe der Strömungserscheinungen, wenn man verkleinerte Nachbildungen bei entsprechend erhöhter Geschwindigkeit beobachtet. Vorgänge, die in Wirklichkeit in Luft verlaufen, kann man auch in Wasser studieren, wenn man beachtet, daß Wasser einerseits größere Zähigkeit η, andererseits größere Dichte ϱ hat. Beides zusammen wirkt sich so aus, daß $\frac{\varrho}{\eta}$ bei Wasser rund 14mal kleiner ist als bei Luft. Folglich muß man für entsprechend größere Geschwindigkeit sorgen. Das Verhältnis $\frac{\eta}{\varrho}$ nennt man

(142) **kinematische Zähigkeit** $= \dfrac{\textbf{dynamische Zähigkeit } \eta}{\textbf{Dichte } \varrho}$

Kinematische Zähigkeiten

Wasser 0 °C	0,0179 cm²/s	Luft 0 °C und 760 Torr . .	0,132 cm²/s
„ 20 °C	0,0101 „	„ 20 °C „ 760 „ . .	0,150 „

Beispiele: 1. Zur Bestimmung der Widerstandszahl eines Kraftwagens von 4 m Länge bei $v = 36$ km/h wird ein auf 10:1 verkleinertes Modell im Windkanal untersucht. Reynoldssche Zahl und erforderliche Geschwindigkeit? –

$$\mathrm{Re} = \frac{400\,\mathrm{cm} \cdot 1000\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{s}\,0{,}150\,\mathrm{cm}^3} = 2\,670\,000\,.$$

Entsprechend dem Verkleinerungmaßstab von 10:1 muß die Anblasegeschwindigkeit $v = 100$ m/s sein.

2. Eine Kugel von 14 cm Durchmesser befindet sich in einem Luftstrom (20 °C) von 20 m/s. Wie groß muß die Kugel in einem Wasserstrom von 20 °C und 10 m/s bei gleichem Strömungsbild sein? –

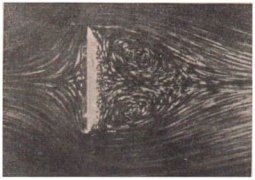
$$\mathrm{Re} = \frac{14 \cdot 2000}{0{,}150} = 187000 = \frac{l \cdot 1000}{0{,}01}\,;$$

$$l = 1{,}87 \text{ cm (Durchmesser)}$$

3. Warum muß man zur Untersuchung von Tragflügelprofilen so große Windkanäle bauen? – Die Reynoldsschen Zahlen für Tragflügel liegen bei 10^6 und größer. Bei kleinen Modellen müßte daher die Geschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit werden. Dann aber kann man die Luft nicht mehr als inkompressible, ideale Flüssigkeit betrachten, so daß die Bernoullische Gleichung nicht mehr gilt.

Inwieweit die Widerstandszahl c von der Reynoldsschen Zahl beeinflußt wird, hängt von der Gestalt der Körper ab. Liegen die Stellen, an denen sich die Strömung vom Körper ablöst, fest (wie z. B. bei kantigen Formen), so ist c in weitem Bereich von Re unabhängig. Bei einer senkrecht angeblasenen Kreisplatte ist für $\mathrm{Re} = 4000 \cdots 1\,000\,000$ die Widerstandszahl $c = 1{,}1 \cdots 1{,}12$. Bei runden Formen dagegen verschiebt sich die Ab-

a Re = 1



b Re = 4

c Re = 80

Bild 313a···c. Strömung um eine scharfrandige Platte bei verschiedener Reynoldsscher Zahl

lösungsstelle mit zunehmendem Re-Wert nach hinten, womit der Widerstand sinkt. Dies zeigen deutlich die Zahlen für eine Kugel:

Re =	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
c =	4,4	1,1	0,46	0,42	0,49	0,14

11.34 Der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung

Bisher war nur allgemein die Rede davon, wie unter bestimmten Bedingungen die laminare in die turbulente Strömungsform übergeht. Wegen der bei einsetzender Wirbelbildung auftretenden erheblichen Energieverluste ist es aber wichtig, diese Grenzen zahlenmäßig irgendwie zu erfassen. Der Umschlagspunkt wird durch einen bestimmten **kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl** charakterisiert.
Beispielsweise wird die schleichende Strömung durch ein Rohr bei einem Re-Wert von $\frac{l v \varrho}{\eta} > 1160$ turbulent (l bedeutet hier den Rohrdurchmesser) (Bild 304).
Die kritischen Werte sind jedoch keine strengen Grenzen, und es ist durchaus möglich, bei vorsichtiger Handhabung eine Strömung auch weit oberhalb des kritischen Wertes laminar zu erhalten. Schließt z. B. das Rohr gut abgerundet an das Ausflußgefäß an, so kann in diesem Beispiel Re bis 20000 getrieben werden, ohne daß Turbulenz eintritt. Bei umströmten Körpern ist ferner die Beschaffenheit der Strömung, in die man das Modell hineinstellt, von großem Einfluß.
Das Stokessche Gesetz gilt für Re < 1. Bis dahin ist die Strömung laminar und fast ausschließlich durch die Zähigkeit bedingt.

Beispiel: Bei welcher Geschwindigkeit wird der durch ein gerades Rohr von 1 cm Durchmesser fließende Wasserstrom von 20 °C turbulent? –
Aus $\mathrm{Re} = \frac{1 \cdot v}{0{,}01} = 1160$ erhält man als obere Grenze $v = 11{,}6$ cm/s.

Sachwortverzeichnis

Absorption 134
Adhäsion 135
Adsorption 138
Ähnlichkeit von Strömungen 174
Aktivkohle 139
Amplitude 100, 109
Aneroidbarometer 152
Angriffspunkt 24
Ångströmeinheit 15
Anhaften 135
Anlegegoniometer 17
Antrieb 88
Antriebsmoment 95
Aräometer 147
Arbeit 63
Archimedisches Prinzip 144
Atmosphäre, physikalische 150
—, technische 23
Attraktionsgesetz 97
Auflagerkräfte 35
Auftrieb in Flüssigkeiten 144
— in Gasen 156
Auftriebsmittelpunkt 147
Ausfluß aus Gefäßen 161
Ausflußzahl 161
Auslenkung 100
Auslöschung von Wellen 126
Ausströmverfahren 158
Auswuchtmaschine 103

Bahngeschwindigkeit 56
Balkenwaage 36
Bar 151
Barograph 152
Barometer 152
Bäuche von Wellen 128
Beharrungsvermögen 61
Bernoulli, Gesetz von — 164
Beschleunigung 44, 62
Beschleunigungsarbeit 67
Beugung 126
Bewegung, beschleunigte 44
—, gleichförmige 42
—, harmonische 100
Bewegung, relative und absolute 49
—, zusammengesetzte 51
Bewegungsenergie 71
Bewegungsgröße 88
Bezugssystem 50
—, beschleunigtes 50
Bogenmaß 58
Bourdonsche Röhre 156
Boyle-Mariotte, Gesetz von — 154
Brechung von Wellen 124
Brechungsgesetz 125
Bremsleistung 68
Bremsstrecke 75
Briefwaage 38
Brownsche Bewegung 145
Brückenwaage 37
Bunsen, Gasdichtemesser von — 158

CGS-Einheiten 70
Corioliskraft 81

Dämpfung 109
Dehnung, Dehnungszahl 130
Dezimalwaage 37
Dichte 20
Differentialflaschenzug 65
Diffusion 132
Diffusionspumpe 165
Direktionskraft 102
Dosenbarometer 152
Drall 94
Drehbewegung 55
—, beschleunigte 59
—, Energie der — 82
—, Vektoren der — 95
Drehimpuls 94
Drehmasse 83
Drehmoment 34, 87
Drehschieberpumpe 159
Drehschwingungen 104
Drehwaage 98
Drehzahl 55
Druck 23
— in Flüssigkeiten 141

Druck in Gasen 153
—, statischer und dynamischer 164
Druckgesetz der Strömungen 163
Druckhöhe 161
Durchfluß 160
dyn 70
Dynamik, Grundgesetz der — 61
dynamischer Druck 163
Dynamometer 20

Ebene, schiefe 30
effektive Leistung 69
Eigenfrequenz 110
Einfallslot 124
Einfallswinkel 94, 124
elastische Schwingungen 102
Elastizitätsmodul 130
Elementarwellen 123
Elongation 100
Empfindlichkeit einer Waage 37
Emulsion 134
Energie der Drehbewegung 82
—, Gesetz von der Erhaltung der — 72
—, mechanische 71
—, potentielle und kinetische 71
Engler, Viskosimeter von — 168
Erdbeschleunigung 48
Erdmeridian 14
erg 70
Exzentrizität 99

Fall, freier 47
Fallröhre 48
Federschwingungen 103
Federwaage 20
Fermatsches Prinzip 129
feste Körper, Dichte von — 21
Figurenachse 96
Flächenmaße 16
Flaschenzüge 65
Fliehkraft 78
Flüssigkeiten 139
—, ideale und reale 160
Fortpflanzung von Wellen 119
Foucault, Versuch von — 82
Frequenz 100
Frequenzmesser 112
Fundamentalschwingungen 117

Galilei 47
Gas, ideales 154
Gasdichte 23
—, Bestimmung der — 158
Gasdruck 155
Gase, Auftrieb in —en 156
Gefäße, verbundene 139
Gegenkraft 25
Gel 135
Geschwindigkeit 43
— der Erde 50
— beim Fall 49
—, mittlere 47
— beim Stoß 91, 93
—, Zusammensetzung von —en 44
Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses 95
— von der Erhaltung der Energie 72
— von der Erhaltung des Impulses 89
Gewicht 62
—, wahres und scheinbares 157
Gewichtseinheit 19
Gewichtsverminderung in Flüssigkeiten 144
Giftheber 159
Gleichgewicht von Kräften 25
—, bedingtes 40
— von Flüssigkeiten 144
Gleichgewichtsbedingungen 36
Gleitreibung 75
goldene Regel der Mechanik 65
Gramm 18
Gravitation 97

Haarröhrchen 137
Haftreibung 75
Hangabtrieb 30
harmonische Schwingungen 100
Hauptträgheitsachsen 84
Hebelgesetz 32
Heber 131, 158
Heberbarometer 152
Hektar 16
Hertz 100
Höhenformel, internationale 150
Höhenlage und Luftdruck 150
Hookesches Gesetz 130
Höppler-Viskosimeter 168
Huygenssches Prinzip 123
hydraulische Presse 142
hydrophil, hydrophob 136
Hydrostatik 139
hydrostatische Waage 145
hydrostatisches Paradoxon 143
Hypothese 13

Ideales Gas 154
Impuls 88
Impulsachse 96

Impulssatz, erster 88
—, zweiter 95
indifferentes Gleichgewicht 41
indizierte Leistung 69
Inertialsystem 50
Interferenz 126

Joule 63

Kapazität 118
Kapillaren 137
Kavitation 167
Keil 30
Keplersche Gesetze 98
Kilogramm 18
Kilohertz 100
Kilopond 19, 62
Kilopondmeter 64
Kilowatt 67
Kinematik 42
kinematische Zähigkeit 175
kinetische Energie 71
Kippen 41
Kippkante, Kippkraft 42
Kippschwingungen 118
Knoten von stehenden Wellen 128
Knotenpunkt 31
Kohäsion 129
Kolbendruck 141
Kolbensaug- und Kolbendruckpumpe 159
Kollergang 57, 97
Kolloide 134
Komponenten 25
Kompressibilität 142
Kontinuitätsgleichung 161
Kontrabarometer 152
Konzentration 133
Kopplung 110, 117
Korkenzieherregel 96
Kraft 19, 62
Kraftarm 32
Krafteck 27
Kräfteplan 31
Krafteinheit 20, 62
Kräftezug 27
Kraftmesser 20
Kraftstoß 88
Kreisbewegung 55
Kreisel 95
Kreiselkompaß 97
Kreiselpumpe 159
Kreisfrequenz 100
kritischer Wert der Reynoldsschen Zahl 176
Kubikmeter 17
Kugelwellen 122
Kühlfalle 139

Labiles Gleichgewicht 41
Lagenenergie 71
laminare Strömung 170
Längeneinheit 14
Längenmaße 15
Längswellen 121
Lastarm 32
Laufgewichtswaage 38
Leistung 66, 69
— der Drehbewegung 68
— gegen eine Strömung 173
Libelle 17
lineare Schwingungen 102
Lissajoussche Figuren 115
Liter 17
Longitudinalwellen 121
Löslichkeit 133
Lösungen, echte 133
—, kolloide 134
Luftballon 157
Luftdruck 149

MacLeod, Manometer von — 156
Mammutpumpe 159
Manometer 155
Masse 18, 62
—, Trägheit der — 61
Massen, bewegte 62
Massenanziehung 97
Masseeinheit 18
Massemittelpunkt 39
Massenträgheitsmoment 82
Maßsystem, praktisches 13
mathematisches Pendel 105
Maxwellsches Rad 85
Mayer, Robert 72
Megapond 20
Membranen, semipermeable 133
Meniskus 138
Meßuhr 16
Metazentrum 147
Meter 14
Mikrobar 151
Mikromanometer 166
Mikrometer 15
Millibar 151
mitteleuropäische Zeit 19
Mohr-Westphalsche Waage 146
Molekularbewegung 131

Molekularerscheinungen 129
Moleküle und Gasdruck 153
Moment 34
Momentensatz 35

Nanometer 15
Neigung 30
Neigungswaage 38
Newton 20, 62
—, 1. Bewegungsgesetz 61
—, 2. Bewegungsgesetz 62
Nonius 15
Normaldruck, Normatmosphäre 150
Normalkraft 23, 30
Nullpunkt einer Waage 37

Oberflächenspannung 137
Osmose 133
Oszillator 110

Parabel 54, 140
Parallelendmaß 15
Parallelogramm der Bewegungen 51
— der Kräfte 26
Pelton-Turbine 163
Pendel 105
Pendellänge, reduzierte 107
Periode 100
perpetuum mobile 72
Pferdestärke, PS 67
Phase, Phasenwinkel 100
Phasenverschiebung 111
physisches Pendel 106
Pipette 159
Pitot-Rohr 165
Planeten 98
Planimeter 17
Poise 168
Poiseuille 168
polarisierte Schwingungen 115
Polstrahlen 32
Pond 20
potentielle Energie 71
Prandtlsches Staurohr 166
Präzession des Kreisels 96
Presse, hydraulische 142
Pronyscher Zaum 68
Pumpen 158
Pyknometer 22

Quadratmeter 16
Quarzuhr 19
Quecksilberdampfpumpe 165
Quecksilbersäule 149
Querwellen 121

Radialbeschleunigung 76
Rangieren 93
Rayleigh-Wellen 122
reduzierte Pendellänge 107
Reflexion beim Stoß 94
— von Wellen 123
Reflexionswinkel 94, 124
Registrierballon 156
Reibung 74
— in Flüssigkeiten 167
Relativität der Bewegung 49
Resonanz, Resonator 110
Resultierende 25
Reversionspendel 107
Reynoldssche Zahl 174
Richtgröße 102
Ringwaage 166
Röhrenfeder-Manometer 156
Rollen 65
Rollreibung 75
Rückkopplung 112

Sättigung 133
Schichtenströmung 170
schiefe Ebene 30
Schlauchwaage 140
schleichende Strömung 169
Schmieden 92
Schnellwaage 38
Schnittgeschwindigkeit 57
Schraubenlehre 16
Schwebungen 116
Schwerebeschleunigung 48
Schweredruck 142
Schwerependel 105
Schwerkraft 48, 97
Schwerlinie 39
Schwerpunkt 39
Schwimmen 146
Schwimmlage, Schwimmachse 146
Schwingdauer 100
Schwingungen, elliptische 114
—, erzwungene 110
—, gedämpfte 109
—, harmonische 100
—, polarisierte 114
—, Überlagerung von — 112
Schwingungsmittelpunkt 107
Sedimentieren 170
Seemeile 15

Seifenhaut 136
Seileck, Seilzug 32
Sekunde 19
Sekundenpendel 106
Senkwaage 147
Simpsonsche Regel 16
Sinkgeschwindigkeit 170
Sinuskurve 101
Sinusschwingung 100
Skalar 51
Spiegel einer Flüssigkeit 140
stabiles Gleichgewicht 40
Stabkräfte 31
Standmoment 42
Statik 24
statischer Druck 163
Staubabscheider 79
Staudruck 163
Staurohr 166
stehende Wellen 127
Steighöhe, kapillare 138
— beim Wurf 53
Steigung 30
Steiner, Satz von — 86
Stirnfläche 171
Stokessches Gesetz 170
Stoß, elastischer 92
—, Mittelpunkt 107
—, unelastischer 90
Strahldruckkraft 162
Strahlen 122
Stromlinien 169
Stromlinienform 173
Strömung, Druckgesetz 163
—, laminare 167
—, reibungsfreie 160
—, turbulente 171
—, Übergang 176
Strömungslehre 160
Strömungsmesser 165
Strömungswiderstand 171
Superposition, ungestörte 51
Suspension 134

Teilkraft 25
Torsionsschwingung 104
Torricelli, Torr 149
—, Gesetz von — 161
toter Punkt 34
Trägheitsachsen 84
Trägheitsgesetz 61
Trägheitsmoment 85
—, Bestimmung des — 108
Transversalwellen 121
Tropfen 131
turbulente Strömung 171

Überdruck 154
Überlagerung von Schwingungen 112
— von Wellen 126
Überlaufgefäß 17
Uhrpendel 110
Umdrehungszahl 55
Umfangsgeschwindigkeit 55
Unterstützungsfläche 41
Urkilogramm 18
Urmeter 14

Vakuum 160
Vakuumpumpe 159
Vektoren 52
— der Drehbewegung 95
Venturirohr 165
verbundene Gefäße 140
Verdrillung 130
Verlängerung 130
Verzögerung 44
Viskosimeter, Viskosität 167
Volumen der Gase 153
Volumenmessung 17

Waagen 36
—, hydrostatische 145
—, Mohr-Westphalsche 146
Wägen 37
Wassersäule 155
Wasserstrahlpumpe 164
Wasserwaage 17
Watt 67
Wellen, Beugung 126
—, Brechung 124
—, ebene und Kugelwellen 122
—, Reflexion von — 123
—, stehende 127
—, Überlagerung von — 126
Wellenfront 122
Wellenlänge 119
Wichte 142
Widerstandszahl 171
Windkanal 173
Winkelbeschleunigung 59
Winkelgeschwindigkeit 58
Winkelhebel 33
Winkelheber 131, 158

Winkellibelle 18
Winkelmessung 17
Winkelrichtgröße 104
Winkelweg 58
wirbelnde Strömung 171
Wirkungsgrad 69
Wirkungslinie 24
Wucht 71
Wurf 52
Wurfhöhe, Wurfweite 55
Wurfparabel 54

X-Einheit 15

Zähigkeit, dynamische 168
—, kinematische 175
Zaum, Pronyscher 68
Zeiteinheit 19
Zeitsignal 19
Zentralbeschleunigung 76
Zentrifugalkraft 79
Zentrifuge 79
Zentripetalkraft 79
Zerlegung von Kräften 29
Zerstäuber 164
Zoll 15
Zusammensetzung von Bewegungen 51
— von Kräften 25

Quellennachweis

Schaefer-Bergmann-Kliefoth, Grundaufgaben des physikalischen Praktikums, Teubner, Leipzig 1948; Bilder 248, 249, 271.

Pohl, Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre, Springer, Berlin 1944; Bilder 123, 206, 304.