Mathematik

kurz und bündig

MATHEMATIK-SKELETT

TEIL 2

Analytische Geometrie · Differentialrechnung
Integralrechnung

2. Auflage

von

Inst. Professor OTTO TELLER

Thüringer Volksverlag G. m. b. H.
Zweigniederlassung Karl-Marx-Verlag, Pößneck (Thür.)
1950

MATHEMATIK

kurz und bündig

MATHEMATIK-SKELETT

TEIL 2

Analytische Geometrie · Differentialrechnung
Integralrechnung

2. Auflage

von

Inst.-Professor OTTO TELLER

Thüringer Volksverlag G. m. b. H.
Zweigniederlassung Karl-Marx-Verlag, Pößneck (Thür.)
1950

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 220
(Thüringer Volksverlag G.m.b.H., Weimar)
der Sowjetischen Militärverwaltung in Deutschland
II/6300/49—7426/49 II/5343/49—7426/49

Verlagsnummer 93—105 Erschienen: 1950
Druck: Thüringer Volksverlag G. m. b. H., Weimar
Zweigniederlassung Karl-Marx-Verlag, Pößneck (Thür.)

Vorwort zur 2. Auflage

Die Mathematik, kurz und bündig, 2. Teil, enthält die analytische Geometrie, Differentialrechnung und Integralrechnung und bildet die Fortsetzung des im Mathematik-Skelett dargestellten mathematischen Lehrstoffs. Doch ist die Darstellung in sich geschlossen und unabhängig vom Mathematik-Skelett.

Zur leichteren Einprägung des Stoffes sind neben den kurzen, zum Lernen besonders geeigneten Texten optische Hilfsmittel mit verwandt. So ist dem akustischen wie dem visuellen Gedächtnis in gleicher Weise Rechnung getragen.

Die Uebersicht der einzelnen Kapitel wird durch folgende optische Mittel erleichtert:

1. blauer Ueberdruck hat Bezug auf den in diesem Kapitel behandelten Stoff; er erspart das Nachschlagen in einem Inhaltsverzeichnis;
2. rote Umrandung bedeutet die Hervorhebung von Sätzen und Regeln;
3. schwarze Figuren (mit blauen und roten Hilfslinien) dienen zur Veranschaulichung und Erläuterung der Sätze;
4. in den Beispielen ist, wo angängig, zur Erleichterung der Uebersicht der Beginn der Aufgabe oberhalb durch einen blauen Strich und die Lösung durch einen roten Strich gekennzeichnet.

Ueber die im Texte vorkommenden mathematischen Abkürzungen gibt die folgende Tabelle Aufschluß:

$=$	gleich	$\sphericalangle$	Winkel	$\frac{dy}{dx}$	dy nach dx (1. Differentialquot.)
$\approx$	annähernd gleich	$\triangle$	Dreieck	y'	1. Ableitung der Funktion $y=f(x)$
$\equiv$	identisch gleich	G oder g	Gerade	$\int$	Integral
$>$	größer als	m	Richtungsfaktor einer Geraden	$\int_a^b$	Bestimmtes Integral zw. den Grenzen a und b
$<$	kleiner als	$f(x)$	Funktion von x		
$\cong$	kongruent	$\lim$	limes (Grenzwert)		
$\sim$	ähnlich	$\lg$	Logarithmus zur Basis 10		
∞	unendlich	$\ln$	natürlicher Log. (Basis e = 2,7183)		
$\parallel$	parallel				
$\perp$	senkrecht				

Die Darstellung der analytischen Geometrie bezieht sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, die Abzissenachse wird als x-Achse, die Ordinatenachse als y-Achse bezeichnet. Die Mittelpunktskoordinaten sind für Kreis, Ellipse und Hyperbel einheitlich mit μ und ν bezeichnet, um Verwechslungen mit den Koeffizienten a, b, c der allgemeinen Gleichung der Geraden zu vermeiden.

In der Differentialrechnung ist die Untersuchung algebraischer und geometrischer Maxima und Minima besonders ausführlich behandelt worden. Die Behandlung der Reihen mit Hilfe der Differentialrechnung ist dagegen dem 4. Teil vorbehalten worden.

Die Integralrechnung beschränkt sich auf Ableitung und Einübung der wichtigsten Integralformeln. Als Anwendung erfolgt die Berechnung von Kurvenbögen, Flächen und von Rauminhalten von Rotationskörpern.

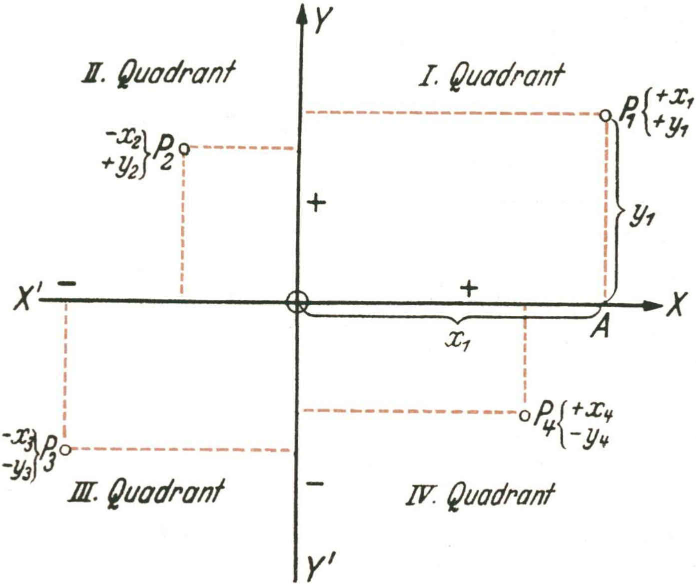
Allgemein ist zur Einübung jeder Formel eine Anzahl von Beispielen vollständig durchgerechnet.

Der Verlag.

Inhaltsübersicht

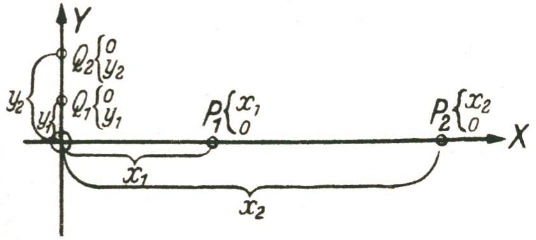
Analytische Geometrie.

Der Punkt.



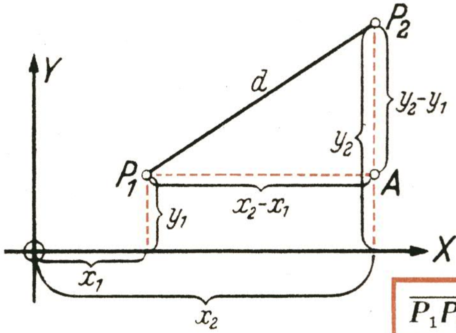
Im rechtwinkligen Koordinatensystem heißt XX' Abszissenachse oder X-Achse, YY' Ordinatenachse oder Y-Achse, O ist der Koordinatenanfangspunkt, Ursprung oder Nullpunkt (s. Sk. S. 21). Die mit Vorzeichen versehenen senkrechten Abstände $OA = x_1$ und $AP_1 = y_1$ sind die Koordinaten des Punktes P_1 im I. Quadranten.

$P_2\begin{cases}-x_2\\+y_2\end{cases}$	mit negativer Abszisse und positiver Ordinate liegt im II. Quadranten.
$P_3\begin{cases}-x_3\\-y_3\end{cases}$	mit negativer Abszisse und negativer Ordinate liegt im III. Quadranten.
$P_4\begin{cases}+x_4\\-y_4\end{cases}$	mit positiver Abszisse und negativer Ordinate liegt im IV. Quadranten.



Für 2 Punkte P_1 und P_2 auf der X-Achse ergibt sich als deren Abstand $P_1P_2 = x_2 - x_1$. Analog ist die Strecke zwischen 2 Punkten Q_1 und Q_2 auf der Y-Achse: $Q_1Q_2 = y_2 - y_1$

Abstand zweier Punkte.



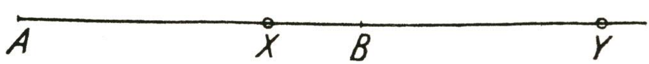
Liegen 2 Punkte $P_1\begin{cases}x_1\\ y_1\end{cases}$ und $P_2\begin{cases}x_2\\ y_2\end{cases}$ beliebig in der Ebene, so ergibt sich ihr Abstand P_1P_2 nach Pythagoras im rechtw. ΔP_1P_2A:

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

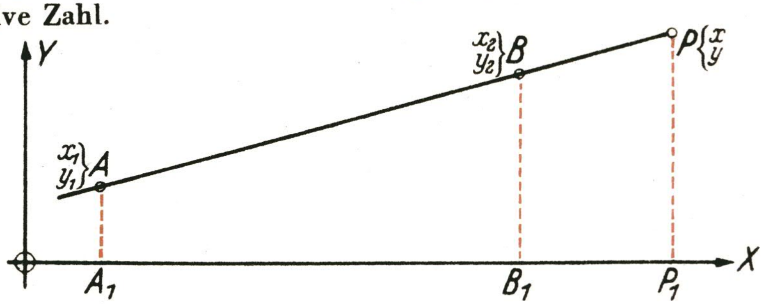
Beispiel: Bestimme die Länge der Seiten des $\Delta\ ABC$ aus den Koordinaten der Ecken $A\begin{cases}-7\\ 1\end{cases}$ $B\begin{cases}14\\ -6\end{cases}$ $C\begin{cases}5\\ 6\end{cases}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(14+7)^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{441 + 49} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(5-14)^2 + (6+6)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(5+7)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Teilung einer Strecke.



Eine Strecke AB kann durch einen Punkt X oder Y innen oder außen geteilt werden; X nennt man den inneren, Y den äußeren Teilpunkt. $\lambda = AX : BX$ oder $\lambda = AY : BY$ heißt das Abstandsverhältnis des Punktes X oder Y bezüglich der Punkte A u. B. Für den inneren Teilpunkt X ist, da die Strecken AX und BX entgegengerichtet sind, λ eine negative Zahl. Für den äußeren Teilpunkt Y ist, da AY und BY gleichgerichtet sind, λ eine positive Zahl.



Nach dem Strahlensatz gilt: $AP : BP = A_1P_1 : B_1P_1$ (s. Sk. S. 6).

$\lambda = \frac{x-x_1}{x-x_2}$, analog $\lambda = \frac{y-y_1}{y-y_2}$; durch algebraische Umformung:

$\lambda\,(x-x_2) = x-x_1;\ \lambda x - \lambda x_2 = x - x_1;\ x\,(1-\lambda) = x_1 - \lambda x_2.$

$$\boxed{x = \frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\ \text{analog}\ y = \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}}$$ **Koordinaten des Teilungspunktes.**

Dabei ist, wie erwähnt, zu beachten, daß λ positiv, wenn P äußerer Teilpunkt, daß λ negativ, wenn P innerer Teilpunkt. Für den Mittelpunkt M einer Strecke AB ist $AM : BM = 1 : 1$ und daher $\lambda = -1$; in die Formel eingesetzt: $x = \frac{x_1-(-1)x_2}{1-(-1)} = \frac{x_1+x_2}{2}$

$$\boxed{x = \frac{x_1+x_2}{2};\ y = \frac{y_1+y_2}{2}}$$ **Mittelpunktskoordinaten.**

Beispiel: Die Verbindungsstrecke zweier Punkte $A\begin{cases}1\\-11\end{cases}$ und $B\begin{cases}-5\\-3\end{cases}$ soll über B hinaus um sich selbst und über A hinaus so verlängert werden, daß sich die Verlängerung zur ursprünglichen Strecke wie 3 : 2 verhält. Man bestimme die Koordinaten der Endpunkte P und Q und die Koordinaten des Mittelpunktes M von PQ!

$AP : BP = 2 : 1;\ \lambda = +2$

$x_P = \frac{1-2\cdot(-5)}{1-2} = -11 \qquad P\begin{cases}-11\\5\end{cases}$

$y_P = \frac{-11-2\cdot(-3)}{1-2} = 5$

$x_M = \frac{-11+10}{2} = -\frac{1}{2}$

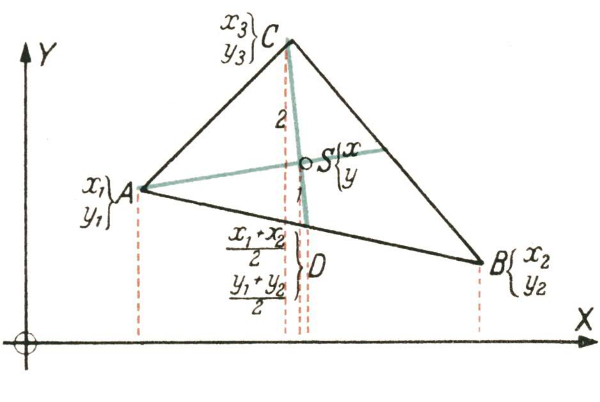
$BQ : AQ = 5 : 3;\ \lambda = +\frac{5}{3}$

$x_Q = \frac{-5-\frac{5}{3}\cdot 1}{1-\frac{5}{3}} = 10 \qquad Q\begin{cases}10\\-23\end{cases}$

$y_Q = \frac{-3-\frac{5}{3}\cdot(-11)}{1-\frac{5}{3}} = -23$

$y_M = \frac{5-23}{2} = -9 \qquad M\begin{cases}-0{,}5\\-9\end{cases}.$

Schwerpunkt eines Dreieckes.



Die Schwerlinien eines Δ schneiden sich im Verhältnis 2:1 (siehe Sk. S. 5). $DS:CS = 1:2$; $\lambda = -\frac{1}{2}$ eingesetzt in die Formel für die Koordinaten des Teilungspunktes:

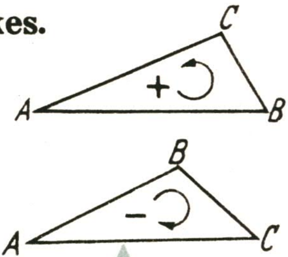
$$x = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x_3}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \; y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}$$ **Schwerpunktskoordinaten.**

Beispiel: Die Koordinaten der Ecken eines $\Delta\, ABC$ sind $A\begin{cases} -5 \\ 4 \end{cases}$ $B\begin{cases} -13 \\ -6 \end{cases}$ $C\begin{cases} 3 \\ -10 \end{cases}$ Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt?

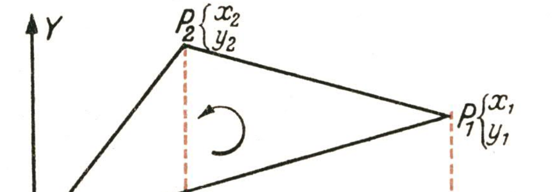
$$x = \frac{-5 - 13 + 3}{3} = -5; \quad y = \frac{4 - 6 - 10}{3} = -4. \quad S\begin{cases} -5 \\ -4 \end{cases}$$

Fläche eines Dreieckes.



Wie bei der Messung von Strecken und Winkeln legt man der Dreiecksfläche ein Vorzeichen bei, und zwar bedeutet:
+ den Umlauf im Gegenuhrzeigersinn,
− den Umlauf im Uhrzeigersinn.

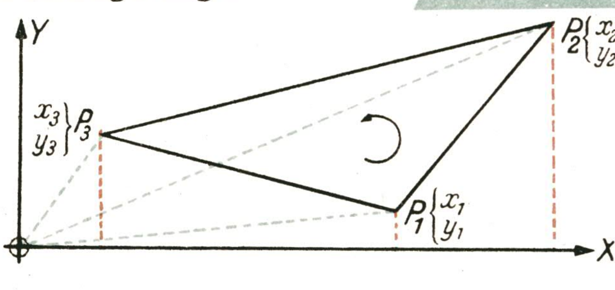
Dreieck mit einer Ecke im Ursprung:



$\Delta\, OP_1P_2$:

$$\boxed{F = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

Dreieck in beliebiger Lage:



Unter Beachtung des Umlaufsinnes ist:

$$\Delta P_1P_2P_3 = \Delta OP_1P_2 + \Delta OP_2P_3 + \Delta OP_3P_1$$

$$\Delta P_1P_2P_3: \quad \boxed{F = \tfrac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right]}$$

$$\text{oder } F = \tfrac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Beispiel: Berechne die Fläche folgender Dreiecke mit den Koordinaten:

1. $A\begin{cases}0\\0\end{cases}$ $B\begin{cases}9\\-2\end{cases}$ $C\begin{cases}-2\\4\end{cases}$, 2. $A\begin{cases}-2\\-1\end{cases}$ $B\begin{cases}-1\\5\end{cases}$ $C\begin{cases}3\\2\end{cases}$.

Zu 1. $F = \frac{1}{2}[9 \cdot 4 - (-2) - 2)] = \frac{1}{2}[36 - 4] = 16$ (*F.E.*).

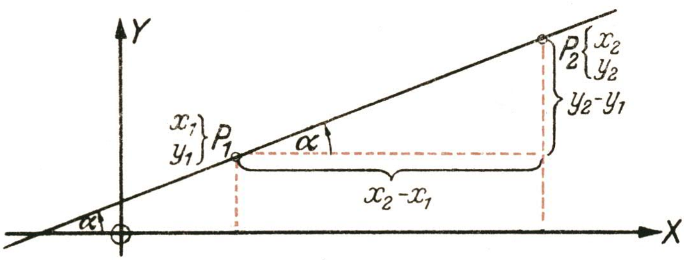
Das Δ wird im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

Zu 2. $F = \frac{1}{2}[(-10 - 1) + (-2 - 15) + (-3 + 4)] = (-)13{,}5$ (*F.E.*).

Das Δ wird im Uhrzeigersinn durchlaufen.

Die Gerade.

Für die Lage einer Geraden ist von ausschlaggebender Bedeutung der Winkel, den die Gerade mit der $+X$-Achse bildet. Bezeichnet man diesen Winkel mit α, so versteht man darunter denjenigen $\sphericalangle$, um den man die $+X$-Achse im Gegenuhrzeigersinn drehen muß, um sie mit der Geraden zur Deckung zu bringen.



Ist eine Gerade durch 2 Punkte $P_1\begin{cases}x_1\\y_1\end{cases}$ und $P_2\begin{cases}x_2\\y_2\end{cases}$ gegeben, so ergibt sich aus der Figur: $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m}$

Da mit dem $\sphericalangle\alpha$ die Richtung der Geraden festliegt, bezeichnet man $\operatorname{tg}\alpha$ auch als den Richtungsfaktor der Geraden und setzt vielfach $\operatorname{tg}\alpha = m$.

Beispiel: Welche Winkel bilden die Seiten des ΔABC mit der X-Achse?

$$A\begin{cases}4\\7\end{cases}\quad B\begin{cases}-5\\-2\end{cases}\quad C\begin{cases}6\\-8\end{cases}.$$

Für $\overline{AB}$ gilt: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{-2-7}{-5-4} = \dfrac{9}{9} = 1 \qquad \alpha_1 = 45^0$

Für $\overline{BC}$ gilt: $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{-8+2}{6+5} = -\dfrac{6}{11} \qquad \alpha_2 = 151^0\ 23'\ 20''$

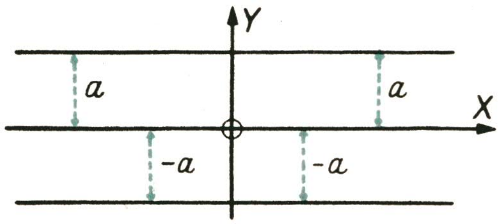
Für $\overline{AC}$ gilt: $\operatorname{tg}\alpha_3 = \dfrac{-8-7}{6-4} = -\dfrac{15}{2} \qquad \alpha_3 = 97^0\ 35'\ 40''$

Die Gleichung der Geraden.

Die möglichen Lagen einer Geraden gegen das Koordinatensystem sind:

1. Die Gerade ist parallel zur X-Achse.
2. „ „ „ „ „ Y- „
3. „ „ geht durch den Ursprung.
4. „ „ schneidet beide Achsen in 2 Punkten.

1. Möglichkeit:

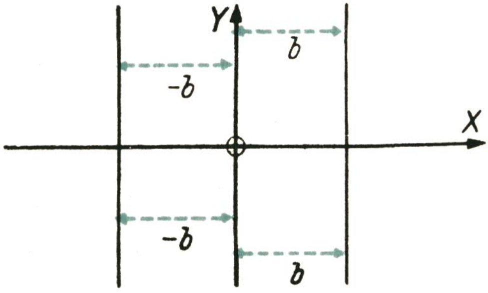


Für alle Punkte, welche auf der Geraden ∥ zur X-Achse liegen, ist die Ordinate $= \pm a$.

$\underline{y = \pm a}$ ist daher die Gleichung einer zur X-Achse parallelen Geraden.

$\underline{y = 0}$ ist die Gleichung der X-Achse selbst.

2. Möglichkeit:

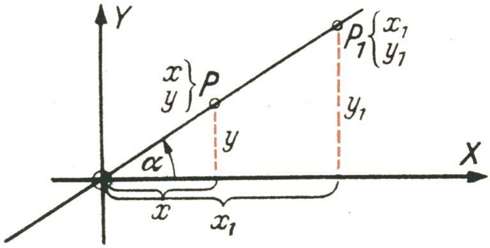


Analog ist

$\underline{x = \pm b}$ die Gleichung einer zur Y-Achse parallelen Geraden.

$x = 0$ ist die Gleichung der Y-Achse selbst.

3. Möglichkeit:

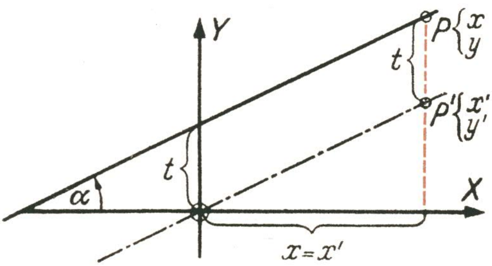


$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha = m; \frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg}\alpha = m$

Für irgendeinen Punkt P oder P_1 auf einer Geraden durch den Ursprung hat das Verhältnis von Ordinate zur Abszisse stets den gleichen Wert.

$\boxed{y = mx}$ **ist daher die Gleichung einer Geraden durch den Ursprung.**

4. Möglichkeit:

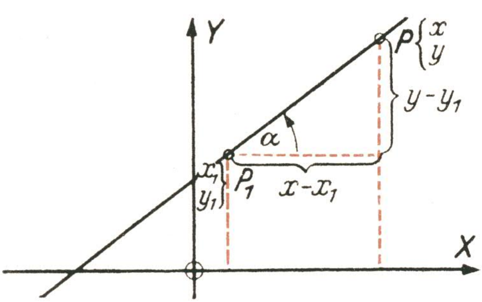


$y' = mx'$ **Lt. Fig. ist** $x = x'$

und $y = y' + t$
$y' = y - t$

$y - t = mx$

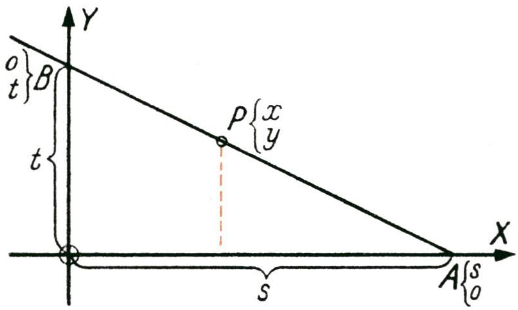
$\boxed{y = mx + t}$ **ist daher die Gleichung einer Geraden mit gegebener Richtung und gegebenem Achsenabschnitt auf der Y-Achse.**



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

$\boxed{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}$

ist die Gleichung einer Geraden, von der ein Punkt und ihre Richtung gegeben sind.

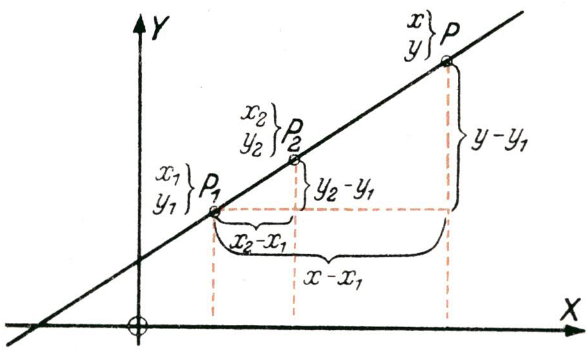


Da die Punkte A, P und B auf der Geraden liegen, ist die Fläche des $\Delta\, APB = 0$.

$$0 = \tfrac{1}{2}[sy - x \cdot 0 + xt - 0 \cdot y + 0 \cdot 0 - st]$$

$$sy + xt = st / : st$$

$\boxed{\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1}$ ist die Gleichung einer Geraden mit gegebenen Achsenabschnitten.



Aus der Ähnlichkeit von Dreiecken (s. Sk. S. 6) folgt:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, von der 2 Punkte gegeben sind.

Beispiel: Wie lauten die Gleichungen folgender Geraden?:

1. Gerade I geht durch den Ursprung und bildet mit der X-Achse einen Winkel, für den $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ ist.
2. Gerade II geht durch den Punkt $P \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$, ihr Richtungsfaktor ist $\frac{2}{5}$.
3. Gerade III geht durch die Punkte $A \begin{cases} -1 \\ 9 \end{cases}$ und $B \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$.
4. Gerade IV schneidet auf der X-Achse die Strecke $s = -4$ und auf der Y-Achse die Strecke $t = 12$ ab.
5. Gerade V schneidet auf der Y-Achse die Strecke $t = -2$ ab und bildet mit der X-Achse einen Winkel, dessen Richtungsfaktor $m = -\frac{6}{5}$ ist.

Zu 1.: $y = mx$ $\qquad y = \frac{3}{4}x;$ $\qquad G_1 \equiv 3x - 4y = 0.$

Zu 2.: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $\qquad y - 6 = \frac{2}{5}(x + 2):$ $\quad 5y - 30 = 2x + 4;$
$G_2 \equiv 2x - 5y + 34 = 0.$

Zu 3.: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad \frac{y - 9}{x + 1} = \frac{-3 - 9}{5 + 1} = \frac{-12}{6} = -2:$
$-2x - 2 = y - 9;$ $\quad G_3 \equiv 2x + y - 7 = 0.$

Zu 4.: $\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1 \qquad \frac{x}{-4} + \frac{y}{12} = 1; \quad -3x + y = 12$

$G_4 \equiv 3x - y + 12 = 0.$

Zu 5.: $y = mx + t \qquad y = -\frac{6}{5}x - 2; \quad 5y = -6x - 10$

$G_5 \equiv 6x + 5y + 10 = 0.$

Will man eine Gerade rasch zeichnen, so bestimmt man ihre Schnittpunkte mit den beiden Achsen in der Weise, daß man in die Gleichung einmal $x = 0$ einsetzt und damit den Schnittpunkt mit der Y-Achse erhält, das andere Mal $y = 0$ einsetzt und analog den Schnittpunkt mit der X-Achse errechnet.

Soll ein Punkt auf einer Geraden liegen, so müssen die Koordinaten des fraglichen Punktes in die Gleichung der Geraden eingesetzt, die Gleichung erfüllen.

Beispiel:

Liegen die Punkte $P_1\left\{\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ $P_2\left\{\begin{matrix}0\\-6\end{matrix}\right.$ $P_3\left\{\begin{matrix}-3\\-7\end{matrix}\right.$ auf der Geraden $G \equiv 3x - 2y - 12 = 0$?

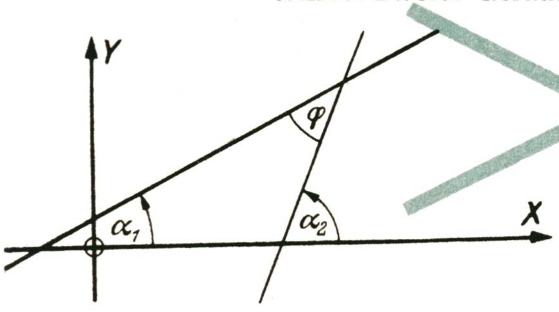
Für P_1 gilt: $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) - 12 = 0$; P_1 liegt daher auf der Geraden.
Für P_2 gilt: $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-6) - 12 = 0$; P_2 liegt ebenfalls auf der Geraden.
Für P_3 gilt: $3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-7) - 12 = -7$; P_3 liegt nicht auf der Geraden.

Man bestimme für die Punkte $A\left\{\begin{matrix}14\\?\end{matrix}\right.$ und $B\left\{\begin{matrix}?\\-4{,}5\end{matrix}\right.$ die fehlenden Koordinaten so, daß die Punkte auf der Geraden $G \equiv 3x + 7y + 21 = 0$ liegen.

y_A: $3 \cdot 14 + 7y + 21 = 0$; $7y = -63$; $y_A = -9$.

x_B: $3x + 7 \cdot (-4{,}5) + 21 = 0$; $3x = 10{,}5$; $x_B = 3{,}5$.

Winkel zweier Geraden.



Aus der Figur folgt:

$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi; \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$

$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1)$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

(siehe Sk. S. 30).

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}}$$

Merke:

> **Ist die Gerade in der allgemeinen Form $ax + by + c = 0$ gegeben, so löst man die Gleichung nach y auf; der Koeffizient von x ist dann der Richtungsfaktor m der Geraden.**
>
> **z. B.: $5x - 3y + 7 = 0$; $y = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$; $m = \frac{5}{3}$.**

Beispiel: Man bestimme den Winkel der beiden Geraden $G_1 \equiv 12x + 9y - 39 = 0$ und $G_2 \equiv 6x - 15y + 42 = 0$!

$$m_1 = -\frac{4}{3} \quad m_2 = \frac{2}{5};\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{2}{5}\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{6 + 20}{15 - 8} = \frac{26}{7}$$

$\lg \mathrm{tg}\,\varphi = 1{,}4150 - 0{,}8451 = 0{,}5699$; $\quad \varphi = 74^0\,56'$.

Parallele Gerade.

Sind 2 Gerade in der Form $G_1 \equiv y = m_1 \cdot x + t_1$ und $G_2 \equiv y = m_2 \cdot x + t_2$ gegeben, so berechnet man den Winkel, den sie miteinander einschließen, nach der Formel: $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$. Sollen beide Gerade parallel sein, so muß $\varphi = 0$ werden; $\mathrm{tg}\,\varphi$ ist dann ebenfalls 0 und es gilt daher:

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}; \quad 0 = m_2 - m_1$$

$$\boxed{m_1 = m_2} \quad \text{d. h.}$$

> **Sind 2 Gerade parallel, so müssen ihre Richtungsfaktoren gleich sein.**

Beispiel: Durch die Ecken des $\Delta\ ABC$ sind die Parallelen zu den Gegenseiten zu legen. Welche Gleichungen haben sie? $A \begin{cases} -5 \\ 5 \end{cases}$ $B \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$ $C \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$.

Nach der Formel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ist:

$$m_{AB} = \frac{-1 - 5}{4 + 5} = -\frac{2}{3}; \quad m_{BC} = \frac{-3 + 1}{-2 - 4} = \frac{1}{3}; \quad m_{AC} = \frac{-3 - 5}{-2 + 5} = -\frac{8}{3}.$$

Für die Parallele zu AB durch C gilt nach der Formel: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$y + 3 = -\frac{2}{3}(x + 2)$; $3y + 9 = -2x - 4$; $G_1 \equiv 2x + 3y + 13 = 0$.

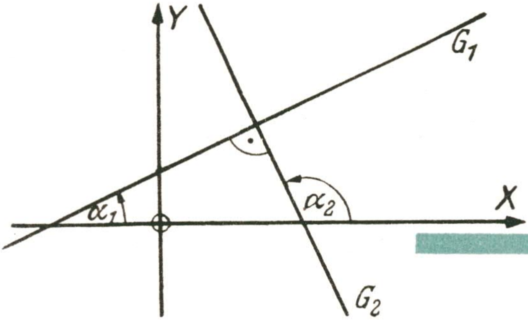
Für die Parallele zu BC durch A ergibt sich analog:

$y - 5 = \frac{1}{3}(x + 5)$; $\quad 3y - 15 = x + 5$; $G_2 \equiv x - 3y + 20 = 0$.

Für die Parallele zu AC durch B ist:

$y + 1 = -\frac{8}{3}(x - 4)$; $3y + 3 = -8x + 32$; $G_3 \equiv 8x + 3y - 29 = 0$.

Gerade, welche aufeinander senkrecht stehen.



$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$;

$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} (90^0 + \alpha_1) =$

$- \operatorname{ctg} \alpha_1 = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}$;

daher ist: $m_2 = - \frac{1}{m_1}$ oder

$\boxed{m_1 = - \frac{1}{m_2}}$ d. h.

Zwei Gerade stehen aufeinander senkrecht, wenn der Richtungsfaktor der einen gleich ist dem negativen reziproken Richtungsfaktor der anderen.

1. Beispiel: Welche Gleichungen haben die Höhen des $\Delta\, ABC$? $A \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases} B \begin{cases} -2 \\ 5 \end{cases} C \begin{cases} -10 \\ -6 \end{cases}$

$m_{AB} = \frac{5-3}{-2-9} = -\frac{2}{11}$; daher ist $m_{h_c} = \frac{11}{2}$. Da die Höhe h_c noch durch C geht, gilt nach der Punkt-Richtungsgleichung $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$:

$y + 6 = \frac{11}{2}(x + 10)$; $2y + 12 = 11x + 110$; $h_c \equiv 11x - 2y + 98 = 0$.

Analog ergibt sich für die Höhen h_a und h_b:

$m_{BC} = \frac{-6-5}{-10+2} = \frac{11}{8}$; $m_{h_a} = -\frac{8}{11}$;

$y - 3 = -\frac{8}{11}(x - 9)$; $11y - 33 = -8x + 72$; $h_a \equiv 8x + 11y - 105 = 0$.

$m_{AC} = \frac{-6-3}{-10-9} = \frac{9}{19}$; $m_{h_b} = -\frac{19}{9}$;

$y - 5 = -\frac{19}{9}(x + 2)$; $9y - 45 = -19x - 38$; $h_b \equiv 19x + 9y - 7 = 0$.

2. Beispiel: In den Schnittpunkten P_1 und P_2 der Geraden $G \equiv 3x + 2y + 18 = 0$ mit den Koordinatenachsen sollen die Senkrechten zur Geraden errichtet werden. Wie lauten ihre Gleichungen?

Setzt man in der Geradengleichung $x = 0$, so ergibt sich $y = -9$; also $P_1 \begin{cases} 0 \\ -9 \end{cases}$.

„ „ „ „ „ $y = 0$ „ „ „ $x = -6$; „ $P_2 \begin{cases} -6 \\ 0 \end{cases}$.

$m_G = -\frac{3}{2}$; $m_S = \frac{2}{3}$.

$y + 9 = \frac{2}{3}(x - 0)$; $S_1 \equiv 2x - 3y - 27 = 0$.

$y - 0 = \frac{2}{3}(x + 6)$; $S_2 \equiv 2x - 3y + 12 = 0$.

Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden.

Da der Schnittpunkt auf der Geraden G_1, aber auch auf G_2 liegt, also beide Geradengleichungen erfüllen muß, ergibt sich als Regel:

Um die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden zu erhalten, löst man die beiden Geradengleichungen nach x und y auf.

1. **Beispiel:** Es sind zwei Punkte $A\begin{cases}-16\\11\end{cases}$ und $B\begin{cases}5\\-17\end{cases}$ sowie die Gerade $G \equiv 17x - 6y + 38 = 0$ gegeben. Von dem Punkte P auf der Geraden, dessen Abszisse $+2$ ist, soll auf die Gerade AB das Lot L gefällt werden. Welche Koordinaten hat der Fußpunkt F dieses Lotes?

$m_{AB} = \frac{-17-11}{5+16} = -\frac{28}{21} = -\frac{4}{3}$; daher $m_S = \frac{3}{4}$.

$x = 2$, in die gegebene Geradengleichung eingesetzt, gibt:

$34 - 6y + 38 = 0;\ 6y = 72;\ y = 12.$

P hat also die Koordinaten $x = 2$ und $y = 12$: $P\begin{cases}2\\12\end{cases}$.

Die Gleichung für die Gerade AB ergibt sich aus der Formel: $\frac{y-y}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$:

$\frac{y-11}{x+16} = \frac{-17-11}{5+16} = -\frac{4}{3}$;

$4x + 64 = -3y + 33;\ AB \equiv 4x + 3y + 31 = 0.$

Für das Lot L ist, da $m = \frac{3}{4}$ und $P\begin{cases}2\\12\end{cases}$ bekannt sind:

$y - 12 = \frac{3}{4}(x-2);\ 4y - 48 = 3x - 6;\ L \equiv 3x - 4y + 42 = 0.$

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I.} & 4x + 3y = & -31 & \cdot 4 \\ \text{II.} & 3x - 4y = & -42 & \cdot 3 \\ \hline & 25x \quad = & -124 - 126 = -250; & x_F = -10. \text{ in I. } y_F = 3. \end{array}$$

2. **Beispiel:** Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch den Schnittpunkt S der Geraden $G_1 \equiv 8x - 15y + 30 = 0$ und $G_2 \equiv 2x + 3y - 15 = 0$ geht und zur Geraden $G_3 \equiv 20x - 9y - 60 = 0$ parallel ist!

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I.} & 8x - 15y = & -30; & \\ \text{II.} & 2x + 3y = & 15 & \cdot 5 \\ \hline & 18x \quad = & 45; & x = \frac{5}{2};\ y = \frac{10}{3} \end{array}$$

$S\begin{cases}\frac{5}{2}\\[4pt]\frac{10}{3}\end{cases}$

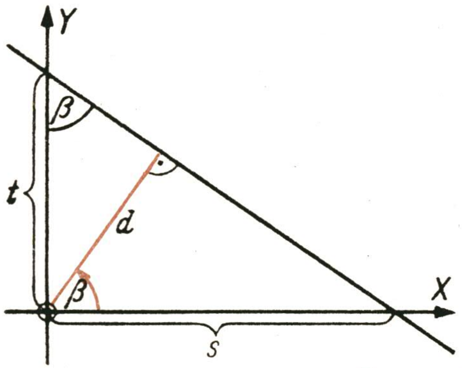
$m_{G_3} = \frac{20}{9}$

$y - \frac{10}{3} = \frac{20}{9}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Big| \cdot 9$

$9y - 30 = 20x - 50$

$G \equiv 20x - 9y - 20 = 0.$

Normalform der Gleichung einer Geraden.



Gegeben ist der $\sphericalangle\beta$, den der ebenfalls gegebene senkrechte Abstand d der Geraden vom Ursprung mit der $+X$-Achse bildet.

Gesucht ist die Gleichung der Geraden aus den gegebenen Bestimmungsstücken.

$$\frac{d}{s} = \cos\beta;\ s = \frac{d}{\cos\beta}$$

$$\frac{d}{t} = \sin\beta;\ t = \frac{d}{\sin\beta}$$

$G \equiv \frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1$; die Werte für s und t eingesetzt, ergeben:

$$\frac{x \cdot \cos\beta}{d} + \frac{y \cdot \sin\beta}{d} = 1 / \cdot d$$

$$\boxed{x \cdot \cos\beta + y \cdot \sin\beta - d = 0}$$ **Hessesche Normalform.**

Soll die Gleichung der Geraden von der allgemeinen Form

I. $ax + by + c = 0$ in die Normalform

II. $x \cdot \cos\beta + y \cdot \sin\beta - d = 0$ übergeführt werden,

so multipliziert man I. mit dem zunächst unbekannten Faktor p

III. $apx + bpy + cp = 0$. Da II und III identisch werden sollen, erhält man $ap = \cos\beta$ und $bp = \sin\beta$, folglich

$$a^2p^2 + b^2p^2 = 1,\quad p^2 = \frac{1}{a^2 + b^2},\ p = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Die Normalform der Gleichung I ist also

$$\boxed{N \equiv \frac{ax + by + c}{\mp\sqrt{a^2 + b^2}} = 0}$$

Regel:

> Um die Gleichung einer Geraden auf die Normalform zu bringen, stellt man alle Glieder auf eine Seite, und zwar so, daß das <u>konstante Glied stets negativ</u> ist; hierauf dividiert man die ganze Gleichung durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Koeffizienten von x und y.

Beispiel: Die Gleichung der Geraden $G \equiv 8x + 15y + 170 = 0$ ist in die Normalform überzuführen. Wie groß ist d und β?

$$-8x - 15y - 170 = 0; \quad \frac{-8x - 15y - 170}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = 0: \quad \frac{-8x - 15y - 170}{17} = 0,$$

$$N \equiv -\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - 10 = 0$$

$-\frac{8}{17} = \cos\beta$; $\cos\beta$ ist negativ im II. und III. Quadr.
$-\frac{15}{17} = \sin\beta$; $\sin\beta$ ist negativ im III. und IV. Quadr.
β liegt im III. Quadranten. (siehe Sk. S. 28)

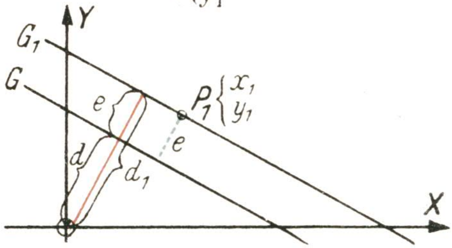
$\lg 15 = 1{,}1761$
$\lg 17 = 1{,}2304$
$\lg \sin \beta' = 9{,}9457 - 10 \qquad \beta' = 61^0\,56'; \qquad \beta = 180^0 + \beta' = 241^0\,56';$
$d = 10.$

Entfernung eines Punktes von einer Geraden.

Ist eine Gerade in der Form $G \equiv ax + by + c = 0$ gegeben und lautet ihre Gleichung in der Normalform $N \equiv \frac{-ax - by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$, so beträgt die Entfernung eines Punktes $P_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ von der Geraden:

$$\boxed{e = \frac{-ax_1 - by_1 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

d. h.:



Um die Entfernung eines Punktes von einer Geraden zu erhalten, bringt man zuerst die Gleichung der Geraden auf die Normalform. Setzt man dann die Koordinaten des fraglichen Punktes $P_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ in die linke Gleichungsseite ein, so stellt der absolute Betrag dieses Ausdruckes die gesuchte Entfernung e dar. Das Vorzeichen des Ausdruckes gibt Aufschluß über die Lage des Punktes gegen die Gerade.

Ableitung der Formel: Aus $N \equiv \frac{-ax - by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = o$ folgt $d = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Die Parallele zu G hat den gleichen Richtungsfaktor $-\frac{a}{b}$, ihre Gleichung lautet demnach $N_1 \equiv \frac{-ax - by - c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, wobei c_1 zunächst noch unbekannt ist.

N_1 geht durch P_1, die Koordinaten von P_1 müssen die Gleichung erfüllen: $\frac{-ax_1 - by_1 - c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = o$. Daraus ergibt sich $c_1 = -ax_1 - by_1$ und $d_1 = \frac{c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-ax - by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Der Abstand e des Punktes P_1 von G ist:

$$e = d_1 - d = \frac{-ax_1 - by_1 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ist der Wert e positiv, so liegen Punkt und Ursprung auf verschiedenen Seiten der Geraden.

Ist der Wert negativ, so liegen Punkt und Ursprung auf gleicher Seite der Geraden.

Ist der Wert Null, so liegt der Punkt auf der Geraden selbst.

1. **Beispiel:** Gegeben sei die Gerade $G \equiv 4x - 3y + 15 = 0$ und die Punkte $P\begin{cases}2\\1\end{cases}$ $S\begin{cases}-3\\6\end{cases}$ $Q\begin{cases}-6\\-3\end{cases}$.

Welche Lage nehmen die Punkte gegen die Gerade ein und wie groß sind ihre Abstände von G?

$N \equiv \frac{-4x + 3y - 15}{5} = 0;$

Für $x_1 = 2$ und $y_1 = 1$ ist $e_P = \frac{(-4) \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 15}{5} = \frac{-20}{5} = -4.$

Der Abstand des Punktes P von der Geraden G beträgt 4: Punkt P und Ursprung liegen auf gleicher Seite von G.

Für $x_2 = -3$ und $y_2 = 6$ ist $e_S = \frac{(-4) \cdot (-3) + 3 \cdot 6 - 15}{5} = \frac{15}{5} = 3.$

Der Abstand des Punktes S von der Geraden G beträgt 3; Punkt S und Ursprung liegen auf verschiedenen Seiten von G.

Für $x_3 = -6$ und $y_3 = -3$ ist $e_Q = \frac{(-4) \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) - 15}{5} = \frac{0}{5} = 0.$

Der Punkt Q liegt auf der Geraden selbst.

2. **Beispiel:** Welche Gleichung hat eine Gerade, die durch den Punkt $P\begin{cases}-1\\3\end{cases}$ geht und vom Punkt $Q\begin{cases}2\\-1\end{cases}$ den Abstand 4 hat?

Die gesuchte Gleichung habe die Form $y = mx + t$: dann lautet die Normalform $N \equiv \frac{-mx + y - t}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0.$

Punkt P muß der Gleichung genügen, also $3 = -m + t$: daraus $t = 3 + m$.

Weiter ist: $-4 = \frac{-m \cdot 2 - 1 - (3 + m)}{\sqrt{m^2 + 1}}$: $4\sqrt{m^2 + 1} = 3m + 4$:

$16(m^2 + 1) = (3m + 4)^2$: $16m^2 + 16 = 9m^2 + 24m + 16$: $7m^2 - 24m = 0$:

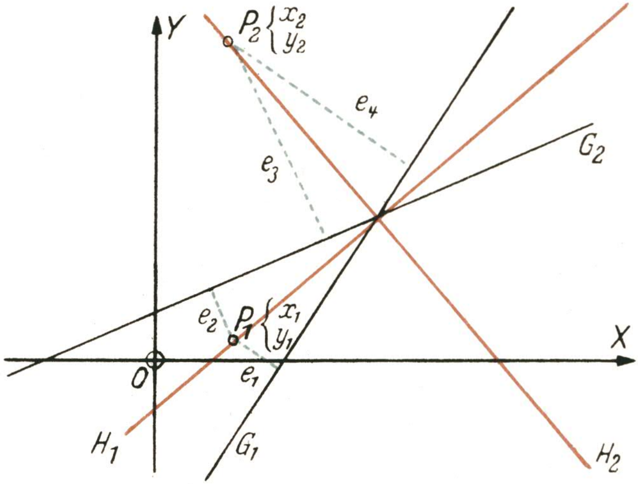
$m(7m - 24) = 0$:

$m_1 = 0$: $t_1 = 3$; eingesetzt in die Gleichung der Geraden: $G_1 \equiv y = 3$.

$7m - 24 = 0$: $m_2 = \frac{24}{7}$; $t_2 = \frac{45}{7}$: eingesetzt in die Gleichung der Geraden:

$G_2 \equiv 24x - 7y + 45 = 0.$

Halbierungslinien der Winkel, welche zwei Gerade miteinander bilden.



$G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$; $G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Die Winkelhalbierende zweier Geraden ist der geometrische Ort aller Punkte, die von beiden Geraden gleiche Abstände haben.

Um die Abstände zu erhalten, führt man die Geradengleichungen in die Hessesche Normalform über.

$$N_1 \equiv \frac{-a_1 x - b_1 y - c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 0 \qquad N_2 \equiv \frac{-a_2 x - b_2 y - c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$$

Für einen Punkt $P_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ gilt: $-e_1 = -e_2$ (P_1 und O liegen auf gleichen Seiten der Geraden G_1 und G_2)

$$\frac{-a_1 x_1 - b_1 y_1 - c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{-a_2 x_1 - b_2 y_1 - c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$N_1 = N_2 \text{ oder } \underline{H_1 \equiv N_1 - N_2 = 0.}$$

Für einen Punkt $P_2 \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$ gilt: $e_3 = -e_4$ (P_2 und O liegen auf verschiedenen Seiten von G_2, aber auf der gleichen Seite von G_1)

$$\frac{-a_1 x_2 - b_1 y_2 - c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{-a_2 x_2 - b_2 y_2 - c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$N_1 = -N_2 \text{ oder } \underline{H_2 \equiv N_1 + N_2 = 0.}$$

Regel: Um die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier gegebener Geraden aufzustellen, führt man beide Gleichungen in die Normalform über; dann ist:

$H_1 \equiv N_1 - N_2 = 0$ (für den Winkelraum, in dem der Ursprung liegt).
$H_2 \equiv N_1 + N_2 = 0$ (für den Winkelraum, in dem der Ursprung <u>nicht</u> liegt).

Beispiel: Wie lauten die Gleichungen der Halbierungslinien des Winkels der beiden Geraden $G_1 \equiv 3x - 4y + 12 = 0$ und $G_2 \equiv 5x + 12y - 60 = 0$? Beweise, daß die Winkelhalbierenden aufeinander senkrecht stehen!

$$N_1 \equiv \frac{-3x + 4y - 12}{5} = 0; \qquad N_2 \equiv \frac{5x + 12y - 60}{13} = 0.$$

$$H_1 \equiv \frac{-3x + 4y - 12}{5} - \frac{5x + 12y - 60}{13} = 0 \mid \cdot 65$$

$$-39x + 52y - 156 - 25x - 60y + 300 = 0; \quad -64x - 8y + 144 = 0.$$

$$H_1 \equiv 8x + y - 18 = 0.$$

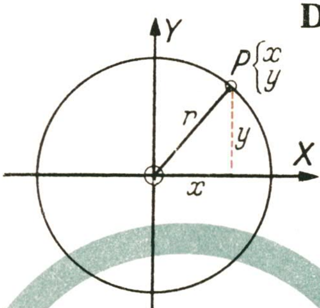
$$H_2 \equiv \frac{-3x + 4y - 12}{5} + \frac{5x + 12y - 60}{13} = 0 \mid \cdot 65$$

$$-39x + 52y - 156 + 25x + 60y - 300 = 0; \quad -14x + 112y - 456 = 0$$

$$H_2 \equiv 7x - 56y + 228 = 0.$$

$m_{H_1} = -8$; $m_{H_2} = \frac{1}{8}$; folglich: $H_1 \perp H_2$.

Der Kreis.



Der Mittelpunkt M liegt im Ursprung:

Für jeden Punkt $P\begin{cases}x\\y\end{cases}$, der auf dem Kreise mit Radius r liegt, gilt nach Pythagoras: $r^2 = x^2 + y^2$

$$\boxed{K \equiv x^2 + y^2 = r^2.}$$

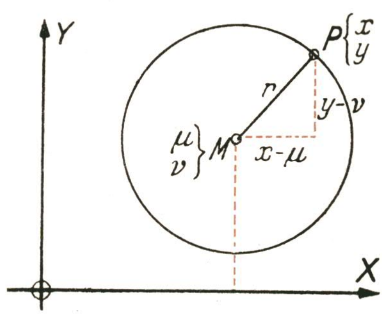
Mittelpunktsgleichung.

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten

$M\begin{cases}\mu\\\nu\end{cases}$: Auch hier gilt für jeden Punkt $P\begin{cases}x\\y\end{cases}$, der auf dem Kreise liegt, der Satz des Pythagoras:

$$\boxed{K \equiv (x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 = r^2}$$

Normalgleichung.



Merke: $\mu = r$, wenn der Kreis die Y-Achse berührt.
$\nu = r$, wenn der Kreis die X-Achse berührt.
$\mu = \nu = r$, wenn der Kreis beide Achsen berührt.

1. **Beispiel:** Man bestimme die Gleichung eines Kreises,

1. der durch den Punkt $P\begin{cases}-8\\-11\end{cases}$ geht u. die Y-Achse im Punkt $Q\begin{cases}0\\-7\end{cases}$ berührt;

2. der durch den Punkt $A\begin{cases}1\\2\end{cases}$ geht und beide Koordinatenachsen berührt.

Zu 1. Bedingung: $\mu = r$; außerdem muß $\nu = -7$ sein! Die gesuchte Kreisgleichung hat die Form: $(x-\mu)^2 + (y-\nu)^2 = r^2$: eingesetzt $x = -8$ u. $y = -11$ (P ist ein Punkt der Kurve!)

$$(-8-\mu)^2 + (-11+7)^2 = \mu^2;\quad 64 + 16\mu + \mu^2 + 16 = \mu^2$$

$$16\mu = -80;\quad \mu = -5. \qquad K \equiv (x+5)^2 + (y+7)^2 = 25.$$

Zu 2. Bedingung: $\mu = \nu = r$! A als Kurvenpunkt muß der Kreisgl. genügen:

$$(1-\mu)^2 + (2-\mu)^2 = \mu^2;\ 1 - 2\mu + \mu^2 + 4 - 4\mu + \mu^2 = \mu^2;\ \mu^2 - 6\mu + 5 = 0;$$

$$\mu_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2};\ \mu_1 = 5;\ \mu_2 = 1;\ \text{daher:}$$

$$K_1 \equiv (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \qquad K_2 \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

2. **Beispiel:** Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte $P_1\begin{cases}-10\\6\end{cases}$, $P_2\begin{cases}4\\-8\end{cases}$ und $P_3\begin{cases}2\\-10\end{cases}$ geht?

P_1, P_2 und P_3 sind Kurvenpunkte; ihre Koordinaten, in die Kreisgleichung eingesetzt, müssen die Gleichung erfüllen:

$$\text{I. } (-10-\mu)^2 + (6-\nu)^2 = r^2; \quad 100 + 20\mu + \mu^2 + 36 - 12\nu + \nu^2 = r^2$$
$$\text{II. } (4-\mu)^2 + (-8-\nu)^2 = r^2; \quad 16 - 8\mu + \mu^2 + 64 + 16\nu + \nu^2 = r^2$$
$$\text{III. } (2-\mu)^2 + (-10-\nu)^2 = r^2; \quad 4 - 4\mu + \mu^2 + 100 + 20\nu + \nu^2 = r^2$$

$$\text{I.}-\text{II.}\quad 56 + 28\mu - 28\nu = 0;\ |: 28; \qquad 2 + \mu - \nu = 0$$
$$\text{II.}-\text{III.}\quad -24 - 4\mu - 4\nu = 0;\ |: 4; \qquad -6 - \mu - \nu = 0$$
$$-4 \qquad -2\nu = 0;\ \nu = -2;\ \mu = -4.$$

Aus II. $r^2 = (4+4)^2 + (-8+2)^2 = 64 + 36 = 100$; also:

$$K \equiv (x+4)^2 + (y+2)^2 = 100.$$

3. **Beispiel:** Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch den Ursprung und den Punkt $P\begin{cases}2\\-2\end{cases}$ geht, wenn sein Mittelpunkt auf der Geraden $G \equiv x - 3 = 0$ liegen soll?

Zur Berechnung der Unbekannten μ, ν und r können durch die Kurvenpunkte $0\begin{cases}0\\0\end{cases}$ und $P\begin{cases}2\\-2\end{cases}$ zwei Bestimmungsgleichungen aufgestellt werden. Da ferner der Mittelpunkt $M\begin{cases}\mu\\\nu\end{cases}$ auf der Geraden liegen soll, müssen die Koordinaten des Mittelpunktes in die Geradengleichung eingesetzt, diese erfüllen. (3. Best.-Gl.)

$$\begin{array}{ll} \text{I. } (0-\mu)^2 + (0-\nu)^2 = r^2; & \text{I}': 9 + \nu^2 = r^2 \\ \text{II. } (2-\mu)^2 + (-2-\nu)^2 = r^2; & \text{II}': 1 + 4 + 4\nu + \nu^2 = r^2 \\ \text{III. } \mu - 3 = 0; \text{ daher } \mu = 3. & \text{I}'-\text{II}': 4 - 4\nu = 0; \nu = 1. \end{array}$$

Aus I': $r^2 = 10$; daher:

$$K \equiv (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10.$$

Anmerkung: Es empfiehlt sich, bei allen Aufgaben der analytischen Geometrie eine Zeichnung anzufertigen!

Ueberführung der allgemeinen Kreisgleichung in die Normalform.

Eine Gleichung II. Grades stellt einen Kreis dar, wenn die Koeffizienten von x^2 und y^2 gleich sind und das Glied mit xy fehlt. Diese Gleichung hat die Form: $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.

Regel:

Soll die allgemeine Kreisgleichung in die Normalform übergeführt werden, so faßt man einerseits die Glieder mit x^2 und x, andererseits die Glieder mit y^2 und y zusammen und ergänzt jeweils zum Quadrat.

Beispiel: Welche Mittelpunktskoordinaten und welchen Radius haben folgende Kreise?

1. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$; 2. $4x^2 + 4y^2 - 28y = 51$.

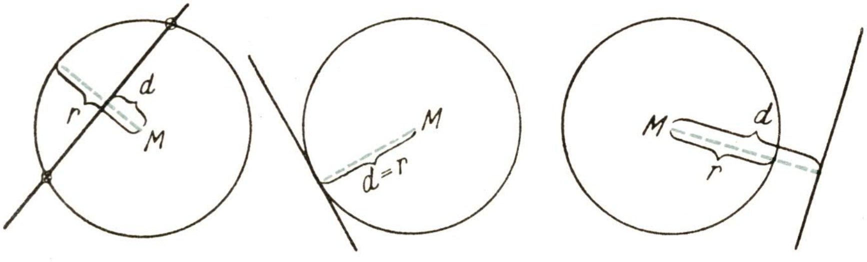
Zu 1. $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = -13 + 25 + 4$;

$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 16$; $\mu = 5$, $\nu = -2$, $r = 4$.

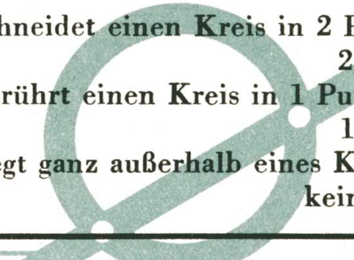
Zu 2. $x^2 + y^2 - 7y = \frac{51}{4}$; $x^2 + y^2 - 7y + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{51}{4} + \left(\frac{7}{2}\right)^2$;

$x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = 25$; $\mu = 0$, $\nu = \frac{7}{2}$, $r = 5$.

Kreis und Gerade.



1. **Eine Gerade schneidet einen Kreis in 2 Punkten:**
2 Lösungen $d < r$.
2. **Eine Gerade berührt einen Kreis in 1 Punkt:**
1 Lösung $d = r$.
3. **Eine Gerade liegt ganz außerhalb eines Kreises:**
keine Lösung $d > r$.



Beispiel: Welche Lage hat der Kreis K zur Geraden G?

1. $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$; $G_1 \equiv 3x - y - 6 = 0$.
2. $K_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$; $G_2 \equiv 3x + 4y + 35 = 0$.
3. $K_3 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$; $G_3 \equiv 2x - y - 6 = 0$.

Löst man die Kreisgleichung und die Geradengleichung nach x und y auf, so erhält man die Koordinaten der Schnittpunkte:

Zu 1. Aus G_1: $y = 3x - 6$; in K_1: $x^2 + (3x-6)^2 - 2x - 4(3x-6) - 20 = 0$;
$x^2 + 9x^2 - 36x + 36 - 2x - 12x + 24 - 20 = 0$; $10x^2 - 50x + 40 = 0$;
$x^2 - 5x + 4 = 0$; $x_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$;
$x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $y_1 = 6$; $y_2 = -3$.
Die Gerade schneidet den Kreis in den Punkten $P_1\left\{\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right.$ und $P_2\left\{\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}\right.$.
Beweis: $K_1 \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$; $M_1\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$; $r = 5$.

$$N_1 \equiv \frac{3x - y - 6}{\sqrt{10}} = 0;\ d = \frac{3\cdot 1 - 2 - 6}{\sqrt{10}} = -\frac{5\sqrt{10}}{10} = (-)\frac{1}{2}\sqrt{10} = 1{,}6;\ \text{also } d < r.$$

Zu 2. Aus G_2: $x = \frac{-4y - 35}{3}$; in K_2: $\left(\frac{-4y-35}{3}\right)^2 + y^2 + \frac{4}{3}(-4y - 35) + 2y - 20 = 0$; $|\cdot 9$; $16y^2 + 280y + 1225 + 9y^2 - 48y - 420 + 18y - 180 = 0$;
$25y^2 + 250y + 625 = 0$; $y^2 + 10y + 25 = 0$; $y_{1;2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-100}}{2} = -5$;
$x_{1;2} = -5$.
Die Gerade berührt den Kreis im Punkte $P\left\{\begin{matrix}-5\\-5\end{matrix}\right.$.
Beweis: $K_2 \equiv (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$; $M_2\left\{\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}\right.$; $r = 5$.

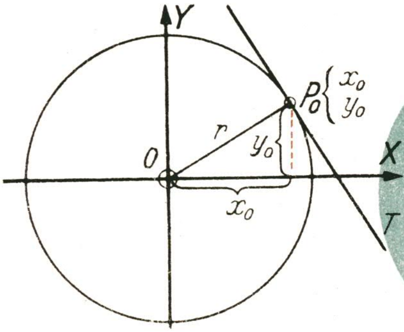
$$N_2 \equiv \frac{-3x - 4y - 35}{5} = 0;\ d = \frac{(-3)(-2) - 4(-1) - 35}{5} = (-)5;\ \text{also } d = r.$$

Zu 3. Aus G_3: $y = 2x - 6$; in K_3: $x^2 + (2x-6)^2 + 2x - 4(2x-6) + 1 = 0$;
$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 + 2x - 8x + 24 + 1 = 0$; $5x^2 - 30x + 61 = 0$.
$x_{1;2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 1220}}{10} = \frac{30 \pm \sqrt{-320}}{10}$; da der Wurzelwert eine imaginäre Größe ist, gibt es keine brauchbare Lösung.
Die Gerade liegt ganz außerhalb des Kreises.
Beweis: $K \equiv (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$; $M\left\{\begin{matrix}-1\\+2\end{matrix}\right.$; $r = 2$.

$$N_3 \equiv \frac{2x - y - 6}{\sqrt{5}} = 0;\ d = \frac{2(-1) - 2 - 6}{\sqrt{5}} = -\frac{10}{\sqrt{5}} = (-)2\sqrt{5};\ \text{also } d > r.$$

Tangente an den Kreis.

Der Kreismittelpunkt liegt im Ursprung:



$OP_0 \equiv y = mx;\ y_0 = mx_0;\ m = \frac{y_0}{x_0}.$

Da $T \perp OP_0$, ist der Richtungsfaktor der Tangente $m_T = -\frac{x_0}{y_0}.$

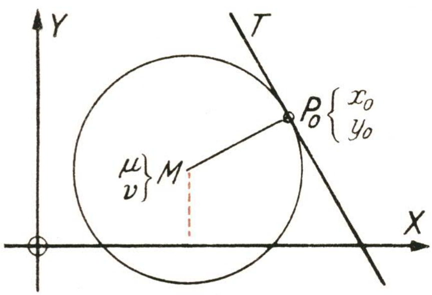
Nun gilt: $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0);$

$x_0 x + y_0 y = \underbrace{x_0^2 + y_0^2}_{r^2}$

$$\boxed{T_K \equiv x_0 x + y_0 y = r^2}$$

Gleichung der Tangente im Berührungspunkt $P_0\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$

Der Kreismittelpunkt hat allgemeine Lage:



Der Richtungsfaktor von MP_0 ist $\frac{y_0 - \nu}{x_0 - \mu}$; da der Kreisradius senkrecht auf der Tangente im Punkt $P_0\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ steht, ist $m_T = -\frac{x_0 - \mu}{y_0 - \nu}$

Da die Tangente außerdem durch P_0 geht, hat sie die Gleichung:

$$T_K \equiv \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{x_0 - \mu}{y_0 - \nu}$$

oder $(x_0 - \mu) \cdot (x - x_0) + (y_0 - \nu) \cdot (y - y_0) = 0.$

Addiert man zu dieser Gleichung die Kreisgleichung für P_0

$(x_0 - \mu)^2 + (y_0 - \nu)^2 = r^2$, so erhält man

$$(x_0 - \mu) \cdot (x - x_0 + x_0 - \mu) + (y_0 - \nu)(y - y_0 + y_0 - \nu) = r^2.$$

Damit ist die **Gleichung der Tangente im Punkte** P_0 an den Kreis auf die übliche Form gebracht:

$$\boxed{T_K \equiv (x_0 - \mu)(x - \mu) + (y_0 - \nu)(y - \nu) = r^2}$$

Jede Gerade, welche im Berührungspunkt P_0 einer Tangente T auf dieser senkrecht steht, heißt **Normale** der Kurve im Punkt P_0.

Beispiel: An den Kreis $K \equiv x^2 + y^2 + 16x - 4y + 43 = 0$ sollen in den Punkten mit der Abszisse $x_1 = -5$ die Tangenten gezogen werden. Wie lauten ihre Gleichungen?

$K \equiv (x+8)^2 + (y-2)^2 = 25; \quad M \begin{cases} \mu = -8 \\ \nu = 2 \end{cases}; \quad r^2 = 25.$

$x_1 = -5$, in die Kreisgleichung eingesetzt: $9 + (y-2)^2 = 25;$
$(y-2)^2 = 16; \quad y - 2 = \pm 4; \quad y_1 = 6; \quad y_2 = -2.$

Die Berührungspunkte sind $P_{0_1} \begin{cases} -5 \\ 6 \end{cases}$ und $P_{0_2} \begin{cases} -5 \\ -2 \end{cases}$.

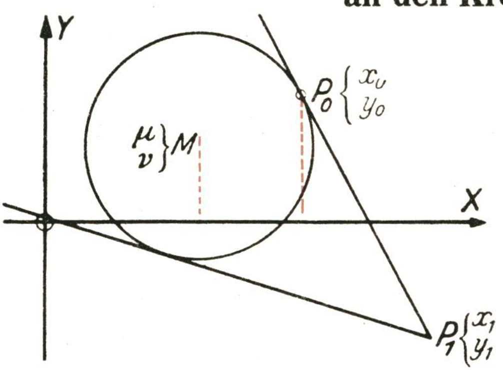
$m_{MP_{0_1}} = \frac{6-2}{-5+8} = \frac{4}{3}; \quad m_{T_1} = -\frac{3}{4}.$

$T_1: y - 6 = -\frac{3}{4}(x+5); \quad 4y - 24 = -3x - 15; \quad T_1 \equiv 3x + 4y - 9 = 0.$

Nach der Formel gilt für T_2:

$(-5+8)(x+8) + (-2-2)(y-2) = 25; \quad 3x + 24 - 4y + 8 = 25;$
$T_2 \equiv 3x - 4y + 7 = 0.$

Tangenten von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis.



Der Berührungspunkt P_0 habe die Koordinaten x_0 und y_0. Um diese zu berechnen, setzt man in die **Tangentengleichung** für x und y die Koordinaten x_1 und y_1 des Punktes P_1 ein (P_1 ist ein Punkt der Tangente und muß der Tangentengleichung genügen).

Damit erhält man die I. Bestimmungsgleichung für x_0 und y_0.

Da $P_0 \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ auch auf dem Kreis liegt, müssen seine Koordinaten x_0 und y_0 in die **Kreisgleichung** eingesetzt, diese ebenfalls erfüllen. (II. Best.-Gl.)

> Beide Bestimmungsgleichungen nach x_0 und y_0 aufgelöst, liefern die Koordinaten des Berührungspunktes, die, in die allgemeine Tangentengleichung eingesetzt, zur Ermittlung der Gleichung der gesuchten Tangente führen.

Beispiel: Stelle die Gleichungen der Tangenten auf, die man vom Punkt $P\begin{cases}-4\\6\end{cases}$ an den Kreis $K \equiv 5x^2 + 5y^2 - 20x - 60y + 164 = 0$ ziehen kann!

$K \equiv x^2 + y^2 - 4x - 12y = -\frac{164}{5}$; $K \equiv (x-2)^2 + (y-6)^2 = \frac{36}{5}$;

$M\begin{cases}2\\6\end{cases}$; $r^2 = \frac{36}{5}$.

I. $(x_0 - 2)(-4-2) + (y_0 - 6)(6-6) = \frac{36}{5}$

II. $x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 12y_0 = -\frac{164}{5}$.

Aus I.: $-6x_0 + 12 = \frac{36}{5}$; $x_0 = \frac{4}{5}$; in II.: $\frac{16}{25} + y_0^2 - \frac{16}{5} - 12y_0 = -\frac{164}{5} \,|\cdot 25$

$16 + 25y_0^2 - 80 - 300y_0 + 820 = 0$;

$25y_0^2 - 300y_0 + 756 = 0$; $y_0 = \frac{300 \pm \sqrt{90000 - 75600}}{50} = \frac{300 \pm 120}{50}$;

$y_{0_1} = \frac{42}{5}$; $y_{0_2} = \frac{18}{5}$.

Die Berührungspunkte sind daher $P_{0_1}\begin{cases}\frac{4}{5}\\\frac{42}{5}\end{cases}$ und $P_{0_2}\begin{cases}\frac{4}{5}\\\frac{18}{5}\end{cases}$ eingesetzt in die Tangentengleichung

T_1: $\left(\frac{4}{5} - 2\right)(x-2) + \left(\frac{42}{5} - 6\right)(y-6) = \frac{36}{5}$; $T_1 \equiv x - 2y + 16 = 0$.

T_2: $\left(\frac{4}{5} - 2\right)(x-2) + \left(\frac{18}{5} - 6\right)(y-6) = \frac{36}{5}$; $T_2 \equiv x + 2y - 8 = 0$.

Tangenten an den Kreis parallel oder senkrecht zu einer Geraden.

I. Ist die Tangente parallel zur gegebenen Geraden, dann ist $m_T = m_G$. Ist die Tangente senkrecht zur gegebenen Geraden, dann ist

$$m_T = -\frac{1}{m_G}.$$

Um m_T zu erhalten, löst man die **allgemeine Tangentengleichung** nach y auf; **für den Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung** ergibt sich aus: $x_0 x + y_0 y = r^2$: $y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{r^2}{y_0}$; $\boxed{m_T = -\frac{x_0}{y_0}}$

Für den Kreis in beliebiger Lage: $(x_0 - \mu)(x - \mu) + (y_0 - \nu)(y - \nu) = r^2$ ist nach algebraischer Umformung: $\boxed{m_T = -\frac{x_0 - \mu}{y_0 - \nu}}$ (Vgl. S. 25)

II. Da $P_0\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$ als Berührungs- und Kreispunkt der Kreisgleichung genügen muß, setzt man die aus I. errechnete Unbekannte x_0 oder y_0 in die **Kreisgleichung** für x und y ein und erhält damit die Koordinaten des Berührungspunktes P_0.

Beispiel: An den Kreis $K \equiv x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$ sind Tangenten parallel zur Geraden $G \equiv 5x - 12y + 8 = 0$ zu ziehen. Wie lauten ihre Gleichungen?

Bedingung: $m_T = m_G$! Da $m_T = -\dfrac{x_0 - \mu}{y_0 - \nu}$ und $m_G = \dfrac{5}{12}$ ist, muß sein:

$$\text{I.}\quad -\frac{x_0 - \mu}{y_0 - \nu} = \frac{5}{12}$$

$$\text{II.}\quad (x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 9;\quad \mu = -4;\ \nu = 5$$

$$\text{I.}'\quad -\frac{x_0 + 4}{y_0 - 5} = \frac{5}{12};\quad -12x_0 - 48 = 5y_0 - 25;\quad y_0 = \frac{-12x_0 - 23}{5}\ \text{in Kreisgl.}$$

$$x_0^2 + \left(\frac{-12x_0 - 23}{5}\right)^2 + 8x_0 - 2(-12x_0 - 23) + 32 = 0\quad |\cdot 25$$

$$25x_0^2 + 144x_0^2 + 552x_0 + 529 + 200x_0 + 600x_0 + 1150 + 800 = 0$$

$$169x_0^2 + 1352x_0 + 2479 = 0;\quad x_0 = \frac{-1352 \pm \sqrt{1827904 - 1675804}}{338} =$$

$$= \frac{-1352 \pm 390}{338};$$

$$x_{0_1} = -\frac{37}{13} \qquad x_{0_2} = -\frac{67}{13}.$$

$$\text{Aus I.}':\ y_{0_1} = \frac{29}{13} \qquad y_{0_2} = \frac{101}{13}.$$

$$T_1: \left(-\frac{37}{13} + 4\right)(x + 4) + \left(\frac{29}{13} - 5\right)(y - 5) = 9;\quad T_1 \equiv 5x - 12y + 41 = 0.$$

$$T_2: \left(-\frac{67}{13} + 4\right)(x + 4) + \left(\frac{101}{13} - 5\right)(y - 5) = 9;\quad T_2 \equiv 5x - 12y + 119 = 0.$$

Zwei Kreise.

Um die Schnittpunkte zweier Kreise zu erhalten, löst man beide Kreisgleichungen nach x und y auf.
Unter dem Winkel, den zwei Kreise miteinander bilden, versteht man den Winkel, den die Tangenten an die Kreise in einem Schnittpunkt bilden.

Beispiel: Bestimme die gemeinsamen Punkte der Kreise $K_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ und $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y - 60 = 0$! Welchen Winkel bildet die gemeinsame Sekante mit der Zentralen?

$$\text{I.}\quad x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$
$$\text{II.}\quad x^2 + y^2 - 4x + 2y = 60$$

$$\text{I.} - \text{II.} = \text{III.}\ 10x - 10y = -60;\ |:10 \qquad x - y = -6;\ x = y - 6;\ \text{in I.}$$

$$(y - 6)^2 + y^2 + 6(y - 6) - 8y = 0;\ y^2 - 12y + 36 + y^2 + 6y - 36 - 8y = 0;$$

$$2y^2 - 14y = 0;\ y^2 - 7y = 0;\quad y_1 = 0;\quad y_2 = 7.$$

$$\text{Aus III.}:\ x_1 = -6;\ x_2 = 1.$$

K_1 und K_2 haben die Punkte $P_1\left\{\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right.$ und $P_2\left\{\begin{matrix}1\\7\end{matrix}\right.$ gemeinsam.

Der Richtungsfaktor der Sekante durch P_1 und P_2 ist $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$m_{P_1P_2} = \frac{7-0}{1+6} = 1.$

$K_1 \equiv (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$; der Mittelpunkt M_1 hat die Koordinaten $\mu_1 = -3;\ y_1 = 4.$

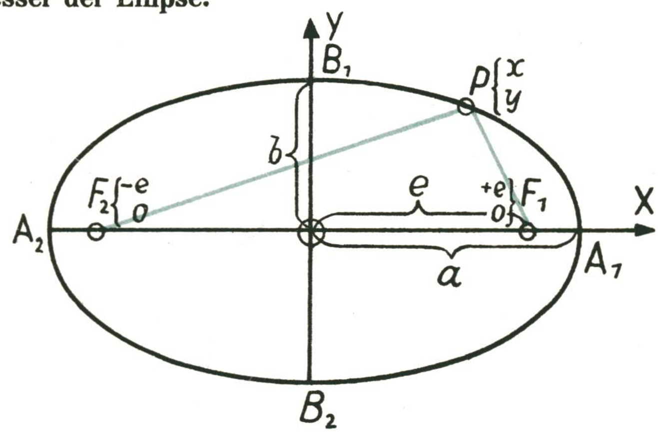
$K_2 \equiv (x-2)^2 + (y+1)^2 = 65$; der Mittelpunkt M_2 hat die Koordinaten $\mu_2 = 2;\ \nu_2 = -1.$

Der Richtungsfaktor der Zentralen $M_1\,M_2$ ist $= \frac{-1-4}{2+3} = -1.$

Sekante und Zentrale bilden einen Winkel von 90^0

Die Ellipse.

Eine Ellipse ist eine Kurve von der Art, daß für jeden ihrer Punkte die Summe der Abstände von 2 festen Punkten — den Brennpunkten F_1 und F_2 — konstant ist, und zwar gleich ist dem großen Durchmesser der Ellipse.



$OA_1 = OA_2 = a =$ große Halbachse; $OB_1 = OB_2 = b =$ kleine Halbachse; $OF_1 = OF_2 = e =$ lineare Exzentrizität.

Die Brennpunkte F_1 und F_2 erhält man als Schnittpunkte des Kreises um B_1 oder B_2 mit Radius a auf der großen Achse; es gilt: $a^2 = b^2 + e^2$ oder $\boxed{e^2 = a^2 - b^2}$

Ferner ist der Definition der Ellipse zufolge: $PF_1 + PF_2 = 2a.$ Aus dieser Bedingung leitet sich die Ellipsengleichung ab. Da $PF_1 = \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2}$ und $PF_2 = \sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2}$ ist, gilt:

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a; \text{ quadriert:}$$

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2;$$

$$4a\sqrt{x^2+2ex+e^2+y^2}=4a^2+4ex \,|: 4 \text{ und quadriert:}$$

$$a^2x^2+2a^2ex+a^2e^2+a^2y^2=a^4+2a^2ex+e^2x^2;$$

$$x^2(a^2-e^2)+a^2y^2=a^2(a^2-e^2),\quad a^2-e^2=b^2 \text{ gesetzt:}$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \;|: a^2b^2$$

$$\boxed{E\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$ **Mittelpunktsgleichung**

Errichtet man im Brennpunkt F_1 mit der Abszisse $x_1=e$ die Senkrechte, so ergibt sich für den Ellipsenpunkt als zugehörige Ordinate y_1:

$$\frac{e^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1;\; b^2e^2+a^2{y_1}^2=a^2b^2;\; a^2{y_1}^2=a^2b^2-b^2e^2=b^2(a^2-e^2)$$

$${y_1}^2=\frac{b^4}{a^2};\qquad y_1=\pm\frac{b^2}{a}.$$

Die halbe Sehne der Ellipse, die im Brennpunkt senkrecht zur großen Achse steht, heißt **Halbparameter** p.

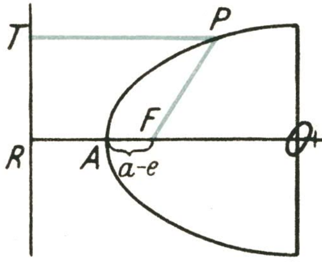
$$\boxed{p=\frac{b^2}{a}}$$

Zweite Eigenschaft der Ellipse:

Die Ellipse ist eine Kurve von der Art, daß für sämtliche Punkte das Abstandsverhältnis von einem festen Punkt F — dem Brennpunkt — und einer festen Geraden D — der Direktrix oder Leitlinie — konstant und kleiner als 1 ist. ($\varepsilon<1$.)

$PF : PT = AF : AR = \varepsilon$ **(numerische Exzentrizität)**

Die große Achse der Ellipse wird durch den Brennpunkt und die zugehörige Direktrix harmonisch geteilt.



$AF : AR = A'F : A'R$ oder $(a-e):(0R-a)=$
$=(a+e):(0R+a)$

$$(a+e)\cdot(0R-a)=(a-e)(0R+a)$$

$$a\cdot 0R-a^2+e\cdot 0R-ae=$$
$$=a\cdot 0R-e\cdot 0R+a^2-ae$$

$$2e\cdot 0R=2a^2;\quad 0R=\frac{a^2}{e}$$

$$\varepsilon=\frac{AF}{AR}=\frac{a-e}{0R-a}=\frac{a-e}{\frac{a^2}{e}-a}=\frac{e}{a};\qquad \boxed{\varepsilon=\frac{e}{a}}$$

Gleichung der Direktrix: $$\boxed{\begin{aligned} D_1 &\equiv x - \frac{a^2}{e} = 0 \\ D_2 &\equiv x + \frac{a^2}{e} = 0 \end{aligned}}$$

Sind die Ellipsenachsen parallel zu den Koordinatenachsen und hat der Mittelpunkt M die Koordinaten μ und ν, so ist:

$$\boxed{E \equiv \frac{(x-\mu)^2}{a^2} + \frac{(y-\nu)^2}{b^2} = 1}$$ **Normalgleichung.**

Ueberführung der allgemeinen Ellipsengleichung in die Normalform.

Eine Gleichung II. Grades stellt eine Ellipse, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen laufen, dar, wenn die Koeffizienten von x^2 und y^2 **gleiches** Vorzeichen haben und das Glied mit xy fehlt. Diese Gleichung hat also die Form:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

Regel: Um die allgemeine Ellipsengleichung in die Normalform überzuführen, setzt man zunächst die Koeffizienten von x^2 und y^2 als Faktoren heraus und ergänzt dann wie beim Kreis in den Klammerausdrücken jeweils zum Quadrat.

Beispiel: Welche Mittelpunkts- und Brennpunktskoordinaten hat die Ellipse $E \equiv 25x^2 + 150x + 49y^2 - 196y - 804 = 0$? Welche Gleichung hat jede Direktrix?

$25(x^2 + 6x) + 49(y^2 - 4y) = 804$

$25(x+3)^2 + 49(y-2)^2 = 804 + 225 + 196 = 1225 \mid : 1225$

$$\frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt $M \begin{cases} \mu = -3 \\ \nu = 2 \end{cases}$ und den Halbachsen $a = 7$ und $b = 5$.

$e^2 = a^2 - b^2 = 49 - 25 = 24;\quad e = \sqrt{24} = 4{,}9.$

Daher sind die Koordinaten der Brennpunkte:

$F_1 \begin{cases} x_1 = \mu + e = -3 + 4{,}9 = 1{,}9 \\ y_1 = \nu \phantom{+ e = -3 + 4{,}9} = 2 \end{cases}$ und $F_2 \begin{cases} x_2 = \mu - e = -3 - 4{,}9 = -7{,}9 \\ y_2 = \nu \phantom{- e = -3 - 4{,}9} = 2 \end{cases}$

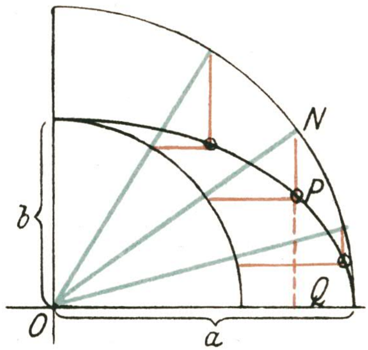
Der Abstand der Leitlinie vom Mittelpunkt beträgt $x_0 = \dfrac{a^2}{e} = \dfrac{49}{4{,}9} = 10.$

Für die Direktrix

D_1 ist $x_1 = \mu + x_0 = -3 + 10 = 7$; daher $D_1 \equiv x - 7 = 0$:

D_2 ist $x_2 = \mu - x_0 = -3 - 10 = -13$; daher $D_2 \equiv x + 13 = 0$.

Konstruktion der Ellipse aus den Halbachsen a und b:



Man beschreibt um den Mittelpunkt M konzentrische Kreise mit a und b als Radien und zieht durch den Mittelpunkt Strahlen, die beide Kreise schneiden. Die Parallelen durch die Schnittpunkte mit dem kleinen Kreis zur X-Achse und die Parallelen durch die Schnittpunkte mit dem großen Kreis zur Y-Achse schneiden sich jeweils in einem Kurvenpunkt der Ellipse.

Der Beweis für die Konstruktion folgt aus der Beziehung $PQ : NQ = b : a$, die sich für den Ellipsenpunkt P aus der Mittelpunktsgleichung und aus $\overline{QN}^2 = a^2 - \overline{OQ}^2$ ableiten läßt.

Ellipse und Gerade.

Um die Lage einer Geraden zu einer Ellipse zu bestimmen, löst man die Gleichungen der Geraden und der Ellipse nach x und y auf. (Siehe auch „Kreis und Gerade", Seite 24!).

Beispiel: Welche Lage hat die Gerade G zur Ellipse E?

1. $G_1 \equiv 7x - 2y + 16 = 0;\quad E_1 \equiv x^2 + 4y^2 + 2x + 4y - 2 = 0.$
2. $G_2 \equiv 3x + 8y + 50 = 0;\quad E_2 \equiv \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$

Zu 1. $y = \frac{7x + 16}{2}$ in E_1: $x^2 + 49x^2 + 224x + 256 + 2x + 14x + 32 - 2 = 0$;

$50x^2 + 240x + 286 = 0;\ |:2;\quad 25x^2 + 120x + 143 = 0$:

$$x_{1;2} = \frac{-120 \pm \sqrt{14400 - 14300}}{50} = \frac{-120 \pm 10}{50};$$

$$x_1 = \frac{-110}{50} = -2{,}2;\quad x_2 = -\frac{130}{50} = -2{,}6$$

$$y_1 = \frac{-15{,}4 + 16}{2} = 0{,}3;\quad y_2 = \frac{-18{,}2 + 16}{2} = -1{,}1$$

Die Gerade schneidet die Ellipse in den Punkten $P_1 \begin{cases} -2{,}2 \\ 0{,}3 \end{cases}$ und $P_2 \begin{cases} -2{,}6 \\ -1{,}1 \end{cases}$.

Zu 2. $x = \frac{-50 - 8y}{3}$ in $E_2 \equiv x^2 + 4y^2 = 100$: $\left(\frac{-50 - 8y}{3}\right)^2 + 4y^2 = 100\ |\cdot 9$

$2500 + 800y + 64y^2 + 36y^2 = 900;\quad 100y^2 + 800y + 1600 = 0\ |: 100$:

$y^2 + 8y + 16 = 0;\quad y_{1;2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$: $x_{1;2} = -6$.

Die Gerade berührt die Ellipse im Punkte $P \begin{cases} -6 \\ -4 \end{cases}$, ist also Tangente an die Ellipse.

Tangente an die Ellipse:

a) **Der Ellipsenmittelpunkt liegt im Ursprung:**

$$\boxed{T_E \equiv \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Gleichung der Tangente im Berührungspunkt $P_0 \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$.

b) **Der Ellipsenmittelpunkt hat die Koordinaten** μ **und** ν**:**

$$\boxed{T_E \equiv \frac{(x_0 - \mu)(x - \mu)}{a^2} + \frac{(y_0 - \nu)(y - \nu)}{b^2} = 1}$$

Beispiel: Für die Punkte, deren Abszissen $x_0 = -1^4/_5$ sind, sollen die Gleichungen der Tangenten an die Ellipse $E \equiv 25x^2 + 64y^2 - 150x - 256y - 1119 = 0$ aufgestellt werden.

$25(x^2 - 6x) + 64(y^2 - 4y) = 1119$

$25(x - 3)^2 + 64(y - 2)^2 = 1119 + 225 + 256 = 1600\,]: 1600$

$\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$

Der Ellipsenmittelpunkt hat die Koordinaten $\mu = 3$ und $\nu = 2$; die Halbachsen sind $a = 8$ und $b = 5$.

$x_0 = -\frac{9}{5}$ in E: $81 + 64y^2 + 270 - 256y - 1119 = 0$

$64y^2 - 256y - 768 = 0\,|: 64$

$y^2 - 4y - 12 = 0;\; y_{0_{1,2}} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$

$y_{0_1} = 6 \quad y_{0_2} = -2.$

$$T_1: \frac{\left(-\frac{9}{5} - 3\right)(x - 3)}{64} + \frac{(6 - 2)(y - 2)}{25} = 1\;|\cdot 1600$$

$-120x + 360 + 256y - 512 = 1600;\quad 120x - 256y + 1752 = 0\,|: 8$

$T_1 \equiv 15x - 32y + 219 = 0.$

$$T_2: \frac{\left(-\frac{9}{5} - 3\right)(x - 3)}{64} + \frac{(-2 - 2)(y - 2)}{25} = 1\;|\cdot 1600$$

$-120x + 360 - 256y + 512 = 1600;\quad 120x + 256y + 728 = 0\,|: 8$

$T_2 \equiv 15x + 32y + 91 = 0.$

Tangenten von einem Punkt außerhalb der Ellipse an die Ellipse.

1. Der gegebene Punkt P_1 liegt auf der Tangente, muß also der Tangentengleichung genügen.
2. Der gesuchte Berührungspunkt P_0 liegt auf der Ellipse und muß der Ellipsengleichung genügen.

Daraus ergeben sich 2 Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der Koordinaten x_0 und y_0 des Berührungspunktes. (Siehe auch Seite 26: Tangenten von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis!)

Beispiel: Wie lauten die Gleichungen der Tangenten von dem Punkt $P_1 \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$ an die Ellipse $E \equiv x^2 + 2y^2 - 1 = 0$?

$$E \equiv \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

$x = 5$ und $y = -2$ in die Tang.-Gl. $T \equiv \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ eingesetzt;

I. $\frac{5x_0}{1} - \frac{2y_0}{\frac{1}{2}} = 1$; daraus $y_0 = \frac{5x_0 - 1}{4}$; in E eingesetzt:

II. $x_0^2 + 2 \cdot \left(\frac{5x_0 - 1}{4}\right)^2 - 1 = 0 \mid \cdot 8$;

$8x_0^2 + 25x_0^2 - 10x_0 + 1 - 8 = 0$; $33x_0^2 - 10x_0 - 7 = 0$;

$$x_{0_{1;2}} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 924}}{66} = \frac{10 \pm 32}{66}$$

$x_{0_1} = \frac{7}{11}$ und $x_{0_2} = -\frac{1}{3}$; in I. $y_{0_1} = \frac{6}{11}$ und $y_{0_2} = -\frac{2}{3}$.

T_1: $\frac{7}{11}x + \frac{6 \cdot 2y}{11} = 1$; $T_1 \equiv 7x + 12y - 11 = 0$,

T_2: $-\frac{1}{3}x - \frac{2 \cdot 2y}{3} = 1$; $T_2 \equiv x + 4y + 3 = 0$.

Tangenten an die Ellipse parallel oder senkrecht zu einer Geraden.

Entsprechend wie für den Kreis (Seite 27) ergibt sich für die **Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung** als Richtungsfaktor der Tangente: $\boxed{m_T = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}$

Für die **Ellipse in beliebiger Lage** ist:

$$\boxed{m_T = -\frac{b^2 (x_0 - \mu)}{a^2 (y_0 - \nu)}}$$

Beispiel: An die Ellipse $E \equiv x^2 + 3y^2 - 12 = 0$ sind Tangenten zu legen, die auf der Geraden $G \equiv x - y + 6 = 0$ senkrecht stehen.

$E \equiv \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$; $m_G = 1$; $m_T = -1$; allgemein ist $m_T = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$:

I. $-\frac{4x_0}{12y_0} = -1$; $x_0 = 3y_0$; in E eingesetzt:

II. $(3y_0)^2 + 3y_0^2 - 12 = 0$; $9y_0^2 + 3y_0^2 = 12$; $y_0^2 = 1$;

$y_{0_1} = 1$ und $y_{0_2} = -1$; in I. $x_{0_1} = 3$; $x_{0_2} = -3$.

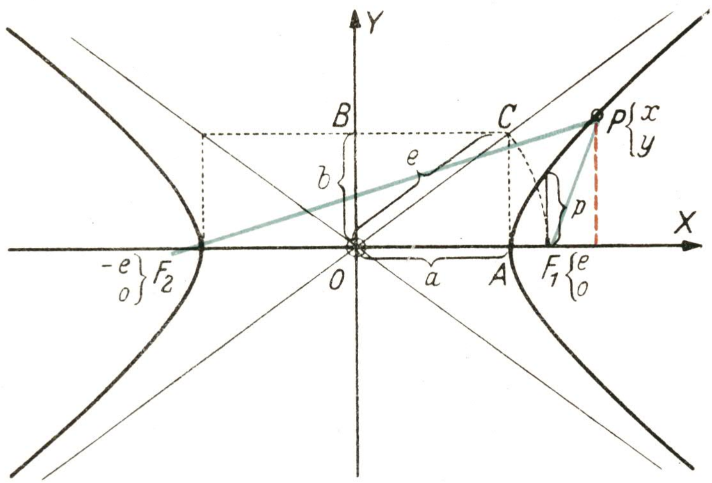
T_1: $\frac{3x}{12} + \frac{1 \cdot y}{4} = 1$; $T_1 \equiv x + y - 4 = 0$;

T_2: $\frac{-3x}{12} - \frac{1 \cdot y}{4} = 1$; $T_2 \equiv x + y + 4 = 0$.

Die Hyperbel.

Eine Hyperbel ist eine Kurve von der Art, daß für jeden ihrer Punkte die Differenz der Abstände von 2 festen Punkten — den Brennpunkten F_1 und F_2 — konstant ist, und zwar gleich ist der reellen Hyperbelachse.

$$\boxed{PF_2 - PF_1 = 2a}$$



$0A = a =$ reelle Halbachse der Hyperbel;
$0B = b =$ imaginäre Halbachse der Hyperbel;
$0F_1 = 0F_2 = e =$ lineare Exzentrizität.

Den Brennpunkt F_1 erhält man, wenn man die Diagonale $0C$ des von den Halbachsen gebildeten Rechteckes auf der reellen Halbachse von 0 aus abträgt; es ist:

$$\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$$

Analog der Ableitung für die Ellipse ergibt sich als Hyperbelgleichung:

$$\boxed{H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ **Mittelpunktsgleichung.**

Wie bei der Ellipse ergibt sich für den **Halbparameter:**

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

Der Strahl, der durch O geht und auf dem OC liegt, heißt **Asymptote;** es gibt deren zwei.

Da die Asymptote durch den Ursprung geht, hat sie die allgemeine Form: $y = mx$; $m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$; folglich lauten die **Gleichungen der Asymptoten:**

$$\boxed{A_1 \equiv y = \frac{b}{a}x \text{ und } A_2 \equiv y = -\frac{b}{a}x}$$

Zweite Eigenschaft der Hyperbel:

> Die Hyperbel ist eine Kurve von der Art, daß für deren sämtliche Punkte das Abstandsverhältnis von einem festen Punkt — dem Brennpunkt F — und einer festen Geraden — der Direktrix D — konstant und größer als 1 ist. ($\varepsilon > 1$.)

Die reelle Achse der Hyperbel wird durch den Brennpunkt und die dazugehörige Direktrix harmonisch geteilt.

Analog der Ellipse ergibt sich für die **numerische Exzentrizität** ε der Hyperbel:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$$

und für die

Gleichung der Direktrix: $\boxed{D_1 \equiv x - \frac{a^2}{e} = 0; \quad D_2 \equiv x + \frac{a^2}{e} = 0}$

Sind die Achsen der Hyperbel parallel zu den Koordinatenachsen und hat der Mittelpunkt M die Koordinaten μ und ν, so ist:

$$\boxed{H \equiv \frac{(x-\mu)^2}{a^2} - \frac{(y-\nu)^2}{b^2} = 1}$$

Normalgleichung.

Ueberführung der allgemeinen Hyperbelgleichung in die Normalform.

Eine Gleichung II. Grades stellt eine Hyperbel dar, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen laufen, wenn die Koeffizienten von x^2 und y^2 **entgegengesetzte** Vorzeichen haben und das Glied mit xy fehlt. Sie hat also die Form:

$$ax^2 - by^2 + cx + dy + e = 0.$$

Für die Rechnung gilt die im entsprechenden Kapitel über die Ellipse Seite 31 aufgestellte Regel.

Beispiel: Welche Mittelpunkts- und Brennpunktskoordinaten hat die Hyperbel: $H \equiv 100x^2 - 49y^2 - 392y - 1000x - 3184 = 0$? Welche Gleichung hat jede Direktrix? Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten?

$100(x^2 - 10x) - 49(y^2 + 8y) = 3184$

$100(x - 5)^2 - 49(y + 4)^2 = 3184 + 2500 - 784 = 4900 \mid : 4900$

$\dfrac{(x-5)^2}{49} - \dfrac{(y+4)^2}{100} = 1.$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M \begin{cases} \mu = 5 \\ \nu = -4, \end{cases}$ der reellen Halbachse $a = 7$ und der imaginären Halbachse $b = 10$.

$e^2 = a^2 + b^2 = 149;\ e = \sqrt{149} = 12{,}21.$

Daher sind die Koordinaten der Brennpunkte:

$F_1 \begin{cases} x_1 = \mu + e = 5 + 12{,}21 = 17{,}21 \\ y_1 = \nu \qquad\qquad\qquad\quad = -4 \end{cases}$ und $F_2 \begin{cases} x_2 = \mu - e = 5 - 12{,}21 = -7{,}21; \\ y_2 = \nu \qquad\qquad\qquad\quad = -4. \end{cases}$

Der Abstand der Direktrix vom Mittelpunkt beträgt $x_0 = \dfrac{a^2}{e} = \dfrac{49}{12{,}21} \approx 4.$

Für die Direktrix

D_1 ist $x_1 = \mu + x_0 = 5 + 4 = 9$; daher $D_1 \equiv x - 9 = 0.$

Für D_2 ist $x_2 = \mu - x_0 = 5 - 4 = 1$; „ $D_2 \equiv x - 1 = 0.$

Für die Asymptote I, die durch $M \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$ geht, ist $m_1 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{10}{7}$; somit lautet ihre Gleichung: $y + 4 = \dfrac{10}{7}(x - 5);\ 7y + 28 = 10x - 50$

$A_1 \equiv 10x - 7y - 78 = 0.$

Für die Asymptote II ist $m_2 = -\dfrac{10}{7}$; daher die Gleichung:

$y + 4 = -\dfrac{10}{7}(x - 5);\ 7y + 28 = -10x + 50;\ A_2 \equiv 10x + 7y - 22 = 0.$

Gleichseitige Hyperbel.

Eine Hyperbel, für die $a = b$ ist, heißt gleichseitig. Ihre Mittelpunktsgleichung hat die Form $\boxed{H \equiv x^2 - y^2 = a^2}$

Beispiel: Welche Mittelpunkts- und Brennpunktskoordinaten hat die Hyperbel: $H \equiv y^2 - x^2 - 8x - 12 = 0$? Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten?

$y^2 - (x + 4)^2 = 12 - 16 = -4 \mid : (-4)$

$\dfrac{(x+4)^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ oder: $(x + 4)^2 - y^2 = 4.$

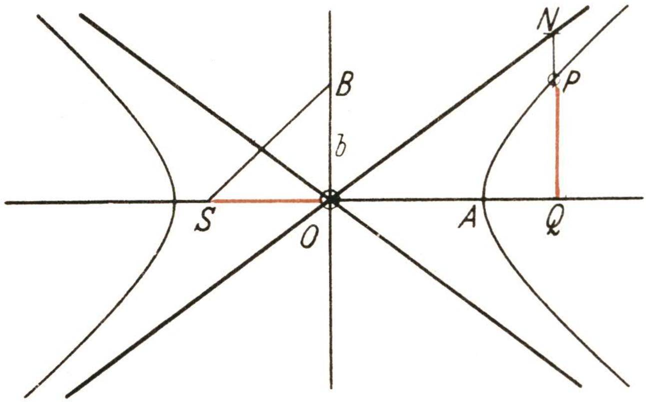
Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M \begin{cases} -4 \\ 0 \end{cases}$ und den Achsen $a = b = 2$. $e^2 = a^2 + b^2 = 8;\ e = 2{,}83$; daher:

$F_1 \begin{cases} x_1 = \mu + e = -4 + 2{,}83 = -1{,}17 \\ y_1 = \nu \qquad\qquad\qquad\quad = 0 \end{cases}$ und $F_2 \begin{cases} x_2 = \mu - e = -4 - 2{,}83 = -6{,}83; \\ y_2 = \nu \qquad\qquad\qquad\quad = 0. \end{cases}$

Für die Asymptote I ist $m_1 = 1$; daher: $y - 0 = 1(x + 4);\ A_1 \equiv x - y + 4 = 0;$

„ „ „ II „ $m_2 = -1$; „ $y - 0 = -1(x + 4):\ A_2 \equiv x + y + 4 = 0.$

Konstruktion der Hyperbel mit Hilfe der Asymptoten und b.



Man errichtet in einem beliebigen Punkt Q auf der reellen Halbachse die Senkrechte bis zum Schnittpunkt N mit der Asymptote. Um B schlägt man den Kreis mit QN als Radius, der die reelle Halbachse in S schneidet. SO von Q aus auf QN abgetragen, liefert den Kurvenpunkt P. Analog erhält man die weiteren Kurvenpunkte.

Der Beweis für diese Konstruktion folgt aus der Beziehung $b^2 = \overline{QN}^2 - \overline{PQ}^2 = (QN + PQ)\,(QN - PQ)$, die sich für den Hyperbelpunkt P aus der Mittelpunktsgleichung und aus $QN = OQ \cdot \frac{b}{a}$ ableiten läßt.

Hyperbel und Gerade.

Um die eventuellen Schnittpunkte zu ermitteln, löst man wie beim Kreis und der Ellipse beide Gleichungen nach x und y auf.

Beispiel: Welche Lage hat die Gerade $G \equiv 3x - y - 36 = 0$ zur Hyperbel $H \equiv x^2 - y^2 = 64$?

Aus G folgt: $y = 3x - 36$; in H: $x^2 - (3x - 36)^2 = 64$;

$x^2 - 9x^2 + 216x - 1296 = 64$; $\quad - 8x^2 + 216x - 1360 = 0 \,|: (-8)$

$x^2 - 27x + 170 = 0$; $\quad x_{1;2} = \dfrac{27 \pm \sqrt{729 - 680}}{2} = \dfrac{27 \pm 7}{2}$

$x_1 = 17$; $\quad x_2 = 10$, daher $y_1 = 15$ und $y_2 = -6$.

Die Gerade schneidet die Hyperbel in den Punkten $P_1 \begin{cases} 17 \\ 15 \end{cases}$ und $P_2 \begin{cases} 10 \\ -6 \end{cases}$.

Tangente an die Hyperbel.

Hat der Berührungspunkt P_0 die Koordinaten x_0 und y_0, so lautet die Gleichung der Tangente, wenn

a) der Mittelpunkt im Ursprung liegt:

$$\boxed{T_H \equiv \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

b) der Mittelpunkt die Koordinaten μ und ν hat:

$$\boxed{T_H \equiv \frac{(x_0 - \mu)(x - \mu)}{a^2} - \frac{(y_0 - \nu)(y - \nu)}{b^2} = 1}$$

Beispiel: Im Punkte $P_0 \begin{cases} -3 \\ >0 \end{cases}$ soll an die Hyperbel $H \equiv 16y^2 - 25x^2 - 400 = 0$ die Tangente und die Normale bestimmt werden.

$$H \equiv 16y^2 - 25x^2 = 400 \mid : 400; \quad H \equiv \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

Bei dieser Hyperbel ist die Y-Achse die reelle Achse ($b = 5$) und die X-Achse die imaginäre Achse ($a = 4$); die Gleichung der Tangente lautet in diesem Fall:

$$\underline{T \equiv \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0 x}{a^2} = 1.}$$

$x_0 = -3$ in die Hyperbelgleichung eingesetzt: $16y_0^2 - 225 = 400$

$$16y_0^2 = 625; \quad y_0^2 = \frac{625}{16}; \quad y_0 = (\pm)\frac{25}{4}.$$

$$T: \frac{25y}{4 \cdot 25} - \frac{(-3)x}{16} = 1 \mid \cdot 16$$

$$4y + 3x = 16; \quad T \equiv 3x + 4y - 16 = 0.$$

$m_T = \frac{-3}{4}$; da die Normale senkrecht auf der Tangente steht, ist $m_N = \frac{4}{3}$.

Die Normale geht durch $P_0 \begin{cases} -3 \\ \frac{25}{4} \end{cases}$; also lautet ihre Gleichung:

$$N: y - \frac{25}{4} = \frac{4}{3}(x + 3) \mid \cdot 12$$

$$12y - 75 = 16x + 48; \quad N \equiv 16x - 12y + 123 = 0.$$

Tangenten von einem Punkt außerhalb der Hyperbel an die Hyperbel.

Die Lösung derartiger Aufgaben erfolgt nach der schon für Kreis und Ellipse entwickelten Methode.

Beispiel: Wie lauten die Gleichungen der Tangenten vom Punkte $P_1 \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$ an die Hyperbel $H \equiv x^2 - 2y^2 - 2 = 0$?

$$H \equiv \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1;$$

$x = 4$ und $y = 3$ in die Tangentengl. $T \equiv \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ eingesetzt:

I. $\frac{4x_0}{2} - \frac{3y_0}{1} = 1$; $2x_0 - 3y_0 = 1$; daraus $x_0 = \frac{3y_0 + 1}{2}$; in H eingesetzt:

II. $\left(\frac{3y_0 + 1}{2}\right)^2 - 2y_0^2 - 2 = 0 \mid \cdot 4$

$$9y_0^2 + 6y_0 + 1 - 8y_0^2 - 8 = 0; \quad y_0^2 + 6y_0 - 7 = 0$$

$$y_{0_{1;2}} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}; \quad y_{0_1} = 1; \quad y_{0_2} = -7.$$

Aus I. $\quad x_{0_1} = 2; \quad x_{0_2} = -10.$

$$T_1: \frac{2 \cdot x}{2} - \frac{1 \cdot y}{1} = 1; \quad T_1 \equiv x - y - 1 = 0.$$

$$T_2: \frac{-10x}{2} - \frac{-7 \cdot y}{1} = 1; \quad T_2 \equiv 5x - 7y + 1 = 0.$$

Tangenten an die Hyperbel parallel oder senkrecht zu einer Geraden.

Auch hier finden die schon für Kreis und Ellipse aufgestellten Richtlinien Anwendung.

Hat die Hyperbel ihren **Mittelpunkt im Ursprung,** so ist der Richtungsfaktor der Tangente:

$$\boxed{m_T = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}$$

Für die Hyperbel mit den **Mittelpunktskoordinaten** μ **und** ν **ist:**

$$\boxed{m_T = \frac{b^2 (x_0 - \mu)}{a^2 (y_0 - \nu)}}$$

Beispiel: An die Hyperbel $H \equiv 4x^2 - y^2 - 16x - 2y + 19 = 0$ sind Tangenten parallel zur Geraden $G \equiv 6x - 5y + 20 = 0$ zu legen.

$$H \equiv 4(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -19;$$

$$4(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = -19 + 16 - 1 = -4 \mid : (-4)$$

$$\frac{(y + 1)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{1} = 1.$$

Bei dieser Hyperbel ist die Y-Achse die reelle Achse ($b = 2$), die X-Achse ist die imaginäre Achse ($a = 1$); der Mittelpunkt hat die Koordinaten $\mu = 2$ und $\nu = -1$.

$m_G = \frac{6}{5}$; ebenso muß $m_T = \frac{6}{5}$ sein.

Die Gleichung der Tangente lautet in diesem Fall:

$$T \equiv \frac{(y_0 - \nu)(y - \nu)}{b^2} - \frac{(x_0 - \mu)(x - \mu)}{a^2} = 1; \quad m_T = \frac{b^2(x_0 - \mu)}{a^2(y_0 - \nu)}.$$ Nun gilt:

I. $\frac{4(x_0 - 2)}{1 \cdot (y_0 + 1)} = \frac{6}{5}$; $20x_0 - 40 = 6y_0 + 6$; $y_0 = \frac{10x_0 - 23}{3}$ in Hyp.-Gl. einges.

II. $4x_0^2 - \left(\frac{10x_0 - 23}{3}\right)^2 - 16x_0 - \frac{2}{3}(10x_0 - 23) + 19 = 0$; daraus ergibt sich:

$$16x_0^2 - 64x_0 + 55 = 0; \quad x_{0_{1;2}} = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 3520}}{32} = \frac{64 \pm 24}{32};$$

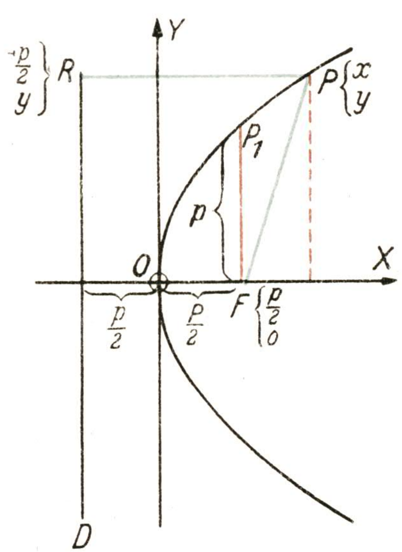
$$x_{0_1} = \frac{11}{4}; \; x_{0_2} = \frac{5}{4}.$$

Aus I: $y_{0_1} = \frac{3}{2}$; $\quad y_{0_2} = -\frac{7}{2}$.

$$T_1: \frac{\left(\frac{3}{2} + 1\right)(y + 1)}{4} - \frac{\left(\frac{11}{4} - 2\right)(x - 2)}{1} = 1; \quad T_1 \equiv 6x - 5y - 9 = 0.$$

$$T_2: \frac{\left(-\frac{7}{2} + 1\right)(y + 1)}{4} - \frac{\left(\frac{5}{4} - 2\right)(x - 2)}{1} = 1; \quad T_2 \equiv 6x - 5y - 25 = 0.$$

Die Parabel.



Die Parabel ist eine Kurve von der Art, daß für jeden ihrer Punkte der Abstand von einem festen Punkt — dem Brennpunkt F — und einer festen Geraden — der Direktrix D — gleich ist.

Die halbe Sehne P_1F der Parabel ist der Halbparameter p. Der Scheitel der Parabel halbiert die Entfernung zwischen Brennpunkt und Direktrix: $0F = \frac{p}{2}$; demnach lautet die **Gleichung der**

Direktrix: $\boxed{D \equiv x + \frac{p}{2} = 0}$

Der Definition der Parabel zufolge ist: $\boldsymbol{PF = PR}$. Daraus leitet sich die Parabelgleichung ab. $PF = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2}$; $PR = x+\frac{p}{2}$, es muß sein: $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{p}{2}$;

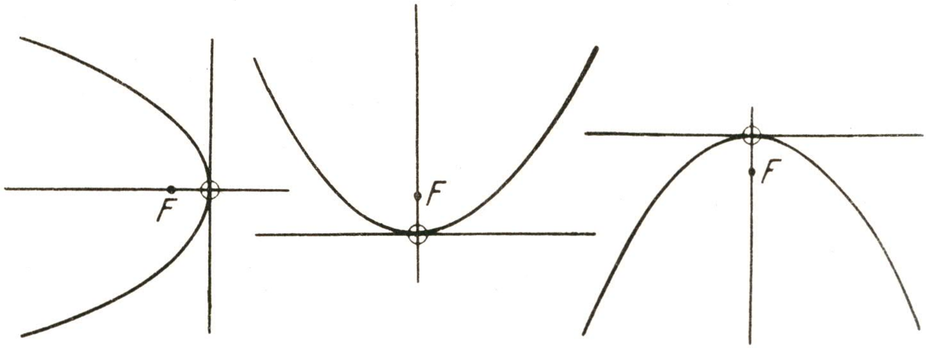
quadriert: $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$;

$$\boxed{P \equiv y^2 = 2px}$$ **Scheitelgleichung der Parabel.**

Hat der Scheitel der Parabel die Koordinaten μ und ν, dann ist:

$$\boxed{P \equiv (y-\nu)^2 = 2p\,(x-\mu)}$$ **Normalgleichung.**

Weitere Lagen der Parabel:



$$\boxed{\begin{matrix} P \equiv y^2 = -\,2px \\ \text{oder} \\ (y-\nu)^2 = -\,2p\,(x-\mu) \end{matrix}}$$
$$\boxed{D \equiv x - \tfrac{p}{2} = 0}$$

$$\boxed{\begin{matrix} P \equiv x^2 = 2py \\ \text{oder} \\ (x-\mu)^2 = 2p\,(y-\nu) \end{matrix}}$$
$$\boxed{D \equiv y + \tfrac{p}{2} = 0}$$

$$\boxed{\begin{matrix} P \equiv x^2 = -\,2py \\ \text{oder} \\ (x-\mu)^2 = -\,2p\,(y-\nu) \end{matrix}}$$
$$\boxed{D \equiv y - \tfrac{p}{2} = 0}$$

Ueberführung der allgemeinen Parabelgleichung in die Normalform.

Eine Gleichung II. Grades stellt eine Parabel dar, deren Achse parallel zu einer Koordinatenachse läuft, wenn entweder das Glied mit x^2 oder y^2 fehlt und das Glied mit xy nicht vorkommt. Die Gleichung hat also die Form:

$$ay^2 + by + cx + d = 0 \quad \text{oder} \quad ax^2 + bx + cy + d = 0.$$

Beispiel: Welche Scheitel- und Brennpunktskoordinaten haben folgende Parabeln?:

1. $y^2 - 8x - 4y + 100 = 0$;
2. $x^2 + 2x + 3y + 10 = 0$. Wie lauten die Gleichungen der Direktrix?

Zu 1. $y^2 - 8x - 4y + 100 = 0$; $(y-2)^2 = 8x - 100 + 4$; $(y-2)^2 = 8\,(x - 12)$.

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit den Scheitelkoordinaten $\mu = 12$ und $\nu = 2$, deren Achse parallel zur X-Achse läuft, sich nach **rechts** öffnet und den Halbparameter 4 hat.

Die Koordinaten des Brennpunktes sind $F\begin{cases} x = \mu + \dfrac{p}{2} = 12 + 2 = 14 \\ y = \nu = 2 \end{cases}$

Der Abstand der Direktrix vom Scheitel beträgt $\dfrac{p}{2} = 2$; für

$x = \mu - \dfrac{p}{2} = 12 - 2 = 10$ lautet daher die Gleichung der Direktrix:

$$D \equiv x - 10 = 0.$$

Zu 2. $x^2 + 2x + 3y + 10 = 0$; $(x+1)^2 = -3y - 10 + 1$; $(x+1)^2 = -3\,(y+3)$.

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit den Scheitelkoordinaten $\mu = -1$ und $\nu = -3$, deren Achse parallel zur Y-Achse läuft, sich nach **unten** öffnet und den Halbparameter $\dfrac{3}{2}$ hat.

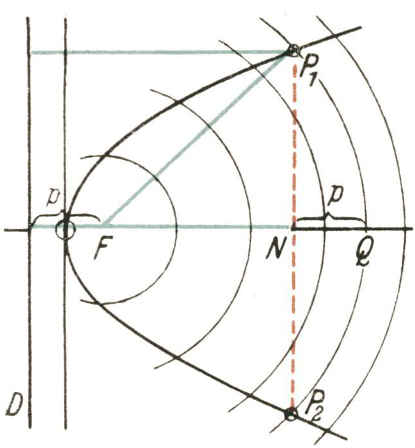
Die Koordinaten des Brennpunktes sind $F\begin{cases} x = \mu = -1 \\ y = \nu - \dfrac{p}{2} = -3 - \dfrac{3}{4} = -3\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Der Abstand der Direktrix vom Scheitel beträgt $\dfrac{p}{2} = \dfrac{3}{4}$; für

$y = \nu + \dfrac{p}{2} = -3 + \dfrac{3}{4} = -\dfrac{9}{4}$ lautet daher die Gleichung der Direktrix:

D: $y + \dfrac{9}{4} = 0$ oder $D \equiv 4y + 9 = 0$.

Konstruktion der Parabel.



Man beschreibt um den Brennpunkt F der Parabel Kreise mit beliebigem Radius, trägt von dem Peripheriepunkt Q auf der Achse die Strecke p ins Kreisinnere bis zum Punkte N auf der Achse ab, errichtet in N die Senkrechte bis zum Schnitte mit dem entsprechenden Kreis und erhält so 2 Kurvenpunkte P_1 und P_2.

Nach der Konstruktion ist der Abstand der Punkte P_1 und P_2 von F genau so groß wie von der Direktrix D. Die Parabelbedingung (Seite 41) ist also erfüllt.

Parabel und Gerade.

Vergleiche die entsprechenden Kapitel über Kreis und Ellipse!

Beispiel: Welche Lage hat die Gerade $G \equiv x - 2y - 10 = 0$ zur Parabel $P \equiv y^2 + 6y + 6x + 21 = 0$?

I. Aus G folgt: $x = 2y + 10$; in P eingesetzt:

II. $y^2 + 6y + 6(2y + 10) + 21 = 0$; $\quad y^2 + 18y + 81 = 0$;

$$y = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = -9; \quad \text{in } I\text{: } x = -8.$$

Die Gerade berührt die Parabel im Punkte $P\begin{cases} -8 \\ -9. \end{cases}$

Tangente an die Parabel.

Hat der Berührungspunkt P_0 die Koordinaten x_0 und y_0, so lautet die Tangentengleichung, wenn

a) der Scheitel der Parabel im Ursprung liegt:

$$\boxed{T_p \equiv y_0 y = p(x + x_0)}$$

b) der Scheitel die Koordinaten μ und ν hat:

$$\boxed{T_p \equiv (y_0 - \nu)(y - \nu) = p(x + x_0 - 2\mu)}$$

Für die 2. Lage der Parabel lauten die entsprechenden Gleichungen der Tangenten:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \boxed{\begin{array}{l} T \equiv y_0 y = -p(x + x_0) \\ T \equiv (y_0 - \nu)(y - \nu) = -p(x + x_0 - 2\mu) \end{array}}$$

für die 3. Lage:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \boxed{\begin{array}{l} T \equiv x_0 x = p(y + y_0) \\ T \equiv (x_0 - \mu)(x - \mu) = p(y + y_0 - 2\nu) \end{array}}$$

für die 4. Lage:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \boxed{\begin{array}{l} T \equiv x_0 x = -p(y + y_0) \\ T \equiv (x_0 - \mu)(x - \mu) = -p(y + y_0 - 2\nu) \end{array}}$$

Beispiel: Im Punkte P_0, dessen Abszisse $x_0 = -9$ ist, ist die Tangente an die Parabel $P \equiv 2y^2 - 8y + 3x + 17 = 0$ gezogen. Wie lautet ihre Gleichung?

$x_0 = -9$ in die Parabelgl. eingesetzt: $2y_0^2 - 8y_0 - 27 + 17 = 0$; $y_0^2 - 4y_0 - 5 = 0$;

$y_{0_{1,2}} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$; $y_{0_1} = 5$; $y_{0_2} = -1$;

$P \equiv 2(y^2 - 4y) = -3x - 17$; $(y - 2)^2 = -\frac{3}{2}(x + 3)$.

Für diese Parabel mit den Scheitelkoordinaten $\mu = -3$ und $\nu = 2$, die sich nach links öffnet, (2. Lage!) und deren Parameter $\frac{3}{4}$ ist, lautet die Tangentengleichung; $T \equiv (y_0 - \nu)(y - \nu) = -p(x + x_0 - 2\mu)$; also:

T_1: $(5 - 2)(y - 2) = -\frac{3}{4}(x - 9 + 6)$; $4y - 8 = -x + 3$; $T_1 \equiv x + 4y - 11 = 0$.

T_2: $(-1 - 2)(y - 2) = -\frac{3}{4}(x - 9 + 6)$; $4y - 8 = x - 3$: $T_2 \equiv x - 4y + 5 = 0$.

Tangenten von einem Punkt außerhalb der Parabel an die Parabel.

Vergleiche auch hier die entsprechenden Kapitel über Kreis und Ellipse!

Beispiel: Wie lauten die Gleichungen der vom Punkt $P_1 \begin{cases} -2 \\ 10 \end{cases}$ an die Parabel $P \equiv 5x^2 + 6y = 0$ gezogenen Tangenten?

$P \equiv x^2 = -\frac{6}{5}y$; daraus folgt: $p = \frac{3}{5}$.

In die Tangentengleichung, $T \equiv x_0 x = -p(y + y_0)$, $x = -2$ und $y = 10$ eingesetzt:

I. $-2x_0 = -\frac{3}{5}(10 + y_0)$; $10x_0 = 30 + 3y_0$; $y_0 = \frac{10x_0 - 30}{3}$;

in P eingesetzt:

II. $5x_0^2 + 6 \cdot \frac{10x_0 - 30}{3} = 0$; $5x_0^2 + 20x_0 - 60 = 0$; $x_0^2 + 4x_0 - 12 = 0$;

$x_{0_{1;2}} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$; $x_{0_1} = 2$ und $x_{0_2} = -6$.

Aus I. $y_{0_1} = -\frac{10}{3}$; $y_{0_2} = -30$.

T_1: $2x = -\frac{3}{5}\left(y - \frac{10}{3}\right)$; $T_1 \equiv 10x + 3y - 10 = 0$;

T_2: $-6x = -\frac{3}{5}(y - 30)$; $T_2 \equiv 10x - y + 30 = 0$.

Tangenten an die Parabel parallel oder senkrecht zu einer Geraden.

Siehe auch in diesem Falle die entsprechenden Abschnitte bei Kreis und Ellipse nach!

Für die Parabeln in den verschiedenen Lagen sind die Richtungsfaktoren der Tangenten,

a) **wenn der Parabel-Scheitel im Ursprung liegt:**

1. Lage:	2. Lage:	3. Lage:	4. Lage:
$\boxed{m_T = \frac{p}{y_0}}$	$\boxed{m_T = -\frac{p}{y_0}}$	$\boxed{m_T = \frac{x_0}{p}}$	$\boxed{m_T = -\frac{x_0}{p}}$

b) **wenn der Scheitel der Parabel die Koordinaten μ und ν hat:**

1. Lage:	2. Lage:	3. Lage:	4. Lage:
$\boxed{m_T = \frac{p}{y_0 - \nu}}$	$\boxed{m_T = -\frac{p}{y_0 - \nu}}$	$\boxed{m_T = \frac{x_0 - \mu}{p}}$	$\boxed{m_T = -\frac{x_0 - \mu}{p}}$

1. Beispiel: An die Parabel $y^2 = 18x$ ist eine Tangente senkrecht zur Geraden $G \equiv 2x + 3y - 5 = 0$ zu ziehen. Wie lautet ihre Gleichung?

Für die Parabel ist $p = 9$; also ist $m_T = \frac{9}{y_0}$ (1. Lage!).

Für die Gerade ist $m_G = -\frac{2}{3}$.

Es muß sein: $m_T = -\frac{1}{m_G}$!

Also $\frac{9}{y_0} = +\frac{3}{2}$; $y_0 = 6$ in die Parabelgleichung eingesetzt: $36 = 18x_0$; $x_0 = 2$.

Die Tangentengleichung heißt dann $T \equiv 6y = 9\ (x + 2)$; $9x + 18 = 6y$; $T \equiv 3x - 2y + 6 = 0$.

2. Beispiel: An die Parabel $P \equiv x^2 - 6x - 4y + 1 = 0$ ist eine Tangente parallel zur Geraden $G \equiv 4x - 2y + 3 = 0$ zu ziehen. Wie lautet ihre Gleichung?

$P \equiv (x - 3)^2 = 4\,(y + 2)$: dies ist eine Parabel mit den Scheitelkoordinaten $\mu = 3$ und $\nu = -2$, die sich nach oben öffnet (3. Lage!) und $p = 2$ hat.

Es muß sein: $m_T = m_G$!

$$\frac{x_0 - \mu}{p} = 2; \quad \frac{x_0 - 3}{2} = 2; \quad x_0 = 7 \text{ in Parabelgleichung eingesetzt:}$$

$49 - 42 - 4y_0 + 1 = 0$; $\qquad y_0 = 2$

$T \equiv (x_0 - \mu)\,(x - \mu) = p\,(y + y_0 - 2\nu)$:

$(7 - 3)\,(x - 3) = 2\,(y + 2 + 4)$; $4x - 12 = 2y + 12$; $T \equiv 2x - y - 12 = 0$.

Differentialrechnung.

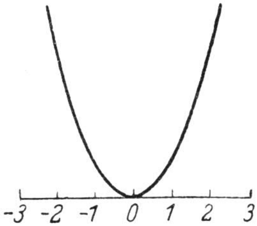
Die analytische Geometrie geht von geometrischen Grundlagen aus und sucht dafür algebraische Formen zu finden.
Im Gegensatz dazu geht die Differentialrechnung von der Algebra aus. Die graphischen Darstellungen dienen nur zur Veranschaulichung.
Der Begriff der Funktion ist ein Grundbegriff der Differentialrechnung. Für ihn ist das Symbol $y = f_{(x)}$ üblich geworden. Die meisten Funktionen lassen sich graphisch darstellen. Die Grundlage der graphischen Darstellung bildet die Wertetabelle, welche dadurch gewonnen wird, daß zu willkürlich angenommenen Werten der einen Veränderlichen (unabhängige Variable x) die zugehörigen Werte der anderen (abhängige Variable y) errechnet werden (vgl. Sk. S. 21 und S. 24).

Beispiele:

1. Quadratische Funktion: $y = x^2$

Wertetabelle:

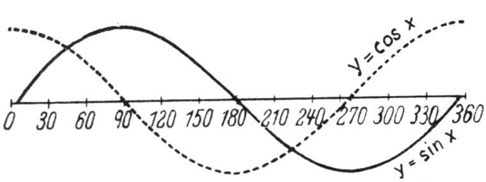
x	$y = x^2$
(— 4	+ 16)
— 3	+ 9
— 2	+ 4
— 1	+ 1
0	0
+ 1	+ 1
+ 2	+ 4
+ 3	+ 9
(+ 4	+ 16)

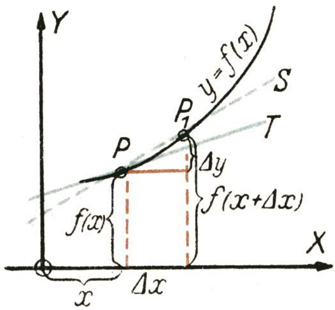


2. Transzendente Funktionen: $y = \sin x$ und $y = \cos x$

Wertetabelle:

x	$y = \sin x$	$y = \cos x$
0°	0	1
30°	0,5	0,87
60°	0,87	0,5
90°	1,0	0
120°	0,87	— 0,5
150°	0,5	— 0,87
180°	0	— 1
210°	— 0,5	— 0,87
240°	— 0,87	— 0,5
270°	— 1	0
300°	— 0,87	+ 0,5
330°	— 0,5	+ 0,87
360°	0	1





Die Operation, welche zu einer gegebenen Funktion $y = f_{(x)}$ die Abgeleitete $y' = f'_{(x)}$ liefert, heißt: **Differentiation (Differenzieren).** Sie umfaßt 3 Schritte:

1. Zu einem bestimmt gedachten Wert der unabhängig Variablen x gehört ein ganz bestimmter Funktionswert $y = f_{(x)}$. Läßt man x um eine ganz kleine Größe Δx auf den Wert $x + \Delta x$ anwachsen, so gehört dazu der neue Funktionswert $f_{(x+\Delta x)}$, der sich vom vorhergehenden y um Δy unterscheidet und daher mit $y + \Delta y$ bezeichnet werden kann.

2. Der Differenz der unabhängig Veränderlichen entspricht die Aenderung $\Delta y = f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}$; es ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x} \quad \text{der Differenzenquotient.}$$

3. Die Grenzwertermittlung (limes) dieses Ausdruckes liefert dann die abgeleitete Funktion $y' = f'_{(x)}$, die als **Differentialquotient** bezeichnet wird und statt y' auch in der Form $\frac{dy}{dx}$ geschrieben wird (lies dy **nach** dx!); es ist

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}} \quad \text{der Differentialquotient.}$$

y ist demnach der Wert, dem sich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für ein bestimmtes x annähert, wenn Δx immer mehr der Grenze Null zustrebt.

Die Gerade durch P und P_1 ist eine Sekante S der durch die Funktion $f_{(x)}$ dargestellten Kurve. Ihr Richtungsfaktor ist $tg\alpha_1 = m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (siehe S. 9). Nähert sich Δx der Null, so nähert sich die Sekante S der Tangente T im Punkte P an die Kurve. Sowie der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Sekante durch P und P_1 entspricht, gehört zu seinem Grenzwerte, dem Differentialquotienten y', die Tangente im Punkte P.

1. Beispiel: $y = mx + t;\quad y + \Delta y = m\,(x + \Delta x) + t;$

$$\Delta y = m \cdot (x + \Delta x) + t - (mx + t) = mx + m \cdot \Delta x + t - mx - t = m \cdot \Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m;\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m.$$

Für $y = mx + t$ ist also $y' = m$, wobei $m = tg\alpha$ ist, d. h.

Der 1. Differentialquotient gibt den Richtungsfaktor einer Geraden an und bedeutet somit geometrisch den Richtungsfaktor der Tangente an die Kurve $y = f_{(x)}$ im Punkte mit der Abszisse x. Er ist demnach gleich dem trigonometrischen Tangenswert des Neigungswinkels, den die Tangente an die Kurve mit der positiven Richtung der X-Achse bildet.

2. Beispiel: $y = x^2;\quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2$

$$\Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2 - x^2 = \Delta x \cdot (2x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x;\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Für $y = x^2$ ist also $y' = 2x$.

3. Beispiel: $y = ax^2 - bx + c;\quad y + \Delta y = a\,(x + \Delta x)^2 - b\,(x + \Delta x) + c$

$$\Delta y = 2ax\Delta x + a\overline{\Delta x}^2 - b\Delta x = \Delta x\,(2ax + a\Delta x - b)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax - b + a\Delta x;\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax - b$$

Für $y = ax^2 - bx + c$ ist $y' = 2ax - b$.

Mit Hilfe der Differenzenquotienten entwickelt man die Differentialquotienten der einfachsten Funktionen.

Formelzusammenstellung:

1.	$y = c \;\ldots\; y' = 0$	9.	$y = \arcsin x;\; y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2.	$y = x \;\ldots\; y' = 1$	10.	$y = \arccos x;\; y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$y = x^n \;\ldots\; y' = n \cdot x^{n-1}$	11.	$y = \operatorname{arc\,tg} x;\; y' = \frac{1}{1+x^2}$
4.	$y = a \cdot x^n \;\ldots\; y' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$	12.	$y = \operatorname{arc\,ctg} x;\; y' = -\frac{1}{1+x^2}$
5.	$y = \sin x \;\ldots\; y' = \cos x$	13.	$y = e^x \;\ldots\; y' = e^x$
6.	$y = \cos x \;\ldots\; y' = -\sin x$	14.	$y = a^x \;\ldots\; y' = a^x \cdot \ln a$
7.	$y = \operatorname{tg} x \;\ldots\; y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	15.	$y = \ln x \;\ldots\; y' = \frac{1}{x}$
8.	$y = \operatorname{ctg} x \;\ldots\; y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	16.	$y = {}^m\!\log x \;\ldots\; y' = \frac{1}{x \cdot \ln m}$

$$17. \quad \boxed{y = f_{(x)} + \varphi_{(x)} - \psi_{(x)} \; \ldots\ldots\ldots \; y' = f'_{(x)} + \varphi'_{(x)} - \psi'_{(x)}} \quad \text{d.h.}$$

Der Differentialquotient eines Aggregates von Funktionen ist gleich dem Aggregat der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

Beispiele:

$y = x^6; \quad y' = 6x^5$	$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}; \quad y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
$y = 4x^3; \quad y' = 12x^2$	$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}; \quad y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
$y = 7^x; \quad y' = 7^x \cdot \ln 7$	$y = {}^5\log x; \quad y' = \frac{1}{x \cdot \ln 5}.$

Weitere Beispiele:

$$y = 1 + x^2 - x^{-3} - \sin x + m; \quad y' = 2x + \frac{3}{x^4} - \cos x.$$

$$y = \frac{-5}{18x^2} + \frac{3}{7x^7} - \frac{11}{6x^4} + \frac{4}{9x^3}; \quad y' = \frac{5}{9x^3} - \frac{3}{x^8} + \frac{22}{3x^5} - \frac{4}{3x^4}.$$

$$y = 5 + \sqrt[7]{x^3} - \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x}} - x^{-5} = 5 + x^{\frac{3}{7}} - x^{-\frac{4}{3}} - x^{-5};$$

$$y' = \frac{3}{7} \cdot x^{-\frac{4}{7}} + \frac{4}{3} x^{-\frac{7}{3}} + 5 \cdot x^{-6} = \frac{3}{7 \cdot \sqrt[7]{x^4}} + \frac{4}{3x^2 \sqrt[3]{x}} + \frac{5}{x^6}.$$

Höhere Ableitungen.

Hat man von der Funktion $y = f_{(x)}$ die 1. Ableitung $y' = f'_{(x)}$ gebildet, so stellt dieser Ausdruck wiederum eine Funktion von x dar, die erneut differenziert werden kann und den 2. Differentialquotienten liefert. Analog können weitere Ableitungen gebildet werden.

Beispiele:

1.) $y = 3x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 - 9;$

$y' = 12x^3 - 2x^2 + 5x; \quad y'' = 36x^2 - 4x + 5; \quad y''' = 72x - 4;$

$y^{(4)} = 72; \quad y^{(5)} = 0.$

2.) $y = \cos x; \quad y' = -\sin x; \quad y'' = -\cos x; \quad y''' = \sin x; \quad y^{(4)} = \cos x \ldots\ldots$

Produkt zweier Funktionen.

Hat man ein Produkt zweier Faktoren u und v zu differenzieren, so ist der Differentialquotient y' = 2. Faktor mal Ableitung des 1. Faktors + 1. Faktor mal Ableitung des 2. Faktors

$$\boxed{y = u \cdot v; \quad y' = v u' + u v'}$$

Beispiele:

1.) $y = 6x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

$$y' = \sqrt[3]{x^2} \cdot 18x^2 + 6x^3 \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{18x^3 + 4x^3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{22x^3}{\sqrt[3]{x}} = 22x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

2.) $y = \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$;

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x + \sin x \frac{(-1)}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\sin x} = -\sin x;$$

oder einfacher: $y = \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x} = \cos x; \quad y' = -\sin x.$

Quotient zweier Funktionen.

Hat man einen Quotienten $\dfrac{u}{v}$ zu differenzieren, so ist

$$y' = \frac{\text{Nenner} \cdot \text{Ableitung des Zählers} - \text{Zähler} \cdot \text{Ableitung des Nenners}}{(\text{Nenner})^2}.$$

$$\boxed{y = \frac{u}{v}; \quad y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}}$$

Beispiele:

1.) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $\quad y' = \dfrac{(1 + x^2) \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = -\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}.$

2.) $y = \dfrac{3x - 5}{8 - 7x}$; $\quad y' = \dfrac{(8 - 7x) \cdot 3 - (3x - 5)(-7)}{(8 - 7x)^2} =$

$$= \frac{24 - 21x + 21x - 35}{(8 - 7x)^2} = -\frac{11}{(8 - 7x)^2}.$$

3.) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$; $\quad y' = \dfrac{\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x} - 1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x^2}.$$

Funktion einer Funktion.

Hat man z. B. $y = (a - bx)^2$ zu differenzieren, so ist die Basis dieser Potenz wieder eine Funktion von x; es ist allgemein $y = F[f(x)]$. Derartige kompliziertere Funktionen führt man durch Einführung einer Hilfsvariablen z auf einfache Funktionen zurück und es ist dann $y = F(z)$, wobei in diesem Falle $z = a - bx$ ist.

$z = a - bx$ differenziert, gibt: $\dfrac{dz}{dx} = -b$

$y = z^2$ differenziert, gibt: $\dfrac{dy}{dz} = 2z.$

Nun ist $\boxed{y' = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx}}$ d.h. $y' = 2z \cdot (-b)$ oder $y' = -2b\,(a - bx)$.

Regel: Man differenziert die Funktion einer Funktion von x, indem man zunächst die Funktion nach der Hilfsvariablen z differenziert und hierauf mit dem Differentialquotienten der Hilfsvariablen z nach der unabhängigen Variablen x multipliziert.

Beispiele:

1.) $y = \dfrac{10}{\sqrt[5]{1-2x^3}} = 10\,(1-2x^3)^{-\frac{1}{5}}$

Man setzt $z = 1-2x^3$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = -6x^2.$$

Nun ist $y = 10\cdot z^{-\frac{1}{5}}$ und

$$\frac{dy}{dz} = 10\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot z^{-\frac{6}{5}}; \quad \text{somit } y' = \frac{-6x^2\cdot(-2)}{\sqrt[5]{(1-2x^3)^6}} = \frac{12x^2}{\sqrt[5]{(1-2x^3)^6}}.$$

2.) $y = (\sin x)^n$

Man setzt $z = \sin x$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = \cos x$$

Nun ist $y = z^n$ und

$$\frac{dy}{dz} = n\cdot z^{n-1}; \text{ somit } y' = \cos x\cdot n\,(\sin x)^{n-1} = n\cdot\cos x\,(\sin x)^{n-1}.$$

3.) $y = \cos\,(mx^2 + nx)$

Man setzt $z = mx^2 + nx$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = 2mx + n$$

Nun ist $y = \cos z$ und

$$\frac{dy}{dz} = -\sin z; \quad \text{somit } y' = (2mx+n)\,(-\sin z) = -(2mx+n)\cdot\sin\,(mx^2+nx).$$

4.) $y = \operatorname{arc\,cos}\,(ax)$

Man setzt $z = ax$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = a.$$

Nun ist $y = \operatorname{arc\,cos} z$ und

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}; \quad \text{somit } y' = a\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{-a}{\sqrt{1-(ax)^2}}.$$

5.) $y = \sin\,(\operatorname{arc\,ctg} x)$

Nun ist $y = \sin z$ und

$$\frac{dy}{dz} = \cos z$$

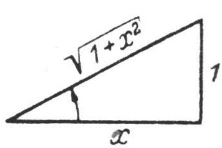
Man setzt $z = \operatorname{arc\,ctg} x$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \text{ und}$$

$$\operatorname{ctg} z = x; \text{ daher } \cos z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{somit } y' = \frac{-1}{1+x^2}\cos z =$$

$$= \frac{(-1)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$



6.) $y = \dfrac{3}{2n}\sqrt[3]{e^{2nx}}$

Man setzt $z = \dfrac{2nx}{3}$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2n}{3}$$

Nun ist $y = \dfrac{3}{2n}e^z$ und

$$\frac{dy}{dz} = \frac{3}{2n}e^z; \text{ somit } y' = \frac{2n}{3}\cdot\frac{3}{2n}\,e^{\frac{2nx}{3}} = \sqrt[3]{e^{2nx}}.$$

7.) $y = \ln \dfrac{x-m}{x+m}$

Man setzt $z = \dfrac{x-m}{x+m}$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(x+m)\cdot 1 - (x-m)\cdot 1}{(x+m)^2} = \frac{2m}{(x+m)^2}$$

Nun ist $y = \ln z$ und

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}; \text{ somit } y' = \frac{2m\cdot(x+m)}{(x+m)^2\cdot(x-m)} = \frac{2m}{x^2-m^2}.$$

8.) $y = a^{x^2-x}$

Man setzt $z = x^2 - x$; dann ist

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 1;$$

Nun ist $y = a^z$ und

$$\frac{dy}{dz} = a^z \cdot \ln a; \text{ somit } y' = (2x-1)\, a^z \cdot \ln a = (2x-1)\, a^{x^2-x} \cdot \ln a.$$

Einige weitere Beispiele:

$$y = \frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}};\quad y' = \frac{\sqrt{b^2-x^2}\cdot 1 - \dfrac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{b^2-x^2}}}{b^2-x^2} = \frac{b^2-x^2+x^2}{(b^2-x^2)\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{(b^2-x^2)^3}}$$

$$y = \frac{3}{2}\cos x\cdot\sin^2 x + \cos^3 x;\quad y' = \frac{3}{2}\left(\sin^2 x\,(-\sin x) + \cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos x\right) +$$

$$+ 3\cos^2 x\cdot(-\sin x) = 3\sin x\cdot\cos^2 x - \frac{3}{2}\sin^3 x - 3\sin x\cdot\cos^2 x = -\frac{3}{2}\sin^3 x.$$

$$y = \ln\sqrt[4]{\sin^3 x\cdot\cos^3 x};\quad y' = \frac{\cos^3 x\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x + \sin^3 x\cdot 3\cos^2 x\,(-\sin x)}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^3 x}\cdot 4\sqrt[4]{(\sin^3 x\cos^3 x)^3}} =$$

$$\frac{3\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)}{4\cdot\sin^3 x\cdot\cos^3 x} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x} = \frac{3}{2}\operatorname{ctg} 2x.$$

Anwendung der Differentialrechnung auf Kurvendiskussionen.

1. Da der 1. Differentialquotient gleich dem Richtungsfaktor m der Tangente ist, also die Steigung einer Kurve bedeutet, so erhält man für einen positiven Wert von $m = \operatorname{tg}\alpha$ ein positives y': Die Kurve steigt.
2. Für einen negativen Wert von $m = \operatorname{tg}\alpha$ ist y' negativ: Die Kurve fällt.
3. Ist $m = \operatorname{tg}\alpha = 0$, so ist die Tangente an die Kurve parallel zur X-Achse: $y' = 0$ liefert einen Höchst- oder Tiefstpunkt, — ein Maximum oder Minimum.
4. $y'' = 0$ gibt einen Wendepunkt.
5. $y' = 0$ und $y'' = 0$ gibt einen Wendepunkt mit einer zur X-Achse parallelen Wendetangente.

Tabelle:

y'	y''	Kurve:	Bild:
$+$	$+$	**steigend konkav**	
$+$	$-$	**steigend konvex**	
$-$	$+$	**fallend konkav**	
$-$	$-$	**fallend konvex**	
0	$+$	**Minimum**	
0	$-$	**Maximum**	
$\pm$	0	**Wendepunkt**	
0	0	**Wendepunkt mit zur X-Achse ‖ Tangente**	

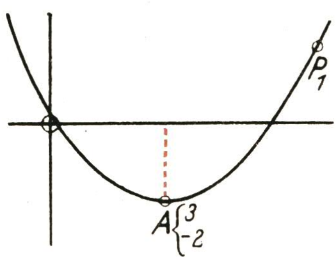
1. Beispiel: Diskutiere die Kurve $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ und stelle im Punkte $P_1\begin{cases}>0\\ 2\end{cases}$ die Gleichung der Tangente an die Kurve auf!

$y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; $\qquad y'' = \frac{1}{2}$.

Bedingung für Max. oder Min. $y' = 0$; folglich: $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$; $x = 3$.

$x = 3$ in die Kurvengl. einges.: $y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{1}{4} = -2$.

y'' ist $+$; daher hat die Kurve im Punkte $A\begin{cases}3\\ -2\end{cases}$ ein Minimum.



Links von A : $x < 3$ z. B. $x = 1$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \\ y'' &= \frac{1}{2} \qquad = + \end{aligned}\right\}\text{ fallend konkav;}$$

Rechts von A : $x > 3$ z. B. $x = 4$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{3}{2} = +\frac{1}{2} \\ y'' &= \frac{1}{2} \qquad\quad = + \end{aligned}\right\}\text{ steigend konkav.}$$

$y = 2$ in die Kurvengl. einges.: $2 = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$;

$$x^2 - 6x - 7 = 0;\; x_{1;2} = \frac{6 \pm\sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6(\pm)8}{2} = 7.$$

$x = 7$ in y' einges. $y = \frac{1}{2}\cdot 7 - \frac{3}{2} = 2 = m_1$ (Richtungsfaktor).

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P_1 \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$ lautet also:

$y - 2 = 2(x - 7)$; $T \equiv 2x - y - 12 = 0$.

Vgl. hierzu das Beispiel auf Seite 46 der analyt. Geo., das hier mittels Differentialrechnung gelöst wurde!

2. Beispiel: Diskutiere die Kurve $y = 2x^3 - 6x^2 - 1$! Wie lautet die Gleichung der Wendetangente?

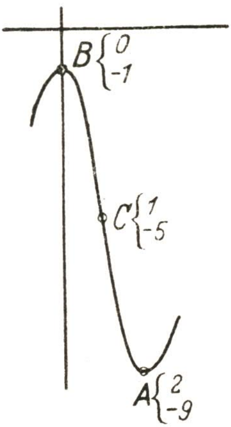
$y' = 6x^2 - 12x \qquad y'' = 12x - 12.$

Bedingung für Max. oder Min. $y' = 0$: folglich $6x^2 - 12x = 0$;

$x_1 = 2$ in Kurvengl. eingesetzt:	$x_2 = 0$;
$y_1 = 16 - 24 - 1 = -9$;	$y_2 = 0 - 0 - 1 = -1$
für $x_1 = 2$ ist $y'' = 24 - 12 = +12$	für $x_2 = 0$ ist $y'' = 0 - 12 = -12$
daher $A \begin{cases} 2 \\ -9 \end{cases}$ Minimum.	daher $B \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$ Maximum.

Bedingung für Wendepunkt: $y'' = 0$: folglich $12x - 12 = 0$:

$x_3 = 1$ in Kurvengl. $y_3 = 2 - 6 - 1 = -5$; also $C \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$ Wendepunkt.



Links von B ist $x < 0$ z. B. $x = -1$:

$\left.\begin{matrix} y' = 6 + 12 = +18 \\ y'' = -12 - 12 = -24 \end{matrix}\right\}$ steigend konvex.

Zwischen B und C ist $0 < x < 1$ z. B. $x = \frac{1}{2}$:

$\left.\begin{matrix} y' = \frac{6}{4} - \frac{12}{2} = -4\frac{1}{2} \\ y'' = 6 - 12 = -6 \end{matrix}\right\}$ fallend konvex.

Zwischen C und A ist $1 < x < 2$ z. B. $x = \frac{3}{2}$:

$\left.\begin{matrix} y' = \frac{27}{2} - \frac{36}{2} = -\frac{9}{2} \\ y'' = 18 - 12 = +6 \end{matrix}\right\}$ fallend konkav.

Rechts von A ist $x > 2$ z. B. $x = 3$:

$\left.\begin{matrix} y' = 54 - 36 = +18 \\ y'' = 36 - 12 = +24 \end{matrix}\right\}$ steigend konkav.

Für $x_3 = 1$ ist $y' = 6 - 12 = -6 = m$; daher lautet die Gleichung der Wendetangente: $y + 5 = -6(x - 1)$ $T_W \equiv 6x + y - 1 = 0$.

3. Beispiel: Wie lautet die Gleichung der Kurve III. Grades, die im Punkt $P \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$ ein Maximum und im Punkte $Q \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$ einen Wendepunkt besitzt?

Eine Gleichung III. Grades hat die allgemeine Form: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; dann ist $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ und $y'' = 6ax + 2b$.

Bedingungen zur Bestimmung von a, b, c und d:

P und Q sind Kurvenpunkte, also müssen ihre Koordinaten die Kurvengleichung erfüllen. (I. und II. Bestimmungsgleichung)

P ist extremer Punkt, also muß für $x = 1$ sein: $y' = 0$ (III. Best.-Gl.)

Q ist Wendepunkt, also muß für $x = 3$ sein: $y'' = 0$ (IV. Best.-Gl.)

$$\begin{array}{l|r}
\text{I. } 9 = a + b + c + d, & \text{II}-\text{I}=\text{I}'\colon 26a + 8b + 2c = \\
\text{II. } 1 = 27a + 9b + 3c + d\colon & -8 \\
\text{III. } 0 = 3a + 2b + c; & \text{II}'\colon 3a + 2b + c = 0 \mid \cdot(-2) \\
\text{IV. } 0 = 18a + 2b; & \text{III}'\colon 18a + 2b = 0
\end{array}$$

$$\text{I}' - 2\cdot\text{II}' \quad \begin{array}{r|l} 20a + 4b = -8 & \\ 18a + 2b = 0 & \cdot(-2) \end{array} \qquad -16a = -8;\ a = \frac{1}{2};\ b = -\frac{9}{2}$$

Aus II': $c = -\frac{3}{2} + 9;\ c = \frac{15}{2}$; Aus I: $d = 9 - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{15}{2};\ d = \frac{11}{2}$.

Die gesuchte Funktion lautet: $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{11}{2}$.

4. Beispiel: Bestimme die Gleichung der Kurve III. Grades, die durch den Ursprung geht, im Punkte $P\begin{cases}2\\1\end{cases}$ einen Wendepunkt hat und deren Tangente im Punkte Q mit der Abszisse $x = 1$ einen Winkel von 45^0 mit der X-Achse bildet!

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\quad y' = 3ax^2 + 2bx + c;\quad y'' = 6ax + 2b.$

Der Ursprung und der Punkt P sind Kurvenpunkte: ihre Koordinaten in die Kurvengl. eingesetzt, müssen diese erfüllen (I. und II. Best.-Gl.) P ist Wendepunkt, also muß für $x = 2$ sein: $y'' = 0$. (III. Best.-Gl.) Da die Tangente in Q den Richtungswinkel 45^0 besitzt, ist $\operatorname{tg} 45^0 = 1 = m$ und es muß für $x = 1$ sein: $y' = m = 1$. (IV. Best.-Gl.)

I. $0 = 0 + 0 + 0 + d$; daraus: $d = 0$

$$\begin{array}{l|l}
\text{II. } 1 = 8a + 4b + 2c & \\
\text{III. } 0 = 12a + 2b & \\
\text{IV. } 1 = 3a + 2b + c & \cdot(-2)
\end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{II.} - 2\cdot\text{IV}\colon -1 = 2a;\ a = -\frac{1}{2}; \\ \text{Aus III.}\quad b = 3. \\ \text{Aus IV.}\ c = -\frac{7}{2}. \end{array}$$

Die gesuchte Gleichung lautet: $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x$.

5. Beispiel: Eine Kurve III. Grades schneidet die X-Achse in $A(x_1 = -3)$. Die Tangente im Punkte $B\ (x_2 = -1)$ der Kurve hat den Richtungsfaktor 2. Im Punkte $C\ (x_3 = -\frac{2}{3})$ ist die Gerade $T \equiv 171x - 81y + 170 = 0$ Wendetangente der Kurve. Stelle die Gleichung der Kurve auf!

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\quad y' = 3ax^2 + 2bx + c;\quad y'' = 6ax + 2b.$

$A\begin{cases}-3\\0\end{cases}$ muß als Kurvenpunkt der Gleichung genügen. (I. Best.-Gl.)

In B hat die Tangente $m = 2$; also muß für $x = -1$ sein: $y' = 2$. (II. Best.-Gl.)

C ist Wendepunkt; also muß für $x = -\frac{2}{3}$ sein; $y'' = 0$ (III. Best.-Gl.)

Die Wendetangente hat in C den Richtungsfaktor $m = \frac{19}{9}$, also muß für $x = -\frac{2}{3}$ sein: $y' = \frac{19}{9}$ (IV Best.-Gl.)

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & 0 = -27a + 9b - 3c + d \\
\text{II.} & 2 = 3a - 2b + c \\
\text{III.} & 0 = -4a + 2b \\
\text{IV.} & \frac{19}{9} = \frac{4}{3}a - \frac{4}{3}b + c
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{II}-\text{IV}: & -1 = 15a - 6b \\
\text{III}': & 0 = -12a + 6b
\end{array}$$

$$-1 = 3a; \quad a = -\frac{1}{3}.$$

$$b = -\frac{2}{3}; \quad c = \frac{5}{3} \quad d = 2.$$

Die gesuchte Gleichung lautet: $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2.$

6. Beispiel: Wie lautet die Gleichung III. Grades, deren Differentialquotient $y' = x^2 - 2x + 3$ ist und die für $x = 3$ den Wert $y = 14$ hat?

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad y' = 3ax^2 + 2bx + c; \quad [y'' = 6ax + 2b]$

1. Bedingung: $3ax^2 + 2bx + c \equiv x^2 - 2x + 3$; durch Koeffizientenvergleichung ist: $3a = 1; \quad a = \frac{1}{3}.$

$2b = -2; \; b = -1; \; c = 3$

2. Bedingung: $14 = \frac{1}{3}(3)^3 - 1(3)^2 + 3 \cdot 3 + d; \quad d = 5.$

Die gesuchte Gleichung lautet: $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 5.$

Anwendung der Differentialrechnung auf Maxima und Minima

Läßt sich eine Größe, deren Maximum oder Minimum gesucht werden soll, als Funktion einer unabhängigen Veränderlichen ausdrücken, so setzt man den 1. Differentialquotienten dieser Funktion gleich Null. Auf diese Weise erhält man eine Bestimmungsgleichung zur Berechnung derjenigen Stelle, an welcher ein Maximum oder Minimum eintreten kann. Das wirkliche Auftreten eines Maximums oder Minimums prüft man durch Aufstellung des 2. Diff.-Quot. für die gefundene Stelle.

1. Beispiel: Welches Rechteck mit gegebener konstanter Fläche $\mathcal{F}$ hat den kleinsten Umfang $\mathcal{U}$?

Das Rechteck habe die Seiten x und y. Dann ist sein Umfang $\mathcal{U} = 2x + 2y$, seine Fläche $\mathcal{F} = x \cdot y$. Daraus folgt $y = \frac{\mathcal{F}}{x}$ und $\mathcal{U} = 2x + \frac{2\mathcal{F}}{x}$.

$\mathcal{U}' = 2 + 2\mathcal{F} \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 2 - \frac{2\mathcal{F}}{x^2}$

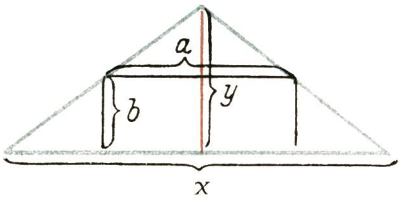
$\mathcal{U}' = 0$ gesetzt: $0 = 2 - \frac{2\mathcal{F}}{x^2}; \; \frac{2\mathcal{F}}{x^2} = 2; \; x^2 = \mathcal{F}$

$x_1 = +\sqrt{\mathcal{F}}; \; x_2 = -\sqrt{\mathcal{F}}$ [unbrauchbar.] $y_1 = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{F}}} = \sqrt{\mathcal{F}}$

$\mathcal{U}'' = -\frac{2\mathcal{F} \cdot (-2)}{x^3} = \frac{4\mathcal{F}}{x^3} = \frac{4\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{F}^3}} = \frac{4}{\sqrt{\mathcal{F}}}$ (daher Minimum).

Da die beiden Seiten des Rechteckes gleich groß sind, ist es ein Quadrat.

2. Beispiel: Um ein gegebenes Rechteck mit den Seiten a und b ist ein gleichschenkliges Dreieck von kleinster Fläche zu beschreiben:



Die Basis des gesuchten Δ sei x, seine Höhe y, dann ist $F = \frac{1}{2}xy$. Nach dem Strahlensatz (siehe Sk. S. 6) gilt: $x : a = y : (y-b)$; daraus $x = \frac{ay}{y-b}$; in F eingesetzt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{ay}{y-b} \cdot y = \frac{a}{2} \cdot \frac{y^2}{y-b}.$$

$$F' = \frac{a}{2} \cdot \frac{(y-b) \cdot 2y - y^2 \cdot 1}{(y-b)^2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2y^2 - 2by - y^2}{(y-b)^2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{y^2 - 2by}{(y-b)^2}.$$

$F' = 0$ gesetzt: $y^2 - 2by = 0$; $y(y-2b) = 0$; $y_1 = 2b$; $y_2 = 0$ [unbrauchbar]

$$x = \frac{a \cdot 2b}{2b-b} = \frac{2ab}{b}; \qquad x = 2a.$$

$$F'' = \frac{a}{2} \cdot \frac{(y-b)^2 \cdot (2y-2b) - (y^2-2by) \cdot 2\,(y-b)}{(y-b)^4}$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{2y^3 - 4by^2 + 2b^2y - 2by^2 + 4b^2y - 2b^3 - 2y^3 + 4by^2 + 2by^2 - 4b^2y}{(y-b)^4}$$

$F'' = \frac{a}{2} \cdot \frac{2b^2y - 2b^3}{(y-b)^4}$; für $y = 2b$ eingesetzt: $F'' = \frac{a}{2} \cdot \frac{4b^3 - 2b^3}{b^4} = + \frac{a}{b}$ (daher Min.).

Das gesuchte kleinste Δ hat die Basis $x = 2a$ und die Höhe $y = 2b$; seine $Fl_{\text{Min}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab.$

3. Beispiel: Welche Abmessungen müssen Radius und Höhe eines Kreiszylinders haben, wenn seine Oberfläche gleich ist einer Kreisfläche mit dem Radius a und sein Volumen einen größten Wert annehmen soll?

Der Grundkreisradius sei x, die Höhe y; dann ist:

$O_{\text{Zyl.}} = 2x\pi\,(x + y)$; die Kreisfläche ist $a^2\pi$. Laut Aufgabe muß sein:

$$2x\pi\,(x + y) = a^2\pi; \quad 2x^2 + 2xy = a^2; \quad y = \frac{a^2 - 2x^2}{2x}.$$

$$V_{\text{Zyl.}} = x^2\pi y = x^2\pi \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{2x} = \frac{\pi}{2}\,(a^2x - 2x^3).$$

$V' = \frac{\pi}{2}\,(a^2 - 6x^2)$. $V' = 0$ gesetzt: $a^2 - 6x^2 = 0$; $x^2 = \frac{a^2}{6}$; $x = \frac{a}{6}\sqrt{6}$;

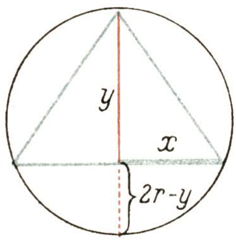
dieser Wert in y eingesetzt: $y = \dfrac{a^2 - \frac{a^2}{3}}{\frac{a}{3}\sqrt{6}} = \dfrac{2a^2}{3 \cdot \frac{a}{3}\sqrt{6}}$; $y = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$

$V'' = \frac{\pi}{2} \cdot (-12x) = -6\pi x$; für $x = \frac{a}{6}\sqrt{6}$ ist $V'' = -6\pi \cdot \frac{a}{6}\sqrt{6}$
$= -a\pi\sqrt{6}$ (daher Max.)

Der maximale Zylinder hat den Radius $x = \frac{a}{6}\sqrt{6}$ und die Höhe $y = \frac{a}{3}\sqrt{6}$, ist also ein gleichseitiger Zylinder, sein

$$V_{\text{Max.}} = \frac{a^2}{6}\pi \frac{a}{3}\sqrt{6} = \frac{a^3\pi}{18}\sqrt{6}.$$

4. Beispiel: In eine Kugel vom Radius r soll ein Kegel vom größten Volumen eingeschrieben werden.



Der Grundkreisradius sei x, die Höhe y; dann gilt nach dem Sehnensatz:

$x^2 = y\,(2r - y)$.

$$V_{Ke} = \frac{1}{3}x^2\pi y = \frac{1}{3} \cdot y\,(2r - y)\,\pi y = \frac{2}{3}r\pi y^2 - \frac{\pi}{3}y^3$$

$V' = \frac{4}{3}r\pi y - \pi y^2$. $V' = 0$ gesetzt:

$$\frac{4}{3}r\pi y = \pi y^2;\; y = \frac{4}{3}r;$$

dieser Wert in x^2 eingesetzt: $x^2 = \frac{4}{3}r\,(2r - \frac{4}{3}r)$; $x^2 = \frac{8}{9}r^2$;

$$x = \frac{2}{3}r\sqrt{2}.$$

$V'' = \frac{4}{3}r\pi - 2\pi y$; für $y = \frac{4}{3}r$ ist $V'' = \frac{4}{3}r\pi - \frac{8}{3}r\pi = -\frac{4}{3}r\pi$ (daher ein Max.)

Der gesuchte Kegel hat den Radius $x = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$ und die Höhe $y = \frac{4}{3}r$, sein $V_{\text{Max}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9}r^2\pi \cdot \frac{4}{3}r = \frac{32}{81}r^3\pi$.

5. Beispiel: Es sollen zylindrische Becher vom Inhalt 1078 ccm hergestellt werden. Welche Dimensionen wird man ihnen geben, um möglichst an Material zu sparen? ($\pi = \frac{22}{7}$).

$V_{\text{Zyl}} = x^2\pi y$; $1078 = x^2\pi y$; $y = \frac{1078}{\pi x^2}$.

$$\text{Oberfl.} = \text{Grundfl.} + \text{Mantel} = x^2\pi + 2x\pi y = x^2\pi + 2x\pi \cdot \frac{1078}{\pi x^2} = x^2\pi + \frac{2156}{x}$$

$O' = 2\pi x + 2156 \cdot (-1)x^{-2} = 2\pi x - \frac{2156}{x^2}$; $O' = 0$ gesetzt: $2\pi x^3 = 2156$;

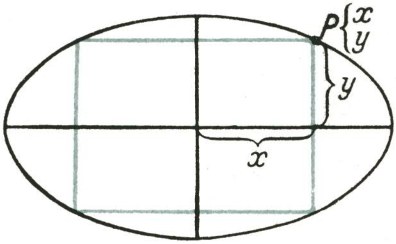
$$x^3 = \frac{2156 \cdot 7}{2 \cdot 22} = 7^3;\; x = 7.$$

$$y = \frac{1078 \cdot 7}{22 \cdot 49} = 7.$$

$O'' = 2\pi - \frac{2156\,(-2)}{x^3} = 2\pi + \frac{4312}{x^3} = \frac{44}{7} + \frac{4312}{7^3} = +$ (daher ein Min.)

Die Becher müssen einen Radius von 7 cm und eine Höhe von 7 cm haben.

6. Beispiel: Einer Ellipse $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist ein möglichst großes Rechteck einzuschreiben.



Maßgeblich für die Rechtecksfläche ist die Lage eines Eckpunktes $P\begin{cases} x \\ y \end{cases}$; dann ist:

$F = 2x \cdot 2y = 4xy.$

Aus der Ellipsengl. folgt:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}; \quad y = \underset{(-)}{+} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nun ist $F = 4\,x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{4b}{a} \sqrt{a^2x^2 - x^4}.$

$$F' = \frac{4b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2x - 4x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$F' = 0$ gesetzt: $a^2 - 2x^2 = 0$; $x^2 = \frac{a^2}{2}$; $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; in y einges.

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2}{2}}; \qquad y = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

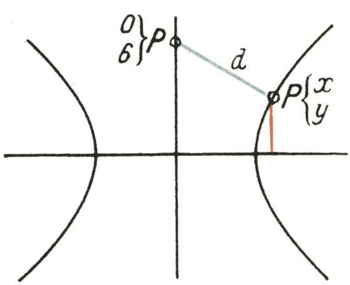
$$F'' = \frac{4b}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2} \cdot (-4x) - \frac{(a^2 - 2x^2)(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2};$$

vereinfacht: $F'' = \frac{4b\,x(2x^2 - 3a^2)}{a\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$; $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ eingesetzt:

$$F'' = \frac{4b \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}\,(a^2 - 3a^2)}{a \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)^3}} = -\frac{16b}{a} \text{ (daher ein Max.)}$$

$F_{max} = 4 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{2} = 2ab.$

7. Beispiel: Welcher Punkt der Hyperbel $H = x^2 - y^2 = 16$ hat vom Punkt $P\begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$ den kleinsten Abstand?



$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{x^2 + (y-6)^2};$

aus der Hyperbelgleichung folgt

$x^2 = 16 + y^2$: eingesetzt in d:

$d = \sqrt{16 + y^2 + y^2 - 12y + 36} = \sqrt{2y^2 - 12y + 52}$

$d' = \frac{4y - 12}{2\sqrt{2y^2 - 12y + 52}}$; $d' = 0$ gesetzt:

$4y - 12 = 0$: $y = 3$; $\quad x^2 = 16 + 9$; $x_{1,2} = \pm 5$

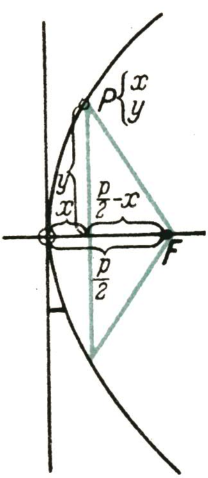
$$d'' = \frac{\sqrt{2y^2-12y+52}\cdot 2-(2y-6)\cdot\dfrac{4y-12}{2\sqrt{2y^2-12y+52}}}{2y^2-12y+52};$$

vereinfacht: $d'' = \dfrac{68}{\sqrt{(2y^2-12y+52)^3}}$; für $y=3$ ist $d'' = \dfrac{68}{\sqrt{(18-36+52)^3}}$

$= \dfrac{68}{\sqrt{34^3}} = +$ (daher ein Minimum).

Die gesuchten Punkte sind $P_1\left\{\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right.$ und $P_2\left\{\begin{matrix}-5\\3\end{matrix}\right.$; ihr Abstand von der Hyperbel beträgt $d_{min} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$.

8. Beispiel: Zwischen dem Brennpunkt und dem Scheitel der Parabel $P \equiv y^2 = 2px$ ist eine zur Achse senkrechte Sehne gezogen. Welchen Abstand vom Scheitel hat diese, wenn das von ihren Endpunkten und dem Brennpunkt gebildete Dreieck eine größte Fläche haben soll?



$F_\Delta = y\cdot\left(\dfrac{p}{2}-x\right)$. Aus $y^2 = 2px$ folgt $x = \dfrac{y^2}{2p}$; eingesetzt: $F = y\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{y^2}{2p}\right) = \dfrac{p}{2}y - \dfrac{1}{2p}y^3$

$F' = \dfrac{p}{2} - \dfrac{3}{2p}y^2$; $F' = 0$ gesetzt: $\dfrac{3}{2p}y^2 = \dfrac{p}{2}$; $y^2 = \dfrac{p^2}{3}$;

$y = \binom{+}{(-)}\dfrac{p}{3}\sqrt{3}$; dann ist $x = \dfrac{p^2}{3\cdot 2p}$; $\qquad x = \dfrac{p}{6}$.

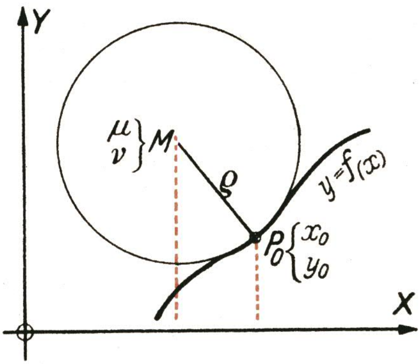
$F'' = -\dfrac{3}{p}y$; für $y = \dfrac{p}{3}\sqrt{3}$ ist

$F'' = -\dfrac{3}{p}\cdot\dfrac{p}{3}\sqrt{3} = -\sqrt{3}$ (daher ein Max.)

Die Sehne hat vom Scheitel den Abstand $\dfrac{p}{6}$; das Δ hat die größte Fläche $F_{Max} = \dfrac{p}{3}\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{p}{6}\right) =$

$= \dfrac{p}{3}\sqrt{3}\cdot\dfrac{p}{3} = \dfrac{p^2}{9}\sqrt{3}$.

Krümmung einer Kurve — Krümmungskreis.



Die Größe der Krümmung in einem beliebigen Kurvenpunkt $P_0\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$ ist bestimmt durch den Radius jenes Kreises, der sich der Kurve im betreffenden Kurvenpunkt am engsten anschmiegt und als Krümmungskreis bezeichnet wird. Ist sein Radius ϱ und hat sein Mittelpunkt die Koordinaten μ und ν, dann ist

$$\boxed{\varrho = \frac{\left[1+(y_0')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mu &= x_0 - y_0' \cdot \frac{1+(y_0')^2}{y_0''};\\ \nu &= y_0 + \frac{1+(y_0')^2}{y_0''}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\text{Krümmung} = \frac{1}{\varrho}}$$

Beispiel: Man berechne zunächst allgemein, dann speziell den Krümmungsradius und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes für $P \equiv y^2 = 2px$, speziell für den Scheitel!

$$y^2 = 2px;\quad y = \pm\sqrt{2p}\cdot\sqrt{x};\quad y' = \pm\sqrt{2p}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \pm\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}};$$

$$y'' = \mp\frac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}}.$$

Für $P_0\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$ ist $\varrho = \dfrac{\left[1+\dfrac{p}{2x_0}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot 4\sqrt{x_0^3}}{\sqrt{2p}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{\dfrac{(2x_0+p)^3\cdot x_0^3}{(2x_0)^3}}}{\sqrt{2p}} =$

$$= \frac{\sqrt{2\cdot(2x_0+p)^3}}{\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{(2x_0+p)^3}{p}}.$$

$$\mu = x_0 + \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{p}{2x_0}\right)4x_0\sqrt{x_0}}{\sqrt{2p}} = x_0 + \frac{(2x_0+p)\cdot 2x_0\sqrt{x_0}}{x_0\cdot 2\sqrt{x_0}} =$$

$$= x_0 + 2x_0 + p = 3x_0 + p.$$

$$\nu = y_0 - \frac{\left(1+\dfrac{p}{2x_0}\right)\cdot 4x_0\sqrt{x_0}}{\sqrt{2p}} = y_0 - \frac{(2x_0+p)\cdot 2x_0\sqrt{x_0}}{x_0\cdot\sqrt{2p}} = y_0 - \frac{(4x_0+2p)\sqrt{x_0}}{\sqrt{2p}}$$

Für den Scheitel $A\begin{cases}0\\0\end{cases}$ ist $\varrho = \sqrt{\dfrac{p^3}{p}} = p$; $\mu = p$ und $\nu = 0$.

Integralrechnung.

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation. **Bei der Integration handelt es sich darum, diejenige Funktion zu finden, deren erster Differentialquotient gegeben ist.**

Man schreibt die gesuchte Funktion in der Form: $F_{(x)} = \int f_{(x)}\,dx$ und nennt sie das Integral der gegebenen Funktion $f_{(x)}$.

Merke: **Zu jedem unbestimmten Integral muß noch eine Konstante c addiert werden.**

Formelzusammenstellung der einfachen Integrale:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int a \cdot x^n\,dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c'$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + c = -\operatorname{arc\,ctg} x + c'$
10. $\int e^x\,dx = e^x + c$
11. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
12. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$

13. $\int \left[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)\right] dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx$ d.h.

Das Integral eines Aggregates von Funktionen ist gleich dem Aggregat der Integrale der einzelnen Funktionen.

Beispiel:

$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$	$\int \frac{m}{4} e^{x+3}\,dx = \frac{m}{4}\, e^3 \int e^x\,dx = \frac{m}{4} e^{x+3} + c$
$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + c$	$\int 125 \cdot 5^{x-4}\,dx = \int \frac{125}{5^4} \cdot 5^x dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{5^x}{ln\,5} + c$
$\int 3 \cdot x^{11}\,dx = 3\,\frac{x^{12}}{12} = \frac{x^{12}}{4} + c$	$\int \frac{11}{x}\,dx = 11 \cdot ln\,x + c$

$$\int \frac{15x^2 + 24x^6 - 36x^{11}}{12x^6}\,dx = \int \left(\frac{5}{4}\,x^{-4} + 2 - 3\,x^5\right) dx =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + 2x - 3 \cdot \frac{x^6}{6} = \frac{-5}{12x^3} + 2x - \frac{x^6}{2} + c$$

$$\int \frac{5\sqrt[4]{x^3} - 8\sqrt[6]{x} - 11\sqrt[8]{x^7}}{4\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{5}{4}\,x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - \frac{11}{4}\,x^{\frac{3}{8}}\right) dx =$$

$$= \sqrt[4]{x^5} - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt[8]{x^3} + c$$

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx = 2 \cdot \mathrm{tg}\,x + 2\,\mathrm{ctg}\,x = 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{4}{\sin 2x} + c$$

Integration durch Substitution.

Regel: Statt der Veränderlichen x führt man eine neue Variable z ein, die auf bekannte Weise mit x im Zusammenhang steht und wertet dann das einer Fundamentalform entsprechende $\int f(z)\,dz$ aus.

Beispiele: 1.)

$$\int \frac{3dx}{2\sqrt[5]{(4a-5x)^2}} = \frac{3}{2} \int -\frac{dz}{5z^{\frac{2}{5}}} = \frac{-3}{10} \int z^{-\frac{2}{5}}\,dz =$$

$$= \frac{-3 \cdot 5}{10 \cdot 3}\, z^{\frac{3}{5}} = -\frac{1}{2} \sqrt[5]{(4a-5x)^3} + c.$$

Man setzt: $z = 4a - 5x$; dann ist: $\frac{dz}{dx} = -5$; $dx = -\frac{dz}{5}$.

2.)

$$\int (2x^5 - 3)^3 \cdot 5x^4 dx = \frac{5}{10} \int z^3 \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^4}{4} = \frac{1}{8}(2x^5 - 3)^4 + c.$$

Man setzt: $z = 2x^5 - 3$; dann ist: $\frac{dz}{dx} = 10x^4$; $x^4 dx = \frac{dz}{10}$.

3.)

$$\int \frac{8x^3 - 28x}{x^4 - 7x^2 + 8}\,dx = 2 \int \frac{dz}{z} = 2\,ln\,z = 2 \cdot ln\,(x^4 - 7x^2 + 8) + c.$$

Man setzt: $z = x^4 - 7x^2 + 8$; dann ist: $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 14x$; $(4x^3 - 14x)\,dx = dz$.

4.) $\int \frac{dx}{\sqrt{21-12x-9x^2}} =$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{21-(9x^2+12x+4)+4}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-(3x+2)^2}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{1-\left(\frac{3x+2}{5}\right)^2}} =$$

$$= \frac{5}{3\cdot 5}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+2}{5} + c.$$

Man setzt; $z = \frac{3x+2}{5}$;
dann ist:
$\frac{dz}{dx} = \frac{3}{5}$; $dx = \frac{5}{3}dz$.

5.) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+34} = \int \frac{dx}{(2x-5)^2+9} =$

$$= \int \frac{dx}{9\left[1+\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2\right]} = \frac{3}{2\cdot 9}\int \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-5}{3} + c.$$

Man setzt: $z = \frac{2x-5}{3}$;
dann ist:
$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{3}$; $dx = \frac{3}{2}dz$.

6.) $\int \operatorname{ctg} 4x\,dx = \int \frac{\cos 4x}{\sin 4x}dx = \frac{1}{4}\int\frac{dz}{z} =$

$$= \frac{1}{4}\ln z = \frac{1}{4}\ln\sin 4x + c.$$

Man setzt: $z = \sin 4x$;
dann ist: $\frac{dz}{dx} = 4\cos 4x$;
$\cos 4x\,dx = \frac{dz}{4}$.

7.) $\int e^x \cdot \sqrt[n]{\left(1+e^x\right)^m}\,dx = \int z^{\frac{m}{n}}\,dz =$

$$= \frac{z^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{\left(1+e^x\right)^{m+n}} + c.$$

Man setzt: $z = 1 + e^x$;
dann ist:
$\frac{dz}{dx} = e^x$; $e^x\,dx = dz$.

8.) $\int a^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = \int a^z\cdot dz = \frac{a^z}{\ln a} =$

$$= \frac{1}{\ln a}a^{\sin x} + c.$$

Man setzt $z = \sin x$; dann ist:
$\frac{dz}{dx} = \cos x$; $\cos x\,dx = dz$.

9.) $\int \frac{2\operatorname{ctg} 2x}{\sqrt{\ln\sin 2x}}dx = 2\int\frac{\cos 2x}{\sin 2x\sqrt{\ln\sin 2x}}dx =$

$$= \frac{2}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = 2z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\ln\sin 2x} + c.$$

Man setzt $z = \ln\sin 2x$;
dann ist:
$\frac{dz}{dx} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$; $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx = \frac{dz}{2}$

10.) $\int \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx = \frac{1}{\ln a}\int\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\ln a}\operatorname{arc\,tg} z =$

$$= \frac{1}{\ln a}\operatorname{arc\,tg} a^x + c.$$

Man setzt $z = a^x$; dann ist:
$\frac{dz}{dx} = a^x\ln a$; $a^x\,dx = \frac{dz}{\ln a}$.

Partielle Integration.

Beim Integral $\int x \cdot \cos x\,dx$ ist beispielsweise der eine Teil der zu integrierenden Funktion <u>nicht</u> der Differentialquotient des anderen Teiles, so daß die Substitutionsmethode versagt. Beide Teile der Funktion sind aber einzeln sowohl differenzierbar als auch integrierbar. Man versucht deshalb die Integration stufenweise (partiell) durchzuführen.

Aus der Formel $\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ folgt $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$; beiderseits integriert: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$;

$$u \cdot v = \int udv + \int vdu\text{; oder:}$$

$$\boxed{\int udv = u \cdot v - \int vdu}$$

Beispiele 1.) $\int x \cdot \cos x\,dx = x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x + c.$

Setzt man $u = x$ und $dv = \cos x\,dx$, so ist $du = dx$ und $v = \int \cos x\,dx = \sin x$.

2.) $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x = e^x \cdot (x-1) + c.$

Setzt man $u = x$ und $dv = e^x\,dx$, so ist $du = dx$ und $v = \int e^x dx = e^x$.

3.) $\int \frac{\ln x}{x^4}\,dx = -\frac{\ln x}{3x^3} + \int \frac{1}{3x^4}\,dx = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} = -\frac{1}{9x^3} \cdot (1 + 3\ln x) + c.$

Man setzt $u = \ln x$ und $dv = \frac{dx}{x^4}$; dann ist: $du = \frac{1}{x}dx$

$v = \int x^{-4}\,dx = \frac{-1}{3x^3}$.

4.) $\int a^x \cdot x\,dx = \frac{x \cdot a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a}dx = \frac{x \cdot a^x}{\ln a} - \frac{a^x}{(\ln a)^2} = \frac{a^x}{(\ln a)^2}(x \cdot \ln a - 1) + c.$

Man setzt $u = x$ und $dv = a^x\,dx$: dann ist: $du = dx$ und $v = \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$.

5.) $\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x\,dx =$

$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$; daher ist

$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cdot \cos x + x$; folglich

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$

Man setzt $u = \cos x$ und $dv = \cos x\,dx$; dann ist $du = -\sin x \cdot dx$ und $v = \int \cos x dx = \sin x$.

6.) $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,sin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
$= x \cdot \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + c.$

Man setzt $u = \operatorname{arc\,sin} x$ und $dv = dx$; dann ist $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ und $v = \int dx = x.$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = -z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$ | $z = 1 - x^2;\ \frac{dz}{dx} = -2x$

7.) $\int \operatorname{arc\,ctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,ctg} x + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,ctg} x + \frac{1}{2}\, ln\,(1+x^2) + c.$

Man setzt $u = \operatorname{arc\,ctg} x$ und $dv = dx$; dann ist $du = \frac{-1}{1+x^2}\,dx$ und $v = \int dx = x.$

$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} ln\,(1+x^2)$ | $z = 1+x^2;\ \frac{dz}{dx} = 2x$

Einige schwierigere Integrale.

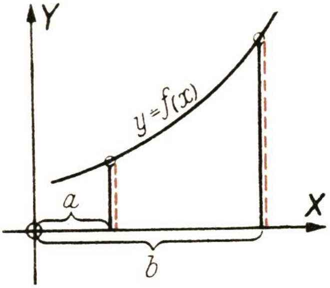
$$\boxed{\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx &= -\frac{\sin^{n-1} x\ \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx + c\\ \int \cos^n x\,dx &= \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx + c\end{aligned}}$$

Rekursionsformeln.

$$\boxed{\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + c}$$

Kreisintegral.

Das bestimmte Integral.



$$\boxed{\int_a^b y\,dx = \left[\int y\,dx\right]_{x=b} - \left[\int y\,dx\right]_{x=a}}$$

Der Wert eines bestimmten Integrals wird erhalten, indem man in das berechnete unbestimmte Integral für x erst die obere Grenze einsetzt und davon denjenigen Wert subtrahiert, den das gleiche Integral für die untere Grenze annimmt.

Merke: Das bestimmte Integral ist keine Funktion von x, sondern eine Zahl.

Beispiele 1.) $\int_{-2}^{5}(6x^2-3x+1)\,dx = \left[2x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{x=-2}^{x=5} = (250-\frac{75}{2}+5)$
$-(-16-6-2) = 241\frac{1}{2}$.

2.) $\int_{1}^{2}(2+4x^3+\frac{160}{x^6})\,dx = \left[2x+x^4-\frac{32}{x^5}\right]_{1}^{2} = (4+16-1)$
$-(2+1-32) = 48$.

3.) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} 2\cos x\,dx = 2\left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} = 2\left[\sin\frac{9\pi}{4}-\sin(-\frac{\pi}{4})\right] =$
$= 2\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right] = 2\sqrt{2}$.

4.) $\int_{-1}^{0,5}\frac{x\,dx}{(6-8x^2)^2} = \frac{-1}{16}\int z^{-2}\,dz = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z} =$
$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{6-8x^2}\right]_{-1}^{0,5} = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})\right] = \frac{3}{64}$.

Man setzt $z = 6-8x^2$;
dann ist: $\frac{dz}{dx} = -16x$;
$x\,dx = -\frac{dz}{16}$.

5.) $\int_{0}^{0,2} 10\,e^{5x}\,dx = 2\int e^z\,dz = 2\left[e^{5x}\right]_{0}^{0,2} =$
$= 2\left[e^1-e^0\right] = 2\left[e-1\right] = 3,44$.

Man setzt $z = 5x$;
dann ist: $\frac{dz}{dx} = 5$;
$dx = \frac{dz}{5}$.
$e \sim 2,72$.

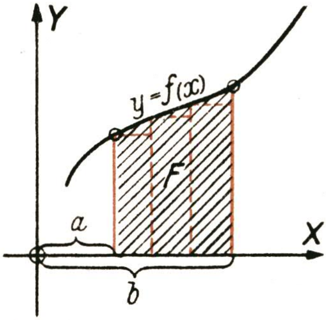
6.) $\int_{e}^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_{e}^{e^2} =$
$= \frac{1}{2}\left[(\ln e^2)^2-(\ln e)^2\right] = \frac{1}{2}\left[4-1\right] = \frac{3}{2}$.

Man setzt $z = \ln x$;
dann ist: $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$;
$\frac{dx}{x} = dz$.
$\ln e = 1$.

7.) $\int_{\frac{\pi}{3a}}^{\frac{\pi}{2a}}\sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int\sin z\,dz = \frac{1}{a}(-\cos z) =$
$= -\frac{1}{a}\left[\cos ax\right]_{\frac{\pi}{3a}}^{\frac{\pi}{2a}} = -\frac{1}{a}\left[\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}\right] =$
$= -\frac{1}{a}(0-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2a}$.

Man setzt $z = ax$;
dann ist: $\frac{dz}{dx} = a$;
$dx = \frac{dz}{a}$.

Fläche ebener Figuren.



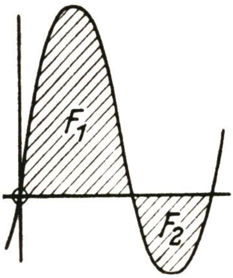
Ist eine Kurve $y = f(x)$ gegeben, so ist das Flächenstück, das von dieser Kurve, der X-Achse und den in den Punkten $x = a$ und $x = b$ errichteten Ordinaten begrenzt wird:

$$\boxed{F = \int_a^b y\,dx}$$

Denn das Integral ist gleich dem Grenzwert der Summe aller schmalen Rechtecke, deren Seiten einerseits die Ordinaten der Kurvenpunkte und andererseits die Strecken Δx sind. Man stellt das symbolisch dar:

$$\text{Die Fläche } F = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} y\,\Delta x = \int_a^b y\,dx.$$

1. Beispiel: **Bestimme die Schnittpunkte der Kurve $y = x^3 - 8x^2 + 15x$ mit der X-Achse und die Flächen der Segmente oberhalb und unterhalb der Abszissenachse!**



$y = 0$ gesetzt: $x^3 - 8x^2 + 15x = 0$; $x(x^2 - 8x + 15) = 0$;

$x_1 = 0$; $x^2 - 8x + 15 = 0$; $x_{2;3} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2}$;

$x_2 = 5$; $x_3 = 3$.

Die Kurve schneidet die X-Achse in $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$.

$$F_1 = \int_0^3 (x^3 - 8x^2 + 15x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{216}{3} + \frac{135}{2} = 15\frac{3}{4}\,(\text{F. E.})$$

$$F_2 = \int_3^5 (x^3 - 8x^2 + 15x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_3^5 = \frac{625}{4} - \frac{1000}{3}$$

$$+ \frac{375}{2} - \frac{81}{4} + \frac{216}{3} - \frac{135}{2} = -5\frac{1}{3}\,(\text{F. E.})$$

Die Vorzeichen geben an, ob die Flächen oberhalb (+) oder unterhalb (—) der X-Achse liegen.

2. Beispiel: **Wie groß ist das Flächenstück, das zwischen der Kurve $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 30$, der X-Achse und den Ordinaten des höchsten und tiefsten Punktes liegt?**

$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 30$; $y' = 3x^2 - 18x + 15$; Bedingung: $y' = 0$.

$3x^2 - 18x + 15 = 0/:3$; $x^2 - 6x + 5 = 0$; $x_{1;2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2}$;

$x_1 = 5$; $x_2 = 1$.

$$F = \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 15x + 30)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 30x\right]_1^5 =$$

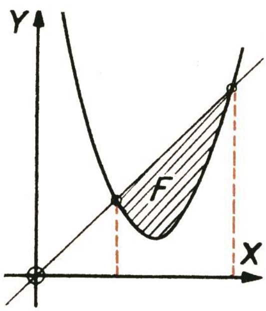
$$= \frac{625}{4} - 375 + \frac{375}{2} + 150 - \frac{1}{4} + 3 - \frac{15}{2} - 30 = \frac{336}{4} = 84\,(F.\,E.)$$

3. Beispiel: Wie groß ist das von der Kurve $y = \frac{x^3}{2} + 4$, der X-Achse und der Ordinate für $x = 2$ begrenzte Flächenstück?

$y = 0$ gesetzt: $\frac{x^3}{2} + 4 = 0$; $x^3 = -8$; $x = -2$.

$$F = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^3}{2} + 4\right) dx = \left[\frac{x^4}{8} + 4x\right]_{-2}^{2} = 2 + 8 - 2 + 8 =$$
$$= 16 \; (F.\,E.)$$

4. Beispiel: Wie groß ist das Segment der Parabel $y = x^2 - 6x + 10$, das durch die Gerade $y = x$ abgeschnitten wird?



I. $y = x^2 - 6x + 10$
II. $y = x$

II. in I. $x^2 - 7x + 10 = 0$

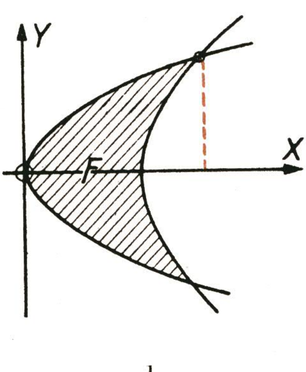
$$x_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}; \; x_1 = 5; \; x_2 = 2.$$

$$F_1 = \int_2^5 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = 10\tfrac{1}{2}.$$

$$F_2 = \int_2^5 (x^2 - 6x + 10)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x\right]_2^5 =$$
$$= \frac{125}{3} - 75 + 50 - \frac{8}{3} + 12 - 20 = 6.$$

$$F = F_1 - F_2 = 10\tfrac{1}{2} - 6 = 4\tfrac{1}{2} \; (F.E.)$$

5. Beispiel: Wie groß ist die Fläche desjenigen Stückes, das zwischen den beiden Parabeln $y^2 = 4x$ und $y^2 = 12x - 72$ gelegen ist?



I. $y^2 = 4x$
II. $y^2 = 12x - 72 = 12(x - 6)$

II—I. $8x = 72$; $x = 9$.

$$F_1 = \int_0^9 \sqrt{4x}\,dx = 2 \cdot \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{4}{3} \cdot 3^3 = 36.$$

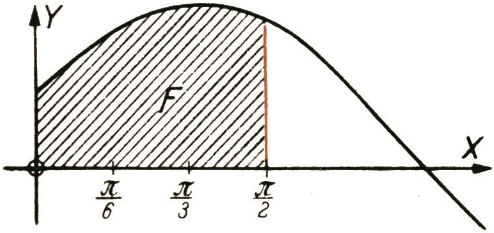
$$F_2 = \int_6^9 \sqrt{12x - 72}\,dx = \sqrt{12} \int_6^9 \sqrt{x - 6}\,dx$$

NR: $z = x - 6$; $\frac{dz}{dx} = 1$; $dx = dz$

$$F_2 = \sqrt{12} \int z^{\frac{1}{2}} dz = \sqrt{12} \cdot \frac{2}{3} \left[(x - 6)^{\frac{3}{2}}\right]_6^9 =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left[3\sqrt{3} - 0\right] = 12.$$

$$\frac{1}{2} F = F_1 - F_2 = 36 - 12 = 24; \quad F = 48 \; (F.E.)$$

6. **Beispiel:** Bestimme von der Kurve $y = 2\sin x + \cos x$ das Flächenstück zwischen der X-Achse, der Y-Achse, der Kurve und ihrer Ordinate für $x = \frac{\pi}{2}$!



$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + \cos x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= \Big[-2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 0 + 2 + 1 - 0 = 3\ (F.E.)$$

7. **Beispiel:** Man berechne die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b!

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Big|\cdot a^2b^2;\quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

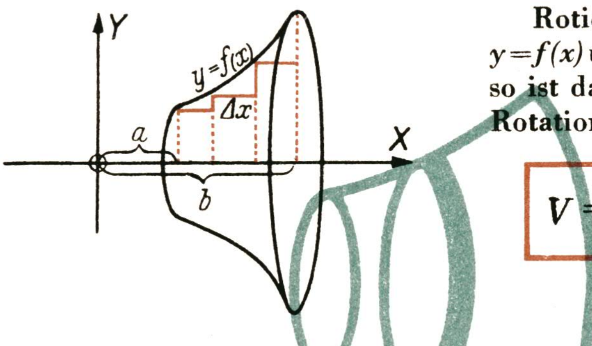
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$\dfrac{F}{4} = \dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$; nach der Formel für das Kreisintegral:

$\dfrac{F}{4} = \dfrac{b}{a}\left[\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a = \dfrac{b}{a}\left[\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right] = \dfrac{ab\pi}{4}$; daher:

$F = ab\pi$. (Ist $a = b$; dann ist $F = a^2\pi$ die Kreisfläche).

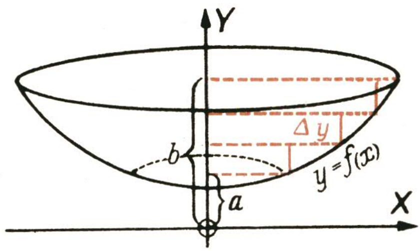
Volumenberechnung von Rotationskörpern.



Rotiert eine Kurve $y = f(x)$ um die X-Achse, so ist das Volumen des Rotationskörpers

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2\,dx}$$

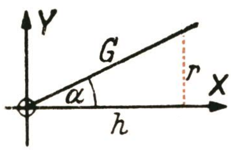
Denn das Integral ist gleich dem Grenzwert der Summe aller schmalen Zylinderscheiben, deren Basis πy^2 und deren Höhe Δx ist. Man stellt das symbolisch dar: Das Volumen $V = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_a^b \pi y^2 \Delta x = \pi \int\limits_a^b y^2\,dx.$



Rotiert die Kurve $y=f(x)$ um die Y-Achse, so ist das Volumen des Rotationskörpers:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b x^2\,dy}$$

1. Beispiel: Man bestimme das Volumen eines geraden Kreiskegels vom Radius r und der Höhe h:



$$\operatorname{tg}\alpha=m=\frac{r}{h};\quad G\equiv y=\frac{r}{h}x;\quad y^2=\frac{r^2}{h^2}x^2;$$

$$V=\frac{r^2}{h^2}\pi\int_0^h x^2\,dx=\frac{r^2\pi}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{r^2\pi\cdot h^3}{3\cdot h^2}=\frac{1}{3}r^2\pi h.$$

2. Beispiel: Der Kreis $x^2+y^2=r^2$ rotiert um die X-Achse. Wie groß ist das Volumen der entstehenden Kugel?

Aus der Kreisgl. folgt: $y^2=r^2-x^2$.

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^r(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\pi\cdot\frac{2}{3}r^3=\frac{2}{3}r^3\pi$$

$$V=\frac{4}{3}r^3\pi.$$

3. Beispiel: Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rotiert um die Y-Achse; wie groß ist das Volumen des Rotationsellipsoïdes?

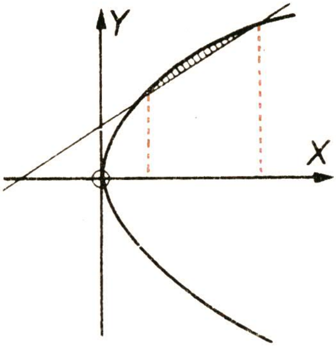
Aus der Ellipsengl. folgt: $x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$

$$V=2\cdot\pi\cdot\frac{a^2}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)\,dy=\frac{2a^2\pi}{b^2}\left[b^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^b=\frac{4}{3}a^2b\pi.$$

4. Beispiel: Ein Kelchglas hat als Achsenschnitt die Kurve $x^2=6y$. Berechne das Volumen bei 5 cm Flüssigkeitshöhe!

$$V=\pi\int_0^5 6y\,dy=6\pi\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^5=3\pi\cdot25=75\pi\ \text{(ccm)}.$$

5. Beispiel: Welches Volumen hat der ringförmige Körper, der durch Rotation des zwischen der Parabel $y^2 = 4x$ und der Geraden $2x - 3y + 4 = 0$ liegenden Flächenstückes um die X-Achse entsteht?



I. $2x - 3y + 4 = 0$
II. $y^2 = 4x$

Aus I: $x = \frac{3y - 4}{2}$ in II.

$y^2 = 6y - 8$; $y^2 - 6y + 8 = 0$;

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$y_1 = 4$; $y_2 = 2$; $x_1 = 4$; $x_2 = 1$.

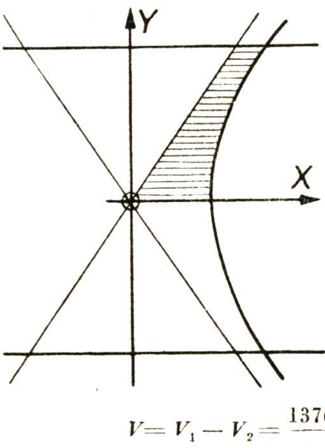
$$V_1 = \pi \int_1^4 4x\,dx = \pi \cdot 2 \left[x^2\right]_1^4 = 2\pi \cdot 15 = 30\pi.$$

$$V_2 = \pi \int_1^4 \left(\frac{2x+4}{3}\right)^2 dx = \frac{\pi}{9} \int_1^4 (4x^2 + 16x + 16)\,dx = \frac{\pi}{9} \left[\frac{4}{3} x^3 + 8x^2 + \right.$$

$$\left. + 16x \right]_1^4 = \frac{\pi}{9} \left[\frac{256}{3} + 128 + 64 - \frac{4}{3} - 8 - 16\right] = 28\pi.$$

$V = V_1 - V_2 = 30\pi - 28\pi = 2\pi$ (*R.E.*).

6. Beispiel: Das Flächenstück, das von der Kurve $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, den beiden Asymptoten und Parallelstrecken zur X-Achse im Abstand ± 4 begrenzt ist, rotiert um die Y-Achse. Welchen Rauminhalt hat der dadurch entstehende Körper?



Aus der Hyperbelgl. folgt: $x^2 = \frac{4}{9}(y^2 + 9)$;

$$V_1 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{4}{9} \int_0^4 (y^2 + 9)\,dy = \frac{8\pi}{9} \left[\frac{y^3}{3} + 9y\right]_0^4$$

$$= \frac{8\pi}{9} \left[\frac{64}{3} + 36\right] = \frac{1376}{27}\pi.$$

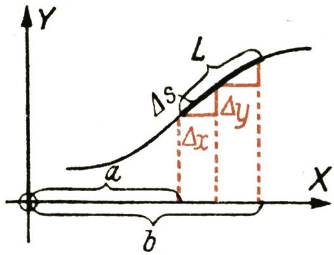
Gleichung der Asymptote: $A \equiv y = \frac{3}{2}x : x = \frac{2}{3}y$

$$V_2 = 2 \cdot \pi \int_0^4 \left(\frac{2}{3}y\right)^2 dy = \frac{8}{9}\pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^4 =$$

$$\frac{8\pi}{27} \cdot 64 = \frac{512}{27}\pi.$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1376\pi - 512\pi}{27} = \frac{864}{27}\pi = 32\pi \text{ (R.E.)}.$$

Bestimmung von Bogenlängen ebener Kurven.



$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

denn $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, also $\Delta s = \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$.

$$L = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_a^b \Delta s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx.$$

1. Beispiel: Berechne die Länge des Bogens der Kurve $y^2 = px^3$ (Neilsche Parabel) zwischen den Abszissen 0 und 5 für $p = 1$!

$y^2 = px^3$; $y = \sqrt{p}\cdot x^{\frac{3}{2}}$; $y' = \frac{3}{2}\sqrt{px}$.

$$L = \int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$$

Man setzt $z = 1 + \frac{9}{4}x$; $\frac{dz}{dx} = \frac{9}{4}$; $dx = \frac{4}{9}dz$.

$$L = \frac{4}{9}\int_0^5 z^{\frac{1}{2}}\, dz = \frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3} - 1\right] = \frac{8}{27}\left[\frac{343-8}{8}\right] =$$

$$= \frac{1}{27}\; 335 = 12\frac{11}{27}\ (L.E.)$$

2. Beispiel: Wie groß ist die Bogenlänge der Kurve $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ zwischen den Abszissen $x_1 = 1$ und $x_2 = e$?

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x;\quad y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2-1}{2x}$$

$$L = \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \sqrt{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}}\, dx =$$

$$= \int_1^e \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}}\, dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}\, dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 =$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1) \approx 2{,}1\ (L.E.).$$

Berechnung der Mantelflächen von Rotationskörpern.

$$\boxed{M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}$$

denn das Integral ist gleich dem Grenzwert der Summe aller Zylindermäntel, deren Grundkreisumfang $2\pi y$ und deren Mantellinie $\triangle s$ ist.

$$M = \lim_{\triangle s \to 0} \sum_a^b 2\pi y \cdot \triangle s = \lim_{\triangle s \to 0} \sum_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}\, \triangle x$$

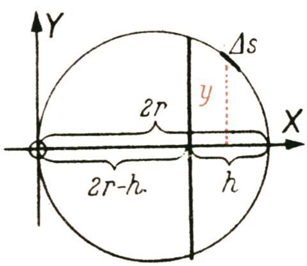
$$= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

1. Beispiel: **Wie groß ist der Mantel eines Kegels, der durch Rotation der Geraden $y = mx$ um die X-Achse entsteht? (Bis $x_2 = h$ und $y_2 = r$).**

$$m = \frac{r}{h}; \; y = \frac{r}{h} x; \; y' = \frac{r}{h}$$

$$M = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}\, dx = \frac{2 r \pi}{h^2} \cdot \underbrace{\sqrt{r^2 + h^2}}_{s} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{r\pi \cdot s}{h^2} \cdot h^2 = r\pi s.$$

2. Beispiel: **Ein Kreis von der Gleichung $x^2 - 2rx + y^2 = 0$ rotiere um die X-Achse. Wie groß ist die gekrümmte Oberfläche einer Kugelhaube von der Höhe h und wie groß ist die Gesamtoberfläche der Kugel? (Siehe auch Sk. S. 10/11).**



$$K \equiv (x - r)^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{2rx - x^2}; \; y' = \frac{2r - 2x}{2\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{r - x}{\sqrt{2rx - x^2}}$$

$$M = 2\pi \int_{2r-h}^{2r} \sqrt{2rx - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{(r - x)^2}{2rx - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{2r-h}^{2r} \sqrt{2rx - x^2 + r^2 - 2rx + x^2}\, dx =$$

$$= 2\pi r \Big[x\Big]_{2r-h}^{2r} = 2\pi r \Big[2r - 2r + h\Big] = 2r\pi h.$$

$$O = 2\pi r \Big[x\Big]_0^{2r} = 2\pi r \cdot \Big[2r - 0\Big] = 4 r^2 \pi.$$

3 -