B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z
zur Förderung math.- nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

AUFGABENSAMMLUNG FÜR ARBEITSGEMEINSCHAFTEN - Klasse 6

WIR SUCHEN ZUORDNUNGEN , ANORDNUNGEN UND AUSWAHLMÖGLICHKEITEN

1) Die Herren Baumann, Eichler und Hahn sind von Beruf Elektriker, Monteur und Ingenieur (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge). Es ist folgendes bekannt:

(1) Herr Hahn und der Elektriker kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
(2) Herr Baumann und der Ingenieur sind beide ledig.
(3) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
(4) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.

Weise nach, dass sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welche Berufe diese drei Herren ausüben. Gib diese Zuordnung an!

2) Es treffen sich ein Mathematiklehrer, ein Sportlehrer und ein Geschichtslehrer. Ihre Familiennamen sind Müller, Plam und Schultz. Ihre Vornamen lauten Otto, Klaus und Kurt. Ihre Wohnorte sind Anklam, Demmin und Neustrelitz.
Herr Müller erzählte dem Sportlehrer, dass er den Mathematiklehrer in Anklam besucht habe.
"Das weiß ich schon, Klaus", erwiderte Herr Plam, "Kurt erzählte mir davon, dass er Besuch aus Demmin gehabt habe."
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Zuordnung von Familiennamen, Vornamen, Wohnort und Lehrfach eindeutig ermitteln lässt!
Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

3) Die Lehrer Axtmann, Blechschmidt und Cornelius unterrichten Deutsch, Englisch und Französisch. Sie heißen Gert, Heiko und Ingo. Es ist folgendes bekannt:

(1) Axtmann ist der jüngste Lehrer.
(2) Blechschmidt, Gert und der Französischlehrer haben einen gemeinsamen Arbeitsweg.
(3) Gerd ist älter als Heiko.
(4) In der Freizeit spielen der Englischlehrer, Heiko und Axtmann gern Skat.

a) Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig eine Zuordnung zwischen den Vornamen, den Familiennamen und den Unterichtsfächern herleiten lässt!
b) Füge zu den Angaben noch folgende hinzu:
(5) Axtmann und der Französischlehrer sind Nachbarn.
Führe auch hier die unter a) geforderte Untersuchung durch!

4) Annemarie, Birgit, Claudia und Dieter spielen gemeinsam folgendes Spiel: Die Mädchen verstecken in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Tischtennisball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer welchen Gegenstand versteckt hat. Er darf drei Fragen stellen. Die Kinder haben vereinbart, dass nur eine der Antworten wahr ist, die beiden anderen dagegen falsch. Die Antworten lauteten:

(1) Annemarie hat den Tischtennisball.
(2) Birgit hat den Tischtennisball nicht.
(3) Claudia hat die Schere nicht.

Ermittle alle Zuordnungen, die die gestellten Bedingungen erfüllen!

5) Petja, Wasja, Kolja und Tolja zählten nach dem Fischfang ihre Beute. Es stellte sich folgendes heraus:

(1) Tolja fing mehr als Kolja.
(2) Petja und Wasja angelten zusammen so viele Fische wie Kolja und Tolja.
(3) Petja und Tolja fingen zusammen weniger Fische als Wasja und Kolja.

Weise nach, dass sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Angler nach ihrem Erfolg beim Angeln eindeutig ermitteln lässt! Gib diese Reihenfolge an!

6) Nach einem Scheibenschießen vergleichen Elke, Regina, Gert und Jochen ihre Schießleistungen. Jochen erzielte mehr Ringe als Gert. Elke und Regina erreichten gemeinsam die gleiche Ringzahl wie Jochen und Gert zusammen. Elke und Jochen erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gert zusammen.
Lässt sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Schüler nach fallender Ringzahl eindeutig ermitteln? Wenn ja, dann gib sie an!

7) Ein Betrieb kann unter Verwendung des gleichen Uhrwerks verschiedene Ausführungen von Uhren herstellen. Dazu stehen ihm 3 verschiedene Gehäuse, 4 verschiedene Zifferblätter und 2 verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Ermittle die größte Anzahl voneinander verschiedener Ausführungen von Uhren, die sich unter Verwendung der angegebenen Teile herstellen lassen!

8) Gegeben seien 4 verschiedene Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.
Wie viel verschiedene Verbindungsgeraden gibt es zwischen diesen Punkten?
Beantworte dieselbe Frage für 5, für 6 und für 33 Punkte!

9) Im Ferienlager sollen Jungen beim Kartoffelschälen helfen. Von 6 Jungen sollen 3 Jungen für dieses Tätigkeit ausgewählt werden.
Wie viel Möglichkeiten gibt es, verschiedene Gruppen zusammenzustellen?

10) Steffen findet in einer Kiste fünf Vorhängeschlösser; die zugehörigen Schlüssel sind durcheinander geraten. Wir wissen, dass mit jedem dieser Schlüssel genau eines dieser Schlösser geöffnet werden kann.
Wie viel Schließversuche muss Steffen machen, um in jedem Fall mit Sicherheit zu jedem Schloss den passenden Schlüssel herauszufinden?

11) In einer Kiste befinden sich 200 gleichartige Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden, und zwar 88 rote, 48 blaue, 36 schwarze, 15 weiße und 13 grüne. Aus dieser Kiste werden im Finstern (also ohne eine Farbe erkennen zu können) Kugeln entnommen.
Wie viel Kugeln muss man mindestens entnehmen, dass mit Sicherheit mindestens 17 der entnommenen Kugeln die gleiche Farbe haben?
Gib andere Bedingungen an und löse die zugehörigen Aufgaben!

WIR BERECHNEN GEWINNCHANCEN BEI SPIELEN

1) Beantworte folgende Fragen zum Würfeln, wobei davon ausgegangen wird, dass stets einwandfreie ("ideale") Würfel geworfen werden.

a) Was kann man beim einmaligen Werfen eines Würfels eher erwarten: "Es fällt eine gerade Zahl" oder "Es fällt eine Primzahl" ?
b) Mit welcher Chance würfelt man eine Serie von drei "Sechsen" nacheinander?
c) Sollte man beim gleichzeitigen Werfen zweier Würfel eher darauf wetten, dass die Augensumme 7 erscheint oder ist die Summe 9 zu bevorzugen?
d) Wie viel Würfel muss man mindestens auf einmal werfen, um mit Sicherheit 3 gleiche Augenzahlen zu erhalten?

2) Zwei Spieler A und B würfeln gleichzeitig und ermitteln jeweils die Summe s und das Produkt p der beiden gewürfelten Augenzahlen.
Wir betrachten folgende Spielregeln:
a) Ist s eine gerade Zahl, dann gewinnt A ; anderenfalls gewinnt B .
b) Gilt $s < 7$, dann gewinnt A ; anderenfalls gewinnt B .
c) Gilt $3|s$, dann gewinnt A ; anderenfalls gewinnt B .
d) Gilt $3|s$ oder $7|s$, dann gewinnt A ; anderenfalls gewinnt B .
e) Ist p eine gerade Zahl, dann gewinnt A ; anderenfalls gewinnt B .
f) Gilt $p < 10$, dann gewinnt A ; anderenfalls gewinnt B .
g) Gilt $3|p$, dann gewinnt A ; anderenfalls gewinnt B .
Ermittle für jedes dieser Spiele die Gewinnchance von A und die Gewinnchance von B !
Bilde eine weitere Spielregel, bei der A und B die gleichen Gewinnchancen besitzen!

3) Einem Skatblatt werden 6 Karten entnommen, nämlich von jeder der Farben "Eichel", "Grün" und "Rot" jeweils die Dame und der König.
Aus diesen 6 Karten werden "blind" 2 Karten gezogen.
Wie groß ist jeweils die Chance dafür, dass folgende beiden Karten gezogen werden:
a) das Paar "Rot-Dame / Rot-König" ;
b) ein gleichfarbiges Paar "Dame / König" ;
c) ein beliebiges Paar "Dame / König" ;
d) ein beliebiges Paar "Dame / Dame" ;
e) das Paar "Grün-König / Rot-König" .

4) Vor einigen hundert Jahren war in Wirtshäusern das Glücksspiel sehr verbreitet. Von zwei Personen A und B ist bekannt, dass sie dort ein Spiel nach folgenden Regeln spielten:
(1) Jeder zahlt vor Beginn des Spiels den gleichen Einsatz von 42 Groschen in einen Topf.
(2) Es wird eine Münze in einen Würfelbecher gesteckt, dieser geschüttelt und die Münze geworfen. Erscheint "Zahl", so erhält A einen Punkt; erscheint "Wappen", so erhält B einen Punkt.
(3) Wer zuerst 5 Punkte hat, bekommt den gesamten Einsatz von 84 Groschen allein.
Nun geschah es, dass das Spiel beim Stand von A : B = 4 : 3 abgebrochen werden musste und auch anschließend ein Weiterspielen nicht möglich war.
Wie ist das Geld im Topf zu verteilen?
1. Vorschlag: Weil der Spielstand 4 : 3 war, erhält A vier Anteile und B drei Anteile aus dem Topf.
2. Vorschlag: Weil A zum Sieg nur noch einen Punkt benötigt, B dagegen noch zwei Punkte, wird der Inhalt des Topfes im Verhältnis 2 : 1 aufgeteilt. A erhält zwei Anteile.
a) Berechne, wie viel Groschen A bzw. B bei diesen Vorschlägen jeweils erhalten.
Welche Verteilung hältst du für gerechter?
b) Welchen Vorschlag würdest du machen, um das Geld im Topf regelgerecht zu verteilen? Überlege dazu, welche Fortsetzungsmöglichkeiten das Spiel nach dem Stand von 4 : 3 besitzt!
[Diese Aufgabe ist in der Mathematikgeschichte als "Problem des Spielers und Glücksritters Chevalier de Meré" eingegangen und geht auf die Anfrage eines französischen Adligen an den Mathematiker BLAISE PASCAL (1623-1662) zurück.]

5) Zur Weihnachtsfeier haben alle Kinder kleine Geschenke gebastelt. Zehn besonders schön verpackte werden bei einem Quiz verlost. Sie sind mit den Ziffern von 0 bis 9 durchnummeriert. Jens möchte gern das Geschenk mit der Nummer 5 gewinnen, weil ihm das goldfarbene Papier gefällt. Leider haben drei andere Schüler im Quiz gewonnen. Sie dürfen sich jeder ein Geschenk auswählen und schreiben dazu deren Nummer auf kleine Zettel. Das macht jeder für sich, es kann also auch vorkommen, dass zwei von ihnen oder gar alle drei die gleiche Nummer aufschreiben.
Welche Chance kann man Jens als Viertplaziertem geben, sein gewünschtes Geschenk zu erhalten, wenn man nicht weiß, welche Zahlen von den anderen drei Schülern aufgeschrieben wurden?

ZAHLENTHEORETISCHE BESTIMMUNGSAUFGABEN

1) In einer 6. Klasse erhielt als Jahreszensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5 oder 6, jeder 9. Schüler erhielt die Note 1, jeder 3. Schüler erhielt die Note 2 und jeder 6. Schüler erhielt die Note 4 . Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$. Weise nach, dass sich aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten, eindeutig ermitteln lässt, und gib diese Anzahl an!

2) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die beim Dividieren durch 2 den Rest 1 , beim Dividieren durch 3 den Rest 2 , beim Dividieren durch 4 den Rest 3 , beim Dividieren durch 5 den Rest 4 und beim Dividieren durch 6 den Rest 5 aufweist.

3) Zu ermitteln sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die Differenz ihrer beiden Ziffern beträgt 3 .
(2) Vertauscht man ihre Ziffern, dann ist die neue Zahl um 9 kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

4) Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die zwischen 100 und 200 liegen, die durch 7 teilbar sind und deren Quersumme 11 beträgt!

5) Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die kleiner als 300 sind und die gleichzeitig durch 3 , 4 und 5 teilbar sind!

6) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 177. Teilt man die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, dann erhält man 3 und den Rest 9 .
Zeige, dass sich die beiden Zahlen aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lassen!
Wie heißen die beiden Zahlen?

7) Es sind alle natürlichen Zahlen x zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Dividiert man 100 durch die Zahl x , dann bleibt der Rest 4 .
(2) Dividiert man 90 durch die Zahl x , dann bleibt der Rest 18 .

8) Es gilt folgender Satz: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme ("Querdifferenz") QD(n) durch 11 teilbar ist. Dabei wird QD(n) wie folgt berechnet:
(1) Man nummeriert (bei der Einerstelle beginnend) die Ziffern der Zahl n von rechts nach links.
(2) Alle Ziffern mit ungerader Nummer werden addiert, ebenso alle Ziffern mit gerader Nummer.
(3) Man bildet die Differenz der beiden Summen.

Beispiele: $n = 7182659$; $QD(n) = (9+6+8+7) - (5+2+1) = 30 - 8 = 22$; $11|QD(n)$.
$n = 212652$; $QD(n) = (2+6+1) - (5+2+2) = 9 - 9 = 0$; $11|QD(n)$.
$n = 239261$; $QD(n) = (6+9+2) - (1+2+3) = 17 - 6 = 11$; $11|QD(n)$.

Gegeben seien die Ziffern 1 , 4 , 5 , 6 , 8 , 9 .

a) Bilde aus diesen sechs Ziffern eine durch 11 teilbare sechsstellige Zahl!

b) Wie viel verschiedene durch 11 teilbare sechsstellige Zahlen lassen sich insgesamt aus diesen sechs Ziffern erzeugen, wenn jede Ziffer nur einmal verwendet werden darf?

c) Wie lautet die kleinste und wie lautet die größte dieser Zahlen?

9) Stelle die gegebenen Zahlen jeweils als Produkt von Primzahlpotenzen dar und ermittle den größten gemeinsamen Teiler (ggT) sowie das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der gegebenen Zahlenpaare!

a) 30; 50	b) 12; 20	c) 10; 21
d) 168; 196	e) 660; 198	f) 221; 143

10) Lies im "Merkstoff" auf S.30 den Abschnitt "Zahlentheorie" durch! Veranschauliche die dort angegebenen Definitionen, Verfahren und Sätze durch selbstgewählte Beispiele!

11) Ermittle mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

a) ggT(4891; 1407) ; b) ggT(5083; 1955) ;
c) ggT(4301; 13464) ; d) ggT(2744; 675) .

12) Ermittle den ggT und das kgV zu folgenden Zahlenpaaren:

a) 4539; 2193 ; b) 819; 935 ;
c) 3689; 12121 ; d) 41272; 4572 .

GLEICHUNGEN UND SACHAUFGABEN

1) Löse folgende Gleichungen (im Bereich der gebrochenen Zahlen):

a) $3x = 15$ b) $9x = 6$ c) $\frac{1}{3}x = 4$

d) $\frac{5}{2}x = 15$ e) $2x + 15 = 37$ f) $x + 3x + \frac{3}{2}x = 110$

g) $\frac{4}{15}x + \frac{2}{5}x + 100 = x$ h) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{3} + 100 = x$ i) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + 7$

k) $\frac{1}{3}x + 150 + \frac{1}{4}x = x$ l) $3(x + 4) - 12 = 2(x + 5)$ m) $x - 6 = 3(\frac{2}{3}x - 6)$

2) Löse folgende Ungleichungen (im Bereich der gebrochenen Zahlen):

a) $\frac{3}{x} > 4$ b) $\frac{x}{3} - 2 < \frac{1}{5}$ c) $2x - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$

d) $2x - 5 + \frac{1}{2}x + 2 - 7 > 3$ e) $\frac{1}{2}(6x - 2) < \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}x + 3$ f) $\frac{3}{2}(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}) < \frac{1}{3}(\frac{2x}{5} + 1)$

3) Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 5 , zähle 15 hinzu und nimm von der erhaltenen Zahl den 5. Teil. Von dem Ergebnis subtrahiere die gedachte Zahl. Das Resultat wird in jedem Falle 3 sein. Wie ist das möglich?

4) A sagt zu B : "Denke dir irgendeine Zahl, vermehre sie um 5 , die Summe multipliziere mit 3 und subtrahiere von dem Produkt 7 . Nun nenne mir das Ergebnis."
B nennt A das Ergebnis, und A sagt ihm danach, welche Zahl er sich gedacht hatte.
Wie ist das zu erklären? Bilde ähnliche Aufgaben!

5) Eine Strecke von 20 Metern wird in 3 Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die dritte Teilstrecke ist dreimal so lang wie die erste.
Wie lang sind die Teilstrecken?

6)Eine Expedition legte am ersten Tag $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tag $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 100 km zurück.
a) Wie lang war die zurückgelegte Gesamtstrecke?
b) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?

7) Ein Rohr von 10 m Länge soll senkrecht zur Achse so zerschnitten werden, dass der eine Teil fünfmal so lang ist wie der andere.
Wie lang werden die beiden Teile?

8) Ein Radfahrer trainiert an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Am ersten Tag legte er $\frac{4}{15}$, am zweiten Tag $\frac{2}{5}$ der gesamten Trainingsstrecke und am dritten Tag 100 km zurück.
Wie viel Kilometer legte der Radfahrer jeweils am ersten und am zweiten Tag zurück?

9) In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische.
Wie viel Tische wurden im Juni und wie viel im Dezember hergestellt?

10) Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 € mehr als die Hälfte seines Spargeldes.
Wie viel Euro hat Rainer demnach insgesamt gespart?

11) Hans hat sich ein Buch gekauft. Von Bernd nach dem Preis befragt, antwortet er scherzhaft: "Das Buch kostet 1,50 € und noch $\frac{3}{8}$ seines Preises."
Wie teuer war das Buch?

12) Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt 3000 m². Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von jeweils 30 m.
Wie lang ist die andere Rechteckseite?

13) Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde ungefähr 340 m zurück, Rundfunkwellen dagegen rund 300000 km.
Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher:
a) ein Zuhörer im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt oder
b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung mit Kopfhörer in 1000 km Entfernung hört?

14) Ein Raumschiff umkreist in rund 88 Minuten einmal die Erde auf einer rund 41000 km langen Bahn.
a) Welche Strecke legt dieses Raumschiff in einer Sekunde zurück?
b) Welche Strecke legt es in einer Stunde zurück?
Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.

15) Für die Umzäunung eines quadratischen Gartens wurden 992 € bezahlt, wobei 1 m Zaun 4€ kostete.
Wie viel Hektar betrug die Fläche dieses Gartens?

16) Für eine rechteckige Terrasse wurden genau 400 Steinplatten verwendet. Die Platten, von denen jede 60 cm lang und 40 cm breit ist, bedecken lückenlos den Boden. Die Terrasse ist 10 m lang.
Wie breit ist die Terrasse? Gib das Ergebnis in Meter an!

17) Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehneuroscheinen, Zwanzigeuroscheinen und Fünfzigeuroscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10 €-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20 €-Scheine. Die Anzahl der 50 €-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20 €-Scheine.
Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

18) Arnd und Bernd spielen Zahlenraten. Beide denken sich vier Zahlen.
Arnd sagt:
- Meine erste Zahl ist um drei größer als das Doppelte der zweiten Zahl.
- Die dritte Zahl ist so groß wie die beiden ersten zusammen.

- Die vierte Zahl ist um eins kleiner als das Doppelte der dritten Zahl.
- Die Summe aus meinen vier Zahlen beträgt 83 .

Nachdem Bernd diese vier Zahlen ermittelt hat, sagt er:
- Meine Zahlen stimmen mit deinen Zahlen nicht überein. Dennoch haben sie dieselben Eigenschaften wie deine Zahlen, nur ist ihre Summe kleiner als 83.
- Ich verrate dir noch, dass meine vierte Zahl bei Division durch vier den Rest eins lässt.

Nach einigem Überlegen sagt Arnd:
Deine Angaben reichen nicht aus, um deine vier Zahlen eindeutig zu ermitteln.

a) Wie lauten die vier Zahlen, die sich Arnd gedacht hat?

b) Weise nach, dass Arnd mit seiner letzten Aussage recht hat!

19) Arnd und Bert lassen ihre Spielzeugautos auf einem Rundkurs jeweils mit konstanter Geschwindigkeit kreisen.
Wenn sie im gleichen Sinn herum fahren, überholt Berts Auto das von Arnd alle 20 Sekunden; wenn sie entgegengesetzt herum fahren, begegnen sich die Autos alle 5 Sekunden.
Wie viel Sekunden braucht jedes Auto für den Rundkurs?

AUSSAGEN , AUSSAGEFORMEN UND TERME

1) Lies im "Merkstoff" auf S.31 den Abschnitt "Einige Grundlagen aus Logik und Mengenlehre" bis zu "Verknüpfungen von Aussagen oder Aussageformen"!
Bilde eigene Beispiele für:

Einzelaussage: ....

Allaussage: ....

Existenzaussage: ....

Erfüllbare Aussageform ....

Allgemeingültige Aussageform: ....

Nicht erfüllbare Aussageform: ....

2) Entscheide von folgenden sprachlichen (mathematischen) Gebilden, ob es sich um eine Definition (D), eine Aussage (A), eine Aussageform (Af) oder einen Term (T) handelt!
Vermerke bei den Aussagen, ob es sich um wahre bzw. falsche Einzelaussagen, Allaussagen oder Existenzaussagen handelt!
Vermerke bei den Aussageformen, ob sie erfüllbar, allgemeingültig oder nicht erfüllbar sind!

(1) Die natürliche Zahl 191 ist durch 7 teilbar.

(2) Natürliche Zahlen, die genau zwei Teiler besitzen, nennt man Primzahlen.

(3) $2m + n + 3$; $m,n \in N$.

(4) Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.

(5) $8 + x < 12$; $x \in N$.

(6) Für alle natürliche Zahlen a , b gilt $a + b = b + a$.

(7) $x + 3 = 1 + x + 2$; $x \in N$.

(8) Es gibt natürliche Zahlen m , für die gilt: $8 + m < 12$.

(9) ggT(48; 62) .

(10) Stets gilt: Wenn $n|a$ und $n|b$, so $n|(a+b)$.

(11) $kgV(x;y) + ggT(x;y)$.

(12) Eine natürliche Zahl heißt ungerade, wenn sie bei Division durch 2 den Rest 1 lässt.

(13) Das Produkt xy aus einer geraden Zahl x und einer ungeraden Zahl y ist stets gerade.

(14) $2|x \wedge 5|x$; $x \in N$.

(15) Stets gilt: $(2|x \wedge 5|x) \Leftrightarrow 10|x$.

(16) $ggT(x;15) = 3$.

(17) $x^2 + 1 = 0$; $x \in Q_+$.

(18) Es gibt keine gebrochene Zahl x , für die $x^2 + 1 = 0$ gilt .

(19) $x^2 - 4 = 0$; $x \in Q_+$.

(20) Für alle $x,y \in Q_+$ gilt: Wenn $x < y$, so $x^2 < y^2$.

(21) Parallelogramme mit einem rechten Winkel heißen Rechtecke.

(22) Stufenwinkel α , β an geschnittenen Parallelen g , h sind stets gleich groß .

(23) In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang .

(24) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt stets 180° .

(25) $g||h$; $g,h \in \{Gerade\}$.

(26) Die Mittelsenkrechte m_{AB} einer Strecke $\overline{AB}$.

(27) Die Stadt S liegt an der Elbe ; $S \in \{Stadt\}$.

(28) Die Stadt Riesa liegt an der Elbe .

(29) Der Bruder von x und y ; $x,y \in \{Mensch\}$.

(30) x ist der Bruder von y ; $x,y \in \{Mensch\}$.

3) Versuche, jeweils zwei Interpretationen der gegebenen Variablen zu finden, so dass die gegebene Aussageform in eine wahre bzw. in eine falsche Einzelaussage übergeht!

	Aussageform	Interpretation der Variablen	Einzelaussage
a)	$x \mid 6$, $x \in N$	x = ... x = ...	.... $\mid 6$; (W) .... $\mid 6$; (F)
b)	$2x + 1 = 2$; $x \in Q_+$	x = ... x = ...	.... (W) .... (F)
c)	$2x = x + x$; $x \in Q_+$	x = ... x = ...	.... (W) .... (F)
d)	$x = x + 1$; $x \in Q_+$	x = ... x = ...	.... (W) .... (F)

4) Ermittle zu den gegebenen Aussageformen $H(x)$; $x \in X$ jeweils die Erfüllungsmenge M ! Der Variablengrundbereich X sei bei den Aufgaben a) bis g) die Menge N der natürlichen Zahlen, bei den Aufgaben h) bis k) die Menge N^+ der natürlichen Zahlen größer Null, bei den Aufgaben l) bis q) die Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen.

a) $x|6$; b) $6|x$; c) $x < 4$; d) $x|6 \wedge 6|x$; e) $x|6 \vee 6|x$;

f) $x|6 \wedge x < 4$; g) $x|6 \vee x < 4$; h) $ggT(x;4) = 2$; i) $ggT(x;3) = 2$;

j) $kgV(x;3) = 6$; k) $kgV(x;6) = 6$; l) $2x + 1 = 4$; m) $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2}) = 0$;

n) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; o) $x^2 = x^2 + 1$; p) $x < x$; q) $x < x + 1$.

MENGENLEHRE

1) Lies im "Merkstoff" auf S.31 im Abschnitt "Einige Grundlagen aus Logik und Mengenlehre" die Ausführungen zu "Verknüpfungen von Mengen und Beziehungen zwischen Mengen" und veranschauliche die dort definierten Begriffe durch selbstgewählte Beispiele!

2) Sei $T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ (Menge aller Teiler der Zahl 6) .
Ermittle alle Teilmengen von T_6 ! Wie viel solche Teilmengen gibt es?
Ermittle die Anzahl aller Teilmengen von $M_1 = \{a]$, $M_2 = \{a, b\}$ und $M_3 = \{a, b, c)$!
Äußere eine Vermutung!

3) Welche Teilmengenbeziehungen bestehen zwischen folgenden Mengen:
a) A = {Dreieck} ; B = {gleichseitiges Dreieck} ; C = {gleichschenkliges Dreieck} .
b) D = {Vielfaches von 3} ; E = {Vielfaches von 6} ; F = {Vielfaches von 24} .
c) R = {Rechteck} ; Q = {Quadrat} ; T = {Trapez} ; P = {Parallelogramm} ; V = {Viereck} .

4) Sei $M = \{1, 3, 7, 8, 11\}$ und $N = \{0, 3, 4, 8, 12\}$.
Ermittle $M \cup N$ und $M \cap N$!

5) Sei $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{0, 2, 4, 7, 8\}$ und $C = \{4\}$.
Ermittle folgende Mengen:

a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $B \cup C$; d) $A \cap B$; e) $A \cap C$; f) $B \cap C$;
g) $A \cup B \cup C$; h) $A \cap B \cap C$; i)$(A \cup B) \cap C$; j) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; k) $[(A \cap B) \cup C] \cup (A \cup C)$.

6) Seien A und B beliebige Mengen.
Dann gilt stets: $A \cup (A \cap B) =$ .... ; $A \cap (A \cup B) =$ ....

7) Die nachstehenden Aussagen sind zu begründen oder zu widerlegen:

(1) $a \in A$ und $A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow a \in C$.

(2) $a \in A$ und $B \subset A \Rightarrow a \in (A \cap B)$.

(3) $A \cup B = B \Rightarrow B \subset A$.

(4) $A \cap B = B \cup A \Rightarrow A = B$.

8) Am Beispiel ebener Punktmengen sind folgende Distributivgesetze zu bestätigen:
(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Verwende dazu das Arbeitsblatt auf Seite 10 !

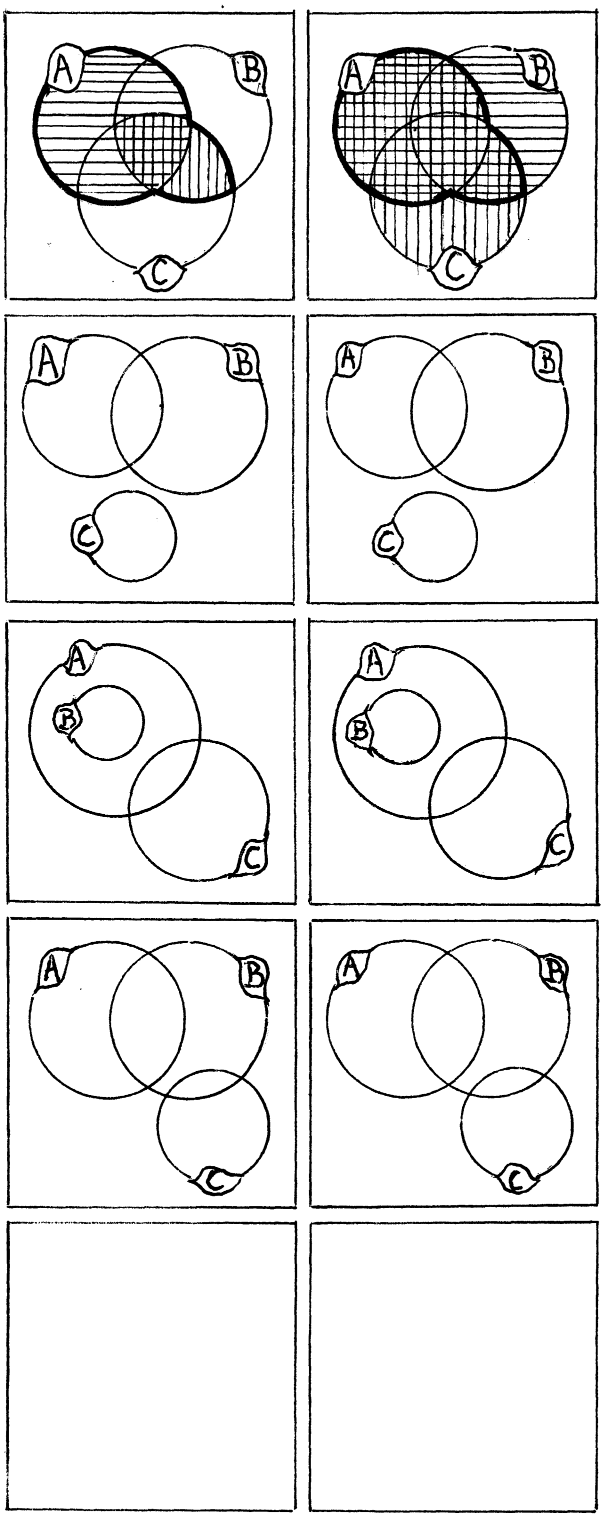
9) 19 Sportler einer Arbeitsgemeinschaft üben Elemente des Bodenturnens. 10 Sportler können Handstand, 12 können Kopfstand und 5 können Salto. Jeweils 2 Sportler beherrschen genau zwei dieser drei Übungen. 5 Sportler können nur den Handstand.
a) Wie viel Sportler können alle drei Übungen?
b) Wie viel Sportler können nur den Salto?
c) Was lässt sich noch aus diesen Angaben ableiten?

10) Von 39 Konferenzteilnehmern beherrschen 11 die russische, 19 die englische und 23 die deutsche Sprache. Genau ein Teilnehmer beherrscht alle drei Sprachen; 4 Teilnehmer beherrschen nur Russisch und Deutsch, 7 nur Englisch und Deutsch, 2 nur Russisch und Englisch.
a) Wie viel Teilnehmer beherrschen nur eine der drei Sprachen?
b) Wie viel Teilnehmer beherrschen keine dieser drei Sprachen?

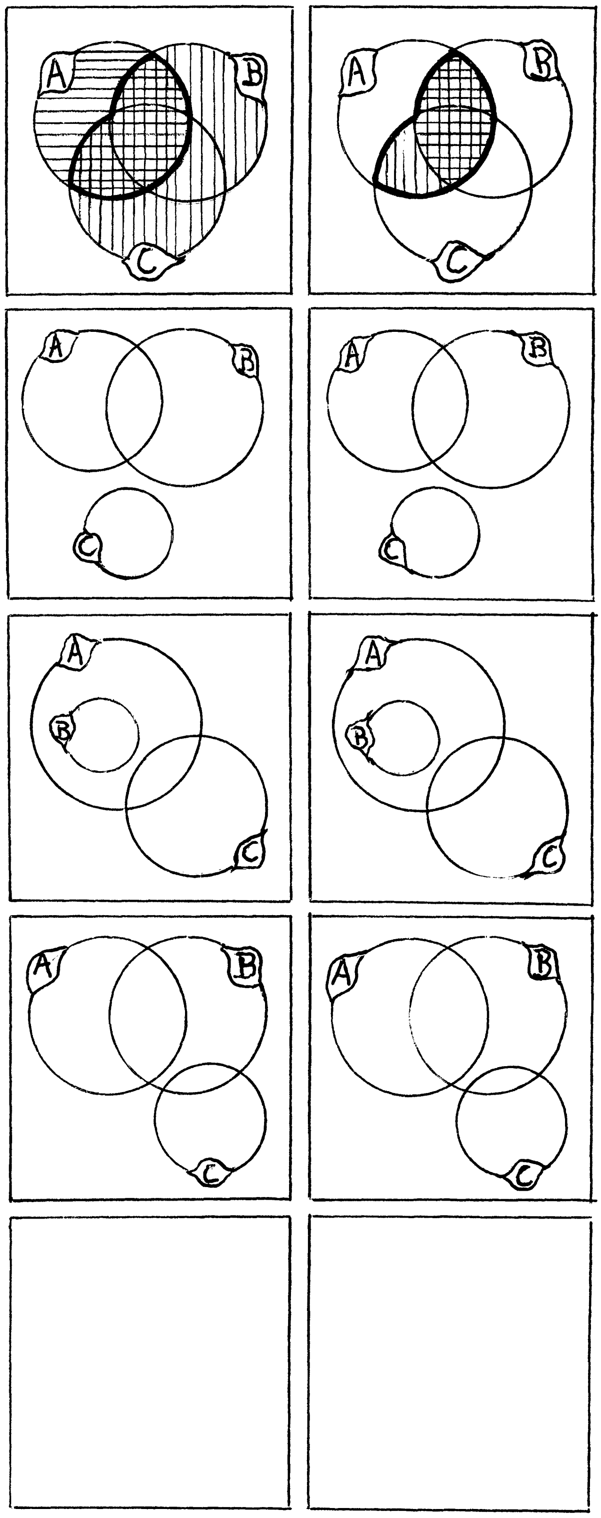
Arbeitsblatt zur "Mengenlehre"

Veranschauliche und vergleiche die Mengen, die jeweils auf den beiden Seiten der Gleichung stehen!
Bilde ein eigenes Beispiel, und halte es in der letzten Zeile fest! Wähle dabei eine gegenseitige Lage der Mengen A , B , C , die in den gegebenen Beispielen noch nicht vorkommt!

$A \cup (B \cap C) \overset{?}{=} (A \cup B) \cap (A \cup C)$



$A \cap (B \cup C) \overset{?}{=} (A \cap B) \cup (A \cap C)$



DAS UMFORMEN UND UMKEHREN VON SÄTZEN

1) Formuliere die in der Wenn-dann-Form als Zeichenreihen gegebenen Sätze variablenfrei in der "Wortsprache"; Verwende dabei auch von der Wenn-dann-Form abweichende Formulierungen!

Satz:	"Für alle ..... gilt: Voraussetzung $\Rightarrow$ Behauptung"	
(S1):	α , β Scheitelwinkel $\Rightarrow$ $\alpha = \beta$.	
(S2)	α , β Nebenwinkel $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 180°$.	
(S3)	$4\|a \Rightarrow 2\|a$.	
(S4)	$a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.	
(S5)	$9\|QS(a) \Rightarrow 9\|a$.	
(S6)	$10\|a \Rightarrow 2\|a \wedge 5\|a$.	
(S7)	$a\|b \wedge b\|c \Rightarrow a\|c$.	
(S8)	$n\|a \wedge n\|b \Rightarrow n\|(a+b)$.	
(S9)	(x gerade) $\wedge$ (y ungerade) $\Rightarrow$ (xy gerade) .	
(S10)	(α , β Stufenwinkel an g, h) $\wedge$ $g\|\|h \Rightarrow \alpha = \beta$.	

2) Lies im "Merkstoff" auf S.33 den Abschnitt "Das Umformen von Sätzen" .

Bilde zu den oben angegebenen Sätzen (S1) bis (S6) jeweils die Kontraposition (K1) bis (K6) !

Bilde zu den Sätzen (S7) bis (S10) jeweils die Kontrapositionen (K7), ($K_1$7), ($K_2$7) bis K(10), ($K_1$10), ($K_2$10) !

3) Lies im "Merkstoff" auf S.33 den Abschnitt "Das Umkehren von Sätzen" !

Bilde zu den Sätzen (S1) bis (S6) jeweils die Umkehrung (U1) bis (U6) und stelle den Wahrheitswert dieser Umkehrungen fest. Falls (U) wahr ist, dann fasse (S) und (U) jeweils zu einem Genau-dann-wenn-Satz (Z) zusammen.

Bilde zu den Sätzen (S7) bis (S10) die Umkehrungen (U7), ($U_1$7), ($U_2$7) bis (U10), ($U_1$10), ($U_2$10) und stelle den Wahrheitswert dieser Umkehrungen fest. Falls eine dieser Umkehrungen wahr ist, dann fasse sie mit dem zugehörigen Satz zu einer Genau-dann-wenn-Aussage zusammen.

4) Führe Variable ein und schreibe die nachstehend angegebenen Sätze als Zeichenreihen (in der "Symbolform"); bilde alle möglichen Umkehrungen und stelle deren Wahrheitswert fest (ohne Beweis der wahren Aussagen, aber mit Widerlegung der falschen Aussagen); bilde - wenn möglich - die Zusammenfassungen!

a) Alle geraden Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 6 teilbar.

b) Parallelogramme mit gleich langen Grundseiten und gleich langen Höhen auf diesen Seiten haben den gleichen Flächeninhalt.

ZAHLENTHEORETISCHE BEWEISAUFGABEN

1) Stelle den Wahrheitswert der folgenden Allaussagen (für $a,b,c \in N$) fest; widerlege die falschen Aussagen durch Gegenbeispiele; beweise die wahren Aussagen!

(1) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$; (2) $a|b \vee a|c \Rightarrow a|(b+c)$;

(3) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|bc$; (4) $a|b \vee a|c \Rightarrow a|bc$;

(5) $a|b \wedge b|c \Rightarrow (a+b)|c$; (6) $a|c \wedge b|c \Rightarrow ab|c$.

2) Beweise: Wenn a ein Teiler sowohl von b als auch von c ist, dann ist a auch ein Teiler der Differenz $(b - c)$, wobei $b > c$ vorausgesetzt sei.

3) Beweise, dass für alle Paare x , y natürlicher Zahlen gilt:
Wenn x gerade ist und y ungerade ist, dann ist das Produkt xy gerade.

4) Beweise folgende Sätze:

(1) Die Summe zweier gerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl.

(2) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl.

(3) Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 3 teilbar.

(4) Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 5 teilbar.

(5) Die Summe von 7 aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, ist stets durch 21 teilbar.

(6) Die Summe von 10 aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, ist stets durch 15 teilbar.

5) Entdecke und beweise Sätze, die den unter (1) bis (6) genannten ähnlich sind!

6) Beweise: Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 6 teilbar.

7) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen r und s , die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen.
Beweise, dass dann das Produkt dieser beiden Zahlen bei Division durch 5 stets den Rest 4 lässt!

8) Ermittle jeweils den Wahrheitswert der nachstehend genannten Aussagen!
Beweise die wahren Aussagen, widerlege die falschen Aussagen!

a) Multipliziert man eine natürliche Zahl mit ihrem Nachfolger, so erhält man dasselbe, als wenn man zu dieser Zahl ihr Quadrat addiert.

b) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $a < b \Rightarrow ac < bc$.

c) Ist z eine ungerade Zahl, so ist $(z^2 - 1)$ stets durch 8 teilbar.

d) Für alle natürlichen Zahlen x ist $(x^2 + x + 11)$ eine Primzahl.

e) Wählt man zwei verschiedene natürliche Zahlen aus, dann ist stets ihre Summe oder ihre Differenz oder ihr Produkt durch 3 teilbar.

f) Es gibt mehr als ein Tripel aus drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, die sämtlich Primzahlen sind.

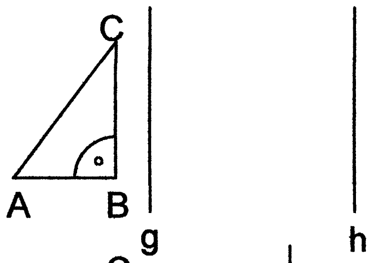
9) Zwei Primzahlen p und $(p+2)$ heißen Primzahlzwilling (z.B. 11 und 13 oder 17 und 19).
Weise nach, dass die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist, wenn beide Primzahlen größer als 3 sind.

G E O M E T R I E

Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen

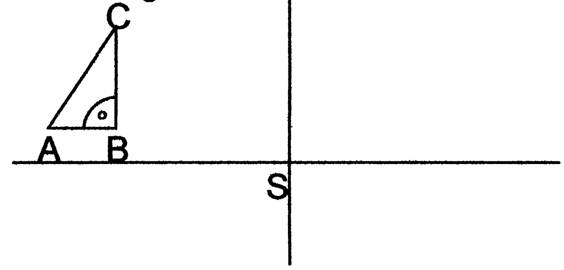
1) a) Spiegle das Dreieck ABC an der Geraden g und das so erhaltene Bild A'B'C' an der zu g parallelen Geraden h (vgl. Figur).
Dann gilt ABC $\xrightarrow{Sp(g)}$ A'B'C' $\xrightarrow{Sp(h)}$ A"B"C" ,
also ABC $\xrightarrow{Sp(g)\circ Sp(h)}$ A"B"C" ,
wobei das (durch Nacheinanderausführung entstandene) Produkt Sp(g)∘Sp(h) der beiden Spiegelungen eine Bewegung ist.
Vermutlich gilt

Sp(g)∘Sp(h) = ...



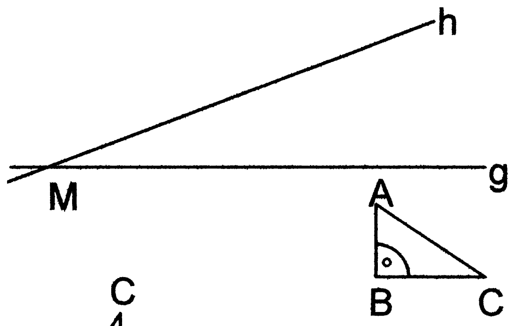
b) Löse diese Aufgabe für den Fall, dass g und h aufeinander senkrecht stehen!
Vermutlich gilt

Sp(g)∘Sp(h) = ...



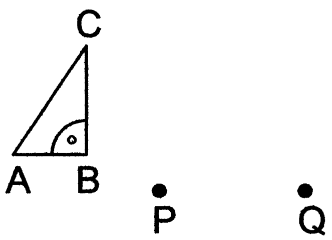
c) Löse diese Aufgabe für den Fall, dass g und h einander schneiden, ohne aufeinander senkrecht zu stehen!
Vermutlich gilt:

Sp(g)∘Sp(h) = ...



2) Spiegle das Dreieck ABC am Punkt P und das so erhaltene Bild A'B'C' dann am Punkt Q (vgl. Figur).
Dann gilt ABC $\xrightarrow{Sp(P)}$ A'B'C' $\xrightarrow{Sp(Q)}$ A"B"C" ,
also ABC $\xrightarrow{Sp(P)\circ Sp(Q)}$ A"B"C" .
Vermutlich gilt

Sp(P)∘Sp(Q) = ...



3) a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Dreieck ABC mit A(1;5), B(2:5), C(1;7), den Pfeil $\overrightarrow{PP'}$ mit P(1;3), P'(3;1) und den Pfeil $\overrightarrow{QQ'}$ mit Q(4;1), Q'(8;2) .
Wende auf ABC erst die Verschiebung V($\overrightarrow{PP'}$) und dann die Verschiebung V($\overrightarrow{QQ'}$) an;
es gelte ABC $\xrightarrow{V(\overrightarrow{PP'})\circ V(\overrightarrow{QQ'})}$ $A_1B_1C_1$.
Wende auf ABC erst die Verschiebung V($\overrightarrow{QQ'}$) und dann die Verschiebung V($\overrightarrow{PP'}$) an;
es gelte ABC $\xrightarrow{V(\overrightarrow{QQ'})\circ V(\overrightarrow{PP'})}$ $A_2B_2C_2$.
Vergleiche $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, und äußere eine Vermutung!
b) Zeichne ein Dreieck ABC sowie zwei parallele Geraden g und h .
Konstruiere (durch Nacheinanderausführung der beiden Geradenspiegelungen)

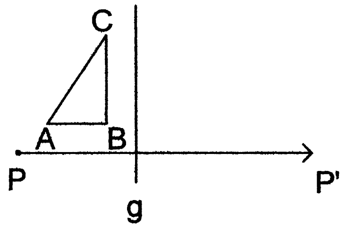
ABC $\xrightarrow{Sp(g)\circ Sp(h)}$ $A_1B_1C_1$ und ABC $\xrightarrow{Sp(h)\circ Sp(g)}$ $A_2B_2C_2$.

Vergleiche $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, und äußere eine Vermutung!
c) Zeichne ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte P und Q .
Konstruiere (durch Nacheinanderausführung der beiden Punktspiegelungen)

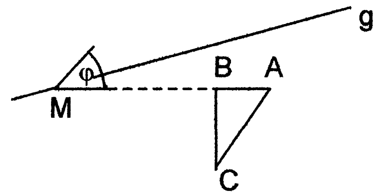
ABC $\xrightarrow{Sp(P)\circ Sp(Q)}$ $A_1B_1C_1$ und ABC $\xrightarrow{Sp(Q)\circ Sp(P)}$ $A_2B_2C_2$.

Vergleiche $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, und äußere eine Vermutung!

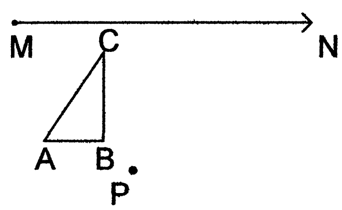
4) a) Gegeben sei ein Dreieck ABC , ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$ und eine Gerade g mit $g \perp \overrightarrow{PP'}$.
Zu konstruieren ist die Gerade h , für die
$Sp(g) \circ Sp(h) = V(\overrightarrow{PP'})$ gilt!



b) Gegeben sei ein Dreieck ABC , eine Drehung $Dr(M;\varphi)$ und eine Gerade g mit $M \in g$.
Zu konstruieren ist die Gerade h , für die
$Sp(g) \circ Sp(h) = Dr(M;\varphi)$ gilt!



c) Gegeben sei ein Dreieck ABC , ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MN}$ und ein Punkt P .
Zu konstruieren ist der Punkt Q , für den
$Sp(P) \circ Sp(Q) = V(\overrightarrow{MN})$ gilt!



5) Zeichne in ein Koordinatensystem das Viereck ABCD mit A(2;4), B(3;4), C(3;5), D(2;5) sowie das Viereck EFGH mit E(5;1), F(6;1), G(6;2), H(5;2) .
Untersuche, ob es eine Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$, eine Geradenspiegelung $Sp(g)$ oder eine Drehung $Dr(M;\varphi)$ gibt, so dass EFGH das Bild von ABCD ist (wobei aber nicht notwendigerweise E das Bild von A , F das Bild von B , G das Bild von C und H das Bild von D sein muss)!
Ist dies der Fall, dann gib einen zugehörigen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$, die zugehörige Spiegelgerade g oder die Koordinaten des Drehpunkts M nebst der Größe φ des Drehwinkels an!
Wie lautet jeweils das Bild von A , B , C bzw. D bei jeder dieser Bewegungen?

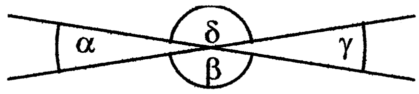
6) Zeichne zwei einander schneidende Geraden g und h , die nicht senkrecht zueinander sind. Bezeichne den Schnittpunkt von g und h mit S . Markiere einen von S verschiedenen Punkt A auf g . Sei B der Bildpunkt von A bei Spiegelung an h , sei C der Bildpunkt von B bei Spiegelung an g , und sei D der Bildpunkt von C bei Spiegelung an h.
Beweise, dass die Punkte A , B , C , D auf einem Kreis liegen!
Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises?

7) Zeichne in ein Koordinatensystem das Dreieck ABC mit A(1;5), B(4;3), C(3;6) und das Dreieck $A_2B_2C_2$ mit $A_2(9;7)$, $B_2(11;4)$, $C_2(8;5)$ sowie den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$ mit P(1;3), P'(5;1) .
Gesucht ist die Gerade g , die folgende Eigenschaft besitzt:
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$ und dann die Spiegelung $Sp(g)$ an, so erhält man als Bild das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal die gesuchte Gerade g !
In welchen Punkten schneidet g die Koordinatenachsen?

8) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat ABCD mit A(1;2), B(5;2), C(5;6), D(1;6) und das Quadrat A'B'C'D' mit A'(9;2), B'(13;2), C'(13;6), D'(9;6) .
Ermittle jeweils die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels aller Drehungen, bei denen A'B'C'D' das Bild von ABCD ist (wobei nicht notwendigerweise A' das Bild von A , B' das Bild von B , C' das Bild von C und D' das Bild von D sein muss).

Geometrische Bestimmungsaufgaben

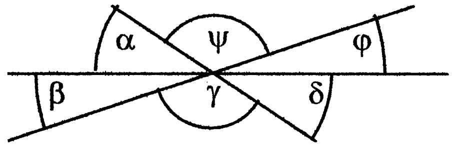
1) Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel α , β , γ , δ (vgl. Figur),
Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° besitzen?



2) Beim Schnitt von drei Geraden entstehen die Winkel α, β , γ , δ , φ , ψ (vgl. Figur).
Wie groß sind diese sechs Winkel, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\gamma + \delta + \varphi + \psi = 252°$;

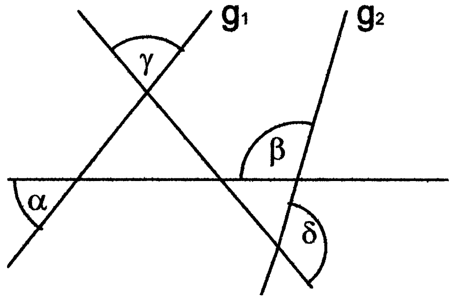
(2) $\alpha = 3\beta$.



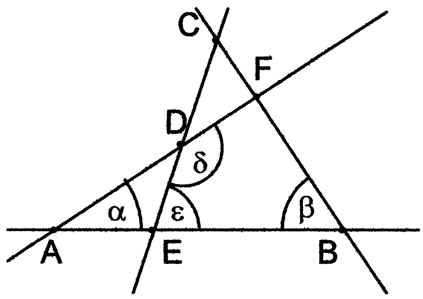
3) Beim Schnitt von vier Geraden entstehen die Winkel α, β, γ , δ (vgl. Figur).

a) Berechne δ , wenn $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$ und $\gamma = 70°$ gilt. Was lässt sich in diesem speziellen Fall über die Geraden g_1 , g_2 aussagen?

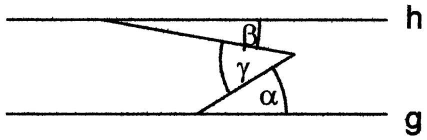
b) Drücke δ allgemein durch α , β , γ aus!



4) Beim Schnitt von vier Geraden entstehen die Winkel α, β, δ , ε (vgl. Figur).
Berechne ε in Abhängigkeit von α , β . δ !



5) Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur. Es gelte $g||h$ und die Winkel α und β seien bekannt.
Berechne γ in Abhängigkeit von α und β !



6) Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser $\overline{AB}$. Sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, dass der Winkel $\sphericalangle BMC$

a) die Größe 42° ;

b) eine beliebig vorgegebene Größe φ mit $0° < \varphi < 180°$ hat.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ und die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$!

7) Aus zwei Stahlplatten, die 1 cm bzw. 4 cm dick sind und deren jeweils quadratische Deckfläche die Kantenlänge von 48 cm bzw. 32 cm hat, wird durch Umschmelzen eine neue 4 cm dicke Stahlplatte mit quadratischer Deckfläche hergestellt.
Wie groß ist der Umfang ihrer Deckfläche?

8) Für die äußeren Abmessungen eines (geschlossenen) Hohlquaders gilt $a = 80$ cm , $b = 70$ cm , $c = 50$ cm ; für seine Wanddicke gilt $d = 5$ cm .
Berechne das Volumen V dieses Hohlquaders in m^3 !

9) Welche lichte Höhe h_i und welche Gesamthöhe h_a muss ein oben offener quaderförmiger Wasserbehälter mit quadratischem Boden haben, wenn er $V = 75$ Liter fassen soll, die Außenkanten des Bodens $a = 51$ cm lang sind und zu seiner Herstellung Blech von $d = 5$ mm Dicke verwendet wird?

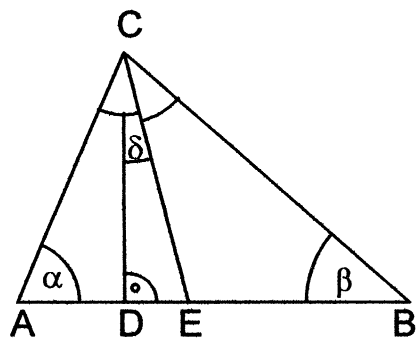
10) Ein Quader mit den Kantenlängen a , b , c besitze einen Oberflächeninhalt von $A = 286$ cm² . Für die Rechtecksfläche mit den Seitenlängen a und b gelte $A_1 = 63$ cm² , für die Rechtecksfläche mit den Seitenlängen b und c gelte $A_2 = 35$ cm² .
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben das Volumen V dieses Quaders eindeutig ermitteln lässt!

11) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC = \alpha = 60°$ und $\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$.
Ermittle das Verhältnis $\overline{AC} : \overline{AB}$!

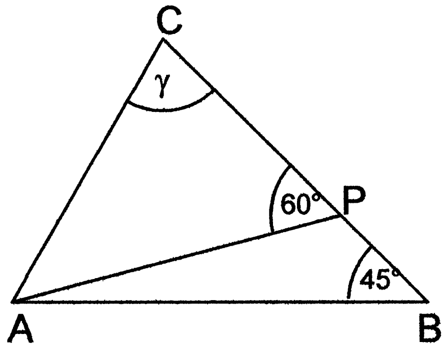
12) Gegeben sei ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a$. Ferner sei E der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und es sei F der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$.
Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks AEF durch die Seitenlänge a des Quadrats auszudrücken!

13) Sei ABCD ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a$. Sei E ein Punkt auf $\overline{BC}$ sowie F ein Punkt auf $\overline{CD}$, so dass $\overline{BE} = \overline{DF} = p \cdot a$ gilt, wobei p eine beliebig gewählte Zahl ist, für die $0 < p < 1$ gilt.
Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks AEF durch a und p auszudrücken!

14) In dem abgebildeten Dreieck ABC ist $\overline{CD}$ die zur Seite $\overline{AB}$ gehörende Höhe und $\overline{CE}$ ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$.
Der gesuchte Winkel $\sphericalangle DCE = \delta$ ist durch die gegebenen Winkel $\sphericalangle BAC = \alpha$ und $\sphericalangle CBA = \beta$ auszudrücken. Dabei werde $\alpha > \beta$ vorausgesetzt.



15) Die abgebildete Figur stellt ein Dreieck ABC dar, dessen Innenwinkel $\sphericalangle CBA = \beta = 45°$ beträgt. Auf der Seite $\overline{BC}$ existiert ein Punkt P so, dass $3 \cdot \overline{BP} = \overline{BC}$ und $\sphericalangle APC = \delta = 60°$ gilt.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB = \gamma$!



Geometrische Beweisaufgaben

1) Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, auf dessen Basis $\overline{AB}$ zwei Punkte D und E (in der Reihenfolge A , D , E , B) so liegen, dass $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$ gilt.
Es ist zu beweisen, dass aus diesen Voraussetzungen die Behauptung $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED$ abgeleitet werden kann!

2) Für ein Trapez ABCD gelte $AB \| CD$ und $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC}$.
Was lässt sich dann über die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CAD$ aussagen?
Beweise deine Vermutung!

3) Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC . Auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus liege der Punkt D so, dass $\overline{BD} = \overline{AB}$ gilt.
Was lässt sich dann über den Winkel $\sphericalangle ACD$ aussagen? Beweise deine Vermutung!

4) In einem Quadrat ABCD seien M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$.
Was lässt sich dann über die Seiten des Dreiecks AMN aussagen? Beweise deine Vermutung!

5) In einem Dreieck ABC sei die Winkelhalbierende $\overline{BD}$ eingezeichnet. Die Parallele zu BD durch C schneide die Gerade AB im Punkt E .
Was lässt sich dann über die Seiten des Dreiecks BEC aussagen? Beweise deine Vermutung!

6) In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ mögen sich die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A und die Winkelhalbierende eines der beiden Außenwinkel bei C im Punkt S schneiden.
Was lässt sich dann über die Seiten des Dreiecks ASC aussagen? Beweise deine Vermutung!

7) Sei ABC ein gleichschenkliges spitzwinkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle CBA$ schneide die Senkrechte zu BC durch C im Punkt P und sie schneide die Höhe $\overline{CH}$ von Dreieck ABC im Punkt Q .
Was lässt sich dann über die Seiten des Dreiecks PQC aussagen?
Beweise deine Vermutung!

8) Sei ABCD ein Rechteck mit $\overline{AB} > \overline{BC}$. Die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AC}$ schneide $\overline{AC}$ im Punkt M , die Seite $\overline{AB}$ im Punkt E und die Seite $\overline{CD}$ im Punkt F .
Welche der vorkommenden Strecken sind vermutlich gleich lang? Beweise deine Vermutung!

9) Sei M ein Punkt im Inneren eines Dreiecks ABC .
Beweise, dass dann stets $\sphericalangle BMC > \sphericalangle BAC$ gilt!
Ist die Umkehrung dieses Satzes eine wahre Aussage?

10) In einem Dreieck mit den Winkelmaßen α , β , γ sei die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ eingezeichnet. Ferner gelte $\sphericalangle ADB = \delta$, $\sphericalangle ADC = \varepsilon$ und $\gamma > \beta$.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\delta - \varepsilon = \gamma - \beta$ folgt!

11) Sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = \alpha > 90°$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.
Beweise, dass hieraus stets $\sphericalangle BHC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$ folgt!

12) Sei $\overline{CD}$ Winkelhalbierende eines Dreieck ABC . Die Parallele zu $\overline{CD}$ durch B schneide die Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus im Punkt E .
Was lässt sich dann über die Seiten des Dreiecks BEC aussagen? Beweise deine Vermutung!
Suche nach wahren Umkehrungen dieses Satzes und beweise diese Umkehrungen!

13) Suche nach wahren Umkehrungen der Sätze, die in den Aufgaben 1) bis 7) bewiesen wurden!
Beweise diese wahren Umkehrungen!
Fasse jeweils Satz und wahre Umkehrung zu einem Genau-dann-wenn-Satz zusammen!

Geometrische Konstruktionsaufgaben

1) Gegeben sei ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!
Begründe die Konstruktion!

2) Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge $s = a + b$ sowie eine Strecke $\overline{CD}$ mit der Länge $d = a - b$ (wobei $s > d$ gelten möge und nur s und d, nicht aber a oder b bekannt seien).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke mit der Länge a und eine Strecke mit der Länge b !
Begründe die Konstruktion!

Es sind jeweils alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC zu konstruieren, die die in Aufgabe 3) bis Aufgabe 11) gegebenen Bedingungen erfüllen.

3) $\overline{AB} = c = 6$ cm ; $\overline{BC} = a = 4$ cm ; $\overline{CH} = h_c = 3$ cm ; $\overline{CH}$ ist Höhe .

4) $\overline{AB} = c = 5$ cm ; $\overline{BC} = a = 6$ cm ; $\sphericalangle ACB = \gamma = 45°$.

5) $\overline{AB} = c = 6$ cm ; $\overline{AC} = b = 4$ cm ; $\overline{CS} = s_c = 5$ cm ; $\overline{CS}$ ist Seitenhalbierende.

6) $\overline{AC} = b = 5$ cm ; $\overline{BC} = a = 4$ cm ; $\sphericalangle BAC = \alpha = 60°$.

7) $\overline{BC} = a = 6$ cm ; $\overline{AH} = h_a = 5$ cm ; $\overline{AS} = s_a = 7$ cm ; $\overline{AH}$ ist Höhe ; $\overline{AS}$ ist Seitenhalbierende .

8) $\overline{BC} = a = 5{,}5$ cm ; $\overline{BH} = h_b = 5$ cm ; $\overline{CW} = w_\gamma = 3{,}5$ cm ; $\overline{BH}$ ist Höhe ; $\overline{CW}$ ist Winkelhalbierende .

9) $\overline{AC} = b = 6$ cm ; $\overline{BC} = a = 4$ cm ; $\overline{BH} = h_b = 5$ cm ; $\overline{BH}$ ist Höhe .

10) $\overline{AC} = b = 6$ cm ; $\overline{BC} = a = 4$ cm ; die Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ stehen aufeinander senkrecht.

11) $\overline{BC} = a = 5$ cm ; $\overline{AB} + \overline{AC} = s = 10$ cm ; $\sphericalangle CBA = \beta = 45°$.

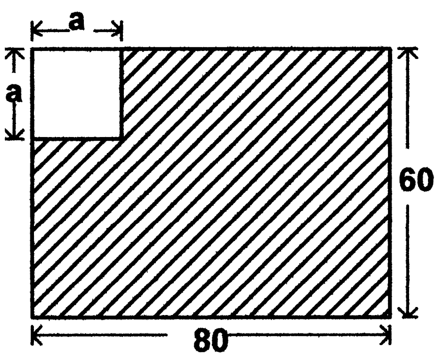
12) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit einem spitzen Winkel $\sphericalangle ACB = \gamma$ und $\sphericalangle ACB < \sphericalangle CBA$. Zu konstruieren ist derjenige Punkt P auf der Seite $\overline{AC}$, für den $\sphericalangle APB = 2\gamma$ gilt!

V E R M I S C H T E A U F G A B E N

1) Bei einem Sportfest wurden an die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Eine der beteiligten Mannschaften errang 42 dieser Medaillen. Sie erhielt genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.
Weise nach, dass sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie viel Gold- , Silber- und Bronzemedaillen von dieser Mannschaft errungen wurden, und gib diese Anzahlen an.

2) Ermittle alle natürlichen Zahlen a , für die $4a+1$ durch 5 teilbar und außerdem kleiner als 20 ist!

3) Die abgebildete schraffierte Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde. Die schraffierte Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm² .
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.



4) Berechne folgendes Produkt:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1 - \frac{1}{100}\right) .$$

5) Zwei Zahlen sollen die Summe 2028 haben. Dividiert man die erste Zahl durch 28 , dann soll sich dasselbe ergeben wie bei Division der zweiten Zahl durch 128 .
Zeige, dass die beiden Zahlen durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind; finde sie und bestätige, dass sie die Forderungen erfüllen!

6) Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wie viel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während des gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht? Was lässt sich aus diesen Angaben noch ermitteln?

7) Ruth, Marion und Petra treiben begeistert Sport. Die eine spielt Tischtennis, die andere Volleyball, die dritte ist Schwimmerin. Es ist folgendes bekannt:
(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben an der Mathematik-Olympiade teilgenommen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin.
Welches Mädchen treibt welche Sportart?

8) Ein leeres, quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.
Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau 1,50 m gefüllt?

9) Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden vorgesehen. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen. Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal so viel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.
Wie viel Stunden sind für den ersten, den zweiten und den dritten Arbeitsabschnitt vorzusehen?

10) Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}216\ \mathrm{dm}^3$, die Kanten seiner Grundfläche seien 12cm bzw. 60 mm lang.
Von einem zweiten Quader sei bekannt, dass er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und dass die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.
Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimeter an!

11) Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.
Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

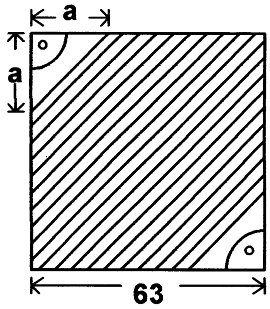
12) Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl z habe folgende Eigenschaften:
(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, dann ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z .
(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13776 .
Weise nach, dass es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt, und ermittle diese Zahl!

13) Rita experimentiert mit einer Balkenwaage. Sie hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:
(1) Alle Kugeln haben das gleiche Gewicht.
(2) Alle Würfel haben das gleiche Gewicht.

(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen so viel wie 14 Kugeln.
(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen so viel wie die Pyramide.

Weise nach, dass sich aus diesen Bedingungen eindeutig ermitteln lässt, wie viel Kugeln so viel wiegen wie die Pyramide und gib diese Anzahl an!

14) Die abgebildete schraffierte Fläche ist 38 cm² groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleich große) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.



15) Einem Skatblatt werden 8 Karten entnommen, nämlich von jeder der Farben "Eichel", "Grün", "Rot" und "Schell" jeweils die Dame und der König.
Aus diesen 8 Karten werden "blind" 2 Karten gezogen.
Wie groß ist jeweils die Chance dafür, dass folgende beiden Karten gezogen werden:

a) das Paar "Rot-Dame / Rot-König" ;
b) ein gleichfarbiges Paar "Dame / König" ;
c) ein beliebiges Paar "Dame / König" ;
d) ein beliebiges Paar "Dame / Dame" ;
e) das Paar "Grün -König / Rot-König" .

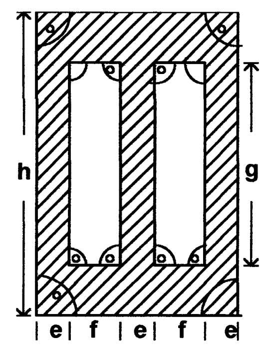
16) Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder. Am 1.Januar 1995 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und der war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.
Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1995? (Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.)

17) Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen , von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.
Ermittle alle Verteilungen, die diese Bedingungen erfüllen!

18) Am Gasthof "Rose" steht folgende Tafel: "Wir bieten unseren Gästen 15 verschiedene Menüs!" Die Speisekarte enthält jedoch nur 8 verschiedene Speisen: 2 Suppen , 4 Hauptgerichte und zwei Nachspeisen. Kann die Behauptung des Wirtes stimmen?

19) Berechne den Inhalt A der schraffierten Fläche, deren Abmessungen in der Abbildung festgehalten sind,

a) für e = 10 mm ; f = 15 mm ; g = 50 mm ; h = 70 mm ,
b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!



20) Das Produkt $\overline{\text{STETS}} \cdot 9999$ endet auf 705 .
Weise nach, dass sich aus dieser Angabe die verschlüsselte Zahl $\overline{\text{STETS}}$ eindeutig entziffern lässt, wenn die Rechnung im Dezimalsystem durchgeführt wurde. Wie lautet die verschlüsselte Zahl?

21) Wie lauten drei natürliche Zahlen, deren zweite Zahl um 10 größer ist als die erste Zahl, deren dritte Zahl gleich dem Dreifachen der ersten Zahl ist und deren Summe 210 beträgt?

22) Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:

(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.

(2) Diejenigen Teilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.

Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

23) Auf einem Tisch stehen zwei Schalen; in jeder sind 16 Nüsse.
Anni und Bert haben sich ein Wegnehm-Spiel ausgedacht. Die Spielregeln lauten:

(1) Es wird abwechselnd gezogen .

(2) Wer am Zuge ist, nimmt aus einer der Schalen eine Nuss weg, *oder* nimmt aus beiden Schalen je eine Nuss weg *oder* legt eine Nuss aus einer Schale in die andere.

(3) Gewonnen hat, wer die letzte Nuss wegnimmt.

Anni beginnt.
Kann sie so ziehen, dass sie bestimmt gewinnt?
Wie sieht es bei anderen Anzahlen aus?

24) Der 10. Teil der Futtervorräte eines Landwirts würde für seine Kühe allein noch für 4 Tage reichen. Seine Schweine könnten sich davon allein 6 Tage und seine Ziegen allein 12 Tage sättigen.
Wie lange reicht der gesamte Vorrat an Nahrung für alle Tiere gemeinsam?

25) Aus Drahtstücken von je 160 cm Länge sollen Dreiecke gebogen werden, deren Seitenlängen a, b, c sämtlich Vielfache von 10 cm sind.

a) Ermittle die Seitenlängen aller voneinander verschiedenen Dreiecke, die diese Bedingung erfüllen und für die zusätzlich $a = b$ gilt!

b) Ermittle die Seitenlängen aller voneinander verschiedenen Dreiecke, die diese Bedingung erfüllen und für die zusätzlich $a > b > c$ gilt!

Äußere zunächst eine Vermutung, welche der in a) bzw. b) ermittelten beiden Anzahlen die größere ist!

26) Man denke sich aus den fünf Ziffern 1 , 2 , 3 , 4 , 5 alle verschiedenen Zahlen gebildet, die durch Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können.
Welches ist die Summe aller dieser fünfstelligen Zahlen?

27) Jeder Schüler weiß, dass Paradukel, Quadrakel und Drachekel nur Formen von Vierokeln sind, die alle auf dem Planeten MATHEMATICA leben. Vielen ist auch bekannt, dass alle Quadrakel sowohl Drachekel als auch Paradukel sind. Schon ältere Forschungen haben ergeben, dass es Drachekel gibt, die weder Paradukel noch Quadrakel sind. Seit einigen Jahren weiß man sogar, dass nur einige Paradukel auch Drachekel sind. Jedoch ist erst seit kurzer Zeit bekannt, dass es Drachekel gibt, die Paradukel aber keine Quadrakel sind. Damit gilt es nun als sicher, dass es Vierokel gibt, die weder Quadrakel noch Paradukel noch Drachekel sind.
Nun kannst du den Wissenschaftlern sicher helfen und folgende Fragen beantworten:

a) Wie kann man mit Hilfe einer Zeichnung die Arten und die Bewohner des Planeten MATHEMATICA veranschaulichen?

b) Gibt es Quadrakel, die Paradukel aber keine Drachekel sind?

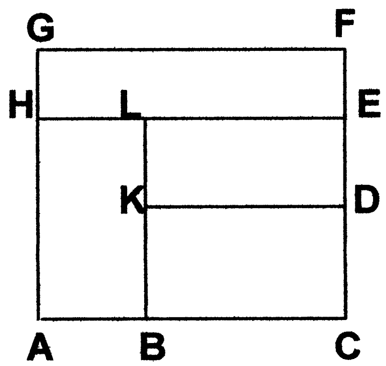
c) Wenn ein Bewohner von MATHEMATICA gleichzeitig ein Paradukel und ein Vierokel ist, muss er dann auch ein Drachekel sein?

28) Eine sechsstellige Zahl soll die Gestalt $z = \overline{3a3b2c}$ besitzen.
Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Ziffern a , b , c so zu wählen, dass die Zahl z durch 90 teilbar ist!

29) Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Familiennamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Aussagen gemacht:
(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.
(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.
(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.
(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.
(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf folgende Fragen ableiten lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!
(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?
(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten?

30) Ein Viereck ACFG sei (wie in nebenstehender nicht maßstabgerechten Skizze angegeben) in vier Teilfiguren zerlegt, über die folgendes bekannt ist:
Die Teilfiguren sind vier umfangsgleiche Rechtecke, und es gilt $\overline{AG} = \overline{GF} = 21$ cm .
Weise nach, dass sich aus diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der vier Teilfiguren eindeutig ermitteln lassen und gib diese Flächeninhalte an!

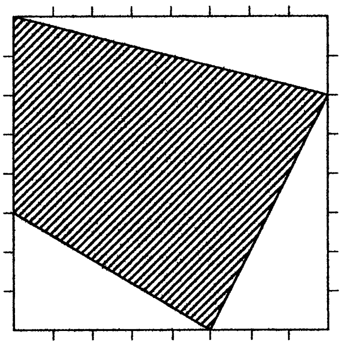


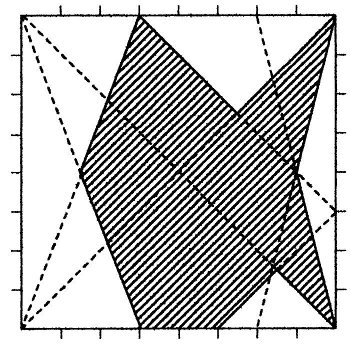
31) a) Ermittle alle Brüche, die folgende beiden Bedingungen erfüllen:
(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie der Dezimalbruch 0,4 .
(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner des Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

b) Löse die entsprechende Aufgabe, die entsteht, wenn man in (2) das Wort "zweistellige" durch das Wort "dreistellige" ersetzt!

32) Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... fort.
Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1 , die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

33) Die abgebildeten Figuren sind Quadrate, deren Seiten in acht gleich lange Abschnitte geteilt sind. Die schraffierten Flächen werden durch Geraden begrenzt, die durch Teilpunkte auf den Seiten des jeweiligen Quadrats gehen.
Gib jeweils den Anteil des Inhalts der schraffierten Figur von der Gesamtfläche des Quadrats in Form eines gekürzten Bruches an!





34) Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Englisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur 2 .
(2) Genau 19 Schüler haben in Englisch die Zensur 2 .
(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur 2 .
(4) Genau 1 Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur 2 .
(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Englisch eine "2".
(6) Genau 7 Schüler haben in Englisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine "2".
(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Englisch, aber nicht in Deutsch eine "2".

Weise nach, dass sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie viel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wie viel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur 2 haben und gib diese Anzahlen an!

35) Ein Fahrrad hat am Pedal ein Zahnrad mit 48 Zähnen. Am Hinterrad gibt es drei Zahnräder mit 16, 24 und 32 Zähnen.

a) Das Zahnrad am Pedal dreht sich 70 mal. Wie oft dreht sich jeweils das Hinterrad bei Benutzung der drei verschiedenen Zahnräder?
b) Bei einer Umdrehung des Hinterrades wird ein Weg von 2,20 m zurückgelegt.
   (1) Wie weit kommt man mit 12 Pedalumdrehungen, wenn am Hinterrad das 32-er Zahnrad benutzt wird?
   (2) Es sollen 3,3 km gefahren werden. Wie viele Pedalumdrehungen sind dazu erforderlich, wenn am Hinterrad das 32-er Zahnrad benutzt wird?
c) Eine Strecke wird mit 300 Pedalumdrehungen mit dem 24-er Zahnrad gefahren. Wie viele Pedalumdrehungen benötigt man für dieselbe Strecke mit dem 16-er Zahnrad?

36) a) Zerlege die Zahl 48 so in eine Summe von 9 Summanden, dass (mit Ausnahme des ersten Summanden) jeder der Summanden um $\frac{1}{2}$ größer ist als der vorhergehende Summand. Wie lautet der kleinste und wie lautet der größte dieser Summanden?
b) Löse die entsprechende Aufgabe, die entsteht, wenn man "die Zahl 48" durch "die Zahl 2495" sowie "9 Summanden" durch "100 Summanden" ersetzt!

37) Auf dem Jahrmarkt bietet dir ein Würfelbudenbesitzer folgendes Spiel an:
Nach dem Einsatz von 1 € sollst du dir eine beliebige Zahl von 1 bis 6 zu deiner "Glückszahl" bestimmen. Anschließend darfst du mit zwei normalen, äußerlich gleichen Spielwürfeln einmal würfeln. Erscheint deine "Glückszahl" genau einmal, dann erhältst du das Doppelte deines Einsatzes zurück. Erscheint die "Glückszahl" sogar zweimal (Pasch), dann bekommst du 5 €.
Untersuche die Chancenverteilung bei diesem Spiel!

38) Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124 .
(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.
(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das ältere der beiden Kinder und jünger als der Vater
(4) Die Differenz zwischen dem Lebensalter von Vater und Mutter ist neunmal so groß wie die Differenz zwischen dem Lebensalter des älteren und des jüngeren Kindes.

a) Weise nach, dass sich aus diesen Angaben das Alter der vier Familienmitglieder eindeutig ermitteln lässt!
b) Untersuche, ob die Aufgabe auch noch eindeutig lösbar ist, wenn man in (3) das Wort "ältere" durch "jüngere" ersetzt!

39) Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 , die zwar durch 5, aber weder durch 7 noch durch 11 teilbar sind!

40) Ergänze die nach der gleichen Gesetzmäßigkeit gebildeten Gleichungen:

(a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{\square}{\square}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

(b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\frac{\square}{\square}-\frac{1}{2}=\frac{\square}{\square}$

(c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{\square}{\square}-\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

(d) $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\frac{99}{100}-\frac{1}{2}=\frac{\square}{\square}$

(e) $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \cdot\frac{\square}{\square}-\frac{1}{2}=\frac{1}{100}$

41) Der englische Kinderbuchautor LEWIS CARROLL, bekannt durch das Buch "Alice im Wunderland", stellte in einer Erzählung folgende Aufgabe:
In einem besonders hartnäckigen Kampf verloren 70 von 100 Personen ein Auge, 75 ein Ohr, 80 eine Hand und gar 85 ein Bein. Jede Person verlor mindestens drei der genannten Körperteile.
a) Wie viel Personen verloren sowohl Auge als auch Ohr , Hand und Bein?

b) Wie viel Personen verloren gleichzeitig Ohr, Hand und Bein, aber kein Auge?

c) Welche weiteren Fragen lassen sich aufgrund dieser Angaben noch beantworten?

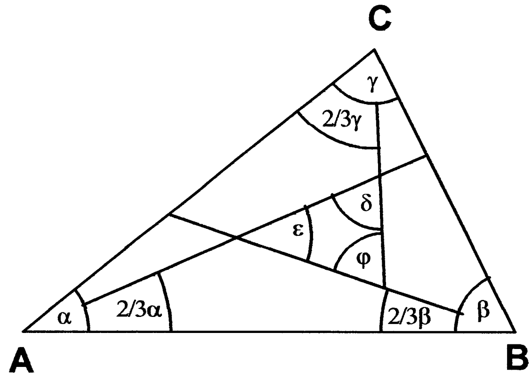
42) In einem Dreieck ABC gelte $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \varphi$, und die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels betrage 300°.
Ermittle alle Winkelgrößen φ , für die diese Bedingungen erfüllt sind!

43) An einer Schule werden die Arbeitsgemeinschaften Radsport, Turnen, Lehrmittelbau, Mathematik, Gartenbau und Volleyball von den Schülern Arndt, Bernd und Claus besucht. Jeder dieser Schüler besucht genau zwei dieser Zirkel, und keine zwei dieser Schüler besuchen denselben Zirkel. Es ist folgendes bekannt:
(1) Arndt, der "Turner" und der "Mathematiker" haben am gleichen Tag Zirkel.
(2) Der "Turner" ist älter als der "Radsportler".
(3) Oft verbringen der "Gartenbauer", der "Radsportler" und Claus ihre Freizeit zusammen.
(4) Der "Mathematiker" und der "Lehrmittelbauer" sind Nachbarn.
(5) Claus ist der jüngste der Schüler.

a) Lässt sich aus diesen Angaben die Zuordnung der Schüler zu den Arbeitsgemeinschaften eindeutig ermitteln? Wenn ja, dann gib sie an!
b) Führe dieselbe Untersuchung für den Fall durch, dass die Angabe (1) ersetzt wird durch
(1') Arndt und der Turner haben am gleichen Tag Zirkel.
c) Führe dieselbe Untersuchung für den Fall durch, dass zu den Angaben (1) bis (5) noch folgende Angabe hinzukommt:
(6) Der "Mathematiker" ist jünger als der "Volleyballspieler".

44) Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 59 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in 10 € - Scheinen , 20 € - Scheinen und 50 € - Scheinen. Dabei ist die Anzahl der 10 € - Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20 € - Scheine. Die Anzahl der 50 € - Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20 € - Scheine.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Höhe des abgehobenen Geldbetrags eindeutig ermitteln lässt!

45) Geg.: $\alpha = 39°$;
$\beta = 84°$;
Ges.: δ, ε, φ.
(Die Beziehungen zwischen den Winkeln entnimm der Figur.)



46) Axel und Bodo spielen Zahlenraten.
Beide denken sich vier Zahlen.
Axel sagt:
- Meine erste Zahl ist gleich der Summe aus der zweiten Zahl und der dritten Zahl.
- Die zweite Zahl ist um 3 größer als das Doppelte der dritten Zahl.
- Die vierte Zahl ist gleich der Summe aus der ersten Zahl und der dritten Zahl.
- Die Summe aus meinen vier Zahlen beträgt 89 .

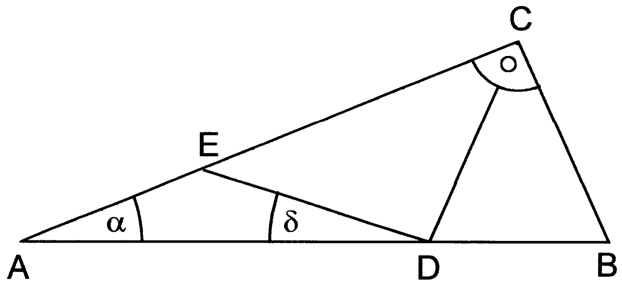
Nachdem Bodo diese vier Zahlen ermittelt hat, sagt er:
- Meine vier Zahlen stimmen mit deinen Zahlen nicht überein. Dennoch haben sie dieselben Eigenschaften wie deine Zahlen, nur ist ihre Summe kleiner als 83 .
- Ich verrate dir noch, dass die Summe aus meiner ersten und meiner dritten Zahl durch 3 teilbar ist.

Nach einigem Überlegen sagt Axel:
Deine Angaben reichen nicht aus, um deine vier Zahlen eindeutig zu ermitteln.

a) Wie lauten die vier Zahlen, die sich Axel gedacht hat?

b) Weise nach, dass Axel mit seiner letzten Aussage recht hat!

47) In einem Dreieck ABC gelte $\sphericalangle ACB = 90°$, $\sphericalangle BAC = \alpha$ sowie $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ mit D auf $\overline{AB}$ und E auf $\overline{AC}$ (vgl. Figur).



a) Berechne die Größe δ des Winkels $\sphericalangle EDA$, wenn $\alpha = 20°$ gilt!
b) Drücke die Winkelgröße δ allgemein durch die Winkelgröße α aus!
c) Wie groß muss α gewählt werden, damit $\overline{CD}$ die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ wird?
d) Wie groß muss α gewählt werden, damit zusätzlich $\overline{AE} = \overline{DE}$ gilt?
e) In einer entsprechenden Figur wurde α so gewählt, dass das Dreieck CED gleichseitig wird. Berechne die zugehörige Winkelgröße δ !

48) Anton und Bodo lassen ihre Spielzeugautos auf einem Rundkurs jeweils mit konstanter Geschwindigkeit kreisen.
Wenn sie im gleichen Sinn herum fahren, überholt Bodos Auto das von Anton alle 35 Sekunden; wenn sie entgegengesetzt herum fahren, begegnen sich die Autos alle 15 Sekunden.
Wie viel Sekunden braucht jedes Auto für den Rundkurs?

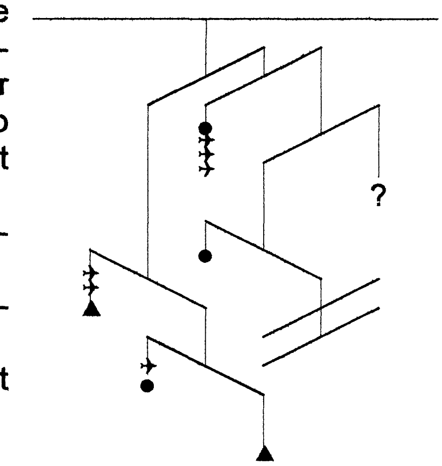
49) Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Schüler nach zunehmendem Alter ordnen.

Die Aussagen lauten:

(1) Anton ist älter als Elvira .
(2) Berta ist jünger als Christian .
(3) Dieter ist jünger als Anton .
(4) Elvira ist älter als Christian .
(5) Anton ist jünger als Christian .
(6) Elvira ist älter als Dieter .
(7) Christian ist jünger als Dieter .

Weise nach, dass diese Aufgabe eindeutig lösbar ist!
Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Schüler dem Alter nach!

50) An die Enden gleichlanger Stäbchen werden verschiedene Gegenstände (Stäbchen, Kugeln, Flugzeuge, Glöckchen) gebunden. Anschließend verbindet man diese Stäbchen in der Mitte über dünne Fäden miteinander. Wenn sich das ganze so gebildete System im Gleichgewicht befindet und aufgehängt wird, dreht es sich bereits bei leichtem Luftzug ("Windspiel"). Welche Gegenstände halten das Windspiel anstelle des Fragezeichens in Schwebe?
Gib alle Möglichkeiten an! (Das Gewicht der Fäden bleibt dabei unberücksichtigt, nicht aber das der Stäbchen.)
Ordne die Gegenstände nach ihrem Gewicht! (Beginne mit dem leichtesten Gegenstand.)



51) Ermittle alle gebrochenen Zahlen x , für die ein gleichschenkliges Dreieck ABC existiert, dessen Seitenlängen folgende Bedingungen erfüllen:
$\overline{BC} = a = 2x + 1$; $\overline{AC} = b = 21 - 3x$; $\overline{AB} = c = 10 - x$.

52) Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben: In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Mathematik-Olympiade beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.
Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, dass Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muss.
Weise nach, dass die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

53) Arno berichtet: Ich bin jetzt doppelt so alt, wie mein Bruder Bernd zu einem bestimmten früheren Zeitpunkt war. Zu diesem früheren Zeitpunkt war ich genau so alt, wie Bernd jetzt ist. Zu einem bestimmten späteren Zeitpunkt wird Bernd genau so alt sein, wie ich jetzt bin. Zu diesem späteren Zeitpunkt werden wir beide zusammen genau 63 Jahre alt sein.
Weise nach, dass man aus diesen Angaben das gegenwärtige Alter von Arno und von Bernd eindeutig ermitteln kann.
Wie alt sind die beiden Brüder?

54) In dem Schema $43\square 1\square 5\square$ ist jede der Leerstellen $\square$ so mit einer Ziffer auszufüllen, dass die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.
Gib an, wie viel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

55) In einem Haus wohnen fünf Männer, drei davon verheiratet, zwei ledig. Interessant ist, dass keiner der fünf die gleiche Haarfarbe hat wie ein anderer, dagegen jedes Ehepaar gleichfarbiges Haar trägt. Es ist weiter bekannt:

(1) Herr Apel hat Naturlocken, die nicht schwarz sind, wogegen Frau Edel nicht rothaarig ist.
(2) Frau Tiedel versucht beim Ehekrach in der Familie mit den schwarzen Haaren zu vermitteln.
(3) Die dunkelblonde Frau unterhält sich gern und lange mit Frau Edel, wogegen der blonde Mann lieber mit Herrn Knobel Schach spielt.
(4) Herr Knobel und Herr Zabel sind befreundet, nur einer von beiden ist ledig, der andere ist blond.
(5) Einer der zwei ledigen Männer hat eine Glatze.

Zeige, dass sich aufgrund dieser Angaben folgende Fragen eindeutig beantworten lassen:

a) Welcher der fünf Männer hat eine Glatze?

b) Welche der acht Personen hat rote Haare?

56) Nach folgenden Regeln lässt sich ein "Zahlenzug" bilden:

(R1) Im ersten "Waggon" steht eine natürliche Zahl größer als 1 .
(R2) Steht in einem "Waggon" eine gerade Zahl, dann steht im nächsten "Waggon" die halb so große Zahl.
(R3) Steht in einem "Waggon" eine ungerade Zahl größer als 1 , dann steht im nächsten "Waggon" die um 1 kleinere Zahl.
(R4) Steht in einem "Waggon" die Zahl 1 , dann ist der "Zahlenzug" mit diesem "Waggon" beendet.

a) Nenne alle diejenigen "Zahlenzüge", die aus genau 4 "Waggons" bestehen!
Begründe auch, dass deine Aufzählung vollständig ist!

b) Welches ist die größtmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht?
Nenne einen solchen "Zahlenzug" mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine größere Anfangszahl nicht möglich ist!

c) Welches ist die kleinstmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht? Nenne einen solchen Zahlenzug mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine kleinere Anfangszahl nicht möglich ist!

d) Finde jeweils eine Vermutung, welches die größtmögliche bzw. die kleinstmögliche Zahl ist, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau n "Waggons" besteht, und überprüfe diese Vermutung für die Fälle $n = 7$, $n = 10$ und $n = 11$!

57) Nach der Schuljahresabschlussfeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.
Wie viel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

58) Peter musste 20-mal würfeln, bis alle Augenzahlen von 1 bis 6 mindestens einmal gefallen waren.
Probiere selbst, nach wie viel Würfen es dir gelingt, dieses Ziel zu erreichen! Mache mehrere Versuche und stelle fest, wie oft du schneller als Peter ans Ziel gelangt bist!
Wie oft wird man im Durchschnitt würfeln müssen, um dieses Ziel zu erreichen?

59) Wir betrachten "Worte", die nur aus den Buchstaben M , I , U bestehen. Aus bereits vorhandenen Worten sollen neue Worte abgeleitet werden, wobei man sich streng an folgende Regeln halten muss:

(R1) Wenn in einem Wort der letzte Buchstabe ein I ist, dann darf man ein U hinten anfügen.
(Beispiel: Aus M I U I kann man M I U I U ableiten, kurz: M I U I $\xrightarrow{R1}$ M I U I U .)

(R2) Wenn ein Wort mit M beginnt, dann darf man die Buchstabenfolge, die nach dem M kommt, verdoppeln.
(Beispiel: M I U I $\xrightarrow{R2}$ M I U I I U I .)

(R3) Wenn ein Wort die Buchstabenfolge I I I enthält, dann darf man diese Buchstabenfolge durch ein U ersetzen.
(Beispiel: M I I I U I $\xrightarrow{R3}$ M U U I .)

(R4) Wenn ein Wort die Buchstabenfolge U U enthält, dann darf man diese Buchstabenfolge weglassen.
(Beispiel: M I U U I $\xrightarrow{R4}$ M I I .)

a) Wende auf das Wort M I die Regeln R2, R2, R1, R3 in der angegebenen Reihenfolge an! Welche Worte lassen sich auf diese Weise ableiten?

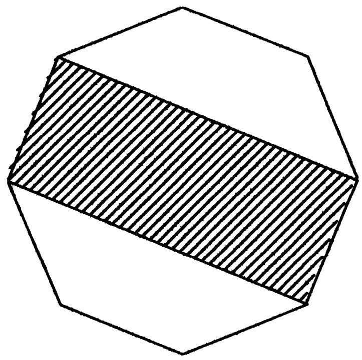
b) Lässt sich das Wort M I M I aus dem Wort M I durch Anwendung der angegebenen Regeln ableiten?
Begründe deine Antwort!

c) Lässt sich das Wort M I U I U I U I U aus dem Wort M I ableiten?
Wenn ja, dann gib eine Ableitung (nebst Angabe der verwendeten Regeln) an!

d) Gib eine Ableitung für das Wort M U I U I aus dem Wort M I an!

e) Gib eine Ableitung für das Wort M U I I aus dem Wort M I an!

60) In dem nebenstehend abgebildeten regelmäßigen Achteck ist ein Streifen markiert.

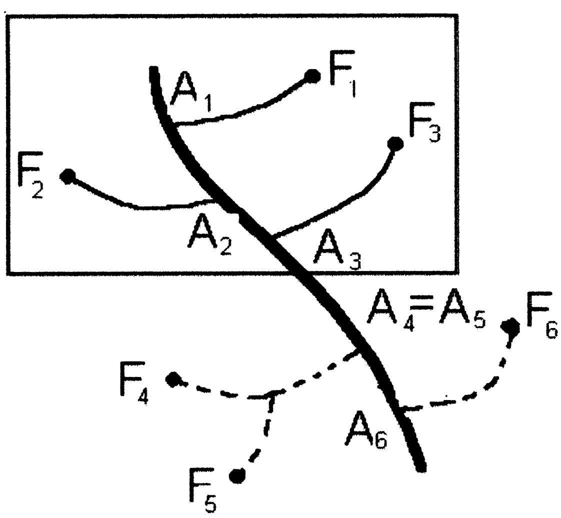


a) Welchen Anteil an der Achtecksfläche hat die Fläche dieses Streifens?

b) Wie sieht die Situation beim regelmäßigen Sechseck oder beim regelmäßigen Zehneck aus?

c) Wie lässt sich die Aufgabe verallgemeinern?

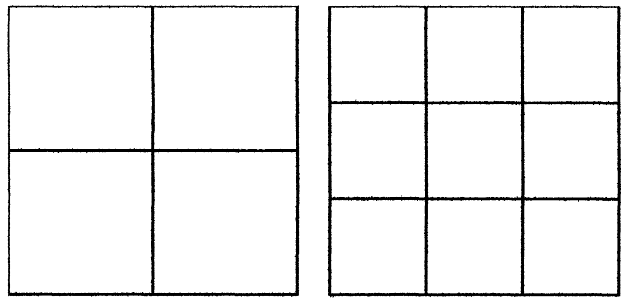
61) In einem Industriegebiet liegen drei Fabriken F_1 , F_2 , F_3 . Sie sind von einer Hauptstraße (dicke Linie) aus über die Abzweigstellen A_1 , A_2 , A_3 auf Nebenstraßen (dünne Linien) zu erreichen (siehe umrahmten Teil der Skizze).



a) An welcher Stelle B der Hauptstraße muss man eine Bushaltestelle bauen, wenn man erreichen will, dass die Summe der drei Weglängen von B bis zu jeder dieser Fabriken möglichst klein wird?
Gib diesen günstigsten Standort an und begründe, warum es der günstigste Standort ist!

b) Das Industriegebiet wird um drei Fabriken F_4 , F_5 , F_6 erweitert, für die weitere Nebenstraßen (gestrichelte Linien) gebaut werden.
An welcher Stelle B der Hauptstraße müsste nun die Bushaltestelle stehen, wenn man erreichen will, dass die Summe der sechs Weglängen von B zu den sechs Fabriken möglichst klein wird?

62) In nebenstehender Figur wird gezeigt, wie man ein Quadrat in 4 bzw. 6 Quadrate zerlegen kann. Offensichtlich ist es jedoch nicht möglich, ein Quadrat in zwei Quadrate zu zerlegen.



a) Ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die es möglich ist, ein Quadrat in n Quadrate zu zerlegen!

b) Zeige jeweils, wie man einen Würfel in 15, 20, bzw. 22 Würfel zerlegen kann!

c) Gibt es endlich oder unendlich viele natürliche Zahlen n , für die es möglich ist, einen Würfel in n Würfel zu zerlegen?
Gib möglichst viele derartige Zahlen n an!

63) Ermittle eine natürliche Zahl, die bei Division durch 11 den Rest 1 , bei Division durch 12 den Rest 2 , bei Division durch 13 den Rest 3 und bei Division durch 14 den Rest 4 lässt !

64) In einem Abteil eines Zuges fuhren genau 4 Personen mit den Namen Fischer, Götting, Hauser und Jordan. Ihre Berufe waren Astronom, Poet, Schriftsteller bzw. Dramatiker. Es stellt sich heraus, dass jeder genau ein Buch gekauft und mitgebracht hatte, das von einem der drei anderen Reisenden geschrieben war.
Von ihnen sei folgendes bekannt:

(1) Keiner kaufte oder las ein Buch, welches er selbst geschrieben hat.

(2) Der Poet las ein Theaterstück.

(3) Götting hatte sich für die Reise eines der von Jordan verfassten Bücher gekauft.

(4) Der Schriftsteller, ein junger Mann, hatte eben sein erstes Buch veröffentlicht und gab offen zu, dass er Bücher über Astronomie nicht liest und deshalb auch nicht kauft.

(5) Fischer und Götting vertieften sich in die Lektüre, nachdem sie die gekauften Bücher ausgetauscht hatten.

(6) Der Schriftsteller schrieb ein Prosawerk, der Poet schrieb Gedichte und der Dramatiker das Theaterstück.

Untersuche, ob sich allein aus diesen Angaben eine Zuordnung zwischen den Namen, den Berufen, den gelesenen Büchern und den Autoren dieser Bücher eindeutig ermitteln lässt!
(Hinweis: Versuche als erstes die Zuordnung zwischen den Berufen und den gelesenen Büchern zu ermitteln.)

MERKSTOFF

Wahrscheinlichkeit P eines zufälligen Ereignisses E :

$$P(E) =_{Df} \frac{\text{Anzahl der "günstigen" Fälle}}{\text{Anzahl der "möglichen" Fälle}} = \frac{g}{m}$$

ZAHLENTHEORIE

Seien a , b , k , m , q und r Zeichen für natürliche Zahlen.

Definition der Teilbarkeitsbeziehung: $a|b \Leftrightarrow_{Df}$ Es gibt ein k , so dass $b = k \cdot a$ gilt .

Satz über die Division mit Rest (Grundgleichung der Zahlentheorie):

Zu jedem a (als Dividenden) und jedem $m \neq 0$ (als Divisor) gibt es stets genau ein q (als Quotienten) und ein r (als Rest), so dass folgende Gleichung gilt:

$$a = m \cdot q + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r \leq m - 1 \quad .$$

Dieser Satz wird angewendet beim *Euklidischen Algorithmus* zum Ermitteln des *größten gemeinsamen Teilers* zweier Zahlen.

Beispiel:

Ermittle den ggT(85085;10296) :

$$\begin{aligned}
85085 &= 10296 \cdot 8 + 2717 \\
10296 &= 2717 \cdot 3 + 2145 \\
2717 &= 2154 \cdot 1 + 572 \\
2145 &= 572 \cdot 3 + 429 \\
572 &= 429 \cdot 1 + \underline{143} \\
429 &= 143 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

Der letzte von 0 verschiedene Rest ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler, also gilt

$$ggT(85085;10296) = 143 .$$

Ferner erhält man $85085 = 143 \cdot 595$ und $10296 = 143 \cdot 72$.

Satz: Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen a und b :

$$ggT(a;b) \cdot kgV(a;b) = a \cdot b \quad .$$

Satz: Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig in Primfaktoren zerlegen und als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.

Beispiel: $85085 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$; $10296 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$.

EINIGE GRUNDLAGEN AUS LOGIK UND MENGENLEHRE

Konstante $=_{Df}$ Zeichen für ein bestimmtes Element einer vorgegebenen Menge

Variable $=_{Df}$ Zeichen für ein beliebiges Element einer vorgegebenen Menge (die *Variablengrundbereich* genannt wird)

Term $=_{Df}$ Konstanten, Variable und deren sinnvolle Zusammensetzung mit Hilfe von Operationszeichen

(Terme enthalten keine Relationszeichen. Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Konstanten, dann geht dieser in die Bezeichnung eines Objekts, also in eine Konstante über.)

Aussage $=_{Df}$ Sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

Aussageform $=_{Df}$ Sprachliches Gebilde, das (mindestens eine freie) Variable enthält und zu einer Aussage wird,. wenn man alle auftretenden Variablen interpretiert, d.h. durch Konstanten (des zugrunde gelegten Grundbereichs) ersetzt.

Erfüllungsmenge $=_{Df}$ Menge aller derjenigen Elemente des Grundbereichs, bei denen die Aussageform durch Interpretation in eine wahre Aussage übergeht.

Einzelaussage:	7 ist eine Primzahl.
Allaussage:	Alle Primzahlen, die größer als 2 sind, sind ungerade Zahlen.
Existenzaussage:	Es gibt eine ungerade Primzahl
Erfüllbare Aussageform	$x^2 = 4$; $x \in Q_+$
Allgemeingültige Aussageform:	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; $x \in Q_+$
Nicht erfüllbare Aussageform:	$x^2 + 1 = x^2 + 2$; $x \in Q_+$

Eine Menge heißt *leere Menge* genau dann, wenn sie kein Element enthält.
Die leere Menge wird mit $\emptyset$ oder $\{ \}$ bezeichnet und ist die Erfüllungsmenge einer jeden nicht erfüllbaren Aussageform.

Durch eine *Definition* wird ein neuer Name oder eine neue Bezeichnung eingeführt.
Definitionen sind zweckmäßige Festsetzungen und können nicht bewiesen werden.
Jede Definition lässt sich in Form einer "Definitionsgleichung" schreiben und in folgender Form aussprechen:

" .... heißt ________ genau dann, wenn .... "

Verknüpfungen von Aussagen oder Aussageformen

$V \Rightarrow B$;	*Wenn* V , *so* B ;	Aus V *folgt* B .
$V_1 \wedge V_2$;	V_1 *und* V_2 ;	(Sowohl V_1 als auch V_2) .
$V_1 \vee V_2$;	V_1 *oder* V_2 ;	(Entweder V_1 oder V_2 oder beide) .
$V \Leftrightarrow B$;	V *genau dann, wenn* B ;	(Aus V folgt B und umgekehrt) .

Verknüpfungen von Mengen und Beziehungen zwischen Mengen

Durchschnitt:	$M \cap N$	$=_{Df}$	$\{x \mid x \in M$ *und* $x \in N\}$.
Vereinigung:	$M \cup N$	$=_{Df}$	$\{x \mid x \in M$ *oder* $x \in N\}$.
Produktmenge:	M N	$=_{Df}$	$\{(x;y) \mid x \in M$ und $y \in N\}$
Teilmengenbeziehung:	$M \subseteq N$	$\Leftrightarrow_{Df}$	*Wenn* $x \in M$, *so* $x \in N$.
Gleichheit:	$M = N$	$\Leftrightarrow_{Df}$	$x \in M$ *genau dann, wenn* $x \in N$.
echte Inklusion:	$M \subset N$	$\Leftrightarrow_{Df}$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$.

MATHEMATISCHE BESTIMMUNGSAUFGABEN

Eine sehr umfangreiche Klasse mathematischer Aufgaben hat folgende Gestalt:
"Ermittle alle *Elemente* (Paare, Tripel usw. von Elementen), die folgende *Bedingungen* (Beziehungen, allgemein Aussageformen) *erfüllen*: ...." (d.h. es ist zu einer Konjunktion von Aussageformen - speziell zu einer einzigen Aussageform - die Erfüllungsmenge zu ermitteln).

Zu dieser Aufgabenklasse gehören die *zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben*, gewisse *logisch-kombinatorische Aufgaben* (Suche nach Anordnungen, Zuordnungen und Auswahlmöglichkeiten), geometrische *Konstruktions- und Ortsaufgaben* sowie das Lösen von *Gleichungen und Ungleichungen.*

Die Lösung einer derartigen Aufgabe muss stets enthalten:

(a) Die Angabe der *Lösungsmenge* (der gesuchten Elemente) .

(b) Den *Einzigkeitsnachweis*, in dem gezeigt wird:
"Wenn ein Element alle gestellten Bedingungen erfüllt, dann gehört es zur angegebenen Lösungsmenge ."

(c) Den *Existenznachweis*, in dem gezeigt wird:
"Wenn ein Element zur angegebenen Lösungsmenge gehört, dann erfüllt es alle gestellen Bedingungen."

In der Regel stellt man die Lösung einer derartigen Aufgabe wie folgt dar:

"Wenn die Aufgabe eine Lösung besitzt, dann gilt: ....

Folglich gilt: Wenn die Aufgabe Lösungen besitzt, dann können dies nur die folgenden sein:
.... (Einzigkeitsnachweis, Lösungsmenge).

Es sind tatsächlich Lösungen, denn: ....(Probe als Existenznachweis) ."

Es gibt auch Bestimmungsaufgaben, bei denen *Daten* a, b, ..., c und Beziehungen gegeben sind und eine *"Unbekannte"* x gesucht wird, die berechnet bzw. durch die Daten ausgedrückt werden soll: $x = f(a,b,...,c)$. Meist ist dabei vom Sachverhalt her klar, dass es genau ein solches gesuchtes Element gibt.
Zu dieser Aufgabenklasse gehören die *Sachaufgaben* und die *geometrischen Bestimmungsaufgaben.*

Es gibt auch Aufgaben, bei denen eine *Aussage* gegeben ist, deren *Wahrheitswert* zu ermitteln ist. Ist die Aussage wahr, dann muss sie bewiesen, ist sie falsch, dann muss sie widerlegt werden (*Entscheidungsaufgaben)* .

Bisweilen werden auch *Voraussetzungen* (Bedingungen) gegeben und es wird eine *Behauptung als Vermutung* gesucht, die unter den gegebenen Voraussetzungen zutrifft, und diese Vermutung ist dann aus den Voraussetzungen abzuleiten *("Offene" Aufgaben)* .

Und schließlich gibt es Aufgaben, bei denen ein *Term* gegeben ist, dessen Wert zu berechnen, dessen Definitionsbereich zu ermitteln oder der zu vereinfachen ist.

DAS UMFORMEN UND UMKEHREN VON SÄTZEN

Wahre Aussagen heißen in der Mathematik Lehrsätze oder auch *Sätze* .
Jeder mathematische Satz lässt sich als *Implikation* (in der Wenn-dann-Form) formulieren:

$V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_n \Rightarrow B$, gelesen: "*Wenn* (V_1 *und* V_2 *und* ... *und* V_n) gilt, *dann* gilt B ".

$V_1, V_2, \ldots$ heißen *Voraussetzungen* , B die *Behauptung* des Satzes.
Beachte: Statt "Wenn V , dann B" sagt man auch: "Wenn V , so B" ; "Aus V *folgt* B" ; "V ist *hinreichend* für B" ; "B ist *notwendig* für V" .

Das Umformen von Sätzen

Vertauscht man die Behauptung eines Satzes mit einer oder mehreren (u.U. allen) Voraussetzungen *und negiert (verneint)* die vertauschten Teile, dann entsteht ein *zum Ausgangssatz äquivalenter (gleichbedeutender) Satz* , der dasselbe aussagt wie der Ausgangssatz und daher keines erneuten Beweises bedarf.
Man spricht hier von einer *"Kontraposition"* des Ausgangssatzes.

(S) $V \Rightarrow B$; "Wenn $4|x$, dann $2|x$ " .

(K) nicht $B \Rightarrow$ nicht V ; "Wenn nicht $2|x$, dann nicht $4|x$ " .

Mache dir die folgend beschriebenen Umformungen eines Satzes mit zwei Voraussetzungen anhand des Stufenwinkelsatzes klar!

(S) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$; (K) nicht $B \Rightarrow$ nicht $(V_1 \wedge V_2)$;

(K_1) (nicht B) $\wedge V_2 \Rightarrow$ (nicht V_1) ;

(K_2) $V_1 \wedge$ (nicht B) $\Rightarrow$ (nicht V_2) .

Beachte: "nicht $(V_1 \wedge V_2)$" ist gleichbedeutend mit " (nicht V_1) oder (nicht V_2)" ;
statt "$V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$" kann man auch "$V_1 \Rightarrow (V_2 \Rightarrow B)$" sagen .

Das Umkehren von Sätzen

Man erhält eine *Umkehrung* eines Satzes, indem man seine Behauptung mit einer oder mehreren (u.U. auch allen) seinen Voraussetzungen *vertauscht* .
Eine Umkehrung einer wahren Aussage (d.h. eines Satzes) muss nicht wieder eine wahre Aussage sein. Ist sie eine wahre Aussage, dann muss sie *bewiesen* , ist sie eine falsche Aussage, dann muss sie *widerlegt* werden.

Ist die Umkehrung eines Satzes wiederum ein Satz, dann kann man die beiden in einem Satz *zusammenfassen* , der dann eine *"Genau-dann-wenn-Form"* besitzt.
Beispiel (für einen Satz mit 2 Voraussetzungen) :

(S) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$; (U) $B \Rightarrow (V_1 \wedge V_2)$; (Z) $(V_1 \wedge V_2) \Leftrightarrow B$.

(U_1) $B \wedge V_2 \Rightarrow V_1$; (Z_1) $V_1 \Rightarrow (V_2 \Leftrightarrow B)$.

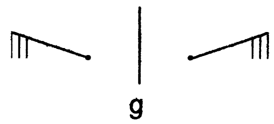
(U_2) $V_1 \wedge B \Rightarrow V_2$; (Z_2) $V_2 \Rightarrow (V_1 \Leftrightarrow B)$.

Beachte, dass vor dem Zusammenfassen von (S) und (U_1) zu (Z_1) zunächst die den Sätzen (S) und (U_1) gemeinsame Teilvoraussetzung V_1 "herausgezogen" wurde.

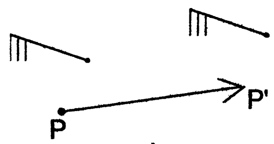
Merkregel:
Vertauschen *und* Verneinen der Behauptung B mit einer Voraussetzung V_k ist "erlaubt"; es entsteht dadurch keine neue Aussage.
Nur Vertauschen oder nur Verneinen ist dagegen "nicht erlaubt", da dadurch eine neue Aussage entsteht, die auch falsch sein kann.

SPIEGELUNGEN, VERSCHIEBUNGEN UND DREHUNGEN

Jede *Geradenspiegelung Sp(g)* ist durch ihre Spiegelgerade g eindeutig festgelegt.

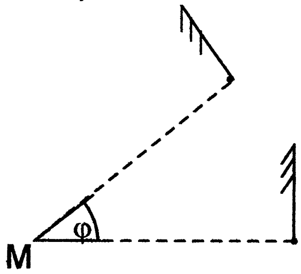


Jede *Verschiebung* $V(\overrightarrow{PP'})$ ist durch einen ihrer Verschiebungspfeile $\overrightarrow{PP'}$ eindeutig festgelegt. (Alle gleich langen und gleich gerichteten Pfeile legen dieselbe Verschiebung fest.)



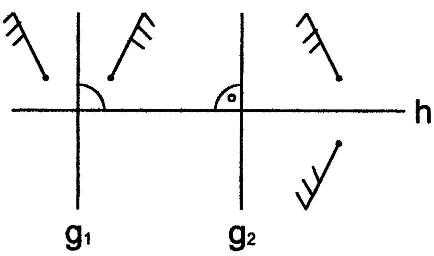
Jede *Drehung* $Dr(M;\varphi)$ ist durch ihren Drehpunkt M und den (orientierten) Drehwinkel φ eindeutig festgelegt.

Jede *Punktspiegelung Sp(P)* ist durch ihren Spiegelpunkt P eindeutig festgelegt.
(Jede Punktspiegelung ist eine Halbdrehung, d.h. es gilt Sp(P) = Dr(P;180°) .)



Geradenspiegelungen, Verschiebungen, Drehungen und alle Abbildungen, die durch Nacheinanderausführen dieser Abbildungen entstehen, heißen *Bewegungen (Bew)* .

Beispiel: Gilt $g_1 || g_2$ und $g_2 \perp h$, dann nennt man die durch Nacheinanderausführung von drei Spiegelungen erhaltene Bewegung $Sp(g_1)\circ Sp(g_2)\circ Sp(h)$ eine *Gleitspiegelung* (oder Schubspiegelung).



Eigenschaften von Bewegungen

(1) *Eindeutige Verknüpfbarkeit:* Die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen ergibt stets wieder eine Bewegung.

(2) *Umkehrbarkeit:* Zu jeder Bewegung gibt es eine eindeutig bestimmte entgegengesetzte Bewegung (die mit der Ausgangsbewegung verknüpft die identische Abbildung ergibt).

(3) *Geradentreue, Strahlentreue, Streckentreue:* Das Bild einer Geraden (eines Strahls, einer Strecke) bei einer Bewegung ist stets wieder eine Gerade (ein Strahl, eine Strecke).

(4) *Inzidenztreue:* Wenn $P \in g$ und $P,g \xrightarrow{Bew} P',g'$, dann $P' \in g'$.

(5) *Anordnungstreue:* Wenn B zwischen A und C liegt, dann gilt auch für die Bilder, dass stets B' zwischen A' und C' liegt.

(6) *Parallelentreue:* Wenn $g || h$ und $g,h \xrightarrow{Bew} g',h'$, dann $g' || h'$.

(7) *Mittelpunktstreue:* Das Bild des Mittelpunkts einer Strecke ist stets auch der Mittelpunkt der Bildstrecke.

(8) *Winkeltreue:* Wenn $\alpha \xrightarrow{Bew} \beta$, dann $\alpha = \beta$.

(9) *Längentreue:* Wenn $\overline{AB} \xrightarrow{Bew} \overline{A'B'}$, dann $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

(10) *Inhaltstreue:* Wenn $F \xrightarrow{Bew} F'$, dann $A_F = A_{F'}$.

(11) $V(\overrightarrow{AB})\circ V(\overrightarrow{BC}) = V(\overrightarrow{AC})$.

(12) $Sp(g)\circ Sp(h) = Dr(S;2\sphericalangle(g,h))$, falls $g \cap h = \{S\}$.

(13) $Sp(g)\circ Sp(h) = V(\overrightarrow{PP'})$ mit $PP' \perp g$ und $\overline{PP'} = 2d(g,h)$, falls $g || h$.

(14) $Dr(M_1;\varphi_1)\circ Dr(M_2;\varphi_2) = Dr(M;\varphi_1+\varphi_2)$, falls $\varphi_1+\varphi_2 \neq 0°, 180°$.

(15) $Sp(A)\circ Sp(B) = V(2\overrightarrow{AB})$.

EINIGE MUSTERLÖSUNGEN

(Lies in der "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 5" auf S. 29 - 32 den Abschnitt "Einige Musterlösungen".)

Aufgabe 1)

Beweise folgenden Satz: Wenn eine natürliche Zahl zwei andere natürliche Zahlen teilt, dann teilt sie auch deren Summe.

V_1: $a|b$; V_2: $a|c$;

Beh.: $a|(b+c)$.

Beweis (in Form eines Beweisschemas):

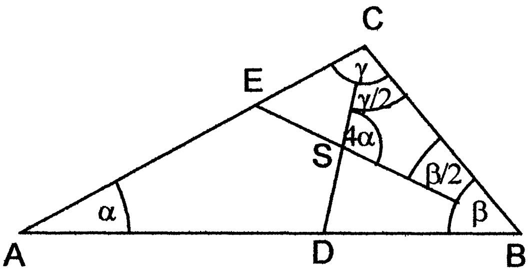
V_1	$\Rightarrow$	(1)	$b = n_1 a$ mit $n_1 \in N$;	[Definition "Teilbarkeit"] .
V_2	$\Rightarrow$	(2)	$c = n_2 a$ mit $n_2 \in N$;	[Definition "Teilbarkeit"] .
(1),(2)	$\Rightarrow$	(3)	$b + c = n_1 a + n_2 a$;	[beidseitige Addition] .
(3)	$\Rightarrow$	(4)	$b + c = (n_1 + n_2)a$;	[Distributivgesetz (Ausklammern)] .
(4)	$\Rightarrow$	(5)	$b + c = na$ mit $n \in N$;	[Wenn $n_1, n_2 \in N$, dann $(n_1 + n_2) \in N$] .
(5)	$\Rightarrow$		Beh.: $a|(b+c)$;	[Definition "Teilbarkeit"] .

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung aus den Voraussetzungen abgeleitet werden kann, w.z.b.w.

Aufgabe 2)

Sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $\overline{BE}$ und $\overline{CD}$ eines Dreiecks ABC mit $\sphericalangle BAC = \alpha$, und es gelte $\sphericalangle BSC = 4\alpha$.

Weise nach, dass durch diese Bedingungen die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α !



Gegebene Bedingungen:

(a) $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$;

(b) $\overline{BE}$ und $\overline{CD}$ sind Winkelhalbierende von $\triangle ABC$;

(c) $BE \cap CD = \{S\}$;

(d) $\sphericalangle BSC = 4\alpha$.

Gesucht: α .

Lösung (in Kurzform):

(a),(b),(c)	$\Rightarrow$	(1)	$\sphericalangle CBE = \frac{\beta}{2}$ und $\sphericalangle SCB = \frac{\gamma}{2}$;	[Def. "Winkelhalbierende"] .
(1),(d)	$\Rightarrow$	(2)	$4\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°$;	[Innenwinkelsatz für $\triangle SBC$] .
(a)	$\Rightarrow$	(3)	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$;	[Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$] .
(3)	$\Rightarrow$	(4)	$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$;	[Umformung] .
(2),(4)	$\Rightarrow$	(5)	$4\alpha + 90° - \frac{\alpha}{2} = 180°$;	[Einsetzen] .
			$7 \cdot \frac{\alpha}{2} = 90°$;	
			$\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180° \approx 25{,}7°$;	[Umformung] .

Damit ist gezeigt, dass die Winkelgröße α durch die gegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt ist und dass $\alpha \approx 25{,}7°$ gilt.

Aufgabe 3)

Es sind alle vierstelligen Primzahlen zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:

Alle Ziffern einer solchen Primzahl sind voneinander verschieden. Zerlegt man eine solche Primzahl in der Mitte in zwei zweistellige Zahlen, so sind diese beiden Zahlen Primzahlen, deren jede die Quersumme 10 besitzt. Die letzten beiden Stellen einer solchen Primzahl sind - jede für sich allein - ebenfalls Primzahlen.

Untersuche, ob sich die Lösungsmenge verändert, wenn man auf die Bedingung verzichtet, dass alle Ziffern einer solchen Primzahl voneinander verschieden sein sollen!

(Es sei bekannt, dass 1973 und 3719 Primzahlen sind.)

Gegebene Bedingungen:
(a) p ist eine Primzahl ;
(b) $p = \overline{abcd}$ mit $a,b,c,d \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$;
(c) a, b, c, d sind paarweise verschieden ;
(d) $x = 10a + b$, $x \in \{\text{Primzahl}\}$, $a + b = 10$;
(e) $c, d, y \in \{\text{Primzahl}\}$, $c + d = 10$, $y = 10c + d$;

Gesucht: $M = \{ p \mid (a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d) \wedge (e) \}$.

Einzigkeitsnachweis:

Es gilt (1) Es gibt genau 9 zweistellige Zahlen mit der Quersumme 10 , nämlich 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91 .

(1),(d) $\Rightarrow$ (2) $\overline{ab} \in \{19, 37, 73\}$; [Definition "Primzahl"] .

(1),(e) $\Rightarrow$ (3) $\overline{cd} \in \{37, 73\}$; [Definition "Primzahl"] .

(2),(3),(b) $\Rightarrow$ (4) $p \in \{1937, 1973, 3737, 3773, 7337, 7373\}$: [systematisches Erfassen aller möglichen Fälle] .

(4),(c) $\Rightarrow$ (5) $p \in \{1937, 1973\}$; [nur hier sind alle Ziffern paarweise verschieden].

(5),(a) $\Rightarrow$ (6) $p \in \{1973\}$; [1937 (= $13 \cdot 149$) ist keine Primzahl] .

Damit ist gezeigt, dass nur die Zahl 1973 alle gestellten Bedingungen erfüllen kann.

Existenznachweis:

1973 ist eine vierstellige Primzahl mit lauter verschiedenen Ziffern;

19 und 37 sind Primzahlen, die beide die Quersumme 10 besitzen;

7 und 3 sind ebenfalls Primzahlen.

Damit ist gezeigt, dass die Zahl 1973 tatsächlich alle gestellten Bedingungen erfüllt.

Folglich lautet die gesuchte Erfüllungsmenge $M = \{1973\}$.

Verzichtet man auf die Bedingung (c) , dann müssen noch die unter (5) ausgeschlossenen Zahlen 3737, 3773, 7337 und 7373 in Betracht gezogen werden. Wegen $37 \mid 3737$, $11 \mid 3773$, $11 \mid 7337$ und $73 \mid 7373$ sind dies jedoch keine Primzahlen und müssen daher wegen Bedingung (a) ausgeschlossen werden.

Daher ändert sich bei Verzicht auf die Bedingung (c) die Lösungsmenge nicht, d.h. Bedingung (c) ist eine "überflüssige" Bedingung.