MENGE / SCHRIEDER

Mechanik Aufgaben

BAND III

Dynamik · Mechanik der Flüssigkeiten

MENGE/SCHRIEDER

Mechanik-Aufgaben

aus der Maschinentechnik

Band III: Dynamik – Mechanik der Flüssigkeiten
Strömung der Flüssigkeiten

Neu bearbeitet von

Dipl.-Ing. Emil Schrieder
Baurat a. D., Staatliche Ingenieurschule Hagen

24., verbesserte Auflage · Mit 289 Bildern

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG 1963

Als Lehrbuch an den Fachschulen
der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt

Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen

Berlin, den 25. 4. 1955

Redaktionsschluß 30. 10. 1962

ES 20 C 4

 · VEB Fachbuchverlag Leipzig
Satz und Druck: VEB Fachbuchdruck Naumburg (Saale) IV/26/14 Auftrags-Nr. 1013
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114-210/58/63 des Ministeriums für Kultur
der Deutschen Demokratischen Republik, HV Verlage und Buchhandel
EVP 7,80

VORWORT

Die Ausbildung qualifizierter Fachkräfte für alle Gebiete der Industrie und Wirtschaft unserer Republik ist das Hauptanliegen der Fachschulen. Das im Unterricht vermittelte Wissen ist der Inhalt der einschlägigen Lehrbücher, die den Stoff übersichtlich, aber in äußerst konzentrierter Form, enthalten. Für die Ausgestaltung des Unterrichts sowie von Lehrgängen und für die Vertiefung des vom Lehrer vermittelten Wissens im Selbststudium ist Übung notwendig, die beim Durchrechnen entsprechender Aufgaben erworben wird.
Eine geschickt zusammengestellte Aufgabensammlung des jeweiligen Sachgebietes bietet sowohl den Lehrern als auch den Schülern an den Ingenieur- und Fachschulen wesentliche Vorteile. Außerdem bringt eine solche Aufgabensammlung Zeitgewinn, indem sie viel Schreibarbeit im Unterricht erspart. Auch die in der Praxis stehenden Techniker und Ingenieure orientieren sich gern an Hand einer solchen Sammlung mit Beispielen, die den Berechnungsgang zeigen, über mögliche Lösungswege für manchmal ungewöhnliche Aufgaben, vor denen sie stehen.
Den in der Maschinenindustrie beschäftigten Facharbeitern, Meistern, Technikern und Ingenieuren soll die Sammlung von „Mechanikaufgaben" von Menge/Zimmermann/Schrieder die gewünschte Hilfe bei ihrer Arbeit bieten.
Die gesamte Aufgabensammlung umfaßt vier Bände mit den Titeln:

Band I Grundbegriffe, Statik starrer Körper

Band II Festigkeitslehre

Band III Dynamik, Mechanik der Flüssigkeiten

Band IV Technische Wärmelehre

Diese Gliederung hat sich sehr gut bewährt.

Die sorgfältige Auswahl der Aufgaben soll dem genannten Leserkreis die notwendige Verbindung von Praxis und Wissenschaft vermitteln, die unseren Werktätigen, besonders in der Maschinenindustrie, zur schnellen und sicheren Durchführung ihrer Arbeit und damit auch zu Zeit- und Materialersparnissen verhilft.

Leipzig, im März 1963 VEB FACHBUCHVERLAG

INHALTSVERZEICHNIS

Benutzte Formelzeichen und Einheiten

	Zeichen	gebräuchlichste Einheiten
Länge	l, L	m, cm, mm
Höhe	h, H	m, cm, mm
Halbmesser, Radius	r, R	m, cm, mm
Durchmesser	d, D	m, cm, mm
Fläche	$f, F\ (A)$	m^2, cm^2
Weg	s, x, y	m, cm
Zeit	t, T	min, s, h
Geschwindigkeit	v, w, c	m/s, m/min, km/h
Umfangsgeschwindigkeit	u	desgl.
Beschleunigung	$b\ (a)$	ms^{-2}, cms^{-2}
Erdbeschleunigung	$g = 9{,}8066$	m/s^2
Drehzahl	n	$^1/min$, U/min
Winkelgeschwindigkeit	ω	$^1/s$, rad/s
Winkelbeschleunigung	ε	$^1/s^2$, rad/s^2
Schwingungszeit	T	s
Frequenz	f, ν	$^1/s$
Kreisfrequenz	ω	$^1/s$
Gewicht	G	kp, N
Gewicht je Längeneinheit	q	kp/m, N/m
Querkraft, Belastung	Q	kp, N
Kraft	$P_f\ (F)$	kp, N
Zentrifugalkraft	$P_z\ (F)$	kp, N
Reibungskraft	P_r, $P_w\ (F)$	kp, N
Widerstandskraft	$P_w\ (F)$	kp, N
Horizontalkraft	P_H	kp, N
Vertikalkraft	P_v	kp, N
Kraft in x-Richtung	P_x	kp, N
Kraft in y-Richtung	P_y	kp, N
Stab-, Seilkraft	P_s	kp, N
Corioliskraft	$P_c\ (F)$	kp, N
Beschleunigungskraft	$P\ (F)$	kp, N
Resultierende Kraft	P_r, R	kp, N
Normalkraft	P_n	kp, N
Masse	m	kg
Dichte	ϱ	kg/m^3, kg/dm^3
Wichte	γ	kp/dm^3, kp/m^3 N/m^3
Arbeit, Arbeitsvermögen	A	kpm, J
Arbeitsvermögen, Energie	W, E	kpm, J
Leistung	$N\ (P)$	$kpms^{-1}$, W, kW, PS
Wirkungsgrad	η	
Moment	$M\ (F)$	kpm, kpcm, Nm
Biegemoment	M_b	kpcm, Ncm
Drehmoment, Torsionsmoment	M_t, M_d	kpm, kpcm, Nm
Durchbiegung	f	cm
Normalspannung	σ	kp/cm^2, N/cm^2, bar
Schubspannung	τ	kp/cm^2, N/cm^2
Zugspannung	σ_z	kp/cm^2, N/cm^2

	Zeichen	gebräuchlichste Einheiten
Biegespannung	σ_b	kp/cm^2, N/cm^2
Zugfestigkeit	σ_{zB}	kp/cm^2, N/cm^2
Biegefestigkeit	σ_{bB}	kp/cm^2, N/cm^2
Wechselfestigkeit	σ_w	kp/cm^2, N/cm^2
Schwellfestigkeit	σ_{Sch}	kp/cm^2, N/cm^2
Dehnzahl	α	cm^2/kp, cm^2/N
Elastizitätsmodul	E	kp/cm^2, N/cm^2
Schubmodul	G	kp/cm^2, N/cm^2
Schubzahl	β	cm^2/kp
Reibungszahl	μ	—
Reibungswinkel	ϱ	—
Trägheitsmoment, allgemein	J (S)	—
Äquatorielles Flächenträgheitsmoment	J, J_a, J_x, J_y	cm^4
Polares Flächenträgheitsmoment	J_p	cm^4
Polares Widerstandsmoment	W_p	cm^3
Trägheitshalbmesser	i	cm, m
Massenträgheitsmoment, dynamisches Trägheitsmoment	J_d	kgm^2
Schwungmoment	GD^2	kpm^2, Nm^2
Bewegungsgröße	$m \cdot v$	$kgms^{-1}$
Drall	D	kgm^2s^{-1}
Volumen, Rauminhalt	V (τ)	m^3

Zusätzlich für Hydromechanik

Wassermenge	Q	m^3
Wassermenge in der Sekunde	Q_s	m^3s^{-1}
Rauminhalt	V	m^3
Auftrieb	P_A, A	kp, N
Ausflußquerschnitt	f, F (A)	m^2, cm^2, dm^2
Benetzter Umfang	U	m, cm
Druck	p	at, $\frac{kp}{cm^2}$, $\frac{kp}{m^2}$
Überdruck	$p_{\text{Überdruck}}$	Torr
Unterdruck	$p_{\text{Unterdruck}}$	$\frac{N}{m^2}$, $\frac{N}{cm^2}$, bar
Absoluter Druck	p_{absolut}	
Atmosphärendruck	p	atm
Druckhöhe, Wasserhöhe, Gefälle	h, H	m
Druckhöhe als spez. Arbeit	h	$\frac{kpm}{kp}$, $\frac{Nm}{N}$, m
Geschwindigkeitshöhe	$h = \frac{w^2}{2g}$	m
Verlusthöhe	h_v	m
Verlustfaktor	ζ	—
Widerstandszahl bei der Strömung	λ	—
Absolute Zähigkeit	η	$\frac{kps}{m^2} = 98{,}1$ P (Poise)
Kinematische Zähigkeit	ν	$\frac{m^2}{s} = 10^4$ St (Stokes)
Reynoldssche Zahl	$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}$	—
Reibungs- bzw. Kontraktionsfaktor beim Ausfluß	μ	—

DYNAMIK

EINHEITEN, GLEICHUNGSSCHREIBWEISE

Nach der Verordnung des Ministerrats der DDR v. 14. 8. 1958 gelten in der Mechanik folgende Grundeinheiten: für die Länge das Meter (m), für die Zeit die Sekunde (s) und für die Masse das Kilogramm (kg). Hierbei ist ein Kilogramm die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps, d. h. eines in Paris aufbewahrten Platin-Iridium-Zylinders.

Aus diesen Grundeinheiten können andere Einheiten für physikalische Größen abgeleitet werden, z. B. die Einheit der Fläche, das m², die Einheit des Volumens, das m³, die Einheit der Geschwindigkeit, das m/s, die Einheit der Beschleunigung, das m/s² usw. Die vorstehend angegebenen abgeleiteten Einheiten sind mit den Grundeinheiten nur durch den Faktor 1 verbunden, sie sind auf die Grundeinheiten abgestimmt oder mit ihnen „kohärent".

Andere Einheiten (z. B. km/h) sind mit den Grundeinheiten nicht mehr durch den Faktor 1 verbunden. Solche Einheiten bezeichnet man als inkohärent.

Eine physikalische Größe (technische Größe) ist das Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit:

$$\text{Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}$$

$$(\text{z. B. } 5\,\text{kg} = 5 \cdot 1\,\text{kg},\ 16\,\text{m} = 16 \cdot 1\,\text{m},\ 27\,\text{km/h} = 27 \cdot 1\,\text{km/h})$$

Einen Überblick über die wichtigsten Größen und deren Einheiten gibt die nachfolgende Tabelle:

Größe	gebräuchlichste Einheiten	Bemerkungen
Länge l, s	m km, cm, mm, m, nm, pm	l, t und m sind Grundgrößen,
Zeit t	s h, min, d, a; ms	
Masse m	kg g, t, mg	m, s und kg Grundeinheiten
Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $\frac{\text{m}}{\text{min}}$	
Beschleunigung $b = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	
Kraft $P = mb$	$\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = \text{N}$; kp; (dyn)	$1\,\text{kp} = 9{,}80665\,\text{N} \approx 9{,}81\,\text{N}$ $1\,\text{dyn} = 10^{-5}\,\text{N}$
Arbeit $A = Ps$	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{J} = \text{Ws}$; kpm kcal	$1\,\text{kpm} \approx 9{,}81\,\text{J}$ $1\,\text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\text{Ws} = 367\,092\,\text{kpm}$ $1\,\text{kcal} = 4186{,}8\,\text{J} = 427\,\text{kpm}$
Leistung $N = \frac{A}{t}$	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$; $\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$; (PS)	$1\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} \approx 9{,}81\,\text{W}$ $1\,\text{kW} = 1000\,\text{W} = 102\,\text{kpm/s}$ $1\,\text{PS} = 735{,}5\,\text{W} = 75\,\text{kpm/s}$

Größe	gebräuchlichste Einheiten	Bemerkungen
Druck $p = \frac{P}{F}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$; at, atm, Torr, bar, mbar	1 at $= 10^4$ kp/m² $=$ $= 1$ kp/cm² $=$ $= 98066{,}5$ N/m² 1 bar $= 10^5$ N/m² 1 atm $= 101\,325$ N/m² $=$ $= 10\,332$ kp/m² 1 Torr $= 1/760$ atm $=$ $= 1/735{,}5$ at $=$ $= 133{,}32$ N/m² $=$ $= 13{,}59$ kp/m²
Dichte $\varrho = \frac{m}{V}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$	
Drehmoment $M = Pr$	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm}$; kpm	
Massenträgheitsmoment $J = \int r^2\,dm$	kgm²	

Man merke sich besonders die wichtige Beziehung:

$$\boxed{1\ \text{kp} = 9{,}81\ \text{N} = 9{,}81\ \text{kgm/s}^2}$$

Bemerkung: Im früher verwendeten sog. „Technischen Maßsystem" (vgl. ältere Auflagen dieses Buches) wurde die Kraft in kg als Grundeinheit, die Masse dagegen als abgeleitete Einheit angesehen. Aus der Gleichung

$$G = mg$$

Gewicht = Masse · Erdbeschleunigung

folgte früher

$$m = G/g$$

„Technische Masseneinheit" (1 TME = 1 kps²/m). Die TME ist jedoch nicht mehr zulässig.

Mit welcher Kraft wird ein Körper der Masse $m = 1$ kg von der Erde angezogen? Es gilt für diese Kraft

$$G = mg = 1\ \text{kg} \cdot 9{,}80665\ \text{m/s}^2 = 9{,}80665\ \text{N}$$

und wegen der gesetzlich festgelegten Beziehung

$$1\ \text{kp} = 9{,}80665\ \text{N}$$

$$G = 1\ \text{kp}\,.$$

Dabei wurde für g der Normalwert $g_\text{n} = 9{,}80665$ m/s² eingesetzt. An Orten der Erdoberfläche, für die $g \neq g_\text{n}$ ist, würde ein von 1,0 kp etwas abweichender Wert für G berechnet.

Auf der Erdoberfläche ist also der Zahlenwert der Masse eines Körpers in Kilogramm gleich dem Zahlenwert des Gewichtes in Kilopond.

Das gilt exakt nur an Orten mit $g = g_\text{n} = 9{,}80665$ m/s².

In der Technik werden Kräfte in kp, Massen (Mengen) in kg angegeben. Zum Heben einer Last sind „kp" erforderlich, ein Dampfkessel erzeugt „kg" Dampf. Wird im allgemeinen Sprachgebrauch noch gelegentlich das „Gewicht" eines Körpers in kg angegeben, so ist hierbei seine vom Ort unabhängige Masse m gemeint, wird es jedoch in kp angegeben, so ist die Kraft G gemeint, mit der der Körper auf seine Unterlage drückt oder mit der er von der Erde angezogen wird. In diesem Buch werden die Begriffe Masse und Gewicht eindeutig verwandt. Eine Hebelwaage mißt Kilogramm, eine Federwaage dagegen Kilopond. Die Hebelwaage vergleicht die Masse des zu wiegenden Körpers mit der Masse des Wägestückchens, die Federwaage mißt die Kraft, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird. Die Angaben der Hebelwaage sind unabhängig vom Ort, die der Federwaage jedoch nicht.

Gleichungen, die Beziehungen zwischen verschiedenen physikalischen Größen ausdrücken, wie z. B.

$$v = s/t \quad \text{oder} \quad P = m\,b\,,$$

sind Größengleichungen. Größengleichungen stellen die Zusammenhänge in einfachster Form und ohne störende Umrechnungsfaktoren dar; sie sind deshalb bevorzugt anzuwenden.

Beim Rechnen mit **Größengleichungen** werden in die Gleichung alle gegebenen Größen, d. h. die Produkte von Zahlenwert und Einheit, eingesetzt. Das Ergebnis folgt dann rechnerisch ebenfalls als Größe. Ein Beispiel soll dies erläutern:

gegeben:	Lösung:
$t = 0{,}01$ s	$m v_0 = P t$
$P = 20$ kp	$v_0 = \dfrac{P t}{m} = \dfrac{20\ \text{kp} \cdot 0{,}01\ \text{s}}{6\ \text{kg}}$
$m = 6$ kg	mit 1 kp $= 9{,}81$ kgm/s² folgt
gesucht:	$v_0 = \dfrac{20 \cdot 9{,}81\ \text{kgm/s}^2 \cdot 0{,}01\ \text{s}}{6\ \text{kg}}$
v_0	$v_0 = 0{,}33$ m/s

Will man das Umrechnen ersparen (z. B. wenn wiederholt gleichartige Aufgaben zu lösen sind), so empfiehlt es sich, *zugeschnittene Größengleichungen* zu verwenden, bei denen die Größen durch die Einheiten dividiert werden und Umrechnungsfaktoren hinzukommen,

z. B.
$$\frac{N}{\text{PS}} = \frac{1}{75}\,\frac{P}{\text{kp}} \cdot \frac{v}{\text{ms}^{-1}}$$

oder
$$\frac{M_t}{\text{kpm}} = 716{,}2\,\frac{N/\text{PS}}{n/\text{min}^{-1}}\,.$$

Das soeben gerechnete Beispiel soll auch mit Hilfe einer zugeschnittenen Größengleichung gelöst werden. Diese lautet:

$$\frac{v_0}{\text{m s}^{-1}} = \frac{9{,}81 \cdot P/\text{kp} \cdot t/\text{s}}{m/\text{kg}}\,.$$

Es sind die gegebenen Größen durch die in der Gleichung angegebenen Einheiten zu dividieren. So wird

$$\frac{v_0}{\mathrm{m\,s^{-1}}} = \frac{9{,}81 \cdot 20 \cdot 0{,}01}{6} = 0{,}33$$

$$v_0 = 0{,}33\,\mathrm{ms^{-1}}.$$

Das Endergebnis folgt wieder als Größe. Alle Formelzeichen in dieser Gleichung stellen Größen dar wie bei einer Größengleichung.
Gleichartige Vorteile beim Rechnen wie die zugeschnittene Größengleichung bietet die **Zahlenwertgleichung**, die im Text immer mit * gekennzeichnet ist. Hier bedeuten aber die Formelzeichen reine Zahlen! Als zusätzliche Bemerkung sind neben der Gleichung **alle** Einheiten zu nennen. In diesem Buch werden Zahlenwertgleichungen durch einen Stern (*) besonders gekennzeichnet.

z. B. $* M_t = M_0 - \text{const.} \cdot n = 150 - 0{,}1\, n \qquad \begin{array}{c|c} M & n \\ \hline \text{kpm} & \text{U/min} \end{array}$

Das obige Beispiel wird mit Hilfe der Zahlenwertgleichung wie folgt gelöst:

$$*v_0 = \frac{9{,}81\, Pt}{m}; \qquad \begin{array}{c|c|c|c} v_0 & P & t & m \\ \hline \text{m/s} & \text{kp} & \text{s} & \text{kg} \end{array}$$

$$= \frac{9{,}81 \cdot 20 \cdot 0{,}01}{6}$$

$$v_0 = 0{,}33\,.$$

Das Endergebnis ist jetzt ebenfalls eine Zahl, keine Größe. Die Einheit des Ergebnisses findet man wie alle anderen Einheiten auch in der Bemerkung (hier in Tabellenform).

In diesem Buch werden bevorzugt Größengleichungen benutzt, weil sie

1. die Naturgesetze am klarsten wiedergeben, da keine durch die Wahl der Einheiten bedingten Zahlenfaktoren vom Wesentlichen ablenken, und
2. unabhängig von der Wahl der Einheiten sind. Sie sind für alle Einheiten der betreffenden Größen richtig.

In einigen Fällen, besonders wenn es sich um mathematische Ableitungen handelt, werden Zahlenwertgleichungen benutzt. Zur sicheren Unterscheidung wird in solchen Fällen vor die Gleichung ein Stern gesetzt.

GRUNDAUFGABEN

Grundgesetz der Dynamik

1. Welche Beschleunigung erteilt eine Kraft von 8 kp einer Masse von 100 kg?

$$P = mb; \quad b = \frac{P}{m} = \frac{8\,\text{kp}}{100\,\text{kg}} = \frac{8 \cdot 9{,}81\,\text{kgm}}{100\,\text{kg} \cdot \text{s}^2} = 0{,}7748\,\text{m/s}^2$$

2. Die Fallbeschleunigung auf dem Mond beträgt 1,63 m/s². Mit welcher Kraft wird eine Masse von 1 kg auf der Mondoberfläche angezogen?

$P = m\,b = 1\text{ kg} \cdot 1{,}63\text{ m/s}^2 = 1{,}63\text{ N} = 0{,}166\text{ kp}.$

3. Wegen der Abplattung und Drehung der Erde ist die Fallbeschleunigung an den Polen etwas größer (9,832 m/s²), am Äquator etwas kleiner (9,780 m/s²) als die Normbeschleunigung. Mit welcher Masse muß eine Federwaage **a)** am Pol, **b)** am Äquator, **c)** auf der Mondoberfläche (vgl. Aufg. 2) belastet werden, damit sie einen Ausschlag von 1 kp anzeigt?

a) 0,9974 kg
b) 1,0027 kg
c) 6,019 kg

Prinzip von d'Alembert

4. Was versteht man unter dem **d'Alembertschen Prinzip?**

Lösung: Man versteht darunter das Verfahren, den Bewegungszustand eines Körpers durch Hinzufügung der Massenträgheitskraft als Gleichgewichtszustand zu deuten. Zum Beispiel: Ein auf waagerechter Ebene ruhender Körper von der Masse m (Bild 1) erfährt (bei Vernachlässigung der Reibung) durch eine waagerechte Kraft P eine Beschleunigung $b = P : m$, d. h., er befindet sich nicht im Gleichgewichtszustande. Fügt man jedoch entgegengesetzt der Bewegung die Massenträgheitskraft $m\,b$ wie eine äußere Kraft hinzu, so kann man den Zustand so auffassen, als wäre der Körper unter Einwirkung der beiden Kräfte P und mb im Gleichgewichte. Man kann also die Grundsätze der Statik, die Gleichgewichtsbedingungen, anwenden, hier z. B. den Satz, daß die algebraische Summe aller waagerechten Kräfte gleich Null sein muß:

$$\boldsymbol{P - mb = 0}\,.$$

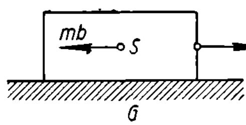


Bild 1

Das d'Alembertsche Prinzip ermöglicht also, Aufgaben der Dynamik auf solche der Statik zurückzuführen.

5. Der Tisch einer **Hobelmaschine** hat 2100 kp Eigengewicht und trägt ein 5400 kp schweres aufgespanntes Werkstück (Bild 2).

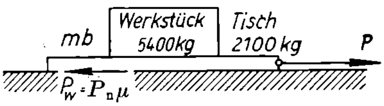


Bild 2

a) Welche waagerechte Kraft P muß beim Rücklauf, wo der Hobelmeißel nicht schneidet, an dem Tische angreifen, um ihn in 1,5 Sekunden auf eine Rücklaufgeschwindigkeit von 36 m/min gleichförmig zu beschleunigen? Die Reibungszahl für die Führungen des Tisches ist 0,07.

b) Welcher Weg wird während der Beschleunigung zurückgelegt?

Lösung: a) Die Kraft P muß 1. den Reibungswiderstand überwinden, 2. der Masse die erforderliche Beschleunigung erteilen, deshalb ist mit P_n als Normalkraft

$$P = \mu P_n + mb = \mu\, P_n + \frac{m\,v}{t}\,.$$

Die Masse $m = 2100\,\text{kg} + 5400\,\text{kg} = 7500\,\text{kg}$ bewirkt eine senkrecht nach oben gerichtete Auflagerkraft von $P_n = 7500\,\text{kp}$.

$$P = 0{,}07 \cdot 7500\,\text{kp} + \frac{7500\,\text{kg} \cdot 36\,\text{m}}{1{,}5\,\text{s} \cdot \text{min}} = 525\,\text{kp} + \frac{7500 \cdot 36\,\text{kgm}}{1{,}5 \cdot 60\,\text{s}^2} =$$

$$= 525\,\text{kp} + \frac{7500 \cdot 36\,\text{kp}}{1{,}5 \cdot 60 \cdot 9{,}81} = 525\,\text{kp} + 306\,\text{kp} = 831\,\text{kp}$$

b) $s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{36\,\text{m} \cdot 1{,}5\,\text{s}}{2\,\text{min}} = \frac{36\,\text{m} \cdot 1{,}5\,\text{s}}{2 \cdot 60\,\text{s}} = 0{,}45\,\text{m}\,.$

Grundaufgaben der Bewegungslehre

Anmerkungen: Wenn die Beschleunigung als konstant vorausgesetzt werden kann, so ist die Ermittlung der Geschwindigkeit und des Weges nach Menge-Zimmermann, Bd. I, auf rechnerischem Wege sehr einfach; nämlich

$$\boldsymbol{v = v_0 + bt\,,}$$

$$\boldsymbol{s = v_0 t + {}^1\!/_2\, b t^2\,,}$$

wobei b auch negativ sein kann.
Umgekehrt kann auch die Zeit oder die Beschleunigung leicht ermittelt werden, wenn der Weg und die Geschwindigkeit oder der Weg und die Zeit gegeben sind.

$$t = \frac{v - v_0}{b}$$

$$t = -\frac{v_0}{b} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{b}\right)^2 + \frac{2s}{b}} > 0\,,$$

$$b = \frac{v - v_0}{t}$$

$$b = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2}\,.$$

Ist $\boldsymbol{v_0 = 0}$, so ist

$$t = \frac{v}{b}\,; \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{b}}\,;$$

$$b = \frac{v}{t}\,; \qquad b = \frac{2s}{t^2}\,; \quad v = \sqrt{2bs}\,.$$

Ohne besondere Voraussetzungen gilt:

a) Die Geschwindigkeit ist $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Dies entspricht der **Tangente** an die Weg-Zeit-Kurve.

b) Die Geschwindigkeit ist $v = v_0 + \int b\,\mathrm{d}t$. Die Geschwindigkeitszunahme $\int b\,\mathrm{d}t$ entspricht der **Fläche** unter der Beschleunigungs-Zeit-Kurve.

c) Die Beschleunigung ist $b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$. Dies entspricht der **Tangente** an die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve.

d) Der Weg ist $s = s_0 + \int v\,\mathrm{d}t$. Die Wegzunahme $\int v\,\mathrm{d}t$ entspricht der **Fläche** unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve.

e) Die Zeit ist $t = \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}v}{b}$. Dies entspricht der **Fläche** unter einer Kurve, bei der auf der Abszisse v und auf der Ordinate $\frac{1}{b}$ aufgetragen wird.

f) Die Zeit ist $t = \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}s}{v}$. Dies entspricht der **Fläche** unter einer Kurve, bei der auf der Abszisse s und auf der Ordinate $\frac{1}{v}$ aufgetragen ist.

Bei den folgenden **graphischen Grundlagen** ist die Beschleunigung nicht konstant, ja sie braucht auch keine stetige Funktion der Zeit zu sein. Wäre sie eine stetige Funktion der Zeit, so ließen sich Geschwindigkeit und Weg berechnen. Bei Unstetigkeit ist jedoch nur eine graphische Ermittlung am Platze.
Bei einer graphischen Lösung ist zu beachten, daß die **Fläche** unter einer Kurve $y = f(x)$ das Integral $\int y\,\mathrm{d}x$ ist, und daß die Tangente an diese Kurve der Differentialquotient $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ist.
Im folgenden sind die wichtigsten Beispiele vorgeführt. Für die Ermittlung der Zeit sind später bei Gelegenheit Beispiele vorhanden.

6. Für die im Bild 3 gegebene Beschleunigungs-Zeit-Kurve sind durch graphische Integration der **Geschwindigkeitsverlauf** und der **Weg** zu finden.

a) Wie groß ist der Flächenmaßstab der Beschleunigungsfläche?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach $^1/_{60}$, $^2/_{60}$, $^3/_{60}$, $^4/_{60}$, $^5/_{60}$, $^6/_{60}$, $^8/_{60}$, $^{10}/_{60}$, $^{23}/_{120}$ und $^{13}/_{60}$ s?

c) Wie groß ist der Flächenmaßstab der Geschwindigkeitsfläche?

d) Wie groß ist nach obigen Zeiten der Weg?

Lösung: **a)** $1\ \mathrm{cm}^2 = 1\ \mathrm{cm} \cdot 1\ \mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 80\ \mathrm{m/s}^2 \cdot \frac{0{,}8}{60}\ \mathrm{s} = \frac{16}{15}\ \mathrm{m/s}$.

c) $1\ \mathrm{cm}^2 = 1\ \mathrm{cm} \cdot 1\ \mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\ \mathrm{m/s} \cdot \frac{0{,}8}{60}\ \mathrm{s} = \frac{1}{75}\ \mathrm{m} = \frac{4}{3}\ \mathrm{cm}$.

b) und **d)** aus Bild.

Zu bemerken ist, daß in dem Punkt, in dem die Beschleunigung vom positiven zum negativen Wert übergeht, die Geschwindigkeit jeweils einen Höchstwert erreicht.
Ebenso ist der Weg am größten, wenn die Geschwindigkeit beim Übergang vom positiven zum negativen Wert Null ist.
Wo die Beschleunigung ein Maximum hat, ist $\tan\alpha$ am größten. Denn es ist $b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \tan\alpha$.
Ist $\tan\alpha$ positiv, so ist auch die Beschleunigung positiv, ist $\tan\alpha$ negativ, so auch die Beschleunigung. Dasselbe gilt für $\tan\beta$ und die Geschwindigkeit (s. Bild 3). Wo die Geschwindigkeit ein Maximum hat, ist die Wegkurve am steilsten.
Wächst die Geschwindigkeit von 0 bis zu einem Maximum und fällt wieder bis 0, so muß die positive Beschleunigungsfläche gleich der negativen sein. Im Bild 3 z. B.

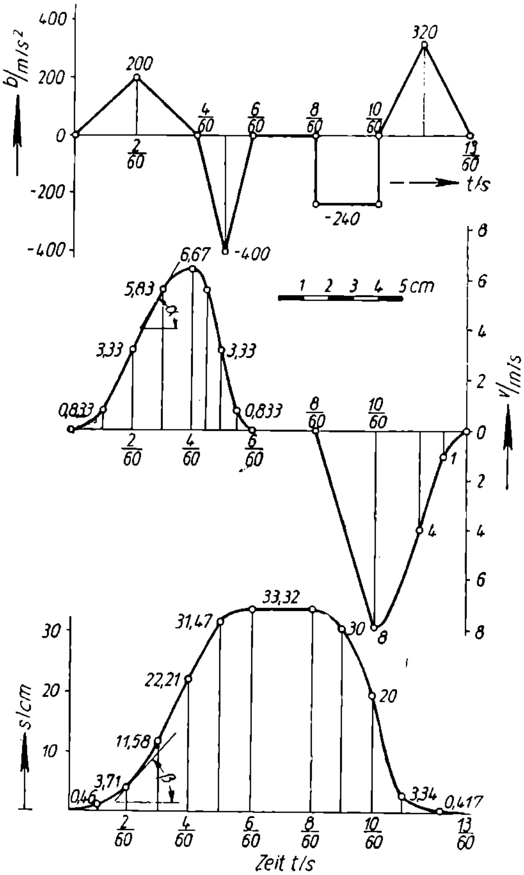


Bild 3

ist die Fläche von $0 \cdots {}^4/_{60}$ s gleich der negativen Fläche von ${}^4/_{60} \cdots {}^6/_{60}$ s. Geht der Weg über ein Maximum auf 0 zurück, so muß die positive Geschwindigkeitsfläche gleich der negativen sein. Im Bild 3 ist die Geschwindigkeitsfläche von $0 \cdots {}^6/_{60}$ s gleich der Fläche von ${}^8/_{60} \cdots {}^{13}/_{60}$ s. Die Beweise folgen einfach aus der Beziehung $v = \int b\,\mathrm{d}t$ und $s = \int v\,\mathrm{d}t$. Da nun z. B. derselbe Weg von links und von rechts aus erreicht wird, muß die Geschwindigkeitsfläche links und rechts (Bild 3) inhaltsgleich sein.

7. Wie kann man die **Geschwindigkeit** und die **Beschleunigung** finden, wenn der Weg als beliebige Funktion der Zeit graphisch gegeben ist? (Bild 4.)

Lösung: Die Geschwindigkeit an einer bestimmten Stelle entspricht der Tangente an die Weg-Zeit-Kurve an dieser Stelle. Trägt man die ermittelten Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Zeit in einer neuen Kurve auf, so entspricht die Tangente an dieser Kurve der Beschleunigung, da

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad b = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \text{ ist.}$$

Der **Maßstab** für die Ermittlung der Geschwindigkeit aus der Weg-Zeit-Kurve wird am besten dadurch gefunden, daß man die Tangente an der Kurve sucht, für die $\alpha = 45°$ ist. Denn dann ist für den entsprechenden Punkt

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \tan 45° = \frac{1\ \text{cm}}{1\ \text{cm}}.$$

Setzt man die Werte, die 1 cm Länge und Breite entsprechen, ein, so erhält man z. B. in dem Bild 4:

$$\frac{1\ \text{cm}}{1\ \text{cm}} \mathrel{\hat{=}} \frac{2{,}5\ \text{cm}}{{}^1/_{100}\ \text{s}} = 250\ \text{cm/s} = 2{,}5\ \text{m/s}.$$

Ein beliebiger Winkel α ergibt dann:

$$v = 2{,}5\ \text{m/s} \cdot \tan \alpha.$$

Der **Maßstab** für die Ermittlung der Beschleunigung aus der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve ergibt sich auf die gleiche Art.

Im Bild 5: $\tan\beta = \tan 45^\circ = \frac{1\ \text{cm}}{1\ \text{cm}} \mathrel{\hat{=}} \frac{1\ \text{m/s}}{{}^1/_{100}} = 100\ \text{m/s}^2,$

$$b = 100\ \text{m/s}^2 \cdot \tan\beta.$$

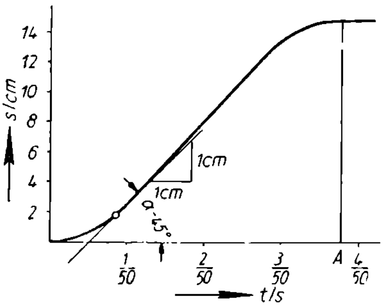


Bild 4

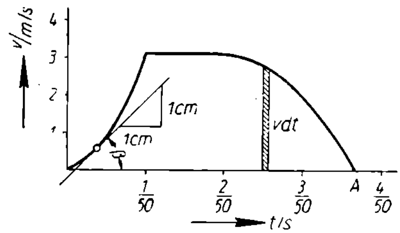


Bild 5

Die Weg-Zeit-Kurve hat ihre größte Steigung nach $^1/_{50}$ s erreicht. Von $^1/_{50} \cdots {}^2/_{50}$ s ist die Weg-Zeit-Kurve eine Gerade. Dementsprechend ist die größte Geschwindigkeit nach $^1/_{50}$ s erreicht und bleibt bis $^2/_{50}$ s konstant. Bei $^2/_{50}$ s wird $\tan\alpha$ wieder kleiner und ebenso die Geschwindigkeit. Hinter A bleibt $\tan\alpha$ und somit $c = 0$.

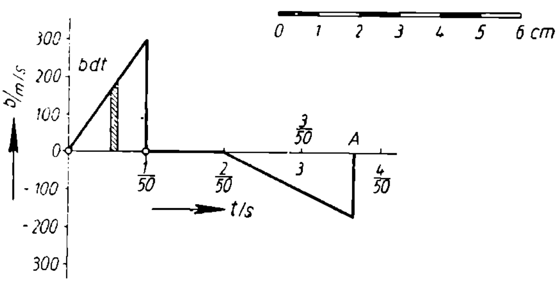
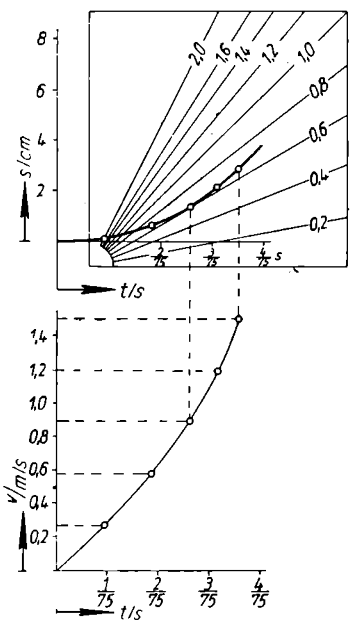


Bild 6



Bilder 7 u. 8

Die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve hat ihre größte Neigung bei $^1/_{50}$ s. Dementsprechend ist hier die größte Beschleunigung. Von $^1/_{50} \cdots {}^2/_{50}$ s ist die Beschleunigung Null, weil $\tan\beta = 0$. Hinter $^2/_{50}$ s wird $\tan\beta$ negativ, also auch b. Von A ab ist mit v auch b Null.

Da die Geschwindigkeit $v_{\max}$ von beiden Seiten aus, also von $0 \cdots {}^1/_{50}$ s und von $A \cdots {}^2/_{50}$ s, erreicht wird und da $v = \int b\,dt$ die Fläche unter der Beschleunigungskurve darstellt, so muß die Beschleunigungsfläche von $0 \cdots {}^{1}/_{50}$ s inhaltsgleich, aber mit umgekehrten Vorzeichen, der Beschleunigungsfläche zwischen ${}^{2}/_{50}$ s und A sein.

8. Für die im Bild 7 gegebene Weg-Zeit-Kurve mit dem Radius $R = 100$ mm ist die **Geschwindigkeit** und die **Beschleunigung** auf graphischem Wege zu finden.

Anleitung: Man trägt auf einem durchsichtigen Pausblatt in einem Rechteck oder Quadrat von 100 mm Breite die Strahlen von $\tan\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4$ usw. auf (s. Bild 7). Dann legt man diese Strahlen nacheinander so an die Weg-Zeit-Kurve, daß die Strahlen die Kurve tangieren. Die Koordinaten des Pausblattes müssen dabei immer parallel den Koordinaten der Zeichnung sein. Im Bild 7 liegt gerade $\tan\alpha = 0{,}6$ an. $\tan 45°$ entspricht $\frac{0{,}1\ \text{m}}{{}^{5}/_{75}\ \text{s}} = 1{,}5$ m/s. Somit ist allgemein $v = 1{,}5\ \text{m/s} \cdot \tan\alpha$. Nachdem man eine Anzahl v ermittelt hat, trägt man in einem neuen Bilde v in Abhängigkeit von t auf und wiederholt das Verfahren mit demselben Pausblatt bei der Ermittlung der Beschleunigung b.

Lösung:

$\tan\alpha$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
v in m/s	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
t in s	$\frac{0{,}98}{75}$	$\frac{1{,}86}{75}$	$\frac{2{,}57}{75}$	$\frac{3{,}13}{75}$	$\frac{3{,}52}{75}$	$\frac{3{,}82}{75}$

b in m/s	22,5	24	30	36
t in s	0	$\frac{1{,}66}{75}$	$\frac{3{,}4}{75}$	$\frac{4{,}27}{75}$

9. Es ist durch Ausmitteln der Flächen der in Aufgabe 8 gefundenen Kurven die **Geschwindigkeit** und der **Weg** für eine Zeit von ${}^{2}/_{75}$ und ${}^{4}/_{75}$ s zu prüfen.

10. Wie findet man die **Geschwindigkeit** und die **Zeit**, wenn die Beschleunigung als Funktion des Weges beliebig, z. B. graphisch, gegeben ist?

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}\,(v^2)}{\mathrm{d}t} = 2\,v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\mathrm{d}\,(v^2) = 2v\,\mathrm{d}v = 2\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v = 2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s = 2b\,\mathrm{d}s\,,$$

$$v_1^2 - v_2^2 = \int 2b\,\mathrm{d}s = 2\int b\,\mathrm{d}s; \qquad \text{evtl. } v_2^2 = 0\,.$$

$v_1^2 - v_2^2$ bedeutet somit den doppelten Wert der Fläche unter der Beschleunigungs-Weg-Kurve (Bild 9). Hat man mehrere $v = \sqrt{v_2^2 + 2\int b\,\mathrm{d}s}$ nach verschiedenen Wegen ermittelt, so trägt man die Werte $1/b$ in Abhängigkeit von den zugehörigen Werten v auf. Die Zeit stellt dann die Fläche unter der Kurve $1/b$ dar. Denn es ist

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{b}\,,$$

$$t = \int \mathrm{d}t = \int \frac{1}{b} \cdot \mathrm{d}v\,.$$

11. Gegeben ist die Beschleunigung in Abhängigkeit vom Weg nach Bild 9 in Aufgabe 10. Es sind $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{t}$ zu ermitteln.

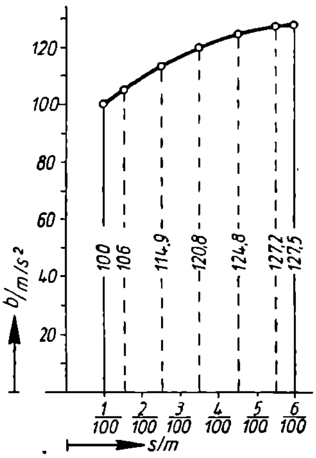
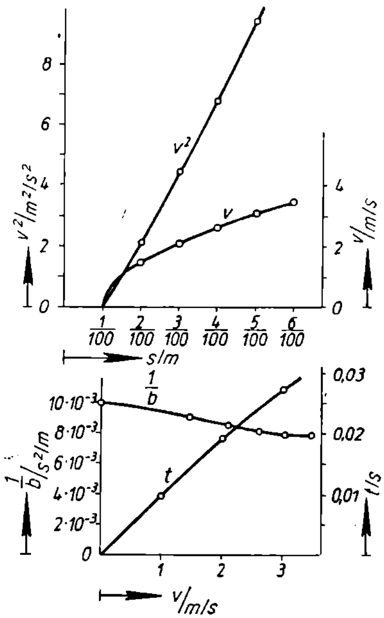


Bild 9



Bilder 10 u. 11

Lösung:

s in m	$^1/_{100}$	$^2/_{100}$	$^3/_{100}$
v in m/s	0	1,455	2,102
t in s	0	$\frac{13,73}{10^3}$	$\frac{19,33}{10^3}$

s in m	$^4/_{100}$	$^5/_{100}$	$^6/_{100}$
v in m/s	2,61	3,05	3,44
t in s	$\frac{23,53}{10^3}$	$\frac{27,08}{10^3}$	$\frac{30,15}{10^3}$

BESCHLEUNIGTE MASSEN

Beschleunigte Massen auf geradliniger Bahn

Waagerechte Bahn

12. Eine elektrische **Grubenlokomotive** befördert einen Zug von 17 t Gesamtmasse einschließlich der Lokomotivmasse auf waagerechter Strecke mit einer Geschwindigkeit 9 km/h. **a)** Wie groß ist der Fahrwiderstand, wenn die Motornutzleistung 10 PS und der Wirkungsgrad der Räderübersetzung zwischen Motor und Treibachsen 78 % beträgt? **b)** Welche Zugkraft muß beim Anfahren ausgeübt werden, wenn der

Zug innerhalb 20 Sekunden auf die Höchstgeschwindigkeit gleichförmig beschleunigt werden soll und der Fahrwiderstand nach a) berücksichtigt wird? **c)** Wie groß ist die Motornutzleistung am Ende der Anfahrtsperiode bei Berücksichtigung des oben angegebenen Triebwerkwirkungsgrades? **d)** Welche Bremskraft ist erforderlich, damit die Bremsung bis zum Stillstande doppelt so schnell wie das Anfahren, in 10 Sekunden, erfolgt? **e)** Das Diagramm der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Zugkraft und Motornutzleistung ist zu zeichnen, bezogen auf die Zeit, für die Anfahrbewegung, die gleichförmige Fahrt und die Bremsbewegung.

a) $\eta N = P_w v \; (1\,\text{PSh} = 270\,000\,\text{kpm})$

$$P_w = \frac{\eta N}{v} = \frac{0{,}78 \cdot 10\,\text{PS} \cdot \text{h}}{9\,\text{km}} = \frac{0{,}78 \cdot 10 \cdot 270\,000\,\text{kpm}}{9 \cdot 1000\,\text{m}} = 234\,\text{kp}$$

b) $P_A = P_w + P; \quad P = mb = \dfrac{mv}{t} = \dfrac{17\,000\,\text{kg} \cdot 9000\,\text{m}}{20\,\text{s} \cdot 3600\,\text{s}} = 2129\,\text{N} = 217\,\text{kp}$

$$P_A = 234\,\text{kp} + 217\,\text{kp} = 451\,\text{kp}$$

c) $N = \dfrac{P_A v}{\eta} = \dfrac{451\,\text{kp} \cdot 9000\,\text{m}}{0{,}78 \cdot 3600\,\text{s}} = 1448\,\text{kpm/s} = 19{,}3\,\text{PS}$

d) Die Verzögerungskraft muß doppelt so groß sein wie die Beschleunigungskraft, also $2 \cdot 217 = 434$ kp. Sie wird geliefert durch die Bremskraft und den Fahrwiderstand 234 kp, welch letzterer die Bewegung verzögern hilft. Also Bremskraft $434 - 234 = 200$ kp.

e) Auf der waagerechten Diagrammachse werden die Zeiten in bestimmtem Maßstabe aufgetragen (Bild 12).

Die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Zeitpunkten werden durch senkrechte Ordinaten dargestellt. Da die Geschwindigkeit beim Anfahren von 0 bis zum

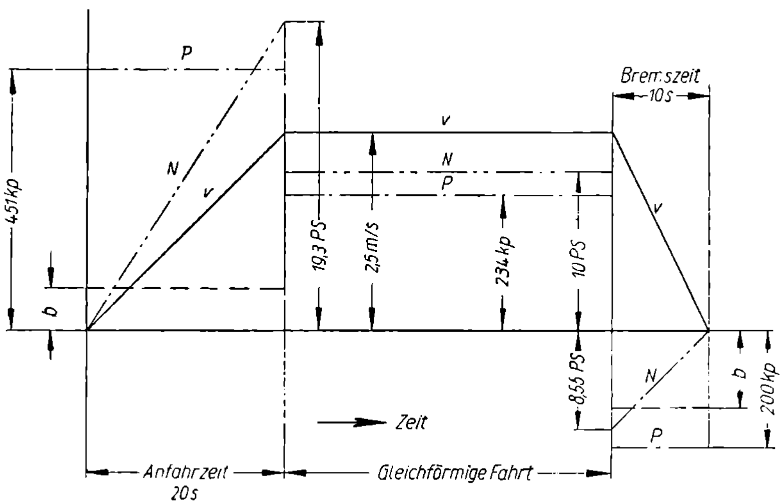


Bild 12

Höchstwerte 2,5 m/s gleichförmig anwächst, liegen die Endpunkte der Geschwindigkeitsordinaten auf einer ansteigenden Geraden. Die unveränderte Geschwindigkeit während der gleichförmigen Fahrt erscheint durch eine waagerechte Gerade dargestellt, die gleichförmig abnehmende Geschwindigkeit beim Bremsen durch eine abfallende Gerade.

Die Beschleunigung ist während des Anfahrens unverändert, $b = 0{,}125\ \mathrm{m/s^2}$, durch eine waagerechte Gerade in beliebigem Maßstab dargestellt. Während der gleichförmigen Fahrt ist $b = 0$, d. h., die Beschleunigungslinie fällt mit der waagerechten Diagrammachse zusammen. Die Verzögerung beim Bremsen ist negative Beschleunigung, unverändert $b = -0{,}25\ \mathrm{m/s^2}$, durch eine waagerechte Gerade unterhalb der Achse veranschaulicht.

Die Zugkraft ist während des Anfahrens konstant 451 kp, während der gleichförmigen Fahrt 234 kp. Die Bremskraft 200 kp ist gleichsam negative Zugkraft. Im Diagramm ergeben sich drei waagerechte gerade Linien.

Motornutzleistung $N = \frac{P\,v}{\eta}$. Beim Anfahren ist P konstant. N wächst mit v gleichmäßig bis zur Höchstleistung 19,3 PS. Diagramm: ansteigende Gerade. Bei Beginn der gleichförmigen Fahrt fällt die Beschleunigungskraft weg, und die erforderliche Leistung sinkt plötzlich auf 10 PS. Die Bremsleistung ist bei Beginn des Bremsens $\frac{200}{234} \cdot 10\ \mathrm{PS} = 8{,}55\ \mathrm{PS}$; sie nimmt mit v gleichförmig ab bis auf 0 und wird durch eine abfallende Gerade dargestellt.

Die Maßstäbe, in denen die vier verschiedenen Größen im Diagramm gezeichnet werden, sind voneinander unabhängig, jeder für sich beliebig anzunehmen.

13. Ein elektrisch betriebener **Laufkran** für 15 Mp Nutzlast hat 13 Mp Eigengewicht und beim Längsfahren eine Geschwindigkeit 100 m/min. **a)** Wie groß ist der Fahrwiderstand, wenn der Motor bei gleichförmiger Fahrt 11,4 Kilowatt (kW) elektrische Leistung aus dem Netz entnimmt (0,736 kW = 1 PS) und der Wirkungsgrad des Motors samt Rädervorgelege 70 % beträgt? **b)** Welche Kraft ist zum Verschieben des Krans beim Anfahren erforderlich, wenn er innerhalb 4 Sekunden auf die größte Fahrgeschwindigkeit gleichförmig beschleunigt werden soll und der Fahrwiderstand nach a) berücksichtigt wird?

14. Ein **Laufkran** fährt zum waagerechten Bewegen der Last in Längsrichtung der Werkstatt gleichförmig beschleunigt so an, daß er die größte Fahrgeschwindigkeit 120 m/min nach $1^1/_2$ Sekunden erreicht.

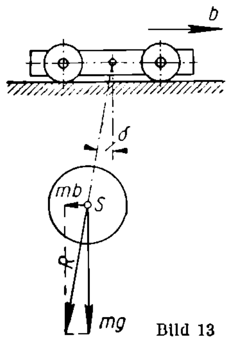


Bild 13

a) Unter welchem Winkel δ gegen die Lotrechte (Bild 13) schlägt dabei die frei herabhängende Lastkette aus, wenn sie am unteren Ende eine Last 1800 kp trägt (Eigengewicht der Kette werde vernachlässigt)?

b) Wie ändert sich der Winkel für größere oder kleinere Lasten?

c) Welchen Einfluß auf den Neigungswinkel hat die Länge der Kette?

Lösung: **a)** Die Massenträgheitskraft $P = m\,b$ der Last wirkt waagerecht, der Fahrtrichtung entgegen (Bild 13). Sie liefert mit dem Gewichte $G = m\,g$ der Last eine Mittelkraft R, in deren Schrägstellung sich die Lastkette einstellt.

$$\tan\delta = mb : mg = b : g.$$

Nun ist $v = bt$; $\tan\delta = \frac{v}{tg} = \frac{120\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{min}\cdot 1{,}5\ \mathrm{s}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m}} = \frac{120\ \mathrm{ms}^2}{60\ \mathrm{s}\cdot 1{,}5\ \mathrm{s}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m}} =$

$$= 0{,}136$$

$$\delta = 7^\circ\, 45'.$$

b) Da die Masse m aus der Ansatzgleichung für $\tan\delta$ herausfällt, ist die Lastgröße ohne Einfluß auf den Neigungswinkel. Die Seitenkräfte mg und mb wachsen beide mit m in demselben Maße, so daß ihr Verhältnis unverändert bleibt.

c) Die Kettenlänge ist ebenfalls ohne Einfluß auf den Winkel δ.

15. Ein **Straßenbahnwagen** fährt mit einer Beschleunigung 1,2 m/s² an. Unter welchem Winkel muß man die senkrechte Schwerachse des Körpers während des Anfahrens neigen, um frei im Wagen stehen zu können?

16. Ein **Schnellzug** von einer Fahrgeschwindigkeit 90 km/h wird auf 160 m Weg gleichförmig verzögert bis zum Stillstande gebremst. **a)** Wie groß ist die Verzögerung? **b)** Unter welchem Winkel gegen die Lotrechte müssen frei im Wagen stehende Reisende die Körperachse zurückneigen, um nicht vornüber zu fallen?

17. Unter welchem Neigungswinkel gegen die Waagerechte stellt sich die Wasseroberfläche in einem **Lokomotivtender** ein, während die Lokomotive mit einer Beschleunigung 1,4 m/s² anfährt?

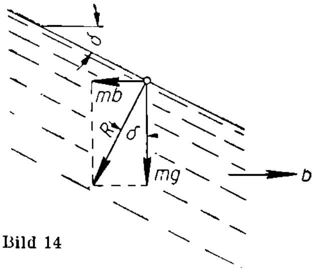


Bild 14

Lösung: Auf jedes Wasserteilchen m wirkt in waagerechter Richtung, der Anfahrbewegung entgegen, die Trägheitskraft mb; ferner senkrecht nach unten die Schwerkraft mg (Bild 14). Der Wasserspiegel stellt sich so ein, daß die Mittelkraft R aus den genannten beiden Seitenkräften rechtwinklig zu ihm gerichtet ist.

$$\tan\delta = m\,b : m\,g = b : g = 1{,}4\ \mathrm{m/s^2} : 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 0{,}1427$$

$$\delta = 8^\circ\, 6'.$$

18. Ein **Straßenbahnwagen** mit zwei Elektromotoren wiegt vollbesetzt 9 Mp und entnimmt dem Netze bei gleichförmiger Fahrt mit einer Geschwindigkeit 20 km/h auf ebener Strecke 16 kW elektrische Leistung. **a)** Wie groß ist der Fahrwiderstand, wenn der Wirkungsgrad der Motoren einschließlich Vorgeleges zu 80 % angenommen wird? **b)** Welche Zugkraft ist zum Anfahren erforderlich, wenn der Wagen innerhalb 15 Sekunden auf die höchste Fahrgeschwindigkeit gleichförmig beschleunigt werden soll und der Fahrwiderstand nach a) berücksichtigt wird? **c)** Welche größte Leistung in PS ist am Ende der Anfahrperiode aufzuwenden bei Berücksichtigung des Wirkungsgrades der Motoren? **d)** Wie lange dauert die Bremsbewegung, wenn sie auf 18 m Weg gleichförmig verzögert erfolgt? **e)** Wie groß ist dabei die Verzögerung und **f)** die auszuübende Bremskraft unter Abzug des oben berechneten Fahrwiderstandes, der die Bewegung verzögern hilft? **g)** Welche Leistung wird durch die Bremsen vernichtet bei Beginn der Bremsperiode? **h)** Das

Diagramm der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Zugkraft und Leistung ist zu zeichnen, bezogen auf die Zeit (siehe Aufg. 12).

19. Welches ist die kürzestmögliche Strecke, auf der ein **Radfahrer** bei einer Fahrgeschwindigkeit 30 km/h mittels der Vorderradbremse anhalten kann, ohne vornüber zu stürzen? Der Gesamtschwerpunkt S von Rad und Fahrer liegt 1,1 m über Erdboden und in 0,8 m waagerechtem Abstand hinter der Vorderachse (Bild 15).

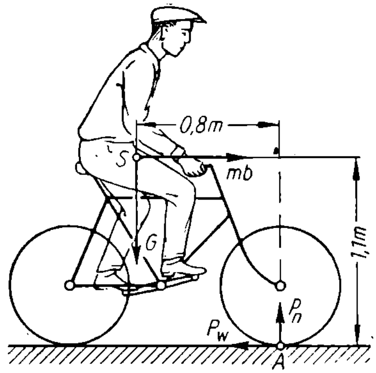


Bild 15

Lösung: Die Massenträgheitskraft mb der Verzögerung wirkt beim Bremsen in der Fahrtrichtung. Fügt man sie nach dem d'Alembertschen Prinzip ergänzend hinzu, so besteht Gleichgewicht der Kräfte. Die Gleichgewichtsbedingungen heißen:

1. Algebraische Summe der senkrechten Kräfte = 0. Nach unten wirkt das Gewicht G des Rades und Fahrers, im Schwerpunkt S angreifend. Im Grenzzustand des Gleichgewichts, wenn der Fahrer gerade vornüber zu stürzen droht, ist das Hinterrad entlastet, und das ganze Gewicht ruht auf dem Vorderrade. Letzteres erfährt in seinem Stützpunkte A eine nach oben gerichtete Normaldruckkraft P_n, so daß $P_n - G = 0$ wird, also $P_n = G$.

2. Algebraische Summe der waagerechten Kräfte = 0. Der waagerechten Massenkraft mb muß am Stützpunkte A des Vorderrades auf dem Erdboden ein Reibungswiderstand P_w entgegenwirken, so daß $P_w - mb = 0$, also $P_w = mb$.

3. Algebraische Summe der statischen Momente für Kippkante A muß = 0 sein.

$$mb \cdot 1{,}1\,\mathrm{m} - G \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} = 0$$

$$mb \cdot 1{,}1 = mg \cdot 0{,}8 .$$

Zulässige Verzögerung $b = \dfrac{9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2 \cdot 1{,}1\,\mathrm{m}} = 7{,}1\,\mathrm{m/s^2}$.

Die Grundgleichungen der verzögerten Bewegung heißen **I.** $v = v_0 - bt$, **II.** $s = \dfrac{v_0 + v}{2}\,t$ oder, da die Endgeschwindigkeit beim Bremsen $v = 0$ ist, I. $v_0 = bt$, II. $s = \dfrac{v_0}{2}\,t$. Daraus $s = \dfrac{v_0^2}{2b}$. Nun ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30\,\mathrm{km/h} = 8{,}33\,\mathrm{m/s}$, also $s = \dfrac{8{,}33^2\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot 2 \cdot 7{,}1\,\mathrm{m}} = 4{,}9\,\mathrm{m}$ kürzestmögliche Bremsstrecke.

20. Die Bühne eines **Laufkrans** von der skizzierten Grundrißform wird durch zwei parallele I-Stahl-Träger Nr. 45 von 11 m Spannweite gebildet. Diese tragen in ihrer Mitte die 1800 kp schwere Laufwinde mit der daran hängenden Nutzlast 7500 kp. Das Eigengewicht des Krangestells beträgt 4700 kp. Das Gesamtgewicht verteilt sich gleichmäßig auf die vier Laufräder des Krans, von denen nur zwei, nämlich A und B, beim Längsfahren angetrieben bzw. gebremst werden. a) Wie groß ist die verzögernde Kraft, welche den längsfahrenden Kran zum Stehen bringt, wenn die beiden Laufräder A und B derart gebremst werden, daß sie auf den Schienen gleiten? Reibungszahl für Räder und Schienen 0,15. **b)** Wie groß ist die Verzögerung? **c)** Welche Biegespannung erzeugen bei diesem Bremsvorgang die waagerechten Massenträgheitskräfte in den I-Trägern, wenn letztere als an den Enden frei aufliegend und beide gleichbelastet angesehen werden? **d)** Welche Biegespannung wird durch die senkrechten Lasten in den Trägern erzeugt, wenn jeder der beiden Träger die Hälfte der Lasten aufnimmt? **e)** Welche größte resultierende Biegespannung tritt in den Trägern auf? **f)** Wie groß ist der Bremsweg, wenn der Kran, mit 120 m/min längsfahrend, plötzlich abgebremst wird?

Lösung: **a)** $m_1 = 1800\,\text{kg}$; $m_2 = 7500\,\text{kg}$; $m_3 = 4700\,\text{kg}$

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 14\,000\,\text{kg}$$

$$G = 14\,000\,\text{kp}.$$

Reibungswiderstand $P_\text{w} = \frac{G}{2} \cdot \mu = 1050\,\text{kp} = 10\,300\,\text{N}$.

$$\textbf{b)}\; b = \frac{P_\text{w}}{m} = \frac{10\,300\,\text{N}}{14\,000\,\text{kg}} = 0{,}735\,\text{m/s}^2 .$$

c) Waagerechte Ebene $m_1 + m_2 = 9300\,\text{kg}$;

waagerechte Trägheitskraft der Massen $(m_1 + m_2) \cdot b = 6835\,\text{N} = 700\,\text{kp}$,

auf einen Träger $P_1 = 350\,\text{kp}$;

Biegemoment $M_{\text{b}_1} = \frac{P_1 l}{4} = 96\,300\,\text{kp cm}$;

Trägermasse nach Tabelle $q = 115{,}4\,\text{kg/m}$

$$m_4 = q\,l = 1270\,\text{kg};$$

Trägheitskraft $P_2 = m_4 \cdot b = 934\,\text{N} = 95\,\text{kp}$;

Biegemoment $M_{\text{b}_2} = \frac{P_2 l}{8} = 13\,100\,\text{kp cm}$,

$$M_\text{b} = M_{\text{b}_1} + M_{\text{b}_2} = 109\,400\,\text{kp cm},$$

$$\sigma_\text{y} = \frac{M_\text{b}}{W_\text{y}} = 539\,\text{kp/cm}^2 .$$

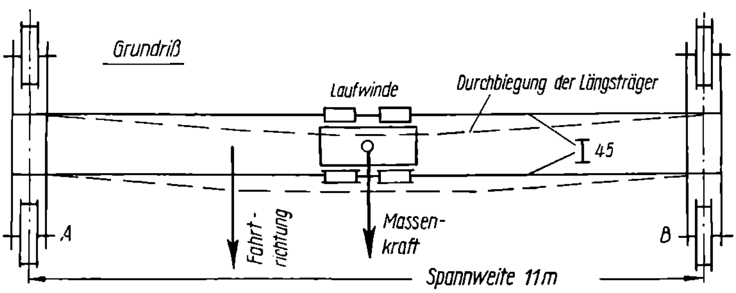


Bild 16

d) Senkrechte Ebene

$$\text{Einzellast } \frac{G_1 + G_2}{2} = 4650\,\text{kp}.$$

Eigengewicht $G_4 = 1270$ kp;

$$M_b = \frac{G_1 + G_2}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{G_4 l}{8} = 1455000\,\text{kp cm},$$

$$\sigma_x = \frac{M_b}{W_x} = 715\,\text{kp/cm}^2.$$

e) In der äußersten Faser addieren sich bei A die beiden Spannungen.

$$\sigma_b = \sigma_y + \sigma_x = 1254\,\text{kp/cm}^2.$$

f) $v = bt$; $\quad s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{v^2}{2b} = 2{,}72\,\text{m}.$

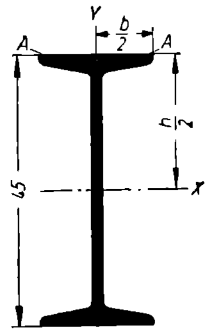


Bild 17

21. Das Schiffchen eines **Webstuhles** wird durch eine Feder angetrieben. Die Federkraft ändert sich mit dem Ausschlag der Feder von $P_1 = 20$ kp auf $P_2 = 11$ kp. Der Ausschlag beträgt $s_1 = 0{,}21$ m. Das Weberschiffchen wiegt 1,5 kp und legt einen Weg $s_2 = 2{,}2$ m zurück. Auf diesem Weg erfährt es einen gleichbleibenden Widerstand $P_w = 0{,}1$ kp (Bild 18).

a) Wie groß ist die größte Geschwindigkeit v_1?

b) Wie groß ist die Zeit t_1, die zu s_1 gehört?

c) Wie groß ist die Verzögerung b_2 auf dem Wege s_2 und die Endgeschwindigkeit v_2?

d) Wie groß ist die Zeit t_2, um s_2 zurückzulegen?

Anleitung: $b_1 = \frac{P_1 - P_w}{m}$; $\quad b_2 = \frac{P_2 - P_w}{m}$ $\quad v_1^2 = 2\int b \cdot ds = 2\, b_m s_1$

angenähert $v_1^2 = 2 \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot s_1$; $\quad v_1^2 - v_2^2 = 2 b_2 s_2$ (s. Aufg. 10).

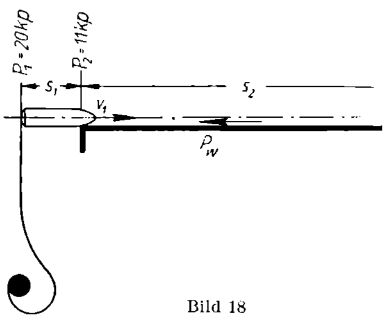


Bild 18

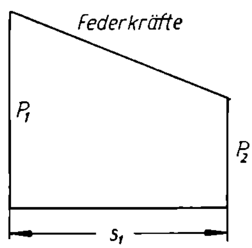


Bild 19

22. Ein fahrbarer Dampfdrehkran hat folgende Einzelgewichte: Nutzlast 3,5 Mp, Ausleger 0,8 Mp, Dampfmaschine mit Triebwerk und Führerhaus 7,0 Mp, stehender Dampfkessel mit Wasser 4,3 Mp, Unterbau 3,6 Mp. Die Schwerpunkte der einzelnen Gewichte sind im Bild gegeben.

a) Welche Beschleunigung b darf höchstens auftreten?

b) Wie groß sind die Raddruckkräfte bei $b = 0{,}25$ m/s²?

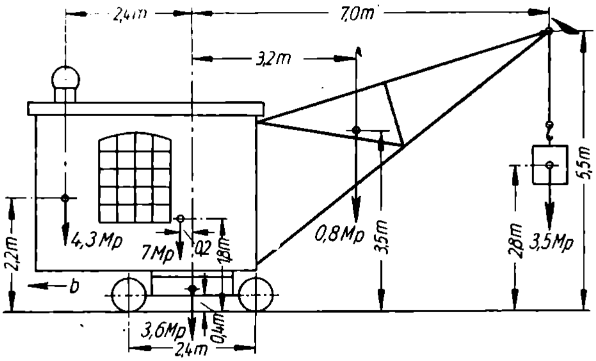


Bild 20

Senkrechte Bahn

23. Ein Seil trägt eine Last $G = 1000$ kp. Wie ändert sich die Seilspannkraft P, wenn die Last mit einer Beschleunigung 3 m/s² gehoben bzw. gesenkt wird?

Lösung: a) Im Ruhezustande ist

$$P = G = 1000\,\text{kp} = 9810\,\text{N}.$$

b) **Anheben** mit der Beschleunigung b. Fügt man die Massenträgheitskraft mb nach dem d'Alembertschen Prinzip (Aufg. 4) entgegengesetzt der Beschleunigungsrichtung, also nach unten, als Ergänzungskraft hinzu (Bild 21), so heißt die Gleichung der lotrechten Kräfte:

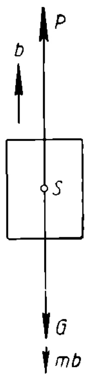


Bild 21

$$P - G - mb = 0,$$

$$\boldsymbol{P = G + mb} = 9810\,\text{N} + \frac{1000\,\text{kg}\cdot 3\,\text{m}}{\text{s}^2} = 12810\,\text{N}$$

$$= 1306\,\text{kp}.$$

Die Spannkraft des Seils ist während des beschleunigten Anhebens größer als im Ruhezustande.

c) Bei beschleunigtem **Senken** wirkt die Massenträgheitskraft mb der Bewegung entgegen nach oben (Bild 22). Die Seilspannkraft wird

$$\boldsymbol{P = G - mb} = 6810\,\text{N} = 694\,\text{kp}.$$

$P < G$. Das Seil wird entlastet.

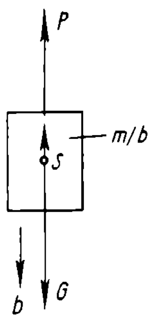


Bild 22

Wird die Last mit einer Beschleunigung $g = 9{,}81$ m/s² gesenkt, so wird $P = G - mg = 0$, das heißt, das Seil wird spannungslos, schlaff, und die Last fällt frei herab.

24. Eine **Krankette** von 13 mm Rundstahldicke und 2800 kp/cm² Bruchfestigkeit zerriß beim Anheben eines 3000 kp schweren Blocks. **a)** Wie groß ist ihre Bruchlast? **b)** Wie groß war die Beschleunigung des Blocks im Augenblick des Anhebens?

25. Ein **Hafenkran** hebt Lasten mit einer Masse von 3 t und 1,8 m sekundlicher Geschwindigkeit. Die Beschleunigung erfolgt gleichmäßig innerhalb $^5/_4$ Sekunden. Das Drahtseil besteht aus 114 Stahldrähten von je 1,2 mm Durchmesser und 16000 kp/cm² Zugfestigkeit. Wie groß ist **a)** die Beschleunigung? **b)** die Spannkraft im Drahtseil beim Anheben der Last? **c)** die Zugspannung in den Drähten des Seils (s. Teil II, Festigkeitslehre)? **d)** der Sicherheitsgrad des Seils?

26. Um wieviel Prozent wächst die Beanspruchung eines **Kranseils**, wenn eine am Seil hängende Last mit einer Beschleunigung 1,6 m/s² gehoben wird?

Lösung: Die Seilspannkraft wächst von G auf $(G + mb) = mg + mb = m(g + b)$. An Stelle von $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ tritt $g + b = 9{,}81\ \text{m/s}^2 + 1{,}6\ \text{m/s}^2 = 11{,}41\ \text{m/s}^2$.

$$x\,\% : 100\,\% = 11{,}41\ \text{m/s}^2 : 9{,}81\ \text{m/s}^2$$

$$x = 116{,}3\,\%.$$

Die Beanspruchung wächst also um 16,3 %.

27. Der **Förderkorb** eines Bergwerks hat 3400 kp Eigengewicht und nimmt vier beladene Kohlenwagen von je 700 kp Gewicht auf. Das tragende Drahtseil besteht aus 366 Stahldrähten von je 1,3 mm Durchmesser und 16000 kp/cm² Zugfestigkeit und hat 4,61 kp/m Eigengewicht. Das Seil wird auf eine Fördertrommel von 6 m Durchmesser aufgewunden, so daß beim Anfahren während $2^1/_2$ Trommelumdrehungen die größte Fördergeschwindigkeit 12 m/s in gleichförmig beschleunigter Bewegung erreicht wird. Zu berechnen ist **a)** die Spannkraft in dem ruhenden Seile, wenn der beladene Förderkorb sich in 400 m Tiefe befindet; **b)** die Beschleunigung beim Anfahren; **c)** die größte Spannkraft im Seil beim Anfahren; **d)** die Bruchlast des Seils; **e)** der Sicherheitsgrad.

28. Bei der **Förderanlage** eines Bergwerks beträgt das Eigengewicht des Förderkorbes 5000 kp und das Gewicht jedes der sechs beladenen Kohlenwagen 800 kp. Das Seilgewicht, 8,7 kp für das laufende Meter, ist durch Unterseil nach Bild 23 ausgeglichen; die Gesamtlänge des in sich geschlossenen Seiles beträgt 1500 m. Das Anfahren aus 600 m Tiefe bis zur Höchstgeschwindigkeit 15 m/s geschieht auf 120 m Hub; das Auslaufen auf 180 m; dazwischen gleichförmige Fahrt mit 15 m/s. Das Diagramm ist zu zeichnen für Geschwindigkeit, Beschleunigung, Umfangskraft der Fördertrommel und Nutzleistung der Fördermaschine, bezogen auf die Zeit.

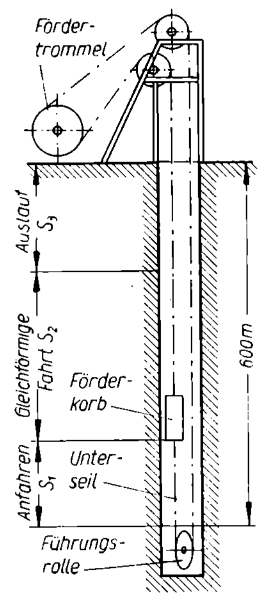


Bild 23

Lösung:

1. Beschleunigte Anfahrbewegung

$$s_1 = \frac{v}{2}\,t_1; \quad t_1 = \frac{2\,s_1}{v} = \frac{2 \cdot 120\,\text{m s}}{15\,\text{m}} = 16\,\text{s}.$$

Beschleunigung $b_1 = v : t_1 = 15\,\text{m/s} : 16\,\text{s} = 0{,}94\,\text{m/s}^2$.

Seilspannkraft $P_1 = G_1 + 6\,G_2 + m b_1$

Zu beschleunigen sind die Massen des Förderkorbes, der Kohlenwagen und des Seils: $5000\,\text{kg} + 6 \cdot 800\,\text{kg} + 8{,}7\,\text{kg/m} \cdot 1500\,\text{m} = 22\,850\,\text{kg}$

$$P_1 = 5000\,\text{kp} + 4800\,\text{kp} + \frac{22\,850\,\text{kg} \cdot 0{,}94\,\text{m}}{\text{s}^2} = 11\,990\,\text{kp}.$$

Größte Nutzleistung der Fördermaschine am Ende der Anfahrperiode

$$N = P_1 \cdot v = 11\,990\,\text{kp} \cdot 15\,\text{ms}^{-1} = 179\,850\,\text{kpms}^{-1} = 2400\,\text{PS}.$$

2. Gleichförmige Fahrt

$$b_2 = 0; \quad s_2 = 600\,\text{m} - 180\,\text{m} - 120\,\text{m} = 300\,\text{m}.$$

$$t_2 = s_2 : v = 300\,\text{m/s} : 15\,\text{m/s} = 20\,\text{s}.$$

$$P_2 = 9800\,\text{kp}; \quad \text{Leistung } N = Pv = 9800\,\text{kp} \cdot 15\,\text{m/s} = 1960\,\text{PS}.$$

3. Verzögerte Auslaufbewegung

$$s_3 = \frac{v}{2}\,t_3; \quad t_3 = \frac{2\,s_3}{v} = \frac{2 \cdot 180\,\text{m s}}{15\,\text{m}} = 24\,\text{s}$$

$$b_3 = v : t_3 = 15\,\text{m/s} : 24\,\text{s} = 0{,}625\,\text{m/s}^2.$$

$$P_3 = 5000\,\text{kp} + 4800\,\text{kp} - m b_3 = 8\,340\,\text{kp}.$$

Leistung bei Beginn der Auslaufbewegung:

$$N = P_3 \cdot v = 125\,100\,\text{kpms}^{-1} = 1670\,\text{PS}.$$

Erklärung des Diagramms (Bild 24) wie bei Aufg. 15.

29. Die Fahrzelle eines **Aufzugs** in einem Geschäftshause ist nach Bild 25 an einem Drahtseile A aufgehängt, welches von einer durch Elektromotor angetriebenen Trommel aufgewunden wird. Die Eigenmassse der Zelle beträgt 500 kg, die Nutzlast be-

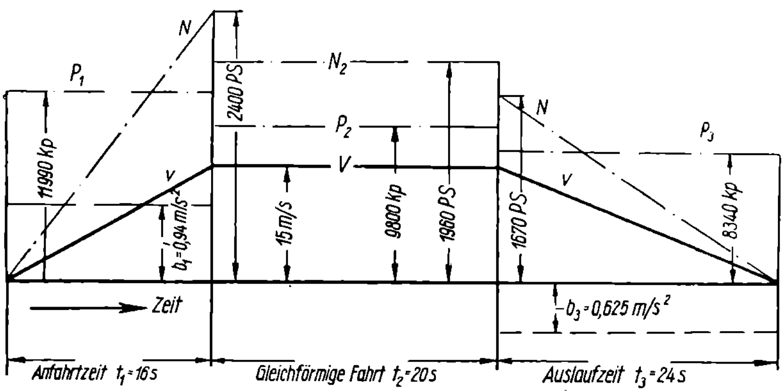


Bild 24

sitzt die Masse 1600 kg. Auf der dem Lastseil entgegengesetzten Trommelseite wickelt sich gleichzeitig ein zweites Seil B ab, das ein Gegengewicht trägt. Letzteres wird so groß bemessen, daß es das Eigengewicht der Zelle und die halbe Nutzlast ausgleicht. Die unbedeutenden Seilgewichte werden vernachlässigt. Das Anfahren aus der tiefsten Stellung der Zelle soll so geschehen, daß die größte Hubgeschwindigkeit 1,2 m/s in gleichförmig beschleunigter Bewegung nach $1^1/_2$ Sekunden erreicht wird. Der weitere Hub erfolgt gleichförmig mit der genannten Geschwindigkeit. Die Verzögerung beim Anhalten soll halb so groß wie die Beschleunigung sein. Gesamthub 11 m. Für die drei Abschnitte der Bewegung, nämlich 1. beschleunigtes Anheben, 2. verzögertes Auslaufen und 3. gleichförmige Hubbewegung, werden gesucht die Wege und Beschleunigungen, die erforderliche Antriebskraft am Trommelumfang und die Antriebsleistung. Das Diagramm der genannten vier Größen ist zu zeichnen, bezogen auf die Zeit.

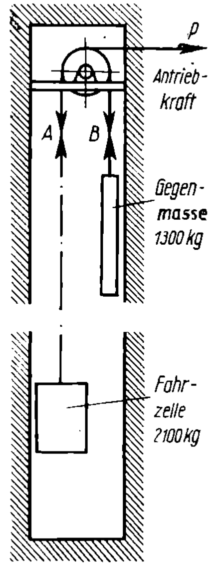


Bild 25

30. Der Bär eines **Dampfhammers** (Bild 26) hat 20 t Masse und soll mit einer Beschleunigung 0,7 m/s² angehoben werden. Zu berechnen ist **a)** die erforderliche Kolbenkraft beim Anheben. Die Reibungsverluste sollen durch 5 % Zuschlag berücksichtigt werden. **b)** der Durchmesser d der Kolbenstange für eine zulässige Zugspannung 150 kp/cm²; **c)** der Durchmesser D des Dampfzylinders für 9 at Überdruck Dampfspannung unter Berücksichtigung der durch den Kolbenstangenquerschnitt verlorenen Kolbenfläche.

31. Bei einem **Dampfhammer** von 250 mm Zylinderdurchmesser (Bild 26 wie bei voriger Aufgabe) beträgt die Masse von Hammerbär, Kolben und Kolbenstange zusammen 1500 kg. **a)** Wie groß ist die Kolbenkraft, wenn die Dampfspannung 6 at Überdruck beträgt und der Kolbenstangenquerschnitt sowie die Stopfbüchsenreibung vernachlässigt werden? **b)** Mit welcher Beschleunigung wird der Bär angehoben? **c)** Mit welcher Beschleunigung fällt der Bär, wenn während der ganzen Fallbewegung Oberdampf von 6 at Überdruck über dem Kolben wirkt, während der geringe Gegendruck des Auspuffdampfes unter dem Kolben vernachlässigt wird? **d)** Mit welcher Geschwindigkeit trifft dann der Bär auf das Schmiedestück auf bei 700 mm Fallhöhe? **e)** Wie lange dauert der Fall?

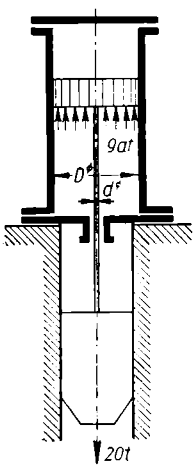


Bild 26

Lösung: a) 2945 kp.

b) $2945\,\text{kp} = 1500\,\text{kp} + 1500\,\text{kg} \cdot b;\quad b = 9{,}45\,\text{m/s}^2$.

c) $2945\,\text{kp} + 1500\,\text{kp} = 1500\,\text{kg} \cdot b';\quad b' = 29\,\text{m/s}^2$.

d) $v = \sqrt{2b' \cdot s} = 6{,}37\,\text{m/s}$.

e) $t = v : b' = 0{,}22\,\text{s}$.

Man prüfe mit $^1/_2\, m v^2 = P \cdot s$.

32. Bei dem skizzierten **Fallhammer** werden zwei mit entgegengesetzter Umlaufrichtung dauernd angetriebene Scheiben durch Anheben des Steuerhebelhandgriffs einander genähert, dadurch die Hubstange des Hammerbärs eingeklemmt und durch die entstehende Reibung nach oben mitgenommen. **a)** Wie groß sind die senkrechten Reibungskräfte auf beiden Seiten der Hubstange zusammen, wenn die Anpressungsdruckkraft 1600 kp beträgt? Reibungszahl 0,25. **b)** Mit welcher Beschleunigung wird der samt Stange 700 kp schwere Bär angehoben? **c)** Nach welcher Zeit erreicht er die größte Hubgeschwindigkeit gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Scheiben, die 1,2 m/s beträgt? **d)** Welche Hubhöhe wird während des gleichförmig beschleunigten Anhebens zurückgelegt? **e)** Wie lange dauert das anschließende gleichförmige Heben um weitere 1,5 m Hubhöhe, das mit 1,2 m/s geschieht? **f)** Um welche Hubhöhe steigt der Hammer noch, wenn der Anpressungsdruck durch den Steuerhebel jetzt plötzlich aufgehoben wird? **g)** Wie lange dauert diese gleichförmig verzögerte Auslaufbewegung? **h)** Wie groß ist der Gesamthub des Hammers? **i)** Mit welcher Endgeschwindigkeit trifft der aus der höchsten Stellung frei herabfallende Bär unten auf das Schmiedestück auf? **k)** Wie lange dauert der Fall? **l)** Wieviel Schläge können in einer Minute ausgeführt werden?

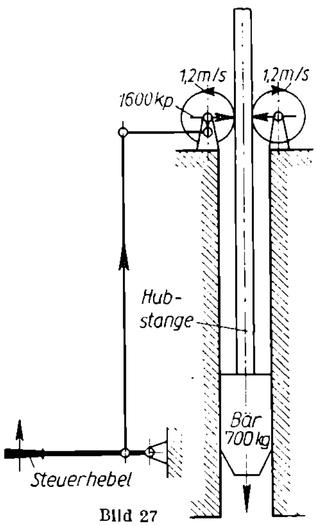


Bild 27

Geneigte Bahn

33. Welche Bewegung führt ein Körper, sich selbst überlassen, auf einer unter dem Winkel α **geneigten Ebene** aus (Bild 28), **a)** wenn keine Reibung vorhanden wäre? **b)** wenn die Reibungszahl der gleitenden Bewegung μ ist?

Lösung: a) Ein Körper von der Masse m wird von der Erde mit der Kraft $G = mg$ angezogen; unter dem Einfluß der in der Schrägrichtung wirkenden Kräfte gleitet der Körper auf der geneigten Ebene beschleunigt abwärts. Die hierbei wirkenden Kräfte sind: 1. die abwärts treibende Seitenkraft $G \sin\alpha = mg \sin\alpha$ der Schwerkraft und 2. die Massenträgheitskraft mb. Letztere wirkt der Bewegungskraft entgegen nach oben. Trägt man sie nach dem d'Alembertschen Prinzip (Aufg. 4) als Ergänzungskraft ein (Bild), so besteht Gleichgewicht zwischen den Kräften, und es gilt: $G \sin\alpha - mb = 0$;

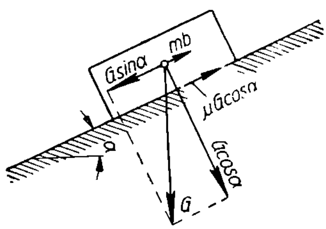


Bild 28

$$mg \sin\alpha = mb; \quad b = g \cdot \sin\alpha.$$

Mit dieser Beschleunigung würde der Körper auf der geneigten Ebene abwärtsgleiten.

b) Die Normalkraft $G \cos\alpha$ erzeugt an der Gleitfläche einen Reibungswiderstand $\mu \cdot G \cos\alpha$ der Bewegung entgegen schräg nach oben (Bild). Bei Berücksichtigung der Reibung gilt also mit $G = mg$.

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - mb' = 0$$
$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = mb'.$$

Die Beschleunigung parallel zur geneigten Ebene abwärts wird dann

$$b' = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

m fällt aus der Gleichung heraus, d. h., die Masse des Körpers ist ohne Einfluß auf die Bewegung, da sowohl die treibenden als auch die hemmenden Kräfte proportional m wachsen. Schwere Körper erfahren also dieselbe Beschleunigung wie leichte.

34. Mit welcher Beschleunigung gleitet ein **Block** von 170 kg auf einer unter 30° gegen die Waagerechte geneigten Ebene abwärts, **a)** wenn keine Reibung wirksam wäre? **b)** wenn die Reibungszahl 0,15 ist? **c)** Welche Beschleunigung würde ein Körper mit doppelter Masse erfahren?

Lösung: nach voriger Aufgabe.

35. Ein 5000 Mp schweres **Schiff** gleitet beim **Stapellauf** auf der unter 1 : 15 geneigten Ablaufbahn gleichförmig beschleunigt abwärts. **a)** Mit welcher Endgeschwindigkeit verläßt es die 90 m lange Gleitbahn, wenn die Zeitdauer des Ablaufs zu 31 Sekunden gemessen wird? **b)** Wie groß ist die Beschleunigung? **c)** Wie groß ist die Reibungszahl der Gleitflächen (Holz auf Holz, mit Seife geschmiert)? **d)** Mit welcher Kraft muß das Schiff vor dem Stapellauf in Richtung der Ablaufbahn festgehalten werden?

Lösung: **a)** $v = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 90\,\text{m}}{31\,\text{s}} = 5{,}81\,\text{m/s}.$

b) $b = v:t = 5{,}81\,\text{m/s} : 31\,\text{s} = 0{,}1874\,\text{m/s}^2.$

c) $\sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{b}{g}$ (Aufg. 33).

Im Dreieck (Bild 29) ist die Hypotenuse

$$l = \sqrt{15^2 + 1^2} = \sqrt{226} = 15{,}033.$$
$$\sin \alpha = 1 : 15{,}033 = 0{,}0665.$$
$$\cos \alpha = 15 : 15{,}033 = 0{,}998.$$
$$0{,}0665 - \mu\, 0{,}998 = 0{,}1874\,\text{m/s}^2 : 9{,}81\,\text{m/s}^2.$$
Daraus $\mu = 0{,}0475.$

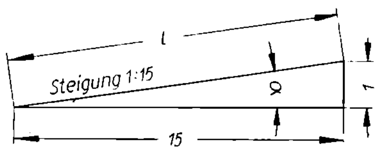


Bild 29

d) $G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$
$= 5000\,\text{Mp}\,(0{,}0665 - 0{,}0475 \cdot 0{,}998)$
$= 95{,}5\,\text{Mp}.$

36. Das Verladen von Kohle in Schiffe erfolgt mittels einer geneigten **Schüttrinne.** **a)** Wie groß ist die Reibungszahl, wenn die Kohle bei 16° Neigung der Rinne gerade gleichförmig abwärtsgleitet? **b)** Mit welcher Beschleunigung gleitet die Kohle abwärts bei 25° Neigung der Rinne? **c)** Mit welcher Endgeschwindigkeit verläßt sie dann die 11 m lange Rinne?

Anleitung: a) Gleichförmige Abwärtsbewegung erfolgt, wenn die treibende Kraft $G \sin \alpha$ gerade den Reibungswiderstand $\mu \cdot G \cos \alpha$ überwindet (Bild 28 bei Aufg. 33), also wenn $G \sin \alpha = \mu \cdot G \cos \alpha$ ist.

b) $G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = m \cdot b$; $\frac{G}{m} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

c) $v = \sqrt{2bs}$; $\frac{1}{2} m v^2 = G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot s = G h - G \mu \cos \alpha \cdot s$.

37. Das **Ablaufgleis** eines Verschiebebahnhofs hat ein Gefälle 1 : 35 (Bild 30). **a)** Mit welcher Beschleunigung läuft ein 10 Mp schwerer Wagen abwärts, wenn die Fahrwiderstandsziffer der gesamten Reibung 0,004 ist (d. h. der Fahrwiderstand gleich dem 0,004fachen Wagengewichte, also 4 kp für 1 Mp Wagengewicht)? **b)** Mit welcher Endgeschwindigkeit verläßt der Wagen die 46 m lange Ablaufstrecke, wenn die Anfangsgeschwindigkeit 0 ist? **c)** Wieviel Zeit gebraucht der Wagen zum Durchlaufen der Ablaufstrecke? **d)** Welchen Weg legt er auf dem anschließenden waagerechten Gleise auslaufend noch zurück? **e)** Welche Werte ergeben sich für einen 20 Mp schweren Wagen?

Anleitung zu d): Das Arbeitsvermögen $\frac{m v^2}{2}$ des Wagens wird durch den hemmenden Fahrwiderstand $P_w = 0{,}004\,G = 40$ kp auf einem Wege s' aufgezehrt, also

$$\frac{m v^2}{2} = P_w \cdot s\,; \quad P_w \text{ in N einsetzen!}$$

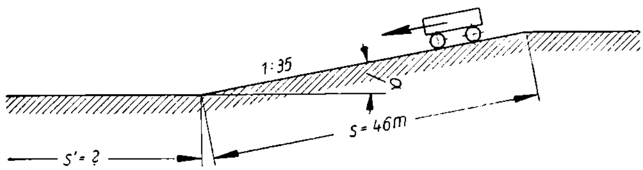


Bild 30

38. Eine **Eisenbahnstrecke** hat auf 2,7 km Länge die außergewöhnlich große **Steigung** 1 : 30. Ein Güterwagen von 15 Mp Gewicht löst sich infolge Reißens der Kupplung von einem aufwärtsfahrenden Güterzuge am höchsten Punkt der Steigung und läuft rückwärts unbehindert bergab. Die Fahrwiderstandsziffer der gesamten Reibung kann für Eisenbahnwagen zu 0,004 angenommen werden (Erklärung siehe vorige Aufgabe!). **a)** Wie groß ist die Beschleunigung der Abwärtsbewegung? **b)** Mit welcher Geschwindigkeit kommt der Wagen im tiefsten Punkte der 2,7 km langen Gefällstrecke an? **c)** Wieviel Zeit gebraucht er zum Durchlaufen der Strecke? **d)** Wie weit würde der Wagen auf dem anschließenden waagerechten Gleise noch weiter auslaufen, bis er durch den Fahrwiderstand zur Ruhe gebracht wird? **e)** Welche Werte ergeben sich für einen doppelt so schweren Wagen?

Lösung wie bei voriger Aufgabe.

39 A. Eine elektrische **Schnellzuglokomotive** übt auf einen Zug von 530 Mp beim Anfahren eine Zugkraft von 17000 kp aus. Der gesamte Fahrwiderstand der Reibung beträgt 4 kp für 1 Mp Zuggewicht. Wie groß ist die Anfahrbeschleunigung **a)** auf waagerechter Strecke? **b)** auf einer Steigung 1 : 80?

Anleitung zu b): $P - P_w - G \sin \alpha = m b$; $P_w = G \cos \alpha \cdot \mu$; $\sin \alpha \approx \tan \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$.

39 B. Ein PKW mit einem Gesamtgewicht von 1250 kp hat auf einer ansteigenden Strecke mit der Neigung 1 : 50 eine Geschwindigkeit von 36 km/h. Die Vierradbremse (Bild 31) arbeitet mit Öldruck von 6 at Überdruck. Kolbendurchmesser im Öldruckzylinder $d = 40$ mm, Durchmesser der Bremsscheibe $D_1 = 300$ mm, Durchmesser des Laufrades $D_2 = 600$ mm, Reibungszahl des Bremsbelages $\mu = 0{,}8$, Fahrwiderstand ohne Bremsung 50 kp. Gesucht: **a)** P_1 und Q; **b)** P_w und P_2; **c)** Verzögerung b; **d)** Zeit t bis zum Stillstand; **e)** Bremsweg. Hebelarm von $P_1 \approx D_1$; von $Q \approx D_1 : 2$.

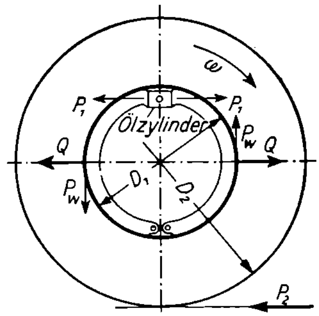


Bild 31

40. Eine **Bergbahn** von der Steigung 1 : 4 wird so betrieben, daß ein aufwärts fahrender Wagen mit einem abwärts fahrenden durch ein Drahtseil verbunden ist, das um eine auf der Bergspitze angeordnete Führungsrolle läuft (Bild 32). Der Antrieb des zu Tale fahrenden Wagens erfolgt durch eine auf Bergeshöhe eingelassene Wasserfüllung von 1,3 m³. Das Eigengewicht der Wagen beträgt je 7000 kp; der Fahrwiderstand der Reibung, in der Schrägrichtung gemessen, an beiden Wagen zusammen 120 kp. Das Gewicht des Drahtseils wurde vernachlässigt. **a)** Mit welcher Beschleunigung fahren die Wagen an? **b)** Nach welcher Zeit erreichen sie die Fahrgeschwindigkeit 2,6 m/s? **c)** Welche Bremskraft muß in der Schrägrichtung ausgeübt werden, damit die weitere Bewegung gleichförmig erfolgt?

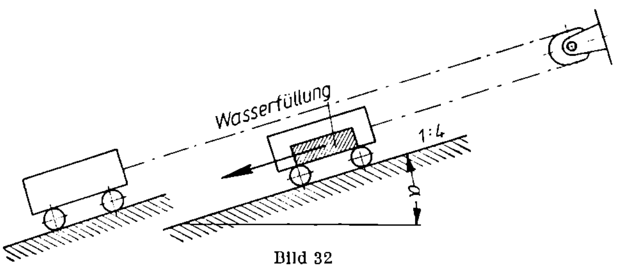


Bild 32

Beschleunigte Massen auf krummliniger Bahn

Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes

41. Welche Bahnlinie durchläuft ein mit **waagerechter Anfangsgeschwindigkeit** v_0 geworfener Körper?

Lösung: Die waagerechte Geschwindigkeit v_0 behält der Körper nach dem Gesetze der Trägheit unverändert bei, da bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes keine hemmenden Kräfte entgegenwirken. Der zurückgelegte Weg der gleichförmigen waagerechten Seitenbewegung ist also in t Sekunden $\boldsymbol{x = v_0 t}$.

In senkrechter Richtung fällt der Körper gleichmäßig beschleunigt abwärts. Nach den Fallgesetzen ist die senkrechte Fallgeschwindigkeit $v_y = g t$ und die durchfallene Höhe $\boldsymbol{y} = \frac{v_y}{2} \cdot t = \frac{g t}{2} \cdot t = \boldsymbol{\frac{1}{2} g t^2}$.

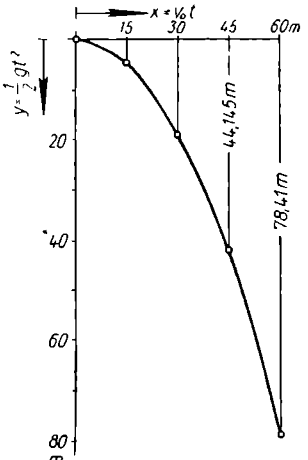


Bild 33

Zum Beispiel nach $t = 1\,\text{s}$ wird $y_1 = \frac{g}{2} \cdot (1\,\text{s})^2 = 4{,}91\,\text{m}$,

" $t = 2\,\text{s}$ " $y_2 = \frac{g}{2} \cdot (2\,\text{s})^2 = 19{,}62\,\text{m}$,

" $t = 3\,\text{s}$ " $y_3 = \frac{g}{2} \cdot (3\,\text{s})^2 = 44{,}15\,\text{m}$,

" $t = 4\,\text{s}$ " $y_4 = \frac{g}{2} \cdot (4\,\text{s})^2 = 78{,}41\,\text{m}$.

Zeichnet man aus den in gleichen Zeiten waagerecht und senkrecht durchlaufenen Wegen Rechtecke (Bild 33 z. B. mit $v_0 = 15\,\text{m/s}$), so geben die Eckpunkte derselben die Lage des Körpers an.

Für einen beliebigen Punkt der Wurflinie gilt: $x = v_0 t$ und $y = \frac{g t^2}{2}$. Setzt man aus der ersten Gleichung $t = x : v_0$ in die zweite ein, so wird $y = \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2} = \text{konst.} \cdot x^2$, also y proportional x^2. Nach dieser Gleichung ist die Wurflinie eine P a r a b e l.

42. Bei den **Niagarafällen** fließt das Wasser mit einer waagerechten Geschwindigkeit 4 m/s zu und fällt senkrecht 45 m frei herab. **a)** Welche senkrechte Geschwindigkeit hat ein Wassertropfen beim Aufschlagen? **b)** Wieviel Zeit braucht er zum Durchfallen der Höhe? **c)** Wie weit bewegt er sich während des Falles in waagerechter Richtung fort? **d)** Mit welcher resultierenden Endgeschwindigkeit trifft er unten auf? **e)** Zeichne die Bahnlinie des Wassers im Maßstab 1 : 500!

Lösung:

a) Nach den Fallgesetzen ist

$$v_y = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 45\,\text{m}} = 29{,}7\,\text{m/s}.$$

b) $v_y = gt; \quad t = v_y : g = 29{,}7\,\text{m/s} : 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 3\,\text{s}$.

c) $x = v_0 t = 4\,\text{m/s} \cdot 3\,\text{s} = 12\,\text{m}$.

d) $v_{\text{res}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4\,\text{m/s})^2 + (29{,}7\,\text{m/s})^2} = 30\,\text{m/s}$.

e) Siehe vorige Aufgabe!

43. Die Kugel eines **Jagdgewehres** wird mit 400 m/s Geschwindigkeit in waagerechter Richtung abgeschossen. **a)** Wieviel Zeit braucht sie, um ein in 500 m waagerechter Entfernung befindliches Ziel zu erreichen? **b)** Um welche Höhe senkt sie sich dabei?

44. Ein Wasserstrahl fließt aus einem Rohr mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s waagerecht aus und kann noch 10 m fallen. **a)** Unter welchem Winkel gegen die Lotrechte trifft der Strahl auf? **b)** Wie groß ist die Geschwindigkeit beim Auftreffen? **c)** Gleichung der Bahnkurve? **d)** Waagerechter Abstand des Auftreffpunktes vom Ausfluß?

45. Für die **Wurfbewegung** mit **schräggerichteter Anfangsgeschwindigkeit** v_0 (Bild 34) werden gesucht **a)** die Geschwindigkeitsgleichungen; **b)** die Weggleichungen; **c)** die Steighöhe; **d)** die Wurfzeit; **e)** die Wurfweite.

Lösung: a) Geschwindigkeitsgleichungen. v_0 sei in die waagerechte und senkrechte Geschwindigkeit zerlegt (Bild 34). Die waagerechte Geschwindigkeit behält, weil bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes keine Kräfte entgegenwirken, unverändert denselben Wert.

$$\boldsymbol{v_x = v_0 \cdot \cos\alpha = \textbf{konst.}}$$

Dagegen wird die senkrechte Geschwindigkeit $v_0 \cdot \sin\alpha$ nach den Fallgesetzen in jeder Sekunde um den Betrag der Verzögerung g verringert, also ist

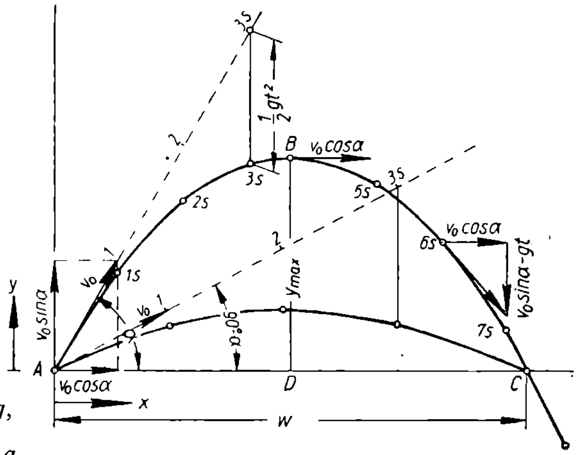


Bild 34

nach 1 Sekunde $v_y = v_0 \sin\alpha - g$,

nach 2 Sekunden $v_y = v_0 \sin\alpha - 2g$,

nach t Sekunden $\boldsymbol{v_y = v_0 \sin\alpha - gt}$.

b) Weggleichungen. In waagerechter Richtung ist der in t Sekunden gleichförmig zurückgelegte Weg

$$x = v_x t = v_0 \cos\alpha\, t.$$

In senkrechter Richtung dagegen ist die Bewegung gleichförmig verzögert und der in t Sekunden zurückgelegte Weg nach den Fallgesetzen

$$y = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{g t^2}{2}.$$

c) Der Körper erreicht den höchsten Punkt B der Wurflinie für $v_y = 0$, also $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 0$, das heißt nach $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Die **Steighöhe** BD wird für diesen Wert von t

$$\boldsymbol{y_{\max}} = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{g t^2}{2} =$$

$$= v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}}.$$

$y_{\max}$ hätte auch unmittelbar als Steighöhe der senkrechten Bewegung gefunden werden können durch die Formel für die Steighöhe $s = \frac{v^2}{2\,g}$. Setzt man nämlich statt des allgemeinen v die senkrechte Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin\alpha$, so wird $y_{\max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$.

d) Bei der weiteren Bewegung über B hinaus nimmt die Geschwindigkeit v wieder nach den Fallgesetzen zu, wie sie vorher abnahm. In Punkten gleicher Höhe ist die Geschwindigkeit dieselbe; deshalb auch die Geschwindigkeit beim Auftreffen in C gleich der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Die Wurflinie ist demnach symmetrisch zu BD. Sie wird, punktweise konstruiert wie in Bild 34, eine Parabel mit dem Scheitel in B. Die gesamte **Wurfzeit** bis zum Auftreffen in C ist

$$T = 2t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}.$$

e) Die **Wurfweite** ergibt sich aus der waagerechten gleichförmigen Bewegung

$$w = AC = v_x T = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin (2\alpha).$$

Die Wurfweite wird am größten, wenn $\sin(2\alpha)$ seinen Höchstwert erhält, d. h. für $\sin 90° = 1$, also für $\alpha = 45°$. Dann wird

$$w_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Sowohl der Winkel α wie der Winkel $90° - \alpha$ ergeben dieselbe Wurfweite, da $\sin 2\alpha = \sin (180 - 2\alpha)$ ist.

46. Ein mit der **Armbrust** senkrecht aufwärts geschossener Bolzen fällt nach 11 Sekunden unten wieder auf. **a)** Welche Anfangsgeschwindigkeit hatte er? **b)** Wie groß werden die waagerechte und die senkrechte Geschwindigkeit, wenn der Bolzen mit derselben Anfangsgeschwindigkeit unter einem Neigungswinkel von 60° gegen die Waagerechte abgeschossen wird? **c)** Wie groß sind dann die waagerecht und senkrecht durchlaufenen Wege nach 1, 2, 3 und 4 Sekunden? **d)** Welche Steighöhe erreicht der Bolzen? **e)** Nach welcher Zeit erreicht er diese Höhe? **f)** Wie groß wird die waagerechte Wurfweite? **g)** die Wurfzeit? **h)** Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Bolzen am Ziel auf die waagerechte Ebene auf? **i)** Zeichne die Wurfbahn im Maßstabe 1 : 2000! **k)** Unter welchem Winkel muß nach einem 170 m weit entfernten, in gleicher Höhe gelegenen Ziel geschossen werden?

Lösung: a) Steigdauer = Falldauer = 5,5 s,

$v_0 = gt = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 5{,}5\ \mathrm{s} = 54\ \mathrm{m/s}$.

b) $v_x = v_0 \cos 60° = 54\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}5 = 27\ \mathrm{m/s}$.

$v_y = v_0 \sin 60° = 54\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}866 = 46{,}76\ \mathrm{m/s}$.

c) Nach 1 Sekunde $x = v_x t = 27\ \mathrm{m/s} \cdot 1\ \mathrm{s} = 27\ \mathrm{m}$,

$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2} = 41{,}86\,\mathrm{m}$.

Nach 2 Sekunden $x = 54$ m,

$y = 73{,}9$ m.

Nach 4 Sekunden $x = 108$ m, $y = 108{,}6$ m.

d) $y_{\max} = (v_0 \sin \alpha)^2 : 2g = 111{,}2$ m.

e) $t = v_0 \sin \alpha : g = v_y : g = 4{,}77$ s.

f) $w = \frac{v_0^2}{g} \sin (2\alpha) = 258$ m.

g) $T = 2 v_0 \sin \alpha : g = 9{,}54$ s.

h) $v_0 = 54$ m/s.

i) Siehe Bild 35!

k) $w = \frac{v_0^2}{g} \sin (2\alpha)$,

$\sin\ (2\alpha) = wg : v_0^2 = 0{,}572$

$2\alpha = 35°;\ \alpha_1 = 17^1/_2°.$

Für einen Winkel $\alpha_2 = 90° - 17^1/_2° = 72^1/_2°$ erhält man denselben Wert $\sin (2\alpha_2) = \sin 145° = \sin 35°$. Man kann also unter zwei verschiedenen Winkeln schießen, um eine bestimmte Wurfweite zu erhalten. Die beiden Winkel α_1 und α_2 ergänzen sich zu 90°.

$$17^1/_2° + 72^1/_2° = 90°.$$

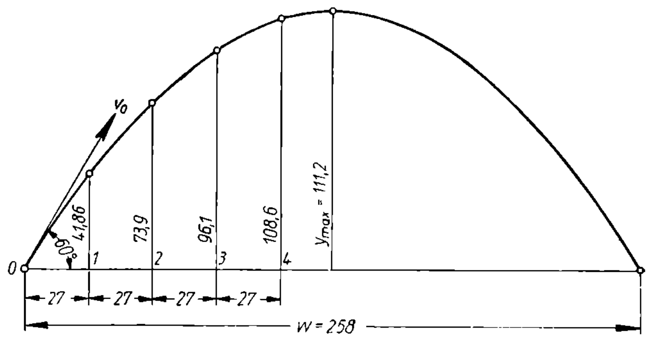


Bild 35

(alle Zahlenangaben sind Längen in m)

47. Eine **Feuerspritze** mit Dampfantrieb vermag das Wasser auf eine größte waagerechte Entfernung 65 m zu werfen. **a)** Mit welcher Geschwindigkeit tritt das Wasser aus dem Schlauchmundstück aus, wenn letzteres zur Erzielung einer möglichst großen Wurfweite unter 45° Neigung eingestellt wird? **b)** Wieviel Zeit braucht ein Wassertropfen zum Durchlaufen der Wurfbahn? **c)** Bis zu welcher Höhe steigt die Wurfbahn? **d)** Wie hoch kann man spritzen, wenn der größte Neigungswinkel gegen die Waagerechte zu 70° angenommen wird?

48. Eine mittelalterliche Wurfvorrichtung schleuderte Steine bis auf etwa 1000 Schritt Entfernung, den Schritt zu 0,8 m gerechnet. **a)** Welche Anfangsgeschwindigkeit vermochte sie bei einem Wurf unter 45° zu erteilen? **b)** Wie groß war die Wurfzeit? **c)** Welche Höhe erreichte die Wurfbahn?

49. Welche Fallgeschwindigkeit hat ein Meteor, der, aus dem Weltall kommend, radial zur Erde fällt, **a)** an der Erdoberfläche? **b)** in einem Abstand von 100mal Erdradius? Erdradius $r_0 = 6377$ km.

Anmerkung: Anziehungskraft bei einer beliebigen Entfernung r

$$P = G \left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \quad \text{Arbeit} \int_r^\infty P \,\mathrm{d}r = {}^1/_2\, m v^2 \quad 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}.$$

50. Bei einer Kesselexplosion fliegt ein Stück 800 m weit. Mit welcher Geschwindigkeit muß das Stück abgeschleudert worden sein, wenn der Auftreffpunkt gleich hoch mit dem Kessel liegt und man einen Abgangswinkel von 45, 30 und 15° annimmt?

51. Bei einer Kesselexplosion fliegt ein Stück 600 m weit auf eine Anhöhe, die 100 m über dem Kessel liegt. Die Entfernung ist in waagerechter Richtung gemessen. Der Auftreffwinkel beträgt 40°. a) Flugzeit? b) Abgangswinkel? c) Anfangsgeschwindigkeit?

Anmerkung:

$$\text{Man setze } \tan 140° = -\tan 40° = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha_0 - g\,t}{v_0 \cdot \cos\alpha_0} = \frac{y/t - {}^1\!/_2\, g\,t}{x/t}\,.$$

Nockentrieb

52. Wie gestalten sich die Bewegungsverhältnisse am **Rollnockentrieb**?

Lösung: Im Bild 36 dreht sich die Nockenwelle in der Pfeilrichtung mit der Winkelgeschwindigkeit ω, die Rolle ist gerade von der Nockenerhebung abgelaufen. Die Beschleunigung beim Ablauf wird durch die Ventilfeder hervorgerufen, die so stark sein muß, daß die Rolle stets am Nocken anliegt.

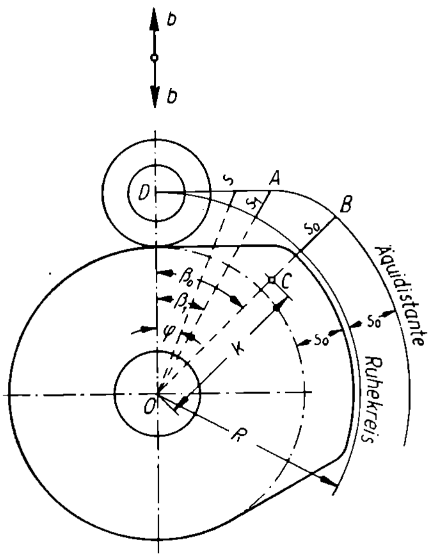


Bild 36

Ohne Nockenerhebung würde der Rollmittelpunkt sich auf dem Ruhekreis mit dem Radius R bewegen. Infolge der Nockenerhebung aber bewegt sich der Mittelpunkt der Rolle auf der sog. „Äquidistante", die von der Nockenerhebung stets um den Rollenradius entfernt ist. Im Bild 36 besteht die Äquidistante aus einer Tangente $\overline{DA}$ an den Ruhekreis, aus einem Kreisbogen $\widehat{AB}$ um C und einem Kreisbogen um O.

Beim Ablaufen der Rollen muß die Ventilfeder das Ventil und das Steuergestänge auf dem Wege von B bis A beschleunigen, während von A bis D eine Verzögerung eintritt.

Beim Auflaufen der Rolle, also bei umgekehrtem Drehsinn des Nockens, muß der Nocken die Rolle von D bis A nach außen beschleunigen. Die Pfeilrichtung dieser Beschleunigung ist dieselbe wie diejenige der Verzögerung beim Ablaufen der Rolle. Ebenso muß beim Auflaufen die Feder die Rolle von A bis B verzögern; dies entspricht in Größe und Richtung der vorher besprochenen Beschleunigung zwischen A und B. Man kann die Aufgabe graphisch lösen, indem man den Winkel β_0 in gleich große Winkel (von 5 zu 5°) einteilt und s als Funktion von φ (bzw. t) aufzeichnet. Durch zweimaliges graphisches Differenzieren nach Aufgabe 10 erhält man b.

In der Rechnung wird der Begriff **Winkelgeschwindigkeit** ω gebraucht. Die Winkelgeschwindigkeit ist der Quotient von Winkel im Bogenmaß und Zeit. Ist φ der

Winkel in Bogenmaß (das Bogenmaß erhält die Maßeinheit Radiant (rad), die aber dimensionslos ist), so ist die Winkelgeschwindigkeit die Zunahme dieses Winkels – $\mathrm{d}\varphi$ – in der zugehörigen Zeit $\mathrm{d}t$, also $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. Ist die Drehzahl n, so ist der zurückgelegte Winkel $2\pi n$ und die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi n \,(\text{Einheit: rad/s oder } 1/\text{s}); \quad n \text{ in } \frac{1}{\text{s}}; \quad 1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi}.$$

Um die Federkraft errechnen zu können, ist es erforderlich, die jeweilige Beschleunigung und daraus die Massenkraft zu ermitteln. Zu diesem Zwecke denkt man sich an Stelle des Nockens die Rolle um den Nocken gedreht. Man ermittelt dann für verschiedene Winkel φ den Ausschlag s auf zeichnerischem Wege. Es ist allerdings eine genaue und vergrößerte Zeichnung erforderlich, sonst wird die Geschwindigkeit und erst recht die Beschleunigung falsch. Man trägt den Ausschlag s über die Zeit auf, wobei zu beachten ist, daß bei einer Drehzahl n des Nockens gilt:

$$\left.\begin{aligned} 1\,\text{s} &\mathrel{\hat=} 6° \cdot n\,, \\ 10° &\mathrel{\hat=} \frac{10}{6 \cdot n}\,\text{s}\,. \end{aligned}\right\} n \text{ in } 1/\text{min}$$

Aus der Weg-Zeit-Kurve findet man nach Aufg. 7 und 8 durch graphische Differentiation die Geschwindigkeit. Aus einer Geschwindigkeits-Zeit-Kurve ergibt sich die Beschleunigung.

53. I. Beim **Rollnockentrieb** einer Dieselmaschine ist $R = 85$ mm, $s_0 = 35$ mm, $\beta_1 = 35°$. Die Winkelgeschwindigkeit des Nockens ist $\omega = 20{,}9$ rad/s.

a) ϱ und β_0 sind rechnerisch zu finden.

b) Die Weg-Zeit-Kurve ist aufzutragen, indem man aus einer recht großen Zeichnung den Rollenausschlag s sehr genau für je 5° ermittelt.

c) Aus der Weg-Zeit-Kurve ist nach Aufg. 7 u. f. die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve und die Beschleunigungs-Zeit-Kurve zu finden.

Anmerkung: In Bild 38 ist 1 cm der Abszisse $^1/_{480}$ s und 1 cm der Ordinate $^1/_4$ cm Ausschlag, somit tan 45° $\mathrel{\hat=}$ 120 cm/s oder 1,2 m/s. Die Punkte auf der Weg-Zeit-Kurve, bei denen $\tan\alpha = 0{,}1$, 0,2, 0,3 usw. wird, entsprechen Geschwindigkeiten von 0,12, 0,24, 0,36 m/s usw. Die Fläche unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve entspricht dem Ausschlag s_0.

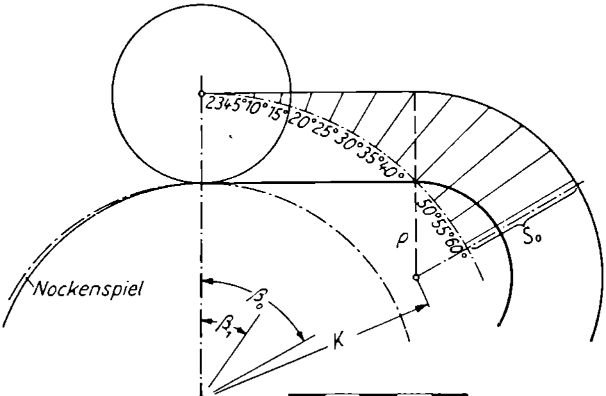


Bild 37

$$F = 168\,\text{cm}^2 \mathrel{\hat=} 168 \cdot \left(0{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{480}\,\text{s}\right) = 0{,}035\,\text{m} = 3{,}5\,\text{cm}\,.$$

Lösung: a) $\overline{OA} = \frac{R}{\cos\beta_1} = 103{,}9$ mm bei Punkt A (Bild 36)

$$k^2 = \varrho^2 + 103{,}9^2\,\mathrm{mm}^2 - 2\varrho \cdot 103{,}9\,\mathrm{mm} \cdot \cos\beta_1 \text{ (s. Bild 36).}$$

$$k + \varrho = R + s_0 = 120\,\mathrm{mm};\ \text{daraus } \varrho = 51{,}5\,\mathrm{mm},\ k = 69{,}5\,\mathrm{mm}.$$

$$k \cdot \sin(\beta_0 - \beta_1) = \varrho \cdot \sin\beta_1;\ \beta_0 = 60{,}6°.$$

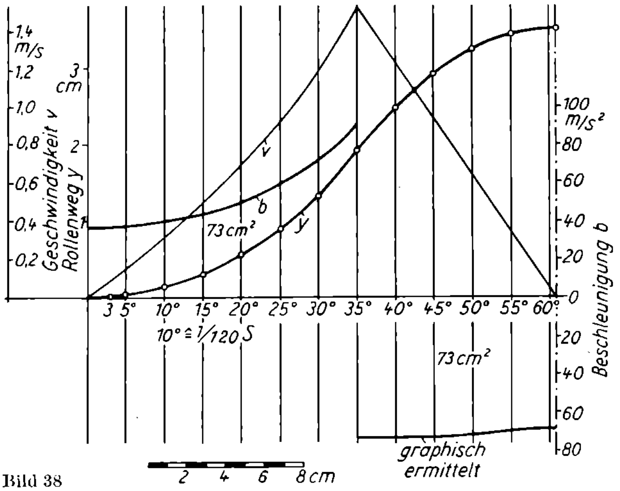


Bild 38

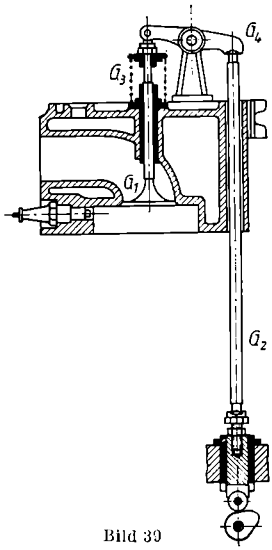


Bild 39

53. II. a) Wie groß muß die **Federkraft** mindestens am Anfang und am Ende der beschleunigten Bewegung in Aufg. 53. I sein, wenn das Ventilgewicht $G_1 = 5$ kp, das Gewicht der Stoßstange mit Rolle $G_2 = 7$ kp, das Gewicht der Feder $G_3 = 0{,}8$ kp und das auf Hebelende reduzierte Gewicht $G_4 = 1{,}2$ kp ist (Bild 39)?

b) Wie groß ist der größte Druck auf den Nocken infolge der Verzögerung bzw. der Beschleunigung der Massen?

Anleitung: Die Federmasse ist nur halb einzusetzen, das Hebelgewicht wird aufgehoben, aber nicht die Masse des Hebels. Bei der Frage b) ist die entsprechende Federkraft zu berücksichtigen.

Lösung: a) Läuft die Rolle vom Nocken ab, so muß die Feder die Beschleunigung erzeugen, so daß die Rolle fest auf dem Nocken bleibt.
Bei β_0 ist $b_1 = 72$ m/s², bei β_1 ist $b_2 = 69$ m/s².
Dementsprechend sind die nötigen Federkräfte, wenn die Summe der Massen $\sum m = 13{,}6$ kg ist (Federmasse halb)

$$P_1 = 13{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 72\,\mathrm{m/s^2} + 5\,\mathrm{kp} + 0{,}4\,\mathrm{kp} - 7\,\mathrm{kp} = 98{,}47\,\mathrm{kp};$$

$$P_2 = 13{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 69\,\mathrm{m/s^2} + 5\,\mathrm{kp} + 0{,}4\,\mathrm{kp} - 7\,\mathrm{kp} = 94{,}3\ \mathrm{kp}.$$

Die Feder wird nun so gewählt, daß sie bei $\beta_1 = 35°$ eine Kraft von 125 kp ausübt.

b) Wenn die Rolle nun umgekehrt auf den Nocken aufläuft, also nach außen geht, so ist die größte Beschleunigung bei $\beta_1 = 35°$, $b_3 = 90$ m/s². Die Federkraft ist infolge der Zusammendrückung der Feder wie gewählt 125 kp. Somit wird die Kraft, mit der die Rolle gegen die Nocken gepreßt wird,

$$P_3 = 125\,\text{kp} + 13{,}6\,\text{kg} \cdot 90\,\text{m/s}^2 + (7 - 5 - 0{,}4)\,\text{kp} = 251{,}7\,\text{kp}\,.$$

Wenn die Rolle 2,5 cm breit ist, ergibt sich eine Flächenpressung

$$p = 0{,}42 \sqrt{\frac{P}{b}\,E\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)}\,.$$

Mit $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ kp/cm², $b = 2{,}5$ cm, Rollenradius $r = 3{,}2$ cm und Nockenkrümmung $R = \infty$ bei β_1 ergibt sich

$$p = 3860\,\text{kp/cm}^2 \text{ (zulässig } 4000\,\text{kp/cm}^2\text{)}.$$

54. Bei dem **Nocken einer Fahrzeugmaschine** (Bild 40) ist $\beta_0 = 60°$, $\beta_1 = 30°$, Nockendurchmesser $D = 60$ mm, Rollendurchmesser $d = 26$ mm, Winkelgeschwindigkeit $\omega = 62{,}815$ rad/s, $s_0 = 14{,}5$ mm.
Gewicht des Tellers mit Stößel 500 p, Gewicht der Rolle mit Führung 700 p.

a) Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit; b) Federkräfte bei 30°, 45° und 60°, wenn die Feder so stark gewählt wird, daß zwischen Rolle und Nocken eine Anpreßkraft von mindestens 11 kp verbleibt; c) Druckkräfte auf den Nocken bei 60°, 30° und 0°.

Lösung:

β in °	0	15	30	30	45	60°
b in m/s²	170	200	327	— 196	— 218	— 226
mb in kp	20,8	24,5	40	— 24,0	— 26,7	— 27,6
G in kp	— 1,2	— 1,2	— 1,2	— 1,2	— 1,2	— 1,2
$P =$	19,6	23,3	38,8	— 25,2	— 27,9	— 28,8 kp

Es wird die Federkraft bei 60° zu 45 kp und bei 0° zu 30 kp gewählt. Es verhält sich dann:

$$\frac{45\,\text{kp}}{30\,\text{kp}} = \frac{x + s_0}{x} = \frac{x + 14{,}5\,\text{mm}}{x}\,; \quad \frac{14{,}5\,\text{mm}}{x} = \frac{45 - 30}{30} = \frac{1}{2}\,;$$

$$x = 29\,\text{mm}\,.$$

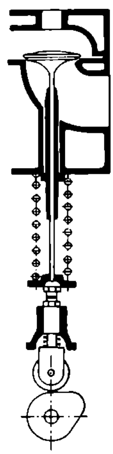


Bild 40

Zusammendrückung der Feder bei $\beta = 0$ ist $x = 29$ mm, bei 30° ist $s = 6{,}8$ mm und die Zusammendrückung 29 mm + 6,8 mm = 35,8 mm.

$$\text{Federkraft bei } 30° \quad P_f = \frac{35{,}8\,\text{mm}}{29\,\text{mm}} \cdot 30\,\text{kp} = 37{,}04\,\text{kp}$$

$\beta =$	0	30°	30°	60°
$P =$	19,6	38,8	— 25,2	— 28,8 kp
$P_f =$	30	37,04	37,04	45 kp
$P + P_f =$	49,6	75,84	11,84	16,2 kp

$P + P_f$ ist die Anpreßkraft zwischen Rolle und Nocken, die also mindestens 11,84 kp bleibt.

Beschleunigte Massen unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

55. Es sollen die **Fahreigenschaften eines Personenkraftwagens** in Abhängigkeit vom Roll- und Luftwiderstand bei verschiedener Geschwindigkeit untersucht werden.

I. Der **Rollwiderstand** P_{w_1} ist vom Gewicht des Wagens abhängig und fast unabhängig von der Geschwindigkeit.

Der Strömungswiderstand hängt vom größten Querschnitt F des angeströmten Körpers, von seiner Bauform, von der Dichte ϱ des strömenden Mediums und von der Geschwindigkeit ab. Die Bauform wird durch einen Faktor c_w berücksichtigt. Bei kleineren Geschwindigkeiten ist der Strömungswiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, bei hohen Geschwindigkeiten, die sich der Schallgeschwindigkeit nähern oder sie überschreiten, muß eine Korrektur von c_w vorgenommen werden. Für ein Geschoß z. B. wird c_w bei verschiedenen v:

$v =$	150	200	250	300	350 m/s
$c_w =$	0,1805	0,181	0,1885	0,2360	0,481
$v =$	400	500	600	700	800 m/s
$c_w =$	0,572	0,606	0,584	0,552	0,531
$v =$	900	1000	1100	1200	1300 m/s
$c_w =$	0,509	0,503	0,495	0,493	0,492

Man erkennt, daß von 250 m/s an ein starkes Steigen des Widerstandes einsetzt, bis bei 500 m/s er wieder etwas zu fallen beginnt und einem Festwert zustrebt. Bis zu einer Geschwindigkeit von 250 m/s kann somit mit einem konstanten c_w gerechnet werden, was bei allen Wasser- und Landfahrzeugen der Fall ist. Bei sehr hohen Geschwindigkeiten, wie sie die Düsenjäger entwickeln, kann wieder mit einem konstanten c_w von 0,5 gerechnet werden.

Luftwiderstand ist

$$P_w = c_w \cdot F \cdot \varrho \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Formziffer c_w bei Geschwindigkeiten bis 250 m/s.

Kreisförmige Platte		1,11
quadratische Platte		1,11
Zylinder, senkrechte Achse angeströmt		
	$l/d = 1$	0,63
	$l/d = 5$	0,74
	$l/d = 10$	0,82
Beste Stromlinienform		0,06

Weitere Werte siehe Taschenbücher.

56. Bei einem PKW beträgt die Masse $m = 1250$ kg, der größte Querschnitt $F = 2$ m^2, die Radleistung 24 PS, die Dichte der Luft $\varrho = 1{,}3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, der Rollwiderstand $P_{w_1} = 25$ kp, $c_w = 0{,}40$.

a) Leistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

b) Maximale Geschwindigkeit.

c) Antriebskraft P bei konstanter Höchstgeschwindigkeit.

d) In welcher Zeit erreicht der Wagen eine Geschwindigkeit von 10 m/s, wenn die Antriebskraft P gleich der unter c) und konstant ist? Dies ist praktisch nicht der Fall, da durch Umschalten zunächst P größer ist.

e) Wie groß ist der Anfahrweg bis zur Erreichung von $v = 20$ m/s?

Lösung: a) $N = (P_{w_1} + P_{w_2} + mb)\,v;\quad P_{w_2} = c_w \cdot F \cdot \varrho \frac{v^2}{2} = 0{,}053\ \text{kg/m}\ v^2$

$$N = 25\,v + 0{,}053\,v^3 + \frac{m\,b\,v}{9{,}81};\qquad \frac{N}{\text{kpm/s}}\ \Big|\ \frac{v}{\text{m/s}}\ \Big|\ \frac{m}{\text{kg}}\ \Big|\ \frac{b}{\text{m/s}^2}\ \Big|\ *$$

b) $b = 0;\ 1800 = 25\,v + 0{,}053\,v^3;\ v = 27{,}6.$

c) $P = P_{w_1} + P_{w_2} = 25\ \text{kp} + 40{,}4\ \text{kp} = 65{,}4\ \text{kp}.$

d) $P - P_{w_1} - P_{w_2} = mb = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$$\mathrm{d}t = \frac{\frac{m}{9{,}81}\cdot \mathrm{d}v}{P - P_{w_1} - c_w \cdot F \cdot \varrho \cdot \frac{v^2}{2\cdot 9{,}81}} = 2400\,\frac{\mathrm{d}v}{762 - v^2};\qquad \frac{t}{\text{s}}\ \Big|\ \frac{v}{\text{m/s}}\ \Big|\ \frac{P}{\text{kp}}\ \Big|\ \frac{F}{\text{m}^2}\ \Big|\ \frac{\varrho}{\text{kg/m}^3}\ \Big|\ *$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v}\Bigg|_{v=0}^{v=20}$$

$$t = \frac{2400}{2\cdot 27{,}6}\left[\ln\frac{27{,}6+20}{27{,}6-20} - \ln\frac{27{,}6}{27{,}6}\right] = 43{,}5\,[\ln 6{,}27 - 0]$$

$t = 79{,}7$

bis $v = 10,\quad t = 33.$

e) $\int (P - P_{w_1} - P_{w_2})\,\mathrm{d}s = {}^1/_2\,m v^2.$

$$\mathrm{d}s = \frac{\frac{m}{2\cdot 9{,}81}\,d\,(v^2)}{40{,}4 - 0{,}053\,(v^2)};\qquad \frac{s}{\text{m}}\ \Big|\ \frac{P}{\text{kp}}\ \Big|\ \frac{m}{\text{kg}}\ \Big|\ \frac{v}{\text{m/s}}\ \Big|\ *\qquad y = v^2;\quad v = 20$$

$$\mathrm{d}s = \frac{0{,}5\cdot 127{,}5}{0{,}053}\,\frac{\mathrm{d}y}{762 - y};\quad s = -1200\,[\ln(762 - 400) - \ln 762]$$

$\underline{\underline{s = 893}}$.

$v = 10;\quad s = 1200\,[\ln 762 - \ln 662] = 168.$

57. Welche **Höchstgeschwindigkeit** kann der **Personenwagen** der vorhergehenden Aufgabe beim Bergauffahren auf einer Bahn mit einer Neigung 1 : 50 erreichen?

Anleitung: Es kommt jetzt noch die Leistung des Gewichthebens hinzu, die mit einer Geschwindigkeit $\approx {}^1/_{50}\, v$ erfolgt.

Also $N = N_r + N_2 + N_g$; Radleistung $N_R = 21$ PS.

Anm.: Ist die Steigung größer, so muß mit einer genaueren Gleichung gerechnet werden.

58. Bei dem Wagen der Aufgabe 56 soll jetzt durch Schalten die Leistung konstant gehalten werden, wobei die Antriebskraft sich ändert.

a) Die Zeit bis zur Erreichung einer Geschwindigkeit von 20 m/s ist durch graphische Integration zu finden.

b) Der Weg bis zur Erreichung von 20 m/s.

Anleitung:

a) Antriebskraft $P = \dfrac{N}{v}$; $\quad N = 1800\,\text{kpm/s}$

$$\frac{N}{v} - P_{w_1} - 0{,}053\, v^2 = \frac{m}{9{,}81}\,\frac{dv}{dt} \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c} t & N & P & v & m \\ \hline \text{s} & \text{kpm/s} & \text{kp} & \text{m/s} & \text{kg} \end{array}$$

$$t = \int dt = \frac{m}{9{,}81}\int \frac{dv}{\dfrac{1800}{v} - 25 - 0{,}053\, v^2}$$

Man trägt den Wert $y = \dfrac{1}{\dfrac{1800}{v} - 25 - 0{,}053\, v^2}$ in Abhängigkeit von v von 0 bis $v = 20$ auf, ermittelt die Fläche unter der Kurve und rechnet auf t um.

b) $$\left(\frac{1800}{v} - P_{w_1} - 0{,}053\, v^2\right)\cdot ds = {}^1/_2\,\frac{m}{9{,}81}\, d(v^2) \qquad \begin{array}{c|c|c|c} s & v & P & m \\ \hline \text{m} & \text{m/s} & \text{kp} & \text{kg} \end{array}$$

$$s = \int ds = 0{,}5\,\frac{m}{9{,}81}\int \frac{d(v^2)}{\dfrac{1800}{v} - P_{w_1} - 0{,}053\, v^2}.$$

Man zeichnet jetzt $y = \dfrac{1}{\dfrac{1800}{v} - P_{w_1} - 0{,}053\, v^2}$ über v^2 auf. Die Fläche unter der Kurve ist dann das Integral.

59. I. Ein **Personenkraftwagen** hat ein Gewicht von 1620 kp, eine Motorleistung von 46 PS, einen Getriebewirkungsgrad von 0,85. Die Rollwiderstandszahl ist 0,018, die Luftwiderstandszahl 0,7, die Luftdichte 1,27 kg/m³, die Projektion der Stirnfläche beträgt 2,65 m².

a) Welche Höchstgeschwindigkeit kann der Wagen auf ebener Bahn erreichen?

b) In welcher Zeit kommt der auf ebener Bahn mit einer Geschwindigkeit von 22,5 m/s fahrende Wagen bei abgestelltem Motor zum Stehen, wenn an den Rädern im ganzen ein Bremsmoment von 187,8 kpm ausgeübt wird und der Durchmesser eines Wagenrades 750 mm ist?

Anleitung zu b):

Auf die Bahn bezogene Bremskraft $\frac{M}{r} = \frac{187{,}8\,\text{kpm}}{0{,}375\,\text{m}} = 500{,}8\,\text{kp}$.

Verzögerungskraft $P = P_{w_1} + P_{w_2} + \frac{M}{r}$.

Verzögerung $\quad -b = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{m}$

$$t = \int \mathrm{d}t = -\frac{m}{9{,}81}\int \frac{\mathrm{d}v}{P} =$$

$$= -\frac{m}{9{,}81}\int \frac{\mathrm{d}v}{P_{w_1} + \frac{M}{r} + 0{,}118\,v^2};$$

t	m	v	P	M	r *
s	kg	m/s	kp	kpm	m

Diese Gleichung ist rechnerisch leicht zu lösen. Man setzt $k^2 = \frac{P_{w_1} + \frac{M}{r}}{0{,}118}$ und $y = \frac{v}{k}$, $\mathrm{d}v = k\,\mathrm{d}y$,

dann ist $t = -\frac{m}{9{,}81}\cdot\frac{k}{P_{w_1} + \frac{M}{r}}\cdot\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$; $\quad t = -\frac{m}{9{,}81}\cdot\frac{k}{P_{w_1} + \frac{M}{r}}\,\mathrm{Arc\,tan}\,\frac{v}{k} + C$.

Die Konstante C findet man, indem man bei der Geschwindigkeit $v_0 = 22{,}5$, $t = 0$ setzt.

Lösung: a) 26,35 m/s.

b) für $t = 0 \quad C = 6{,}75$;

für $v = 0 \quad t = C = 6{,}75$.

$$P = 29{,}2 + 0{,}118\,v^2 + 500{,}8\,.$$

$$t = -20{,}9\,\mathrm{Arc\,tan}\,\frac{v}{67{,}1} + C\,.$$

59. II. a) Welche Geschwindigkeit erreicht der Wagen in Aufg. 59 I, wenn kein Luftwiderstand vorhanden wäre?

b) Wie groß ist die Verzögerung dann bei abgestelltem Motor?

c) In welcher Zeit kommt der Wagen zum Stehen, wenn seine Geschwindigkeit zuerst 22,5 m/s beträgt?

59. III. Welchen Weg legt das Auto unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes zurück, ehe es zum Stehen kommt?

Anleitung:

$$t = -k_2\cdot\mathrm{Arc\,tan}\,\frac{v}{k_1} + C_1\,.$$

$$v = k_1\cdot\tan\frac{C_1 - t}{k_2} = k_1\cdot\tan z\,.$$

$$s = \int v\,\mathrm{d}t = -k_1 k_2\int\tan z\,\mathrm{d}z\,.$$

$$s = k_1 k_2 \ln\left(\cos\frac{C_1 - t}{k_2}\right) + C_2\,.$$

*(Zahlenwertgleichungen! Einheiten wie oben; s in m)

Lösung:

$$k_1 = \sqrt{\frac{P_{w_1} + \frac{M}{r}}{0{,}118}} = \sqrt{\frac{530}{0{,}118}} = 67{,}1\,.$$

$$k_2 = \frac{m}{9{,}81}\,\frac{k_1}{P_{w_1} + \frac{M}{r}} = \frac{1620}{9{,}81}\cdot\frac{67{,}1}{530} = 20{,}9\,;$$

für $s = 0$, $t = 0$ ist $C_2 = -k_1\,k_2\,2{,}303 \cdot \lg\cos\frac{C_1}{k_2} =$
$= +\,77{,}4\,.$

für $t = C_1 = 6{,}75$ ist $s = C_2 = 77{,}4\,.$

60. Für 3 Personenkraftwagen verschiedener Konstruktion wird bei einer Geschwindigkeit von 110 km/h im Windkanal der Windwiderstand P_{w_2} festgestellt: 1. alte Form 66,1 kp, 2. neue Form 39,2 kp, 3. neueste Form mit gebogenen Scheiben 18 kp. Der Leistungsbedarf bei Fahrt auf glatter ebener Bahn beträgt bei 110 km/h 36, 24 und 16 PS.

a) Wie groß ist die Widerstandsziffer c_w bei einer Dichte $\varrho = 1{,}23$ kg/m³ und einem Querschnitt von 1,8 m² bei allen Wagen?

b) Wie groß sind Wind- und Rolleistung und der Rollwiderstand?

c) Wie groß wird die Gesamtleistung bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h, wenn angenommen wird, daß der Rollwiderstand P_{w_1} konstant ist?

MASSENKRÄFTE BEI GLEICHFÖRMIGER DREHBEWEGUNG

Fliehkraftaufgaben ohne Festigkeitsrechnungen

61. a) Was versteht man unter **Zentripetalkraft** und **Zentrifugalkraft** einer auf waagerechter Kreisbahn bewegten Masse? **b)** Wie groß sind diese Kräfte?

Lösung: a) Die **Zentripetalkraft** ist die radial zum Kreismittelpunkte hin gerichtete Kraft, die den kreisenden Körper von der geradlinigen Tangentialbahn, der er wegen seiner Massenträgheit zu folgen sucht, dauernd ablenkt und auf die Kreisbahn zwingt (Bild 41). Sie kann z. B. durch die Spannkraft eines Fadens ausgeübt werden, der den Körper auf der Kreisbahn hält.

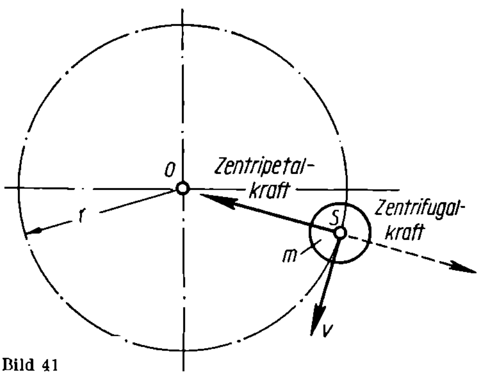


Bild 41

Die **Zentrifugalkraft** oder **Fliehkraft** ist der radial nach außen gerichtete Trägheitswiderstand, mit dem die kreisende Masse den ihrer Bewegung fortwährend aufgezwungenen Richtungsänderungen widerstrebt (Bild 41). Nur scheinbar strebt der Körper mit einer „Fliehkraft" radial nach außen. Viel-mehr verläßt er die Kreisbahn in tangentialer Richtung, sobald die Zentripetalkraft aufhört, ihn auf der Kreisbahn zu halten. Zum Beispiel fliegen die Funken einer kreisenden Schmirgelscheibe in tangentialer Richtung ab.

b) Zentripetalkraft = Zentrifugalkraft = **Fliehkraft** $\boldsymbol{P_z = \frac{m\,v^2}{r}}$. Hierbei bedeuten m die kreisende Masse, r den Radius der Kreisbahn ihres Schwerpunkts, v die Umfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts.

$$\text{Setzt man } v = r\omega, \text{ so wird } P_z = \frac{m\,(r\,\omega)^2}{r} = \boldsymbol{m\,r\,\omega^2}$$

62. a) Wie groß wird die durch die Achsendrehung der Erde erzeugte Fliehkraft eines Körpers am Äquator im Verhältnis zu seinem Gewicht? Der Erdradius beträgt 6377 km.

Lösung: Umfangsgeschwindigkeit der Erde am Äquator

$$v = \frac{2\,\pi \cdot 6\,377\,000\ \text{m}}{24 \cdot 3600\ \text{s}} = 464\ \text{m/s}\,,$$

$$\frac{P_z}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} = \frac{464^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{6\,377\,000\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx \frac{1}{290}\,.$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit müßte ein **Raketenschiff** in einer Höhe von 100 km die Erde umkreisen, damit die Erdanziehung aufgehoben wird?

Lösung: $\frac{g}{g_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \left(\frac{6377\ \text{km}}{6477\ \text{km}}\right)^2; \quad g = 9{,}509\ \text{m/s}^2\,,$

$$v^2 = rg; \quad v = 7848\ \text{m/s}\,.$$

c) Mit welcher Geschwindigkeit müßte eine Rakete senkrecht zur Erdoberfläche abgeschossen werden, um die Erdanziehung vollständig zu überwinden ohne Berücksichtigung der noch viel weiter reichenden Sonnenanziehung?

Lösung: $\frac{1}{2}mv^2 = \int_{r_0}^{\infty} mg\,\mathrm{d}r = mg_0 r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$

$$v = \sqrt{2\,g_0 r_0} = 11\,200\ \text{m/s}\,.$$

63. Ein 5 kp schwerer Körper wird an einem Faden um eine waagerechte Achse in senkrechter Ebene auf einer Kreisbahn von 0,9 m Halbmesser mit 40 U/min herumgeschwungen. **a)** Wie groß ist die Fadenspannkraft, wenn sich der Körper in der tiefsten Stellung, **b)** in der höchsten Stellung, **c)** in der waagerechten Mittelebene befindet? **d)** Wie groß muß die Drehzahl mindestens gehalten werden, damit der Körper nicht vom höchsten Punkte der Bahn herabfällt?

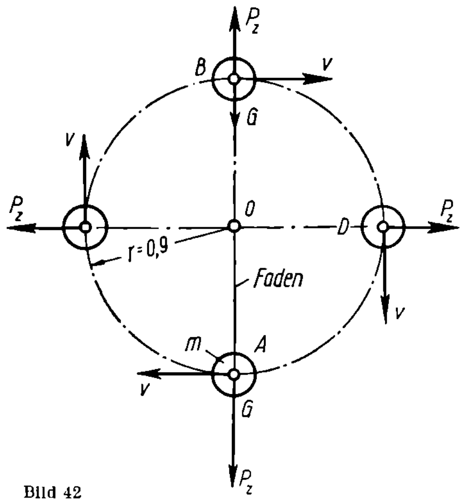


Bild 42

Lösung: Fliehkraft $P_z = \frac{mv^2}{r} = 5\ \text{kg} \cdot \frac{3{,}77^2 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{0{,}9\ \text{m}} = 79\,\text{N} = 8{,}05\ \text{kp}\,.$

a) Bei tiefster Stellung A wird die Fadenspannkraft

$$S = P_z + mg = 128\ \text{N} = 13{,}05\ \text{kp}\,.$$

b) Bei höchster Stellung B $\quad S = P_z - mg = 30\ \text{N} = 3{,}06\ \text{kp}\,.$

c) In waagerechter Stellung D $\quad S = P_z = 79\ \text{N} = 8{,}05\ \text{kp}.$

d) In B muß $P_z \geqq mg$ sein, damit der Faden Spannung behält.

Also $\frac{mv^2}{r} \geqq mg$; $\quad v^2 \geqq gr = 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}9\ \text{m}$

$v = 2{,}97\ \text{m/s}$, entsprechend $n \geqq 31{,}5\ \text{U/min}$.

64. Mit wieviel U/min muß ein mit Wasser gefülltes **Gefäß** um eine waagerechte Achse auf senkrechter Kreisbahn (Bild 43) herumgeschwungen werden, ohne daß Wasser ausfließt, wenn der tiefste Punkt des Wassers 70 cm von der Drehachse entfernt liegt?

65. Ein **Gewichtsstück**, auf einer Platte frei stehend (Bild 44), wird um die waagerechte Achse O herumgeschwungen, so daß sein Schwerpunkt einen Kreis von 120 cm Halbmesser beschreibt. Wie hoch muß die minutliche Drehzahl mindestens gehalten werden, damit der Körper im höchsten Punkte seiner Kreisbahn nicht herabfällt?

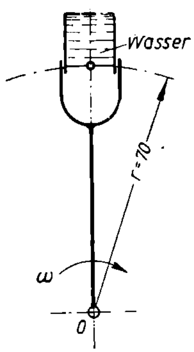


Bild 43
(Zu Aufgabe 64)

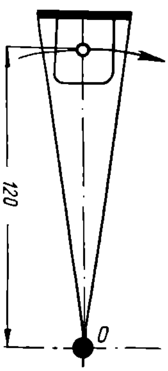


Bild 44
(Zu Aufgabe 65)

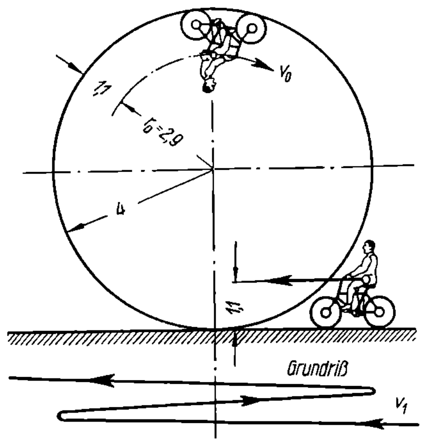


Bild 45

66. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein **Radfahrer** in eine in senkrechter Ebene liegende Schraubenschleife von 4 m Krümmungshalbmesser einfahren (Bild 45), um sie ungefährdet durchlaufen zu können (Zirkuskunststück!)? Der Gesamtschwerpunkt von Rad und Mann liegt 1,1 m über Erdboden.

Lösung: In höchster Stellung muß $P_z \geqq mg$ sein (Aufg. 63). Also Grenzfall $\frac{m v_0^2}{r_0} = mg.$

Daraus

$$\text{Schwerpunktgeschwindigkeit } v_0 = \sqrt{g r_0} = \sqrt{9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}9 \text{ m}} = 5{,}33 \text{ m/s}\,.$$

In der Schleife hebt sich der Schwerpunkt um $h = 2 \cdot 2{,}9\,\text{m} = 5{,}8$ m. Zum Heben ist die Arbeit mg aufzuwenden. Damit der Fahrer in höchster Stellung noch die Geschwindigkeit v_0, also das Arbeitsvermögen $\frac{m v_0^2}{2}$ besitzt, muß er ein größeres Arbeitsvermögen $\frac{m v_1^2}{2}$ beim Einfahren in die Schleife mitbringen, so daß $\frac{m v_1^2}{2} - mg = \frac{m v_0^2}{2}$. Dabei ist angenommen, daß der Mann während des Durchlaufens der Schleife nicht selbst Arbeit durch Treten leistet. Die Gleichung ergibt Einfahrgeschwindigkeit $v_1 \geqq 12$ m/s.

67. Ein 2000 kg schweres Schwungrad ist nach Bild 46 auf eine Welle aufgekeilt. Der Schwerpunkt des Schwungrades liegt wegen ungleicher Massenverteilung um $e = 1$ mm außerhalb der Drehachse. Die Durchbiegung einer Welle durch eine Kraft ist nach der Biegelehre $f = \frac{P a^2 b^2}{3 E J \cdot l}$. Gegeben ferner Wellendurchmesser $d = 100$ mm, $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ kp/cm², Drehzahl $n = 300$ U/min. Es ist die Durchbiegung infolge Zentrifugalkraft und Gewichts zu errechnen, wenn der Schwerpunkt der Schwungradmasse **a)** unter der Drehachse; **b)** über der Drehachse liegt. **c)** Größte Zentrifugalkraft, wenn der Schwerpunkt unter und **d)** kleinste Zentrifugalkraft, wenn der Schwerpunkt über der Drehachse liegt. **e)** Größte und kleinste Biegespannung. **f)** Zwischen welchen Grenzwerten sind die Lagerkräfte A und B veränderlich?

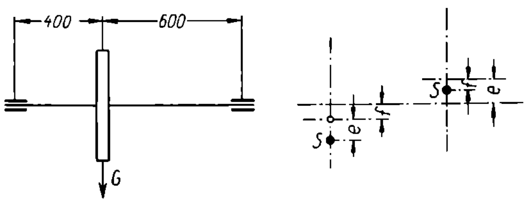


Bild 46

Lösung: **a)** $f_1 = \frac{P a^2 \cdot b^2}{3 E J \cdot l}$; $a = 40\,\text{cm}$, $b = 60$ cm, $J = \frac{\pi}{64} d^4$

$$P = G + P_z = G + m(e + f_1)\,\omega^2$$

$$f_1 \cdot \frac{3 E J \cdot l}{a^2 \cdot b^2} = G + m e \omega^2 + m f_1 \omega^2$$

$$f_1 \left(\frac{3 E J l}{a^2 \cdot b^2} - m \omega^2\right) = G + m \omega^2 e$$

$$f_1 = 0{,}0405 \text{ cm}\,.$$

b) $f_2 \left(\frac{3 E J l}{a^2 \cdot b^2} - m \omega^2\right) = G - m \omega^2 e\,,\; f_2 = 0{,}0332$ cm.

c) $P_{z_1} = m(e + f_1)\,\omega^2 = 282$ kp.

d) $P_{z_2} = m(e - f_2)\,\omega^2 = 134\,\text{kp}$.

e) $M_{b_1} = (G + P_{z_1})\,\frac{ab}{l} = 54\,800\,\text{kpcm}; \quad \sigma_{b_1} = 558\,\text{kp/cm}^2$,

$M_{b_2} = (G - P_{z_2})\,\frac{ab}{l} = 44\,600\,\text{kpcm}; \quad \sigma_{b_2} = 453\,\text{kp/cm}^2$.

f) $A_1 \cdot l = (G + P_{z_1}) \cdot b; \quad A_1 = 1370\,\text{kp}; \quad B_1 = 912\,\text{kp}$,

$A_2 \cdot l = (G - P_{z_2}) \cdot b; \quad A_2 = 1120\,\text{kp}; \quad B_2 = 746\,\text{kp}$.

Liegt e waagerecht, so ist

$$f_3\left(\frac{3EJl}{a^2b^2} - m\omega^2\right) = me\omega^2,\ f_3 = 0{,}0037\,\text{cm}.$$

Man konstruiere den Weg des Schwerpunktes.

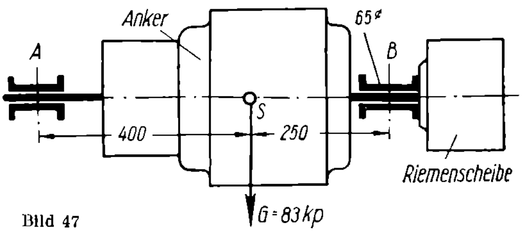


Bild 47

68. Der skizzierte Rotor eines **Elektromotors** wiegt mit Welle und Riemenscheibe 83 kp. Sein Gesamtschwerpunkt S hat die angegebene Lage. $n = 1140$ U/min; $e = 1/2$ mm; Wellendurchmesser 65 mm; $E = 2{,}2 \cdot 10^6 \cdot \text{kp/cm}^2$.

a) Welche Fliehkraft übt der Läufer aus?

b) Zwischen welchen höchsten und niedrigsten Werten schwanken daher die Lagerbelastungen A und B?

69. Ein **Radfahrer** durchfährt eine Kurve von 7 m Krümmungshalbmesser mit einer Geschwindigkeit 5 m/s. Das Gewicht des Mannes samt Rad beträgt 80 kp. **a)** Wie groß ist die Fliehkraft? **b)** Unter welchem Winkel α gegen die Lotrechte (Bild 48) muß der Fahrer sich mit dem Rade zur Seite neigen, um nicht nach der Außenseite der Kurve umzufallen? **c)** Welche resultierende Druckkraft übt das Rad auf den Boden aus? **d)** Wie groß muß die Reibungszahl zwischen Rad und Erdboden mindestens sein, damit das Rad nicht seitlich ausgleitet? **e)** Wie ändert sich der Reibungswinkel α mit dem Gewichte des Fahrers?

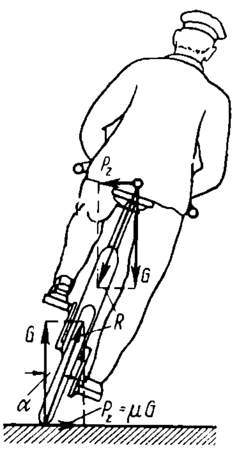


Bild 48

Lösung: a) $P_z = \frac{mv^2}{r} = 80\,\text{kg} \cdot \frac{5^2\,\text{m}^2/\text{s}^2}{7\,\text{m}} = 286\,\text{N} = 29{,}1\,\text{kp}$.

b) Die Mittelkraft aus Gewicht und Fliehkraft muß durch den Stützpunkt des Rades auf den Boden gehen. Also

$$\tan\alpha = \frac{P_z}{G} = \frac{29{,}1\,\text{kp}}{80\,\text{kp}} = 0{,}364; \quad \alpha = 20°.$$

c) $R = \sqrt{G^2 + P_z^2} = 85{,}1\,\text{kp}$.

d) $P_z = \mu G; \quad \mu = P_z : G = 0{,}364$.

e) P_z und G sind beide proportional der Masse m. Daher ergibt ihr Verhältnis $P_z : G = \tan \alpha$ immer denselben Wert. Also bleibt α für leichte und schwere Fahrer gleich groß.

70. Der Wagen einer **Schwebebahn** von 3200 kg hängt frei an der obenliegenden Fahrschiene (Bild 49). **a)** Wie groß ist die Fliehkraft des Wagens, wenn er eine Kurve von 50 m Krümmungshalbmesser mit einer Geschwindigkeit 40 km/h durchfährt? **b)** Unter welchem Winkel α gegen die Lotrechte stellt sich dabei die Wagenachse ein? **c)** Welche resultierende Belastung erhält die Fahrschiene? **d)** Wie ändert sich der Ausschlagwinkel mit dem Wagengewicht?

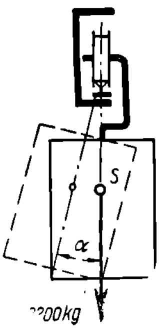


Bild 49

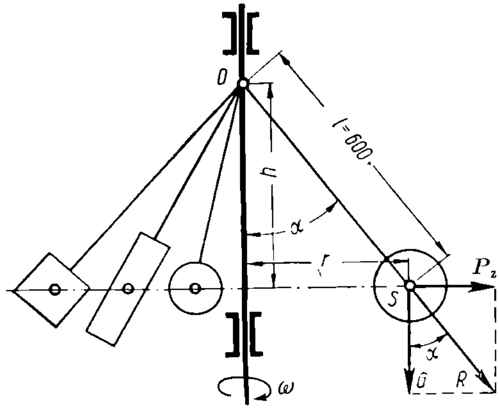


Bild 50

71. Eine Kugel ist nach Bild 50 an einer 600 mm langen Pendelstange OS befestigt und kreist um die senkrechte Drehachse mit 45 U/min (sog. **Fliehkraftpendel** oder **Kegelpendel**). **a)** Unter welchem Winkel α gegen die Drehachse stellt sich die Pendelstange ein (das Eigengewicht der Stange werde vernachlässigt)? **b)** Welchen Einfluß hat das Kugelgewicht $G = mg$ auf den Winkel α? **c)** Wie groß ist die „Pendelhöhe" h, d. h. der Höhenunterschied zwischen Kugelschwerpunkt und Aufhängungspunkt? **d)** Welchen Einfluß hat die Stangenlänge l auf die Pendelhöhe h?

Lösung: a) Die Pendelstange stellt sich in die Richtung der Mittelkraft R aus G und P_z ein (Bild 50). Also

$$\tan \alpha = \frac{P_z}{G} = \frac{m r \omega^2}{m g} = \frac{r \omega^2}{g} = \frac{l \sin \alpha \, \omega^2}{g} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{l \omega^2} = \frac{9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot 0{,}6 \text{ m} \cdot 4{,}712^2} = 0{,}735; \quad \alpha = 42° \, 40'.$$

b) Das Kugelgewicht G kommt in der Gleichung $\cos \alpha = g : l\omega^2$ nicht vor, ist also ohne Einfluß auf α, d. h., kleine Massen liefern denselben Ausschlagwinkel wie große. Die beiden Kräfte P_z und G sind proportional der Masse m, so daß ihr Verhältnis $P_z : G = \tan \alpha$, also auch α von der Masse unabhängig ist.

c) $h = l \cos \alpha = l \cdot \dfrac{g}{l \omega^2} = \dfrac{g}{\omega^2} = 0{,}441 \text{ m}.$

d) h ist nach der letzten Gleichung nur abhängig von ω. Alle mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω kreisenden Massen haben denselben Wert h, d. h., sie stellen sich in gleicher Höhe ein (linke Seite des Bildes 50). Da weder l noch G in der Gleichung von h erscheinen, ist sowohl die Stangenlänge als auch die Masse ohne Einfluß auf h.

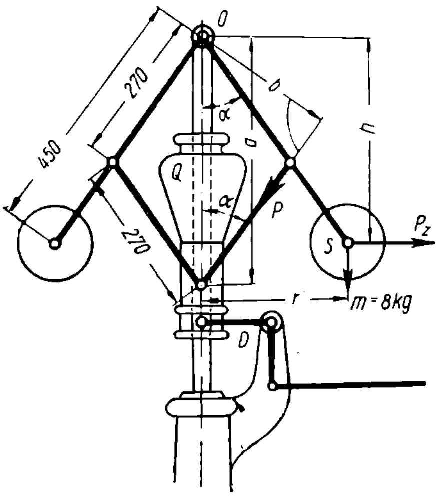


Bild 51

72 A. Ein **Wattscher Fliehkraftregler** (Zentrifugalregulator) von den gegebenen Maßen hat zwei Schwungkugeln von je 8 kp Gewicht. Die Aufhängungsstangen OS tragen mittels der Stangen P eine 23 kp schwere Belastungsmuffe Q. Bei zunehmender Drehzahl der zu regelnden Kraftmaschine wird die an der senkrechten Drehachse gleitend geführte Muffe durch die weiter ausschwingenden Kugeln gehoben. Das an der Muffe bei D angreifende Gestänge stellt dann die Steuerung der Maschine auf geringere Leistung ein, so daß die Drehzahl wieder auf die normale Größe zurückgeht. Unter Vernachlässigung der Stangengewichte soll für einen Ausschlagwinkel $\alpha = 25°$, $30°$ und $35°$ berechnet werden **a)** die Zugkraft in den Stangen P beim Heben der Muffe; **b)** die erforderliche Fliehkraft einer Kugel; **c)** die erforderliche Drehzahl des Reglers.

Anleitung: $P = \dfrac{Q}{2\cos\alpha}$; $\quad a = 2 \cdot 27\text{ cm} \cdot \cos\alpha$ usw. $Gr - P_z h + Pb = 0$.

72 B. Bei dem Regulator der Aufg. A soll an die Stelle der Belastungsmuffe Q eine Feder treten. Bei $\alpha = 35°$ sollen die Verhältnisse bleiben, und die Federkraft ist 23 kp. Federkonstante $k = 1$ kp/cm, d. h., je 1 kp Belastung wird die Feder um 1 cm zusammengedrückt.

Bei $35°$ $F_1 = k \cdot \delta_1 = 23$ kp; gesamte Zusammendrückung $\delta_1 = 23$ cm.

Bei $25°$ $\delta_2 = \delta_1 - (a_2 - a_1) = 23\text{ cm} - (48{,}9\text{ cm} - 44{,}2\text{ cm}) = 18{,}3\text{ cm}$; $F_2 = k \cdot \delta_2 = 18{,}3$ kp.

Wie groß wird jetzt die Drehzahl bei 25°?

73. Bei einem **Porterschen Fliehkraftregler** sind die beiden je 13 kp schweren Schwungkugeln an Pendelstangen von 370 mm Länge nach Bild 52 befestigt. Bei 112 U/min schlagen die Pendelstangen um einen Winkel 38° gegen die Senkrechte aus. Gesucht wird **a)** die Fliehkraft einer Kugel; **b)** die durch die Kugeln in den Stangen P erzeugten Zugkräfte; **c)** das erforderliche Gewicht der an der senkrechten Drehachse gleitend geführten Belastungsmuffe Q unter Vernachlässigung der Stangengewichte.

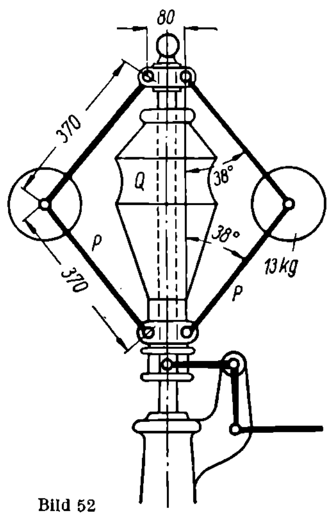


Bild 52

74. Eine **Lokomotive** von 56 Mp Gewicht durchfährt auf einem Bahnhof eine Weichenkurve von 180 m Krümmungshalbmesser mit einer Geschwindigkeit 19 m/s. Ihr Schwerpunkt liegt 1,3 m über Schienenoberkante (Bild 53). Die beiden Schienen haben gleiche Höhenlage in waagerechter Ebene. Wie groß ist **a)** die Fliehkraft? **b)** die senkrechten Schienenbelastungen A und B, wenn der Abstand der Schienenstützpunkte gleich der Spurweite 1435 mm angenommen wird? **c)** die im Schwerpunkte S der Maschine angreifende Mittelkraft R (Bild 53)? **d)** die resultierende Belastung der äußeren Schiene A (Bild 53)? **e)** Bei welcher Fahrgeschwindigkeit würde die Lokomotive durch die Fliehkraft seitlich aus dem Gleise geworfen werden? **f)** Welche Lage nimmt in letzterem Falle die Mittelkraft R an?

Lösung: **a)** 11450 kp = 112325 N

b) Statische Momente für Drehpunkt Schiene A:

$$+11450\,\text{kp}\cdot 1{,}3\,\text{m} -$$
$$-56000\,\text{kp}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}435\,\text{m} + B\cdot 1{,}435\,\text{m} = 0$$

$B = 17{,}6$ Mp.

Ähnlich für Drehpunkt B: $A = 38{,}4$ Mp.

Auf gerader Strecke wird $A = B = 28$ Mp.

c) $R = \sqrt{56^2\,\text{Mp}^2 + 11{,}45^2\,\text{Mp}^2} = 57{,}2$ Mp.

d) $A_{res} = \sqrt{38{,}4^2\,\text{Mp}^2 + 11{,}45^2\,\text{Mp}^2} = 40{,}1$ Mp.

e) Beim Umstürzen wird Schienendruckkraft $B = 0$.

Statische Momente für Kippkante A:

$$P_z\cdot 1{,}3\,\text{m} = 56000\,\text{kp}\,\frac{1}{2}\cdot 1{,}435\,\text{m}\,.$$

Daraus $P_z = 30900\,\text{kp} = \dfrac{m\,v_x^2}{r}$:

$$v_x = 31{,}2\,\text{m/s}.$$

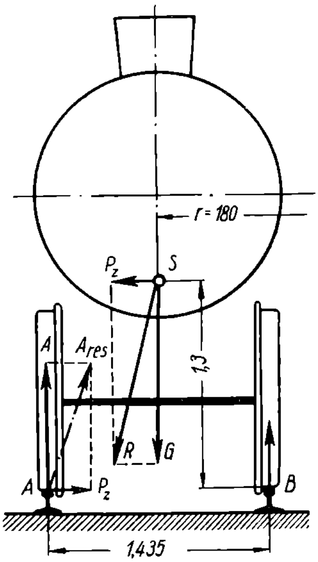


Bild 53

f) Die Mittelkraft R, welche in Bild 53 die Gleisebene rechts von A durchschneidet, also ein standsicheres Moment ergibt, geht im Grenzfall e) durch die Schiene A. Bei noch weiter erhöhter Fahrgeschwindigkeit fällt R links von A, d. h. außerhalb des Gleises, und bewirkt Umstürzen der Lokomotive um die Kippkante A.

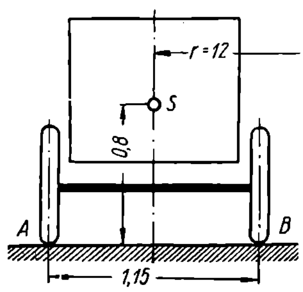


Bild 54

75. Ein 700 kp schweres **Auto**, dessen Schwerpunkt 800 mm über dem Erdboden liegt, durchfährt eine Kurve von 12 m Krümmungshalbmesser mit einer Geschwindigkeit 6 m/s. Die Spurweite der Räder beträgt 1,15 m (Bild 54). Alle Räder nehmen durch Reibung an der Aufnahme der Zentrifugalkraft teil. Gesucht wird **a)** die Fliehkraft; **b)** die senkrechten Raddruckkräfte A an der Außenseite und B an der Innenseite der Kurve; **c)** die resultierende Belastung der Räder A an der Außenseite; **d)** die Mindestgröße der Reibungszahl zwischen Rädern und Erdboden, welche erforderlich ist, damit das Auto beim Durchfahren der Kurve nicht zur Seite gleitet (ähnlich Aufg. 69d); **e)** die Fahrgeschwindigkeit, bei der seitliches Umkippen des Autos zu befürchten ist.

76. Ein **Eisenbahnwagen**, dessen Schwerpunkt 1,5 m über Schienenoberkante liegt, durchfährt ein waagerechtes Gleis in einer Kurve von 180 m Halbmesser. Die Spurweite des Gleises beträgt 1435 mm. Bei welcher Fahrgeschwindigkeit wird der Wagen durch die Fliehkraft aus dem Gleise geworfen?

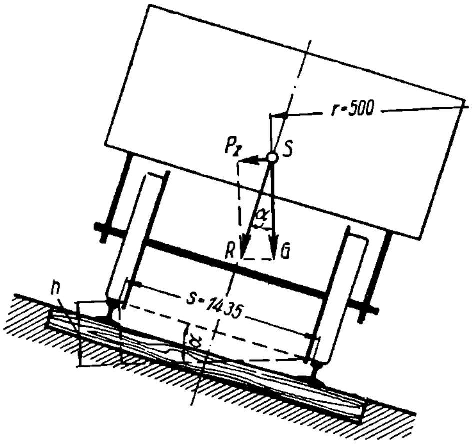


Bild 55

77. Ein **Eisenbahnwagen** von 13 t Masse durchfährt eine Kurve von 500 m Krümmungshalbmesser mit einer Geschwindigkeit 60 km/h. **a)** Wie groß ist die Fliehkraft? **b)** Unter welchem Neigungswinkel α gegen die Waagerechte (Bild) muß die Gleisebene geneigt angeordnet werden, damit die Räder nicht mit ihren Spurkränzen seitlich an den Schienen schleifen, sondern nur Normaldruckkräfte ausüben? **c)** Wie groß ist die „Überhöhung“ h der äußeren Schiene über die innere auszuführen bei 1435 mm Spurweite? **d)** Welchen Einfluß hat das Wagengewicht?

Lösung: a) $P_z = 736\,\text{kp}$.

b) Die Mittelkraft R aus G und P_z muß senkrecht zur Gleisebene gerichtet sein.

$$\tan\alpha = \frac{P_z}{G} = \frac{13\,000\,\text{kp}}{736\,\text{kp}} = 0{,}0566; \quad \alpha = 3^\circ\,15'.$$

c) $\sin\alpha = h : s$; bei kleinen Winkeln $\sin\alpha \approx \tan\alpha$, also

$$h = s \cdot \tan\alpha = 1435\,\text{mm} \cdot 0{,}0566 = 81\,\text{mm}.$$

d) Das Wagengewicht ist ohne Einfluß (siehe Aufg. 65e).

78. Ein **Eisenbahngleis** von 1435 mm Spurweite ist in einer Kurve von 300 m Krümmungshalbmesser mit $h = 120$ mm Überhöhung der äußeren Schiene verlegt (Bild 55 wie bei voriger Aufgabe). Bei welcher Fahrgeschwindigkeit schleifen die Räder eines durchfahrenden Zuges nicht mit ihren Spurkränzen seitlich an den Schienen, sondern üben nur Normaldruckkräfte aus?

Fliehkraftaufgaben mit Festigkeitsrechnungen

79. Eine **Rundstange** von 30 mm Durchmesser und 1,5 m Länge kreist um ihren Endpunkt O nach Abbildung. **a)** Wie groß ist die Masse der Stange bei einer Dichte von 7,85 kg/dm³ für Flußstahl, wenn ihr Querschnitt bis zur Drehachse hin kreisförmig angenommen wird? **b)** Wie groß ist die Fliehkraft in dem Augenblicke, wo die Stange bei gesteigerter Drehzahl an der Achse abreißt, wenn ihre Zugfestigkeit $\sigma_{zB} = 4000\ \mathrm{kp/cm^2}$ ist? **c)** Bei welcher Drehzahl geschieht dies? **d)** Welchen Einfluß hat der Querschnitt der Stange auf die berechnete gefährliche Drehzahl?

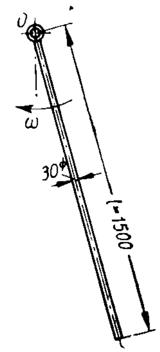


Bild 56

Lösung: a) $\varrho = 7850\ \mathrm{kg/m^3}$; $\quad m = 8{,}32\ \mathrm{kg}$.

b) $P_{z\,max} = \sigma_B \cdot F = 4000\ \mathrm{kp/cm^2} \cdot \frac{\pi 3^2}{4}\ \mathrm{cm^2} = 28\,270\ \mathrm{kp} = 277\,300\ \mathrm{N}$.

c) $P_z = m r \omega^2$.

Daraus $\omega = 211\ \mathrm{rad/s}$; $\quad n = 2020\ \mathrm{U/min}$.

d) Allgemein ist $m r \omega^2 = \sigma_B \cdot F$

$$\varrho F \cdot l \cdot r\omega^2 = \sigma_B \cdot F, \quad \sigma_B = \varrho\, l \cdot r\omega^2$$

Aus dieser Gleichung fällt F heraus, d. h., der Querschnitt ist ohne Einfluß. Vergrößert man F, so wächst zwar die Tragfähigkeit des Zerreißquerschnitts, in demselben Maße aber auch die Fliehkraft.

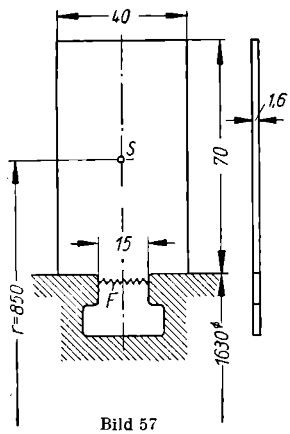


Bild 57

80. Eine **Dampfturbinenschaufel** aus Nickelstahlblech, 1,6 mm dick und mit einer Dichte von 8000 kg/m³, hat, in eine Ebene ausgestreckt, die skizzierte Rechteckform 40 mm · 70 mm. Sie ist in die Nute eine Schaufelrades von 1630 mm Durchmesser eingesetzt, so daß ihr Schwerpunkt im Betriebe einen Kreis von 850 mm Halbmesser beschreibt. **a)** Wieviel wiegt die Rechteckschaufel? **b)** Wie groß darf ihre Fliehkraft werden, damit im gefährdeten Querschnitt F die höchstzulässige Zugspannung 2800 kp/cm² auftritt? **c)** Bei welcher Drehzahl der Turbine geschieht dies?

81. Die **Schaufeln** einer **Freistrahlturbine** von 9000 PS sind nach Bild 58 mit je zwei Schraubenbolzen von 60 mm Durchmesser am Laufrade befestigt. Eine Schaufel wiegt 190 kp; ihr Schwerpunkt S bewegt sich auf einer Kreisbahn von 2100 mm Durchmesser mit 480 U/min um die waagerechte Drehachse. **a)** Wie groß ist die Fliehkraft einer Schaufel? **b)** Welche Schubspannung wird durch die Fliehkraft und das Gewicht der Schaufel in den beiden Befestigungsbolzen erzeugt unter der Annahme, daß die vier beanspruchten Querschnitte der genau eingepaßten Bolzen gleichmäßig tragen?

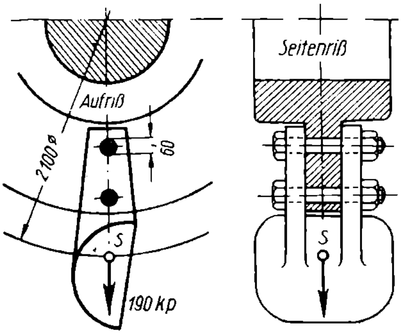


Bild 58

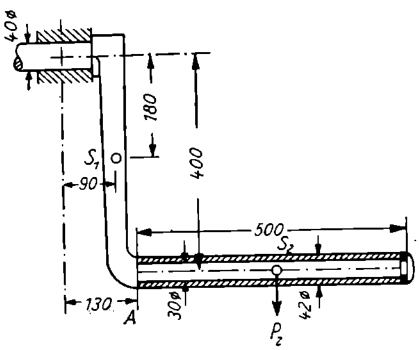


Bild 59

82. I. Die **Kurbel** einer Winde hat die gegebenen Maße. Der Handgriff besteht aus einem Dorn von 30 mm Durchmesser mit übergeschobenem Gasrohr von 42 mm Außendurchmesser. Geschieht das Senken der Last trotz des Verbots nur mit der Bedienung der Bremse, so kann die von der Last rückwärts angetriebene Kurbelwelle eine so hohe Drehzahl erreichen, daß die Fliehkraft P_z des Handgriffes den Dorn im gefährdeten Querschnitt A abbiegt. Zu berechnen ist **a)** die Masse des 500 mm langen Handgriffs. Die Dichte des Flußstahls beträgt 7850 kg/m³ für Dorn und Gasrohr. **b)** die Größe der Fliehkraft P_z des Handgriffs, bei der der Dorn abgebogen wird, wenn die Biegefestigkeit des Dorns 3600 kp/cm² beträgt; **c)** die Drehzahl der Kurbelwelle, bei welcher dies geschieht.

II. Bei welcher Drehzahl entsteht in der Mitte des Lagers in der Kurbelwelle eine Biegebeanspruchung von 1000 kp/cm²? Gewicht des Kurbelarmes ohne Handgriff (bei S_1 angreifend) 6 kp.

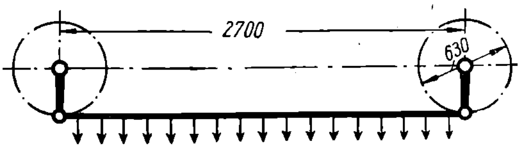


Bild 60

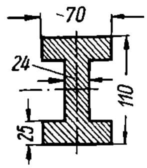


Bild 61

83. Die **Kuppelstange** einer Schnellzuglokomotive hat 2700 mm Länge und den skizzierten Querschnitt. Dichte des Flußstahls 7850 kg/m³. Kurbelkreisdurchmesser 630, Raddurchmesser 1980 mm. Gesucht wird **a)** das Gewicht der Stange unter der Annahme, daß sie den gekennzeichneten Querschnitt über ihre ganze Länge, d. h. von Mitte bis Mitte Kurbelzapfen, beibehält; **b)** die Fliehkraft der Stange bei einer Fahrgeschwindigkeit 100 km/h; **c)** das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche; **d)** die größte Biegespannung infolge Eigengewichts und Fliehkraft.

Fliehkräfte kreisender Ringe und Scheiben

Ringe

84. Welche Zugspannung tritt in einem kreisenden Ringe infolge der Fliehkräfte auf?

Lösung: Die Fliehkraft des halben Ringes $\frac{m}{2} r_0 \omega^2$, in seinem Schwerpunkte S angreifend (Bild 62), wird durch die Spannkräfte $\sigma \cdot F$ der beiden Zerreißquerschnitte aufgenommen. Also

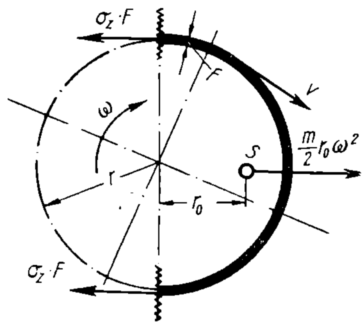


Bild 62

$$2\,\sigma_z F = \frac{m}{2} r_0 \omega^2 .$$

Nun ist die Masse des Ringes

$$m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot F \cdot 2 r \pi ;$$

der Schwerpunkt S des Halbkreisbogens hat vom Kreismittelpunkte den Abstand $r_0 = \frac{2r}{\pi}$; ferner ist $\omega = \frac{v}{r}$, wobei v = Umfangsgeschwindigkeit des Ringes. Eingesetzt:

$$2\,\sigma_z F = \frac{\varrho \cdot F\, 2 \pi r}{2} \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 .$$

Daraus **Ringspannung**

$$\underline{\underline{\sigma_z = \varrho \cdot v^2}}$$

Die Ringspannung ist hiernach nur von der Geschwindigkeit v abhängig. F fällt aus der Gleichung heraus, d. h., die Querschnittsfläche ist ohne Einfluß auf die Spannung. Durch Vergrößerung des Ringquerschnitts läßt sich die Spannung nicht verkleinern, weil in demselben Verhältnis auch die Masse, also die Fliehkraft, wächst.

85. a) Welche Zugspannung wird im Kranze einer **Riemenscheibe** von 2800 mm Durchmesser durch die Fliehkräfte erzeugt bei 200 U/min? Dichte von Grauguß 7,2 kg/dm³. **b)** Bei welcher Drehzahl wird die Scheibe durch die Fliehkräfte zerrissen, wenn die Zugfestigkeit von Grauguß 1500 kp/cm² beträgt?

Lösung: a) $\varrho = 7200\,\text{kg/m}^3$; $\sigma_z = 7200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 29{,}32^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 6{,}17 \cdot 10^6 \cdot \text{N/m}^2 = 63\,\text{kp/cm}^2$.

b) 976 U/min.

86. a) Welche Zugspannung tritt in einem mit der Geschwindigkeit 50 m/s leerlaufenden **Lederriemen** infolge der Fliehkräfte auf? Die Dichte des Leders beträgt 1 kg/dm³. **b)** Bei welcher Geschwindigkeit würde der Riemen durch die Fliehkräfte zerrissen werden, wenn die Zugfestigkeit des Leders 300 kp/cm² beträgt?

87. Welche Zugspannung herrscht am äußeren Umfang der auf die Eisenbahnräder aufgezogenen **Radreifen** infolge der Fliehkräfte bei einer Fahrgeschwindigkeit 110 km/h **a)** bei einem Wagenrade von 1000 mm Durchmesser? Die Dichte des Flußstahls 7,85 kg/dm³, **b)** bei einem Lokomotivrade von 1980 mm Durchmesser?

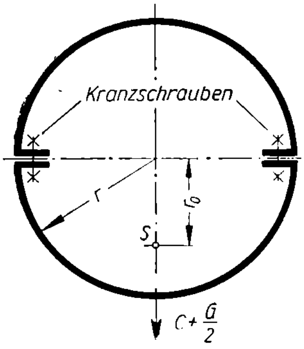


Bild 63

88. Der Kranz einer zweiteiligen **Riemenscheibe** (Bild 63) hat 1600 mm Durchmesser und wiegt 190 kp. **a)** Wie groß ist die Fliehkraft einer Kranzhälfte bei 250 U/min unter der Annahme, daß sich die Masse des Kranzes gleichmäßig über den äußeren Umfang verteilt? **b)** Welche Zugspannung wird in den $2 \cdot 2 = 4$ einzölligen Verbindungsschrauben des Kranzes durch die Fliehkraft und das Scheibengewicht erzeugt?

Lösung: a) Schwerpunktabstand (wie bei Aufg. 84)

$$r_0 = \frac{2r}{\pi} = 0{,}51\,\text{m}; \quad \omega = 2\pi n = 26{,}1\,\text{rad/s}$$

$$P_z = \frac{m}{2} r_0 \omega^2 = 33\,240\,\text{N} = 3390\,\text{kp}, \; G = m \cdot g = 1865\,\text{N} = 190\,\text{kp}.$$

$$\textbf{b)}\; P_z + \frac{G}{2} = 34\,173\,\text{N} = 3485\,\text{kp} = \sigma_z \cdot 4 \cdot 3{,}573\,\text{cm}^2; \quad \sigma_z = 244\,\text{kp/cm}^2.$$

89. Eine **Seilscheibe** für 9 Hanfseile hat 3000 mm Durchmesser und 2800 kp Kranzgewicht und macht 140 U/min. **a)** Wie groß ist die Fliehkraft einer Scheibenhälfte, wenn die Masse des Kranzes auf einem Kreise von dem gegebenen Scheibendurchmesser vereinigt gedacht wird? Abbildung wie bei voriger Aufgabe. **b)** Wie stark sind die $2 \cdot 3 = 6$ Kranzschrauben zu bemessen, wenn ihre Zugbeanspruchung durch Fliehkraft und Kranzgewicht 900 kp/cm² betragen darf?

90. Ein **Schwungrad** aus Grauguß von 3600 mm Außendurchmesser und der Dichte 7,2 kg/dm³ hat die gegebenen Abmessungen. Es soll berechnet werden **a)** das Gewicht des Kranzringes; **b)** die Fliehkraft einer Ringhälfte (ohne Arme und Nabe) bei 160 U/min unter der Annahme, daß die Masse des Ringes auf dem mittleren Kreise von 3400 mm Durchmesser vereinigt ist; **c)** die Zugspannung, die durch die Fliehkraft und das Gewicht einer Kranzhälfte im Kranzquerschnitt erzeugt wird; **d)** die Fliehkraft eines Kranzbogenstückes von einem Sechstel des Umfanges ohne Berücksichtigung der Armmasse; **e)** die Zugspannungen im Kranz und in den Armen in der unteren Hälfte, wenn sie auf Grund der Dehnungen berechnet werden.

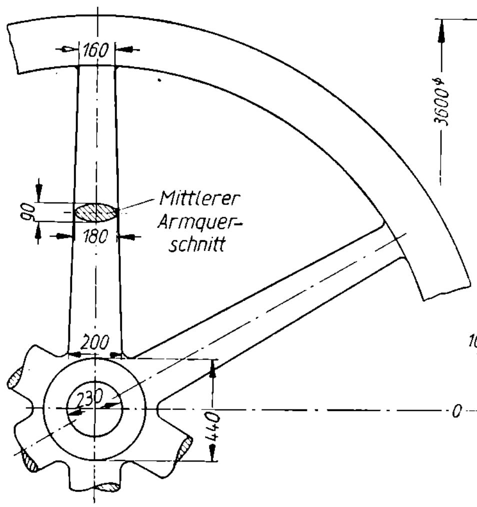
Lösung: a) $G = 2460$ kp.

b) Schwerpunktabstand des Halbkreisbogens (Bild 62) wie bei Aufg. 84)

$$r_0 = \frac{2r}{\pi} = \frac{3{,}4\,\text{m}}{\pi} = 1{,}083\,\text{m}; \quad \omega = 2\pi n = 16{,}755\,\text{rad/s}.$$

$$P_z = \frac{m}{2} r_0 \omega^2 = 376\,000\,\text{N} = 38\,100\,\text{kp}.$$

Bild 64



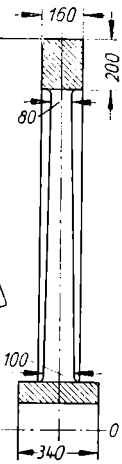


Bild 65

c) $P_z + \frac{G}{2} = 39330\,\text{kp}$ (Bild 63) $= 2\,F\,\sigma_z;\quad \sigma_z = 61{,}5\,\text{kp/cm}^2.$

d) Schwerpunktabstand

$$r'_0 = r \cdot \frac{\text{Sehne } s}{\text{Bogen } s} \text{ (Bild 66)} = 1{,}7\,\text{m} \cdot \frac{1{,}7\,\text{m}}{{}^1/_6 \cdot 2 \cdot 1{,}7\,\text{m}\,\pi} = 1{,}624\,\text{m};$$

$$P'_z = \frac{m}{6}\,r'_0\,\omega^2 = 19040\,\text{kp}.$$

$$P'_z/2 = P_z \cdot \sin 30°;\quad P'_z = P_z \text{ (Bild 66)};\quad \sigma_z = 61{,}5\,\text{kp/cm}^2.$$

e) Die Dehnung eines Kreisdurchmessers ist gleich der Dehnung des Umfanges. Bei dem gleichen Material ist dann auch die Spannung im Kranz und in den Armen eines Schwungrades, wenn die Nabe mit berücksichtigt wird, gleich groß. Wegen der Starre der Nabe ist die dehnbare Armlänge kleiner als r, die Dehnung und Spannung des Armes also verhältnismäßig größer als im Kranz. Hier Armlänge $l = 1{,}7\,\text{m} - 0{,}22\,\text{m} = 1{,}48\,\text{m}$ und $r/l = 1{,}15$. Deshalb mittlere Armdehnung $\varepsilon_m = 1{,}15 \cdot \varepsilon_1$ und mittlere Armspannung $\sigma_m = 1{,}15\,\sigma_1$, wobei Index 1 sich auf den Kranz bezieht.
Mittlerer Armquerschnitt $F_m = \pi\,a\,b = 127\,\text{cm}^2$, kleinster Armquerschnitt $F_2 = 100{,}5\,\text{cm}^2$, $\sigma_2 = F_m/F_2 \cdot \sigma_m = 1{,}264\,\sigma_m$.
Für die drei unteren Arme ist $F_m \cdot \sigma_m + 2\,F_m \cdot \sigma_m \cdot \cos 60° = 2\,F_m \cdot \sigma_m$
$P_Z + G/2 = 2\,F_1 \cdot \sigma_1 + 2\,F_m \cdot \sigma_m;\quad \sigma_1 = 42{,}2\,\text{kp/cm}^2$
$\sigma_m = 1{,}15\,\sigma_1 = 48{,}5\,\text{kp/cm}^2;\quad \sigma_2 = 61{,}2\,\text{kp/cm}^2.$

91. Ein **Riemenscheibenschwungrad** hat 2900 mm Außendurchmesser und einen Kranzquerschnitt von den gegebenen Maßen; 6 Arme wie in Bild 66 der vorigen Aufgabe. Gesucht wird **a)** das Gewicht des Kranzringes bei einer Dichte 7,2 kg/dm³ für Grauguß; **b)** der Schwerpunktabstand r des Kranzquerschnitts von der Achse

(Bild 67); **c)** die Fliehkraft einer Ringhälfte bei 180 U/min unter der Annahme, daß die Masse des Ringes auf dem Schwerkreise von dem berechneten Halbmesser r vereinigt ist; **d)** die durch die Fliehkraft und das Gewicht im Kranzquerschnitt erzeugte Zugspannung; **e)** die Fliehkraft eines Kranzbogenstückes von einem Sechstel des Umfanges; **f)** die durch die Fliehkraft und das halbe Kranzgewicht im untersten Arme erzeugte Zugspannung. Der kleinste Armquerschnitt an der Einmündung in den Kranz ist eine Ellipse von den Achsenlängen 156 und 78 mm.

Lösung wie bei voriger Aufgabe.

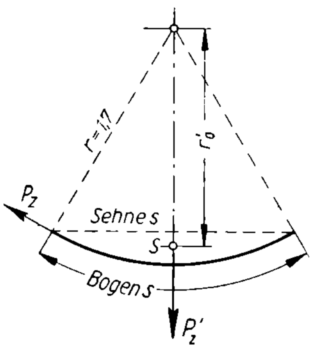


Bild 66

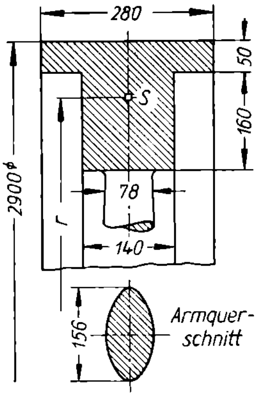


Bild 67

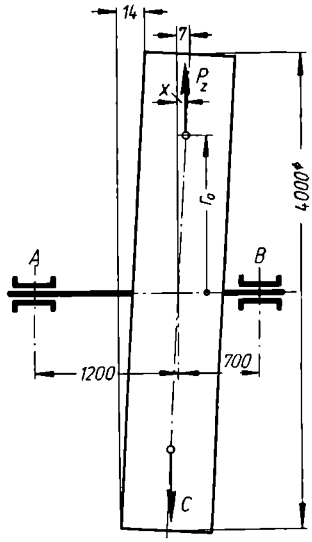


Bild 68

92. I. Der Kranzring einer **Riemenscheibe** von 4000 mm Außendurchmesser hat eine Masse von 1600 kg. **a)** Wie groß ist die Fliehkraft einer Kranzhälfte bei 125 U/min? Die Masse des Kranzes werde auf dem äußeren Umfang vereinigt gedacht. **b)** Welche Lagerbelastungen A und B erzeugen die Fliehkräfte des Kranzes, wenn die Scheibe derart schief auf die Welle aufgekeilt ist, daß der Kranz um 7 mm seitlich verschoben ist, also um 14 mm schlägt (im Bild 68 übertrieben dargestellt)? **c)** Zwischen welchen Grenzwerten sind die beiden resultierenden Lagerdrücke A und B veränderlich?

II. Obige Scheibe schlage um 2 mm. Dieselben Fragen sind zu beantworten, wenn das Auflager A einen Abstand von 500 mm und B von 2000 mm von Mitte Rad hat.

Lösung: I a) 17800 kp.

b) $x = 4{,}459$ mm

$$P_z \cdot 2x = A \cdot l = B \cdot l, \quad A = B = 84 \text{ kp}.$$

c) Das Scheibengewicht erzeugt $A = 590$ kp, $B = 1010$ kp;

$$A_{max} = 590 \text{ kp} + 84 \text{ kp} = 674 \text{ kp}, \quad B_{max} = 1010 \text{ kp} + 84 \text{ kp} = 1094 \text{ kp};$$

$$A_{min} = 590 \text{ kp} - 84 \text{ kp} = 506 \text{ kp}, \quad B_{min} = 1010 \text{ kp} - 84 \text{ kp} = 926 \text{ kp}.$$

Scheiben

93. Welche Zugspannung wird in einer kreisenden zylindrischen **Scheibe** durch die Fliehkraft erzeugt?

Lösung: Die Fliehkraft einer Scheibenhälfte (Bild 69) ist

$$P_z = \frac{m}{2} \cdot r_0 \omega^2 = \sigma_z F.$$

Nun ist

$$m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot r^2 \pi s$$

$$r_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}; \quad F = 2 r s; \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

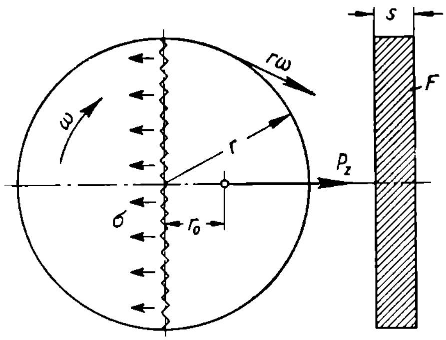


Bild 69

Durch Einsetzen dieser Werte findet man

$$\sigma_z = \frac{1}{8} \varrho \cdot v^2$$

(Ähnlich die Formel der Ringspannung in Aufg. 84.)

94. Ein **Schleifstein** hat 180 mm Außendurchmesser, 350 mm Dicke und Dichte 2,4 kg/dm³. Zu berechnen ist **a)** seine Masse; **b)** die Fliehkraft des halben Steins, wenn er 90 U/min um eine waagerechte Drehachse ausführt (Bild 69 wie bei voriger Aufgabe); **c)** die durch die Fliehkraft und das Steingewicht erzeugte Zugspannung; **d)** die Drehzahl, bei welcher der Stein durch die Fliehkraft zerrissen würde, wenn seine Zugfestigkeit 50 kp/cm² beträgt.

Lösung: **a)** 2140 kg.

b) $P_z = \frac{m}{2} \cdot r_0 \omega^2 = 36297 \text{ N} = 3700 \text{ kp}$.

c) $P_z + \frac{G}{2} = D \cdot b \cdot \sigma_z$

$\sigma_z = 0{,}76 \text{ kp/cm}^2$.

d) $P_z = \frac{m}{2} r_0 \omega^2 = F \cdot \sigma_{zB}; \quad \omega_{max} = 87 \text{ rad/s}, \; n_{max} = 831 \text{ U/min}$.

95. Bei einer **Zentrifuge** für Zuckerbereitung führt eine kreisförmige Stahlblechscheibe von 800 mm Durchmesser, 14 mm Dicke und der Dichte 7,85 kg/dm³ 1500 U/min um eine senkrechte Achse aus (Bild 70). Gesucht wird **a)** das Gewicht der Scheibe; **b)** die Fliehkraft einer Scheibenhälfte; **c)** die durch die Fliehkräfte in der Scheibe erzeugte Zugspannung; **d)** die Biegespannung, welche in dem 55 mm dicken oberen Lagerzapfen der Welle auftritt, wenn die Scheibe um 1 mm exzentrisch zur Drehachse liegt.

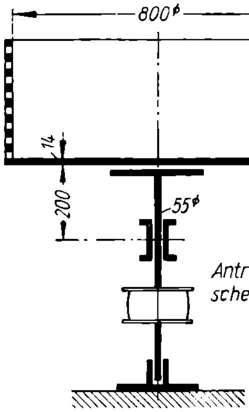


Bild 70

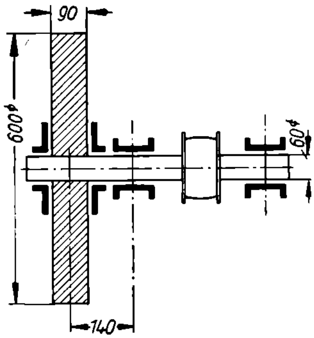


Bild 71

96. Die **Schmirgelscheibe** einer Schleifmaschine nach Bild 71 hat 600 mm Durchmesser, 90 mm Dicke, eine Dichte 3,5 kg/dm³ und macht 1120 U/min um die waagerechte Drehachse. Es soll berechnet werden **a)** das Gewicht der Scheibe; **b)** die Fliehkraft einer Scheibenhälfte; **c)** die durch die Fliehkräfte und das Eigengewicht in der Scheibe erzeugte Zugspannung; **d)** die Fliehkraft, die entsteht, wenn der Schwerpunkt der Scheibe um 2 mm exzentrisch außerhalb der Wellenachse liegt; **e)** die Biegespannung, die von dieser Fliehkraft und dem Gewicht der Scheibe in dem 60 mm starken Wellenzapfen erzeugt wird.

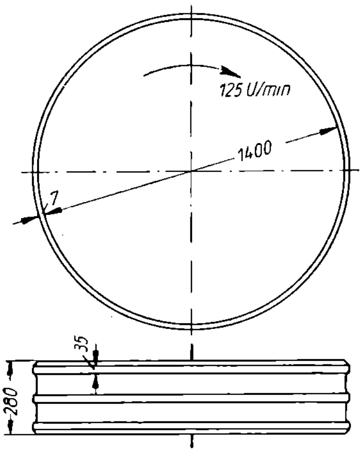


Bild 72

97. Ein **Mühlstein** von 1400 mm Durchmesser, 280 mm Dicke und der Dichte 2,5 kg/dm³ ist durch drei Flachstahlringe von je 35 mm Breite, 7 mm Dicke und einer Dichte 7,85 kg/dm³ nach Bild 72 eingefaßt und dreht sich mit 125 U/min um seine senkrechte Achse. Zu berechnen ist **a)** das Gewicht des Steins und **b)** das Gewicht der drei Ringe; **c)** die Fliehkraft einer Steinhälfte (wie Aufg. 94) und **d)** die Fliehkraft der drei Ringhälften (wie Aufg. 84), **e)** die Zugspannung, die in den Ringen durch die Fliehkräfte des Steins und ihre eigene Masse erzeugt wird, unter der Annahme, daß die Festigkeit des aus einzelnen Stücken zusammengesetzten Mühlsteins gleich Null ist.

Massenkräfte beim Kurbeltrieb

98. Welche Massenkräfte wirken auf den **Kurbelzapfen**?

Lösung: Während der Zapfen mit gleichförmiger Geschwindigkeit v kreist, bewegen sich die hin- und hergehenden Massen ungleichförmig beschleunigt bzw. verzögert.

Wenn der Kurbelzapfen die Totlagen durchläuft (Bild 73), so erfährt er selbst nach dem Kreismittelpunkt O hin eine Zentripetalbeschleunigung von der Größe $r\omega^2$. Die mit ihm verbundenen Massen, nämlich Kolben, Kolbenstange, Kreuzkopf und Schubstange, erfahren davon eine etwas verschiedene Beschleunigung, die von der Länge der Schubstange l abhängt.

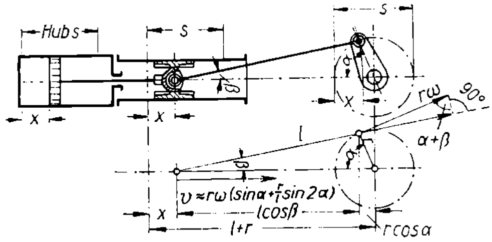


Bild 73

Kolbenweg vom Totpunkt aus:

$$x = r + l - r \cdot \cos\alpha - l \cdot \cos\beta; \quad r \cdot \sin\alpha = l \cdot \sin\beta; \quad \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta};$$

$$\cos\beta \approx 1 - \frac{r^2}{2l^2} \cdot \sin^2\alpha; \quad x = r\,(1 - \cos\alpha) + \frac{r^2}{2l}\sin^2\alpha\,.$$

Geschwindigkeit des Kolbens:

$$v = \frac{dx}{dt} = r \cdot \sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{r^2}{2l} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}; \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt};$$

$$v = r\omega\left(\sin\alpha + \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right).$$

Beschleunigung des Kolbens:

$$b = \frac{dv}{dt} = r\omega\left(\cos\alpha + \frac{r}{l}\cos 2\alpha\right)\frac{d\alpha}{dt} = r\omega^2\left(\cos\alpha + \frac{r}{l}\cdot\cos 2\alpha\right).$$

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
v	0	$+r\omega$	0	$-r\omega$	0
b	$r\omega^2\left(1+\frac{r}{l}\right)$	$-r\omega^2\frac{r}{l}$	$-r\omega^2\left(1-\frac{r}{l}\right)$	$-r\omega^2\frac{r}{l}$	$r\omega^2\left(1+\frac{r}{l}\right)$

Die Beschleunigung ist nach vorstehender Tabelle am größten bei $\alpha = 0°$, und sie wird Null bei $\cos\alpha = -\frac{r}{l}\cdot\cos 2\alpha$.

Die Schubstange hat an einem Ende die Beschleunigung des Kolbens $r\omega^2\left(1 \pm \frac{r}{l}\right)$, am anderen Ende die Beschleunigung des Zapfens $r\omega^2$. Ihre mittlere Beschleunigung in den Totlagen ist deshalb $r\omega^2 \cdot (1 \pm r/2l)$.

99. Bei einer Sägemaschine, die Baumstämme in Bretter zerschneidet, wird das 230 kp schwere **Sägegatter** durch Kurbelantrieb mit 800 mm Hub und 120 U/min senkrecht auf- und abbewegt. Die beiden Schubstangen (Bild 74) wiegen zusammen 50 kp und sind 1800 mm lang. Wie groß ist die senkrechte Belastung des Grundmauerwerks durch die bewegten Massen **a)** bei tiefster Kurbelstellung A? **b)** bei höchster Stellung B? **c)** bei mittlerer Stellung C?

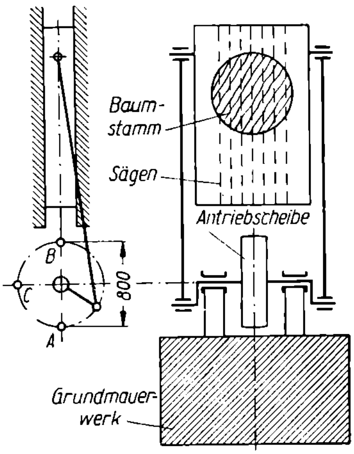


Bild 74

Lösung: **a)** $-r\omega^2\left(1-\frac{r}{l}\right) = 49\,\text{m/s}^2$ (Säge);

$-r\omega^2\left(1-\frac{r}{2l}\right) = 56\,\text{m/s}^2$ (Schubstange) (s. Aufg. 98, Schluß);

$P = \sum mb - \sum G = -1435\,\text{kp} - 280\,\text{kp} = -1715\,\text{kp}$.

b) $r\omega^2\left(1+\frac{r}{l}\right) = 77\,\text{m/s}^2$ (Säge);

$r\omega^2\left(1+\frac{r}{2l}\right) = 70\,\text{m/s}^2$ (Schubstange);

$P = \sum mb - \sum G = 2162 - 280 = 1882\,\text{kp}$.

c) $-r\omega^2\cdot\frac{r}{l} = 14\,\text{m/s}^2$ (Säge); $-r\,\omega^2\frac{r}{2l} = 7\,\text{m/s}^2$ (Schubstange);

$P = -230\,\text{kg}\cdot 14\,\text{m/s}^2 - 50\,\text{kg}\cdot 7\,\text{m/s}^2 - 280\,\text{kp} = -642\,\text{kp}$.

100. Eine **Dampfmaschine** hat 500 mm Zylinderdurchmesser, 800 mm Hub und macht 140 U/min (Bild 73 wie in Aufg. 98). Die Schubstange ist 2000 mm lang. Die hin- und hergehenden Triebwerksmassen betragen 610 kg, die drehenden Massen am Kurbelzapfen werden vernachlässigt, der Spannungsunterschied des Dampfes vor und hinter dem Kolben beim Hubwechsel ist 7 kp/cm². **a)** Wie groß ist die Kolbenkraft und **b)** die Massenkraft in den Totlagen der Kurbel? **c)** Welche Kraft überträgt die Schubstange in den Totlagen auf den Kurbelzapfen? **d)** Um wieviel Prozent wird die Triebkraft des Kolbens beim Hubwechsel durch die Massenwirkung verringert?

101. Bei einer **Kurbelpresse** hat der Schlitten ein Gewicht von 10 Mp, die zwei Schubstangen wiegen je 300 kp. Der Kurbelradius ist $r = 200$ mm, die Schubstangenlänge $l = 1000$ mm, die Drehzahl $n = 15$ U/min.
Wie groß ist der Kurbeldruck **a)** im oberen Totpunkt, **b)** kurz vor dem unteren Totpunkt, wenn im unteren Totpunkt eine Arbeitsdruckkraft von 40000 kp zu der Massendruckkraft hinzukommt?

102. I. Die skizzierten Triebwerkteile einer **Schnellzug-Lokomotive** haben folgende Massen: Kolben mit Kolbenstange 160 kg, Kreuzkopf C 60 kg, Schubstange BC 130 kg, Kuppelstange AB 90 kg, zwei Kurbelzapfen A und B mit Befestigungswarzen in den Rädern $2\cdot 50 = 100$ kg. Der Kolbenhub beträgt 600 mm. **a)** Wie groß sind die waagerecht gerichteten Massenkräfte der hin- und hergehenden Triebwerkmassen in den Kurbeltotlagern bei einer Fahrgeschwindigkeit 90 km/h und 2 m Raddurchmesser bei Vernachlässigung des Gliedes $\frac{r}{l}$? **b)** Wie schwer sind die

Gegengewichte in den beiden Rädern auszuführen, damit sie, beide gleich groß und in 750 mm Schwerpunktabstand vom Radmittelpunkte gegenüber dem Kurbelzapfen angeordnet, zusammen die Massenwirkung des Triebwerkes in den Totlagern gerade aufheben? **c)** Um wieviel Kilopond würde dann an der hinteren Kuppelachse die Druckkraft des Rades auf die Schiene in den senkrechten Mittelstellungen der Kurbel vergrößert bzw. verkleinert werden durch die Fliehkräfte des Gegengewichts, des Kurbelzapfens mit Befestigungswarze und der halben Kuppelstange? **d)** Zwischen welchen Grenzwerten würde also die Druckkraft des Rades auf die Schiene während jeder Umdrehung schwanken, wenn er im Ruhezustande 7400 kp beträgt?

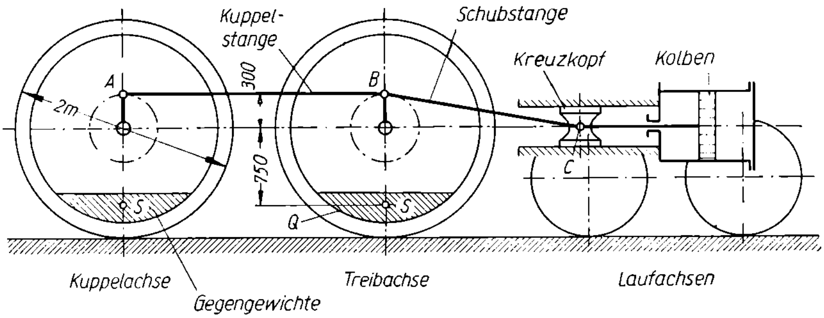


Bild 75

Lösung: a) Triebwerksmassen

$$160\,\text{kg} + 60\,\text{kg} + 130\,\text{kg} + 90\,\text{kg} + 100\,\text{kg} = 540\,\text{kg},$$

$$P_z = 540 \cdot 0{,}3\,\text{m} \cdot 25^2 \cdot 1/\text{s}^2 = 101\,240\,\text{N} = 10\,320\,\text{kp}\,.$$

b) $101\,240 = 2\,m_Q \cdot 0{,}75\,\text{m} \cdot 25^2 \cdot 1/\text{s}^2\,.$

Daraus $m_Q = 108$ kg an jedem Rade.

c) $m_{\text{Kurbelzapfen}} + m_{\text{halbe Kuppelstange}} = 50\,\text{kg} + 45\,\text{kg} = 95\,\text{kg}$

$108\,\text{kg} \cdot 0{,}75\,\text{m} \cdot 25^2 \cdot 1/\text{s}^2 - 95\,\text{kg} \cdot 0{,}3\,\text{m} \cdot 25^2 \cdot 1/\text{s}^2 = 32\,800\,\text{N}$ oder 3340 kp.

d) 7400 kp + 3340 kp = 10740 kp größte Raddruckkraft,

7400 kp — 3340 kp = 4060 kp kleinste Raddruckkraft.

II. Frage **a)** wie oben, wenn das Verhältnis $r/l = 0{,}18$ berücksichtigt wird. **b)** Welche Kräfte sind in den Totlagen jetzt nicht ausgeglichen? $Q = 108$ kp bleibt.

103. Die **Schubstange** eines Fahrzeugmotors hat I-förmigen Querschnitt. Sie erleidet infolge der Fliehkraft eine Biegespannung, die am größten ist, wenn gerade Kurbel und Schubstange einen Winkel von 90° bilden (Bild 76). Der Querschnitt der Stange ist in Bild 78 gegeben. Die Massen der Schubstangenköpfe können außer Betracht gelassen werden.

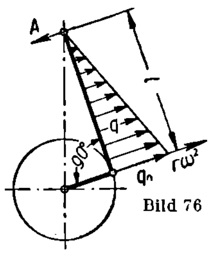


Bild 76

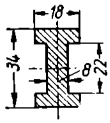


Bild 77

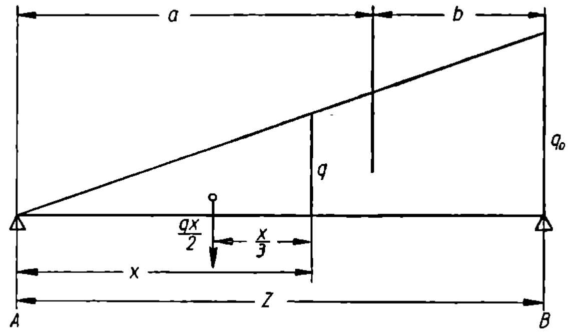


Bild 78

Kurbelradius $r = 105$ mm,
Stangenlänge $l = 310$ mm,
Dichte $\varrho = 7{,}8$ kg/dm³ oder g/cm³,
Drehzahl $n = 1800$ U/min.

Gesucht: **a)** die Kraft q_0 für 1 cm Länge am Kurbelzapfen; **b)** die Auflagerkraft A am Kolbenbolzen; **c)** das größte Biegemoment; **d)** das Widerstandsmoment und die Biegespannung; **e)** der resultierende Zapfendruck für die angegebene Stellung aus den Massenkräften, wenn die Massen von Kolben und Schubstange zusammen 5 kg haben.

Anleitung: **a)** Belastungsfall nach Bild 81:

Es ist $q_0 = \frac{m}{l} r\omega^2$ die Massenkraft je Längeneinheit.

Hierbei ist m die Masse, die einem Querschnitt f und einer Länge l entspricht,

$$m = f \cdot l \cdot \varrho\,,$$

$$q_0 = \frac{f\,l\,\varrho\,r\,\omega^2}{l} = f\,\varrho\,r\,\omega^2\,,$$

$$q = q_0\,\frac{x}{l}\,.$$

b) $A = \frac{q_0 l}{6}; \quad B = \frac{q_0 l}{3}.$

$$M_x = A\,x - \frac{q\,x}{2}\cdot\frac{x}{3} = A\,x - q\,\frac{x^2}{6}\,.$$

$$q = q_0\,\frac{x}{l}\,. \qquad M_x = A\,x - \frac{q_0\,x^3}{6\,l}\,.$$

Maximum, wenn $\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = 0$ ist; $\quad \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = A - \frac{q_0}{6\,l}\cdot 3a^2 = 0\,,$

$$a = \frac{l}{\sqrt{3}}\,; \quad b = l\,\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}\,.$$

c) $M_{max} = Aa - \frac{q_0 a^3}{6l} = 0{,}385 \frac{q_0 l^2}{6}$.

d) $J = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$;

$W = \frac{J}{e}$.

e) Radial $B_r = \frac{q_0 l}{3}$ bei $r \perp l$.

Masse der Schubstange m_1,
Masse des Kolbens $m_2 = 5$ kg $- m_1$.

Masse am Kolben $m_2 + \frac{m_1}{2}$; am Zapfen $\frac{m_1}{2}$; $\tan\alpha = \frac{l}{r}$.

$$B_y = \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right) r\omega^2 \cdot \left(\cos\alpha + \frac{r}{l}\cos 2\alpha\right) + \frac{m_1}{2} r\omega^2 \cdot \cos\alpha\,.$$

Letztes Glied fast Null. Parallelogramm aus B_r und B_y.

BEWEGUNGSGRÖSSE (ANTRIEB) UND STOSS

104. Was versteht man unter **Antriebssatz** (Impulssatz) oder **Satz von der Bewegungsgröße?**

Lösung: Durch Multiplikation mit dem Zeitelement dt entsteht aus $P = mb$

$$\int P \cdot dt = m \int b \cdot dt; \quad \text{mit} \int b \cdot dt = v - v_0$$

$$\int P \cdot dt = m(v - v_0).$$

Ist $P =$ konstant, so geht die Gleichung über in

$$Pt = m(v - v_0).$$

Einheitenkontrolle:

$$P \text{ in N} \equiv \text{kgm/s}^2; \; t \text{ in s}; \; m \text{ in kg}; \; v \text{ in m/s}; \quad m \cdot v \text{ in} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} = \text{N} \cdot \text{s}.$$

Pt bzw. $\int P \cdot dt$ ist die Summe aller P während der Zeit t und heißt „Antrieb" oder „Impuls". $m(v - v_0)$ ist die „Änderung der Bewegungsgröße".

$$\boldsymbol{\int P \cdot dt = m(v - v_0)}.$$

Antrieb = Änderung der Bewegungsgröße

In vielen Fällen ist es einfacher, mit dem Satz vom Antrieb als mit der Beschleunigung zu rechnen.

105. Es gibt einen **Dieselkompressor**, bei dem der Kolben der Ölmotorseite und der Kolben des Verdichters durch eine Stange fest miteinander verbunden sind. Zwei gegenläufige Kolben fliegen wie ein Geschoß frei aus.

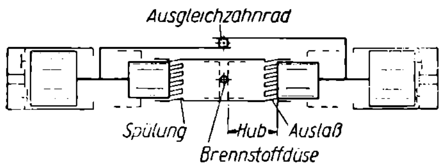


Bild 79

Kraft auf der Dieselseite bis zum Ende der Gleichdruckverbrennung $P = 25000$ kp (absolut), Kraft auf der Verdichterseite $Q = 3100$ kp, Reibungskraft $P_w = 900$ kp.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit am Ende der Gleichdruckverbrennung, wenn der Kolbenweg bis dahin 0,055 m beträgt und die Masse der verbundenen Kolben $m = 20$ kg ist?

b) Wie lange braucht der Kolben für diesen Weg?

Lösung: a) $^1/_2\, m v^2 = (P - Q - P_w)\, s$; $v = 10{,}75$ m/s.

b) $(P - Q - P_w)\, t = m v$; $t = 0{,}01024$ s.

106. Wie groß muß das **Bremsmoment** an den Rädern eines **Personenkraftwagens** sein, wenn die Masse des Wagens 1470 kg, seine Geschwindigkeit 72 km/h, sein Raddurchmesser 750 mm, der Rollwiderstand 40 kp ist und wenn er in 3 s stehen soll? Der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen.

107. Ein **Kraftwagen** von 1500 kg Masse erreicht seine Höchstgeschwindigkeit von 20 m/s in 20 s. Der Rollwiderstand ist 25 kp. Vom Luftwiderstand ist abzusehen.

a) Welches Antriebsdrehmoment an der Radachse muß bei einem Raddurchmesser von 800 mm vorhanden sein?

b) Wie groß ist die Motorleistung bei einem Getriebewirkungsgrad = 0,75?

Lösung: a) $P t = m (v - 0)$; $P = 153$ kp; $M = (P + P_w)\, r = 71{,}2$ kpm.

b) $N = (P + P_w)\, v = 47{,}5$ PS; $N_M = \dfrac{N}{0{,}75} = 63{,}3$ PS.

108. Ein **Lastkraftwagen** von 3 t Masse erreicht die Höchstgeschwindigkeit vom 15 m/s auf ebener Bahn nach 25 s. Raddurchmesser 1000 mm. a) Wie groß ist das Antriebsmoment am Rad? b) Wie groß ist die Motorleistung, wenn der Wirkungsgrad des Getriebes 0,7 ist?

109. Für den **Stoß** a) zweier unelastischer, b) zweier vollkommen elastischer Massen m_1 und m_2 sollen die Geschwindigkeitsänderungen und die Energieverhältnisse ermittelt werden.

Lösung: a) Treffen zwei unelastische Massen, z. B. feuchte Tonkugeln, mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 aufeinander, so drücken sie sich beim Stoß platt und bewegen sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit u zusammen weiter. Die

Normalkraft P, die während des Stoßvorganges zwischen den beiden Körpern auftritt, ändert in jedem Zeitteilchen ihre Größe, wirkt aber auf beide Massen in entgegengesetzter Richtung in gleicher Größe als Kraft und Gegenkraft. Der „Antrieb" ist während eines kleinen Zeitteilchens $P \cdot \mathrm{d}t$, während der ganzen Stoßdauer $\sum P \cdot \mathrm{d}t$ oder $\int P \cdot \mathrm{d}t$.

Die Masse m_1 wird durch die Normaldruckkraft von v_1 auf u verzögert, während die Masse m_2 von v_2 auf u beschleunigt wird. Sind die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 gleichgerichtet, so sind sie beide positiv zu setzen; sind sie entgegengerichtet, haben sie entgegengesetzte Vorzeichen.

Derselbe Antrieb, der die Bewegungsgröße von m_1 verringert, vergrößert diejenige von m_2.

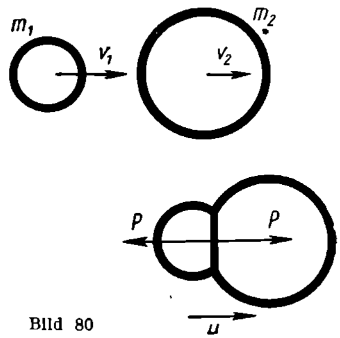


Bild 80

Also $\sum P \cdot \mathrm{d}t = m_2 (u - v_2) = m_1 (v_1 - u)$

$$m_2 u + m_1 u = m_1 v_1 + m_2 v_2;$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Die Bewegungsgröße bewegter Körper bleibt somit gleich vor und nach einem Stoß. Das Arbeitsvermögen oder die Bewegungsenergie der Massen vor dem Stoß war

$$A = {}^1/_2 \cdot m_1 v_1^2 + {}^1/_2 \cdot m_2 v_2^2 .$$

Die Bewegungsenergie nach dem Stoß ist

$$A' = (m_1 + m_2) \cdot \frac{u^2}{2}.$$

Die Differenz $A - A'$ ist als Formänderungsarbeit verlorengegangen, sie hat dazu gedient, den Körper breitzudrücken.

Der Energieverlust soll mit A_v bezeichnet werden. Nach Einsetzen der Werte erhält man

$$A_v = A - A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 .$$

Der Verlust hängt also von der Differenz der Anfangsgeschwindigkeiten ab und wird sehr groß, wenn v_2 negativ wird.

b) Beim elastischen Stoß bleiben die Verhältnisse bis zur elastischen Zusammendrückung genau dieselben. Wenn also beide Körper elastisch abgeplattet sind, so ist ihre Geschwindigkeit wieder

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Die Abplattung wirkt nun genau wie eine dazwischenliegende Feder. Die Federarbeit ist bei der Ausdehnung genau dieselbe wie bei der Zusammendrückung, auch $\int P \cdot \mathrm{d}t$ ist dasselbe. Infolgedessen wird nochmals dieselbe Geschwindigkeitsänderung wie vorher bei der Zusammendrückung erzeugt, nämlich $v_1 - u$ und $v_2 - u$. Somit wird die Geschwindigkeit nach dem Rückgang der Deformation

$$w_1 = v_1 - 2 \cdot (v_1 - u) = 2u - v_1,$$
$$w_2 = v_2 - 2 \cdot (v_2 - u) = 2u - v_2.$$

Der Energieverlust ist dabei Null, wie sich durch Einsetzen leicht nachweisen läßt. Ist der Stoß z. T. elastisch, so gilt beim Rückgang der Deformation auch die Gleichung

$$m_1 \cdot (u - w_1) = m_2 \cdot (w_2 - u) \text{ oder}$$
$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = (m_1 + m_2) \cdot u = m_2 v_1 + m_2 v_2.$$

Die Bewegungsgröße bleibt somit in allen Fällen konstant, die Energie wird aber nur z. T. beim unvollkommen elastischen Stoß zurückgewonnen. Ist z. B. der Verlust A_v nur der n-te Teil des Verlustes beim unelastischen Stoß, so ist zu setzen:

$$^1/_2 \cdot m_1 w_1^2 + {}^1/_2 \cdot m_2 w_2^2 = {}^1/_2 \cdot m_1 v_1^2 + {}^1/_2 \cdot m_2 v_2^2 - A_v\,.$$

Aus beiden Gleichungen zusammen läßt sich w_1 und w_2 berechnen.

110. Ein **Körper** von 4 kg Masse und 12 m/s Geschwindigkeit stößt zentrisch auf einen zweiten von 15 kg, der sich mit 3 m/s in gleicher Richtung bewegt. Wie groß ist die Geschwindigkeit und die Formänderungsarbeit **a)** beim unelastischen Stoß, **b)** beim vollkommen elastischen Stoß und **c)** wenn der Verlust 1/2 des Verlustes beim unelastischen Stoß beträgt?

Lösung: **a)** $u = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 4{,}9\,\text{m/s}\,,$

$$A_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)^2 = 127{,}5\,\text{Nm}\,.$$

b) $w_1 = 2u - v_1 = -2{,}2\,\text{m/s},\ w_2 = 2u - v_2 = 6{,}8\,\text{m/s}\,,$
$A_v = 0\,.$

c) $\dfrac{1}{2}\, m w_1^2 + \dfrac{1}{2}\, m_2 w_2^2 = \dfrac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2}\, m_2 v_2^2 - \dfrac{A_v}{2} =$

$$= 288\,\text{Nm} + 67{,}5\,\text{Nm} - 63{,}75\,\text{Nm} = 291{,}75\,\text{Nm} = 291{,}75\,\text{J} =$$

$$= 29{,}73\,\text{kpm}\,.$$

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 93\,\text{kg m/s}$$

$w_1 = 4{,}895\,\text{m/s} \pm 5{,}061\,\text{m/s} = -0{,}166\,\text{m/s}$, da nur das negative Vorzeichen Bedeutung hat; $w_2 = 6{,}1557\,\text{m/s}$.

111. a) Wo findet der unelastische Stoß nützliche technische Anwendung? **b)** Welcher Sonderfall der in Aufg. 109 abgeleiteten Gleichungen liegt dabei vor? **c)** Wie groß sind die Massen m_1 und m_2 zu bemessen, um möglichst günstige Stoßwirkung zu ergeben?

Lösung: **a)** Der Stoß findet technische Anwendung 1. zu Formänderungsarbeiten beim Schmieden und Nieten; 2. zum Erzeugen von Bewegung beim Eintreiben von Nägeln oder Keilen, beim Einrammen von Pfählen.

b) Die Geschwindigkeit der gestoßenen Masse m_2 ist hierbei $v_2 = 0$. Setzt man die Geschwindigkeit des aufschlagenden Hammers $v_1 = v$, so wird die gemeinsame Geschwindigkeit beider Massen nach dem Stoß

$$u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

c) Soll der Stoß zur Erzeugung von Bewegung dienen, so muß die Bewegungsarbeit $A' = (m_1 + m_2)\frac{u^2}{2}$ möglichst groß sein, d. h. die Geschwindigkeit u beider Massen nach dem Stoß möglichst groß sein. Dividiert man in der obigen Gleichung für u Zähler und Nenner durch m_1, so wird $u = \dfrac{v}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}$. Damit u groß wird, muß das Verhältnis $m_2 : m_1$ klein sein, d. h., die schlagende Masse m_1 muß möglichst groß im Vergleich zur geschlagenen Masse m_2 gemacht werden. Der Hammer muß schwer im Verhältnis zum Gewicht des einzuschlagenden Nagels, der Rammbär schwer im Verhältnis zum Gewicht des einzurammenden Pfahls sein. Die Formänderungsarbeit A'' ist hierbei schädliche Arbeit, da sie den Kopf des Nagels oder des Pfahls zerstört ($A'' = A_v$ in Aufg. 110).

Umgekehrt ist beim Schmieden die Formänderungsarbeit A'' nützlich und die Bewegungsarbeit schädlich. Deshalb muß hier u möglichst klein, also in obiger Gleichung für u das Verhältnis $m_2 : m_1$ groß sein. Zu diesem Zwecke wird die geschlagene Masse m_2 des Schmiedestücks durch Hinzufügung eines schweren Ambosses möglichst groß gemacht. Die schädliche Bewegungsarbeit wird dabei durch Zusammendrückung der elastischen Amboßunterlage vernichtet. Ebenso wird beim Nieten die geschlagene Masse des Nietes durch Gegenhalten eines schweren Vorhammers möglichst vergrößert, während der Niethammer leicht sein muß.

112. Bei einem **Fallhammer** fällt der 2000 kp schwere Bär 1,2 m frei herab. Das Gewicht des Ambosses mit Schmiedestück beträgt 16000 kp. Zu berechnen ist **a)** die Aufschlaggeschwindigkeit des Bärs; **b)** die Energie des Bärs beim Auftreffen; **c)** die gemeinsame Geschwindigkeit beider Stoßmassen nach dem Stoß; **d)** die verlorene Bewegungsarbeit beim Schlag; **e)** die zur Formänderung beim Schmieden verwandte Nutzarbeit; **f)** der Wirkungsgrad des Hammers.

Lösung: **a)** $v = \sqrt{2gh} = 4{,}85\,\mathrm{m/s}$.

b) $A = \frac{mv^2}{2} = mgh = 23540\,\mathrm{Nm} = 23540\,\mathrm{J}$.

c) $u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = 0{,}54\,\mathrm{m/s}$.

d) Verlorene Bewegungsarbeit

$$A' = (m_1 + m_2)\frac{u^2}{2} = 2620\,\mathrm{Nm} = 2620\,\mathrm{J}.$$

e) Nützliche Formänderungsarbeit

$$A'' = A - A' = 20\,920\ \mathrm{J}\,.$$

f) $$\eta = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Aufgewandte Arbeit}} = \frac{20\,920}{23\,540} = 89\,\%\,.$$

113. Der Bär einer **Ramme** habe dasselbe Gewicht und dieselbe Fallhöhe wie der Hammerbär in voriger Aufgabe. Das Gewicht des einzurammenden Pfahls beträgt 500 kp. Zu berechnen ist **a)** die Aufschlaggeschwindigkeit des Bärs; **b)** das Arbeitsvermögen des Bärs beim Auftreffen; **c)** die gemeinsame Geschwindigkeit beider Stoßmassen nach dem Stoß; **d)** die nützliche Bewegungsarbeit beim Schlag; **e)** die verlorene Formänderungsarbeit; **f)** der Widerstand, welchen das Erdreich dem eindringenden Pfahle entgegensetzt, wenn die Eindringungstiefe beim letzten Schlage 12 mm beträgt; **g)** die Tragfähigkeit des Pfahls bei 20facher Sicherheit; **h)** der Wirkungsgrad der Ramme.

114. Ein mit Oberdampf betriebener **Dampfhammer** (wie bei Bild 26, Aufg. 30) hat 800 kp Bärgewicht (einschließlich Kolbens und Kolbenstange), 0,9 m Fallhöhe, 290 mm Zylinderdurchmesser, 7600 kp Gewicht des Ambosses mit Schmiedestück. Gesucht wird **a)** das Arbeitsvermögen des Bärs beim Aufschlagen, wenn während des ganzen Fallhubes Oberdampf von 7 at Überdruck über dem Kolben wirkt; **b)** die Geschwindigkeit des Bärs beim Aufschlagen; **c)** die gemeinsame Geschwindigkeit beider Stoßmassen nach dem Stoß; **d)** die verlorene Bewegungsarbeit beim Schlag; **e)** die nützliche Formänderungsarbeit; **f)** der Wirkungsgrad des Hammers.

Anleitung:

a) $$A = \left(m_1 g + \frac{\pi D^2}{4}\, p\right) h = {}^1\!/_2\, m_1 v^2\,.$$

115. Ein **Wasserturm** von 840 Mp Gesamtgewicht ist auf 64 **Eisenbetonpfählen** von quadratischem Querschnitt, 15 m Länge und je 3500 kp Gewicht gegründet. Die Pfähle, mit einem Rammbär von 4 Mp Gewicht und 0,7 m Fallhöhe eingetrieben, drangen unter den letzten zehn Schlägen noch 6 cm tief in den Boden ein. Wie groß ist **a)** die Aufschlaggeschwindigkeit des Rammbärs? **b)** sein Arbeitsvermögen beim Auftreffen? **c)** die gemeinsame Geschwindigkeit beider Stoßmassen nach dem Stoß? **d)** die nützliche Bewegungsarbeit? **e)** die verlorene Formänderungsarbeit? **f)** der Wirkungsgrad der Ramme? **g)** der Widerstand, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt? **h)** der Sicherheitsgrad der Gründung?

Lösung ähnlich wie bei Aufg. 112.

MASSEN-TRÄGHEITSMOMENTE

Berechnung von Massen-Trägheitsmomenten

116. Was versteht man unter einem **Massen-Trägheitsmoment** oder **dynamischen** Trägheitsmoment?

Lösung: Das **polare** Trägheitsmoment eines Flächenteilchens f_1 für eine Achse O (Bild 81) ist $f_1\, l_1^2$ = Fläche mal Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse. Also ist das polare Trägheitsmoment einer aus vielen Flächenteilen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ zusammengesetzten Fläche (Bild 81)

$$J_p = f_1 l_1^2 + f_2 l_2^2 + f_3 l_3^2 + \cdots = \sum f l^2.$$

Ebenso versteht man unter dem Trägheitsmoment eines Massenteilchens das Produkt $m_1 l_1^2$. Das Massen-Trägheitsmoment eines Körpers ist demnach

$$m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2 + \cdots$$

$$= \sum m l^2 = \int \mathrm{d} m \cdot l^2 =$$

$$= \text{dynamisches Trägheitsmoment } J_d .$$

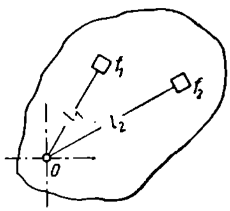


Bild 81

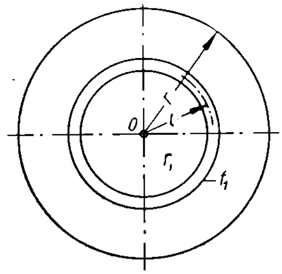


Bild 82

117. Wie groß ist das Massen-Trägheitsmoment eines **Zylinders?**

Lösung: Das polare Trägheitsmoment einer Kreisfläche für die senkrecht zu ihr stehende Achse O (Bild 82, Aufriß) ist

$$J_p = f_1 l_1^2 + f_2 l_2^2 + f_3 l_3^2 + \cdots = \int \mathrm{d} f l^2,$$

wobei f_1, f_2, f_3 unendlich schmale Kreisringflächen bedeuten.
Setzt man $\mathrm{d} f = 2 \pi l \cdot \mathrm{d} l$, so wird

$$J_p = 2\pi \int_0^r l^3 \cdot \mathrm{d} l = \frac{\pi r^4}{2} = \pi r^2 \cdot \frac{r^2}{2} =$$

$$= F \cdot \frac{r^2}{2} = F \frac{d^2}{8} .$$

Setzt man statt der Kreisfläche F die Masse m des Zylinders, so erhält man das dynamische Trägheitsmoment des **Zylinders**

$$J_d = m \frac{d^2}{8} = m \frac{r^2}{2} .$$

118. Was versteht man **a)** unter dem **Trägheitshalbmesser** eines Zylinders und **b)** unter seiner **auf den Umfang bezogenen** (reduzierten) **Masse?**

Lösung: a) Der Trägheitshalbmesser i eines Körpers für eine bestimmte Drehachse ist derjenige Abstand, in dem die ganze Masse m, punktförmig vereinigt, dasselbe Trägheitsmoment liefert wie der Körper, so daß $\boldsymbol{mi^2 = J_d}$ wird.

Für den Zylinder ist

$$J_d = m\frac{r^2}{2} = m i^2 .$$

$$i^2 = r^2 : 2 ; \quad i = r : \sqrt{2} = r : 1{,}41 \approx 0{,}7\, r .$$

Also die ganze Zylindermasse, im Abstande 0,7 r punktförmig angeordnet, würde dasselbe J_d liefern wie der Vollzylinder.

b) Die auf den Umfang bezogene (reduzierte) Masse ist diejenige Masse m', die im Abstande r, d. h. auf dem Zylindermantel, vereinigt sein müßte, um dasselbe Trägheitsmoment wie der Körper zu liefern (auch „Ersatzmasse" genannt). Zum Beispiel beim Vollzylinder

$$J_d = m\frac{r^2}{2} = m' r^2 .$$

$m' = \frac{m}{2}$, d. h. die halbe Masse, im Abstande r punktförmig angeordnet, würde dasselbe Trägheitsmoment liefern wie der Vollzylinder.

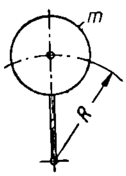


Bild 83

119. Wie kann das **Massen-Trägheitsmoment** berechnet werden, wenn der Schwerpunkt der Masse nicht in die Drehachse fällt?

Lösung: Man kann dann den sog. **Verschiebungssatz** (Steinerscher Satz) anwenden, der besagt, daß das Trägheitsmoment gleich ist der Summe aus dem Trägheitsmoment der Masse um ihre Schwerpunktachse und dem Produkt aus Masse mal Quadrat des Abstandes zwischen Schwerpunkt und Drehachse (s. Festigkeitslehre!).

$$\boldsymbol{J_d = J_{d\,0} + m \cdot R^2 .}$$

120. Was versteht man unter dem **Schwungmoment** einer Masse in bezug auf eine Drehachse?

Lösung: Mit Schwungmoment bezeichnet man den Ausdruck mD^2, der in der Praxis vielfach an Stelle des Trägheitsmomentes J_d benutzt wird. m bedeutet die Masse des Körpers, $D = 2i$ den „Trägheitsdurchmesser" = doppelten Trägheitshalbmesser i (s. Aufgabe 118).

$$J_d = m i^2 = \frac{m D^2}{4} .$$

Demnach **Schwungmoment** $mD^2 = 4 J_d$.
Die Maßeinheit für mD^2 ist kgm².

121. Eine zylindrische **Schmirgelscheibe** hat 500 mm Durchmesser und 80 mm Dicke; Dichte 4 kg/dm³. Zu berechnen ist **a)** die Masse der Scheibe, **b)** das Massenträgheitsmoment für ihre Drehachse, **c)** der Trägheitshalbmesser, **d)** die auf den Umfang bezogene Masse, **e)** das Schwungmoment.

Lösung:

a) $m = 62{,}8\,\text{kg}.$

b) $J_\text{d} = \dfrac{m r^2}{2} = 62{,}8\,\text{kg} \cdot \dfrac{0{,}25^2\,\text{m}^2}{2} = 1{,}962\,\text{kgm}^2.$

c) $i = r : \sqrt{2}$ (s. Aufg. 118a)
$= 0{,}25\,\text{m} : 1{,}41 = 0{,}177\,\text{m}.$

d) $m' = m : 2$ (Aufg. 118b)
$= 62{,}8\,\text{kg} : 2 = 31{,}4\,\text{kg}.$

e) $m D^2 = m\,(2\,i)^2 = 62{,}8\,\text{kg} \cdot 0{,}354^2\,\text{m}^2 = 7{,}87\,\text{kgm}^2.$

Oder nach voriger Aufgabe $m D^2 = 4 \cdot J_\text{d} = 4 \cdot 1{,}962\,\text{kgm}^2 = 7{,}85\,\text{kgm}^2.$

122. Wie groß ist das Massen-Trägheitsmoment eines **Hohlzylinders** (Bild 84)?

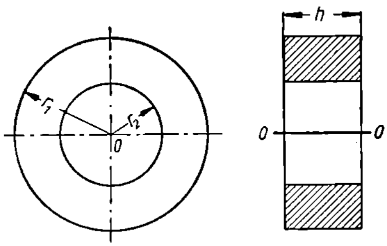
Lösung:

$$J_\text{d} = J_1 - J_2 = m_1 \frac{r_1^2}{2} - m_2 \frac{r_2^2}{2} = (\varrho\, r_1^2 \pi h)\,\frac{r_1^2}{2} - (\varrho\, r_2^2 \pi h)\,\frac{r_2^2}{2}$$

$$= \varrho\,\frac{\pi h}{2}\left(r_1^4 - r_2^4\right) = \varrho\,\pi h\left(r_1^2 - r_2^2\right)\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \boldsymbol{m\,\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}},$$

wobei m die Masse des Hohlzylinders ist.

Bild 84



123. Das **Schwungrad** einer Stoßmaschine hat den skizzierten Längsschnitt. Kranz und Nabe sind durch eine vollwandige, durchgehende Stegscheibe von 50 mm Dicke verbunden. Dichte 7,2 kg/dm³ für Grauguß. Gesucht wird **a)** die Masse des Kranzes, der Stegscheibe, der Nabe und des ganzen Rades; **b)** die Massen-Trägheitsmomente der Teile für die Drehachse O; **c)** der Trägheitshalbmesser des Rades; **d)** die auf den Umfang bezogene Masse des Rades.

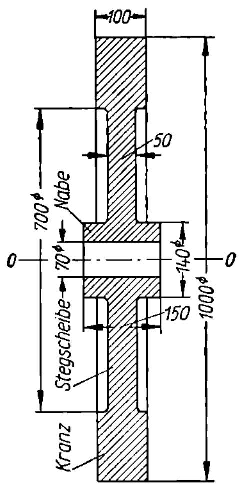


Bild 85

Anleitung: Die Trägheitsmomente des Kranzes $J_d = m \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$, des Steges und der Nabe sind einzeln zu berechnen.

124. Wie groß ist das Massen-Trägheitsmoment eines rechteckigen **Prismas** um die senkrecht zur Papierebene stehende Achse S?

Lösung: Denkt man sich die rechteckige Querschnittsfläche bh des Prismas (Bild 86) in unendlich kleine Flächenteile f zerlegt, so ist

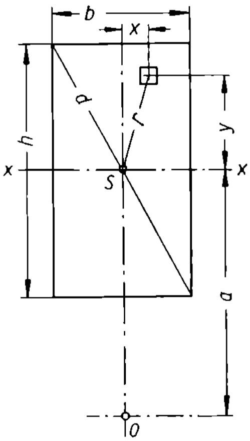


Bild 86

$$J_x = \text{Summe aller } f y^2 = \sum f y^2 = \frac{bh^3}{12}.$$

$$J_y = \text{Summe aller } f x^2 = \sum f x^2 = \frac{hb^3}{12}.$$

Das polare Trägheitsmoment für die senkrecht zur Fläche stehende Achse S ist

$$J_s = \sum f \cdot r^2 = \sum f \cdot (x^2 + y^2) = \sum f x^2 + \sum f y^2 =$$
$$= \frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12} = bh\frac{b^2 + h^2}{12} = F \cdot \frac{d^2}{12},$$

wobei d die Rechteckdiagonale bedeutet. Setzt man statt der Fläche F die Masse m ein, so erhält man für die Längsachse S des Prismas das Massen-Trägheitsmoment $\boldsymbol{J_d = m\frac{d^2}{12}}$, wobei d die Diagonale der Querschnittsfläche des Prismas bedeutet.

Für eine parallel zur Achse S im Abstande a gelegene Achse O (Bild 86) ergibt sich nach dem „Verschiebungssatze" das polare Trägheitsmoment der Rechteckfläche $J = J_s + Fa^2$. Dem entspricht das Massen-Trägheitsmoment

$$\boldsymbol{J = m\frac{d^2}{12} + ma^2}.$$

125. I. Das dynamische Trägheitsmoment ist abzuleiten:

1. für einen sehr schmalen und dünnen Ring,
   a) bezogen auf die y-Achse,
   b) bezogen auf die Achse A—A;
2. für einen breiten, aber sehr dünnen Ring mit den Halbmessern r_1 und r_2,
   a) bezogen auf die y-Achse,
   b) bezogen auf die Achse A—A;
3. für ein Rohr mit den Halbmessern r_2 und r_1 und der Länge l
   a) in bezug auf die äquatorielle Schwerpunktachse y—y,
   b) bezogen auf die Achse A—A;
4. für einen dicken Vollstab mit Kreisquerschnitt,
   a) bezogen auf die Schwerpunktachse,
   b) bezogen auf die Achse A—A.

Lösung: Allgemein ist für eine punktförmige Masse m (vgl. Bild 87)

$$J = m \cdot t^2 = m \cdot (z^2 + x^2)\,.$$

Das polare Trägheitsmoment bei runden Querschnitten ist immer zweimal äquatoriales Trägheitsmoment:

$$J_p = J_x + J_y\,;\; J_x = J_y = {}^1\!/_2 \cdot J_p\,.$$

1. a) Polares Massen-Trägheitsmoment eines dünnen Ringes in bezug auf die z-Achse: $J_z = m r^2$.

Äquatoriales Trägheitsmoment in bezug auf die y-Achse: $J_y = m \dfrac{r^2}{2}$.

b) Mit $z = a$ (Bild 86) wird:

$$J_A = \sum m t^2 = \sum m\,(z^2 + x^2) = \sum m a^2 + \sum m x^2 = J_v + J_y\,,$$

wenn J_v der Anteil infolge der Verschiebung um a ist.

$$J_A = m\left(a^2 + \frac{r^2}{2}\right) \text{ Verschiebungssatz!}$$

2. a) Polar: $J_z = m \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{2}$ (s. Aufg. 122), äquatorial: $J_y = m \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{4}$.

b) $J_A = m\left(a^2 + \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{4}\right)$.

3. a) Das äquatoriale Trägheitsmoment eines dünnen Stabes in bezug auf die Schwerpunktachse ist: $J_y = m \dfrac{l^2}{12}$.

Für ein Rohr gilt:

$$J_y = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r_1^2 + r_2^2}{4}\right).$$

b) $J_A = m\left(a^2 + \dfrac{l^2}{12} + \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{4}\right)$.

4. a) $J_y = m\left(\dfrac{l^2}{12} + \dfrac{r^2}{4}\right)$;

b) $J_A = m\left(a^2 + \dfrac{l^2}{12} + \dfrac{r^2}{4}\right)$.

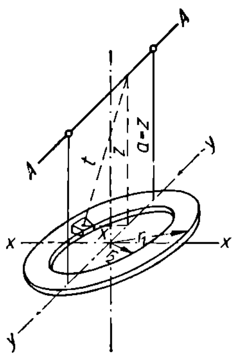


Bild 87

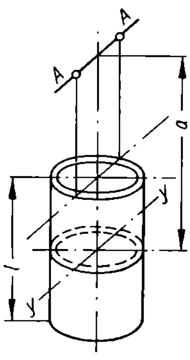


Bild 88

II. Dieselben Fragen sind für ein hohles Prisma zu beantworten. h ist dabei die zur Schwingachse senkrecht stehende Seite des Querschnitts. Index 2 außen, 1 innen, z. B. Masse $m = m_2 - m_1$.

126. Die **Arme eines Rades** haben kreuzförmigen Querschnitt und verjüngen sich nach außen. Man könnte das Trägheitsmoment durch Integration ermitteln. Viel einfacher jedoch ist es, den Arm der Länge nach in zwei gleich lange Teile zu zerlegen und jeden Teil angenähert als Prisma zu behandeln. Wenn die Verjüngung nicht bedeutend ist, erhält man mit zwei Teilen schon genaue Resultate. So ergibt sich bei Zweiteilung in vorliegendem Falle ein Trägheitsmoment der Längsrippe von 8,45 kgm² und bei Vierteilung von 8,37 kgm². Ohne Teilung wird der Fehler größer, es findet sich dann 7,75 kgm². Für jeden Teil der Längsrippe ist:

$$J = m\left[\frac{d^2}{12} + a^2\right]; \quad d^2 = c_s^2 + h^2.$$

An Stelle der Masse kann auch zunächst mit der Fläche gerechnet werden.
Bei der Querrippe hat die Dicke der Rippe einen verschwindend kleinen Einfluß, der jedoch zu vernachlässigen ist. Dann ist für jeden Teil der Querrippe:

$J = m\left[\frac{h^2}{12} + a^2\right]$; $\frac{h^2}{12}$ ergibt sich aus dem äquatorialen Trägheitsmoment einer Rechteckfläche $\frac{bh^3}{12} : (bh) = \frac{h^2}{12}$. Dichte $7200\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

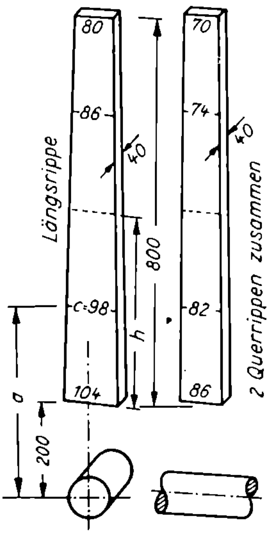


Bild 89

Lösung: Für den unteren Teil der Längsrippe:

$$J_F = f\left[\frac{d^2}{12} + a^2\right];$$

$$f = 0{,}098\,\text{m} \cdot 0{,}4\,\text{m} = 0{,}0392\,\text{m}^2;$$

$$d^2 = 0{,}098^2\,\text{m}^2 + 0{,}4^2\,\text{m}^2 = 0{,}1696\,\text{m}^2;$$

$$a^2 = 0{,}4^2\,\text{m}^2 = 0{,}16\,\text{m}^2;$$

$$J_F = 0{,}0392\,\text{m}^2 \cdot 0{,}174\,\text{m}^2 = 0{,}00681\,\text{m}^4;$$

Massen-Trägheitsmoment

$$J_d = J_F \cdot \delta \cdot \varrho = 0{,}00681\,\text{m}^4 \cdot 0{,}04\,\text{m} \cdot 7200\,\text{kg/m}^3 \doteq$$
$$= 1{,}96\,\text{kgm}^2.$$

a) Trägheitsmoment des oberen Teiles der Längsrippe, b) Trägheitsmoment des unteren und oberen Teiles der Querrippe, c) Gesamtträgheitsmoment, d) Gesamtmasse und Trägheitsradius.

127. Bei dem gußeisernen **Schwungrad** der Aufg. 90 haben die Arme elliptischen Querschnitt. Anstatt dessen sollen die Arme als Prismen angesehen werden, deren rechteckiger Querschnitt überall gleich dem mittleren elliptischen Armquerschnitt ist und sich nicht verjüngt. Prismenquerschnitt 160 mm · 80 mm = 12800 mm² (Ellipse $\pi \cdot 90$ mm · 45 mm = 12723 mm²). Alle anderen Angaben s. Aufg 90.
a) Die Gewichte des Kranzes, der 6 Arme, der Nabe und das Gesamtgewicht, b) Massen-Trägheitsmoment des Kranzes, der 6 Arme, der Nabe und Gesamtträgheitsmoment, c) prozentualer Anteil der Einzelgewichte am ganzen, d) prozentualer Anteil der Einzelträgheitsmomente am ganzen Trägheitsmoment, e) Trägheitsradius und mD^2, f) auf den äußeren Kranzumfang reduzierte Masse.

Bemerkung: Es zeigt sich, daß der Anteil der außen liegenden Massen am Trägheitsmoment verhältnismäßig größer ist, als den Massen entspricht. Die Masse eines Kranzes wächst mit dem Radius nur einfach, das Trägheitsmoment aber quadratisch.

Zu b) s. Aufg. 124. $d^2 = 1{,}38^2\,\mathrm{m}^2 + 0{,}16^2\,\mathrm{m}^2$ bei den Armen.

128. Für das skizzierte **Schwungrad** aus Grauguß von 5000 mm Außendurchmesser sollen dieselben Fragen **a)** bis **f)** wie in voriger Aufg. 127 gelöst werden (Bild 90).

129. Es ist das Schwungmoment der im Bild 91 gezeichneten **Ilgner-Schwungscheibe** graphisch zu ermitteln.

$$\text{Maßstab: } 1\,\mathrm{mm}^2 \mathrel{\hat{=}} 50\,\mathrm{dm}\cdot 0{,}1\,\mathrm{dm} = 5\,\mathrm{dm}^2.$$

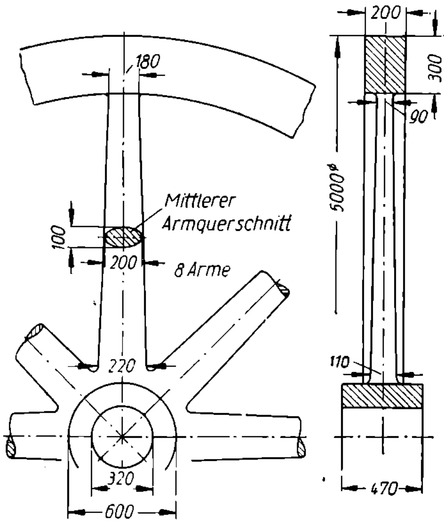


Bild 90

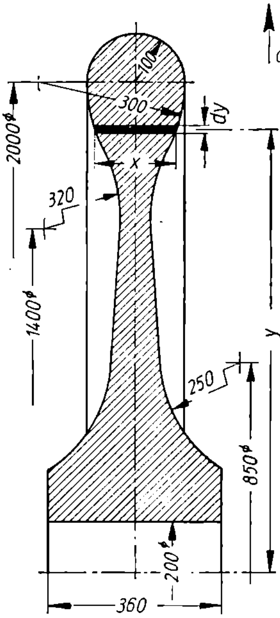


Bild 91

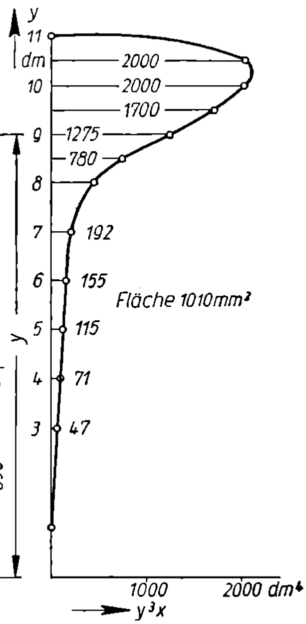


Bild 92

Lösung: Bei einer unregelmäßig geformten Scheibe ist eine graphisch-rechnerische Lösung die einfachste und genaueste.

$$\text{Es ist } mD^2 = \int \varrho \cdot 2\pi y \cdot \mathrm{d}y \cdot x \cdot (2y)^2 = 8\pi\varrho \cdot \int y^3 x \cdot \mathrm{d}y\,.$$

Man bildet die Funktion $y^3 x$ für eine ganze Anzahl y und trägt die gefundenen Werte über der y-Achse auf (Bild 92). Die Fläche unter der entstehenden Kurve ist $\int y^3 x \cdot \mathrm{d}y$. Unter Berücksichtigung des Maßstabes ist dann auch mD^2 gefunden. Wie groß ist mD^2 bei $\varrho = 7{,}5\,\mathrm{kg/dm}^3$?

130. Es ist für die gezeichnete **Schwungscheibe** (Bild 93) das mD^2 zu ermitteln. $\varrho = 7{,}5\,\mathrm{kg/dm}^3$.

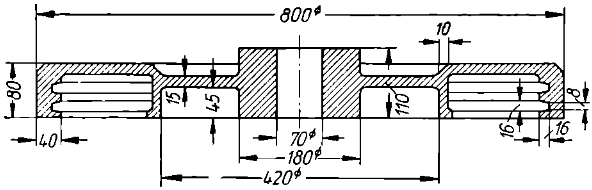


Bild 93

Arbeitsvermögen bzw. Energie kreisender Massen

Die **Energie** oder das **Arbeitsvermögen** eines Körpers (Masse m) mit fortschreitender Bewegung, d. h. einer Bewegung auf einer Geraden, wobei alle Massenteilchen dieselbe Geschwindigkeit v haben, ist nach Menge-Zimmermann, Band I

$$A = {}^1/_2 \cdot m v^2.$$

131. Wie groß ist das Arbeitsvermögen eines um die Achse O **kreisenden** (rotierenden) **Körpers** (Bild 94)?

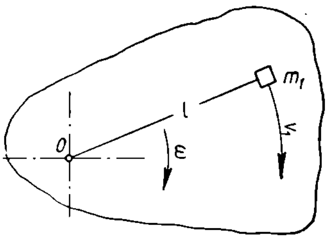


Bild 94

Lösung: Die einzelnen Massenteilchen m_1, m_2, ... haben je nach ihrem Abstande l_1, l_2, ... von der Drehachse verschiedene Geschwindigkeiten v_1, v_2, ...

Das gesamte Arbeitsvermögen ist

$$A = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + \cdots$$

Nun ist $v_1 = l_1 \omega$, $v_2 = l_2 \omega$, ...

Also $$A = \frac{1}{2}\left(m_1 l_1^2 \omega^2 + m_2 l_2^2 \omega^2 + m_3 l_3^2 \omega^2 + \cdots\right) = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m l^2 .$$

Der Klammerausdruck ist nach Aufgabe 116 gleich dem Trägheitsmomente J_d der Gesamtmasse. Also Arbeitsvermögen

$$\boldsymbol{A = \frac{\omega^2}{2} \cdot J_d} .$$

Anmerkung: Öfters wird an Stelle des Buchstabens A der Buchstabe E für Energie benutzt.

132. Wie groß ist das Arbeitsvermögen eines kreisenden **Schwungrings** von den Radien r_1 und r_2 und der Masse m (Bild 90)?

$$r_1 = 12\,\text{dm}; \; r_2 = 8\,\text{dm}.$$

Lösung: $$A = \frac{\omega^2}{2} \cdot J_d = \frac{\omega^2}{2} \cdot m \, \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} \text{ (s. Aufg. 121)} .$$

Der mittlere Halbmesser des Ringes ist $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Das Quadrat des Trägheitshalbmessers ist

$$i^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}.$$

r_m^2 ist also nur annähernd i^2.

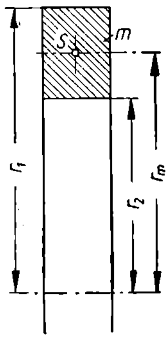


Bild 95

Angenähert wäre also

$$A = \frac{\omega^2}{2} \cdot m r_m^2 = \frac{m}{2} (r_m \omega)^2 = \frac{m v_m^2}{2},$$

wobei v_m mittlere Ringgeschwindigkeit.
Die letztere, meist benutzte Formel für das Arbeitsvermögen eines Schwungrings beruht auf der Annahme, daß sämtliche Masseteilchen des Ringes dieselbe mittlere Geschwindigkeit v_m hätten. Dabei ist der Unterschied der Geschwindigkeiten am äußeren und inneren Umfang vernachlässigt. Also ist diese Formel nur annähernd richtig. Der genaue Ausdruck für das Arbeitsvermögen eines kreisenden Schwungrings ist

$$\boldsymbol{A = \frac{\omega^2}{2} \cdot J_d}.$$

133. Der skizzierte **Schwungradkranz** eines Dieselmotors hat 1600 mm Außendurchmesser und die Dichte 7,2 kg/dm³ für Grauguß. Es soll berechnet werden **a)** die Masse des Kranzes; **b)** das Massen-Trägheitsmoment; **c)** das Arbeitsvermögen bei 360 U/min; **d)** die Zahl der Umläufe, die das Rad beim Auslaufen, durch die Zapfenreibung verzögert, bis zum Stillstande noch ausführt. Dabei ist beim Versuch das Kurbelgetriebe entfernt. Der Zapfendurchmesser beträgt 90 mm, die Reibungszahl 0,07. **e)** die Zeit des Ablaufens; **f)** das Schwungmoment (s. Aufg. 119).

Lösung: a) Die Rechnung ergibt $m = 823$ kg;

$$\text{b)}\ J_d = m \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = 823 \frac{0{,}8^2\,\text{m}^2 + 0{,}6^2\,\text{m}^2}{2} = 411{,}5\ \text{kgm}^2,$$

c) Die mittlere Kranzgeschwindigkeit ist $v_m = 26{,}389$ m/s.

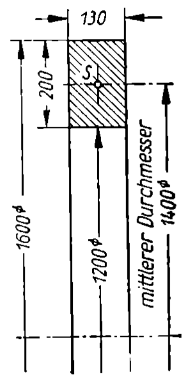


Bild 96

Also ist das Arbeitsvermögen angenähert

$$\frac{m v_m^2}{2} = 286\,943\ \text{Nm} = 29\,250\ \text{kpm}.$$

Genau ist das Arbeitsvermögen $\frac{\omega^2}{2} \cdot J_d$.

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi 360}{\text{min}} = 37{,}699 \cdot 1/\text{s}.$$

$$A = \frac{37{,}699^2}{2\,\text{s}^2} \cdot 411{,}5\ \text{kgm}^2 = 292\,800\ \text{Nm} = 29\,850\ \text{kpm}.$$

Der Unterschied beträgt 29850 kpm — 29250 kpm = 600 kpm. Der Fehler x in Prozent ergibt sich aus $x\,\% : 100\,\% = 600\,\text{kpm} : 29850\,\text{kpm}$

$$x = 2\,\%.$$

d) Das Arbeitsvermögen 29850 kpm wird durch den Reibungswiderstand $P_w = \mu G$ am Zapfenumfang auf einem Wege s aufgezehrt. Also heißt die Arbeitsgleichung: $29850\,\text{kpm} = \mu G s = 0{,}07 \cdot 823\,\text{kp} \cdot s$. Daraus $s = 518\,\text{m} = \pi d z$, wobei z die bei der Auslaufbewegung bis zum Stillstande noch ausgeführte Zahl der Umläufe bedeutet.

$$z = 518\,\text{m} : \pi 0{,}09\,\text{m} = 1830 \text{ Umläufe.}$$

e) Für die gleichförmig verzögerte Umfangsbewegung des Zapfens gilt:

$$s = \frac{v}{2}\,t, \text{ wobei } v = \text{Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens},$$

$$v = \frac{0{,}09\,\text{m}\,\pi\,360}{\text{min}} = 1{,}697\,\text{m/s}.$$

$$t = 2s : v = 2 \cdot 518\,\text{m} : 1{,}697\,\text{m/s} = 610\,\text{s} \approx 10\,\text{min}.$$

f) Schwungmoment $mD^2 = m(2\,i)^2 = m\;4i^2$. Nun ist $J_d = 411{,}5\,\text{kgm}^2 = mi^2 = 823\,\text{kg}\,i^2$; $i^2 = 0{,}5\,\text{m}^2$. $mD^2 = 823\,\text{kg} \cdot 4 \cdot 0{,}5\,\text{m}^2 = 1646\,\text{kgm}^2$ oder: $mD^2 = 4 \cdot J_d = 4 \cdot 411{,}5\,\text{kgm}^2 = 1646\,\text{kgm}^2$.

134. Der in Aufg. 68 skizzierte **Rotor** eines 25pferdigen Elektromotors wiegt mit Zubehör (Wicklung, Welle, Riemenscheibe) 83 kp. Der Gesamtschwerpunkt S hat die angegebene Lage. Die Drehzahl 1140 U/min des Ankers wird beim freien Auslaufen durch die Reibung an den beiden Zapfen von 55 und 65 mm Durchmesser allmählich verringert, so daß der Rotor bis zum Stillstande noch 1530 Umläufe ausführt. Gesucht werden **a)** die Zapfenbelastung A und B, **b)** die während der Auslaufbewegung durch die Zapfenreibung aufgezehrte Arbeit bei einer Reibungszahl 0,05; **c)** das dynamische Trägheitsmoment der umlaufenden Massen; **d)** der Trägheitshalbmesser; **e)** das Schwungmoment (s. Aufg. 120); **f)** die Zeitdauer des Auslaufens.

135. Das in Aufg. 123 behandelte **Schwungrad** einer Stoßmaschine hat ein Massen-Trägheitsmoment $J_d = 62{,}25\,\text{kgm}^2$. Es ist auf der Vorgelegewelle der Stoßmaschine angeordnet und macht 120 U/min. **a)** Wie groß ist das Arbeitsvermögen des Rades bei dieser Drehzahl? **b)** Wie groß ist der Schneidwiderstand am Meißel der Stoßmaschine, wenn nach plötzlichem Abfallen des Treibriemens der Meißel noch 2,5 Schnitthübe bis zum Stillstand ausführt? Die Schnittlänge bei jedem Hube beträgt 180 mm, der Wirkungsgrad des Triebwerkes 70 %. Das Arbeitsvermögen des übrigen Räderwerkes wurde vernachlässigt.

Anleitung zu b): $A\eta = 2{,}5\,P \cdot s$.

136. Ein 4 m langer **prismatischer Stab** (Bild 97) kippt aus der senkrechten Stellung um seinen Stützpunkt O. Wie groß ist **a)** sein Massen-Trägheitsmoment für Achse O? **b)** die auf das Stabende A bezogene Masse? **c)** das Arbeitsvermögen des Stabes beim

Aufschlagen auf die waagerechte Ebene? **d)** die Aufschlaggeschwindigkeit der Spitze A auf den Boden?

Lösung: a) Nach Aufg. 124 ist

$$J = J_s + ma^2 = m\frac{d^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \approx m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{ml^2}{3}.$$

b) Die Masse $\frac{m}{3}$, am Stabende A punktförmig angeordnet, würde für Achse O das berechnete Trägheitsmoment $\frac{m}{3} \cdot l^2$ liefern (Aufg. 117). Also ist $\frac{m}{3}$ die auf das Stabende bezogene Masse.

c) Beim Umkippen des Stabes durchfällt sein im Schwerpunkte S angreifendes Gewicht $G = mg$ die Höhe $\frac{l}{2}$. Also wird das Arbeitsvermögen

$$G \cdot \frac{l}{2} = \frac{\omega^2}{2} J = \frac{\omega^2}{2} \frac{ml^2}{3},$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit beim Aufschlagen bezeichnet.

d) Aus der letzten Gleichung folgt:

$$G = \omega^2 \frac{ml}{3} = mg$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} = \frac{3 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{4\ \mathrm{m}} = 7{,}36\ {}^1/\mathrm{s}^2$$

$$\omega = 2{,}71\ \mathrm{rad/s};\quad v = l\omega = 4\ \mathrm{m} \cdot 2{,}71\ 1/\mathrm{s} = 10{,}84\ \mathrm{m/s}.$$

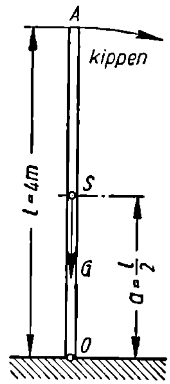


Bild 97

137. Eine **Pumpe** mit Schwungrad, durch Riemen angetrieben, fördert minutlich 2,4 m³ Wasser auf 45 m Höhe bei 112 U/min und Wirkungsgrad 80 %. Nach plötzlichem Abfallen des Riemens macht sie noch 7 Umdrehungen bis zum Stillstande. **a)** Wieviel Wasser wird während der Auslaufbewegung noch gehoben? **b)** Wieviel mechanische Antriebsarbeit müssen die umlaufenden Massen dazu an die Pumpe abgeben? **c)** Wie groß ist das dynamische Trägheitsmoment der umlaufenden Massen?

138. Ein **Gasmotor** liefert bei 120 U/min eine Nutzleistung von 870 PS. Entnimmt man ihm 940 PS, so fällt die Drehzahl innerhalb 38 Sekunden auf 110 U/min **a)** Wieviel mechanische Arbeit müssen die umlaufenden Schwungmassen während dieser Zeit abgeben? **b)** Wie groß ist das dynamische Trägheitsmoment der umlaufenden Massen? **c)** Wie groß ist der Leerlaufwiderstand, bezogen auf den Umfang des Schwungrades von 4,8 m Durchmesser, wenn der Motor nach Absperren des Gases innerhalb 7 Minuten von 120 U/min bis zum Stillstande ausläuft? **d)** Wie viele Pferdestärken macht die Leerlaufarbeit im Betriebe aus?

Anleitung: b) $A = {}^1/_2 J_d (\omega_1^2 - \omega_2^2)$; **c)** ${}^1/_2 J_d \omega_1^2 = P \cdot s$; $s = \frac{v}{2} t$;

139. Bei der elektrischen F ö r d e r m a s c h i n e eines Bergwerks wird die Arbeit des antreibenden Elektromotors während der Förderpausen in einem schweren **Schwung-**

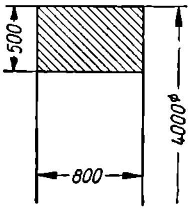


Bild 98

rade aufgespeichert und von diesem während des Förderhubes wieder abgegeben (Ausführung von Ilgner). **a)** Wie groß ist das Gewicht des Schwungringes von den in Bild 98 gegebenen Abmessungen und der Dichte 7,85 kg/dm³ für Stahlguß? **b)** Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Rades, wenn der Beitrag der Arme und Nabe durch 10 % Zuschlag zum Trägheitsmomente des Ringes berücksichtigt wird? **c)** Wieviel Arbeit gibt das Schwungrad ab, wenn seine Drehzahl während des Förderhubes von 360 auf 330 U/min fällt? **d)** Mit wieviel PS muß der Motor während der 45 Sekunden langen Förderpause an dem Schwungrade arbeiten, um es wieder auf 360 U/min zu bringen?

140. Wie erfolgt die **Reduktion** der Trägheitsmomente verschiedener miteinander kämmender Räder auf eine Radwelle?
Bei einem Zahnräderpaar habe das Rad auf Welle 1 J_{d_1} und ω_1, das Rad auf Welle 2 J_{d_2} und ω_2.

Arbeitsvermögen: $A = {}^1/_2 J_{d_1} \cdot \omega_1^2 + {}^1/_2 J_{d_2} \cdot \omega_2^2$

$$A = {}^1/_2 J_{d_1} \cdot \omega_1^2 + {}^1/_2 J_{d_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cdot \omega_1^2 = {}^1/_2 \left[J_{d_1} + J_{d_2} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \omega_1^2 .$$

$J_{d_2} \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$ ist das auf Welle 1 reduzierte Trägheitsmoment der Welle 2. Entsprechend kann auch $m D_2^2 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$ gesetzt werden.

141. Eine **Schmirgelscheibe** hat ein $m_1 D_1^2 = 8\ \mathrm{kgm^2}$ und macht $n_1 = 1200$ U/min. Der Antrieb erfolgt durch einen Motor von 1,9 PS Leistung, dessen Drehzahl $n_2 =$ $= 2600$ U/min und dessen Schwungmoment $m_2 D_2^2 = 0{,}26\ \mathrm{kgm^2}$ ist.
Wie groß ist das gesamte **a)** auf die Motorwelle und **b)** auf die Scheibenwelle reduzierte Schwungmoment und Trägheitsmoment?

$$\textbf{a)}\ (m_2 D_2^2)_{\mathrm{red}} = m_1 D_1^2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + m_2 D_2^2 = 8\,\mathrm{kgm^2} \left(\frac{1200\ \mathrm{min^{-1}}}{2600\ \mathrm{min^{-1}}}\right)^2 + 0{,}26\,\mathrm{kgm^2} = 1{,}96\,\mathrm{kgm^2}$$

$$J_{2\,\mathrm{red}} = \frac{1{,}96\ \mathrm{kgm^2}}{4} = 0{,}49\,\mathrm{kgm^2}$$

$$\textbf{b)}\ (m_1 D_1^2)_{\mathrm{red}} = m_2 D_2^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + m_1 D_1^2 = 0{,}26\,\mathrm{kgm^2}\,\frac{2600^2\ \mathrm{min^{-1}}}{1200\ \mathrm{min^{-1}}} + 8\,\mathrm{kgm^2} = 9{,}22\,\mathrm{kgm^2}$$

$$J_{1\,\mathrm{red}} = \frac{9{,}22\ \mathrm{kgm^2}}{4} = 2{,}305 .$$

Arbeitsvermögen: $A = {}^1/_2 J_{2\,\mathrm{red}} \cdot \omega_2^2 = 18\,100\ \mathrm{Nm} =$
$= {}^1/_2 J_{1\,\mathrm{red}} \cdot \omega_1^2 = 18\,100\ \mathrm{Nm}$.

142. Mit einer **Hanfseilwinde** wird eine Last herabgelassen. Infolge Unachtsamkeit wird die Seilgeschwindigkeit sehr hoch. Dennoch soll die Last mittels Bandbremse auf kurzer Strecke abgebremst werden können.

Last $G = 10$ kp; Seilgeschwindigkeit $v = 2$ m/s; Länge des Seiles $L = 38$ m; Seildurchmesser $d = 40$ mm; Seildichte $\varrho = 1$ kg/dm³; Zahnraddurchmesser $2\,R_1 = 1000$ mm; Ritzeldurchmesser $2\,R_2 = 250$ mm; Bremsscheibendurchmesser $2\,R_3 = 300$ mm; $m_1 D_1^2$ des Zahnrades 45 kgm²; $m_2 D_2^2$ aller Massen auf der Ritzelwelle 2 kgm²; Reibungsziffer der Bandbremse $\mu = 0{,}4$.

a) Trägheitsmoment der Trommel allein. Es sind nur der zylindrische Teil, die 2 Seitenwände als durchgehend und die 2 Ränder zu berechnen. Die Naben und die Welle können vollständig vernachlässigt werden ($\varrho = 7{,}4$ kg/dm³).

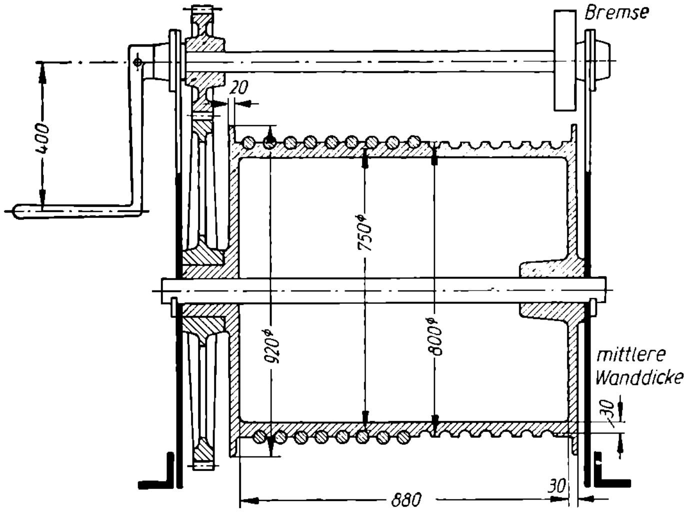


Bild 99

b) Reduzierte Masse m' des Seiles und der Last zusammen, deren Ersatzträgheitsmoment, Trägheitsmoment des Zahnrades und Gesamtträgheitsmoment an der Trommelwelle.

c) Auf die Trommelwelle reduziertes Trägheitsmoment der Ritzelwelle, Gesamtträgheitsmoment aller Massen.

d) Arbeitsvermögen aller Massen.

e) Verzögerung des Seiles, Winkelverzögerung an der Trommelwelle, erforderliches Drehmoment an der Trommel- und Kurbelwelle, wenn die Last auf einem Weg von 1 m zum Halten gebracht werden soll.

f) Erforderliche Umfangskraft an der Bremsscheibe und Kräfte P_1 und P_2 im Bremsband, wenn der Umfassungswinkel 180° beträgt.

g) Im Seil auftretende Höchstspannung, wenn 20 kg Seil noch herabhängen.

Anleitung: Zu e) $b = \dfrac{v^2}{2 \cdot s}$; zu f) $P_1 = P_u \cdot \dfrac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}$; $P_u = P_1 - P_2$.

143. Eine **Kugel** von 20 cm Durchmesser rollt auf einer unter 30° geneigten Ebene mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 infolge ihres Eigengewichts beschleunigt 9 m weit abwärts (Bild 100). Welche Endgeschwindigkeit erlangt ihr Mittelpunkt dabei, wenn der Hebelarm der rollenden Reibung $f = 0{,}1$ cm ist? Das dynamische Trägheitsmoment einer Kugel ist $J_d = m\frac{2\,r^2}{5}$.

Lösung: Die Seitenkraft $G \sin\alpha$ der Schwere leistet auf dem Wege $s = 9$ m die Arbeit $G \sin\alpha \cdot s$. (Oder anders gedeutet: Der Kugelschwerpunkt senkt sich um die Höhe $h = s \cdot \sin\alpha$; dabei leistet die Schwerkraft G dieselbe Arbeit $Gs \cdot \sin\alpha$.) Diese Arbeit dient dazu, um der Kugel das Arbeitsvermögen $\frac{m v^2}{2}$ der fortschreitenden Bewegung und das Arbeitsvermögen $\frac{\omega^2}{2} \cdot J_d$ der drehenden Bewegung mitzuteilen und um den entgegenwirkenden Widerstand P_w der rollenden Reibung auf dem Wege s zu überwinden. Letzterer, auf den Kugelmittelpunkt bezogen, ergibt sich aus der Gleichung der statischen Momente für den Stützpunkt X der Kugel:

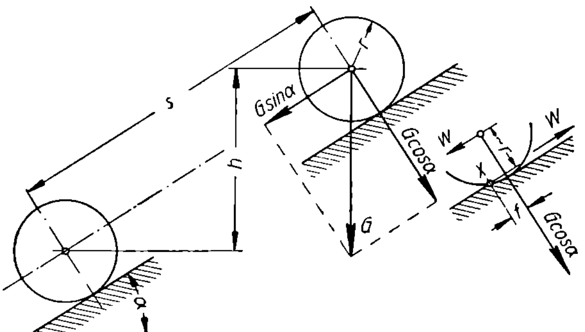


Bild 100

$$G \cos\alpha \cdot f \approx P_w r\,; \quad P_w = G \cos\alpha \frac{f}{r}\,.$$

Die Arbeitsgleichung mit $G = mg$ heißt dann:

$$mg \sin\alpha \cdot s = \frac{m v^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} J_d + mg \cos\alpha \cdot \frac{f}{r} s\,.$$

Da $v = \omega r$ ist, solange die Kugel nicht rutscht, so kann auch ein reduziertes Trägheitsmoment gebildet werden.

$$J_{d\,red} \cdot \frac{\omega^2}{2} = m \frac{v^2}{2} + J_d \cdot \frac{\omega^2}{2} = m \frac{r^2 \omega^2}{2} + m i^2 \frac{\omega^2}{2} =$$

$$= {}^1/_2\, m \omega^2 (r^2 + i^2)\,; \quad i^2 = \frac{2}{5} r^2\,; \quad r^2 = \frac{5}{2} i^2$$

$$J_{d\,red} = m (r^2 + i^2) = m \frac{7}{5} r^2 = m \frac{7}{2} i^2 = \frac{7}{2} J_d\,.$$

m fällt aus der Gleichung heraus, d. h., die Masse der Kugel ist ohne Einfluß, da sowohl die treibenden als auch die hemmenden Kräfte proportional m sind. Setzt man $\omega = \frac{v}{r}$, so wird

$$g\left(\sin\alpha \cdot s - \cos\alpha \cdot \frac{f}{r} s\right) = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{r^2 2} \frac{2\,r^2}{5}\,; \text{ daraus } v = 7{,}87 \text{ m/s}\,.$$

Wie groß ist v, wenn eine zylindrische **Scheibe** von 20 cm Durchmesser herabrollt? Die übrigen Angaben sind dieselben.

Lösung: $v = 7{,}6054$ m/s.

144. Eine **Räderpresse** (Bild 101) wird über ein zweifaches Rädergetriebe unter Zwischenschaltung von Schwungrädern angetrieben. Der Motor an Welle 1 und die Räder laufen dauernd; dagegen wird die Kurbelwelle nur bei zu leistender Arbeit durch eine Reibungskupplung, die zwischen dem Schwungrad der Welle 4 und der Kurbelwelle sitzt, eingeschaltet. Dann setzt sich die Kurbel in Bewegung.

Die Kupplung wird nach Beendigung des Arbeitsspieles im höchsten Stand des Schlittens automatisch getrennt, und die Kurbelwelle wird abgebremst, so daß sie etwa im oberen Totpunkt stehenbleibt.

Die Drehzahlen vor Beginn des Arbeitshubes und die Schwungmomente der einzelnen Räder sind aus Bild 102 zu entnehmen. Gewicht des Schlittens $G_5 = 10$ Mp, Kurbelradius $r = 200$ mm, Motorleistung $N = 44$ PS, Wirkungsgrad des Rädergetriebes $\eta = 0{,}8$.

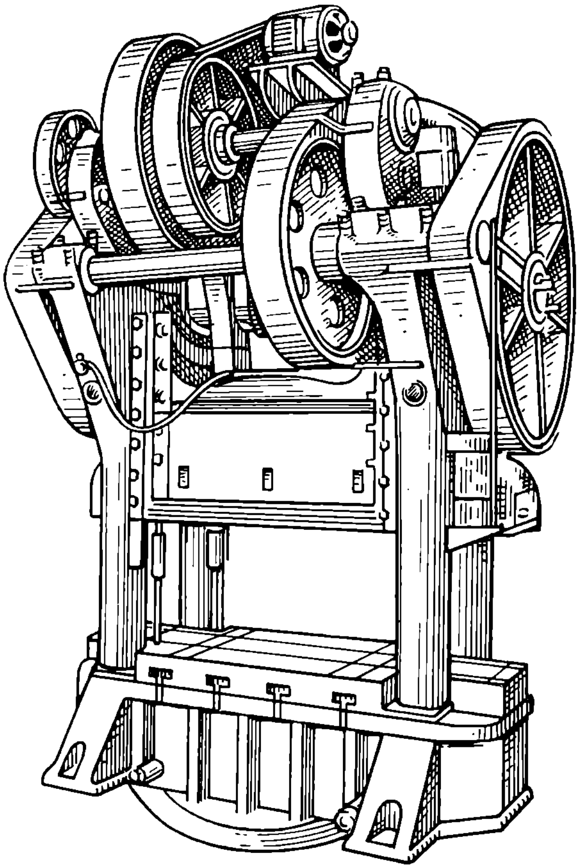


Bild 101

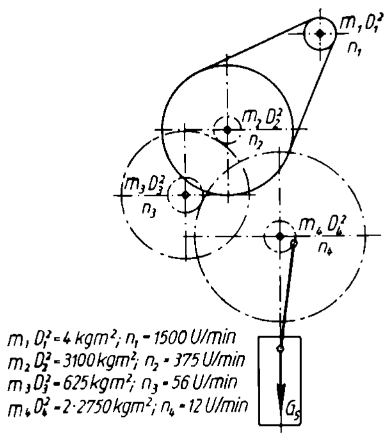


Bild 102

a) Wie groß ist die Energie (Arbeitsvermögen) der Schwungmassen vor Beginn des Arbeitshubes?

b) Wie groß ist die Arbeit, wenn die Arbeitsdruckkraft 350 Mp beträgt, 30° vor dem unteren Totpunkt beginnt und bis zum unteren Totpunkt anhält?

c) Wie groß sind nach geleisteter Arbeit die Energie der Schwungmassen und die Drehzahl der Welle 4?

d) Um wieviel nimmt die Drehzahl der Welle 4 beim Aufwärtsgang des Schlittens bis zum oberen Totpunkt wieder zu?

e) Welche Energie ist nach Entkupplung abzubremsen?

Lösung: a) $E_1 = \sum {}^1/_2\, J_d \omega^2;\quad J_d = \frac{m D^2}{4}$

$$E_1 = \frac{1}{8}\,[m_1 D_1^2 \omega_1^2 + m_2 D_2^2 \omega_2^2 + m_3 D_3^2 \omega_3^2 + m_4 D_4^2 \omega_4^2] =$$

$$= \frac{1}{8}\,\omega_4^2 \left[m_1 D_1^2 \left(\frac{n_1}{n_4}\right)^2 + m_2 D_2^2 \left(\frac{n_2}{n_4}\right)^2 + m_3 D_3^2 \cdot \left(\frac{n_3}{n_4}\right)^2 + m_4 D_4^2\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\,\omega_4^2 \left[4\,\mathrm{kg\,m^2} \cdot \left(\frac{1500\ \mathrm{U/min}}{12\ \mathrm{U/min}}\right)^2 + 3100\,\mathrm{kg\,m^2} \left(\frac{375\ \mathrm{U/min}}{12\ \mathrm{U/min}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 625\,\mathrm{kg\,m^2} \left(\frac{56\ \mathrm{U/min}}{12\ \mathrm{U/min}}\right)^2 + 2 \cdot 2750\,\mathrm{kg\,m^2}\right];$$

$$\omega_4 = \frac{2\pi n_4}{\mathrm{min}} = \frac{2\pi \cdot 12}{\mathrm{min}} = 1{,}257\ \mathrm{s^{-1}};\quad \omega_4^2 = 1{,}575\ \mathrm{s^{-2}};$$

$$E_1 = 612694\ \mathrm{Nm}$$

b) Bei 30° vor Totpunkt beträgt der Arbeitsweg:

$$s = r - r \cdot \cos 30° = 0{,}2\ \mathrm{m}\ (1 - 0{,}866) = 0{,}0268\ \mathrm{m},$$

also Arbeit $Ps = 350000\ \mathrm{kp} \cdot 0{,}0268\ \mathrm{m} = 9380\ \mathrm{kpm} = 92020\ \mathrm{Nm}$.

c) Ist 30° vor dem unteren Totpunkt die Drehzahl n_4 noch gleich 12 U/min, so ist die Geschwindigkeit des Schlittens an diesem Punkt:

$$v_5 \approx r\omega_4 \cdot \sin(180° - 30°) = r\omega_4 \cdot \sin 30° =$$
$$= 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot 1{,}257\ \mathrm{s^{-1}} \cdot 0{,}5 = 0{,}1257\ \mathrm{m/s}.$$

Energie des Schlittens ${}^1/_2 m_5 v_5^2 = {}^1/_2 \cdot 10000\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}1257^2\ \mathrm{m^2/s^2} = 79\ \mathrm{Nm}$.

Das Gewicht des Schlittens leistet die Arbeit $G_5 s$.

Die Zeit t, während die Arbeit geleistet wird, ergibt sich, da die Drehzahl nur sehr wenig abnimmt, zu

$$t \approx \frac{30°}{360° \cdot n_4} = \frac{30 \cdot 60\ \mathrm{s}}{360 \cdot 12} = 0{,}417\ \mathrm{s}.$$

Energie nach geleisteter Arbeit im unteren Totpunkt:

$$E_2 = E_1 + {}^1/_2 m_5 v_5^2 + G_5 s + N t \eta - Ps = 534180\ \mathrm{Nm}.$$

$$E_2 \approx \frac{1}{8} \cdot \omega_4'^2 \cdot 3111700\ \mathrm{kg\,m^2};$$

$$\omega_4'^2 = \frac{534\,180\,\mathrm{Nm} \cdot 8}{3\,111\,700\,\mathrm{kg\,m^2}} \approx 1{,}374\,\mathrm{s^{-2}};\ \omega_4' = 1{,}172\,\mathrm{rad/s};$$

$$n_4' = \frac{\omega_4'}{2\pi} = \frac{1{,}174}{2\pi \cdot \mathrm{s}} = 11{,}2\,\mathrm{U/min}\,.$$

d) Zeit für den Aufwärtsgang:

$$t \approx \frac{180°}{360°\,n_4'} \approx \frac{180 \cdot 60\,\mathrm{s}}{360 \cdot 11{,}2} \approx 2{,}73\,\mathrm{s}\,.$$

Energie nach dem Aufwärtsgang:

$$E_3 = E_2 + Nt\eta - G_5 \cdot 2r = 585\,266\,\mathrm{Nm}\,.$$

$$E_3 \approx \frac{1}{8} \cdot \omega_4''^2 \cdot 3\,111\,700\,\mathrm{kg\,m^2};$$

$$\omega_4''^2 = \frac{585\,266\,\mathrm{Nm} \cdot 8}{3\,111\,700\,\mathrm{kg\,m^2}} = 1{,}505\,\mathrm{s^{-2}};\ \omega_4'' = 1{,}227\,\mathrm{rad/s};$$

$$n_4'' = \frac{\omega_4''}{2\pi} = \frac{1{,}227}{2\pi \cdot \mathrm{s}} = 11{,}70\,\mathrm{U/min}\,.$$

Die Drehzahl der Welle 4 nimmt beim Rückgang um 0,50 U/min zu.

e) Nach Entkupplung im oberen Totpunkt ist die Energie des Schlittens Null. Sehr schnell nimmt dann die Drehzahl zu, so daß sie beim nächsten Spiel wieder 12 ist.

145. Eine **Presse** derselben Bauart wie in vorhergehender Aufgabe hat eine Motorleistung von 90 PS, die Drehzahlen $n_1 = 1500$ U/min, $n_2 = 375$ U/min, $n_3 = 56$ U/min und $n_4 = 7$ U/min; die Schwungmomente $m_1D_1^2 = 7$ kgm², $m_2D_2^3 = 9800$ kgm², $m_3D_3^2 = 1050$ kgm² und $m_4D_4^2 = 2 \cdot 9000$ kgm². Kurbelradius $r = 250$ mm. Die Arbeit beginnt 40° vor dem unteren Totpunkt, Arbeitsdruckkraft 700 Mp. Schlittengewicht $G_5 = 10$ Mp, Getriebewirkungsgrad $\eta = 0{,}8$.

a) Wie groß ist die Energie der bewegten Massen bei Beginn der Arbeit, 4° vor dem unteren Totpunkt?

b) Wie groß ist die Energie der bewegten Massen und die Drehzahl der Welle 4 im unteren Totpunkt?

146. Bei einer **Reibrollen-Friktionspresse** können die Reibrollen automatisch auf „Ab" und „Auf" geschaltet werden, so daß in der Minute etwa 30 Arbeitsspiele zustande kommen (Bild 103). Motorleistung $N = 3{,}4$ PS, Motordrehzahl $n_1 = 950$ U/min, Schwungmoment des Motorläufers und des dazugehörigen Schwungrades $m_1D_1^2 = 1{,}6$ kgm², Schwungraddrehzahl $n_2 = 150$ U/min, Schwungmoment des Schwungrades $m_2D_2^2 = 47{,}4$ kgm², Gewicht des Stößels $G_3 = 190\,\mathrm{kp} + 53\,\mathrm{kp} = 225\,\mathrm{kp}$, Steigung der Spindel $h_0 = 150$ mm, Spindelhub $h = 330$ mm, Wirkungsgrad des Getriebes $\eta = 0{,}7$.

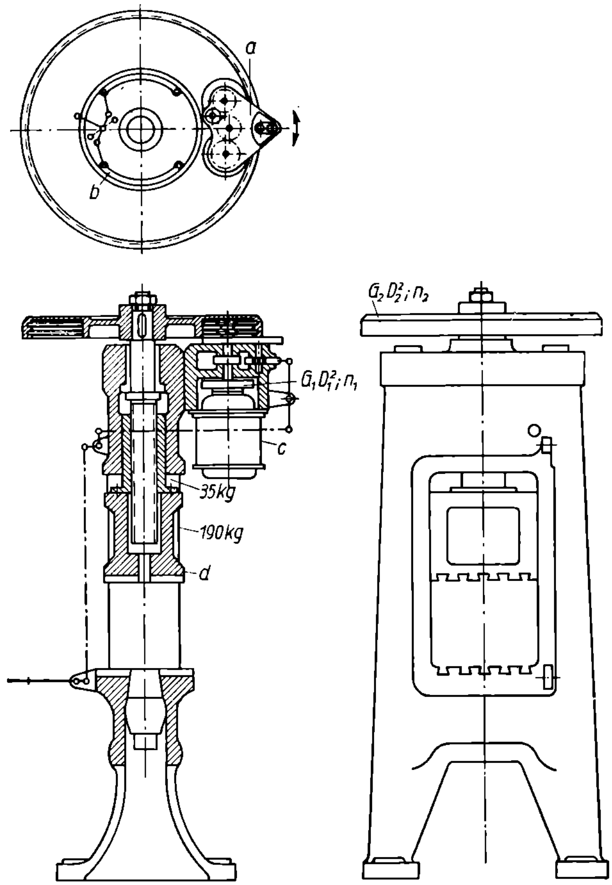


Bild 103

a) Welche Arbeitsdruckkräfte kann der Motor allein ohne Berücksichtigung des Schwungrades und ohne Drehzahlverringerung erzeugen?

b) Auf welchem Weg s kann der Stößel die Arbeitsdruckkräfte von 2500, 5000 und 10000 kp ausüben, wenn dabei das Schwungrad seine Drehzahl auf 50 U/min verringert?

Lösung: a) Drehmoment der Motorwelle $M_{t_1} = \dfrac{N}{2\pi n_1}$ oder $\dfrac{M_{t_1}}{\text{kpm}} = 716{,}2\,\dfrac{N/\text{PS}}{n_1/\text{min}^{-1}}$,

Drehmoment der Spindel $\quad M_{t_2} = M_{t_1} \cdot \dfrac{n_1}{n_2} \cdot \eta$,

Arbeit bei einer Umdrehung der Spindel $P_0 h_0 = 2\pi M_{t_2}$,

Arbeitsdruckkraft $P_0 = \dfrac{2\pi M_{t_2}}{h_0} = \dfrac{N\eta}{h_0 \cdot n_2}$

$$P_0 = \frac{3{,}4\ \text{PS} \cdot 0{,}7\ \text{min}}{0{,}15\ \text{m} \cdot 150} = \frac{3{,}4 \cdot 75\ \text{kpm} \cdot 0{,}7 \cdot 60\ \text{s}}{0{,}15\ \text{m} \cdot \text{s} \cdot 150}$$

$$P_0 = 476\ \text{kp} = 4670\ \text{N}.$$

b) $Ps = {}^1/_2 \frac{1}{4} mD^2 \cdot (\omega_2^2 - \omega_2'^2) + g\, m_3 s + {}^1/_2 m_3 v_3^2 + P_0 s\,.$

Die Energie des bewegten Schlittens kann vernachlässigt werden $({}^1/_2 m_3 v_3^2 \approx 0)$.

$$mD^2 = m_z D_2^2 + m_1 D_1^2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 47{,}4\,\text{kg}\,\text{m}^2 + 1{,}6\,\text{kg}\,\text{m}^2 \left(\frac{950\,\text{U/min}}{150\,\text{U/min}}\right)^2 = \\ = 111{,}8\,\text{kgm}^2\,.$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2 = \frac{2\pi \cdot 150}{60\,\text{s}} = 15{,}7\,\text{rad/s}\,.$$

$$\omega_2' = \frac{2\pi \cdot 50}{60\,\text{s}} = 5{,}23\,\text{rad/s}\,.$$

$$s \cdot (P - g\, m_3 - P_0) \approx \frac{1}{8} \cdot 111{,}8\,\text{kgm}^2 \cdot (246\,\text{s}^{-2} - 27{,}3\,\text{s}^{-2}) = 3050\,\text{Nm} = \\ = 310\,\text{kpm}\,.$$

$$s = \frac{310\,\text{kpm}}{P - 225\,\text{kp} - 476\,\text{kp}} = \frac{310\,\text{kpm}}{P - 701\,\text{kp}}\,.$$

$P = 2500\,\text{kp}$; $5000\,\text{kp}$; $10000\,\text{kp}$.

$s = 0{,}169\,\text{m}$; $0{,}071\,\text{m}$; $0{,}0327\,\text{m}$.

Hauptträgheitsachsen, Trägheitsellipse

147 A. Für den gezeichneten **Schwungring** sind **a)** die Hauptträgheitsmomente, **b)** die Hauptträgheitshalbmesser gesucht.

Lösung: Es gibt im Raume drei Hauptträgheitsachsen und drei Hauptträgheitsmomente.

a) $J_x = \int \mathrm{d}m \cdot (y^2 + z^2)$;

$J_y = \int \mathrm{d}m\,(x^2 + z^2)$;

$J_z = m r_1^2 = \int \mathrm{d}m\,(x^2 + y^2)$.

Eine sehr dünne Ringscheibe im Abstand z von der x-Achse hat ein polares Trägheitsmoment:

$$J_{z_1} = m_1 r_1^2 = \int \mathrm{d}m_1 \cdot (x^2 + y^2) = \\ = \int \mathrm{d}m_1\, x^2 + \int \mathrm{d}m_1\, y^2 = J_{y_1} + J_{x_1}\,,$$

da $J_{x_1} = J_{y_1}$ wegen der Symmetrie ist,

so ist $J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{J_{z_1}}{2}$,

$$\int \mathrm{d}m_1\, x^2 = \int \mathrm{d}m_1\, y^2 = \frac{m_1 r_1^2}{2}\,.$$

Analog Aufg. 125 ergibt sich

$$J_x = J_y = \frac{m r_1^2}{2} + \frac{m h^2}{12} ,$$

$$J_z = m r_1^2 .$$

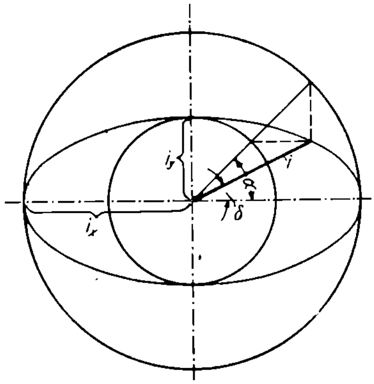


Bild 104

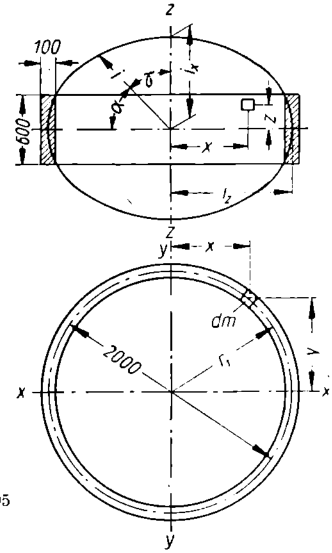


Bild 105

b) Mit $r_1 = 1\,\mathrm{m}$ wird $i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_x}{m}} = 0{,}728\,\mathrm{m}$,

$$i_z = r_1 = 1\,\mathrm{m} .$$

147 B. Für eine beliebige Achse, welche mit den x-, y- und z-Achsen die Winkel α, und γ einschließt, besteht die Beziehung:

$$\boldsymbol{J_d = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma} ,$$

$$\boldsymbol{i^2 = i_x^2 \cos^2\alpha + i_y^2 \cos^2\beta + i_z^2 \cos^2\gamma} .$$

Das ist die Gleichung eines Ellipsoides. Dabei ist $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
Für die Ebene gilt:

$$i^2 = i_x^2 \cos^2\alpha + i_y^2 \cdot \sin^2\alpha .$$

In nebenstehendem Bild ist zu erkennen, daß die Richtung von i nicht mit der Richtung der Drehachse unter α übereinstimmt. Das i, das zu α gehört, liegt in der Richtung

$$\tan\delta = \frac{i_y}{i_x} \cdot \tan\alpha .$$

Setzt man $i_x = \frac{1}{a}$, $i_y = \frac{1}{b}$, $i_z = \frac{1}{c}$ und $i = \frac{1}{r}$,

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta \text{ und } z = r\cos\gamma ,$$

so wird

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} .$$

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoides. Somit liegen alle Trägheitsradien auf einem Ellipsoid. In der Ebene ergibt sich eine Ellipse.

148 A. Es ist das **Massen-Trägheitsmoment** und der **Trägheitsradius** eines Schwungringes, welcher die Abmessungen des Bildes 105 in Aufg. 147 hat, zu berechnen, und zwar in bezug auf eine Achse, welche mit der x-Achse den $\sphericalangle\ \alpha = 45°$, mit der y-Achse den $\sphericalangle\ \beta = 90°$ und mit der z-Achse den $\sphericalangle\ \gamma = 45°$ hat. $\varrho = 7{,}8\ \mathrm{kg/dm^3}$.

Lösung: Es besteht die Beziehung:

$$\boldsymbol{J_d = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \cos^2\beta + J_z \cdot \cos^2\gamma}\ ,$$

somit:

$$J_d = J_x \cdot 0{,}5 + J_y \cdot 0 + J_z \cdot 0{,}5 = \left(\frac{m r_1^2}{2} + \frac{m h^2}{12}\right) \cdot 0{,}5 + m r_1^2 \cdot 0{,}5 =$$

$$= \frac{3}{4} m r_1^2 + \frac{m h^2}{24}\ ,$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{m}} = \sqrt{\frac{3}{4} r_1^2 + \frac{h^2}{24}} = 0{,}8737\ \mathrm{m}\ ,$$

$$m = 2\pi r_1 \cdot b \cdot h \cdot \varrho = 2940\ \mathrm{kg}\ ,$$

$$J_d = m i^2 = 2250\ \mathrm{kgm^2}\ .$$

148 B. Wie groß ist das **Arbeitsvermögen,** d. h. die Energie, wenn ein Ring mit den Abmessungen wie in Aufg. 147 A sich um die Achse, welche mit den Hauptträgheitsachsen die $\sphericalangle\ \alpha = 45°$, $\sphericalangle\ \beta = 90°$ und $\sphericalangle\ \gamma = 45°$ einschließt, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 20\ \mathrm{rad/s}$ drehen würde? Dichte $\varrho = 7{,}3\ \mathrm{kg/dm^3}$.

Lösung: Es war $J_d = {}^3/_4 m r_1^2 + \dfrac{m h^2}{24} = m i^2$,

$$m = 2\pi r_1 b h \varrho = 2750\ \mathrm{kg}\ ,$$

$$J_d = 2750\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}8737\ \mathrm{m})^2 = 2100\ \mathrm{kgm^2}\ ,$$

$$E = {}^1/_2 J_d \omega^2 = {}^1/_2 \cdot 2100\ \mathrm{kgm^2} \cdot 400\ \mathrm{s^{-2}} = 420\,000\ \mathrm{Nm} = 42\,800\ \mathrm{kpm}\,.$$

Anmerkung: Zerlegt man eine durch einen Vektor dargestellte Winkelgeschwindigkeit nach 3 Hauptrichtungen (Bild 106), so erhält man:

$$\omega_x = \omega \cdot \cos\alpha,\quad \omega_y = \omega \cdot \cos\beta,\quad \omega_z = \omega \cdot \cos\gamma\,.$$

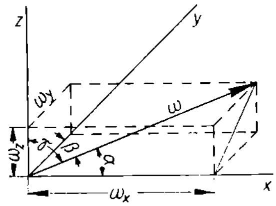


Bild 106

Es muß denn auch sein:

$$E = {}^1/_2 J_x \omega_x^2 + {}^1/_2 J_y \omega_y^2 + {}^1/_2 J_z \omega_z^2\ ,$$

$$\omega_x^2 = 0{,}5\omega^2;\quad \omega_y^2 = 0,\quad \omega_z^2 = 0{,}5\omega^2;$$

$$E = {}^1/_2 \left(\frac{m r_1^2}{2} + \frac{m h^2}{12}\right) \cdot {}^1/_2 \omega^2 + {}^1/_2 m r_1^2 \cdot {}^1/_2 \omega^2 =$$

$$= {}^1/_2 \left(\frac{3}{4} m r_1^2 + \frac{m h^2}{24}\right) \cdot \omega^2 = {}^1/_2 J_d \omega^2\,.$$

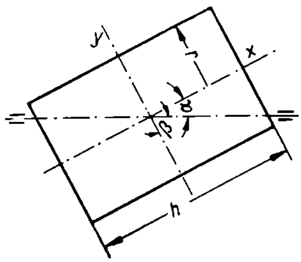


Bild 107

149. Eine Mischtrommel ist nach Bild 107 so angeordnet, daß ihre Hauptachse mit der Welle einen Winkel von 30° umschließt. Masse $m = 800$ kg, Drehzahl $n = 120$ U/min, $h/r = 3$, $r = 0{,}5$ m.

a) J_d, b) Arbeitsvermögen.

Anleitung: $J_y = J_z = m\dfrac{r^2}{4} + m\dfrac{h^2}{12}, \quad J_x = m\dfrac{r^2}{2}.$

BESCHLEUNIGTE DREHBEWEGUNG

Drehbeschleunigung

150. Was versteht man unter **Winkelbeschleunigung** einer Drehbewegung?

Lösung: Führt ein Massenteilchen m auf einer Kreisbahn (Bild 108) unter dem Einfluß einer treibenden Umlaufskraft P eine gleichförmig beschleunigte Drehbewegung aus, so ist

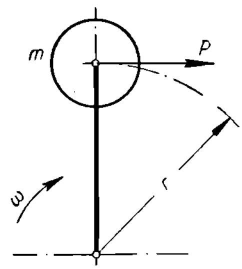


Bild 108

Beschleunigung b = Zunahme der Geschwindigkeit in 1 Sekunde.

Winkelbeschleunigung ε = Zunahme der Winkelgeschwindigkeit in 1 Sekunde.

Das heißt, die Umfangsgeschwindigkeit v wächst in jeder Sekunde um den Betrag b; die Winkelgeschwindigkeit ω wächst in jeder Sekunde um den Betrag ε.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung = 0, so ist

nach 1 Sekunde $v = b$, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \varepsilon$,
nach 2 Sekunden $v = 2b$, Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\varepsilon$,
nach t Sekunden $v = bt$, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \varepsilon t$.

Für gleichförmige Drehbewegung gilt: $v = r\omega$,
für beschleunigte Drehbewegung gilt: $b = r\varepsilon$.

Daraus ergeben sich die Maßeinheiten

$$[\omega] = \left[\frac{v}{r}\right] = \frac{\text{m/s}}{\text{m}} = \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}};$$

$$[\varepsilon] = \left[\frac{b}{r}\right] = \frac{\text{m/s}^2}{\text{m}} = \frac{1}{\text{s}^2} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist auch Zunahme des Winkels, dividiert durch die zugehörige Zeit:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}; \quad \alpha \text{ im Bogenmaß}.$$

Die Winkelbeschleunigung ist entsprechend

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Zum Beispiel braucht ein **Elektromotor** beim Anlaufen aus dem Ruhezustande 7 Sekunden, um in gleichförmig beschleunigter Drehbewegung 1500 U/min zu erreichen. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung?

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 1500}{60\,\mathrm{s}} = 157\,\mathrm{rad/s}; \qquad \varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{157\,\mathrm{rad/s}}{7\,\mathrm{s}} = 22{,}4\,\mathrm{rad/s^2}\,.$$

151. Welches **Drehmoment** ist erforderlich, um eine Masse in beschleunigte Drehbewegung um eine Achse O zu versetzen?

Lösung: Ein Massenteilchen m_1 im Abstande l_1 von der Drehachse (Bild 109) gebraucht eine Beschleunigungskraft

$$m_1 b_1 = m_1 l_1 \varepsilon\,,$$

also ein beschleunigtes Drehmoment

$$m_1 l_1 \varepsilon\, l_1 = m_1 l_1^2 \varepsilon\,.$$

Für die Drehbeschleunigung des ganzen, aus vielen Massenteilen m_1, m_2, m_3, ... zusammengesetzten Körpers ist demnach erforderlich ein Drehmoment

$$M_\mathrm{t} = m_1 l_1^2 \varepsilon + m_2 l_2^2 \varepsilon + m^2 l_3^2 \varepsilon + \cdots =$$
$$= \varepsilon \cdot (\text{Summe aller } m l^2)\,.$$

Der Klammerausdruck ist nach Aufg. 115 gleich dem dynamischen Trägheitsmomente J_d. Also

$$\boldsymbol{M_\mathrm{t} = J_\mathrm{d} \cdot \varepsilon = J_\mathrm{d} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}\,.$$

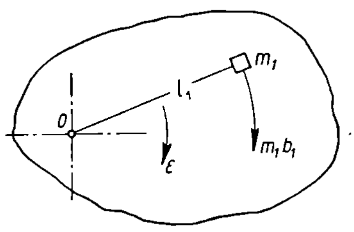


Bild 109

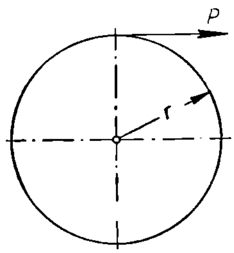


Bild 110

152. Die **Walze** eines Blechwalzwerks (Bild 110) hat 800 mm Durchmesser und 3000 mm Länge; Dichte des Flußstahls 7,85 kg/dm³. Es soll berechnet werden **a)** die Masse der Walze; **b)** das Massenträgheitsmoment für die Drehachse; **c)** die Winkelbeschleunigung für den Fall, daß die Walze in 1 ½ s aus dem Ruhezustande auf 36 U/min gleichförmig beschleunigt wird; **d)** die Umfangsbeschleunigung; **e)** die für die Anlaufbewegung erforderliche Umfangskraft; **f)** das Arbeitsvermögen der Walze bei 36 U/min.

Lösung: **a)** 11840 kg,

b) $J_d = m\frac{r^2}{2} = 947{,}2\,\text{kg}\,\text{m}^2$,

c) $\omega = \varepsilon \cdot t = 3{,}77\,\text{rad/s}; \quad \varepsilon = 2{,}51\,\text{rad/s}^2$,

d) $b = r \cdot \varepsilon = 0{,}4\,\text{m} \cdot 2{,}51\,\text{rad/s}^2 \approx 1\,\text{m/s}^2$,

e) $M_t = \varepsilon \cdot J_d = 2{,}51\,\text{rad/s}^2 \cdot 947{,}2\,\text{kg}\,\text{m}^2 = 2377\,\frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2377\,\text{Nm}$,

$$P = \frac{M_t}{r} = 5944\,\text{N} = 605\,\text{kp},$$

f) $E = \frac{\omega^2}{2} \cdot J_d = {}^1\!/_2 \cdot 377^2\,\text{s}^{-2} \cdot 947{,}2\,\text{kg}\,\text{m}^2 = 6730\,\text{Nm}$.

153. Bei einer Rotationsmaschine wird der Papierstreifen von einer drehbar gelagerten zylindrischen **Papierrolle** von 1060 mm Durchmesser und 710 mm Breite mit 2,1 m sekundlicher Geschwindigkeit abgewickelt (Bild 110 wie bei voriger Aufg.). **a)** Wie schwer ist die Rolle bei einer Dichte 0,8 kg/dm³? Die dünne Stahlachse der Rolle werde bezüglich Masse als dem Papier gleichwertig angesehen. **b)** Wie groß ist das Massenträgheitsmoment der Rolle für ihre Drehachse? **c)** Welche Winkelbeschleunigung erfährt die Rolle, wenn die Maschine beim Anlassen durch den Antriebsmotor innerhalb 3 Sekunden auf die volle Betriebsgeschwindigkeit gleichförmig beschleunigt wird? **d)** Wie groß ist die Beschleunigung des abgewickelten Papierstreifens? **e)** Welches Drehmoment ist erforderlich, um die Rolle in beschleunigte Drehbewegung zu versetzen? **f)** Welche Umfangskraft übt der Papierstreifen dabei an der Rolle aus? **g)** Wieviel Arbeitsvermögen steckt in der im Betrieb befindlichen vollen Rolle?

154. Ein **Schleifstein** hat 2900 mm Durchmesser, 400 mm Dicke (Bild 111) und die Dichte 2 kg/dm³. Zu berechnen ist **a)** seine Masse; **b)** das Massenträgheitsmoment für die Drehachse; **c)** die Winkelbeschleunigung, wenn der Stein innerhalb 80 s aus dem Ruhezustande auf 50 U/min gleichförmig beschleunigt wird; **d)** die hierbei von dem antreibenden Riemen auszuübende Umfangskraft bei 900 mm Durchmesser der Riemenscheibe, die Massenwirkung der letzteren werde vernachlässigt; **e)** das Arbeitsvermögen des Steins bei 50 U/min; **f)** die Zahl der Umläufe, die der Stein nach Abfallen des Riemens noch ausführt, bis er durch Zapfenreibung zum Stillstand gebracht wird. Der Zapfendurchmesser beträgt 70 mm, die Reibungszahl der Lager 0,06 (s. Aufg. 126).

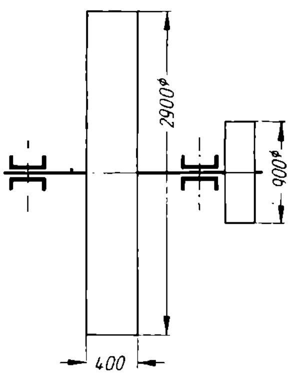


Bild 111

155. Die hohlzylindrische **Trommel** einer Fördermaschine (Bild 112) hat 2200 mm Außendurchmesser, 50 mm Wanddicke, 2600 mm Länge und die Dichte 7,2 kg/dm³ für

Grauguß. Das auf die Trommel aufzuwindende Drahtseil vom Eigengewicht 2,4 kp/m trägt den Förderkorb von 1600 kp Eigengewicht und die Nutzlast 1900 kp. Letztere soll aus 430 m Tiefe gehoben werden, so daß sie in 7 s auf eine Geschwindigkeit 12 m/s gleichförmig beschleunigt wird. Zu berechnen ist **a)** die vom Seil an der Trommel ausgeübte Umfangskraft im Ruhezustand und **b)** während der beschleunigten Anfahrbewegung; **c)** die Masse des Trommelmantels; **d)** das Massenträgheitsmoment der Fördertrommel so, daß das Trägheitsmoment der Arme und Nabe durch 10 % Zuschlag zum Trägheitsmomente des hohlzylindrischen Mantels berücksichtigt wird; **e)** die Winkelbeschleunigung der Trommel beim Anfahren; **f)** das zum Beschleunigen der Trommelmasse aufzuwendende Drehmoment; **g)** die erforderliche gesamte Antriebskraft am Trommelumfang beim Anfahren. **h)** Um wieviel Kilopond und um wieviel Prozent muß diese Kraft während der Beschleunigung größer sein als während der gleichförmigen Fahrt?

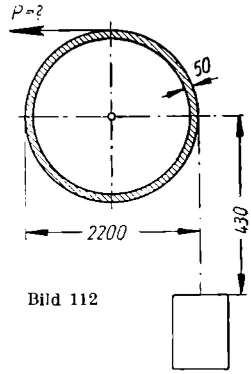


Bild 112

156. Das in Aufg. 90 behandelte **Schwungrad** von 3600 mm Durchmesser hat ein gesamtes Massenträgheitsmoment 7900 kgm² und einen Trägheitshalbmesser $i =$ $= 1{,}503$ m. Das Rad soll beim Anlaufen der Maschine innerhalb 19 s aus dem Ruhezustande auf 160 U/min gleichförmig beschleunigt werden. Gesucht wird **a)** die Winkelbeschleunigung; **b)** das zur Beschleunigung des Rades von der Welle auszuübende Drehmoment; **c)** die Biegespannung, die infolge der Massenwirkung des Rades in den sechs Armen an ihrem Einmündungsquerschnitt in der Nabe auftritt. Wegen der mangelhaften Elastizität des starren Armsterns ist erfahrungsgemäß anzunehmen, daß nur ein Drittel aller Arme sich an der Aufnahme des Biegemoments beteiligt.

Lösung:

a) $\varepsilon = \omega : t = 16{,}755\,\text{rad/s} : 19\,\text{s} = 0{,}882\,\text{rad/s}^2$.

b) $M_t = \varepsilon J_d = 0{,}882\,\text{rad/s}^2 \cdot 7900\,\text{kg}\,\text{m}^2 = 6970\,\text{Nm}$.

c) Die gesamte Masse des Rades kann im Abstande $i = 1{,}503$ m von der Drehachse punktförmig vereinigt gedacht werden. Die Massenträgheitskraft P ergibt sich daher aus $M_t = Pi$ zu $P = M_t : i = 6970\,\text{Nm} : 1{,}503\,\text{m} = 4640\,\text{N}$ (472 kp). Da der Nabenhalbmesser 220 mm beträgt, hat P vom Nabenumfang den Abstand $l = 1{,}503 - 0{,}22 =$ $= 1{,}283$ m. Das Biegemoment im Einmündungsquerschnitt der Arme in die Nabe ist daher

$$M_b = P \cdot l = 60\,600\,\text{kpcm} = \sigma_b \cdot \frac{6}{3} W = \sigma_b \cdot 2\,W\,.$$

Das Widerstandsmoment des elliptischen Armquerschnitts an der Nabe ist

$$W = \frac{\pi a^2 b}{32} \left(\text{entsprechend } \frac{\pi d^2}{32} \text{ beim Kreise}\right),$$

wobei $a = 20$ cm und $b = 10$ cm die Ganzachsen der Ellipse sind.

$$W = \frac{\pi\, 20^2\,\text{cm}^2 \cdot 10\,\text{cm}}{32} = 393\,\text{cm}^3;$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{2\,W} = \frac{60\,600\,\text{kpcm}}{2 \cdot 393\,\text{cm}^3} = 77\,\text{kp/cm}^2\,.$$

157. Das in Aufg. 128 skizzierte **Schwungrad** von 5000 mm Durchmesser wird bei 112 U/min durch ein an der Welle ausgeübtes Bremsmoment in 32 s in gleichförmig verzögerter Auslaufbewegung zum Stillstande gebracht. Sein gesamtes Massenträgheitsmoment für die Drehachse beträgt 38 600 kgm², der Trägheitshalbmesser 2,095 m. Gesucht wird **a)** die Winkelverzögerung; **b)** die Größe des wirksamen Bremsmoments; **c)** das bei der Bremswirkung in den Armen an ihrer Einmündung in die Nabe auftretende Biegemoment; **d)** das Widerstandsmoment des gefährdeten elliptischen Armquerschnitts an der Nabe; **e)** die in den acht Armen auftretende größte Biegespannung unter der Annahme, daß wegen der Starrheit des Armsystems nur ein Drittel aller Arme an der Aufnahme des Biegemoments teilnimmt.

158. Eine Walzenzugmaschine hat ein **Schwungrad** von 6700 mm Durchmesser nach Bild 113. Die acht Armpaare bestehen aus je zwei Flußstahlschienen vom Rechteckquerschnitt 300 mm · 80 mm. Zu berechnen ist **a)** die Masse des Kranzringes so, daß voller Rechteckquerschnitt 700 mm · 500 mm und die Dichte 7,2 kg/dm³ für Grauguß angenommen wird; **b)** das Massenträgheitsmoment des Rades für die Drehachse so, daß der Beitrag der Arme und Nabe durch 5 % Zuschlag zum Trägheitsmoment des Kranzes berücksichtigt wird; **c)** der Trägheitshalbmesser der Rades so, daß die Massen der Arme und Nabe durch 20 % Zuschlag zur Masse des Kranzes berücksichtigt werden; **d)** die Winkelbeschleunigung für den Fall, daß das Schwungrad beim Anlassen der Maschine innerhalb 35 s aus dem Ruhezustande auf 140 U/min gleichförmig beschleunigt wird; **e)** das hierfür aufzuwendende Drehmoment der Welle; **f)** das infolge der Massenbeschleunigung entstehende Biegemoment, das die Arme zusammen an ihrem Einmündungsquerschnitt in die Nabe aufzunehmen haben. Der äußere Nabendurchmesser beträgt 2000 mm. **g)** die in diesem gefährdeten Armquerschnitt auftretende Biegespannung unter der Annahme, daß sämtliche Arme sich gleichmäßig an der Aufnahme des Biegemoments beteiligen.

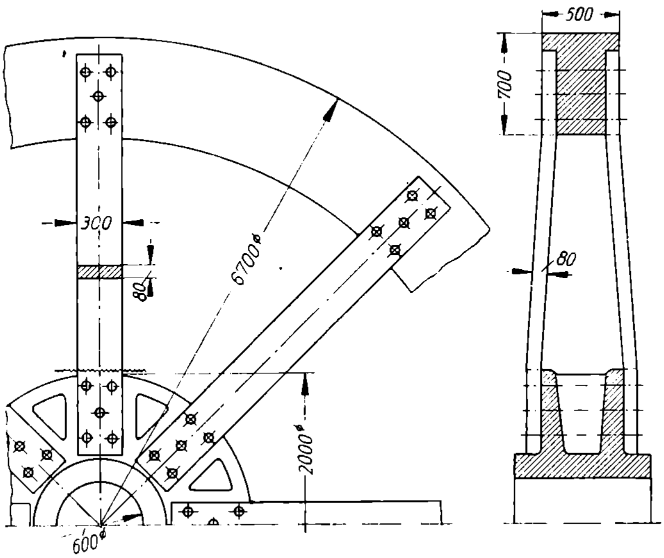


Bild 113

159. Bei einem Aggregat **Drehstrom-Kurzschlußläufer-Kohlenstaub-Schlägermühle** soll durch Versuch das Beschleunigungsdrehmoment M_B und das übrigbleibende Restdrehmoment M_R beim Anfahren der leeren Mühle in Abhängigkeit von der Drehzahl bestimmt werden. Die Schläger sind abgenutzt. Ihr mD^2 ist 590 kgm² (gegenüber 850 kgm² bei einer neuen Mühle). Das mD^2 des Motorläufers ist 30 kgm². Das Drehmoment des Motors in Abhängigkeit von der Drehzahl ist bekannt. Gemessen wird die elektrische Leistung N_{el}, die Drehzahl n und die zugehörige Zeit t. Verkürzt folgen hier einige Angaben:

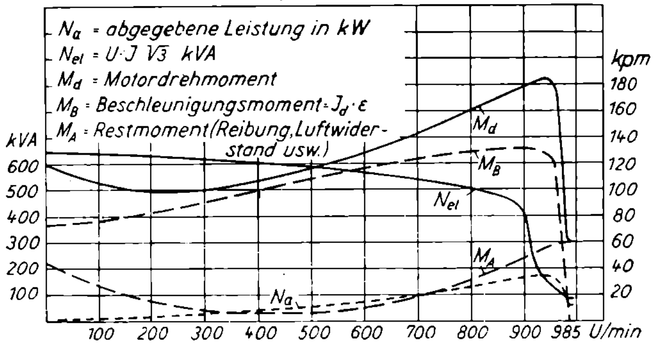


Bild 114

n in U/min	0	100	200	300	400	500	600	800	850	900	910	950	985
N_{el} in kVA	640		628		603		563	500	473	425	310	140	80
M_d in kpm	120	105,8	99	100,5	106,5	116,5	128,5	160,5	169,5	178,5	180,3	183	60

beim Versuch gemessen:

t in s	0	2	4	6	8	10	12	14	15	15,5	16,3
n in U/min	0	92	189	291	410	538	678	831	910	949	985

a) dn/dt ist graphisch zu ermitteln (s. Aufg. 10) und M_B zu berechnen. **b)** M_B und das Restmoment M_R ist in Abhängigkeit von n aufzutragen. (Das Restmoment ist durch Reibung, Schmutz und Luftwiderstand hervorgerufen.) **c)** Wie groß wären im Verhältnis dn/dt und die Anlaufzeit, wenn die Schläger neu wären?

Gemeinsame geradlinige und Drehbeschleunigung

160. Eine **Rolle** mit der Masse $m = 6$ kg hängt an einem massenlosen **Faden**, der um sie herumgeschlungen ist. Die Rolle wird losgelassen. Welche Bewegung entsteht, und wie groß ist die **Seilspannkraft**?
Rollengewicht $G = mg = 58{,}86$ N, Trägheitshalbmesser $i = 0{,}1$ m, $r = 0{,}15$ m (s. Bild 115).

Lösung: $b = \varepsilon \cdot r\,,$

$$G = mg = S + m \cdot b\,,$$

$$S \cdot r = J_d \cdot \varepsilon\,,$$

daraus $S = mg - m\varepsilon \cdot r\,,$

$$S \cdot r = mgr - m\varepsilon r^2 = m i^2 \varepsilon\,,$$

$$\varepsilon = \frac{g \cdot r}{r^2 + i^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}}{(0{,}15\,\mathrm{m})^2 + (0{,}1\,\mathrm{m})^2} = 45{,}3\,\mathrm{rad/s^2}\,,$$

$$b = \varepsilon \cdot r = 45{,}3\,\mathrm{rad/s^2} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m} = 6{,}8\,\mathrm{m/s^2}\,,$$

$$S = 58{,}86\,\mathrm{N} - 6\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 18{,}06\,\mathrm{N} = 1{,}84\,\mathrm{kp}\,.$$

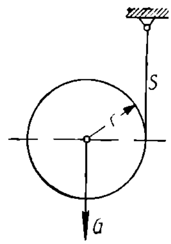


Bild 115

161. Beim Aufwärtsgang des Stößels der **Reibrollen-Friktionspresse** der Aufg. 141 soll die Energie der bewegten Massen in $^1/_{10}$ Sekunde abgebremst werden, so daß der Stößel gerade im oberen Totpunkt stehenbleibt.

a) Wie groß ist die Normaldruckkraft P an einer Bremsbacke?

b) Um welches Wegstück vor dem oberen Totpunkt muß die Bremsung beginnen, damit im oberen Totpunkt die Maschine steht?

Angaben: Stößelmasse $m_3 = 225$ kg,
Schwungmoment des Schwungrades $m_2 D_2^2 = 47{,}4$ kgm²,
Halbmesser der Bremsbacke $R = 0{,}18$ m; Reibungszahl $\mu = 0{,}4$,
Steigung der Spindel $h_0 = 0{,}15$ m,
Anfangsdrehzahl der Spindel $n = 150$ U/min.

Lösung: a) Stößelgeschwindigkeit $v = \frac{n \cdot h_0}{60} = \frac{h_0}{2\pi} \cdot \omega$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Spindel ist. Abbremsendes Moment

$$M_t = 2P \cdot \mu \cdot R\,.$$

Energiegleichung:

$$\underbrace{g m_3 \cdot h}_{\text{Gewichts-}} + \underbrace{M_t \cdot \int \omega \cdot \mathrm{d}t}_{\text{Bremsarbeit}} = \underbrace{{}^1/_2 J_\mathrm{d} \cdot \omega^2 + {}^1/_2 m_3 v^2}_{\text{abzubremsende Energie}}\,.$$

Differenziert:

$$g m_3 \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + M_t \cdot \omega = J_\mathrm{d} \cdot \omega \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + m_3 \cdot v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$g m_3 \cdot v + M_t \cdot \omega = J_\mathrm{d} \cdot \omega \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + m_3 \cdot v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$v = \frac{h_0}{2\pi} \cdot \omega; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{h_0}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$g m_3 \cdot \frac{h_0}{2\pi}\,\omega + M_t \cdot \omega = J_\mathrm{d} \cdot \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + m_3 \left(\frac{h_0}{2\pi}\right)^2 \cdot \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$g m_3 \cdot \frac{h_0}{2\pi} + M_t = J_\mathrm{d} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + m_3 \left(\frac{h_0}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,.$$

Da M_t konstant ist, so ist auch $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} =$ konstant, damit die Gleichung erfüllt wird.

Es ist dann $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2\pi 150}{60\,s \cdot {}^1/_{10}\,s} = 157{,}3\,\mathrm{rad/s^2}$.

Es ergibt sich $M_t = \left[J_d + m_3 \left(\frac{h_0}{2\pi}\right)^2\right] \frac{d\omega}{dt} - m_3 g \frac{h_0}{2\pi} = 1791{,}3\,\mathrm{Nm} = 182{,}6\,\mathrm{kpm}$.

$$P = \frac{M_t}{2\mu \cdot R} = \frac{182{,}6\,\mathrm{kpm}}{2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}18\,\mathrm{m}} = 1265\,\mathrm{kp}\,.$$

b) $s = {}^1/_2 b t^2$; $\quad b = \frac{dv}{dt} = \frac{h_0}{2\pi} \cdot \frac{d\omega}{dt}$; $\quad s = 0{,}0187\,\mathrm{m}$.

Also beginnt die Bremsung 18,7 mm vor dem oberen Totpunkt, damit im oberen Totpunkt das Schwungrad und die Spindel stehen.

Schwierigere Aufgaben der beschleunigten Drehbewegung, auch unter Berücksichtigung der Reibung

162. Zwei festverbundene **Rollen** sind an einem masselosen Faden so aufgehängt, daß dieser Faden über die kleine Rolle gewickelt ist. Um die große Rolle läuft ein weiterer Faden, an dem die Masse m_2 hängt. Rolle und Masse m_2 werden losgelassen. Welche Bewegung entsteht, und wie groß ist die Spannkraft der beiden Fäden?

Masse der Rollen $m_1 = 6$ kg, $r = 0{,}05$ m, $R = 0{,}25$ m, $m_2 = 4$ kg, $i = 0{,}12$ m.

Anleitung: $b_1 = \varepsilon r$; $\quad b_2 = \varepsilon R + b_1 = \varepsilon (R + r)$,

$m_1 g + m_2 g = S_1 + m_1 b_1 + m_2 b_2$ (Prinzip von d'Alembert),

$S_2 = m_2 g - m_2 b_2$,

$S_1 r + S_2 R = J_d \varepsilon$;

$$\varepsilon = \frac{m_1 g r + m_2 g (R + r)}{m_1 (r^2 + i^2) + m_2 (R + r)^2}\,.$$

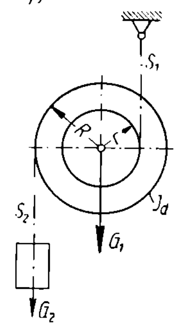


Bild 116

163 A. Eine **Rolle** rollt auf einer schiefen Ebene hinab. Es sollen ihre Bewegungsverhältnisse untersucht werden unter der Annahme, daß die Reibungszahl verschieden groß ist.
Wenn die Reibungszahl, die sich auf einen gleitenden Körper bezieht, klein im Verhältnis zum Winkel α ist, so gleitet die Rolle um ein gewisses Maß; ist die Reibungszahl groß, so ist nur ein Teil dieser Reibungszahl nötig, um die Drehbeschleunigung hervorzurufen.

1. Fall: $\mu = 0$.
2. Fall: μ ist sehr klein.
3. Fall: μ ist so groß, daß gerade ein Gleiten vermieden wird.
4. Fall: μ ist sehr groß.

Lösung: $G = m g$; $\quad G \cdot \sin\alpha - P_W - m b = 0$

$P_W r = J_d \varepsilon$.

1. Fall: $\mu = 0$; $P_W = G\mu \cdot \cos\alpha = 0$, $\varepsilon = 0$,

$$b = \frac{G \cdot \sin\alpha}{m} = g \cdot \sin\alpha\,.$$

2. Fall: μ ist sehr klein;

$$P_W = G\mu\cos\alpha\,,\ \varepsilon = \frac{G\mu \cdot \cos\alpha \cdot r}{J_d}$$

$$b = g\,(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)\,.$$

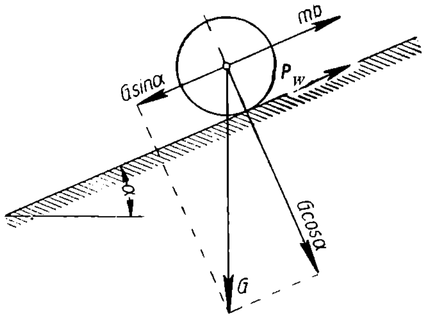


Bild 117

Ein relatives Gleiten der Rolle auf der Bahn tritt ein, und zwar ist die Gleitbeschleunigung

$$b_1 = b - \varepsilon r\,.$$

3. Fall: μ ist so groß, daß $b = \varepsilon r$ ist.

$$g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = \frac{G\mu \cdot \cos\alpha \cdot r}{J_d} \cdot r$$

$$g\,(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = g\mu \cdot \cos\alpha \cdot \frac{r^2}{i^2}$$

$$\tan\alpha = \mu \cdot \left(1 + \frac{r^2}{i^2}\right);\qquad \mu = \frac{\tan\alpha}{1 + \frac{r^2}{i^2}}\,.$$

4. Fall: μ ist sehr groß. Nur ein Teil der möglichen Reibungskraft ist zur Erzeugung der Drehbeschleunigung erforderlich.

$$b = \varepsilon r\,,$$

$$P_W = \frac{M}{r} = \frac{J_d\,\varepsilon}{r} = mb \cdot \frac{i^2}{r^2}\,,$$

somit $$G \cdot \sin\alpha - P_W - mb = 0$$

$$G\sin\alpha - mb\left(1 + \frac{i^2}{r^2}\right) = 0$$

$$b = \frac{g \cdot \sin\alpha}{1 + \frac{i^2}{r^2}}\,.$$

163 B. Wie kann mit Hilfe der **Arbeitsgleichung** für eine bestimmte Fallhöhe h die Richtigkeit der Rechnung der Aufg. 163 A nachgeprüft werden?

Lösung: Solange kein relatives Gleiten der Rolle auf der Bahn stattfindet, gilt:

$$Gh = {}^1\!/_2\, mv^2 + {}^1\!/_2\, J_d\,\omega^2\,.$$

Sobald die Rolle gleitet, gilt:

$$Gh = {}^1\!/_2\, mv^2 + G\mu \cdot \cos\alpha\,\frac{h}{\sin\alpha}\,.$$

Man differenziere, setze $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v \cdot \sin\alpha$ und ermittle b.

164. Ein **Vollzylinder** vom Radius $r = 0{,}18$ m rollt eine schiefe Ebene hinab, deren Winkel α einstellbar ist. Die Reibungszahl für gleitende Reibung ist $\mu = 0{,}1$. **a)** Wie groß ist α zu machen, damit gerade ein Gleiten vermieden wird? **b)** Wie sind die Bewegungsverhältnisse, wenn $\alpha = 5°$ ist? Wie groß ist b und ε? **c)** Wie groß sind die Bewegungsverhältnisse, wenn $\alpha = 60°$ ist? Wie groß ist ε und b? **d)** Für eine Fallhöhe von 5 m sind die erzielten Ergebnisse mit Hilfe der Arbeitsgleichung nachzuprüfen, und zwar für $\alpha = 5°$ und $\alpha = 60°$.

165. Wie groß ist bei $\alpha = 5°$ in der vorigen Aufgabe das erforderliche μ?

Anleitung: $G\mu \cdot \cos\alpha \dfrac{h}{\sin\alpha} = {}^1/_2 J_d \cdot \omega^2$, $\dfrac{v^2}{2b} = \dfrac{h}{\sin\alpha}$; $v = r \cdot \omega$;

b siehe Aufg. 163 A/4. Fall, μ groß.

166. Zwei **Rollen** sind miteinander verbunden. Um die kleinere ist ein Faden geschlungen, die größere kann auf waagerechter Bahn rollen. Das Gewicht der gemeinsamen Scheiben sei $mg = G$, der gemeinsame Trägheitshalbmesser sei i, die Reibungszahl für das Gleiten sei μ.

a) Wie groß darf P werden, ohne daß ein Gleiten der Rolle auf der Bahn eintritt?

b) Wie groß ist μ bei kleinerem b als unter a), und wie groß ist dann b?

c) Wie groß ist b und ε bei größerem P?

Lösung: a) $P - P_W - mb = 0$,

$$P_W r_2 - P r_1 = J_d \varepsilon,$$

$b = \varepsilon r_2$, wenn kein Gleiten stattfindet.

$$P_W r_2 - (P_W + mb) r_1 = m i^2 \cdot \frac{b}{r_2}$$

$$P_W (r_2 - r_1) = mb\left(r_1 + \frac{i^2}{r_2}\right).$$

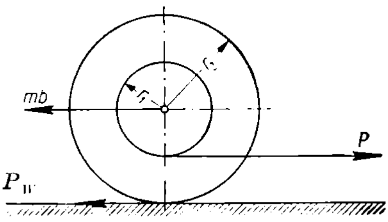


Bild 118

Im Grenzfall ist gerade $P_W = mg\mu$, somit

$$b = g\mu \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 + \dfrac{i^2}{r_2}} \quad \text{und } P = P_W + mb = mg\mu \frac{r_2^2 + i^2}{r_2 r_1 + i^2}.$$

b) Bei kleinerem b findet auch kein Gleiten statt, es ist $b = \varepsilon r_2$.

Es wird $\mu = \dfrac{b}{g} \dfrac{r_1 + \dfrac{i^2}{r_2}}{r_2 - r_1}$ wie oben, nur ist μ kleiner.

$$P_W = G\mu,$$

$$b = \frac{P - P_W}{m} = \frac{P}{m} - g\mu$$

$$b = \frac{P}{m} - b \cdot \frac{r_1 + \frac{i^2}{r_2}}{r_2 - r_1}$$

$$b = \frac{P}{m} \cdot \frac{r_2^2 - r_1 r_2}{r_2^2 + i^2}.$$

c) Ist P sehr groß, so wechselt die Rolle die Drehrichtung.

$$\varepsilon = \frac{P_W r_2 - P r_1}{J_d}.$$

Grenzfall: $P_W = G\mu$.

Wenn $P r_1 > P_W r_2$ ist, so wird ε negativ.

Unabhängig von ε wird

$$b = \frac{P - P_W}{m}.$$

167. Für die **Rollen** der Aufg. 161 seien folgende Werte angegeben: $r_1 = 5$ cm; $r_2 = 10$ cm; $\mu = 0{,}1$; gemeinsame Masse 12 kg. Die Rollen sind gleich breit und von demselben Stoff.

a) Wie groß ist der gemeinsame Trägheitshalbmesser?

b) Wie groß ist die Beschleunigung b, wenn gerade ein Gleiten vermieden wird?

c) Wie groß ist dann P?

d) Wie groß ist b und ε, wenn P halb so groß ist wie unter c)?

e) Wie groß ist b und ε, wenn P doppelt so groß ist wie unter c)?

f) Wie groß ist die relative Beschleunigung der Gleitbewegung auf der Bahn?

g) Wie groß muß P sein, wenn die Drehbeschleunigung $\varepsilon = 0$ sein soll?

168 A. Eine elektrische **Winde** soll einen Eisenbahnwagen von 20 t auf einer um 10° geneigten Ebene hinaufziehen (Bild 119). Zum Antrieb dient ein Gleichstrom-Hauptstrommotor mit einer Leistung von 77,5 PS bei 660 U/min, der über ein zweifaches Rädervorgelege mit den Untersetzungsverhältnissen 1 : 5 und 1 : 4 die Trommel antreibt. Der Halbmesser der Trommel ist 0,6 m, die Reibungszahl des Eisenbahnwagens $\mu = 0{,}05$, der Wirkungsgrad des Rädergetriebes $\eta = 0{,}8$. Das Schwungmoment an Welle 1 ist $mD_1^2 = 16\,\text{kgm}^2$, an Welle 2: $mD_2^2 = 100\,\text{kgm}^2$, an Welle 3: $mD_3^2 = 300\,\text{kgm}^2$.

A. a) Welche gleichförmige **Höchstgeschwindigkeit** kann der Wagen erreichen?

b) Wie groß ist das auf Welle 3 reduzierte **Schwungmoment**?

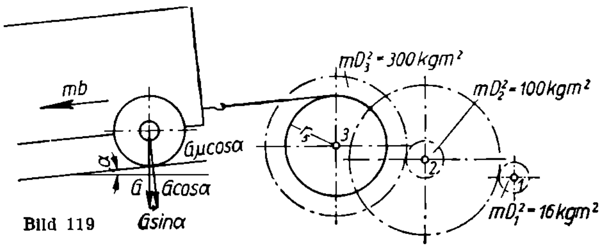


Bild 119

c) Wie lautet die Gleichung für die **Winkelbeschleunigung**, wenn die Größe des an der Motorwelle 1 auftretenden Drehmomentes M_1 sei?

d) Welche **Zeit** braucht der Wagen, um eine Geschwindigkeit von 1,8 m/s zu erreichen, wenn das Drehmoment des Hauptstrommotors aus der Gleichung $M_1 = 744 - n_1$ (M_1 in kpm; n_1 in U/min *) angenähert folgen soll, also mit abnehmender Drehzahl größer werden soll?

Lösung: 168 A.

a) $M_1 = 744 - n_1; \quad N = \dfrac{M_1 n_1}{716};$

M	n	N	v	r	G *
kpm	U/min	PS	m/s	m	kp

$$75\,N\eta = (G \sin\alpha + G\mu\cos\alpha)\cdot v; \qquad v = \frac{2\pi r_5 n_3}{60} = \frac{\pi r_5 n_1}{30\cdot 20}; \,*$$

$$\frac{(744 - n_1)\cdot n_1}{716}\cdot 75\eta = G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{\pi r_5 n_1}{30\cdot 20}; \quad r_5 = 0{,}6;$$

$$n_1 = 578\,, \quad v = 1{,}818\,.$$

b) $$mD^2 = mD_3^2 + mD_2^2\cdot\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 + mD_1^2\left(\frac{n_1}{n_3}\right)^2$$

$$mD^2 = 8300\ \mathrm{kgm}^2; \quad J = \frac{mD^2}{4}\,.$$

c) $$M_3 = M_1\cdot\frac{n_1}{n_3}\cdot\eta = J\cdot\frac{d\omega_3}{dt} + (mb + mg\sin\alpha + mg\mu\cos\alpha)\cdot r_5\,,$$

$$b = r_5\cdot\frac{d\omega_3}{dt}\,,$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{M_1\cdot\dfrac{n_1}{n_3}\cdot\eta}{J + mr_5^2} - \frac{(mg\sin\alpha + mg\mu\cos\alpha)\cdot r_5}{J + mr_5^2};$$

d) $$*M_1 = (744 - n_1)\cdot 9{,}81 = \left(744 - \frac{30 n_1\omega_3}{\pi\cdot n_3}\right)\cdot 9{,}81 = 7298 - 1874\,\omega_3$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 9{,}81 - 3{,}25\,\omega_3 = a - c\,\omega_3;$$

M	n	ω	t	v
kpm	U/min	rad/s	s	m/s

$$t = \int dt = \int_0^{\omega_3}\frac{d\omega}{a - c\,\omega} = \frac{1}{c}\cdot 2{,}303\cdot\lg\frac{a}{a - c\,\omega_3}\,,$$

$$\text{für } v = 1{,}8 \text{ ist } \omega_3 = \frac{v}{r_5} = 3; \qquad t = 1{,}57\,.$$

168 B. Wie kann man den zurückgelegten Weg des Eisenbahnwagens berechnen bis die Geschwindigkeit $v = 1{,}8$ m/s erreicht ist?

* Zahlenwertgleichung! Alle Formelzeichen bedeuten nicht mehr Größen, sondern reine Zahlen.

Lösung: $s = \int_0^t v \cdot \mathrm{d}t = r_5 \int_0^{\omega_3} \frac{\omega}{a - c\,\omega} \cdot \mathrm{d}\omega$; (Einheiten wie bei Aufg. 168 A. d; s in m)

$$\text{mit } z = a - c\,\omega\,, \quad \mathrm{d}z = -c \cdot \mathrm{d}\omega$$

$$s = \frac{r_5}{c^2}\left[z - a \ln z\right]_{\omega = 0,\; z = a}^{\omega = 1{,}98,\; z = a - c\cdot\omega_3} = \frac{r_5}{c^2}\left[a \ln \frac{a}{a - c\,\omega_3} - c\,\omega_3\right] =$$

$$= \frac{0{,}6}{3{,}25^2}\left[9{,}81 \cdot 2{,}3 \cdot \lg \frac{9{,}81}{9{,}81 - 3{,}25 \cdot 3} - 3{,}25 \cdot 3\right] = 2{,}28\,.$$

169. Für einen **Straßenbahntriebwagen** gelten folgende Angaben: Gewicht des Wagens einschließlich Triebwerkes 13800 kp.
Gewicht der gleichmäßig verteilten Fahrgäste 3000 kp.
Der Triebwagen wird durch zwei Motoren, an jeder Welle einer, getrieben.

Leistung jedes Motors $N = 55{,}5$ PS bei $n = 600$ U/min.
Übersetzungsverhältnis von Motor zu Laufrad $i = 4{,}35$.
Zähnezahl des Ritzels 17, des Zahnrades 74.
Länge des Wagens $l_1 = 10{,}5$ m.
Abstand der beiden Radachsen $l_0 = 2{,}6$ m.
Schienenabstand $w = 1$ m.
Kleinster Krümmungsradius der Geleise $\varrho = 125$ m.
Auf die Schiene reduzierte Reibungsziffer (d. i. Reibung des Triebwerkes) $\mu_1 = 8 \cdot 10^{-3}$; Reibungsziffer des abgebremsten Rades $\mu_2 = 0{,}085$.
Beim Bremsen werden 4 Bremsklötze elektrisch mit je 2500 kp auf die Schienen aufgedrückt, gleichzeitig übt jeder Motor ein Bremsdrehmoment von 50 kpm aus. Reibungsziffer zwischen Schiene und Bremsklotz ohne Sand $\mu_2 = 0{,}085$, mit Sand $\mu_3 = 1{,}5$.

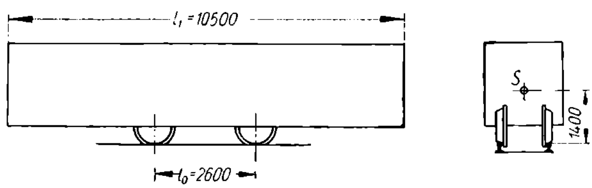


Bild 120

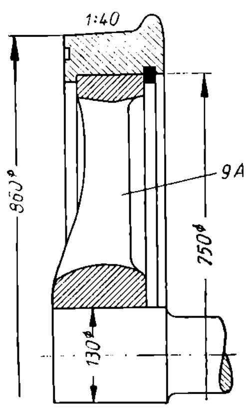


Bild 121

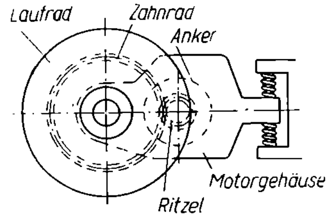


Bild 122

Steigung der geneigten Strecke $\tan \alpha = 1 : 14$.
Lage des Schwerpunktes des Wagens über Schienenoberkante $z = 1{,}4$ m.
Luftwiderstand des Wagens Fkv^2 $P_w = 0{,}4\, v^2$ (P_w in kp, v in m/s) oder
$P_w = 3{,}92\, v^2$ (P_w in N, v in m/s)
Überhöhung der äußeren Schienen in der Kurve 60 mm.

Teil	Stück-zahl	Gewicht je Stück in kp	Trägheits-radius in m	Durch-messer in m
Laufrad	4	200	0,331	0,86
Zahnrad	2	60	0,27	0,592
Ritzel	2	10	—	0,136
Hauptwelle	2	160	0,046	0,13
Anker nebst Welle	2	250	0,13	—

A. a) Gesamtmasse des Wagens samt Ladung, auf die Laufradwelle reduziertes Trägheitsmoment der umlaufenden Teile, auf die Schiene reduzierte Masse?

b) Höchstgeschwindigkeit, welche der Wagen auf ebener Bahn unter Berücksichtigung der Reibung und des Luftwiderstandes und der Abhängigkeit des Motordrehmomentes von der Drehzahl (Bild 123) annehmen kann?

B. a) Beschleunigungskraft und Beschleunigung des Wagens auf abwärts geneigter Bahn (1 : 14), wenn der Motor stromlos und die Bremse gelöst ist?

b) Welche auf die Schiene reduzierte Bremskraft entsteht beim alleinigen Bremsen mit dem Motor?

c) Welche Bremskraft kommt infolge der Schienenbremse hinzu, ohne Sand, mit Sand? Gesamtbremskraft?

d) Kann das Motorbremsmoment die Räder zum Gleiten bringen, wenn mit $\mu_2 = 0{,}085$ gerechnet wird?

e) Welche Verzögerung erfährt der Wagen auf abwärts geneigter Bahn ohne Sand, mit Sand?

f) Wieviel m vor einem Haltepunkt auf einer abwärts geneigten Bahn (1 : 14) muß das Bremsen ohne und mit Sand beginnen, wenn die Geschwindigkeit anfangs 10 m/s beträgt?

C. a) Welche Winkelbeschleunigung erfährt der Wagen um seine eigene Schwerpunktachse, wenn er in eine Kreiskurve vom Krümmungsradius $\varrho = 25$ m mit einer Geschwindigkeit von $v = 5$ m/s einzufahren beginnt?

b) Wie groß ist die Winkelbeschleunigung um den Schwerpunkt, wenn das letzte Rad in Kreiskurve vom Radius $\varrho = 25$ m eingebogen ist?

c) Welche Schienendruckkraft senkrecht zu den Schienen tritt beim Einfahren des ersten Rades in die Kurve auf? Der Wagen ist als Stange vom Trägheitsradius $i = \frac{l}{\sqrt{12}}$ angenähert zu betrachten.

d) Zentrifugalkraft und Angriffspunkt der Zentrifugalkraft beim Fahren in der Mitte der Kreiskurve bei $v = 5$ m/s?

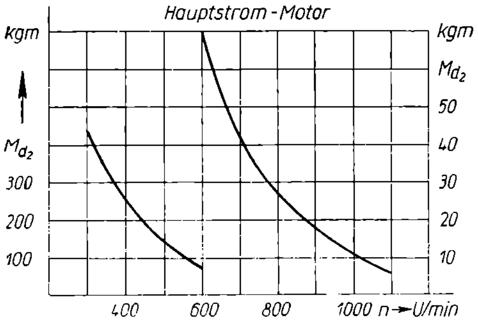


Bild 123

e) Bei welcher Fahrgeschwindigkeit tritt ein Umkippen des Wagens in der Kurve ein unter Berücksichtigung der Überhöhung?

f) Welche Beschleunigung nach außen erfährt ein Fahrgast, wenn er in 5 m Abstand vom Schwerpunkt steht?

g) Wie groß wird die Winkelbeschleunigung beim Einfahren des ersten Rades in eine elliptische Kurve, deren Krümmungsradius dort $\varrho_1 = 50$ m ist?

Lösung: A. a) $m_1 = 13800\,\mathrm{kg} + 3000\,\mathrm{kg} = 16800\,\mathrm{kg}$;

für Motorwelle $J' = \sum m i^2$; für Laufradwelle $J'' = \sum m i^2$; auf Laufradwelle reduziert $J = J'' + J' \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 128{,}9\ \mathrm{kgm}^2$;

reduzierte Masse $m_2 = \frac{J}{R^2} = 696{,}5$ kg.

Gesamte Ersatzmasse des Wagens $m = m_1 + 2m_2 = 18190$ kg.

b) Die Drehmomente an den beiden Laufrädern sind zusammen:

$$2M_{d_1} = (m_1 + 2m_2) \cdot b_1 R + m_1 g \mu_1 R + F k v^2 R\,.$$

$$2M_{d_1} = 7920\,b + 567 + 1{,}685\,v^2; \qquad \left|\frac{M}{\mathrm{Nm}}\right|\frac{b}{\mathrm{m/s^2}}\left|\frac{v}{\mathrm{m/s}}\right|^{*}$$

Größte Geschwindigkeit bei $b = 0$, für jede Motorwelle wird

$$M_{d_2} = M_{d_1} \cdot \frac{1}{i} = 65{,}2 + 0{,}194\,v^2 \qquad \left|\frac{M}{\mathrm{Nm}}\right|\frac{i}{\mathrm{m}}\left|\frac{v}{\mathrm{m/s}}\right|^{*}$$

Das in Bild 123 gegebene Drehmoment stimmt mit dem vorstehenden überein bei

$$n_2 = 1040\ \mathrm{U/min};\ n_1 = 239\ \mathrm{U/min};\ v = 38{,}8\ \mathrm{km/h}.$$

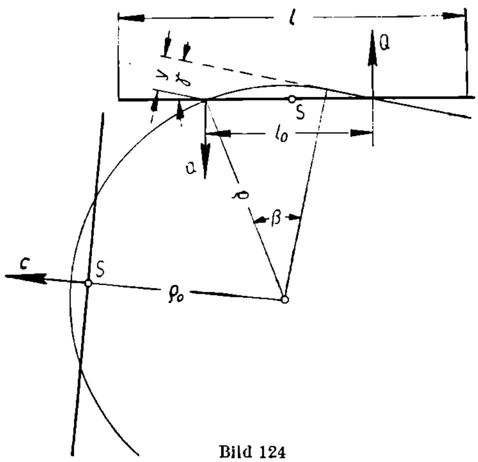


Bild 124

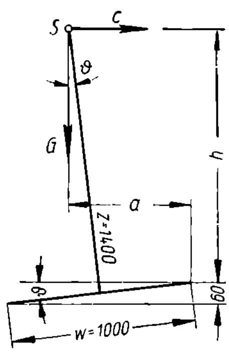


Bild 125

B. a) $P_1 = m_1 g \sin\alpha - m_1 g \mu_1 \cos\alpha$, $P_1 = 10428$ N; $b_1 = \frac{P_1}{m_1 + 2m_2} = 0{,}573$ m/s².

b) 1012 kp; **c)** 850 kp, 15000 kp; $P_2 = 1862$ kp, 16012 kp.

d) Nein, da $G\mu_2 \cos\alpha$ größer als 1012 kp ist.

e) $m_1 g \sin\alpha - m_1 g \mu_1 \cos\alpha - P_2 = (m_1 + 2m_2) \cdot b_2$

$b_2 = -0{,}431$ m/s² $-8{,}06$ m/s².

f) 116 m, 6,2 m.

C. a) Nach Bild 124 ist $y = \varrho \cdot (1 - \cos\beta)$, $\sin\gamma = \frac{y}{l_0} = \frac{\varrho}{l_0} \cdot (1 - \cos\beta)$; $\gamma = \operatorname{Arcsin} \frac{\varrho}{l_0} \cdot (1 - \cos\beta)$. Differenziert man, so ist mit $\omega_1 = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\varrho}$ die Winkelgeschwindigkeit des Wagens um seinen Schwerpunkt

$$\omega_2 = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t};$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{\sin\beta}{\sqrt{\left(\frac{l_0}{\varrho}\right)^2 - (1 - \cos\beta)^2}};$$

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \cdot \frac{\left(\frac{l_0}{\varrho}\right)^2 \cdot \cos\beta - 2\cos\beta + \cos^2\beta + 1}{\left[\left(\frac{l_0}{\varrho}\right)^2 - (1 - \cos\beta)^2\right]^{3/2}}.$$

Wenn das erste Rad gerade in die Kurve einfährt, ist $\beta = 0$, und es wird

$$\varepsilon_2 = \frac{v^2}{\varrho l_0} = 0{,}386 \text{ rad/s}^2.$$

b) In dieser Stellung ist

$$\varrho \cdot \sin\beta_1 = l_0 \cdot \cos\gamma_1 \quad \text{und} \quad l_0^2 = 2\varrho^2 \cdot (1 - \cos\beta_1).$$

Es wird $\omega_2 = \omega_1 = \frac{v}{\varrho} =$ konst. und $\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 0$.

c) Schienendruckkraft Q

$$Q l_0 = J_3 \cdot \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t}; \quad J_3 \approx m_1 \cdot \frac{l_1^2}{12} = 154000 \text{ kgm}^2;$$

$$Q = 22900 \text{ N} = 2330 \text{ kp}.$$

Hierzu kommt noch ein Stoß, weil zwischen Radrand und Schiene ein Spiel ist. Auch dieser Stoß läßt sich aus dem Spiel berechnen.

d) $P_z = m_1 \varrho_0 \omega_1^2$;

$$\varrho_0 = \sqrt{\varrho^2 - \frac{l_0^2}{4}} \approx 25 \text{ m};$$

$$P_z = 16824 \text{ N}.$$

e) $P_z h = G a$ (s. Bild 125); $h = z \cdot \cos\vartheta - \frac{w}{2} \cdot \sin\vartheta$;

$$a = z \cdot \sin\vartheta + \frac{w}{2} \cdot \cos\vartheta .$$

Gleichung erfüllt bei $\omega = 0{,}409$ rad/s oder $v = 10{,}25$ m/s.

f) $1{,}93$ m/s².

g) $\varepsilon_2 = 0{,}193$ rad/s².

Anmerkung: Die Kurven werden oft als kubische Parabeln ausgebildet. Es tritt bei allen Kurven außer der Kreiskurve an einer bestimmten Stelle eine zweite maximale Winkelbeschleunigung des Wagens auf. Für die kubische Parabel soll in folgendem dies Maximum abgeleitet werden, indem der Wagen als Tangente an die Kurve aufgefaßt wird. Die Geschwindigkeit v ist konstant.
Es existieren dann zwei maximale Werte, 1. beim Einfahren des ersten Rades, 2. irgendwo auf der Kurve.
Am günstigsten ist es wohl, die Kurve so zu gestalten, daß beide Werte ungefähr gleich sind.

Kubische Parabel $y^3 = p x$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{3y^2}$; $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2p^2}{9y^5}$.

An der Stelle, wo die gerade Bahn tangential an die Kurve anschließt, sei $y = b$ und $x = a$. Dann ist

$$p = \frac{b^3}{a} \quad \text{und} \quad \varrho_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \left(1 + \frac{b^2}{9a^2}\right)^{3/2}.$$

Die Einfahrwinkelbeschleunigung ist

$$\varepsilon_1 = \frac{v^2}{l_0 \cdot \varrho} = -\frac{v^2}{l_0} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{b^2}{9a^2}\right)^{3/2}} .$$

In der Bahn dreht sich eine mit v fortschreitende Tangente mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}; \quad \tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{3y^2}; \quad \alpha = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{p}{3y^2}\right) = \operatorname{Arc}\tan z ;$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{2p}{3y^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{p^2}{9y^4}\right)}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 + \frac{9y^4}{p^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{9y^4}{p^2}}}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{6v}{p} \cdot \frac{y}{\left(1 + \frac{9y^4}{p^2}\right)^{3/2}} .$$

Die Winkelbeschleunigung der Tangente ist

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{6v^2}{p}\cdot\frac{1-45\frac{y^4}{p^2}}{\left(1+\frac{9y^4}{p^2}\right)^3}.$$

Sie wird ein Maximum bei $\frac{d\varepsilon}{dy} = 0$,

dann ist $\frac{y^4}{p^2} = \frac{1}{9}$ und $\varepsilon_{2\,max} = 4{,}24\,\frac{v^2}{p} = 4{,}24\,\frac{v^2 a}{b^3}$;

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$-\frac{v^2}{l_0}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{b^2}{9a^2}\right)^{3/2}} = 4{,}24\,\frac{v^2 a}{b^3}.$$

Für $b = 20$ wird $a = 23$, $p = \frac{b^3}{a} = 348$.

$\varrho_1 = 134{,}5$, ϱ_{min} bei $\frac{d\varrho}{dy} = 0$, $\varrho_{min} = 10{,}7$; $(a, b, \varrho$ in m)

DRALL

Drall und Corioliskraft

170. Was versteht man unter **Drall**?

Lösung: Der Drall ist das Moment der Bewegungsgröße in bezug auf den Drehpunkt.

Die Bewegungsgröße ist für einen einzelnen Massenpunkt $\int P\cdot dt = mv$, für einen Punkthaufen $\int P\cdot dt = \sum mv$ (Aufg. 108),
also Drall $D = mrv$ für einen Massenpunkt,

$$D = \sum mvr \text{ für eine Anzahl Massen } \left(D \text{ in } \frac{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} = \text{Nms}\right).$$

Die Änderung des Dralls ist gleich dem Moment des Antriebes und gleich Änderung des Momentes der Bewegungsgröße.

$$\boldsymbol{D_2 - D_1 = \int P\cdot dt\cdot r = \sum mv_2 r_2 - \sum mv_1 r_1}$$

Setzt man $v = r\cdot\omega$ ein, so ist

$$D = \sum mvr = \sum mr^2\omega = J_d\,\omega.$$

Setzt man im Antrieb $M_t = Pr$, so ergibt sich

$$D_2 - D_1 = \int M_t\cdot dt = J_2\omega_2 - J_1\omega_1.$$

Diese Gleichung entspricht der schon bekannten Gleichung $M_t = J_d \cdot \frac{d\omega}{dt}$. Nur war bisher J_d konstant, während bei veränderlichem J_d, d. h. veränderlichem Halbmesser eines Massenpunktes, auch die Veränderung von J_d berücksichtigt werden muß. Man geht deshalb von der Integralgleichung $\int M_t \cdot dt = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$ aus, die eben der Drall bzw. die Dralländerung ist.

Für das Drehmoment ergibt sich

$$M_t = \frac{d(J_d \cdot \omega)}{dt} = J_d \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \cdot \frac{dJ_d}{dt}.$$

Für einen einzelnen Massenpunkt ist

$$M_t = mr^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega m \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} = \boldsymbol{mr \cdot \frac{dv}{dt} + 2mv \cdot \frac{dr}{dt}}.$$

v ist dabei die Umfangsgeschwindigkeit in dem betrachteten Augenblick, und $\frac{dr}{dt}$ ist die Radialgeschwindigkeit. $m \cdot \frac{dv}{dt}$ ist die von früher her bekannte Umfangsbeschleunigungskraft; dagegen ist

$$\boldsymbol{P_c = 2m\omega\frac{dr}{dt}}$$

eine neue Kraft, die durch Vergrößerung des Halbmessers entsteht, die sog. **„Corioliskraft"** (s. Bild 127).

$\boldsymbol{2\omega\frac{dr}{dt}}$ ist die **„Coriolisbeschleunigung"**.

Der Drall ist der Ersatz der Bewegungsgröße bei sich drehenden Körpern. Deshalb gelten auch die Stoßgesetze für den Drall (Aufg. 109). Bei plötzlicher Verbindung zweier sich drehender Massen gilt entsprechend:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2) \cdot \omega_u;$$

$$\omega_u = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}.$$

Beim elastischen Stoß wird gemäß Aufg. 109 die Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß:

$$\omega_1' = 2\omega_u - \omega_1,$$

$$\omega_2' = 2\omega_u - \omega_2.$$

Verlust beim unelastischen Stoß:

$$E_v = {}^1/_2 J_1\omega_1^2 + {}^1/_2 J_2\omega_2^2 - {}^1/_2 (J_1 + J_2)\,\omega_u^2.$$

171. Man leite die **Coriolisbeschleunigung** aus den Bewegungsverhältnissen in den Bildern 126 und 127 ab.

Lösung: Auf einer sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehenden Scheibe wandert ein Massenpunkt radial nach außen, von A bis B. Bei B ist dabei seine Umfangsgeschwindigkeit größer geworden. Bei der Drehung um den sehr kleinen Winkel $\omega \cdot \mathrm{d}t$ gelangt A nach A_1, B nach B_1. Somit muß die Masse tangential zusätzlich den Weg $\mathrm{d}r \cdot \omega \cdot \mathrm{d}t$ zurücklegen. Es erfolgt also eine Umfangsbeschleunigung, welche sich aus diesem Weg errechnen läßt.

$$^1/_2 b_u \cdot (\mathrm{d}t)^2 = \mathrm{d}r \cdot \omega \cdot \mathrm{d}t$$

$$b_u = 2 \cdot \omega \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Diese Beschleunigung ist die „**Coriolisbeschleunigung**". Sie ist tangential gerichtet.

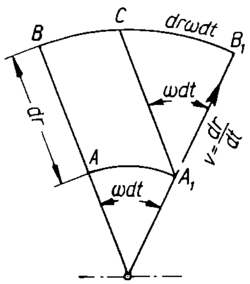


Bild 126

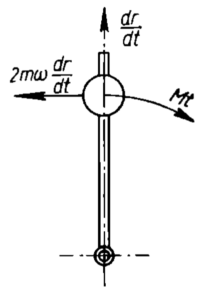


Bild 127

172. Eine Masse drehe sich mit **gleichbleibendem Halbmesser** bzw. Trägheitshalbmesser um einen festen Punkt. Wie lautet die Gleichung für den **Drall**, **a)** wenn ein beliebig sich änderndes Drehmoment wirkt? **b)** wenn ein konstantes Drehmoment wirkt?

Lösung: a) $D_2 - D_1 = \int M_t \cdot \mathrm{d}t = J_d \cdot (\omega_2 - \omega_1)$.

b) $D_2 - D_1 = M_t t = J_d \cdot (\omega_2 - \omega_1)$.

173. Eine Masse drehe sich mit veränderlichem Halbmesser und veränderlichem Trägheitsmoment J_d bei **konstantem Drehmoment**. Welche Gleichung ist für das Drehmoment aufzustellen?

Lösung: Es ist zu differenzieren

$$M_t = J_d \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega \frac{\mathrm{d}J_d}{\mathrm{d}t}.$$

Es gilt aber auch die Gleichung:

$$M_t t = J_2 \omega_2 - J_1 \omega_1.$$

174 A. Ein **Hammerkran** nach Bild 128 dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 0{,}05$ rad/s. Die Laufkatze mit anhängender Last wird dabei aus der Anfangslage mit dem Schwerpunkthalbmesser $r_1 = 22$ m beschleunigt, so daß nach 3 m ($r_2 = 19$ m) die Höchstgeschwindigkeit $v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0{,}5$ m/s erreicht wird. Gewicht der Katze und der Last 150 Mp, dynamisches Trägheitsmoment des drehbaren Teiles ohne Katze und

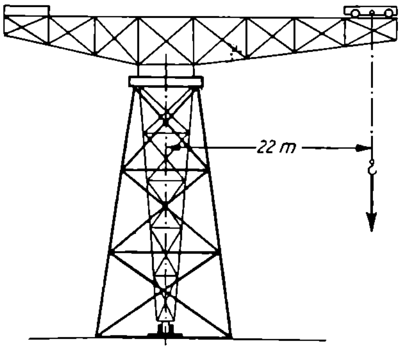


Bild 128

Last $J_0 = 19{,}61 \cdot 10^6$ kgm². Alle Nebenerscheinungen, wie Ausschlag der Last und Reibung, sind zu vernachlässigen.

a) Trägheitsmoment bei $r_1 = 22$ m und $r_2 = 19$ m. Winkelgeschwindigkeit bei $r_2 = 19$ m. **b)** Corioliskräfte bei $r_1 = 22$ m und $r_2 = 19$ m. **c)** Arbeit zur Überwindung der Zentrifugalkräfte. **d)** Arbeit der Corioliskräfte. **e)** Erhöhung der Drehenergie. **f)** Motorarbeit. **g)** Motorleistung bei $r_2 = 19$ m. **h)** Leistungsanteil für die Erhöhung der Drehenergie und für die Katze. - Am Kran wirkt kein Antrieb, also kein äußeres Drehmoment.

Lösung a) $J = J_0 + mr^2 = 19{,}61 \cdot 10^6\,\mathrm{kgm^2} + 150000\,\mathrm{kg} \cdot r^2$

$$r_1 = 22\,\mathrm{m},\; J_1 = 92{,}21 \cdot 10^6\,\mathrm{kgm^2};\quad r_2 = 19\,\mathrm{m},\quad J_2 = 73{,}77 \cdot 10^6\,\mathrm{kgm^2}.$$

$J_1\omega_1 = J_2 \cdot \omega_2$, da kein Drehmoment am Hammerkran wirkt.

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \cdot \omega_1 = 0{,}0625\,\mathrm{rad/s}.$$

b) $r_1 = 22\,\mathrm{m},\; v_1 = 0,\; P_{c1} = 2m\omega_1 v = 0,$

$$r_2 = 19\,\mathrm{m},\; v_2 = 0{,}5\,\mathrm{m/s},\; P_{c2} = 9378\,\mathrm{N} = 956{,}2\,\mathrm{kp}.$$

c) $A_1 = \int P_z \cdot \mathrm{d}r = -\int mr\omega^2 \cdot \mathrm{d}r;\quad \mathrm{d}J = 2mr \cdot \mathrm{d}r;\quad \omega = \frac{J_1 \cdot \omega_1}{J}$

$$A_1 = -\frac{J_1^2\omega_1^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}J}{J^2} = {}^1\!/_2 J_2\,\omega_2^2 - {}^1\!/_2 J_1\,\omega_1^2 = 28841\,\mathrm{Nm}.$$

d) $A_2 = \int M_t \cdot \mathrm{d}\alpha = \int P_c \cdot r \cdot \omega\,\mathrm{d}t = \int 2m\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \cdot r\omega \cdot \mathrm{d}t =$

$$= 2\int mr\omega^2 \cdot \mathrm{d}r = 2\int P_z \cdot \mathrm{d}r = J_2\omega_2^2 - J_1\omega_1^2 = 57683\,\mathrm{Nm}.$$

e) Der Unterschied $A_2 - A_1 = {}^1\!/_2 J_2\omega_2^2 - {}^1\!/_2 J_1\omega_1^2 = 28841$ Nm erhöht die Drehenergie des Krans. Setzt man den Katzenmotor still und überläßt das Ganze bei $r_2 = 19$ m sich selbst, so fliegt die Katze nach außen, wobei wieder $J_2\omega_2 = J_1\omega_1$ ist. Die Drehenergie nimmt dabei um ${}^1\!/_2 J_2\omega_2^2 - {}^1\!/_2 J_1\omega_1^2$ ab, die Katze erlangt eine Bewegungsenergie von demselben Betrag. In A ist die Arbeit zur Überwindung der Zentrifugalkraft und die Arbeit zur Erzeugung der Drehenergie des Krans enthalten, wobei diese Arbeiten einander gleich sind $\left({}^1\!/_2 J_2\,\omega_2^2 - {}^1\!/_2 J_1\,\omega_1^2\right)$.

f) $A_m = A_2 + {}^1\!/_2 mv^2 = J_2\omega_2^2 - J_1\omega_1^2 + {}^1\!/_2 mv^2 = 76449\,\mathrm{Nm}.$

Bei der Leistung muß es genauso wie bei der Arbeit sein, da Leistung Arbeit : Zeit ist.

g) $N_m = \frac{\mathrm{d} A_m}{\mathrm{d} t} = M_t \omega + m b v = P_{c2} \, r_2 \omega_2 + m b v;$

$$b = \frac{v^2}{2s} = \frac{1}{24} \mathrm{m/s^2};$$

$$N_m = 11\,120 \,\mathrm{Nm/s} + 3125 \,\mathrm{Nm/s} = 14\,245 \,\mathrm{Nm/s} = 19{,}37 \,\mathrm{PS};$$

h) $N_1 = {}^1/_2 \, M_t \omega = 5560 \,\mathrm{Nm/s} = 5560 \,\mathrm{W} = 7{,}56 \,\mathrm{PS}$

$$N_2 = (P_z + m b) v = {}^1/_2 \, M_t \omega + m b v = N_m - N_1 = 11{,}81 \,\mathrm{PS}.$$

174 B. Dieselben Fragen wie in Aufg. 174 A sind zu beantworten, wenn die Katze sich von $r_2 = 19$ m auf $r_3 = 10$ m gleichförmig mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0,5 m/s bewegt.

175. Was versteht man unter **Flächengeschwindigkeit**?

Lösung: Die Flächengeschwindigkeit eines Massenpunktes ist die in der Zeiteinheit von seinem Radiusvektor überstrichene Fläche $\frac{v r}{2}$.

Der Drall des Massenpunktes ist somit

$$D = 2\,m \cdot \text{Flächengeschwindigkeit} = m v r.$$

176. Bei einem **Planeten** ist als einzige Kraft die Anziehungskraft der Sonne vorhanden. Ein Drehmoment tritt also nicht auf. Die Bahn des Planeten ist aber eine Ellipse mit den Sonnenfernen r_1 und r_2.
Wie verhält sich die größte Geschwindigkeit zur kleinsten Geschwindigkeit des Planeten?

Lösung: $M_d = 0 = \frac{\mathrm{d}(J \cdot \omega)}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d}(m v r)}{\mathrm{d} t}$

$$\frac{\mathrm{d}(v r)}{\mathrm{d} t} = 0$$

$$v r = \text{konstant}$$

$$v_1 r_1 = v_2 r_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Die Flächengeschwindigkeit $v \cdot \frac{r}{2}$ ist konstant.

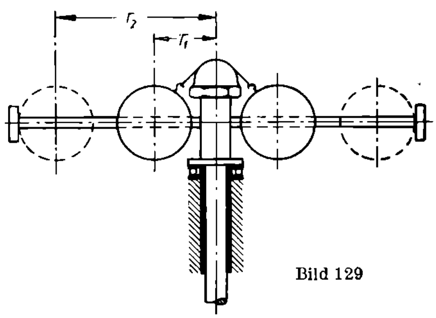


Bild 129

177. Zwei **Kugeln** können auf einer Stange, die mit einer Welle sich dreht, gleiten. Die Welle wird auf eine Drehzahl von 400 U/min gebracht. Dann werden die Kugeln, die bisher durch einen Faden auf dem Halbmesser $r_1 = 5$ cm festgehalten wurden, durch Lösen des Fadens freigegeben und rutschen in die Endstellung mit dem Halbmesser $r_2 = 20$ cm (Bild 129).
Welche Drehzahl der Welle stellt sich ein, wenn a) das Trägheitsmoment der Welle und Stange vernachlässigt wird? b) das Trägheitsmoment der Stange berücksichtigt wird? Stangendurchmesser $d = 20$ mm; Stangenlänge im ganzen $l = 45$ cm; Dichte der Stange 7,8 kg/dm³; Masse jeder Kugel 1 kg.

Anleitung: **a)** Drehmoment = 0, wie unter 174 Aa.

b) Stangenträgheitsmoment

$$J_0 = (f \varrho l) \frac{l^2}{12}; \quad (J_0 + J_1) n_1 = (J_0 + J_2) \cdot n_2 .$$

178. Eine sich drehende Welle mit einem Schwungmoment $m_1 D_1^2$ wird mit einer zweiten mit einem $m_2 D_2^2$ durch eine **Kupplung** verbunden.

I. Die Kupplung ist unelastisch, und die Wellen sind kurz und starr.

II. Die Kupplung ist eine Reibungskupplung, welche höchstens ein Drehmoment M_d übertragen kann, sonst rutscht sie.

III. Die Kupplung ist elastisch, oder die Wellen sind lang und elastisch.

Lösung: **I.** Der Drall ist konstant (kein Drehmoment)

$$J_1 \cdot \omega_1 + J_2 \cdot \omega_2 = (J_1 + J_2) \cdot \omega_u \text{ (s. Aufg. 165)}$$

$$\text{oder } m_1 D_1^2 \cdot n_1 + m_2 D_2^2 \cdot n_2 = (m_1 D_1^2 + m_2 D_2^2) \cdot n_u .$$

In der Welle entsteht theoretisch ein unendlich großes Drehmoment, da die Winkelbeschleunigung unendlich ist.

II. $m_1 D_1^2 (n_1 - n_u) = m_2 D_2^2 (n_u - n_2) = M_d \cdot t .$

Dies folgt aus $M_d = -J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt}$.

III. Wie vorher $n_u = \frac{m_1 D_1^2 n_1 + m_2 D_2^2 \cdot n_2}{m_1 D_1^2 + m_2 D_2^2}$.

Der Schwingungsausschlag der Räder ist dem Drehmoment proportional, also

$$J_1 \cdot \alpha_1 = J_2 \cdot \alpha_2; \quad \alpha_{\text{gesamt}} = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

Das Drehmoment ist dem Winkel α proportional.

$$M_t = k \cdot \alpha = \frac{G \cdot J_p}{l} \cdot \alpha$$

G Gleitmodul, J_p polares Trägheitsmoment der Welle, l Länge der Welle.

Mit $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ ergibt sich eine Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} = -\left(\frac{M_t}{J_1} + \frac{M_t}{J_2}\right) = -k\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)\alpha .$$

Bei den Drehschwingungen wird das größte auftretende Drehmoment errechnet.

Gegeben: $m_1 D_1^2 = 80$, $m_2 D_2^1 = 60$ kgm²; $n_1 = 360$, $n_2 = 120$ U/min; $M_d = 10$ kpm in der Reibungskupplung.

a) Gemeinsame Drehzahl n_u; **b)** Zeit t.

179. Durch ein **Schleuderrad** mit senkrechter Achse und 12 geraden radialen Schaufeln soll Wasser über einen Rasen verteilt werden. Das Schleuderrad hat eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = 20\,\text{rad/s}$, $r_1 = 0{,}10\,\text{m}$, $r_2 = 0{,}30\,\text{m}$, Breite der Schaufel $b = 0{,}01\,\text{m}$. Das Wasser läuft ohne Überdruck mit einer gewissen radialen Geschwindigkeit v_{r_1} dem inneren Umfang zu, so daß in der Sekunde insgesamt $q = 5\,\text{kg}$ Wasser durchfließen.

a) Wie groß ist die radiale Zulaufgeschwindigkeit v_{r_1}?

b) Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit des Wassers beim Radius $r = 0{,}12\,\text{m}$, $0{,}2\,\text{m}$, $0{,}3\,\text{m}$?

c) Wie groß ist die Strahldicke h bei $r = 0{,}12\,\text{m}$, $0{,}2\,\text{m}$ und $0{,}3\,\text{m}$?

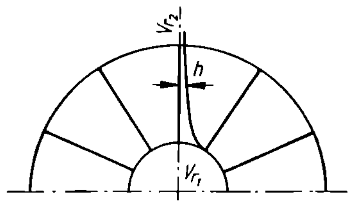


Bild 130

d) Wie groß ist das aufzubringende Drehmoment und die Leistung?

Anleitung zu b):

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\cdot v_r = r\omega^2$$

$$\int v_r\cdot\mathrm{d}v_r = \int r\omega^2\cdot\mathrm{d}r; \quad v_{r_2}^2 - v_{r_1}^2 = \omega^2\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

180. In einem **Trichter** rotiert Wasser. Wie verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten bei verschiedenen Durchmessern?

Lösung: Der Drall der Wassermasse einer dünnen Scheibe bleibt konstant, da kein Drehmoment wirkt. Die betrachtete Masse hat bei r_0 die Höhe h_0, bei r_1 die Höhe h_1.

Masse $$\pi r_0^2\cdot h_0\cdot\varrho = \pi r_1^2 h_1\cdot\varrho\,.$$

Trägheitsmoment eines schmalen Ringes

$$J = 2\pi x\cdot\mathrm{d}x\cdot h\cdot\varrho\cdot x^2\,.$$

Drall $$D = \int_0^{r_0} J\omega = 2\pi h_0\cdot\varrho\int_0^{r_0} x^3\omega\,\mathrm{d}x = 2\pi h_0\cdot\varrho\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\int_0^{r_1} x^3\omega\cdot\mathrm{d}x\,.$$

Beide Seiten können nur gleich sein, wenn $\omega = \dfrac{\text{konst}}{x^2}$ gesetzt wird; denn dann ist

$$\int_0^{r_0} x\cdot\mathrm{d}x = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\int_0^{r_1} x\cdot\mathrm{d}x \quad\text{oder}\quad \frac{r_0^2}{2} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\frac{r_1^2}{2}\,.$$

Also $$\omega x^2 = v x = \text{konstant.}$$

Ist v_0 die Umfangsgeschwindigkeit bei r_0 am Rande, so ist

$$v r = v x = v_0 r_0; \quad v = \frac{v_0 r_0}{x}\,.$$

In der Mitte ist theoretisch bei verlustloser Strömung v und $\omega = \infty$.

181. Bei einem **Zentrifugalregulator** sind bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega_1 =$ $= 13$ rad/s Zentrifugalkraft und Federkraft im Gleichgewicht, und der Abstand des Schwunggewichtsbodens von der Welle beträgt $z = 0{,}07616$ m. Nun steigt die Winkelgeschwindigkeit je Sekunde um 2 rad/s an. Aber erst bei $\omega_2 = 15$ rad/s beginnt infolge Reibung und Eckens das Schwunggewicht seine Lage zu verlassen.

Gemäß Bild 134 $l_1 = 120$ mm, $l_2 = 20$ mm, $d_1 = 110$ mm, $d_2 = 90$ mm, $d_3 = 30$ mm, $z = 71{,}6$ mm

Dichte $\varrho = 7{,}6$ kg/dm³

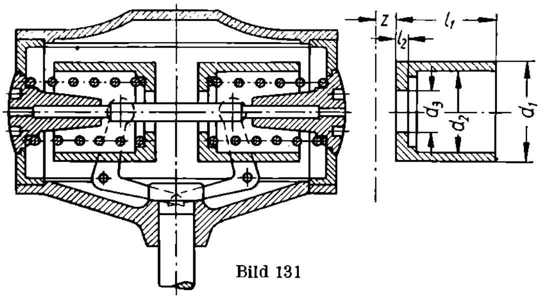


Bild 131

Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes und der Massen ist das Schwunggewicht in einen äußeren Rohrteil und in einen Bodenteil zu teilen und jeder Teil entsprechend Aufg. 121 I/3 zu berechnen.

a) Masse des Rohr- und Bodenteils, Gesamtmasse.

b) Schwerpunkt der Gesamtmasse und Schwerpunktradius x_0.

c) Auf die Welle bezogenes Gesamtträgheitsmoment (wie in Aufg. 121 I).

d) Zentrifugalkraft = Federkraft bei ω_1, Zentrifugalkraft bei ω_2, Beschleunigungskraft.

e) Radiale Beschleunigung der Masse bei Beginn der Bewegung $b = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2}$.

f) Trägheitsradius i bei x_0 und $x_1 = 0{,}15$ m; J_1; Drehmoment, wenn bei x_1 die Radialgeschwindigkeit $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0{,}5$ m/s ist.

182. Eine Kugel trifft in **exzentrischem Stoß** auf ein **Pendel.** Es ist zu berechnen, welche Geschwindigkeiten auftreten und welche Stoßverluste entstehen.

Kugelmasse $m_1 = 3{,}73$ kg, Masse des Pendels insgesamt $m_2 = 7{,}84$ kg, Masse des unteren Teiles $m_2' = 6{,}86$ kg, der Pendelstange $m_2'' = 0{,}98$ kg, Breite b (Bild) $= 8$ cm, Höhe $h = 12$ cm, Länge der Stange $l = 0{,}54$ m, Schwerpunktabstand der Kugel $R_1 = 0{,}62$ m, Schwerpunktabstand des unteren Teiles des Pendels vom Drehpunkt $R_2 = 0{,}60$ m, Fallwinkel $\alpha_1 = 60°$, Kugeldurchmesser $2 r_0 = 10$ cm.

a) Trägheitsmoment der Kugel und des Pendels, **b)** Winkel, **c)** Fallgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit der Kugel, **d)** Winkelgeschwindigkeit, Ausschlag und Energieverlust nach unelastischem Stoß, **e)** Winkelgeschwindigkeit nach vollkommen elastischem Stoß, **f)** Winkelgeschwindigkeiten nach halbelastischem Stoß, wenn angenommen wird, daß die Verluste halb so groß sind wie beim elastischen Stoß.

Lösung: a) Kugelträgheitsmoment (Verschiebungssatz)

$$J_1 = m_1 i^2 = m_1 \cdot \left(R_1^2 + {}^2/_5 r_0^2\right) = 1{,}437 \text{ kgm}^2\,, \quad i = 0{,}621\, m \approx R_1\,.$$

Pendelträgheitsmoment

$$J_2 = m_2' \cdot \left(R_2^2 + \frac{d^2}{12}\right) +$$

$$+ m_2'' \cdot \frac{l^2}{3} = 2{,}710 \text{ kgm}^2 ,$$

$$d^2 = b^2 + h^2 .$$

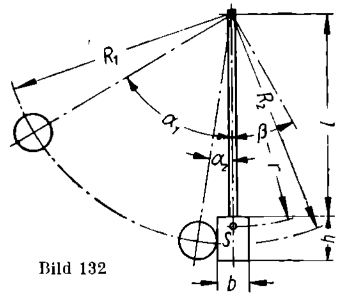


Bild 132

b) $\sin \alpha_2 = \frac{b/2 + r_0}{R_1} = 0{,}145; \ \alpha_2 = 8° 21';$

$\cos \alpha_2 = 0{,}9894; \quad \alpha_1 = 60°;$

$\cos \alpha_1 = 0{,}5000 .$

c) Geschwindigkeit der Kugel

$g m_1 R_1 \cdot (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = {}^1/_2 m_1 i^2 \omega_1^2 = {}^1/_2 J_1 \omega_1^2,$

$\omega_1^2 = 15{,}39; \quad \omega_2^2 = 3{,}92 \text{ rad/s}.$

d) Unelastischer Stoß

Drall $m_1 i_1 v_1 \approx m_1 R_1 v_1 = J_1 \omega_1$

$J_1 \omega_1 = (J_1 + J_2) \cdot \omega_2; \ \omega_2 = 1{,}359 \text{ rad/s}.$

Ausschlag

$m_1 g R_1 \cdot (1 - \cos \beta) - m_1 g R_1 \cdot (1 - \cos \alpha_2) + m_2 g r \cdot (1 - \cos \beta) =$

$= {}^1/_2 \cdot (J_1 + J_2) \omega_2^2,$

$\beta = 19° \, 48.$

Energieverlust

$E_v = m_1 g R_1 \cdot (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) - {}^1/_2 \cdot (J_1 + J_2) \omega_2^2 = 7{,}272 \text{ Nm}.$

e) Vollkommen elastischer Stoß, $E_v = 0$ (s. Aufgn. 109, 110)

$w_{\mathrm{I}} = 2u - v_1, \ v_1 = R_1 \omega_1 = 2{,}43 \text{ m/s}, \ u = R_1 \omega_2 = 0{,}843 \text{ m/s},$

$w_{\mathrm{I}} = -0{,}744 \text{ m/s},$

genauer: $\omega_{\mathrm{I}} = 2\omega_2 - \omega_1 = -1{,}202 \text{ rad/s}, \ w_{\mathrm{I}} = -0{,}746 \text{ m/s},$

$\omega_{\mathrm{II}} = 2\omega_2 - 0 = 2{,}88 \text{ rad/s}.$

f) Halbelastischer Stoß, $E_{V_1} = 1/2 \, E_V = 3{,}636 \text{ Nm}$

Bei jeder Art ist $\omega_2 = 1{,}359 \text{ rad/s}$,

$m_1 R_1 \cdot (u - w_1) = J_1 \cdot (\omega_2 - \omega_{\mathrm{I}}) = J_2 \cdot (\omega_{\mathrm{II}} - \omega_2)$

${}^1/_2 \, J_1 \omega_{\mathrm{I}}^2 + {}^1/_2 \, J_1 \omega_{\mathrm{II}}^2 = {}^1/_2 \, J_1 \, \omega_{\mathrm{I}}^2 + 0 - E_V/2.$

Aus beiden Gleichungen ist zu finden: $\omega_{\mathrm{I}} = -0{,}4496 \text{ rad/s}$,
$\omega_{\mathrm{II}} = 2{,}322 \text{ rad/s}.$

Bewegung eines Punkthaufens, freie Achse

183. Welchen Satz kann man in bezug auf die **Bewegungsgröße** eines **Punkthaufens** aufstellen?

Lösung: Die Bewegungsgröße eines Punkthaufens ist gleich der Bewegungsgröße der im Schwerpunkt vereinigten Massen und bleibt konstant, wenn keine äußeren Kräfte auftreten. Innere Kräfte verändern nur die Bewegungsgrößen der Einzelmassen relativ zum Schwerpunkt des Ganzen, die Bewegungsgröße des Gesamtschwerpunktes bleibt dagegen unverändert.
M Summe aller Massen, m Einzelmasse, s_0 Schwerpunktsweg, s Weg, v Geschwindigkeit.

$$M s_0 = \sum (m s)$$

$$M \cdot \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \sum m \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$M v_0 = \sum m v .$$

Bei Vorhandensein eines Dralles ist der Quotient $\frac{J}{R} \cdot \omega$ der Bewegungsgröße gleichwertig. Stoßen Körper, welche eine geradlinige Bewegung (Translation) und eine Drehbewegung gleichzeitig ausführen, aufeinander, so bleibt auch die gesamte reduzierte Bewegungsgröße konstant.

$$\sum m v + \sum \frac{J}{R} \cdot \omega = \text{konst}; \quad \text{oder} \quad \sum m v + \sum \frac{J}{R^2} \cdot R\omega = \text{konst},$$

$$\frac{J}{R^2} \text{ reduzierte Masse},$$

R Abstand zwischen Trägheitsachse und Stoßpunkt in m.

Der frei schwebende Körper kann sich nur um eine freie Achse drehen. Freie Achsen sind die Hauptträgheitsachsen, die durch den Schwerpunkt gehen. Ein Körper hat im allgemeinen drei Hauptträgheitsachsen. Ein Winkeleisen z. B. hat eine in Längsrichtung und zwei senkrecht dazu, die aus Tabellen gefunden werden können. $J_{\max}$ ist hier aber nicht zu verwechseln mit demjenigen der Tabellen, sondern es ist das Massenträgheitsmoment $\int \mathrm{d}m r^2$, bezogen auf die Achse durch den Schwerpunkt.

Nur die Achse für das größte und kleinste Trägheitsmoment sind stabile Drehachsen, während die dritte mehr oder weniger labil ist. Wenn also der Körper einen exzentrischen Stoß erfährt, der annähernd ihn um eine der beiden stabilen Achsen in Drehung versetzt, so geht die Drehung in eine ruhige um eine dieser Achsen über. Um die dritte Achse dagegen ist im allgemeinen keine exakte Drehung möglich; sondern es entsteht ein Taumeln. Bei ebenen Problemen hat man es nur mit zwei Hauptträgheitsachsen zu tun.
Wirkt ein Kräftepaar allein, so bleibt keine freie Kraft übrig, und es kann nur eine Änderung des Dralles eintreten.
Wirkt eine Kraft allein, so kann man in der Hauptträgheitsachse zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte antragen, und man erhält ein Kräftepaar und eine übrigbleibende Einzelkraft. Es entsteht eine Drehung und eine Translation.

Zum besseren Verständnis ist es zweckmäßig, das Massenträgheitsmoment durch zwei Ersatzmassen $m_2'/2$ zu ersetzen. Eine dieser Ersatzmassen muß in Richtung der wirkenden Kraft fallen. Ist r der Abstand der Kraft von der Trägheitsachse, so ist nach Abbildung

$$J = m_2 i^2 = 2 \cdot \frac{m_2'}{2} \cdot r^2, \quad m_2' = m_2 \cdot \left(\frac{i}{r}\right)^2 = \frac{J}{r^2}.$$

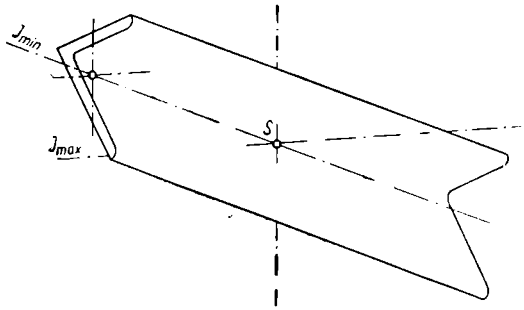


Bild 133

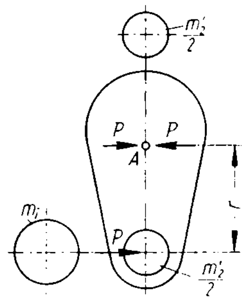


Bild 134

Stößt im Bild eine Masse m_1 auf die Masse m_2, so entsteht eine Translation w und eine Torsion. Die Masse m_1 nimmt mit der reduzierten Masse $m_2'/2$ bei unelastischem Stoß die gemeinsame Geschwindigkeit u_1 an, die obere Masse $m_2'/2$ nimmt die Geschwindigkeit u_2 an, ferner entsteht die Winkelgeschwindigkeit ω und die Translation des Schwerpunktes A mit einer Geschwindigkeit w. Die Geschwindigkeit von m_1 sei v_1.

Somit $$\int P \cdot \mathrm{d}t = m_1 v_1 = \left(m_1 + \frac{m_2'}{2}\right) \cdot u_1 + \frac{m_2'}{2} \cdot u_2 .$$

Es ist $u_1 = w + \omega r$ und $u_2 = w - \omega r$,

$$m_1 v_1 = m_1 \cdot (w + r\omega) + m_2'/2 \cdot (w + r\omega) + m_2'/2 \cdot (w - r\omega) =$$
$$= m_1 \cdot (w + r\omega) + m_2 \cdot \left(\frac{i}{r}\right)^2 \cdot w = m_1 \cdot (w + r\omega) + \frac{J}{r^2} \cdot w .$$

Um eine Verbindung zwischen w und $r\omega$ herzustellen, ist es nur nötig, den ersten Augenblick zu betrachten, wo die obere Masse $m_2'/2$ noch in Ruhe ist. Dann ergibt sich

$$u_1 = w + r\omega \text{ und } u_1 = 2w, \text{ somit } w = r\omega ,$$

$$m_1 v_1 = 2 m_1 w + J/r^2 \cdot w$$

oder $$m_1 v_1 = m_1 u_1 + \frac{J}{r} \cdot \omega .$$

Diese Gleichung stimmt mit der obigen überein. Sind mehrere Trägheitsmomente miteinander wie Zahnräder verbunden, so ist das Trägheitsmoment wie in Aufg. 135 u. f. zu reduzieren.

Obige Gleichungen gelten, gleichgültig ob der Stoß elastisch oder unelastisch ist, ob die Massen einzeln sich anstoßen oder gemeinsam und in welcher Reihenfolge sie sich berühren.
Die Geschwindigkeit eines gemeinsamen Schwerpunktes eines Punkthaufens ist dann bei elastischem und unelastischem Stoß

$$v_0 = \frac{\sum m v}{\sum m}.$$

184. a) Welchen Einfluß haben **äußere** Kräfte auf einen Punkthaufen? **b)** Welchen Einfluß haben **innere** Kräfte auf einen Punkthaufen?

Lösung: a) Unter dem Einfluß der äußeren Kräfte beschleunigt sich der gemeinsame Schwerpunkt so, als ob die ganze Masse in ihm vereinigt wäre.
Aus $M v_0 = \sum m v$ ergibt sich durch Differenzieren

$$M \cdot \frac{\mathrm{d} v_0}{\mathrm{d} t} = \sum \left(m \cdot \frac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} t}\right) = P.$$

P ist die Resultierende aller äußeren Kräfte.

b) Die inneren Kräfte des Punkthaufens haben auf die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes keinen Einfluß; sie heben sich auch gegenseitig auf. Dagegen beschleunigen die inneren Kräfte die einzelnen Teile relativ zum Schwerpunkt der gesamten Masse so, daß die algebraische Summe der Beschleunigungskräfte Null bleibt:

$$\sum \left(m \frac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} t}\right) = m_1 \cdot \frac{\mathrm{d} v_1}{\mathrm{d} t} + m_2 \cdot \frac{\mathrm{d} v_2}{d t} + m_3 \cdot \frac{\mathrm{d} v_3}{\mathrm{d} t} + m_4 \cdot \frac{\mathrm{d} v_4}{\mathrm{d} t} \cdots = 0.$$

Die **Energie** wächst allerdings um die Summe der Arbeit sowohl der inneren wie der äußeren Kräfte.

185 A. Drei Eisenbahnwagen fahren in derselben Richtung mit verschiedenen Geschwindigkeiten und stoßen nacheinander aufeinander. Welches ist die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes, und wie groß sind die Geschwindigkeiten der einzelnen Wagen nach dem Stoß, der elastisch sein soll?

$$m_1 = 3 \text{ t},\ m_2 = 20 \text{ t},\ m_3 = 17 \text{ t},\ v_1 = 12 \text{ m/s},\ v_2 = 4 \text{ m/s},\ v_3 = 2 \text{ m/s}.$$

Lösung: $M \cdot v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3;\ v_0 = 3{,}75 \text{ m/s}.$

Stoß des ersten und zweiten Wagens

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 5{,}0435 \text{ m/s};\quad w_1 = 2 u_1 - v_1 = -1{,}913 \text{ m/s};$$

$$w_2 = 2 u_1 - v_2 = 6{,}087 \text{ m/s}.$$

Stoß des zweiten und dritten Wagens

$$u_2 = \frac{m_2 w_2 + m_3 v_3}{m_2 + m_3} = 4{,}21 \text{ m/s};\quad w_2' = 2 u_2 - w_2 = 2{,}23 \text{ m/s};$$

$$w_3 = 2 u_2 - v_3 = 6{,}42 \text{ m/s}.$$

Probe:

$$M v_0 = m_1 w_1 + m_2 w_3 + m_3 w_3 \,,$$
$$v_0 \sum m = m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 \,,$$
$$150\ \mathrm{kgm/s} = -5{,}7\ \mathrm{kgm/s} + 46{,}4\ \mathrm{kgm/s} + 109\ \mathrm{kgm/s} \approx 150\ \mathrm{kgm/s}\,.$$

185 B. Es ist anzunehmen, daß der Stoß zwischen den drei Wagen $^3/_4$ elastisch ist, d. h., daß bei jedem Stoß $^1/_4$ des Verlustes eintritt, der beim unelastischen Stoß eintreten würde.

a) u_1. **b)** Verlust des unelastischen und des $^3/_4$ elastischen Stoßes. **c)** Arbeitsvermögen nach dem Stoß. **d)** w_1 und w_2. **e)** Probe mit $m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v_0$. **f)** u_2.

186. Bei einem **Druckluftbohrhammer** hat das Gehäuse eine Masse von $m_1 = 8{,}83$ kg und der Schlagkolben eine Masse von $m_2 = 1{,}57$ kg. Die Fläche des Kolbens beträgt 28 cm², der Druckluftüberdruck 5 at, der Weg, den die Schlagkolben bis zur Öffnung der Auslaßschlitze zurücklegt, ist 4 cm. Der Schwerpunkt des Gehäuses liegt $e = 0{,}6$ cm außerhalb der Mittellinie.

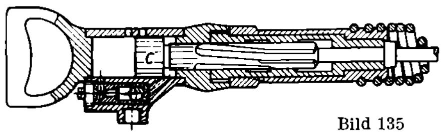


Bild 135

a) Wie verhält sich die Geschwindigkeit des Gehäuses zu der des Schlagkolbens, wenn der Hammer frei beweglich aufgehängt ist und anfangs in Ruhe war? Wie verhält sich die Beschleunigung, und wie groß ist sie?

b) Macht der Hammer eine Drehbewegung?

c) Wieviel Zeit vergeht, bis die Auslaßschlitze geöffnet werden?

d) Wie groß ist in diesem Augenblick die Energie des Schlagkolbens und des Gehäuses?

e) Welchen Weg macht der Schlagkolben und das Gehäuse bis zum Öffnen der Schlitze?

Lösung: a) Der Schwerpunkt des ganzen Hammers ist anfangs in Ruhe und bleibt also auch in Ruhe. Daher ist

$$M v_0 = \sum m v = 0 \,,$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \,,$$
$$v_1 : v_2 = -m_2 : m_1 = -\frac{1{,}57\ \mathrm{kg}}{8{,}83\ \mathrm{kg}} = -0{,}1778\,.$$

Die Geschwindigkeit des Gehäuses ist somit in jedem Augenblick 0,178mal Geschwindigkeit des Schlagkolbens und entgegengesetzt gerichtet.
Die äußere Kraft ist Null, somit ist

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = \sum m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = P = 0 \,,$$
$$m_1 \cdot \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \cdot \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = 0 \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} : \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -m_2 : m_1 = -0{,}1778\,.$$

Will man die Größe dieser absoluten Beschleunigung finden, so muß man allerdings von der inneren Kraft P_i ausgehen, die auf jeden Einzelteil wirkt.

$$P_i = \frac{\pi d^2}{4} \cdot p = 28\,\mathrm{cm}^2 \cdot 5\,\mathrm{at} = 140\,\mathrm{kp} = 1373{,}4\ \mathrm{N}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \frac{P_i}{m_1} = \frac{1373{,}4\ \mathrm{N}}{8{,}83\ \mathrm{kg}} = 155{,}5\,\mathrm{m/s^2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{P_i}{m_2} = \frac{1373{,}4\ \mathrm{N}}{1{,}57\ \mathrm{kg}} = 875\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

b) Der Drall ist anfangs Null und bleibt Null, also $\sum m v r = 0$, da nur innere Kräfte herrschen. Da Gehäuse und Hammer sich in einer geraden Linie bewegen, ist $r = \infty$; also

$$m_1 v_1 \cdot \infty + m\ v\ \cdot \infty = 0$$

$$m_1 v_1 = -m\ v \quad \text{wie oben.}$$

Eine Drehung tritt nicht auf. Auch das Drehmoment der inneren Kräfte in bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt, der ja erhalten bleibt, hebt sich auf.

$$+\ P_i e - P_i e = 0.$$

c) Die Summe der Beschleunigungen ist für die Zeit, in der die Strecke $s = 4$ cm zurückgelegt wird, maßgebend.

$$b = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = 155{,}5\,\mathrm{m/s^2} + 875\,\mathrm{m/s^2} = 1030{,}5\,\mathrm{m/s^2}\,,$$

$$^1/_2\, b t^2 = s$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}04\ \mathrm{m}}{1030{,}5\,\mathrm{m/s^2}}} = 0{,}008813\,\mathrm{s}\,.$$

d) $E_2 = {}^1/_2\, m_2 v_2^2 = {}^1/_2 \cdot 1{,}57\ \mathrm{kg} \cdot v_2^2\,,$

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \cdot t = 875\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}008813\ \mathrm{s} = 7{,}71\,\mathrm{m/s}\,,$$

$$E_2 = {}^1/_2 \cdot 1{,}57\ \mathrm{kg} \cdot 7{,}71^2\ \mathrm{m^2/s^2} = 46{,}7\ \mathrm{Nm}\,,$$

$$E_1 = {}^1/_2\, m_1 v_1^2 = {}^1/_2 \cdot 8{,}83\ \mathrm{kg} \cdot v_1^2\,,$$

$$v_1 = 0{,}1778\, v_2 = 1{,}37\,\mathrm{m/s}\,,$$

$$E_1 = {}^1/_2 \cdot 8{,}83\ \mathrm{kp} \cdot 1{,}37^2\,\mathrm{m^2/s^2} = 8{,}2\,\mathrm{Nm}\,.$$

Probe: $P_i s = E_1 + E_2$

$$140\ \mathrm{kp} \cdot 0{,}04\ \mathrm{m} = 5{,}60\,\mathrm{kpm} = 4{,}76\,\mathrm{kpm} + 0{,}84\,\mathrm{kpm} = 5{,}60\,\mathrm{kpm}\,,$$

$$1373{,}4\ \mathrm{N} \cdot 0{,}04\ \mathrm{m} = 54{,}9\ \mathrm{Nm} = 46{,}7\ \mathrm{Nm} + 8{,}2\ \mathrm{Nm} = 54{,}9\ \mathrm{Nm}\,.$$

e) Aus der Schwerpunktgleichung ergibt sich:

$$m_1 s_1 = m_2 s_2 \text{ (ohne Berücksichtigung der Richtung)}$$

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot s_2$$

$$s_1 + s_2 = s_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 4\,\text{cm}\,.$$

Schlagkolbenweg $s_2 = \frac{4\,\text{cm}}{1{,}1778} = 3{,}4\,\text{cm}$, Gehäuseweg $s_1 = 0{,}6\,\text{cm}$.

187. Ein **ballistisches Pendel** dient zur Messung der Geschoßgeschwindigkeit. Ein Gewehrgeschoß wird in ein derartiges Pendel nach Bild eingeschossen, wobei es steckenbleibt.

Geschoßmasse $m_1 = 10$ g,
Masse des Pendelkastens $m_2 = 4905$ g,
Masse der Aufhängedrähte $m_3 = 11{,}21$ g,
Abmessungen des Kastens $12 \cdot 12 \cdot 12$ cm³,
Aufhängelänge des Kastens bis Schwerpunkt $R_2 = 100$ cm,
Drahtlänge $L = 94$ cm,
Abstand des Einschlags vom Aufhängepunkt $R_1 = 95$ cm,
Eindringabstände: $x_2 = 6$ cm, $x_1 = 2$ cm,
Geschoßlänge $l = 4$ cm,
Geschoßdurchmesser $2r = 0{,}79$ cm,
Ausschlag des Pendels nach dem Einschuß $\alpha = 31°\ 0{,}6'$.

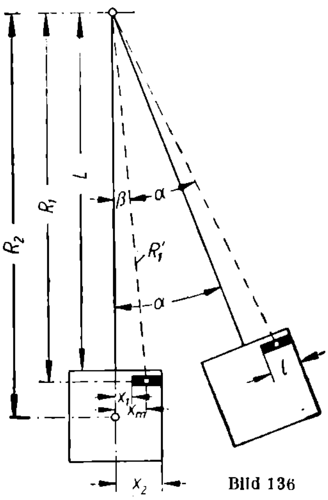


Bild 136

a) Trägheitsmoment J_2 des Kastens.
b) Trägheitsmoment J'' der Aufhängedrähte.
c) Trägheitsmoment J_1 des eingeschossenen Geschosses.
d) Steighöhe der Massen m_1, m_2 und m_3.
e) Winkelgeschwindigkeit ω des Pendels nach Einschuß.
f) Geschoßgeschwindigkeit v.

Anleitungen: $J_2' = m_2 \cdot \left(R_2^2 + \frac{d^2}{12}\right)$; $J_2'' \approx m_3 \cdot \frac{L^2}{3}$,

$$J_1 = m_1 \cdot \left[R_1^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{x_2^2 + x_1^2 + x_2 x_1}{3}\right],$$

entstanden aus $\int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \mathrm{d}x = \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} = (x_2 - x_1) \cdot \frac{x_2^2 + x_1^2 + x_2 x_1}{3}$.

$$h_1 = R_1'[1 - \cos(\alpha + \beta)] - R_1'(1 - \cos\beta) = R_1'[\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$R_1'^2 = R_1^2 + x_m^2 = 95^2\,\text{cm}^2 + 4^2\,\text{cm}^2;$$

$$\tan\beta = \frac{x_m}{R_1},$$

$$h_2 = R_2 \cdot (1 - \cos\alpha);$$

$$h_3 = \frac{L}{2} \cdot (1 - \cos\alpha),$$

$$1/2 \cdot (J_1 + J_2) \cdot \omega^2 = m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 \cdot h_3,$$

$$m_1 v R_1 = (J_1 + J_2) \cdot \omega.$$

Genaugenommen verlagert sich durch das einseitig sitzende Geschoß auch der Schwerpunkt des Pendels. Hinzu kommen die Ungenauigkeiten durch Verformung des Geschosses und durch eine etwas gekrümmte Bahn im Kasten, da eine sehr kleine Bewegung desselben schon während des Eindringens stattfindet.

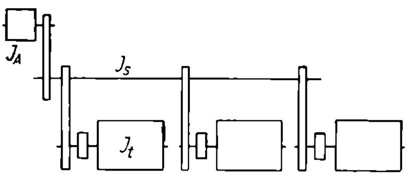


Bild 137

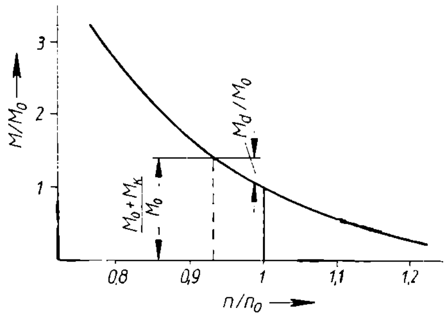


Bild 138

188. Ein Doppelschlußmotor treibt über eine Transmission mehrere Trommeln an. Vor jeder Trommel befindet sich eine **Rutschkupplung.**
Die Charakteristik des Verbundmotors liegt zwischen derjenigen des Haupt- und Nebenschlußmotors und ist in Bild 138 gegeben.
Das Drehmoment M_0 ist bei 2 eingeschalteten Trommeln 10 kpm, und die zugehörige Drehzahl ist $n_0 = 640$ U/min. Dazu gehört in Bild 138 der Punkt $n/n_0 = 1$ und $M/M_0 = 1$.
Nun wird die dritte Trommel zugeschaltet. In der Rutschkupplung kann höchstens ein Drehmoment von $M_k' = 48$ kpm übertragen werden, sonst rutscht die Kupplung. Für die Arbeit und die Reibung erfordert die Trommel ein Drehmoment von $M_t' = 36$ kpm, so daß der Überschuß von 12 kpm zur Beschleunigung der Trommelmasse dient.
Das widerstehende Drehmoment setzt sich somit aus dem Drehmoment zum Antrieb der Transmission und der 2 Trommeln $M_0 = 10$ kpm und dem reduzierten Drehmoment der Rutschkupplung zusammen.

Augenblicklich antreibendes Drehmoment M,
nicht reduziertes Drehmoment der Kupplung M_k',
reduziertes Drehmoment der Kupplung M_k,
entspr. Drehmomente der Trommel M_t' und M_t,
Trägheitsmoment des Motorankers $J_A = 0{,}49$ kgm^2,
Trägheitsmoment der Transmission samt Scheiben $J_s = 58{,}8$ kgm^2,
Trägheitsmoment einer Trommel $J_t = 245{,}25$ kgm^2,

Gesamtübersetzung $i = 1 : 12$,
Übersetzung von Motor zur Transmission $i_1 = 1 : 4$,
augenblicklicher Momentenmangel $M_d = M - (M_0 + M_k)$.

A. Unter der Annahme, daß 2 Trommeln bei $n_0 = 640$ U/min und einem Drehmoment $M_0 = 10$ kpm im Dauerzustand mitlaufen und dann eine dritte Trommel mit Hilfe der Rutschkupplung zugeschaltet wird, ist zu berechnen:

a) das auf die Motorwelle reduzierte Drehmoment der Rutschkupplung und der Trommel;

b) die auf die Motorwelle reduzierten Trägheitsmomente der Transmission und der 2 ersten Trommeln, reduziertes Trägheitsmoment der dritten Trommel;

c) die Drehzahl bei Beendigung des Rutschens und längere Zeit nach Beendigung des Rutschens aus Bild 138;

d) Zeit bis zum Ende des Rutschens;

e) Zeit, bis der Dauerzustand eingetreten ist.

Lösung **a)** $M_k = 4\,\mathrm{kpm}$ und $M_t = 3\,\mathrm{kpm}$.

b) $J_1 = J_A + J_s \cdot i_1^2 + 2 J_t i^2 = 7{,}583\,\mathrm{kgm}^2$;

$J_2 = J_t i^2 = 1{,}707\,\mathrm{kgm}^2$.

c) $\dfrac{Md}{M_0} = \dfrac{4}{10}$; $n_1 = \dfrac{n_1}{n_0} \cdot n_0 = 0{,}937 \cdot 640\,\mathrm{U/min} = 599{,}7\,\mathrm{U/min}$ aus Bild 138;

$\dfrac{Md}{M_0} = \dfrac{3}{10}$; $\quad n_2 = 0{,}944 \cdot 640\,\mathrm{U/min} = 604\,\mathrm{U/min}$.

d) An der Trommel wird, während $M_k - M_t$ beschleunigt, $n_1 \approx 600$ U/min erreicht.

$(M_k - M_t) \cdot t = 2\pi J_2 n_1$;

$$t = \frac{2\pi J_2 n_1}{M_K - M_t} = \frac{2\pi \cdot 1{,}707\,\mathrm{kgm}^2 \cdot 599{,}7}{(4-3)\,\mathrm{kpm} \cdot \mathrm{min}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}707 \cdot 599{,}7\,\mathrm{kgm}^2}{1 \cdot 9{,}81\,\dfrac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot 60\,\mathrm{s}}$$

$t = 10{,}91\,\mathrm{s}$.

e) Sofort bei Beendigung des Rutschens fällt das widerstehende Moment um 1 kpm, da die Beschleunigung der Trommel aufgehört hat. Die Drehzahl nimmt dann auf 604 U/min zu, wobei dann das Überschußmoment Null wird. Wegen der Kleinheit der Drehzahländerung und des Überschußmomentes kann mit einem mittleren $M_d = 0{,}5\,\mathrm{kpm} = 4{,}9\,\mathrm{Nm}$ gerechnet werden.

$J_{ges} = 7{,}583\,\mathrm{kgm}^2 + 1{,}707\,\mathrm{kgm}^2 = 9{,}29\,\mathrm{kgm}^2$;

$M_d t = J_{ges} \cdot 2\pi \cdot (n_2 - n_1)$, daraus folgt

$t = 0{,}855\,\mathrm{s}$.

B. Wie groß würde die Drehzahl bei Einschalten einer nicht elastischen Kupplung, z. B. einer Klauenkupplung, bei sonst gleichen Vorraussetzungen?

Lösung: $J_1 \omega_0 = (J_1 + J_2) \cdot \omega_1$; $n_1 : n_0 = \omega_1 : \omega_3$;

$n_1 = 522$ U/min.

C. Dieselben Fragen sind zu beantworten, wenn zunächst die Transmission ohne Trommeln läuft und dann eine einzige Trommel zugeschaltet wird. (Für a $\cdots$ c.) Bei a) ist das Drehmoment M' und die Drehzahl n' zu ermitteln, welche vorhanden sind, ehe die Trommel zugeschaltet wird.

189. In Aufg. 146 war eine **Reibrollen-Friktionspresse** berechnet. Wenn der Stößel oben steht, wird durch Anpressen der Reibrollen das Schwungrad und die Stößelmasse in Bewegung gesetzt. Dabei entsteht ein unelastischer Stoß, so daß die Drehzahl vermindert wird. Der Motor muß diese Verminderung beim Abwärtsgang rückgängig machen können, damit volle Leistung erzielt wird. Es ist deshalb wichtig, diese Drehzahlverminderung zu kennen.

Es war: Schwungmoment des Schwungrades $m_2 D_2^2 = 47{,}4$ kgm²,
Schwungmoment an der Motorwelle $m_1 D_1^2 = 1{,}6$ kgm²,
Drehzahl der Motorwelle normal $n = 950$ U/min,
Übersetzungsverhältnis zwischen Motorwelle und Arbeitsspindel $i = 3/19$,
Masse des Stößels $m = 225$ kg,
Steigung der Spindel $h_0 = 150$ mm,
Motorleistung normal $N_0 = 3{,}4$ PS oder 2500 Nm/s = 2500 W,
Wirkungsgrad des Motors $\eta_1 = 0{,}95$,
Wirkungsgrad der Spindel $\eta_2 = 0{,}80$,
Gesamtwirkungsgrad $\eta = \eta_1 \eta_2 = 0{,}76$,
Winkelgeschwindigkeit des Motors anfangs ω_{I},
Winkelgeschwindigkeit des Motors nach dem Einschalten ω_{II},
Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades $\omega' = i\,\omega_{\mathrm{II}}$,
Geschwindigkeit des Stößels v.

Es besteht zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades ω' und der Stößelgeschwindigkeit v folgender Zusammenhang:

$$\frac{\omega'}{v} = \frac{2\pi}{h_0}; \quad v = \frac{h_0}{2\pi} \cdot \omega' = \frac{h_0}{2\pi} \cdot i\,\omega_{\mathrm{II}} = 0{,}00378\ \mathrm{m} \cdot \omega_{\mathrm{II}}.$$

Für die Stößelmasse findet man mit Hilfe einer Arbeitsgleichung für die Arbeit einer Umdrehung der Spindel ein Ersatzträgheitsmoment J''.

Der Stößel erfahre die Beschleunigung $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, an ihm wirkt als Kraft Massenkraft - Gewicht. Am Schwungrad ist dafür ein Drehmoment M nötig.

$$2\pi M \eta_2 = \left(m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - mg\right) \cdot h_0; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{h_0}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}t}$$

$$M\eta_2 + \frac{mgh_0}{2\pi} = m\left(\frac{h_0}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}t}; \quad J'' = m\left(\frac{h_0}{2\pi}\right)^2 = 0{,}128\ \mathrm{kgm}^2.$$

A. a) Gesamtträgheitsmoment an der Spindel, auf die Motorwelle reduziert.
b) Drehzahl der Motorwelle nach dem Einschalten der Reibrolle, wenn diese nicht rutscht, sondern wie ein eingeschaltetes Zahnrad wirkt.

c) Auf welchem Hubweg wird wieder die volle Drehzahl $n = 950$ U/min der Motorwelle erreicht, wenn angenommen wird, daß die Leistung des Motors konstant 3,4 PS ist?

Lösung: A. a) Trägheitsmoment an der Spindel

$$J_2' = \frac{m_2 D_2^2}{4} + J'' = 11{,}85\,\mathrm{kgm^2} + 0{,}128\,\mathrm{kgm^2} = 11{,}98\,\mathrm{kgm^2}.$$

Dasselbe, auf die Motorwelle reduziert:

$$J_2 = J_2' i^2 = 11{,}98\,\mathrm{kgm^2} \cdot \left(\frac{3}{19}\right)^2 \approx 0{,}3\,\mathrm{kgm^2}.$$

Trägheitsmoment der Masse an der Motorwelle

$$J_1 = \frac{m_1 D_1^2}{4} = 0{,}4\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

b) Beim plötzlichen Einschalten ist $M \cdot \mathrm{d}t = 0$, da $t = 0$ ist, also bleibt der Drall konstant.

$$J_1 \omega_{\mathrm{I}} = (J_1 + J_2) \cdot \omega_{\mathrm{II}} \text{ oder } J_1 n_{\mathrm{I}} = (J_1 + J_2) \cdot n_{\mathrm{II}}.$$

Daraus $n_{\mathrm{II}} = 541$ U/min.

c) $n_{\mathrm{III}} = n_{\mathrm{I}} = 950$ U/min.

Motornutzarbeit + Gewichtsarbeit = Erhöhung des Arbeitsvermögens.

$$N\eta t + mgH = \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2)\,(\omega_{\mathrm{III}}^2 - \omega_{\mathrm{II}}^2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2)\,(2\pi)^2 \cdot (n_{\mathrm{I}}^2 - n_{\mathrm{II}}^2).$$

Genaugenommen muß die Gleichung in Differentialform geschrieben werden, da H eine Funktion von n und t ist.

$$\mathrm{d}H = v \cdot \mathrm{d}t = \frac{h_0}{2\pi}\, i\, 2\pi \cdot n \cdot \mathrm{d}t = h_0\, i n\, \mathrm{d}t.$$

Bei genauer Nachrechnung ergibt sich aber, daß man außerordentlich genau setzen kann:

$$H = \frac{v_{\mathrm{I}} + v_{\mathrm{II}}}{2} \cdot t = \frac{0{,}00378\,\mathrm{m}}{2}\,(\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{II}}) \cdot t = 0{,}295\,\mathrm{m/s} \cdot t\,;$$

eingesetzt:

$$2500\,\mathrm{W} \cdot 0{,}76 \cdot t + 225\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}295\,\mathrm{m/s} \cdot t =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (0{,}4\,\mathrm{kgm^2} + 0{,}3\,\mathrm{kgm^2}) \cdot (2\pi)^2 \cdot \left(\frac{950^2}{\mathrm{min^2}} - \frac{541^2}{\mathrm{min^2}}\right)$$
$$t = 0{,}9164\,\mathrm{s},\quad H = 0{,}2703\,\mathrm{m}.$$

Da der verfügbare Hub 330 mm ist, wird die volle Drehzahl vor Hubende erreicht.

B. Wie groß wird **a)** n und **b)** t und H, wenn $J_1 = 0{,}49\ \text{kgm}^2$, $m = 300$ kg und der Gesamtwirkungsgrad 0,8 ist? Alle anderen Werte bleiben, z. B. $J_2 = 0{,}3\ \text{kgm}^2$.

C. Alle Angaben sind dieselben wie unter A. Nur die Reibrolle soll höchstens ein Drehmoment von $M_r' = 31{,}7$ kpm übertragen können, sonst rutscht sie. Ferner hängt das Drehmoment des Doppelschlußmotors von der Drehzahl nach folgender Gleichung ab:

$$M = 10 M_0 - 9 M_0 \cdot \frac{n'}{n_\mathrm{I}}, \quad n_\mathrm{I} = 950\ \text{U/min}\,,$$

$$M_0 = \frac{N}{2\pi n_\mathrm{I}} = 2{,}562\ \text{kpm}\,.$$

Auf die Motorwelle bezogenes Drehmoment der Reibrolle unter Berücksichtigung des Motorwirkungsgrades:

$$M_r = \frac{M_r' i}{\eta_1} = \frac{31{,}7\ \text{kpm}}{0{,}95} \cdot \frac{3}{19} = 5{,}27\ \text{kpm}\,.$$

Das durch das Stößelgewicht an der Spindel ausgeübte Drehmoment ist

$$M_g = \frac{m g h_0}{2\pi} i = 8{,}3\ \text{Nm} = 0{,}846\ \text{kpm}\,.$$

Drehmomentenmangel am Motor, wodurch Verzögerung eintritt:

$$M_d = M - M_r = 10 M_0 - 9 M_0 \frac{n}{n_\mathrm{I}} - M_r =$$
$$= 20{,}35\ \text{kpm} - 0{,}0243\ \text{kpm} \cdot \text{min} \cdot n$$
$$C = 20{,}35\ \text{kpm}\,; \quad k = 0{,}0243\ \text{kpm} \cdot \text{min}$$

$$C - kn = 2\pi \cdot J_1 \cdot \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\,; \quad \frac{\mathrm{d}n}{C - kn} = \frac{1}{2\pi J_1} \cdot \mathrm{d}t$$

$$y = C - kn; \quad \mathrm{d}n = -\frac{\mathrm{d}y}{k}\,; \quad -\frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{1}{k} \cdot \ln \frac{C - kn}{C - kn_1}$$

$$\ln \frac{C - kn}{C - kn_\mathrm{I}} = -\frac{30k}{\pi J_1} \cdot t = -z\,; \quad \frac{C - kn}{C - kn_\mathrm{I}} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$$

$$n = \frac{C}{k} - \frac{C - kn_\mathrm{I}}{k} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^z}\,.$$

Drallgleichung für die Spindel, reduziert auf die Motorwelle. Drehzahl steigt von 0 auf n.

$$(M_r \cdot \eta_1 \eta_2 + M_g) \cdot t = 2\pi \cdot J_2 (n - 0)$$

$$n = \frac{(M_r \eta + M_g) \cdot t}{2\pi J_2}\,.$$

Wenn das Rutschen der Reibrolle aufhört, sind beide n, das der antreibenden und der angetriebenen Seite, gleich. Daraus

$$t = 2\pi \cdot J_2 \frac{1}{M_r \eta + M_g} \left[\frac{C}{k} - \frac{C - kn_\mathrm{I}}{k} \frac{1}{\mathrm{e}^z}\right].$$

Da e^z bei einem $t = 0{,}5$ s sehr groß wird, kann angenähert gesetzt werden:

$$n_{II} = \frac{C}{k}; \quad t = 2\pi \frac{J_2}{M_r \eta + M_g} \cdot \frac{C}{k}.$$

a) Drehzahl und Zeit bis zur Beendigung des Rutschens.

b) Zeit, bis $n = 950$ U/min wieder erreicht ist.

c) Hubweg vom Beginn des Einschaltens, bis $n = 950$ U/min erreicht ist.

Lösung: C. a) $n_{II} = 837$ U/min; $t_1 = 0{,}556$ s.

$$\text{b)} \left[M\eta_1 - 2\pi J_1 \cdot \frac{dn}{dt}\right] \cdot \eta_2 + \frac{mgh_0}{2\pi} \cdot i = 2\pi J_2 \cdot \frac{dn}{dt}$$

$$M = 10 M_0 - 9 M_0 \frac{n}{n_1} = [25{,}62 \text{ kpm} - 0{,}0243 \text{ kpm min} \cdot n]$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$dt = \frac{0{,}00662\, dn}{20{,}32 - 0{,}0185\, n}; \qquad \left|\frac{t}{\text{s}}\right|\frac{n}{\text{U/min}}\right|^*$$

$$t_2 = 0{,}00662 \cdot \frac{2{,}303}{0{,}0185} \cdot \lg \frac{20{,}32 - 0{,}0185 \cdot 837}{20{,}32 - 0{,}0885 \cdot 950} = 0{,}204.$$

$$\text{c)}\ n_{\text{mittel}} = \frac{950 \text{ U/min} + 837 \text{ U/min}}{2} = 893{,}5 \text{ U/min}.$$

Zahl der Umdrehungen wieder sehr gut angenähert:

$$n_m \cdot (t_1 + t_2) = 893{,}5 \text{ U/min}\,(0{,}556 \text{ s} + 0{,}204 \text{ s}) = 11{,}3 \text{ Umdrehungen}.$$

Hubweg $H = 11{,}3\, i h_3 = 0{,}268$ m.

190. Ein zylindrischer, frei schwebender Stab wird durch einen zweiten, der von Hand bewegt wird, geschlagen. Der Drehpunkt dieses zweiten Stabes liege infolge der Armbewegung bei A.
Schlagender Stab Länge $l_1 = 0{,}8$ m, Masse $m_1 = 0{,}49$ kg.
Hebelarm bis zum Aufschlagpunkt $L = 1{,}3$ m. $L_1 = 1{,}7$ m.
Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 8$ rad/s.
Geschlagener Stab Länge $l_2 = 0{,}6$ m, Hebelarm vom Aufschlagpunkt bis zur Trägheitsachse 0,2 m, Masse $m_2 = 0{,}0981$ kg.

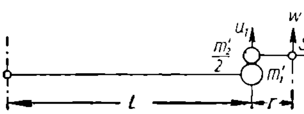


Bild 139

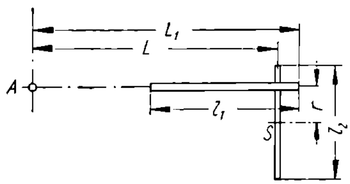


Bild 140

Beim Aufschlag läßt die Hand locker, so daß das Trägheitsmoment des Armes nicht zu berücksichtigen ist. Wie groß ist die Translations- und Winkelgeschwindigkeit des geschlagenen Stabes?

Anleitung: $J_1 = m_1 \cdot \left[\frac{h^2}{12} + \left(L_1 - \frac{l_1}{2}\right)^2\right]$; $J_2 = m_2 \frac{l_2^2}{12}$,

reduzierte Masse

$$m_1' = \frac{J_1}{L^2}; \quad m_2' = \frac{J_2}{r^2}$$

$$m_1' L \omega_1 = \left(m_1' + \frac{m_2'}{2}\right) u_1 + \frac{m_2'}{2} u_2$$

$$u_1 = w + r\omega_2, \quad u_2 = w - r\omega_2, \quad w = r\omega_2\,.$$

Fragen zum Drall

191. Auf einen **rotierenden Punkthaufen** wirken keine äußeren und inneren Kräfte. **a)** Wie verhält sich die Bewegungsenergie? **b)** Wie der Drall?

Lösung: Bewegungsenergie und Drall der gesamten Masse und der Einzelteile bleiben konstant. Der Drall bleibt der Größe und Richtung nach gleich.

$$\sum (J\omega) = \text{konstant.}$$

Äußere Kräfte ändern die Bewegungsenergie des Ganzen entsprechend der von ihnen geleisteten Arbeit; den Drall des Ganzen können sie nicht ändern. Dagegen können sie den Drall der einzelnen Teile verändern, aber nur so, daß die algebraische Summe konstant bleibt.

$$\sum (J\omega) = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 - J_3\omega_3 - J_4\omega_4 \ldots = \text{konstant.}$$

192 A. Wie darf der **Momentenpunkt** für die Abstände r des Dralls gewählt werden, wenn der Schwerpunkt des Punkthaufens in Ruhe ist?

Lösung: Drall $D = \sum (mvr)$.
Der Schwerpunkt aller Massen zusammen ist in Ruhe, also gilt:

$$v_0 \cdot \sum m = \sum (mv) = 0.$$

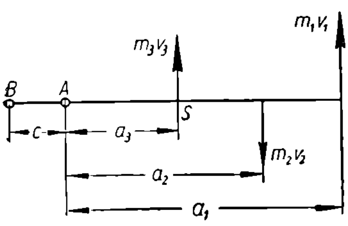


Bild 141

Zum Beispiel für eine Maschine mit verschiedenen hin- und hergehenden Massen:

$$m_1v_1 + m_2v_2 - m_3v_3 - m_4v_4 \text{ usw.} = 0.$$

Die Wahl des Momentenpunktes ist vollständig frei. Wird z. B. der beliebige Punkt A gewählt (s. Bild 141), so ist

$$D = m_1v_1a_1 - m_2v_2a_2 + m_3v_3a_3.$$

Wird der Punkt B gewählt, so ist der Drall

$$D\, m_1 v_1 (a_1 + c) - m_2 v_2 \cdot (a_2 + c) + m_3 v_3 (a_3 + c) =$$
$$= m_1 v_1 a_1 - m_2 v_2 a_2 + m_3 v_3 a_3 + c \cdot (m_1 v_1 - m_2 v_2 + m_3 v_3).$$

Da $m_1 v_1 - m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0$ ist, so ist die Wahl des Momentenpunktes also freigestellt. Diese Beziehung benutzt man, um bei Maschinen den Massenausgleich zu berechnen.

192 B. Welcher **Momentenpunkt** ist zu wählen, wenn die Drehachse mit der Schwerpunktachse zusammenfällt?

Lösung: Die Wahl ist freigestellt, da der Schwerpunkt in Ruhe bleibt.

193. Wie stellt man den **Drall zeichnerisch** dar?

Lösung: Der Drall ist wie die Winkelgeschwindigkeit eine gerichtete Größe. Gerichtete Größen stellt man als **Vektoren** dar. Die Winkelgeschwindigkeit wird durch einen Vektor in der Drehachse bildlich gekennzeichnet. Man hat festgesetzt, daß der positive Vektor so gezeichnet werden muß, daß, von der Spitze des Vektorpfeiles gesehen, die Drehung gegen den Uhrzeigersinn verläuft (Bild 142).
Der Drallvektor wird genauso wie der Winkelgeschwindigkeitsvektor gezeichnet. Er fällt mit diesem vollständig in der Richtung zusammen, wenn die Winkelgeschwindigkeitsachse zugleich eine Hauptträgheitsachse ist. Er weicht von ihm ab, wenn die Achse der Winkelgeschwindigkeit nicht in die Hauptträgheitsachse fällt; denn es ist ja der Drall $J\omega$, und nur wenn die J-Achse und die ω-Achse zusammenfallen, sind die beiden Vektoren gleichgerichtet. Richtung der Drallachse s. Aufg. 190.

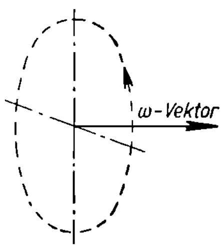


Bild 142

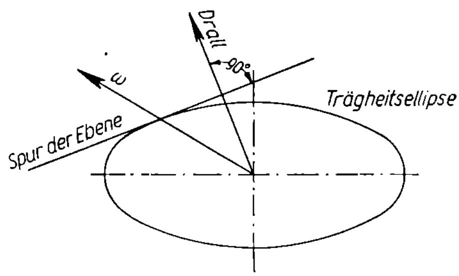


Bild 143

194. Welche Achsen eines Körpers sind **freie Achsen**?

Lösung: Die Hauptträgheitsachsen (s. Aufg. 145) sind freie Achsen. Der Körper vermag sich um sie zu drehen, ohne daß eine Welle nötig ist.

195. Fällt die **Richtung des Drallvektors** mit derjenigen des Vektors der Winkelgeschwindigkeit immer zusammen?

Lösung: Nein! Nur dann fallen die Richtungen der beiden Vektoren zusammen, wenn die Drehachse eine Hauptträgheitsachse ist (s. Aufg. 193). In allen anderen

Fällen bildet der Drallvektor mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit einen Winkel, der folgendermaßen gefunden werden kann:
Man zeichnet das Trägheitsellipsoid (s. Aufg. 147) des Körpers (Bild 105) und trägt den gegebenen Vektor der Winkelgeschwindigkeit ein. An den Schnittpunkt dieses Vektors mit dem Trägheitsellipsoid legt man eine Tangentenebene. Auf diese fällt man vom Schwerpunkt des Körpers aus das Lot. Dieses Lot gibt die Richtung des Dralls an.

196. Bei einem Körper fällt die **feste Drehachse** nicht in eine freie Achse. Zum Beispiel ist ein Schwungrad etwas schief aufgekeilt. Welche Kräfte bzw. Beanspruchungen treten auf?

Lösung: Wenn auch der Schwerpunkt richtig in der Drehachse liegt, so treten dennoch Biegemomente und Biegespannungen auf, weil der Körper versucht, sich mit seiner freien Achse in die Drehachse einzustellen.

197. Ein nach allen Richtungen **frei beweglicher Körper**, z. B. ein im Wasser schwebender Körper, bewegt sich so, daß der anfängliche Vektor der Winkelgeschwindigkeit nicht in eine freie Achse fällt. Äußere Kräfte wirken nicht.
a) Wie verhalten sich die Drallachse und der Schwerpunkt? **b)** Wie verhält sich die Achse der Winkelgeschwindigkeit? **c)** Wie verhält sich die Hauptträgheitsachse, d. i. die freie Achse?

Lösung: **a)** Die Drallachse und der Schwerpunkt bleiben in Ruhe, da keine äußeren Kräfte vorhanden sind (s. Aufg. 186).

b) Die Achse der Winkelgeschwindigkeit beschreibt einen Kreiskegel um die Drallachse (Kreis k_1 in Bild 144).

c) Die freie Achse des Körpers beschreibt den Kreiskegel k_3 um die Drallachse derart, daß feste Drallachse, Achse der Winkelgeschwindigkeit und freie Achse stets in einer Ebene liegen.

Anmerkung: Es ist so, als ob der Körper und die Drallachse ein Kegelrad k_1 und k_2 trügen, welche miteinander kämmen.

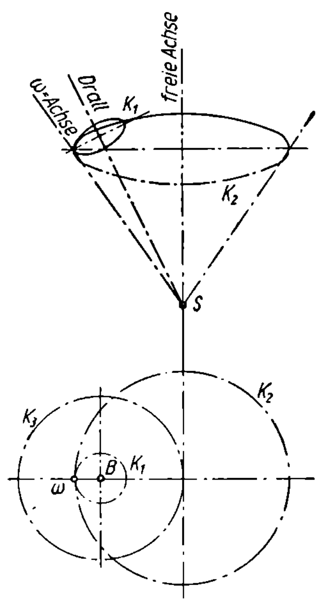


Bild 144

198. Eine im Wasser **schwimmende Scheibe** hat im Punkte C (Bild 145) eine zur freien Achse S parallele Welle, auf der der Läufer eines Elektromotors sitzt. Der Elektromotor wird angestellt. Welche Bewegung entsteht?

Lösung: Der Läufer des Motors übt ein Drehmoment auf das Gehäuse und somit auf die Scheibe aus. Ein Kräftepaar (s. Bild), dessen Ebene senkrecht auf der freien Achse steht, kann bei einem frei beweglichen Körper nur eine Drehung um die freie Achse hervorrufen. Der Schwerpunkt S des Körpers bleibt in Ruhe, da keine äußeren Kräfte wirken. Ebenso bleibt der Drall der gesamten Masse Null (s. Aufg. 185).

Gesamtschwerpunkt ist S. Die freie Achse geht durch den Schwerpunkt S. Also dreht sich die Scheibe umgekehrt wie der Motor um S.
Es ist $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$.
Es ist ferner auch $J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt}$, wobei J_2 das Massenträgheitsmoment von Scheibe und Motor in bezug auf den Schwerpunkt S bedeutet.

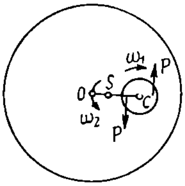


Bild 145

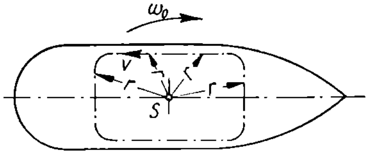


Bild 146

199. Auf einem **Schiff** führen sämtliche Passagiere eine halbstündige Bewegungsübung durch, indem sie einen gemeinsamen Marsch um das Promenadendeck machen (Bild 146).
Welchen Einfluß hat dies auf das Schiff?

Lösung: Trägheitsmoment des Schiffes ohne Passagiere J_0; Winkelgeschwindigkeit des Schiffes um den gemeinsamen Schwerpunkt S ist ω_0; Masse eines Passagiers m; Zeit t; Marschgeschwindigkeit v.

$$(J_0 + \sum m r^2)\,\omega_0 = \sum m v r$$
$$(J_0 + \sum m r^2)\,\alpha_0 = t \cdot \sum m v r.$$

Das Schiff dreht sich in umgekehrter Richtung um den Schwerpunkt S.

200. Was versteht man unter **„stabilen Drehachsen"**?

Lösung: Bei einem Körper sind die Achsen des größten und kleinsten Massenträgheitsmomentes stabile Drehachsen, d. h., eine kleine Verschiebung zwischen der Drehachse (Winkelgeschwindigkeitsvektor) und der Hauptträgheitsachse hat keine nachteiligen Folgen, sondern der Körper verhält sich so, als ob er sich um die Hauptträgheitsachse dreht. Dies ist für alle Maschinen von größter Wichtigkeit.
Nimmt man in einer Trägheitsellipse (Aufg. 190) einen Vektor der Winkelgeschwindigkeit ganz nahe einer Hauptträgheitsachse an, so fällt der Drallvektor, der dem Lot auf die Tangentenebene entspricht (Aufg. 190), fast genau in die Hauptträgheitsachse. Wenn Drall und freie Achse aber fast zusammenfallen, so ist die Bewegung der freien Achse um die Drallachse, welche nach Aufg. 192c aufzutreten sucht, außerordentlich gering.

MASSENAUSGLEICH

201. Was versteht man unter **Massenausgleich?**

Lösung: Unausgeglichene Massen bewirken freie Massenkräfte und freie Momente, sog. **Schlinger-** oder **Kippmomente**, die Erschütterungen hervorrufen.

Soll eine Maschine vollständig erschütterungsfrei laufen, so muß sie in jeder Stellung statisch und dynamisch ausgewuchtet sein. Ganz wird dies nie erreichbar sein. **Statisches Auswuchten** heißt, durch Gegengewichte den Schwerpunkt aller Massen in die Drehachse verlegen.

Wenn der Schwerpunkt aller Massen in Ruhe bleibt und in der Drehachse liegt, dann können dafür drei Gleichungen angesetzt werden:

$$\text{a)} \sum \boldsymbol{m \cdot r = 0}.$$

r ist der Abstand einer Masse von der Drehachse.

$$\text{b)} \sum \boldsymbol{m \cdot v = 0},$$

$$\text{c)} \sum \boldsymbol{m \cdot b = 0}.$$

Meistens wird die Gleichung $\sum mb = 0$ angewendet, obwohl nichts im Wege steht, auch die anderen Gleichungen zu benutzen. Hier soll deshalb auch diese Gleichung angewendet werden.

Bei einer Kolbenmaschine ist zwischen den am Zapfen sich drehenden Massen m_0, den mit dem Kolben hin- und hergehenden Massen m_1 und der Masse des Gegengewichtes M zu unterscheiden.

Am Zapfen rotieren die Massen des Schubstangenkopfes, des Zapfens, etwa des halben Schaftes und die auf den Kurbelradius nach der Gleichung $m_0 r_0 = m_1 r_1$ reduzierten Massen der Kurbelwangen. Hin und her gehen die Massen des Kolbens, der Kolbenstange oder des Kreuzkopfes, des entsprechenden Stangenkopfes und etwa die halbe Masse des Stangenschaftes.

Die rotierenden Massen erzeugen eine Massenkraft, die Zentrifugalkraft heißt, $m_0 r \omega^2$. Sie ist konstant bei konstanter Drehzahl; die hin- und hergehenden Massen erzeugen stark wechselnde d'Alembertsche Massenkräfte entsprechend der Gleichung

$$m_1 r \omega^2 \left(\cos\alpha + \frac{r}{l} \cdot \cos 2\alpha\right) \qquad \text{(Aufg. 98).}$$

Diese Massen können meist nur unvollkommen ausgeglichen werden.

Dynamisches Auswuchten heißt, die Kippmomente, die in einer Ebene durch die Maschinenwelle auftreten, ausgleichen. Auch hier lassen sich verschiedene rechnerische Wege gehen.

a) Die Summe der Momente aller Massenkräfte in bezug auf den Schwerpunkt der gesamten Maschine muß Null sein:

$$\sum \boldsymbol{m r \omega^2 y = 0}.$$

b) Schlickscher Massenausgleich

Der Schlicksche Massenausgleich stellt zunächst die Bedingung, daß der Schwerpunkt der ganzen Maschine in Ruhe bleibt. Dann muß die Summe der Bewegungsgrößen für alle Zylinder Null sein:

$$\sum \boldsymbol{(m v) = 0}.$$

Damit die Maschine keine Kippmomente erfährt, d. h. keine Kippbewegung um den Schwerpunkt macht, muß der Drall Null sein (s. Aufg. 192 A):

$$\sum (m v x) = 0 .$$

Die Wahl des Momentenpunktes auf der Welle ist gleichgültig, da ja der Schwerpunkt in Ruhe bleibt. (Aufg. 192 A.)

Somit erfüllt der Schlicksche Massenausgleich die Bedingung des statischen wie des dynamischen Massenausgleiches.

Es sind $\sum m v_1$, $\sum m v_2$, $\sum m v_3$, $\sum m v_4$ die an den einzelnen Kurbeln auftretenden Bewegungsgrößen. Soll in senkrechter Richtung ein Schlickscher Massenausgleich stattfinden, so muß sein

1. $\sum m v_1 + \sum m v_2 + \sum m v_3 + + \sum m v_4 + \ldots = 0.$
2. In bezug auf einen beliebigen Wellenpunkt B muß sein

$$a_2 \cdot \sum m v_2 + a_3 \cdot \sum m v_3 + + a_4 \cdot \sum m v_4 + \ldots = 0.$$

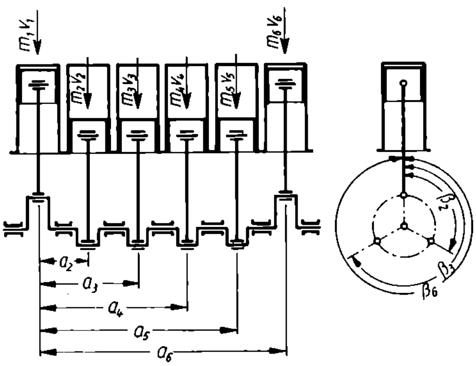


Bild 147

Dabei ist $m v$ in sich positiv bzw. negativ. Die Kolbengeschwindigkeit ist

$v = r\omega \cdot \left(\sin\alpha + \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right)$ (s. Aufg. 98).

Bei einem Ausgleich erster Ordnung wird das zweite Glied in der Klammer vernachlässigt. Es ist dann

$$\begin{aligned} v_1 &= r\omega \,.\, \sin\alpha, \\ v_2 &= r\omega \cdot \sin(\alpha + \beta_2), \\ v_3 &= r\omega \,.\, \sin(\alpha + \beta_3), \\ v_4 &= r\omega \cdot \sin(\alpha + \beta_4), \end{aligned}$$

wobei α einen beliebigen Kurbelwinkel und β_2, β_3, β_4 die Winkel zwischen den späteren und der ersten Kurbel bedeuten. Setzt man v ein, so erhält man Gleichungen, in denen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ mit Klammerausdrücken multipliziert sind, in denen die verschiedenen $\sphericalangle\,\beta$ und die Abstände a vorkommen. Sollen für jeden $\sphericalangle\,\alpha$ obige Bedingungen erfüllt sein, so müssen die Klammerausdrücke Null werden. Auf diese Weise erhält man mehrere Gleichungen, aus denen β und a berechnet werden können. Der Schlicksche Massenausgleich wird durch Gegengewichte, durch Versetzen der Kurbeln gegeneinander und durch Wahl verschieden großer Zylinderabstände erreicht.

Massenausgleich beim Kurbeltrieb

m_0 sich drehende Massen,
m_1 hin- und hergehende Massen,
M Masse des Gegengewichtes.

202. Eine stehende Einzylinder-Dieselmaschine soll **statisch** durch Gegengewichte **ausgewuchtet** werden. Ein dynamisches Auswuchten kommt bei einem Zylinder natürlich nicht in Frage.

Gegeben: $r : l = 1 : 4{,}25$

Hub	540 mm
Halbes Gewicht der beiden rechteckigen Kurbelwangen	165 kp
Gewicht des Stangenkopfes nebst Zapfen	192 kp
Halbes Gewicht des Schaftes	25 kp
Kolbengewicht	165 kp
Stangenkopf mit Kolben	50 kp
Kolbenbolzen	25 kp
Halbes Gewicht des Schaftes	25 kp
Drehzahl	$n = 300$ U/min

Anleitung: Die rotierenden Massen erzeugen eine gleichbleibende Zentrifugalkraft, die stets radial wirkt. Sie wird als Kreis mit dem Halbmesser ϱ_0 aufgetragen (s. Bild 148).

$$\varrho_0 = m_0 r \omega^2 .$$

Die hin- und hergehenden Massen erzeugen eine senkrechte Massenkraft.

$$m_1 r \omega^2 \cdot \cos\alpha + m_1 r \omega^2 \cdot \frac{r}{l} \cdot \cos 2\alpha = \quad \text{(s. Aufg. 98)}$$

$$= \varrho_1 \cdot \cos\alpha + \varrho_2 \cdot \cos 2\alpha ; \quad \varrho_1 = m_1 r \omega^2 ; \quad \varrho_2 = m_1 r \omega^2 \cdot \frac{r}{l} .$$

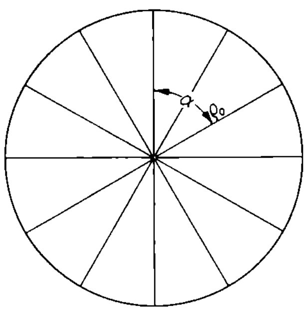


Bild 148

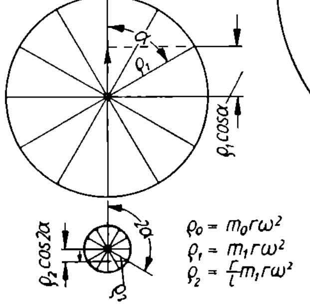


Bild 149

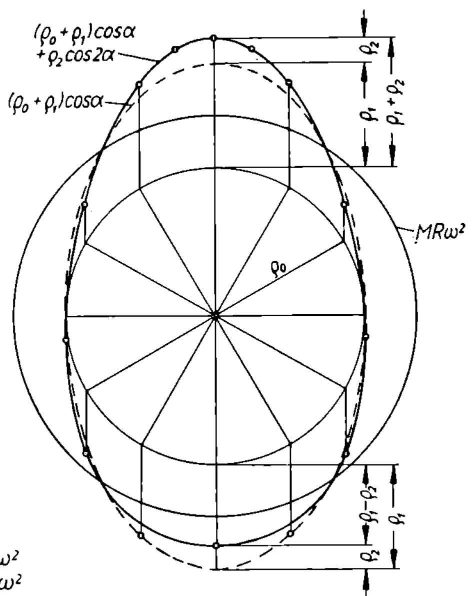


Bild 150

Man ermittelt diese Kräfte graphisch, indem man zwei Kreise mit den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_2 zeichnet und für verschiedene $\sphericalangle\, \alpha$ die Werte $\varrho_1 \cdot \cos\alpha$ und $\varrho_2 \cdot \cos 2\alpha$ abgreift. Trägt man in senkrechter Richtung an den Kreis mit ϱ_0 die gefundenen Kräfte $\varrho_1 \cdot \cos\alpha$ und $\varrho_2 \cdot \cos 2\alpha$ an, so entsteht die rechte ellipsenähnliche Figur, die ein Bild der freien Massenkräfte ist (Bild 150).
Will man lediglich in senkrechter Richtung durch Gegengewichte einen statischen Massenausgleich bewirken, so muß die Zentrifugalkraft des Gegengewichtes

$$M R \omega^2 = \varrho_0 + \varrho_1$$

werden. Das Glied ϱ_2 läßt sich nicht ausgleichen, da es oben positiv und unten negativ ist. Bei einem senkrechten statischen Massenausgleich ruft nun das Gegengewicht in waagerechter Richtung unausgeglichene Massenkräfte von der Größe ϱ_1 hervor.
Will man auch waagerecht möglichst einen Ausgleich herbeiführen, so muß werden

$$M R \omega^2 = \varrho_0 + \frac{\varrho_1}{2} \,.$$

Die größte freie Massenkraft ist dann

$$\frac{\varrho_1}{2} + \varrho_2 \,.$$

Dies ist in Bild 150 geschehen. Es ist dabei $M r \omega^2 - \varrho_0 = \frac{\varrho_1}{2}$.

Lösung:

$$m_0 = 165\,\text{kg} + 192\,\text{kg} + 25\,\text{kg} = 382\,\text{kg}\,,$$

$$m_1 = 165\,\text{kg} + 50\,\text{kg} + 25\,\text{kg} + 25\,\text{kg} = 265\,\text{kg}\,,$$

$$\omega = 2\pi n = 31{,}4\,\text{rad/s}\,,$$

$$\varrho_0 = m_0 r \omega^2 = 382\,\text{kg} \cdot 0{,}27\,\text{m} \cdot 31{,}4^2\,{}^1\!/\text{s}^3 = 102024\,\text{N} = 10400\,\text{kp}\,,$$

$$\varrho_1 = m_1 r \omega^2 = 265\,\text{kg} \cdot 0{,}27\,\text{m} \cdot 31{,}4^2\,{}^1\!/\text{s}^2 = 70632\,\text{N} = 7200\,\text{kp}\,,$$

$$\varrho_2 = m_1 r \omega^2 \cdot \frac{r}{l} = 70632\,\text{N} \cdot \frac{1}{4{,}25} = 16677\,\text{N} = 1700\,\text{kp}\,.$$

$$M R \omega^2 = \varrho_0 + {}^1\!/_2 \varrho_1 = m_0 r \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 r \omega^2\,,$$

$$M R = m_0 \cdot r + \frac{1}{2} m_1 r = 382\,\text{kg} \cdot 0{,}27\,\text{m} + 0{,}5 \cdot 265\,\text{kg} \cdot 0{,}27\,\text{m} = 139{,}3\,\text{kgm}$$

z. B. $R = 0{,}25\,\text{m}\,,\quad M = 557\,\text{kg}\,.$

Freie Massenkraft im oberen Totpunkt

$$\frac{\varrho_1}{2} + \varrho_2 = 3600\,\text{kp} + 1700\,\text{kp} = 5300\,\text{kp}\,.$$

Freie Massenkraft im unteren Totpunkt

$$\frac{\varrho_1}{2} - \varrho_2 = 3600\,\text{kp} - 1700\,\text{kp} = 1900\,\text{kp}\,.$$

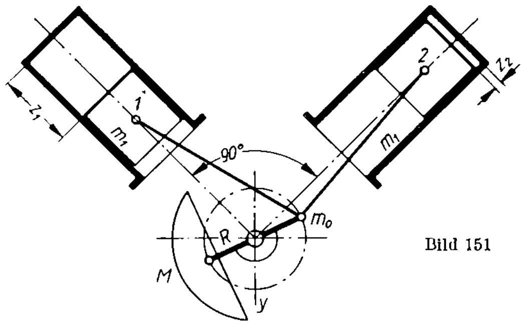


Bild 151

Freie Massenkraft waagerecht bei $\alpha = 90°$ und $\alpha = 270°$

$$\frac{\varrho_1}{2} = 3600\,\text{kp}\,.$$

203.* Für einen **V-Motor**, dessen Zylinderachsen um 90° gegeneinander versetzt sind, ist der **statische Massenausgleich** durch Gegengewichte zu finden.

Gegeben: Hub $s = 68{,}5$ mm, Zylinderdurchmesser $D = 70$ mm, $r : l = 1 : 4{,}32$; $n = 3500$ U/min, rotierende Massen am Zapfen 1332 g zusammen, hin- und hergehende Massen 654 g je Zylinder.

Anleitung: Das Verfahren der Aufgabe 197 wird angewendet, das heißt, es wird ein Kreis mit ϱ_0 gezeichnet und $k = \varrho_1 \cdot \cos\alpha + \varrho_2 \cdot \cos 2\alpha$ parallel zu den beiden Zylinderachsen zweimal abgetragen (s. Bild 152).

Man erhält dann für jeden Zylinder eine ellipsenähnliche Kurve wie in Aufg. 197. Projiziert man nun die Massenkräfte k_1 und k_2 (s. Bild) auf die zugehörige radiale Richtung und addiert die erhaltenen Seitenkräfte bis zum Punkte P, so findet man in P einen Punkt der radialen Massenkraft. Indem man dies Verfahren für viele Halbmesser durchführt, erhält man die Kurve der radialen Massenkraft.

Das Gegengewicht ist so zu wählen, daß diese Kurve möglichst ausgeglichen wird.

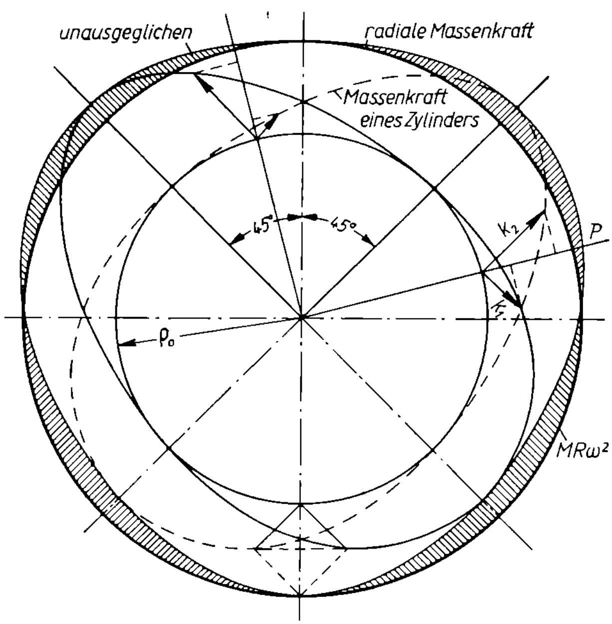


Bild 152

Wie der Augenschein lehrt, wird dies erreicht, wenn ist

$$MR\omega^2 = \varrho_0 + \varrho_1 .$$

Unausgeglichen bleibt als Wert $\pm \varrho_2$.

Lösung der Aufgabe:

$$\varrho_0 = m_0 r \omega^2 = 1{,}332\,\text{kg} \cdot 0{,}03425\,\text{m} \cdot 366^2\,\text{s}^{-2} = 6102\,\text{N} = 622\,\text{kp};$$

$$\varrho_1 = m_1 r \omega^2 = 0{,}654\,\text{kg} \cdot 0{,}03425\,\text{m} \cdot 366^2\,\text{s}^{-2} = 2992\,\text{N} = 305{,}5\,\text{kp};$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 \cdot \frac{r}{l} = 305{,}5\,\text{kp} \cdot \frac{1}{4{,}32} = \pm\, 70{,}6\,\text{kp};$$

$$MR\omega^2 = m_0 r \omega^2 + m_1 r \omega^2$$

$$MR = (m_0 + m_1) \cdot r = (1{,}332\,\text{kg} + 0{,}654\,\text{kg}) \cdot 0{,}03425\,\text{m} = \mathbf{0{,}068\,kgm}.$$

204 A. Es ist für einen **Sternmotor** mit fünf im Viertakt wirkenden Zylindern das Gegengewicht mit Hilfe des statischen Massenausgleiches zu finden.

Anleitung: Das graphische Verfahren, das beim V-Motor angewendet wurde (Aufg. 203), läßt sich genauso beim Sternmotor anwenden, doch müssen für jede Stellung dabei fünf Massenkräfte der hin- und hergehenden Massen berücksichtigt werden, was zeitraubend und unübersichtlich ist. Deshalb soll hier ein rein rechnerisches Verfahren angewendet werden, das natürlich auch sinngemäß auf den V-Motor übertragen werden kann.

Die Zylindermitten haben die Winkel $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 72°$, $\beta_3 = 144°$, $\beta_4 = 216°$, $\beta_5 = 288°$. Die Hauptschubstange hat an ihrem Kopf vier Ösen, an denen die vier übrigen Stangen angelenkt sind (s. Bild 153).

Die hin- und hergehenden Massen eines Zylinders üben in Richtung der Zylinderachse die Massenkraft aus:

$$P_b = \varrho_1 \cdot \cos(\alpha - \beta) + \varrho_2 \cdot \cos 2(\alpha - \beta). \qquad \text{(Bild 154)}$$

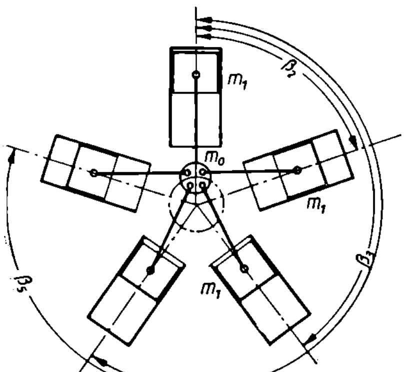


Bild 153

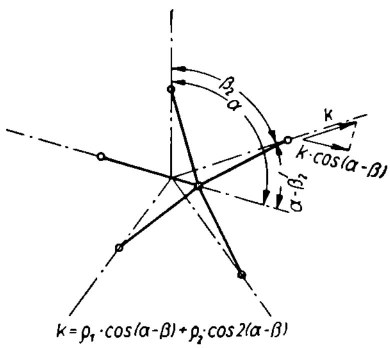


Bild 154

Die radiale Seitenkraft (Komponente) dieser Kraft P_b ist somit für einen Zylinder

$$P' = \varrho_1 \cdot \cos^2(\alpha - \beta) + \varrho_2 \cdot \cos 2(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) .$$

Für alle Zylinder ergibt sich eine Radialkraft in Richtung der Zentrifugalkraft, wenn diese hinzugenommen wird, zu

$$P_r = \varrho_0 + \varrho_1 \cdot \sum \cos^2(\alpha - \beta) + \varrho_2 \cdot \sum \cos 2(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) .$$

Es gibt bei einem Sternmotor aus Symmetriegründen zwei ausgezeichnete Kurbelstellungen, die sich stets wiederholen:

a) in Richtung einer Zylinderachse,

b) in der Mitte zwischen zwei Zylinderachsen.

a) Für die Stellung der Kurbel in einer Zylinderachse, z. B. $\alpha = 0$ (alle Zahlenangaben in °), ist beim fünffachen Stern:

$$\begin{aligned}
\sum \cos^2(\alpha - \beta) &= \cos^2(0 - 0) + \cos^2(0 - 72) + \cos^2(0 - 144) + \cos^2(0 - 216) + \\
&\quad + \cos^2(0 - 288) = \\
&= 1 + \cos^2 72 + \cos^2 144 + \cos^2 216 + \cos^2 288 = \\
&= 1 + \cos^2 72 + (-\cos 36)^2 + (-\cos 36)^2 + \cos^2 72 = \\
&= 1 + 2\cos^2 72 + 2\cos^2 36 = 1 + 0{,}191 + 1{,}131 = \\
&= \mathbf{2{,}501}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum \cos 2(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) &= \cos 0 \cdot \cos 0 + \cos(-144) \cdot \cos(-72) + \\
&\quad + \cos(-288) \cdot \cos(-144) + \cos(-432) \cdot \cos(-216) + \\
&\quad + \cos(-576) \cdot \cos(-288) = \\
&= 1 + \cos 144 \cdot \cos 72 + \cos 288 \cdot \cos 144 + \cos 432 \cdot \cos 216 + \cos 576 \cdot \cos 288 = \\
&= 1 - \cos 36 \cdot \cos 72 - \cos 72 \cdot \cos 36 - \cos 72 \cdot \cos 36 - \cos 36 \cdot \cos 72 = \\
&= 1 - 4 \cdot \cos 36 \cdot \cos 72 = 1 - 4 \cdot 0{,}809 \cdot 0{,}309 = 0.
\end{aligned}$$

Somit Radial-Massenkraft bei $\alpha = 0$

$$P_{r_1} = \varrho_0 + 2{,}501 \cdot \varrho_1 .$$

b) Stellung der Kurbel zwischen zwei Zylinderachsen, $\alpha = 36°$.

$$\begin{aligned}
\sum \cos^2(\alpha - \beta) &= \cos^2 36 + \cos^2(-36) + \cos^2(-108) + \cos^2(-180) + \\
&\quad + \cos^2(-252) = \\
&= \cos^2 36 + \cos^2 36 + \cos^2 108 + \cos^2 180 + \cos^2 252 = \\
&= 2\cos^2 36 + 2\cos^2 72 + 1 = \mathbf{2{,}501}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum \cos 2(\alpha - \beta) \cdot \cos(a - \beta) &= \cos 72 \cdot \cos 36 + \cos(-72) \cdot \cos(-36) + \\
&\quad + \cos(-216) \cdot \cos(-108) + \cos(-360) \cdot \cos(-180) + \\
&\quad + \cos(-504) \cdot \cos(-252) = \\
&= \cos 72 \cdot \cos 36 + \cos 72 \cdot \cos 36 + \cos 36 \cdot \cos 72 - 1 + \cos 36 \cdot \cos 72 = \\
&= 4\cos 36 \cdot \cos 72 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Somit Radial-Massenkraft bei $\alpha = 36°$

$$P_{r_2} = \varrho_0 + 2{,}501 \cdot \varrho_1.$$

Zentrifugalkraft des Gegengewichts somit:

$$MR\omega^2 = \varrho_0 + 2{,}5 \cdot \varrho_1$$
$$MR\omega^2 = m_0 r\omega^2 + 2{,}5\, m_1 r\omega^2.$$

Die Massen sind durch das Gegengewicht völlig ausgeglichen.
Es ist so gut, als ob die halben Massen der hin- und hergehenden Teile aller fünf Zylinder $\left(\text{also } \frac{5\,m_1}{2}\right)$ am Zapfen als Zentrifugalkraft wirkten.
Dies gilt von vier Zylindern ab aufwärts.

Beispiel:

$$\varrho_0 = 600\,\text{kp},$$
$$\varrho_1 = 700\,\text{kp},$$
$$\varrho_2 = 165\,\text{kp},$$
$$MR\omega^2 = 600\,\text{kp} + 2{,}5 \cdot 700\,\text{kp} = 2350\,\text{kp}.$$

Anmerkung: Man kann auch mit $\sum m \cdot v = 0$ rechnen und erhält dasselbe Resultat. Die Bewegungsgrößen, in senkrechter Richtung betrachtet, ergeben:

$$MR\omega \cdot \sin(180° + \alpha) + m_3 r\omega \cdot \sin\alpha$$
$$+ m_1 r\omega\left[\sum \sin(\alpha - \beta)\cos\beta + \sum \frac{r}{2l}\sin 2(\alpha - \beta)\cdot\cos\beta\right] = 0\,.$$
$$- MR \cdot \sin\alpha + m_0 \cdot r \cdot \sin\alpha + m_1 r\,[\sum(\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta)\cos\beta +$$
$$+ \frac{r}{2l}\sum(\sin 2\alpha\cos 2\beta - \cos 2\alpha\sin 2\beta)\cos\beta] = 0\,.$$

$\sum \cos^2\beta = 2{,}5,$

$\sum \sin\beta \cdot \cos\beta = 0,$

$\sum \cos 2\beta \cdot \cos\beta = 0,$

$\sum \sin 2\beta \cdot \cos\beta = 0.$

Also $$\boldsymbol{MR = m_0 \cdot r + 2{,}5 m_1 \cdot r.}$$

204 B. a) Wie groß ist MR bei einem **Zweitakt-Sternmotor** mit 4 Zylindern zu machen? b) Wie groß ist MR bei einem Viertakt-Sternmotor mit 9 Zylindern zu machen?

205 A. Eine **Lokomotivachse** trägt an beiden Rädern Ausgleichmassen Q_1 und Q_2 (Bild). Die Kurbelzapfen beider Räder sind um 90° gegeneinander versetzt.
Die mit dem Zapfen rotierenden Massen wiegen je Zapfen 95 kg, die an einem Zapfen angreifenden hin- und hergehenden Massen, Zapfen und Stange, wiegen $\sum m = 260$ kg. Der Kurbelradius ist $r = 300$ mm, der Schwerpunkt der Gegengewichte bewegt sich mit einem Radius von $R = 750$ mm. $a = 1435$ mm, $b = 120$ mm. Für die Zentrifugalkraft an einem Zapfen sind die Massen m_1 und m_2 maßgebend.

a) Wie groß muß der im Bild eingetragene Winkel α sein, damit keine freien Momente in der gezeichneten Stellung vorhanden sind?

b) Wie groß ist $Q_1 = Q_2$ zu machen, damit die hin- und hergehenden Massen ausgeglichen werden?

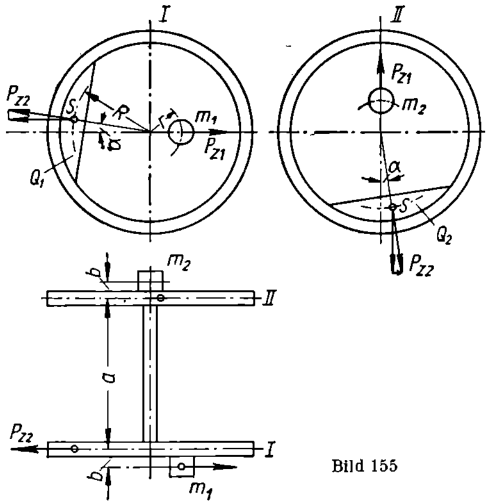


Bild 155

Lösung: a) Summe der Momente der Massenkräfte = Null.
Zentrifugalkraft:

$$P_{z1} = m_1 \cdot r\omega^2 = m_2 \cdot r\omega^2,$$
$$P_{z2} = Q_1 \cdot R\omega^2 = Q_2 \cdot R\omega^2.$$

Summe der horizontalen Momente = Null.

$$m_1 \cdot r\omega^2 \cdot (a + b) - Q_1 R\omega^2 \cdot a \cdot \cos\alpha_1 = 0$$

und $m_1 \cdot r\omega^2 b - Q_2 R\omega^2 \cdot a \cdot \sin\alpha_1 = 0$.

Summe der vertikalen Momente = Null.

$$m_2 \cdot r\omega^2 (a + b) - Q_2 \cdot R\omega^2 a \cdot \cos\alpha_2 = 0$$

und $m_2 \cdot r\omega^2 b - Q_1 \cdot R\omega^2 a \cdot \sin\alpha_2 = 0$.

Daraus $\tan\alpha_1 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{Q_1}{Q_2}$; $\tan\alpha_2 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{Q_2}{Q_1}$

Da $Q_2 = Q_1$ werden soll, so ist

$$\tan\alpha = \frac{b}{a+b} = \frac{120\,\text{mm}}{1435\,\text{mm} + 120\,\text{mm}} = 0{,}0773$$

$$\alpha = 4^\circ\,25'.$$

b) Für die gezeichnete Lage des Rades I ist die Beschleunigung $b = r\omega^2\left(1 + \frac{r}{l}\right)$, wobei aber $\frac{r}{l}$ wegzubleiben hat, da es beim Rückgang negativ wird und die Massen dann erst recht nicht ausgeglichen wären.

$$\sum m \cdot r\omega^2 = Q_1 R\omega^2 \cdot \cos\alpha$$

$$Q_1 = \frac{\sum m}{\cos\alpha} \cdot \frac{r}{R} = \frac{260\,\text{kg}}{0{,}997} \cdot \frac{0{,}3\,\text{m}}{0{,}75\,\text{m}} = 104{,}4\,\text{kg}.$$

205 B. Bei einer Zwillingsdampfmaschine mit etwa um 90° versetzten Kurbeln ist $\Sigma m = 1000$ kg, $r = 450$ mm, $Q_1 = Q_2$, a und b aus Bild 156.

Gefragt: **a)** α, **b)** $Q \cdot R$.

206. Für einen **Vierzylinder-Reihenmotor** eines Triebwagens nach Bild 157 soll der Massenausgleich durch Wahl der Kurbelwinkel und der Zylindermittenabstände gefunden werden.
Es ist nur ein Schlickscher Massenausgleich erster Ordnung möglich, da bei 4 Kurbeln in Reihe nur 4 Unbekannte auftreten dürfen.
Erster Ordnung bedeutet, daß die Geschwindigkeit des Kolbens $v = r\omega \cdot \sin\alpha$ gesetzt wird und das Verhältnis r/l vernachlässigt wird.
m_1 Masse eines Kolbens, m_2 Masse der am Kurbelzapfen vereinigten Masse.

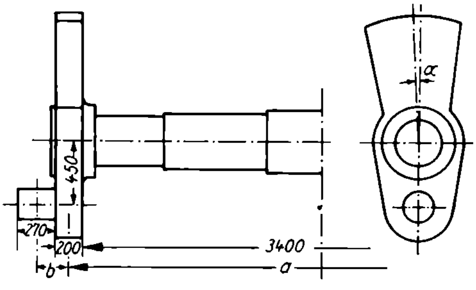


Bild 156

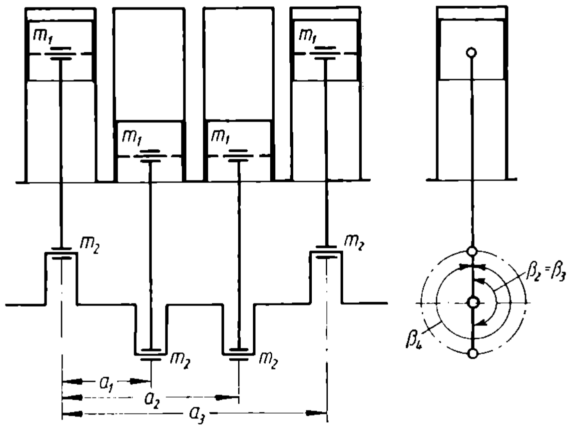


Bild 157

Lösung: a) Summe der vertikalen Bewegungsgröße ist Null.

$$\sum m v_y = 0.$$

$$(m_1 + m_2) \sum r\omega \sin(\alpha + \beta) = 0$$

$$r\omega \sum \sin(\alpha + \beta) = 0$$

$$r\omega\,[\sin(\alpha + 0) + \sin(\alpha + \beta_2) + \\ + \sin(\alpha + \beta_3) + \sin(\alpha + \beta_4)] = 0.$$

Daraus: $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta_2) + \sin(\alpha + \beta_3) + \sin(\alpha + \beta_4) = 0$

$$\sin\alpha\,(1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3 + \cos\beta_4) + \cos\alpha\,(\sin\beta_2 + \sin\beta_3 + \sin\beta_4) = 0.$$

Wenn für jeden $\sphericalangle\,\alpha$ die Bedingung erfüllt sein soll, muß sein:

$$\text{I} \quad \mathbf{1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3 + \cos\beta_4 = 0},$$

$$\text{II} \quad \mathbf{\sin\beta_2 + \sin\beta_3 + \sin\beta_4 = 0}.$$

b) Summe der Momente der Bewegungsgrößen, auf einen beliebigen Punkt bezogen, ist Null.

$$\sum m v_y x = 0$$

$$a_1 \cdot (m_1 + m_2)\, r\omega \sin(\alpha + \beta_2) + a_2\,(m_1 + m_2)\, r\omega \sin(\alpha + \beta_3) + \\ + a_3 \cdot (m_1 + m_2)\, r\omega \sin(\alpha + \beta_4) = 0$$

$$\sin\alpha \cdot (a_1 \cdot \cos\beta_2 + a_2 \cdot \cos\beta_3 + a_3 \cdot \cos\beta_4) + \cos\alpha \cdot (a_1 \cdot \sin\beta_2 + a_2 \cdot \sin\beta_3 + \\ + a_3 \cdot \sin\beta_4) = 0.$$

Wenn für jeden ∢ α die Bedingung erfüllt sein soll, so muß sein:

$$\text{III} \quad \boldsymbol{a_1 \cdot \cos \beta_2 + a_2 \cdot \cos \beta_3 + a_3 \cdot \cos \beta_4 = 0},$$

$$\text{IV} \quad \boldsymbol{a_1 \cdot \sin \beta_2 + a_2 \cdot \sin \beta_3 + a_3 \cdot \sin \beta_4 = 0}.$$

c) Von den Werten β_2, β_3, β_4, a_1, a_2, a_3 dürfen zwei gewählt werden, die übrigen ergeben sich dann,

z. B. $\beta_4 = 0$ und a_1.

Aus Gleichung I $\cos \beta_2 + \cos \beta_3 = -2$,

aus Gleichung II $\sin \beta_2 = -\sin \beta_3$

$$\beta_2 = \pi + \beta_3 \text{ oder } 2\pi - \beta_3.$$

Davon ist nur der letzte Wert brauchbar.

$$\cos \beta_2 = \cos (2\pi - \beta_3) = \cos \beta_3$$

$$\cos \beta_2 + \cos \beta_3 = 2 \cos \beta_2 = 2 \cos \beta_3 = -2$$

$$\beta_2 = \beta_3 = \pi.$$

Gleichung III $-a_1 - a \;+ a_3 = 0$

$$a_1 + a_2 = a_3;\; a_1 = a_3 - a_2.$$

Gleichung IV $0 = 0$.

Der Abstand $a_2 - a_1$ ist also unbestimmt und frei wählbar. Man macht hier $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = a_1$.

d) Würde man $\beta_3 = 0$ wählen wollen, so ergäbe sich $\beta_2 = \beta_4 = \pi$ und $a_3 = a_2 - a_1$. Das ist jedoch konstruktiv unmöglich.

207. Für einen **Sechszylinder-Reihenmotor** soll der Massenausgleich gefunden werden (Bild 158).

Die Masse eines Kolbens m_1, die Masse an dem Kurbelzapfen m_2, Kurbelradius r, Schubstangenlänge l.

Hier ist ein M a s s e n a u s g l e i c h z w e i t e r O r d n u n g möglich, also die Berücksichtigung des Verhältnisses r/l.

Lösung: a) $\sum m \cdot v_y = 0$

$$m_1 r\omega \left[\sin \alpha + \frac{r}{2l} \sin 2\alpha\right] + m_2 r\omega \sin \alpha +$$

$$+ m_1 r\omega \left[\sin (\alpha + \beta_2) + \frac{r}{2l} \cdot \sin (2\alpha + 2\beta_2)\right] + m_2 r\omega \sin (\alpha + \beta_2) +$$

$$+ m_1 r\omega \left[\sin (\alpha + \beta_3) + \frac{r}{2l} \cdot \sin (2\alpha + 2\beta_3)\right] + m_2 r\omega \sin (\alpha + \beta_3) +$$

$$+ \cdots = 0.$$

$$(m_1 + m_2)\, r\omega\, [\sin\alpha\, (1 + \sum \cos\beta) + \cos\alpha \cdot \sum \sin\beta] +$$

$$+ m_1 r\omega \frac{r}{2l} [\sin 2\alpha\, (1 + \sum \cos 2\beta) + \cos 2\alpha \sum \sin 2\beta] = 0$$

$$\sum \cos\beta = \cos\beta_2 + \cos\beta_3 + \cos\beta_4 + \cos\beta_5 + \cos\beta_6$$

$$\sum \sin\beta = \sin\beta_2 + \sin\beta_3 + \sin\beta_4 \cdots$$

$$\sum \cos 2\beta = \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3 + \cos 2\beta_4 \cdots$$

$$\sum \sin 2\beta = \sin 2\beta_2 + \sin 2\beta_3 + \sin 2\beta_4 \cdots$$

Soll diese Gleichung für jeden $\sphericalangle\, \alpha$ Null werden, so müssen alle Klammern verschwinden.

Also $1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3 + \cos\beta_4 + \cos\beta_5 + \cos\beta_6 = 0,$

$\sin\beta_2 + \sin\beta_3 + \sin\beta_4 + \sin\beta_5 + \sin\beta_6 = 0,$

$1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3 + \cos 2\beta_4 + \cos 2\beta_5 + \cos 2\beta_6 = 0,$

$\sin 2\beta_2 + \sin 2\beta_3 + \sin 2\beta_4 + \sin 2\beta_5 + \sin 2\beta_6 = 0.$

b) $\sum m \cdot v_y \cdot x = 0.$

Es ergibt sich ähnlich:

$a_1 \cdot \cos\beta_2 + a_2 \cdot \cos\beta_3 + a_3 \cdot \cos\beta_4 + a_4 \cdot \cos\beta_5 + a_5 \cdot \cos\beta_6 = 0,$

$a_1 \cdot \sin\beta_2 + a_2 \cdot \sin\beta_3 + a_3 \cdot \sin\beta_4 + a_4 \cdot \sin\beta_5 + a_5 \cdot \sin\beta_6 = 0,$

$a_1 \cdot \cos 2\beta_2 + a_2 \cdot \cos 2\beta_3 + a_3 \cdot \cos 2\beta_4 + a_4 \cdot \cos 2\beta_5 + a_5 \cdot \cos 2\beta_6 = 0,$

$a_1 \cdot \sin 2\beta_2 + a_2 \cdot \sin 2\beta_3 + a_3 \cdot \sin 2\beta_4 + a_4 \cdot \sin 2\beta_5 + a_5 \cdot \sin 2\beta_6 = 0.$

c) Diese Gleichungen sind erfüllt für:

	$\cos\beta$	$\sin\beta$	$\cos 2\beta$	$\sin 2\beta$
$\beta_1 = {}^4/_3\pi$	$-0{,}5$	$-0{,}866$	$-0{,}5$	$+0{,}866$
$\beta_3 = {}^2/_3\pi$	$-0{,}5$	$+0{,}866$	$-0{,}5$	$-0{,}866$
$\beta_4 = {}^2/_3\pi$	$-0{,}5$	$+0{,}866$	$-0{,}5$	$-0{,}866$
$\beta_5 = {}^4/_3\pi$	$-0{,}5$	$-0{,}866$	$-0{,}5$	$+0{,}866$
$\beta_6 = 0$	1	0	1	0

Es wird $a_5 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2} + \frac{a_4}{2}$

$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$

oder $a_4 - a_3 = a_2 - a_1 = c,\ a_5 - a_4 = a_1 = c.$

Frei wählbar ist noch $a_3 - a_2$.

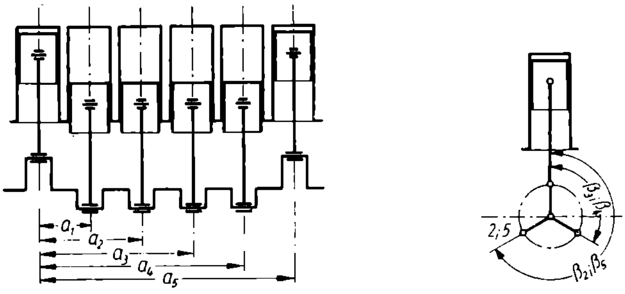


Bild 158

DIE KREISELBEWEGUNG

208. Was versteht man unter einem **Kreisel**?

Lösung: Ein Kreisel ist ein um eine Hauptträgheitsachse rotierender Körper, dessen Achse an und für sich frei beweglich ist, also nicht durch Lager in einer bestimmten Richtung gehalten wird. Einer Lagenänderung der Achse setzt der Kreisel einen Widerstand entgegen. In Bild 159 sucht das Gewicht die Hauptträgheitsachse zu verschieben.

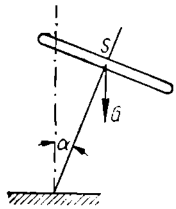


Bild 159

209. Welche Wirkung übt die **Schwerkraft** auf den Kreisel aus?

Lösung: Die Schwerkraft übt auf den Kreisel ein Drehmoment aus, das die Kreiselachse und den Kreiselschwerpunkt zu senken versucht. Das D r e h m o m e n t wird durch einen **Vektor** senkrecht zur Momentenebene dargestellt. Der Vektor wird im Drehpunkt angebracht mit der Pfeilspitze nach vorn, wenn das Drehmoment im Uhrzeigersinn wirkt. Durch die dauernde Wirkung des Drehmomentes wird eine Dralländerung hervorgerufen. Denn es ist

$$\mathrm{d}D = M_t \cdot \mathrm{d}t \left(\text{s. Aufg. 165 } M_t = \frac{\mathrm{d}(J \cdot \omega)}{\mathrm{d}t}\right).$$

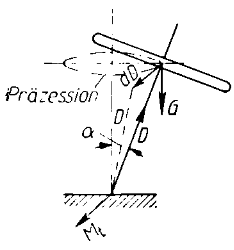


Bild 160

Der D r a l l des Kreisels wird durch einen **Vektor** in Richtung der Achse dargestellt. Die Dralländerung dD ist ein Vektor, der parallel zum Vektor des Drehmomentes verläuft (Bild 160). Es entsteht also aus dem Drall D ein neuer Drall D'. Der Kreisel bewegt sich somit auf einem Kreiskegel um die Lotrechte, die Kreiselachse beschreibt einen Kegelmantel. Diese Bewegung nennt man **„Präzession“**.

210. Wie verhält sich die **Bewegungsenergie** und die **Größe** des Dralls beim Kreisel?

Lösung: Die Präzession ist nur angenähert ein Kreiskegel. In Wirklichkeit senken sich die Kreiselachse und der Kreisschwerpunkt etwas, d. h., der Winkel α wird langsam größer. Je größer allerdings die Drehzahl des Kreisels ist, um so weniger senkt sich der Schwerpunkt in gewisser Zeit.

Wenn der Schwerpunkt sich senkt, wird eine Arbeit genau wie beim freien Fall frei, und die Bewegungsenergie muß größer werden, d. h., die Geschwindigkeit der Präzession wird größer.

Für Berechnungen wird nun angenommen, daß die Bewegung genau ein Kreiskegel sei und daß die Energie gleichbleibt. Man nennt dann diese Kreiskegelbewegung **„reguläre Präzession"**.

211. Welche **Einflüsse** bewirken, daß die Kreiselachse keinen genauen Kreiskegelmantel um das Lot beschreibt?

Lösung: a) Die freie Achse und die Kreiselachse fallen infolge Herstellungsfehler nicht ganz zusammen. Dann macht die Kreiselachse eine zusätzliche Kegelbewegung um die Drallachse (s. Aufg. 197).

b) Die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist nur endlich groß. Dann vergrößert sich langsam $\sphericalangle\, \alpha$ des Präzessionskegels. Außerdem nimmt die Winkelgeschwindigkeit der Präzession zu.

Für die Berechnung ist es also nur möglich, angenähert einen kleinen Zeitabschnitt ins Auge zu fassen, für den die Bewegung als reguläre Präzession behandelt werden kann. Man spricht dann von **„pseudoregulärer Präzession"**.

212. Es ist die Winkelgeschwindigkeit der pseudoregulären Präzession nach Bild 161 zu berechnen!

Lösung: $\mathrm{d}D = D \cdot \sin\alpha \cdot \mathrm{d}\beta$.

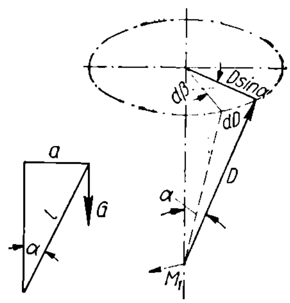


Bild 161

Moment des Gewichtes

$$M_t = mg \cdot a = mg \cdot l \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = M_t = mg \cdot l \cdot \sin\alpha$$

Winkelgeschwindigkeit der Präzession

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}D}{D\sin\alpha} \cdot \frac{mg \cdot l \cdot \sin\alpha}{\mathrm{d}D} = \frac{mg \cdot l}{D}$$

$$\boldsymbol{\omega = \frac{mg \cdot l}{D}}.$$

213. Wie groß ist die **Drehzahl** der Kreiselpräzession, wenn das Trägheitsmoment des Kreisels $J_d = \frac{4{,}9}{10^4} \cdot \mathrm{kgm}^2$, das Gewicht $mg = G = 0{,}1\ \mathrm{kp} = 0{,}981\ \mathrm{N}$, die Drehzahl des Kreisels $n_1 = 1200\ \mathrm{U/min}$, die Länge der Achse $l = 6\ \mathrm{cm}$ ist? $\sphericalangle\, \alpha$ ist beliebig (s. Aufg. 212).

Lösung: $\omega_2 = \frac{G \cdot l}{D} = \frac{G \cdot l}{J_d \cdot \omega_1}$

$$\omega_1 = 2\pi\, n_1 = 125{,}5\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{0{,}981\ \mathrm{kgm/s^2} \cdot 0{,}06\ \mathrm{m} \cdot 10^4}{4{,}9\ \mathrm{kgm^2} \cdot 125{,}5\ 1/\mathrm{s}} = 0{,}957\ \mathrm{rad/s}$$

$$n_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 0{,}152\ \mathrm{U/s} = 9{,}15\ \mathrm{U/min}\,.$$

214. Wie wirkt der **Schlicksche Schiffskreisel**?

Lösung: Das Schiff macht eine Rollbewegung im Sinne des Winkels α. Dadurch entsteht eine Dralländerung der Richtung, aber nicht der Größe nach ($\mathrm{d}D_1$). Gleichgerichtet ist das Moment M_{t_1} (Bild 162). Das Moment M_{t_1} bringt einen Ausschlag β und eine entsprechende Winkelgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}$ hervor. Durch diese Winkelgeschwindigkeit entsteht eine neue Dralländerung $\mathrm{d}D_2$ und ein Moment M_{t_2}, das in den Lagern als Kräftepaar P—P wirkt. Dieses Kräftepaar sucht die Rollbewegung zu verhindern. Somit wird durch den Kreisel die Rollbewegung wenigstens stark vermindert.

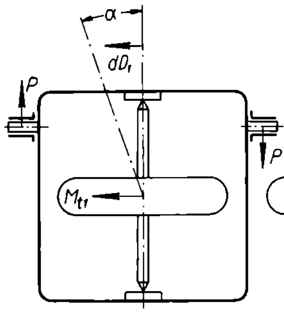


Bild 162

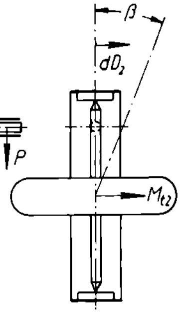


Bild 163

215. Ein **Kreisel** ist mit einer waagerechten Welle in einem um eine senkrechte Achse drehbaren Gestell gelagert. Welche Kraft wird auf die beiden Lager ausgeübt, wenn das Gestell um die senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = 29{,}5\ \mathrm{rad/s}$ gedreht wird?

$$m D^2 \text{ des Kreisels} = \frac{3{,}5}{10^4}\ \mathrm{kgm^2};$$

$$n = 1000\ \mathrm{U/min}\,.$$

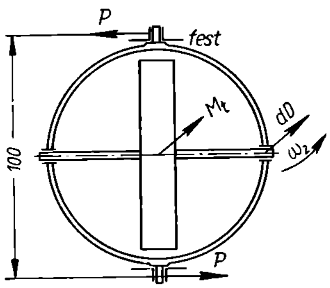


Bild 164

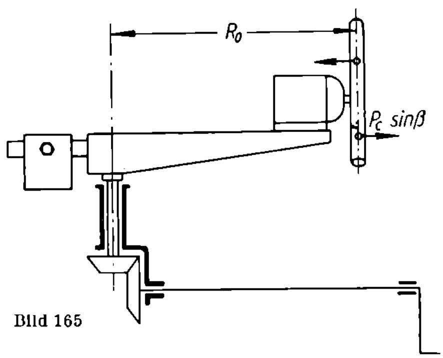


Bild 165

216. Bei einer **Versuchsapparatur** werden ein Stab durch einen Motor und gleichzeitig der Tisch gedreht (Bild 165). Dadurch entstehen dauernde Schwankungen in der Winkelgeschwindigkeit des Tisches. Bei kleiner Drehzahl des Stabes sieht man diese Schwankungen gut. Wird der Motor auf Federn gesetzt, was im Bild allerdings nicht angedeutet ist, so hebt sich die Stabwelle nach oben. Diese Anordnung entspricht einem Propeller, wenn das Flugzeug eine Kurve beschreibt.

a) Es soll das wechselnde waagerechte Moment, das die Schwankungen des Tisches verursacht, und **b)** das senkrechte Biegemoment an der Stabwelle ermittelt werden.

Lösung: a) $R^2 = R_0^2 + r^2 \cdot \sin^2 \alpha$ (Bilder 165 bis 167)

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{R_0^2 + r^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \cdot \omega_1 .$$

Betrachtet man einen einzelnen Punkt m_1, so ist

Corioliskraft[1]) $P_{\mathrm{Co}} = m_1 r^2 \omega_1 \omega_2 \dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{R_0^2 + r^2 \sin^2 \alpha}}$.

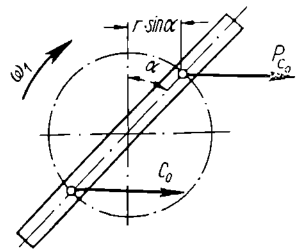


Bild 166

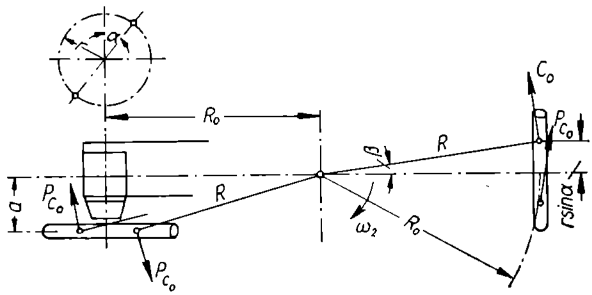


Bild 167

Die Corioliskraft wirkt nach rückwärts, solange der Winkel von 0°···90° und von 180°···270° wächst, nach vorwärts zwischen 90° und 180° und zwischen 270° und 360°, weil der Radius R bei ersterem Winkel größer und bei letzterem kleiner wird. Auf den Tisch wird ein Drehmoment ausgeübt infolge der Corioliskräfte (Bilder 165 bis 167).

$$M_{t_1} = 2 P_{\mathrm{Co}} R = 2 m_1 r^2 \omega_1 \omega \ \sin 2\alpha = 2 J \omega_1 \omega \ \sin 2\alpha$$

für zwei gegenüberliegende Punkte.

Für den Stab ist zweimal das Trägheitsmoment eines Armes oder das ganze Trägheitsmoment des Stabes $J_1 = m \cdot \dfrac{l^2}{12}$ zu setzen, und r wird i.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0, & M_t &= 0\\
\alpha &= 45°, & M_t &= J_1 \omega_1 \omega_2\\
\alpha &= 90°, & M_t &= 0\\
\alpha &= 135°, & M_t &= -J_1 \omega_1 \omega_2\\
\alpha &= 180°, & M_t &= 0 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Es entstehen somit Schwingungen mit der doppelten Frequenz der Motordrehzahl, weil das Drehmoment die Winkelgeschwindigkeit einmal verzögert und dann wieder beschleunigt.

b) Es entsteht aber noch ein weiteres Drehmoment durch die Kraftkomponente $P_{\mathrm{C}} \cdot \sin \beta$ (Bild 165), das immer in gleichem Drehsinn wirkt und die Welle dauernd nach oben zu biegen sucht.

$$M_2 = 2 \cdot P_{\mathrm{C}} \cdot \sin \beta \cdot r \cdot \cos \alpha = \frac{r^2}{R_0^2 + r^2 \sin^2 \alpha} \cdot J \omega_1 \omega_2 \cdot \sin^2 (2\alpha),$$

$$r = i = \sqrt{\frac{l^2}{12}} .$$

[1]) Corioliskraft heute mit P_{C} bezeichnet

217. Für die Anordnung in Bild 167, links sei unter der Annahme, daß $J = 0{,}005\,\mathrm{kgm}^2$, $n_1 = 1800$ U/min, $n_2 = 60$ U/min und $a = O$, (der Einfachheit wegen) folgendes zu berechnen:

a) das waagerechte Moment M_{t_1} für die Winkel $\alpha = 0, 45, 90, 135, 180, 225°$, wenn der kreisende Körper ein Stab ist;

b) das senkrechte Moment für dieselben Winkel;

c) das waagerechte Moment, wenn der kreisende Körper ein Ring oder eine Scheibe ist;

d) das senkrechte Moment.

Anleitung: für **c)** und **d):** Man bildet das Moment für eine kleine Einzelmasse, setzt diese $f r \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot \varrho$, integriert $P_C \cdot 2\,r \cdot \sin 2\,\alpha$ bzw. $P_C \cdot 2 r \cdot \cos\alpha$ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. (f Querschnitt des Ringes.)
Man hat jetzt einen Kreisel.

SCHWINGUNGEN

Freie Schwingungen

218. a) Was versteht man unter einer **Schwingung**?

b) Was versteht man unter einer **freien Schwingung**?

Lösung: a) Eine Schwingung ist in der Dynamik die länger andauernde Pendelbewegung einer Masse um eine Nullage.

b) Eine freie Schwingung entsteht, wenn ein Massensystem, das unter einer Kraftwirkung steht, einen einmaligen Anstoß erhält und dann sich selbst überlassen bleibt.

219. Was versteht man unter einer **harmonischen Bewegung**?

Lösung: Eine harmonische Bewegung ist dann vorhanden, wenn der Weg eines Körpers jederzeit eine Sinus- oder Cosinusfunktion der Zeit ist.
Bei dem Getriebe in Bild 168 ist

$$\alpha = \omega t,$$

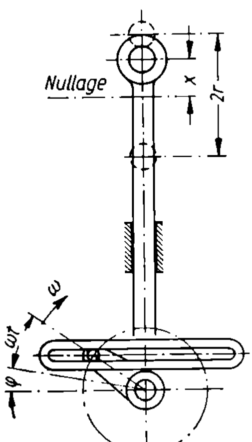


Bild 168

wenn die Zeit vom $\sphericalangle\,\varphi$ ab gerechnet wird.

Weg $\quad x = r \cdot \sin(\omega t + \varphi)$,

also harmonische Bewegung.

Geschwindigkeit $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$,

Beschleunigung $b = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} =$

$$= -r\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Setzt man wieder $r \cdot \sin(\omega t + \varphi) = x$, so ist

$$\boldsymbol{b = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\,\omega^2 x.}$$

220. Was versteht man unter **harmonischer Schwingung**?

Lösung: Unter harmonischer Schwingung versteht man eine Schwingung, bei der die beschleunigte Kraft und damit die Beschleunigung der Masse dem Weg proportional ist.
Die Kraft sucht dabei, wie z. B. bei einer Feder, den Ausschlag, d. h. den Weg, zu verhindern. Sie ist also negativ gerichtet ($P = -k\,x$).

Es gilt: $$\frac{m \cdot \mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = P = -k\,x; \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m} \cdot x\,.$$

Diese Gleichung stimmt in der mathematischen Form genau mit der Gleichung für die Beschleunigung bei der harmonischen Bewegung (Aufg. 219) überein. Nur das konstante Glied ist nicht dasselbe. Setzt man die Konstanten in beiden Gleichungen gleich, so ist

$$\frac{k}{m} = \omega^2\,,$$

und man kann auch für die harmonische Schwingung schreiben:

$$x = r \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Ist $\varphi = 90°$, so ergibt sich

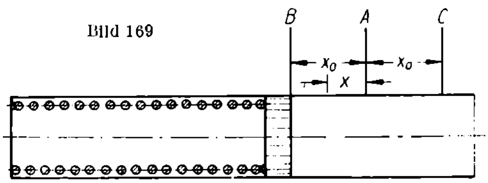
$$x = r \cdot \cos \omega t\,,$$

d. h., ist zur Zeit $t = 0$ ein Ausschlag r vorhanden, so ist $x = r \cdot \cos \omega t$. Ist zur Zeit $t = 0$ der Ausschlag 0, so ist $x = r \cdot \sin \omega t$.
Im allgemeinen empfiehlt es sich aber nicht, mit ω zu rechnen, da ω für die Winkelgeschwindigkeit anderweitig gebraucht wird. Man führt deshalb besser eine Konstante c derart ein, daß

$$c = \frac{k}{m} \text{ ist}\,.$$

Ebenso gebraucht man anstatt r meistens x_0 und nennt diese Größe **Schwingungsweite** oder **Amplitude**, d. i. der größte Ausschlag der Masse aus der Nullage. Dabei ist die Nullage die Lage, in der keine Kraft vorhanden ist, bei der also der Körper in Ruhe bleiben kann. Hiermit: $x = x_0 \cdot \sin\left(\sqrt{c} \cdot t + \varphi\right)$.
In Bild 169 ist bei A die Nullage der Feder, bei der die Feder entspannt ist. Die Feder wird nun einmal bis zur Lage B um das Maß x_0 zusammengedrückt und darauf losgelassen. Die Masse, die mit der Feder zusammenhängt, wird dann von B bis A beschleunigt. Wenn keine Reibung vorhanden ist, schlägt sie darauf infolge der in ihr aufgespeicherten Energie bis nach C weiter aus. $\overline{CA} = \overline{BA}$, weil die Beschleunigungsarbeit gleich der Verzögerungsarbeit sein muß. Bei C übt die Feder eine Zugkraft auf die Masse aus, so daß sie über A nach B zurückschwingt.

Bild 169



221. Was versteht man **a)** unter **Schwingungszeit**? **b)** unter **Periode**? **c)** unter **Schwingungszahl**? **d)** unter **Kreisfrequenz**?

Lösung: a) Die **Schwingungszeit** T ist die Zeit, in der die Masse eine vollständige Hin- und Herbewegung macht. Dabei muß in der Gleichung

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \sin\left(\sqrt{c}\, t + \varphi\right)$$

gemäß dem Bild 168 $\omega T = \sqrt{c}\, T = 2\pi$ sein.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}.$$

b) Die **Periode** oder die einzelne Schwingung ist ein Hin- und Hergang der Masse.

c) Die **Schwingungszahl** oder Frequenz f ist die Anzahl der Perioden in der Sekunde.

$$f = \frac{1}{T}.$$

d) Die **Kreisfrequenz** ist die Winkelgeschwindigkeit der harmonischen Bewegung (Aufg. 219), durch die man sich die Schwingung erzeugt denken kann.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Anmerkung: Bei der harmonischen Schwingung ist die Schwingungszeit von der Schwingungsweite unabhängig.

222. Welches Weg-Zeit-Diagramm ergibt eine harmonische Schwingung, wenn zur Zeit $t = 0$ die Schwingungsweite x_0 gegeben wird?

Lösung: Da $x = x_0 \cdot \cos \omega t$ ist, ist das Weg-Zeit-Diagramm eine Cosinuslinie (Bild 170). Die Schwingung nennt man auch **periodisch.**

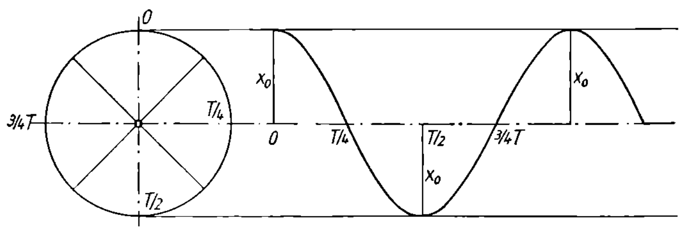


Bild 170

223. Ein masseloser **elastischer Stab** ist am Ende durch eine Masse $m = 10$ kg belastet. Der Stab wird um $y_0 = 3$ cm durchgebogen und die Masse losgelassen. Länge des Stabes $l = 50$ cm, Stabdicke $h = 1$ cm, Breite $b = 0{,}8$ cm. Elastizitätsmaß $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kp/cm².

a) Wie errechnet sich die zurückführende Kraft P?

b) Wie groß ist die Schwingungsdauer?

c) Wie groß ist die Schwingungszahl?

d) Wie groß ist die Kreisfrequenz?

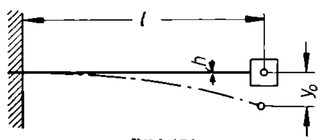


Bild 171

e) Welche Beziehung besteht zwischen der Länge eines masselosen Stabes und der Schwingungszeit? Wie groß ist T bei halber Stablänge?

Lösung: **a)** Durchbiegung und Kraft hängen folgendermaßen zusammen:

$$y = \frac{P l^3}{3 E J}; \quad P = \frac{3 E J}{l^3} \cdot y = -k y.$$

Die rücktreibende Kraft ist dem Ausschlag also einfach proportional, die Schwingung ist einfach harmonisch.

$$k = \frac{3 E J}{l^3} = \frac{3 E b h^3}{12 l^3} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \,\mathrm{kp} \cdot 0{,}8\,\mathrm{cm} \cdot 1^3\,\mathrm{cm}^3}{4 \cdot 50^3\,\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{cm}^2} = 3{,}35\,\mathrm{kp/cm} =$$

$$= 3286\,\mathrm{N/m} = 3286\,\mathrm{kg/s^2}.$$

b) $m \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} t^2} = -P = -3286\, y; \quad \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} t^2} = -\dfrac{3286}{m} \cdot y = -c\, y.$

Daraus $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{1}{c}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{3286}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{10}{3286}} = 0{,}347\,\mathrm{s}.$

c) $f = \dfrac{1}{T} = 2{,}88\,{}^1/\mathrm{s}.$

d) $\omega = \sqrt{c}$ oder $\omega = 2\pi f = 18{,}1\,\mathrm{rad/s}.$

e) Welche Beziehung besteht zwischen der Länge eines masselosen elastischen Stabes und der Schwingungszeit? Wie groß ist die Zeit bei halber Stablänge?

Lösung: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{1}{c}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{m \cdot l^3}{3 E J}} = \mathrm{const}\, \sqrt{l^3}$

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^3}}{\sqrt{l^3}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = 0{,}352$$

$$T_1 = 0{,}352\, T.$$

224. Die **Hinterachsfeder** eines Personenkraftwagens ist eine symmetrische Halbfeder (Bild 172), auf der eine Masse $m = 250\,\mathrm{kg}$ auf jedem freien Ende der Feder ruhen soll. Die Feder besteht aus zwei durchgehenden Federblättern von der Dicke $h' = 7$ mm, einem kürzeren Blatt von 6 mm und 8 noch kürzeren Blättern von 5 mm Dicke. Die Federblätter sind 50 mm breit. Die Länge der Feder ist 1300 mm, die federnde Länge einer Hälfte $l = 560$ mm. Die Biegespannung errechnet sich annähernd:

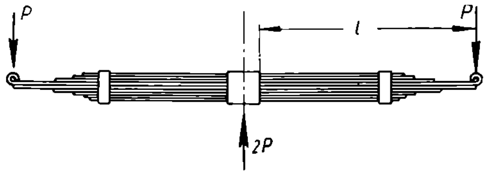


Bild 172

$$\sigma_b = \frac{6 P \cdot l}{b \cdot \sum h^2}.$$

Die Durchbiegung errechnet sich annähernd:

$$f = \frac{6P \cdot l^3}{bE \cdot (\sum h^3 + 0{,}5 \sum h'^3)}$$

$$E = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 .$$

a) Wie groß ist die Biegespannung?

b) Wie groß ist die Durchbiegung bei ruhender Last?

c) Wie lautet die Differentialgleichung der freien Schwingung, wenn auf die Reibung in der Feder keine Rücksicht genommen wird?

d) Wie groß ist die Schwingungszeit T?

225. Der **I-Träger** einer Eisenkonstruktion, in dessen Mitte eine Last von 3 Mp ruht, gerät durch einen in der Nähe befindlichen Hammer in gefährliche Schwingungen. Man unterstützt deshalb den Träger nochmals 0,5 m von den bisherigen Auflagerpunkten entfernt, so daß die freie Länge um 1 m kürzer wird. Damit ist die unangenehme Erscheinung behoben.
Ursprüngliche Länge $l = 6$ m, Profil NP 26 stehend. $J_x = 5744$ cm^4.
Wie groß ist die Schwingungszeit vor und nach der Veränderung?

226. Eine **Welle** von einer Dicke von 150 mm und einer Dehnzahl $\alpha = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^6}$ cm^2/kp ist in der Mitte durch ein Schwungrad von 1800 kp belastet (Bild 173). Die Masse der Welle ist zu vernachlässigen. Bei welcher Länge der Welle ist die Eigenfrequenz $f = 10$?

a) Trägheitsmoment der Welle?

b) Schwingungszeit?

c) Kreisfrequenz und Konstante c?

d) Erforderliche Länge l?

227 A. Es ist die Länge eines **mathematischen Pendels** zu ermitteln, dessen Schwingungszeit 2 s betragen soll. Der Ausschlag des Pendels ist klein, so daß anstatt $\sin \alpha$ angenähert α gesetzt werden kann.

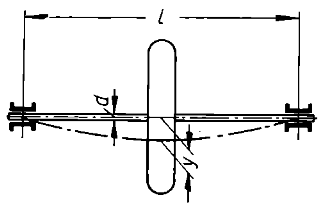


Bild 173

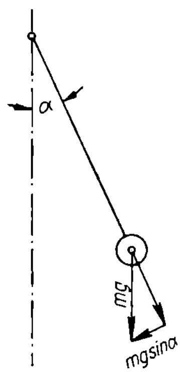


Bild 174

Anleitung:

$$mg \cdot \sin\alpha \cdot l = -J \cdot \frac{d\omega}{dt} = -ml^2 \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \alpha .$$

B. Desgleichen die Länge einer runden Stange vom Durchmesser $2r = \frac{1}{10} l$ bei gleichen Bedingungen.

Anleitung: $mg \cdot \sin\alpha \cdot \frac{l}{2} = -J \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$

$$J = m\left[a^2 + \frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right]; \qquad a = \frac{l}{2} \text{ (s. Aufg. 120)}.$$

228. Bei einem **Zentrifugalregulator** sind die Massen durch eine Feder im Gleichgewicht gehalten. Wenn die Schwungmasse den Halbmesser r_0 einnimmt, dann ist die Feder entspannt. Somit ist die Federkraft beim Halbmesser r der Zusammendrückung der Feder $r - r_0$ proportional, also $P = k\,(r - r_0)$. k ist die Federkonstante. Der Regler erhöht nun plötzlich seine Winkelgeschwindigkeit von 11 rad/s auf 14 rad/s. Ein Schwunggewicht habe die Masse $m = 4{,}9$ kg; $r_0 = 10$ cm; $k = 400$ kp/m $=$ $= 3924$ N/m.

a) Welches ist die Nullage, d. i. die Gleichgewichtslage, der Masse bei einer Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 11$ rad/s und $\omega_2 = 14$ rad/s?

b) Welches ist die Schwingungsweite?

c) Schwingungsgleichung?

d) Konstante c und Schwingungszeit T?

Anmerkung: Die Kreisfrequenz ω wird hier vermieden, da ω schon als Winkelgeschwindigkeit des Reglers gebraucht wird.

Lösung: a) Bei einem gewissen Halbmesser ist die Federkraft gleich der Zentrifugalkraft:

$$m r \omega^2 = k\,(r - r_0);$$

$$\text{für } \omega_1 = 11 \text{ rad/s ist } r_1 = r_0 \frac{k}{k - m\omega_1^2} = 0{,}1179 \text{ m},$$

$$\text{für } \omega_2 = 14 \text{ rad/s ist } r_2 = 0{,}1325 \text{ m}.$$

b) Die Schwingungsweite, wenn ω plötzlich von 11 rad/s auf 14 rad/s steigt, ist die Differenz der beiden Nullagen:

$$x_0 = r_2 - r_1 = 0{,}0146 \text{ m}.$$

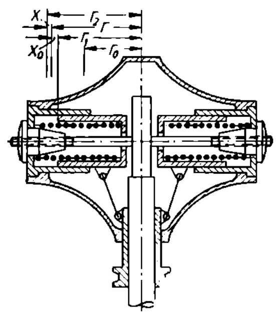


Bild 175

c) Es wirken auf eine Masse die Zentrifugalkraft beschleunigend, die Federkraft verzögernd.

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m r \omega_2^2 - k\,(r - r_0) = r\,(m\omega_2^2 - k) +$$
$$+ k r_0 .$$

Geht man von der neuen Nullage aus und ersetzt r_0 durch

$$r_0 = r_2 \frac{k - m\omega_2^2}{k}, \text{ so ist}$$

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} = -(k - m\omega_2^2)\cdot r + r_2\,(k - m\omega_2^2) = -(k - m\omega_2^2)\cdot(r - r_2)\,.$$

Mit $c = \dfrac{k - m\omega_2^2}{m}$; $\quad x = r - r_2$ und $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\,x\,.$$

Daraus $x = x_0 \cos\sqrt{c}\cdot t$;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{c}}\,.$$

d) $\quad c = \dfrac{k - m\omega_2^2}{m} = 604\ {}^1/\mathrm{s}^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{604\ 1/\mathrm{s}^2}} = 0{,}255\ \mathrm{s}\,.$$

229. Bei einem **Zentrifugalregulator** nach Bild 175 soll die Schwingungsweite der ungedämpften harmonischen Schwingung den Betrag von 1 cm nicht übersteigen. Die Masse ist 5,89 kg, die Winkelgeschwindigkeit ist ursprünglich $\omega_1 = 12$ rad/s und steigt plötzlich auf $\omega_2 = 15$ rad/s. Beim Halbmesser $r_0 = 10$ cm ist die Feder entspannt.

a) Welche Federkonstante k ist nötig?

b) Welches ist die Nullage r_2 der Schwingung?

c) Wie groß ist die Schwingungszeit?

Freie gedämpfte Schwingungen

230. Bei dem **Zentrifugalregulator** der Aufgabe 228 sei die Dämpfung durch die Reibung der Massen bewirkt. Reibungszahl $\mu = 0{,}1$. Alle übrigen Angaben wie in Aufg. 228. $r_0 = 10$ cm, $k = 3924$ N/m, $m = 4{,}9$ kg, $\omega_1 = 11$ rad/s, $\omega_2 = 14$ rad/s.

a) Aufstellung der Gleichungen; **b)** Schwingungszeit; **c)** Schwingungsweite beim ersten Vorgang, beim ersten Rückgang, beim zweiten Vorgang usw.; **d)** die Schwingung ist aufzuzeichnen.

Anleitung: a) Beim Vorgang wirkt die Reibungskraft der Zentrifugalkraft entgegen, beim Rückgang wirkt sie im gleichen Sinne.

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} = m r\omega^2 - k\,(r - r_0) \mp m g \mu\,.$$

Bei r_0 ist $P = 0$ und $\omega = 0$; r ist eine beliebige Lage bei beliebigem ω.

Erster Vorgang:

Die Schwingung erfolgt um eine Gleichgewichtslage r', bei der keine Kraft ausgeübt wird. Diese Lage legt man als Nullage zugrunde. Dabei ist $\sum P = 0$.

$$\sum P = m r' \omega_2^2 - k(r' - r_0) - m g \mu = 0$$

$$k r_0 - m g \mu = r'(k - m\omega_2^2); \text{ daraus } r'$$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -r(k - m\omega_2^2) + k \cdot r_0 - m g \mu = -(r - r')(k - m\omega_2^2)\,.$$

Setzt man für den Abstand von der Nullage $x = r - r'$ und

$$c = \frac{k - m\omega_2^2}{m}\,, \text{ so ist}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -c x; \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\,.$$

Die Schwingungsweite x_0 ergibt sich auch aus dem Unterschied der Nullage und der Anfangsstellung R_1:

Die äußerste Lage der Masse $x_0 = r' - R_1$.

$$R_1 = r' + x_0.$$

Erster Rückgang:

$$m \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = m r \omega_2^2 - k(r - r_0) + m g \mu\,,$$

neue Nullage: r''

$$k r_0 + m g \mu = r''\left(k - m\omega_2^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -c x, \quad \text{wobei } c \text{ wieder } \frac{k - m\omega_2^2}{m} \text{ ist}\,,$$

somit T wie vorher.

Schwingungsweite $x_1 = R_1 - r''$; $R_2 = R_1 - 2x_1$.

Lösung:

b) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{c}}; \qquad c = \frac{k - m\omega_2^2}{m} = \frac{3924\ \mathrm{N/m} - 4{,}9\ \mathrm{kg} \cdot 14^2\ 1/\mathrm{s}^2}{4{,}9} = 604\ {}^1/\mathrm{s}^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{604\ 1/\mathrm{s}^2}} = 0{,}255\ \mathrm{s}\,.$$

c) Erster Vorgang:

$$r' = \frac{k r_0 - m g \mu}{k - m\omega_2^2} = \frac{3924\ \mathrm{N/m} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} - 4{,}9\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}1}{3924\ \mathrm{N/m} - 4{,}9\ \mathrm{kg} \cdot 14^2\ 1/\mathrm{s}^2} = 0{,}1308\ \mathrm{m}\,.$$

Ausgangslage bei $\omega_0 = 11$ rad/s.

$$R_1 = \frac{k r_0 - m g \mu}{k - m\omega_1^2} = 0{,}1162\ \mathrm{m}\,,$$

$$x_0 = r' - R_1 = 0{,}0146\ \mathrm{m}, \quad R_1 = r' + x_0 = 0{,}1454\ \mathrm{m}\,.$$

Erster Rückgang:

$$r'' = \frac{k r_0 + m g \mu}{k - m \omega_2^2} = 0{,}134 \text{ m},$$

$$x_1 = R_1 - r'' = 0{,}1454 \text{ m} - 0{,}134 \text{ m} = 0{,}0114 \text{ m},$$

$$R_2 = R_1 - 2 x_1 = 0{,}1226 \text{ m}.$$

Zweiter Vorgang:

$$r''' = \frac{k r_0 - m g \mu}{k - m \omega_2^2} = r' = 0{,}1308 \text{ m},$$

$$x_2 = r' - R_2 = 0{,}1308 \text{ m} - 0{,}1226 \text{ m} = 0{,}0082 \text{ m},$$

$$R_3 = R_2 + 2 x_2 = 0{,}1226 \text{ m} + 0{,}0164 \text{ m} = 0{,}1390 \text{ m}.$$

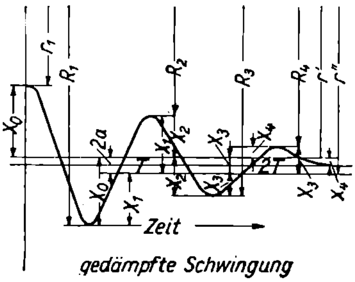


Bild 176

Zweiter Rückgang:

$$r'''' = r'' = 0{,}134 \text{ m},$$

$$x_3 = R_3 - r'' = 0{,}1390 \text{ m} - 0{,}1340 \text{ m} = 0{,}0050 \text{ m},$$

$$R_4 = R_3 - 2 x_0 = 0{,}1390 \text{ m} - 0{,}0100 \text{ m} = 0{,}129 \text{ m}.$$

Die Schwingungsamplitude nimmt somit bei jeder vollen Schwingung um $2(x_0 - x_1) = 2 \cdot (0{,}0146 - 0{,}0114) = 0{,}0064$ m ab. Dieser Betrag $2a$ kann auch aus Radien errechnet werden.

$$2a = 2(r'' - r') = 2\,\frac{k r_0 + m g \mu - k r_0 + m g \mu}{k - m \omega_2^2} = 4\,\frac{g \mu}{c}.$$

Man sagt: Die Schwingungsweiten nehmen bei der gedämpften Schwingung in arithmetischer Progression ab, während die Schwingungszeit dieselbe bleibt.

231. a) Wie lautet die Gleichung für eine freie Schwingung, deren Dämpfung der Geschwindigkeit proportional ist?

b) Was versteht man unter periodisch gedämpfter Schwingung?

c) Was versteht man unter aperiodischem Bewegungsverlauf?

Lösung: a) Massenkraft + Dämpfungskraft + Feder = 0

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k_2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k_1 x = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + c_2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + c_1 x = 0}$$

$$c_2 = \frac{k_2}{m}; \quad c_1 = \frac{k_1}{m}.$$

Schreibt man

$$\text{a)}\quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (\lambda^2 - n^2)\,x = 0\,,$$

$$\text{b)}\quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (\lambda^2 - n^2)\,x = 0\,,$$

wobei $\lambda = \frac{c_2}{2}$ und $\lambda^2 \mp n^2 = c_1$ ist,

also $\mp n^2 = c_1 - \frac{c_2^2}{4}$, so ergibt sich durch Integration

zu **a)** $x = \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda t}}\,[A\,\mathrm{e}^{nt} + B\,\mathrm{e}^{-nt}]$; $\quad n^2 = \frac{c_2^2}{4} - c_1 = \text{positiv}$;

zu **b)** $x = \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda t}}\,[A \sin nt + B \cos nt]$; $\qquad n^2 = c_1 - \frac{c_2^2}{4} = \text{positiv}$.

1. Fall unter a). Die Bewegung ist aperiodisch. Es erfolgt keine Schwingung, sondern die Masse nähert sich allmählich der Nullage (Bild 177).
Ist zur Zeit $t = 0$, $x = x_0$ und $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$, so wird

$$A + B = x_0; \qquad A - B = \frac{\lambda}{n}\,x_0$$

$$A = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right); \qquad B = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right).$$

2. Fall unter b). Die Schwingung ist periodisch gedämpft.

Ist zur Zeit $t = 0$, $x = x_0$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$, so wird

$$B = x_0; \quad A \cdot n - B \cdot \lambda = 0; \quad A = \frac{\lambda}{n}\,x_0\,.$$

$$\text{Schwingungszeit}\quad T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{c_1 - \frac{c_2^2}{4}}}\,.$$

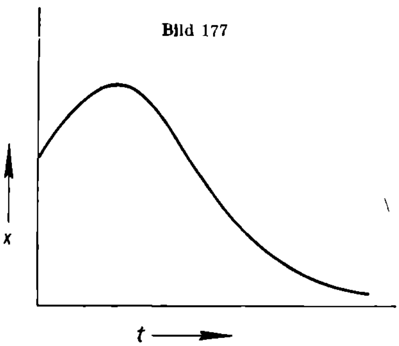


Bild 177

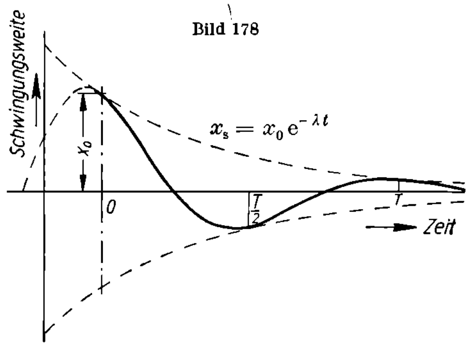


Bild 178

Mit der Periodenzahl nimmt die Schwingungsweite ab. Ihr Abnehmen ist nur nach jeder Periode sichtbar, es findet aber fortwährend statt. Man kann deshalb eine Kurve für die Schwingungsweite finden, welche die Kurve der Schwingung einhüllt (Bild 178). Für diese gilt, da nach jeder vollen Schwingung $\sin \sqrt{n}\, t = 0$ und $\cos \sqrt{n}\, t = 1$ ist:

$$x_s = \frac{x_0}{e^{\lambda t}} \,.$$

x_s ist somit die jeweilige Schwingungsweite, während x der jeweilige Ausschlag aus der Nullage ist.

Zwei Schwingungsweiten, welche um eine Schwingungszeit T auseinanderliegen, verhalten sich:

$$x_2 : x_1 = \frac{x_0}{e^{\lambda(t+T)}} : \frac{x_0}{e^{\lambda t}} = \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t + \lambda T}} = \frac{1}{e^{\lambda T}} \,.$$

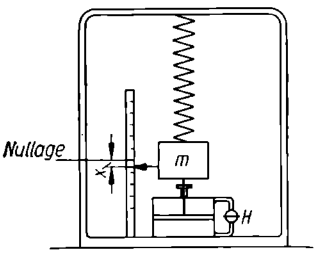


Bild 179

Man nennt $\frac{1}{e^{\lambda T}}$ das **logarithmische Dekrement.**

232. Ein **Meßinstrument** für **Schwingungsmessung** ist nach Bild 179 mit einer Dämpfung ausgerüstet. Diese Dämpfung ist der Geschwindigkeit proportional und wird durch den Hahn H so eingestellt, daß die Kraft $4{,}9\ \text{Ns/m}\ \frac{dx}{dt}$ ist; die Federkraft $P = 4{,}41\text{N/m} \cdot x$; die schwingende Masse $m = 0{,}49$ kg.

Es erfolgt ein plötzlicher Stoß, so daß die anfängliche Schwingungsweite $x_0 = 0{,}2$ cm ist.

a) Die Konstanten c_1, c_2, λ, n, A und B sind zu bestimmen.

b) Nach welcher Zeit ist der Ausschlag auf $^1/_{1000}$ cm zurückgegangen?

Lösung: a) $c_1 = \frac{k_1}{m} = \frac{4{,}41\ \text{N/m}}{0{,}49\ \text{kg}} = 9\,^1/\text{s}^2$; $\quad c_2 = \frac{k_2}{m} = \frac{4{,}9\ \text{Ns/m}}{0{,}49\ \text{kg}} = 10\,^1/\text{s}$.

n ist positiv bei $n^2 = \frac{c_2^2}{4} - c_1 = 25\,^1/\text{s}^2 - 9\,^1/\text{s}^2 = 16\,^1/\text{s}^2$, also **aperiodisch.**

$$n = 4\,^1/\text{s}; \quad \lambda = \frac{c_2}{2} = 5\,^1/\text{s},$$

$$A = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) = 0{,}1\ \text{cm}\left(1 + \frac{5}{4}\right) = 0{,}225\ \text{cm}\,.$$

$$B = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = 0{,}1\ \text{cm}\left(1 - \frac{5}{4}\right) = -0{,}025\ \text{cm}\,.$$

b) $x = \frac{1}{e^{\lambda t}} [A e \quad + B e^{-nt}]$.

Mit $\lambda = 5\,{}^1/\mathrm{s}, \quad n = 4\,{}^1/\mathrm{s}$

$$x = \frac{1}{e^{5t/s}} [0{,}225 \text{ cm } e^{4t/s} - 0{,}025 \text{ cm } e^{-4t/s}] =$$

$$= \frac{1}{e^{5t/s}} \left[0{,}225 \text{ cm } e^{4t/s} - \frac{0{,}025 \text{ cm}}{e^{4t/s}}\right].$$

Das zweite Glied der Klammer ist außerordentlich klein, kann somit vernachlässigt werden, sobald $t > 1$ ist.

$$x \approx \frac{0{,}225 \text{ cm}}{e^{t/s}} = 0{,}001 \text{ cm},$$

$$e^{t/s} = \frac{0{,}225 \text{ cm}}{0{,}001 \text{ cm}} = 225,$$

$$t/\mathrm{s} = \frac{\lg 225}{\lg e} = \frac{2{,}3522}{0{,}4343} = 5{,}41.$$

233. Bei dem **Schwingungsmesser** der Aufg. 232 wird durch Verstellen des Hahnes **H** die dämpfende Kraft verringert, so daß

$$1)\ k_2 \cdot \frac{dx}{dt} = 1{,}63 \text{ Ns/m} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad 2) = 0{,}981 \text{ Ns/m} \cdot \frac{dx}{dt}$$

ist. Alle übrigen Werte sind dieselben.

a) Die Konstanten c_1, c_2, λ, n, A und B sind zu bestimmen.

b) Die Schwingungszeit T ist zu bestimmen.

c) Es ist zu bestimmen, nach welcher Zeit die Schwingungsweite ${}^1/_{1000}$ cm ist.

234. Es ist zu bestimmen, wie die Bewegung des **Messers** der Aufg. 232 verläuft, wenn $\sqrt{\frac{c_2^2}{4} - c_1} = 0$ ist.

Erzwungene Schwingungen

235. Was versteht man unter **erzwungener Schwingung**?

Lösung: Eine erzwungene Schwingung entsteht, wenn ein System, das eine eigene Schwingung ausführen kann, durch einen regelmäßigen Anstoß von außen zu zusätzlichen Schwingungen veranlaßt wird.

236. Es ist die **Gleichung** für eine erzwungene Schwingung ohne Dämpfung für eine an einer Feder aufgehängten Masse abzuleiten, deren Aufhängepunkt durch eine Kurbel eine Bewegung nach der Gleichung $y = a \cdot \sin \omega t$ erfährt.

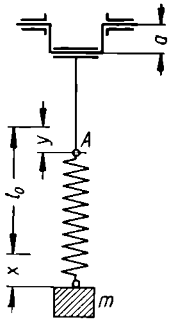


Bild 180

Lösung: Die Kurbel macht den Weg $y = a \cdot \sin \omega t$, wobei y positiv und negativ werden kann, je nachdem, welchen Wert ωt annimmt.

Die Masse m macht eine sogenannte angefachte Schwingung, also eine Relativbewegung gegenüber dem Punkte A. Ihr absoluter Weg sei x. Dann ist die Reckung der Feder $x - y$.
Die Schwingungsweite der angefachten Schwingung, also des Punktes m, soll gesucht werden.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - y); \quad k \text{ Federkraft für } x = 1\,\text{m};$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c(x - y) = -cx + ca \cdot \sin \omega t .$$

Die Integralgleichung hierfür lautet:

$$x = \frac{ca}{c - \omega^2} \sin \omega t + A \sin \sqrt{c}\, t + B \cos \sqrt{c}\, t .$$

Ist bei $t = 0$ auch y und $\frac{dx}{dt} = \frac{ca\omega}{c - \omega^2} \cos \omega t + \sqrt{c} A \cos \sqrt{c}\, t - \sqrt{c} B \sin \sqrt{c}\, t = 0$,

so ist $\quad A = -\frac{\sqrt{c}\, a \omega}{c - \omega^2}$ und $B = 0$.

$$x = \frac{c \cdot a}{c - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{c} \cdot a \omega}{c - \omega^2} \cdot \sin \sqrt{c}\, t ,$$

größter Ausschlag bei $\omega t = \pi/2$, $x_{\max} = \frac{ca}{c - \omega^2} - \frac{\sqrt{c}\, a\omega}{c - \omega^2} \sin \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{c}}{\omega}$;

$\frac{\sqrt{c} \cdot a \omega}{c - \omega^2}$ ist der Ausschlag der Eigenschwingung:

$\frac{ca}{c - \omega^2}$ ist der Ausschlag infolge der Anfachung.

Einfache Lösung:

Federkraft $\quad P = k \cdot (x - y)$,

Zentrifugalkraft $P = m x \omega^2$,

somit $\quad k \cdot (x - y) = m x \omega^2$,

$$x = \frac{k}{k - m\omega^2} \cdot y = \frac{c}{c - \omega^2} \cdot y ,$$

größter Anschlag $x_0 = \frac{c}{c - \omega^2} \cdot a$.

Das ist aber eine neue Schwingungsgleichung, deren Schwingungsweite $\frac{ca}{c - \omega^2}$ ist. Der größte Ausschlag des Punktes m hängt somit sehr von ω ab.

1. ω oder m sehr klein. Die Schwingungsweite wird ungefähr a, d. h., der Punkt m macht die Bewegung der Kurbel einfach mit.

2. $\omega^2 = c$. Die Schwingungsweite wird unendlich groß, die Feder reißt ab. Es ist **„Resonanz"** vorhanden. Dabei ist die erzwungene Schwingungszeit genauso groß wie die freie Schwingungszeit.

Eigenschwingungszahl $f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{c}}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi}$,

Kurbeldrehzahl $n = \frac{\omega}{2\pi}$.

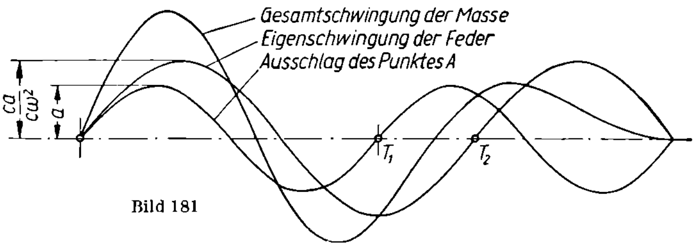


Bild 181

3. ω oder m sehr groß. Die Schwingungsweite ist negativ und ist beinahe 0, d. h., der Punkt m bleibt einfach stehen, bzw. er zittert nur ein wenig.
Diese drei Fälle sind bei jeder erzwungenen Schwingung vorhanden.
Die Bewegung des Punktes A und die Eigenschwingung der Feder addieren sich.

237. Bei dem I-Träger der Aufg. 225 erfolgt nach je $T_1 = 0{,}496$ s ein Dampfhammerstoß, welcher sich im Erdreich und im Mauerwerk als harmonische Störungsschwingung auswirkt. Die Länge des Trägers ist $l = 6$ m. T_1 ist doppelt so groß wie die Eigenschwingungszeit des Trägers $T = 0{,}248$ s. Der Ausschlag infolge der Störungsstöße betrage $a_0 = 0{,}1$ cm. Die Durchbiegung infolge des Gewichtes verlegt nur die Nullage der Schwingung um den Betrag $y_0 = \frac{Q\,l^3}{48\,E\,J}$ und hat keinen Einfluß auf die Schwingung.

a) Winkelgeschwindigkeit der erzwungenen Schwingung?

b) Wie wächst der Ausschlag nach jedem Schlag?

c) Wie groß wird er nach 20 Schlägen?

Anleitung: Unter Vernachlässigung der Eigenmasse des Trägers und Berücksichtigung der Einzellast in der Mitte entspricht der Ausschlag in der Mitte des Trägers $a_0 = 0{,}1$ cm einer Kraft $P_0 = \frac{48\,E\,J}{l^3} \cdot a_0$.

Die Kraft der Federung ist $P = \frac{48\,E\,J}{l^3} \cdot y$.

$$m\,\frac{d^2 y}{d t^2} + P = P_0 \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + c y = c a_0 \cdot \sin \omega t; \quad c = \frac{48 E J}{m l^3}$$

$$y = \frac{c a_0}{c - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{c}\, a_0 \omega}{c - \omega^2} \cdot \sin \sqrt{c}\, t \text{ (Aufg. 236)}.$$

Nach Voraussetzung $\sqrt{c} = 2 \cdot \omega$, da $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{2\,T}$ ist.

$$\frac{c a_0}{c - \omega^2} = \frac{4}{3} a_0; \quad \frac{\sqrt{c}\, a_0 \omega}{c - \omega^2} = \frac{2}{3} a_0.$$

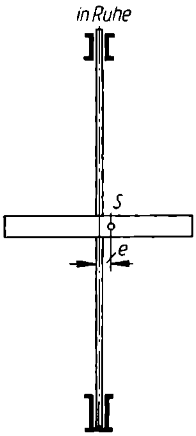


Bild 182

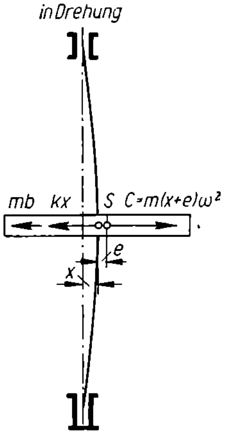


Bild 183

Wenn zu dem erzwungenen Ausschlag $\frac{4}{3}\, a_0$ infolge des zweiten Stoßes nochmals a_0 hinzukommt, so wird nach der zweiten Periode $a_2 = 2 \cdot \frac{4}{3}\, a_0$ und nach n Schlägen $a_n = n \cdot \frac{4}{3} \cdot a_0$.

238. Eine **senkrechte Welle**, die als masselos betrachtet wird, trägt in der Mitte eine Schwungscheibe, die um ein Maß e mit ihrem Mittelpunkt außerhalb der Drehachse liegt. Wellendurchmesser $d = 100$ mm, Länge der Welle zwischen den Lagern $l = 1{,}2$ m, Masse der Schwungscheibe $m = 1{,}75$ t, $e = 1$ mm, $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ kp/cm². Die Welle erfährt eine anfachende Schwingung $y = a \cdot \sin \omega t$, deren Schwingungszahl mit der Drehzahl der Maschine übereinstimmt. Der Ausschlag a kann z. B. durch den Ungleichförmigkeitsgrad der Maschine hervorgerufen werden.

$$\left(2 a = \frac{e\,\omega_2^2}{c - \omega_2^2} - \frac{e\,\omega_1^2}{c - \omega_1^2}\right);$$

$a = 1$ mm.

Es ist zu ermitteln: **a)** die Eigenfrequenz, **b)** die Schwingungsweite der angefachten Schwingung bei $\omega = 0$, ω_k und $\omega = \infty$.

Lösung: a) $m \frac{d^2 x}{dt^2} = - k x$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{k}{m} \cdot x = c x$$

$$E = 2{,}15 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2;$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 10^4 \text{ cm}^4}{64} = 491 \text{ cm}^4; \quad m = 1750 \text{ kg};$$

$$c = \frac{48\,E\,J}{m\,l^3} \text{ (vgl. Aufg. 237)}$$

$$= \frac{48 \cdot 2{,}15 \cdot 10^6 \text{ kp} \cdot 491 \text{ cm}^4}{1750 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot 120^3 \text{ cm}^3} = \frac{48 \cdot 2{,}15 \cdot 10^6 \cdot 491 \cdot 981 \text{ kgm}}{1750 \cdot 120^3 \text{ kg} \cdot {}^1/_{100} \text{ m s}^2} = 16\,400\ {}^1/\text{s}^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}} = \frac{2\pi}{\sqrt{16\,400\ {}^1/\text{s}^2}} = 0{,}0491 \text{ s};$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}0491 \text{ s}} = 20{,}4\ {}^1/\text{s}\,.$$

b) Ohne anfachende Schwingung ist

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x + m\,(x+e)\cdot\omega^2; \text{ mit } c = \frac{k}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -(c-\omega^2)\cdot x + e\,\omega^2\,.$$

Bei Vorhandensein einer anfachenden Schwingung muß nach Aufg. 236 anstatt x der Wert $x - y = x - a \sin \omega t$ gesetzt werden. $P = k a$.
Mit $c_1 = c - \omega^2$ wird $m\,x'' = -k\,x + k a \sin \omega t + m\,(x+e)\,\omega^2$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = x'' = -c_1\,x + c\,a \cdot \sin \omega t + e\,\omega^2\,.$$

Setzt man $z = x - \dfrac{e\,\omega^2}{c_1}$; $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$, so wird

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -c_1 z + c\,a \cdot \sin \omega t\,.$$

Nach Aufg. 236 ergibt sich

$$z = \frac{c\,a}{c_1 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin \sqrt{c_1}\,t + B \cos \sqrt{c_1}\,t\,.$$

Die Schwingungsweite der angefachten Schwingung ist

$$z_0 = \frac{c\,a}{c_1 - \omega^2} = \frac{c\,a}{c - 2\,\omega^2}; \quad x_0 = z_0 + \frac{e\,\omega^2}{c - \omega^2}$$

für $\sin \omega t = 1$ ist $z = z_0$ und $x = x_0$

bei	$\omega = 0$	$z_0 = a$	$x_0 = a$
	$\omega_k = \sqrt{c}$	$z_0 = -a$	$x_0 = \infty$
	$\omega = \infty$	$z_0 = 0$	$x_0 = -e$
	$\omega = \sqrt{\dfrac{c}{2}}$	$z_0 = \infty$	$x_0 = \infty$.

Kritische Winkelgeschwindigkeiten somit

$$\omega_k = \sqrt{c} = \sqrt{16400\ {}^1/\text{s}^2} = 128\ {}^1/\text{s} \text{ und}$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c}{2}} = \sqrt{8200\ {}^1/\text{s}^2} = 90{,}5\ {}^1/\text{s}\,.$$

239. Wie verhält sich eine **liegende Welle**, die in der Mitte durch ein Schwungrad belastet ist?

Lösung: Die Eigenschwingungszahl und die kritische Drehzahl bleiben dieselben wie bei einer stehenden Welle.
Die Schwingung erfolgt aber über einer anderen Nullinie. Diese liegt um das Maß unter der Drehachse, um das die Welle durch das Gewicht durchgebogen wird. Bei sehr großem ω stellt sich auch hier der Schwerpunkt in die Drehachse, es verschwindet also auch die Durchbiegung infolge der Schwungscheibe.

240. Bei einer **liegenden Welle** ist in der Mitte der Welle ein Schwungrad, das durch sein Gewicht eine zusätzliche Durchbiegung hervorruft. Das Schwungrad hat eine Exzentrizität $e = 1$ mm, die in der Anfangslage der Durchbiegung der Welle gleichgerichtet ist. Wellendurchmesser $d = 100$ mm, Länge der Welle 1,2 m, Masse des Schwungrades $m = 1750$ kg. Gewicht des Schwungrades $G = mg$. Elastizitätsmaß $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ kp/cm².

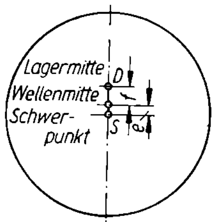


Bild 184

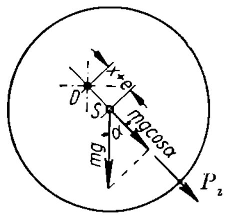


Bild 185

a) Aufstellung der Schwingungsgleichung unter der Annahme, daß in der Anfangsstellung der Schwerpunkt senkrecht unter der Welle liegt. Es ist nur diejenige Gewichtskomponente zu berücksichtigen, welche in Richtung der Schwingungsebene der Zentrifugalkraft fällt.

b) Ermittlung der Schwingungsweite für $\omega = 0,\ 10,\ 3000\ ^1/\mathrm{s}$.

c) Ermittlung der kritischen Drehzahl.

Lösung: a) In der Anfangsstellung ist

$$k_0 = f = \frac{m\,g\,l^3}{48\,E\,J}$$

$$k = \frac{48 \cdot E\,J}{l^3}$$

$$c = \frac{48\,E\,J}{m\,l^3}\,.$$

In einer Stellung (s. Bild 185), die den Winkel $\alpha = \omega t$ mit der Anfangslage hat, wirkt die Gewichtskomponente $mg \cdot \cos \omega t$, die Zentrifugalkraft $m\,(x + e)\,\omega^2$ und die Kraft der Welle $k\,x$.

Somit $m \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} = -\,k\,x + m\,(x + e) \cdot \omega^2 + mg \cdot \cos \omega t$;

mit $c = \dfrac{k}{m}$ ist $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} = -\,(c - \omega^2) \cdot x + e\omega^2 + g \cdot \cos \omega t$ (s. Aufg. 238).

Setzt man $c_1 = c - \omega^2$ und

$$x_1 = x - \frac{e\omega^2}{c_1}; \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

so ist $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - c_1 x_1 + g \cdot \cos\omega t$.

$$x_1 = \frac{g}{c_1 - \omega^2} \cos\omega t + A \cdot \sin\sqrt{c_1}\, t + B \cdot \cos\sqrt{c_1}\, t;$$

$$x = x_1 + \frac{e\omega^2}{c_1} = \frac{e\omega^2}{c_1} + \frac{g}{c_1 - \omega^2} \cos\omega t + A \sin\sqrt{c_1}\, t + B \cos\sqrt{c_1}\, t;$$

mit $t = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ wird $A = 0$ und $B = -\frac{e\omega^2}{c_1} - \frac{g}{c_1 - \omega^2}$,

ferner $c_1 = c - \omega^2$;

$$x = \frac{e\omega^2}{c - \omega^2} + \frac{g}{c - 2\omega^2} \cdot \cos\omega t - \left[\frac{e\omega^2}{c - \omega^2} + \frac{g}{c - 2\omega^2}\right] \cos\sqrt{c - \omega^2}\, t.$$

Der Ausschlag infolge der Anfachung ist $\frac{g}{c - 2\omega^2}$.

Der Ausschlag infolge der Eigenschwingung ist $\frac{e\omega^2}{c - \omega^2} + \frac{g}{c - 2\omega^2}$.

b) Schwingungsweite für $\omega t = 0$:

$$a = \frac{e\omega^2}{c - \omega^2} + \frac{g}{c - 2\omega^2}.$$

1. Bei $\omega = 0$ Durchhang $= \frac{g}{c} = \frac{m g l^3}{48 EJ} = f$

2. $\omega = 10\ {}^1/\mathrm{s}$

$$a = \frac{e\omega^2}{c - \omega^2} + \frac{g}{c - 2\omega^2}; \quad c = 16400\ {}^1/\mathrm{s}^2;$$

$$a = \frac{0{,}001\ \mathrm{m} \cdot 100\ {}^1/\mathrm{s}^2}{16400\ {}^1/\mathrm{s}^2 - 100\ {}^1/\mathrm{s}^2} + \frac{9{,}81\ \mathrm{m/s}^2}{16400\ {}^1/\mathrm{s}^2 - 200\ {}^1/\mathrm{s}^2} =$$

$$= \frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{16300} + \frac{9{,}81\ \mathrm{m}}{16200} = \frac{612{,}1}{10^6}\ \mathrm{m}$$

$a = 0{,}6121$ mm.

3. $\omega = 3000\ {}^1/\mathrm{s}$

$$a = \frac{0{,}001\ \mathrm{m} \cdot 9 \cdot 10^6\ {}^1/\mathrm{s}^2}{16400\ {}^1/\mathrm{s}^2 - 9 \cdot 10^6\ {}^1/\mathrm{s}^2} + \frac{9{,}81\ \mathrm{m/s}^2}{16400\ {}^1/\mathrm{s}^2 - 18 \cdot 10^6\ {}^1/\mathrm{s}^2} = -0{,}001\ \mathrm{m}$$

$a = -1{,}0$ mm,

d. h., bei dieser Drehzahl geht die Durchbiegung in umgekehrter Richtung wie e und ist beinahe gleich groß, so daß sich der Schwerpunkt fast genau in der Drehachse befindet.

c) Resonanz bei $c = \omega^2$ und bei $c = 2\omega^2$. In beiden Fällen wird $a = \infty$.

Also $\omega_k = 128\ ^1/\mathrm{s}$ und $181\ ^1/\mathrm{s}$;

$n_k = 1220$ U/min und 1720 U/min.

Die eine kritische Drehzahl entsteht durch die Exzentrizität, die andere durch die Schwungradmasse.

Freie Drehschwingungen

241. Es ist die Grundform der Gleichung für eine **ungedämpfte Drehschwingung** abzuleiten. Hierbei wird eine Welle betrachtet, an deren Ende eine Schwungscheibe mit gegebenem mD^2 und einem Winkel φ verdreht wird und dann losgelassen wird.

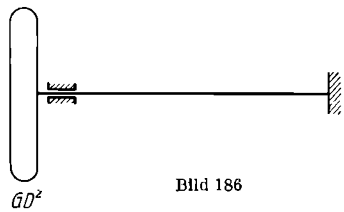


Bild 186

Lösung: Das Drehmoment, das bei einer gewissen Verdrehung um den $\sphericalangle\ \varphi$ auf eine Welle ausgeübt wird, ist diesem Winkel φ proportional, also $M_t = k \cdot \varphi$.

Das Drehmoment beschleunigt die Schwungscheibe.

$$M_t = J_d \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_d \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$J_d = \frac{mD^2}{4},$$

also $J_d \cdot \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -k\varphi$

oder $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -c\varphi$, wobei $c = \dfrac{k}{J_d}$ ist.

Daraus $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{c}}$

und $\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{c}\, t$ wie früher.

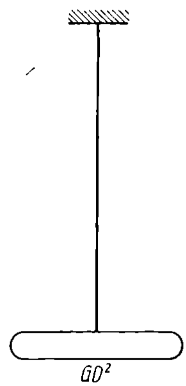


Bild 187

242. Eine **Welle** hat eine Dicke von 1,2 cm und eine Länge von 0,5 m. Sie trägt an ihrem freien Ende eine Scheibe von einem $mD^2 = 0{,}05\ \mathrm{kgm}^2$. Man verdreht die Welle um $\varphi_0 = 10°$ und läßt sie dann los. Gleitmodul für Stahl $G = 800000\ \mathrm{kp/cm}^2$. Wie groß ist die Schwingungszeit?

Lösung: $M_t = \dfrac{G J_p}{l} \cdot \varphi$

Gleitmodul $G = 800000\ \mathrm{kp/cm}^2$,

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 1{,}2^4}{32} = 0{,}203\ \mathrm{cm}^4,$$

$$l = 50\ \mathrm{cm},$$

$$J_d = \frac{mD^2}{4} = 0{,}0125\,\mathrm{kgm^2} = 125\,\mathrm{kgcm^2}$$

$$J_d \cdot \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{G\,J_p}{l}\cdot\varphi\,; \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -c\varphi\,; \qquad c = \frac{G\,J_p}{l\,J_d}$$

$$c = \frac{800\,000\,\mathrm{kpcm^{-2}} \cdot 0{,}203\,\mathrm{cm^4}}{50\,\mathrm{cm} \cdot 125\,\mathrm{kgcm^2}} = 2594\,\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{kgcm}} =$$

$$= \frac{2594 \cdot 9{,}81\,\mathrm{kgm}}{\mathrm{s^2\,kg} \cdot {}^1/_{100}\,\mathrm{m}} = 25\,447\,{}^1/\mathrm{s^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{25447\,\frac{1}{\mathrm{s^2}}}} = 0{,}0396\,\mathrm{s}\,.$$

Die Zeit ist vom Schwingungswinkel unabhängig.

243. Es soll durch Messung der Schwingungszeit das $\boldsymbol{mD^2}$ eines Körpers bestimmt werden. Zu diesem Zwecke wird der Körper an einem Stahldraht von der Länge $l = 3$ m und der Dicke $d = 5$ mm aufgehängt und in Drehschwingungen versetzt. Man zählt in der Minute 26,5 volle Schwingungen. $G = 800\,000$ kp/cm².

Gefragt: a) J_p, **b)** T, **c)** c, **d)** J_d, **e)** mD^2.

244. Auf einer 3 m langen Welle vom Durchmesser $d = 60$ mm sitzen an den beiden Enden zwei **Riemenscheiben.** Das Schwungmoment jeder Riemenscheibe beträgt $mD^2 = 20$ kgm². Die Riemenscheiben übertragen ein Drehmoment von 240 kpcm auf die Welle. Plötzlich fällt der Riemen auf der einen Scheibe ab. Welche Schwingung vollführt die Welle, d. h., **a)** wie groß sind J_p, J_d, c und die Schwingungszeit, **b)** wie groß ist der Schwingungswinkel (Amplitude)?

Die Scheibe mit dem Riemen kann annähernd als nicht schwingend betrachtet werden.

245. Eine **Kupplungsschwingung** liegt vor, wenn auf einer Welle zwei Massen gegeneinander schwingen. Es wird angenommen, daß sich eine Scheibe auf einer Welle mit einer Drehzahl n drehe und daß mittels einer Klauen- oder Zahnkupplung eine zweite Scheibe während des Laufes zugeschaltet werde. **a)** Welche Drehzahl stellt sich ein? **b)** Aufstellung der Schwingungsgleichung. **c)** Schwingungszeit. **d)** Ermittlung des maximalen Drehmomentes in der Welle. **e)** Schubspannung τ.

$J_1 = 23{,}5$ kgm², $n_1 = 180$ U/min, $J_2 = 11{,}75$ kgm²;

Gleitmodul $G = 800\,000$ kp/cm², Wellendurchmesser $d = 100$ mm, Länge der Welle zwischen den Scheiben $l = 2$ m.

Lösung: a) Drall $J_1 \cdot \omega_1 = (J_1 + J_2) \cdot \omega_2$ (s. Aufg. 173), wegen $\omega = 2\,\pi n$ folgt:

$$n_2 = \frac{23{,}5\,\mathrm{kgm^2}}{23{,}5 + 11{,}75\,\mathrm{kgm^2}} \cdot 180\,\mathrm{U/min} = 120\,\mathrm{U/min}\,.$$

b) Wird der Ausschlagswinkel der Räder α in zwei Teile geteilt, in einen Verzögerungswinkel α_1 und einen Beschleunigungswinkel α_2, so ist

$$J_1 \cdot \alpha_1 = J_2 \cdot \alpha_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{M_t}{J_1}; \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{M_t}{J_2}; \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} = -M_t \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right).$$

Das Drehmoment der Welle ist proportional dem ganzen Verdrehungswinkel:

$$M_t = k \cdot \alpha = \frac{G \cdot J_p}{l} \cdot \alpha; \quad J_p = \frac{\pi}{32} d^4 = 980 \text{ cm}^4$$

$$M_t = 3{,}92 \cdot 10^6 \text{ kpcm} \cdot \alpha; \quad k = 3{,}92 \cdot 10^6 \text{ kpcm} = 38{,}4 \cdot 10^4 \text{ Nm} = 38{,}4 \cdot 10^4 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2} \cdot \alpha = -c \cdot \alpha, \quad c = 38{,}4 \cdot 10^4 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 \cdot \frac{23{,}5 \text{ kgm}^2 + 11{,}75 \text{ kgm}^2}{23{,}5 \text{ kgm}^2 \cdot 11{,}75 \text{ kgm}^2} =$$
$$= 49000 \text{ }^1/\text{s}^2.$$

$$\alpha = A \cdot \sin \sqrt{c}\, t + B \cdot \cos \sqrt{c}\, t$$

Ist bei $t = 0$ auch $\alpha = 0$, so ist $B = 0$ und $A = \alpha_0$

$$\alpha = \alpha_0 \sin \sqrt{c}\, t.$$

c) Schwingungszeit $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{c}} = 0{,}02837$ s.

d) Zur Ermittlung des maximalen Drehmomentes geht man vom Drall aus.

$$\int M_t \cdot dt = J_1 \cdot (\omega_1 - \omega_2) = J_2 \cdot \omega_2.$$

$\int M \cdot dt$ läßt sich berechnen, indem man $M_t = M_{max} \sin \sqrt{c}\, t$ setzt.

$$\int M_t \cdot dt = \frac{M_{max}}{\sqrt{c}} \cos \sqrt{c}\, t \Bigg|_{t=0}^{t=\frac{T}{4}} = \frac{M_{max}}{\sqrt{c}}, \text{ da } \sqrt{c} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ist}.$$

Wenn eine halbe Schwingung beendet ist ($t = T/2$), ist kein Drehmoment mehr vorhanden, und es ist $\alpha = 0$. In diesem Moment muß demnach die Drehzahl $n = 120$ U/min sein. Bis dahin ist

$$\int M_t \cdot dt = \frac{2 \cdot M_{max}}{\sqrt{c}} = J_1 \cdot (\omega_1 - \omega_2),$$

$$M_{max} = 16368 \text{ Nm} = 166847 \text{ kpcm}.$$

e) $\tau = \dfrac{M_{max}}{W_p} = \dfrac{166847 \text{ kpcm}}{196{,}25 \text{ cm}^3} = 850{,}2 \text{ kp/cm}^2.$

Erzwungene Drehschwingungen mit Kopplung

246. Die **Kurbelwelle** einer Kraftmaschine trägt auf dem freien Ende eine Schwungscheibe. Die Kraft an der Kurbel ist sehr wechselnd, hier aber sei eine mittlere konstante Kraft angenommen, so daß das entstehende Drehmoment $M_{t_1} = Pr \cdot \sin\alpha$ ist. An der Kurbel befinden sich Gegengewichte. Die an der Kurbel befindlichen Massen haben ein Massenträgheitsmoment J_1; die hin- und hergehenden Massen werden nicht berücksichtigt.
Wenn das Schwungrad einen Riemen trägt, so ist dort ein konstantes widerstehendes Moment anzunehmen, das als Dämpfung wirkt. Doch soll in dieser Aufgabe vom Riemen abgesehen werden, da sich sonst die Rechnung sehr schwierig gestaltet. Die kritische Drehzahl bleibt dieselbe, ob mit oder ohne dieses Drehmoment gerechnet wird.

Wellenstärke $d = 12$ cm;
Wellenlänge $l = 1{,}1$ m; $P = 2400$ kp $= 23544$ N;
Massenträgheitsmoment der Kurbel $J_1 = 4{,}9$ kgm²;
Massenträgheitsmoment des Schwungrades $J_2 = 58{,}86$ kgm²
Kurbelradius $r = 0{,}15$ m; Drehzahl veränderlich.

a) Aufstellung der Schwingungsgleichungen.

b) Kritische Drehzahl.

c) Größter Schwingungsausschlag bei $\omega = 100$.

Lösung: a) An der Kurbel wirkt das antreibende Moment $Pr \cdot \sin\alpha$ abzüglich des Massenbeschleunigungsmomentes $J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt}$ auf die Welle. Das Moment in der Welle ruft eine Verdrehung der Welle hervor. Gegenüber einer Nullinie bei nicht verdrehter Welle nimmt die Kurbel eine neue Stellung ein, die um den Winkel φ_1 gegenüber der Nullinie vorgedreht ist, und das Schwungrad ist um den Winkel φ_2 gegenüber der Nullinie vor- oder zurückgedreht, je nach der Schwingungszeit. Winkel $\alpha = \omega t$. Verdrehungswinkel der Welle $= \varphi_1 + \varphi_2$. Man nennt eine solche Schwingung „gekoppelte Schwingung".
An der Kurbelseite wirkt das Drehmoment $Pr \cdot \sin\omega t$, verursacht eine Verdrehung der Welle um den Winkel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und beschleunigt die Massen an der Kurbel

$$Pr \cdot \sin\omega t = k\varphi + J_1 \cdot \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}.$$

Die Verdrehung der Welle bewirkt auch eine Beschleunigung des Schwungrades

$$J_2 \cdot \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -k\varphi.$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{k}{J_1} \cdot \varphi + \frac{Pr}{J_1} \cdot \sin\omega t. \qquad c_1 = \frac{k}{J_1}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -\frac{k}{J_2} \cdot \varphi, \qquad c_2 = \frac{k}{J_2}$$

$$\frac{d^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -(c_1 + c_2) \cdot \varphi + \frac{Pr}{J_1} \cdot \sin\omega t$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c \cdot \varphi + \frac{Pr}{J_1} \cdot \sin\omega t; \quad c = c_1 + c_2.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$\varphi = \frac{Pr}{J_1} \cdot \frac{1}{c - \omega^2} \cdot \sin \omega t + A \cdot \cos \sqrt{c} \cdot t + B \cdot \sin \sqrt{c} \cdot t .$$

Durch zweimaliges Differenzieren und Einsetzen der entsprechenden Werte in die Gleichung kann man sich leicht von der Richtigkeit überzeugen.
Die Konstanten A und B ergeben sich aus den Anfangs- oder Endbedingungen.

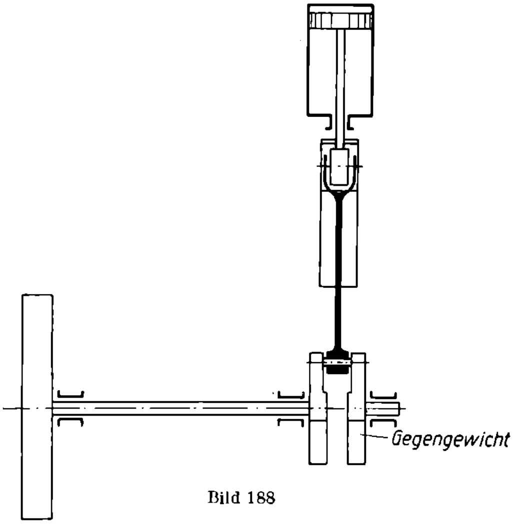


Bild 188

Zur Zeit $t = 0$ sei φ und $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Dann ist $A = 0$.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Pr}{J_1} \cdot \frac{1}{c - \omega^2} \cdot \omega \cdot \cos \omega t + B \cdot \sqrt{c} \cdot \cos \sqrt{c}\, t = 0$$

$$B = -\frac{Pr}{J_1} \cdot \frac{1}{c - \omega^2} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{c}} .$$

Es wird

$$\varphi = \frac{Pr}{J_1} \cdot \frac{1}{c - \omega^2} \cdot \sin \omega t - \frac{Pr}{J_1} \cdot \frac{1}{c - \omega^2} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{c}} \cdot \sin \sqrt{c}\, t .$$

b) Ist ω^2 gegen c sehr klein, so verschwindet das zweite Glied der Gleichung fast gegenüber dem ersten, und der maximale Winkelausschlag bei $\sin \omega t = 1$ wird

$$\varphi_{\max} \approx \frac{Pr}{J_1} \cdot \frac{1}{c} .$$

Ist ω^2 gegen c sehr groß, im Grenzfall unendlich, so wird

$$\varphi = 0 - 0 = 0,$$

d. h., die Welle kann den Impulsen wie in Aufg. 231 in keiner Weise folgen.

Bei $c = \omega^2$ tritt Resonanz ein,

$$\omega_k^2 = c = c_1 + c_2 = \frac{k}{J_1} + \frac{k}{J_2}$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}}$$

$$k = \frac{G J_p}{l} = \frac{800\,000\,\text{kp/cm}^2 \cdot \pi \cdot 12^4\,\text{cm}^4}{110\,\text{cm} \cdot 32} =$$
$$= 14{,}75 \cdot 10^6\,\text{kpcm} = 1{,}447 \cdot 10^6\,[1\,\text{Nm} = 1\,\text{kgm}^2/\text{s}^2]$$

$$\omega_k = 10^3 \sqrt{\frac{1{,}447\,\text{kgms}^{-2}\,(4{,}9 + 58{,}86)\,\text{kgm}^2}{4{,}9\,\text{kgm}^2 \cdot 58{,}86\,\text{kgm}^2}} = 565\,{}^1/\text{s}\,.$$

$$n_k = \frac{60\,\omega_k}{2\pi} = 5400\,\text{U/min}\,.$$

c) $\omega = 100\,{}^1/\text{s}$;

$$\frac{Pr}{J_1} = \frac{23\,544\,\text{N} \cdot 0{,}15\,\text{m}}{4{,}9\,\text{kgm}^2} = 720\,{}^1/\text{s}^2$$

$$c_1 = \frac{k}{J_1} = 296\,000\,{}^1/\text{s}^2; \quad c_2 = \frac{k}{J_2} = 24\,600\,{}^1/\text{s}^2, \quad c = 320\,600\,{}^1/\text{s}^2;$$

bei $\omega t = \frac{\pi}{2}$, $\quad t = \frac{\pi}{2\omega}$ wird

$$\varphi = \frac{720\,{}^1/\text{s}^2}{310\,600\,{}^1/\text{s}^2} \cdot 1 - \frac{720\,{}^1/\text{s}^2}{310\,600\,{}^1/\text{s}^2} \cdot \frac{100\,{}^1/\text{s}}{566\,{}^1/\text{s}} \cdot \sin\left(566\,\frac{\pi}{200}\right)$$

$$\varphi = 0{,}0023 - 0{,}0004 \sin 512° = 0{,}0023 - 0{,}0004 \cdot \sin 28°$$

$$\varphi \approx 0{,}0021 \text{ oder } 0{,}12°\,.$$

MECHANIK DER FLÜSSIGKEITEN

Hydrostatik

Die **Hydrostatik** ist die Lehre von den Kräften bei ruhenden Flüssigkeiten.

HYDROSTATISCHER DRUCK OHNE BERÜCKSICHTIGUNG DER SCHWERKRÄFTE

Hydrostatischer Druck auf Kolbenflächen

1. a) Was versteht man unter **hydrostatischem Druck?** **b)** Wie heißt das „Gesetz des hydrostatischen Druckes“?

Lösung: a) Hydrostatischer Druck an einer bestimmten Stelle einer Flüssigkeit ist die im Gleichgewichtszustande auftretende Pressung. Diese wird meist in Atmosphären (**1 at = 1 kp/cm²**) oder in der kohärenten Einheit N/m^2 gemessen, wobei 1 at $= 9{,}81 \cdot 10^4$ N/m^2 ist. 5 **at Überdruck** bedeutet z. B. 5 Atmosphären Überdruck über den äußeren Luftdruck. (Wird das Gleichgewicht der Flüssigkeit etwa durch eine beschleunigte Bewegung gestört, so ändert sich der Druck infolge der Massenwirkung der Flüssigkeit.)

b) Hydrostatischer Druck, der in einer abgesperrten Flüssigkeit durch Einwirkung äußerer Kräfte erzeugt wird, pflanzt sich nach allen Richtungen hin gleichmäßig fort. Wird z. B. in einem Pumpenkörper durch die Antriebskraft des Kolbens ein hydrostatischer Druck p erzeugt, so überträgt sich dieser Druck durch die ganze eingeschlossene Wassermenge nach allen Richtungen hin in unveränderter Größe. (Die Einwirkung des Eigengewichts des Wassers auf den hydrostatischen Druck ist dabei außer acht gelassen.)

2. Ein **Tauchkolben** von 180 mm Durchmesser wird durch einen **Lederstulp** nach Figur im Zylinder abgedichtet. Der Stulp wird durch den Wasserdruck nach innen gegen den Kolben, nach außen gegen die Zylinderwand gepreßt, so daß er auf 12 mm Höhe dichtend anliegt. Welchen Wasserdruck erzeugt eine Kolbenkraft 8200 kp, **a)** wenn keine Reibung wirksam ist, **b)** wenn die Reibungszahl der Lederstulpreibung am Kolben 0,15 beträgt?

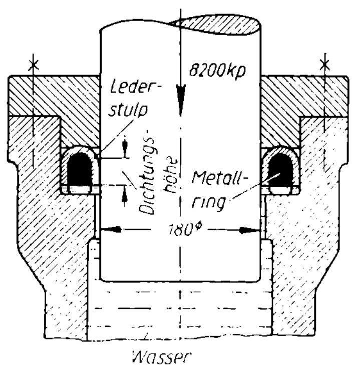


Bild 189

Lösung: a) $p = \frac{P}{F} = \frac{8200 \text{ kp} \cdot 4}{\pi \cdot 18^2 \text{ cm}^2}$; $\quad p = 32{,}2$ at.

b) Der Lederstulp liegt am Kolbenmantel in einer Zylinderfläche $(18\pi \cdot 1{,}2)$ cm² an. Das Wasser belastet den Kolben an dieser Fläche mit einer Normalkraft

$$P_n = (18\pi \cdot 1{,}2) \text{ cm}^2 \cdot p'.$$

Die Reibungskraft wird μP_n. Also

$$8200\,\text{kp} = \frac{\pi\, 18^2}{4}\,\text{cm}^2 \cdot p' + \mu \cdot (18\,\pi \cdot 1{,}2)\,\text{cm}^2 \cdot p';$$

daraus $p' = 31$ at.

3. Bei einer **Wasserdruckpresse** nach Bild 190 wird an dem Hebel der Handpumpe eine Antriebskraft 16 kp ausgeübt. Der kleine Pumpenkolben hat $d_1 = 20$ mm Durchmesser und einen Lederstulp von 8 mm Dichtungshöhe (Bild 189 wie bei Aufg. 2). Der große Preßkolben hat $d_2 = 300$ mm Durchmesser und einen Lederstulp von 14 mm Dichtungshöhe.

A. Unter Vernachlässigung der Reibung soll berechnet werden **a)** der am kleinen Kolben erzeugte Wasserdruck; **b)** die vom großen Kolben ausgeübte Preßkraft; **c)** das Verhältnis der Kolbenkräfte; **d)** das Verhältnis der Kolbenhübe; **e)** der Wirkungsgrad der Presse. **B.** Dieselben Werte sollen unter Berücksichtigung der Lederstulpreibung durch eine Reibungszahl 0,15 berechnet werden.

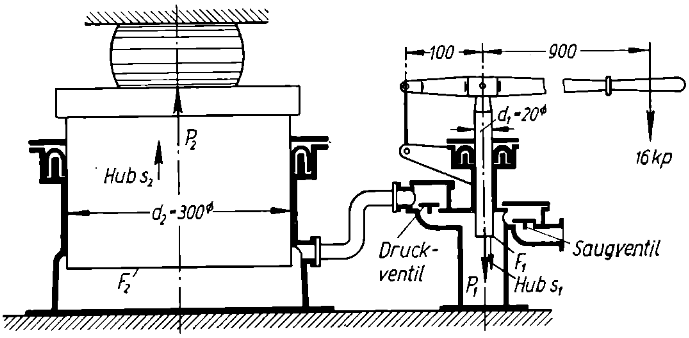


Bild 190

Lösung: A. Ohne Reibung.

a) Der Hebel liefert die Kolbenkraft

$$P_1 = 160\,\text{kp} = p F_1\,; \quad p = 160\,\text{kp} : \frac{\pi\, 2^2}{4}\,\text{cm}^2 = 51\,\text{at}\,.$$

b) $P_2 = p\,F_2 = 51\,\text{at} \cdot \dfrac{\pi\, 30^2}{4}\,\text{cm}^2 = 36\,000\,\text{kp}$

c) $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{p\,F_1}{p F_2} = \dfrac{F_1}{F_2}$. Die Kolbenkräfte sind proportional den Kolbenflächen

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2^2\,\text{cm}^2}{30^2\,\text{cm}^2} = \frac{4}{900} = \frac{1}{225} = \text{Kraftübersetzung.}$$

d) Bei Vernachlässigung der Reibung ist die angewandte Arbeit am kleinen Kolben gleich der Nutzarbeit am großen Kolben, also $P_1 s_1 = P_2 s_2$; $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{225}{1}$. Die Kolbenwege verhalten sich umgekehrt wie die Kolbenkräfte. Die Hubübersetzung ist 225 : 1. Was am großen Kolben an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren. Also Arbeit wird nicht gewonnen.

Aus c) und d) folgt: $\frac{s_1}{s_2} = \frac{F_2}{F_1}$; $F_1 s_1 = F_2 s_2$, d. h., die verdrängten Wassermengen sind an beiden Kolben gleich groß.

e) η = Nutzarbeit : Aufgewandte Arbeit = 1.

B. Berücksichtigung der Lederstulpreibung.

a) $P_1 = p' F_1 + \mu\,(2\pi \cdot 0{,}8)\,\text{cm}^2\,p'$ (wie in Aufg. 2).

$160\,\text{kp} = p'\left(\frac{\pi\,2^2}{4} + 0{,}15 \cdot 2\pi \cdot 0{,}8\right)\text{cm}^2$. Daraus $p' = 41{,}1$ at.

b) $P_2 = p' F_2 - \mu\,(30\,\pi \cdot 1{,}4)\,\text{cm}^2\,p'$

$= 41{,}1\ \text{at} \cdot (706{,}86 - 19{,}79)\,\text{cm}^2 = 28\,240\,\text{kp}$.

c) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{160\,\text{kp}}{28\,240\,\text{kp}} = 1 : \frac{28\,240}{160} = \frac{1}{176}$.

d) 225 : 1 (wie bei A).

e) $\eta = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Aufgewandte Arbeit}} = \frac{P_2 s_2}{P_1 s_1} = \frac{28\,240}{160} \cdot \frac{1}{225} = 0{,}785$.

4. Für die skizzierte **Wasserdruckpresse** von 400 mm Kolbendurchmesser steht Druckwasser von 6 at aus einer Wasserleitung zur Verfügung. Zur Vergrößerung des Druckes ist ein „Umsetzungskolben" vorgeschaltet. **A.** Für reibungslosen Betrieb ist zu berechnen **a)** der durch den Umsetzungskolben erzeugte Wasserdruck p; **b)** die vom großen Kolben ausgeübte Preßkraft; **c)** das Verhältnis der Kolbenkräfte; **d)** die Hubübersetzung; **e)** der Gesamtwirkungsgrad. **B.** Dieselben Werte sollen unter Berücksichtigung der Lederstulpreibung berechnet werden. Die Dichtungshöhe der drei Lederstulpen L_1, L_2, L_3 (Ausführung wie im Bild bei Aufg. 2) beträgt je 14 mm, die Reibungszahl 0,15. Der Stulp L_1 des Umsetzungskolbens ist belastet durch die Differenz der Wasserdrücke, die über und unter dem Kolben herrschen.

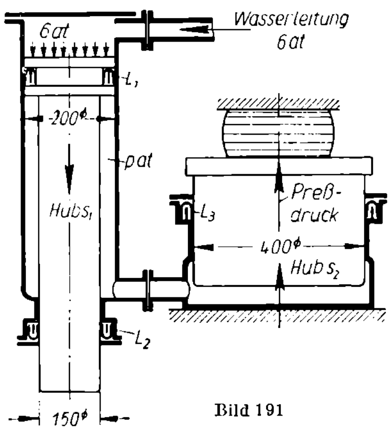


Bild 191

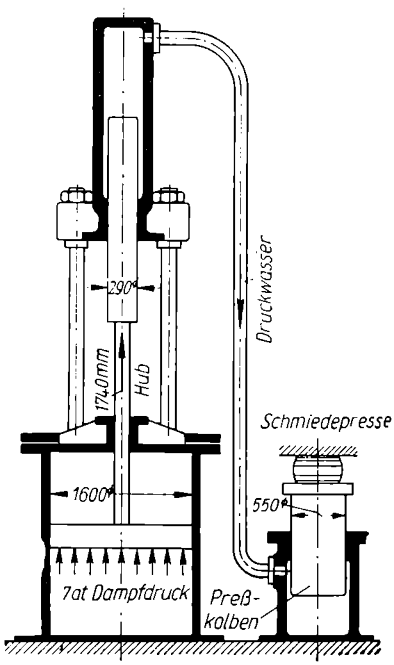


Bild 192

5. Das Druckwasser für den Betrieb einer **Schmiedepresse** wird durch einen „Druckübersetzer" nach Bild 192 erzeugt: Ein Dampfkolben von 1600 mm Durchmesser mit 7 at Dampfüberdruck treibt einen Tauchkolben von 290 mm Durchmesser. **a)** Wie groß ist der vom Tauchkolben erzeugte Wasserdruck, wenn der Verlust infolge Reibung 3 % beträgt? **b)** Welche Kraft übt der Kolben der Schmiedepresse von 550 mm Durchmesser aus bei weiteren 2 % Druckverlust? **c)** Welchen Hub erhält der Kolben der Schmiedepresse, wenn der Hub des Dampfkolbens 1740 mm beträgt?

Hydrostatischer Druck auf gewölbte Flächen

6. Welche Belastung erfährt die **gewölbte Wand** eines Gefäßes, das einem inneren hydrostatischen Drucke p ausgesetzt ist?

Lösung: Eine beliebige ebene Schnittfläche AB der Gefäßwand (Bild 193) hat die Mittelkraft P aufzunehmen, die der Flüssigkeitsdruck senkrecht zu AB auf die gewölbte Wand ausübt. Ein Flächenteilchen f erfährt die winkelrechte Belastung pf (vgl. Bild). Diese liefert senkrecht zu AB die Seitenkraft $pf \cdot \cos\alpha$. Also wird die Mittelkraft

$$P = \text{Summe aller } (pf\cos\alpha) = p \text{ mal Summe aller } (f\cos\alpha).$$

Nun ist $f\cos\alpha$ die Projektion des Flächenteilchens f auf die Ebene AB. Also ist die Summe aller $(f\cos\alpha)$ gleich der Projektion der ganzen gewölbten Wand, d. h. gleich dem Inhalt F der ebenen Fläche AB. $P = pF$. In Worten: Der Gesamtdruck auf eine gewölbte Fläche in bestimmter Richtung ist gleich dem Druck auf die ebene Projektion der Fläche in dieser Richtung.

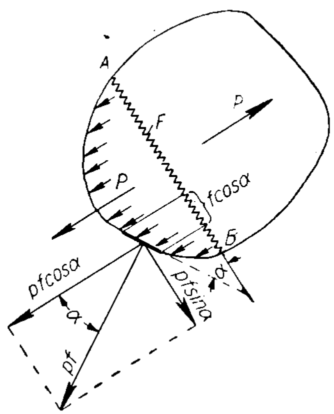


Bild 193

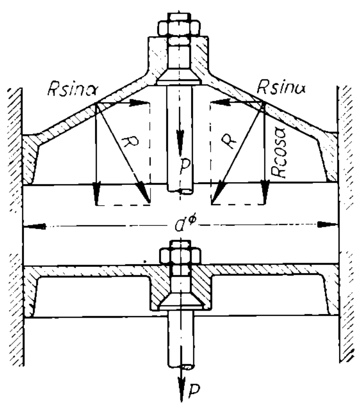


Bild 194 und Bild 195

7. **a)** Welche Kraft P überträgt der skizzierte Kolben mit **kegelförmiger Wand** (Trichterkolben Bild 194) auf die Kolbenstange, wenn sein Außendurchmesser d ist und der Dampfdruck p beträgt? **b)** Liefert er größere Kolbenkraft als der Kolben mit ebener Wand (Bild 195)? **c)** Welche Vorteile besitzt er gegenüber dem Kolben mit ebener Wand?

Lösung: **a)** Nach voriger Aufgabe ist $P = pF$, wobei F, die Projektion der Kegelfläche in Achsenrichtung, gleich der ebenen Kreisfläche $\frac{\pi d^2}{4}$ ist. **b)** Die axiale Kraft P des Trichterkolbens in Richtung der Kolbenstange ist genauso groß wie die des ebenen Kolbens von gleichem Durchmesser. Zwar ist die schräge Kraft R winkelrecht zur Kegelseite (Bild 194) größer, weil die Mantelfläche des Kegels größer als die ebene Kreisfläche ist. Aber von der Schrägkraft kommt nur die axiale Seitenkraft $R \cos \alpha$ an der Kolbenstange zur Wirkung, während die quergerichteten Seitenkräfte $R \sin \alpha$ rings um den Kegelmantel sich aufheben. **c)** Der Kegelkolben hat größere Festigkeit als der ebene Kolben, kann deshalb dünnere Wanddicke erhalten. Ferner sammelt sich bei stehenden Maschinen das Niederschlagwasser des Dampfes an der tiefsten Stelle des Kegels und kann mit Sicherheit abgeführt werden.

8. Ein Tauchkolben von 260 mm Durchmesser soll durch eine **Stopfbuchse** nach Bild 196 abgedichtet werden. Der Wasserdruck beträgt 25 at. **a)** Mit welcher Kraft sucht das Wasser die Brille aus der Buchse herauszutreiben, wenn die Druckfläche der Brille unter 30° abgeschrägt ist? **b)** Welchen Durchmesser müssen die Stopfbuchsenschrauben erhalten bei einer zulässigen Zugspannung 400 kp/cm²? Der Abstand zweier Schrauben auf dem Lochkreise soll höchstens 120 mm betragen. Die zusätzliche Kraft zum Zusammenpressen der Packung wird dadurch berücksichtigt, daß man statt des einfachen den dreifachen Flüssigkeitsdruck einführt.

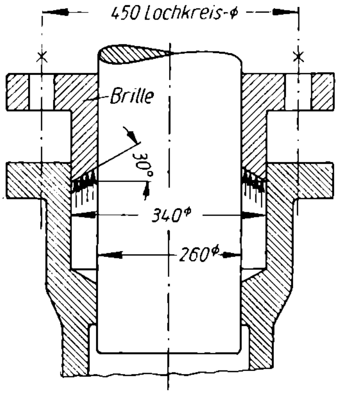


Bild 196

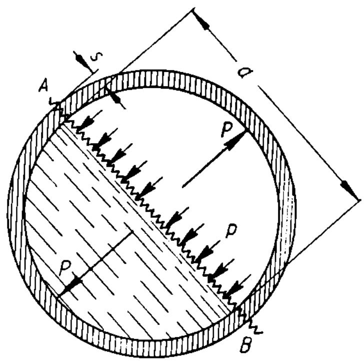


Bild 197

9. Eine **Hohlkugel** vom Innendurchmesser d und der Wanddicke s (Bild 197) ist einem inneren hydrostatischen Druck p Überdruck ausgesetzt. Welche Zugspannung hat die Wand aufzunehmen?

Lösung: Der innere Druck sucht die Hohlkugel in einer Durchmesserebene, z. B. AB, zu zerreißen. Die Projektion der inneren Halbkugelwand ist eine Kreisfläche $\frac{\pi d^2}{4}$, also die zerreißende Kraft $P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot p$. Die auf Zug beanspruchte Schnittfläche der Wand hat den Umfang $\pi \cdot d_m \approx \pi \cdot d$, die Breite s; also Zerreißfläche $F = \pi d s$. Unter der Annahme, daß die Zugspannung σ_z sich gleichmäßig über die Wanddicke s verteilt, gilt: $P = \sigma_z \cdot F$. Eingesetzt: $\frac{\pi d^2}{4} \cdot p = \sigma_z \cdot \pi d s$.

Daraus

$$\sigma_z = \frac{p\,d}{4\,s}\,.$$

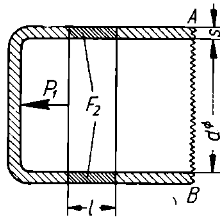


Bild 198

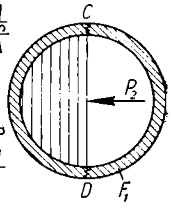


Bild 199

10. Welche Zugspannungen treten in den Wandungen eines zylindrischen **Rohres** bei p [at] innerem Flüssigkeitsüberdruck auf **1.** in einem Querschnitt, **2.** in einem Längsschnitt?

Lösung: 1. Querschnitt AB (Bild 198). In Längsrichtung des Rohres wirkt die Zugkraft $P_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot p$. Die ringförmige Querschnittsfläche der Rohrwand ist abgewickelt, $F_1 \approx \pi d s$; $P_1 = \sigma_1 F_1$.

Eingesetzt:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot p = \sigma_1 \pi d s\,.$$

Daraus

$$\sigma_1 = \frac{\boldsymbol{p\,d}}{\boldsymbol{4\,s}}\,.$$

2. Längsschnitt CD (Bild 199). Die Projektion der gewölbten Halbzylinderfläche für eine angenommene Rohrlänge l ist ein Rechteck dl, die zerreißende Kraft $P_2 = dlp$. Die belastete Rohrwand im Längsschnitt besteht aus zwei Rechteckstreifen $F_2 = 2ls$. $P_2 = \sigma_2 F_2$. Eingesetzt: $dlp = \sigma_2 \cdot 2ls$.

$$\sigma_2 = \frac{\boldsymbol{p\,d}}{\boldsymbol{2\,s}}\,.$$

Die Zugspannung σ_2 im Längsschnitt ist doppelt so groß wie die Zugspannung σ_1 im Querschnitt. Folglich ist der Längsschnitt als der gefährdetere für die Berechnung maßgebend.

11. Ein **Dampfleitungsrohr** aus Flußstahl hat 400 mm lichten Durchmesser, 9 mm Wanddicke, 16 Flanschschrauben von $1^1/_8''$. Welche Zugspannung tritt bei 12 at Dampfüberdruck auf **a)** in einem Querschnitt der Rohrwand, **b)** in einem Längsschnitt, **c)** in den Schrauben?

12. Wieviel at inneren Wasserdruck verträgt ein **Normalrohr** aus Grauguß von 600 mm lichtem Durchmesser und 17 mm Wanddicke, ohne daß die Spannung in der Wand den Wert 150 kp/cm² überschreitet?

13. Die Wanddicke eines **Dampfzylinders** von 750 mm Bohrung soll berechnet werden für 9 at Dampfüberdruck und eine zulässige Zugspannung 100 kp/cm².

14. Das **Zuflußrohr** einer **Wasserturbine** ist nach Bild 200 aus einem zusammengerollten Blechmantel von 1500 mm innerem Durchmesser und 16 mm Wanddicke gebildet. In der Längsfuge sind die Blechenden überlappt und nach Bild 201 durch eine Reihe Niete verbunden. Der Nietdurchmesser beträgt 26, die Teilung 54 mm. Welche Zugspannung erhält bei 9 at Wasserdruck der Blechmantel **a)** in einem vollen Längsschnitt, **b)** in dem durch die Nietlöcher geschwächten Längsschnitt, d. h. in der Nietnaht?

Lösung: a) Nach Aufgabe 10.2 ist

$$\sigma_z = \frac{p\,d}{2\,s} = 422\ \mathrm{kp/cm^2}.$$

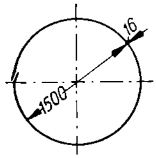


Bild 200

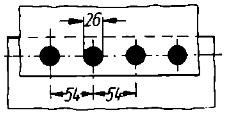


Bild 201

b) Auf eine Teilung 54 mm entfällt ein Nietloch 26 mm Durchmesser. Also verhält sich die tragende Wandfläche in der Nietnaht zu der des vollen Bleches wie (54 mm — 26 mm) : 54 mm = 28 : 54 = 0,52. Die tragende Fläche ist auf das 0,52fache verringert, also die Spannung in demselben Maße erhöht. $\sigma = 422\ \mathrm{kp/cm^2} : 0{,}52 = 812\ \mathrm{kp/cm^2}$.

15. Für einen **Dampfkessel** von 1900 mm Innendurchmesser und 7 at Dampfspannung soll a) die erforderliche Blechdicke berechnet werden für eine zulässige Zugspannung 800 kp/cm². Die tragende Fläche der Blechwand wird durch die Nietlöcher auf das 0,56fache des vollen Wertes verringert (Bild 200 wie bei voriger Aufg.). b) Wie groß ist die Gesamtkraft, die den 6,8 m langen Kessel im Längsschnitt auseinanderzureißen sucht?

HYDROSTATISCHER DRUCK MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER SCHWERKRÄFTE

Druck innerhalb einer Flüssigkeit infolge der Schwerkräfte

16. Welcher **hydrostatische Druck** herrscht in einer Flüssigkeit in der Tiefe h unter der Oberfläche?

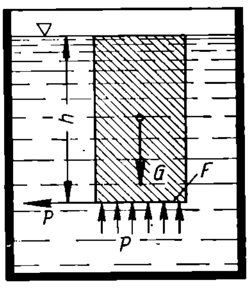


Bild 202

Bemerkung: Die Wichte (früher das spezifische Gewicht) γ ist die Kraft, mit der die Volumeneinheit eines Körpers auf ihre Unterlage drückt, sie wird in N/m³ oder in kp/m³ angegeben

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{m\,g}{V}.$$

γ ist abhängig von g, d. h. abhängig vom Ort.
Die Dichte ϱ ist die Masse der Volumeneinheit

$$\varrho = \frac{m}{V}.$$

ϱ ist unabhängig von g; d. h. unabhängig vom Ort. Die Dichte eines Körpers ist auf dem Monde ebenso groß wie auf der Erde, seine Wichte dagegen ist auf dem Monde etwa 6mal kleiner als auf der Erde.
Zwischen Dichte und Wichte besteht die Beziehung

$$\gamma = \varrho\,g.$$

In den mittleren Breiten der Erde sind Wichte in kp/m³ und Dichte in kg/m³ zahlenmäßig gleich groß.

Lösung: Auf einer Fläche F in der Tiefe h lastet eine Flüssigkeitssäule vom Gewicht $G = V\gamma = Fh\gamma$. Der entstehende hydrostatische Druck ist demnach

$$p = \frac{G}{F} = \frac{Fh\gamma}{F} = \gamma h = \varrho g h .$$

p wächst proportional der Tiefe h und ist abhängig von g, d. h. abhängig vom Ort.

17. Welcher hydrostatische Druck herrscht **a)** in 10 m Tiefe unter Wasser, **b)** in 800 m Meerestiefe?

Lösung: a) $p = \gamma h = 1000\,\text{kp/m}^3 \cdot 10\,\text{m}$
$= 10000\,\text{kp/m}^2 = \mathbf{1\,kp/cm^2 = 1\,at}$
$=$ **1 technische Atmosphäre.**

10 m Wassersäule (WS) entsprechen 1 at Druckzunahme.

b) 80 at .

18. Wie hoch muß eine **Quecksilbersäule** von der Wichte $\gamma = 13{,}596\,\text{kp/dm}^3$ sein, um einen Druck von einer technischen Atmosphäre zu erzeugen?

Lösung: $p = \gamma h = \left(\frac{13{,}596}{1000}\right)\text{kp/cm}^3 \cdot h = 1\,\text{kp/cm}^2$

$h = 73{,}6\,\text{cm}$

736 Torr $\hat{=}$ 10 m WS = 1 kp/cm² = 1 at = 10000 kp/m².

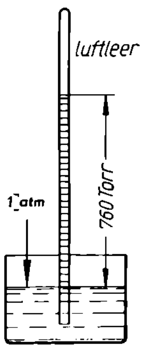


Bild 203

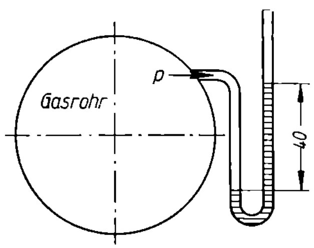


Bild 204

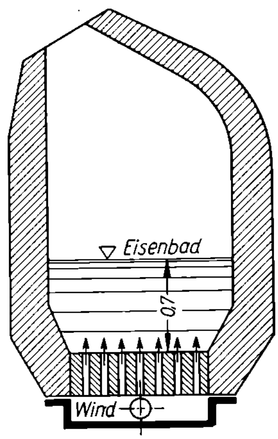


Bild 205

19. Was versteht man unter einer **physikalischen Atmosphäre?**

Lösung: Eine physikalische Atmosphäre (atm) bedeutet den Druck der atmosphärischen Luft am Meeresspiegel, der einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe in dem luftleeren Rohre des Barometers das Gleichgewicht hält (Bild 203). Der Druck dieser Quecksilbersäule ist

$$p = \gamma h = \left(\frac{13{,}596}{1000}\right)\text{kp/cm}^3 \cdot 76\,\text{cm} = 1{,}033\,\text{kp/cm}^2 = 1{,}033\,\text{at} = 10330\,\text{kp/m}^2 ,$$

entsprechend einer Wassersäule (WS) von 10,33 m Höhe.

$$\begin{aligned} \mathbf{760\ Torr} &= \mathbf{10{,}33\ m\ WS} \\ &= \mathbf{10330\ kp/m^2 = 1\ atm.} \end{aligned}$$

Der Druck von $^1/760$ atm wird mit 1 Torr bezeichnet.

20. a) In einer **Leuchtgasleitung** herrscht ein Überdruck von 40 mm WS über den äußeren Luftdruck (Bild 204). Wie groß ist der Überdruck in **at**? **b)** Dasselbe für eine Windleitung eines Schmiedefeuers, die unter einem Überdruck von 200 mm WS steht.

Lösung: a) Der Überdruck beträgt 40 mm WS $= \frac{40}{10000}$ at $= \frac{1}{250}$ at.

b) $\frac{1}{50}$ at.

21. Bei einer **Bessemer-Birne** wird der Wind durch die im Boden der Birne befindlichen Düsenlöcher von unten nach oben in das flüssige Eisen geblasen (Bild 205). Wie groß muß der Winddruck mindestens sein, damit das Eisen nicht in die Löcher eindringt, bei 0,7 m Höhe des Eisenbades und einer Dichte 7,85 kg/dm³?

22. Ein **Stauschütz** ist nach Bild 206 aus waagerechten Holzbohlen von 1,6 m Stützweite gebildet. Wie dick müssen bei 0,9 m Wasserstauhöhe die Bohlen bemessen werden, damit die Biegespannung 70 kp/cm² nicht überschritten wird?

Lösung: Wasserdruck an der tiefsten Stelle 0,09 at. Ein Bohlenstreifen von 1 cm Höhe trägt die gleichmäßig verteilte Gesamtlast

$$P = 0{,}09\ \text{kp/cm}^2 \cdot (160 \cdot 1)\ \text{cm}^2 = 14{,}4\ \text{kp}.$$

Größtes Biegemoment in der Mitte

$$M_b = \frac{P \cdot l}{8} = 14{,}4\,\text{kp} \cdot \frac{160}{8}\,\text{cm} = 288\,\text{kpcm}$$

$$M_b = W \cdot \sigma_b\,, \quad W = \frac{1\,\text{cm} \cdot s^2}{6} = \frac{M_b}{\sigma_b}\,, \quad s = 5\,\text{cm}\,.$$

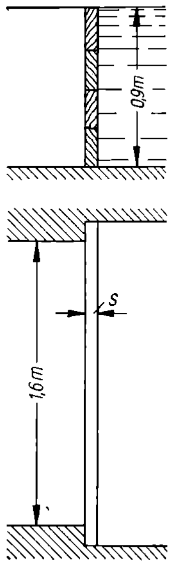


Bild 206

23. Ein zylindrischer **Kolben** von 600 mm Durchmesser und 70 mm Kernbohrung ist nach Bild 207 eingeformt. **a)** Welchen hydrostatischen Druck hat der flüssige Grauguß von der Wichte 7,2 kp/dm³ an der oberen Kolbenebene, d. h. an der unteren Fläche des aufgesetzten Formkastens, wenn es im Eingußund Steigtrichter 200 mm hoch über dieser Ebene steht? **b)** Wie groß muß die Belastung des Formkastens durch Eigengewicht und aufgelegte Gewichte mindestens sein, damit er nicht durch das flüssige Eisen angehoben wird?

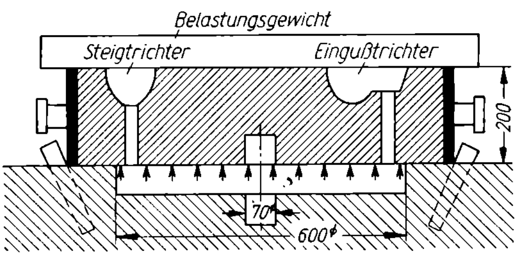


Bild 207

Lösung: a) $p = \gamma h = \left(\frac{7{,}2}{1000}\right) \mathrm{kp/cm^3} \cdot 20\,\mathrm{cm} = 0{,}144\,\mathrm{at}$.

b) $pF = 0{,}144\,\mathrm{at} \left(\frac{\pi\, 60^2}{4} - \frac{\pi\, 7^2}{4}\right) \mathrm{cm}^2 = 402\,\mathrm{kp}$.

24. Eine **Stufenscheibe** von den gegebenen Abmessungen ist zum Guß nach Bild 208 eingeformt. Mit welcher Kraft sucht der flüssige Grauguß von der Wichte 7,2 kp/dm³ den Formkasten anzuheben?

25. In einem 300 mm hohen **Formkasten** ist eine vollzylindrische Walze von 260 mm Durchmesser und 500 mm Länge nach Bild 209 eingeformt. Wie schwer muß die

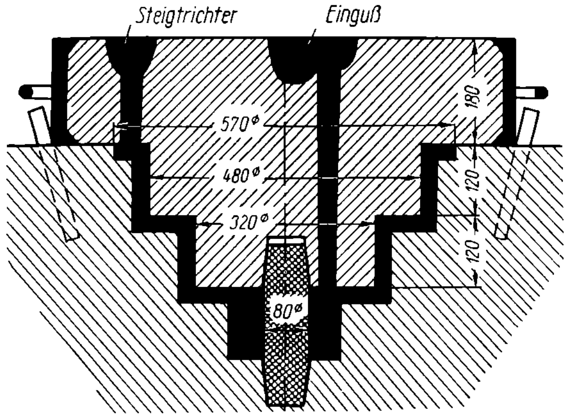


Bild 208

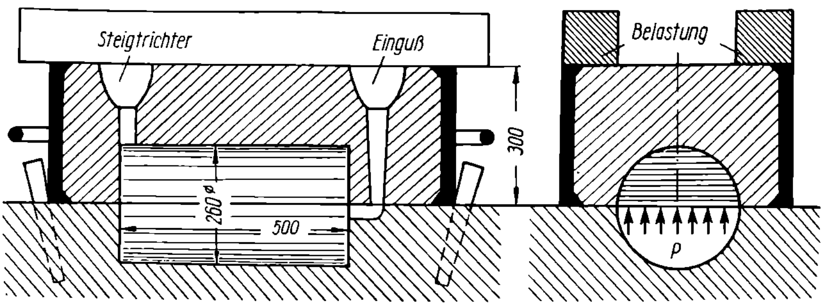


Bild 209

Belastung des Kastens einschließlich Eigengewichts mindestens sein, damit er beim Gießen durch die Kraft des flüssigen Eisens von der Wichte 7,2 kp/dm³ nicht angehoben wird?

26. I. Ein **zylindrisches Gefäß,** mit Wasser gefüllt, kreist um seine senkrechte Drehachse O mit gleichförmiger **Winkelgeschwindigkeit** ω (Zentrifuge Bild 210). Welche Form nimmt die Wasseroberfläche an?

Lösung: Das Wasser, durch die Fliehkraft nach außen getrieben, steigt an der Gefäßwand in die Höhe, während es in der Mitte sinkt. Die Oberfläche des Wasserspiegels ist stets so gerichtet, daß die resultierende Kraft (Mittelkraft) aus Zentrifugalkraft P_z und Gewicht des Wasserteilchens mg senkrecht zur Oberfläche steht (s. Bild 210, Punkt P).

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{my\omega^2} = \frac{g}{y\omega^2}$$

Oder $y \cdot \mathrm{d}y = \frac{g}{\omega^2} \cdot \mathrm{d}x$

$$y^2 = 2\frac{g}{\omega^2} \cdot x.$$

Das ist die Gleichung für den Verlauf der Oberfläche, wobei x und y die Koordinaten des Kurvenpunktes P sind. Die Gleichung hat die Form $y^2 = 2px$, stellt also eine Parabel dar, deren Scheitel in A liegt und deren Parameter $p = \frac{g}{\omega^2}$ ist (nicht zu verwechseln mit hydrostatischem Druck p!). Die Oberfläche des Wassers bildet demnach ein Paraboloid.

An der Gefäßwand erreicht das Wasser die größte Höhe $x = h$ für $y = r$. Eingesetzt: $r^2 = 2\frac{g}{\omega^2} \cdot h$; $\quad h = \frac{r^2\omega^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$,

wobei v die Umfangsgeschwindigkeit an der Gefäßwand bedeutet.

In einer Tiefe x senkrecht unter dem Punkt P ist der hydrostatische Druck $p = x\gamma$ (s. Aufg. 16). Die Zentrifugalkraft einer Wassersäule vom Querschnitt f, der Länge y und dem Schwerpunktabstand $\frac{y}{2}$ ist in dieser Höhe

$$P_z' = m \cdot \frac{y}{2} \cdot \omega^2 = fy\varrho \cdot \frac{y}{2} \cdot \omega^2.$$

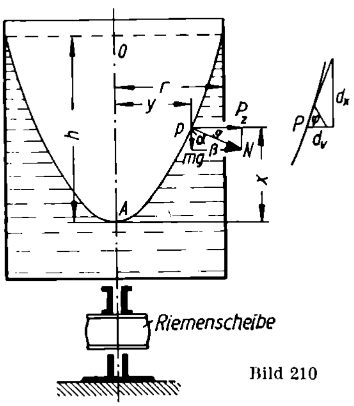


Bild 210

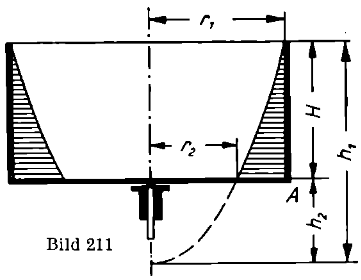


Bild 211

Diese Zentrifugalkraft P_z' muß durch die Druckkraft $pf = x\varrho g f$ im Gleichgewicht gehalten werden.

Daraus $\quad fy\varrho\frac{y}{2}\omega^2 = xf\varrho g$

$$y^2 = 2\frac{g}{\omega^2} \cdot x \text{ wie vorher}; \quad \frac{y^2}{r^2} = \frac{x}{h}.$$

26. II. Wie stellt sich das Wasser in einem rotierenden Gefäß (Bild 211) ein, dessen Durchmesser $d = 0{,}4$ m, dessen Höhe $H = 0{,}2$ m und dessen Drehzahl $n = 120$ U/min ist? **a)** r_2, **b)** statischer Druck am Punkte A?

Anleitung: $h_1 = \dfrac{v_1^2}{2g}$, $h_2 = \dfrac{v_2^2}{2g}$.

Absoluter Druck

27. a) Was versteht man unter **absolutem Druck**? **b)** Wie groß ist der absolute Druck in 4 m Tiefe unter dem Wasserspiegel eines offenen Behälters (Bild 212), wenn der äußere Luftdruck am Barometer zu 760 Torr abgelesen wird, **c)** wenn der äußere Luftdruck 720 Torr beträgt?

Lösung: a) Der a b s o l u t e Druck ist der Druck, bezogen auf den luftleeren Raum, im Gegensatz zum Ü b e r d r u c k über die äußere Atmosphäre.

b) In 4 m Tiefe unter Wasser herrscht ein Überdruck $p = 0{,}4$ at $= 0{,}4$ kp/cm² $= 4000$ kp/m² (Aufg. 17). Der äußere Luftdruck kann dargestellt werden durch eine auf der Wasseroberfläche lastende Quecksilbersäule von 760 mm Höhe oder einer Wassersäule von $h_0 = 10{,}33$ m Höhe, entsprechend 10330 kp/m² (Aufg. 19). Folglich ist der absolute Druck in 4 m Wassertiefe

$$p = 10330\,\text{kp/m}^2 + 4000\,\text{kp/m}^2 = 14330\,\text{kp/m}^2$$
$$= \mathbf{1{,}433\ at}\,.$$

$$\text{c)}\ 720\,\text{Torr} = \frac{720}{760} \cdot 10330\,\text{kp/m}^2$$
$$= \frac{720}{736} \cdot 10000\,\text{kp/m}^2 = 9780\,\text{kp/m}^2\ \text{(Aufg. 18)}\,.$$
$$p = 9790\,\text{kp/m}^2 + 4000\,\text{kp/m}^2 = 13780\,\text{kp/m}^2 = 1{,}378\,\text{at}\,.$$

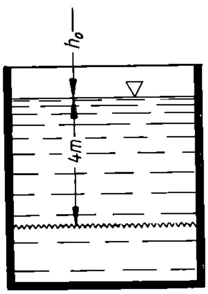


Bild 212

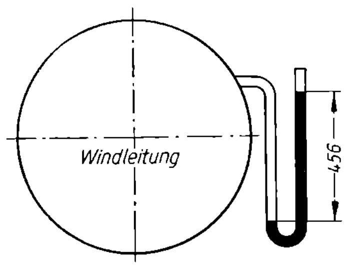


Bild 213

28. An einer **Hochofenwindleitung** wird am Hebermanometer ein Überdruck von 456 Torr gemessen (Bild 213). Wie groß ist **a)** der Überdruck in technischen Atmosphären (Aufg. 18), **b)** in kp/m², **c)** der absolute Winddruck, wenn der Barometerstand der äußeren Luft 775 Torr beträgt?

29. Ein am **Saugwindkessel** der skizzierten P u m p e (Bild 214) angebrachtes Hebermanometer mit offenem Außenschenkel zeigt 530 mm Höhenunterschied der Quecksilbersäulen in beiden Schenkeln. Der äußere Luftdruck, an einem Barometer gemessen, beträgt 754 Torr. **a)** Welcher absolute Druck herrscht im Windkessel? **b)** Welche Kolbenkraft ist bei 250 mm Kolbendurchmesser zum Saughub erforderlich, wenn die Mittelebene des Kolbens 0,7 m über dem Wasserspiegel des Saugwindkessels liegt und die Verluste vernachlässigt werden?

Lösung: a) Wenn im Saugwindkessel vollkommene Luftleere herrschte, würde der äußere Luftdruck das Quecksilber im Hebermanometer 754 mm hochdrücken. Da es aber nur 530 mm hochsteigt, so wirkt aus dem Saugwindkessel ein absoluter Druck 754 Torr — 530 Torr = 224 Torr entgegen. 736 Torr = 10000 kp/m² (Aufg. 18); also ist der absolute Druck im Windkessel

$$p = \frac{224\ \text{Torr}}{736\ \text{Torr}} \cdot 10000\ \text{kp/m}^2 = 3040\ \text{kp/m}^2 = 0{,}304\ \text{at}.$$

b) Der absolute Druck in Mitte Kolben ist gleich dem Druck im Windkessel, verringert um den Gegendruck der 0,7 m hohen Wassersäule, also gleich 3040 kp/m² — 700 kp/m² = 2340 kp/m². Der Kolben ist an seiner äußeren Stirnfläche rechts durch den Luftdruck belastet mit $\frac{754\ \text{Torr}}{736\ \text{Torr}} \cdot 10000\ \text{kp/m}^2 = 10240\ \text{kp/m}^2$. Folglich erforderliche Kolbenkraft

$$P = \left(\frac{\pi\, 0{,}25^2}{4}\right) \text{m}^2 \cdot (10240 - 2340)\ \text{kp/m}^2 = 388\ \text{kp}.$$

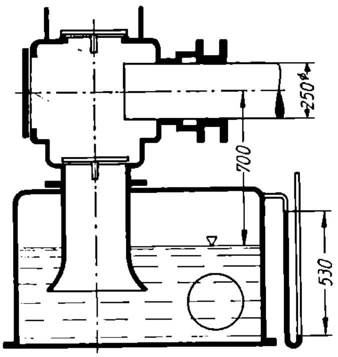


Bild 214

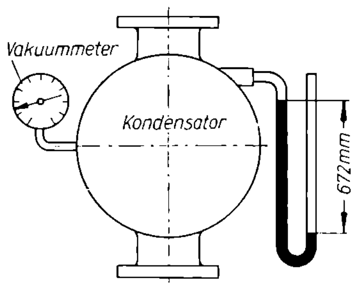


Bild 215

30. Die **Gebläsemaschine** eines Hochofens hat 1800 mm Zylinderdurchmesser. Der Kolben verdichtet auf einer Seite den Wind auf 1,3 at Überdruck über den äußeren Atmosphärendruck, während er gleichzeitig auf der anderen Seite Luft aus der äußeren Atmosphäre ansaugt. Das Saugen geschieht mit 480 mm WS Unterdruck unter dem äußeren Atmosphärendruck. Letzterer beträgt 743 Torr. Zu berechnen ist **a)** der absolute Druck auf der Druckseite des Kolbens und **b)** auf der Saugseite des Kolbens, **c)** die erforderliche Kolbenkraft unter Vernachlässigung des Kolbenstangenquerschnitts.

31. In einem Dampfmaschinen-**Kondensator** herrscht ein Vakuum solcher Größe, daß die Quecksilbersäule des Hebermanometers 672 mm hoch angesaugt wird (Bild 215). Der äußere Barometerstand beträgt 757 Torr. **a)** Welchen absoluten Druck zeigt das Vakuummeter, dessen Skale die Aufschrift „p_{absolut} in Torr“ trägt? **b)** Wie groß ist der absolute Druck in kp/m² und in at?

Druckmittelpunkt

32. a) Wie groß ist die **Mittelkraft** R des Wasserdrucks auf eine geneigte, ebene Seitenwand (Bilder 216 und 217)? **b)** Was versteht man unter **Druckmittelpunkt?** **c)** In welcher Tiefe liegt der Druckmittelpunkt?

Lösung: a) Die schräge Wandfläche F sei in waagerechte Flächenstreifen f zerlegt. Der Abstand eines Streifens von der „Wasserlinie" ∇, d. h. der Schnittlinie des Wasserspiegels mit der Seitenwand, sei y. Auf einen Flächenstreifen in der senkrechten Tiefe $y \cos \alpha$ unter Wasser wirkt der hydrostatische Druck $\gamma y \cos \alpha$, also die Kraft $\gamma y \cos \alpha \cdot f$. Die gesamte auf die Wand wirkende Kraft ist demnach $R =$ Summe aller $\gamma y \cos \alpha \cdot f = \gamma \cos \alpha$ mal Summe aller $(f y)$. Der Klammerausdruck ist das statische Moment der Wandfläche F in bezug auf die Wasserlinie, also $F y_0$, wobei y_0 den Abstand des Schwerpunktes S von der Wasserlinie bezeichnet. Eingesetzt:

$$R = \gamma \cos \alpha \cdot F y_0 = \gamma\,(y_0 \cos \alpha) \cdot F; \quad \boldsymbol{R = \gamma h_0 F},$$

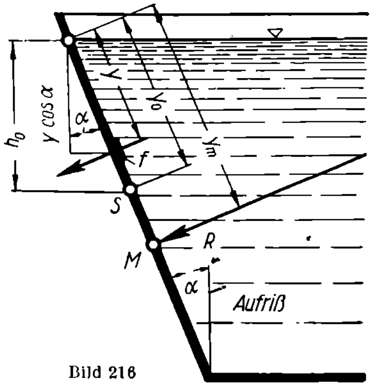


Bild 216

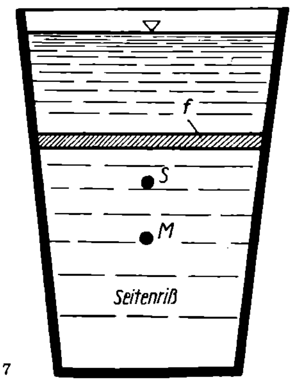


Bild 217

wobei h_0 die senkrechte Tiefe des Schwerpunktes unter Wasser bedeutet. γh_0 ist der hydrostatische Druck am Schwerpunkte. R ist gerade so groß, als wenn der am Schwerpunkte der Fläche herrschende hydrostatische Druck γh_0 über die ganze Fläche F, gleichmäßig verteilt, wirkte.

b) Der Druckmittelpunkt M ist der Angriffspunkt der Mittelkraft R der Wasserdruckkraft. Man beachte, daß das Wort Druckmittelpunkt sprachlich unrichtig ist, weil in diesem Punkte kein Druck, sondern eine Kraft angreift.

c) Wäre der Wasserdruck gleichmäßig über die Fläche F verteilt, so würde seine Mittelkraft durch ihren Schwerpunkt gehen. Weil nun aber der hydrostatische Druck mit der Tiefe zunimmt, liegt der Druckmittelpunkt M stets unter dem Schwerpunkt S der gedrückten Fläche.

Die Druckkraft eines Flächenstreifens $\gamma\,(y \cos \alpha) \cdot f$ hat in bezug auf die Wasserlinie das statische Moment $\gamma y \cos \alpha \cdot f y$. Also heißt die Gleichung der statischen Momente für die Achse:

$$R \cdot y_m = \sum (\gamma\, y \cos \alpha \cdot f\, y) = \gamma \cdot \cos \alpha \sum (f\, y^2)\,.$$

Der letzte Klammerausdruck bezeichnet das Trägheitsmoment der Fläche für die Wasserlinie als Achse, nämlich Summe aller $f y^2 = J_x$. Setzt man für R den oben gefundenen Wert $\gamma\,(y_0 \cos \alpha)\, F$ ein, so wird

$$(\gamma\, y_0 \cos \alpha\, f) \cdot y_m = \gamma \cos \alpha \cdot J_x$$

$$y_m = \frac{J_x}{F y_0} = \frac{\textbf{Trägheitsmoment für die Wasserlinie}}{\textbf{Statisches Moment für die Wasserlinie}}.$$

33. a) Wie groß ist die **Gesamtkraft des waagerechten Wasserdrucks** gegen eine senkrechte r e c h t e c k i g e W a n d? **b)** In welcher Tiefe unter dem Wasserspiegel liegt der Druckmittelpunkt?

Lösung: a) Der hydrostatische Druck am Schwerpunkt S (Bild 218) ist

$$\gamma\, y_0 = \left(\gamma \frac{h}{2}\right)$$

$$R = \left(\gamma \frac{h}{2}\right) \cdot F = \gamma \frac{h}{2} \cdot bh\,.$$

b) $$y_m = \frac{J_x}{F y_0}\,.$$

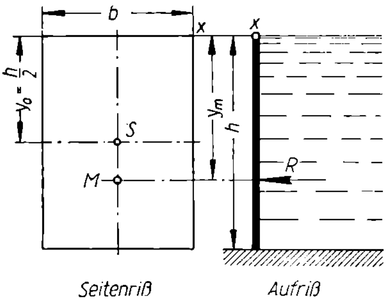


Bild 218

Nach dem Verschiebungssatze ist

$$J_x = J_s + F a^2 = \frac{b h^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$
$$= \frac{b h^3}{3}\,;$$

$$y_m = \frac{b h^3}{3} : \left(b h \frac{h}{2}\right) = \frac{2}{3} h\,.$$

Der Druckmittelpunkt der Rechteckfläche liegt demnach im unteren Drittel der Fläche.

34. Das rechteckige **Stauschütz** einer Wasserkraftanlage hat 3,2 m Breite und soll auf 1,8 m Höhe stauen. **a)** Wie groß ist die Gesamtkraft des waagerechten Wasserdruckes? **b)** Welche senkrechte Kraft muß zum Aufziehen des Schützes wirken, wenn sein Eigengewicht 700 kp und die Reibungszahl für die seitlichen senkrechten Führungsrollen 0,3 beträgt?

35. Das Doellsche **Klappenwehr** (Bild 219) ist um die waagerechte Achse O drehbar und soll sich selbsttätig öffnen, sobald die Stauhöhe über 0,7 m steigt. Das abgesperrte Kanalgerinne hat Rechteckquerschnitt von 0,9 m Breite. Wie schwer muß das Belastungsgewicht G gemacht werden?

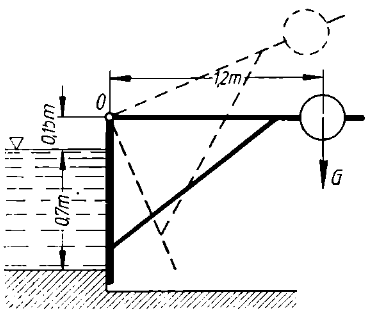


Bild 219

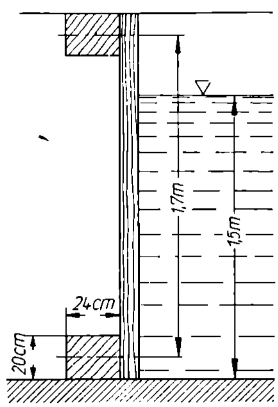


Bild 220

36. Ein 2 m breites **Wassergerinne** (Bild 220) ist durch eine Spundwand aus senkrecht stehenden Bohlen abgesperrt, die sich oben und unten gegen waagerechte **Querbalken** nach Figur anlegen. **a)** Wie groß ist der gesamte Wasserdruck auf die Bohlenwand bei 1,5 m Wassertiefe? **b)** Welche waagerechte Belastung hat der obere und der untere Querbalken aufzunehmen, wenn ihr Mittelabstand 1,7 m beträgt? **c)** Welche größte Biegespannung tritt in dem unteren Balken auf, wenn er an beiden Enden frei aufliegt und sein Querschnitt ein liegendes Rechteck 20 cm · 24 cm ist?

37. Das Tor einer 8 m breiten **Schleusenkammer** nach Bild 221 staut das Wasser einseitig 2,4 m hoch an. **a)** Welche Kraft R übt der Wasserdruck auf jeden der beiden Torflügel aus? **b)** Mit welcher Kraft P_1 drücken sich die beiden Torflügel in der Mitte dichtend gegeneinander, und welche Kraft P_2 haben die Drehsäulen aufzunehmen?

Lösung: a) Länge eines Torflügels $AB = 441$ cm.

$$R = 12700 \text{ kp}.$$

b) P_1, winkelrecht zu den Anschlagflächen beider Torflügel gerichtet, schneidet die Richtung R in C. Durch diesen Punkt muß auch die Kraft P_2 der Drehsäule A hindurchgehen, damit Gleichgewicht zwischen den drei Kräften besteht. Aus einem Kräfteparallelogramm (Bild 221) findet man $P_1 = P_2 = 15000$ kp.

38. Eine **Staumauer** von 1,8 m Höhe und 1,2 m Dicke (Bild 222) ist aus Bruchsteinmauerwerk von der Dichte 2400 kg/m³ hergestellt. Es soll berechnet werden **a)** das Gewicht der Mauer bis zur Sohle AB für 1 m Länge; **b)** der waagerechte Wasserdruck für 1 m Mauerlänge; **c)** die durch

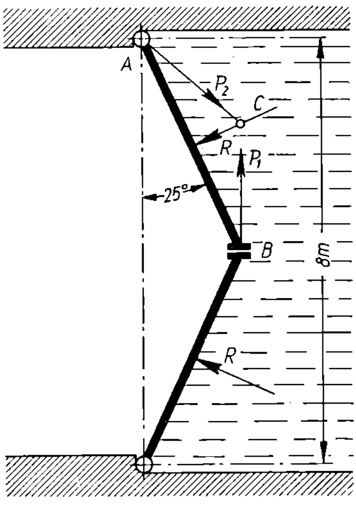


Bild 221

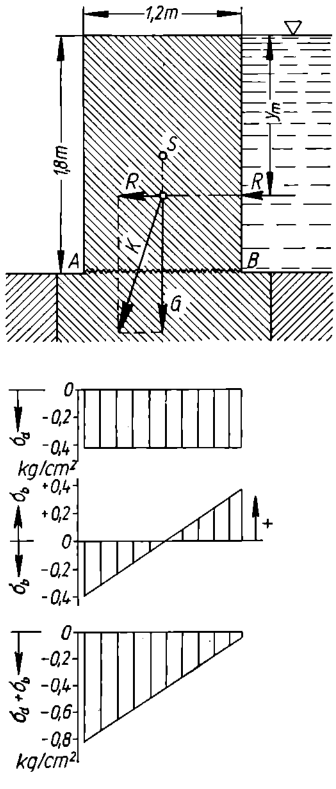


Bild 222

das Mauergewicht an der Sohlenfläche AB erzeugte gleichmäßig verteilte Druckspannung; d) die durch den Wasserdruck an der Sohlfläche erzeugte Biegespannung; e) die Diagramme für die Verteilung der Spannungen an der Sohlfläche.

Lösung a) 5184 kp.

b) $R = 1620$ kp $= 15892$ N.

c) $\sigma_d = 5184$ kp : $(120 \cdot 100)$ cm² $= 0{,}432$ kp/cm².

d) Biegemoment $M_b = 1620$ kp $\cdot$ 60 cm $= 97200$ kpcm $=$

$$= \sigma_b W = \sigma_b \frac{100 \cdot 120^2}{6} \text{ cm}^3;$$

$$\sigma_b = 0{,}405 \text{ kp/cm}^2.$$

e) Diagramme der Spannungen siehe Figur!
Größte Spannung bei A 0,432 kp/cm² + 0,405 kp/cm² = 0,837 kp/cm²,
kleinste Spannung bei B 0,432 kp/cm² — 0,405 kp/cm² = 0,027 kp/cm².
Beide Spannungen treten an der Sohle als Druck auf.

39. Die **Staumauer** nach Bild 223 von trapezförmigem Querschnitt soll das Wasser auf 3,3 m Höhe anstauen. Zu berechnen ist a) das Gewicht der Mauer bis zur Sohle AB für 1 m Länge und der Wichte 2300 kp/m³ für Beton; b) die Gesamtkraft R des waagerechten Wasserdruckes für 1 m Mauerlänge; c) die Tiefe y_m, in der der Druckmittelpunkt unter dem Wasserspiegel liegt; d) die Mittelkraft K aus Mauergewicht und Wasserdruck, welche von der Sohlfläche AB aufzunehmen ist; e) das Lagenmaß x_0 des Schwerpunktes der Trapezfläche; f) das Maß BC für die Lage des Punktes C, in dem die Mittelkraft K die Sohle durchschneidet.

40. An einem **Wasserbehälter** ist ein **Ausschnitt** von 500 mm Durchmesser nach Bild 224 durch einen Deckel mit Druckschraube verschlossen. Die Befestigungsschrauben A und B des Verschlußbügels liegen symmetrisch in je 350 mm Abstand

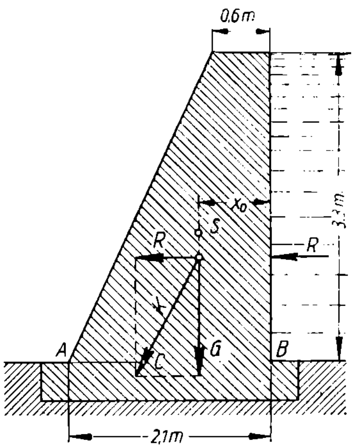


Bild 223

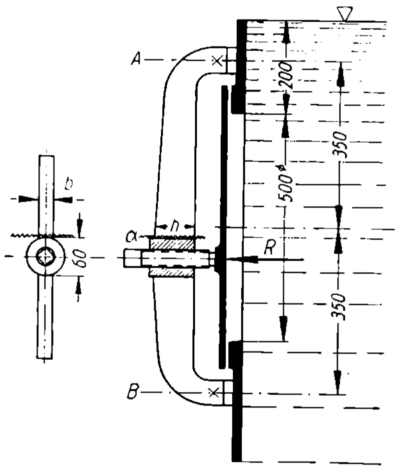


Bild 224

von der Achse des kreisförmigen Ausschnitts, während die Druckschraube im Druckmittelpunkt des Deckels angeordnet werden soll. **a)** In welcher Tiefe unter dem Wasserspiegel liegt der Druckmittelpunkt des Deckels? **b)** Mit welcher Kraft muß die Druckschraube den Deckel andrücken, wenn zur Dichtung des Deckels ein zusätzlicher Druck von gleicher Größe wie der Wasserdruck erforderlich ist? **c)** Welche Kräfte haben die Befestigungsschrauben A und B aufzunehmen? **d)** Welche Rechteckmaße b und h muß der gefährdete Querschnitt a des Bügelarms erhalten, wenn das Seitenverhältnis $b : h = 1 : 4$ und die zulässige Biegespannung 400 kp/cm² betragen soll?

41. I. Der **Wasserdruck** auf eine beliebig gekrümmte Fläche setzt sich aus der horizontalen Druckkraft wie bisher und der vertikalen Druckkraft zusammen (Bild 225). Letztere entspricht dem Gewicht der senkrecht über der gekrümmten Fläche stehenden Wassermenge und greift im Schwerpunkt der Fläche an.

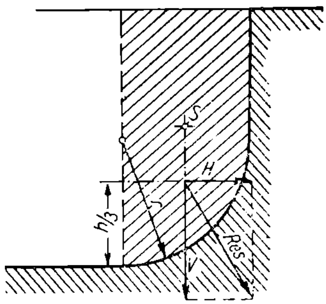


Bild 225

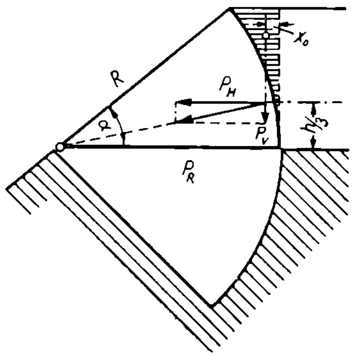


Bild 226

Die Resultierende einer kleinen gekrümmten Fläche, welche man als eben auffassen kann, wenn sie nur klein genug ist, steht senkrecht auf dem Flächenteilchen. Hat man also eine zylindrische Fläche, wie in Bild 226, so gehen die Kräfte aller Flächenteilchen, also auch die Gesamtresultierende, durch den Kreismittelpunkt. Bei beliebig gekrümmten Flächen ist dies nicht der Fall, sondern es entsteht ein Drehmoment der Wasserkräfte. Wenn z. B. in Aufg. 41. II anstelle der Kreisbogens eine gerade Fläche vorhanden wäre, würde das Drehmoment das Wehr herunterdrücken.

41. II. Bei einem Sektorenwehr wird der Schwerpunkt der schraffierten Fläche dadurch gefunden, daß man die Fläche in Pappe ausschneidet und an zwei Punkten aufhängt. Der Schnittpunkt der Lote durch die Aufhängepunkte ergibt den Schwerpunkt.

Gegeben $R = 4$ m, $\alpha = 40°$.

a) Wasserquerschnittsfläche (schraffiert), **b)** waagerechte Kraft P_H, **c)** senkrechte Kraft P_V für 1 m Breite, **d)** x_0, Resultierende graphisch.

Anleitung:

$$\text{a) } F = R \cdot R\sin\alpha + \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2} R\sin\alpha \cdot R\cos\alpha\,.$$

42. Eine **Staumauer** von 5,4 m Höhe hat den trapezförmigen Querschnitt nach Bild 227. Gesucht wird **a)** das Gewicht der aus Beton von der Wichte 2300 kp/m³ hergestellten Mauer bis zur Sohle AB für 1 m Länge; **b)** die Gesamtkraft des Wasserdrucks R für 1 m Mauerlänge; **c)** die Lage des Druckmittelpunktes M; **d)** die über die Sohlfläche AB gleichmäßig verteilte Druckspannung; **e)** die Biegespannung an der Sohle; **f)** die Spannungsdiagramme für die Sohlfläche.

Anleitung: zu

d) $\sigma_d = \dfrac{G + R \cdot \sin\alpha}{F}$;

e) $M_b = R \cdot \cos\alpha \cdot \overline{HO}$.

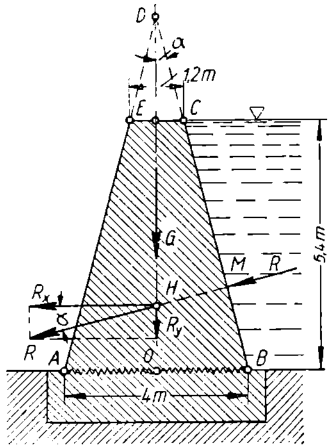


Bild 227

Auftrieb

43. a) Was versteht man unter „**Auftrieb**" eines eingetauchten Körpers (Bild 228)? **b)** Wie groß ist der Auftrieb? **c)** Wo liegt der Angriffspunkt des Auftriebs? **d)** Wie ändert sich der Auftrieb eines vollständig untergetauchten Körpers mit der Tiefe unter Wasser?

Lösung: a) Unter Auftrieb versteht man die Mittelkraft des Druckes, den eine Flüssigkeit auf einen eingetauchten Körper senkrecht nach oben ausübt.

b) Denkt man sich den eingetauchten Körper in senkrechte Prismen vom Querschnitt f zerlegt (s. Bild), so wirkt auf ein Prisma von unten eine Kraft = hydrostatischer Druck · Projektion der gedrückten Fläche = $\gamma H f$; von oben $\gamma h f$. Da die untere Kraft größer ist als die obere, so wird das Prisma nach oben getrieben mit der Kraft
$\gamma H f - \gamma h f = \gamma \cdot (H - h) \cdot f = \gamma l f = \gamma \cdot$ Volumen v des Prismas.
Folglich Gesamtauftrieb P_A = Summe aller $\gamma v = \gamma V$.
Es bedeutet γ die Wichte der Flüssigkeit, V das Volumen des eingetauchten Körpers.

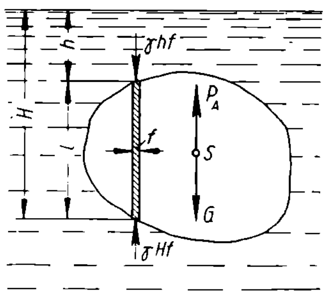


Bild 228

Auftrieb $P_A = V \cdot \gamma = V \varrho g = \dfrac{Vmg}{V} = mg$ = Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

c) Der Angriffspunkt des Auftriebs ist der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge, der sog. „Verdrängungsschwerpunkt".

d) Da die verdrängte Wassermenge eines vollständig untergetauchten Körpers von der Tiefe unter Wasser unabhängig ist, so bleibt auch der Auftrieb unverändert derselbe, z. B. bei einem untergetauchten Unterseeboot.

44. Ein **Prahm,** ein rechteckig prismatischer Kasten, ist durch eingebaute Dampfmaschine mit Propeller fortzubewegen, hat 44 m Länge und 8,5 m Breite und taucht unbeladen 1,9 m tief in das Wasser ein (Bild 229). **a)** Wie groß ist sein gesamtes Eigengewicht? **b)** Welchen „Tiefgang", d. h. welche Eintauchtiefe, erhält der Prahm, wenn er mit 210 Kubikmetern gebaggerten Sandes von der Wichte 1,6 kp/dm³ beladen ist?

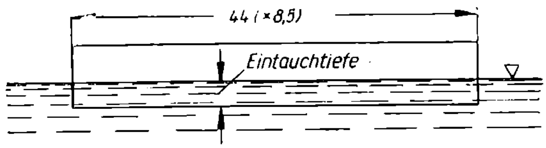


Bild 229

45. Wie groß ist die **Eintauchtiefe** x eines mit der Spitze nach unten schwimmenden Holzkegels von der Wichte $\gamma_1 = 0{,}8$ kp/dm³ (Bild 230)?

Lösung: Gewicht = Auftrieb, also

$$\frac{1}{3} r^2 \pi h \gamma_1 = \frac{1}{3} y^2 \pi x \gamma .$$

Nun verhält sich $y : x = r : h$;

$$y = \frac{r}{h} x \text{ eingesetzt, ergibt } x = 0{,}93\, h .$$

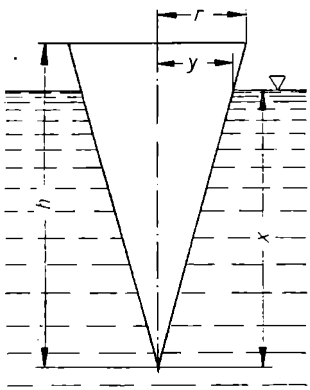


Bild 230

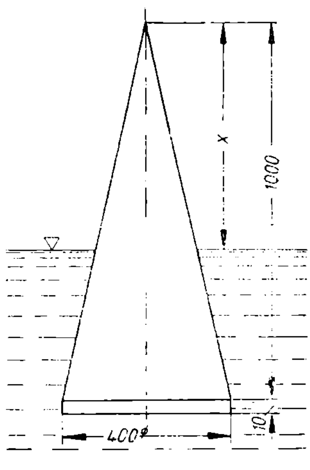


Bild 231

46. Ein **Kegel** von 400 mm Grundkreisdurchmesser und 1000 mm Höhe (Bild 231) aus Holz von der Dichte 0,6 kg/dm³ trägt an seiner Grundfläche eine zylindrische Blechscheibe von 10 mm Dicke aus Flußstahl von der Dichte 7,85 kg/dm³. Gesucht wird **a)** das Gesamtgewicht des Körpers; **b)** die Höhe x, um die der schwimmende Körper aus dem Wasser herausragt.

47. I. Wie kann man die Wichte γ_x eines festen Körpers durch Messung seines Auftriebes in Wasser bestimmen?

Lösung: Der Körper wird an einem dünnen Draht unter der Waagschale aufgehängt (Bild 232) und sein Gewicht in Luft durch Auflegen entsprechender Gewichte auf die andere Waagschale bestimmt, z. B. $G = 16{,}2$ p.

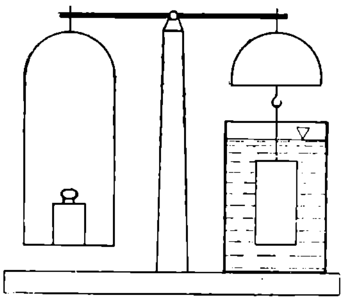


Bild 232

Danach wird ebenso sein Gewicht in Wasser (Bild 232) durch Wägung ermittelt, z. B. $G' = 10{,}2$ p. Da im letzten Falle der Auftrieb P_A des Wassers den Körper tragen hilft, so wird

$$G' = G - P_A\,,$$

also $$P_A = G - G' = 16{,}2\,\text{p} - 10{,}2\,\text{p} = 6\,\text{p} = V\gamma\,,$$

wobei γ = Wichte des Wassers = 1 p/cm³. Aus der letzten Gleichung ergibt sich das Volumen des Körpers $V = 6$ cm³.

Aus $G = V\gamma_x$ folgt dann:

$$\gamma_x = \frac{G}{V} = \frac{16{,}2\,\text{p}}{6\,\text{cm}^3} = 2{,}7\,\text{p/cm}^3 = 2{,}7\,\text{kp/dm}^3\,.$$

Damit das Wassergefäß, in das der Körper bei der Wägung eintauchen soll, unter der Waagschale Platz hat, ist diese niedriger als die andere Waagschale, aber gleich schwer ausgeführt: sog. hydrostatische Waage (Bild 232).

47. II. Ein **Trauring** wiegt in der Luft 8,5 p, im Wasser 7,966 p (Bild 232 der hydrostatischen Waage siehe vorige Aufgabe!). **a)** Wie groß ist sein Volumen, **b)** seine Wichte? **c)** Besteht der Ring aus reinem Golde, dessen Wichte 19,3 kp/dm³ beträgt?

48. Ein **Hahnkegel** aus Messing (Gelbguß) wiegt in der Luft 3,27 kp, im Wasser 2,87 kp. Die Bestandteile der Messinglegierung sind Kupfer von der Wichte $\gamma_1 = 8{,}93$ kp/dm³ und Zink vom Einheitsgewicht $\gamma_2 = 7{,}1$ kp/dm³. **a)** Wieviel kg Kupfer und wieviel kg Zink sind in dem Hahnkegel enthalten? **b)** Wieviel Prozente beider Metalle? **c)** Wie groß ist die Wichte der Messinglegierung?

49. I. Was versteht man bei einem Schiffe **a)** unter **Wasserverdrängung**, **b)** unter **Schwimmachse**, **c)** unter **Metazentrum**?

Lösung: **a)** Die „Wasserverdrängung" oder das Deplacement (de place = vom Platze verdrängt) ist die Masse des vom Schiffe verdrängten Wassers, also die Gesamtmasse des Schiffes. Die größten Schnelldampfer haben etwa 50000 t Wasserverdrängung.

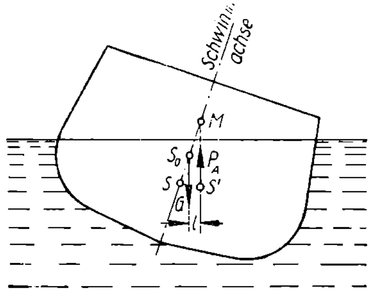


Bild 233

b) Die Mittelkraft G des gesamten Schiffsgewichts greift im Körperschwerpunkte S_0 an (Bild 233). Die Mittelkraft des Auftriebs $P_A = V \cdot \gamma$ greift bei waagerechter Lage des Schiffes im Schwerpunkte S des verdrängten Wasservolumens V an, im sog. „Verdrängungsschwerpunkt". Die

Verbindungslinie S_0S des Schiffsschwerpunktes mit dem Verdrängungsschwerpunkt heißt Schwimmachse.

c) Wird das Schiff durch irgendwelche Kräfte, z. B. durch Wind, in eine geneigte Lage gebracht (Bild 233), so behält der verdrängte Wasserkörper dasselbe Volumen V, nimmt aber eine andere Form an mit dem Schwerpunkt S'. Die in S' angreifende Kraft des Auftriebes P_A bildet dann mit der gleich großen Kraft G ein Kräftepaar, das das Schiff mit dem Drehmomente $P_A l = Gl$ in die frühere Gleichgewichtslage zurückzudrehen sucht. Der Punkt M, in dem die Lotrechte durch den Verdrängungsschwerpunkt S' die Schwimmachse schneidet, heißt das Metazentrum des Schiffes. Je höher M liegt, um so größer wird der Hebelarm l des Kräftepaares, um so größer das aufrichtende Drehmoment und die Standsicherheit des Schiffes.

49. II. Das Metazentrum eines Schiffes mit halbkreisförmigem Querschnitt liegt stets im Mittelpunkt des Halbkreises. Der Schwerpunkt des Schiffes liege $a = 0{,}2r$ unter dem Mittelpunkt, der Wasserspiegel berührt unter einem $\sphericalangle\, \alpha_0 = 60°$ die Schiffswand. Das Massenträgheitsmoment sei $J = m \cdot \frac{r^2}{3}$. a) Angriffspunkt des Auftriebes?

b) Schwingungszeit bei kleinem Ausschlag β?

Anleitung: a) statisches Moment

$$F y_0 = \int_{\alpha_0}^{0} 2r\sin\alpha \cdot \mathrm{d}y \cdot y = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \sin^3\alpha_0\,; \quad \textbf{b)}\ \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{G \cdot l}{J} \text{ (Aufg. 223).}$$

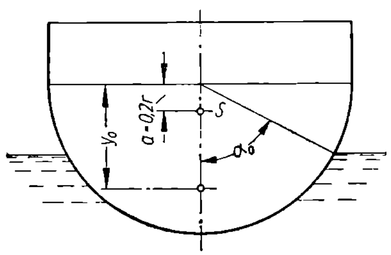


Bild 234

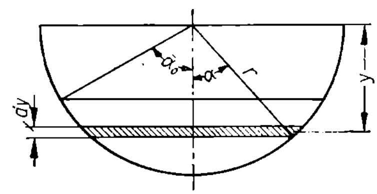


Bild 235

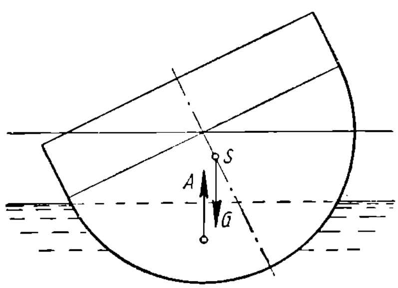


Bild 236

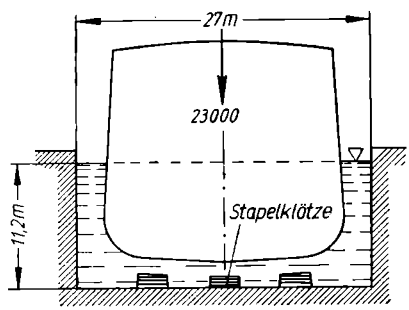


Bild 237

50. Ein **Trockendock** (Bild 237) hat ein prismatisches Wasserbecken von 236 m Länge und 27 m Breite. Nachdem das zu dockende Schiff eingefahren ist, wird das Tor hinter ihm geschlossen und das Wasser aus dem Dock ausgepumpt. Der Kiel des mit dem Wasserstande sinkenden Schiffes kommt auf Stapelklötzen zum Aufliegen; die Seitenwände des Schiffes werden durch allseitig angebrachte Streben gestützt, und der trockengesetzte Schiffskörper ist zur Ausführung von Ausbesserungsarbeiten zugänglich. **a)** Wieviel m^3 Wasser enthält das Dock bei 11,2 m Wassertiefe, wenn sich kein Schiff darin befindet, **b)** wenn ein 23000 Mp schwerer Dampfer eingefahren ist? **c)** Wie lange dauert in letzterem Falle das Auspumpen des Docks, wenn die Pumpen sekundlich 5 Kubikmeter Wasser fördern?

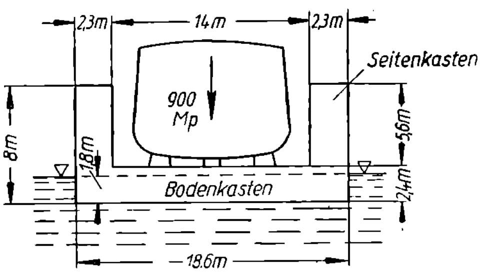


Bild 238

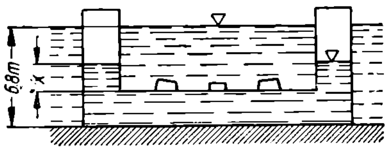


Bild 239

51. Ein **Schwimmdock** (Bild 238) besteht aus einem prismatischen geschlossenen Bodenkasten von 18,6 m Breite, 2,4 m Höhe und 45 m Länge und zwei aufgesetzten Seitenkästen von je 2,3 m Breite, 5,6 m Höhe und derselben Länge. Durch Einlassen von Wasser in den Bodenkasten und in den unteren Teil der beiden Seitenkästen wird das Dock versenkt (Bild 239), so daß das zu dockende Schiff einfahren kann. An den Stirnenden bleibt das Dock offen. Hierauf wird das Wasser aus den Kästen durch die im oberen Teile der Seitenkästen liegenden Pumpen „gelenzt", d. h. ausgepumpt. Der zunehmende Auftrieb des Außenwassers hebt dann das Dock samt dem Schiff aus dem Wasser heraus (Bild 238). Das Schiff kommt auf Stapelklötzen zum Aufliegen und wird für Ausbesserungsarbeiten zugänglich. Wie groß ist **a)** der Auftrieb des gehobenen Docks (Bild 238), wenn die Eintauchtiefe 1,8 m beträgt, **b)** das Eigengewicht des Docks, wenn das gehobene Schiff 900 Mp schwer ist, **c)** der Auftrieb, den das versenkte Dock vom Außenwasser erfährt (Bild 239), wenn seine untere Bodenfläche bei tiefster Tauchung 6,8 m unter dem Wasserspiegel liegt? **d)** Wieviel Wasser muß in die Kästen eingelassen werden, damit das Dock untersinkt? **e)** Welche Höhe x erreicht dabei der Wasserstand in den Seitenkästen? **f)** Welche Wassermenge müssen die Pumpen sekundlich fördern, um das Dock in $1^1/_2$ Stunden zu heben?

52. Der **Schwimmkran** einer Schiffswerft ruht nach Bild 240 auf einem prismatischen vorderen Schwimmkasten (Ponton) A von 12 m Länge und 32 m Breite und einem hinteren Schwimmkasten B von 9 m Länge und 32 m Breite. Die Nutzlast 150 Mp hängt in 18 m waagerechter Ausladung vor der Vorderkante O des Kastens A. Ein 80 Mp schweres Gegengewicht ist auf dem Kasten B in 2,5 m waagerechter Entfernung von dessen Außenkante angeordnet. Bei dieser Belastung taucht der Kasten A 3,3 m, der Kasten B 1,9 m tief in das Wasser ein. Zu berechnen ist

a) der Auftrieb der Schwimmkästen A und B; b) das Eigengewicht G des Krans, d. h. das gesamte schwimmende Gewicht außer Nutzlast und Gegengewicht; c) der waagerechte Abstand x_0 des Schwerpunktes S, in dem das Krangewicht G angreift, gemessen von der Vorderkante O des Kastens A. Belastungsschema des vorliegenden Trägers auf zwei Stützen siehe Bild 240!

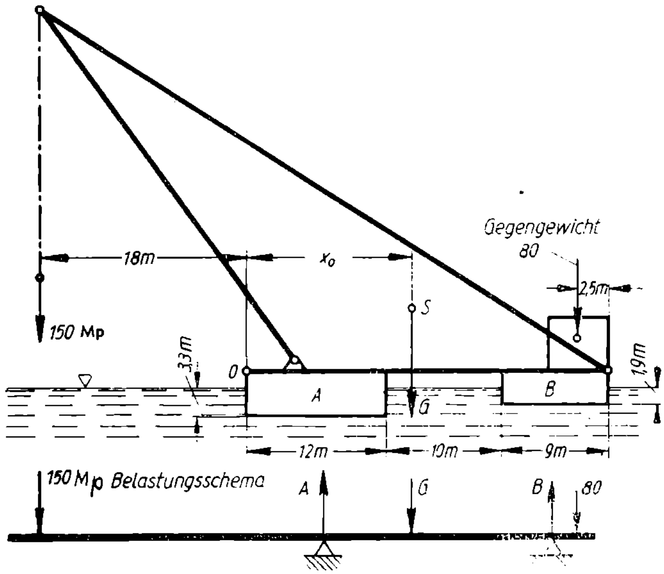


Bild 240

53. Ein Flußstahl-**Draht** hat 1,5 mm Durchmesser, Wichte 7,85 kp/dm³, Zugfestigkeit 4800 kp/cm². **a)** Wie groß ist die „Zerreißlänge" des Drahtes, d. h. die Länge, bei der er infolge seines Eigengewichtes zerreißen würde, wenn er senkrecht in der Luft hängt, **b)** wenn er im Wasser hängt? **c)** Welche Werte ergeben sich für einen 3 mm dicken Draht? **d)** Welchen Einfluß hat der Drahtquerschnitt F auf die Zerreißlänge?

54. Das **Flammrohr** eines Dampfkessels nach Bild 241 hat 900 mm Außendurchmesser, 12 mm Wanddicke und 9,5 m Länge. Es wird innen von den Feuergasen durchzogen und außen vom Wasser umspült. Zu berechnen ist **a)** das Gewicht des Rohres bei einer Wichte 7,85 kp/dm³ für Flußstahl; **b)** die Kraft des Auftriebes; **c)** das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche des Rohres; **d)** die durch den Auftrieb im Rohrquerschnitt erzeugte Biegespannung unter der Annahme, daß das Rohr an den Enden frei aufliegt.

Lösung: **a)** 2500 kp.

b) $P_A = 6050$ kp.

c) $J = \dfrac{\pi\, 90^4\,\text{cm}^4}{64} - \dfrac{\pi\, 87{,}6^4\,\text{cm}^4}{64} = 330\,000\ \text{cm}^4\,.$

$$W = \frac{J}{e} = \frac{330\,000\,\text{cm}^4}{45\,\text{cm}} = 7340\,\text{cm}^3\,.$$

d) Die Kraft $P_A - G = 6050\,\text{kp} - 2500\,\text{kp} = 3550\,\text{kp}$ wirkt, gleichmäßig über die Rohrlänge verteilt, nach oben.

Biegemoment

$$M_b = \frac{Pl}{8} = 422000\,\text{kpcm} = \sigma_b W$$

$$\sigma_b = 57{,}5\,\text{kp/cm}^2 .$$

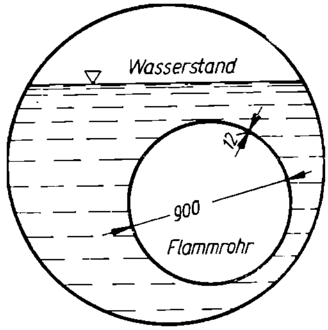


Bild 241

55. Das **Heizrohr** eines Dampfkessels wird innen von den Heizgasen durchzogen und überträgt die Wärme nach außen auf das umgebende Kesselwasser (Bild 241 wie bei voriger Aufgabe). Die Wichte des Flußstahls ist $7{,}85\,\text{kp/dm}^3$. Welchen Außendurchmesser muß das Rohr bei 8 mm Wanddicke haben, damit der vom Kesselwasser ausgeübte Auftrieb gerade gleich dem Gewicht des Rohres wird?

Lösung: Auftrieb = Gewicht, also

$$\frac{\pi d^2}{4} l \gamma_{\text{Wasser}} = \pi d s l \gamma_{\text{Flußstahl}},$$

wobei s Wanddicke. Daraus $d = 250$ mm.

56. Eine hohlzylindrische **Büchse** von 420 mm Außendurchmesser, 300 mm Bohrung und 1300 mm Länge ist in zwei aufeinandergesetzten Formkästen eingeformt (Bild 242). Die Oberkante des Einguß- und des Steigtrichters liegt 400 mm über der Teilebene beider Formkästen. Die Wichte des Kerns ist $1{,}4\,\text{kp/dm}^3$. Wie groß muß die Belastung des Oberkastens einschließlich Eigengewichts mindestens gemacht werden, damit er nicht durch den Auftrieb von flüssigem Grauguß (Wichte $7{,}2\,\text{kp/dm}^3$) angehoben wird?

Lösung: Der nach oben gerichtete Flüssigkeitsdruck an der halbzylindrischen Sandfläche des Oberkastens ist gerade so groß wie beim Guß einer vollzylindrischen Walze nach Aufgabe 25, da der hydrostatische Druck an jener Fläche durch den eingelegten Kern nicht verändert wird. Dies ergibt

$$\left(\frac{7{,}2}{1000}\cdot 40\right)\text{kp/cm}^2\,(42\cdot 130)\,\text{cm}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\, 4{,}2^2}{4}\cdot 13\right)\text{dm}^3\cdot 7{,}2\,\text{kp/dm}^3 = 924\,\text{kp nach oben} .$$

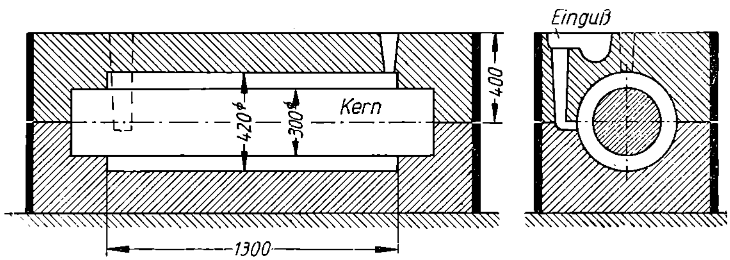


Bild 242

Hierzu kommt noch der Auftrieb des Kerns, der durch die Kernenden auf den Oberkasten übertragen wird, gleich dem Gewicht der verdrängten Eisenmenge, verringert um das nach unten wirkende Gewicht des Kerns, also

$$\left(\frac{\pi 3^2}{4} \cdot 13\right) \mathrm{dm}^3 \, (7{,}2 - 1{,}4)\ \mathrm{kp/dm}^3 = 533\ \mathrm{kp}\ \text{nach oben.}$$

Folglich erforderliche Mindestbelastung des Oberkastens

$$924\ \mathrm{kp} + 533\ \mathrm{kp} = 1457\ \mathrm{kp}.$$

57. Ein **Wasserbehälter** trägt an seiner senkrechten Wand eine rechteckige Verschlußklappe von 400 mm Höhe und 300 mm Breite nach Bild 243. Die Klappe soll durch einen Schwimmer mittels Winkelhebels geöffnet werden, sobald der Wasserstand bis zur Mittelebene des Schwimmers steigt. Zu berechnen ist **a)** der Auftrieb des Schwimmers. Letzterer ist ein Zylinder von 390 mm Außendurchmesser und 600 mm Länge und taucht bis zu seiner Mittelebene in das Wasser ein. **b)** das Eigengewicht des hohlen Schwimmers. Sein Mantel und beide Böden bestehen aus Stahlblech von 3 mm Dicke und der Wichte 7,85 kp/dm³. Das Gewicht der Nietköpfe und des Hebels werde durch 10% Zuschlag zum Schwimmergewicht berücksichtigt. **c)** die Mittelkraft R des gesamten auf der Klappe lastenden waagerechten Wasserdruckes; **d)** die Tiefe y_m des Druckmittelpunktes der Klappe unter dem Wasserspiegel; **e)** die erforderliche Hebellänge x des Schwimmers.

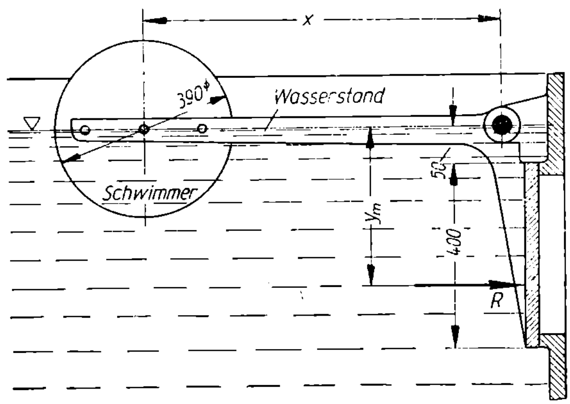


Bild 243

58. Ein **Schiffshebewerk** (Bild 244) nimmt das zu hebende Schiff in einem Wassertrog auf. Dieser ruht auf fünf hohlzylindrischen Schwimmern von 8,3 m Außendurchmesser und 11,5 m Höhe, die sich in 30 m tiefen, mit Wasser gefüllten Brunnen auf und ab bewegen können. Da die Schwimmer hierbei stets ganz unter Wasser bleiben, ist ihre Auftriebskraft unverändert gleich den gesamten zu tragenden Gewichten, und der Trog befindet sich in jeder Höhenlage im Gleichgewichte. Die Hub- oder Senkbewegung wird durch vier von einem Elektromotor angetriebene Schraubenspindeln an den Ecken des Trogs geregelt, ohne daß die Schrauben senkrechte Last tragen. In der tiefsten Stellung wird der Trog durch Gummileisten wasserdicht an die Stirnwand des unteren Kanals angeschlossen, und das Schiff fährt aus dem Unterwasser in den Trog ein. Nachdem dann die Tore des Trogs geschlossen sind, erfolgt der Hub. In der höchsten Stellung des Trogs fährt das Schiff in den oberen Kanal aus. **a)** Wie groß ist der Gesamtauftrieb der fünf Schwimmer? **b)** Wieviel Wasser enthält der prismatische Trog bei 70 m innerer Kastenlänge, 8,8 m Breite

und 2,4 m Wassertiefe, wenn ein 800 Mp schweres Schiff eingefahren ist? c) Wie groß ist die gesamte Masse der Schwimmer und des leeren Trogs? d) Wieviel mechanische Arbeit ist zum Heben des Schiffes bei 15 m Hubhöhe zu leisten? e) Woher wird diese Betriebsarbeit entnommen?

Lösung: a) 3110 Mp. b) 680 t Wasser. c) 1630 t.
d) 800 Mp · 15 m = 12000 Mpm (Megapondmeter).

e) Bei der Einfahrt des Schiffes in den Trog werden 800 m^3 Wasser in den unteren Kanal verdrängt. Dieselbe Wassermenge fließt bei der Ausfahrt des Schiffes oben in den Trog wieder hinein. Die Betriebsarbeit zum Heben des Schiffes wird also dadurch geliefert, daß 800 m^3 Wasser aus dem oberen Kanal in den unteren übergehen, wobei sie 12000 Mpm leisten. Ein Pumpwerk neben dem Hebewerk muß diese Wassermenge in gleichmäßiger Arbeit wieder aus der unteren Wasserhaltung in die obere hinaufpumpen. Falls beim Senken des Trogs ein abwärtsfahrendes Schiff mitgenommen wird, fällt jener Wasseraufwand fort, und die Nutzarbeit des gesenkten Schiffes dient zum Heben eines aufwärtsfahrenden. Das Pumpwerk braucht dann nur die Verluste zu ersetzen.

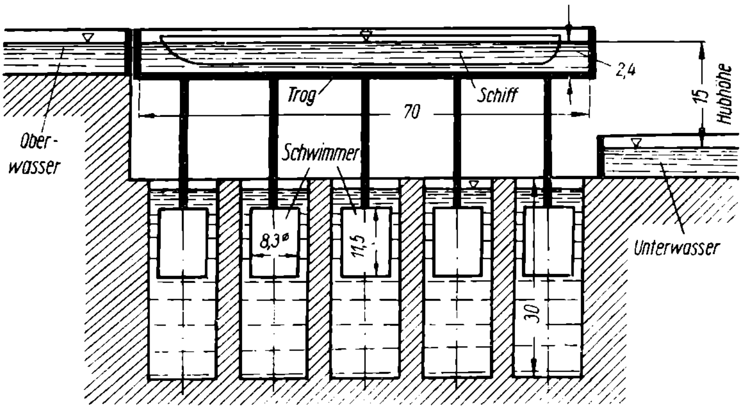


Bild 244

HYDRODYNAMIK

Hydrodynamik ist die Lehre von den Kräften in bewegten Flüssigkeiten.

Ausfluß aus Gefäßen

Ausfluß des Wassers in die Luft

59. a) Wie groß ist die **Ausflußgeschwindigkeit** an einer Gefäßöffnung, die h Meter unter dem Wasserspiegel liegt? b) Was versteht man unter „**Geschwindigkeitshöhe**"? c) Wie groß ist die sekundlich ausfließende **Wassermenge**?

Lösung:

a) Der Wasserspiegel werde durch entsprechenden Zufluß in unveränderter Höhe gehalten (Bild 245a). Jedes Wasserteilchen bewegt sich von der Wasseroberfläche bis zum Ausflußquerschnitt hin, mit der Geschwindigkeit Null beginnend und mit der Endgeschwindigkeit v austretend. Dabei durchfällt es die senkrechte Höhe h. Bezeichnet m seine Masse, also mg sein Gewicht, so verrichtet es die mechanische Arbeit mgh. Diese erscheint in dem ausfließenden Wasser als Arbeitsvermögen $\frac{mv^2}{2}$.

Aus der Arbeitsgleichung $\frac{mv^2}{2} = mgh$ ergibt sich die

Ausflußgeschwindigkeit $\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}$, $\quad g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

b) Aus letzter Gleichung folgt: $\boldsymbol{h = \frac{v^2}{2g}}$.

Diese Druckhöhe $\frac{v^2}{2g}$, die erforderlich ist, um dem Wasser die Geschwindigkeit v zu erteilen, bezeichnet man als

„Geschwindigkeitshöhe“.

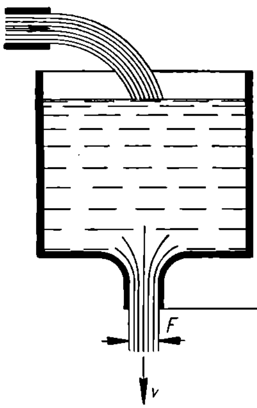


Bild 245 a

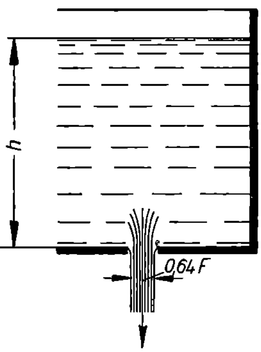


Bild 245 b

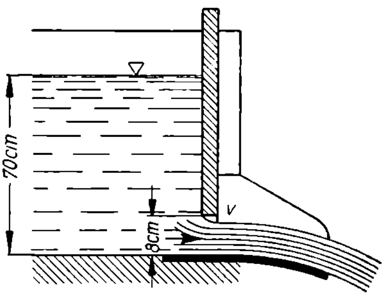


Bild 246

c) Theoretisch ist die sekundlich ausfließende Wassermenge $V_s = Fv = F\sqrt{2gh}$. Wegen der Reibung in der Austrittsöffnung muß jedoch v etwas kleiner als oben berechnet angenommen werden, nämlich $v \approx 0{,}97\sqrt{2gh}$.
Wenn die Austrittsöffnung eine gut ausgerundete Düse nach Bild 245a ist, wird ihr Querschnitt F ganz vom Wasser ausgefüllt. Dann wird $V_s = 0{,}97\,F\sqrt{2gh}$. Besteht sie dagegen aus einem einfachen Ausschnitt in dünner Wand (Bild 245b), so bewirken die von den Seiten her zuströmenden Wasserfäden eine Zusammenziehung (Kontraktion) des Wasserstrahls, so daß letzterer nur einen Querschnitt $\approx 0{,}64\,F$ hat. Dann wird

$$V_s = 0{,}97 \cdot 0{,}64 F\sqrt{2gh} \approx 0{,}62 F\sqrt{2gh}$$

Unter Berücksichtigung der Reibung und der Zusammenziehung gilt also allgemein:

$$\boldsymbol{V_s = \mu F\sqrt{2gh}}.$$

Die „Ausflußzahl" ist

$\mu = 0{,}97$ für gut ausgerundete Düsen (Bild 245a),
$\mu \approx 0{,}62$ für scharfkantige Ausflußöffnungen (Bild 245b).

60. Bei einem **Sprengwagen** liegen die Austrittsöffnungen des Wassers 1,5 m unter dem Wasserspiegel des Behälters. Durchmesser der Öffnungen 2 mm, Anzahl 100, Ausflußzahl $\mu = 0{,}62$. **a)** Theoretische Ausflußgeschwindigkeit, **b)** Ausflußmenge je Sekunde?

61. Das Zufluß-**Gerinne** eines **Wasserrades** hat 70 cm Wassertiefe (Bild 246). Das Stauschütz gibt einen rechteckigen Ausflußquerschnitt von 8 cm Höhe und 130 cm Breite frei. Gesucht wird **a)** die theoretische Ausflußgeschwindigkeit in der Mitte der Querschnittshöhe; **b)** die sekundliche Ausflußmenge bei einer Ausflußzahl 0,62; **c)** die Nutzleistung des Wasserrades, wenn die gesamte Gefällhöhe 4,7 m und der Wirkungsgrad 83 % beträgt.

Lösung: **a)** 3,6 m/s.

b) 0,232 m³/s.

c) $N = \eta G_s H = 0{,}83 \cdot 232\,\text{kp/s} \cdot 4{,}7\,\text{m} = 12\text{PS}$.

62. Die **Ausblasehähne** eines Lokomotivzylinders haben 12-mm-Bohrung. **a)** Mit welcher theoretischen Geschwindigkeit wird das Niederschlagwasser durch die geöffneten Hähne aus dem Zylinder ausgeblasen, wenn der Frischdampf mit 14 at Überdruck eintritt? **b)** Wieviel Wasser wird in einer Sekunde ausgeblasen bei einer Ausflußzahl 0,62?

Ausfluß unter Gegendruck

63. Wie groß ist die **Ausflußgeschwindigkeit** aus einer **unter Wasser** liegenden Gefäßöffnung nach Bild 247?

Lösung: Die wirksame Druckhöhe ist gleich der Differenz der Druckhöhen h_1 und h_2, also $h = h_1 - h_2$. Dies ergibt für jeden Punkt des Durchflußquerschnitts, sowohl den höchsten wie den tiefsten, denselben Wert, so daß überall im Durchflußquerschnitt dieselbe Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh} \text{ herrscht}.$$

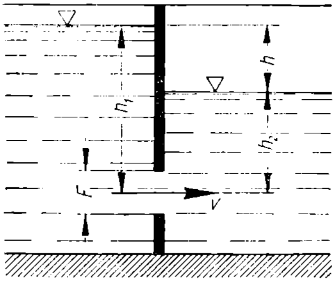


Bild 247

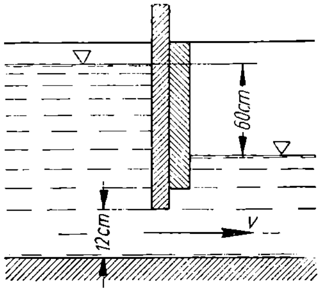


Bild 248

64. Das **Stauschütz** einer Wassersperre nach Bild 248 bewirkt ein Anstauen des Wassers auf 60 cm Höhe und gibt unter Wasser einen rechteckigen Durchflußquerschnitt von 12 cm Höhe und 80 cm Breite frei (sog. Grundablaß). Zu berechnen ist **a)** die theoretische Geschwindigkeit in der Durchflußöffnung; **b)** die minutlich abfließende Wassermenge bei einer Ausflußzahl 0,62.

65. Das Hebermanometer am **Saug-Windkessel** einer Pumpe (Bild 249) zeigt eine angesaugte Quecksilbersäule von 410 mm Höhe. Der äußere Barometerstand beträgt 760 Torr. **a)** Welcher absolute Druck herrscht im Windkessel? **b)** Mit welcher theoretischen Geschwindigkeit strömt das Wasser aus der Saugleitung in den Windkessel ein, wenn der Wasserspiegel des Saugbrunnens 5,4 m unter dem des Windkessels liegt? Die Reibungsverluste in der kurzen Rohrleitung seien vernachlässigt. **c)** Wieviel Wasser wird minutlich durch die 150 mm weite Saugleitung gehoben bei einer Ausflußzahl 0,9?

Anleitung: 760 Torr = 10,33 m WS
736 Torr = 10 m WS

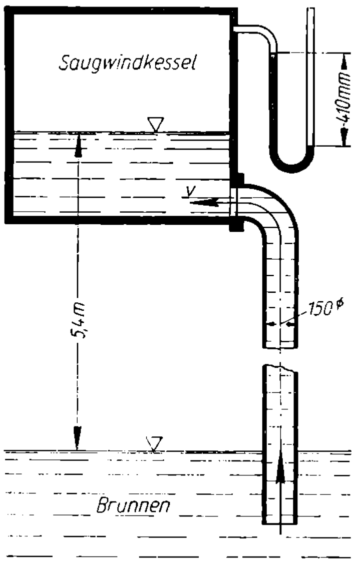


Bild 249

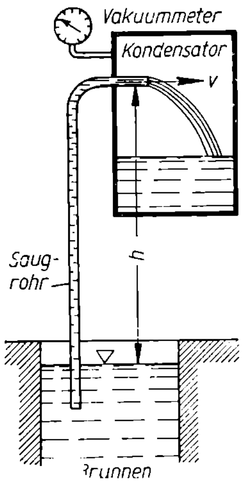


Bild 250

66. Der **Kondensator** einer Dampfmaschine saugt das Einspritzwasser aus einem Brunnen, dessen Wasserspiegel um $h = 5{,}7$ m unter der Einmündung des Saugrohres in den Kondensator liegt (Bild 250). Der Zeiger des Vakuummeters am Kondensator zeigt 120 Torr absoluten Druck an. Der Barometerstand beträgt 753 Torr. Gesucht wird **a)** der absolute Druck im Kondensator in kp/m² (wie Aufgabe 29); **b)** der absolute Druck der äußeren Luft; **c)** die Eintrittsgeschwindigkeit v des Wassers in den Kondensator unter der Annahme, daß infolge Reibung in der Rohrleitung 2,3 m Druckhöhe verlorengehen; **d)** die sekundliche Einspritz-Wassermenge bei 60 mm innerem Rohrdurchmesser und Ausflußzahl 0,9.

Ausfluß aus hohen Seitenöffnungen

67. Die **seitliche Ausflußöffnung** eines Gefäßes reicht bis zum Wasserspiegel und bildet eine Rechteckfläche von der Höhe h und der Breite b (Bild 251a). Wie groß ist die sekundliche Ausflußmenge?

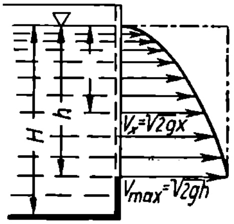


Bild 251 a

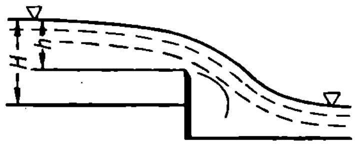


Bild 251 b

Lösung: In der Tiefe x unter Wasser herrscht die Ausflußgeschwindigkeit

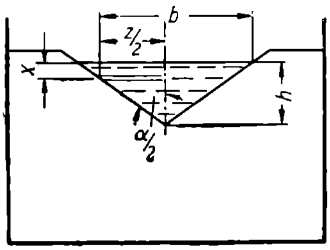


Bild 252

$$v_x = \sqrt{2gx};$$

also ist $v_x^2 = 2gx$. Diese Gleichung hat die Form $y^2 = 2px$, stellt also eine Parabel dar. Trägt man zu jeder Tiefe x die zugehörige Geschwindigkeit v_x waagerecht auf, so bilden die Endpunkte dieser Geschwindigkeitsstrecken eine Parabel (Bild 251a). In der Tiefe h ist $v_{max} = \sqrt{2gh}$.

Die sekundliche Ausflußmenge Q wird dargestellt durch den Rauminhalt eines Körpers von der Querschnittfläche F = Parabelfläche und der Länge b, also $Q = Fb$. Nun ist der Inhalt einer Parabelfläche $F = {}^2/_3$ von der umschriebenen Rechteckfläche

$$F = \frac{2}{3} \cdot h v_{max} = \frac{2}{3} h \sqrt{2gh}\ ; \quad \text{eingesetzt:}\ V_s = \frac{2}{3} h \sqrt{2gh} \cdot b\,.$$

Die beim Ausfluß auftretende Einschnürung des Wasserstrahls (Bild 251b) wird durch eine Ausflußzahl berücksichtigt, deren Größe bei Überfallwehren auf Grund von Versuchen im Mittel zu $\mu = 0{,}63$ angenommen werden kann. Folglich wird

$$\boldsymbol{V_s = \mu F b = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}\,.}$$

Bei Überfallwehren ist auch die Form des Überfalles, die Höhe und Breite des Zu- und des Ablaufgerinnes von Einfluß. Bei Messungen muß zunächst die Luft unter dem Strahl zutreten können, sodann sind die Formeln für scharfkantige Schneiden entwickelt worden.

Ist das Zu- und Ablaufgerinne in Bild 251 genauso breit wie das Überfallwehr, so kann für μ die Faustformel gelten:

$$\mu = 0{,}615 \left(1 + \frac{1}{1000h + 2{,}6}\right)\left[1 + 0{,}5\left(\frac{h}{H}\right)^2\right];$$

μ	h, H
—	m

*

$$H - h \geqq 0{,}3\,\mathrm{m}\,;\ \frac{h}{H-h} \leqq 1\,;\quad 0{,}025\,\mathrm{m} < h < 0{,}8\,\mathrm{m}$$

z. B. $h = 0{,}2$ m, $H = 1$ m. Es wird $\mu = 0{,}6304$.

Ist der Überfall nicht so breit wie das Gerinne, so gilt

$$\mu = \left(0{,}578 + 0{,}037\,\frac{b}{B} + \frac{3{,}165 - 3\,(b/B)^2}{1000\,h + 1{,}6}\right)\left[1 + 0{,}5\left(\frac{b}{B}\right)^4\left(\frac{h}{H}\right)^2\right];$$

μ	b, B, h, H
—	m

*

b = Breite des Überfalles, B = Breite des Gerinnes

$$\text{z. B. } \frac{h}{B} = \frac{1}{2}\,,\quad h/H = 1/5\,,\quad h = 0{,}2\,\mathrm{m};\quad \mu = 0{,}6115$$

Das Dreieckswehr wird für kleine Flüssigkeitsmengen benutzt. Es ergibt sich nach Bild 252

$$V_s = \int_0^h \mu z \cdot dx\,\sqrt{2gx} = \frac{4}{15}\,\boldsymbol{\mu b h \sqrt{2gh}}\,,\ \mu = 0{,}5926\,.$$

68. Das **Überfallwehr** eines Staudeiches hat 4,6 m Breite. Die Wehrkrone liegt um $h = 18$ cm unter dem Oberwasserspiegel (Bild 251 b). Wieviel Wasser fließt stündlich über das Wehr, wenn die Ausflußzahl 0,63 ist?

Lösung: $V_s = \frac{2}{3}\,\mu b h \sqrt{2gh} =$

$$= \frac{2}{3}\,0{,}63 \cdot 4{,}6\,\mathrm{m} \cdot 0{,}18\,\mathrm{m}\,\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}18}\,\mathrm{m/s} =$$

$$= 0{,}653\,\mathrm{m^3/s} = 2350\,\mathrm{m^3/h}.$$

69. In einem **Flußlauf** ist ein **Überfallwehr** von 5,7 m Breite eingebaut (Bild 251 b). Die Wehrkrone liegt 0,23 m unter dem Oberwasserspiegel und 1,7 m über dem Unterwasserspiegel. **a)** Wie groß ist die sekundlich überfließende Wassermenge bei einer Ausflußzahl 0,63, wenn die Geschwindigkeit des ankommenden Oberwassers annähernd Null ist? **b)** Wieviel PS lassen sich aus dem abfließenden Wasser mittels einer Turbine gewinnen, wenn der Gesamtwirkungsgrad der Anlage zu 78 % geschätzt wird?

70. Die **seitliche Ausflußöffnung** eines Gefäßes ist eine Rechteckfläche von der Breite b. Ihre Unterkante liegt um h_1, die Oberkante um h_2 unter Wasser (Bild 254). Wie groß ist die sekundliche Abflußmenge?
Ist die Ausflußöffnung so breit wie der Kanal, so ist $\mu = 0{,}63$. Ist die Ausflußöffnung auch seitlich schmaler, so daß auch eine seitliche Einschnürung erfolgt, so ist $\mu = 0{,}6$.

Lösung: Die Ausflußmenge kann, entsprechend der Aufg. 67, dargestellt werden als Differenz zweier durch eine Parabel begrenzter Prismen:

$$V_{s1} - V_{s2} = \frac{2}{3}\,\mu b h_1 \sqrt{2gh_1} - \frac{2}{3}\,\mu b h_2 \sqrt{2gh_2}\,,$$

$$V_s = \frac{2}{3}\,\mu h\left(h_1 \sqrt{2gh_1} - h_2 \sqrt{2gh_2}\right).$$

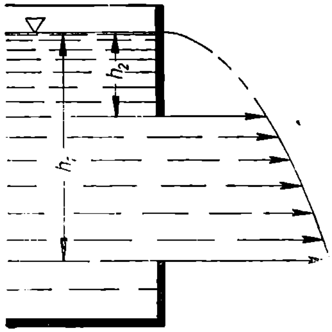


Bild 253

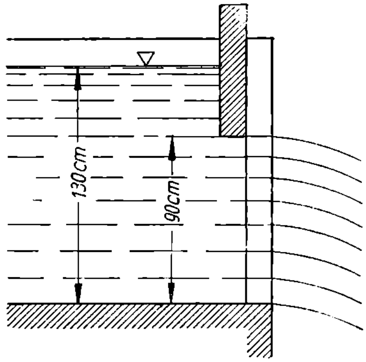


Bild 254

Wenn die Höhe $(h_1 - h_2)$ des Ausschnitts im Verhältnis zur Tiefe h_1 gering ist, kann man annähernd mit der mittleren Geschwindigkeit rechnen, die im Schwerpunkte der Ausflußöffnung herrscht (nach Aufg. 61).

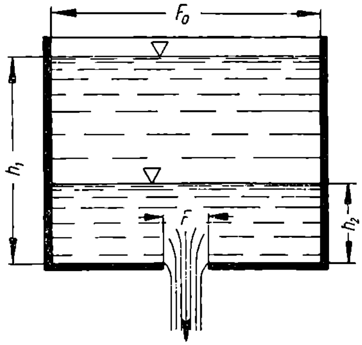


Bild 255

71. Das **Freischütz** im Zuflußgerinne einer Turbine läßt das Wasser unbenutzt in den „Freilauf" abfließen, wenn es beim Stillsetzen der Turbine nicht gebraucht wird. Der Wasserstand im Gerinne beträgt 130 cm. Das Schütz gibt in der Stellung nach Bild 254 einen rechteckigen Ausflußquerschnitt von 90 cm Höhe und 60 cm Breite frei. Wieviel Wasser fließt bei einer Ausflußzahl 0,8 sekundlich ab, **a)** wenn die genaue Formel der vorigen Aufgabe zugrunde gelegt wird, **b)** wenn überschläglich mit der mittleren Geschwindigkeit gerechnet wird, die im Schwerpunkte des Ausflußquerschnitts herrscht (wie in Aufg. 61)?

Ausfluß bei abnehmender Druckhöhe

72. In welcher Zeit sinkt der **Wasserspiegel** eines prismatischen Gefäßes von der Höhe h_1 auf h_2 infolge Ausfließens von Wasser aus einer Bodenöffnung (Bild 255)?

Lösung: Die Ausflußgeschwindigkeit ist

$$\text{anfangs } v_1 = \sqrt{2 g h_1}\,,$$

$$\text{zuletzt } v_2 = \sqrt{2 g h_2}.$$

Dieselben Gleichungen gelten für die Geschwindigkeit beim freien Fall. Also erfolgt die Veränderung der Geschwindigkeit beim Ausfluß nach demselben Gesetz wie beim freien Fall, nur daß die Fallgeschwindigkeit mit der durchfallenden Höhe zunimmt, während die Ausflußgeschwindigkeit mit der Druckhöhe abnimmt. Da nun die Fallbewegung gleichförmig beschleunigt ist, so muß die Ausflußbewegung gleichförmig verzögert sein. Man kann deshalb wie bei der Fallbewegung auch hier eine **mittlere** Geschwindigkeit $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$ einführen.

Bezeichnet F den Querschnitt der Ausflußöffnung, so ist die fließende Wassermenge in einer Sekunde $\mu F v_m$. In der Zeit t sinkt der Wasserspiegel des Gefäßes von h_1 auf h_2; folglich ist eine Wassermenge $F_0 (h_1 - h_2)$ ausgeflossen, wobei F_0 die Querschnittsfläche des Gefäßes bedeutet.

$$\mu F v_m t = F_0 (h_1 - h_2).$$

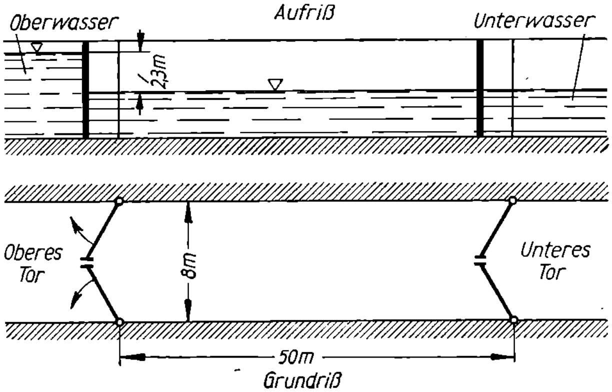


Bild 256

73. Ein zylindrischer **Wasserbehälter** hat 9 m Durchmesser und 5 m Wasserstand (Figur wie bei voriger Aufgabe). **a)** Wie lange dauert die Entleerung durch eine Bodenöffnung von 200 mm Durchmesser bei einer Ausflußzahl 0,62? **b)** Nach wieviel Zeit ist die Hälfte des Wasserinhalts abgeflossen?

74. Ein **Schwimmbecken** von 20 m · 17 m Grundfläche und 4 m Wassertiefe soll sich durch eine kreisförmige Bodenöffnung in zwei Stunden entleeren. Welchen Durchmesser muß die Ausflußöffnung erhalten, wenn die Ausflußzahl zu 0,62 angenommen wird?

75. Eine **Schleusenkammer** hat 50 m Länge und 8 m Breite (Bild 256). Das Gefälle, d. h. der Höhenunterschied zwischen Oberwasser und Unterwasser, beträgt 2,3 m. Soll ein abwärtsfahrendes Schiff aus dem Oberwasser durchgeschleust werden, so wird das untere Tor geschlossen, die Wasserschütze im oberen Tor geöffnet und die Schleusenkammer aus dem Oberwasser gefüllt. Hierauf kann das obere Tor geöffnet werden und das Schiff einfahren. In derselben Weise erfolgt die Entleerung der Kammer durch das untere Tor und die Ausfahrt des Schiffes. Jeder der beiden Flügel eines Tores enthält ein Schütz, dessen rechteckige Öffnung, 1,6 m breit und 0,4 m hoch, stets ganz unter Wasser liegt. Wie lange dauert die Füllung bzw. Entleerung der Schleusenkammer bei einer Ausflußzahl 0,62 (s. Aufg. 63)?

STATIONÄRE STRÖMUNG VON FLÜSSIGKEITEN

Bernoullische Gleichung, Kontinuität

76. a) Was versteht man unter **stationärer Strömung?**

Lösung: Eine stationäre Strömung ist eine Bewegung von Flüssigkeiten, bei der an allen Stellen (z. B. in einer Rohrleitung) sich die Geschwindigkeit zeitlich nicht ändert, die Durchflußmenge also konstant bleibt. Örtlich kann jedoch die Geschwindigkeit verschieden sein, also eine örtliche Beschleunigung auftreten.

b) Was versteht man unter **hydraulischem Druck?**

Lösung: Befindet sich eine Wassermasse im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, so besteht Gleichgewicht, und es liegt ein Fall der Statik vor. Die Wasserpressung an einer bestimmten Stelle heißt dann der hydrostatische Druck (Aufgabe 1).
Führt dagegen das Wasser eine beschleunigte oder verzögerte Bewegung oder eine krummlinige Bewegung aus, so ändert sich der wirkliche Druck infolge der Massenwirkung des Wassers. Der Vorgang ist dann dynamisch, und der auftretende Druck heißt der hydraulische Druck. Hydraulischer und statischer Druck werden in gleicher Weise gemessen.

77. Welches sind die **Grundgleichungen** der stationären Strömung?

Lösung: a) Die Energiegleichung oder Bernoullische Gleichung. Strömt eine Flüssigkeit stationär und verlustlos, so muß die Gesamtenergie einer Flüssigkeitsmenge an der Stelle 1 gleich der Gesamtenergie an den Stellen 2, 3, . . . usw. sein (Gesetz von der Erhaltung der Energie).

Die Gesamtenergie einer Wassermasse m setzt sich zusammen aus

1. der Energie der Lage
2. der Energie des Druckes
3. der Energie der Geschwindigkeit.

Die **Energie der Lage** ist die Arbeit, die notwendig ist, um eine Wassermasse m auf die Höhe h zu heben. (h wird gemessen von einer Bezugsebene, deren Höhe $= 0$ gesetzt wird.)

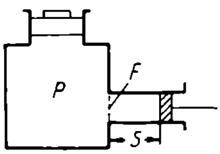


Bild 257

Sie ist $Gh = mgh$

oder, bezogen auf 1 kg,

$E_h = gh$.

Die **Energie des Druckes** ist die Arbeit, die notwendig ist, um eine Wassermasse m vom Druck 0 gegen den Druck p zu fördern.

Denkt man sich die Wassermasse als Zylinder vom Querschnitt F und der Länge s, so ist die hierzu erforderliche Arbeit $pFs = pV$, wobei V das Volumen der Wassermasse bedeutet. Bezogen auf 1 kg, gilt

$$E_p = p\frac{V}{m} = \frac{p}{\varrho}.$$

Die **Energie der Geschwindigkeit** ist die Arbeit, die notwendig ist, um eine Wassermasse m von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit v zu bringen, sie ist $\frac{m v^2}{2}$ und, bezogen auf 1 kg,

$$E_v = \frac{v^2}{2}.$$

Diese drei Energiearten, mit denen eine Wassermasse „aufgeladen" werden kann, können an den einzelnen Stellen der Strömung verschieden sein, ihre Summe jedoch muß an allen Stellen gleich sein, d. h.

$$g h_1 + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{v_1^2}{2} = g h_2 + \frac{p_2}{\varrho} + \frac{v_2^2}{2} = \cdots$$

Bemerkung: Die Energie der Lage ist abhängig von g, d. h. abhängig vom Ort; Druck- und Geschwindigkeitsenergie sind unabhängig vom Ort.
Erfolgt auf dem Wege von 1 nach 2 ein Energieverlust (z. B. eine Umwandlung von Energie durch Reibung in nicht verwertbare Wärme), so gilt

$$g h_1 + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{v_1^2}{2} = g h_2 + \frac{p_2}{\varrho} + \frac{v_2^2}{2} + E_{\mathrm{verl}}.$$

Hier bedeutet E_{verl} den auf 1 kg bezogenen Energieverlust in Nm/kg = kgm²/s² kg = = m²/s² oder in Nm/kg = kpm/9,81 kg.
Oft ist es zweckmäßig, die Energiewerte als Höhen auszudrücken; hierzu teilt man alle Glieder durch g und erhält mit Einzelverlusten

$$\underbrace{h_1}_{\text{geometrische Höhe}} + \underbrace{\frac{p_1}{\varrho g}}_{\text{Druckhöhe}} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2g}}_{\text{Geschwindigkeitshöhe}} + \underbrace{h_{v1}}_{\text{Verlusthöhe}} = h_2 + \frac{p_2}{\varrho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{v2}$$

Mit $\gamma = \varrho \cdot g$ folgt

$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_{v_1} = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{v2}$$

b) Eine zweite Gleichung, die **Kontinuitätsgleichung**, besagt, daß überall die gleiche Flüssigkeitsmenge durchgeht.

$$\boldsymbol{Q = f_1 v_1 = f_2 v_2 = f_3 v_3},$$

evtl. unter Berücksichtigung der Ausflußzahl μ (Aufg. 59)

$$Q = f_1 v_1 = f_2 v_2 = \mu f_3 v_3.$$

78. Welche **Geschwindigkeiten und hydraulischen Druckhöhen** entstehen in einer Rohrleitung, wenn die Verluste durch Reibung nach Bild 258 gegeben sind und ferner h_1 und die Querschnitte f bekannt sind?

Lösung: Der Behälter sei so groß, daß die Sinkgeschwindigkeit des Wasserspiegels vernachlässigt werden kann, d. h. $v_1 = 0$. Außer dem hydrostatischen wirkt auf die

Flüssigkeit noch der atmosphärische Druck. Da dieser jedoch an allen Meßstellen gleich ist, braucht er im vorliegenden Falle nicht berücksichtigt zu werden. Die Stelle 1 ist der Wasserspiegel des Behälters, dessen Höhe über der Ausflußöffnung h_1 ist, wobei $p_1 = 0$ und $v_1 = 0$.

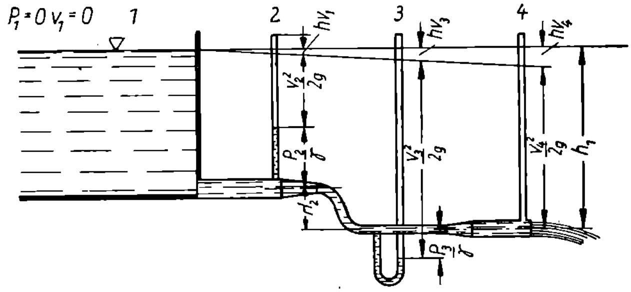


Bild 258

Somit gilt für die Meßstellen $1 \cdots 4$

$$1.\ h_1 + 0 + 0 = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{v_2} = 0 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + h_{v_3} =$$

$$= 0 + 0 + \frac{v_4^2}{2g} + h_{v_4};\ p_3 \text{ ist im Bild negativ.}$$

$$2.\ f_2 v_2 = f_3 v_3 = f_4 v_4 .$$

Man bestimmt zunächst v_4:

$$v_4 = \sqrt{2g\,(h_1 - h_{v_4})},$$

dann ergibt sich aus 2. $v_3 = v_4 \frac{f_4}{f_3}$ und $v_2 = v_4 \frac{f_4}{f_2}$.

Nunmehr können aus 1. die Druckhöhen $\frac{p_2}{\gamma}$ und $\frac{p_3}{\gamma}$ berechnet werden.

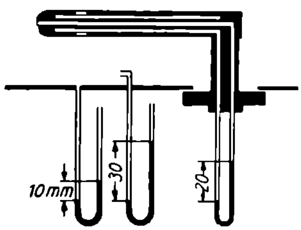


Bild 259

79. I. Der **statische** und **dynamische** Druck und die Geschwindigkeit des Wassers in einem Rohr sollen durch Messung mittels Prandtlschen Staurohres festgestellt werden (s. Bild 259).

Lösung: Im Meßrohr, welches parallel zur Strömung mündet, wird der statische und dynamische Druck gemessen, im anderen Rohr, welches senkrecht zur Strömung mündet, der statische Druck.

$$\frac{p}{\gamma} = 10 \text{ mm WS}$$

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = 30 \text{ mm WS}$$

$$\frac{v^2}{2g} = 20 \text{ mm WS} = 0{,}02 \text{ m WS},$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot 0{,}02 \text{ m}} = 0{,}626 \text{ m/s}.$$

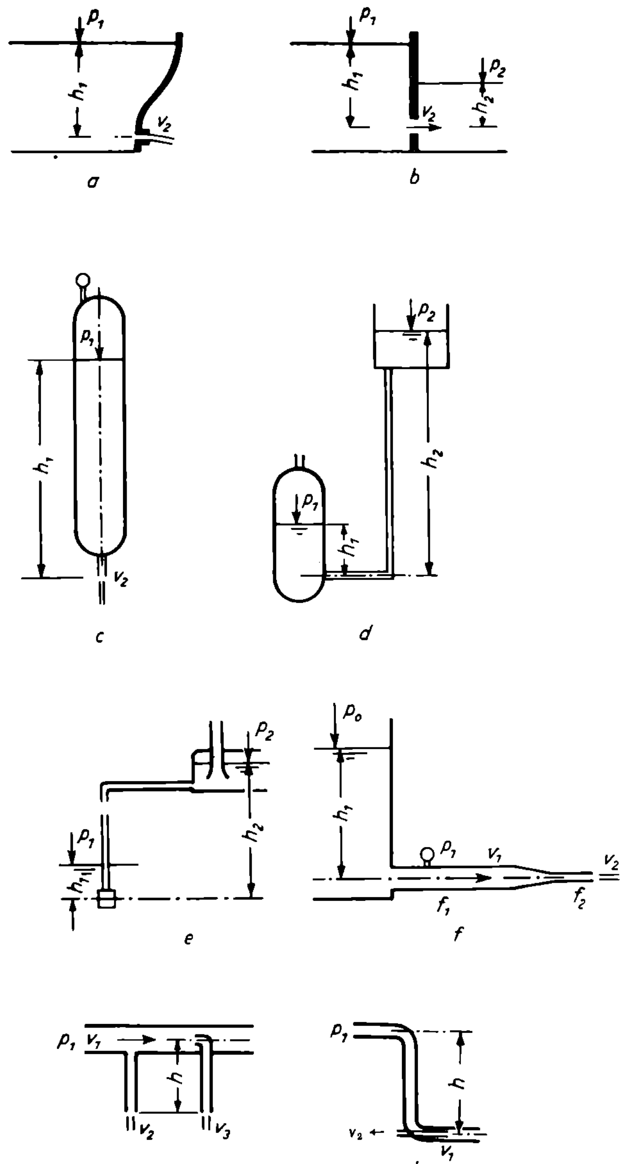


Bild 260

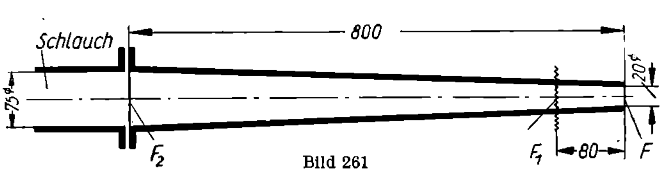


Bild 261

79. II. Für folgende Einzelfälle ist die Geschwindigkeit des Wassers festzustellen (Bild 260).

a) $p_1 = p_2$; $h_1 = 2$ m; $h_2 = 0$ m; $v_1 = 0$.

Lösung: $\frac{v_2^2}{2g} = h_1$; $v_2 = 6{,}5$ m/s.

b) $p_1 = p_2$; $h_1 = 2$ m; $h_2 = 1$ m; $v_1 = 0{,}5$ m/s.

Lösung: $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$; $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2) + v_1^2} = 4{,}455$ m/s.

c) Überdruck $p_1 = 2$ at; Überdruck $p_2 = 0$ at; $h_1 = 2$ m; $h_2 = 0$; $v_1 = 0$.

Lösung: $h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g}$; $v_2 = 20{,}78$ m/s.

d) Überdruck $p_1 = 2$ at; Überdruck $p_2 = 0$ at; $h_1 = 1$ m; $h_2 = 15$ m; $v_1 = 0$.

Lösung: $h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$; $v_2 = 10{,}85$ m/s.

e) $p_1 = 760$ Torr; Unterdruck $p_2 = 400$ Torr; $h_1 = 1$ m; $h_2 = 6$ m.

Lösung: $h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$; $v_2 = 2{,}94$ m/s.

f) $p_0 = p_2$; $h_1 = 8$ m; $h_2 = 0$; $f_1 = 30\ \text{cm}^2$; $f_2 = 20\ \text{cm}^2$.

Lösung: $v_2 = \sqrt{2gh_1} = 12{,}52$ m/s, $v_1 = \frac{f_2}{f_1} \cdot v_2 = 8{,}34$ m/s.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = h_1\text{; Überdruck } p_1 = 4460\ \text{kp/m}^2 = 0{,}446\ \text{at}.$$

g) Überdruck $p_1 = 100$ Torr; $v_1 = 3$ m/s; $h = 1{,}2$ m.

Lösung: $h + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g}$; $v_2 = 7{,}1$ m/s

$$h + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_3^2}{2g}; \quad v_3 = 7{,}7\ \text{m/s}.$$

h) Überdruck $p_1 = 120$ mm WS; $h = h_1 - h_2 = 0{,}4$ m; $v_1 = 3$ m/s.

Lösung: $h + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$; $v_2 = 1{,}0854$ m/s.

80. Das **Strahlrohr** (Mundstück) eines Feuerwehrschlauches verengt sich kegelförmig von 75 mm auf 20 mm Bohrung bei 800 mm Länge (Bild 261). Beim Anschluß des Schlauches an einen Hydranten werden von dem Rohr in 10 Minuten 6,6 m³ Wasser ausgeworfen. Unter Vernachlässigung der unbedeutenden Reibung in dem sauber geschliffenen Rohr sind zu berechnen **a)** die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus dem Rohr, wenn die Ausflußzahl = 1 angenommen wird; **b)** die der Austrittsgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe; c) der hydraulische Druck in dem austretenden Wasserstrahle; d) der Durchmesser des Strahlrohres in dem 80 mm vor der Mündung liegenden Querschnitt F_1 (Bild); e) die Geschwindigkeit des Wassers in F_1; f) der hydraulische Druck in F_1; die Wassergeschwindigkeit im Anschlußquerschnitt F_2 des Rohres an den Schlauch; g) der hydraulische Druck, den ein Manometer in F_2 angibt.

81. Bei dem in Bild 262 skizzierten **Gefäß** wird der Wasserspiegel durch Zufluß in unveränderter Höhe gehalten. a) Wie groß ist die theoretische Ausflußgeschwindigkeit v_4 in dem 1,7 m unter dem Wasserspiegel gelegenen tiefsten Querschnitt, wenn das Saugrohr so eng ist, daß seine Wirkung vernachlässigt werden kann? b) Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit und der Reibungsverlust, wenn die durch Reibung verursachte Ausflußzahl $\mu = 0{,}96$ ist? c) Welcher statische Druck herrscht in dem Querschnitt f_2 bei den gegebenen Maßen, wenn die Reibung bis dahin vernachlässigt werden kann? d) Ebenso im engsten Querschnitt f_3, wenn der Reibungsverlust bis dahin $^3/_4$ des Ganzen beträgt? e) Aus welcher Tiefe kann durch ein seitlich bei f_3 angeschlossenes Saugrohr Wasser angesaugt werden, wenn in diesem Saugrohr 0,4 m für die Erzeugung der Geschwindigkeit und für Verluste zu rechnen ist und die angesaugte Wassermenge verhältnismäßig recht klein ist, so daß der Arbeitsverlust in der Düse, der dadurch entsteht, vernachlässigt werden kann?

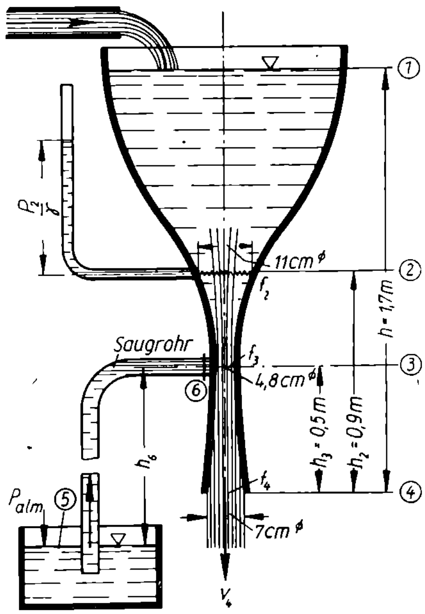


Bild 262

Lösung: a) Aus der Bernoullischen Gleichung für die Stellen 1 und 4

$$h_1 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_4^2}{2g}$$

folgt $v_4 = \sqrt{2 g h_1} = 5{,}77$ m/s.

b) Die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit ist:

$$v_{4w} = \mu v_4 = 5{,}54 \text{ m/s}$$

$$h_{v_4} = \frac{v_4^2}{2g} - \frac{v_{4w}^2}{2g} = (1 - \mu^2)\frac{v_4^2}{2g} = (1 - \mu^2) \cdot h_1 = 0{,}0078 \cdot 1{,}7 \text{ m} = 0{,}133 \text{ m}.$$

c) $f_2 \cdot v_2 = f_4 \cdot v_{4w}$; $\quad v_2 = \frac{7^2 \text{ cm}^2}{11^2 \text{ cm}^2} \cdot 5{,}54 \text{ m/s} = 2{,}24 \text{ m/s}$; $\quad \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}257$ m.

Bernoullische Gleichung für die Stellen 1 und 2

$$h_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 1{,}7\,\text{m} - 0{,}9\,\text{m} - 0{,}257\,\text{m} = 0{,}543\,\text{m}\,.$$

In einem in f_2 angebrachten Druckröhrchen würde sich das Wasser 0,543 m hoch einstellen.

d) $v_3 = \frac{f_4}{f_3} \cdot v_4 = \frac{7^2\,\text{cm}^2}{4{,}8^2\,\text{cm}^2} \cdot 5{,}54\,\text{m/s} = 11{,}8\,\text{m/s}; \quad \frac{v_3^2}{2g} = 7{,}1\,\text{m}\,.$

Bernoullische Gleichung für die Stellen 1 und 3

$$h_1 = h_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + h_{v_3}\,; \qquad h_{v_3} = \frac{3}{4}\,h_{v_4} = 0{,}1\,\text{m}$$

$$\frac{p_3}{\gamma} = h_1 - h_3 - \frac{v_3^2}{2g} - h_{v_3} = 1{,}7\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} - 7{,}1\,\text{m} - 0{,}1\,\text{m} = -6{,}0\,\text{m}\,.$$

$\frac{p_3}{\gamma}$ ist eine Unterdruckhöhe unter der äußeren Atmosphäre, welche hier 10,33 m Wassersäule entspricht. Der absolute Druck in f_3 ist somit $p_3 = 10330\,\text{kp/m}^2 - 6000\,\text{kp/m}^2 = 4330\,\text{kp/m}^2$ oder 0,433 m WS.

e) Für die Stellen 5 und 6 gilt mit absoluten Drücken:

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\gamma} = h_6 + \frac{p_6}{\gamma} + \frac{v_6^2}{2g} + h_{v_6}$$

$$\frac{v_6^2}{2g} + h_{v_6} = 0{,}4\,; \quad p_6 = p_3 = 4330\,\text{kp/m}^2$$

$$h_6 = 10{,}33\,\text{m} - 4{,}33\,\text{m} - 0{,}4\,\text{m} = 5{,}6\,\text{m}\,.$$

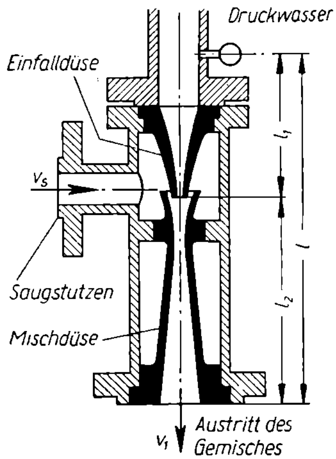


Bild 263

82. Eine **Wasserstrahlpumpe** soll Schlammwasser aus einer Tiefe von 3 m absaugen. Gegeben sind: der Austrittsquerschnitt aus der Mischdüse $f_1 = 100\,\text{cm}^2$, der engste Querschnitt der Mischdüse unterhalb der Einfalldüse $f_2 = 10\,\text{cm}^2$, die Länge der ganzen Düse ist $l = 0{,}6$ m, der Mischdüse $l_2 = 0{,}36$ m, die Wasseraustrittsgeschwindigkeit aus der Mischdüse $v_1 = 1$ m/s, die Höhe des Saugstutzens über dem Schlammwasserspiegel $H = 3$ m, die Verlusthöhe in der Saugleitung $H_v = 0{,}4$ m, die Wassergeschwindigkeit im Saugrohr $v_s = 2$ m/s, der absolute Wasserdruck vor der Einfalldüse $p_0 = 3{,}2$ at, der atmosphärische Druck der Luft $p_L = 1{,}03$ at, die Wichte des Druckwassers $\gamma_1 = 1000\,\text{kp/m}^3$, die Wichte des Schlammwassers $\gamma_2 = 1100\,\text{kp/m}^3$, der

Gesamtverlust in Einfall- und Mischdüse $h_v = 1{,}8$ m, davon kommt $^3/_4$ auf die Einfall- und $^1/_4$ auf die Mischdüse (Bild 263).
a) Druckwasser- und Saugleistung in kpm/s und daraus das Verhältnis von Druckwasser- zu Saugwassergewicht, G_1/G_2; **b)** Austrittsmenge $V_1 + V_2$ am Ende der Mischdüse; **c)** einzeln V_1, V_2, G_1, G_2; **d)** mittlere Wichte in der Mischdüse; **e)** Geschwindigkeit v_2 im engsten Querschnitt der Mischdüse; **f)** absoluter Druck p_2 dortselbst; **g)** absoluter Druck p_3 im Raum vor der Mischdüse; **h)** Geschwindigkeit v_3 des Schmutzwassers beim Eintritt in die Mischdüse; **i)** Querschnitt f_3 dortselbst; **k)** Geschwindigkeit c des Wassers beim Austritt aus der Einfalldüse; **l)** Querschnitt f_4 dortselbst; **m)** Saugrohrquerschnitt F.

Lösung: a) Bei der Leistung des Druckwassers kommt die Düsenhöhe als potentieller Gewinn hinzu, die Geschwindigkeitshöhe der Austrittsgeschwindigkeit ist jedoch ein Verlust. Es bleibt als zugeführte Nutzleistung:

$$N_1 = G_1 \cdot \left[\frac{p_0}{\gamma_1} - \frac{p_L}{\gamma_1} + l - h_v - \frac{v_1^2}{2g}\right] = G_1 \cdot 20{,}45\,\text{m}\,; \quad p_1 = p_L.$$

(G bzw. V bedeuten hier Gewicht bzw. Volumen je Zeiteinheit.)

Bei der Saugleistung muß das Schmutzwasser um $H - l_2$ gehoben werden, dazu kommt H_v und zweimal die Erzeugung der Geschwindigkeit, da die Saugrohrgeschwindigkeit v_s im Raum vor der Mischdüse vernichtet wird und v_1 am Ende der Mischdüse neu erzeugt werden muß.

$$N_2 = G_2 \cdot \left[H - l_2 + H_v + \frac{v_s^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g}\right] = G_2 \cdot 3{,}29\,\text{m}.$$

Mit $N_1 = N_2$ ergibt sich $G_1/G_2 = 0{,}161$.

b) $V_1 + V_2 = f_1 \cdot v_1 = 10\,\text{dm}^3/\text{s}$;

c) $\dfrac{V_1 \cdot \gamma_1}{V_2 \cdot \gamma_2} = \dfrac{G_1}{G_2}$; $\quad \dfrac{V_1}{V_2} = 0{,}177$; $\quad V_1 = 1{,}505\,\text{dm}^3/\text{s}$, $\; V_2 = 8{,}495\,\text{dm}^3/\text{s}$;

$G_1 = 1{,}505$ kp/s; $\quad G_2 = 9{,}35$ kp/s;

d) $\gamma_m = 1{,}085\,\text{kp/dm}^3$;

e) $v_2 = \dfrac{f_1}{f_2} \cdot v_1 = 10$ m/s;

f) $\dfrac{p_2}{\gamma_m} + \dfrac{v_2^2}{2g} + l_2 = \dfrac{p_L}{\gamma_m} + \dfrac{v_1^2}{2g} + \dfrac{h_v}{4}$; $\quad p_2 = 0{,}487$ at;

g) $\dfrac{p_L}{\gamma_2} = \dfrac{p_3}{\gamma_2} + H + H_v + \dfrac{v_s^2}{2g}$; $\quad p_3 = 0{,}635$ at;

h) $\dfrac{p_3 - p_2}{\gamma_2} = \dfrac{v_3^2}{2g}$; $\quad v_3 = 5{,}14$ m/s;

i) $f_3 = \dfrac{V_2}{v_3} = 0{,}1655\,\text{dm}^2 = 16{,}55\,\text{cm}^2$;

k) $\frac{p_0 - p_2}{\gamma_1} - \frac{3h_v}{4} = \frac{c^2}{2g}$; $c = 22{,}5\,\text{m/s}$;

l) $f_4 = \frac{V_1}{c} = 0{,}669\,\text{cm}^2$; m) $F = \frac{V_2}{v_s} = 42{,}5\,\text{cm}^2$.

83. Dieselben Fragen für eine Wasserstrahlpumpe wie in Aufgabe 82 sind unter Umstellung von e und f zu beantworten, wenn $p_0 = 5$ at, $p_L = 1{,}03$ at, p_2 im engsten Querschnitt 0,3 at, $f_1 = 100\,\text{cm}^2$, $l_2 = 0{,}37$ m, $H = 4$ m, $H_v = 0{,}5$ m, $v_s = 1{,}5$ m/s, $v_1 = 1{,}5$ m/s; $h_v = 2$ m, $\gamma_1 = 1000\,\text{kp/m}^3$ und $\gamma_2 = 1050\,\text{kp/m}^3$ sind. $l = 0{,}61$ m.

84. Bei einer **Überdruck-Wasserturbine** nach Bild 264, deren Laufrad vollständig unter Wasser läuft, ist $H_0 = 2{,}5$ m, $H_1 = 1{,}5$ m, $H_2 = 1{,}7$ m, der freie Querschnitt am Ende der Leitschaufeln $f_1 = 0{,}033\,\text{m}^2$, am Anfang des Saugrohres $f_2 = 0{,}07\,\text{m}^2$ und am Ende des Saugrohres $f_3 = 0{,}105\,\text{m}^2$. Barometerstand 760 Torr. Die übertragene Arbeit entspricht einem Druckhöhenverlust $A = 1{,}9$ m, die Verluste im Laufrad betragen $h_v = 0{,}485$ m.

a) Welche Geschwindigkeit tritt am Saugrohraustritt auf?

b) Welche Geschwindigkeit und welcher absolute hydraulische Druck ist bei f_2?

c) Welche Geschwindigkeit und welcher absolute hydraulische Druck ist bei f_1?

d) Welche Wassermenge und welche Leistung ergibt sich?

Anleitung:

$$\frac{p_0}{\gamma} + H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g};$$

$$\frac{p_0}{\gamma} + H_2 - A - h_v = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g};$$

$$\frac{p_0}{\gamma} + H_0 - A - h_v = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{c_3^2}{2g};$$

$$f_1 : f_2 : f_3 = \frac{1}{c_1} : \frac{1}{c_2} : \frac{1}{c_3};$$

$$V_s = f \cdot c;$$

$$N = V_s \cdot A.$$

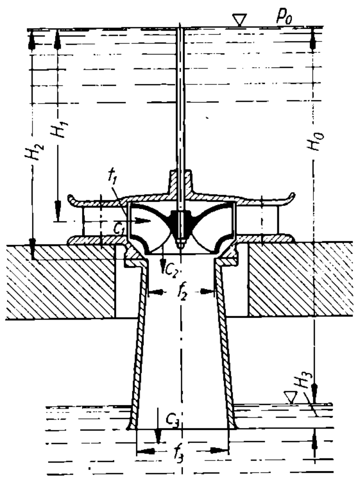


Bild 264

Wassermessung

85. Wie wird die Durchflußmenge bei einer Rohrleitung gemessen?

Lösung: Man mißt die Druckdifferenz, welche sich infolge der Geschwindigkeitserhöhung im Meßquerschnitt einstellt.

$$\text{Es ist } h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Ist F der Rohr- und f der Meßquerschnitt, so ist das Öffnungsverhältnis $m = \frac{f}{F} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$.

Wassermenge je Sekunde $Q = F \cdot v_1 = \mu \cdot f \cdot v_2$
$v_1 = \mu \cdot m \cdot v_2$.

$$\frac{v_2^2}{2g} - \mu^2 m^2 \frac{v_2^2}{2g} = h_1 - h_2 = h_{\text{gemessen}};$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2g \cdot h}}{\sqrt{1 - \mu^2 m^2}}; \quad Q = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2 m^2}} \cdot f \cdot \sqrt{2gh}.$$

In den VDI-Meßregeln wird $\frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2 m^2}}$ durch die Durchflußzahl α ersetzt. α ist vom Öffnungsverhältnis und von der Reynoldsschen Zahl bis zu Re = 100000 abhängig. Bei Re > 100000 ist sie nur noch von m abhängig. Für genaue Messungen mit Norm-Meßgeräten sind die VDI-Meßregeln zugrunde zu legen.
Es ist hierbei $Q = \alpha \cdot f \cdot \sqrt{2gh}$.
Bei diesen Messungen kommt der Stoß der austretenden Flüssigkeitsmengen nur sehr wenig zur Geltung, hat aber immerhin einen kleinen Einfluß, so daß α etwas größer genommen werden muß als

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2 m^2}}.$$

Dementsprechend sind in den Meßregeln und den Taschenbüchern Werte für α tabellarisch gegeben.
Gemessen wird 1. mit Staurohr (s. Aufg. 79), 2. mit Blenden (Staurand), vgl. Bild 265a, 3. mit Düsen (Bild 265b) und 4. mit Venturirohr (Bild 266).

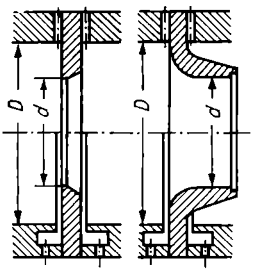
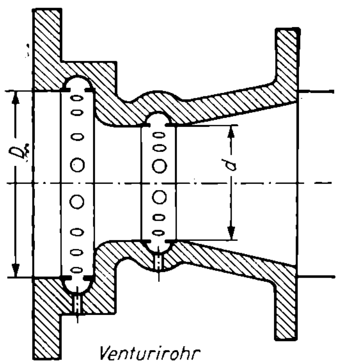


Bild 265 a) Blende b) Düse



Venturirohr Bild 266

Werte μ und α für Re > 100000 (s. Taschenbücher!)

m		0,6	0,4	0,2
Blende	μ	0,592	0,604	0,603
	α	0,74	0,66	0,615
Düse	μ	0,915	0,957	0,98
	α	1,142	1,043	0,99
Venturirohr	μ	0,925	0,96	0,99
	α	1,155	1,048	1,01

86. In einer Wasserleitung von 100 mm lichter Weite wird ein Venturirohr eingebaut. Öffnungsverhältnis $m = 0{,}4$. Über dem Quecksilber im Meßschenkel steht Wasser. Gemessene Quecksilberhöhe $h = 20$ mm. **a)** Wassermenge; **b)** Geschwindigkeit v_1?

Lösung: a) $\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2 m^2}} = 1{,}048$, $f = 0{,}4 F = 0{,}314\,\text{dm}^2$; nach Taschenb. $\alpha = 1{,}041$;

Einer Quecksilbersäule von 20 mm·Höhe entspricht eine Wassersäule von 271,8 mm Höhe.

$$h = 271{,}8\,\text{mm} - 20\,\text{mm} = 251{,}8\,\text{mm} = 0{,}2518\,\text{m}.$$

$$V_s = \alpha \cdot f \cdot \sqrt{2gh} = 7{,}29\,\text{dm}^3/\text{s}.$$

b) $$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\mu^2 m^2}} = 5{,}66\,\text{m/s}, \quad v_1 = m \cdot v_2 = 2{,}26\,\text{m/s}.$$

DIE BERECHNUNG DER STRÖMUNGSVERLUSTE

Zähigkeit, Reynoldssche Zahl, Turbulenz

87. Wie lautet die Gleichung für den **Druckverlust** durch Reibung und Wirbel in Abhängigkeit von l, v und d?

Lösung: Die Druckhöhe, die aufzuwenden ist, um die Reibung zu überwinden, ist erfahrungsgemäß 1. proportional der Leitungslänge l, d. h. je länger die Leitung, desto größer der Druckhöhenverlust, 2. proportional dem Verhältnis von benetztem Umfang zu Querschnitt $\frac{U}{F}$, 3. proportional dem Quadrat der Wassergeschwindigkeit, also auch proportional der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, 4. abhängig von der Wandbeschaffenheit, ob glatt oder rauh, was durch einen Faktor ϱ (Rho) ausgedrückt wird.

Bei Rohren ist $\frac{U}{F} = \frac{\pi \cdot d}{\pi d^2} \cdot 4 = \frac{4}{d}$, also Druckhöhen- oder Gefälleverlust $h_v = \varrho \frac{4\,l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$. Nun setzt man für $4\,\varrho$ meistens einen neuen Faktor, „die Widerstandszahl“ λ (griechisch Lambda), somit

$$\boldsymbol{h_v = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Bei einem beliebigen Querschnitt, z. B. trapezförmigem, bedeutet dann $\frac{F}{U}$ den „hydraulischen Radius“ und $d = \frac{4F}{U}$ den Ersatzdurchmesser.

Diese Widerstandsziffer λ hängt von der Zähigkeit, von der Geschwindigkeit, vom Durchmesser und der Rauhigkeit ab. Im folgenden wird das deutlich.

88. Was versteht man unter **Zähigkeit**? Flüssigkeiten und Gase erleiden nicht nur Normalspannungen unter dem Einfluß des Druckgefälles, sondern auch Schubspannungen. Diese Schubspannung τ wird an einer Platte ermittelt, welche auf einer dünnen Flüssigkeitsschicht gleitet, die sich auf einer ruhenden Platte befindet. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit nimmt von der unteren Platte bis zur oberen Platte von 0 bis v zu. Die Schubspannung, d. i. die Kraft je cm², hängt nun von der absoluten Zähigkeit der Flüssigkeit η und der Änderung der Geschwindigkeit $\frac{dv}{dy}$ ab. y Flüssigkeitshöhe.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}; \quad \eta = \tau : dv/dy.$$

Daraus bestimmt man die absolute Zähigkeit. Im CGS-System[1]) ist v in cm/s, y in cm und τ in dyn/cm² gegeben. Somit hat η die Einheit $\frac{\text{dyn} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{10^5\,\text{cm}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{10\,\text{m}^2}$. Diese Einheit bezeichnet man mit Poise.

In der Technik rechnet man unter Berücksichtigung, daß 10^5 dyn = 1 N ist, mit $\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$ oder $\frac{\text{kp}\,\text{s}}{\text{m}^2}$.

$$1\,\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 10\,\text{Poise}; \quad 1\,\frac{\text{kp} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 98{,}1\,\text{Poise}.$$

Anstelle der absoluten Zähigkeit wird meistens die kinematische Zähigkeit ν benutzt.

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}$$

Die Einheit von ν ist $\frac{\text{kg}}{\text{ms}} : \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. Aus CGS-System folgt die ebenfalls zulässige Einheit Stokes (St). Es gilt:

$$1\,\text{St} = 1\,\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} = \frac{1}{10\,000}\,\text{m}^2/\text{s}.$$

Für die Umrechnung von Englergrad gilt:

$$\nu = \left(7{,}6 \cdot E - \frac{6{,}31}{E}\right) \cdot \frac{1}{10^6}; \quad \left| \frac{\nu}{\text{m}^2/\text{s}} \right| \frac{E}{-} \right|^*$$

Zähigkeit von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur

t in °C	0	10	20	30	40	60	80
$10^6 \cdot \nu$ in m²/s	1,8	1,32	1,00	0,8	0,66	0,48	0,36

89. Was versteht man unter der **Reynoldsschen Zahl?** Um Versuche durchzuführen, ist es oft nötig, die Abmessungen des Versuchsmodells zu verkleinern und anstelle von strömenden Gasen Wasser zu nehmen. Es erhebt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Strömungsbilder zweier umströmter oder durchströmter Körper verglichen werden können.

[1]) Nach der Verordnung im Gesetzblatt vom 14. 8. 1958 nicht mehr zulässig.

Zunächst muß eine geometrische Ähnlichkeit vorhanden sein, d. h., alle Abmessungen müssen in demselben Verhältnis stehen.

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{a_1}{a_2}; \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3} \quad \text{usw.}$$

Weiter müssen auch die Massenkräfte und inneren Reibungskräfte in demselben Verhältnis stehen, also

$\frac{m_1 b_1}{m_2 b_2} = \frac{f_1 \cdot \tau_1}{f_2 \cdot \tau_2}$; m, b, f sind durch l, Geschwindigkeit v und ν zu ersetzen.

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\frac{l_1 \cdot v_1}{\nu_1} = \frac{l_2 \cdot v_2}{\nu_2}.$$

Man nennt nun $\mathrm{Re} = \frac{l \cdot v}{\nu}$ die Reynoldssche Zahl. Sie ist dimensionslos.

Bei Rohren tritt anstelle der Länge der Durchmesser.

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}.$$

90. Die Strömung von **Dampfturbinenschaufeln** soll an einem Modell mit 10fachen Abmessungen geprüft werden. Der Dampf hat 5 at absolut, 350 °C, $\nu_1 = 13{,}4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$, und eine Geschwindigkeit von 300 m/s. Wie groß muß die Wassergeschwindigkeit sein bei 20 °C?

Lösung: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{10}$; $\mathrm{Re} = \frac{v_1 \cdot l_1}{\nu_1} = \frac{v_2 \cdot l_2}{\nu_2}$; $v_2 = 2{,}24\,\mathrm{m/s}$.

91. Was versteht man unter **laminarer** und **turbulenter** Strömung?

Lösung: Eine Strömung ist laminar, wenn die einzelnen Stromfäden, nebeneinander geordnet, vorbeigehen, ohne sich zu vermischen. Wirbel und Störungen dürfen also nicht auftreten. Die laminare Strömung hat dementsprechend geringe innere Reibungsverluste, der Druckhöhenverlust bleibt gering, auch ein Wärmeübergang geht langsam vor sich. An den Wänden selbst ist die Geschwindigkeit null, da die Flüssigkeit dort haftet, in der Mitte ist die maximale Geschwindigkeit zweimal so groß als die mittlere, der Verlauf über den Querschnitt ist parabolisch. Bis zu einer Reynoldsschen Zahl von Re = 2320 ist jede Strömung laminar.

Die mittlere Geschwindigkeit nähert sich mit der Zunahme der Turbulenz immer mehr der maximalen Geschwindigkeit in der Mitte der Strömung (s. Bild 267).

Mittlere Geschwindigkeit

$\mathrm{Re} \leqq 2320$	$v = 0{,}50\, v_{\max}$
$= 45000$	$v = 0{,}82\, v_{\max}$
$= 0{,}2 \cdot 10^6$	$v = 0{,}84\, v_{\max}$
$= 10^6$	$v = 0{,}86\, v_{\max}$
$= 5 \cdot 10^6$	$v = 0{,}91\, v_{\max}$

Wird Re = 2320 überschritten, so beginnt ein Übergangsgebiet zur turbulenten Strömung, es bilden sich Wirbel, die mitschwimmen und an den Wänden enden. Bei der turbulenten Strömung sind die Druckhöhenverluste größer als bei der laminaren Strömung.

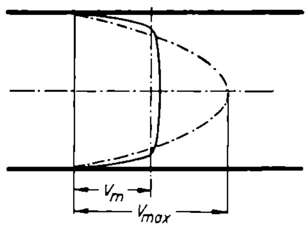


Bild 267

Die Rauhigkeit der Wand spielt bis zu einem gewissen Grade und bis zu einer entsprechenden Geschwindigkeit keine Rolle, da sich an der Wand unmittelbar eine dünne laminare Schicht bildet, welche die Wand sozusagen glättet. Bis dahin verhält sich das Rohr wie ein absolut glattes Rohr, wenn auch einige Wirbel auftreten. Als Kriterium hat man dafür die Rauhigkeitskennzahl eingeführt. Ist k die absolute Rauhigkeit in m, so ist $\frac{v \cdot k}{\nu} = 70$ bis 100 die Grenzzahl. Bei in Richtung der Strömung liegenden Platten ist $\frac{v \cdot k}{\nu}$ sogar 150. Ist $\frac{v \cdot k}{\nu}$ größer, bildet sich die glättende Schicht nicht mehr, und die Turbulenz erstreckt sich auch auf die Wand. Man spricht von rauhen Rohren.

Die Ermittlung der Widerstandsziffer, Verluste

92. Wie berücksichtigt man die durch **Rohrreibung** entstehenden **Verluste**?

Lösung: Druckhöhenverlust $h_v = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$.

Bei Rinnen, z. B. bei einem trapezförmigen Querschnitt eines Wassergrabens, wird anstelle von Durchmesser d ein Ersatzdurchmesser gesetzt.

$$d = \frac{4 \cdot F}{U} = \frac{4 \cdot \text{Querschnitt}}{\text{benetzter Umfang}}.$$

Das λ hängt nun von der Art der Strömung, der Zähigkeit, dem Durchmesser und der Rauhigkeit ab (s. Kurven in Taschenbüchern)

a) Für laminare Strömung bis Re = 2320 ist $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$,

b) für glatte oder glatt zu erachtende Rohre bis zu einer Kennzahl $\frac{vk}{\nu} = 70$

$$\text{nach Hermann } \lambda = 0{,}0054 + \frac{0{,}396}{\mathrm{Re}^{0{,}3}} \text{ bis zu Re} = 2 \cdot 10^6$$

$$\text{nach Blasius } \lambda = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}^{0{,}25}} \text{ bis zu Re} = 10^5$$

$$\text{nach Nikuradse } \lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\mathrm{Re}^{0{,}237}} \text{ von Re} = 10^5 \text{ bis } 10^8$$

c) für das Übergangsgebiet zum rauhen Rohr von $\frac{vk}{\nu} = 70$ bis $\frac{vk}{\nu} = 200$ nach Schrieder $\lambda = \frac{0{,}109}{(d/k)^{0{,}25}}$,

d) für das Übergangsgebiet zum rauhen Rohr von $\frac{v\,k}{\nu} = 200$ bis $\frac{v\,k}{\nu} = 1000$ nach Schrieder

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg d/k + \frac{120 \cdot \nu}{v\,k} + 1{,}018\right)^2} \;{}^{*)},$$

e) für vollkommen rauhe Wand nach Prandtl-Nikuradse $\frac{v\,k}{\nu} \geqq 1000$

$$\lambda = \frac{1}{(2 \lg d/k + 1{,}138)^2}\,.$$

Rauhigkeit k in mm

Neuer Stahl	0,05 ··· 0,1
neuer Grauguß	0,5 ··· 1,0
angerosteter Stahl	0,4 ··· 0,6
angerosteter Grauguß	1 ··· 1,5
geglätteter Zement	0,3 ··· 0,8
unbearbeiteter Zement	1 ··· 2,0
rauhe Bretter	1 ··· 2,5
rauher Bruchstein	8 ···15
saubergehaltene Böschung	40
bewachsene Flüsse	300

Wellige Rauhigkeit nach Hopf entsteht bei asphaltierten Rohren. Ist λ_0 die Widerstandszahl für glatte Rohre, so ist $\lambda = \xi \cdot \lambda_0$ diejenige für wellige Rauhigkeit.

ξ für Holzrohre 1,5 bis 2
ξ für asphaltierte Rohre 1,2 bis 1,5
ξ für bituminösen Überzug 1,03 bis 1,1.

93. Wie berücksichtigt man den **Druckhöhenverlust** des Wassers in Krümmern, Ventilen, Schiebern und Hähnen?

Lösung: Auch hier ist der Verlust proportional der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$. Man setzt allgemein Druckhöhenverlust

$$\boldsymbol{h_v = \zeta \frac{v^2}{2g}},$$

wobei ζ (griechisch Zeta) eine durch Versuche ermittelte Widerstandszahl ist. Für kreisförmig gebogene Rohrstücke ist $\zeta = 0{,}2$ bis 0,5. Für scharfkantige Kniestücke bei Wasserleitungen $\zeta = 0{,}5$ bis 1,2, wobei die hohen Werte ζ für kleine Durchmesser gelten, für Hähne und Schieber $\zeta = 1$ bis 1,5, Ventile mit Rippen $\zeta = 3$ bis 5, Ventile ohne Rippen $\zeta = 1{,}5$ bis 3.
Der Druckhöhenverlust wird demnach als ein Vielfaches bzw. als Bruchteil der Geschwindigkeitshöhe ausgedrückt.
Vielfach wird der durch solche Einbauten entstehende Druckhöhenverlust durch eine gleichwertige Länge der Rohrleitung ersetzt – die sog. äquivalente Rohrleitungslänge.

*) Veröffentlicht in der Zeitschrift Wärmetechnik 7. Jahrgang Nr. 3, Düsseldorf, März 1955.

Widerstandsgleiche Rohrlängen in m

Nennweite in mm	50	100	200	300	500	1000
Absperrventil	13	28	67	127	255	
Eckventil	15	30	67	115	225	
Rheiventil	3	6,7	16,5	27	69	
Koswa-Ventil	3,1	7,5	18	30	73	
Freiflußventil	2	4	8	10	16	
Schieber		1	2,5	4,5	10	
90-Rohrbogen R-3d	1,5	3	5	7,5	14	
Lyrabogen, glatt	4	9	21	34	64	
Krümmer	3	7,5	18	32	54	

Bei einer Umlenkung um den Winkel δ ist mit $\frac{\delta}{90^\circ}$ zu multiplizieren.

Beispielsweise habe ein Krümmer mit der Nennweite 100 mm nach obiger Tabelle eine widerstandsgleiche Rohrlänge von 7,5 m. Es ist dann

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} .$$

Beim glatten Rohr ist bei $\mathrm{Re} = 10^6$

$$\lambda = 0{,}0054 + \frac{0.396}{\mathrm{Re}^{0,3}} = 0{,}0118$$

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d} = 0{,}0118 \frac{7{,}5}{0{,}1} = 0{,}885 .$$

Im Gegensatz zum Krümmer hat ein Rohrbogen nur eine widerstandsgleiche Länge von 3 m. Deshalb hierbei $\zeta = 0{,}354$.

94. Eine **Kreiselpumpe** drückt minutlich 9 m³ Wasser durch eine 300 mm weite und 280 m lange Rohrleitung auf 17 m Höhe. Die Saughöhe ist Null, d. h., das Wasser fließt der Pumpe zu.

In der Rohrleitung sind 2 Krümmer eingebaut. Rauhigkeit bei angerostetem Rohr $k = 0{,}5$ mm. **a)** Geschwindigkeit und Geschwindigkeitshöhe; **b)** Widerstandsziffer λ; **c)** Verlusthöhe; **d)** Gesamthöhe und Leistung der Pumpe bei einem Wirkungsgrad $\eta = 0{,}68$?

Lösung: a) 2,12 m/s; $\frac{v^2}{2g} = 0{,}23\,\mathrm{m}$;

b) $\nu = \frac{1}{10^6} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$; $\frac{vk}{\nu} = 2{,}12\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}0005\,\mathrm{m} \cdot 10^6\,\mathrm{s/m}^2 = 1060$

$$\frac{d}{k} = \frac{300\,\mathrm{mm}}{0{,}5\,\mathrm{mm}} = 600$$

$$\lambda = \frac{1}{(2 \lg d/k + 1{,}138)^2} = 0{,}0223;$$

c) $l = 280\,\mathrm{m} + 2 \cdot 32\,\mathrm{m} = 344\,\mathrm{m}$

$$h_v = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 5{,}88\,\mathrm{m};$$

d) $H = h + \frac{v^2}{2g} + h_v = 23{,}11\,\mathrm{m}$; $N = G_s H/\eta = 68$ PS.

95. Ein **Pumpwerk** drückt minutlich 9 m^3 Wasser ($\nu = 10^{-6}$) durch eine Rohrleitung von 400 mm Durchmesser und 8,2 km Länge in den Hochbehälter. Der Wasserspiegel des letzteren liegt 37 m über dem des Druckwindkessels im Pumpenhaus (s. Bild 268). Das Manometer am Windkessel zeigt 7,6 at Überdruck. Gesucht wird **a)** die Wassergeschwindigkeit in der Rohrleitung; **b)** die entsprechende Geschwindigkeitshöhe; die Verlusthöhe und **c)** Reibungswiderstandszahl λ der Rohrleitung; **d)** die Rauhigkeit k, wenn $\frac{vk}{\nu} > 1000$ ist.

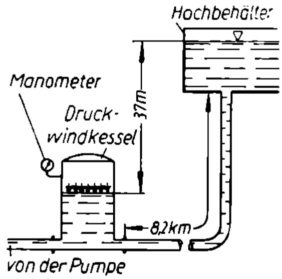


Bild 268

96. Zur **Wasserversorgung** einer Stadt wird im Gebirge Quellwasser angestaut und durch eine 5,4 km lange Rohrleitung von 300 mm Durchmesser mit natürlichem Gefälle von 48 m dem Behälter der Stadt zugeführt. Die Widerstandszahl der Rohrleitung ist $\lambda = 0{,}025$. Zwölf Krümmer verursachen einen Druckhöhenverlust von je $0{,}5\,\frac{v^2}{2\,g}$, ferner drei Absperrschieber je $2\,\frac{v^2}{2\,g}$. **a)** Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus der Leitung in den Behälter aus? **b)** $\frac{vk}{\nu}$ und $\frac{d}{k}$ bei einem $k = 0{,}5$ mm; **c)** λ ist zu prüfen.

Lösung: **a)** $H = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g} + \sum\zeta\,\frac{v^2}{2g}$; $v = 1{,}43$ m/s;

b) 715; 600 **c)** $\lambda = \dfrac{1}{\left(2\lg\frac{d}{k} + \frac{120\nu}{v \cdot k} + 1{,}018\right)^2} = 0{,}0239$.

97. Ein **Wasserkran** zum Füllen von Lokomotivtendern wird durch eine 250 mm weite und 370 m lange Rohrleitung von einem Hochbehälter gespeist. Der Wasserspiegel des letzteren liegt 21 m, die Ausflußöffnung des Krans 3,4 m über Schienenoberkante. Die Widerstandszahl der Rohrleitung ist $\lambda = 0{,}02$. Fünf Biegungen in der Leitung verursachen einen Druckhöhenverlust von je $0{,}8\,\frac{v^2}{2\,g}$; ferner zwei Absperrschieber je $1{,}5\,\frac{v^2}{2\,g}$. **a)** Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit v des Wassers am Kran? **b)** In welcher Zeit wird ein Lokomotivtender von 32 m^3 Fassungsraum gefüllt?

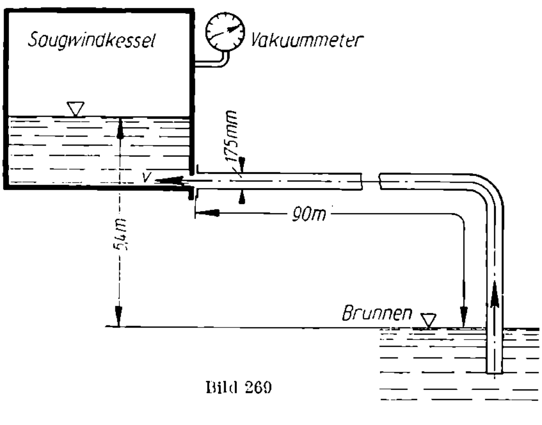


Bild 269

98. Die **Saugleitung** einer Pumpe hat 175 mm Durchmesser und 90 m Länge (Bild 269). Der Wasserspiegel des Brunnens liegt 5,4 m unter dem Wasserspiegel des Saugwindkessels. Das Vakuummeter am Saugwindkessel zeigt 210 Torr absoluten Druck an.

Der Barometerstand beträgt 760 Torr. Gesucht wird **a)** der absolute Druck im Saugwindkessel in kp/m²; **b)** die Wassergeschwindigkeit in der Rohrleitung. Die Widerstandszahl der Leitung ist $\lambda = 0{,}03$. Drei Krümmer verursachen Druckhöhenverluste von je $1{,}2\,\frac{v^2}{2\,g}$; ein Absperrventil und ein Fußventil je $4\,\frac{v^2}{2\,g}$; **c)** minutlich gehobene Wassermenge bei einer Ausflußzahl 0,9.

99. Der Zeiger des Vakuummeters am **Kondensator** einer Dampfmaschine gibt 90 Torr absoluten Druck an. Das Einspritzwasser wird durch eine 70 mm weite und 13 m lange Rohrleitung aus einem Brunnen angesaugt, dessen Wasserspiegel um $h = 6{,}5$ m unter der Einmündung des Einspritzrohres in den Kondensator liegt (Bild wie bei Aufg. 66). Der Barometerstand beträgt 750 Torr. Die Rauhigkeit beträgt bei Stahlrohr $k = 0{,}2$ mm, der Saugkorb mit Fußventil hat ein $\zeta = 4{,}5$, der vorhandene Krümmer eine äquivalente Länge von 3 m. Die Widerstandziffer ist $\lambda = 0{,}025$. **a)** Wassergeschwindigkeit v; **b)** $\frac{vk}{\nu}$ und $\frac{d}{k}$; **c)** λ ist nachzuprüfen; **d)** sekundliche Einspritzwassermenge bei einer Ausflußzahl $\mu = 0{,}9$.

ZEITLICH BESCHLEUNIGTE STRÖMUNG

100. Welches ist der **Druckhöhenverbrauch** infolge der Beschleunigung einer Wassersäule?

Lösung: Ist f der Querschnitt einer Wassersäule, m die Masse, l die Länge, so ist die Beschleunigungskraft $P = fp = m \cdot b$.

Mit $p = h_b \gamma = h_b \varrho g$ und $m = f l \varrho$ wird $f h_b \varrho g = \varrho f l b$; hieraus ergibt sich die zur Beschleunigung erforderliche Druckhöhe h_b:

$$\boldsymbol{h_b = l\,\frac{b}{g}}\,.$$

101. Bei einer einfach wirkenden **Kolbenpumpe** sind die Abmessungen (Bild 270) gegeben. Der Hub beträgt $s = 150$ mm, die Drehzahl $n = 120$ U/min, das Verhältnis Kurbelradius zu Schubstangenlänge $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, das Gewicht des Saugventils $G_1 = 5$ kp, die Wichte des Ventils $\gamma_1 = 7{,}3$ kp/dm³, Kraft der Ventilfeder $P_f = 10$ kp, die Widerstandszahl im Saugrohr $\lambda = 0{,}03$, die Widerstandszahl des Ventils $\zeta = 0{,}6$, der Barometerstand 760 Torr.
Der Kolben erfährt im Totpunkt die größte Beschleunigung

$$b_1 = r\,\omega^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right)$$

(s. Dynamik, Aufg. 98). Die Wassermasse des Saugstutzens zwischen Kolben und Saugwindkessel erfährt ebenso eine Beschleunigung b_2, während das Wasser im Saugrohr infolge der ausgleichenden Wirkung des Saugwindkessels gleichmäßig, also mit konstantem v fließt. Die Reibung im Saugrohr ist zu berücksichtigen, diejenige im Saugstutzen kann vernachlässigt werden.

Das Ventil übt durch seine Feder und sein Gewicht abzüglich seines Auftriebes eine Kraft aus, die dem Druck einer zusätzlichen Wassersäule entspricht. Ebenso ist die Masse des Ventils mit zu beschleunigen. Man zieht allerdings die Wassermenge ab, die dem Ventilvolumen entspricht, da man die Wassermasse berechnet hat, als ob das Ventil keinen Raum einnehme.

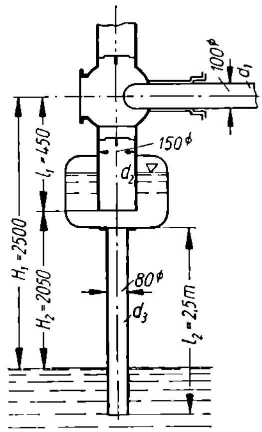


Bild 270

Es ist zu berechnen für die Totlage:

a) die Kolbenbeschleunigung b_1 und die Wasserbeschleunigung im Stutzen; ferner Druckhöhenverlust h_b;

b) die mittlere Wassermenge je Sekunde und die Wassergeschwindigkeit im Saugrohr; ferner Druckhöhenverlust durch Reibung h_{v0};

c) die Ventilbelastung, d. h. der Druckverlust infolge des Gewichtes und der Feder des Ventils h_{v1};

d) der Druckhöhenverlust h_{v2} infolge der Beschleunigung des Ventils, die gleich der Beschleunigung des Wassers sein soll;

e) der Druckhöhenverlust infolge der Strömung im Ventil h_{v3};

f) der absolute Druck hinter dem Kolben p_1;

g) der absolute Druck im Saugwindkessel p_2 in Höhe H_2.

Lösung: a) $b_1 = r\omega^2\left(1 + \frac{r}{l}\right) = 0{,}075\,\text{m}\left(\frac{2\pi\,120}{\text{min}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 14{,}2\ \text{m/s}^2,$

$$b_2 = b_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 14{,}2\ \text{m/s}^2\left(\frac{100\,\text{mm}}{150\,\text{mm}}\right)^2 = 6{,}31\ \text{m/s}^2,$$

$$h_b = l_1\,\frac{b_2}{g} = 0{,}45\,\text{m}\,\frac{6{,}31\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}29\,\text{m}.$$

b) $$V_s = \frac{\pi d_1^2}{4}\,sn = \frac{\pi\,1^2\,\text{dm}^2}{4}\cdot\frac{1{,}5\,\text{dm}\cdot 120}{60\,\text{s}} = 2{,}35\,\text{dm}^3/\text{s}\,,$$

$$v = \frac{Q}{F_3} = \frac{4\,Q}{\pi d_3^2} = \frac{4\cdot 2{,}35\ \text{dm}^3/\text{s}}{\pi\cdot 0{,}8^2\,\text{dm}^2} = 4{,}69\,\text{dm/s} = 0{,}469\ \text{m/s}\,,$$

$$h_{v_0} = \lambda\,\frac{l_2}{d}\,\frac{v^2}{2\,g} = 0{,}03\,\frac{2{,}5\,\text{m}\cdot 0{,}469^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{0{,}08\,\text{m}\cdot 2\,g} = 0{,}0105\,\text{m}\,.$$

c) Volumen des Ventils $V = \frac{G_1}{\gamma} = \frac{5\,\text{kp}}{7{,}3\ \text{kp/dm}^3} = 0{,}685\ \text{dm}^3$, diesem V entspricht ein Wassergewicht $G_2 = 0{,}685$ kp.
Ventilkraft $P = G_1 + P_f - G_2 = 5\,\text{kp} + 10\,\text{kp} - 0{,}685\,\text{kp} = 14{,}315$ kp,

$$\text{ausgeübter Druck } p = \frac{P}{F_2} = \frac{4\cdot 14{,}315\ \text{kp}}{\pi\,15^2\ \text{cm}^2} \approx 0{,}081\ \text{kp/cm}^2,$$

$$h_{v_1} = \frac{p}{\gamma} = \frac{810\ \text{kp/m}^2}{1000\ \text{kp/m}^3} = 0{,}81\ \text{m}\,.$$

d) $G_1 - G_2$ wird zusätzlich beschleunigt;

$$P_b = m b_2 = (m_1 - m_2) \cdot b_2 = (5\,\mathrm{kg} - 0{,}685\,\mathrm{kg}) \cdot 6{,}31\,\mathrm{m/s^2} =$$
$$= 27{,}2\,\mathrm{N} \approx 2{,}78\,\mathrm{kp}.$$
$$p_2 = \frac{P_b \cdot 4}{\pi d_2^2} = \frac{2{,}78\,\mathrm{kp} \cdot 4}{\pi \cdot 15^2\,\mathrm{cm}^2} = 0{,}0157\,\mathrm{kp/cm^2} \text{ oder } h_{v_2} = 0{,}157\,\mathrm{m}.$$

e) $h_{v_3} = \zeta \frac{v^2}{2g}$. Für v ist hier die Geschwindigkeit bei Beginn des Hubes zu setzen, also $v = 0$ und $h_{v3} = 0$.

f) Barometerstand 760 Torr, also

$$H_0 = \frac{p_0}{\gamma} = 10{,}33\,\mathrm{m},$$
$$H_0 = H_1 + \frac{v^2}{2g} + h_b + h_{v_0} + h_{v_1} + h_{v_2} + h_{v_3} + \frac{p_1}{\gamma},$$
$$10{,}33\,\mathrm{m} = 2{,}5\,\mathrm{m} + 0{,}0112\,\mathrm{m} + 0{,}29\,\mathrm{m} + 0{,}0105\,\mathrm{m} + 0{,}81\,\mathrm{m} + 0{,}157\,\mathrm{m} + 0 + \frac{p_1}{\gamma},$$
$$\frac{p_1}{\gamma} = 6{,}55\,\mathrm{m}.$$
$$p_{1\,\mathrm{absolut}} = 0{,}655\,\mathrm{at}.$$

g) $H_0 = H_2 + \frac{v_2}{2g} + h_{v_0} + \frac{p_2}{\gamma}$,

$$10{,}33\,\mathrm{m} = 2{,}05\,\mathrm{m} + 0{,}0112\,\mathrm{m} + 0{,}0105\,\mathrm{m} + \frac{p_2}{\gamma},$$
$$\frac{p_2}{\gamma} = 8{,}26\,\mathrm{m}; \quad p_{2\,\mathrm{absolut}} = 0{,}826\,\mathrm{at}.$$

102. Dieselbe **Pumpe** wie in Aufg. 101 erhalte eine längere Saugleitung, so daß $H_1 = 2{,}5$ m bleibt, aber $l_2 = 10$ m wird. Sodann wird die Drehzahl auf $n = 180$ U/min erhöht. Es sind für diese Verhältnisse dieselben Fragen wie in Aufg. 101 zu beantworten.

103. Die **Wasserleitung** einer Stadt führt vom Hochbehälter 2,3 km weit bis zu einem Absperrschieber, von da weiter in das Leitungsnetz (Bild 271). Die lichte Rohrweite beträgt 300 mm. Bei gleichförmiger Wassergeschwindigkeit 1,5 m/s zeigt ein am Schieber angebrachtes Manometer 3,8 at hydrostatischen Druck. Der Schieber wird

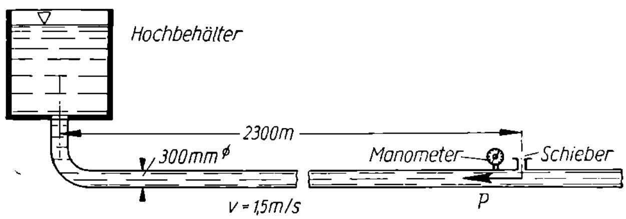


Bild 271

nun durch Drehen seiner Gewindespindel innerhalb 12 Sekunden so geschlossen, daß der Durchflußquerschnitt gleichmäßig verringert wird. Wie groß ist a) die Verzögerung der Wasserbewegung, b) der durch die Massenwirkung erzeugte Wasserdruck, c) der hydraulische Druck, den das Manometer während des Absperrvorgangs des Schiebers angibt?

ABLENKUNGSKRÄFTE BEI DER STRÖMUNG. IMPULSSATZ

Rückstoß, Kraft bei Umlenkung

104. Welche Sätze kann man zur Berechnung der bei der Strömung auftretenden **Ablenkungskräfte** anwenden?

Lösung: a) den Grundsatz der Dynamik:

$$\text{„Kraft = Masse} \cdot \text{Beschleunigung"} \quad P = m \cdot b.$$

b) den Impulssatz oder Satz von der Bewegungsgröße

$$P t = m v \text{ oder allgemein } \int P dt = m(v_1 - v_2); \text{ Masse je Sekunde } m_s = \frac{m}{t}.$$

105. Es sind für die drei in Bild 272a, b und c gegebenen Fälle die **Rückdrücke** zu berechnen.

Lösung: a) v wird um 90° umgelenkt, die umgelenkte Geschwindigkeit hat keine Komponente in Richtung x.

$$P = m_s \cdot v.$$

Wegen der geringen Ausdehnung der Platte ist mit dem Faktor ξ zu multiplizieren.

$$P = \xi \cdot m_s \cdot v.$$

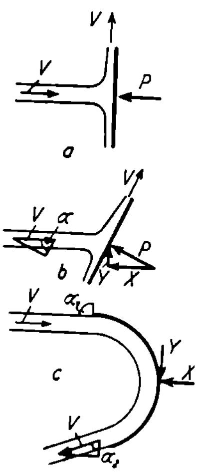


Bild 272

b) In Richtung von P wird die Geschwindigkeitskomponente $v \cdot \sin \alpha$ abgebremst.

$$P = m_s \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot \xi.$$

Kraft in Richtung x $\quad P_x = P \cdot \sin \alpha,$

Kraft in Richtung y $\quad P_y = P \cdot \cos \alpha.$

c) Der Strahl hat auch hier überall noch konstante Geschwindigkeit. v wird zunächst in Richtung x bis auf Null verzögert, dann wieder rückwärts auf $v \cdot \sin \alpha_2$ beschleunigt. $\sin \alpha_1 = 1, v_1 = v_2 = v,$

$$P_x = m_s \cdot (v_1 \cdot \sin \alpha_1 + v_2 \cdot \sin \alpha_2)$$
$$= m_s (v + v \cdot \sin \alpha_2)$$
$$P_y = m_s \cdot v \cdot \cos \alpha_2.$$

106. Ein Wasserstrahl trifft auf eine fest stehende Platte entsprechend Bild 273 mit einer Geschwindigkeit $v = 12$ m/s.

Strahldurchmesser $d = 100$ mm. Wie groß ist der Strahldruck, **a)** wenn die Platte sehr groß ist, **b)** wenn die Platte eine Fläche von $1{,}2\ \mathrm{m}^2$ hat und durch die geringe Ausdehnung der Platte ein Verlust eintritt, der durch den Beiwert $\xi = 0{,}8$ berücksichtigt wird? $\alpha = 60°$.

Lösung: $P \cdot t = m \cdot (v - v \cdot \cos\alpha) = m \cdot v \cdot (1 - \cos\alpha)$.

Masse je Sekunde $m_s = \dfrac{m}{t} = f v \varrho$,

$$P = f\varrho \cdot v^2 (1 - \cos\alpha),$$

$$f = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2\ \mathrm{m}^2}{4} = 0{,}00785\ \mathrm{m}^2,$$

Dichte $\varrho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

a) $P = 0{,}00785\,\mathrm{m}^2 \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 12^2\,\mathrm{m^2/s^2}\,(1 - \cos 60°) = 565\,\mathrm{N} = 57{,}6\,\mathrm{kp}$.

b) $P_1 = \xi P = 0{,}8 \cdot 57{,}6\,\mathrm{kp} = 46{,}08\,\mathrm{kp}$.

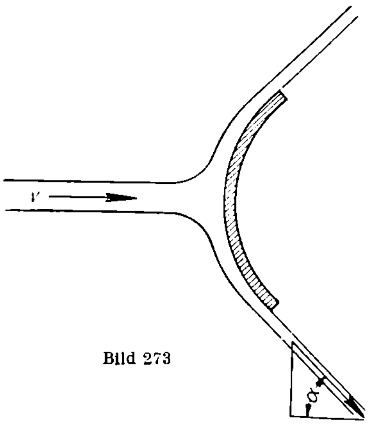


Bild 273

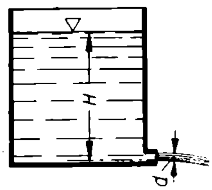


Bild 274

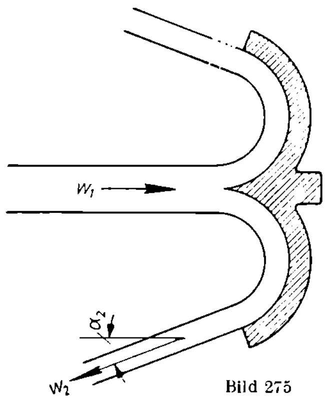


Bild 275

107. Wie groß ist die **Rückstoßkraft** auf ein Gefäß, aus dem ein Strahl von einer Dicke von $d = 80$ mm Durchmesser austritt, wenn die Gefällehöhe $H = 1{,}2$ m ist (Bild 274)?

108. Wie groß ist die Kraft P bei den Bechern einer **Peltonturbine** (Bild 275), wenn die Relativgeschwindigkeiten $w_1 = 20$ m/s und $w_2 = 19$ m/s betragen, $\alpha_1 = 180°$ (entspricht Aufg. 105) und $\alpha_2 = 10°$ betragen? Die Wassermenge ist $m_s = 420$ kg/s.

109. Ein Wasserstrahl von $m_s = 10$ kg/s trifft senkrecht auf eine ebene Platte mit einer Geschwindigkeit $c = 40$ m/s. $\xi = 0{,}7$ (nach Aufg. 105).

a) Wie groß ist P?

b) Wie groß ist P, wenn die Platte sich mit einer Geschwindigkeit $u = 18$ m/s in Richtung des Strahles fortbewegt und **c)** gegen die Platte bewegt?

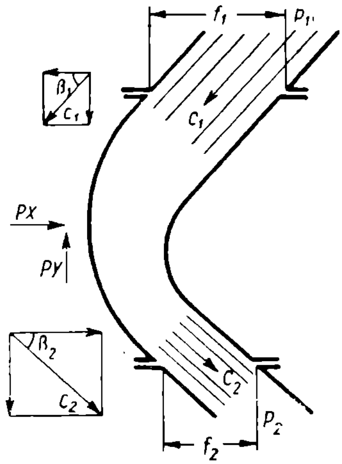


Bild 276

110. Wie groß ist bei einem **Peltonrad** (nach Bild 275) **a)** die Kraft auf die Becher, wenn das Rad einen Durchmesser $D = 1$ m und eine Drehzahl $n = 382$ U/min hat, der Strahl eine absolute Geschwindigkeit von $c_1 = 42$ m/s und eine Wassermenge $m_s =$ 40 kg/s besitzt? $\alpha_1 = 180°$, $\alpha_2 = 5°$. Relativgeschwindigkeit $w_2 = 0{,}90 \cdot w_1$. Wie groß ist **b)** die Radleistung?

111. I. Ein Strahl durchströmt nach Bild 276 ein feststehendes, sich **verengendes Gefäß unter Überdruck**. Unter Überdruck versteht man, daß der Druck vor dem Gefäß größer als hinter dem Gefäß ist. Wie groß sind die Rückstoßkräfte P_x und P_y? Im Bild wird ein fest stehendes Gehäuse von Stoff durchströmt. Über dem Kanal herrscht ein Druck p_1, unter dem Kanal p_2. Die Geschwindigkeit am Eintritt ist c_1, am Austritt c_2. Die Geschwindigkeit c an einer beliebigen Stelle sei in die Seitengeschwindigkeiten c_x waagerecht und c_y senkrecht zerlegt. Durch die waagerechte Kraft P_x wird die Seitengeschwindigkeit $c_1 \cdot \cos \beta_1$ zunächst durch Verzögerung auf Null verringert, darauf durch Beschleunigung die Seitengeschwindigkeit $c_2 \cdot \cos \beta_2$ erzeugt. Ist m_s die sekundlich durchströmende Masse, so wird

$$P_x = m_s\,(c_1 \cdot \cos \beta_1 + c_2 \cdot \cos \beta_2).$$

Ist die Umlenkung nur gering, so daß $\beta_2 > 90°$ ist, so wird $\cos \beta_2$ negativ.
Die senkrechte Seitenkraft P_y ergibt sich ähnlich, nur kommt hier noch eine **Kraft** $f_1 p_1 - f_2 p_2$ hinzu. So wie die Kraft P_y im Bild gezeichnet ist, verzögert sie die Seitengeschwindigkeit c_y.

$$P_y = m_s\,(c_1 \cdot \sin \beta_1 - c_2 \sin \beta_2) + f_1 p_1 - f_2 p_2\,.$$

Bei einer bewegten Laufschaufel bleiben die Verhältnisse die gleichen, nur **muß** anstatt der absoluten Geschwindigkeit c die Relativgeschwindigkeit w eingesetzt werden.

II. Gegeben: $f_1 = 20\ \text{cm}^2$, $f_2 = 10\ \text{cm}^2$; $\beta_1 = 55°$, $\beta_2 = 30°$; $c_1 = 5$ m/s; Wasser $\varrho = 1\ \text{kg/dm}^3$; $p_1 = 2$ at.

a) Lotrechte Querschnitte; **b)** sekundliche Durchflußmenge; **c)** c_2; **d)** Überdruck $p_1 - p_2$; **e)** P_x; **f)** P_y?

Lösung: a) $f_1 \cdot \cos \beta_1 = 11{,}48\ \text{cm}^2$; $f_2 \cdot \cos \beta_2 = 5\ \text{cm}^2$;

b) $(f_1 \cdot \cos \beta_1)\, c_1 \cdot \varrho = 5{,}74$ kg/s;

c) $c_2 = \dfrac{f_1 \cdot \cos \beta_1}{f_2 \cdot \cos \beta_2} \cdot c_1 = 11{,}48$ m/s;

d) $\frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}$; $p_1 - p_2 = 0{,}545\ \mathrm{kp/cm^2}$;

e) $m_s (c_1 \cos\beta_1 + c_2 \cdot \cos\beta_2) = 73{,}6\ \mathrm{N} = 7{,}5\ \mathrm{kp}$;

f) $m_s (c_1 \sin\beta_1 - c_2 \sin\beta_2) + p_1 f_1 - p_2 f_2 = 240{,}15\ \mathrm{N} = 24{,}48\ \mathrm{kp}$.

Stoßverluste bei Querschnittsänderung

112. Querschnittsänderungen einer Leitung bedingen Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit und des Druckes; erweitert sich z. B. der Querschnitt, so fällt die Geschwindigkeit, während der Druck steigt. Für die Querschnitte 1 und 2 einer horizontalen Leitung gilt bei verlustloser Strömung (vgl. S. 212):

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p' = \frac{\varrho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right).$$

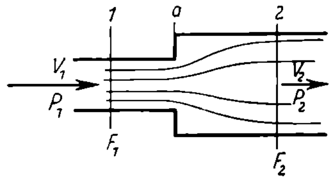


Bild 277

Bei einer **plötzlichen Erweiterung** der Querschnitte (Bild 277) entsteht ein Stoßverlust, da eine schnellfließende Flüssigkeit auf eine langsamfließende aufprallt. Mit Hilfe des Impulssatzes läßt sich der hierbei auftretende Druckverlust berechnen (vgl. Aufg. 104), die verlorene Strömungsenergie hat sich in Wärme umgesetzt.

$$Pt = m\ (v_1 - v_2)$$

$$P = \frac{m}{t}(v_1 - v_2)$$

$\frac{m}{t}$ ist die sekundlich durchströmende Flüssigkeitsmenge und P die auf diese Flüssigkeitsmenge wirkende Kraft.

Es ist $\qquad \frac{m}{t} = F_1 v_1 \varrho = F_2 v_2 \varrho$

folglich $\qquad P = F_2 \varrho\, v_2 (v_1 - v_2) = F_2 \Delta p$.

Druckerhöhung durch Stoß: $\qquad \Delta p = \varrho \cdot v_2 (v_1 - v_2)$.

Der Ausdruck ist die zwischen den Stellen a und 2 wirkende Druckdifferenz, die erforderlich ist, um die zwischen diesen Stellen befindliche Flüssigkeitsmasse $\frac{m}{t}$ von v_1 auf v_2 abzubremsen; da der Druck bei a gleich p_1 ist, so ist $\Delta p = p_2 - p_1$. Wenn keine Widerstände vorhanden wären, würde die Druckdifferenz $\Delta p'$ betragen, der Druckverlust ist somit

$$\Delta p_{\mathrm{verl}} = \Delta p' - \Delta p$$

$$\Delta p_{\mathrm{verl}} = \frac{\varrho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) - \varrho\left(v_2 v_1 - v_2^2\right) = \frac{\varrho}{2}(v_1 - v_2)^2.$$

Das Verhältnis der wahren Druckänderung zu der der verlustlosen Strömung ist

$$\eta = \frac{\Delta p}{\Delta p'} = 1 - \frac{\Delta p_{\text{verl}}}{\Delta p'} = 1 - \zeta$$

$$\zeta = \frac{\Delta p_{\text{verl}}}{\Delta p'} = \frac{\varrho/2\,(v_1 - v_2)^2}{\varrho/2\,(v_1^2 - v_2^2)} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\,.$$

Mit $\quad v_2 = \frac{F_1}{F_2} \cdot v_1 \quad$ folgt $\quad \zeta = \frac{1 - F_1/F_2}{1 + F_1/F_2}\,.$

Bei **Verengungen** gilt die gleiche Beziehung für das Verhältnis des eingeschnürten Querschnitts F_2' zum Querschnitt F_2

$$\Delta p_{\text{verl}} = \frac{\varrho}{2}\,(v_2' - v_2)^2\,.$$

Ist die Kontraktionszahl $F_2'/F_2 = \mu$, so folgt mit

$$v_2'\mu = v_2 \qquad \Delta p_{\text{verl}} = \frac{\varrho}{2}\,v_2^2\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2.$$

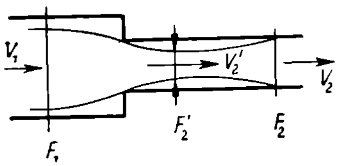


Bild 278

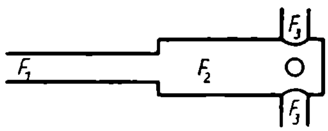


Bild 279

Die Kontraktionszahl μ kann bei scharfen Kanten wieder 0,61 gewählt werden. Sind die Kanten etwas gebrochen, so kann man bis 0,8 gehen, während man bei guten Ausrundungen $\mu = 0{,}97$ wählt.
Bei seitlichem Ausfluß und scharfen Kanten wird $\mu = 0{,}5$. Für Gase und Dämpfe spielt der Stoßverlust wegen der relativ geringen Masse der Medien keine Rolle. Somit wird die Druckänderung dort nur durch die verlustlose Strömung bestimmt (Dichte bei Gasen unter 1 bei Wasser 1 kg/m³).

113. An einem Rohr ist ein Verteilerkopf angesetzt, von dem 4 weitere Rohre seitlich abzweigen (Bild 279). Zwei dieser abgehenden Rohre sind abgesperrt, in den beiden anderen hat das Wasser eine Geschwindigkeit $v_3 = 8$ m/s. Der statische Überdruck bei F_1 beträgt 4 at. $F_1 = 45{,}6\ \text{cm}^2$, $F_2 = 81{,}2\ \text{cm}^2$, $F_3 = 20{,}3\ \text{cm}^2$.
a) Geschwindigkeiten v_2 und v_1, **b)** Druckunterschied zwischen F_1 und F_2, **c)** Druckunterschied zwischen F_2 und F_3, wenn Kontraktionszahl $\mu = 0{,}5$ ist, **d)** statischer Druck bei F_2, **e)** statischer Druck bei F_3, **f)** hydraulischer Druck bei F_1.

Lösung: a) $\quad 2F_3v_3 = F_2v_2 = F_1v_1$

$$v_2 = 4\,\text{m/s}\,; \quad v_1 = 7{,}13\,\text{m/s}\,.$$

b) $$\zeta = \frac{1 - F_1/F_2}{1 + F_1/F_2} = 0{,}28$$

$$\Delta p_1 = \frac{\varrho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 17\,500\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta p_{1\text{verl}} = \frac{\varrho}{2}(v_1 - v_2)^2 = 4900\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta p_1 = \Delta p'_1 - \Delta p_{1\text{verl}} = 12600\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1285\,\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$$

Kontrolle $\Delta p = \Delta p' \cdot \eta = \Delta p'(1 - \zeta) = 17500\ \text{N/m}^3 \cdot (1 - 0{,}28) = 12600 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

c) $\mu = 0{,}5$; $\quad F' = \mu F_3$; $\quad v'_3 = 2 \cdot v_3 = 16\ \text{m/s}$.

Verlustlos von 1 bis 2 $= \varrho/2\,(v_2^2 - v_3'^2) = -120000\ \text{N/m}^2$

verlustlos von 2 bis 3 $= \varrho/2\,(v_3'^2 - v_3^2) = +96000\ \text{N/m}^2$

Druckzunahme durch Stoß $\Delta p_2'' = \varrho\, v_3^2 (1/\mu - 1) = +64000\ \text{N/m}^2$

Druckverlust $\Delta p_{\text{verl}} = \varrho/2\ v_3^2 (1/\mu - 1)^2 = -32000\ \text{N/m}^2$

Druckänderung von 1 bis 3 $= -120000\ \text{N/m}^2 + 64000\ \text{N/m}^2 =$
$= -56000\ \text{N/m}^2$

oder $-120000\ \text{N/m}^2 + 96000\ \text{N/m}^2 - 32000\ \text{N/m}^2 = -56000\ \text{N/m}^2$.

d) Somit $p_1 = 40000\ \text{kp/m}^2 = 392400\ \text{N/m}^2$

$p_2 = p_1 + \Delta p_1 = 405000\ \text{N/m}^2 = 41300\ \text{kp/m}^2$.

e) $p_3 = p_2 - 56000\ \text{N/m}^2 = 349000\ \text{N/m}^2 = 35600\ \text{kp/m}^2$.

f) $p_0 = p_1 + \varrho/_2\, v_1^2 = 392400\ \text{N/m}^2 + 25418\ \text{N/m}^2 = 417818\ \text{N/m}^2 =$
$= 42604\ \text{kp/m}^2$.

114. Es sind bei dem Rohrverteiler der Aufg. 113 dieselben Fragen zu beantworten, wenn alle 4 Anschlußrohre geöffnet werden und das Wasser dort mit 6 m/s abfließt. Dabei soll beim Querschnitt F_1 der statische Überdruck Null sein.

Prinzip der Kreiselpumpe

115. Ein Wasserteilchen muß am Austritt aus dem Laufrade eine größere Energie als am Eintritt haben, diese Energiezunahme wird durch die Drehung des Laufrades auf das Wasserteilchen übertragen. Das Wasser tritt mit der absoluten Geschwindigkeit c_1 in das Laufrad ein, das an der Eintrittsstelle die Umfangsgeschwindigkeit u_1 hat.
Aus c_1 und u_1 ergibt sich die Relativgeschwindigkeit w_1, die das Wasserteilchen gegenüber dem bewegten Laufrad hat. Die entsprechenden Werte beim Austritt sind $c_2\ u_2\ w_2$.
Durch die Drehung des Rades wird die Energie der Umfangsgeschwindigkeit, bezogen auf 1 kg, von $\frac{u_1^2}{2}$ am Eintritt auf $\frac{u_2^2}{2}$ am Austritt erhöht.

Die Zunahme beträgt somit $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$.

Die Relativgeschwindigkeit nimmt von w_1 auf w_2 ab, da der Austrittsquerschnitt sich erweitert, infolgedessen nimmt auch die Energie der Relativgeschwindigkeit um den Betrag $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$ ab.

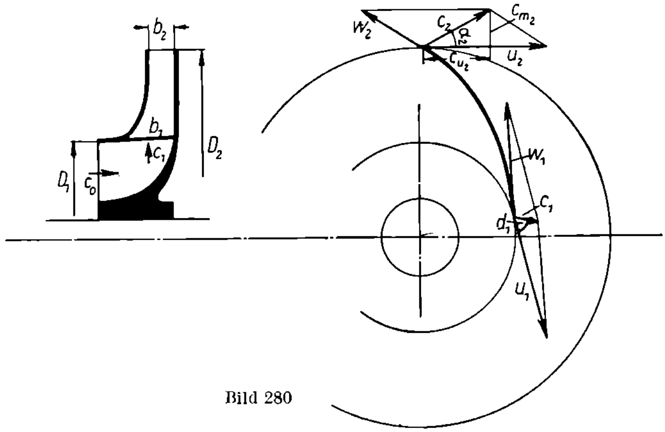


Bild 280

Die absolute Geschwindigkeit steigt von c_1 auf c_2 und die Energie der Absolutgeschwindigkeit nimmt um den Betrag $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}$ zu.
Die gesamte Energiezunahme beträgt somit

$$\Delta E = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}.$$

Dividiert man beide Seiten durch $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, so erhält man die theoretische Förderhöhe H_0, d. h. die Höhe, auf die 1 kg durch die Arbeit ΔE gehoben werden kann.

$$H_0 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}.$$

Aus den Geschwindigkeitsdreiecken folgt

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2 c_1 u_1 \cos \alpha_1$$

$$w_2^3 = c_2^2 + u_2^2 - 2 c_2 u_2 \cos \alpha_2 .$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung für H_0 ergibt sich nach Kürzung:

$$H_0 = \frac{u_2 c_2 \cos \alpha_2 - u_1 c_1 \cos \alpha_1}{g}.$$

Mit $c_{1u} = c_1 \cos \alpha_1$ und $c_{2u} = c_2 \cos \alpha_2$ ist

$$H_0 = \frac{u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}}{g}$$

$$\text{und } \Delta E = u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u}$$

oder $\Delta E = (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u})\omega$.

Das für 1 kg aufzubringende Drehmoment ist

$$M_t = \frac{\Delta E}{\omega}(r_2 \cdot c_{2u} - r_1 c_{1u}).$$

Die Druckhöhe H_0 wird jedoch nicht erreicht. Das Wasser erleidet Verluste durch Reibung, Wirbel und Stöße, die durch den hydraulischen Wirkungsgrad η_h erfaßt werden.
Außerdem mußten die Schaufeln unendlich nahe zueinander stehen, wenn die vorstehend angenommene Strömung eintreten soll. Deshalb wird noch ein Faktor k hinzugefügt, der etwa 0,75 ist, so daß die Nutzförderhöhe ist:

$$H = H_0 \eta_h \cdot k.$$

Die Wassermenge Q entspricht auch nicht ganz dem Zuflußquerschnitt, da sich in der Ansaugeleitung Luft ausscheidet; außerdem geht die Schaufeldicke ab. Man berücksichtigt dies durch den Liefergrad $\lambda = 0{,}95$, so daß die wirkliche Wassermenge ist

$$V = V_s \cdot \lambda.$$

116. Eine einstufige Kreiselpumpe soll in der Sekunde 24 l Wasser 10 m hoch fördern. Die Zulaufgeschwindigkeit steht senkrecht zum Einlaufquerschnitt $c_0 = c_1 = 2{,}5$ m/s. Die Einlaufgeschwindigkeit c_1 erfolgt radial, so daß $c_{u_1} = 0$.
Hydraulischer Wirkungsgrad $\eta_h = 0{,}80$, Liefergrad $\lambda = 0{,}95$, $k = 0{,}735$, Nabendurchmesser $d = 55$ mm, Drehzahl $n = 1500$ U/min, Außendurchmesser $D_2 = 1{,}6\,D$.
a) Innendurchmesser D_1, **b)** axiale Breite der Schaufel b_1 bei D_1, **c)** Durchmesser D_2, **d)** Umfangsgeschwindigkeit u und u_2, **e)** c_{u_2} aus der Nutzhöhe, **f)** Eintrittsgeschwindigkeitsdreieck, **g)** Austrittsdreieck nach dem c_{m_2} senkrecht dem Austrittsquerschnitt berechnet, wenn $c_2 = 1{,}1\,c_{u_2}$ gewählt wird, η_h Breite b_2 (Bild 280, 115).

Lösung: a) $\left(\frac{\pi D_0^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right) c_0 = \frac{V}{\lambda} = 25{,}3$ l/s

$D_0 = 126$ mm, gewählt 130 mm, $c_0 = c_1 = 2{,}35$ m/s korrigiert

b) $b_1 = \frac{V_0}{\pi D_1 \cdot c_1} = 0{,}264$ dm

c) $D_2 = 1{,}6\,D_1 = 1{,}6\,D_0 \approx 210$ mm

d) $u_1 = \pi D_1 n = 10{,}2$ m/s; $u_2 = \pi D_2 n = 16{,}3$ m/s

e) $H = \frac{u_2 c_{u_2} - 0}{g} \eta_h \cdot k;\quad c_{u_2} = \frac{g \cdot H}{u_2 \eta_h \cdot k} = 10{,}45$ m/s

f) $c_2 = 1{,}1\,c_{u_2} = 11{,}5$ m/s.

Radiale Geschwindigkeit $c_{m_2} = \sqrt{c_2^2 - c_{u_2}^2} = 4{,}8$ m/s

g) $\pi D_2 b_2 = \frac{V_0}{c_{m2}},\quad b_2 = 0{,}08$ m.

STRÖMUNGSBILDER

Potentialströmung

117. Wann ist eine **Strömung reibungslos** und **wirbellos**?

Lösung: Eine beliebige Strömung, z. B. ein gekrümmter Stromfaden, hat eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \frac{v}{R}$, wobei R der augenblickliche Krümmungshalbmesser ist (Bild 281). Während bei der Drehung eines starren Körpers ein sehr kleines Teilchen des Körpers auch seine Kanten mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 verdreht, ist dies bei Flüssigkeiten nicht der Fall, wenn die Reibung an den Kanten des Teilchens nicht groß genug ist. Es kann also der Fall eintreten, daß die äußere Kante $\overline{12}$ gegenüber der inneren Kante $\overline{34}$ des Teilchens zurückbleibt oder, wenn der benachbarte Stromfaden eine größere Geschwindigkeit hat und die Reibung groß genug ist, sogar voreilt. Daraus ergibt sich eine zusätzliche Winkelgeschwindigkeit des Teilchens $\omega_2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}R}$, wenn $\mathrm{d}v$ die Vergrößerung der Geschwindigkeit an der äußeren Kante und $\mathrm{d}R$ die Breite des Teilchens bedeuten. Ohne jede Reibung behält das Teilchen jedoch die Richtung seiner Kanten bei, wenn es sich auch auf gekrümmter Bahn bewegt. Somit ist dann die gesamte Winkelgeschwindigkeit null.

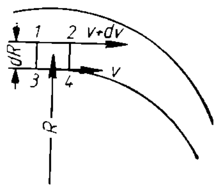


Bild 281

Ohne Reibung also

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{v}{R} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}R} = 0,$$

$$\text{daraus} \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}R}{R}; \quad \ln\frac{v_1}{v_2} = \ln\frac{R_2}{R_1},$$

$$R_1 v_1 = R_2 v_2 .$$

118. In dem **Saugrohr** einer Turbine nach Aufg. 84 habe das Wasser nicht nur eine Geschwindigkeit in senkrechter Richtung, wie es im allgemeinen sein wird, sondern auch eine Komponente in der Umfangsrichtung, die im Querschnitt f_2 (Bild 264) am Rande $u_2 = 1$ m/s bei einem Halbmesser $r_2 = 0{,}4$ m betragen soll.
Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit im Austrittsquerschnitt f_3, wenn $r_2 = 0{,}6$ m ist, und zwar im Halbmesser $r = 0{,}6$, $0{,}4$, $0{,}2$ und 0 m?

Lösung: $u_2 \cdot r_2 = u_3 \cdot r_3$

$$u_3 = u_2 \cdot \frac{r_2}{r_3} = 1\,\mathrm{m/s}\,\frac{0{,}4\,\mathrm{m}}{0{,}6\,\mathrm{m}} = 0{,}66\,\mathrm{m/s},$$

$$r = 0{,}6\,\mathrm{m}; \quad u = 0{,}66\,\mathrm{m/s},$$

$$r = 0{,}4\,\mathrm{m}; \quad u = 1\,\mathrm{m/s},$$

$$r = 0{,}2\,\mathrm{m}; \quad u = 2\,\mathrm{m/s},$$

$$r = 0; \quad u = \infty .$$

Reibungsfrei ist natürlich eine Strömung niemals. Deshalb wird bei $r = 0$ auch nicht $u = \infty$, sondern es bildet sich in der Mitte ein kleiner Kern, welcher sich wie eine feste Scheibe dreht.

119. Bei einer **Kaplan-Turbine** (Propellerturbine) nach Bild 282 tritt das Wasser mit einer Umfangsgeschwindigkeit $u_1 = 2$ m/s beim Halbmesser $r_1 = 0{,}3$ m in das Gehäuse ein. Wie groß ist u über dem Laufrad beim Halbmesser $r = 0{,}34$, $0{,}24$, und $0{,}14$ m?

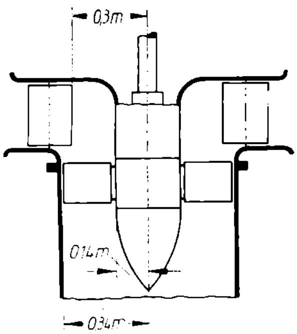


Bild 282

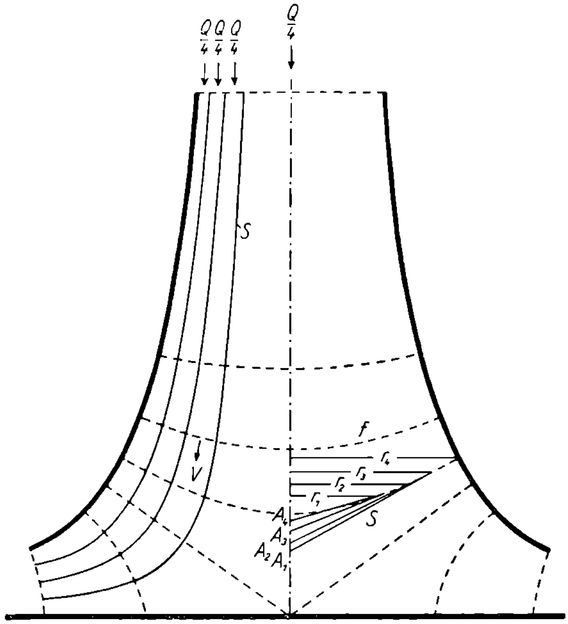


Bild 283

120. I. Was versteht man unter **Potentialströmung?**

Lösung: Potentialströmung ist eine Strömung ohne Wirbel, bei welcher man senkrecht zur Strömungsrichtung Flächen (f in Bild 283) angeben kann, in denen gleiche Geschwindigkeit vorhanden ist, das Geschwindigkeitspotential also dasselbe ist.
Senkrecht zu den Potentialflächen steht die Richtung der Geschwindigkeit. Ein Stromteilchen durchläuft eine Stromlinie (S). Die äußerste Stromlinie schmiegt sich der Wand an. Da die Potentialflächen und ihre Spuren senkrecht auf den Stromlinien stehen, münden sie auch senkrecht auf die Wand.
Man zeichnet zunächst nach Augenmaß einige Stromlinien und dazu senkrecht einige Potentialflächen. Dann teilt man diese Flächen so ein, daß durch die einzelnen Ringe die gleiche Menge durchfließt. Im Bild wird dies erreicht, wenn die Mantelflächen der einzelnen Kegelstümpfe einander gleich sind, also

$$\pi\ r_1 \cdot s_1 = \pi \cdot (r_2 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_1) = \pi \cdot (r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2) \text{ usw.}$$

Der Wert π kann weggelassen werden.
Nachdem man so verfahren ist, verbessert man die Stromlinien und evtl. die Potentiallinien.

II. Das im Bild gegebene Saugrohr hat am Eintritt einen Durchmesser $D = 0{,}708$ m und am Austritt eine Potentialfläche von 1,55 m². Der Eintrittsquerschnitt liegt 2 m über dem Boden, das Wasser im Untergraben steht 0,3 m über dem Boden. Die Wasseraustrittsgeschwindigkeit soll nicht mehr als 1,3 m/s betragen. **a)** Wassergeschwindigkeit beim Eintritt, **b)** Gewinn an Wasserhöhe durch das Saugrohr, **c)** Gewinn an Leistung durch das Saugrohr?

Lösung: **a)** 5,09 m/s, **b)** $H = h_1 - h_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \approx 2{,}935$ m,

c) $N = QH = 79$ PS.

Strömung um einen Körper

121. Wie entsteht ein **Wirbel?**

Lösung: Ein Wirbel ist die Drehung eines Flüssigkeitsteilchens um einen Wirbelkern, welcher sich wie ein fester Körper dreht. In einer Strömung kann ein einzelner Wirbel nicht auftreten, es entstehen immer zwei Wirbel, deren Drehsinn entgegengesetzt ist (Bilder 284 und 285).

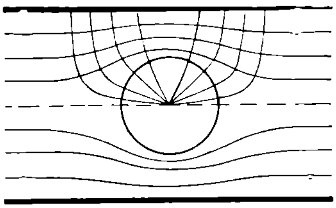


Bild 284

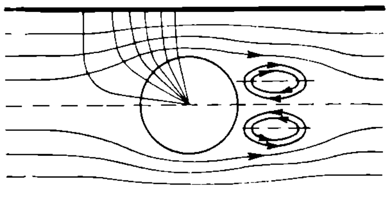


Bild 285

Ein Wirbel schwimmt mit der Flüssigkeit weg und kann nur an einer Wand oder an der Oberfläche enden.
Der Gegensatz zu Wirbel ist die geordnete Parallelströmung und die Potentialströmung.

122. Wie verläuft eine **Strömung** um einen Körper?

Lösung: Durch einen in die Strömung gesetzten Körper werden die Stromfäden abgelenkt, und es wird der Durchflußquerschnitt verringert. Infolgedessen erhöht sich die Geschwindigkeit an der verengten Stelle. Mit der Geschwindigkeitserhöhung erfolgt eine Druckverminderung in einem geschlossenen Kanal. Denn nach der Bernoullischen Gleichung ist

$$\frac{p_0}{\gamma_0} + \frac{c_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{c_1^2}{2g}.$$

Bild 284 zeigt eine reibungsfreie Potentialströmung, welche nur bei sehr kleiner Geschwindigkeit um einen Zylinder gedacht werden kann.

Bild 285 zeigt eine Strömung, wie sie wirklich auftritt. Der Stromfaden reißt ab, und es bilden sich hinter dem Zylinder zwei Wirbel, welche sich entgegengesetzt drehen und Energieverlust bedeuten.

Bild 286 zeigt eine Potentialströmung um einen sich allmählich verjüngenden Körper. Der Stromfaden reißt nicht mehr ab oder nur sehr wenig.

Bemerkung: Das Strömungsbild wird nach Aufg. 115. I und II konstruiert. Senkrecht auf den Körperumfang und die Kanalwand einmündend, zieht man Potentiallinien. Die Stromfäden kreuzen diese unter 90°.
In einem gewissen Abstand vom Körper wird für die Strömung ein gleichmäßiger Verlauf angenommen (z. B. im Schnitt B—B, Bild 286).

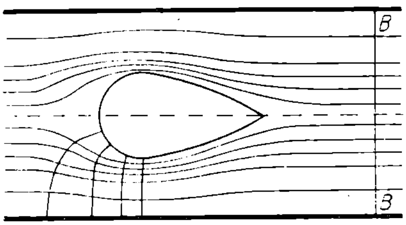


Bild 286

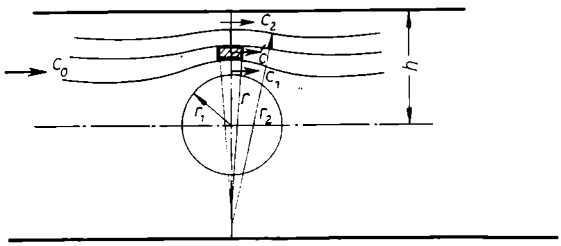


Bild 287

123. a) Wie ist die theoretische **Geschwindigkeits-** und **Druckverteilung** bei Umströmen eines Zylinders im engsten Querschnitt bei der Annahme, daß der Krümmungshalbmesser des Stromfadens an der engsten Stelle angenähert gleich dem Halbmesser, gemessen vom Mittelpunkt des Zylinders, ist (s. Bild 287)? In Wirklichkeit ist r größer, jedoch ist mit einem größeren r die Berechnung sehr schwierig.

r	beliebiger Krümmungsradius des Stromfadens	b	Tiefe des Kanals,
		c	Geschwindigkeit bei r,
r_1	Halbmesser des Zylinders,	c_1	Geschwindigkeit bei r_1,
h_2	halbe Kanalbreite,	c_2	Geschwindigkeit bei a,

$b \cdot \mathrm{d}r \cdot r \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot \varrho$ Masse eines Teilchens.

Die Dichte ϱ sei fast unveränderlich angenommen.

Lösung: Beim Umströmen des Zylinders entsteht eine Zentrifugalkraft des Massenteilchens:

$$P_z = b \cdot \mathrm{d}r \cdot r \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot \varrho \cdot \frac{c^2}{r} = b \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot \mathrm{d}r \cdot \varrho \cdot c^2 .$$

Druckzunahme infolge der Zentrifugalkraft:

$$\mathrm{d}p = \frac{P_z}{b \cdot r \cdot \mathrm{d}\alpha} = \varrho\, c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r} ,$$

Druckzunahme aus der Bernoullischen Gleichung:

$$\frac{\Delta p}{\varrho} = \frac{c_1^2 - c^2}{2}; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} = - c \cdot \mathrm{d}c,$$

$$c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r} = - c \cdot \mathrm{d}c; \quad \frac{\mathrm{d}c}{c} = - \frac{\mathrm{d}r}{r};$$

$$\frac{c}{c_1} = \frac{r_1}{r}; \quad c = c_1 \cdot \frac{r_1}{r}.$$

Den Druck ermittelt man aus

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{c_0^2 - c^2}{2g}.$$

b) Wie kann c_1 und c_2 der Größe nach bestimmt werden?

Lösung: Die durchfließende Menge ist bei rechteckigem Querschnitt

$$\frac{V_s}{2} = b \cdot h_2 \cdot c_0 = \int_{r_1}^{r_2} b \cdot \mathrm{d}r \cdot c = b \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_1 c_1}{r} \cdot \mathrm{d}r = b \cdot r_1 \cdot c_1 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\boldsymbol{c_1 = \frac{h_2}{r_1} \cdot \frac{1}{\ln r_2/r_1} \cdot c_0; \quad c_2 = \frac{c_1 \cdot r_1}{r_2}.}$$

124. Wie groß sind c_1 und c_2, p_1 und p_2, wenn **Wasser einen Zylinder umströmt** und seine Wichte $\gamma = 1000\ \mathrm{kp/m^3}$ ist?

Gegeben: $r_1 = 5\ \mathrm{cm}$, $h_2 = 10\ \mathrm{cm}$, $r_2 = 16\ \mathrm{cm}$, $c_0 = 4\ \mathrm{m/s}$, $p_0 = 1\ \mathrm{at}$.

Hieraus: $$V_s/2 = b h_2 \cdot c_0 = b \int c \cdot d\mathrm{r} = b r_1 c_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d r}{r} = b r_1 c_1 \ln r_2/r_1$$

$$c_1 = \frac{h_2 \cdot c_0}{r_1 \ln r_2/r_1} = 6{,}89\ \mathrm{m/s}; \quad c_2 = \frac{r_1 c_1}{r_2} = 2{,}16\ \mathrm{m/s}$$

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{c_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}$$

$$p_1 = 8405\ \mathrm{kp/m^2}; \quad p_2 = 10577\ \mathrm{kp/m^2}.$$

Widerstand umströmter Körper

125. Strömt eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v gegen einen Körper, dessen Querschnitt F beträgt, so übt sie auf ihn eine Kraft P_w aus, die der Fläche F, der Wichte der Flüssigkeit γ und ihrer Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ proportional ist; die

Form des umströmten Körpers wird durch die Formziffer c_w berücksichtigt; somit ist:

$$\underline{\underline{P_w = c_w \cdot F \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{2g}}} \quad \text{oder mit } \gamma = \varrho g$$

$$P_w = c_w F \varrho \frac{v^2}{2}$$

P_w ist also nicht ortsabhängig, da g in der Gleichung nicht enthalten ist.

Werte für c_w in den Taschenbüchern

z. B.	für eine kreisförmige oder quadratische Platte	1,11
	für eine Kugel	0,47
	für ein Geschoß	0,50
	für Stromlinienform Breite/Dicke = 5	0,06

126. Ein Dampfer von einer Wasserverdrängung von 5000 t hat eine größte Querschnittsfläche von $F = 50\ \text{m}^2$. Widerstandskoeffizient $c_w = 0{,}08$. Das Schiff soll mit 36 km/h fahren, der Wirkungsgrad der Schiffsschraube und des Antriebes ist 0,6.

a) Widerstandskraft

b) Maschinenleistung

Lösung: **a)** $P_w = c_w F \gamma \frac{c^2}{2g} = 20\,400\ \text{kp};$

b) $N = P_w \cdot c = 204\,000\ \text{kpms}^{-1} = 2720\ \text{PS};$

$N_0 = N/\eta = 4530\ \text{PS}.$

127. Wie groß ist der Weg, den das Schiff zurücklegt, wenn die Maschine abgestoppt wird, bis die Geschwindigkeit auf 2 m/s abgenommen hat?

Lösung: $$-\text{d}\,(1/2\, m\, v^2) = c_w F \varrho \frac{v^2}{2} \cdot \text{d}s$$

$$\frac{-m v \cdot \text{d}v \cdot 2}{c_w \cdot F \cdot \varrho \cdot v^2} = \text{d}s$$

$$s = \frac{-2m}{c_w F \cdot \varrho} \int_{v_1}^{v_2} \frac{\text{d}v}{v} = \frac{-2m}{c_w F \cdot \varrho} \ln \frac{v_2}{v_1} = \frac{2m}{c_w F \cdot \varrho} \ln \frac{v_1}{v_2}$$

$$s = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^6\ \text{kg}}{0{,}08 \cdot 50\ \text{m}^2 \cdot 1000\ \text{kg/m}^3} \ln \frac{10}{2} = 4020\ \text{m}\,.$$

128. Ein Torpedo hat eine Masse von 2000 kg und soll nach einem Lauf von 2 km noch eine Geschwindigkeit von $v_2 = 10$ m/s haben. Querschnitt 710 cm², $c_w = 0{,}08$. Welche Anfangsgeschwindigkeit muß das Geschoß haben?

129. Was versteht man unter **Magnus-Effekt?**

Lösung: Der Magnus-Effekt ist eine Kraft, die durch das Zusammenwirken einer Parallelströmung und eines Kreiswirbels entsteht. Die Luft wird durch die Reibung eines rotierenden Zylinders mitgenommen, und es entsteht eine Zirkulation. Eine auftreffende Parallelströmung erfährt auf der einen Seite eine Beschleunigung, auf der anderen Seite eine Stauung, d. h. Verzögerung. Dort, wo die Geschwindigkeit groß ist, ist der absolute Druck klein, dort, wo die Geschwindigkeit klein ist, ist der absolute Druck groß. Somit entsteht ein Überdruck auf den Zylinder senkrecht zur Strömungsrichtung der Luft, der sog. Magnus-Effekt.
Man hat diese Wirkung zum Antrieb von Schiffen zu verwerten gesucht, doch ist die erzielbare Kraft zu klein.

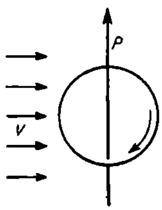


Bild 288

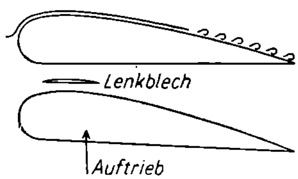


Bild 289

130. Wie entsteht der **Auftrieb** an einem Flügel?

Lösung: Die Strömung erfährt nach Bild 289 an der gekrümmten oberen Fläche des Flügels eine Zentrifugalkraft, welche zu einer Erniedrigung des Druckes führt. Dadurch allein entsteht schon ein Auftrieb. Hinzu kommt bei Schrägstellung des Flügels noch ein zusätzlicher Auftrieb.
Bei Propellern, bei Turbinen und beim Voith-Schneider-Trieb für Schiffe ist die Geschwindigkeit des Wassers relativ zu den Propellern klein, und die Strömung reißt nach Bild 289 leicht ab. Man spricht dann von einem Umschlag, wobei die bis dahin laminare Strömung in turbulente übergeht. Würde man eine Lenkschaufel anbringen, so würde dieser Umschlag vermieden.

Ergebnisse der Berechnungen

Dynamik

13. a) 490 kp; b) 1680 kp.

15. 7°

16. a) 1,95 m/s^2; b) 11° 16′.

18. a) 235 kp; b) 575 kp;
c) 53,3 PS; d) 6,5 s;
e) 0,858 m/s^2; f) 550 kp;
g) 40,8 PS.

21. a) 6,49 m/s; b) 0,0644 s;
c) 0,654 m/s^2; 6,265 m/s;
d) 0,345 s.

22. a) 1,66 m/s^2; b) 2,72 Mp, 16,48 Mp.

24. a) 7430 kp; b) 14,5 m/s^2.

25. a) 1,44 m/s^2; b) 3440 kp;
c) 2670 kp/cm^2; d) 6.

27. a) 8040 kp; b) 1,53 m/s^2;
c) 9300 kp; d) 77730 kp;
e) 8,36.

29. 1) $b_1 = 0{,}8\ m/s^2$, $s_1 = 0{,}9$ m,
$P_{A1} = P_A + m_A \cdot b_1 = 2271$ kp,
$P_{B1} = P_B - m_B \cdot b_1 = 1194$ kp,
$P_1 = P_{A1} - P_{B1} = 1077$ kp,
$N_1 = 17{,}2$ PS;

2) $b_2 = 0{,}4\ m/s^2$, $t_2 = 3$ s,
$s_2 = 1{,}8$ m, $P_{A2} = 2014$ kp,
$P_{B2} = 1353$ kp, $P_3 = 661$ kp,
$N_3 = 10{,}6$ PS;

3) $s_3 = 8{,}3$ m, $t_3 = 7$ s,
$b_3 = 0$, $P_2 = 800$ kp,
$N_2 = 12{,}8$ PS.

30. a) 22500 kp; b) 140 mm;
c) 580 mm.

32. a) 800 kp; b) 1,4 m/s^2;
c) 0,86 s; d) 0,52 m;
e) 1,25 s; f) 0,07 m;
g) 0,12 s; h) 2,09 m;
i) 6,4 m/s; k) 0,65 s;
l) 20,8.

34. a) 4,9 m/s^2; b) 3,63 m/s^2;
c) dieselbe.

36. a) $\mu = 0{,}287$
b) $b = 1{,}6\ m/s^2$
c) $v = 5{,}93$ m/s

37. a) 0,24 m/s^2; b) 4,7 m/s;
c) 19,6 s; d) 282 m;
e) dieselben Werte (Begründung s. Aufg. 33).

38. a) 0,288 m/s^2; b) 39,4 m/s;
c) 137 s; d) 19,75 km;
e) dieselben.

39. A a) $b = 0{,}275\ m/s^2$
b) $b = 0{,}153\ m/s^2$

B a) 75,36 kp, 150,72 kp;
b) 120,58 kp, 120,58 kp;
c) 4,371 m/s^2; d) 2,29 s;
e) 11,42 m.

40. a) 0,125 m/s^2; b) 21 s;
c) 196 kp.

43. a) 1,25 s; b) 7,66 m.

44. a) = 54° 59′ 51″; b) 24,41 m/s;

c) $y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_x}\right)^2$; d) 28,6 m.

47. a) 25,3 m/s; b) 3,6 s;
c) 16,3 m; d) 28,7 m.

48. a) 89 m/s; b) 12,8 s;
c) 202 m.

49. a) 11186 m/s; b) 1118,6 m/s.

50. 88,6 m/s; 95,2 m/s; 125,3 m/s.

51. a) 11,1 s; b) 49° 32′;
c) 83,0 m/s.

57. 20,7 m/s.

58. a) 21,2 s; b) 213,5 m.

59. II. a) 100,5 m/s;

b) $b = \dfrac{W_1 + \dfrac{M}{r}}{m} = 3{,}21\ m/s^2$;

c) 7,02 s.

60. a) 0,314; 0,186; 0,0854;
b) $N_1 = 27$ PS; 16 PS; 7,35 PS;
$N_2 = 9$ PS; 8 PS; 8,65 PS;
$W_2 = 22{,}1$ kp; 19,6 kp; 21,2 kp;
c) 6,57 PS; 5,10 PS; 4,60 PS.

64. 36 U/min.

65. 27,4 U/min.

68. a) 60 kp;
b) $A = 9$ kp bis 55 kp,
$B = 14$ kp bis 88 kp.

70. a) 805 kp; b) 14° 10′;
c) 3300 kp; d) bleibt ders.

72. **A** a) 12,71 kp; 13,29 kp; 14,04 kp;
b) 10,17 kp; 12,6 kp; 15,3 kp;
c) 77,3 U/min; 79,3 U/min; 81,5 U/min.
B 70 U/min.

73. a) 48,8 kp; b) 31,4 kp;
c) 49,5 kp.

75. a) 214 kp; b) 499 kp, 201 kp;
c) 543 kp; d) 0,31;
e) 9,2 m/s.

76. 29 m/s.

78. 15,69 m/s = 56,5 km/h.

80. a) 0,03584 kp; b) 672 kp;
c) 4440 U/min.

81. a) 51 409 kp; b) 456 kp/cm².

82. I a) 5,44 kg; b) 382 kp;
c) 397 U/min.
II 247 U/min

83. a) 105 kg; b) 2650 kp;
c) 126 cm³; d) 738 kp/cm².

86. a) 25,5 kp/cm²; b) 172 m/s.

87. a) und b) 75 kp/cm².

89. a) 29300 kp; b) $1^1/_4$ oder
Metrisches Gewinde M 33.

91. a) 2240 kp; b) 1,36 m;
c) 35130 kp; d) 50 kp/cm²;
e) 17570 kp; f) 196 kp/cm².

92. II b) 22,8 kp;
c) 514,8 kp; 1990,8 kp; 469,2 kp;
1935,2 kp.

95. a) 55,2 kp; b) 11800 kp;
c) 105 kp/cm²;
d) $P_z = 139$ kp; $\sigma_z = 176$ kp/cm².

96. a) 89 kp; b) 7950 kp;
c) 14,8 kp/cm²; d) 250 kp;
e) 224 kp/cm².

97. a) 1080 kp; b) 25,5 kp;
c) 2800 kp; d) 100 kp;
e) 197 kp/cm².

100. a) 13740 kp;
b) 6400 kp; 4255 kp;
c) 7340 kp; 9515 kp;
d) 46,6 % bzw. 31 %.

101. a) 10170 kp; b) 28763 kp.

102. II a) 11300 kp; 9350 kp;
b) 980 kp; 970 kp.

103. a) 11,65 kp/cm; b) 60,3 kp;
c) 724 kpcm;
d) 2,95 cm³; 247 kp/cm²;
e) $B_{res} \approx 121$ kp.

106. 360 kpm.

108. a) 91,5 kpm; b) 52,5 PS.

113. a) 4,85 m/s; b) 2400 kpm;
c) 3,88 m/s; d) 1920 kpm;
e) 480 kpm; f) 160000 kp;
g) 8000 kp; h) 80 %.

114. a) 4880 kpm; b) 10,93 m/s;
c) 1,041 m/s; d) 465 kpm;
e) 4415 kpm; f) 90 %.

115. a) 3,71 m/s; b) 2800 kpm;
c) 1,98 m/s; d) 1500 kpm;
e) 1300 kpm; f) 54 %;
g) 250000 kp; h) 19.

123. a) 288 kg; 133 kg; 12,5 kg; 433,5 kg;
b) 53,72 kgm²; 8,495 kgm²; 0,039 kgm²;
62,254 kgm²; c) 0,38 m;
d) 247,2 kg.

125. II 1 a) $^2/_3\, mh^2$; b) $m\,(^2/_3 h^2 + z^2)$;

2 a) $m_2 \dfrac{h_2^2}{12} - m_1 \dfrac{h_1^2}{12}$;

b) $m_2\left(\dfrac{h_2^2}{12} + z^2\right) - m_1\left(\dfrac{h_2^2}{12} + z^2\right)$;

3 a) $m_2 \dfrac{d_2^2}{12} - m_1 \dfrac{d_1^2}{12}$;

$$d^2 = h^2 + l^2$$

b) $m_2\left(\dfrac{d_2^2}{12} + a^2\right) - m_1\left(\dfrac{d_1^2}{12} + a^2\right)$;

4 a) $m\,\dfrac{d^2}{12}$; b) $m\left(\dfrac{d^2}{12} + a^2\right)$.

126. a) 6,48 kgm²;
b) 1,63 kgm²; 5,57 kgm²;
c) 15,657 kgm²;
d) 39,14 kg; 0,632 m.

127. a) 2465,3 kp; 763,8 kp; 275,3 kp; 3504,4 kp;
b) 7009 kgm²; 754,7 kgm²; 8,52 kgm²; 7774 kgm²
c) 70,3 %; 21,8 %; 7,9 %;
d) 90,2 %; 9,7 %; 0,1 %;
e) 1,49 m; 31100 kgm²;
f) $J/R^2 = 2403{,}5$ kg.

128. a) 6380 kp; 1720 kp; 685 kp; 8785 kp;
b) 3604 kgm²; 327 kgm²; 4 kgm²; 3935 kgm²;
c) 72,6 %; 19,6 %; 7,8 %
d) 91,6 %; 8,3 %; 0,1 %;
e) 2,095 m; 154000 kgm²;
f) 6180 kg.

129. 9515 kgm².

130. 465 kgm².

134. a) 31,9 kp und 51,1 kp;
b) 1220 kpm; c) 1,679 kgm²;
d) 142 mm; e) 6,72 kgm²;
f) 161 s.

135. a) 501 kpm; b) 780 kp.

137. a) 150 kg; b) 8440 kpm;
c) 1206,6 kgm².

138. a) 199500 kpm; b) 155292 kgm²;
c) 198 kp; d) 79,4 PS.

139. a) 34500 kp; b) 118700 kgm²;
c) 1373000 kpm; d) 407 PS.

142. a) 89,84 kgm²;
b) 147,6 kg; 23,62 kgm²; 11,25 kgm²; 124,7 kgm²;
c) 8,0 kgm²; 132,72 kgm²;
d) 169 kpm;
e) 2 m/s²; 5 rad/s²; 107,7 kpm; 26,93 kpm;
f) 179,6 kp; 251 kp; 71,4 kp;
g) 11,5 kp/cm².

145. a) 192000 kpm;
b) 156800 kpm; 6,34 U/min.

149. a) 125 kgm²; b) 9890 Nm.

153. a) 501 kp; b) 70,24 kgm²
c) 1,32 rad/s²; d) 0,7 m/s²;
e) 9,45 kpm; f) 17,8 kp;
g) 56 kpm.

154. a) 5284 kp; b) 5552 kgm²;
c) 0,0655 rad/s²; d) 82,5 kp;
e) 7760 kpm; f) 111.

155. a) 4530 kp; b) 5320 kp;
c) 6320 kg; d) 8044 kgm²;
e) 1,56 rad/s²; f) 1280 kpm;
g) 6480 kp;
h) um 1950 kp, d. h. 43 %.

157. a) 0,367 rad/s²; b) 1443 kpm;
c) 123700 kpcm; d) 523 cm³;
e) 89 kp/cm².

158. a) 47500 kg; b) 455280 kgm²;
c) 2,827 m; d) 0,419 rad/s²;
e) 19450 kpm; f) 1257000 kpcm;
g) 65,5 kp/cm².

162. $\varepsilon = 31{,}9\ ^1/\mathrm{s}^2$;
$b_1 = 1{,}59$ m/s²; $b_2 = 9{,}57$ m/s²;
$S_2 = 0{,}097$ kp; $S_1 = 5{,}014$ kp.

164. a) 16° 42′;
b) $b = 0{,}569$ m/s²;
$\varepsilon = 3{,}16$ rad/s²;
c) $\varepsilon = 5{,}45$ rad/s²; $b = 8$ m/s²;
d) für $\alpha = 5°$:
$Gh = {}^1/_2 mv^2 + {}^1/_2 J_d\,\omega^2$
für $\alpha = 60°$:
$$Gh = {}^1/_2 mv^2 + G\mu \cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha}\,.$$

165. $\mu = 0{,}029$.

167. a) 6,511 cm;
b) 0,5305 m/s²; c) 1,85 kp;
d) 0,265 m/s²; 2,65 rad/s²;
e) 2,04 m/s²; — 12,5 rad/s²;
f) 3,29 m/s²; g) 2,4 kp.

174. **B** a) $34{,}63 \cdot 10^6$ kgm²; 0,266 rad/s;
b) 8140 kp; c) 66200 kpm;
d) 132400 kpm; e) 66200 kpm;
f) 132400 kpm; g) 289 PS;
h) 144,5 PS; 144,5 PS.

177. a) 25 U/min; b) 95,7 U/min.

179. a) 0,796 m/s;
b) $v = \sqrt{v_{r_1}^2 + \omega^2 \cdot (r^2 - r_1^2)} =$
$= 1{,}55$ m/s; 3,55 m/s; 5,71 m/s;
c) 26,9; 11,75; 7,26 mm;
d) $M_t = \int P_{co} \cdot r = 0{,}816$ kpm;
$N = 0{,}218$ PS.

181. a) 2,874 kg; 0,854 kg; 3,728 kg;
b) 4,86 cm; 0,1202 m;
c) 0,0631 kgm²;
d) 7,7 kp; 10,25 kp; 2,55 kp;
e) 6,71 m/s²;
f) 0,13 m; 0,16 m; 0,0954 kgm²; 0,852 kpm.

185. B a) 5,0435 m/s;
b) 8505 kpm, 2126 kpm;
c) 36202 kpm;
d) — 1,0419 m/s; 5,9563 m/s;
e) 150 kgm/s = 150 kgm/s;
f) 4,1385 m/s.

187. a) 4,9153 kgm²;
b) 0,3101 kgm²;
c) 0,0090 kgm²;
d) 15,641 cm, 14,292 cm, 6,7172 cm;
e) 1,6234 rad/s;
f) 89500 cm/s oder 895 m/s.

188. C a) 4 kpm, 742 U/min;
b) 4,17 kgm²; 1,707 kgm²;
c) 665 U/min; 680 U/min;
d) 12,1 s; e) 1,88 s.

190. 4,7 m/s; 23,5 rad/s.

204. B a) $MR = m_0 r + 2 m_1 r$;
b) $MR = m_0 r + 5 m_1 r$.

205. B a) 3° 42′; b) 450,95 kgm.

215. 0,27 N.

217. a) und b)

	0°	45°	90°
$M_{t_1} =$	0	+ 5,92	0 kpm
$M_{t_2} =$	+ 11,84	+ 5,92	0 kpm
	135°	180°	225°
$M_{t_1} =$	— 5,92	0	+ 5,92 kpm
$M_{t_2} =$	+ 5,92	+ 11,84	+ 5,92 kpm

c) $M_{t_1} = 0$;
d) M_{t_2} = konst = 5,92 kpm;

224. a) 5030 kp/cm²
(zulässig 9000 kp/cm²);
b) $\Sigma h^3 + 0{,}5\,\Sigma (h')^3 = 2 \cdot 0{,}7^3\ \text{cm}^3 + 1 \cdot 0{,}6^3\ \text{cm}^3 + 8 \cdot 0{,}5^3\ \text{cm}^3 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}7^3\ \text{cm}^3 = 2{,}245\ \text{cm}^3$;
$f_0 = 11{,}2$ cm;
c) $m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -(P - G) = -k \cdot y$;
d) 0,67 s.

225. 0,212 s; 0,162 s.

226. a) 2480 cm⁴; b) 0,1 s;
c) $\omega = 62{,}8$ rad/s; $c = 3950\ ^1/\text{s}^2$;
d) 324 cm.

229. a) $k = 690$ kp/m;
b) 12,43 cm; c) 0,207 s.

233. a) $c_1 = 9\ ^1/\text{s}^2$; $c_2 = 3{,}32\ ^1/\text{s}^2$ bzw. $2\ ^1/\text{s}^2$;
$\lambda = 1{,}66\ ^1/\text{s}$ bzw. $1\ ^1/\text{s}$;
$n = 2{,}5\ ^1/\text{s}$ bzw. $2{,}83\ ^1/\text{s}$;
$A = 0{,}1328$ cm bzw. 0,0767 cm;
$B = 0{,}2$ cm;
b) $T = 2{,}51$ s bzw. 0,45 s;
c) $t = 3{,}078$ s bzw. 5,299 s.

234. $c_2 = \sqrt{4\,c_1} = 6\ ^1/\text{s}$;
$\lambda = 3\ ^1/\text{s}$; $n = 0$;
$T = \infty$; aperiodisch;
$x = \dfrac{x_0}{e^{3\,t/s}}$.

237. a) 12,7 rad/s; b) 1,333 mm;
c) 26,7 mm.

243. a) 0,00614 cm⁴;
b) 2,26 s; c) 7,73 ¹/s²;
d) 0,208 kgm²; e) 0,832 kgm².

244. a) $J_p = 127$ cm⁴;
$J_d = 5$ kgm²;
$c = 6760\ ^1/\text{s}^2$; $T = 0{,}0765$ s;
b) $\varphi_0 = 0{,}0709$ rad oder 4,06°.

Mechanik der Flüssigkeiten

4. A a) 13,71 at; b) 17230 kp;
c) 1 : 9,14; d) 9,14;
e) 1.
B a) 12,23 at; b) 15050 kp;
c) 1 : 8; d) 9,14;
e) 0,87;

5. a) 206,6 at; b) 481 Mp;
c) 484 mm.

8. a) 9430 kp;
b) 1³/₈″ oder M 33.

11. a) 133 kp/cm²; b) 267 kp/cm²;
c) 210 kp/cm².

12. 8,5 at.

13. 34 mm.

15. a) 15 mm; b) 904000 kp.

21. Überdruck 0,55 at.

24. 541 kp.

25. 185 kp.

26. II a) 0,1227 m; b) $0{,}2\ \text{m} \cdot \gamma$.

28. a) Überdruck 0,62 at;
b) 6200 kp/m²;
c) Absolutdruck = 16730 kp/m² = = 1,673 at absolut

30. a) 23100 kp/m²; b) 9620 kp/m²;
c) 34300 kp.

31. a) 85 Torr;
b) Absolutdruck = 1160 kp/m² = = 0,116 at absolut.

34. a) 5184 kp; b) 2255 kp.

35. 113 kp.

36. a) 2250 kp; 1720 kp; b) 530 kp und c) 22,4 kp/cm².

39. a) 10250 kp; b) 5450 kp;
c) 2,2 m; d) 11600 kp;
e) 0,744 m; f) 1,329 m.

40. a) 48,5 cm; b) 177 kp;
c) 79,6 kp und 97,4 kp;
d) 14 mm · 56 mm.

41. II a) 0,752 m²; b) 3302,5 kp;
c) 752 kp;
d) 0,47 m; 338,8 kp.

42. a) 32300 kp; b) 15060 kp;
c) 3,72 m; d) 0,902 kp/cm²;
e) 0,762 kp/cm²;
f) 0,902 kp/cm² + 0,768 kp/cm², 0,902 kp/cm² — 0,768 kp/cm²

44. a) 711 Mp; b) 2,8 m;

46. a) 35 kp; b) 580 mm.

47. II a) 0,534 cm³; b) 15,9 p/cm³;
c) nein, Legierung.

48. a) 2,1 kg; 1,17 kg;
b) 64,2 %; 35,8 %;
c) 8,175 kp/dm³.

49. II a) $y_0 \approx 0{,}7\,r$;

b) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J}{Ga}}$;

$T = 2\pi \sqrt{\dfrac{r}{0{,}6g}}$.

50. a) 71370 m³; b) 48370 m³;
c) 2 h 41 min.

51. a) 1507 Mp; b) 607 Mp;
c) 2920 Mp; d) 2313 Mp;
e) 1,47 m; f) 0,43 m³/s.

52. a) 1267 Mp und 393 Mp;
b) 1430 Mp; c) 12,9 m.

53. a) 6120 m; b) 7010 m;
c) dieselben;
d) F ist ohne Einfluß.

57. a) 35,8 kp; b) 25,1 kp;
c) 30 kp; d) 30,33 cm;
e) 85 cm.

60. a) 5,42 m/s; b) 1,054 l/s.

62. a) 52,4 m/s; b) 3,67 l/s.

64. a) 3,43 m/s; b) 12,25 m³/min.

65. a) 4760 kp/m²; b) 1,82 m/s;
c) 1,73 m³/min.

66. a) 1,63 m WS; b) 10,23 m WS;
c) 3,43 m/s; d) 8,74 l/s.

68. 21,423 l/s.

69. a) 1,17 m³/s;
b) $H = 1{,}93$ m; 32,5 PS.

71. a) 1,742 m³/s; b) 1,764 m³/s.

73. a) 55 min; b) 16 min.

74. 296 mm.

75. $5^3/_4$ min.

80. a) 35 m/s; b) 62,4 m;
c) Null; d) 25,5 mm;
e) 21,5 m/s;
f) Überdruck 3,88 at; 2,49 m/s;
g) Überdruck 6,21 at.

83. a) $G_1/G_2 = 0{,}114$;
b) 15 dm³/s;
c) 1,605 dm³/s; 13,4 dm³/s; 1,605 kp/s; 14,06 kp/s;
d) 1,044 kp/dm³;
e) $v_2 = 11{,}9$ m/s;
f) $f_2 = 12{,}6$ cm²;
g) $p_{3\,\text{absolut}} = 0{,}5455$ at;
h) $v_3 = 6{,}764$ m/s;
i) $f_3 = 19{,}81$ cm²;
k) $c = 29{,}85$ m/s;
l) $f_4 = 0{,}538$ cm²;
m) $F = 89{,}4$ cm².

84. a) 1,5 m/s;
b) 2,25 m/s, 0,9388 at;
c) 4,795 m/s, 1,069 at;
d) 157,5 l/s, 4 PS.

95. a) 1,194 m/s; b) 0,0727 m;
c) 38,927 m; 0,0262;
d) 1,2 mm.

97. 0,29 m.

98. a) $p_{absolut} = 0{,}2854$ at; 2854 kp/m^2
b) 1,203 m/s; c) 1,56 m^3/min.

99. a) 2,075 m/s; b) 415; 350;
c) 0,0244; d) 8 kg/s.

102. a) 32 m/s^2, 14,2 m/s, 0,653 m;
b) 7,05 l/s, 1,41 m/s, 0,379 m;
c) 0,81 m; d) 0,352 m;
e) 0; f) $p_{absolut} = 0{,}554$ at;
g) $p_{absolut} = 0{,}785$ at.

103. a) 0,125 m/s^2;
b) Überdruck 2070 kp bzw. 2,95 at;
c) Überdruck 6,73 at.

107. 12,1 kp.

108. 1660 kp.

109. a) 28,6 kp; b) 15,7 kp;
c) 41,4 kp.

110. a) $w_1 = 22$ m/s; $P = 170{,}4$ kp;
b) 45,5 PS.

114. a) 5; 10; 5; 8,91 m/s
b) 1995 kp/m^2; c) — 1275 kp/m^2;
d) 11995 kp/m^2; e) 10720 kp/m^2.

119. 1,76 m/s; 2,5 m/s; 4,29 m/s.

128. 176 m/s.