Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium

PHYSIK

1-3

Mechanik fester Körper

Institut für Fachschulwesen
der Deutschen Demokratischen Republik
Karl-Marx-Stadt

Physik

1 bis 3

Mechanik fester Körper

Herausgeber:
Institut für Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik
Karl-Marx-Stadt
1964

Verfaßt von: Helmut Lindner, Ingenieurschule für Elektrotechnik, Mittweida
(Abschnitte 1 und 2)

Dipl.-Phys. Wolfgang Körner, Ingenieurschule für Maschinenbau, Leipzig
(Abschnitte 3 und 4)

Lektoriert von: Dipl.-Phys. Wolfgang Körner, Ingenieurschule für Maschinenbau, Leipzig
(Abschnitte 1 und 2)

Helmut Lindner, Ingenieurschule für Elektrotechnik, Mittweida
(Abschnitte 3 und 4)

Dipl.-Phys. Wolfgang Lauckner, Ingenieurschule für Post- und Fernmeldewesen „Rosa Luxemburg", Leipzig

Bearbeitet von: Dipl.-Phys. Dietmar Mende, Ingenieurschule für Walzwerk- und Hüttentechnik, Riesa

Vorwort

Die Physik ist der älteste Zweig der Naturwissenschaften. Wenn wir ihren Gegenstand, ihre Methode und ihr Ziel begreifen wollen, so müssen wir uns in aller Kürze über Gegenstand, Methode und Ziel der Naturwissenschaften überhaupt klar werden.

Der Gegenstand der Naturwissenschaft ist die sich bewegende Materie in allen ihren Formen, die Natur. Diese existiert unabhängig und außerhalb des menschlichen Bewußtseins. Zum Beispiel hat die Erde mehr als zwei Milliarden Jahre ohne die Spur eines Menschen existiert; auch heute laufen zahllose Naturvorgänge auf der Erde und auf den Gestirnen des Weltraums völlig unabhängig vom Menschen ab.

Die Methode der Naturwissenschaft besteht in der Einheit von empirischer und theoretischer Untersuchung. Unter empirischer Forschung verstehen wir die Beobachtung und das Experiment. Keines der beiden Verfahren darf überbetont oder vernachlässigt werden; nur beide Verfahren zusammen angewendet führen zur tatsächlichen Erkenntnis und Beherrschung der Naturgesetze, zur richtigen Widerspiegelung der Natur im Bewußtsein der Menschen. Den Weg, auf dem wir uns immer mehr der Erkenntnis der Natur nähern, weist uns der dialektische Materialismus. Er gibt uns auch die wissenschaftliche Grundlage für das Verständnis der vielfältigen Zusammenhänge, Wechselbeziehungen, Veränderungen und Widersprüche, welche die moderne Naturwissenschaft aufdeckt.

Das Ziel der Naturwissenschaft ist zweifacher Natur: einmal hat sie die Aufgabe, die Naturgesetze zu erkennen, zum anderen muß sie deren mögliche praktische Nutzanwendung (die Beherrschung der Natur) vorbereiten und die gesamte Naturforschung in die Richtung der praktischen Anwendung lenken.

Da die Aufgabe der Technik gerade darin besteht, die erkannten Naturgesetze in der Praxis zum Nutzen der Menschen anzuwenden, liegt die Bedeutung des Studiums der Physik als einer der theoretischen Grundlagen der Technik für Ihr Ingenieurstudium auf der Hand.

Die Naturwissenschaft wird in einzelne Zweige gegliedert, welche die einzelnen Bereiche der Natur widerspiegeln. So beschäftigt sich z. B. die Biologie mit der Wissenschaft vom Leben, die Astronomie mit der Wissenschaft von den Weltkörpern und ihrer Bewegung.

Die Chemie befaßt sich im wesentlichen mit den Eigenschaften der Stoffe und deren stofflichen Veränderungen. Die Physik behandelt vorwiegend Vorgänge, bei denen Energie umgewandelt wird, ohne daß sich die stoffliche Zusammensetzung der Körper ändert. Eine scharfe Grenze zwischen Chemie und Physik besteht aber in vielen Fällen nicht. Sie werden z. B. in der Chemie Vorgänge kennenlernen, bei denen die stoffliche Veränderung der Körper von erheblicher Wärmeabgabe bzw. Wärmeaufnahme begleitet ist (exotherme bzw. endotherme Reaktionen). Andererseits befaßt sich der modernste und heute so bedeutungsvolle Zweig der Physik, die Atom- und Kernphysik, mit Vorgängen, bei denen grundlegende stoffliche Veränderungen die Energieumwandlungen begleiten.

Da die Physik wie jede Wissenschaft eng mit den Bedürfnissen der Praxis (der Produktion) verbunden ist, kommt der Frage, in wessen Händen sich diese Wissenschaft befindet, größte Bedeutung zu. Der Imperialismus mißbraucht die Erkenntnisse der Naturwissenschaft in steigendem Maße zu einer verschärften Ausbeutung des Menschen und zur Vorbereitung von Kriegen. Erst der Sozialismus ermöglicht die allseitige Entwicklung der Wissenschaft zum Nutzen der ganzen Gesellschaft. Das zeigen uns heute schon in grandioser Weise die Erfolge der sowjetischen Wissenschaft, die in wenigen Jahrzehnten auf allen Wissenschaftsgebieten den Anschluß an die kapitalistischen Staaten erreicht und diese in entscheidenden Positionen bereits überflügelt hat.

MECHANIK

1. Einführung

1.1. Voraussetzungen

Es wird vorausgesetzt, daß Ihnen das auf der polytechnischen Oberschule bis zur Klasse 10 bzw. das im Vorbereitungslehrgang auf das Fachschulstudium vermittelte Wissen geläufig ist. Dieser Stoff wird in diesem Lehrbrief gar nicht oder nur wiederholend behandelt. Sollten Ihre Vorkenntnisse an dieser oder jener Stelle zum Verständnis des hier dargebotenen Stoffs nicht ausreichen, empfehlen wir Ihnen, die entsprechenden Abschnitte der Lehrbücher der polytechnischen Oberschule bzw. des für die Erwachsenenqualifizierung herausgegebenen Lehrmaterials zu wiederholen. Eine kurze Zusammenfassung des vorausgesetzten Stoffes finden Sie in der Broschüre:

Studienmaterial für die Erwachsenenbildung
Einführung in die Physik — Fachbuchverlag Leipzig

Diese Broschüre wurde bis 1964 als Lehrmaterial für die Vorbereitungslehrgänge verwendet. Im vorliegenden Lehrbrief wird auf diese als „Vorbereitungsmaterial" bezeichnete Broschüre Bezug genommen.

In diesem Lehrbrief geht es vor allem auch darum, die physikalischen Grundgesetze der Mechanik so darzustellen, wie es in der modernen physikalisch-technischen Literatur heute allgemein üblich ist. Hierzu müssen Sie u. a. gewisse Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung zu Hilfe nehmen, deren Handhabung Ihnen vom Mathematikunterricht her bekannt sein muß. Erst dadurch wird es möglich, die entsprechenden physikalischen Gesetze mit der notwendigen Exaktheit zu behandeln.

Für Bezüge auf Textstellen und Gleichungen im Vorbereitungsmaterial und im Lehrbrief werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

[V 3.1.]	Abschnitt 3.1. im Vorbereitungsmaterial
(V 9)	Gleichung (9) im Vorbereitungsmaterial
[2.3.1.]	Abschnitt 2.3.1. des vorliegenden Lehrbriefes
(9)	Gleichung (9) des vorliegenden Lehrbriefes

1.2. Physikalische Größen und Größengleichungen

Wie im Vorwort schon gezeigt wurde, besteht die Aufgabe der Physik allgemein darin, die Gesetze, nach denen die Vorgänge und Erscheinungen in der Natur ablaufen, zu erkennen, um sie der Gesellschaft nutzbar zu machen. Die Physik geht bei der Erforschung dieser Gesetze prinzipiell quantitativ vor. Zu ihrem Arbeitsgegenstand gehören alle die Vorgänge in der Natur, die sich messen lassen.

Um einen Naturvorgang zu erfassen, wird von der grundlegenden Erfahrung ausgegangen, daß gleiche Ursachen unter gleichen Bedingungen stets gleiche Wirkungen haben. Diese Wechselbeziehung zwischen Ursache und Wirkung wird durch die Naturbeobachtung oder im Experiment studiert. Das Ergebnis dieses Studiums ist die Feststellung von gesetzmäßigen Beziehungen zwischen bestimmten *physikalischen Größen*. Diese Beziehungen werden mathematisch als Gleichung zwischen zwei oder mehreren veränderlichen Größen dargestellt und kurz als *Größengleichungen* bezeichnet.

Was unter einer physikalischen Größe zu verstehen ist, wissen Sie bereits vom Vorbereitungsmaterial her:

Physikalische Größe = Maßzahl · Einheit
Beispiel: $l = 1{,}25\ \mathrm{m}$

Eine physikalische Größe messen heißt, sie zu vergleichen mit einer anderen Größe gleicher Art, die als Einheit dient. Es wird festgestellt, wie oft diese Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist.

Es ist üblich, die folgende Symbolik zu verwenden:

l bedeutet die physikalische Größe (hier die Länge),
$[l]$ bedeutet die Einheit der physikalischen Größe,
$\{l\}$ bedeutet die Maßzahl der physikalischen Größe.

Steht also das Symbol (Formelzeichen) in einer eckigen Klammer, so bedeutet es die Einheit der physikalischen Größe, steht es in einer geschweiften Klammer, so ist die Maßzahl der physikalischen Größe gemeint. Es besteht, wie oben ausgeführt, die Beziehung

$$l = \{l\} \cdot [l]$$

Die Grundeinheiten der Länge, Zeit und Masse, die Sie im Vorbereitungsmaterial kennenlernten, können Sie demnach in der Form angeben

$$[l] = \mathrm{m}$$
$$[t] = \mathrm{s}$$
$$[m] = \mathrm{kg}$$

Beachten Sie, daß hierbei das Formelzeichen in der eckigen Klammer steht und nicht das Kurzzeichen der Einheit, wie es manchmal noch in der Literatur geschieht.

Von den Einheiten können Sie bekanntlich Vielfache und Teile mit den gesetzlichen Vorsätzen bilden [V 2.1.2.]. Es ist z. B.

$$1\ \text{m} = 10^{-3}\ \text{km} = 10^{3}\ \text{mm} = 10^{6}\ \mu\text{m}.$$

In diesem Zusammenhang noch ein Hinweis zu den in diesem Lehrbrief verwendeten Gleichungen: Da diese ausnahmslos Größengleichungen sind, können Sie die einzelnen physikalischen Größen in allen für diese Größe zugelassenen gesetzlichen Einheiten in die Gleichungen einsetzen, die Länge l z. B. in Metern, Kilometern oder Seemeilen.

Größengleichungen sind Gleichungen zwischen physikalischen Größen. In ihnen sind keine bestimmten Einheiten vorgeschrieben.

Darüber hinaus gibt es noch zugeschnittene Größengleichungen und Zahlenwertgleichungen (TGL 0—1313, Schreibweise physikalischer Gleichungen). Diese werden jeweils nur für ganz bestimmte Einheiten aufgestellt.

Sie erkennen, daß die Einheiten keinen Einfluß auf ein physikalisches Gesetz haben. Während die Einheiten — wie z. B. das Meter — von Menschen festgelegte Vereinbarungen sind, die erforderlichenfalls korrigiert oder auch umfassend verändert werden können, gelten die Naturgesetze ewig, sie sind unabänderlich.

Damit in den Einheiten der verschiedenen Länder eine weitgehende Übereinstimmung herrscht, werden die Einheiten international festgelegt. Ihre Anwendung in unserer Republik wird durch die Verordnung vom 31. 5. 1967, veröffentlicht im Gesetzblatt, Teil II vom 17. 6. 1967, vorgeschrieben.

Lehrbeispiel 1

Auf einem Meßzylinder, dessen Innendurchmesser 40 mm beträgt, entspricht der Abstand zweier aufeinanderfolgender Teilstriche der Skale einem Volumenunterschied von je 5 cm³ (Bild 1). Wieviel Millimeter beträgt die Entfernung zweier Teilstriche?

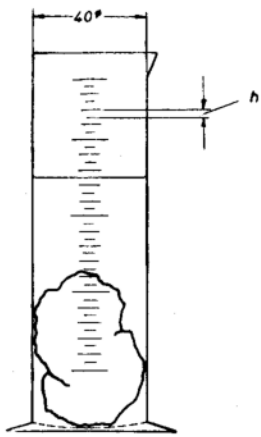


Bild 1. Meßzylinder

Lösung:

Gegeben: $V = 5\ \text{cm}^3$ Gesucht: h

$d = 40\ \text{mm}$

Aus der Gleichung für das Volumen eines Zylinders $V = \frac{\pi\, d^2\, h}{4}$ folgt

$$h = \frac{4\,V}{\pi\,d^2} = \frac{4 \cdot 5\ \text{cm}^3}{\pi \cdot 1600\ \text{mm}^2}$$

Das Ergebnis ist in Millimetern verlangt. Sie ersetzen deshalb 1 cm³ durch 10³ mm³, so daß Sie kürzen können:

$$h = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^3\ \text{mm}^3}{\pi \cdot 1600\ \text{mm}^2} = \underline{\underline{3{,}98\ \text{mm}}}$$

Der Abstand zweier Teilstriche beträgt 4 mm.

Zusammenfassung

Eine physikalische Größe ist das Produkt aus Maßzahl und Einheit. Die Einheiten sind gesetzlich festgelegt und können durch Vorsätze vervielfacht und geteilt werden.

2. Kinematik

2.1. Grundbegriffe

2.1.1. Einteilung der Bewegungen

Bei der Bewegung eines Körpers unterscheidet man

fortschreitende Bewegung (Translation)
Drehbewegung (Rotation)

Jede beliebige Bewegung eines Körpers läßt sich als aus diesen beiden Bewegungsarten zusammengesetzt darstellen.

2.1.1.1. Fortschreitende Bewegung

Bei einer fortschreitenden Bewegung legen alle Punkte eines Körpers kongruente (= in der Form übereinstimmende) Bahnen zurück. Diese Bahnen sind im allgemeinen Fall krummlinig. Beim Sonderfall der geradlinigen Bewegung laufen sie einander parallel. Als Beispiel sei an die Bewegung eines Schienenfahrzeugs auf gerader Strecke erinnert. Ein anderer Sonderfall liegt vor, wenn die Bahnen kreisförmig sind. Eine solche Bewegung führt z. B. die Gondel eines Riesenrades auf dem Jahrmarkt aus. Die einzelnen Punkte dieser Gondel legen Kreisbahnen mit gleichem Radius zurück. Doch sind diese Kreise nicht konzentrisch, haben also keinen gemeinsamen Mittelpunkt. Als besonderes Kennzeichen der fortschreitenden Bewegung ist hervorzuheben, daß der bewegte Körper seine Richtung im Raum während der Bewegung nicht ändert. Eine jede in dem betreffenden Körper durch zwei Punkte festgelegte Gerade verschiebt sich also parallel zu sich selbst. So bleiben z. B. die Sitzflächen in der Gondel immer waagerecht.

2.1.1.2. Drehbewegung

Bei der Drehbewegung eines Körpers bewegen sich alle Punkte eines Körpers auf konzentrischen Kreisbahnen, deren Mittelpunkt in der Drehachse liegt. Die Achse kann sowohl im Körper (Beispiel: Schwungrad) als auch außerhalb des Körpers (Beispiel: Mond auf der Kreisbahn um die Erde) liegen. Bei einer vorgegebenen Drehung ist die von einem Punkt des Körpers zurückgelegte Kreisbahn um so länger, je weiter dieser Punkt von der Achse entfernt ist. Doch ist für alle Punkte des Körpers der Drehwinkel gleich.

2.1.1.3. Gleichförmige und ungleichförmige Bewegung

Sowohl bei der Translation als auch bei der Rotation unterscheidet man:

Gleichförmige Bewegung: Ein Punkt des Körpers legt in gleichen Zeiträumen gleich lange Wege zurück

Ungleichförmige Bewegung: Ein Punkt des Körpers legt in gleichen Zeiträumen verschieden lange Wege zurück.

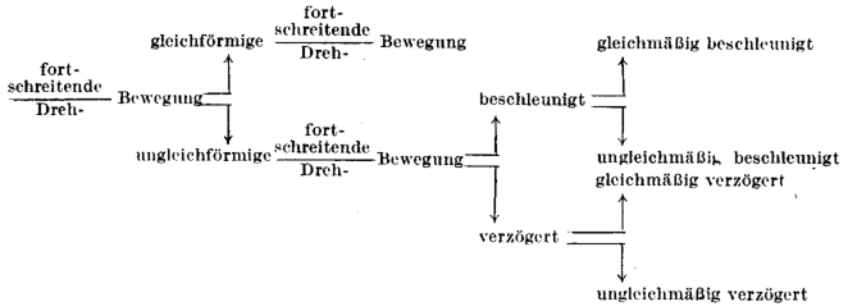
Die ungleichförmige Bewegung läßt wiederum eine Zweiteilung zu:

Gleichmäßig beschleunigte (oder *gleichmäßig verzögerte*) Bewegung: In gleichen Zeiträumen nimmt die Geschwindigkeit um den gleichen Betrag zu (oder ab).

Ungleichmäßig beschleunigte (oder *ungleichmäßig verzögerte*) Bewegung: In gleichen Zeiträumen nimmt die Geschwindigkeit um verschieden große Beträge zu (oder ab).

2.1.1.4. Schema der Bewegungsarten

Im nachfolgenden Schema finden Sie die Unterteilung der Bewegungsarten noch einmal wieder:



2.1.2. Begriff der Geschwindigkeit

Im Mittelpunkt der gesamten Bewegungslehre steht der Geschwindigkeitsbegriff. Ihnen ist geläufig, daß die Geschwindigkeit eines Körpers ein Maß dafür ist, ob er sich langsamer oder schneller bewegt. Auch

kennen Sie bereits die Definition [V 3.1.1.]: Die Geschwindigkeit eines Körpers ist der Quotient aus dem zurückgelegten Weg und der dazu benötigten Zeit.

Dieser Satz muß jedoch schärfer gefaßt werden. Worauf es ankommt, ist zunächst aus dem Weg-Zeit-Diagramm zu entnehmen, das Ihnen bereits bekannt ist [V 3.1.2.1.].

Betrachten wir die Geschwindigkeit eines Körpers zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 (Bild 2)! Dabei soll t_2 der spätere Zeitpunkt sein.

Über den Zeitpunkten t_1 und t_2 sind die Wege s_1 und s_2 aufgetragen, die der Körper zurückgelegt hat. s_2 ist größer als s_1. Aus dem Diagramm lesen Sie ab, daß in der Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ der Körper den Weg $s_2 - s_1$ zurückgelegt hat. Die Zeitdifferenz wird, wie in der Mathematik üblich, mit Δt bezeichnet. Entsprechendes gilt für die Wegdifferenz.

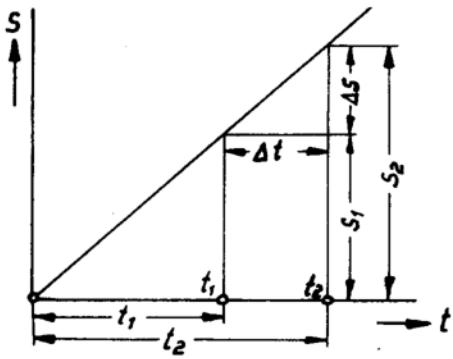


Bild 2
Ermittlung der Geschwindigkeit aus dem s-t-Diagramm mit Hilfe des Differenzenquotienten aus Weg und Zeit

Die Geschwindigkeit ergibt sich als Quotient aus der Wegdifferenz und der Zeitdifferenz:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Diesen Ausdruck bezeichnen wir als *Differenzenquotient.*

Bild 2 stellt jedoch nur einen besonders einfachen Bewegungstyp dar; die Differenzenquotienten und damit die Geschwindigkeit v sind immer gleich groß. Diese Bewegungsform heißt **gleichförmige Bewegung.**

Vollkommen gleichförmige Bewegungen gibt es aber in der Praxis nur selten. Unregelmäßigkeiten der Fahrbahn und Bewegungswiderstände verschiedenster Art sind die Ursache, daß viele Bewegungen recht *ungleichförmig* verlaufen. Denken Sie allein daran, wie ein im Stadtverkehr fahrender Kraftwagen ständig gezwungen ist, seine Geschwindigkeit zu verändern!

Im s-t-Diagramm kann das z. B. so aussehen, wie es in Bild 3 gezeichnet ist. Von einem Zeitabschnitt zum anderen haben hier die Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die verschiedensten Werte. Wollen Sie aber wissen, wie groß die Geschwindigkeit in einem *bestimmten Augenblick* ist, so müssen

Sie das Zeitintervall Δt so klein wählen, daß die Weg-Zeit-Kurve innerhalb dieses Zeitabschnitts als geradlinig betrachtet werden kann.

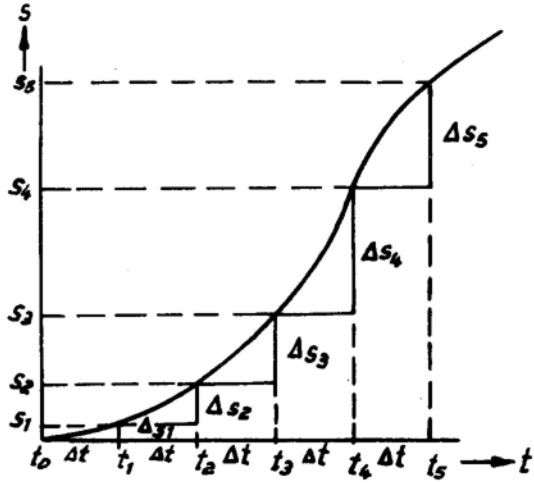


Bild 3. Weg-Zeit-Diagramm der ungleichförmigen Bewegung

In der Mathematik ist Ihnen nun gezeigt worden, daß man diesen Grenzübergang mit Hilfe des *Differentialquotienten* ausdrückt, und zwar in der Schreibweise

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Die Geschwindigkeit ist also eine Größe, die genau angibt, welcher Zustand für einen *bestimmten Augenblick* gilt, und hierfür können wir nur den Differentialquotienten benutzen. Der Differenzenquotient dagegen drückt nur den *Durchschnittswert* über eine bestimmte größere Wegstrecke (Differenz zweier meßbarer Längen) aus.

Sie merken sich demnach:

Die Geschwindigkeit ist der Differentialquotient des Weges nach der Zeit.

In der Mathematik ist Ihnen gezeigt worden, daß der Differentialquotient immer den *Anstieg* der gegebenen Funktion bedeutet. Er kann also durch den Tangens des Winkels ausgedrückt werden, unter dem die Kurventangente der dargestellten Funktion ansteigt. Das gleiche gilt auch in unserem Fall, denn es ist ja

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \tan \alpha$$

Dabei ist α der Winkel, unter dem die s-t-Kurve in einem bestimmten *Zeitpunkt* ansteigt. Wir können also auch sagen:

Der Anstieg der Weg-Zeit-Kurve in einem bestimmten Zeitpunkt ist ein Maß für die Geschwindigkeit.

2.1.3. Begriff der Beschleunigung

Mit der Angabe der Geschwindigkeit eines Körpers ist aber das *Zustandekommen* des Bewegungsvorgangs noch nicht erklärt. Vor allem muß man wissen, nach welchen Gesetzen Geschwindigkeiten entstehen, sich ändern und verschwinden. Jede Einsicht in diese Vorgänge bliebe uns ohne den Begriff der *Beschleunigung* versagt.

Wie Sie bereits erfahren haben [V 3.1.2.2.], kann man den Geschwindigkeitsverlauf am besten mit dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm aufzeichnen. Sie erkennen daraus, wie sich die Geschwindigkeit eines Körpers im Laufe der Zeit verändert. Bild 4 zeigt z. B., daß die Geschwindigkeit v proportional zur Zeit t anwächst. Die zeitliche Veränderung der Geschwindigkeit drückt man mit Hilfe des Beschleunigungsbegriffes aus. Ihnen ist aus [V 3.2.1.] die Definition bekannt: Die Beschleunigung ist der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung und der zugehörigen Zeit.

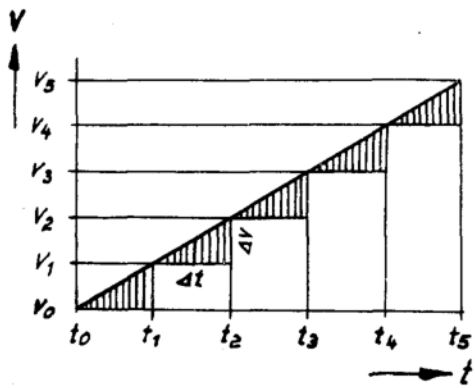


Bild 4
Ermittlung der Beschleunigung aus dem v-t-Diagramm mit Hilfe der Differenzenquotienten aus Geschwindigkeit und Zeit

Wir beobachten den Bewegungsverlauf zu den Zeitpunkten $t_0, t_1, t_2, t_3, \cdots$ und wählen gleich große Zeitabschnitte $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$ usw. Befand sich der Körper zur Zeit $t_0 = 0$ in Ruhe, so war seine Geschwindigkeit $v_0 = 0$. Zur Zeit $t = t_1$ soll er die Geschwindigkeit $v = v_1$ haben. Sind dann weiter $v_2, v_3, \cdots$ die Geschwindigkeiten nach den Zeiten $t_2, t_3, \cdots$ und ist weiterhin

$$v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = \cdots = \Delta v \quad \text{und}$$
$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = \Delta t,$$

d. h., sind bei gleichen Beobachtungszeiträumen Δt auch die Geschwindigkeitszunahmen Δv — wie gefordert — untereinander gleich groß, so muß die Kurve im v-t-Diagramm eine *ansteigende Gerade* sein; es liegt eine **gleichmäßig beschleunigte Bewegung** vor (Bild 4).

Für die gleichmäßig verzögerte Bewegung gilt eine entsprechende Überlegung.

Damit ergibt sich die Beschleunigung zunächst als *Differenzenquotient*

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse jedoch keineswegs immer so einfach. Bild 5 deutet z. B. an, wie die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs bis zu einem gewissen Höchstwert anwächst und dann allmäh-

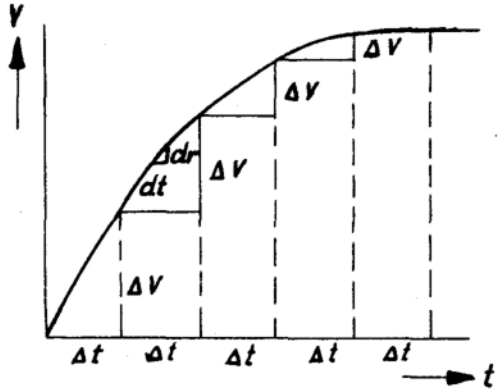


Bild 5
v-t-Diagramm einer ungleichmäßig beschleunigten Bewegung

lich einen konstanten Wert annimmt. In diesem oberen Teil der Kurve werden die Differenzenquotienten immer kleiner und schließlich gleich null. Aber auch in anderen Fällen kann die Beschleunigung immer ein wenig schwanken. Eine bestimmte Beschleunigung kann also immer nur für einen einzelnen herausgegriffenen *Augenblick* gültig sein. Um dies zu berücksichtigen, müssen wir uns das Zeitintervall Δt wiederum sehr klein denken und zum *Differentialquotienten* übergehen:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \qquad (2)$$

Die Beschleunigung ist der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit bzw. der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit.

Merken Sie sich:

Geschwindigkeit und Beschleunigung sind Größen, die nur für einen bestimmten Augenblick des Bewegungszustandes definiert sind. Sie

müssen mithin als Differentialquotienten des Weges bzw. der Geschwindigkeit nach der Zeit ausgedrückt werden. Differenzenquotienten geben nur Durchschnittswerte innerhalb meßbarer Zeitintervalle an.

2.2. Ableitung der Bewegungsgesetze

2.2.1. Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen geradlinigen Bewegung

Der Vorteil dieser für Sie neuen Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung besteht aber vor allem darin, daß Sie von hier ausgehend mit mathematischer Zwangsläufigkeit alle Bewegungsgesetze erhalten. Das soll nun nicht etwa bedeuten, daß wir künftighin auf jede anschauliche Erklärung verzichten; aber der mathematische Weg ist ein Schulbeispiel für die Art und Weise, wie auch andere Gesetze auf mathematisch exakte Weise abgeleitet werden.

Wir gehen jetzt so vor, daß wir Gleichung (1) nach $\mathrm{d}s$ umstellen, wobei wir $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$ erhalten. Sodann integrieren wir diese Gleichung beiderseits:

$$\int \mathrm{d}s = \int v\,\mathrm{d}t$$

Da wir zunächst voraussetzen wollen, daß die *Geschwindigkeit v konstant* ist, können wir die Lösung als unbestimmtes Integral sofort angeben:

$$s = v\,t + C$$

Die Integrationskonstante C läßt sich durch Aufstellen einer zweiten Gleichung finden, indem wir eine bestimmte Annahme machen. Wir nehmen nämlich an, daß zur Zeit $t = 0$ der zurückgelegte Weg $s = 0$ ist. Mit anderen Worten: Wir beginnen die Strecke s so zu zählen, wie es z. B. beim Sport üblich ist. Beim Start steht der Läufer zur Zeit $t = 0$ am Nullpunkt der zu durchlaufenden Strecke. Man nennt dies die **Anfangsbedingung** des zu lösenden Problems.

Setzen wir also $s = 0$ und $t = 0$ in die letzte Gleichung ein, so folgt daraus $0 = 0 + C$, also $C = 0$. Es verbleibt das wohlbekannte **Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung**:

$$s = v\,t \tag{3}$$

Besondere Übungsbeispiele hierzu wollen wir uns ersparen, da die gleichförmige Bewegung ausführlich im Vorbereitungsmaterial [V 3.1.] behandelt wurde. Dort sind auch Rechenübungen enthalten.

2.2.2. Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung

Auf ebenso einfache Weise können wir auch die Gesetze der beschleunigten Bewegung finden, die Sie in [V 3.2.3.] zum Teil schon studiert

haben. Hierzu gehen wir von der Definition (2) der Beschleunigung $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ aus. Nach $\mathrm{d}v$ umgestellt ergibt die beiderseitige Integration

$$\int \mathrm{d}v = \int a \, \mathrm{d}t$$

Wenn wir annehmen, daß die Beschleunigung a im betrachteten Zeitraum konstant ist, folgt daraus

$$v = a\,t + C$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C gibt es zwei Möglichkeiten. Sie können erstens annehmen, daß zur Zeit $t = 0$ auch die Geschwindigkeit $v = 0$ sei. Das würde heißen: Beim Drücken der Stoppuhr befindet sich der startende Läufer in der Ruhestellung. Zweitens können Sie sich auch vorstellen, daß der Läufer bereits eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit $v = v_0$ hat, wie beim sogenannten fliegenden Start (Staffellauf). Nehmen wir das letztere an, so wird aus der letzten Gleichung $v_0 = 0 + C$ und damit $C = v_0$. Mit dieser zweiten Anfangsbedingung erhält man für die Endgeschwindigkeit

$$v = a\,t + v_0 \tag{4}$$

Das entsprechende v-t-Diagramm ist in Bild 6 dargestellt. Dort sehen Sie unmittelbar, daß die Endgeschwindigkeit v aus den beiden Anteilen v_0 und $a\,t$ zusammengesetzt ist.

Um nun den in der Zeit t zurückgelegten Weg zu finden, benutzen Sie wieder den aus der Definition (1) hervorgehenden Ansatz $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$, in den Sie jetzt den zuletzt gefundenen Ausdruck (4) einsetzen:

$$\mathrm{d}s = (a\,t + v_0)\,\mathrm{d}t$$

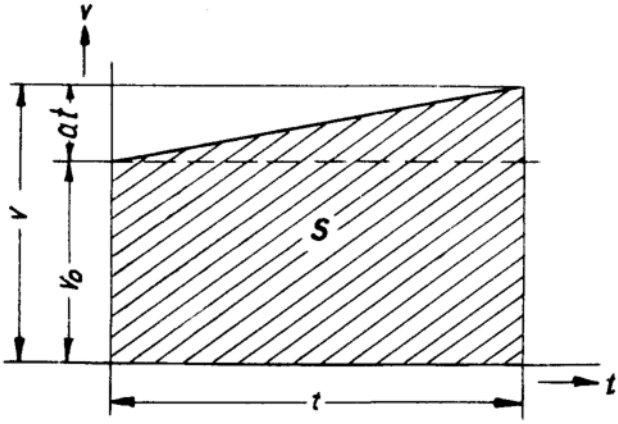


Bild 6. Ermittlung des Weges der gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus dem v-t-Diagramm

Die Lösung des Integrals

$$\int \mathrm{d}s = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t$$

lautet nach den aus der Mathematik bekannten Regeln

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C'$$

Wie die jetzt abermals auftretende Integrationskonstante C' zu finden ist, werden Sie leicht selbst beantworten können. Sie brauchen nur eine Verfügung darüber zu treffen, welchen Weg der Körper zur Zeit $t = 0$ bereits zurückgelegt haben soll. Am einfachsten ist es wieder, den Startpunkt mit 0 zu bezeichnen. Die letzte Gleichung lautet dann $0 = 0 + 0 + C'$, woraus $C' = 0$ folgt. Damit erhalten Sie das **Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung**:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t \tag{5}$$

Dieses Ergebnis können Sie beim Betrachten von Bild 6 bestätigen. Wie Sie in [V 3.2.3.] erfahren haben, stellt die Fläche unter der Kurve im v-t-Diagramm immer den zurückgelegten Weg s dar. Hier läßt sich die Fläche zerlegen in ein *Rechteck*, dessen Inhalt $v_0 t$ ist, und in ein darüberliegendes *Dreieck*. Dessen Grundlinie stellt die Zeit t dar, während die Höhe dem Geschwindigkeitszuwachs at entspricht. Sein Flächeninhalt entspricht daher $\frac{1}{2}at^2$. Die Summe beider Flächen stellt den Gesamtweg nach (5) dar.

Lehrbeispiel 2

Ein Schnellzug hat die Geschwindigkeit 85 km/h. Durch Übergang auf eine Gefällstrecke erhält er eine Beschleunigung von 0,1 m/s².

1. Auf wieviel Kilometer/Stunde ist die Geschwindigkeit des Zuges am Ende der Gefällstrecke angewachsen, wenn er diese, ohne zu bremsen, in 3 min durchfährt?
2. Nach wieviel Sekunden Fahrt auf der Gefällstrecke erreicht der Zug die Geschwindigkeit 120 km/h?

Lösung:

Gegeben:	v_0	= 85 km/h	Gesucht:	1. v_1
	a	= 0,1 m/s²		2. t_2
	t_1	= 3 min		
	v_2	= 120 km/h		

(Beachten Sie, daß Größen, die zusammengehören, mit dem gleichen Index versehen worden sind!)

1. Nach (4) ist

$$v_1 = v_0 + a\,t_1 = 85\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 0{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 3\text{ min}$$

$$= 85\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 85\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 18\cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\underline{\underline{v_1 = 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

2. Nach (4) ist

$$v_2 = v_0 + a\,t_2$$

Daraus folgt

$$t_2 = \frac{v_2 - v_0}{a} = \frac{35\text{ km h}^{-1}}{0{,}1\text{ m s}^{-2}} = \frac{35\cdot 1000\cdot\text{s}}{0{,}1\cdot 3600} = \underline{\underline{97\text{ s}}}$$

Lehrbeispiel 3

Mit welcher Beschleunigung bewegt sich ein Körper, der nach einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s in 32 s die Geschwindigkeit 80 m/s erreicht?

Lösung:

Gegeben: $v_0 = 10$ m/s Gesucht: a

$t = 32$ s

$v = 80$ m/s

Aus (4) folgt

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{70\text{ m s}^{-1}}{32\text{ s}} = \underline{\underline{2{,}2\text{ m/s}^2}}$$

Lehrbeispiel 4

Ein Zug hat die Geschwindigkeit 7 m/s. Auf einer Gefällstrecke nimmt seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 0,22 m/s zu.

1. Welche Geschwindigkeit hat der Zug, nachdem er eine Minute auf der Gefällstrecke gefahren ist?
2. Wie lang ist die Strecke, die er in dieser Zeit gleichmäßig beschleunigt zurücklegt?

Lösung:

Gegeben: $v_0 = 7$ m/s Gesucht: 1. v

$\Delta v = 0{,}22$ m/s 2. s

$t = 60$ s

$\Delta t = 1$ s

1. Nach (4) ist

$$v = v_0 + a\,t = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 60\ \mathrm{s} = \underline{\underline{20{,}2\ \mathrm{m/s}}}$$

$$= v_0 + \frac{\Delta v}{\Delta t}\,t$$

2. Nach (5) ist

$$s = v_0 t + \frac{a\,t^2}{2} = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 60\ \mathrm{s} + \frac{0{,}22\ \mathrm{m\ s^{-2}} \cdot 3600\ \mathrm{s}^2}{2}$$

$$= 420\ \mathrm{m} + 396\ \mathrm{m}$$

$$\underline{\underline{s = 816\ \mathrm{m}}}$$

2.2.3. Sonderfälle der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung

In den beiden Gleichungen (4) und (5) haben wir die Grundlage gefunden, aus der sich alle übrigen Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ableiten lassen. Wir brauchen sie nur in geeigneter Weise miteinander zu kombinieren und nach der jeweils gesuchten Größe umzustellen. Auch Sie müssen derartige Umformungen jederzeit selbständig ausführen können! Sie würden Sinn und Zweck des Physikunterrichts völlig verkennen, wenn Sie (was leider noch öfter geschieht!) weiter nichts täten, als die jetzt folgenden Gleichungen herauszuschreiben, in einer Formelsammlung zusammenzustellen und beim Lösen einer gestellten Aufgabe mechanisch die passende „Formel" herauszusuchen. Dies ist ein gefährlicher Schematismus, der Sie unfähig macht, Probleme selbständig zu lösen, für die Sie keine passende Formel finden. Dieser Lehrbrief ist keine Rezeptsammlung, sondern soll Sie dazu anleiten, *selbständig* zu *denken*. Beherzigen Sie diesen gutgemeinten Ratschlag, nehmen Sie Papier und Bleistift zur Hand und rechnen Sie die folgenden Ableitungen mit!

2.2.3.1. Verzögerte Bewegung

Sie wunderten sich vielleicht schon darüber, daß bisher immer nur von beschleunigten, aber noch nicht von verzögerten Bewegungen gesprochen wurde. Der Grund hierfür ist sehr einfach. Für *beide* Arten der Bewegung gelten die *gleichen* Gesetze. Sie müssen nur daran denken, daß die Differenz Δv bzw. das Differential $\mathrm{d}v$ den Sinn einer Verzögerung, d. h. einer *Abnahme* der Geschwindigkeit haben kann. Der Zahlenwert muß dann ein *negatives Vorzeichen* erhalten. Es gilt also für die

Beschleunigung: $a > 0$

Verzögerung: $a < 0$

2.2.3.2. *Weg als Funktion der Endgeschwindigkeit*

Häufig kommt es vor, daß man die Strecke s zu berechnen hat, dabei aber wohl die Beschleunigung a, nicht aber die Zeit t bekannt ist. Gleichung (5) kann daher nicht ohne weiteres verwendet werden. Sie bilden deshalb aus Gleichung (4) zunächst $t = \frac{v - v_0}{a}$ und setzen diesen Ausdruck in Gleichung (5) ein. Auf diese Weise erhalten Sie (vgl. Übung 13) die Gleichung

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,a}. \tag{6}$$

Das können Sie auch umformen und erhalten daraus die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,a\,s} \tag{7}$$

Ist anstelle der Beschleunigung a die Zeit t bekannt, können Sie in (6) $a = \frac{v - v_0}{t}$ einsetzen und bekommen dann (vgl. Übung 14) den Ausdruck

$$s = \frac{(v + v_0)\,t}{2} \tag{8}$$

Diese Gleichung ist leicht zu verstehen. Der Bruch $\frac{v + v_0}{2}$ ist nämlich das arithmetische Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit, d. h. die mittlere Geschwindigkeit während des Beschleunigungsvorgangs. Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist daher der *Weg gleich dem Produkt aus der mittleren Geschwindigkeit und der Zeit.*

2.2.3.3. *Start aus der Ruhelage*

Dieser Fall ist besonders einfach, weil die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ zu setzen ist. Aus den bisher entwickelten Gleichungen erhalten Sie dabei der Reihe nach:

$$v = a\,t; \quad s = \frac{a\,t^2}{2}; \quad s = \frac{v^2}{2\,a}; \quad s = \frac{v\,t}{2}; \quad v = \sqrt{2\,a\,s}$$

2.2.3.4. *Verzögerung bis zum Stillstand*

Das v-t-Diagramm ist bei *verzögerten* Bewegungen keine ansteigende, sondern eine *fallende* Gerade. Am Ende der Bewegung ist $v = 0$. Dies in die entsprechenden Gleichungen eingesetzt, liefert der Reihe nach:

$$v_0 = -a\,t; \quad s = -\frac{a\,t^2}{2}; \quad s = -\frac{v_0^2}{2\,a}; \quad s = \frac{v_0\,t}{2}; \quad v_0 = \sqrt{-2\,a\,s}$$

2.2.3.5. Freier Fall und senkrechter Wurf

Schließlich sind auch die Gesetze des freien Falls [V 3.2.4.] nichts anderes als Anwendungen unserer Grundgleichungen (4) und (5), da der freie Fall ebenfalls eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist. In den Gleichungen tritt anstelle der Beschleunigung a die **Fallbeschleunigung** (Schwerebeschleunigung) g und anstelle des Weges die Höhe h. Dabei ist $g = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$ der Normwert der Fallbeschleunigung.

Startet der fallende Körper aus der Ruhelage, so gelten unverändert die Gleichungen aus [2.2.3.3.]:

$$v = g\,t; \quad h = \frac{g\,t^2}{2}; \quad h = \frac{v^2}{2\,g}; \quad h = \frac{v\,t}{2}; \quad v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Wird dagegen ein Körper *senkrecht nach unten geworfen*, dann beginnt die Fallbewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0, mit der der Körper die Abwurfvorrichtung (z. B. die Hand des Werfers) verläßt. Sie benutzen also wieder die unveränderten Grundgleichungen (4) bis (8).

Beim *senkrechten Wurf nach oben* sind die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die Fallbeschleunigung einander *entgegen*gerichtet. Letztere wirkt jetzt als Verzögerung und ist mit dem *negativen* Vorzeichen einzusetzen.

Lehrbeispiel 5

Ein Personenzug fährt mit der Geschwindigkeit 17 m/s und soll innerhalb von 5 s auf 13 m/s abgebremst werden. Wie groß ist die Verzögerung?

Lösung:

Gegeben: $v_0 = 17\ \mathrm{m/s}$ Gesucht: a

$v = 13\ \mathrm{m/s}$

$t = 5\ \mathrm{s}$

Aus (4) folgt:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-4\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{5\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{-0{,}8\ \mathrm{m/s^2}}}$$

Beachten Sie das negative Vorzeichen (Verzögerung)!

Lehrbeispiel 6

Ein mit der Geschwindigkeit 30 m/s fahrender Kraftwagen wird so gebremst, daß seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 0,9 m/s abnimmt.

1. Wie groß ist die Verzögerung?
2. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 10 s Bremsdauer?
3. In welcher Zeit kommt das Fahrzeug zum Stillstand?

Lösung:

Gegeben: $v_0 = 30$ m/s Gesucht: 1. a

$\Delta v = -0{,}9$ m/s 2. v_1

$\Delta t = 1$ s 3. t

$t_1 = 10$ s

1. Auf Grund der Definition der Beschleunigung [2.1.3.] gilt

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-0{,}9 \text{ m s}^{-1}}{1 \text{ s}} = \underline{\underline{-0{,}9 \text{ m/s}^2}}$$

2. Nach (4) ist

$$v_1 = a\, t_1 + v_0 = -0{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ s} + 30 \text{ m/s}$$
$$v_1 = 30 \text{ m/s} - 9 \text{ m/s}$$
$$\underline{\underline{v_1 = 21 \text{ m/s}}}$$

3. Nach [2.2.3.4.] ist

$$t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{30 \text{ m s}^{-1}}{-0{,}9 \text{ m s}^{-2}} = \underline{\underline{33 \text{ s}}}$$

Lehrbeispiel 7

Ein Fahrzeug bewegt sich mit der Geschwindigkeit 60 km/h. Plötzlich wird der Fahrer gezwungen, um einen Unfall zu vermeiden, das Fahrzeug auf einer Strecke von 30 m zum Stehen zu bringen. Die Bremsbewegung soll als gleichmäßig verzögerte Bewegung angesehen werden.

1. Wieviel Sekunden dauert der Bremsvorgang?
2. Welche Verzögerung besitzt das Fahrzeug?

Lösung:

Gegeben: $v_0 = 60$ km/h Gesucht: 1. t

$s = 30$ m 2. a

Nach [2.2.3.4.] gelten folgende Beziehungen:

1. $$t = \frac{2\,s}{v_0} = \frac{2 \cdot 30 \text{ m}}{60 \text{ km/h}} = \frac{\text{h}}{1000} = \underline{\underline{3{,}6 \text{ s}}}$$

2. $$a = -\frac{v_0^2}{2\,s} = -\frac{60^2 \text{ km}^2}{60 \text{ m h}^2} = -\frac{60 \text{ m}^2}{\text{m} \cdot 3{,}6^2 \text{ s}^2} = \underline{\underline{-4{,}6 \text{ m/s}^2}}$$

2.2.4. Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Körpers

Zwischen Rotation und Translation besteht ein prinzipieller Unterschied. Deshalb ist es notwendig, für die Behandlung der Rotation besondere Größen einzuführen. Doch stehen diese in engem Zusammenhang mit den Größen der Translation, da ja jeder Punkt eines rotierenden Körpers eine fortschreitende Bewegung auf einer Kreisbahn ausführt. Denken Sie an die Bewegung eines auf einem Schwungrad markierten Punktes!

Wie die Bewegung eines solchen Punktes zu beschreiben ist, wurde in [V 3.4.] bereits gezeigt. Dort wurden die Begriffe der *Drehzahl* n, der Periodendauer oder *Umlaufzeit* T und der *Bahngeschwindigkeit* v ausreichend erläutert und ihre Anwendung geübt, so daß wir nicht nochmals darauf einzugehen brauchen. Falls Sie diese Zusammenhänge nicht mehr beherrschen sollten, müssen Sie sich jetzt noch einmal darüber informieren.

Im Vorbereitungsmaterial [V 3.4.3.] hatten Sie bereits den Begriff der Winkelgeschwindigkeit ω als Quotient aus dem Winkel, den ein Punkt des Körpers überstreicht, und der Zeit kennengelernt. Bezeichnen wir jetzt den überstrichenen Winkel mit $\Delta\varphi$ und das zugehörige Zeitintervall mit Δt, so ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit ω der *Differenzenquotient*

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

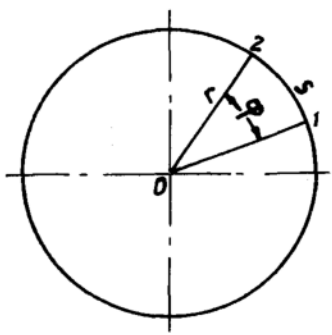


Bild 7
Zur Definition des Winkels

Es sei nochmals auf Abschnitt [V 3.4.3.] des Vorbereitungsmaterials hingewiesen, in dem ausgeführt wurde, daß unter dem Winkel φ der Quotient aus dem zugehörigen Bogen s und dem Radius verstanden wird:

$$\varphi = \frac{s}{r} \qquad (9)$$

Da der Bruch $\frac{s}{r}$ das Verhältnis zweier Längen ist, ist dieser Winkel (im Bogenmaß) eine *reine Zahl*. Zwischen Gradmaß und Bogenmaß gilt die Beziehung $360° = 2\pi$.

Bei einer gleichförmigen Drehbewegung werden in gleichen Zeiten gleich große Winkel überstrichen. Das können wir uns wohl vorstellen, aber es wird in Wirklichkeit nie genau zutreffen. Denkt man darüber hinaus noch daran, daß der Gang rotierender Maschinen oftmals peri-

odisch schwankt, so hat die Winkelgeschwindigkeit in *jedem Augenblick* einen anderen Wert. Um diesen Augenblickswert mathematisch einzufangen, verfahren wir so wie bei der geradlinigen Bewegung. Wir denken uns das Zeitintervall Δt sehr klein und bilden den Grenzwert:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist der Differentialquotient des Drehwinkels nach der Zeit.

Diese Definition ist vollkommen analog zu der der Geschwindigkeit $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ (1). Aus Gleichung (9) folgt

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$$

Setzt man für $\mathrm{d}s$ diesen Wert in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$v = \frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Der Differentialquotient ist nach (10) gleich der Winkelgeschwindigkeit ω:

$$v = r\,\omega \tag{11}$$

Bahngeschwindigkeit = Bahnradius · Winkelgeschwindigkeit.

Zum Schluß sei noch an die aus [V 3.4.3.] bekannte Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der Drehzahl erinnert:

$$\omega = 2\,\pi\,n \tag{12}$$

Lehrbeispiel 8

Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung der Erde um ihre Achse und ihre Umfangsgeschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit) am Äquator! (Erdradius: 6378 km)

Lösung:

Gegeben: $n = 1/24\ \mathrm{h}$ Gesucht: ω

$r = 6378\ \mathrm{km}$ v

Nach (12) ist

$$\omega = 2\,\pi\,n = \frac{2\,\pi}{24\ \mathrm{h}} = \frac{2\,\pi}{24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}}}$$

Die Bahngeschwindigkeit folgt aus (11):

$$v = r\,\omega = \frac{6378 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-5}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{465\ \mathrm{m/s}}}$$

Zu diesem Ergebnis gelangen Sie auch, wenn Sie nach (3) rechnen und als Weg den Erdumfang mit 40000 km ansetzen:

$$v = \frac{40\,000 \text{ km}}{24 \text{ h}} = \frac{40\,000 \text{ m}}{3{,}6 \cdot 24 \text{ h}} = \underline{\underline{463 \text{ m/s}}}$$

Lehrbeispiel 9

Ein Kraftwagen durchfährt mit konstanter Geschwindigkeit 42 km/h eine Kurve mit dem Krümmungsradius 80 m.

1. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit?
2. Welche Strecke legt er zurück, wenn die Straße an dieser Stelle um einen Winkel von 40° abbiegt?
3. In welcher Zeit wird die Kurve durchfahren? (Bild 8)

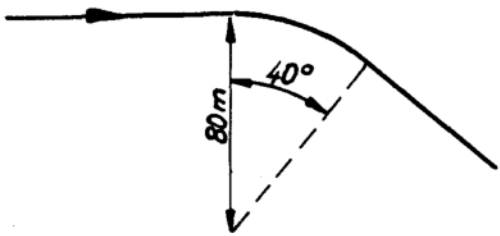


Bild 8. Zum Lehrbeispiel 9

Lösung:

Gegeben: $v = 42$ km/h, $r = 80$ m, $\varphi = 40°$

Gesucht: 1. ω, 2. s, 3. t

1. Die Winkelgeschwindigkeit folgt aus (11):

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{42 \text{ m s}^{-1}}{3{,}6 \cdot 80 \text{ m}} = \underline{\underline{0{,}15 \text{ s}^{-1}}}$$

2. Die Bogenlänge ergibt sich aus (9):

$$s = r\varphi = \frac{80 \text{ m} \cdot 40° \cdot \pi}{180°} = \underline{\underline{56 \text{ m}}}$$

3. Aus (3) folgt:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{56 \text{ m} \cdot 3{,}6}{42 \text{ m s}^{-1}} = \underline{\underline{4{,}8 \text{ s}}}$$

2.2.5. Winkelbeschleunigung eines rotierenden Körpers

Drehbewegungen können schon deshalb nicht immer gleichförmig verlaufen, weil sie ja irgendwann einmal beginnen und mit Sicherheit auch einmal enden müssen. Wenn z. B. ein Elektromotor angelassen wird, setzt er sich aus dem Stillstand heraus in Bewegung. Er erreicht dann nach und nach seine volle Drehzahl, mit der er im Betrieb laufen soll. Vom Augenblick des Abschaltens an läßt die Winkelgeschwindigkeit wieder nach, bis er schließlich zur Ruhe kommt. Am Anfang handelt es sich also um eine *beschleunigte*, gegen Ende dagegen um eine *verzögerte* Drehbewegung (Bild 9).

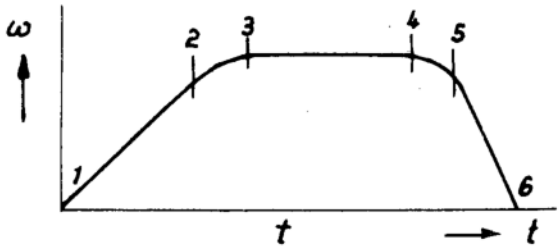


Bild 9. ω-t-Diagramm einer ungleichförmigen Drehbewegung

Für den Fall, daß die Änderungen der Winkelgeschwindigkeit gleichmäßig erfolgen, können wir daher in Analogie zur geradlinigen Bewegung die **Winkelbeschleunigung** α definieren:

Die Winkelbeschleunigung ist der Quotient aus der Änderung der Winkelgeschwindigkeit und der dazu erforderlichen Zeit.

Solange es sich um meßbare Änderungen handelt, die einen bestimmten endlichen Wert haben, können wir sie als Differenzenquotient schreiben:

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Für die **Einheit der Winkelbeschleunigung** gilt:

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\mathrm{s}^{-1}}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-2}$$

Die Winkelgeschwindigkeit braucht sich aber durchaus nicht immer gleichmäßig zu ändern. Aus Bild 9 ist zu erkennen, daß dies dort nur zwischen den Punkten *1* und *2* der Fall ist. Von Punkt *2* an, wo sich die Kurve zu krümmen beginnt, wird der Anstieg der Kurve immer kleiner, die Winkelbeschleunigung läßt nach. Im horizontalen Teil von *3* bis *4* ist die Winkelgeschwindigkeit konstant und die Winkelbeschleunigung

gleich null (wegen $\Delta\omega = 0$). Von *4* bis *5* nimmt die Winkelgeschwindigkeit wieder ab, und der Differenzenquotient $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ wird *negativ*. Im letzten Teil ist die Winkelverzögerung konstant.

Die Größe α hat daher zweierlei Bedeutung:

Winkelbeschleunigung $\alpha > 0$
Winkelverzögerung $\alpha < 0$

Wegen der stetigen Änderung der Winkelbeschleunigung ist es notwendig, sie als eine Augenblicksgröße aufzufassen und zum *Differentialquotienten* überzugehen:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \tag{13}$$

Die Winkelbeschleunigung ist der Differentialquotient der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit bzw. der zweite Differentialquotient des Winkels nach der Zeit.

Es soll nun noch der Zusammenhang zwischen Bahnbeschleunigung und Winkelbeschleunigung gefunden werden. Dazu differenzieren wir beide Seiten der Gleichung (11) nach der Zeit und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

Der Differentialquotient auf der linken Seite ist nach (2) die Bahnbeschleunigung, während der Differentialquotient rechts vom Gleichheitszeichen die Winkelbeschleunigung (13) darstellt. Damit gilt

$$a = r\alpha \tag{14}$$

Bahnbeschleunigung = Bahnradius · Winkelbeschleunigung.

Fassen wir nochmals die Beziehungen zwischen den Größen der Translation und denen der Rotation, dargestellt durch die Gleichungen (9), (11) und (14), zusammen:

$$s = r\varphi \qquad v = r\omega \qquad a = r\alpha$$

Sie erkennen:

Alle Bahngrößen entstehen aus den entsprechenden Winkelgrößen durch Multiplikation mit dem Bahnradius.

2.2.6. Gesetze der Drehbewegung

Der zuletzt gefundene Satz ermöglicht es, die bereits bekannten Gesetze der fortschreitenden Bewegung auf die entsprechenden Fälle der Drehbewegung zu übertragen. Es ist dabei weiter nichts zu tun, als die

jeweilige Gleichung der geradlinigen Bewegung beiderseits durch den Bahnradius zu dividieren. Anstelle der Bahngrößen erhält man so die entsprechenden Winkelgrößen. Ein Beispiel soll Ihnen das erläutern:

Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung:

$$s = \frac{a\,t^2}{2} + v_0\,t$$

Division durch r:

$$\frac{s}{r} = \frac{a\,t^2}{r \cdot 2} + \frac{v_0\,t}{r}$$

Einführung der Winkelgrößen nach (9), (11) und (14):

$$\varphi = \frac{\alpha\,t^2}{2} + \omega_0\,t$$

Sie erkennen:

> Die Gesetze der Drehbewegung entstehen aus denen der fortschreitenden Bewegung durch Austausch der Größen s, v und a gegen die Größen φ, ω und α.

Wir brauchen uns daher nicht der Mühe zu unterziehen, die für die Kreisbewegung gültigen Gesetze auf dem Wege der Integration aus den Gleichungen $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ bzw. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ einzeln abzuleiten, da hierbei alle Gedankengänge der Abschnitte 2.2.1. und 2.2.2. dieselben bleiben und nur die genannten Größen auszutauschen sind.

In der folgenden Übersicht sind einige wichtige der einander analogen Gleichungen aufgeführt:

Geradlinige Bewegung	Drehbewegung
$s = v\,t$	$\varphi = \omega\,t$
$s = \frac{(v + v_0)\,t}{2}$	$\varphi = \frac{(\omega + \omega_0)\,t}{2}$
$v = a\,t + v_0$	$\omega = \alpha\,t + \omega_0$
$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,a\,s}$	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\,\alpha\,\varphi}$

Lehrbeispiel 10

Die Winkelgeschwindigkeit einer Welle nimmt in 10 s von 32 s^{-1} auf 54 s^{-1} gleichmäßig zu. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung!

Lösung:

Gegeben: $\omega_0 = 32\ s^{-1}$ Gesucht: α

$\omega = 54\ s^{-1}$

$t = 10\ s$

Die der Gleichung (4) entsprechende Gleichung lautet:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{54\ s^{-1} - 32\ s^{-1}}{10\ s} = \underline{\underline{2{,}2\ s^{-2}}}$$

Lehrbeispiel 11

Welche Winkelbeschleunigung haben die Räder eines Fahrrades, deren äußerer Durchmesser 76 cm beträgt, wenn das Fahrrad innerhalb von 12 s nach dem Start eine Geschwindigkeit von 30 km/h erreicht?

Lösung:

Gegeben: $r = 0{,}38\ m$ Gesucht: α

$t = 12\ s$

$v = \frac{30}{3{,}6}\ m/s$

$v_0 = 0$

Aus Gleichung (4) folgt mit $v_0 = 0$

$$a = \frac{v}{t}$$

Man erhält die Winkelbeschleunigung, indem man beide Seiten der Gleichung durch r dividiert:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{v}{t\,r} = \frac{30\ m\ s^{-1}}{3{,}6 \cdot 12\ s \cdot 0{,}38\ m} = \underline{\underline{1{,}8\ s^{-2}}}$$

Lehrbeispiel 12

Ein zunächst stillstehendes Schwungrad erhält eine Winkelbeschleunigung von 0,56 s^{-2}. Bestimmen Sie

1. den Winkel (im Bogenmaß), um den sich das Rad innerhalb von 26 s dreht,
2. die Anzahl der Umdrehungen, die das Rad während dieser Anlaufzeit macht!

Lösung:

Gegeben: $\omega_0 = 0$ Gesucht: 1. φ

$\alpha = 0{,}56\ \mathrm{s}^{-2}$ 2. z

$t = 26\ \mathrm{s}$

1. Die der Gleichung (5) entsprechende Gleichung lautet mit $\omega_0 = 0$

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{0{,}56\ \mathrm{s}^{-2} \cdot 26^2\ \mathrm{s}^2}{2} = \underline{\underline{189}}$$

2. Für eine Umdrehung beträgt der Winkel 2π, demzufolge für z Umdrehungen $2\pi z$. Es gilt also $\varphi = 2\pi z$. Daraus folgt

$$z = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{189}{2\pi} = \underline{\underline{30}}$$

Lehrbeispiel 13

Ein Motor wird in 14 s von der Drehzahl 660 min^{-1} auf 240 min^{-1} gleichmäßig abgebremst. Berechnen Sie

1. die Winkelverzögerung,
2. den Drehwinkel (im Bogenmaß), der innerhalb der Bremszeit zurückgelegt wird,
3. die Anzahl der Umdrehungen in der Bremszeit!

Lösung:

Gegeben: $t = 14\ \mathrm{s}$ Gesucht: 1. α

$n_0 = 660\ \mathrm{min}^{-1}$ 2. φ

$n = 240\ \mathrm{min}^{-1}$ 3. z

1. Entsprechend (4) gilt für die Drehbewegung

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

Nach (12) wird die Drehzahl eingeführt:

$$\alpha = \frac{2\pi(n - n_0)}{t} = \frac{2\pi(240 - 660)}{14\ \mathrm{s\ min}} = \underline{\underline{-3{,}14\ \mathrm{s}^{-2}}}$$

2. Entsprechend (8) gilt für die Drehbewegung

$$\varphi = \frac{\omega + \omega_0}{2} t$$

Einführung der Drehzahl nach (12):

$$\varphi = \frac{2\,\pi\,(n + n_0)\,t}{2} = \pi\,(n + n_0)\,t$$

$$\varphi = \frac{\pi\,(240 + 660)\,14\text{ s}}{60\text{ s}} = \underline{\underline{660}}$$

3. Wie im Lehrbeispiel 12 begründet, gilt

$$z = \frac{\varphi}{2\,\pi} = \frac{660}{2\,\pi} = \underline{\underline{105}}$$

Zusammenfassung

Stellt man die Geschwindigkeit als Differentialquotienten dar, so ergibt sich das Weg-Zeit-Gesetz als unbestimmtes Integral. Die Integrationskonstante ermittelt man aus der Anfangsbedingung.

Das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung entsteht durch zweimalige Integration der Definitionsgleichung für die Beschleunigung. Dabei ist die Beschleunigung eine Konstante. Man erhält so zuerst die Endgeschwindigkeit und bei nochmaliger Integration den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit. Die Werte der jeweiligen Integrationskonstanten folgen aus den Anfangsbedingungen.

Alle Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung entstehen durch Umformen der im Abschnitt 2.2.2. abgeleiteten beiden Grundgleichungen. Hierzu gehören auch die Gesetze des freien Falls und des senkrechten Wurfes. Verzögerungen haben einen negativen Zahlenwert.

Die Drehbewegung wird durch die Winkelgeschwindigkeit beschrieben. Diese ist der Differentialquotient des Drehwinkels nach der Zeit. Dabei werden Drehwinkel stets im Bogenmaß gemessen. Die Bahngeschwindigkeit eines Punktes des rotierenden Körpers ist das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Bahnradius. Die Winkelgeschwindigkeit kann auch aus der Drehzahl berechnet werden.

Die beschleunigte bzw. verzögerte Drehbewegung wird mit Hilfe der Winkelbeschleunigung erfaßt. Diese ist der Differentialquotient der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit und kann positives (Beschleunigung) oder negatives Vorzeichen (Verzögerung) haben.

Alle Größen der fortschreitenden Bewegung gehen aus denen der Drehbewegung durch Multiplikation mit dem Bahnradius hervor.

Alle Gesetze der Drehbewegung entstehen aus denen der fortschreitenden Bewegung durch Austausch der Größen s, v und a gegen die Größen φ, ω und α.

Übungen

1. Erklären Sie die gleichmäßig beschleunigte Bewegung!
2. Was versteht man unter
   1. der Beschleunigung?
   2. der Verzögerung?
3. Gibt es verzögerte Bewegungen aus der Ruhelage heraus?
4. In welcher Bewegung befindet sich ein Fahrzeug, dessen Beschleunigung sich fortgesetzt ändert?
5. Wie verläuft die Kurve in einem v-t-Diagramm bei einer
   1. gleichförmigen,
   2. gleichmäßig beschleunigten,
   3. ungleichmäßig beschleunigten Bewegung?
6. Worin besteht der physikalische Unterschied, wenn man die Geschwindigkeit einerseits als Differenzenquotient und andererseits als Differentialquotient formuliert?
7. Welcher Gedankengang führt vom Differenzen- zum Differentialquotienten?
8. Differenzieren Sie die Gleichung $s = \frac{a t^2}{2} + v_0 t$ nach t und erläutern Sie das Ergebnis!
9. Differenzieren Sie die Gleichung $v = a\,t + v_0$ nach t und erläutern Sie das Ergebnis!
10. Innerhalb welcher Zeit kann ein Motorradfahrer seine Geschwindigkeit von 40 km/h auf 80 km/h steigern, wenn die Maschine eine Beschleunigung von 2,5 m/s² zuläßt?
11. Ein anfahrendes Kraftfahrzeug hat die Beschleunigung 0,4 m/s². Nach welcher Zeit hat das Fahrzeug die Geschwindigkeit 60 km/h erreicht? Welche Strecke hat es dann zurückgelegt?
12. Ein Kraftfahrzeug hat die Geschwindigkeit 40 km/h. Von einem bestimmten Zeitpunkt an bewegt es sich 20 Sekunden lang gleichmäßig beschleunigt mit der Beschleunigung 0,3 m/s².
    1. Welchen Weg legt das Kraftfahrzeug in den 20 Sekunden zurück?
    2. Welche Geschwindigkeit erreicht das Kraftfahrzeug?
13. Leiten Sie die Gleichung $v = \sqrt{2\,a\,s + v_0^2}$ aus den Grundgleichungen (4) und (5) ab!
14. Leiten Sie die Gleichung $s = \frac{1}{2}\,(v + v_0)\,t$ aus den Grundgleichungen (4) und (5) ab!

15. Ein Personenzug fährt mit der Geschwindigkeit 17 m/s und soll auf einer Strecke von 120 m auf die Geschwindigkeit 13 m/s abgebremst werden.
    1. Welche Verzögerung erfährt der Personenzug dabei?
    2. Wie lange dauert der Bremsvorgang?
16. Ein mit der Geschwindigkeit 15 m/s fahrender Eisenbahnzug wird gebremst, so daß seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 0,65 m/s abnimmt.
    1. Wie groß ist seine Verzögerung?
    2. Wie groß ist seine Geschwindigkeit 10 s nach dem Ziehen der Bremsen?
    3. In welcher Zeit kommt der Zug zum Stillstand?
    4. Welchen Bremsweg hat der Zug zurückgelegt?
    5. Wie groß wäre die Verzögerung des Zuges, wenn er erst nach 27 s zum Stillstand käme?
17. Ein Triebwagen hat die Geschwindigkeit 72 km/h. Der Triebwagenführer muß plötzlich den Wagen bremsen, da 60 m vor ihm ein Hindernis auftaucht. Durch das Bremsen erhält der Wagen eine Verzögerung von 4 m/s².
    1. Wieviel Meter/Sekunde beträgt seine Geschwindigkeit 4 s nach Beginn des Bremsvorgangs?
    2. Welcher Weg ist in diesen 4 Sekunden zurückgelegt worden?
    3. Wieviel Meter vor dem Hindernis kommt der Triebwagen zum Stehen?
18. Der Hammerbär eines Fallhammers fällt aus einer Höhe von 3,5 m auf einen Gegenstand, der zertrümmert werden soll. Wie groß ist die Aufschlaggeschwindigkeit des Hammerbärs?
19. Infolge Seilbruchs stürzte von einem Schiffskran eine Kiste herab. In welcher Höhe hatte sich diese Kiste befunden, wenn sie mit der Geschwindigkeit 16,6 m/s auf den Boden aufschlug?
20. In der letzten Sekunde vor dem Aufschlagen auf die Erde legte ein frei fallender Körper 65 m zurück. Aus welcher Höhe ist der Körper herabgefallen? (Benutzen Sie $g \approx 9{,}81$ m/s²)
21. Was verstehen Sie unter der Winkelgeschwindigkeit?
22. Wie ist der Winkel (im Bogenmaß) definiert? Erläutern Sie die Einheit dieses Winkels!
23. Ein Schwungrad hat einen Durchmesser von 2,5 m und eine Drehzahl von 175 min^{-1}. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit am Umfang und die Winkelgeschwindigkeit!

24. Das Transportband einer Förderanlage soll die Geschwindigkeit 2 m/s haben. Die Trommelwelle, über die das Transportband läuft, hat eine Drehzahl von 125 min^{-1}. Wie groß muß der Trommeldurchmesser sein, damit die angegebene Bandgeschwindigkeit erreicht wird?
25. Eine Riemenscheibe mit dem Radius 40 cm hat eine Drehzahl von 300 min^{-1}. Bestimmen Sie ihre Winkelgeschwindigkeit und ihre Umfangsgeschwindigkeit!
26. Wieviel Umdrehungen entsprechen einem Drehwinkel $\varphi = 500$?
27. Welchem Drehwinkel entsprechen 16 Umdrehungen eines Rades?
28. Wann ist eine Drehbewegung gleichmäßig beschleunigt (verzögert)?
29. Die Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Körpers nimmt bei einer Winkelverzögerung von 1,28 s^{-2} von 21,6 s^{-1} auf 12,6 s^{-1} ab. Welche Zeit ist hierzu erforderlich?
30. Ein Schwungrad läuft gleichmäßig beschleunigt aus dem Ruhezustand innerhalb von 34 s an und hat dann eine Drehzahl von 220 min^{-1}.
    1. Welche Winkelgeschwindigkeit erreicht das Schwungrad?
    2. Mit welcher Winkelbeschleunigung läuft es an?
    3. Welcher Drehwinkel wird beim Anlaufen erreicht?
    4. Wieviel Umdrehungen macht das Schwungrad während der Anlaufzeit?
31. Welche Anlaufzeit benötigt ein Motor, wenn er nach 500 Umdrehungen eine Drehzahl von 2000 min^{-1} erreicht?
32. Ein rotierender Körper besitzt eine Winkelbeschleunigung von 3,8 s^{-2}.
    1. Welche Winkelgeschwindigkeit erreicht er in 6,2 s, wenn seine Winkelgeschwindigkeit zu Beginn 7,3 s^{-1} ist?
    2. Welche Drehzahl besitzt der Körper zu Beginn und am Ende der gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung?

2.3. Geschwindigkeit und Beschleunigung als Vektoren

2.3.1. Relativität der Bewegungen

Bei allen bisherigen Betrachtungen haben wir eine Ihnen wohl selbstverständlich erscheinende Voraussetzung gemacht: Wir haben alle Bewegungen von einem *festen Standpunkt* aus beurteilt und gemessen. Sie werden sich auch sagen, daß wir gut daran getan haben; denn wie sollen wir Bewegungsvorgänge messen, wenn wir uns selbst dabei bewegen? Und doch ist es sehr wichtig, sich mit diesem Problem zu be-

schäftigen. Es läuft z. B. darauf hinaus zu überlegen, nach welchen Gesetzen sich zwei Körper gegeneinander bewegen, bzw. was dabei herauskommt, wenn ein sich bewegender Körper von einem anderen mitgenommen wird usw. Das sind Vorgänge, die in der Technik eine große Rolle spielen.

Den Standpunkt, von dem aus eine Bewegung beurteilt und gemessen wird, nennt man das **Bezugssystem**, und alle Angaben und Messungen gelten nur relativ zu diesem System. Ohne Angabe des Bezugssystems ist es sinnlos, von Bewegung zu sprechen. Im allgemeinen wird als Bezugssystem stillschweigend die als ruhend gedachte Erde oder ein Teil davon, wie etwa das Haus, in dem wir arbeiten, oder der Experimentiertisch angenommen. Wir vergessen dabei aber vollkommen, daß sich die Erde selbst um ihre Achse dreht und sich mitsamt dem Sonnensystem durch den Weltraum bewegt; doch können wir den Einfluß dieser Bewegungen in den meisten Fällen vernachlässigen.

Im Zusammenhang mit der Relativität der Bewegungen wollen wir zunächst mit einem einfachen Beispiel an das als bekannt vorausgesetzte Unabhängigkeitsprinzip der Bewegungen erinnern.

Der Kellner in einem D-Zug möge sich mit der Geschwindigkeit $v_{2\,\mathrm{rel}}$ in Fahrtrichtung bewegen, um nach dem Speisewagen zu gehen. ($v_{2\,\mathrm{rel}}$ ist relativ zum D-Zug gemessen). Ein außerhalb des Zuges am Bahndamm stehender Beobachter wird aber bemerken, daß sich der Zug mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt. Vom Bahndamm aus gesehen ergibt sich die Gesamtgeschwindigkeit des Kellners als Summe

$$v_{\mathrm{ges}} = v_1 + v_{2\,\mathrm{rel}}$$

Das **Unabhängigkeitsprinzip der Bewegung** (auch *Prinzip der ungestörten Überlagerung der Bewegungen* genannt) sagt also aus:

> Führt ein Körper mehrere Bewegungen gleichzeitig aus, so beeinflussen sich diese gegenseitig nicht. Die Bewegungen können mit gleichem Ergebnis auch zeitlich nacheinander ausgeführt werden.

Lehrbeispiel 14

In einem sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 2$ m/s abwärts bewegenden Fahrstuhl fällt aus 1 m Höhe ein Gegenstand zu Boden.

1. Mit welcher Geschwindigkeit $v_{1\,\mathrm{rel}}$ trifft er gegen den Boden des Fahrstuhls?
2. Welche Geschwindigkeit v_2 relativ zur Erde hat der Gegenstand nach einer Fallzeit von 0,1 s?

Lösung:

1. Gegeben: $v = 2$ m/s Gesucht: $v_{1\,\mathrm{rel}}$
   $h = 1$ m

   Da die gesuchte Geschwindigkeit relativ zum Fahrstuhl zu messen ist, können wir diesen als ruhend ansehen und brauchen die Geschwindigkeit v_1 in unserer Rechnung nicht zu berücksichtigen. Somit ergibt sich

$$v_{1\,\mathrm{rel}} = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\ \mathrm{m}} = \underline{\underline{4{,}4\ \mathrm{m/s}}}$$

2. Gegeben: $t = 0{,}1$ s Gesucht: v_2
   $v = 2$ m/s

   Wählt man die Erde als Bezugssystem, so liegt eine Überlagerung der Fahrstuhlbewegung mit der Fallbewegung vor. Da beide Bewegungen gleichgerichtet sind, addieren sich die Beträge der Geschwindigkeiten.

   Wir erhalten, wenn $v_{2\,\mathrm{rel}}$ die Fallgeschwindigkeit relativ zum Fahrstuhl bedeutet,

$$v_2 = v + v_{2\,\mathrm{rel}}$$

   Wir berechnen nun $v_{2\,\mathrm{rel}}$:

   Im Moment des Loslassens besitzt der Körper die Relativgeschwindigkeit null. Nach der Zeit t ist

$$v_{2\,\mathrm{rel}} = g\,t = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}1\ \mathrm{s} = 0{,}98\ \mathrm{m/s}$$

   und damit

$$v_2 = 2\ \mathrm{m/s} + 0{,}98\ \mathrm{m/s} = \underline{\underline{2{,}98\ \mathrm{m/s}}}$$

Oft ist es zweckmäßig, die Bewegung von einem bewegten Bezugssystem aus zu betrachten. Auch dazu ein Beispiel: Auf der Autobahn fährt ein Trabant mit der Geschwindigkeit $v_1 = 80$ km/h. Er wird von einem Wartburg überholt, der die Geschwindigkeit $v_2 = 100$ km/h hat. Der Fahrer des Trabant sieht den Wartburg mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h an sich vorüberfahren: Im Trabant-Bezugssystem hat der Wartburg eine Geschwindigkeit $v_{2\,\mathrm{rel}} = 20$ km/h. Der Fahrer des Wartburg sieht den Trabant hinter sich zurückbleiben. Für ihn bewegt sich der Trabant rückwärts. Im Wartburg-Bezugssystem hat der Trabant die Geschwindigkeit $v_{1\,\mathrm{rel}} = -20$ km/h.

Die Situation ist slao die folgende: Wir haben zwei Körper vor uns, die sich, von der ruhend gedachten Erde aus gesehen, mit den Geschwindig-

keiten v_1 und v_2 parallel zueinander bewegen. Wählt man den Körper *1* als Bezugssystem, so hat der Körper *2* in diesem Bezugssystem die **Relativgeschwindigkeit**

$$v_{rel} = v_2 - v_1$$

Dabei ist zu beachten, daß v_1 und v_2 bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung mit entgegengesetzten Vorzeichen eingesetzt werden müssen.

Lehrbeispiel 15

Ein Kraftwagen überholt mit der Geschwindigkeit 80 km/h ein Motorrad, dessen Geschwindigkeit 65 km/h beträgt. Der Überholvorgang ist beendet, wenn sich die Fahrzeuge um 140 m gegeneinander verschoben haben. Wie groß sind

1. die Überholzeit,
2. die vom Kraftwagen auf der Straße zurückgelegte Überholstrecke?

Lösung:

Gegeben: $v_1 = 65$ km/h Gesucht: 1. t

$v_2 = 80$ km/h 2. s

$s_{rel} = 140$ m

1. Die Relativgeschwindigkeit der Fahrzeuge (auf das Motorrad bezogen) ist

$$v_{rel} = v_2 - v_1$$

Mit dieser Geschwindigkeit wird die relative Strecke s_{rel} durchfahren. Es ist daher die Überholzeit

$$t = \frac{s_{rel}}{v_{rel}} = \frac{s_{rel}}{v_2 - v_1}$$

Mit den gegebenen Werten erhält man

$$t = \frac{140\ \text{m} \cdot 3{,}6\ \text{s}}{15\ \text{m}} = \underline{\underline{33{,}6\ \text{s}}}$$

2. Der Kraftwagen durchfährt in dieser Zeit die Strecke

$$s = v_2 t = \frac{80\ \text{m} \cdot 33{,}6\ \text{s}}{3{,}6\ \text{s}} = \underline{\underline{747\ \text{m}}}$$

2.3.2. Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeitsvektoren

Die Gültigkeit des Unabhängigkeitsprinzips beschränkt sich nicht nur auf parallel gerichtete Bewegungen. Bereits in [V 3.3.2.] haben Sie erfahren, daß sich hieraus der Satz vom Parallelogramm der Bewegungen herleitet. Dabei wurde vor allem erklärt, daß die Geschwindigkeit eine *vektorielle Größe* ist, d. h. außer dem *Betrag* noch eine *Richtung* besitzt. Übrigens werden wir außer der Geschwindigkeit noch andere Größen kennenlernen, die als **Vektoren** zu behandeln sind, z. B. die Beschleunigung und die Kraft.

Vektoren sind gerichtete Größen. Ein Vektor wird grafisch durch einen Pfeil dargestellt, dessen Länge nach einem gewählten Maßstab den Betrag angibt.

Daneben gibt es aber auch viele physikalische Größen, denen die Eigenschaft der Richtung fehlt, z. B. Zeit, Temperatur usw. Man bezeichnet diese als **Skalare**. Um diesen Unterschied auch in der Schreibweise hervorzuheben, verwendet man als Symbole für Vektoren deutsche Frakturbuchstaben. Dann drückt man die Addition zweier Geschwindigkeiten mit der Gleichung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

aus. Das dürfen Sie aber nicht mißverstehen! Das Pluszeichen bedeutet *keine Addition der Beträge*! Vielmehr ergibt sich die Summe zweier Vektoren nach dem Parallelogrammsatz. Man sagt auch:

Vektoren werden geometrisch addiert.

Um noch einmal daran zu erinnern, ist Bild 10 gezeichnet. $\mathfrak{v}_1$ möge z. B. die Geschwindigkeit eines Flugzeugs sein, mit der es seinen Kurs steuert. $\mathfrak{v}_2$ ist die Geschwindigkeit des seitlichen Windes. Aus diesen beiden **Geschwindigkeitskomponenten** ergibt sich die Geschwindigkeit des Flugzeugs gegenüber der Erde als **Resultierende** $\mathfrak{v}$.

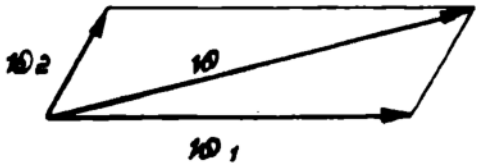


Bild 10
Parallelogramm der Geschwindigkeiten (geometrische Addition von Vektoren)

Sie sehen aber, daß man das Parallelogramm nicht vollständig zu zeichnen braucht. Es genügt bereits, wenn man so verfährt:

Vektoren werden addiert, indem man sie unter Einhaltung ihrer Richtung aneinandersetzt. Die Resultierende ist der Vektor, der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des letzten Vektors reicht.

Sehr oft wird man vor die Aufgabe gestellt, einen gegebenen Vektor in *Komponenten zu zerlegen.* Man kann sie nur dann lösen, wenn die Richtungen der beiden Komponenten gegeben sind. Dann zieht man durch den Endpunkt des gegebenen Vektors die Parallelen zu diesen Richtungen und erhält die Beträge der Komponenten als die entsprechenden Seiten des Parallelogramms.

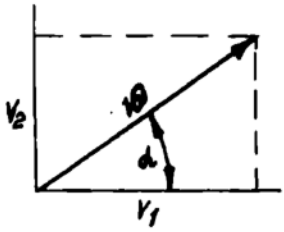


Bild 11
Zerlegung eines Vektors nach dem Projektionssatz

Besonders wichtig ist der Fall, wenn diese Richtungen einen *rechten Winkel* miteinander bilden. Sie sehen in Bild 11, daß hierbei die Beträge der Komponenten besonders leicht zu berechnen sind:

$$v_1 = v \cos \alpha \qquad v_2 = v \sin \alpha$$

Dies wird im **Projektionssatz** ausgesprochen:

> Die Komponenten eines Vektors nach zwei rechtwinklig zueinander stehenden Richtungen sind gleich den Projektionen des Vektors auf diese Richtungen.

Achten Sie darauf, daß man die *Beträge*, d. h. Zahlenwerte und Einheiten, von Vektoren mit lateinischen Buchstaben bezeichnet:

$$|\mathfrak{v}| = v$$

2.3.3. Waagerechter und schräger Wurf

2.3.3.1. Waagerechter Wurf

Daß jede zeitliche Änderung des Geschwindigkeits*betrages* eine Beschleunigung voraussetzt, wissen Sie bereits. Mit der Erkenntnis, daß die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist, tritt aber ein neues Problem auf. Es lautet:

Unter welcher Voraussetzung ändert sich die Richtung eines Vektors?

Das untersuchen wir am besten an einem Fall, bei dem diese Richtungsänderung besonders auffällig ist, und zwar bei einem in waagerechter Richtung abgeworfenen Körper. Die in Bild 12 dargestellte Wurfbahn zeigt, daß die Geschwindigkeit in jedem Bahnpunkt eine andere Richtung hat, indem sie sich immer mehr nach unten neigt. Für einige herausgegriffene Punkte sind die Vektoren eingetragen. Da diese genau die Richtung angeben müssen, die der Körper in dem betreffenden Bahnpunkt hat, müssen diese Vektoren immer *tangential* zur Bahnkurve gerichtet sein.

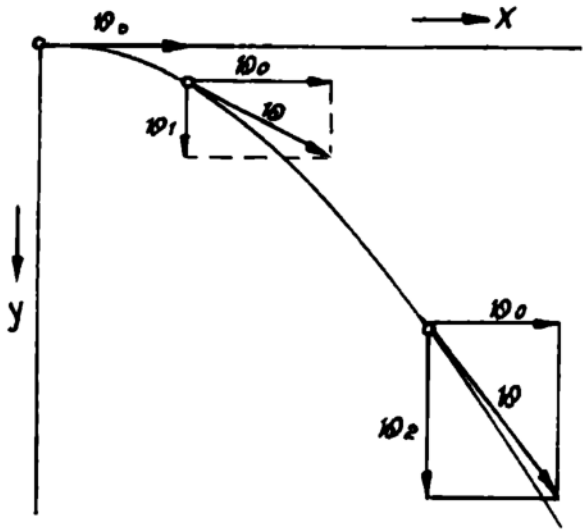


Bild 12. Bahnkurve des waagerechten Wurfes

Daß die Wurfbahn gekrümmt ist, hat eine ganz offenkundige Ursache. Es ist die ~~Fallbeschleunigung~~. Diese wirkt so, daß die vertikal gerichteten Komponenten v_1, v_2 der Geschwindigkeit immer *größer* werden, während die horizontale, durch die Anfangsgeschwindigkeit gegebene Komponente v_0 *konstant* bleibt. So werden die Höhen der entsprechenden Parallelogramme immer größer. Wäre die Beschleunigung nicht vorhanden, dann bliebe die Richtung des resultierenden Vektors unverändert. Es käme niemals eine gekrümmte Kurve zustande. Schwerkraft

Merken Sie sich daher den wichtigen Satz:

> Zur Änderung der *Richtung* einer Geschwindigkeit ist eine *Beschleunigung* erforderlich.

Um die *Gleichung der Bahnkurve* zu finden, stehen die beiden Beziehungen

$$x = v_0 t \qquad \text{und} \qquad y = \frac{g t^2}{2}$$

zur Verfügung. Man erhält y als Funktion von x, wenn man $t = x/v_0$ in die Gleichung für y einsetzt:

$$y = \frac{g x^2}{2 v_0^2}$$

Sie erkennen, daß dies die Gleichung einer Parabel ist, da die Größen g und v_0 Konstanten sind. Man bezeichnet sie als **Wurfparabel**.

2.3.3.2. Schräger Wurf

Auch bei schräg nach oben gerichtetem Wurf entstehen Parabeln. Hierbei interessieren bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit (Betrag und Richtung) besonders die Wurfhöhe und die Wurfweite.

Die Berechnung läßt sich durchführen, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit nach dem Projektionssatz in eine horizontale Komponente $v_0 \cos\alpha$ und in eine vertikale Komponente $v_0 \sin\alpha$ zerlegt (Bild 13).

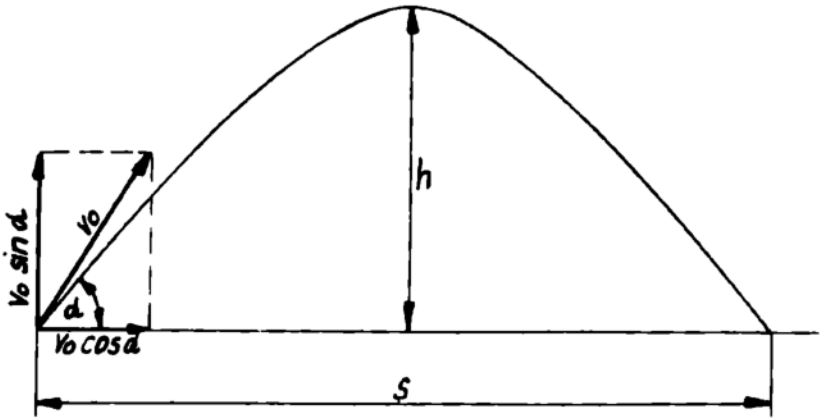


Bild 13. Schräg nach oben gerichteter Wurf

Nach dem Unabhängigkeitsprinzip kann man die Vertikalkomponente so behandeln, als ob sie allein vorhanden wäre. Sie bewirkt einen senkrecht nach oben gerichteten Wurf, d. h. eine gleichmäßig verzögerte Bewegung bis zur Endgeschwindigkeit $v = 0$ nach der Gleichung (7):

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h}$$

Mit dem Anfangswert $v_0 \sin\alpha$ und $v = 0$ ergibt sich die **Wurfhöhe**

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\,g} \tag{15}$$

Auf ähnlichem Wege erhalten Sie (Übung 40) die gesamte **Wurfzeit**

$$t = \frac{2\,v_0 \sin \alpha}{g} \tag{16}$$

Um die Wurfweite zu erhalten, behandeln wir die horizontale Bewegung als unabhängig von der vertikalen und sagen uns, daß der Körper dabei die Strecke $s = vt$ zurücklegt. Dabei ist für v die Horizontalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \cos\alpha$ zu setzen. Mit t aus (16) ergibt sich

$$\frac{2\,v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \tag{17}$$

In dieser Gleichung ist das Produkt $2 \sin\alpha \cos\alpha$ einer Untersuchung wert. Nach einem Additionstheorem ist es nämlich gleich $\sin 2\alpha$. Der größte Wert, den der Sinus eines Winkels annehmen kann, ist 1. Das wird erreicht für $2\alpha = 90°$, also für $\alpha = 45°$. Daraus folgt der wichtige Satz:

> Die größte Wurfweite wird erzielt, wenn ein Körper unter einem Winkel von 45° abgeschossen wird.

Genau trifft das allerdings nur dann zu, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Bei der Anwendung der hier abgeleiteten Gesetze auf fliegende Geschosse und dergleichen treten daher bedeutende Abweichungen auf.

Lehrbeispiel 16

Aus einem waagerecht gerichteten Brunnenrohr läuft das Wasser mit der Geschwindigkeit 2,5 m/s in das 1,5 m tiefer gelegene Becken.

1. Mit welcher Geschwindigkeit und
2. unter welchem Winkel trifft der Strahl gegen die Wasserfläche?

Lösung:

Gegeben: $v_x = 2{,}5$ m/s, $h = 1{,}5$ m

Gesucht: 1. v, 2. β

1. Die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit ist

$$v_y = \sqrt{2\,g\,h}$$

Die Resultierende beider Geschwindigkeiten ist

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + 2\,g\,h}$$

$$v = \sqrt{(6{,}25 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5)\ \mathrm{m^2/s^2}} = \underline{\underline{6{,}0\ \mathrm{m/s}}}$$

2. Für die Neigung des Strahls gegen die Waagerechte gilt im Moment des Auftreffens

$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_x} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5\ \mathrm{m^2/s^2}}}{2{,}5\ \mathrm{m/s}} = 2{,}168$$

$$\underline{\underline{\beta = 65°}}$$

Lehrbeispiel 17

Das Rohr eines Granatwerfers ist um 70° nach oben gerichtet und wirft das Geschoß 300 m weit.

1. Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses?
2. Wie hoch fliegt das Geschoß?
3. Welche maximale Wurfweite könnte erzielt werden?

(unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes)

Lösung:

Gegeben: $\alpha = 70°$ Gesucht: 1. v_0

$s = 300$ m 2. h

3. s_{max}

1. Aus (17) folgt

$$v_0 = \sqrt{\frac{s\,g}{2 \sin\alpha \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{300\text{ m} \cdot 9{,}81\text{ m s}^{-2}}{2 \cdot 0{,}940 \cdot 0{,}342}} = \underline{\underline{67{,}7\text{ m/s}}}$$

2. Aus (15) folgt

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2\,g}$$

Setzt man v_0 aus Aufg. 1 ein, so erhält man

$$h = \frac{s\,g \cdot \sin^2\alpha}{2\,g \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{s \sin\alpha}{4 \cos\alpha} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\,s \tan\alpha}}$$

Beachten Sie, daß das Ergebnis nur von s und α abhängt, g z. B. in dieser Gleichung nicht enthalten ist!

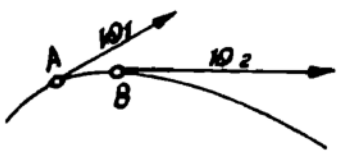
Mit den gegebenen Werten erhält man

$$h = 0{,}25 \cdot 300\text{ m} \cdot 2{,}7475 = \underline{\underline{206\text{ m}}}$$

3. Die maximale Wurfweite folgt aus (17) mit $2 \sin\alpha \cos\alpha = 1$:

$$s_{max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{67{,}7^2\text{ m}^2\text{ s}^{-2}}{9{,}81\text{ m s}^{-2}} = \underline{\underline{467\text{ m}}}$$

2.3.4. Krummlinige Bewegung im allgemeinen



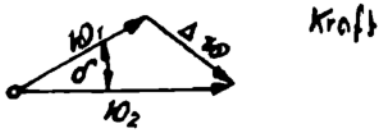


Bild 14
Geschwindigkeitsvektoren
bei beliebiger Bahnkrümmung

Die Wurfparabel ist nur ein besonderer Fall von den vielen möglichen, bei denen Körper sich auf krummlinigen Bahnen bewegen können. Aber sie hat uns etwas sehr Wichtiges gelehrt: Die Bahnkrümmung kommt durch das Wirken einer ~~Beschleunigung~~ Kraft zustande. Das läßt sich auch an anderen gekrümmten Bahnen nachweisen.

Bild 14 zeigt eine beliebig gezeichnete Bahnkurve, an die für zwei aufeinanderfolgende Punkte A und B die Geschwindigkeitsvektoren ein-

getragen sind. Darunter sind diese beiden Vektoren noch einmal, und zwar parallel zueinander verschoben, aneinandergesetzt. Sie sehen dabei, daß sich der Vektor $\mathfrak{v}_2$ als geometrische Summe aus $\mathfrak{v}_1$ und einem Zusatzvektor $\Delta\mathfrak{v}$ darstellen läßt. $\Delta\mathfrak{v}$ ist daher die Geschwindigkeits*änderung* in vektorieller Form. Da aber definitionsgemäß die Beschleunigung der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung und der zugehörigen Zeit ist, ergibt sich jetzt auch die Beschleunigung als ein Vektor, dessen Richtung mit der von $\Delta\mathfrak{v}$ zusammenfallen muß:

$$\mathfrak{a} = \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung ist eine vektorielle Größe.

Der Vollständigkeit halber sei noch darauf hingewiesen, daß — wie in den Abschnitten 2.1.2. und 2.1.3. dargelegt wurde — das Zeitintervall Δt beliebig klein gedacht werden kann. Dadurch rücken die beiden Punkte A und B auch viel enger zusammen, als es in Bild 14 gezeichnet wurde. Es gilt

$$\mathfrak{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}$$

Nun wissen Sie noch, daß man jeden Vektor in zwei zueinander senkrecht gerichtete Komponenten zerlegen kann (Bild 15). Das ist natürlich

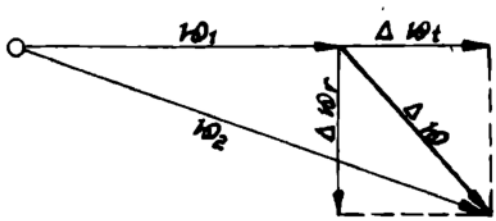


Bild 15. Zerlegung des Vektors der Geschwindigkeitsänderung

auch beim Beschleunigungsvektor möglich. Besonders aufschlußreich ist es, wenn die eine Komponente in die Richtung der Bahntangente und die andere senkrecht dazu zeigt, und man spricht dann von der

Tangentialbeschleunigung mit dem Betrag $a_t = \dfrac{\Delta v_t}{\Delta t}$

und der

Radialbeschleunigung mit dem Betrag $a_r = \dfrac{\Delta v_r}{\Delta t}$

2.3.5. Radialbeschleunigung bei der Drehbewegung

Obwohl wir uns schon recht ausgiebig mit der Drehbewegung beschäftigt haben, fehlt uns noch ein wichtiger Zusammenhang. Er kann erst von unserem neu gewonnenen Standpunkt aus gefunden werden, indem wir bedenken, daß die Geschwindigkeit eines Punktes auf der Kreisbahn ebenfalls vektoriell betrachtet werden muß.

In einer Beziehung liegen die Verhältnisse bei der *gleichförmigen* Bewegung auf dem Kreis glücklicherweise recht einfach: Die tangentiale Geschwindigkeitskomponente hat einen *konstanten* Betrag, so daß die Änderung dieser Komponente gleich null sein muß. Es verbleibt daher allein die radial gerichtete Beschleunigungskomponente.

Der geschilderte Sachverhalt wird in Bild 16 gezeigt. Die unter der Bahnkurve noch einmal gezeichneten Vektoren sind voraussetzungsgemäß gleich lang. Außerdem ist (wegen der Kleinheit des hier übertrieben groß gezeichneten Winkels δ) angenommen, daß die Länge des in der Zeit Δt zurückgelegten Kreisbogens $AB = v\,\Delta t$ mit der Bogensehne zusammenfällt. Dann gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke die Proportion

$$\frac{\Delta v_r}{v} = \frac{v\,\Delta t}{r}$$

oder

$$\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

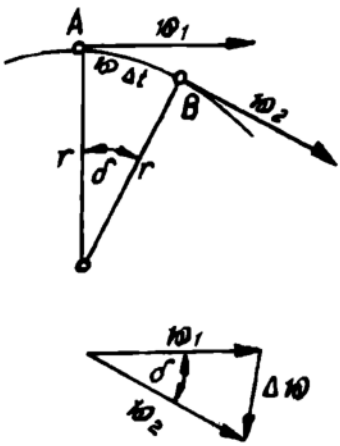


Bild 16
Geschwindigkeitsänderung bei gleichförmiger Bewegung auf der Kreisbahn

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber der Betrag der Radialbeschleunigung, wie sie am Schluß des letzten Abschnitts definiert wurde:

$$a_r = \frac{v^2}{r} \qquad (18)$$

Ein Körper bewegt sich nur dann auf einer Kreisbahn, wenn er ständig nach dem Mittelpunkt des Kreises hin beschleunigt wird.

Lehrbeispiel 18

Welche Bahngeschwindigkeit hat ein künstlicher Satellit, der die Erde in der mittleren Entfernung 325 km umkreist, wenn die Fallbeschleunigung in dieser Höhe 8,88 m/s² beträgt? (Erdradius 6378 km).

Lösung:

Gegeben: $r = 6703$ km Gesucht: v

Die Radialbeschleunigung ist hier gleich der Fallbeschleunigung. Damit folgt aus (18):

$$v = \sqrt{r\,g} = \sqrt{6{,}703 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \cdot 8{,}88\ \mathrm{m\,s^{-2}}} = \underline{\underline{7{,}7\ \mathrm{km/s}}}$$

Lehrbeispiel 19

Ein Gegenstand soll in der Minute 50 Umläufe auf einer Kreisbahn von 1,2 m Radius ausführen. Welche Radialbeschleunigung ist hierzu erforderlich?

Lösung:

Gegeben: $n = 50\ \mathrm{min^{-1}}$ Gesucht: a_r
$r = 1{,}2$ m

Führt man nach (11) die Winkelgeschwindigkeit ω und dann nach (12) die Drehzahl n ein, so erhält man aus (18)

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2\, r = 4\,\pi^2\, n^2\, r = \frac{4\,\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 1{,}2\ \mathrm{m}}{60^2\ \mathrm{s}^2} = \underline{\underline{33\ \mathrm{m/s^2}}}$$

Zusammenfassung

Alle Geschwindigkeitsangaben haben nur unter gleichzeitiger Angabe eines Bezugssystems einen Sinn. Meist nimmt man hierfür die ruhend gedachte Erde an. Alle Vorgänge verlaufen nach dem Unabhängigkeitsprinzip der Bewegungen, d. h., mehrere gleichzeitig ablaufende Bewegungen beeinflussen sich gegenseitig nicht. Die Relativgeschwindigkeit eines Körpers in einem bestimmten System ist gleich der Differenz der Eigengeschwindigkeit des Körpers und der des Systems.

Viele physikalische Größen, u. a. die Geschwindigkeit, sind vektorielle Größen. Jeder Vektor hat Betrag und Richtung. Die Addition (Zusammensetzung) von Vektoren geschieht nach dem Parallelogrammsatz. Bei der Zerlegung in zwei zueinander rechtwinklig stehende Komponenten projiziert man den gegebenen Vektor auf die Richtungen dieser Komponenten.

Als Wurfbahnen geworfener Körper ergeben sich Parabeln. Einzelne Daten ergeben sich nach dem Unabhängigkeitsprinzip, indem man die Vertikal- und Horizontalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit so betrachtet, als ob sie allein vorhanden wären. Die maximale Wurfweite wird bei einem Wurfwinkel von 45° erzielt. Um die Richtung der Geschwindigkeit zu ändern, ist eine Beschleunigung erforderlich, deren Richtung mit der der Geschwindigkeitsänderung zusammenfällt. Diese

Beschleunigung läßt sich im allgemeinen in eine tangentiale und eine radiale Komponente zerlegen. Bei der gleichförmigen Bewegung auf der Kreisbahn ist die tangentiale Komponente gleich null, während die radiale Komponente einen konstanten Betrag hat, der sich berechnen läßt.

Übungen

33. Welche Bahngeschwindigkeit muß ein parallel zum Erdäquator fliegender künstlicher Satellit haben, damit er 36200 km über dem Äquator stillzustehen scheint? (Erdradius 6378 km)
34. Eine mit Wasser gefüllte Konservendose, in deren Boden ein Loch gebohrt ist, fällt frei herunter. Wie verhält es sich dabei mit dem ausfließenden Wasser?
35. Ergänzung zum Lehrbeispiel 14: Welche Strecke legt das Motorrad während des Überholvorganges zurück?
36. Weshalb kann das Geschoß eines Gewehres niemals eine geradlinige Flugbahn beschreiben?
37. In einem fahrenden Zug fällt ein Gegenstand zu Boden. Was für eine Bewegung sieht der am Bahndamm stehende Beobachter?
38. Welche Richtung hat der Geschwindigkeitsvektor im Verhältnis zur Flugbahn eines Körpers?
39. Nach welcher Flugzeit ist der Geschwindigkeitsvektor eines mit der Anfangsgeschwindigkeit 100 m/s waagerecht abgeworfenen Körpers um 45° nach unten geneigt?
40. Es ist die Gleichung (16) für die Wurfdauer des schrägen Wurfes abzuleiten.
41. Beim schräg nach oben gerichteten Wurf kann jede Weite (mit Ausnahme bei $\alpha = 45°$) durch zwei verschieden große Wurfwinkel erreicht werden. In welcher Beziehung stehen diese beiden Winkel zueinander?
42. Welche Wurfweite und Wurfhöhe ergeben sich bei einem Wurfwinkel von 30° und der Anfangsgeschwindigkeit 50 m/s?
43. In Abschnitt 2.3.3.1. wurde die Gleichung der Wurfbahn für den waagerechten Wurf berechnet. Leiten Sie die entsprechende Gleichung $y = f(x)$ für den schrägen Wurf her!
44. Welcher Unterschied besteht hinsichtlich der tangentialen Geschwindigkeitskomponente zwischen der Parabelbahn des horizontalen Wurfes und der gleichförmigen Bewegung auf der Kreisbahn?
45. Welche Bahn beschreibt ein Körper, dessen Radialbeschleunigung gleich null ist?
46. Ein Körper wird durch eine Radialbeschleunigung von 30 m/s² auf einer Kreisbahn von 25 cm Radius gehalten. Wie groß ist seine Bahngeschwindigkeit?

3. Dynamik

In den bisherigen Abschnitten betrachteten Sie einen Bewegungsablauf einfach in Raum und Zeit. Sie fragten niemals nach der Ursache einer solchen Bewegung. Nachdem Sie dieses Teilgebiet, die *Kinematik*, studiert haben, soll für Sie nunmehr die Frage nach der Ursache der Bewegung in den Vordergrund rücken. Bereits im Vorbereitungsmaterial [V 4.] haben Sie diese Ursache kennengelernt: Kräfte verursachen oder verändern eine Bewegung. Die Lehre von den Kräften heißt *Dynamik*[1]. In der *Kinetik* untersucht man im besonderen Kraftwirkungen, die eine Bewegungsänderung zur Folge haben. Sie wissen jedoch, daß Kräfte auch andersartige Wirkungen zeigen. Ein fester Körper kann unter dem Einfluß einer Kraft verformt werden. Solche Formänderungen sind häufig sehr geringfügig. Dann kann man den festen Körper als *starr* ansehen. Seine Form soll sich jetzt gar nicht verändern können. Auch an einem starren Körper können Kräfte angreifen, ohne daß er seine Bewegung ändert. Die Kräfte befinden sich dann im *Gleichgewicht*. Dieses Teilgebiet der Lehre von den Kräften, die *Statik*, soll als erstes behandelt werden.

3.1. Kräfte im Gleichgewicht

3.1.1. Kräfte als vektorielle Größen

Der Begriff des Vektors ist Ihnen bereits bekannt ([2.3.2.] und [V 4.2.2.]). Die Darstellung einer Kraft als Vektorgröße faßt die *drei Merkmale einer Kraft* zusammen (Bild 17):

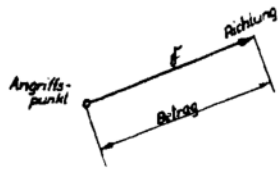


Bild 17
Darstellung einer Kraft

Kennzeichnend für die Kraft ist die *Richtung*, in der sie wirkt. Die Pfeilspitze gibt diese Richtung an. Die Gerade, die den Pfeil enthält, heißt Wirkungslinie der Kraft.

Ein weiteres Merkmal einer Kraft ist ihr *Betrag*. Dieser Betrag wird durch die Länge des Pfeils dargestellt (Maßstab beachten: z. B. 1 kp ≙ 5 mm!).

Darüber hinaus ist noch der *Angriffspunkt* der Kraft zu beachten. Der Angriffspunkt ist meist der Ursprung des Pfeils (Zugkraft), gelegentlich aber auch die Pfeilspitze (Druckkraft).

Für Kräfte gilt allgemein und international das Symbol F[2] (früher in Deutschland meist P, auch K). Den Vektorcharakter bringt man zum

---

[1] dynamis (griech.): Kraft

[2] nach TGL 0—1304

Ausdruck durch Frakturbuchstaben ($\mathfrak{F}$) oder durch den Pfeil über dem Symbol ($\vec{F}$). Das Symbol allein stellt dann nur den Betrag der Kraft dar:

$$|\mathfrak{F}| = |\vec{F}| = F$$

Als *Einheiten* für die Kraft kennen Sie das Newton und das Kilopond:

$$[F] = \mathrm{N} \qquad \text{oder} \qquad [F] = \mathrm{kp}$$

Gesetzlich ist festgelegt:

$$1\ \mathrm{kp} = 9{,}80665\ \mathrm{N}.$$

Lernen Sie von Anfang an, beide Einheiten nebeneinander zu verwenden!

3.1.2. Kraft und Gegenkraft

Für alle mechanischen Vorgänge gelten die Newtonschen Gesetze. Eines dieser Gesetze sollen Sie jetzt kennen und anwenden lernen:

> 3. Newtonsches Gesetz:
> **Zu jeder Kraft existiert stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft.**

Dieses Gesetz heißt auch das Gegenwirkungsprinzip. Mit lateinischen Worten kurz ausgedrückt, ist actio = reactio, d. h. Wirkung = Gegenwirkung. Vielfältig sind die möglichen Beispiele. Betrachten Sie Bild 18! In der Decke ist ein Haken befestigt, daran hängt an einem Seil ein schwerer Körper. In Punkt A wirkt als Kraft F das Gewicht des Körpers. Das Seil hält den Körper, die Seilkraft F' bildet die Gegenkraft. In Punkt B zieht das Seil am Haken (Kraft F). Dieser erfährt eine geringfügige elastische Verformung und übt so eine gleich große entgegengesetzt wirkende Kraft F' aus. Der Haken selbst belastet die Decke. In Punkt C finden wir damit nochmals Kraft F und Gegenkraft F'.

Suchen Sie selbst weitere Beispiele! Auch Kräfte magnetischen oder elektrischen Ursprungs sind zugelassen. Die Ihnen gut bekannte Federwaage (Bild 19) soll noch kurz erläutert werden. Bei Belastung der Federwaage durch das Gewicht eines Körpers oder durch eine andere Zugkraft wird die Feder gedehnt. Die rücktreibende Kraft der Feder ist die Gegenkraft F'. Weil diese rücktreibende Kraft proportional der Verlängerung der Feder ist, eignet sich die Federwaage als *Kraftmesser*.

> Eine Federwaage erlaubt, Kräfte zu messen. Man bezeichnet sie deshalb auch als Dynamometer.

Zwei Kräfte gleichen Betrages, aber entgegengesetzter Richtung heben sich in ihrer Wirkung auf. Wir nennen einen solchen Zustand *Gleich-*

gewicht. Die Summe der wirkenden Kräfte ist hier null. Ein ruhender Körper befindet sich stets im Gleichgewicht, er erfährt keine Bewegungsänderung.
Auch bewegte Körper können sich im Gleichgewicht befinden. Sind beispielsweise Antriebskraft und Reibungskraft bei einem Fahrzeug von gleichem Betrage, so heben sie sich in ihrer Wirkung auf; die Bewegung wird nicht verändert, sie ist gleichförmig.

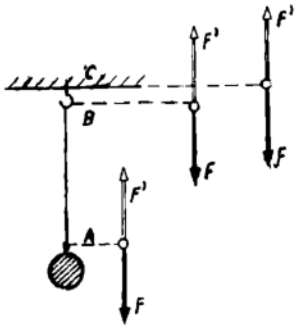


Bild 18. Kraft und Gegenkraft

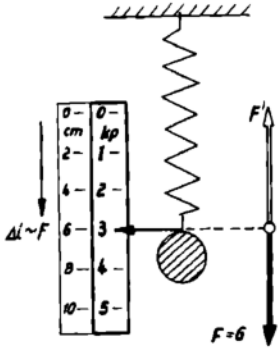


Bild 19. Federwaage

3.1.3. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt

Bereits bei der Untersuchung von Kraft und Gegenkraft stellten Sie fest, daß insgesamt keine Wirkung der beiden Kräfte entstand: Der Körper blieb jeweils in Ruhe. Sie können dieses Ergebnis auch wie folgt formulieren: Die resultierende Kraft (kurz Resultierende genannt) von zwei in einer Wirkungslinie entgegengesetzt an einem Punkt angreifenden Kräften ist gleich null, wenn beide Kräfte den gleichen Betrag besitzen. Allgemein gilt:

> Wenn zwei Kraftkomponenten auf einer gemeinsamen Wirkungslinie in gleicher Richtung wirken, ist der Betrag der Resultierenden gleich der Summe der Beträge der Komponenten. Wirken die Komponenten entgegengerichtet, so ist der Betrag der Resultierenden gleich der Differenz der Beträge der Komponenten.

Greifen zwei oder mehrere Kräfte unter beliebigen Winkeln an einem Punkte an, so kann man sie ebenfalls zusammensetzen. Es gelten die Regeln der Vektoraddition (vgl. [2.3.2.]). Die grafische Lösung solcher Aufgaben ist Ihnen bekannt [V 4.2.3.]. Nach dem gleichen Verfahren kann man auch eine Kraft in zwei oder mehr Teilkräfte (Komponenten) zerlegen [V 4.2.4.]. An einem Beispiel sollen Ihnen die wichtigsten Schritte zur Lösung solcher Aufgaben nochmals vor Augen geführt werden.

Lehrbeispiel 20

An einer Wand ist eine Lampe auf die in Bild 20 gezeigte Weise aufgehängt. Die Lampe hat eine Masse von 2,4 kg. Welche Kräfte sind im Seil und in der Strebe wirksam?

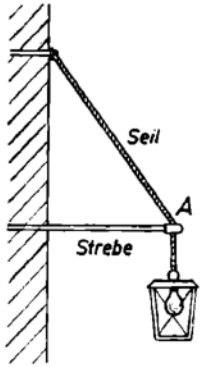


Bild 20
Zerlegung des Gewichts einer Lampe

Lösung:

Die drei Kräfte (Gewicht G der Lampe, Seilkraft F_1 und Druckkraft F_2 der Strebe) greifen im Punkt A an. Der erste Schritt ist die Bestimmung der Kraftrichtungen (Bild 21 oben). Das Gewicht zieht nach unten, die Seilkraft schräg nach oben, die Strebe drückt nach rechts. Der zweite Schritt ist das maßstäbliche Einzeichnen der gegebenen Kraft, in unserem Falle des Gewichts $G = 2{,}4$ kp der Lampe, und ihrer gleichgroßen Gegenkraft G', die als Hohlpfeil gezeichnet ist (Bild 21.1.). Diese Gegenkraft G' muß vorhanden sein, wenn der Punkt A in Ruhe ist. Sie ist jedoch nicht als Einzelkraft vorhanden, sondern ist die Resultierende der beiden gesuchten Kräfte (dünne Pfeile), deren Größe sich aus der Parallelogrammkonstruktion ergibt (Bild 21.1.). Wir messen

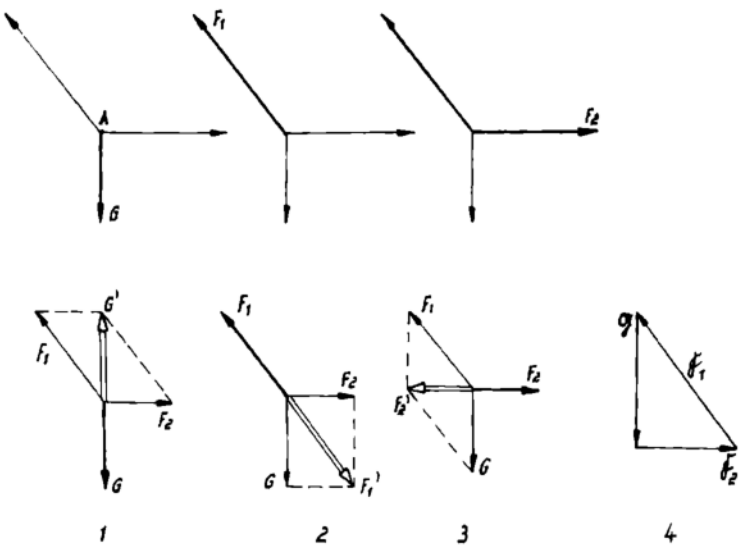


Bild 21. Kräfteparallelogramme

die Längen der Pfeile und erhalten: Die Zugkraft im Seil beträgt 3 kp, die Druckkraft in der Strebe beträgt 1,9 kp.

Einfacher noch erhält man die Resultierende $\mathfrak{G}'$ durch Aneinanderreihen der Vektoren $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_1$, wie Bild 21. 4. zeigt (vgl. [3.3.2.]). Diese Konstruktion heißt Krafteck (Kräftepolygon).

Bemerkung: Ist die Seilkraft gegeben, dann ist die Lösung nach Bild 21. 2. zu zeichnen. Für eine gegebene Druckkraft in der Strebe gilt Bild 21.3. Es ergeben sich nach Größe und Richtung stets die gleichen Kräfte.

In Vektorschreibweise faßt man die Aussage des Kräfteparallelogramms kurz zusammen:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 \tag{19}$$

Das bedeutet aber geometrische Addition der Größen und nicht etwa algebraische Addition der Beträge der Kräfte (vgl. [3.3.2.]). Der Betrag der Resultierenden folgt nach dem Kosinussatz der Geometrie:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1\,F_2 \cos\alpha} \tag{20}$$

Dabei ist α der von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ eingeschlossene Winkel. (Im Lehrbeispiel ist die so zu ermittelnde Resultierende G'; α ist größer als 90°.)

Den Vorteil des Kraftecks bei der zeichnerischen Ermittlung der Resultierenden erkennt man besonders, wenn mehr als zwei Kräfte an einem Punkt angreifen. Bild 22 zeigt noch einmal beide Wege zur Lösung.

3.1.4. Kräfte am starren Körper

3.1.4.1. Zusammensetzen von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten

An einem starren Körper greifen Kräfte im allgemeinen nicht an einem Punkt an. Bild 23 zeigt drei Kräfte, die alle in der Zeichenebene liegen sollen. Man erkennt leicht, daß die Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}_1$ auf den Körper unverändert bleibt, wenn eine Kraft $\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{F}_1$ an anderer Stelle am Körper angreift. Die Kräfte müssen lediglich gemeinsame Wirkungslinie haben. Verallgemeinert folgt ein wichtiger Satz, der häufig angewendet wird:

> Am starren Körper darf man eine Kraft in ihrer Wirkungslinie beliebig verschieben.

Damit ist man in der Lage, beliebige in einer Ebene angreifende Kräfte zusammenzusetzen. Es lassen sich stets zwei Kräfte so verschieben, daß sie einen gemeinsamen Angriffspunkt (Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien) haben. Dann setzt man sie, wie im vorangehenden Abschnitt dargelegt, zusammen. Die gebildete Resultierende wird darauf in gleicher

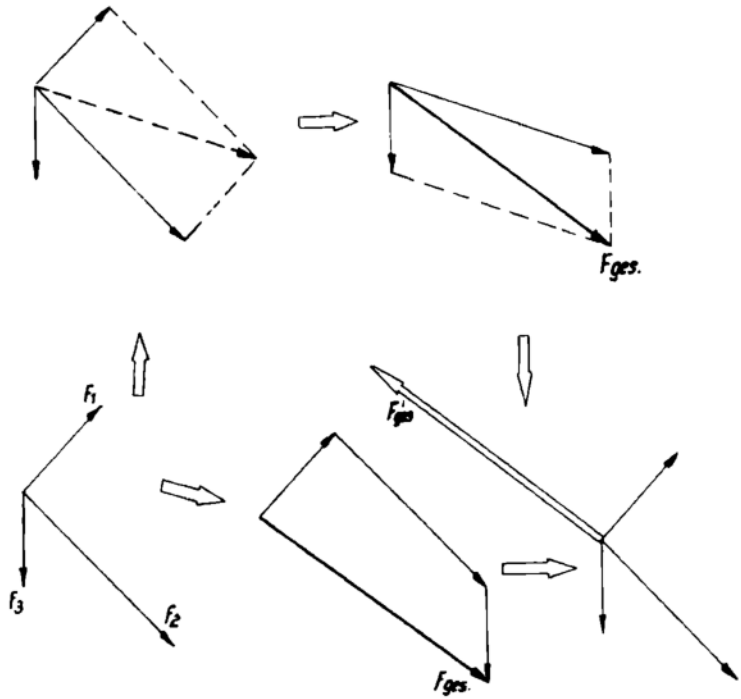


Bild 22. Resultierende aus drei im gleichen Punkt angreifenden Kräften

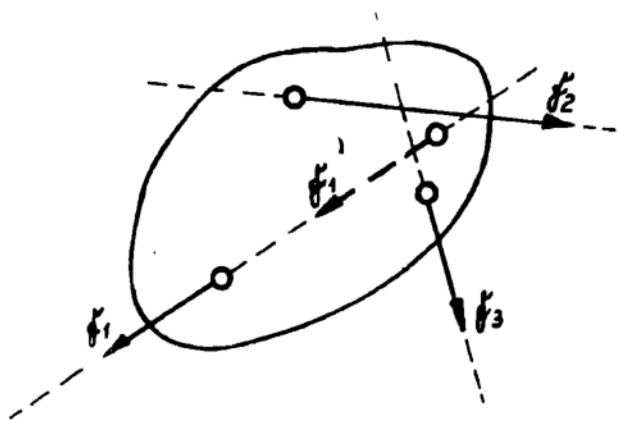


Bild 23. Verschieben einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie

Weise mit der dritten Kraft zusammengesetzt. Bild 24 zeigt zwei Wege. Die Kraft F übt auf den starren Körper die gleiche Wirkung aus wie die drei Kräfte F_1, F_2 und F_3. Die Gegenkraft F' zur Kraft F sorgt dafür, daß sich der Körper im Gleichgewicht befindet, wenn die Kräfte F_1, F_2 und F_3 an ihm angreifen.

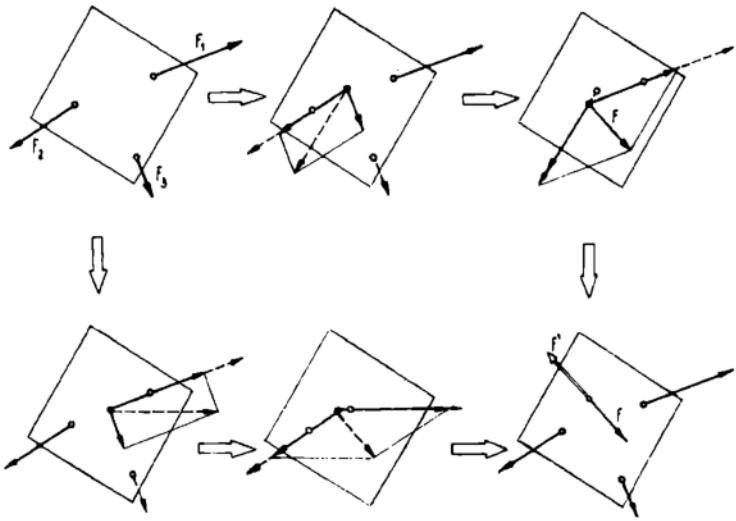


Bild 24. Resultierende aus drei Kräften

Ein Sonderfall liegt vor, wenn zwei *parallele* Kräfte an einem Körper angreifen. Die Resultierende findet man grafisch durch Hinzufügen zweier gleichgroßer, entgegengesetzt wirkender Kräfte, wie dies im Vorbereitungsmaterial Bild 42 ausgeführt ist (Bild 25). Die beiden gegebenen Kräfte F_1 und F_2 können ersetzt werden durch die Resultierende $F_1 + F_2$ (starke Linie). Den beiden Kräften F_1 und F_2 bzw. deren Resultierender hält die Gegenkraft $(F_1 + F_2)'$ das Gleichgewicht. Wir merken uns das Ergebnis dieser Konstruktion:

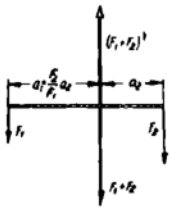


Bild 25
Resultierende zweier paralleler Kräfte

> Die Resultierende zweier *paralleler* Kräfte ist gleich deren Summe und teilt den Abstand der Wirkungslinien im umgekehrten Verhältnis der Kräfte.

3.1.4.2. Drehmoment

Für einen Punkt lautete die Gleichgewichtsbedingung einfach $\Sigma \mathfrak{F} = 0$. Diese Bedingung reicht beim starren Körper nicht aus. Der Punkt

kann nur eine fortschreitende Bewegung (*Translation*) ausführen. Diese Translation ändert sich nicht, wenn die Summe aller angreifenden Kräfte verschwindet. Ein starrer Körper kann sich aber noch um eine beliebige Achse drehen, er kann eine *Rotation* ausführen. Die Änderung einer Drehbewegung wird nicht durch eine Kraft allein verursacht, sondern durch das *Drehmoment*. Vergleichen Sie hierzu [V 4.3.3.].

Der Betrag des Drehmoments einer Kraft, bezogen auf eine feste Drehachse, ist gleich dem Produkt aus dem Betrag dieser Kraft und dem (senkrechten) Abstand der Drehachse von der Wirkungslinie der Kraft.

Somit ergibt sich für den *Betrag des Drehmomentes:*

$$M = F\,l \tag{21}$$

Die Einheit des Drehmomentes ist

$$[M] = [F]\,[l] = \text{Nm} \quad \text{oder} \quad \text{kpm}$$

Das Drehmoment $\mathfrak{M}$ läßt sich ebenfalls als vektorielle Größe darstellen. Es ist das Produkt zweier Vektoren, der Kraft $\mathfrak{F}$ und des *Ortsvektors* $\mathfrak{r}$, der vom Drehpunkt zum Angriffspunkt zeigt. Man kann den Betrag von $\mathfrak{M}$ auch mit Hilfe von $r = |\mathfrak{r}|$ und dem Winkel α, gebildet durch die Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{r}$, ausrechnen. Nach Bild 26 ist $l = r \sin\alpha$ und damit

$$M = F\,r \sin\alpha \tag{22}$$

Die entsprechende Vektorgleichung sei kurz genannt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$$

Mit dieser Gleichung können Sie aber zur Zeit noch nicht rechnen.

Zur Darstellung des Vektors $\mathfrak{M}$ merken Sie sich folgende Regel:

Der Vektor $\mathfrak{M}$ steht senkrecht auf dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ und auf der Kraft $\mathfrak{F}$. Eine Drehung durch die Kraft $\mathfrak{F}$ und ein Fortschreiten in Pfeilrichtung $\mathfrak{M}$ ergibt eine Rechtsschraube (Bild 27).

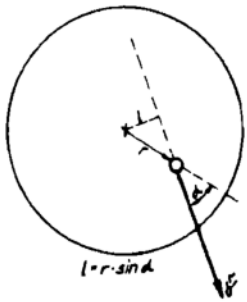


Bild 26
Drehmoment an einer Scheibe

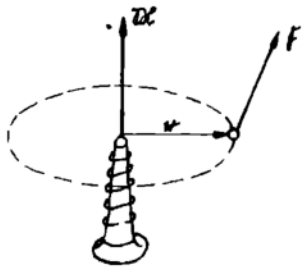


Bild 27
Darstellung des Vektors $\mathfrak{M}$

Als Vektoren dürfen Drehmomente wie Geschwindigkeiten oder Kräfte zusammengesetzt werden. Das zeigt den Vorteil der Auffassung von Drehmomenten als Vektoren. Besonders deutlich wird dieser Vorteil, wenn zwei Drehungen um verschiedene Körperachsen erfolgen (Kreisel).

3.1.4.3. Zusammensetzen von Drehmomenten mit gemeinsamer Drehachse

An dieser Stelle sei als Beispiel das bekannte Hebelgesetz [V 4.3.3.] wiederholt, das allgemein lautet:

> Ein starrer, um eine feste Achse drehbarer Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn die links- und rechtsdrehenden Momente einander gleich sind.
>
> Oder:
>
> Ein starrer, um eine feste Achse drehbarer Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente gleich null ist.

In der letzten Form ordnet man dem Drehmoment ein Vorzeichen zu. Man bezeichnet linksdrehende Momente (positiver Drehsinn) als positiv und rechtsdrehende Momente als negativ.

Wirken mehrere Drehmomente an einem Körper, so lassen sich diese zu einem resultierenden Drehmoment zusammenfassen. Es gilt dann der Momentensatz:

> Das resultierende Drehmoment ist gleich der Summe der einzelnen Drehmomente:

$$\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_i \tag{23}$$

Wirken alle Drehmomente um eine Achse, so haben alle Vektoren eine gemeinsame Wirkungslinie. Dann kann man bei der Summenbildung verfahren wie bei Kräften mit gemeinsamer Wirkungslinie.

Lehrbeispiel 21

An einem masselosen Hebel greifen 3 Kräfte an, wie in Bild 28 dargestellt. Ermitteln Sie das resultierende Drehmoment! ($F_1 = 5$ kp, $F_2 = 5$ kp, $F_3 = 3$ kp, $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 60$ cm, $l_3 = 80$ cm)

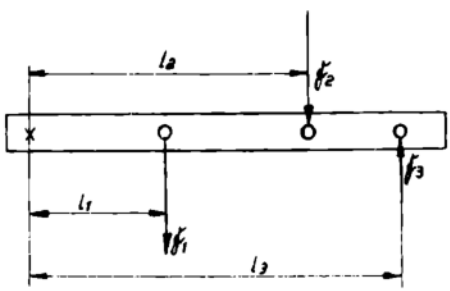


Bild 28
Zum Lehrbeispiel 21

Lösung:

Es gilt: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3$

Alle Momente drehen den Körper um eine Achse, die Vektoren haben also eine gemeinsame Wirkungslinie. Folglich dürfen die Beträge unter Beachtung der Vorzeichen addiert werden:

$$\begin{aligned} M &= -M_1 - M_2 + M_3 \\ &= -F_1\, l_1 - F_2\, l_2 + F_3\, l_3 \\ &= -5\ \text{kp} \cdot 30\ \text{cm} - 5\ \text{kp} \cdot 60\ \text{cm} + 3\ \text{kp} \cdot 80\ \text{cm} \\ &= (-150 - 300 + 240)\ \text{kp cm} \\ M &= -210\ \text{kp cm} \end{aligned}$$

Das resultierende Drehmoment M ist also ein rechtsdrehendes Moment, sein Betrag ist 210 kp cm. Ein Drehmoment $M' = +210$ kp cm (linksdrehend) würde also den Körper im Gleichgewicht halten.

3.1.4.4. Kräftepaar

Zwei gleichgroße und entgegengesetzt gerichtete (antiparallele) Kräfte mit verschiedenen Wirkungslinien greifen an einem starren Körper an. Befindet sich dieser Körper im Gleichgewicht? Bild 29 erlaubt Ihnen die Antwort zu finden. Die entgegengesetzt gleich großen Kräfte heben sich zu einem Teil in ihrer Wirkung auf: der Körper wird sich als Ganzes nicht in Bewegung setzen, eine Translation wird nicht erfolgen. Die Kräfte werden aber den starren Körper in Drehung versetzen. Diese Rotation muß auch hier durch ein Drehmoment hervorgerufen werden. Deshalb schreibt man einem Kräftepaar ein Drehmoment zu vom Betrage

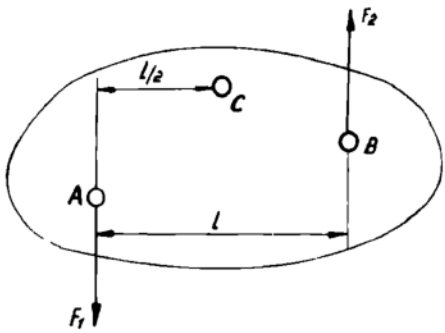


Bild 29. Kräftepaar

$$M = F\, l \qquad (24)$$

Der Betrag des Drehmomentes eines Kräftepaares ist gleich dem Produkt aus *einer* Kraft und dem (senkrecht gemessenen) Abstand der Wirkungslinien beider Kräfte.

Das leuchtet ohne weiteres ein, wenn Sie die Drehachse, über die bisher nicht verfügt war, senkrecht zur Zeichenebene durch Punkt A (Bild 29) legen. Der Körper wird dann allein durch die Kraft F_2 gedreht; das Drehmoment ist $M = F_2\, l$. Beachten Sie hierzu auch Übung 57!

3.1.4.5. *Massenmittelpunkt*

Der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) ist Ihnen ebenfalls schon aus dem Vorbereitungsmaterial bekannt ([V 4.3.4.]).

Die Lage des Massenmittelpunktes läßt sich experimentell bestimmen, indem man den Körper an verschiedenen Punkten aufhängt und jeweils das Lot vom Aufhängepunkt fällt. Die so entstandenen *Schwerlinien* schneiden sich alle in einem Punkt, dem *Massenmittelpunkt* des Körpers.

In diesem Abschnitt sollen Sie allgemeine Gleichungen zur Ermittlung des Massenmittelpunktes kennenlernen.

Im Massenmittelpunkt darf man sich die gesamte Masse eines Körpers vereinigt denken.

Damit wird aus dem starren Körper ein *Massenpunkt*, der nur noch eine fortschreitende Bewegung ausführen, aber nicht mehr rotieren kann. Denken wir uns einen Körper in kleine Massenelemente Δm_i zerlegt, so besitzt jedes Teilchen ein Gewicht ΔG_i. Dieses ist proportional der Masse Δm_i. Nach dem Momentensatz [4.1.4.3.] gilt dann

$$G\,x_s = \Delta G_1\,x_1 + \Delta G_2\,x_2 + \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i\,x_i$$

mit x_s als Schwerpunktkoordinate (Bild 30)

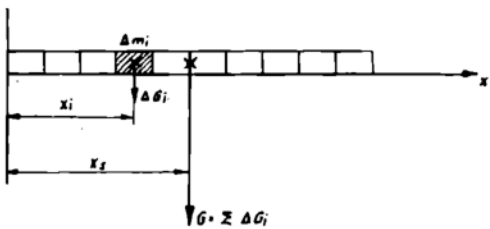


Bild 30. Ermitteln des Schwerpunktes

Da die Gewichte den Massen proportional sind, darf man auch schreiben

$$m\,x_s = \sum_{i=1}^{n} \Delta\,m_i\,x_i$$

Geht man zu immer kleineren Massenelementen über, so folgt

$$m\,x_s = \int x\,\mathrm{d}m$$

Die Abszisse des Schwerpunktes ist dann

$$x_s = \frac{1}{m}\int x\,\mathrm{d}m \tag{25}$$

Gleichartige Überlegungen führen zu den y- und z-Koordinaten des Massenmittelpunktes:

$$y_s = \frac{1}{m} \int y \, \mathrm{d}m \tag{25'}$$

$$z_s = \frac{1}{m} \int z \, \mathrm{d}m \tag{25''}$$

Ist bei einem homogenen Körper die Dichte überall gleich, so vereinfachen sich die Gleichungen noch. Wegen $m = \varrho \, V$ und $\mathrm{d}m = \varrho \, \mathrm{d}V$ gilt

$$x_s = \frac{\varrho}{m} \int x \, \mathrm{d}V$$

$$x_s = \frac{1}{V} \int x \, \mathrm{d}V \tag{26}$$

$$y_s = \frac{1}{V} \int y \, \mathrm{d}V \tag{26'}$$

$$z_s = \frac{1}{V} \int z \, \mathrm{d}V \tag{26''}$$

Lehrbeispiel 22

Bestimmen Sie den Schwerpunkt eines Holzquaders ($a = 40$ cm, $b = 20$ cm, $c = 10$ cm) mit Hilfe der Gleichungen (26)!

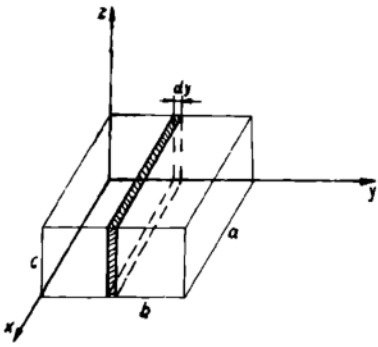


Bild 31
Schwerpunkt eines Quaders

Lösung:

Sie legen den Quader in ein x-y-z-Koordinatensystem, wie es Bild 31 zeigt, und bestimmen zunächst die y-Koordinate des Massenmittelpunktes. Ein Volumenelement $\mathrm{d}V = A \, \mathrm{d}y$ ist eingezeichnet.

$$y_s = \frac{1}{V} \int_0^b y \, \mathrm{d}V = \frac{A}{V} \int_0^b y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{b} \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^b$$

$$y_s = \frac{b}{2}$$

Die Lösungen für x_s $(a/2)$ und z_s $(c/2)$ sollen Sie selbst finden.

Lehrbeispiel 23 gleichschenklig

Der Schwerpunkt eines homogenen Körpers (Grundriß Dreieck: $g = 50$ cm, $h = 60$ cm, Dicke gleichmäßig $d = 10$ cm) ist zu bestimmen.

Lösung:

Die z-Koordinate ist leicht gefunden: $z_s = d/2 = 5$ cm (vgl. Lehrbeispiel 20; die z-Achse ist in Bild 32 nicht enthalten). Aus Symmetriegründen muß der Schwerpunkt auf der x-Achse liegen, die Symmetrieachse ist (Bild 32). Damit ist auch die y-Koordinate ermittelt: $y_s = 0$. Die x-Koordinate finden Sie mit Hilfe der Integralrechnung:

$$x_s = \frac{1}{V} \int x \, \mathrm{d}V$$

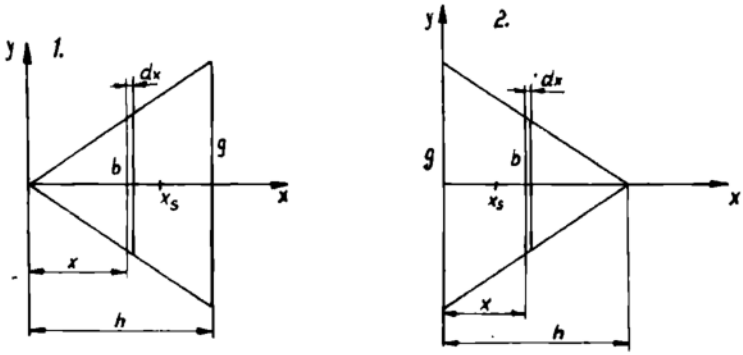


Bild 32. Schwerpunkt eines Dreiecks

Mit $V = A\,d$ folgt

$$x_s = \frac{1}{A} \int x \, \mathrm{d}A$$

Das Flächenelement $\mathrm{d}A = b\,dx$ ändert sich in Abhängigkeit von der Veränderlichen x. Es gilt $b : g = x : h$ und damit

$$\mathrm{d}A = \frac{g}{h} x \, \mathrm{d}x.$$

Damit folgt

$$x_s = \frac{g}{h\,A} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{h^2} \int_0^h x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{h^2} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^h$$

$$x_s = \frac{2}{3} h = \underline{\underline{40 \text{ cm}}}$$

Bemerkung: Dabei ist $\frac{2}{3}h$ von der Spitze des Dreiecks aus gemessen. Geht man wie üblich von der Grundlinie aus, so ist der Schwerpunktabstand $\frac{1}{3}h$. Die in Bild 32.1. angegebene Lage des Dreiecks im Koordinatensystem führt jedoch auf ein einfacher zu lösendes Integral als die im Bild 32.2. angedeutete Lage. Versuchen Sie die Lösung nach Bild 32.2.!

Im Fach Mathematik werden Sie als Anwendung der Integralrechnung weitere Übungen durchführen. Für häufig vorkommende Körperformen finden Sie die Koordinaten des Massenmittelpunktes in Tabellen. Dort ist jedoch stets homogene Massenverteilung vorausgesetzt. Die Integralrechnung führt auch in schwierigeren Fällen ans Ziel, erfordert aber dann meist auch einen größeren Rechenaufwand.

3.1.4.6. *Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper*

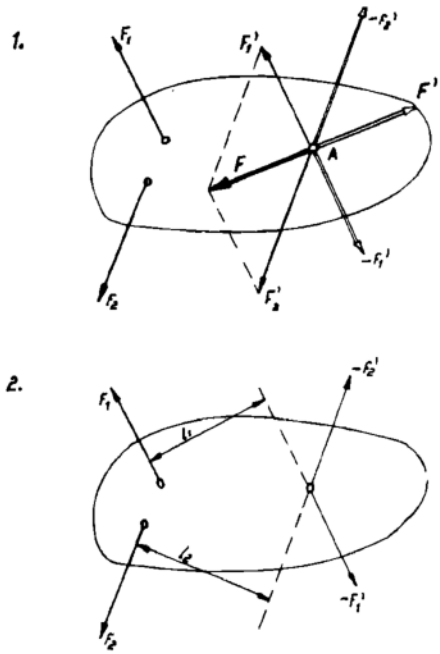


Bild 33

Beliebig am Körper angreifende Kräfte ergeben eine resultierende Kraft und ein resultierendes Kräftepaar

Bereits in [3.1.4.2.] erkannten Sie, daß ein Körper sich nur im Gleichgewicht befindet, wenn sowohl seine Translations- wie auch seine Rotationsbewegung unverändert bleibt. Im besonderen betrachteten Sie den Fall, daß der Körper im Ruhezustand war. In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht noch einmal zusammengefaßt werden.

Ein beliebiges System von Kräften, die an einem starren Körper angreifen, läßt sich stets zurückführen auf *eine Kraft* (Resultierende) und *ein Kräftepaar*. Betrachten Sie der Übersichtlichkeit halber nur zwei Kräfte F_1 und F_2 (Bild 33) und wählen Sie den Angriffspunkt A für die Einzelkraft. Sie tragen dann in A die Kräfte F_1' und $-F_1'$, sowie F_2' und $-F_2'$ an. Diese

heben sich gegenseitig auf und verändern damit nichts am Gleichgewicht des Körpers. (Die gestrichenen Kräfte sind den ungestrichenen gleich, besitzen nur einen anderen Angriffspunkt.) F_1' und F_2' fassen Sie nunmehr zu der in Punkt A angreifenden Resultierenden F zusammen. Dann bleiben zwei Kräftepaare mit den Drehmomenten $M_1 = F_1 l_1$ und $M_2 = F_2 l_2$ übrig, die sich nach dem Momentensatz [3.1.4.3.] zu einem resultierenden Drehmoment zusammensetzen lassen.

In gleicher Weise können Sie verfahren, wenn Sie als Angriffspunkt der Resultierenden F einen beliebig gelegenen anderen Punkt B wählen. Stets erhalten Sie eine Resultierende F (die immer gleich groß ist) und ein resultierendes Drehmoment. Der Betrag dieses Momentes richtet sich nach der Wahl des Angriffspunktes der Resultierenden; er kann in einem Falle gleich null sein (Übung 59).

Damit der Körper sich im Gleichgewicht befindet, müssen die Summe aller Kräfte und die Summe aller Momente um eine beliebige Drehachse gleich null sein.

Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper:

$$\sum \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum \mathfrak{M} = 0 \tag{27}$$

Im oben behandelten Beispiel wird das erreicht, indem eine Kraft F' im Punkt A angreift, die die Resultierende F der einzelnen Kräfte gerade aufhebt. Zugleich muß aber noch ein Kräftepaar am Körper angreifen, das das Drehmoment $M = F_2 l_2 - F_1 l_1$ kompensiert. Die Angriffspunkte der Kräfte dieses Kräftepaares darf man beliebig wählen, wenn man nur die Bedingung $M' = F_3 l_3$ einhält. Das Produkt aus dem Betrag der Kräfte und dem Abstand ihrer Wirkungslinien muß also entgegengesetzt gleich dem resultierenden Drehmoment M sein.

Zusammenfassung

Man bezeichnet einen Körper als *starr*, wenn er seine geometrische Form unter Krafteinwirkung nicht verändert. Das ist bei den festen Körpern praktisch gegeben.

Ein starrer Körper kann zwei verschiedene Bewegungsarten ausführen: die *Translation* und die *Rotation*. Soll er seinen Bewegungszustand nicht ändern, so muß *Gleichgewicht* herrschen.

Um festzustellen, ob ein starrer Körper sich im *Gleichgewicht* befindet, müssen die einzelnen Kräfte zusammengefaßt werden. Ihre *Resultierende muß gleich null* sein. Weiter muß die *Summe aller Drehmomente verschwinden*.

Das Drehmoment ist ebenfalls eine vektorielle Größe. Das hat zur Folge, daß man Drehmomente wie Vektoren addieren muß:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n$$

Damit lauten die *Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper:*

$$\sum \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum \mathfrak{M} = 0$$

Greifen an verschiedenen Punkten eines starren Körpers Kräfte an, so lassen sich diese stets zu einer resultierenden Kraft zusammenfassen. Bei beliebiger Lage des Angriffspunktes dieser Resultierenden wirkt zusätzlich ein Drehmoment, hervorgerufen durch ein resultierendes Kräftepaar. Eine Gegenkraft vom Betrage der Resultierenden und ein entgegengerichtetes Drehmoment vom Betrage des resultierenden Drehmoments halten dann den Körper im Gleichgewicht.

Ist jedes Massenelement eines starren Körpers nur der Schwerkraft ausgesetzt, so liegt ein einfaches System paralleler Kräfte vor. Die vielen Teilkräfte lassen sich zu einer Resultierenden vereinigen, die im Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) des Körpers angreift. Die Lage des Massenmittelpunktes läßt sich mit Hilfe der Integralrechnung ermitteln.

Übungen

47. Ein Seil wird über eine feste Rolle geführt (Bild 34). Zwei gleich schwere Affen, ein träger und ein flinker, klettern empor. Welcher Affe erreicht zuerst die Linie A ··· A ? (Die Rolle soll sich reibungsfrei drehen.)

48. Sie springen aus einem Kahn ans Ufer und stoßen sich dabei mit einer Kraft von 22 kp vom Kahn ab (Bild 35). Wirkt auch auf den Kahn eine Kraft ? Können Sie Näheres über die Kraft aussagen ?

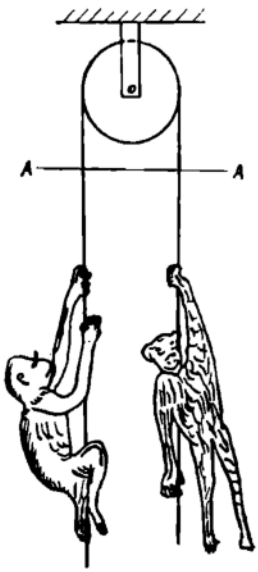


Bild 34
Zwei Kletteraffen

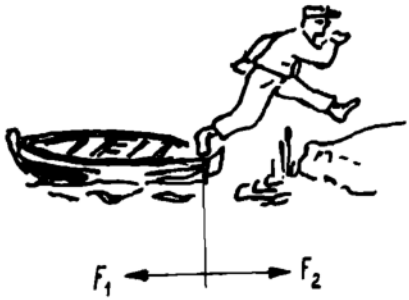


Bild 35
Abspringen von einem Kahn

49. Eine Feder soll als Dynamometer geeicht werden. Folgende Werte werden gemessen:

F/kp	1	2	3	4	5
l/cm	2,0	4,05	6,0	7,95	10,05

Zeichnen Sie die Eichkurve! (Die Kraft F ist als Funktion der Länge l darzustellen. Dabei soll die Kraft sowohl in der Einheit Kilopond als auch in der Einheit Newton angegeben werden.)

50. Ein Stahlträger der in Bild 36 gezeigten Form wird 20 cm von der Wand entfernt mit 30 kp belastet. Welche Zugkraft haben die oberen Wandhaken auszuhalten? Lösen Sie die Aufgabe grafisch!

51. An einem Kranseil von 7 m Länge hängt eine Platte von 1,2 Mp Gewicht. Welche Kraft ist nötig, um die Platte 0,5 m aus der Senkrechten abzulenken? (Grafische Lösung)

52. Ermitteln Sie mit Hilfe des Krafteeks die Kraft, die den in Bild 37 dargestellten Kräften das Gleichgewicht hält!

53. Ermitteln Sie durch Rechnung die Hangabtriebskraft F_H und die Normalkraft F_N, die ein Körper auf der schiefen Ebene (Bild 38) erfährt!

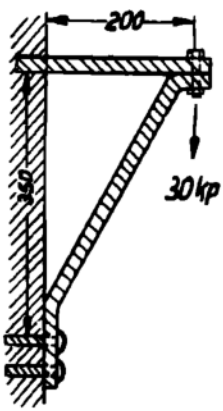


Bild 36
Kräfte an einem belasteten Träger

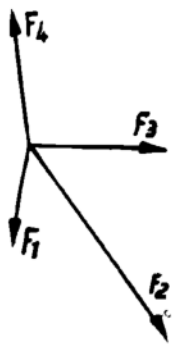


Bild 37
Vier im gleichen Punkt angreifende Kräfte

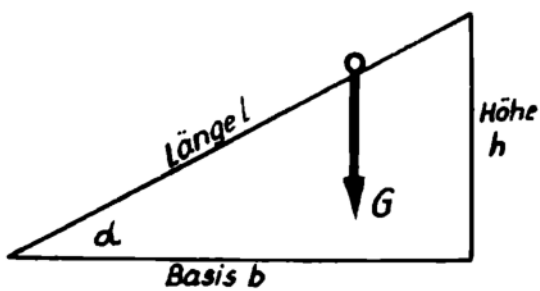


Bild 38
Schiefe Ebene

1. Geben Sie die Lösung zunächst allgemein an!
2. Diskutieren Sie, wie sich F_H und F_N mit dem Winkel α ändern!
3. Berechnen Sie F_H und F_N für $\alpha = 30°$ und $G = 20$ kp!
4. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den durch zeichnerische Lösung gewonnenen Werten!

54. Berechnen Sie die Drehmomente $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sowie das resultierende Drehmoment $\mathfrak{M}$, das auf eine Scheibe mit Kräften nach Bild 39 wirkt!

    $F_1 = 10$ kp, $F_2 = 8$ kp, $r = 0{,}5$ m, $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$.

    Prüfen Sie das Ergebnis für $\mathfrak{M}$, indem Sie $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zusammensetzen und das Moment der Resultierenden ausrechnen!

55. Wie ändern sich die Ergebnisse der Übung 54, wenn beide Kräfte nicht in der Ebene der Drehscheibe liegen, sondern unter einem Winkel von 45° gegen diese Ebene in der angegebenen Weise (Bild 39) an der Scheibe angreifen?

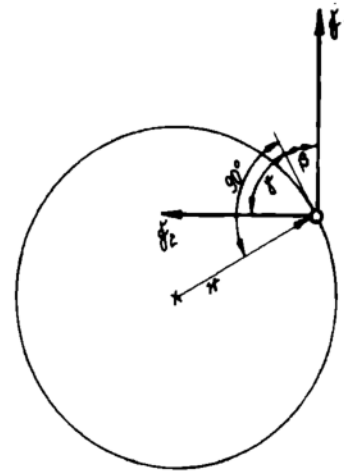


Bild 39
Drehmoment um eine feste Achse

56. Wie unterscheiden sich ein Kräftepaar und ein Drehmoment um eine vorgegebene Achse?
57. In Bild 29 soll die Drehachse senkrecht zur Zeichenebene durch den Punkt C laufen. Beweisen Sie, daß auch jetzt ein resultierendes Moment $M = F\,l$ auftritt, wie es dem Kräftepaar zugeordnet ist!

ähnlich zu lösen wie

58. Bestimmen Sie den Massenmittelpunkt eines Kegels! (Anleitung: Versuchen Sie, die Aufgabe zurückzuführen auf Lehrbeispiel 23!)
59. Zeigen Sie an zwei Beispielen, daß die Wahl des Angriffspunktes der Resultierenden die Größe des resultierenden Drehmomentes bestimmt! (Vgl. Bild 33 und [3.1.4.6.]!)

    Für welchen Angriffspunkt der Kraft F wird das resultierende Drehmoment gleich null?

3.2. Kräfte am bewegten Massenpunkt

3.2.1. Die Newtonschen Gesetze

Sie lernten bereits in [3.1.2.] das 3. Newtonsche Gesetz kennen. Es klärt das Zusammenwirken zweier Kräfte für den besonderen Fall, daß

der Bewegungszustand eines Körpers sich nicht ändert, für den *Gleichgewichtsfall*. Nun soll der Zusammenhang zwischen *Kraft und Bewegung* näher untersucht werden. Es wird also die Frage nach der Ursache einer Änderung des Bewegungszustandes gestellt. Das 1. und das 2. Newtonsche Gesetz (das *Trägheitsgesetz* und das *Grundgesetz der Dynamik*) klären diese Frage. Um einfache Verhältnisse zu schaffen, ist es erforderlich, daß man sich zunächst auf die Betrachtung eines *bewegten Massenpunktes* beschränkt. Ein ausgedehnter Körper kann ja neben der Translation auch eine Rotation ausführen. Die Betrachtung beider Bewegungsformen soll aber vorerst vermieden werden.

3.2.1.1. Trägheitsgesetz

Beobachten Sie Ihre Umgebung, so stellen Sie fest, daß jeder sich selbst überlassene Körper in dem Bewegungszustand zu verharren sucht, in dem er sich gerade befindet. Beim plötzlichen Anfahren der Straßenbahn fallen Sie entgegen der Fahrtrichtung; denn Ihr Körper sucht seinen vorherigen Ruhezustand beizubehalten. Ihre Füße aber werden von der Bahn mitgenommen

Wird der Wagen abgebremst, so neigen Sie Ihren Körper entgegen der Fahrtrichtung oder halten sich an Handgriffen fest, damit Sie nicht umfallen. Diesmal will Ihr Körper den inzwischen angenommenen Bewegungszustand beibehalten.

Wie in [V 4.1.1.] erwähnt, nennt man diese wichtige physikalische Eigenschaft aller Körper die *Trägheit* oder das *Beharrungsvermögen*.

Diese so einfach erscheinende Tatsache haben die Menschen erst verhältnismäßig spät erkannt, weil die tägliche Erfahrung lehrt, daß jeder in Bewegung befindliche Körper früher oder später ganz von selbst zur Ruhe kommt. Diese Tatsache scheint dem Trägheitsgesetz zu widersprechen. Bei genauerer Beobachtung erkennt man aber, daß in allen praktischen Fällen jede Bewegung dem Einfluß von Kräften unterliegt. Hierzu gehören die Reibungskräfte, die Schwerkraft, elektrische Kräfte u. a. Je vollkommener es gelingt, den Einfluß der Kräfte auszuschalten, um so mehr nähern wir uns dem Fall, daß ein sich selbst überlassener Körper dauernd mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterläuft.

Alle diese Zusammenhänge wurden das erste Mal von dem Engländer Isaac Newton (1643 bis 1727) richtig erkannt. Er formulierte sie im ersten seiner drei Axiome[1], die er an die Spitze der Mechanik stellte. Dieses Axiom wird als *Trägheitsgesetz* bezeichnet. Es lautet:

Jeder Körper verharrt in Ruhe oder in geradliniger, gleichförmiger Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn einwirken.

---

[1] Axiom (griech.): unmittelbar einleuchtender grundlegender Lehrsatz.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Axioms folgt aus der Tatsache, daß sich bisher alle aus diesem Satz gezogenen Schlußfolgerungen als richtig erwiesen haben. Denken Sie hier an die von der Sowjetunion gestarteten Raketen, die ihre vorher errechnete Bahn, die zum größten Teil im stark luftverdünnten Raum mit verschwindend geringer Reibung verlief, mit großer Genauigkeit eingehalten haben! Bei der Berechnung der Bahn war die Gültigkeit des Trägheitsgesetzes vorausgesetzt worden.

Das Trägheitsgesetz gilt für jeden Körper, unabhängig von irgendwelchen Eigenschaften oder vom jeweiligen Zustand (wie z. B. dem Aggregatzustand).

Das Trägheitsgesetz beruht auf einer Grundeigenschaft, die allen Körpern zukommt: *Jeder Körper ist träge.*

Um zu erkennen, welche Rolle die Trägheit bei Bewegungsvorgängen spielt, interessiert uns die Frage, *wie groß* die Trägheit eines bestimmten Körpers ist, d. h. also, wie man die Trägheit messen kann.

Um das Meßverfahren für die Trägheit zu verstehen, erinnern Sie sich bitte an folgende Beobachtung: Boxer verwenden beim Training einen großen, freihängenden Sandsack. Beim Schlag wird eine Kraft auf den Sandsack ausgeübt, doch bewegt sich dieser nur wenig aus seiner Ruhelage, und der Boxer bemerkt, daß der Sandsack seinem Schlag einen Widerstand entgegensetzt. Dieser Widerstand ist eine Folge der Trägheit des Sandsacks, und man spricht deshalb auch von einem *Trägheitswiderstand.*

Dieser Trägheitswiderstand des Sandsacks hängt von einer Eigenschaft des Körpers ab. Newton bezeichnete diese physikalische Größe als *quantitas materiae* (Stoffmenge); heute nennen wir sie die *Masse* des Körpers. Es gilt somit:

Die Trägheit eines Körpers ist seiner **Masse** proportional.

Man benutzt deshalb die Masse als Maß der Trägheit. Die Feststellung „Die Masse eines Körpers beträgt 5 kg" macht also nicht nur eine Aussage über die Stoffmenge des Körpers, sondern auch über seine Trägheit. Dieser Körper ist nämlich 5mal so träge wie das Urkilogramm.

Wenn man ausdrücklich sagen will, daß in einem bestimmten Falle in erster Linie die Trägheit interessiert, so spricht man auch von *träger Masse*. Es muß aber betont werden, daß in der Physik, insbesondere in der Mechanik, bei einer Massenangabe im allgemeinen die Trägheit gemeint ist.

Die Trägheit, d. h. der Widerstand, den ein Körper einer Bewegungsänderung entgegensetzt, ist von der Erdanziehung völlig unabhängig. Ein bestimmter Körper setzt also überall, z. B. an der Erdoberfläche,

im Weltraum oder auf einem anderen Gestirn, einer Bewegungsänderung den gleichen Trägheitswiderstand entgegen, d. h., seine Masse bleibt dabei stets gleich.

▌ Die Masse eines Körpers ist vom Ort der Messung unabhängig.

Die Einheit der Masse ist das Kilogramm (Kurzzeichen: kg). Es ist eine der sechs Grundeinheiten der Tafel der gesetzlichen Einheiten und ist die Masse des Internationalen Kilogramm-Prototyps, eines Zylinders aus Platin-Iridium von 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser. Die Masse von 1 dm^3 Wasser von 4 °C beträgt fast genau 1 kg.

Lehrbeispiel 24

An einem Faden ist eine schwere Bleikugel aufgehängt (Masse m). Sie ziehen einmal mit kleiner Kraft F beginnend und steigern langsam und gleichmäßig die Kraft. Ein anderes Mal ziehen Sie sogleich mit großer Kraft ruckartig an (Bild 40). Die beiden Fäden oberhalb und unterhalb der Kugel besitzen gleiche Festigkeit. Welcher Faden reißt bei Ihren Versuchen?

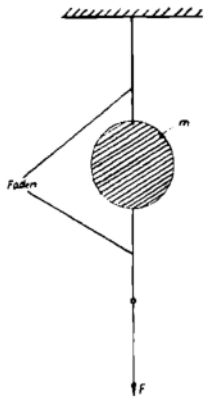


Bild 40
Welcher Faden reißt zuerst?

Lösung:

Beim ersten Versuch wird der Faden oberhalb der Kugel reißen. Zusätzlich zur Zugkraft F wirkt dort das Gewicht der Bleikugel. Der obere Faden wird also stärker belastet. Beim zweiten Versuch jedoch wird der untere Faden reißen. Die Trägheit der Kugel ist die Ursache dafür. Die große Masse der Bleikugel ist gleichbedeutend mit großer Trägheit des Körpers. Somit wirkt bei plötzlich einsetzender großer Kraft F diese nur auf den unteren Faden; am oberen Faden wirkt nur das Gewicht der Kugel.

3.2.1.2. Grundgesetz der Dynamik

Die Überlegungen zum Trägheitsgesetz zeigten Ihnen, daß eine *Kraft* erforderlich ist, um den Bewegungszustand eines Körpers zu verändern. Eine solche Änderung des Bewegungszustandes beschreibt die Ihnen bekannte physikalische Größe *Beschleunigung* [2.1.3.]. Sie wissen auch, daß die *Masse* als Maß für die Trägheit geeignet ist, Schlußfolgerungen über die Größe einer Bewegungsänderung zu ziehen. Den Zusammenhang zwischen den Größen

Kraft, Masse und Beschleunigung

gilt es nun zu erkennen. Er ist für die gesamte Mechanik von grundlegender Bedeutung. Eine Anordnung nach Bild 41 gestattet, eine Versuchsreihe durchzuführen. Auf einer waagerechten Bahn ruht ein kleiner, leicht beweglicher Wagen (Masse m), beladen mit einem Körper (Masse M). Über Seil und feste Rolle wirkt auf den Wagen eine Zugkraft F, die gleich dem Gewicht der Waagschale (Masse m_1) und der Wägestücke (Masse m_2) ist. Dabei ist die Masse M des Körpers viel größer als die Gesamtmasse von Waagschale und Wägestücken wie auch

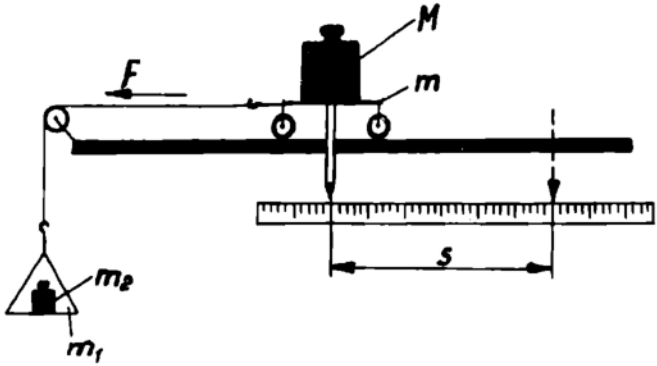


Bild 41. Anordnung zur Ermittlung des gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung

viel größer als die Wagenmasse m ($M \gg (m_1 + m_2)$; $M \gg m$). Die Versuchsanordnung ist so abgestimmt, daß sämtliche auftretenden Reibungskräfte (Lagerreibung, Seilreibung) durch das Gewicht der Waagschale ausgeglichen werden, d. h. nach geringem Anstoß bewegt sich der Wagen gleichförmig auf der Unterlage. Legt man jetzt auf die Waagschale ein Wägestück (Masse m_2), so wird der Wagen in Bewegung gesetzt, er wird beschleunigt. Mit Hilfe eines Maßstabes und einer Stoppuhr messen wir die Ortsveränderungen s des Wagens nacheinander in 1, 2, 3 und 4 Sekunden. Dann prüfen wir nach, ob diese Bewegung dem Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung in der Form $a = \frac{2s}{t^2}$ genügt.

Wir setzen hierzu für jede Einzelmessung die Meßwerte für t und s in die Gleichung ein, bestimmen a und erhalten z. B.

t/s	s/m	a/m s^{-2}
1	0,12	0,240
2	0,50	0,250
3	1,12	0,249
4	2,00	0,250

Die Auswertung der Versuchsergebnisse führt zu der Erkenntnis: Eine konstante Kraft erzeugt an einem Körper eine konstante Beschleunigung. (Kleine Abweichungen der Beschleunigungswerte vom Mittelwert $a = 0{,}247$ m/s² sind durch unvermeidbare Ablesefehler entstanden.)

Nunmehr wird die Masse m_2 und damit die Zugkraft F verdoppelt. Erneut wird der in den vorgegebenen Zeiten zurückgelegte Weg gemessen. Die Auswertung der Messungen ergibt eine Beschleunigung von 0,492 m/s², d. h. praktisch den doppelten Wert, der sich bei einfacher Kraft herausstellte. Weitere Versuche mit dreifacher, vierfacher, . . . Antriebskraft führen zu folgendem Ergebnis:

> Die Beschleunigung, die ein Körper erfährt, ist der einwirkenden Kraft proportional und erfolgt in der Richtung, in der die Kraft wirkt.

Die mathematische Formulierung dieser Aussage lautet:

$$a \sim F$$

Sinngemäße Untersuchungen führte Newton durch, indem er den freien Fall eines Körpers analysierte. Wie Sie bereits wissen, ist der freie Fall eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Die Ursache der Beschleunigung ist hier das Gewicht des frei fallenden Körpers, also wiederum eine Kraft. Die Richtung der Kraft stimmt mit der Richtung der Fallbeschleunigung überein, beide sind zum Erdmittelpunkt gerichtet, und die Beschleunigung ist konstant.

Wir wollen nun noch untersuchen, welche Kraft jeweils aufgewandt werden muß, um verschiedenen Körpern gleiche Beschleunigungen zu erteilen. Wirkt z. B. unsere Muskelkraft auf einen Gummiball, so ist die Beschleunigung, die sie ihm erteilt, wesentlich größer als wenn dieselbe Muskelkraft auf den Punchingball eines Boxers wirkt. Ganz allgemein lehrt die Erfahrung, daß eine konstante Kraft verschiedenen Körpern ungleiche Beschleunigungen erteilt. Die Beschleunigung muß also, außer von der Kraft, auch von einer Eigenschaft des Körpers abhängen. Diese grundlegende Eigenschaft haben Sie bereits im vorangehenden Abschnitt kennengelernt. Es ist die Masse des Körpers. Mit unserer Versuchsanordnung führen wir jetzt eine weitere Versuchsreihe durch: Wir belasten den Wagen nacheinander mit Körpern der Masse M, $2\,M$, $3\,M$, ... Die Zugkraft F wird jetzt nicht geändert. Berechnen wir wieder die jeweilige Beschleunigung, so folgt für

die Masse des Körpers auf dem Wagen	M	$2\,M$	$3\,M$	$4\,M$
die Beschleunigung in m/s²	0,247	0,123	0,083	0,064

Das bedeutet aber:

Die Beschleunigung ist der Masse indirekt proportional:

$$a \sim \frac{1}{m}$$

Da die Beschleunigung einerseits der Kraft proportional, andererseits der Masse umgekehrt proportional ist, folgt zusammengefaßt

$$a \sim \frac{F}{m},$$

d. h. in Worten:

> Wirkt eine Kraft F auf einen frei beweglichen Körper der Masse m ein, so erfährt dieser eine Beschleunigung a, die proportional ist der wirkenden Kraft F und umgekehrt proportional der Masse m des beschleunigten Körpers.

Dies ist das 2. Newtonsche Gesetz.

Es gilt jetzt lediglich noch, den Proportionalitätsfaktor zu bestimmen. Zweckmäßig ist der Faktor 1. Durch geeignete Wahl der Einheiten wird aus der Proportionalität eine Gleichung:

$$a = \frac{F}{m}$$

Geht man von den bereits festgelegten Einheiten der Masse und der Beschleunigung aus, dann erhält man die Krafteinheit

$$[F] = [m]\,[a] = \mathrm{kg\ m\ s^{-2}} \equiv \mathrm{N}$$

Das ist die bereits in [3.1.1.] erwähnte Krafteinheit Newton. Diese Einheit wird aus den Grundeinheiten der Länge, der Zeit und der Masse gebildet.

Merken Sie sich:

> Die Einheit der Kraft ist das Newton. Die Kraft 1 N erteilt einem Körper der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s².

Aus den Experimenten sowie aus der Verfügung über den Proportionalitätsfaktor folgt als die endgültige Form des *2. Newtonschen Gesetzes:*

$$F = m\,a = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \tag{28}$$

Kraft = Masse · Beschleunigung

(Dynamisches Grundgesetz)

Wie Sie wissen, unterliegt jeder Körper auf der Erde und in Erdnähe einer Kraft, die ihn in Richtung zum Erdmittelpunkt hinzieht. Diese

Kraft ist eine Folge der Massenanziehung, die zwischen allen Körpern besteht und die wir bei der Erde als *Schwerkraft* bezeichnen. Die auf einen bestimmten Körper wirkende Schwerkraft nennen wir das Gewicht des Körpers.

Die Schwerkraft ist auch die Ursache für die Fallbewegung der Körper. Es muß also das dynamische Grundgesetz gelten:

$$G = m\,g \tag{29}$$

Gewicht = Masse · Fallbeschleunigung

Diese Gleichung gilt aber nicht nur für den Fall der Bewegung. Sie gibt allgemein den Zusammenhang zwischen den Größen Gewicht und Masse wieder, gilt also auch im statischen Fall, z. B. im Falle des Gleichgewichts der Ruhe eines Körpers, der an einer Federwaage hängt. Die Fallbeschleunigung g ist eine ortsabhängige Größe. Da die Masse eines Körpers unabhängig vom Ort ist, muß nach Gleichung (29) das Gewicht eines Körpers ortsabhängig sein. Es ist am Nordpol größer als in unseren Breiten und hier wieder größer als am Äquator. Die Schwerkraft, die auf einen Körper an der Mondoberfläche wirkt („Mondgewicht" sollte man nicht sagen), ist viel kleiner als sein Gewicht an der Erdoberfläche.

Lehrbeispiel 25

Berechnen Sie das Gewicht eines Körpers (Masse 10 kg) am Nordpol ($g_p = 9{,}83$ m/s²) und am Äquator ($g_A = 9{,}78$ m/s²) und vergleichen Sie mit dem Gewicht dieses Körpers in unseren Breiten ($g = 9{,}81$ m/s²; d. i. der abgerundete Wert der Normfallbeschleunigung $g_n = 9{,}80665$ m/s²)!

Lösung:

Nach (29) ist

$$G_p = m\,g_p = 10\text{ kg} \cdot 9{,}83\text{ m/s}^2 = 98{,}3\text{ kg m/s}^2 = 98{,}3\text{ N}$$

Wegen 1 kp = 9,80665 N ≈ 9,81 N ist auch

$$G_p = \frac{98{,}3}{9{,}81}\text{kp} = 10{,}03\text{ kp}$$

Ebenso folgt

$$G_A = m\,g_A = 97{,}8\text{ N} = 9{,}97\text{ kp} \quad \text{und}$$
$$G = m\,g = 98{,}1\text{ N} = 10{,}0\text{ kp}$$

Für das Verhältnis der Gewichte folgt

$$G_p : G : G_A = 1{,}003 : 1{,}000 : 0{,}997$$

Wünschen Sie die Ergebnisse sogleich in der Einheit Kilopond zu erhalten, so rechnen Sie ohne Zwischenergebnis:

$$G = m g = \frac{10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m}}{\text{s}^2} = 10 \cdot 9{,}81\,\text{N} = \frac{10 \cdot 9{,}81}{9{,}81}\,\text{kp} = 10\,\text{kp}$$

Beachten Sie hier besonders: Im Zähler rührt der Faktor 9,81 von der Fallbeschleunigung her, im Nenner jedoch aus der gesetzlichen Festlegung, daß 1 kp = 9,80665 N ≈ 9,81 N ist. Das wird oft übersehen. Berechnen Sie auf diese Weise nochmals G_P und G_A in der Einheit Kilopond, und Sie werden den Sachverhalt noch besser übersehen!

Das Ergebnis unseres Lehrbeispiels kann man verallgemeinern und sagen:

In unseren Breiten besitzt ein Körper mit der Masse 1 kg ein Gewicht von 1 kp.

Niemals aber dürfen Sie sich deshalb verleiten lassen, einfach zu schreiben 1 kp = 1 kg! Man darf nicht zwei *verschiedene* physikalische Größen einander gleichsetzen!

Lehrbeispiel 26

Wieviel Newton sind erforderlich, um einem Körper von der Masse 35 kg die Beschleunigung 7 m/s² zu erteilen?

Lösung:

Gegeben: $m = 35\,\text{kg}$ Gesucht: F

$a = 7\,\text{m/s}^2$

Nach (28) gilt

$$F = m\,a = 35\,\text{kg} \cdot 7\,\text{m/s}^2 = 245\,\text{kg m s}^{-2} = \underline{\underline{245\,\text{N}}}$$

Lehrbeispiel 27

Wieviel Kilogramm Masse besitzt ein Körper, der unter der Wirkung einer Kraft von 100 N längs eines Weges von 10 m aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit 5 m/s beschleunigt wird?

Lösung:

Gegeben: $F = 100\,\text{N}$ Gesucht: m

$s = 10\,\text{m}$

$v = 5\,\text{m/s}$

$v_0 = 0$

Aus (28) folgt zunächst $m = \frac{F}{a}$

a ergibt sich aus (7) zu $a = \frac{v^2}{2\,s}$

Damit wird

$$m = \frac{2\,F s}{v^2} = \frac{2 \cdot 100\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}} = 80\,\frac{\mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m}}{\mathrm{m^2\,s^{-2}}} = \underline{\underline{80\,\mathrm{kg}}}$$

Lehrbeispiel 28

Über eine Rolle mit horizontaler Achse ist ein Faden gelegt, an dessen Enden je ein Körper von $m_1 = 100$ g und $m_2 = 102$ g befestigt ist (Bild 42). Die Körper werden festgehalten und dann losgelassen. Was für eine Bewegungsart entsteht, und welchen Wert hat die die Bewegungsart kennzeichnende physikalische Größe? Die Faden- und Rollenmasse sowie die Reibung werden vernachlässigt.

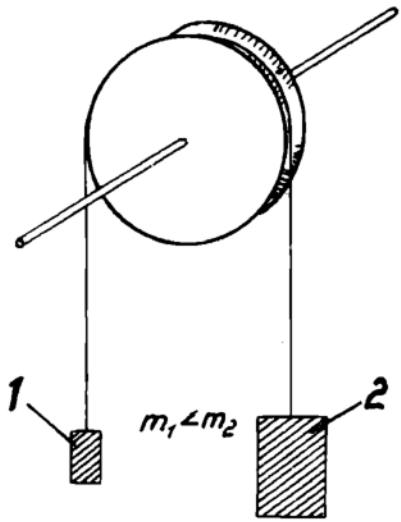


Bild 42
Beschleunigung zweier Körper verschieden großer Masse infolge ihrer Gewichtsdifferenz

Lösung:

Da die Kraft, die beide Körper in Bewegung setzt, während des Bewegungsvorganges konstant bleibt, entsteht eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Da $m_2 > m_1$, bewegt sich der Körper *2* beschleunigt nach unten, der Körper *1* nach oben.

Die beschleunigende Kraft ist gleich der Differenz der Gewichte der beiden Körper:

$$F = G_2 - G_1 = (m_2 - m_1)\,g$$

Die Kraft F muß nach dem dynamischen Grundgesetz (28) beide Körper (Masse $m_1 + m_2$) beschleunigen:

$$F = (m_1 + m_2)\,a$$

Nach Gleichsetzen erhält man

$$(m_1 + m_2)\, a = (m_2 - m_1)\, g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{2\ \text{g}}{202\ \text{g}} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{0{,}097\ \text{m/s}^2}} = \underline{\underline{9{,}7\ \text{cm/s}^2}}$$

Lehrbeispiel 29

Wie groß muß die beschleunigende Kraft einer Katapultstartanlage sein, wenn ein Flugzeug von 9 t Gesamtmasse auf einer Strecke von 30 m eine Geschwindigkeit von 240 km/h erhalten soll?

Lösung:

Gegeben: $m = 9\ \text{t}$ Gesucht: F

$s = 30\ \text{m}$

$v = 240\ \text{km/h}$

$v_0 = 0$

Nach (28) ist $F = m\, a$

a folgt aus (7) zu $a = \dfrac{v^2}{2\, s}$

Damit wird

$$F = \frac{m\, v^2}{2\, s} = \frac{9\ \text{t} \cdot 240^2\ \text{km}^2}{2 \cdot 30\ \text{m h}^2} = \underline{\underline{6{,}7 \cdot 10^5\ \text{N}}} = \frac{6{,}7 \cdot 10^5\ \text{kp}}{9{,}81} = \underline{\underline{68\ \text{Mp}}}$$

3.2.2. Trägheitskräfte

Bereits im Beispiel des Schlages auf den Sandsack erfuhren Sie von einer Trägheitskraft. Dort nannten wir diese Kraft den Trägheitswiderstand. In diesem Abschnitt sollen Sie mehr über Trägheitskräfte hören. Zur widerspruchsfreien Erklärung aller Fragen der Mechanik mit Hilfe der Newtonschen Gesetze ist das Verständnis des Folgenden notwendige Voraussetzung.

Wir wollen einen gut bekannten Vorgang untersuchen: das Anfahren eines Straßenbahnwagens (oder eines anderen Fahrzeugs). Sie stellen sich außerhalb des Wagens auf die Straße. Sie sind damit *ruhender Beobachter*. Nun beschreiben Sie, was mit den Körpern im Wagen während des Anfahrens geschieht, und erklären Ihre Beobachtungen. Um das Wesentliche gut verfolgen zu können, denken wir uns auf Schienen (Sch) im Innern des Wagens eine Kugel (K), die sich in der

Horizontalen reibungsfrei bewegen kann (Bild 43). Sie entdeckten sicher schon das Quecksilberkügelchen in den Leuchtstoffröhren moderner Fahrzeuge. Unsere Kugel sei ein vergrößertes Abbild dieser Quecksilberkugel. Hinter dem Straßenbahnwagen gibt uns das Haltestellenschild mit seinem Pfosten eine ortsfeste Linie im Bild. Liegt die Kugel vor dem Anfahren an unserer Bezugslinie H—H, so liegt sie dort auch noch nach dem Anfahren (Fahrzeug gestrichelt).

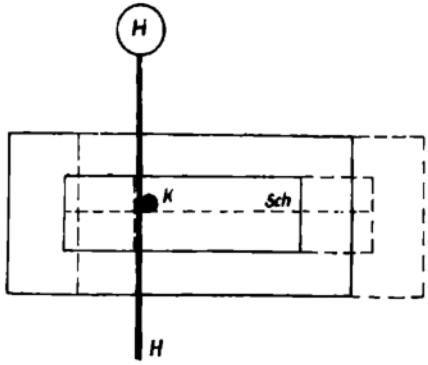


Bild 43
Modell unseres Straßenbahnwagens

Wir erklären das einfach mit Hilfe des Trägheitsgesetzes. Wenn auf die Kugel keine Kräfte wirken, da Reibungsfreiheit vorausgesetzt ist, so verharrt sie im Zustand der Ruhe, bleibt also an der Linie H—H.

Später wird die Kugel einmal mitgenommen. Wenn sie am Wagenende angelangt ist, wirkt ja eine Kraft auf sie ein. Wir verfolgen jedoch das Verhalten der Kugel nur, solange sie im Wagen frei beweglich ist.

Wie unsere Kugel, so verhalten sich alle Körper im Fahrzeug, die Fahrgäste wie auch die Gepäckstücke. Nur sind diese Körper nicht so frei beweglich. Sie beobachten z. B. einen Mitfahrenden. Er wird auf seinem Stehplatz an den Füßen durch die Reibungskraft festgehalten. Da sein Körper im Zustand der Ruhe zu verharren bestrebt ist, seine Füße aber vom Wagen mitgenommen werden, muß er umkippen.

Entsprechende Beobachtungen machen Sie auch, wenn ein Fahrzeug bremst. Dabei stellen Sie als außenstehender, ruhender Beobachter fest, daß alle Körper im Fahrzeug ihren Bewegungszustand beibehalten, sofern sie im Wagen nicht festgehalten werden. Sie bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Führen Sie sich auch diesen Fall anschaulich im Gedankenexperiment mit unserer Kugel vor!

Ganz anders beschreiben Sie als *mitbewegter Beobachter* das Verhalten der Kugel. Sie sollten sich jetzt vorstellen, daß Sie in der Bahn sitzen und keinerlei Verbindung zur Außenwelt haben. Sie beobachten die vor ihren Augen ruhende Kugel. Plötzlich setzt sich diese in Bewegung. Wie erklären Sie das? Nur eine Kraft kann Ursache dieser Änderung des Bewegungszustandes der Kugel sein, eine Kraft

$$F_T = m\,a, \tag{30}$$

die *Trägheitskraft* genannt wird. Diese Kraft läßt sich im Fahrzeug auf einfache Weise messen, indem man die Kugel an einer Federwaage

befestigt. Sie selbst verspüren solche Kräfte, wenn Sie umgeworfen werden und sich festhalten müssen (Gegenkraft zur Trägheitskraft).

Wie berechnet man den Betrag solcher Trägheitskräfte? Die Masse m in Gleichung (30) ist natürlich die Masse des betrachteten Körpers, der sich im Wagen befindet. Die Beschleunigung a aber ist einfach die Beschleunigung des Straßenbahnwagens. Das läßt sich leicht nachweisen. In [2.3.1.] wurde die Relativität der Bewegungen untersucht. Vom außenstehenden Beobachter gesehen, entfernt sich der Straßenbahnwagen mit der Beschleunigung a von der ruhenden Kugel. Da der mitfahrende Beobachter die gleiche Relativbewegung verfolgt, muß die von ihm festgestellte Beschleunigung der Kugel gegenüber dem für ihn ruhenden Fahrzeug den gleichen Betrag a besitzen. Sie zeigt allerdings gerade in entgegengesetzter Richtung. Beachten Sie aber, daß die Antriebskraft F zur Beschleunigung des Fahrzeuges verschieden ist von der Trägheitskraft F_T auf mitbewegte Körper. Im ersten Falle wird ja die Masse m_w des gesamten Wagens in die Gleichung $F = m_w a$ eingesetzt, im zweiten Fall nur die Masse m_k eines mitbewegten Körpers. Die Antriebskraft und die Trägheitskraft besitzen hier wie die entsprechenden Beschleunigungen entgegengesetzte Richtung.

Lehrbeispiel 30

Ein Großblockbauteil von 2 t Masse soll durch einen Kran gehoben werden. Die Vertikalbeschleunigung soll 1 m/s² betragen. Welche Kraft hat das Seil zu übertragen?

Lösung:

Gegeben: $m = 2$ t
$a = 1$ m/s²

Gesucht: F_S

1. Vom Standpunkt des mitbewegten Beobachters erfährt der beschleunigt bewegte Körper eine Trägheitskraft $F_T = m\,a$. (Sie können sich neben dem bewegten Körper sitzend mit diesem zusammen bewegt denken!) Unabhängig davon wirkt das Gewicht des Körpers, hier in gleicher Richtung wie die Trägheitskraft (Bild 44.1). Die Seilbelastung F_S wird folglich

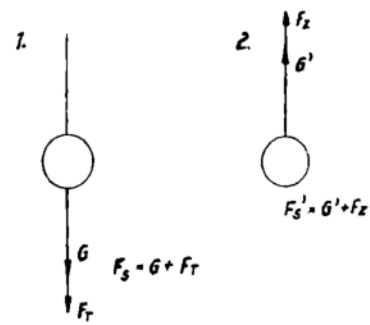


Bild 44. Seilbelastung
1. vom Standpunkt des mitbewegten Beobachters,
2. vom Standpunkt des außenstehenden Beobachters

$$F_S = G + F_T = m\,g + m\,a = m\,(g + a)$$
$$= 2\text{ t}\,(9{,}81 + 1)\text{ m s}^{-2} = 2000\text{ kg} \cdot 10{,}81\text{ m s}^{-2}$$
$$\underline{\underline{F_S = 21\,620\text{ N}}}$$

Die Seilbelastung in der Einheit Kilopond erhalten Sie, indem Sie ersetzen 1 N = 1 kp/9,81:

$$F_S = \frac{21\,620}{9{,}81}\text{kp} = \underline{\underline{2204\text{ kp}}}$$

2. Vom Standpunkt des außenstehenden Beobachters stellen Sie fest, daß das Seil die Zugkraft F_Z zur Beschleunigung überträgt. Dazu muß das Seil noch die Gegenkraft G' zum Gewicht des Körpers aufbringen. Die Summe beider Kräfte hat das Seil zu übertragen (Bild 44.2):

$$F_S' = G' + F_Z = m\,g + m\,a = m\,(g + a)$$

Es folgt der gleiche Betrag wie im ersten Fall, lediglich die Richtung der Kraft F_S' ist entgegengesetzt der Richtung von F_S.

Darf man aus diesem Lehrbeispiel nun den Schluß ziehen, Antriebskraft F_Z und Trägheitskraft F_T seien Kraft und Gegenkraft? Das wäre falsch! Da Sie zur Zeit immer nur *einen* Beobachterstandpunkt einnehmen können, sind für Sie diese beiden Kräfte niemals gleichzeitig wahrzunehmen. Sie nehmen *entweder* die Trägheitskraft wahr (als mitbewegter Beobachter nach Bild 44.1) *oder* die Antriebskraft (als ruhender Beobachter nach Bild 44.2). Wären beide Kräfte zugleich wahrnehmbar, so ergäbe das einen Widerspruch zu den Newtonschen Gesetzen; denn nähme man z. B. die Richtigkeit des 3. Newtonschen Gesetzes an, so müßte das 2. falsch sein, da nunmehr die Summe aus Kraft und Gegenkraft null wäre, obwohl eine Beschleunigung beobachtet wird. Die Newtonschen Gesetze verlangen, daß die Frage des Beobachterstandpunktes eindeutig geklärt ist!

Im bewegten System kann es selbstverständlich eine Gegenkraft zur Trägheitskraft geben, nämlich, wenn ein Körper im beschleunigten Wagen festgehalten wird (Federwaage, Sie halten sich fest usw.). Dann bleibt im beschleunigten Bezugssystem der Körper in Ruhe. Dieses Gleichgewicht aber wird hergestellt durch die Gegenkraft F_T' zur Trägheitskraft F_T. Der außenstehende Beobachter würde jetzt *eine* Kraft wahrnehmen. Das ist die Kraft, die den Körper im Wagen mitnimmt.

Die Trägheitskraft wirkt stets entgegen der Beschleunigung, die das Bezugssystem erfährt, d. h. aber nicht, daß sie auch stets entgegen der Bewegungsrichtung wirkt! Bei Verzögerung ($a < 0$) ist die Richtung von a entgegen der Bewegungsrichtung, die Richtung der Trägheits-

kraft folglich gleich der Bewegungsrichtung. An Hand von Übung 66 sollen Sie sich die Zusammenhänge nochmals vor Augen führen. Vorerst studieren Sie noch die folgenden Lehrbeispiele!

Lehrbeispiel 31

Eine Laufkatze mit angehängter Last (1500 kg) soll mit 0,8 m/s² beschleunigt werden (Bild 45).

1. Welche Kräfte greifen an der Last an?
2. Welchen Winkel bildet das Seil mit der Senkrechten?
3. Diskutieren Sie die allgemeine Lösung des Problems!

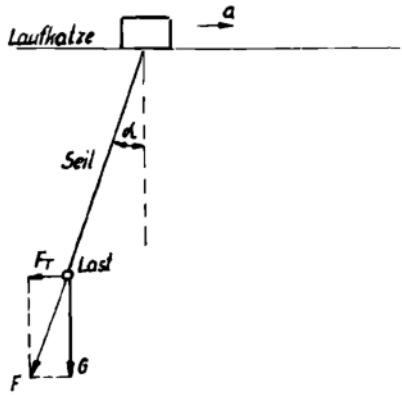


Bild 45
Last an einer beschleunigt bewegten Laufkatze

Lösung:

1. Zunächst entscheiden Sie sich für den Standpunkt des mitfahrenden Beobachters. Dann wirken auf den Körper am Seil die Trägheitskraft F_T und das Gewicht G. Die Resultierende beider Kräfte spannt das Seil, und ihre Wirkungslinie ist zugleich die durch das Seil beschriebene Gerade.
2. Gegeben: $m = 1500$ kg Gesucht: α
   $a = 0{,}8$ m/s²

   Aus Bild 45 folgt:

$$\tan\alpha = \frac{F_T}{G} = \frac{m\,a}{m\,g} = \frac{a}{g}$$

$$= \frac{0{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}} = 0{,}0815$$

$$\underline{\underline{\alpha = 4{,}7^\circ}}$$

3. Die Gleichung für $\tan\alpha$ enthält nicht mehr die Masse m der Last. Der Winkel α ist somit unabhängig von der Masse. Der Winkel α wird größer mit wachsender Beschleunigung a.

Bemerkung: Selbstverständlich dürfen Sie sich auch für den Standpunkt des ruhenden Beobachters entscheiden. Dann müßte das Seil den Körper tragen, d. h. die Gegenkraft zum Gewicht des Körpers aufbringen und zugleich den Körper in der Horizontalen beschleunigen. In Bild 45 würden folglich G und F_T in entgegengesetzter Richtung anzutragen sein; ihre Resultierende wäre die vom Seil auf den Körper ausgeübte Kraft und hätte die gleiche Wirkungslinie. Die Lösung ist wie oben.

Lehrbeispiel 32

Der Hammerbär eines Dampfhammers (800 kg) soll in 1,2 s um 0,7 m angehoben werden. Berechnen Sie die erforderliche Antriebskraft! Der Vorgang soll reibungsfrei verlaufen.

Lösung:

Gegeben: $m = 800$ kg Gesucht: F

$t = 1{,}2$ s

$s = 0{,}7$ m

Der Hammerbär wird beschleunigt nach oben bewegt. Als mitbewegter Beobachter bemerken wir eine nach unten gerichtete Trägheitskraft F_T. Das Gewicht des Körpers zeigt in die gleiche Richtung. Die Antriebskraft F muß die Gegenkraft zur Summe der beiden am Hammerbär angreifenden Kräfte sein:

$$F = F_T + G = m\,a + m\,g$$
$$= m\,(a + g)$$

Die Beschleunigung folgt aus (5) mit $v_0 = 0$ zu

$$a = \frac{2\,s}{t^2}$$

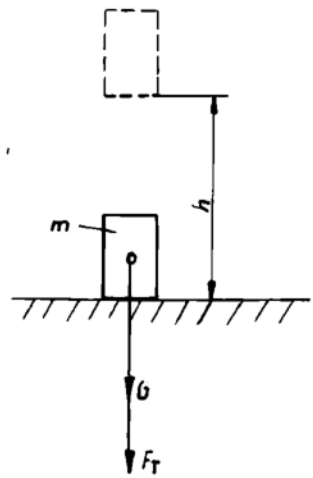


Bild 46
Kräfte am beschleunigt bewegten Hammerbär

Damit wird

$$F = m\left(\frac{2\,s}{t^2} + g\right) = 800\,\text{kg}\left(\frac{1{,}4\,\text{m}}{1{,}44\,\text{s}^2} + 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\right) = \underline{\underline{8624\,\text{N}}}$$

$$\underline{\underline{F = 880\,\text{kp}}}$$

3.2.3. Bewegungshemmende Kräfte

Im vorangehenden Abschnitt lernten Sie Trägheitskräfte kennen. Diese treten bei Bewegungen nur dann auf, wenn eine Beschleunigung vorhanden ist ($a \neq 0$). Ihre Richtung kann sowohl der Bewegungsrichtung entgegen als auch ihr gleichgerichtet sein (für $a > 0$ bzw. $a < 0$). Daneben kennen Sie bei Bewegungen auftretende Kräfte, die stets der Bewegungsrichtung entgegen wirken. Solche bewegungshemmenden Kräfte faßt man unter dem Namen *Reibungskräfte* zusammen. Sie lernten derartige Kräfte bereits im Vorbereitungsmaterial [V 4.4.] kennen. Man verwendet für die verschiedenartigen Reibungskräfte das Formelzeichen F_R.

Beim Antrieb eines Fahrzeugs müssen stets sowohl Trägheits- als auch Reibungskräfte beachtet werden. Die Trägheitskräfte sind der Beschleunigung proportional. Reibungskräfte gehorchen nicht so einfachen Gesetzen. Während des Anfahrens muß der Betrag der Zugkraft des Motors gleich der Summe der Beträge von Trägheits- und Reibungskraft sein.

3.2.3.1. Haftreibung und Gleitreibung

Im Zustand der Ruhe „haftet" jeder Körper an seiner Unterlage. Neben der Trägheitskraft, die man sehr klein werden lassen kann, wenn man nur eine sehr kleine Beschleunigung wählt, wirkt auf den Körper eine *Haftreibung*. Dabei ist bis zu einem Grenzwert die Reibung als Gegenkraft stets entgegengesetzt gleich der Zugkraft F (Bild 47.1). Als Haftreibung F_R bezeichnet man die Kraft, die gerade den Körper in Bewegung setzt (Bild 47.2). Bewegt sich anschließend der Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiter, so ist für den Antrieb eine kleinere Kraft erforderlich. Dies ist die Gegenkraft zur *Gleitreibung*, die man ebenfalls mit dem Symbol F_R bezeichnet. Wenn man innerhalb einer Aufgabe zwischen Haft- und Gleitreibung unterscheiden muß, so verwendet man für die Haftreibung F_{R0} (der 2. Index weist auf $v = 0$ hin). Die wichtigsten Merkmale für die Haft- und Gleitreibung seien kurz zusammengefaßt:

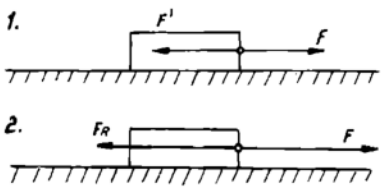


Bild 47. Haftreibung

1. Die Reibung ist vom Material, von der Oberflächenbeschaffenheit und vom Gleitmittel, das sich zwischen den Flächen befindet, abhängig. Alle diese Materialkonstanten werden im **Reibungskoeffizienten** (oder in der *Reibungszahl*) μ zusammengefaßt. Dabei gilt μ_0 für die Haftreibung und μ ohne Index für die Gleitreibung.

2. Die Reibung ist von der Kraft abhängig, mit der die Flächen gegeneinandergepreßt werden, von der *Normalkraft* F_N. In vielen Fällen ist diese Kraft das Gewicht des bewegten Körpers.
3. Die Reibung ist *nicht* abhängig von der Größe der sich berührenden Oberflächen. Das scheint zunächst paradox. Man kann sich aber vorstellen, daß, wenn eine bestimmte Kraft die reibenden Flächen zusammendrückt, es für den Reibungswiderstand auf dasselbe hinausläuft, ob bei einer kleinen Fläche auf jeden der wenigen Quadratzentimeter eine große Kraft oder bei einer großen Fläche auf jeden Quadratzentimeter eine kleine Kraft wirkt.

Haft- und Gleitreibung werden nach folgender Gleichung berechnet:

$$F_R = \mu F_N \tag{31}$$

Die wichtigsten Reibungszahlen finden Sie in Tafel 11 des Anhangs zusammengestellt.

Lehrbeispiel 33

Der Tisch einer Langhobelmaschine mit Werkstück hat eine Masse von 2,4 t. Beim Rücklauf — während also der Hobelstahl nicht schneidet — legt der Tisch gleichmäßig beschleunigt die ersten 2,5 m des Hubes in 3 s zurück. Der Reibungskoeffizient zwischen Tisch und Führung beträgt 0,06.

Welche waagerechte Antriebskraft ist für den Rücklauf erforderlich?

Lösung:

Gegeben: $m = 2{,}4$ t Gesucht: F

$s = 2{,}5$ m

$t = 3$ s

$\mu = 0{,}06$

$v_0 = 0$

Die gesuchte Kraft ist die Summe aus Trägheits- und Reibungskraft:

$$F = F_T + F_R$$

F_T folgt aus (30) mit a aus (5); F_R ergibt sich aus (31) mit $F_N = G = m\,g$:

$$F = m\,\frac{2\,s}{t^2} + \mu\,m\,g = m\left(\frac{2\,s}{t^2} + \mu\,g\right)$$

$$F = 2{,}4\ \text{t}\left(\frac{5\ \text{m}}{9\ \text{s}^2} + 0{,}06 \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2}\right) = \underline{\underline{2750\ \text{N} = 280\ \text{kp}}}$$

Häufig kennzeichnet man die Reibung auch durch den *Reibungswinkel* α. Veranschaulichen Sie sich diese Größe an der schiefen Ebene (Bild 48). Gleitet der Körper mit konstanter Geschwindigkeit, so herrscht Kräftegleichgewicht:

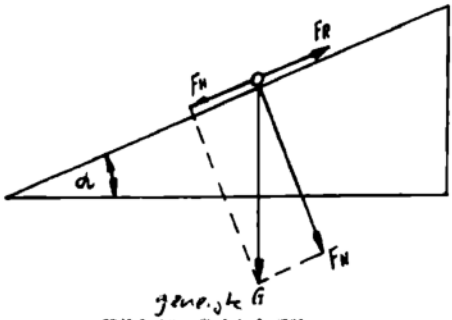


Bild 48. ~~Schiefe~~ Ebene

Hangabtrieb = Gleitreibung

$$F_H = F_R$$

Mit $F_H = G \sin \alpha$ und $F_R = \mu F_N = \mu G \cos \alpha$ folgt

$$\mu = \frac{G \sin \alpha}{G \cos \alpha} = \tan \alpha$$

Lehrbeispiel 34

Die Ablaufbahn einer Werft für den Stapellauf eines Schiffes hat einen Neigungswinkel von 10°. Welchem Reibungskoeffizienten der mit Seife geschmierten Ablaufbahn entspricht dies?

Lösung:

$$\mu = \tan \alpha = \tan 10° = \underline{\underline{0{,}176}}$$

Die Gleitreibung wirkt bei Bewegungsvorgängen in der Technik meist störend (Ausnahme z. B. Reibungskupplung). Man versucht deshalb, sie klein zu halten. Das geschieht durch Schmierung. Dabei ersetzt man die *äußere Reibung* zwischen festen Körpern durch die *innere Reibung* des Schmiermittels [Lbf. 4].

Die Haftreibung dagegen besitzt große technische Bedeutung. Ohne Haftreibung zwischen Schuhsohlen und Straße könnten Sie gar nicht gehen. Denken Sie an die Schwierigkeiten, die sich bei nur verminderter Reibung, etwa bei Glatteis, einstellen! Ein Fahrzeug könnte sich ohne Haftreibung nicht in Bewegung setzen. Die Räder würden sich frei drehen. Der Straßenbahnfahrer streut Sand auf die Schienen, wenn er anders nicht anfahren kann, oder er läßt alle Fahrgäste in den Triebwagen einsteigen, um durch eine vergrößerte Normalkraft die Haftreibung zu vergrößern. Eine Lokomotive besitzt auch deshalb eine große Masse.

Lehrbeispiel 35

Ein Güterzug soll mit einer Beschleunigung von 0,08 m/s² anfahren.

1. Wieviel Megapond muß die Zugkraft der Lokomotive betragen, wenn der Zug eine Masse von 800 t hat?

2. Welche Masse muß die Lokomotive mindestens besitzen, wenn diese Zugkraft gewährleistet sein soll und die Reibungszahl 0,2 ist?

Lösung:

Gegeben: $m = 800$ t Gesucht: 1. F

$a = 0{,}08\ \mathrm{m/s^2}$ 2. m_L

1. $F = m\,a = 8 \cdot 10^5\ \mathrm{kg} \cdot 8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

$F = 64000\ \mathrm{N} \approx 6500\ \mathrm{kp} = \underline{\underline{6{,}5\ \mathrm{Mp}}}$

2. Dieser Kraft muß die Haftreibung (Stahl/Stahl) mindestens gleich sein:

$$F_R \geqq F$$

$$\mu_0\, m_L g \geqq F$$

$$m_L \geqq \frac{F}{\mu_0\, g} = \frac{64000\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}}{0{,}2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}} \approx \underline{\underline{32\ \mathrm{t}}}$$

3.2.3.2. Rollreibung und Fahrwiderstand

Ganz anders als die Gleitreibung erscheint die *Rollreibung*. Sie entsteht, weil ein Rad jeweils an der Berührungsstelle durch Haftreibung festgehalten wird. Die Unterlage wird dort verformt. Da die Rollreibung ebenfalls eine bewegungshemmende Kraft darstellt, beschreibt man sie formal in ähnlicher Weise wie die Gleitreibung. Ein Drehmoment vom Betrage M muß ständig wirken, damit ein Rad mit konstanter Geschwindigkeit rollen kann.

$$M = \mu'\, F_N \tag{32}$$

definiert einen Koeffizienten μ' der Rollreibung, der sich experimentell bestimmen läßt. Er besitzt die Einheit Meter. Praktisch vorkommende Werte für μ' liegen zwischen 10^{-3} und 10^{-5} m.

Zwischen der Zugkraft F für das Rad und dem Drehmoment M besteht die Beziehung

$$M = F\, r \tag{21}$$

mit r als Radius des Rades.

Aus den Gleichungen (32) und (21) folgt für die Antriebskraft

$$F = \frac{\mu'}{r}\, F_N\,. \tag{32'}$$

Dies ist die Gegenkraft zur Rollreibung F_R.

Vergleichen Sie nun die Gleichungen (31) und (32') und damit die Gleitreibung und die Rollreibung, so stellen Sie fest, daß sich diese Kräfte verhalten

$$F_{\mathrm{Roll}} : F_{\mathrm{Gleit}} = \frac{\mu'}{r} : \mu$$

Für die Gleitreibung Stahl auf Stahl ($\mu \approx 0{,}1$) und die Rollreibung eines Rades mit dem Radius 0,5 m ($\mu' \approx 10^{-4}$ m) folgt z. B.:

$$F_{\text{Roll}} : F_{\text{Gleit}} = \frac{10^{-4}\ \text{m}}{0{,}5\ \text{m}} : 0{,}1$$

$$F_{\text{Roll}} : F_{\text{Gleit}} = 1 : 500$$

Eine „Eisenbahn" auf Kufen anstelle von Rädern, auf Schienen laufend, erführe somit die 500fache Reibungskraft!

Für Fahrzeuge faßt man zweckmäßig Gleitreibung (in den Lagern) und Rollreibung zusammen zum *Fahrwiderstand* und kennzeichnet diesen durch einen Gesamtreibungskoeffizienten (Anhang Tafel 12). Mit diesem experimentell bestimmten Koeffizienten kann man dann in einfacher Weise den Fahrwiderstand berechnen:

$$F_R = \mu\, F_N \tag{31}$$

Lehrbeispiel 36

Welche Beschleunigung erfährt ein Körper mit der Masse $M = 750$ g im Modellversuch von Bild 41, wenn für die entstehenden Reibungsverluste (Lager, Rolle, Seilsteifigkeit) ein Reibungskoeffizient von $\mu = 0{,}008$ angenommen wird? Die Zugkraft F wird durch ein Wägestück vor der Masse $m_2 = 200$ g erzeugt.

Die Masse des Wagens sei gleich der Masse der Waagschale ($m = m_1 = 50$ g).

Lösung:

Die durch das Gewicht von Waagschale und Wägestück hervorgerufene Kraft muß die Reibung sowie die Trägheitskräfte überwinden. Alle beteiligten Massen erfahren eine Beschleunigung. Die Normalkraft F_N ist gleich dem Gewicht von Körper und Wagen.

$$F_N = F_R + F_T$$

$$(m_1 + m_2)\, g = \mu\,(m + M)\, g + a\,(m + M + m_1 + m_2)$$

$$a = g\,\frac{m_1 + m_2 - \mu\,(m + M)}{m + M + m_1 + m_2}$$

$$a = 9{,}81\ \text{m s}^{-2} \cdot \frac{250\ \text{g} - 0{,}008 \cdot 800\ \text{g}}{1050\ \text{g}}$$

$$\underline{\underline{a = 2{,}3\ \text{m/s}^2}}$$

Lehrbeispiel 37

Ein Kraftfahrzeug mit der Masse 1200 kg bremst scharf auf nasser Straße, so daß die Räder blockieren. Welche Verzögerung tritt hierbei auf, wenn als Gleitreibungszahl für den vorliegenden Fall 0,15 angenommen wird?

Lösung:

Gegeben: $m = 1200\ \text{kg}$ Gesucht: a

$\mu = 0{,}15$

Da die Trägheitskraft in Bewegungsrichtung wirkt, die Reibungskraft der Bewegungsrichtung aber entgegengerichtet ist, gilt das dynamische Grundgesetz

$$F_T = -F_R$$

Mit (30) und (31) ergibt sich

$$m\,a = -\mu\,m\,g$$
$$a = -\mu\,g$$
$$a = -0{,}15 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{-1{,}47\ \text{m/s}^2}}$$

Dies ist für eine Bremsverzögerung ein sehr geringer Wert. Sie erkennen daraus, wie berechtigt die Forderung an unsere Kraftfahrer ist, auf nasser Straße besonders vorsichtig und nicht zu schnell zu fahren. (Errechnen Sie den Bremsweg für $v_0 = 100$ km/h bzw. $v_0 = 30$ km/h bei dieser Verzögerung!)

Aus der Lösung der Aufgabe geht hervor, daß die Verzögerung im vorliegenden Fall von der Masse des Fahrzeuges *nicht* abhängt. Sie stellen das aber nur fest, wenn Sie, wie im Lösungsgang angegeben, zunächst allgemein rechnen und erst am Schluß die Größen mit ihren Zahlenwerten und Einheiten einsetzen.

3.2.4. Arbeit und Energie bei mechanischen Vorgängen

3.2.4.1. Arbeit

Die Bedeutung der physikalischen Größe *Arbeit* lernten Sie bereits im Vorbereitungsmaterial [V 4.5.1.] kennen. In Physik und Technik verwenden wir den Begriff Arbeit nicht in der sehr allgemeinen Bedeutung wie im täglichen Leben, sondern entsprechend einer eindeutigen Definition:

$$\textit{Arbeit} = \textit{Kraft} \cdot \textit{Weg}$$

Aber auch diese Festlegung gilt nur unter besonderen Bedingungen:

1. Kraft und Weg — beides vektorielle Größen — müssen gemeinsame Wirkungslinie haben.
2. Die Kraft muß konstant sein.

Allgemein gilt bei konstanter Kraft:

$$W = F\,s\cos\alpha \tag{33}$$

Beweis: Nach Bild 49.1 ist die Kraftkomponente in Wegrichtung $F_S = F\cos\alpha$. F_S und der Weg s haben eine gemeinsame Wirkungslinie. Gleichung (33) gibt das Produkt aus Kraft und Weg wieder.

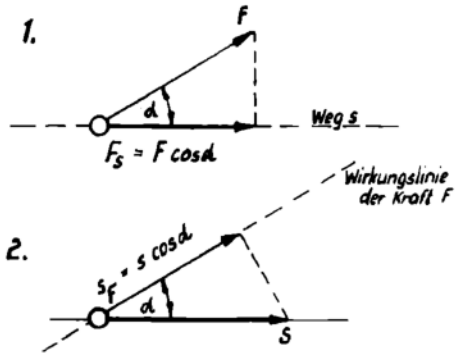


Bild 49. Zur Berechnung der Arbeit

Ebenso darf man nach Bild 49.2 die Komponente des Weges in Richtung der Kraft berechnen und damit das Produkt von Kraft und Weg bilden: $s_F = s\cos\alpha$; dann folgt $W = F\,s_F = F\,s\cos\alpha$, d. h. ebenfalls Gl. (~~34~~).(33)

Die Einheit der Arbeit ist

$$[W] = [F]\cdot[s] = \text{Nm} = \text{J}$$

(J = Joule; sprechen Sie „dschuhl"!)

oder

$$[W] = [F]\cdot[s] = \text{kpm}$$

Mit der gesetzlichen Festlegung

$$1\ \text{kp} = 9{,}80665\ \text{N}$$

folgt (Multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung mit der Einheit Meter!):

$$1\ \text{kpm} = 9{,}80665\ \text{Nm} = 9{,}80665\ \text{J}$$

Es gilt weiter:

$$1\ \text{Nm} = 1\,\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Die Arbeit W stellt im F-s-Diagramm die Fläche unter der Kurve dar. Bei konstanter Kraft handelt es sich um ein Rechteck (Bild 50.1). Bild 50.2 zeigt eine Kraft, die von null bis zu einem Höchstwert F

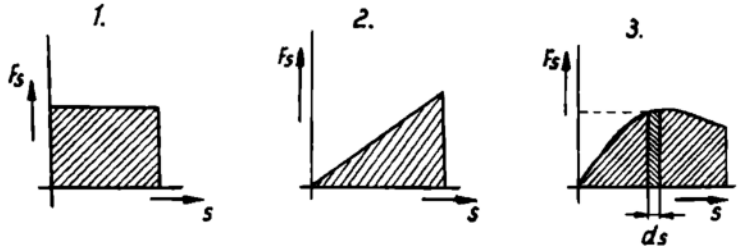


Bild 50. Fläche unter der Kurve im F-s-Diagramm ist ein Maß für die Arbeit
1. für konstante Kraft
2. für linear mit dem Weg anwachsende Kraft
3. für beliebigen Kraftverlauf

gleichmäßig anwächst. Die Fläche unter der Kurve ist ein Dreieck, dessen Flächeninhalt die Arbeit $W = \frac{1}{2} F s$ darstellt. Das ist beispielsweise die Arbeit beim Spannen einer Feder. Die Federkraft und damit auch die zum Spannen erforderliche Gegenkraft wachsen proportional der Dehnung der Feder, also proportional dem Weg s. Es gilt

$$F = k s$$

mit k als *Federkonstante*. Damit folgt für die *Arbeit beim Spannen einer Feder*

$$W = \frac{1}{2} F s$$

$$W = \frac{1}{2} k s^2 \tag{34}$$

Ändert sich die Kraft längs des Weges ungleichmäßig (Bild 50.3), so kann man nur jeweils einen kleinen Teil der Arbeit d W als kleine Teilfläche mit den Seiten ds und F_s erfassen:

$$\mathrm{d}\, W = F_s \,\mathrm{d}s.$$

Für die gesamte Arbeit folgt dann als Summe aller Rechtecke die gesamte Fläche unter der Kurve

$$W = \int F_s \,\mathrm{d}s. \tag{35}$$

Die Kraftkomponente F_s fällt dabei stets in die Wegrichtung. Bei einem Winkel α zwischen Kraft und Weg lautet die Gleichung

$$W = \int F \,\mathrm{d}s \cos \alpha \tag{35'}$$

oder als Vektorgleichung geschrieben

$$W = \int \mathfrak{F} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{s} \tag{35''}$$

Das unter dem Integralzeichen stehende *skalare Produkt* der Vektoren $\mathfrak{F}$ und $d\mathfrak{s}$ ergibt die *skalare Größe Arbeit.* Obwohl Kraft und Weg vektorielle Größen sind, stellt ihr durch Gleichung (35″) gegebenes Produkt eine skalare (ungerichtete) Größe dar.

Lehrbeispiel 38

Sie ziehen einen kleinen Wagen (150 kg) eine horizontale Strecke von 2 km. Die Fahrwiderstandszahl sei 0,1. Berechnen Sie die aufzuwendende Arbeit!

Lösung:

Gegeben: $m = 150$ kg Gesucht: W

$s = 2$ km

$\mu = 0{,}1$

Die Zugkraft F in Richtung des Weges ist die Gegenkraft zum Fahrwiderstand

$$F_R = \mu F_N = \mu m g$$

Damit folgt

$$W = F_R s = \mu m g s$$

$$W = 0{,}1 \cdot 150\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m s}^{-2} \cdot 2\,\text{km} \qquad (*)$$

$$\underline{\underline{W = 294\,\text{kJ}}}$$

Soll das Ergebnis in der Einheit Kilopondmeter bzw. Megapondmeter erscheinen, so rechnet man zweckmäßig ab Gleichung (*) wie folgt weiter:

$$W = \frac{0{,}1 \cdot 150 \cdot 9{,}81 \cdot 2000}{9{,}81}\,\text{kpm}$$

$$\underline{\underline{W = 30\,\text{Mpm}}}$$

Lehrbeispiel 39

Berechnen Sie die Hubarbeit, die aufzuwenden ist, um einen Körper der Masse 2 t um 30 m zu heben! Untersuchen Sie, welchen Einfluß der gewählte Weg auf das Ergebnis hat!

Lösung:

Gegeben: $m = 2$ t, daher $G = 2$ Mp Gesucht: W

$h = 30$ m

Längs des Weges *1* (Bild 51) ist das Gewicht des Körpers zu überwinden. Gegenkraft zum Gewicht und Weg haben gleiche Richtung. Folglich ist

$$W = G\,h = 2\ \text{Mp} \cdot 30\ \text{m} = \underline{\underline{60\ \text{Mpm}}}$$

oder: $$W = G\,h = m\,g\,h$$

$$= 2000\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2} \cdot 30\ \text{m}$$

$$\underline{\underline{W = 589\ \text{kJ}}}$$

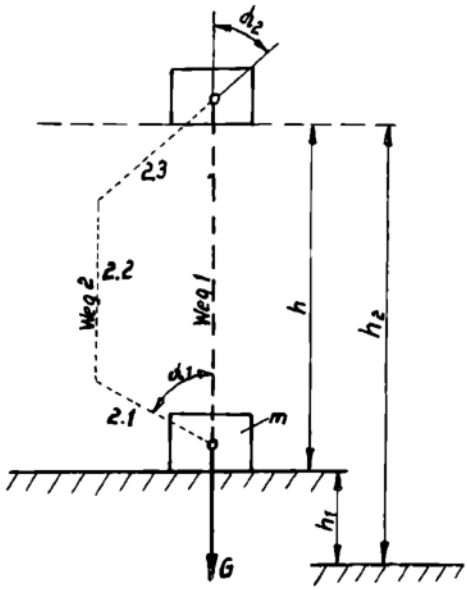


Bild 51. Arbeit gegen die Schwerkraft ist unabhängig vom Wege

Untersuchen Sie nun die Arbeit längs des Weges *2*! Wieder wirkt die erforderliche Kraft senkrecht, ihre Wirkungslinie verläuft in Richtung des Weges *1*. Benutzen Sie nun die Gleichung (33):

$$W = F\,(s \cos \alpha)$$

$s \cos \alpha$ ist aber weiter nichts als die Projektion des Weges *2* auf die Kraftrichtung und damit auf den Weg *1*. Es gilt (Bild 51):

$$s_{2.1} \cos \alpha_1 + s_{2.2} + s_{2.3} \cos \alpha_2 = h$$

Damit folgt die Arbeit auf den verschiedenen Wegen:

$$W_2 = W_{2.1} + W_{2.2} + W_{2.3} = W_1$$

Das Ergebnis dieses Lehrbeispiels dürfen wir verallgemeinern. Der Weg *2* kann beliebig anders geführt werden. Stets gilt:

$$W_1 = W_2$$

Die beim Heben eines Körpers gegen die Schwerkraft verrichtete Arbeit ist unabhängig von der Führung des Weges. Sie hängt nur vom Höhenunterschied zwischen Anfang und Ende des Weges ab.

3.2.4.2. Potentielle und kinetische Energie

Wenn man eine größere Wassermenge in einen Hochbehälter gepumpt hat, dann ist dazu eine bestimmte Arbeit aufgewandt worden, die Sie als Produkt

$$W = G\,h = m\,g\,h$$

jederzeit leicht berechnen können. Dieses Wasser kann nun durch ein Abflußrohr wieder abgelassen und z. B. dazu benutzt werden, die Turbine eines Elektrizitätswerkes anzutreiben, wie man es zum Ausgleich der Belastungsspitzen auch tut.

Oder betrachten Sie eine Uhrfeder! Um die Uhrfeder zu spannen, ist Arbeit erforderlich. Diese Arbeit wird von der Feder wieder abgegeben, wenn sie sich entspannt und sich im Anschluß daran wieder im ursprünglichen Zustand befindet.

Aus diesen beiden Beispielen erkennen Sie, daß durch bestimmte Arbeitsverrichtungen an einem Körper in diesem Arbeit gespeichert werden kann. Wird diese Arbeit wieder von ihm abgegeben, so nimmt er schließlich seinen anfänglichen Zustand a~~ngenähert oder vollständig~~ wieder ~~an~~ ein.

Diese gespeicherte Arbeit oder das Vermögen eines Körpers, Arbeit zu verrichten, bezeichnet man als *Energie*[1].

Unter Energie versteht man das Arbeitsvermögen eines Körpers.

In unserem ersten Beispiel handelt es sich um die Lageänderung eines Körpers.

Die Fähigkeit eines Körpers, infolge seiner Lage oder der Anordnung seiner Teile, Arbeit zu verrichten, heißt seine *potentielle Energie*.

Ein Körper der Masse m soll gehoben werden (Bild 51). Er befindet sich bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems in der Höhe h_1. Die Arbeit, die aufgewandt werden muß, um ihn in die obere Lage (Höhe h_2) zu bringen, beträgt

$$W = G\,h$$

[1] Energie (griech.): Wirksamkeit.

Diese Arbeit kann er bei Übergang in die alte Lage wieder abgeben. Seine potentielle Energie beträgt mit $G = m\,g$:

$$W_{\text{pot}} = m\,g\,h \tag{36}$$

Wie die zu verrichtende Arbeit unabhängig vom gewählten Weg war, so ist auch die potentielle Energie ausschließlich von dem Höhenunterschied h abhängig. Den Bezugspunkt der potentiellen Energie darf man willkürlich festlegen. Damit erscheint die potentielle Energie als eine relative Größe.

Die Einheit der potentiellen Energie ergibt sich zu:

$$[W_{\text{pot}}] = [m]\,[g]\,[h] = \text{kg m s}^{-2}\,\text{m} = \text{Nm} = \text{J}$$

Auch eine gespannte Feder enthält potentielle Energie. Hier gilt nicht die Gleichung (36), da die Fallbeschleunigung g beim Spannen einer Feder keine Rolle spielt. Die aufgewendete Arbeit beträgt nach Gl. ~~(35)~~ 34 $W = \frac{1}{2}\,k\,s^2$. Dies ist zugleich auch die *Energie der gespannten Feder:*

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\,k\,s^2 \qquad \text{~~(34)~~ 36'}$$

Auch ein in *Bewegung* befindlicher Körper ist in der Lage, Arbeit zu verrichten, indem er andere Körper beschleunigt oder verformt. Denken Sie an das Arbeitsvermögen, das in einer strömenden Flüssigkeit steckt!

Denken Sie auch an den geschwungenen Schmiedehammer, der im Begriff ist, auf das Werkstück aufzuschlagen. Bewegte Körper sind also ebenfalls Energiespeicher. Alle Körper, die sich bewegen, sind imstande, Widerstände zu überwinden, also Arbeit zu verrichten. Sie verfügen über Bewegungsenergie oder *kinetische Energie.*

In erster Linie wird die kinetische Energie von der Geschwindigkeit des Körpers abhängen; denn sehr rasch bewegte Gegenstände haben offensichtlich auch viel Bewegungsenergie.

Wir wollen die Größe der Bewegungsenergie jetzt berechnen und gehen von dem Gedanken aus, daß sie erst auf irgendeine Weise in den Körper hineingesteckt werden muß. Es muß also berechnet werden, welche Arbeit nötig ist, um einem Körper eine bestimmte Geschwindigkeit v zu erteilen. Dazu muß der Körper um eine bestimmte Wegstrecke s bewegt werden, wozu die Arbeit $W = F\,s$ erforderlich ist. Die antreibende Kraft beträgt $F = m\,a$. Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung für die Arbeit ein, so erhält man

$$W = m\,a\,s$$

Aus (7) folgt für $v_0 = 0$

$$a\,s = \frac{v^2}{2}$$

Damit wird

$$W = \frac{1}{2} m v^2$$

Dies ist der Arbeitsaufwand, der nunmehr als *kinetische Energie* in dem betrachteten Körper enthalten ist:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{37}$$

Die Einheit der kinetischen Energie muß naturgemäß wie die der potentiellen Energie gleich der Einheit der Arbeit sein. Sie prüfen das leicht nach:

$$[W_{\text{kin}}] = [m]\,[v]^2 = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{J}$$

Lehrbeispiel 40

Ein Verkehrsflugzeug mit einer Gesamtmasse von 25 t hat eine Landegeschwindigkeit von 180 km/h. Welche kinetische Energie hat das Flugzeug beim Landen?

Lösung:

Gegeben: $m = 25\ \text{t}$ Gesucht: W_{kin}

$v = 180\ \text{km/h}$

Nach (37) ist

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{25\ \text{t} \cdot 180^2\ \text{m}^2\,\text{s}^{-2}}{2 \cdot 3{,}6^2}$$

$$\underline{\underline{W_{\text{kin}} = 31{,}25\ \text{MJ}}}\ (= 31{,}25 \cdot 10^6\ \text{J})$$

Die Energie des Körpers erhöht sich, wenn an ihm Arbeit verrichtet wird, und sie nimmt ab, wenn er Arbeit an anderen Körpern verrichtet. Beschränkt man sich auf Vorgänge, bei denen der ursprüngliche Zustand wiederhergestellt werden soll, und sieht man von den Verlusten durch Reibungswärme ab, dann gilt das *Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie:*

> Bei reibungsfreien Vorgängen bleibt die Summe der mechanischen Energien der beteiligten Körper konstant.

Lehrbeispiel 41

Ein Körper (Masse 5 kg) wird um 2 m angehoben. Stellen Sie die Energiebilanz auf für die höchste Lage *1* des Körpers, für die Lage *3* unmittelbar vor dem Aufschlagen und für die Lage *2* (1 m Höhe, während des Fallens)!

Lösung:

In der Lage *1* (Bild 52) besitzt der Körper ausschließlich potentielle Energie. Die kinetische Energie ist $W_{\text{kin}\,1} = 0$. Die Gesamtenergie beträgt

$$W_{\text{ges}\,1} = W_{\text{pot}\,1} + W_{\text{kin}\,1} = m\,g\,h_1 + 0$$
$$= 5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot 2\,\text{m} = \underline{\underline{98{,}1\,\text{J}}}$$

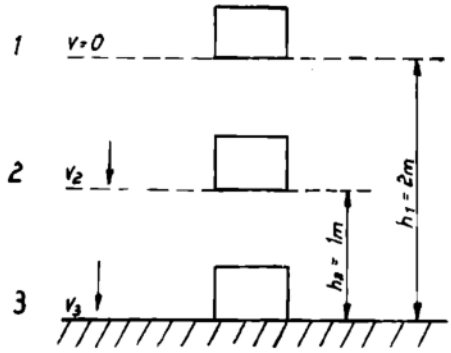


Bild 52
Energie eines Körpers in verschiedenen Lagen und bei verschiedenen Geschwindigkeiten

Fällt er herab bis in die Lage *3*, so kann er nicht mehr tiefer gelangen. Er besitzt daher keine potentielle Energie ($W_{\text{pot}\,3} = 0$), aber er erreicht dort die größte Geschwindigkeit v_3 und damit die größte kinetische Energie $W_{\text{kin}\,3}$. Die Gesamtenergie beträgt:

$$W_{\text{ges}\,3} = W_{\text{pot}\,3} + W_{\text{kin}\,3} = 0 + \frac{1}{2} m\,v_3^2$$

v_3^2 folgt aus (7) mit $v_0 = 0$ zu $2\,g\,h_1$:

$$W_{\text{ges}\,3} = m\,g\,h_1 = \underline{\underline{98{,}1\,\text{J}}}$$

An der Stelle *2* besitzt der fallende Körper sowohl potentielle als auch kinetische Energie:

$$W_{\text{ges}\,2} = W_{\text{pot}\,2} + W_{\text{kin}\,2}$$

Dabei ist

$$W_{\text{pot}\,2} = m\,g\,h_2$$

und

$$W_{\text{kin}\,2} = \frac{1}{2} m\,v_2^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2\,g\,(h_1 - h_2) = m\,g\,(h_1 - h_2)$$

Mit diesen Werten für die potentielle und die kinetische Energie wird die Gesamtenergie an der Stelle *2*

$$W_{\text{ges}\,2} = m\,g\,h_2 + m\,g\,(h_1 - h_2) = m\,g\,h_1 = \underline{\underline{98{,}1\,\text{J}}}$$

Die Gesamtenergie ist konstant.

3.2.4.3. Energiebilanz bei Betrachtung von Reibungskräften

Jetzt bleibt nur noch die Frage zu klären: In welcher Energieart erscheint die zugeführte *Reibungsarbeit*? Als potentielle Energie oder als kinetische Energie? Betrachten Sie das Beispiel des gezogenen Wagens! Am Ende der Strecke ist die „Lage" die gleiche; wir bewegten uns ja in der Ebene. Ein Zuwachs an potentieller Energie ist daher nicht erkennbar. Man könnte demnach vielleicht annehmen, die Reibungsarbeit erscheine als Bewegungsenergie. Doch ist ja die Geschwindigkeit und mithin die kinetische Energie zu Anfang und am Ende der betrachteten Strecke gleich groß. Durch die verrichtete Reibungsarbeit ist also auch die kinetische Energie nicht gewachsen. Die Reibungsarbeit erscheint weder als potentielle noch als kinetische Energie. Doch tritt bei jedem Reibungsvorgang eine Ihnen bekannte physikalische Erscheinung auf: Der bewegte Körper erwärmt sich nämlich. Die zugeführte Reibungsarbeit wandelt sich in *Wärme* um. Über die bei dieser Umwandlung geltenden Gesetzmäßigkeiten werden Sie im Lehrbrief 5 (Thermodynamik) genauer unterrichtet.

Der im vorangegangenen Abschnitt für rein mechanische Vorgänge aufgestellte Erhaltungssatz kann somit auch auf Vorgänge mit Reibung ausgedehnt werden. Wie der Arzt Julius Robert Mayer als erster 1842 erkannte, gilt in diesen Fällen ein über den Rahmen der Mechanik hinausgehender allgemeiner Energieerhaltungssatz, meist kurz **Energiesatz** genannt:

> **Bei allen Naturvorgängen kann Energie weder gewonnen werden noch verlorengehen; Energie kann lediglich von einer Form in eine andere umgewandelt werden.**

Bei der Umwandlung gelten ganz bestimmte quantitative Beziehungen zwischen den beteiligten Energieformen. Wenn eine bestimmte Menge an Wärmeenergie entstehen soll, muß eine ganz bestimmte Menge an mechanischer Energie oder an Elektroenergie verschwinden. Wie diese Rechnungen durchgeführt werden, wird Ihnen nach der Behandlung der betreffenden Energieformen erläutert werden. Sie erkennen aber schon jetzt, daß der Energiebegriff für die technische Praxis außerordentlich bedeutungsvoll ist. Alle technischen Vorgänge sind mit Energieumwandlungen, Energiespeicherung und Energieübertragung verknüpft.

Mit Hilfe des Energiesatzes ist es möglich nachzuweisen, daß es ein *Perpetuum mobile*[1] nicht geben kann. Man versteht darunter eine Maschine, die nach einmaligem Arbeitsaufwand unaufhörlich läuft. Die

---

[1] Perpetuum mobile (lat.): das beständig Bewegliche.

Maschine gäbe fortlaufend aus sich heraus Arbeit ab, ohne daß ihr Energie zugeführt wird. Dies widerspricht jedoch dem Energiesatz. Der Versuch, eine solche Maschine zu ersinnen, ist sinnlos.

Lehrbeispiel 42

Zum Einrammen von Pfählen wird ein Rammbär von 200 kg Masse 3,2 m hochgezogen und oben selbsttätig ausgelöst (Bild 53).

1. Wie groß ist die potentielle Energie des Rammbärs in seiner höchsten Stellung?
2. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er auf den Pfahl?
3. Wie groß ist die kinetische Energie des Rammbärs im Moment des Auftreffens auf den Pfahl?
4. Wie tief dringt der Pfahl in das Erdreich ein, wenn die Widerstandskraft mit 4 Mp angenommen wird?

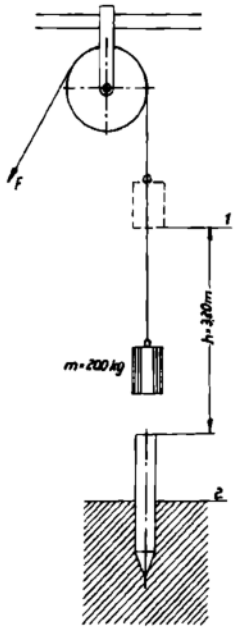


Bild 53
Anwendung des Energiesatzes beim Rammbär

Lösung:

Gegeben:		Gesucht:
m	= 200 kg	1. $W_{\text{pot } 1}$
h	= 3,2 m	2. v
F_R	= 4000 kp	3. $W_{\text{kin } 2}$
v_0	= 0	4. s

1. Nach (36) ist

$$W_{\text{pot } 1} = m\,g\,h = 200\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m s}^{-2} \cdot 3{,}2\text{ m} = \underline{\underline{6{,}28\text{ kJ}}}$$

2. Die Endgeschwindigkeit folgt aus (7) zu

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\text{ m s}^{-2} \cdot 3{,}2\text{ m}} = \underline{\underline{7{,}92\text{ m/s}}}$$

3. Nach dem Energiesatz gilt für die Gesamtenergie

$$W_{\text{ges } 1} = W_{\text{ges } 2}$$
$$W_{\text{pot } 1} + 0 = 0 + W_{\text{kin } 2}$$
$$W_{\text{kin } 2} = W_{\text{pot } 1} = \underline{\underline{6{,}28\text{ kJ}}}$$

4. So weit erfolgte der Vorgang reibungsfrei. Beim Eindringen des Pfahls in das Erdreich ist die Reibungskraft zu überwinden.

Die vorhandene Energie wird genutzt, die Reibungsarbeit zu verrichten. Es gilt

$$W_{\text{kin } 2} = F_R\, s$$

$$s = \frac{W_{\text{kin } 2}}{F_R} = \frac{6280 \text{ Nm}}{4000 \cdot 9{,}81 \text{ N}} = 0{,}16 \text{ m}$$

Die vorhandene kinetische Energie wird bei diesem Vorgang in Wärmeenergie verwandelt.

3.2.5. Leistung und Wirkungsgrad

In vielen Fällen interessiert weniger die verrichtete Arbeit als das Verhältnis dieser Arbeit zur benötigten Zeit. Die *Leistung*

$$P = \frac{W}{t} \tag{38}$$

gibt dieses Verhältnis an. [V 4.5.5.]. Mit $W = F\,s$ folgt

$$P = \frac{F\,s}{t} \tag{38'}$$

Beide Gleichungen gelten jedoch nur für konstante Kraft. Allgemein muß man einen kleinen Teil der Arbeit ($\mathrm{d}\,W$) und die zugeordnete Zeit $\mathrm{d}\,t$ betrachten und erhält

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{38''}$$

Setzt man hier $\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}s$ ein, so folgt $P = \dfrac{F\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ oder

$$P = F\,v\,. \tag{38'''}$$

Man kann also die Leistung auch berechnen aus dem Produkt von Kraft und Geschwindigkeit. Dabei ist zu beachten, daß für beschleunigte Bewegungen die Geschwindigkeit nicht konstant und v jeweils die Endgeschwindigkeit ist. Damit folgt nach Gl. (38''') auch eine *Endleistung*. Die *mittlere Leistung* errechnet man unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $v_m = \dfrac{v_0 + v}{2}$.

Die Einheit der Leistung ist das Watt (W):

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$$

Es gilt

$$1 \text{ W} = 1\,\frac{\text{J}}{\text{s}} = 1\,\frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}$$

$$1\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 9{,}80665 \text{ W}$$

Die Einheit Pferdestärke (PS) sollte möglichst nicht mehr verwendet werden (1 PS = 75 kpm/s = 735,5 W).

Wegen der Umrechnungen beachten Sie auch Tafel 10!

Es gilt damit auch

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{Ws}$$

das heißt aber, daß die *Wattsekunde* und die *Kilowattstunde* Einheiten der *Arbeit* (bzw. *Energie*) darstellen.

$$1\ \mathrm{kWh} = 10^3\ \mathrm{W} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{Ws}$$

In den meisten Fällen ist die Ausnutzung der vorhandenen Energievorräte mit erheblichem technischem Aufwand verbunden. Energie schlechthin gibt es zur Genüge, nicht aber nutzbare Energie! Nutzbare Energie ist Mangelware, und in jedem Haushalt, in jedem Betrieb, in jedem Staat muß man sie so zweckentsprechend wie nur möglich einsetzen. Mit anderen Worten heißt das: Man muß unerwünschte Energieumwandlungen nach Möglichkeit vermeiden. Dies gilt in erster Linie für die Umwandlung mechanischer Energie in Wärmeenergie, die nicht mehr genutzt werden kann. Trotz der Gültigkeit des Energiesatzes spricht man hier von Energie*verlusten* und in gleicher Weise auch von Energie*gewinnung* und Energie*verbrauch*. Gemeint ist in all diesen Fällen Gewinnung bzw. Verbrauch bzw. Verlust von *nutzbarer* Energie. Ein Maß für die Höhe der auftretenden Verluste ist der **mechanische Wirkungsgrad**. Er gibt an, welcher Bruchteil der zugeführten Energie für den beabsichtigten Zweck genutzt wird. Der Wirkungsgrad ist somit eine reine Zahl und kann auch in Prozent angegeben werden.

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{\text{genutzte Energie}}{\text{zugeführte Energie}}$$

Meist werden aber die auf die Zeit bezogenen Energien, d. h. also die Leistungen, ins Verhältnis gesetzt:

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}}$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \tag{39}$$

Offensichtlich kann der Wirkungsgrad nie den Wert 1 bzw. 100% übersteigen. Ja, dieser Wert kann wegen der unvermeidlichen Reibungsverluste nicht einmal erreicht werden. Ein Wirkungsgrad von über 100% würde bedeuten, daß Energie aus dem Nichts gewonnen würde (Perpetuum mobile!).

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß die kraftsparende Wirkung der einfachen Maschinen durch die Reibung begrenzt wird. So hat es keinen

Sinn, einen Flaschenzug mit einer außerordentlich großen Anzahl von Rollen zu bauen, um dadurch eine sehr große Last mit sehr kleiner Kraft anheben zu können. Man kann durch Versuche und durch Rechnung nachweisen, daß von einer bestimmten Rollenzahl ab keine Kraft mehr eingespart werden kann.

Umfangreiche technische Anlagen sind meist aus mehreren Maschinen zusammengesetzt. Hier ist der Gesamtwirkungsgrad der Anlage von Interesse. Er läßt sich leicht als Produkt der einzelnen Wirkungsgrade ermitteln:

$$\eta_{ges} = \eta_1 \, \eta_2 \, \eta_3 \cdots$$

Lehrbeispiel 43

Die sowjetische Windkraftmaschine TW 8 hat eine maximale Nutzleistung von 4 kW. Sie nutzt dabei 42% der Windenergie aus. Sie treibt eine Bewässerungspumpe an, die einen Wirkungsgrad von 0,7 hat. Zu wieviel Prozent wird die Windenergie insgesamt genutzt? Welche Leistung muß im Wind zur Verfügung stehen, und welche Leistung gibt die Pumpe ab, wenn die Anlage mit Höchstleistung arbeitet?

Lösung:

Gegeben: $P_T = 4$ kW, $\eta_T = 0{,}42$, $\eta_P = 0{,}7$

Gesucht: 1. η_{ges} 2. P_W 3. P_P

1. Der Gesamtwirkungsgrad ergibt sich als Produkt der einzelnen Wirkungsgrade:

$$\eta_{ges} = \eta_T \, \eta_P = 0{,}42 \cdot 0{,}7 = \underline{\underline{0{,}294}}$$

2. Für den Wirkungsgrad η_T der Turbine gilt nach (39)

$$\eta_T = \frac{P_T}{P_W}$$

Daraus folgt

$$P_W = \frac{P_T}{\eta_T} = \frac{4 \text{ kW}}{0{,}42} = \underline{\underline{9{,}5 \text{ kW}}}$$

3. Entsprechend gilt für den Wirkungsgrad der Pumpe

$$\eta_P = \frac{P_P}{P_T}$$

$$P_P = \eta_P \, P_T = 0{,}7 \cdot 4 \text{ kW} = \underline{\underline{2{,}8 \text{ kW}}}$$

Eine schematische Darstellung des Vorganges zeigt Bild 54.

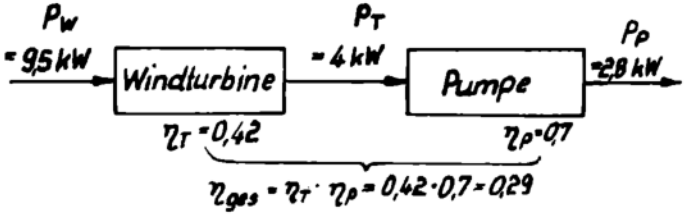


Bild 54. Zur Multiplikation von Wirkungsgraden

Bemerkung:

Die Rechnung ist am einfachsten, wenn Sie die Wirkungsgrade in Dezimalzahlen angeben. Wenn Sie mit Prozentzahlen rechnen, müssen Sie beachten, daß auch die Nenner (100) miteinander multipliziert werden müssen $\left(1\% = \frac{1}{100}\right)$.

Im Beispiel: $\eta_{ges} \quad 42\% \cdot 70\% = \frac{42}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{2940}{10\,000} = 29{,}4\%$

Lehrbeispiel 44

Ein Lagerplatz für Baumaterialien liegt 4 m höher als die Straße. Wieviel Kubikmeter Sand ($\varrho = 1{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$) können mit einem Förderband, das von einem 2-kW-Motor angetrieben wird, in einer Stunde von der Straße auf den Lagerplatz befördert werden? (Verluste sollen unberücksichtigt bleiben.)

Lösung:

Gegeben: $h = 4\ \mathrm{m}$ Gesucht: V

$\varrho = 1{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$

$P = 2\ \mathrm{kW}$

Nach (36) und (38) ist

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m\,g\,h}{t} = \frac{\varrho\,V\,g\,h}{t}$$

Daraus folgt

$$V = \frac{P\,t}{\varrho\,g\,h} = \frac{2\ \mathrm{kW} \cdot 1\ \mathrm{h}}{1{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 4\ \mathrm{m}}$$

$$= \frac{2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{s}}{1{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 4\ \mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{V = 102\ \mathrm{m^3}}}$$

3.2.6. Kraftstoß und Impuls

Sie sollen in diesem Abschnitt zwei neue physikalische Größen kennen lernen, den Kraftstoß und den Impuls. Bei der Anwendung dieser Größen in Gleichungen für einen punktförmigen Körper, für einen *Massenpunkt*, werden sich Vorteile für die Lösung von Aufgaben ergeben. Bei der Anwendung dieser Größen und gleichzeitigem Betrachten *mehrerer Körper* sind wir in der Lage, Probleme zu lösen, die nach bisher bekannten Verfahren nicht lösbar waren (Stoßvorgänge). Auch erfährt das Grundgesetz der Dynamik eine allgemeinere Fassung.

3.2.6.1. Die physikalischen Größen Kraftstoß und Impuls

Wir betrachten zunächst den Fall, daß eine konstante Kraft einen Massenpunkt beschleunigt. Dann gilt das dynamische Grundgesetz (28):

$$F = m\,a$$

Mit (4)

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

folgt

$$F\,t = m\,v - m\,v_0 \tag{40}$$

Das Produkt $F\,t$ nennt man *Kraftstoß*, gelegentlich auch Antrieb. Das Produkt $m\,v$ heißt *Impuls* oder auch Bewegungsgröße. Beide Größen werden in der gleichen Einheit gemessen:

$$[m\,v] = [m]\,[v] = \text{kg m/s}$$
$$[F\,t] = [F]\,[t] = \text{kg m s}^{-2} \cdot \text{s} = \text{kg m/s}$$

Der einem Körper erteilte Kraftstoß ist gleich der Änderung des Impulses dieses Körpers. [Gleichung (40)]

Kraftstoß und Impuls sind jeweils Produkte einer vektoriellen und einer skalaren Größe. Sie sind damit selbst vektorielle Größen. Besondere Symbole sollen für diese Größen nicht eingeführt werden.

Lehrbeispiel 45

Welchen Kraftstoß erhielt ein Geschoß der Masse 5,5 kg, dessen Geschwindigkeit beim Verlassen des Laufes 450 m/s betrug?

Lösung:

Gegeben: $m = 5{,}5$ kg Gesucht: $F\,t$

$v = 450$ m/s

$v_0 = 0$

Nach Gleichung (40) ist

$$F\,t = m\,v = 5{,}5\ \text{kg} \cdot 450\ \text{m/s} = 2475\ \text{kg m/s} = \underline{\underline{2475\ \text{Ns}}}$$

Lehrbeispiel 46

Ein Körper mit 8 kg Masse bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 12 m/s. Welche Kraft ist nötig, um innerhalb von 5 s den Impuls des Körpers zu verdoppeln?

Lösung:

Gegeben: $m = 8\ \mathrm{kg}$ Gesucht: F

$v_0 = 12\ \mathrm{m/s}$

$t = 5\ \mathrm{s}$

$v = 2\,v_0$

Nach Gleichung (40) ist

$$F = \frac{m\,(v - v_0)}{t} = \frac{m\,(2\,v_0 - v_0)}{t} = \frac{m\,v_0}{t}$$

$$F = \frac{8\ \mathrm{kg} \cdot 12\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{5\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{19{,}2\ \mathrm{N}}}$$

Häufig sind aber Kraft und Beschleunigung nicht zeitlich konstant. Dann folgt aus

$$F = m\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$$

die allgemeine Gleichung

$$F\,\mathrm{d}\,t = m\,\mathrm{d}\,v$$

und nach Integration

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,\mathrm{d}\,t = m \int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}\,v = m\,(v_2 - v_1) \qquad (40')$$

Das Integral liefert hier den Kraftstoß für den Fall, daß ein Kraftverlauf etwa wie in Bild 55 vorliegt. Es stellt als Summe der kleinen Teilflächen $F\,\mathrm{d}\,t$ die Gesamtfläche unter der Kurve dar (schraffiert).

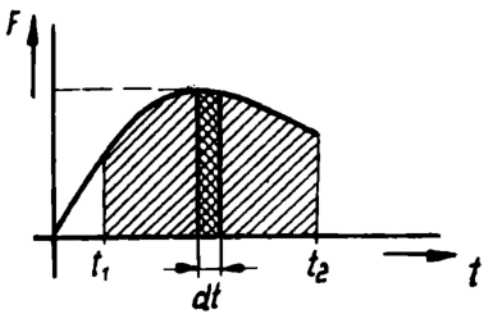


Bild 55
Kraftstoß bei zeitlich veränderlicher Kraft

Falls auch die Masse noch veränderlich ist, wie beispielsweise bei einer Rakete während des Antriebs, dann genügt auch die Glei-

chung (40′) nicht zur Beschreibung des physikalischen Sachverhalts. Da m dann keine Konstante ist, kann es in (40′) nicht vor das Integral gezogen werden. Statt $F = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ gilt dann

$$F = \frac{\mathrm{d}\,(m\,v)}{\mathrm{d}\,t} \qquad (40'')$$

Dies ist die allgemeingültige Form des dynamischen Grundgesetzes: Die Kraft ist gleich dem Differentialquotienten des Impulses nach der Zeit. Für Rechnungen werden wir jedoch diese Form des dynamischen Grundgesetzes nicht verwenden.

3.2.6.2. Ein Kraftstoß wirkt auf zwei Körper

Zwischen zwei vollkommen frei beweglichen Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 befindet sich eine kräftige, zusammengedrückte Feder, die beide Kugeln berührt (Bild 56.1). Irgendeine Vorrichtung, etwa ein Faden, der beide Kugeln miteinander verbindet, sorgt dafür, daß sich die Feder zunächst nicht ausdehnen kann.

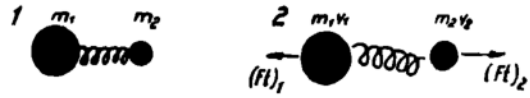


Bild 56. Kraftstoß auf zwei Körper durch eine sich entspannende Feder

Was geschieht, wenn diese Feder plötzlich entspannt wird und auseinanderspringt? Beide Kugeln werden in entgegengesetzter Richtung davonfliegen (Bild 56.2), weil sie sich nach Voraussetzung frei bewegen können und dem Federdruck nachgeben.

Dabei wirkt auf beide Kugeln der gleiche Kraftstoß $F\,t$, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Auf jede Kugel wirkt in jedem Augenblick die gleiche Kraft F ein. Das folgt aus dem 3. Newtonschen Gesetz. Die Feder kann nur in dem Maße gegen die eine Kugel drücken, wie sie an der anderen Kugel Widerstand findet.
2. Die Zeitdauer t der Einwirkung ist für beide Kugeln gleich groß: denn in demselben Augenblick, da die eine Kugel sich von der Feder ablöst, wird auch die andere Kugel frei.

Nach Gleichung (40) müssen dann auch die Impulse für beide Kugeln gleich groß werden, so daß

$$-m_1\,v_1 = m_2\,v_2$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Kugeln in *entgegengesetzter* Richtung auseinanderfliegen. Fassen wir beide Impulse auf einer Seite der Gleichung zusammen, so erhalten wir

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \tag{41}$$

Die Gleichung besagt, daß am Ende des Vorganges die Impulse der beiden Kugeln zusammengenommen gleich null sind. Zu Beginn des Vorganges ruhten beide Kugeln; ihr Impuls war ebenfalls null. Es hat sich demnach während des Vorganges der Impuls des Systems nicht geändert. Diese letzte Aussage gilt auch, wenn das System eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, und wird im Satz von der Erhaltung des Impulses, kurz *Impulssatz* genannt, wie folgt formuliert:

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems bleibt immer konstant.

Der Ausdruck „abgeschlossenes System" soll heißen, daß die Kräfte einzig und allein zwischen den betrachteten Körpern (innere Kräfte) wirken dürfen, in unserem Beispiel zwischen den beiden Körpern *1* und *2*. Sobald von außen her Kräfte dazukommen (z. B. Reibung auf der Unterlage, Stoßwirkungen von außen usw.) kann sich der Impuls ändern.

Anwendungen des Impulssatzes begegnen wir auf Schritt und Tritt. Stehen Sie auf einem Kahn und wollen von da aus ans Land springen, so wird der Kahn unter Ihren Füßen zurückweichen, und Sie müssen aufpassen, daß Sie nicht ins Wasser fallen (Bild 35).

Bereits in Übung 48 befaßten Sie sich mit der Frage der Kräfte F_1 und F_2, deren Betrag gleich groß ist. Damit werden in diesem Beispiel auch die Impulse $m_1 v_1$ und $m_2 v_2$ den gleichen Betrag haben. Bei unterschiedlichen Massen folgen sodann verschiedene Geschwindigkeiten v_1 und v_2.

Wird ein Geschütz abgefeuert, so erfährt es einen Rückstoß. Selbst beim gewöhnlichen Infanteriegewehr ist der Rückstoß so stark, daß er mit dem ganzen Körper aufgefangen werden muß. Alle Luftfahrzeuge bewegen sich infolge des Impulssatzes vorwärts. Ein besonders interessantes Beispiel hierfür ist der Düsenantrieb von Flugzeugen oder die Rakete. Hier wird eine bestimmte Gasmenge m_1 mit sehr großer Geschwindigkeit v_1 ausgestoßen. Die Masse m_2 der Rakete erhält dadurch einen Impuls $m_2 v_2 = - m_1 v_1$ nach vorn.

Häufig begegnet man der irrtümlichen Meinung, daß sich der ausströmende Gasstrahl gegen das hinter der Maschine befindliche Luftpolster „abstützen" müsse. Das ist aber gar nicht der Fall. Im Gegenteil, der Raketenantrieb funktioniert im luftleeren Raum besser als in Luft, weil dann der Luftwiderstand wegfällt.

Lehrbeispiel 47

Ein Mann mit 72 kg Masse springt von einem Kahn, der 90 kg Masse hat, an Land. Die Geschwindigkeit des Mannes, bezogen auf das Ufer, ist 6 m/s.

1. Mit welcher Geschwindigkeit weicht der Kahn zurück?
2. Zu welchem Ergebnis kommen Sie, wenn der Kahn 270 kg Masse hat? (Der Widerstand des Wassers soll hierbei unberücksichtigt bleiben.)

Lösung:

Gegeben: $m_1 = 72$ kg Gesucht: 1. v_2

$m_2 = 90$ kg 2. v_2'

$v_1 = 6$ m/s

$m_2' = 270$ kg

Nach (41) ist

$$1.\ v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1 = -\frac{72\ \text{kg}}{90\ \text{kg}} \cdot 6\ \text{m/s} = \underline{\underline{-4{,}8\ \text{m/s}}}$$

$$2.\ v_2' = -\frac{m_1}{m_2'} v_1 = -\frac{72\ \text{kg}}{270\ \text{kg}} \cdot 6\ \text{m/s} = \underline{\underline{-1{,}6\ \text{m/s}}}$$

Je größer die den Rückstoß aufnehmende Masse eines Körpers ist, desto geringer ist die Geschwindigkeit dieses Körpers.

Lehrbeispiel 48

Zur Messung der Geschwindigkeit v_0 von Geschossen dient das ballistische Pendel. Das ist meist eine Sandkiste, die frei an einem Seil hängt. Man ermittelt nun den Impuls, den das Geschoß auf die Kiste überträgt, wenn es in waagerechter Richtung in die Kiste hineingeschossen wird, und zwar so, daß es in ihr stecken bleibt.

Welche Geschwindigkeit v_0 hat ein Geschoß von der Masse $m_1 = 100$ g, wenn die Sandkiste eine Masse von $m_2 = 80$ kg hat und sich im Augenblick des Einschlages mit der Geschwindigkeit $v_2 = 1{,}12$ m/s bewegt?

Lösung:

Nach dem Impulssatz ist der Impuls des Geschosses während des Fluges gleich dem Impuls von Pendel und Geschoß nach dem Einschlag:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_2$$

$$v_0 = \frac{(m_1 + m_2) v_2}{m_1} = \frac{80\,100\ \text{g} \cdot 1.12\ \text{m/s}}{100\ \text{g}} = \underline{\underline{895\ \text{m/s}}}$$

Lehrbeispiel 49

Von einem Flugzeug, das mit einer Geschwindigkeit von 900 km/h parallel zur Erdoberfläche fliegt, wird eine Rakete von 500 kg in Flugrichtung gestartet. Die Rakete stößt dabei auf einmal eine Treibstoffmenge von 120 kg aus. Der ausströmende Gasstrahl hat eine Geschwindigkeit von 1050 m/s, bezogen auf das Flugzeug. Wie hoch flog das Flugzeug im Moment des Raketenstartes, wenn der zu diesem Zeitpunkt überflogene Erdort 28 km vom Aufschlagpunkt der Rakete auf die Erde entfernt ist und die Erdoberfläche als waagerechte Ebene angenommen wird?

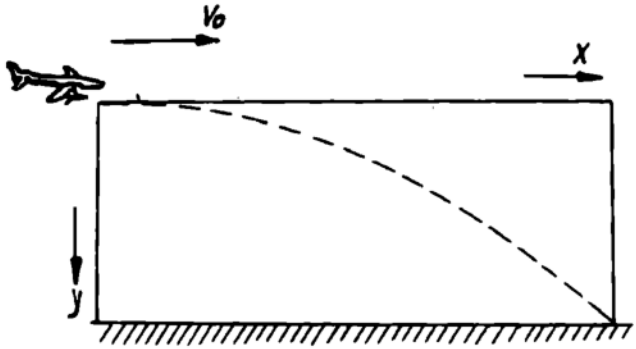


Bild 57. Abschuß einer Rakete von einem Flugzeug

Lösung:

Gegeben: v_F = 900 km/h = 250 m/s Gesucht: y

$m_R + m_T$ = 500 kg (Masse der vollgetankten Rakete)

m_T = 120 kg (Masse des Treibstoffs)

m_R = 380 kg (Masse der leeren Rakete)

v_T = — 1050 m/s

x = 28 km

In [2.3.3.1.] wurde die Bahngleichung für den waagerechten Wurf abgeleitet:

$$y = \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Rakete ergibt sich als Summe

$$v_0 = v_F + v_R$$

v_R folgt aus dem Impulssatz:

$$m_R\,v_R = -\,m_T\,v_T$$

daraus

$$v_R = -\frac{m_T\, v_T}{m_R}$$

Damit wird

$$v_0 = v_F - \frac{m_T\, v_T}{m_R}$$

und

$$y = \frac{g\, x^2}{2\left(v_F - \dfrac{m_T\, v_T}{m_R}\right)^2}$$

$$y = \frac{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 28^2 \cdot 10^6\ \mathrm{m^2}}{2\left(250\ \mathrm{m/s} - \dfrac{120\ \mathrm{kg}\ (-1050\ \mathrm{m/s})}{380\ \mathrm{kg}}\right)^2}$$

$$y = \frac{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 784 \cdot 10^6\ \mathrm{m^2}}{2\,(250 + 332)^2\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}}$$

$$y = \frac{9{,}81 \cdot 784 \cdot 10^3}{2 \cdot 338 \cdot 10^3}\ \mathrm{km} = \underline{\underline{11{,}4\ \mathrm{km}}}$$

3.2.6.3. Stoßvorgänge

Wir wollen nun den Impulssatz anwenden, um einfache Stoßvorgänge übersehen zu lernen. Dabei beschränken wir uns auf den *geraden Stoß* zwischen gleich großen Kugeln. Auf der Verbindungslinie der beiden Kugelschwerpunkte vor und nach dem Stoß liegt auch der Berührungspunkt der Kugeln. Diese Verbindungslinie ist zugleich Wirkungslinie der Kräfte und der Impulse.

Am einfachsten erhalten wir Aufschluß über den *unelastischen Stoß*. Beide Körper bewegen sich dabei nach dem Stoß gemeinsam weiter. Zwei weiche Lehmkugeln könnten als Versuchsobjekte dienen (Bild 58).

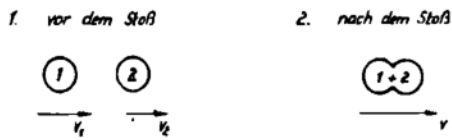


Bild 58. Unelastischer Stoß

Der Impulssatz fordert:

Summe der Impulse vor dem Stoß = Summe der Impulse nach dem Stoß

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

Daraus folgt sogleich die Geschwindigkeit v, mit der sich die vereinigten Körper *1* und *2* nach erfolgtem *unelastischem Stoß* weiterbewegen:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{42}$$

Betrachten wir auch die kinetische Energie vor und nach dem Stoß (W und W') für den besonderen Fall, daß der Körper *2* vor dem Stoß ruht:

$$W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$W' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

Beachten wir (42), so ergibt sich

$$W' = \frac{(m_1 + m_2) m_1^2 v_1^2}{2 (m_1 + m_2)^2}$$

$$W' = \frac{m_1^2}{2 (m_1 + m_2)} v_1^2$$

Für das Verhältnis der beiden Energien folgt in diesem Sonderfall:

$$\frac{W'}{W} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Da $(m_1 + m_2) > m_1$, ist in jedem Falle die kinetische Energie W' nach dem unelastischen Stoß kleiner als die kinetische Energie W vor dem Stoß. Liegt nicht etwa ein Verstoß gegen den Energiesatz vor? Untersuchen wir, welche Energieart wir für die „verlorene" Energie ($W - W'$) erhalten haben! Die beiden Lehmkugeln sind verformt worden. Die aufgebrachte Verformungsarbeit ist dem Energie„verlust" gleich. Durch das Verformen bedingt, erwärmen sich die Körper. Wir erhalten also Wärmeenergie.

Das ist oft unerwünscht, beim Schmieden jedoch gerade beabsichtigt. Je größer hier der Energie„verlust", um so größer auch die äquivalente Verformungsarbeit. Eine Betrachtung der Gleichung sagt uns noch mehr über diesen bekannten Vorgang: Die Verformungsarbeit

$$W - W' = W \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

wird dann groß, wenn $(m_1 + m_2) \gg m_1$. Sie kann dann nahezu gleich der kinetischen Energie vor dem Aufschlagen des Hammers werden. Diese Bedingung erreicht man aber leicht, indem man die Amboßmasse (m_2 einschließlich Werkstück) recht groß macht. Dies ist praktisch immer der Fall.

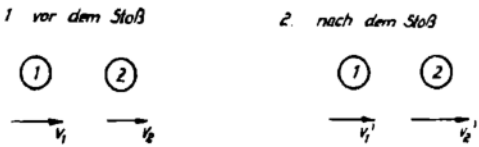


Bild 59. Elastischer Stoß

Betrachten wir nun die Verhältnisse beim *elastischen Stoß* (Bild 59)! Stoßen zwei

Kugeln elastisch gegeneinander, so tritt keine bleibende Verformung der Kugeln ein. Es gelten *Impulssatz* und *Energiesatz:*

Nach dem Impulssatz ist die Summe der Impulse vor dem Stoß gleich der Summe der Impulse nach dem Stoß:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{I}$$

Der Energiesatz fordert Gleichheit der Energiesumme vor dem Stoß und nach dem Stoß (die folgende Gleichung ist bereits mit 2 multipliziert):

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \tag{II}$$

Ordnet man die Gleichungen nach Größen mit gleichem Index, so erhält man

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \tag{I'}$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \tag{II'}$$

Zerlegt man $v_1^2 - v_1'^2$ in $(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')$, verfährt auf der rechten Seite der Gl. (II') entsprechend und dividiert (II') durch (I'), so erhält man

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \tag{III}$$

Aus (I') und (III) können leicht die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem *elastischen Stoß* errechnet werden:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{2\, m_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= v_2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + v_1 \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{43}$$

Die Aussagen dieser Gleichungen wollen wir an einigen Sonderfällen untersuchen:

1. Der Körper *2* befinde sich anfangs in Ruhe ($v_2 = 0$): Dann erhält man für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v_1' = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}; \qquad v_2' = v_1 \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2} \tag{43'}$$

1.1. Weiter sollen die beiden Körper gleiche Masse besitzen ($m_1 = m_2$). Dann folgt (ebenfalls für $v_2 = 0$):

$$v_1' = 0 \qquad v_2' = v_1$$

Die beiden Kugeln tauschen ihre Geschwindigkeiten aus (Billardkugeln!)

1.2. Ein Fahrzeug *1* fährt gegen ein starres Hindernis *2*: $m_2 \gg m_1$; $v_2 = 0$. Dann ergibt sich

$$v_1' \approx -v_1 \qquad v_2' \ll v_1$$

(für $m_2 \to \infty$ folgt $v_2' \to 0$)

2. Beide Körper bewegen sich vor dem Stoß ($v_1 \neq 0$; $v_2 \neq 0$). Es gelten die Gleichungen (43).

2.1. Wieder sollen die beiden Körper gleiche Masse haben: $m_1 = m_2$. Dann ergibt sich:

$$v_1' = v_2 \qquad v_2' = v_1$$

Austausch der Geschwindigkeiten!

2.2. Sie werfen einen Ball *1* einem fahrenden Lkw *2* nach (Gedankenexperiment!). Es gilt $m_2 \gg m_1$. Dann erhalten Sie

$$v_1' \approx -v_1 + 2\,v_2 \qquad v_2' \approx v_2$$

Der schwere Wagen ändert seine Geschwindigkeit nicht. Der Ball kann zurückprallen, wenn seine Geschwindigkeit v_1 größer war als der doppelte Wert der Geschwindigkeit des Lkw. Wenn $v_2 < v_1 < 2\,v_2$ war, dann läuft der Ball dem Lkw langsam nach.

Für $v_1 = 2\,v_2$ ist $v_1' = 0$, der Ball fällt senkrecht herab.

3.2.7. Das Einheitensystem und die gesetzlichen Einheiten

Der Physiker Weber[1] und der Mathematiker Gauß[2] machten 1836 den Vorschlag, die Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse zu Grundeinheiten zu erklären und die Einheiten aller anderen physikalischen Größen von diesen Grundeinheiten abzuleiten. Sie nannten dieses Einheitensystem das *absolute System*. In diesem System ist die Einheit jeder anderen physikalischen Größe der Mechanik aus diesen 3 Grundeinheiten zusammengesetzt. Das hat den Vorteil, daß beim praktischen Rechnen jedes Ergebnis sofort die richtige Einheit erhält. Es entfallen Umrechnungen zwischen den Einheiten.

Dem Einheitensystem, das durch die Verordnung über die physikalisch-technischen Einheiten vom 14. 8. 1958 (GBl. I, S. 647) in der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt wurde, liegen ähnliche Überlegungen zugrunde. Durch die gesetzliche Neuregelung wurde der seit langem bestehende nachteilige Zustand beendet, daß Physik und Technik mit verschiedenen Einheitensystemen arbeiteten. Während aber Gauß und Weber als Grundeinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde (daher CGS-System) wählten, liegen unserem neuen Einheitensystem die Einheiten

Meter, *Sekunde* und *Kilogramm*

---

[1] Wilhelm Eduard Weber (1804 bis 1891), deutscher Physiker

[2] Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855), deutscher Mathematiker

zugrunde. Diese Einheiten wurden bereits in [V 2.1.] definiert. Insgesamt enthält das gesetzliche Einheitensystem 6 Grundeinheiten. Außer den genannten drei sind dies noch

die Einheit der Temperatur (der *Grad Kelvin*),
die Einheit der elektrischen Stromstärke (*das Ampere*),
die Einheit der Lichtstärke (*die Candela*).

Von den zuerst genannten drei Grundeinheiten werden die Einheiten für alle Größen der Mechanik abgeleitet. Eine Anzahl solcher abgeleiteter Einheiten ist Ihnen bereits bekannt, z. B. 1 m/s², 1 N = 1 kg m/s². Man bezeichnet solche Einheiten, die ohne Zuhilfenahme von Zahlfaktoren aus den Grundeinheiten gebildet werden, als *kohärente*[1] Einheiten.

Die Einheiten der Kraft: Die Krafteinheiten Newton

$$\mathbf{1\ N = 1\ kg\ m/s^2}$$

und Kilopond

$$\mathbf{1\ kp = 9{,}80\,665\ kg\ m/s^2}$$

sind Ihnen bereits aus [V 4.1.4.] bekannt.

Sie erkennen, daß das Newton mit den eingeführten Grundeinheiten kohärent, das Kilopond hingegen inkohärent ist; denn die Ableitung des Kilopond aus den Grundeinheiten geschieht nicht direkt, sondern mit Hilfe des Zahlenwertes 9,80665. Da das Newton Ihnen bisher wenig geläufig sein wird, Sie aber eine Vorstellung von dieser Einheit haben müssen, merken Sie sich:

$$1\ N \approx 0{,}1\ kp,$$

also etwa gleich dem Gewicht eines Wägestückes von 100 g.

Als weitere gesetzliche Krafteinheit wäre noch das Dyn (Kurzzeichen: dyn) zu erwähnen. Es gilt:

$$1\ dyn = 10^{-5}\ kg\ m/s^2$$

Ursprünglich war es Krafteinheit im CGS-System (s. o.) und definiert als 1 dyn = 1 g cm/s². Überzeugen Sie sich davon, daß beide Definitionen gleichwertig sind!

Die Einheiten der Arbeit: Sie wissen, daß man die Arbeit definiert als Produkt aus einer Kraft und einem Weg. Wir erhalten die kohärente Einheit der Arbeit, wenn wir die kohärente Krafteinheit (1 N = 1 kg m/s²) mit der Längeneinheit (1 m) multiplizieren, also 1 Newtonmeter (1 Nm = 1 kg m²/s²). Diese Einheit führt den Namen Joule (Kurzzeichen: J).

$$\mathbf{1\ J = 1\ Nm = 1\ kg\ m^2/s^2}$$

---

[1] kohärent (lat.) = zusammenhängend

Verwenden Sie die Krafteinheit Kilopond, so folgt als Arbeitseinheit das Ihnen bekannte Kilopondmeter:

$$\mathbf{1\ kpm = 9{,}80\,665\ Nm = 9{,}80\,665\ J = 9{,}80\,665\ kg\ m^2/s^2}$$

Als weitere Arbeitseinheit existiert noch das Erg (Kurzzeichen erg):

$$1\ \text{erg} = 10^{-7}\ \text{J}$$

Auch diese Einheit stammt aus dem alten CGS-System und war dort definiert als 1 erg = 1 dyn cm = 1 g cm²/s².

Die Einheiten der Leistung: Die Leistung ist definiert als Quotient aus Arbeit und Zeit. Demzufolge erhält man Leistungseinheiten, wenn man zulässige Arbeitseinheiten durch zulässige Zeiteinheiten dividiert. Die kohärente Leistungseinheit ist 1 J/s = 1 Watt (Kurzzeichen: W):

$$\mathbf{1\ W = 1\ J/s = 1\ kg\ m^2/s^3}$$

Beachten Sie besonders, daß das Watt in der Mechanik definiert wird, d. h., daß es sich auf die Grundeinheiten der Mechanik (Meter, Sekunde und Kilogramm) zurückführen läßt!

Eine inkohärente Leistungseinheit ist

$$\mathbf{1\ kpm/s = 9{,}80665\ J/s = 9{,}80665\ W = 9{,}80665\ kg\ m^2/s^3}$$

Die Pferdestärke (1 PS = 75 kpm/s) darf bis auf weiteres noch verwendet werden. Jedoch wird die Pferdestärke in nicht ferner Zeit durch das Kilowatt vollständig verdrängt worden sein.

Die Einheiten der Dichte: Aus der Definition der Dichte $\varrho = m/V$ folgt ihre Einheit:

$$[\varrho] = \mathbf{1\ kg/m^3}$$

Diese Einheit verwendet man vor allem bei Gasen, da sich hier bequeme Zahlenwerte ergeben (z. B. für Luft 1,293 kg/m³). Für feste Körper und Flüssigkeiten werden die Zahlenwerte sehr groß. Zum Beispiel ergibt sich für Wasser 1000 kg/m³. Deshalb benutzt man in diesen Fällen gern die Einheit 1 kg/dm³. Das ist die Dichte des Wassers. Die Wichte ist in der Tafel der gesetzlichen Einheiten nicht enthalten. Sie ist weitgehend entbehrlich, wurde vielfach falsch angewandt und sollte deshalb möglichst nicht verwendet werden.

Die Einheiten des Druckes: Der Druck ist definiert [V 4.4.1.] als Quotient aus Kraft und Fläche. Seine Einheit ist daher

$$[p] = \mathbf{1\ N/m^2}$$

Das ist eine sehr kleine Einheit. Deshalb benutzt man, vor allem auch in der Technik, noch eine größere, nämlich 1 kp/cm². Wir wollen diese Einheit auf das Newton/Quadratmeter zurückführen:

$$1\ \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = \frac{9{,}80\,665\ \text{N}}{10^{-4}\ \text{m}^2} = 98\,066{,}5\ \text{N/m}^2$$

1 kp/cm² führt, wie bekannt, auch den Namen „technische Atmosphäre" (Kurzzeichen: 1 at). Weitere Druckeinheiten werden Sie im Lehrbrief Physik 4 kennenlernen.

Die Tafel der gesetzlichen Einheiten (Tafel 6) und eine Zusammenstellung der Umrechnungsfaktoren für die wichtigsten Einheiten (Tafeln 8, 9, 10) finden Sie im Anhang.

Zusammenfassung

Die Zusammenfassung dieses umfangreichen Kapitels soll untergliedert werden. Betrachtungen über Einheiten werden an dieser Stelle nicht wiederholt. Einheitenfragen wurden in [3.2.7.] behandelt. Die Newtonschen Gesetze und der Zusammenhang Kraft — Bewegung bilden den ersten Schwerpunkt. Daran anschließend soll versucht werden, die verschiedenen Arten von Kräften zu ordnen. Die beiden fundamentalen Erhaltungssätze für Energie und Impuls schließen die Zusammenfassung ab.

1. *Kraft und Bewegung*

Die Newtonschen Gesetze geben die Grundlegung für die klassische Mechanik. Es sind:

1. das *Trägheitsgesetz*,
2. das *dynamische Grundgesetz:* $F = m\,a$,
3. das *Wechselwirkungsgesetz:* Kraft = Gegenkraft.

Eine zusammenfassende Übersicht über die verschiedenen Arten der Bewegung sowie die wirksamen Kräfte und Beschleunigungen gibt Bild 60.

2. *Kräfte*

Kräfte sind gerichtete Größen. Sie werden zweckmäßig als Vektoren dargestellt. Man unterscheidet Kräfte ihrer Herkunft nach, wie Muskelkraft, Motorkraft, elastische Kraft u. a. Für unsere Betrachtungen ist aber die Frage nach der Herkunft der Kräfte von untergeordneter Bedeutung.

Man erkennt Kräfte an ihren Wirkungen. *Statisch* läßt sich eine *Messung von Kräften* durchführen mit einer Federwaage ($F = k\,s$). *Dynamisch* muß man die Bewegungsänderung, d. h. also die Beschleunigung, messen. Dann erhält man die Kraft aus dem Grundgesetz $F = m\,a$.

Stets sind *Kraft* und *Gegenkraft* gleichzeitig vorhanden. Das gilt ebenso für den Zustand der Ruhe wie auch für den Zustand der gleichförmig geradlinigen Bewegung (Antriebskraft — Reibung). Im Zustand der beschleunigten Bewegung ist die Summe aus Reibung und Trägheitskraft Gegenkraft zur Antriebskraft.

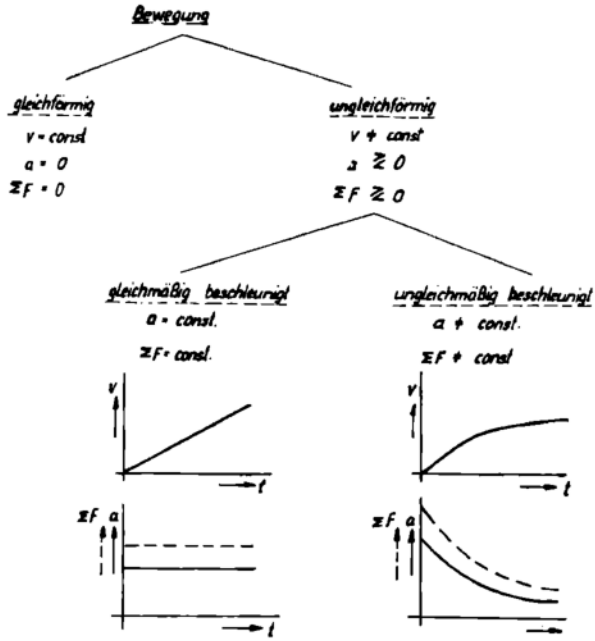


Bild 60. Zusammenfassende Übersicht: Kraft und Bewegung

Man unterscheidet *eingeprägte Kräfte* und *Zwangskräfte*. Beispiele für eingeprägte Kräfte sind das Gewicht eines Körpers und die elastische Gegenkraft der Tischplatte, auf der sich der Körper befindet. Zwangskräfte sind beispielsweise die Führungskräfte der Schienen auf die Straßenbahn in einer Kurve.

Eine besondere Gruppe von Kräften tritt während der Bewegung eines Körpers auf und hemmt die Bewegung. Wir faßten solche Kräfte unter dem Namen *Reibungskräfte* zusammen. Dabei werden formal Haft- oder Gleitreibung in gleicher Weise erfaßt wie die Rollreibung, obgleich die Wirkung dieser beiden Reibungsarten sich stark unterscheidet. Während zwischen zwei festen Körpern die äußere Reibung eintritt, gibt es innerhalb einer Flüssigkeit die innere Reibung.

Einen breiten Raum nahmen in unseren Betrachtungen die *Trägheitskräfte* ein. Sie werden nur vom *mitbewegten Beobachter* wahrgenommen und nach dem Grundgesetz berechnet: $F_T = m\,a$. Darin ist m die Masse des betrachteten Körpers und a der Betrag der Beschleunigung, die das bewegte Bezugssystem erfährt. Die Richtung der Trägheitskraft verläuft der Richtung der Beschleunigung des Bezugssystems entgegen.

Bei der Untersuchung von Systemen der Massenpunkte lernten wir *innere* und *äußere Kräfte* kennen. Innere Kräfte wirken zwischen einzelnen Körpern des abgeschlossenen Systems. Dabei ist auch die jeweilige Gegenkraft innerhalb des Systems zu finden. Äußere Kräfte sind beispielsweise Reibungskräfte oder das Gewicht der Körper.

3. *Energiesatz und Impulssatz*

Unter Energie versteht man das Arbeitsvermögen eines Körpers. Die Energie eines Körpers kann von seiner Lage herrühren, dann bezeichnen wir sie als *potentielle Energie*, oder von seiner Geschwindigkeit, dann nennen wir sie *kinetische Energie*.

Energie ist ein Zustand eines Körpers. Arbeit ist ein ablaufender Vorgang. Die Energie eines Körpers in einem bestimmten Zustand ist gleich dem Arbeitsaufwand, der notwendig war, um den Körper in diesen Zustand zu versetzen.

Jede Energieform ist in eine andere umwandelbar. Bei keinem Vorgang in der Natur kann Energie verlorengehen oder aus dem Nichts erzeugt werden. Energie kann nur von einem Körper auf einen anderen übergehen. Es gilt der *Satz von der Erhaltung der Energie*. Dieser Energiesatz schließt die Existenz eines Perpetuum mobile aus.

Unter *Impuls* versteht man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers. Stets ist die Impulsänderung einem *Kraftstoß* gleich, den der Körper erfährt:

$$\int F \, \mathrm{d}t = m \, (v - v_0)$$

Der *Satz von der Erhaltung des Impulses* besagt, daß sich der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems von Körpern nicht ändern kann. Hierauf beruhen die mannigfachen Wirkungen des sogenannten Rückstoßes.

Übungen

60. Was sagt das Trägheitsgesetz aus?
61. Was sagt das dynamische Grundgesetz aus?
62. Wie sind die Krafteinheiten Newton und Kilopond definiert?
63. Wie bestimmt man Massen und auf welche Art Kräfte?
64. Geben Sie Ihr Körpergewicht in Newton und Kilopond an!
65. Erläutern Sie den Begriff Trägheitskraft!
66. Ein Fahrstuhl wird beim Anfahren mit 2,4 m/s² beschleunigt. Wie groß ist die durch einen Körper von 120 kg Masse auf den Boden des Fahrstuhls hervorgerufene Kraft (das „scheinbare Gewicht")

1. bei Aufwärtsfahrt,
2. bei Abwärtsfahrt?
3. Welche Werte ergeben sich jeweils bei gleichgroßer Verzögerung des Fahrstuhls für die Kraft?
4. Wie groß ist die Kraft, während der Fahrstuhl sich gleichförmig bewegt?
5. Wie groß wäre die Kraft, wenn der Fahrstuhl frei fiele?

67. Ein Lastkraftwagen (1,5 t) fährt mit 36 km/h und wird innerhalb von 3 s durch Bremsen zum Stillstand gebracht.
    1. Wie groß ist die Bremskraft?
    2. Sind die Bremsen in Ordnung, wenn die Bremsverzögerung laut Vorschrift mindestens 3 m/s² betragen muß?
    3. Wie groß ist in diesem Falle die Reibungszahl, wenn man annimmt, daß während des Bremsens die Räder blockiert sind?

68. Der Güterzug (Lehrbeispiel 35) soll eine Steigung 1 : 120 überwinden. Wie groß sind jetzt Antriebskraft und Mindestmasse der Lokomotive? (1 : 120 ist das Verhältnis $h : l$ der schiefen Ebene).

69. Schätzen Sie den Betrag der Trägheitskräfte bei einem Verkehrsunfall ab! Machen Sie dazu folgende vereinfachende Annahmen: Ein Pkw fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h gegen ein starres Hindernis. Der Weg des Schwerpunktes vom Augenblick des Anpralls bis zum Stillstand (Verformung!) stellt hier den kurzen Bremsweg dar. Er wird zu einem Meter geschätzt.
    1. Errechnen Sie die beim Zusammenstoß auftretende Beschleunigung! Das Wievielfache der Fallbeschleunigung auf der Erde ist das?
    2. Stellen Sie die Gleichung für die Trägheitskraft auf, die jeder Körper im Fahrzeug erfährt, und diskutieren Sie diese Gleichung!
    3. Welche Trägheitskraft wirkt auf einen Koffer (Masse 30 kg)?

70. Was verstehen wir in der Physik unter Arbeit?

71. Was ist Energie? Welche Formen der Energie haben Sie bisher kennengelernt?

72. Was ist ein Perpetuum mobile? Erläutern Sie die Unmöglichkeit einer solchen Einrichtung!

73. Welche Höhe erreicht ein mit der Anfangsgeschwindigkeit 800 m/s senkrecht nach oben abgefeuertes Geschoß? Der Luftwiderstand soll nicht berücksichtigt werden.

74. Berechnen Sie die Arbeit beim Spannen einer Feder mit Hilfe der Integralrechnung! (Beachten Sie vor dem Integrieren, daß $F = k\,s$ nicht konstant ist!)

75. Ein Wagen (2 t) rollt auf horizontaler Strecke (Asphalt, $\mu = 0{,}02$) ohne Antrieb 400 m bis zum Stillstand. Wie groß war seine Geschwindigkeit am Anfang des beobachteten Vorgangs?

76. Wie ändert sich das Ergebnis von Aufg. 75, wenn der Wagen bei sonst gleichen Anfangsbedingungen eine zusätzliche Last von 1,5 t trägt?

77. Ein Straßenbahnwagen mit 10 t Masse hat die Geschwindigkeit 17 km/h und soll auf einer Strecke von 15 m gleichmäßig verzögert zum Stehen kommen.
    1. Ermitteln Sie die Verzögerung des Wagens!
    2. Berechnen Sie die erforderliche Bremskraft!

78. Um wieviel vergrößert sich die Bremsstrecke s eines Autos, wenn sich die Bremskraft um 10% verringert?

79. Um einen beladenen Handwagen mit der Geschwindigkeit von 2,5 km/h zu bewegen, muß man mit 9,5 kp an der um 30° gegen die Horizontale geneigten Deichsel ziehen. Welche Leistung (in Watt) ist dazu erforderlich?

80. Ein vollbesetzter Autobus mit Anhänger hat eine Masse von 15 t.
    1. Welche Arbeit (in Kilowattstunden) verrichtet der Motor bei jedem Anfahren bis zum Erreichen der Geschwindigkeit von 30 km/h auf ebener Straße? horizontaler
    2. Welche durchschnittliche und welche Endleistung (in Kilowatt) wäre erforderlich, wenn das Anfahren längs einer Strecke von 100 m gleichmäßig beschleunigt erfolgte?

    (Reibung und Luftwiderstand werden vernachlässigt.)

81. Was versteht man unter Impuls?

82. Wie lange muß die Schubkraft von 25 kp auf ein Schiff von 14 t Masse einwirken, bis es eine Geschwindigkeit von 5 m/s erlangt? (Reibungskräfte werden vernachlässigt.)

83. Auf zwei Körper mit den Massen $m_1 = 200$ kg und $m_2 = 300$ kg wirkt eine konstante Kraft von je 5 kp.
    1. Welche Endgeschwindigkeit erreichen beide Körper nach 1 Minute?
    2. Welche Wege haben die Körper dann zurückgelegt?

84. Ein Geschoß von 5 kg Masse verläßt das 2 m lange Rohr mit einer Geschwindigkeit von 800 m/s. Wie groß ist die Kraft der Pulvergase, wenn man annimmt, daß sie während der gesamten Beschleunigung als konstante Kraft wirken?

85. Was sagt der Impulssatz aus?

86. Ein Fahrzeug der Masse 900 kg hat auf seiner horizontalen Bahn die Geschwindigkeit 120 m/min. Von einem bestimmten Punkt an bewegt sich das Fahrzeug ohne Antriebskraft. Der Bewegung entgegen wirkt eine Windkraft von 250 N. Für die Reibungskraft gilt der Reibungskoeffizient 0,02. Nach wieviel Sekunden kommt das Fahrzeug zum Stillstand?

87. Was geschieht, wenn man bei völliger Windstille vom Boot aus die Segel mit Preßluft anbläst?

88. Sie schlagen mit einem Hammer ($v_1 = 2$ m/s; $m_1 = 5$ kg) gegen eine Stahlkugel ($m_2 = 100$ g; $v_2 = 0$).
Mit welcher Geschwindigkeit fliegt die Stahlkugel davon?

89. Eine Kugel von 200 g Masse stößt mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s gegen eine ruhende zweite Kugel von 50 g Masse. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten beider Kugeln nach dem Stoß!

3.3. Kräfte an rotierenden Körpern

Nach dem Trägheitsgesetz beschreibt jeder Körper, sofern auf ihn keine äußeren Kräfte einwirken, eine geradlinige Bahn. Soll ein Körper von dieser geradlinigen Bahn abweichen, so muß man ihn dazu zwingen: eine *Zwangskraft* muß senkrecht zur Bewegungsrichtung angreifen. Sie kennen dafür eine Vielzahl von Beispielen. Die von den Schienen ausgeübte Zwangskraft führt das Schienenfahrzeug in die Kurve (daher auch der Name Führungskraft), die Bindungskräfte zwingen die einzelnen Teile eines Schwungrades, die Rotation auszuführen. Ein Stein, an einem Faden herumgeschleudert, ist ein ganz einfaches Beispiel. Der Faden überträgt hier die Zwangskraft. Ist die Bahn des Körpers ein Kreis, dann verläuft die Wirkungslinie der Zwangskraft in Richtung des Radius. Die zum Kreismittelpunkt gerichtete Zwangskraft heißt deshalb auch *Radialkraft*. Ihnen ist diese Kraft unter dem Namen *Zentripetalkraft* bekannt. Für die Rotation gilt selbstverständlich das 2. Newtonsche Gesetz. Das bedeutet aber, daß auch die Radialkraft proportional der Radialbeschleunigung ist. Wiederholen Sie [2.3.4.] und [2.3.5.]! Die Ergebnisse dieses Abschnittes gestatten uns, sogleich den Betrag der Radialkraft anzugeben. Mit

$$F = m\,a \tag{28}$$

folgt für die Radialkraft

$$F_r = m\,a_r$$

Mit den Gleichungen (18) und (11) erhalten wir die *Radialkraft*:

$$F_r = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2\,r \tag{44}$$

Beschreibt der Körper nur einen Teil einer Kreisbahn, so gilt diese Beziehung ebenfalls (Durchfahren einer Kurve). Eine beliebige krummlinige Bewegung darf man sich aus Teilen von Kreisen mit verschiedenem Radius zusammengesetzt denken. Für jeden solchen Teil gilt dann ebenfalls die Gleichung (44).

3.3.1. Energie des rotierenden Körpers

Rotierende Körper besitzen *kinetische Energie*. Für einen Stein am Faden (Bild 61) läßt sich diese leicht angeben. Sie beträgt

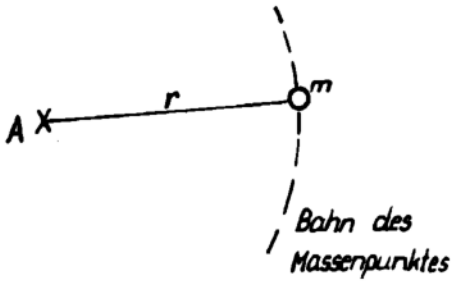


Bild 61
Energie eines rotierenden Massenpunktes

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (37)$$

Darin ist v die Umfangsgeschwindigkeit. Es gelten die Gleichungen

$$v = r \omega \qquad (11)$$

und

$$\omega = 2 \pi n \qquad (12)$$

Mit Hilfe von (11) erhalten wir für die Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \qquad (45)$$

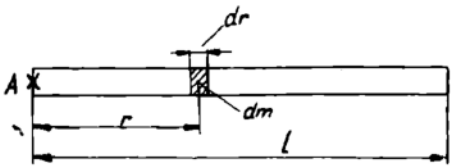


Bild 62
Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines Stabes

Nun lassen wir einen Stab mit gleichmäßiger Massenverteilung um einen festen Punkt A rotieren (Bild 62). Ein kleiner Abschnitt aus diesem Stab besitzt die Masse $\mathrm{d}m$. Dieser kleine Körper enthält während der Rotation die aus Gleichung (45) folgende Energie. Die Gleichung erlaubt, auch für andere Abschnitte des Stabes die Energie zu berechnen. Es gilt also

$$\mathrm{d}W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mathrm{d}m\, r^2 \omega^2$$

Darin ist die Winkelgeschwindigkeit ω für alle Teile des Stabes gleich. Die Größen r und $\mathrm{d}m$ gehören jeweils zu einem Abschnitt. Summieren Sie nun die Energieanteile der einzelnen Abschnitte, so erhalten Sie die gesamte kinetische Energie des Stabes, auch *Rotationsenergie* genannt:

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 \,\mathrm{d}m \qquad (46')$$

Das Integral ist nur abhängig von den Eigenschaften des Körpers sowie von der Lage der Drehachse im Körper. Wir führen dafür eine neue Größe ein: das Massenträgheitsmoment

$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m \tag{47}$$

Damit erhalten wir für die *Energie eines rotierenden Körpers*

$$W_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{46}$$

Als Einheit muß sich selbstverständlich das Joule ergeben. Prüfen Sie das mit Hilfe von Gleichung (46′) selbst nach!

Bei Einheitenbetrachtungen bleiben das Integralzeichen sowie das Zeichen d unberücksichtigt.

Vergleicht man Gl. (46) mit Gl. (37) für die geradlinige Bewegung, so fällt auf, daß formale Ähnlichkeit besteht. Sie erhalten (46) aus (37), wenn Sie für die Masse m das Massenträgheitsmoment J und für die Geschwindigkeit v die Winkelgeschwindigkeit ω einsetzen. Solche Analogiebetrachtungen stellten Sie bereits in [2.2.6.] an. Wir werden uns noch ausführlich damit zu beschäftigen haben [3.3.5.].

3.3.2. Massenträgheitsmoment

Den neuen Begriff des Massenträgheitsmomentes müssen wir noch etwas eingehender untersuchen. Gelegentlich verwandte man früher für diese Größe auch die Bezeichnung Drehmasse und wollte damit zum Ausdruck bringen, daß bei der Drehbewegung nicht einfach die Masse m verwendet werden darf. Das Massenträgheitsmoment berücksichtigt auch gleichzeitig die Massenverteilung um die Drehachse.

Daraus folgt, daß das Massenträgheitsmoment verschieden geformter Körper bei gleicher Masse m jedesmal gesondert berechnet werden muß.

Für die Rotation eines Massenpunktes gilt einfach

$$J = m r^2$$

Vergleichen Sie dazu Bild 61 und Gleichung (45)!

Betrachten Sie nun einen Kreisring, der aus lauter Massenelementen $\mathrm{d}m$ besteht (Bild 63). Die Rotation erfolgt um die zur Zeichenebene senkrechte Achse A. Alle Massenelemente $\mathrm{d}m$ haben von der Achse A die Entfernung r. Deshalb kann man in Gleichung (47) r^2 als Konstante vor das Integral ziehen:

$$J = r^2 \int \mathrm{d}m$$

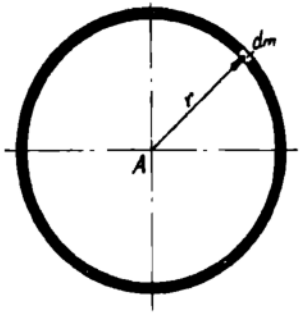


Bild 63. Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines Kreisringes

Das Integral über alle Massenelemente des Körpers ist aber gleich der Gesamtmasse, so daß sich für das Massenträgheitsmoment des dünnen Kreisringes ergibt:

$$J = m\,r^2$$

Allgemein läßt sich feststellen:

> *Das Massenträgheitsmoment eines beliebigen Körpers, der um eine Achse rotiert, ist gleich der Summe der Massenträgheitsmomente seiner einzelnen Teile, bezogen auf diese Achse.*

Machen Sie sich den Inhalt dieses Satzes am eben besprochenen Beispiel des dünnen Kreisringes klar! Außerdem werden wir im Lehrbeispiel 50 diesen Satz anwenden.

3.3.2.1. Berechnung von Massenträgheitsmomenten

Zur Berechnung von Massenträgheitsmomenten ist die Integralrechnung erforderlich. Ohne Integralrechnung lassen sich Massenträgheitsmomente im allgemeinen nur näherungsweise und in recht zeitraubenden Verfahren berechnen.

Einige Lehrbeispiele sollen Ihnen den Vorteil der Integralrechnung zeigen.

Lehrbeispiel 50

Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment eines Stabes ($l = 1$ m, $m = 6$ kg; Bild 62) um eine Achse durch A

1. näherungsweise, indem Sie den Stab in 10 gleichlange Abschnitte zerlegen,
2. mit Hilfe der Integralrechnung!

Lösung:

1. Sie zerlegen zunächst den Stab in 10 gleichlange Abschnitte mit der Masse $m' = m/10 = 0{,}6$ kg. Aus Bild 64 entnehmen

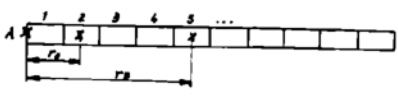


Bild 64
Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines Stabes (näherungsweise)

Sie die Abstände der einzelnen Abschnitte *1 · · · 10* und nennen diese $r_1 \cdots r_{10}$. Nach dem Merksatz im vorangehenden Abschnitt gilt dann:

$$J = m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + \cdots + m_{10}\,r_{10}^2$$

Mit $m_1 = m_2 = \cdots = m_{10} = m'$ und

$$r_1 = 5 \text{ cm}, \; r_2 = 15 \text{ cm}, \; \cdots r_{10} = 95 \text{ cm}$$

erhalten Sie dann nach längerer Rechnung näherungsweise

$$\underline{\underline{J \approx 1{,}995 \text{ kg m}^2}}$$

Hätten Sie noch weiter unterteilt, z. B. in 20 gleichlange Abschnitte, so hätten Sie nach noch längerer Rechnung einen besseren Näherungswert erhalten.

2. Nach Bild 62 ist $\mathrm{d}m = \varrho \, \mathrm{d}V = \varrho \, A \, \mathrm{d}r$ (ϱ = Dichte, A = Querschnittsfläche).

Dann folgt

$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \varrho \, A \int_0^l r^2 \, \mathrm{d}r = \varrho \, A \cdot \frac{l^3}{3}$$

Wegen $A \, l = V$ und $\varrho \, A \, l = m$ folgt

$$\underline{\underline{J = \frac{1}{3} \, m \, l^2}}$$

$$J = \frac{1}{3} \cdot 6 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}^2 = \underline{\underline{2 \text{ kg m}^2}}$$

Das 2. Ergebnis ist nicht etwa abgerundet. Es stellt den exakten Wert des Massenträgheitsmomentes J dar. Der Fehler beim Näherungsverfahren beträgt (bei 10 Teilmassen) $5/2000 = 0.0025 = 0.25\%$.

Mit dem durch Integration gewonnenen Ergebnis

$$J = \frac{1}{3} \, m \, l^2$$

können Sie nun für jeden anderen, in gleicher Weise rotierenden Stab durch Einsetzen von Masse m und Länge l schnell und exakt das Massenträgheitsmoment errechnen. Das erste Verfahren erfordert Wiederholung der langwierigen Rechenarbeit mit anderen Zahlenwerten.

Lehrbeispiel 51

Der gleiche Stab (Lehrbeispiel 50) rotiere um eine Achse, die durch den Massenmittelpunkt des Stabes geht. Wie groß ist jetzt das Massenträgheitsmoment J_S?

Lösung:

Es gelten die gleichen Überlegungen wie zum Lehrbeispiel 50.2. Die Grenzen beim Integrieren sind aber wegen der neuen Lage der Drehachse $-l/2$ und $+l/2$. Damit folgt

$$J = \varrho A \int_{-l/2}^{+l/2} r^2 \, \mathrm{d}r = \varrho A \left(\frac{l^3}{2^3 \cdot 3} + \frac{l^3}{2^3 \cdot 3} \right) = \frac{1}{12} \varrho A l^3$$

$$\underline{\underline{J = \frac{1}{12} m l^2}}$$

$$J = \frac{6\,\mathrm{kg}}{12} \cdot 1\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{0{,}5\,\mathrm{kg\,m}^2}}$$

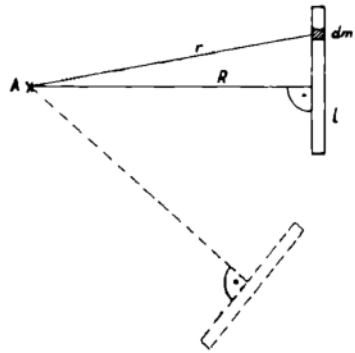


Bild 65. Massenträgheitsmoment eines Stabes

Lehrbeispiel 52

Wiederum der gleiche Stab rotiere wie in Bild 65 angegeben. Es sei $l \ll R$. Geben Sie das Massenträgheitsmoment an ($R = 25$ m)!

Lösung:

Die besondere Bedingung $l \ll R$ beachten wir zuerst. Daraus folgt, daß der Radius $r \approx R$ für jeden Abschnitt mit der Masse $\mathrm{d}m$ gleich lang ist. Wir können daher den Stab als einen Teil des Ringes [3.3.2.] betrachten und erhalten sogleich

$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m = r^2 \int \mathrm{d}m = m r^2$$

Mit $r = R = 25$ m folgt

$$J = 6\,\mathrm{kg} \cdot 625\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{3750\,\mathrm{kg\,m}^2}}$$

Lassen Sie sich in einem solchen Falle nicht verleiten, die Bedingung $l \ll R$ zu übersehen. Die dann folgende Rechnung ist sehr viel zeitraubender (Übung 104).

Massenträgheitsmomente entnehmen Sie meist aus Tabellen. Einige Beispiele gibt Bild 66.

3.3.2.2. Satz von Steiner

Im folgenden wollen wir untersuchen, welchen Einfluß die Änderung der Drehachse auf das Massenträgheitsmoment eines Körpers hat. Zwischen dem Massenträgheitsmoment J_S eines Körpers mit der Masse m in bezug auf die Schwerpunktachse S und dem Massenträgheits-

Körper		Rotationsachse	Trägheitsmoment J
dünner Hohlzylinder		Zylinderachse	mr^2
Vollzylinder		Zylinderachse	$\frac{1}{2} mr^2$
dicker Hohlzylinder		Zylinderachse	$\frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2)$
Kugel		durch Mittelpunkt	$\frac{2}{5} mr^2$
Stab von der Länge l		durch den Schwerpunkt, senkrecht zum Stab	$\frac{1}{12} ml^2$

Bild 66. Massenträgheitsmomente

moment J_A in bezug auf eine zur Achse S parallele Achse A, die von der Achse S den Abstand a hat (Bild 67), besteht der Zusammenhang

$$J_A = J_S + m\,a^2 \tag{48}$$

Dieser Zusammenhang ist der Steinersche[1] Satz.

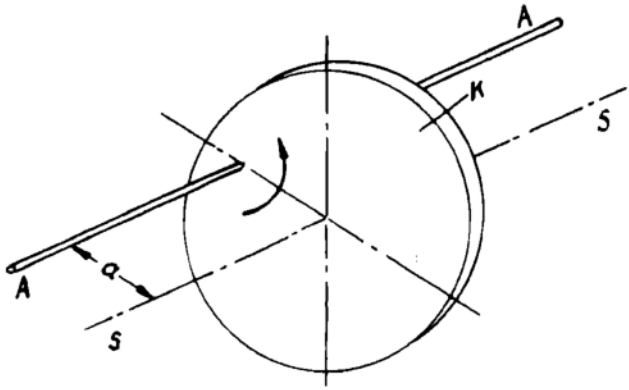


Bild 67. Zum Satz von Steiner

[1] F. Steiner (1849 bis 1901), Bauingenieur

In Worten lautet er:

> Das Massenträgheitsmoment eines Körpers bezüglich einer beliebigen Drehachse ist gleich der Summe aus dem Massenträgheitsmoment, das sich auf die zu ihr parallele, durch den Schwerpunkt laufende Achse bezieht, und dem Produkt aus der Masse und dem Quadrat des Abstandes der Drehachse vom Schwerpunkt.

Der Satz von Steiner soll hier nicht allgemein bewiesen werden. In einem Fall jedoch können wir seine Gültigkeit schnell nachprüfen. Die Ergebnisse der Lehrbeispiele 50.2 und 51

$$J_A = \frac{1}{3} m\, l^2 \quad \text{und} \quad J_S = \frac{1}{12} m\, l^2$$

wollen wir verwenden. Nach Steiner gilt

$$J_A = J_S + m\, a^2$$

und mit $a = l/2$

$$J_A = \frac{1}{12} m\, l^2 + m \frac{l^2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{3} m\, l^2}}$$

Was Sie aus diesem Abschnitt unbedingt erkannt haben müssen, ist die Tatsache, daß das Massenträgheitsmoment eines Körpers ganz davon abhängt, wo sich seine Drehachse befindet. Läuft die Achse durch den Schwerpunkt, so hat der Körper sein kleinstes Massenträgheitsmoment.

Lehrbeispiel 53

Eine Kugel rollt in der Zeichenebene von links nach rechts (Bild 68). Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment dieser Kugel bezüglich einer durch den Punkt A senkrecht zur Zeichenebene gelegten Drehachse. Die Kugel besteht aus Stahl (ϱ = 7,8 g/cm³), ihr Radius ist 1 cm.

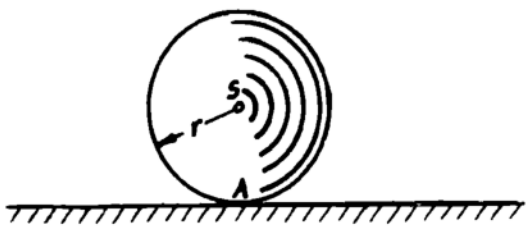


Bild 68. Zum Massenträgheitsmoment einer rollenden Kugel

Lösung:

Wie Sie in Bild 68 erkennen, fällt die Rotationsachse nicht mit der Schwerpunktachse zusammen. Es gilt Gleichung (48) mit $a = r$. Nach Bild 66 gilt für das Massenträgheitsmoment einer Kugel bezüglich der Schwerpunktachse

$$J_S = \frac{2}{5} m r^2.$$

Nach (48) ergibt sich

$$J_A = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2 = \frac{7}{5} m r^2.$$

Mit $m = \varrho V$ und $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ erhält man

$$J_A = \frac{7}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho r^2 = \underline{\underline{\frac{28}{15} \pi \varrho r^5}}$$

$$J_A = \frac{28 \pi \cdot 7{,}8 \text{ g cm}^{-3} \cdot 1 \text{ cm}^5}{15} = \underline{\underline{45{,}7 \text{ g cm}^2}}$$

Lehrbeispiel 54

Welche kinetische Energie enthält ein Schwungradkranz von 1000 kg Masse bei einer Drehzahl von 180/min? Der Radkranz ist als Kreisring mit einem mittleren Radius von 1,10 m aufzufassen. Speichen und Nabe tragen nicht wesentlich zum Massenträgheitsmoment bei und werden vernachlässigt.

Lösung:

Gegeben: $m = 1000$ kg Gesucht: W_{rot}

$n = 180/\text{min} = 3/\text{s}$

$r = 1{,}1$ m

Für die Rotationsenergie gilt Gleichung (46):

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Das Massenträgheitsmoment eines Kreisringes ist nach Bild 66

$$J = m r^2$$

Mit Gleichung (12) ergibt sich

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m r^2 \cdot (2 \pi n)^2 = 2 \pi^2 n^2 m r^2$$

$$= 2 \pi^2 \cdot 9 \text{ s}^{-2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 1{,}21 \text{ m}^2$$

$$= 2{,}15 \cdot 10^5 \text{ Ws}$$

$$\underline{\underline{W_{\text{rot}} = 0{,}06 \text{ kWh}}}$$

Lehrbeispiel 55

Wie groß ist die Rotationsenergie, wenn der im Lehrbeispiel 54 angegebene Radius jetzt nur 0,55 m beträgt?

Lösung:

Der Radius geht in das Massenträgheitsmoment im Quadrat ein. Wenn jetzt der Radius nur halb so groß ist, dann verringert sich J auf ein Viertel seines früheren Wertes. Da alle anderen Größen erhalten bleiben, sinkt auch die Rotationsenergie auf ein Viertel ihres früheren Betrages:

$$\underline{\underline{W_{rot} = 0{,}015\ \text{kWh}}}$$

Von der kinetischen Energie rotierender Körper macht man bei den Schwungrädern der Maschinen Gebrauch, um einen gleichmäßigen Gang auch bei ungleicher Belastung zu erzielen. Ist beispielsweise eine Dampfmaschine mit einem Schwungrad von großem Massenträgheitsmoment verbunden, so muß von der Dampfmaschine erst Arbeit verrichtet werden, um das Schwungrad in Umdrehung zu versetzen. Die im rotierenden Schwungrad aufgespeicherte Rotationsenergie bewirkt, daß beim plötzlichen Einschalten einer Arbeitsmaschine kein Stillstand der Dampfmaschine eintritt; denn ein Teil der im Schwungrad gespeicherten Energie steht zur Verfügung, um die geforderte Arbeit zu verrichten.

Lehrbeispiel 56

Eine Kugel von 5 cm Radius rollt, ohne zu gleiten, auf einer geneigten Ebene mit 20 cm Höhenunterschied hinunter. Welche Geschwindigkeit erreicht sie am Ende der geneigten Ebene, wenn die Bewegung aus der Ruhe heraus erfolgt?

Lösung:

Gegeben: $r = 5$ cm Gesucht:
$h = 20$ cm

Nach dem Energiesatz gilt:

Potentielle Energie oben = Kinetische Energie unten

$$W_{pot} = W_{trans} + W_{rot}$$

(Die kinetische Energie der Translation wird hier besonders gekennzeichnet.)

Mit den Gleichungen (36), (37) und (46) folgt

$$m\,g\,h = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{J\,\omega^2}{2}$$

Das Massenträgheitsmoment der Kugel wird Bild 66 entnommen:

$$J = \frac{2}{5}\,m\,r^2$$

Damit und unter Beachtung der Gleichung (11) folgt

$$m\,g\,h = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\,m\,r^2\cdot\frac{r^2}{r^2}$$

$$m\,g\,h = \frac{m\,r^2}{2} + \frac{m\,v^2}{5}$$

$$g\,h = \frac{7}{10}\,r^2$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{10\,g\,h}{7}}}}$$

$$r = \sqrt{\frac{10\cdot 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 0.2\ \mathrm{m}}{7}} = \underline{\underline{1.67\ \mathrm{m/s}}}$$

Die Geschwindigkeit ist geringer, als sie bei reibungsfreiem Gleiten der Kugel wäre ($v = \sqrt{2\,g\,h}$). Ein Teil der Energie steckt als Rotationsenergie in der sich um ihre Schwerpunktachse drehenden Kugel. Die Translationsenergie ist damit kleiner als sie es wäre, wenn keine Rotation stattfände.

Lehrbeispiel 57

Ein Radfahrer mit insgesamt 95 kg Masse rollt aus dem Stand und ohne zu treten eine 120 m lange steile Straße hinunter. Der Höhenunterschied beträgt 15 m. Wie weit rollt er auf der anschließenden horizontalen Strecke? Die Reibungszahl sei 0.03.

Lösung:

Gegeben: $m = 95$ kg Gesucht: s

$l = 120$ m

$h = 15$ m

$\mu = 0.03$

Die zu Beginn vorhandene potentielle Energie W_{pot} wird restlos in Reibungsarbeit umgewandelt, und zwar zu einem Teil W_{RB} längs der Bergstrecke und zu einem anderen Teil W_{RH} längs der anschließenden Horizontalstrecke:

$$W_{pot} = W_{RB} + W_{RH}$$

Dabei ist

$$W_{pot} = m\,g\,h$$

$$W_{RH} = F_{RH}\,s = \mu\,G\,s = \mu\,m\,g\,s$$

$$W_{RB} = F_{RB}\,l = \mu\,F_N\,l = \mu\,G\,l\cos\alpha = \mu\,m\,g\,\sqrt{l^2 - h^2}$$

(Für die Reibungsarbeit auf der schiefen Ebene ist zu beachten, daß die Normalkraft $F_N = G\cos\alpha$ und $\cos\alpha = \sqrt{l^2 - h^2}/l$ ist.)

Damit wird

$$m\,g\,h = \mu\,m\,g\,\sqrt{l^2 - h^2} + \mu\,m\,g\,s$$

$$\frac{h}{\mu} = \sqrt{l^2 - h^2} + s$$

$$\underline{\underline{s = \frac{h}{\mu} - \sqrt{l^2 - h^2}}}$$

$$s = \frac{15\ \mathrm{m}}{0{,}03} - \sqrt{(120^2 - 15^2)\ \mathrm{m}^2} = \underline{\underline{381\ \mathrm{m}}}$$

3.3.3. Dynamisches Grundgesetz für den rotierenden Körper

Wir untersuchen zunächst einen Massenpunkt, der im Abstand r um eine Achse A rotiert (Bild 69.1). Er sei an einer masselosen Stange befestigt. Für ihn gilt das 2. Newtonsche Gesetz nicht nur für die Radialkraft (vgl. [3.3.]), sondern auch für die Tangentialkraft, die den Körper beschleunigt:

$$F_t = m\,a_t$$

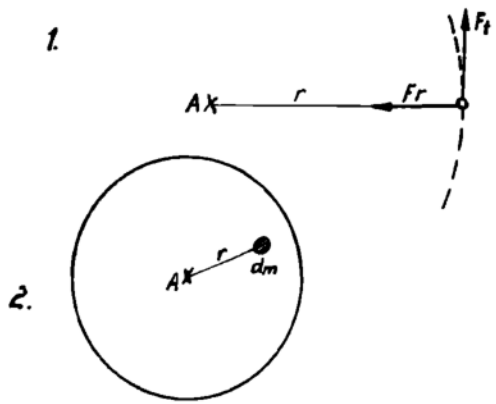


Bild 69. Zur Herleitung des dynamischen Grundgesetzes für einen rotierenden Körper

Die Beschleunigung a_t verändert den Betrag der Geschwindigkeit des Körpers auf der Kreisbahn, während die Beschleunigung a_r die Richtung der Geschwindigkeit ändert. Beide Beschleunigungen sind die Komponenten der insgesamt wirkenden Beschleunigung. In diesem Abschnitt interessieren wir uns jedoch nur für die Tangentialkomponente.

Multiplizieren Sie die oben angegebene Gleichung beiderseits mit dem Radius r, so folgt

$$F_t\, r = m\, a_t\, r$$

Darin ist die linke Seite das Drehmoment $M = F_t\, r$, das durch die Tangentialkraft hervorgerufen wird. Ersetzen wir auf der rechten Seite der Gleichung a_t nach (14) durch $r\,\alpha$, so lautet die Gleichung

$$M = m\, r^2\, \alpha$$

Darin ist $m\, r^2$ das uns schon gut bekannte Massenträgheitsmoment J. Somit erhalten wir

$$M = J\, \alpha$$

Das so umgeformte Grundgesetz gilt für beliebig geformte rotierende starre Körper (Bild 69.2). Das soll hier nicht bewiesen werden. Wir kontrollieren aber, ob eine Analogiebetrachtung dies bestätigt. Wir ersetzen in der Gleichung

$$F = m\, a, \tag{28}$$

die für die Translation gültig ist, die Masse m durch das Massenträgheitsmoment J, die Beschleunigung a durch die Winkelbeschleunigung α. An die Stelle der Kraft F tritt das am starren Körper angreifende Drehmoment M. So erhalten wir das **dynamische Grundgesetz für die Rotation**:

$$M = J\, \alpha \tag{49}$$

Lehrbeispiel 58

Welches Drehmoment ist erforderlich, um den Rotor eines Generators mit dem Massenträgheitsmoment 200 kg m² aus der Ruhe auf eine Drehzahl von 500/min innerhalb von 2 Sekunden zu beschleunigen?

Lösung:

Gegeben: $J = 200\ \text{kg m}^2$, $n = 500/\text{min}$, $n_0 = 0$, $t = 2\ \text{s}$ Gesucht: M

Nach (49) ist

$$M = J\, \alpha$$

Mit

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi n$$

folgt

$$M = \frac{2\pi n J}{t} = \frac{2\pi \cdot 500\ \text{min}^{-1} \cdot 200\ \text{kg m}^2}{2\ \text{s}}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 10^5\ \text{kg m}^2}{2 \cdot 60\ \text{s}^2}$$

$$\underline{\underline{M = 5231\ \text{Nm} = 533\ \text{kpm}}}$$

Lehrbeispiel 59

Wie groß wird das Drehmoment in Lehrbeispiel 58, wenn die Masse des Rotors nicht, wie dort vorausgesetzt, in einem Zylinder gleichmäßig verteilt angenommen, sondern in der Mantelfläche vereinigt gedacht wird?

Lösung:

Im Lehrbeispiel 58 ist das Trägheitsmoment eines Vollzylinders (nach Bild 66: $J = m\,r^2/2$) zugrundegelegt. Ist dagegen die gesamte Masse im Abstand r (Mantelfläche des Zylinders) angeordnet, dann gilt $J = m\,r^2$. Das Massenträgheitsmoment wächst also auf das Doppelte und damit auch das Drehmoment $M = J\chi$:

$$\underline{\underline{M = 10462 \text{ Nm} = 1066 \text{ kpm}}}$$

3.3.4. Drehimpuls

Sie haben in den letzten Abschnitten gelernt, daß physikalische Gesetze, die für die geradlinige Bewegung gelten, in entsprechender Weise auch für die Drehbewegung angewendet werden können. Durch Analogie haben wir die speziellen Gesetzmäßigkeiten der Drehbewegung gefunden und erläutert.

Als Ursache einer Drehbewegung hatten wir das Drehmoment M erkannt; denn es mußte eine Kraft in einem bestimmten Abstand von der Drehachse angreifen, um der trägen Masse mit dem Massenträgheitsmoment J die Winkelbeschleunigung α zu erteilen, d. h., es ist $M = J\,\alpha$. Dies ist der Inhalt des dynamischen Grundgesetzes für die Drehbewegung. Je länger nun das Drehmoment M auf den rotierenden Körper einwirkt, desto größer muß auch dessen Winkelgeschwindigkeit ω werden. Man nennt das Produkt aus dem Drehmoment M und der Zeitdauer t seines Einwirkens das *Antriebsmoment* $M\,t$. Seine Einheit ist Newtonmeter · Sekunde.

Das Antriebsmoment entspricht völlig dem Kraftstoß (Antrieb) der geradlinigen, beschleunigten Bewegung [3.2.6.1.]. Ganz analog den dortigen Vorgängen können wir das dynamische Grundgesetz der Drehbewegung (49) beiderseits mit t multiplizieren und erhalten

$$M\,t = J\,\chi\,t$$

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung ist analog zu (4)

$$\chi\,t = \omega - \omega_0.$$

Damit wird

$$M\,t = J\,(\omega - \omega_0) \qquad (50)$$

Antriebsmoment = Änderung des Drehimpulses

Wir vergleichen wieder mit dem entsprechenden Gesetz der Translation

$$F\,t = m\,(v - v_0) \tag{40}$$

Wieder können wir Gleichung (50) aus Gleichung (40) erhalten, wenn wir ersetzen:

$$F \rightarrow M$$
$$m \rightarrow J$$
$$v \rightarrow \omega$$

Für die von uns betrachteten Vorgänge der Translation war stets die Masse m eine Konstante. Nur im Falle des Raketenantriebs lernten Sie ein Beispiel mit veränderlicher Masse kennen [3.2.6.1.]. Dann muß man das dynamische Grundgesetz in folgender Form schreiben:

$$F = \frac{\mathrm{d}\,(m\,v)}{\mathrm{d}\,t} \tag{40'}$$

oder

$$F\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,(m\,v) \tag{40''}$$

Häufiger als Beispiele veränderlicher Masse finden wir aber den Fall, daß das Massenträgheitsmoment nicht konstant ist. Dann gilt statt Gleichung (50)

$$M\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,(J\,\omega) \tag{50'}$$

analog zu (40''). Ist das Drehmoment während des Zeitraums $\Delta\,t$ konstant, so gilt

$$M\,\Delta t = \Delta\,(J\,\omega) \tag{50''}$$

Antriebsmoment = Änderung des Drehimpulses

In dieser Gleichung wird sowohl die Änderung der Winkelgeschwindigkeit als auch die Änderung des Massenträgheitsmomentes berücksichtigt. Sie erkennen, daß dabei nur die Änderung beachtet werden muß, die das *Produkt dieser beiden Größen* erfährt.

Die Einheit des Drehimpulses ist gleich der Einheit des Antriebsmomentes:

$$[J\,\omega] = [J]\,[\omega] = \mathrm{kg\ m^2 \cdot s^{-1}} = \mathrm{Nm\ s}$$

Wie bei der Translation folgt auch hier für den Fall, daß von außen keine Drehmomente auf ein System rotierender Körper einwirken (*abgeschlossenes System*), ein Erhaltungssatz.

Für $M = 0$ folgt aus Gleichung (50'')

$$\Delta\,(J\,\omega) = 0.$$

oder, da nach dieser Gleichung das Produkt $J\,\omega$ keine Änderung erfahren soll,

$$J\,\omega = \text{konst.}$$

oder

$$J_1\,\omega_1 = J_2\,\omega_2 \tag{51}$$

Der Drehimpuls eines rotierenden Körpers bleibt konstant, sofern kein äußeres Drehmoment am Körper angreift.

Diesen Satz von der Erhaltung des Drehimpulses (kurz *Drehimpulssatz*) kann man auf ein abgeschlossenes System rotierender Körper erweitern. Es gilt dann

$$\text{Summe aller Drehimpulse} = \text{konst.}$$

$$\sum (J\,\omega) = \text{konst.} \qquad (51')$$

oder in Worten:

Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems rotierender Körper ist zeitlich konstant.

Lehrbeispiel 60

Ein um seine Längsachse drehbarer Vollzylinder von 2000 kg Masse und 40 cm Durchmesser soll nach 5 s eine Drehzahl von 110/min erreichen. Wie groß ist das erforderliche Drehmoment?

Lösung:

Gegeben: $m = 2000$ kg Gesucht: M

$r = 0.2$ m

$t = 5$ s

$n = 110/\text{min} = \frac{11}{6\,\text{s}}$

$n_0 = 0$

Aus (50) folgt

$$M = \frac{J\,\omega}{t}$$

Nach Bild 66 ist das Massenträgheitsmoment

$$J = \frac{m\,r^2}{2}$$

Berücksichtigt man noch (12), so wird

$$M = \frac{m\,r^2 \cdot 2\,\pi\,n}{2 \cdot t} = \frac{\pi\,m\,r^2\,n}{t}$$

Einsetzen der gegebenen Werte:

$$M = \frac{\pi \cdot 2000\,\text{kg} \cdot 0.04\,\text{m}^2 \cdot 11}{5\,\text{s} \cdot 6\,\text{s}}$$

$$\underline{\underline{M = 92.1\,\text{Nm}}}$$

Lehrbeispiel 61

Der Rotor eines Generators läuft mit der Drehzahl 150/min. Sein Massenträgheitsmoment ist 50 kg m².

1. Wie groß ist der Drehimpuls des Rotors?
2. Welches Drehmoment ist notwendig, um die Drehzahl innerhalb von 3 Sekunden zu verdoppeln?

Lösung:

Gegeben: $n_1 = 150/\text{min} = 2{,}5/\text{s}$ Gesucht: 1. $J\,\omega$

$J = 50\ \text{kg m}^2$ 2. M

$\Delta t = 3\ \text{s}$

1. Mit (12) ist

$$J\,\omega_1 = 2\,\pi\,J\,n_1 = 2\,\pi \cdot 50\ \text{kg m}^2 \cdot 2{,}5/\text{s} = \underline{\underline{785\ \text{Nm s}}}$$

2. Nach (50″) ist

$$M = \frac{\Delta\,(J\,\omega)}{\Delta t}$$

Da sich das Trägheitsmoment J nicht ändert, gilt weiter

$$M = J\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 2\,\pi\,J\,\frac{\Delta n}{\Delta t} = 2\,\pi\,J\,\frac{2\,n_1 - n_1}{\Delta t} = 2\,\pi\,J\,\frac{n_1}{\Delta t}$$

Einsetzen der gegebenen Werte:

$$M = \frac{2\,\pi \cdot 50\ \text{kg m}^2 \cdot 2{,}5\ \text{s}^{-1}}{3\ \text{s}} = \underline{\underline{262\ \text{Nm}}}$$

Lehrbeispiel 62

Eine Stange rotiert um eine vertikale Drehachse. Zwei Körper gleicher Masse sind im gleichen Abstand beiderseits der Drehachse befestigt. Wie ändert sich die Winkelgeschwindigkeit, wenn die Körper während der Bewegung durch eine Vorrichtung nach innen gezogen werden, so daß ihr Abstand von der Drehachse nur noch die Hälfte des vorherigen beträgt? Die Masse der Stange bleibt unberücksichtigt.

Lösung:

Gegeben: $r_2 = \frac{1}{2}\,r_1$ Gesucht: $\omega_2 : \omega_1$

Da kein äußeres Drehmoment wirkt, gilt der Drehimpulssatz (51):

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \frac{J_1}{J_2}$$

Das Massenträgheitsmoment eines Massenpunktes im Abstand r von der Drehachse ist

$$J_1 = m\, r_1^2 \qquad \text{bzw.} \qquad J_2 = m\, r_2^2$$

Damit wird

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_1^2}{\frac{1}{4}\, r_1^2} = \underline{\underline{4}}$$

$$\underline{\underline{\omega_2 = 4\, \omega_1}}$$

Den Drehimpulssatz finden Sie recht anschaulich durch folgende zwei Versuche bestätigt:

1. Auf einem Drehschemel sitzt eine Person. Diese hat die Arme angewinkelt und trägt in jeder Hand eine Hantel. Der Drehschemel wird in Umdrehung versetzt und erhält eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω_1. Streckt die Person die Arme mit den Hanteln aus, so wird ihr Massenträgheitsmoment J_2 größer, die Winkelgeschwindigkeit ω_2 entsprechend kleiner. Beugt die Person die Arme wieder, so steigt mit abnehmendem Massenträgheitsmoment die Winkelgeschwindigkeit.
2. Eine Person sitzt auf einem ruhenden Drehschemel. In der einen Hand hält sie das abmontierte Vorderrad eines Fahrrades so, daß die (verlängerte) Achse lotrecht steht. Die Person versetzt mit der anderen Hand das Rad in Umdrehung gegen den Uhrzeigersinn. Dem Rad wird dabei der Drehimpuls $J_1\, \omega_1$ erteilt. Der Drehschemel setzt sich im Uhrzeigersinn in Bewegung. Er bekommt den Drehimpuls $J_2\, \omega_2 = -J_1\, \omega_1$. Da nämlich zu Beginn der Gesamtdrehimpuls des Systems gleich null war, muß auch zu jedem späteren Zeitpunkt der Gesamtdrehimpuls gleich null sein, sofern keine *äußeren* Drehmomente angreifen.

Beobachten Sie einmal einen Bodenturner, wenn er mit gestreckter Körperhaltung eine Drehbewegung einleitet, wie z. B. beim freien Überschlag. Durch plötzliches Anhocken verringert er sein Trägheitsmoment und vergrößert damit seine Winkelgeschwindigkeit. Streckt er sich nach dem Aufsprung wieder aus, so wird diese Drehbewegung abgebremst. Es lohnt sich sehr, wenn man das Geräteturnen (z. B. Umschwünge am Reck) oder sonstige Sportarten (z. B. Eiskunstlauf, Kunstspringen) einmal vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet.

3.3.5. Translation und Rotation — Analogiebetrachtung

Wiederholt haben Sie durch vergleichende Betrachtung nicht nur Ihre Übersicht über die Beziehungen zwischen physikalischen Größen ver-

bessert, sondern auch auf Grund der formalen Ähnlichkeit der Gesetze für Translation und Rotation solche Gesetze für die Rotation gefunden. In diesem Abschnitt soll eine kurze zusammenfassende Darstellung erfolgen.

Translation	Rotation	Beziehung zwischen den Größen
Weg s	Winkel φ	$s = r\varphi$
Geschwindigkeit $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$	$v = r\omega$
Beschleunigung $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$	Winkelbeschleunigung $\varkappa = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$	$a = r\varkappa$
Masse m	Massenträgheitsmoment J	$J = \int r^2\,\mathrm{d}m$
Kraft F	Drehmoment M	$M = F\,l \quad (l \perp F)$
Impuls $m\,v$	Drehimpuls $J\,\omega$	—

Damit ergeben sich folgende Beziehungen für die

Translation	Rotation
Grundgesetz der Dynamik	
$F = m\,a$	$M = J\,\varkappa$
Kinetische Energie	
$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m\,v^2$	$W_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J\,\omega^2$
Arbeit	
$W = \int F\,\mathrm{d}s$	$W = \int M\,\mathrm{d}\varphi$
Leistung	
$P = F\,v$	$P = M\,\omega$

3.3.6. Trägheitskräfte im rotierenden Bezugssystem

Wir befaßten uns bisher noch wenig mit den bei der Drehbewegung wirkenden Kräften. Sie fanden bisher nur einige kurze Bemerkungen darüber im Abschnitt [3.3.]. Gerade aber die Frage der Kräfte muß Ihnen gut vertraut sein.

Wiederholen Sie den Abschnitt über Trägheitskräfte bei der geradlinigen Bewegung [3.2.2.]! Noch mehr als dort müssen Sie in den folgenden Abschnitten die Frage des *Beobachter-Standpunktes* beachten!

3.3.6.1. Zentrifugalkraft

Zunächst wollen wir die Ihnen gut bekannte Fliehkraft näher untersuchen. Ein Beispiel soll Ihnen die Bedeutung des Beobachter-Standpunktes erläutern. Oft hört man einfach sagen: Auf ein Fahrzeug wirken in der Kurve als Kraft und Gegenkraft die beiden Kräfte F_r und F_z (Bild 70.1), die Radialkraft und die Fliehkraft. Wäre es so, dann müßten sich doch diese entgegengesetzt gleichen Kräfte in ihrer Wirkung aufheben, und es wäre *keine* Änderung des Bewegungszustandes zu erwarten. Nach dem Trägheitsgesetz müßte sich der Körper *geradlinig* gleichförmig bewegen wie ein Fahrzeug auf ebener horizontaler Straße (Bild 70.2), das ja auch seine Geschwindigkeit in Größe und Richtung beibehält, wenn als einzige Kräfte Gewicht und Tragkraft der Unterlage wirken (Reibung = 0). Eine solche Aussage widerspricht sicher unserer Erfahrung.

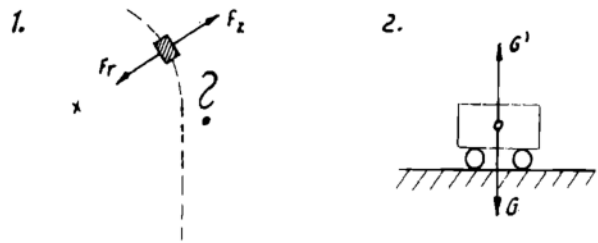


Bild 70. Kraft und Gegenkraft ?

Wir verschaffen uns Klarheit, wenn wir streng die beiden möglichen Beobachter-Standpunkte unterscheiden:

1. Der *außenstehende Beobachter* nimmt nur *eine Kraft* wahr, deren Wirkung er an der Änderung der Richtung der Geschwindigkeit erkennt: die Radialkraft F_r, auch Zentripetalkraft genannt.
2. Für den *mitbewegten Beobachter* dagegen ergibt sich ein anderes Bild. Er nimmt *Radialkraft* F_r und *Fliehkraft* F_z zugleich als Kraft und Gegenkraft wahr. Um das leicht einzusehen, versetzen Sie sich als

Mitbewegter in das Zentrum einer großen Drehscheibe! An einem Seil halten Sie einen Körper. Das Seil überträgt die Radialkraft. Sie müssen diese Radialkraft aufbringen. Eine Federwaage zeigt die Seilbelastung an (Bild 71).

Die Fliehkraft stellt hier die Gegenkraft dar. Der Körper belastet das Seil. Da sich beide Kräfte aufheben, darf der Körper seinen Bewegungszustand nicht verändern. Aber gerade das ist ja hier der Fall: In dem bewegten System (Drehscheibe) bleibt der Körper vor Ihren Augen stets am gleichen Ort liegen. Der mitbewegte Beobachter beschreibt also das Naturgeschehen richtig, wenn er Zentrifugalkraft (Fliehkraft) und Zentripetalkraft als Kraft und Gegenkraft erklärt.

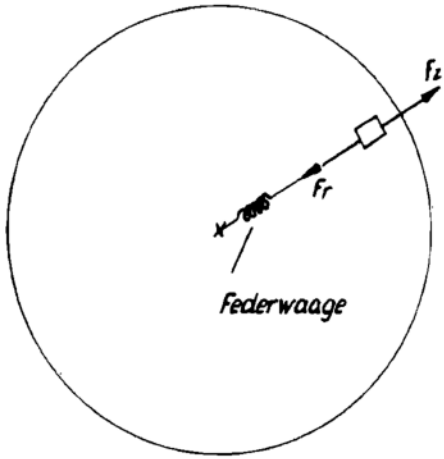


Bild 71. Der mitbewegte Beobachter nimmt Kraft und Gegenkraft wahr

In vielen Fällen sind Sie mitbewegter Beobachter, z. B. als Fahrgast in einem Verkehrsmittel. Als solcher nehmen Sie natürlich die Fliehkraft wahr. Weil wir uns häufig auch als Außenstehender in eine Bewegung hineinversetzt denken, sehen wir meist die Fliehkraft als wirklich vorhanden an. Beachten Sie jedoch, daß Sie dann stets mitbewegter Beobachter sind oder sich als solcher fühlen!

Die Größe der Fliehkraft erhalten Sie leicht, wenn Sie vom Standpunkt des mitbewegten Beobachters urteilen. Als Gegenkraft zur Radialkraft muß die Fliehkraft den gleichen Betrag besitzen wie die Radialkraft:

$$|\mathfrak{F}_z| = |\mathfrak{F}_r|$$

oder

$$F_z = F_r = \frac{m\,v^2}{r} = m\,\omega^2\,r \qquad (44')$$

Für das Lösen von Aufgaben darf man sich *einen* Standpunkt auswählen, muß dann aber die gesamte Aufgabe von diesem Standpunkt aus sehen.

Besondere Beachtung muß man der Zentrifugalkraft bei sehr schnell rotierenden Körpern schenken. Wie Sie aus (44') erkennen, wächst die Zentrifugalkraft mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Das

bedeutet z. B., daß bei zehnfacher Drehzahl die Zentrifugalkraft auf das 100fache anwächst. Bei zu großer Drehzahlsteigerung kann die Zentrifugalkraft so groß werden, daß die molekularen Bindungskräfte des Körpers nicht mehr ausreichen und eine Zerstörung eintritt, indem die Teile des Körpers auseinanderfliegen.

Lehrbeispiel 63

In einer Ultrazentrifuge, die eine Drehzahl von 35000/min besitzt, wird ein Präparat auf einer Kreisbahn von 20 cm Radius herumgeschleudert.

1. Wie groß ist die Radialbeschleunigung?
2. Vergleichen Sie diesen Wert mit der Fallbeschleunigung auf der Erde!
3. Das Präparat besitze die Masse 1 g. Mit welcher Kraft wirkt es während der Drehbewegung auf den Boden des Gefäßes?

Lösung:

Gegeben: $n = 35000/\text{min} = \frac{3500}{6\ \text{s}}$, $r = 0{,}2\ \text{m}$, $m = 1\ \text{g} = 10^{-3}\ \text{kg}$

Gesucht: 1. a_r 2. a_r/g 3. F_z

1. Aus den Gleichungen (11), (12) und (18) folgt

$$a_r = 4\pi^2 n^2 r = \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}5^2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2\ \text{m}}{36\ \text{s}^2}$$

$$\underline{\underline{a_r = 2{,}68 \cdot 10^6\ \text{m/s}^2}}$$

2. $$\frac{a_r}{g} = \frac{2{,}68 \cdot 10^6\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{2{,}73 \cdot 10^5}}$$

3. $$F_z = m\,a_z = m\,a_r = 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 2{,}68 \cdot 10^6\ \text{m/s}^2$$
$$= \underline{\underline{2680\ \text{N} = 273\ \text{kp}}}$$

Die Kraft, mit der das Präparat der Masse 1 g auf den Boden des Gefäßes wirkt, ist außerordentlich groß. Dieses Ergebnis hätte man auch unmittelbar aus dem Resultat von 2. erhalten können.

Aus $F_z = m\,a_r$

und $G = m\,g$

folgt $\frac{F_z}{G} = \frac{a_r}{g}$

$$F_z = G\frac{a_r}{g} = 1\ \text{p} \cdot 2{,}73 \cdot 10^5 = \underline{\underline{273\ \text{kp}}}$$

Lehrbeispiel 64

Ein Schleuderball hat eine Masse von 1,5 kg und legt den Umfang eines Kreises von 1,10 m Radius in 1,5 s zurück. Wie groß ist die Zentrifugalkraft?

Lösung:

Gegeben: $m = 1{,}5$ kg Gesucht: F_z

$r = 1{,}1$ m

$t = 1{,}5$ s

Setzt man $\omega = 2\pi n$ und $n = 1/T$

in $F_z = m\omega^2 r$

ein, so erhält man

$$F_z = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1{,}5\ \text{kg} \cdot 1{,}1\ \text{m}}{1{,}5^2\ \text{s}^2} = \underline{\underline{29\ \text{N} = 3\ \text{kp}}}$$

Vom mitbewegten Beobachter geurteilt, wirken Fliehkraft F_z und eine gleichgroße Gegenkraft, die Radialkraft F_r auf den Ball. Läßt er den Ball los, so wirkt keine der beiden Kräfte; der Ball fliegt tangential zur Kreisbahn davon.

Der Außenstehende würde feststellen: Der Sportler zwingt den Ball, eine Kreisbahn zu beschreiben, indem er eine Radialkraft ausübt. Läßt er den Ball los, so wirkt auf diesen keine Kraft mehr. Ber Ball bewegt sich gleichförmig geradlinig weiter.

Lehrbeispiel 65

Ein Lkw von 1,5 t Masse durchfährt mit der Geschwindigkeit 60 km/h eine nicht überhöhte Kurve von 150 m Krümmungsradius.

1. Wie groß ist die entstehende Zentrifugalkraft?
2. Wie groß muß der Haftreibungskoeffizient mindestens sein, wenn das Fahrzeug nicht ins Schleudern kommen soll? (Kippen soll nicht stattfinden.)

Lösung:

Gegeben: $m = 1500$ kg Gesucht: 1. F_z

$v = \frac{60}{3{,}6}$ m/s 2. μ

$r = 150$ m

$$1.\ F_z = \frac{m v^2}{r} = \frac{1500\ \text{kg} \cdot 60^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{150\ \text{m} \cdot 3{,}6^2} = \underline{\underline{2780\ \text{N} = 284\ \text{kp}}}$$

2. Soll das Fahrzeug nicht ins Schleudern kommen, so darf die Zentrifugalkraft nicht größer werden als die Haftreibung F_R zwischen Rädern und Fahrbahn:

$$F_R \geqq F_Z$$

Mit (31) und (44') erhält man

$$\mu\, m\, g \geqq m \frac{v^2}{r}$$

$$\mu \geqq \frac{v^2}{g\, r} = \frac{60^2\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{3{,}6^2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 150\ \mathrm{m}} = \underline{\underline{0{,}19}}$$

Nur innerhalb beschleunigter oder rotierender Bezugssysteme sind ausschließlich Trägheitskräfte vorhanden, wenn sich beispielsweise eine Rakete beschleunigt bewegt oder wenn eine Weltraumstation rotiert. Mit der Rotation liegt ja ebenfalls eine beschleunigte Bewegung vor: Alle bewegten Teile ändern ständig die Richtung ihrer Geschwindigkeit. Da der Mensch Kräfte wie Gewicht und Trägheitskraft nicht unterscheiden kann (er spürt in jedem Falle nur die Wirkung einer Kraft), läßt sich durch Rotation einer Weltraumstation leicht ein „Gewicht" einstellen. Dieses scheinbare Gewicht ist ganz einfach die Fliehkraft, die auf jeden mitbewegten Körper wirkt (Bild 72). Für den Bewohner der Station ist also „unten" dort, wo die Richtung der Fliehkraft hinweist.

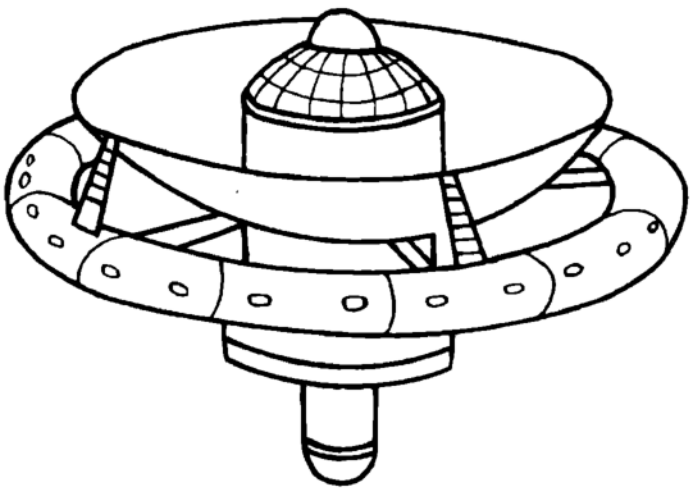


Bild 72. Modell einer Weltraumstation

Lehrbeispiel 66

Mit welcher Drehzahl müßte eine Weltraumstation nach Bild 72 rotieren, damit die Fliehkraft gleich der Schwerkraft an der Erdoberfläche wird? Radius der Station: 200 m

Lösung:

Gegeben: $r = 200$ m Gesucht: n

Aus $F_z = G$ folgt wegen $F_z = m\,a_z$ und $G = m\,g$

$$a_z = g$$

Mit $a_z = \omega^2 r$ und $\omega = 2\pi n$ folgt

$$4\pi^2 n^2 r = g$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{200\ \mathrm{m}}}$$

Das ergibt eine sehr kleine Drehzahl. Mit 1 s = min/60 erhalten Sie

$$\underline{\underline{n = 2{,}1/\mathrm{min}}}$$

Häufig wirken außer der Fliehkraft noch andere Kräfte auf einen Körper. Auf der Erdoberfläche wirkt stets die *Schwerkraft G* unabhängig von der *Fliehkraft* F_z und unabhängig vom Standpunkt des Beobachters.

Ein technisch sehr wichtiges Beispiel ist die bekannte Überhöhung der Außenseite von Fahrbahnkurven. Die Zentrifugalkraft kann bei völlig horizontal liegender Fahrbahnoberfläche leicht dazu führen, daß das Fahrzeug aus der Kurve geschleudert wird (vgl. Lehrbeispiel 65). Falls Sie Kraftfahrer sind, wird Ihnen das wohlbekannt sein. Wenn die Kurve jedoch richtig überhöht ist, liegen die Verhältnisse so, wie es Bild 73 zeigt. Die im Schwerpunkt angreifende Zentrifugalkraft F_z ist horizontal nach außen gerichtet, die Schwerkraft G senkrecht nach unten. Beide Kräfte setzen sich nach dem Kräfteparallelogramm zusammen.

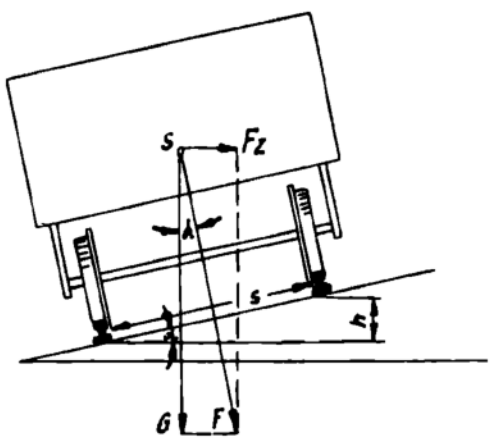


Bild 73
Zusammenwirken von Zentrifugalkraft und Schwerkraft in einer Kurve

Wenn das Fahrzeug in der Kurve ebenso fest stehen soll wie bei der Geradeausfahrt, muß die Resultierende F der beiden Kräfte senkrecht auf der Bahnoberfläche stehen. Dann sind auch die beiden mit α bezeichneten Winkel gleich groß, und es ist

$$\tan \alpha = \frac{F_z}{G} = \frac{m\,v^2}{r\,m\,g} = \frac{v^2}{g\,r}$$

Aus dieser Gleichung können Sie bei gegebener Überhöhung die Kurvengeschwindigkeit berechnen, für die die Resultierende F genau senkrecht auf die Fahrbahn drückt. Die Lage des Schwerpunktes ist dafür ohne Belang. Sie erhält erst dann eine große Bedeutung, wenn infolge höherer Kurvengeschwindigkeit die Zentrifugalkraft größer ist, so daß die Resultierende F jetzt nach außen zeigt. Dadurch kann das Fahrzeug unter Umständen kippen oder rutschen.

Ein anderes Beispiel ist die sogenannte Todesschleife (Bild 74). Der Wagen, in dem der Artist sitzt, erhält durch die Abfahrt auf der steilen Bahn eine Geschwindigkeit, die so groß ist, daß er die vertikale Kreisbahn durchfahren kann. Damit er im obersten Bahnpunkt nicht abstürzt, muß dort die Zentrifugalkraft mindestens so groß wie das Gewicht des besetzten Wagens sein. Es muß also für diesen Fall gelten:

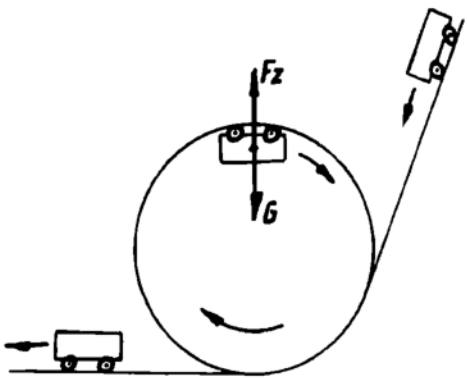


Bild 74
Zusammenwirken von Zentrifugal- und Schwerkraft an einem Körper, der sich auf einer vertikalen Kreisbahn bewegt

$$F_z \geqq G$$

oder

$$\frac{m\,v^2}{r} \geqq m\,g$$

Aus dieser Gleichung kann man die Mindestgeschwindigkeit v berechnen, wenn alle übrigen Größen bekannt sind.

Übrigens sehen Sie, daß in beiden Beispielen sich die Masse m aus den aufgestellten Gleichungen herauskürzt. Das bedeutet, daß es in beiden Fällen gar nicht auf die Masse der betrachteten Körper ankommt.

Dem letztgenannten Beispiel entspricht auch der folgende Freihandversuch:

Ein mit Wasser gefüllter kleiner Eimer wird mit ausgestrecktem Arm in einer vertikalen Kreisbahn gleichförmig bewegt. Wenn Sie das Gefäß

schnell genug im Kreis herumschwenken, wird das Wasser am Auslaufen gehindert. Wichtig ist, daß Sie hierbei oberhalb einer ganz bestimmten Drehzahl bleiben. Ob das Gefäß wenig oder viel Wasser enthält, ist dabei ohne Einfluß. Nach der aus den letzten Gleichungen hervorgehenden Beziehung

$$r = \sqrt{r g}$$

ist die erforderliche Drehzahl nur von r abhängig.

Lehrbeispiel 67

Wie groß muß die Überhöhung der äußeren Schiene eines Eisenbahngleises sein, wenn der mittlere Krümmungsradius der Kurve 300 m, die Spurweite 1435 mm betragen und mit einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von 50 km/h gerechnet werden soll?

Lösung:

(Bild 73)

Gegeben: $r = 300$ m Gesucht: h

$s = 1435$ mm

$v = 50$ km/h $= \frac{50}{3{,}6}$ m/s

Wie oben festgestellt, ist

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{g\,r}$$

Andererseits ist

$$\sin \alpha = \frac{h}{s}$$

Für kleine Winkel gilt

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha$$

Damit wird

$$\frac{h}{s} \approx \frac{v^2}{g\,r}$$

oder

$$h \approx \frac{s\,v^2}{g\,r}$$

$$h \approx \frac{1.435 \text{ m} \cdot 2500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{9.81 \text{ m s}^{-2} \cdot 12{,}96 \cdot 300 \text{ m}} = \underline{\underline{0{,}094 \text{ m} = 94 \text{ mm}}}$$

Lehrbeispiel 68

Ein Zentrifugalregulator hat eine Drehzahl von 120/min. Wie groß ist die Höhe des entstehenden Kreiskegels?

Lösung:

(Bild 75)

Gegeben: $n = 120/\text{min} = 2/\text{s}$

Gesucht: h

Die in Bild 75 schraffierten Dreiecke sind ähnlich. Daher gilt

$$\frac{h}{r} = \frac{G}{F_z} = \frac{m\,g}{m\,\omega^2\,r} = \frac{g}{4\,\pi^2\,n^2\,r}$$

$$h = \frac{g}{4\,\pi^2\,n^2}$$

$$h = \frac{9{,}81\ \text{m s}^{-2}}{4\,\pi^2 \cdot 4\ \text{s}^{-2}}$$

$$\underline{\underline{h = 0{,}062\ \text{m}}}$$

Beachten Sie, daß das Ergebnis allein von der Drehzahl abhängt! (Unabhängigkeit von m und l!)

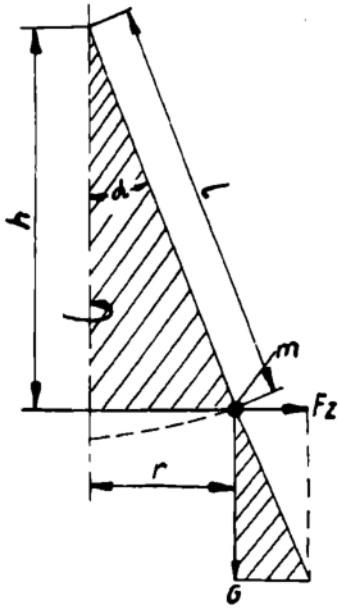


Bild 75. Kraftwirkung am Zentrifugalregulator

3.3.6.2. *Corioliskraft*

Bisher untersuchten wir nur solche Kräfte, die auf einen im bewegten System ruhenden Körper wirken. Jetzt sollen die Körper sich im bewegten System noch bewegen. Sie bemühen sich z. B., über eine rotierende Drehscheibe zu laufen. Sie mögen sagen, das gibt es nur auf einem Jahrmarkt. Dort mögen Sie es gern einmal ausprobieren! Aber auf der rotierenden Erde sind wir alle mitbewegte Beobachter; zugleich aber bewegen wir uns noch in diesem bewegten Bezugssystem.

Auf einer großen rotierenden Scheibe steht im Drehpunkt ein Schütze und zielt auf einen Punkt der Linie A—A. Solange die Scheibe ruht, wird ein guter Schütze sein Ziel treffen. Dreht sich aber die Scheibe links herum (Bild 76), so trifft das Geschoß die Linie B—B, wenn auf A—A gezielt wurde. Im bewegten System erfährt der bewegte Körper, das Geschoß, eine Rechtsabweichung. Ursache für das Abweichen von der geradlinigen Bewegung ist eine Kraft. Diese *vom mitbewegten Beobachter wahrgenommene Kraft* heißt *Corioliskraft*. Sie wirkt stets senkrecht zur Bahn des Körpers.

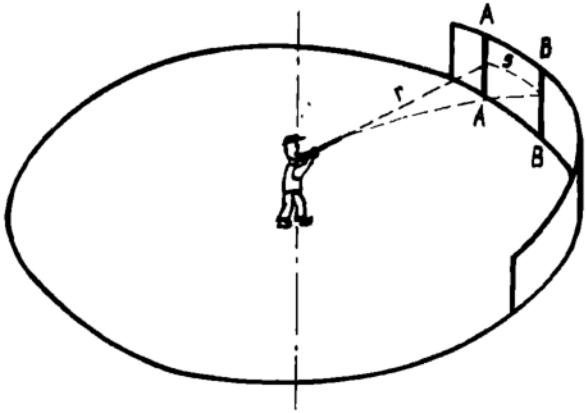


Bild 76. Zur Ableitung der Corioliskraft

Zur Berechnung des Betrages der Corioliskraft zerlegen wir den Weg in zwei Teile, in den Radius r (punktiert) und das Bogenstück s (gestrichelt). Dreht sich die Scheibe mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω, so gilt

$$s = v\,\Delta t = r\,\omega\,\Delta t$$

Die Geschoßgeschwindigkeit nennen wir v_R (Relativgeschwindigkeit, gegenüber der ruhenden Scheibe gemessen). Dann gilt $r = v_R \Delta t$. Dies setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten

$$s = v_R\,\omega\,\Delta t^2$$

Andererseits kann man den Weg s berechnen, wenn man die Beschleunigung a kennt. Dann gilt

$$s = \frac{1}{2}\,a\,\Delta t^2$$

Darin ist a die für die Ablenkung des Geschosses verantwortliche Beschleunigung, die *Coriolisbeschleunigung*. Sie folgt durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen für s

$$a_C = 2\,v_R\,\omega \tag{52}$$

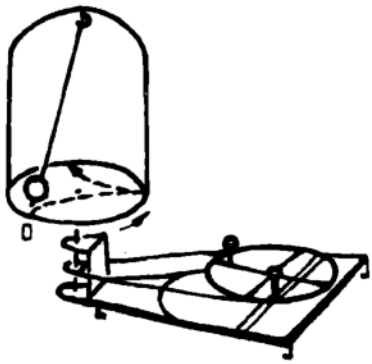
Wegen der allgemeinen Gültigkeit des dynamischen Grundgesetzes $F = m\,a$ erhalten wir damit die im bewegten System wirkende *Corioliskraft*

$$F_C = 2\,m\,v_R\,\omega \tag{53}$$

Einen weiteren Einblick verschaffen wir uns durch ein Experiment (Bild 77). Das in einem kleinen Karussell in der Drehachse aufgehängte Pendel schwingt, einmal im Punkt 0 losgelassen, in einer im Raume festen Ebene. Sie als Zuschauer sind jetzt *ruhende Beobachter*. Das

Pendel erfährt außer der Schwerkraft keine Kraft und kann deshalb auf einem Hin- oder Herweg seine Bewegungsrichtung nicht ändern. Die Umkehr wird durch die Schwerkraft bewirkt und interessiert uns hier nicht weiter. Sie beobachten jedoch, wie sich der Boden des Karussells gegenüber der Schwingungsrichtung des Pendels dreht!

Während also für Sie das Pendel schwingt genau wie bei ruhendem Karussell, verfolgt der *mitbewegte Beobachter* eine Bahn, die Bild 77.2 zeigt. Das schwingende Pendel hat diese Bahn selbst auf den Karussellboden gezeichnet (z. B. Tintenspur). In jedem Augenblick wurde das Pendel von seiner Bahn abgelenkt. Da die einzelnen Bahnen alle gleiches Aussehen haben, muß auch die Corioliskraft während der gesamten Bewegung in gleicher Weise gewirkt haben. Die Bahnrichtung des im rotierenden System bewegten Körpers ist folglich ohne Bedeutung für den Betrag der Corioliskraft, solange sie nur senkrecht zur Drehachse des Systems verläuft. Der Körper muß sich also nicht radial auf der Scheibe bewegen, auch tangentiale Bewegung ist zugelassen (Punkt A der Bahn in Bild 77.2).



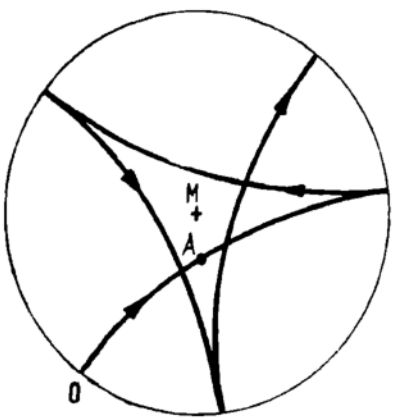


Bild 77. Wirkung der Corioliskraft

Unsere Erde dreht sich — versetzen Sie sich in den Weltenraum „oberhalb" des Nordpols — links herum. Folglich erfahren alle auf der Nordhalbkugel der Erde bewegten Körper eine Rechtsabweichung. Jetzt fällt es uns recht schwer, uns in den Standpunkt des ruhenden Beobachters hineinzudenken. Wir *sind* doch *mitbewegte* Beobachter! Die Corioliskraft erklärt uns die zu beobachtenden Wirkungen:

1. Aus den subtropischen Hochdruckgebieten strömen die Luftmassen in die tropischen Tiefdruckgebiete (Äquator). Diese Luftströmungen erfahren eine Ablenkung nach rechts: *Nordostpassate*.
2. Geschosse erfahren stets eine Rechtsabweichung.
3. Ein sehr langes Pendel (beispielsweise in einem Treppenhaus aufgehängt), ändert seine Schwingungsrichtung, ohne daß wir etwas dazu tun. Die Ursache ist die Corioliskraft.

   Dieser *Foucaultsche Pendelversuch* erlaubt den Nachweis der Erddrehung.
4. In der Getriebelehre werden häufig geradlinig bewegte Teile innerhalb eines rotierenden Systems betrachtet. Corioliskräfte beanspruchen dabei die Führung der Teile. Ihr Betrag ist nicht immer so klein, daß man die Corioliskraft vernachlässigen darf.

3.3.7. Gravitation

Als ein sehr instruktives Beispiel einer Zentralbewegung soll der Umlauf der Planeten um die Sonne besprochen werden. Wegen der Bedeutsamkeit dieses Problems für die moderne Weltraumforschung sollen einige geschichtliche Daten vorausgeschickt werden. Die Bewegung der Himmelskörper hat schon seit ältesten Zeiten das Interesse der Menschen erregt. Jahrtausende vor unserer Zeitrechnung sind von den Völkern am Nil und Euphrat (Ägypter und Babylonier) astronomische Beobachtungen durchgeführt worden. Kopernikus[1] nahm die Anregung der Forscher des Altertums auf und legte den Grundstein zu dem später nach ihm benannten heliozentrischen[2] Weltsystem.

Er stellte fest:

> Die Erde dreht sich in bezug auf den Fixsternhimmel[3] einmal am Tag um ihre Achse.
>
> Die Erde dreht sich in einem Jahr in gleichförmiger Bewegung auf einer kreisförmigen Bahn um die Sonne.
>
> Wie die Erde, so bewegen sich auch alle anderen Planeten in kreisförmigen Bahnen um die Sonne.

Als nächster Forscher ist de Brahe[4] zu nennen, der lange Zeit den Fixsternhimmel sorgfältig beobachtete und sehr umfangreiches Material sammelte. Dieses Beobachtungsmaterial wurde von Kepler[5] ausgewertet und durch eigene Beobachtungen ergänzt. Er versuchte, Beob-

---

[1] N. Kopernikus (1473 bis 1543), Astronom
[2] griech.: System, in dem die Sonne Mittelpunkt ist
[3] lat.: scheinbar unbeweglicher Stern
[4] Tycho de Brahe (1546 bis 1601), Astronom
[5] Johannes Kepler (1571 bis 1630), Astronom

achtungen und Berechnungen durch immer neue Annahmen in Übereinstimmung zu bringen. Im Jahre 1619 konnte er alle Ergebnisse zusammenfassen und in Form von drei Gesetzen veröffentlichen. Diese drei Keplerschen Gesetze lauten:

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Beschrieb Kepler die Planetenbewegung und sicherte damit gegen alle Widerstände die Richtigkeit der Auffassung von Kopernikus, so war es Newton, der ihre Ursache erkannte.

Von diesen drei, rein empirischen[1], kinematischen Gesetzen fordert das erste das Vorhandensein einer nach der Innenseite der Ellipse gerichteten Kraft; denn ohne diese müßte der Planet sich auf Grund des Trägheitsgesetzes geradlinig bewegen. Newton fand, daß diese Kraft proportional den Massen m_1 und m_2 von Sonne und Planet und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes r der Massenmittelpunkte der beiden Körper ist. Damit lautet das *Gravitationsgesetz*[2]:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{54}$$

Die Gravitationskonstante γ läßt sich experimentell ermitteln. Sie beträgt

$$\gamma = 6{,}68 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$$

Unterscheiden Sie die ravitation oder Massenanziehung von elektrischen oder magnetischen Anziehungskräften! Massenanziehung findet stets zwischen zwei Körpern statt, unabhängig davon, ob sie elektrische Ladung tragen oder magnetische Eigenschaften besitzen.

Das 2. Keplersche Gesetz läßt sich leicht beweisen. Planet und Sonne bilden ein abgeschlossenes System von Körpern, äußere Kräfte wirken nicht. Die Gravitationskraft ist eine innere Kraft, da sie nur zwischen Körpern des betrachteten Systems wirkt. Dann gilt der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses

$$J\,\omega = \text{konst.}$$

oder

$$m\,r^2\,\omega = \text{konst.}$$

---

1 griech.: aus der Erfahrung gewonnen

2 gravis (lat.): schwer

Da aber die Masse des Planeten konstant ist, folgt auch

$$r^2\omega = \text{konst.}$$

Nach Bild 78 gilt für das kleine Flächenelement $\mathrm{d}A$

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r\,\mathrm{d}s$$

und wegen

$$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t = r\omega\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r^2\omega\,\mathrm{d}t$$

Aus dem Drehimpulssatz folgte $r^2\omega = \text{konst.}$ Damit wird

$$\mathrm{d}A = \text{konst.} \cdot \mathrm{d}t$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{konst.}$$

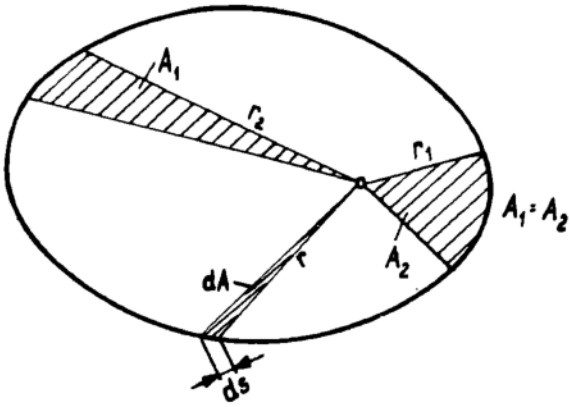


Bild 78. Fläche als Maß für die Bahngeschwindigkeit eines Planeten

Der Differentialquotient der Fläche nach der Zeit ist konstant. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit dem zuvor formulierten 2. Keplerschen Gesetz.

Das von Newton zunächst für die Planetenbewegung gefundene Gesetz für die gegenseitige Anziehung zweier Körper wurde von ihm auf die gegenseitige Anziehung *aller* Körper angewendet, also auch auf einen Körper auf der Erdoberfläche. Dabei ergibt sich:

> Das Gewicht eines Körpers ist gleich der von der Erde auf den betreffenden Körper ausgeübten Massenanziehungskraft.

Der Zusammenhang zwischen den Konstanten g und γ läßt sich nun leicht angeben:

$$G = F$$

$$m' g = \gamma \frac{m\, m'}{r^2}$$

$$g = \gamma \frac{m}{r^2} \tag{55}$$

Die Masse m' des Körpers, auf den die Fallbeschleunigung wirkt, fällt aus der Gleichung heraus. Die Fallbeschleunigung an einem Orte an der Erdoberfläche erhält man aus der Gravitationskonstanten γ, wenn man mit der Erdmasse multipliziert und durch das Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt dividiert. Für den Betrag der Fallbeschleunigung in verschiedenem Abstand von der Erde folgt (Abstand *1* und Abstand *2*)

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{55'}$$

Lehrbeispiel 69

Berechnen Sie den Betrag der Fallbeschleunigung für einen Körper, der 500 km von der Erdoberfläche entfernt ist! (Erdradius 6370 km).

Lösung:

Gegeben: $r_1 = 6370$ km Gesucht: g_2

$r_2 = 6870$ km

$g_1 = 9{,}81$ m/s²

Aus (55′) folgt

$$g_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 g_1$$

$$g_2 = \left(\frac{6370\ \text{km}}{6870\ \text{km}}\right)^2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2$$

$$g_2 = 0{,}86 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2$$

$$\underline{\underline{g_2 = 8{,}43\ \text{m/s}^2}}$$

Lehrbeispiel 70

Es soll mit Hilfe des Gravitationsgesetzes die Masse der Erde berechnet werden.

Lösung:

Gegeben: $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m Gesucht: m

Aus (55) folgt

$$m = \frac{g\,r^2}{\gamma}$$

$$m = \frac{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 6{,}37^2 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m^2}}{6{,}68 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}}$$

$$m = 5{,}96 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

Die Masse der Erde beträgt also rund $6 \cdot 10^{24}$ kg

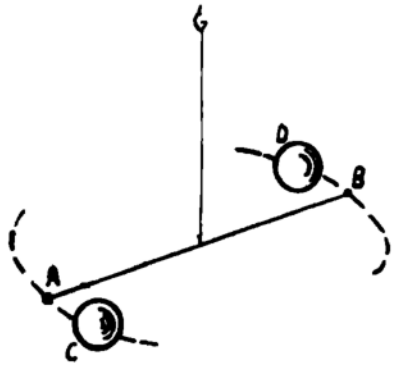


Bild 79
Prinzip der Versuchsanordnung zur Bestimmung der Gravitationskonstanten

Cavendish[1] hat als erster die Gravitation auf der Erdoberfläche gemessen. Seine Anordnung war im Prinzip folgende (Bild 79):

Zwei kleine kugelförmige Körper A und B sind an den Enden einer dünnen Stange befestigt und waagerecht drehbar an einem dünnen vertikalen Draht aufgehängt. Bringt man zwei ~~große~~ schwere Kugeln C und D seitlich neben A und B, so ziehen sich C und A sowie D und B gegenseitig an. Dies bewirkt eine Verdrillung des Aufhängefadens. Aus dieser Verdrillung kann man die Größe der wirkenden Anziehungskraft berechnen. Da die Massen der Kugeln und ihr Schwerpunktabstand bekannt sind, läßt sich der Wert von γ bestimmen.

Künstliche Erd- und Sonnensatelliten gehorchen ebenfalls den Keplerschen Gesetzen. Ihre Bahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt der Erdmittelpunkt bzw. die Sonne liegt. Auf ihrer Umlaufbahn um die Erde besitzen Satelliten die kleinste Geschwindigkeit, wenn sie sich im erdfernsten Punkt ihrer Bahn befinden. Die Bahn eines Trabanten hängt allein davon ab, wie Richtung und Betrag der Geschwindigkeit nach Brennschluß der letzten Raketenstufe sind, sowie vom Ort, der bei Brennschluß erreicht wurde. Bild 80 zeigt die verschiedenen Möglichkeiten.

Ist die Geschwindigkeit *kleiner als die erste kosmische Geschwindigkeit*, so beschreibt die Bahn einen Teil einer Ellipse. Der im Erdinnern verlaufende Teil der Bahn entfällt. Wir haben die Bahn einer *interkontinentalen ballistischen Rakete* vor Augen.

Erreicht die Rakete gerade die *erste kosmische Geschwindigkeit* (7,9 km/s), so beschreibt der Satellit eine *Kreisbahn* um die Erde.

[1] Henry Cavendish (1731 bis 1810), Chemiker

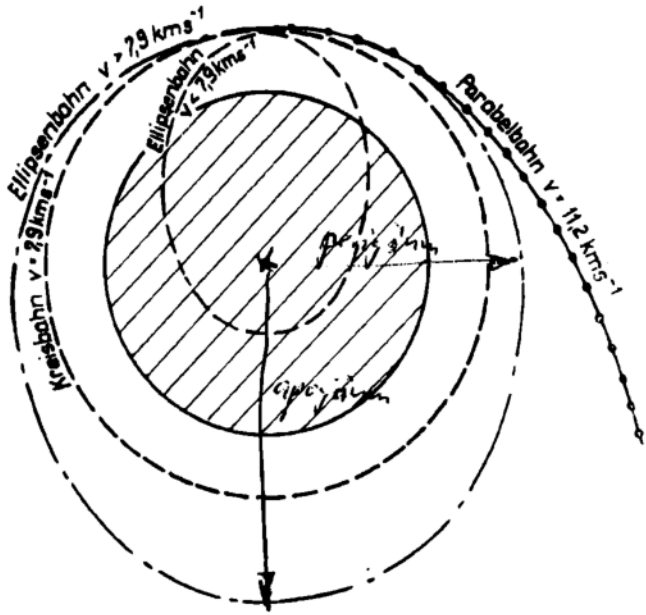


Bild 80. Mögliche Bahnen von Raketen

Ist die Geschwindigkeit *größer als die erste kosmische Geschwindigkeit*, so erhalten wir *Ellipsenbahnen*. Die erste kosmische Geschwindigkeit sollen Sie in Übung 105 selbst berechnen.

Erreicht die Geschwindigkeit einer Rakete den Wert 11,2 km/s, die *zweite kosmische Geschwindigkeit*, so verläßt die Rakete auf einer parabelförmigen Bahn die Erde.

Bei der Bewegung der künstlichen Erdtrabanten konnte man kleine Abweichungen von der Ellipsenbahn feststellen. Sowjetische Wissenschaftler erkannten als Ursache Abweichungen der Gestalt der Erde von der Kugelform. Danach dürfte die nördliche Halbkugel „schlanker" sein als die südliche, die Erde also etwa die Gestalt einer Birne haben. Die Abweichungen sind natürlich nur ganz geringfügig.

Zusammenfassung

Während ein *Massenpunkt* nur eine *Translation* ausführen kann, können beim *starren Körper* zwei Bewegungsarten beobachtet werden: *Translation und Rotation*. Im letzten Kapitel lernten Sie die Gesetze der Rotation kennen. Dabei wurde allein die Rotation eines Körpers betrachtet, dessen Schwerpunkt ruht oder sich um eine raumfeste Achse

bewegt. Jede beliebige Bewegung läßt sich als Überlagerung einer Translation (Bewegung des Körperschwerpunkts) und einer Rotation darstellen

Die Drehbewegung eines Körpers ist eine beschleunigte Bewegung. Im Falle der gleichförmigen Drehbewegung ist die Beschleunigung zum Krümmungsmittelpunkt der Bahn gerichtet. Nach dem dynamischen Grundgesetz gilt für die Radialkraft (Zentripetalkraft)

$$F_r = m\,a_r = \frac{m\,v^2}{r} = m\,\omega^2\,r$$

Der außenstehende Beobachter nimmt nur diese Kraft wahr. Ein mitbewegter Beobachter stellt dagegen die Wirkung zweier Kräfte fest: Zentrifugalkraft und Zentripetalkraft (Kraft und Gegenkraft!). Wirken weitere Kräfte (z. B. die Schwerkraft in Erdnähe), so sind die Kräfte vektoriell zu addieren.

Um einen Körper mit der Masse m um eine Achse in Drehung zu versetzen, ist eine am Umfang des Körpers angreifende Kraft erforderlich. Diese Kraft muß tangential gerichtet sein und ergibt ein Drehmoment M. Unter der Einwirkung dieses Drehmoments wird die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers geändert, es entsteht eine Winkelbeschleunigung α. Das aufzuwendende Drehmoment ist auch von der Größe und Verteilung der Masse des rotierenden Körpers abhängig.

Das Massenträgheitsmoment J berücksichtigt die Massenverteilung des Körpers um die Drehachse und spielt bei Drehbewegungen die gleiche Rolle wie die Masse m bei geradlinigen Bewegungen.

Das Massenträgheitsmoment eines kompliziert gebauten Körpers setzt sich aus der Summe der Massenträgheitsmomente seiner einzelnen Teile zusammen. Wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt verläuft, ist für die Berechnung des Massenträgheitsmoments der Satz von Steiner anzuwenden. Hierbei tritt zu dem Massenträgheitsmoment J_s noch das Produkt aus der Gesamtmasse m des Körpers und dem Quadrat des Abstandes der Drehachse von der parallelen Schwerpunktachse hinzu.

Das dynamische Grundgesetz der Drehbewegung stellt eine Beziehung zwischen dem Drehmoment M, der Winkelbeschleunigung α und dem Massenträgheitsmoment J eines in Drehung versetzten Körpers her:

$$M = J\,\alpha$$

Es hat für die Drehbewegung die gleiche Bedeutung wie das dynamische Grundgesetz $F = m\,a$ für die geradlinige Bewegung.

Rotierende Körper besitzen einen Drehimpuls $J\,\omega$, der durch ein Antriebsmoment $M\,t$ erzeugt wird. Für den Drehimpuls gilt ebenfalls ein Erhaltungssatz.

Die kinetische Energie eines rotierenden Körpers bezeichnet man als Rotationsenergie. Die gesamte kinetische Energie einer rollenden Kugel setzt sich dann aus Translationsenergie und Rotationsenergie zusammen:

$$W_{kin} = W_{trans} + W_{rot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Übungen

90. Welche Kräfte treten bei gleichförmigen Drehbewegungen auf? In welcher Weise hängen sie von dem Bahnradius und der Winkelgeschwindigkeit bzw. der Bahngeschwindigkeit ab?
91. Nennen Sie Beispiele für die technische Ausnutzung der Zentrifugalkraft!
92. Wie groß wird die durch die Rotation der Erde erzeugte Zentrifugalkraft eines Körpers am Äquator im Verhältnis zu seinem Gewicht? (Erdradius 6370 km; Fallbeschleunigung am Äquator 9,78 m/s²)
93. An einem sehr dünnen Stab befestigt, rotiert eine Kugel mit einer Masse von 25 kg auf einer Kreisbahn. Der Kugelmittelpunkt ist 480 mm von der Rotationsachse entfernt. Wie groß darf die Drehzahl höchstens sein, wenn der Stab nur eine Belastung von 180 kp aushält? (Bild 81)

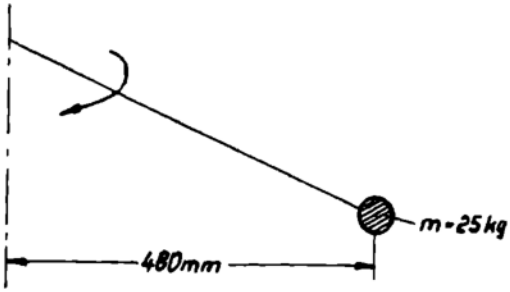


Bild 81
Rotierendes System

94. 1. Mit welcher Höchstgeschwindigkeit darf der Fahrer eines Kraftwagens von 1,5 t Masse mit 8 Personen von je 70 kg Masse in eine ebene Kurve von 100 m Krümmungsradius einfahren, wenn die Zentripetalkraft durch Reibung zwischen Rad und Fahrbahn auf das Fahrzeug übertragen werden, d. h. das Fahrzeug nicht ins Schleudern kommen soll? ($\mu = 0{,}2$)
    2. Welche Fliehkraft wirkt dann auf einen der Mitfahrenden?
95. Aus welchem Grunde benutzt man bei Rennrädern Aluminiumfelgen und Schlauchreifen? (Vom leichteren Auswechseln sei abgesehen.)

96. Ein Radfahrer durchfährt eine Kurve vom Krümmungsradius 6 m mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h. Unter welchem Winkel gegen die Senkrechte muß sich der Radfahrer neigen, um nicht durch die Zentrifugalkraft zu Sturz zu kommen?

97. Wie lautet der Satz von Steiner und welche Bedeutung hat er für die Berechnung von Massenträgheitsmomenten?

98. Eine Kreisscheibe von 1,6 kg Masse und 10 cm Durchmesser ist exzentrisch gelagert. Der Abstand ihrer Schwerpunktachse von der Rotationsachse beträgt 2 cm. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der Rotationsachse?

99. Ein Schwungrad von 1800 kg Masse sitzt entsprechend Bild 82 auf einer Welle.
    1. Wie groß ist die Kraft in den beiden Auflagern A und B?
    2. Wie groß ist die Zentrifugalkraft bei einer Drehzahl von 120/min, wenn der Schwerpunkt des Schwungrades den Abstand 2 mm von der Rotationsachse hat?
    3. Welche größte und welche kleinste Lagerkraft entsteht in den beiden Auflagern, wenn der Schwerpunkt seine höchste bzw. tiefste Lage einnimmt?

100. Was versteht man unter dem Drehimpuls?

101. Ein Diesel-Generator-Aggregat läuft an. Der Generator hat zusammen mit dem Schwungrad ein Massenträgheitsmoment von 200 kg m². Welches Drehmoment erzeugt der Dieselmotor, wenn er nach 2 s eine Drehzahl von 500/min erreicht? Wieviel Umdrehungen hat er in diesen 2 Sekunden gemacht?

102. Welche neuen Begriffe treten bei der Drehbewegung auf? Setzen Sie diese in Parallele zu den entsprechenden Begriffen der geradlinigen Bewegung!

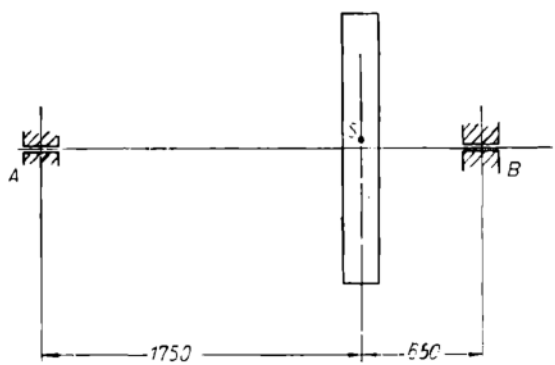


Bild 82. Schwungrad mit exzentrischer Lage des Schwerpunktes

103. Wie ändern sich Betrag und Richtung der Geschwindigkeit eines Körpers der Masse m, wenn in Punkt A seiner Bahn eine Kraft $\vec{F}$ nach Bild 83 angreift? (Anleitung: Beschleunigungskomponenten charakterisieren die gesuchten Änderungen.)

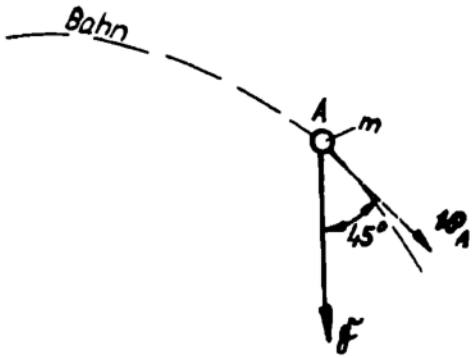


Bild 83
Kraft auf einen bewegten Körper

104. Der in Bild 65 und Lehrbeispiel 52 betrachtete Stab soll weiter untersucht werden. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment für $R = l/2$!

105. Ein künstlicher Erdtrabant beschreibe eine Kreisbahn um die Erde.
   1. Welche Kräfte wirken auf den Menschen im Trabanten? Geben Sie das scheinbare Gewicht eines Menschen ($m = 70$ kg) an!
   2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Trabanten für den Abstand 100 km von der Erdoberfläche!

106. Von der schiefen Ebene (Lehrbeispiel 56) sollen
   1. eine Kugel nach Lehrbeispiel 56 rollen,
   2. ein Zylinder ($r = 5$ cm, $l = 20$ cm) rollen,
   3. eine Kiste reibungsfrei gleiten.

   Geben Sie allgemein die Endgeschwindigkeit für die drei Fälle an und diskutieren Sie das Ergebnis! Berechnen Sie dann die einzelnen Geschwindigkeiten!

4. Schwingungslehre

Im letzten Kapitel dieses Lehrbriefs sollen Sie eine Bewegungsart kennenlernen, die besonders häufig vorkommt und mit den bisher studierten Gesetzmäßigkeiten allein nicht erfaßbar ist. Bei der *harmonischen Bewegung* handelt es sich um einen sich periodisch wiederho-

lenden Vorgang. Dabei sind weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung zeitlich konstant. Das dynamische Grundgesetz gilt selbstverständlich auch hier. Daher ist auch die Kraft zeitlich veränderlich. Im ersten Abschnitt der Schwingungslehre fragen wir jedoch noch nicht nach den Kräften. Wir behandeln nur die *Kinematik* der harmonischen Bewegung. Im zweiten Abschnitt folgt dann die *Dynamik* schwingender Körper.

4.1. Kinematik der harmonischen Bewegung

Es gibt zahlreiche Bewegungsvorgänge, die nicht nur unter dauerndem Richtungswechsel verlaufen (Drehbewegung), sondern bei denen periodisch eine *Richtungsumkehr* stattfindet, ein fortgesetztes Pendeln um eine feste Ruhelage.

Wenn sich dabei im zeitlichen Verlauf die Bewegung in regelmäßiger Folge wiederholt, spricht man von Schwingungen, Sie können ohne weiteres zahlreiche Beispiele anführen: die hin- und hergehenden Kolben der Kraftmaschinen, das Gatter im Sägewerk, die Nadel der Nähmaschine. Manchmal verlaufen die Schwingungen so rasch, daß ihnen das Auge nicht zu folgen vermag. Das vibrierende Auspuffrohr eines Kraftwagens, der zitternde Boden eines Maschinensaals, die tönende Saite einer Geige, die schwirrenden Flügel einer Mücke sind nur wenige Beispiele einer Reihe, die Sie beliebig verlängern können. Die Untersuchung derartiger Vorgänge wird Ihnen sicher auf den ersten Blick schwierig erscheinen, zumal es tatsächlich die verschiedensten Schwingungsformen gibt. Sie werden aber erkennen, daß ein bestimmter Schwingungstyp besonders häufig vorkommt und sich mathematisch leicht darstellen läßt. Es ist dies die sogenannte *harmonische Bewegung*.

Sie haben sich in den letzten Kapiteln sehr ausführlich mit der gleichförmigen Kreisbewegung beschäftigt. Einen ganz neuartigen Eindruck dieser Ihnen wohlvertrauten Bewegung erhalten Sie aber, wenn Sie diese einmal mit der Blickrichtung in der Kreisebene betrachten. Beobachten Sie beispielsweise in der Fahrtrichtung die Fußbewegung eines Radfahrers! Die Füße des Fahrers scheinen sich mit den Pedalen auf und ab zu bewegen, obwohl sie in Wirklichkeit eine gleichförmige Kreisbewegung ausführen. Noch besser kann man das zeigen, wenn man den Schatten einer gleichförmig im Kreis umlaufenden Kugel mit einer Projektionslampe an die Wand wirft (Projektion erfolgt in der Kreisebene). Er pendelt dort regelmäßig längs einer geraden Linie hin und her: er führt eine *harmonische Bewegung* aus.

> Die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine gerade Linie ist eine harmonische Schwingung.

4.1.1. Elongation

Das Weg-Zeit-Diagramm kann man auf einfache Weise aus einer solchen gleichförmigen Kreisbewegung herleiten. Bei einem periodischen Vorgang findet die Bewegung ständig um einen Punkt statt. In unserer Projektion ist das der Mittelpunkt des Kreises und damit der Punkt, der den Weg (die Gerade in der Projektion) halbiert. Den jeweiligen Abstand des schwingenden Körpers von diesem Punkt bezeichnet man als *Elongation* (Auslenkung). Diese Elongation y läßt sich im Weg-Zeit-Diagramm als Funktion der Zeit t darstellen, da der Winkel φ bei der gleichförmigen Kreisbewegung proportional der Zeit ist (aus (10) folgt $\varphi = \omega t$).

Sie zeichnen einen Kreis und teilen seinen Umfang in 12 Teile (Bild 84). Auf diesem Kreis bewege sich der Punkt P gleichförmig und benötige

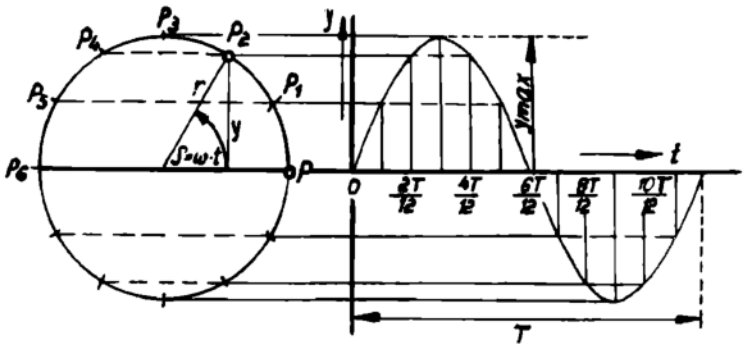


Bild 84. Weg-Zeit-Diagramm einer harmonischen Bewegung

für eine Umdrehung die Zeit T. Der Teilpunkt P_1 zeigt Ihnen demnach an, daß sich der Punkt nach $\frac{T}{12}$ an dieser Stelle befindet. Nach $\frac{2\,T}{12}$ ist er nach P_2 gerückt usw. Die Zeitachse zeichnen Sie als Verlängerung des waagerechten Durchmessers und teilen sie entsprechend den Teilpunkten $\frac{T}{12}$, $\frac{2\,T}{12}$, $\frac{3\,T}{12}$ usw. in 12 Teile. Blicken Sie jetzt von links her gegen den Kreis, so bewegt sich der Punkt auf und ab. Am Beginn der Bewegung befindet er sich in der Lage $y = 0$. Um seine Lage zur Zeit $\frac{T}{12}$ darzustellen, ziehen Sie einfach die Parallele zur Zeitachse durch P_1 und eine Senkrechte durch diesen Zeitpunkt. Die Parallele durch P_2 liefert Ihnen mit der Senkrechten durch $\frac{2\,T}{12}$ einen weiteren Punkt des Diagramms.

Die größte Entfernung von der Zeitachse ergibt Punkt P_3. Von P_4 an geht es wieder abwärts, und bei Punkt P_6 ist die Ruhelage wieder erreicht. Dann geht es nach unten, wo sich derselbe Vorgang vollkommen symmetrisch wiederholt. Es sei Ihnen dringend geraten, sich ein solches Diagramm einmal selbst zu zeichnen. Dabei können Sie das sogar noch besser machen, als es hier der Einfachheit halber geschah. Nehmen Sie 24 Teilpunkte oder 36! Dann sehen Sie besonders deutlich, daß die Punkte des Diagramms eine gekrümmte Kurve beschreiben. Es ist dies, wie Ihnen von der Mathematik her bekannt ist, eine *Sinuskurve*.

An Bild 84 veranschaulichen wir uns noch einige wichtige Merkmale der harmonischen Bewegung. Diese Begriffe müssen Sie gut verstehen und sich einprägen.

1. Die *Elongation*[1] oder Auslenkung y ist die Entfernung des schwingenden Körpers von der Ruhelage zu einem beliebigen Zeitpunkt.
2. Die *Amplitude*[2] y_{max} ist die größte Auslenkung aus der Ruhelage.
3. Die *Periodendauer* T (auch Schwingungsdauer genannt) ist die Dauer einer Periode. Merken Sie sich, daß eine Periode eine Hin- und Herbewegung umfaßt.
4. Die *Frequenz*[3] f. Man versteht darunter den Quotienten aus einer beliebigen Anzahl von Perioden und der dazu benötigten Zeit. (Vergleichen Sie mit der Drehzahl n!) Eine Periode je Sekunde bezeichnet man als 1 Hertz[4] (1 Hz = 1/s).

   Die Frequenz ist der Kehrwert der Periodendauer:

$$f = \frac{1}{T}$$

5. Unter *Phase* versteht man einen bestimmten, aber beliebig gewählten *Zustand* des schwingenden Körpers in einem bestimmten Augenblick. Zwei nacheinander festgestellte Lagen des schwingenden Körpers sind dann in gleicher Phase, wenn sie die gleiche Elongation y nicht nur dem Betrage, sondern auch der Richtung nach aufweisen. Auch müssen die ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten dem Betrage und der Richtung nach gleich sein.

   Wenn Sie z. B. mehrere aufeinanderfolgende Schwingungen grafisch darstellen, sehen Sie, wie sich das gleiche Bild ~~stetig~~ ständig wiederholt. In

---

[1] lat. elongere: sich entfernen

[2] lat. amplitudo; Weite

[3] lat. frequentia: große Menge

[4] Heinrich Hertz (1857 bis 1894), deutscher Physiker, entdeckte 1888 die elektrischen Wellen

Bild 85 sind die Punkte M und M′, N und N′ z. B. in gleicher Phase, nicht aber die Punkte O und O′, weil die Geschwindigkeit bei O nach unten, bei O′ dagegen nach oben gerichtet ist.

6. Der *Phasenwinkel* $\varphi = \omega t$ ist der zu einer bestimmten Elongation gehörige *Drehwinkel* der entsprechenden *Kreisbewegung*. Während einer ~~vollen Schwingung~~ Periode, d. h. in der Zeit T, wird demnach ein voller Kreis durchlaufen. Der Phasenwinkel ist dann gleich 2π (im Gradmaß 360°). Einer halben ~~Schwingung~~, d. h. der Zeit $T/2$, entspricht ein Phasenwinkel π usw.

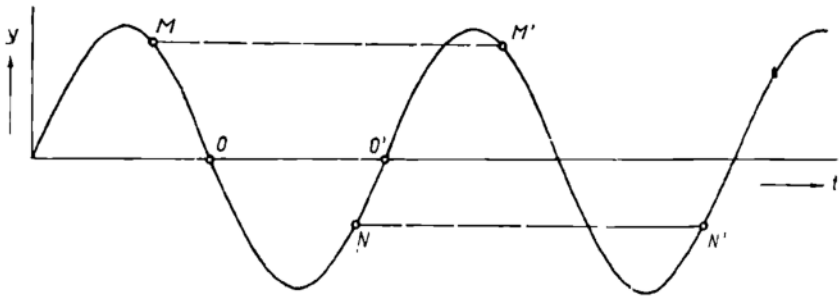


Bild 85. Phasengleichheit zweier Punkte

Die harmonische Schwingung können Sie mit einer einzigen Gleichung beschreiben. Sie sehen aus Bild 84, daß zu der Elongation y ein bestimmter Phasenwinkel φ gehört. Die Amplitude y_{max} entspricht dem Bahnradius. Damit besteht die trigonometrische Beziehung

$$y = y_{max} \sin \varphi$$

Aus (10) folgt

$$\varphi = \omega t$$

Damit erhalten Sie

$$y = y_{max} \sin \omega t \tag{56}$$

Wegen des Zusammenhangs zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Frequenz f (bzw. der Drehzahl n)

$$\omega = 2\pi f, \tag{12}$$

der bereits in [2.2.4.] gezeigt wurde, kann man auch schreiben

$$y = y_{max} \sin 2\pi f t \tag{56'}$$

oder

$$y = y_{max} \sin \frac{2\pi t}{T} \tag{56''}$$

Die Größe $\omega = 2\pi f$ bezeichnet man in der Schwingungslehre als *Kreisfrequenz*.

4.1.2. Geschwindigkeit und Beschleunigung

In den Abschnitten [2.1.2.] und [2.1.3.] wurden die Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung eingeführt. Es gelten die Gleichungen

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

und

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

Der Weg eines schwingenden Körpers ist gegeben durch die Gleichung

$$y = y_{\max} \sin \omega t \tag{56}$$

Durch Differentiation erhalten wir leicht die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für einen harmonisch bewegten Körper:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y_{\max}\, \omega \cos \omega t \tag{57}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -y_{\max}\, \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \tag{58}$$

Leicht folgen auch die Maximalwerte für Geschwindigkeit und Beschleunigung ($\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ besitzen beide den Maximalwert 1):

$$v_{\max} = \omega\, y_{\max} \tag{59}$$

$$a_{\max} = \omega^2\, y_{\max} \tag{60}$$

Betrachten Sie die Gleichungen und die Diagramme (Bild 86)! Eine gute Vorstellung vom Bewegungsablauf erhalten Sie, wenn Sie einen kleinen Freihandversuch selbst durchführen. Hängen Sie einen Körper an eine Schraubenfeder und merken Sie sich die Ruhelage ($y = 0$)! Nach dem Anstoßen schwingt der Körper. Vergleichen Sie zunächst die Bewegung mit dem Diagramm $y = y_{\max} \sin \omega t$. Dann fragen Sie nach den Maximalwerten von Geschwindigkeit und Beschleunigung und vergleichen wieder Ihre Beobachtungen mit den entsprechenden Diagrammen. Bei welcher Elongation besitzt der Körper die größte Geschwindigkeit bzw. die größte Beschleunigung? Zu welchem Zeitpunkt geschieht dies? Alle diese Fragen klären Sie, wenn Sie gleichzeitig Ihr Experiment verfolgen und Bild 86 betrachten.

Lehrbeispiel 71 schwingt mit 40 Perioden in 1 min.

Ein Fadenpendel ~~führt in 1 min 40 Schwingungen aus~~. Die Amplitude beträgt 10 cm.

1. Berechnen Sie die Periodendauer und die Frequenz des Pendels!
2. Wie groß sind die Höchstwerte von Geschwindigkeit und Beschleunigung?

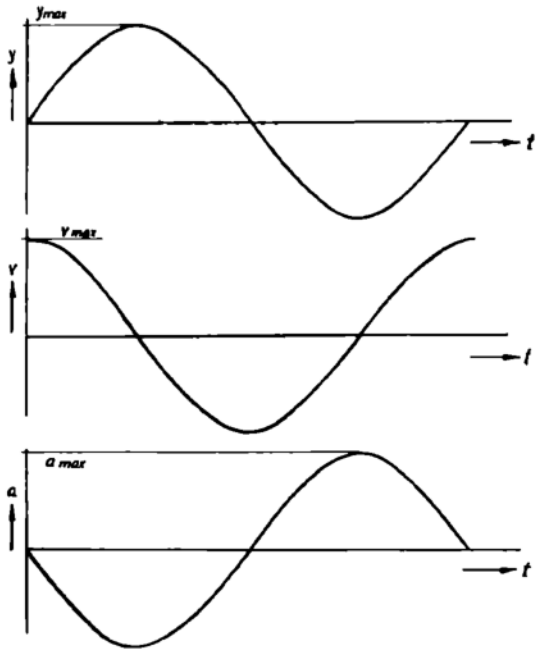


Bild 86
Zeitabhängige Größen:
1. Elongation,
2. Geschwindigkeit,
3. Beschleunigung

Lösung:

Gegeben: $t = 1$ min, $z = 40$, $y_{max} = 10$ cm

Gesucht: 1. T, f; 2. v_{max}, a_{max}

1. $$T = \frac{t}{z} = \frac{60\text{ s}}{40} = \underline{\underline{1{,}5\text{ s}}}$$

$$f = \frac{z}{t} = \frac{1}{T} = \frac{40}{60\text{ s}} = \frac{2}{3\text{ s}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\text{ Hz}}}$$

2. $$v_{max} = \omega\ y_{max} = 2\pi f\, y_{max}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 0{,}1\text{ m}}{3\text{ s}} = \underline{\underline{0{,}419\text{ m/s}}}$$

$$a_{max} = \omega^2\, y_{max} = 4\pi^2 f^2\, y_{max}$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 0{,}1\text{ m}}{9\text{ s}^2} = \underline{\underline{1{,}75\text{ m/s}^2}}$$

Lehrbeispiel 72

An einem Kran hängt eine Last am Seil. Sie wird ausgelenkt und losgelassen. Dann schwingt sie innerhalb von 6 s einmal von links nach rechts und legt dabei 1,80 m zurück. Wie groß ist die Auslenkung aus der Ruhelage nach 2, 3 und 5 Sekunden?

Lösung:

Gegeben: $2\,y_{max} = 1{,}8$ m, $T/2 = 6$ s, $t_1 = 2$ s, $t_2 = 3$ s, $t_3 = 5$ s

Gesucht: y_1, y_2, y_3

Man übersieht die gestellte Aufgabe besonders gut, wenn man ein y-t-Diagramm zeichnet. Dann erkennt man leicht (Bild 87): Wegen der in der Aufgabe gestellten Anfangsbedingung muß die Kosinusfunktion verwendet werden:

$$y = y_{max} \cos \varphi$$

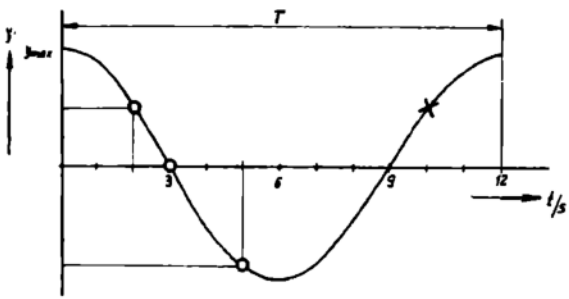


Bild 87. Zur Schwingung der Last am Seil

Zunächst werden die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 berechnet:

$$\varphi_1 = \omega t_1 = \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{2\pi \cdot 2\text{ s}}{12\text{ s}} = \frac{\pi}{3} = 60°$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{2\pi \cdot 3\text{ s}}{12\text{ s}} = \frac{\pi}{2} = 90°$$

$$\varphi_3 = \frac{2\pi}{T} t_3 = \frac{2\pi \cdot 5\text{ s}}{12\text{ s}} = \frac{5\pi}{6} = 150°$$

Nunmehr folgen

$$y_1 = 0{,}9\text{ m} \cdot \cos 60° = \underline{\underline{0{,}45\text{ m}}}$$

$$y_2 = 0{,}9\text{ m} \cdot \cos 90° = \underline{\underline{0}}$$

$$y_3 = 0{,}9\text{ m} \cdot \cos 150° = \underline{\underline{-0{,}78\text{ m}}}$$

Lehrbeispiel 73

An welchem Ort befindet sich die Last (Lehrbeisp. 72) nach Ablauf von 1 min 10 s?

Lösung:

Es gilt wieder

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi \cdot 70\,\mathrm{s}}{12\,\mathrm{s}} = \frac{35}{3}\pi = 11\frac{2}{3}\pi$$

Der Körper hat also 5 volle Schwingungen ($5 \cdot 2\pi = 10\pi$) ausgeführt. Er befindet sich in der 6. Schwingung. In dieser 6. Schwingung ist der Phasenwinkel

$$1\frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi = 300°$$

Für die Elongation ergibt sich damit

$$y = 0{,}9\,\mathrm{m} \cdot \cos 300° = 0{,}9\,\mathrm{m} \cdot \cos 60° = \underline{\underline{0{,}45\,\mathrm{m}}}$$

Diese Elongation ist in Bild 87 mit einem Kreuz bezeichnet.

4.1.3. Überlagerung von harmonischen Schwingungen

In Natur und Technik sind Schwingungen oftmals nicht harmonisch. Sie können ganz verschieden verlaufen. Bild 88 gibt Ihnen hierfür einige Beispiele. Solche Schwingungen lassen sich nicht mehr mit einem reinen Sinusgesetz (56) erfassen. Man bezeichnet sie als *anharmonische* Schwingungen.

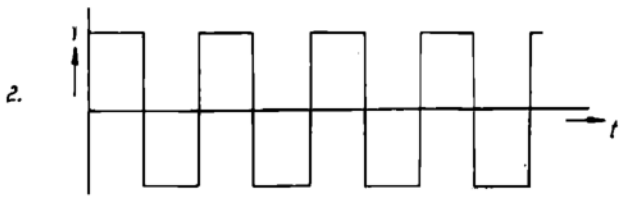
Jede anharmonische Schwingung aber kann man als *Überlagerung* von vielen rein harmonischen Schwingungen auffassen. Eine solche Überlagerung läßt sich leicht veranschaulichen. Bild 89 zeigt einen Körper K an einer Stange, deren Enden A und B getrennt je eine harmonische Schwingung ausführen. Es soll die Frequenz in B doppelt so groß sein wie in A. Die Amplituden sind in A und in B gleich. Dann gilt

$$y_A = y_{\max} \sin \omega t$$

und

$$y_B = y_{\max} \sin 2\,\omega t$$

Die Bewegung des Körpers K erhalten wir, indem wir grafisch die von A und die von B herrührenden Elongationen addieren. Für einige Zeitpunkte (t_1, t_2, t_3) ist das in Bild 90 angedeutet. Sie erkennen den Verlauf der resultierenden Funktion. Sie stellt sicher keine harmonische Bewegung mehr dar.



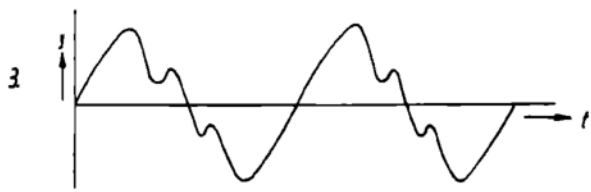


Bild 88
Verschiedene anharmonische Schwingungen:
1. Kippschwingung.
2. Rechteckschwingung.
3. Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen

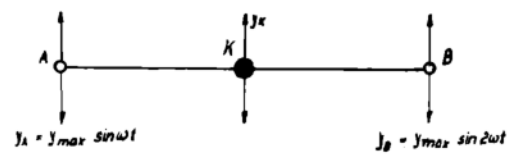


Bild 89
Körper K führt anharmonische Schwingungen aus.

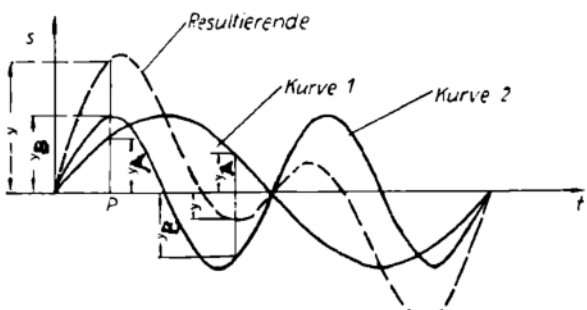


Bild 90
Überlagerung zweier Sinusschwingungen

Noch vielseitiger werden die entstehenden Überlagerungsbilder, wenn die Schwingungen in A und B zu verschiedenem Zeitpunkt beginnen. Dann gilt (jetzt für gleiche Frequenz)

$$y_A = y_{max} \sin(\omega t + \alpha_1)$$
$$y_B = y_{max} \sin(\omega t + \alpha_2)$$

Der Klammerausdruck kennzeichnet die Phase, α heißt Phasenkonstante. Für $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \cdots$ ergeben sich jeweils andere Überlagerungserscheinungen. Grafisch lassen sie sich leicht ermitteln.

Von besonderem Interesse ist noch der als *Schwebung* bezeichnete Fall der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit nahezu gleicher Frequenz. Es gilt also jetzt $f_1 \approx f_2$ und $y_{max\,1} = y_{max\,2}$. Das Bild der überlagerten Schwingung sieht dann so aus, daß die Amplitude der Schwingung sinusförmig schwankt (Bild 91). Diese *Frequenz der Schwebung*

$$f = f_1 - f_2$$

ist als Differenz zweier ungefähr gleicher Frequenzen stets klein. Eine Schwebung entsteht beispielsweise, wenn zwei wenig gegeneinander verstimmte Stimmgabeln gleichzeitig angeschlagen werden. Der Ton wird dann mit der Sphwebungsfrequenz in der Lautstärke schwanken. Eine Schwebung beobachten Sie auch an zwei miteinander gekoppelten Fadenpendeln.

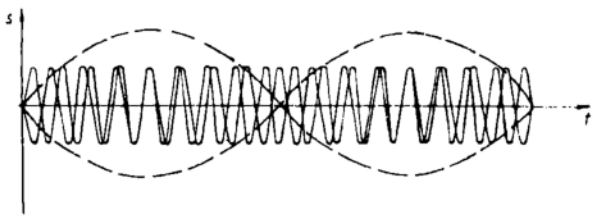


Bild 91. Schwebung

4.2. Dynamik schwingender Körper

4.2.1. Kraftgesetz

Jetzt wollen wir die Kraft untersuchen, die auf einen harmonisch bewegten Körper wirkt. Nach dem dynamischen Grundgesetz (28) und nach (58) ist

$$F = -m\omega^2 y_{max} \sin \omega t \tag{61}$$

Die Kraft ist also wie die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eine zeitabhängige Größe. Setzen wir nach (56) für $y_{max} \sin \omega t$ die Elongation y, so folgt

$$F = -m \omega^2 y = -k y \tag{61'}$$

Die Kraft ist in jedem Augenblick der Elongation proportional und entgegengerichtet.

Der Proportionalitätsfaktor k heißt *Richtgröße*, bei einer Feder auch *Federkonstante*. Auf die Bedeutung dieser Größe kommen wir im nächsten Abschnitt noch zurück.

Aus den betrachteten Gleichungen kann man auch folgende Schlußfolgerung ziehen:

Ein Körper kann eine harmonische Bewegung nur dann ausführen, wenn die auf ihn wirkende Kraft stets proportional und entgegengesetzt der Elongation ist, d. h. also, wenn ein lineares Kraftgesetz wirkt.

Für einen solchen harmonischen Schwinger erhält man aus (61') die Beziehung

$$m \omega^2 = k$$

oder für die *Kreisfrequenz*

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wegen (12) folgen für die *Frequenz des harmonischen Schwingers*

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{62}$$

und für die *Periodendauer des harmonischen Schwingers*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{63}$$

In den folgenden Abschnitten sollen einige einfache Schwingungsvorgänge untersucht werden.

4.2.2. Lineare Federschwingung

Für die Dehnung einer Schraubenfeder gilt das *Hookesche Gesetz*

$$F = -k l \tag{64}$$

Dehnt man eine Feder um die Länge l, so wirkt eine rücktreibende Kraft nach Gleichung (64).

In Bild 92 sehen Sie einen Körper, der reibungsfrei auf einer Schiene gleiten kann. Er ist an einer Feder befestigt. Es gilt Gleichung (64), ein lineares Kraftgesetz. Einmal aus seiner Ruhelage entfernt und losgelassen, muß der Körper harmonische Schwingungen ausführen, deren Frequenz Gleichung (62) angibt. In dieser Gleichung erscheint die *Richtgröße k*, die nach dem Hookeschen Gesetz statisch bestimmbar ist.

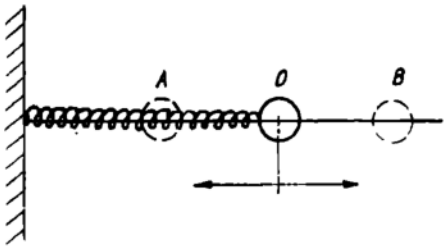


Bild 92. Linearer Federschwinger

Die Gleichung (62) erlaubt uns folgende allgemeinen Feststellungen:

Die Frequenz eines linearen Federschwingers ist

1. unabhängig von der Amplitude,
2. der Wurzel aus der Federkonstanten proportional,
3. der Wurzel aus der Masse des schwingenden Körpers umgekehrt proportional.

Diese hin- und hergehende Bewegung des an einer Schraubenfeder befestigten Körpers ist nur ein Beispiel einer Federschwingung. Sehen Sie sich nach weiteren Beispielen um, die nach dem gleichen Gesetz verlaufen! Ein Brett auf zwei Stützen befolgt innerhalb der Elastizitätsgrenze des Hookesche Gesetz. Steht nun mitten auf dem Brett eine Last, so schwingt sie, einmal angeregt, auf und ab. Die Karosserie eines Kraftwagens ist an kräftigen Blattfedern aufgehängt. Sie führt also bei jedem Stoß der unebenen Straße harmonische Schwingungen aus. Ebenso sind federnde Stahlzungen, wie die der Mundharmonika, harmonische Schwinger.

4.2.3. Drehschwingungen

An einem dünnen Stahldraht hängt horizontal eine schwere Scheibe. Verdreht man sie um einen bestimmten Winkel, so kehrt sie unter dem Einfluß der elastischen Kraft des Drahtes wieder in ihre Ruhelage zurück, schwingt sogleich darüber hinweg und führt in dieser Weise lang anhaltende *Drehschwingungen* aus. Sie erkennen, daß bei diesem Vorgang der Draht in sich verdreht (verdrillt, tordiert) wird, weswegen man auch von *Torsionsschwingungen* spricht. Statt des langen und unhandlichen Drahtes kann man auch eine Spiral-(Schnecken-)feder verwenden, die mit ihrem freien Ende an der Achse des schwingenden Körpers befestigt ist. Beide Systeme von Drehschwingern sind Ihnen von den Uhren her geläufig. In den sogenannten „Jahresuhren" hängt

ein Torsionspendel, d. h. eine Gruppe von langsam hin- und herpendelnden Körpern an einem Stahldraht, während die „Unruhe" der Uhren aus einer feinen Spiralfeder und einem Schwungrädchen gebildet wird.

Es handelt sich bei den Drehschwingungen um einen zweiten Sonderfall der harmonischen Bewegung. Zur Berechnung haben Sie nichts weiter zu tun, als die in Gleichung (63) für die geradlinige Bewegung gültigen Größen durch die entsprechenden Größen der Drehbewegung zu ersetzen. An die Stelle der Masse m tritt das Massenträgheitsmoment J. Statt der Kraft F muß das Drehmoment M gesetzt werden. Die Richtgröße k ist durch eine *Winkelrichtgröße* D zu ersetzen. Wie für die Dehnung der Schraubenfeder das Hookesche Gesetz gilt, so gilt analog für die Torsion

$$M = -D\varphi \tag{65}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich die Winkelrichtgröße D experimentell bestimmen. Das kann z. B. wie folgt geschehen:

Am Umfang einer schweren Kreisscheibe (Bild 93), an deren Achse eine Schneckenfeder mit ihrem freien Ende befestigt ist, sitzt ein kleiner Stift. An ihm hängt ein dünner Faden, der über den Scheibenumfang läuft und vom Gewicht G eines Körpers gespannt wird. Die Scheibe wird dadurch nach Maßgabe der Elastizität der Feder um den Winkel φ verdreht. Für den Radius der Scheibe $r = 5$ cm, das Gewicht $G = 100$ p und den an einem Teilkreis abgelesenen Drehwinkel 45° folgt aus (65)

$$D = \left|\frac{M}{\varphi}\right| = \frac{100\ \text{p} \cdot 5\ \text{cm}}{\pi/4} = 637\ \text{pcm}$$

Für die *Frequenz des Drehschwingers* folgt aus den angeführten Überlegungen

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}} \tag{66}$$

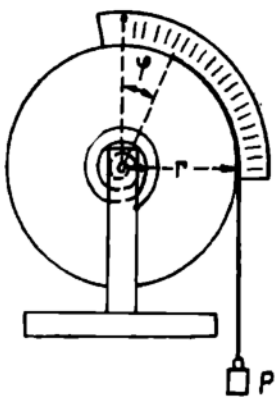


Bild 93
Versuch zur Bestimmung der Winkelrichtgröße einer Schneckenfeder

4.2.4. Mathematisches Pendel

In den Lehrbeispielen 71 bis 73 untersuchten wir verschiedene *Fadenpendel*. Ein *mathematisches Pendel* soll aus einem Massenpunkt bestehen, der an einem masselosen Faden hängt. Bei einem Fadenpendel sind die Bedingungen annähernd verwirklicht. Dann gelten die Gesetze, die wir jetzt für das mathematische Pendel herleiten wollen.

Wir fragen zunächst, ob auch hier ein lineares Kraftgesetz gilt. Dann liegt eine harmonische Bewegung vor. In Bild 94 sehen Sie ein mathematisches Pendel in ausgelenkter Stellung. Das infolge der Schwerkraft lotrecht nach unten wirkende Gewicht $G = m\,g$ stellt mit einer tangentialen Komponente F die rücktreibende Kraft dar. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke finden Sie die Proportion

$$F : G = d : l$$

Daraus folgt

$$F = \frac{G\,d}{l} = \frac{m\,g\,d}{l}$$

oder

$$F \sim d,$$

da m, g und l konstant sind. Für kleine Auslenkungen fallen auch die Richtungen von F und d nahezu zusammen. Die Voraussetzungen zur Anwendung der Gleichungen (62) und (63) sind also gegeben. Demnach ist die Richtgröße k (d. h. die auf die Längeneinheit von d bezogene Kraft F) nach (64)

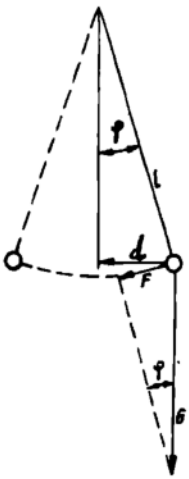


Bild 94
Mathematisches Pendel

$$k = \left|\frac{F}{d}\right| = \frac{m\,g\,d}{l\,d} = \frac{m\,g}{l}$$

Dies setzen Sie in die Gleichungen (62) und (63) ein und erhalten nach Kürzung der Masse für das *mathematische Pendel bei kleinem Ausschlag*

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{67}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{68}$$

Die Gleichung (67) sagt aus:

Die Frequenz eines mathematischen Pendels ist bei kleiner Amplitude

1. unabhängig von der Amplitude,
2. unabhängig von der Masse des schwingenden Körpers,
3. der Wurzel aus der Pendellänge umgekehrt proportional,
4. ortsabhängig (d. h. proportional der Wurzel aus der Fallbeschleunigung g).

4.2.5. Physisches Pendel

Das mathematische Pendel ist eine Abstraktion, wenn auch seine Gesetze auf das Fadenpendel mit hinreichender Genauigkeit anwendbar sind. Auf die meisten praktisch vorkommenden Pendel treffen die bei ihm gemachten Einschränkungen nicht zu. Bei einer Pendeluhr beispielsweise kann die Masse der Pendelstange nicht vernachlässigt werden. Im allgemeinen ist die Masse irgendwie über das ganze Pendel verteilt, und man spricht dann von einem *physischen*[1] *Pendel.*

Das Pendel habe zunächst beliebige Gestalt. Es führt um seinen Aufhängepunkt O (Bild 95) Drehschwingungen aus. Der Abstand des Schwerpunktes S vom Aufhängepunkt sei d. Damit entsteht ein Drehmoment vom Betrag

$$|M| = G\,a = m\,g\,d\,\sin\varphi$$

Für kleine Winkel ist $\sin\varphi \approx \varphi$

(Für 3° beispielsweise ist $\varphi = 0{,}05236$, $\sin\varphi = 0{,}05234$)

Mit dieser Vereinfachung wird

$$|M| = m\,g\,d\,\varphi$$

Durch Vergleich mit (65) finden Sie

$$D = m\,g\,d$$

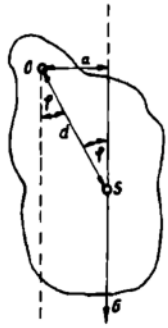


Bild 95
Physisches Pendel

Diese Winkelrichtgröße setzen Sie in Gleichung (66) ein und erhalten für die *Frequenz des physischen Pendels bei kleiner Amplitude*

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\,g\,d}{J}} \tag{69}$$

Lehrbeispiel 74

Berechnen Sie die Frequenz eines Fadenpendels (Masse m des schwingenden Körpers; Masse m' des Fadens; Fadenlänge l; $m' \ll m$) nach Gleichung (69)!

Lösung:

Das Massenträgheitsmoment eines Fadenpendels ist, wenn die Fadenlänge $l = r$ sehr viel größer als die Ausdehnung des Körpers ist, gleich dem Massenträgheitsmoment eines rotierenden Massenpunktes:

$$J = m\,r^2$$

[1] griech.: körperlich

Weiter gilt $d = r = l$. Damit folgt nach (69)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m g l}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m g l}{m l^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

die bekannte Gleichung für die Frequenz eines mathematischen Pendels.

Lehrbeispiel 75

Berechnen Sie die Frequenz, mit der ein Stab der Länge l um seinen Endpunkt schwingt!

Lösung:

Nach Lehrbeispiel 50.2 ist das Massenträgheitsmoment dieses Stabes

$$J = \frac{1}{3} m l^2$$

Der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ist

$$d = \frac{1}{2} l$$

Setzen Sie diese Werte in Gleichung (69) ein, dann erhalten Sie für die Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m g l/2}{m l^2/3}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3 g}{2 l}}}}$$

Für die Periodendauer $T = 1/f$ folgt

$$T = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{2 l}{3 g}}}}$$

Aus Lehrbeispiel 75 erkennt man, daß der Stab die gleiche Periodendauer hat wie ein mathematisches Pendel von 2/3 seiner Länge. Lassen Sie demnach einen dünnen Stab um seinen Endpunkt schwingen und hängen Sie daneben ein Fadenpendel von 2/3 der Stablänge, so schwingen beide mit gleicher Periodendauer. Ein solcher Versuch läßt sich bei jedem physischen Pendel von beliebiger Gestalt durchführen, indem Sie ein angenähert mathematisches Pendel danebenhängen, das durch Veränderung seiner Fadenlänge auf gleiche Schwingungsdauer gebracht wird. Die dabei festgestellte Länge des mathematischen Ersatzpendels nennt man die *reduzierte Pendellänge* l'

Die reduzierte Pendellänge eines physischen Pendels ist gleich der Länge eines mathematischen Pendels gleicher Periodendauer.

Lehrbeispiel 76

Von einem Baugerüst hängt ein eiserner Träger senkrecht herunter. Er macht, vom Wind bewegt, um seinen Endpunkt in 1 min 12 Schwingungen. Wie lang ist der Träger?

Lösung:

Gegeben: $f = 12/\text{min} = 1/5\ \text{s}$ Gesucht: l

Nach Lehrbeispiel 75 gilt für das Stabpendel

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

Daraus folgt

$$l = \frac{3g}{8\pi^2 f^2} = \frac{3 \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2}}{8\pi^2} \cdot \frac{25\ \text{s}^2}{1} \approx \underline{\underline{9{,}3\ \text{m}}}$$

4.2.6. Bestimmung des Massenträgheitsmoments aus Schwingungen

Die Gleichung für die Periodendauer eines physischen Pendels

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,d}} \tag{70}$$

erlaubt, experimentell das Massenträgheitsmoment von Körpern zu bestimmen. Dazu muß dieser Körper um eine Achse A Schwingungen ausführen. Durch Experiment sind die Masse des Körpers, der Abstand d des Schwerpunkts von der Achse A und die Periodendauer T zu bestimmen. Zweckmäßig läßt man den Körper 100 Schwingungen ausführen. Aus der gemessenen Zeit t erhält man $T = t/100$. Das Massenträgheitsmoment J_A um die Achse A läßt sich dann leicht ausrechnen, und mit Hilfe des Steinerschen Satzes folgt das Massenträgheitsmoment J_S um eine zur Achse A parallele Achse durch den Schwerpunkt.

Lehrbeispiel 77

Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J_S einer Kreisscheibe aus Drehschwingungen! Im Versuch wurden gemessen (Bild 96):
$m = 800\ \text{g}$; $D = 20\ \text{cm}$; $d = 9\ \text{cm}$;
$t = 76{,}5\ \text{s}$ (für 100 Schwingungen)

Bild 96
Massenträgheitsmoment einer Kreisscheibe

Lösung:

Aus Gleichung (70) folgt

$$J_A = m\,g\,d\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

Andererseits ist nach dem Steinerschen Satz

$$J_A = J_S + m\,d^2$$

Nach Gleichsetzung folgt

$$J_S = m\,g\,d\,\frac{T^2}{4\,\pi^2} - m\,d^2$$

$$J_S = m\,d\left(\frac{g\,T^2}{4\,\pi^2} - d\right)$$

Mit den gegebenen Werten:

$$J_S = 800\ \text{g} \cdot 9\ \text{cm}\left(\frac{9{,}81\ \text{m s}^{-2} \cdot 0{,}765^2\ \text{s}^2}{4\,\pi^2} - 9\ \text{cm}\right)$$

$$= 7200\ \text{g cm}\ (14{,}63 - 9)\ \text{cm}$$

$$\underline{\underline{J_S = 40{,}5\ \text{kg cm}^2}}$$

4.2.7. Energiebetrachtungen

Betrachten wir nunmehr die mechanische Energie bei einer harmonischen Bewegung! Als anschauliches Beispiel diene ein Federschwinger nach Bild 92. Während der reibungsfreien Bewegung besitzt der schwingende Körper im Punkt O seine größte Geschwindigkeit v_{max}. Die Geschwindigkeiten in den Umkehrpunkten A und B sind $v_A = v_B = 0$. Kinetische Energie besitzt der Körper aber nur für $v \neq 0$. Es ist

$$W_{\text{kin } 0} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{max}}^2$$

Die Feder ist in der Lage O des Körpers entspannt. Maximal gespannt ist sie dagegen für die Lagen A und B des Körpers. Es gilt nach Gleichung (35) mit $s = y_{max}$

$$W_{\text{pot } A} = W_{\text{pot } B} = \frac{1}{2}\,k\,y_{\text{max}}^2$$

Da in den Punkten O, A und B jeweils nur *eine* Energieart vorhanden ist, muß nach dem Energiesatz gelten:

$$W_{\text{kin } 0} = W_{\text{pot } A,\,B} = W_{\text{gesamt}}$$

oder

$$W_{\text{gesamt}} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}\,k\,y_{\text{max}}^2 \qquad (71)$$

Die Gleichheit von $W_{\text{kin } 0}$ und $W_{\text{pot } A,\,B}$ läßt sich auch bestätigen, indem man die Gleichungen

$$\omega^2 = k/m \quad \text{und} \quad v_{\text{max}} = \omega\,y_{\text{max}}$$

anwendet. Dann wird

$$W_{\text{kin } 0} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,y_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}\,k\,y_{\text{max}}^2 = W_{\text{pot } A,\,B}$$

Ohne eine bestimmte Lage des schwingenden Körpers zu betrachten, gilt ganz allgemein (d. h. auch für jeden beliebigen Zeitpunkt):

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\, k\, y^2 = \frac{1}{2}\, k\, y_{\text{max}}^2 \sin^2 \omega\, t \tag{72}$$

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, y_{\text{max}}^2 \cos^2 \omega\, t \tag{73}$$

Das Diagramm (Bild 97) stellt beide Energien zeitabhängig dar. Sie erkennen im Diagramm, daß zu jedem Zeitpunkt gilt:

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}}$$

Das folgt auch aus den Gleichungen (72) und (73) unter Verwendung von $\omega^2 = k/m$:

$$W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\, k\, y_{\text{max}}^2 (\cos^2 \omega\, t + \sin^2 \omega\, t) = \frac{1}{2}\, k\, y_{\text{max}}^2 = W_{\text{ges}}$$

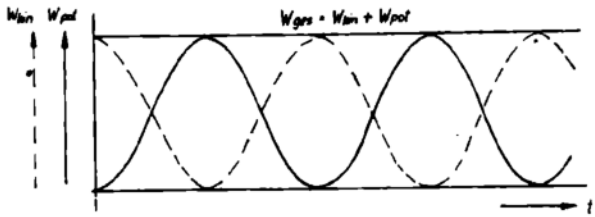


Bild 97. Energiearten beim harmonischen Schwinger

Abschließend soll noch einmal die Aussage der Gleichung (71) für die Gesamtenergie zusammengefaßt werden:

Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung ist

1. proportional der Masse des schwingenden Körpers,
2. proportional der Richtgröße, die die Abhängigkeit der rücktreibenden Kraft von der Elongation kennzeichnet,
3. proportional dem Quadrat der Spitzenwerte (Maximalwerte) von Elongation und Geschwindigkeit. (Man sagt auch: proportional der Amplitude und der Geschwindigkeitsamplitude.)

Zusammenfassung

Schwingungen sind in periodischer Folge sich wiederholende Bewegungsvorgänge. Viele Schwingungen verlaufen wie die harmonische Bewegung, die eine auf eine Gerade projizierte gleichförmige Kreisbewegung darstellt. Charakteristische Merkmale einer Schwingung sind *Amplitude*, *Frequenz* und *Periodendauer*. Die grafische Darstellung

liefert eine Sinuskurve. Alle *elastischen* Körper führen, aus ihrer Ruhelage gebracht, innerhalb gewisser Grenzen harmonische Schwingungen aus.

Elongation, Geschwindigkeit, Beschleunigung und rücktreibende Kraft sind zeitabhängige Größen. Alle sind proportional $\sin(\omega t + \alpha)$ bzw. $\cos(\omega t + \alpha)$ mit $(\omega t + \alpha)$ als Phase und mit α als Phasenkonstante. Die rücktreibende Kraft ist der Elongation proportional.

Die Frequenz eines harmonisch bewegten Körpers läßt sich berechnen. Sie ist allgemein für eine lineare Schwingung proportional der Wurzel aus der Richtgröße und umgekehrt proportional der Wurzel aus der Masse des schwingenden Körpers. Bei einer Drehschwingung ist in den Gleichungen die Masse durch das Massenträgheitsmoment und die Richtgröße durch die Winkelrichtgröße zu ersetzen.

Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung ist zeitlich konstant. Sie setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen.

Übungen

107. Berechnen Sie den nach 2,1 s vorhandenen Phasenwinkel einer Schwingung von 68 Hz!

108. Welche Elongation weist eine Schwingung nach 20 s auf, die der Gleichung $y = y_{max} \sin \omega t$ gehorcht? Die Amplitude beträgt 4 cm, die Kreisfrequenz 3,5/s.

109. ~~Ein Pendel~~ Ein harmonischer Oszillator schwingt mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s durch die Ruhelage. Seine Amplitude beträgt 20 cm. Wie groß ist die Periodendauer?

110. Welche Amplitude besitzt eine Schwingung, die bei einer Frequenz von 10 Hz nach 0,02 s eine Elongation von 2 cm aufweist?

111. Welchen Einfluß auf die Periodendauer hat bei einem physischen Pendel die Verschiebung der Masse zum Aufhängepunkt hin?

112. Berechnen Sie die Periodendauer eines Fadenpendels von
    1. 1 cm,
    2. 100 m Länge!

113. Der in Lehrbeispiel 72 betrachtete schwingende Körper besitzt eine Masse von 200 kg.
    1. Berechnen Sie die Länge des „Fadenpendels".
    2. Wie groß ist die Gesamtenergie der Schwingung?
    3. Berechnen Sie die Richtgröße für diesen Schwingungsvorgang!

Antworten und Lösungen

1. Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung nimmt die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um den gleichen Betrag zu. Die Beschleunigung ist konstant.
2. 1. Die Beschleunigung ist der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit bzw. der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit.
   2. Nimmt die Beschleunigung negative Werte an ($a < 0$), so nennt man sie auch Verzögerung.
3. Nein. Nur Körper, die sich in Bewegung befinden, können sich verzögert bewegen.
4. Das Fahrzeug befindet sich in ungleichmäßig beschleunigter Bewegung.
5. Die Geschwindigkeitskurve ist im v-t-Diagramm
   1. bei einer gleichförmigen Bewegung eine Parallele zur t-Achse,
   2. bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung eine ansteigende Gerade,
   3. bei einer ungleichmäßig beschleunigten Bewegung eine krumme Linie.
6. Während der Differenzenquotient eine durchschnittliche Geschwindigkeit über eine mehr oder weniger große Zeitspanne liefert, stellt der Differentialquotient den Augenblickswert der Geschwindigkeit dar.
7. Man muß einen Grenzübergang durchführen, indem man sich z. B. die Zeitdifferenz Δt immer kleiner werdend vorstellt. Man schreibt dafür $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.
8. Da a und v_0 konstante Größen sind, erhält man nach den Regeln der Differentialrechnung $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a\,t + v_0$. Dies ist aber nach (4) die Endgeschwindigkeit v.
9. Da a und v_0 konstante Größen sind, ergibt sich $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$. Die Beschleunigung ist konstant.

10. Gegeben: $v_0 = 40$ km/h Gesucht: t

$v = 80$ km/h

$a = 2{,}5$ m/s²

Aus (4) folgt $t = \frac{v - v_0}{a} = \underline{\underline{4{,}4 \text{ s}}}$

11. Gegeben: $a = 0{,}4$ m/s² Gesucht: t

$v = 60$ km/h s

$v_0 = 0$

Nach (4): $t = \frac{v}{a} = \underline{\underline{41{,}7 \text{ s}}}$

Nach (5): $s = \frac{1}{2} a t^2 = \underline{\underline{348 \text{ m}}}$; Nach (6): $s = \frac{v^2}{2a} = \underline{\underline{348 \text{ m}}}$

12. Gegeben: $v_0 = 40$ km/h Gesucht: 1. s

$t = 20$ s 2. v

$a = 0{,}3$ m/s²

1. Nach (5): $s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = \underline{\underline{282 \text{ m}}}$

2. Nach (4): $v = at + v_0 = \underline{\underline{61{,}6 \text{ km/h}}}$

13. Aus (4) folgt $t = \frac{v - v_0}{a}$. Dieser Wert wird in (5) eingesetzt:

$$s = \frac{a(v - v_0)^2}{2a^2} + \frac{v_0(v - v_0)}{a} = \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2 + 2vv_0 - 2v_0^2}{2a}$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}; \qquad \underline{\underline{v = \sqrt{v_0^2 + 2as}}}$$

14. Aus (4) folgt $a = \frac{v - v_0}{t}$. Dieser Wert wird in (5) eingesetzt:

$$s = \frac{(v - v_0)t^2}{2t} + v_0 t = \frac{(v - v_0)t + 2v_0 t}{2} = \underline{\underline{\frac{(v + v_0)t}{2}}}$$

15. Gegeben: $v_0 = 17$ m/s Gesucht: a

$v = 13$ m/s t

$s = 120$ m

1. Nach (6): $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \underline{\underline{-0{,}5 \text{ m/s}^2}}$

2. Nach (8): $t = \frac{2s}{v + v_0} = \underline{\underline{8 \text{ s}}}$

16. 1. $a = \underline{\underline{-0.65\ \mathrm{m/s^2}}}$

2. Nach (4): $v = \underline{\underline{8{,}5\ \mathrm{m/s}}}$

3. Nach (4): $t = \underline{\underline{23{,}1\ \mathrm{s}}}$

4. Nach (6): $s = \underline{\underline{173\ \mathrm{m}}}$

5. Nach (4): $a = \underline{\underline{-0{,}556\ \mathrm{m/s^2}}}$

17. 1. Nach (4): $v = \underline{\underline{4\ \mathrm{m/s}}}$

2. Nach (5): $s = \underline{\underline{48\ \mathrm{m}}}$

3. Nach (6): $s = \underline{\underline{50\ \mathrm{m}}}$ (10 m vor dem Hindernis)

18. Nach (7): $v = \underline{\underline{8{,}29\ \mathrm{m/s}}}$

19. Nach (6): $h = \underline{\underline{14\ \mathrm{m}}}$

20. Betrachtet man zunächst die Bewegung in der letzten Sekunde als freien Fall mit (unbekannter) Anfangsgeschwindigkeit und $h = 65$ m, $t = 1$ s, so folgt aus (5) $v_0 = 60$ m/s. Diese Geschwindigkeit hat der Körper, nachdem er $h - 65$ m durchfallen hat. Es muß also

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,(h - 65\ \mathrm{m})}$$

sein. Daraus ergibt sich $h = \underline{\underline{248{,}5\ \mathrm{m}}}$

21. Die Winkelgeschwindigkeit ist der Differentialquotient des Winkels nach der Zeit.

22. Der Winkel kann gemessen werden durch das Längenverhältnis des von ihm aus einem Kreis (um seinen Scheitel) ausgeschnittenen Kreisbogens zum Kreisradius. Als Einheit gilt der Winkel, für den das Längenverhältnis $\frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Kreisradius}}$ den Wert 1 besitzt.

23. Nach (11) und (12):
$v = \underline{\underline{22{,}9\ \mathrm{m/s}}}$ $\omega = \underline{\underline{18{,}3\ \mathrm{s^{-1}}}}$

24. Nach (11) und (12): $d = \underline{\underline{0{,}31\ \mathrm{m}}}$

25. Nach (11) und (12):
$\omega = \underline{\underline{31{,}4\ \mathrm{s^{-1}}}}$ $v = \underline{\underline{12{,}57\ \mathrm{m/s}}}$

26. $z = \frac{\varphi}{2\pi} = \underline{\underline{79{,}6}}$

27. $q = 2\pi z = \underline{\underline{100{,}5}}$

28. Eine Drehbewegung ist gleichmäßig beschleunigt (bzw. verzögert), wenn in gleichen Zeiten die Winkelgeschwindigkeit um gleiche Beträge zunimmt (bzw. abnimmt), wenn also die Winkelbeschleunigung konstant ist.

29. $\Delta t = \Delta\omega/\alpha = \underline{\underline{7{,}03\ \mathrm{s}}}$

30. Gegeben: $\omega_0 = 0$, $t = 34\ \mathrm{s}$, $n = 220/\mathrm{min}$ Gesucht: 1. ω 2. α 3. φ 4. z

1. $\omega = 2\pi n = \underline{\underline{23{,}04/\mathrm{s}}}$

2. $\alpha = \dfrac{2\pi n}{t} = \underline{\underline{0{,}678\ \mathrm{s}^{-2}}}$

3. $\varphi = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = \underline{\underline{392}}$

4. $z = \dfrac{\varphi}{2\pi} = \underline{\underline{62{,}3}}$

31. $t = \dfrac{2z}{n} = \underline{\underline{30\ \mathrm{s}}}$

32. 1. $\omega = \alpha t + \omega_0 = \underline{\underline{30{,}9\ \mathrm{s}^{-1}}}$

2. $n_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \underline{\underline{69{,}7/\mathrm{min}}}$ $n = \underline{\underline{295/\mathrm{min}}}$

33. Die Winkelgeschwindigkeit des Satelliten muß mit der der Erde übereinstimmen. Daher gilt:

$$\frac{v_1}{r_1} = \omega = \frac{v_2}{r_2}; \quad v_2 = \omega r_2 = \frac{2\pi \cdot 42578\ \mathrm{km}}{24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{3{,}1\ \mathrm{km/s}}}$$

34. Es kann nichts mehr ausfließen, da die Relativgeschwindigkeit des Wassers gegenüber dem Behälter gleich null ist.

35. $s = \underline{\underline{607\ \mathrm{m}}}$

36. Infolge des ständigen Wirkens der Schwere- (Fall-)beschleunigung ist die Geschoßbahn immer nach unten gekrümmt.

37. Er sieht eine Wurfparabel.

38. Der Geschwindigkeitsvektor bildet stets die Tangente in dem betreffenden Punkt der Bahnkurve.

39. $\tan\beta = \dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{gt}{v_0} = 1; \quad t = \dfrac{v_0}{g} = \underline{\underline{10{,}2\ \mathrm{s}}}$

40. Die gesamte Wurfdauer ist gleich der Summe aus Steigdauer und Falldauer, also gleich der *doppelten* Falldauer aus der Höhe h. Nach (5) ist die Falldauer

$t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot h$ folgt aus (15). Damit wird

$$t = 2\,t_F = 2\sqrt{\frac{2\,v_0^2 \sin^2\alpha}{2\,g^2}} = \underline{\underline{\frac{2\,v_0 \sin\alpha}{g}}}$$

41. Es ist $\sin\alpha \cos\alpha = \cos(90° - \alpha)\sin(90° - \alpha)$. Das bedeutet, daß die gleiche Wurfweite mit dem Komplementwinkel $(90° - \alpha)$ erzielt wird.

42. Nach (17): $s = \underline{\underline{220{,}7\ \text{m}}}$; nach (15): $h = \underline{\underline{31{,}9\ \text{m}}}$

43. Die Wegkomponenten sind

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad \text{(I)} \quad \text{und} \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2} \quad \text{(II)}$$

Aus (I) folgt $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

Dieser Wert in (II) eingesetzt:

$$\underline{\underline{y = x \tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}}}$$

44. Beim horizontalen Wurf ändert die Tangentialgeschwindigkeit fortgesetzt Betrag und Richtung, bei der gleichförmigen Kreisbewegung ändert die Tangentialkomponente nur ihre Richtung.

45. Eine geradlinige Bahn.

46. Nach (18): $v = \underline{\underline{2{,}74\ \text{m/s}}}$

47. Eine feste (reibungsfreie) Rolle ändert die Richtung, nicht den Betrag der Kraft. Folglich wirkt auf die beiden Affen, selbst wenn nur ein Affe klettert, in jedem Augenblick die gleiche Zugkraft nach oben (Kraft = Gegenkraft). Beide Affen erreichen gleichzeitig die Linie A—A.

48. Da zu jeder Kraft eine Gegenkraft gleichen Betrages gehört, wirkt auf den Kahn ebenfalls eine Kraft von 22 kp, jedoch in entgegengesetzter Richtung.

49. Lösung s. Bild 98

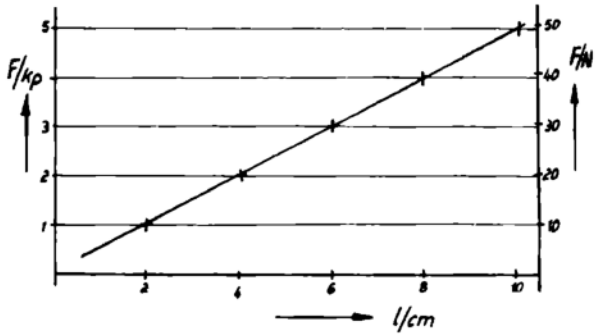


Bild 98

50. Die Rechnung ergibt

$$\frac{F}{G} = \frac{200\ \text{mm}}{350\ \text{mm}}; \quad F = 30\ \text{kp}\frac{20}{35} = \underline{\underline{17\ \text{kp}}}$$

In Bild 99 ist $F \mathrel{\hat{=}} 17$ mm, d. h. $F = \underline{\underline{17\ \text{kp}}}$

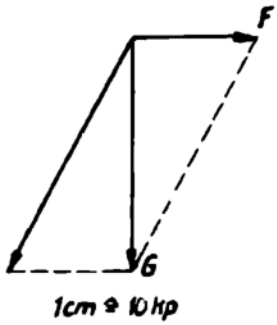


Bild 99

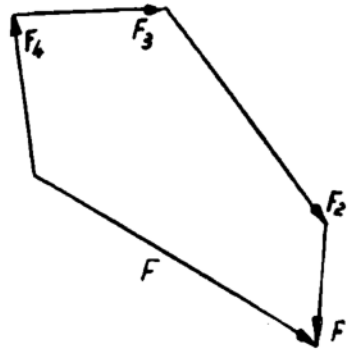


Bild 100

51. Die Richtigkeit Ihrer Lösung können Sie durch folgende Rechnung nachprüfen:

$$\frac{F}{G} = \frac{0{,}5\ \text{m}}{\sqrt{7^2 - 0{,}5^2}\ \text{m}} = \frac{0{,}5}{6{,}98} \approx \frac{1}{14}; \quad F \approx \frac{G}{14} = \underline{\underline{86\ \text{kp}}}$$

52. Lösung s. Bild 100

53. 1. $\underline{\underline{F_H = G \sin \alpha}}$; $\underline{\underline{F_N = G \cos \alpha}}$

2. Die Hangabtriebskraft F_H wächst proportional dem Sinus des Winkels α. Sie ist gleich null für $\alpha = 0°$ (horizontale Ebene) und gleich dem Gewicht G des Körpers für $\alpha = 90°$ (vertikale Ebene ≙ freier Fall).

   Die Normalkraft F_N ist gleich dem Gewicht für $\alpha = 0°$ und gleich null für $\alpha = 90°$.

3. $\underline{\underline{F_H = 10 \text{ kp}}}$; $\underline{\underline{F_N = 17{,}32 \text{ kp}}}$

4. Vgl. Bild 101

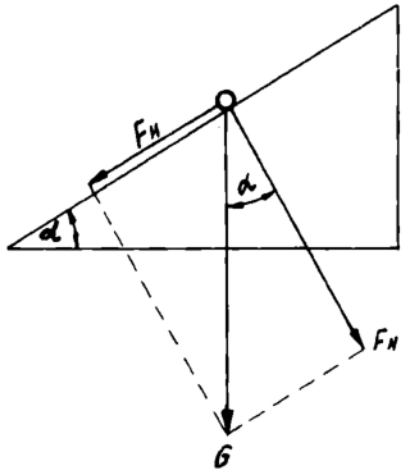


Bild 101

54. (Bild 102)

$M_1 = l_1 F_1 = r \cos \beta \, F_1 = \underline{\underline{4.33 \text{ kpm}}}$

$M_2 = l_2 F_2 = r \cos \gamma \, F_2 = \underline{\underline{2 \text{ kpm}}}$

$M = M_1 + M_2 = \underline{\underline{6.33 \text{ kpm}}}$

Es gilt auch $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 12{,}81 \text{ kp}$

und $\tan \alpha = F_1 : F_2$; $\alpha = 51° \, 20'$

und $M = l \, F = r \sin (\alpha + \beta)$; $F = \underline{\underline{6.33 \text{ kpm}}}$

55. Von jeder Kraft wirkt in diesem Falle nur die in die Ebene projizierte Komponente. Folglich gilt für jede Kraft

$$F' = F \cos 45°$$

Damit gilt auch für jedes Drehmoment

$$M = l \, F' = l \, F \cos 45° = M \cos 45°$$

Alle Ergebnisse sind mit $\cos 45° = \sqrt{2}/2$ zu multiplizieren.

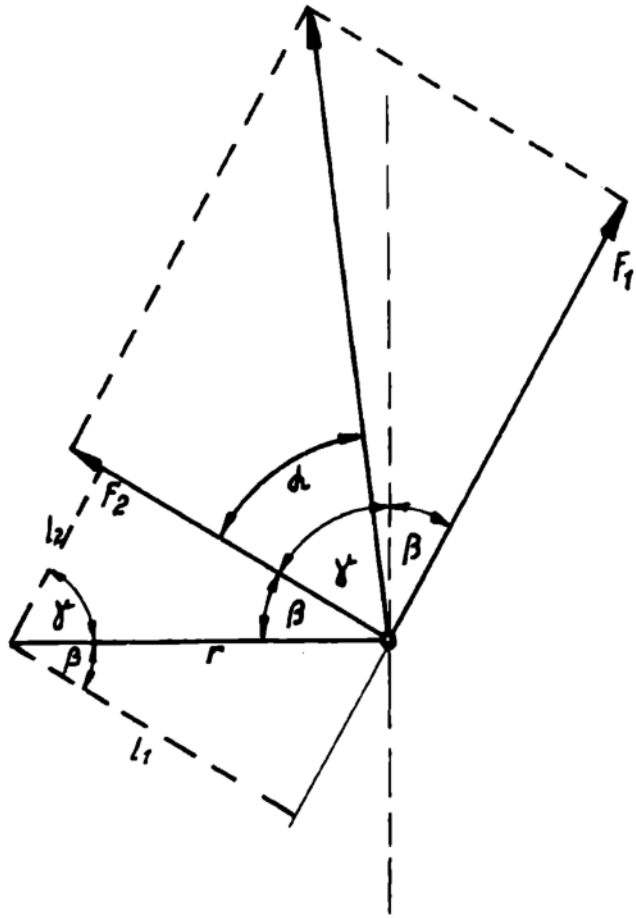


Bild 102

56. Bei einem Kräftepaar greifen an einem Körper zwei antiparallele Kräfte an. Eine Drehachse ist nicht vorgegeben. Bei einem Drehmoment greift an einem Körper mit fester Drehachse eine Kraft an, deren Wirkungslinie nicht durch die Drehachse gehen darf.

57. $M = M_1 + M_2 = F_1 \frac{l}{2} + F_2 \frac{l}{2} = F_1 l$

58. Aus Symmetriegründen muß der Schwerpunkt auf der Mittelachse des Kegels liegen. ~~Jeder Schnitt durch diese Achse ist ein Dreieck nach Bild 32.~~ Mit

~~Schwerpunkthöhe: $h = \frac{1}{3} H$ (H = Körperhöhe)~~

$dV = \frac{\pi}{4} b^2 \, dx$

184 $\Rightarrow$ (26) $x_s = \frac{3}{h^3} \int_0^h x^3 \, dx = \frac{3}{4} h$

und von d. Grundfläche aus gerechnet $x_s' = \frac{1}{4} h$

59. Lösung ähnlich Bild 33

Das resultierende Drehmoment wird gleich null, wenn die Resultierende im Schnittpunkt der Wirkungslinien der beiden Kräfte angreift.

60. Jeder Körper verharrt in Ruhe oder in geradliniger, gleichförmiger Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Bewegungszustand zu ändern.

61. Bei Einwirkung einer Kraft auf einen Körper mit der Masse m erfährt dieser Körper eine Beschleunigung, die der Kraft proportional, der Masse umgekehrt proportional ist, und die Richtung der einwirkenden Kraft hat.

62. Das Newton ist die kohärente Krafteinheit im gesetzlichen Einheitensystem: $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$

Das Kilopond stammt aus dem früheren technischen Einheitensystem. Es ist definiert als $1\ \mathrm{kp} = 9{,}80665\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$. Das Gewicht eines Körpers mit der Masse 1 kg beim Normwert der Fallbeschleunigung ist gleich 1 kp.

63. Massen werden durch Vergleich bestimmt (z. B. durch Wägen mit der Balkenwaage). Kräfte werden durch ihre Wirkungen bestimmt (z. B. mit der Federwaage).

64. z. B.: $m = 70\ \mathrm{kg}$; $G = m\,g = \underline{\underline{686{,}7\ \mathrm{N}}}$; $G = \underline{\underline{70\ \mathrm{kp}}}$

65. Der mitbewegte Beobachter nimmt bei beschleunigter Bewegung eines Bezugssystems die Wirkung von Kräften auf Körper in diesem Bezugssystem wahr. Ein außenstehender Beobachter (ruhender Beobachter) erkennt solche Kräfte nicht, für ihn sind die Körper im bewegten System einfach träge. Solche Kräfte im beschleunigten Bezugssystem heißen Trägheitskräfte.

66. 1. $F_{auf} = G + F_T = \underline{\underline{149{,}4\ \mathrm{kp}}}$

2. $F_{ab} = G - F_T = \underline{\underline{90{,}6\ \mathrm{kp}}}$

3. $F_{auf} = G - F_T = \underline{\underline{90{,}6\ \mathrm{kp}}}$

$F_{ab} = G + F_T = \underline{\underline{149{,}4\ \mathrm{kp}}}$

4. $F = G = \underline{\underline{120\ \mathrm{kp}}}$

5. $F = G - F_T = \underline{\underline{0}}$

67. 1. $F = -\dfrac{m\,v_0}{t} = -\underline{\underline{5000\ \mathrm{N}}} = \underline{\underline{-510\ \mathrm{kp}}}$

2. $a = -3{,}33\ \mathrm{m/s^2}$; die Bremsen sind in Ordnung

3. $\mu = \dfrac{v_0}{g\,t} = \underline{\underline{0{,}34}}$

129400 N = 13,2 Mp

68. $F = m\,a + F_H = m\,(a + g \sin \alpha) = \underline{\underline{70\,700\ \text{N}}} = \underline{\underline{7{,}2\ \text{Mp}}}$

$\underline{\underline{m \geqq 6\ \text{t}}}$

69. 1. $|a| = \dfrac{v^2}{2\,s} = \underline{\underline{139\ \text{m/s}^2}} = \underline{\underline{14\,g}}$

2. $F_T = m\,a \approx 14\,m\,g = \underline{\underline{14\,G}}$

Auf jeden Körper wirkt eine Kraft in Bewegungsrichtung, die 14mal so groß ist wie sein Gewicht!

3. $F_T = \underline{\underline{425\ \text{kp}}}$

70. In der Physik verstehen wir unter Arbeit das Produkt aus Kraft und Weg. Beide Größen müssen in ihren Richtungen übereinstimmen. Bilden Kraft- und Wegrichtung den Winkel α miteinander, so gilt: $W = F_s\,s = F\,s \cos \alpha$. Für nichtkonstante Kraft gilt $W = \int F_s\,\mathrm{d}s$

71. Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. Mechanische Energie kann potentielle und kinetische Energie sein.

72. Ein Perpetuum mobile sollte eine Maschine sein, die nach einmaligem Arbeitsaufwand unaufhörlich weiterlaufen und zusätzlich Arbeit verrichten sollte. Eine derartige Maschine ist mit dem Energiesatz unvereinbar.

73. Aus $W_{\text{pot}} = W_{\text{kin}}$ folgt: $h = v^2/2\,g = \underline{\underline{32\,620\ \text{m}}}$

74. $W = \int\limits_0^s F\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^s k\,x\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}\,k\,s^2}}$

75. $v = \sqrt{2\,\mu\,g\,s} = \underline{\underline{1{,}25\ \text{m/s}}}$ = 45 km/h

76. Das Ergebnis ändert sich nicht, da v unabhängig von m ist (s. allgemeine Lösung Aufg. 75)

77. 1. $a = -v_0^2/2\,s = \underline{\underline{-0{,}74\ \text{m/s}^2}}$

2. $F = m\,a = \underline{\underline{-7400\ \text{N}}} = \underline{\underline{-754\ \text{kp}}}$

78. In beiden Fällen muß die kinetische Energie in Reibungsarbeit umgewandelt werden. Der Bremsweg wird um 11% verlängert.

$W_R = F_R\,s = F_{R1}\,s_1$. Mit $F_{R1} = 0{,}9\,F_R$ wird $F_R\,s = 0{,}9\,F_R\,s_1$.

Daraus folgt $\Delta s = s_1 - s = \underline{\underline{0{,}1\,s_1}} = \underline{\underline{s/9}}$

79. $P = F\,v \cos \alpha = \underline{\underline{56\ \text{W}}}$

80. 1. $W = \frac{m\,v^2}{2} = \underline{\underline{0{,}145\ \text{kWh}}}$

2. $P_{\text{mittel}} = F\,v_{\text{mittel}} = \frac{1}{2}\,F\,v = \frac{1}{2}\,m\,a\,v = \frac{m\,v^3}{4\,s} = \underline{\underline{21{,}7\ \text{kW}}}$

3. $P_{\text{end}} = F\,v = m\,a\,v = \frac{m\,v^3}{2\,s} = 2\,P_{\text{mittel}} = \underline{\underline{43{,}4\ \text{kW}}}$

81. Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers.

82. $F\,t = m\,v;\quad t = \underline{\underline{285\ \text{s}}}$

83. 1. $v = F\,t/m;\quad v_1 = \underline{\underline{14{,}72\ \text{m/s}}};\quad v_2 = \underline{\underline{9{,}81\ \text{m/s}}}$

2. $s = v\,t/2;\quad s_1 = \underline{\underline{441{,}6\ \text{m}}};\quad s_2 = \underline{\underline{294{,}3\ \text{m}}}$

84. $F = \frac{m\,v^2}{2\,s} = \underline{\underline{800000\ \text{N}}} = \underline{\underline{81{,}5\ \text{Mp}}}$

85. Im abgeschlossenen System ist die Summe aller Impulse konstant.

86. $m\,v = F_W\,t + F_R\,t;\quad t = \frac{m\,v}{F_W + F_R} = \underline{\underline{4{,}2\ \text{s}}}$

87. Nichts. Nach Kraft = Gegenkraft heben sich die Kraftwirkungen auf.

88. Elastischer Stoß: Hammer: Index *1*; Stahlkugel: Index *2*

$v_2 = 0$

$v_2' = v_1\,\frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}$; für $m_1 \gg m_2$ folgt

$v_2' \approx \underline{\underline{2\,v_1 = 4\ \text{m/s}}}$

Genaues Ergebnis: $v_2' = 3{,}92\ \text{m/s}$

89. Gegeben: $m_1 = 200\ \text{g}$ Gesucht: v_1'

$m_2 = 50\ \text{g}$ v_2'

$v_1 = 0{,}5\ \text{m/s}$

$v_2 = 0$

Nach (43'): $v_1' = \underline{\underline{0{,}3\ \text{m/s}}};\quad v_2' = \underline{\underline{0{,}8\ \text{m/s}}}$

90. Siehe [3.3.8.]! — Nach Gleichung (44) sind Zentripetal- und Zentrifugalkraft dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit und dem Radius proportional. Für konstante Bahngeschwindigkeit ist die Zentrifugalkraft dem Radius umgekehrt proportional (Fahrzeug in der Kurve bei unverminderter Geschwindigkeit!).

91. Fliehkraftregler — Zentrifugen — Wäscheschleuder.

92. $\frac{G}{F_Z} = \frac{g\,T^2}{4\,\pi^2\,r} = \underline{\underline{291}}$

93. Nach Bild 103 ist $F_Z = \sqrt{F^2 - G^2} = 4\,\pi^2\,n^2\,r\,m$

$$n = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1}{m\,r}\sqrt{F^2 - m^2\,g^2}} = \underline{\underline{\cancel{365}\ 117\ \text{min}^{-1}}}$$

94. 1. $v = \sqrt{\mu\,r\,g} = 50$ km/h

2. $F_Z = \frac{m\,v^2}{r} = \underline{\underline{135\ \text{N}}} = \underline{\underline{13{,}8\ \text{kp}}}$

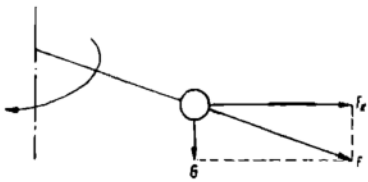


Bild 103

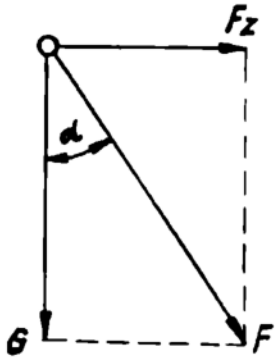


Bild 104

95. Leichte Felgen und Reifen haben infolge ihrer geringen Masse ein kleines Massenträgheitsmoment. Dadurch ist zum Anfahren des Rades weniger Arbeit aufzuwenden als bei schweren Felgen und Reifen.

96. Nach Bild 104 ist $\tan\alpha = \frac{v^2}{r\,g} = 0{,}82$; $\alpha = \underline{\underline{39{,}3°}}$

97. Das Massenträgheitsmoment eines Körpers bezüglich einer beliebigen Drehachse ist gleich der Summe aus dem Massenträgheitsmoment J_S, das sich auf die dazu parallele, durch den Schwerpunkt verlaufende Achse bezieht, und dem Produkt aus der Masse m und dem Quadrat des Abstandes a der Drehachse vom Schwerpunkt. — Mit Hilfe des Satzes von Steiner läßt sich das Massenträgheitsmoment eines Körpers berechnen, wenn er um eine beliebige Achse rotiert, die nicht durch den Schwerpunkt läuft.

98. $J_A = J_S + m\,a^2 = \underline{\underline{26{,}4\ \text{kg cm}^2}}$

99. 1. $F_A = \underline{\underline{487{,}5\ \text{kp}}}$ $\qquad F_B = \underline{\underline{1312{,}5\ \text{kp}}}$

2. $F_Z = \underline{\underline{58\ \text{kp}}}$

3. Befindet sich der Schwerpunkt unterhalb der Rotationsachse, so addieren sich Schwerkraft und Zentrifugalkraft:

$$F_A' = F_A + F_{ZA} = 487{,}5\ \text{kp} + 15{,}7\ \text{kp} = \underline{\underline{503{,}2\ \text{kp}}}$$

$$F_B' = F_B + F_{ZB} = 1312{,}5\ \text{kp} + 42{,}3\ \text{kp} = \underline{\underline{1354{,}8\ \text{kp}}}$$

Liegt der Schwerpunkt oberhalb der Rotationsachse, so ist die Zentrifugalkraft von der Schwerkraft zu subtrahieren:

$$F_A'' = F_A - F_{ZA} = \underline{\underline{471{,}8\ \text{kp}}}$$

$$F_B'' = F_B - F_{ZB} = \underline{\underline{1270{,}2\ \text{kp}}}$$

100. Der Drehimpuls ist das Produkt aus Massenträgheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit. Er ist analog zum Impuls $m\,v$ gebildet. Er ist gleich dem Antriebsmoment.

101. Nach (50) ist $M = \dfrac{J\,\omega}{t} = \underline{\underline{5236\ \text{Nm}}}$

Aus $\varphi = \dfrac{\omega\,t}{2}$ und $z = \dfrac{\varphi}{2\,\pi}$ folgt $z = \dfrac{n\,t}{2} = \underline{\underline{8{,}33}}$

102. Bei der Drehbewegung tritt

anstelle der Kraft F	das Drehmoment M
anstelle des Weges s	der Drehwinkel φ
anstelle der Masse m	das Massenträgheitsmoment J
anstelle der Geschwindigkeit v	die Winkelgeschwindigkeit ω
anstelle der Beschleunigung a	die Winkelbeschleunigung α
anstelle des Impulses $m\,v$	der Drehimpuls $J\,\omega$

103. Die Beschleunigung ist proportional der Kraft, jede Beschleunigungskomponente ist proportional der entsprechenden Kraftkomponente. Nach Bild 105 erfolgen Änderungen der Geschwindigkeitsrichtung (wegen a_r) und des Geschwindigkeitsbetrages (wegen a_t).

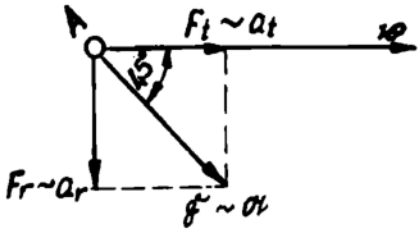


Bild 105

104. Nach Bild 65 ist

$$\mathrm{d}m = \varrho\, A\, \mathrm{d}y \quad (A = \text{Querschnittsfläche};$$
$$y = \text{Abstand des Massenelements } \mathrm{d}m \text{ von der Stabmitte})$$

$$r^2 = R^2 + y^2$$

$$J = \int r^2\, \mathrm{d}m = \varrho\, A \int_{-l/2}^{+l/2} (R^2 + y^2)\, \mathrm{d}y = m\left(R^2 + \frac{l^2}{12}\right)$$

Mit $R = l/2$ folgt $\underline{\underline{J = \frac{4}{3}\, m\, R^2}}$

(Für $R \gg l$ wäre $J \approx m\, r^2$; der Stab könnte dann als Massenpunkt betrachtet werden.)

105. 1. Auf den mitbewegten Beobachter wirkt die Zentrifugalkraft F_Z und im Schwerefeld der Erde sein Gewicht G. Beide sind entgegengesetzt gleich und heben sich daher auf. Der Mensch befindet sich im schwerefreien Zustand.

$$\underline{\underline{G_S = G - F_Z = 0}}$$

2. Aus $G = F_Z$ folgt $v = \sqrt{r\, g} = 7{,}97$ km/s

106. 1. Nach Lehrbeispiel 56 ist

$$v_{\text{Kugel}} = \sqrt{\frac{10\, g\, h}{7}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{5}{7}}\, \sqrt{2\, g\, h}}}$$

2. Entsprechend folgt mit $J = \frac{m}{2}\, r^2$ für den Zylinder

$$v_{\text{Zyl.}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}}\, \sqrt{2\, g\, h}}}$$

3. Die Kiste erhält nur kinetische Energie der Translation. Folglich wird

$$v_{\text{Kiste}} = \underline{\underline{\sqrt{2\, g\, h}}}$$

Diskussion:

Es ist $1 > \sqrt{5/7} > \sqrt{2/3}$. Die reibungsfrei gleitende Kiste besitzt also am Ende der schiefen Ebene die größte Geschwindigkeit, der rollende Zylinder die kleinste. Kugel und Zylinder erhalten neben Translations- auch Rotationsenergie; die anfangs vorhandene potentielle Energie ist für alle drei Körper gleich (bei gleicher

Masse; das spielt aber hier keine Rolle). Die Endgeschwindigkeiten sind sowohl unabhängig von der Masse der Körper, als auch von den Radien der Kugel und des Zylinders und der Neigung der schiefen Ebene.

Spezielle Ergebnisse:

1. $v_{\text{Kugel}} = \underline{\underline{1{,}67 \text{ m/s}}}$
2. $v_{\text{Zyl.}} = \underline{\underline{1{,}62 \text{ m/s}}}$
3. $v_{\text{Kiste}} = \underline{\underline{\cancel{2{,}37 \text{ m/s}}}}$ 1,98 m/s

107. In der Zeit von 2,1 s finden 142,8 Schwingungen statt. Da eine volle Schwingung dem Vollwinkel 360° entspricht, interessiert nur der überschießende Teil von 0,8 Schwingung. Der Phasenwinkel ist $\varphi = 0{,}8 \cdot 360° = \underline{\underline{288°}}$

108. $y \approx \underline{\underline{3 \text{ cm}}}$

109. $T = \underline{\underline{0.628 \text{ s}}}$

110. $y_{\max} = \underline{\underline{2.1 \text{ cm}}}$

111. Für ein physisches Pendel gilt $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J}{m g d}}$

Nach dem Steinerschen Satz ist $J_A = J_S + m a^2$

Wird $d = a$ kleiner (Verschiebung der Masse zum Aufhängepunkt hin), dann wird das Massenträgheitsmoment kleiner und damit wird auch die Schwingungsdauer kleiner.

112. 1. $T = \underline{\underline{0{,}2 \text{ s}}}$

2. $T = \underline{\underline{20 \text{ s}}}$

113. 1. $l = \dfrac{g T^2}{4\pi^2} = \underline{\underline{35{,}7 \text{ m}}}$

2. $W_{\text{ges}} = \dfrac{1}{2} m v_{\max}^2 = \dfrac{2\pi^2 m y_{\max}^2}{T^2} = \underline{\underline{22{,}3 \text{ Ws}}}$

3. $k = m \omega^2 = 55 \text{ kg/s}^2 = \underline{\underline{55 \text{ N/m}}} = \underline{\underline{5{,}6 \text{ kp/m}}}$

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort 3

Mechanik

1. Einführung 5
1.1. Voraussetzungen 5
1.2. Physikalische Größen und Größengleichungen 6

2. Kinematik
2.1. Grundbegriffe 8
2.1.1. Einteilung der Bewegungen 8
2.1.1.1. Fortschreitende Bewegung 8
2.1.1.2. Drehbewegung 9
2.1.1.3. Gleichförmige und ungleichförmige Bewegung 9
2.1.1.4. Schema der Bewegungsarten 9
2.1.2. Begriff der Geschwindigkeit 9
2.1.3. Begriff der Beschleunigung 12
2.2. Ableitung der Bewegungsgesetze 14
2.2.1. Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen geradlinigen Bewegung .. 14
2.2.2. Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung 14
2.2.3. Sonderfälle der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung 18
2.2.3.1. Verzögerte Bewegung 18
2.2.3.2. Weg als Funktion der Endgeschwindigkeit 19
2.2.3.3. Start aus der Ruhelage 19
2.2.3.4. Verzögerung bis zum Stillstand 19
2.2.3.5. Freier Fall und senkrechter Wurf 20
2.2.4. Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Körpers 22
2.2.5. Winkelbeschleunigung eines rotierenden Körpers 25
2.2.6. Gesetze der Drehbewegung 26

Zusammenfassung 30

Übungen 1 bis 32 31

2.3. Geschwindigkeit und Beschleunigung als Vektoren 33
2.3.1. Relativität der Bewegungen 33
2.3.2. Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeitsvektoren 37
2.3.3. Waagerechter und schräger Wurf 38
2.3.3.1. Waagerechter Wurf 38
2.3.3.2. Schräger Wurf 40
2.3.4. Krummlinige Bewegung im allgemeinen 42
2.3.5. Radialbeschleunigung bei der Drehbewegung 44

Zusammenfassung 45

Übungen 33 bis 46 46

3. Dynamik 47
3.1. Kräfte im Gleichgewicht 47
3.1.1. Kräfte als vektorielle Größen 47
3.1.2. Kraft und Gegenkraft 48
3.1.3. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt 49
3.1.4. Kräfte am starren Körper 51
3.1.4.1. Zusammensetzen von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten 51
3.1.4.2. Drehmoment 53
3.1.4.3. Zusammensetzen von Drehmomenten mit gemeinsamer Drehachse 55
3.1.4.4. Kräftepaar 56
3.1.4.5. Massenmittelpunkt 57
3.1.4.6. Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper 60

Zusammenfassung 61

Übungen 47 bis 59 62

3.2. Kräfte am bewegten Massenpunkt 64
3.2.1. Die Newtonschen Gesetze 64
3.2.1.1. Trägheitsgesetz 65
3.2.1.2. Das Grundgesetz der Dynamik 67
3.2.2. Trägheitskräfte 74
3.2.3. Bewegungshemmende Kräfte 80
3.2.3.1. Haftreibung und Gleitreibung 80
3.2.3.2. Rollreibung und Fahrwiderstand 83
3.2.4. Arbeit und Energie bei mechanischen Vorgängen 85

3.2.4.1. Arbeit 85
3.2.4.2. Potentielle und kinetische Energie 90
3.2.4.3. Energiebilanz bei Betrachtung von Reibungskräften 94
3.2.5. Leistung und Wirkungsgrad 96
3.2.6. Kraftstoß und Impuls 100
3.2.6.1. Die physikalischen Größen Kraftstoß und Impuls 100
3.2.6.2. Ein Kraftstoß wirkt auf zwei Körper 102
3.2.6.3. Stoßvorgänge 106
3.2.7. Das Einheitensystem und die gesetzlichen Einheiten 109
Zusammenfassung 112
Übungen 60 bis 89 114
3.3. Kräfte an rotierenden Körpern 117
3.3.1. Energie des rotierenden Körpers 118
3.3.2. Massenträgheitsmoment 119
3.3.2.1. Berechnung von Massenträgheitsmomenten 120
3.3.2.2. Satz von Steiner 122
3.3.3. Dynamisches Grundgesetz für den rotierenden Körper 128
3.3.4. Drehimpuls 130
3.3.5. Translation und Rotation — Analogiebetrachtungen 134
3.3.6. Trägheitskräfte im rotierenden Bezugssystem 136
3.3.6.1. Zentrifugalkraft 136
3.3.6.2. Corioliskraft 144
3.3.7. Gravitation 147
Zusammenfassung 152
Übungen 90 bis 106 154
4. Schwingungslehre 156
4.1. Kinematik der harmonischen Bewegung 157
4.1.1. Elongation 158
4.1.2. Geschwindigkeit und Beschleunigung 161
4.1.3. Überlagerung von harmonischen Schwingungen 164
4.2. Dynamik schwingender Körper 166
4.2.1. Kraftgesetz 166
4.2.2. Lineare Federschwingung 167

4.2.3. Drehschwingungen 168
4.2.4. Mathematisches Pendel 169
4.2.5. Physisches Pendel 171
4.2.6. Bestimmung des Massenträgheitsmoments aus Schwingungen 173
4.2.7. Energiebetrachtungen 174
Zusammenfassung 175
Übungen 107 bis 113 176
Antworten und Lösungen 177
Anhang

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte vorbehalten

Veröffentlicht unter Ag 613/518/68 · 4. Ausgabe · 4. Auflage
Satz und Druck: Gutenberg Buchdruckerei und Verlagsanstalt, Betrieb der VOB „Aufwärts", Weimar
Nachdruck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", Bad Langensalza
Umschlag: Institut für Fachschulwesen der DDR, Karl-Marx-Stadt, Produktionsabteilung Zwickau

Katalognummer 030.01–01 · Vorzugsschutzgebühr: 4,50 M