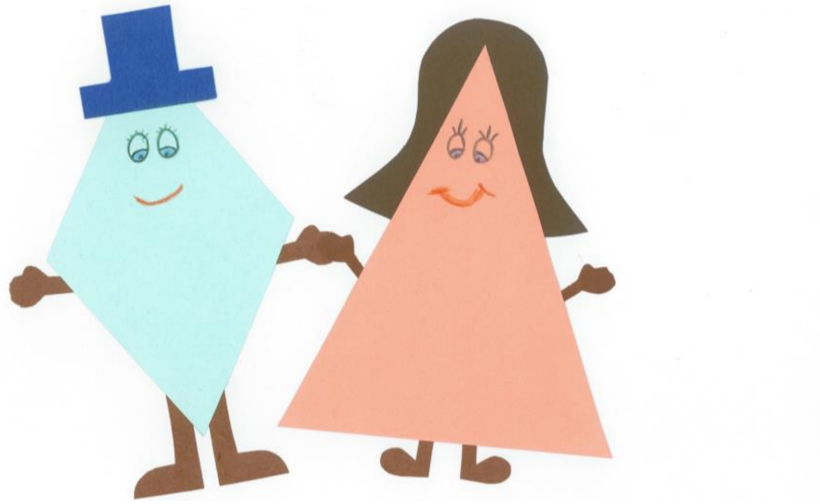
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.



Mit Herrn Raute und Frau Dreieck rechnen und knobeln!

Wenn du teilnimmst, beachte bitte die Hinweise:

Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast! Formuliere zu jeder Aufgabe einen Antwortsatz.

Einsendungen und Hinweise an

Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz
oder
norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir

Norman Bitterlich

w w w . m a t h e - l o g o . o r g

Aufgabe 1. Es ist herbstlich geworden. Frau Dreieck, Herr Raute und ihre Kinder Kreisa und Quadrato sammelten den ganzen Nachmittag Kastanien. Sie hatten kleine Stoffbeutel mit, die sie mit den gesammelten Kastanien füllten. Insgesamt füllten sie 30 Beutel. Am Abend stellten sie fest:

- Quadrato hatte 4 Beutel mehr gefüllt als Kreisa.
- Quadrato und Kreisa füllten zusammen doppelt so viele Beutel wie Frau Dreieck.
- Herr Raute füllte so viele Beutel wie Quadrato und Kreisa zusammen.

Wie viele Beutel hatte jeder beim Sammeln gefüllt?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Kreisa hatte 4 Beutel, Quadrato 8 Beutel, Frau Dreieck 6 Beutel und Herr Raute 12 Beutel gefüllt.

Herleitung: Die Lösung kannst du durch systematisches Probieren finden. Denke dir eine Anzahl Beutel, die Quadrato gefüllt haben könnte. Ermittle daraus die Anzahlen der Beutel der anderen. Wenn die Summe aller vier Anzahlen genau 30 Beutel ergibt, hast du eine Lösung gefunden.

Beginne zum Beispiel mit 5 Beutel – denn Kreisa hat ja bestimmt auch einen Beutel gefüllt.

Anzahl gefüllter Beutel				gesamt	Vergleich
Quadrato	Kreisa	Frau Dreieck	Herr Raute		
5	5 – 4 = 1	(5 + 1) : 2 = 3	5 + 1 = 6	5 + 1 + 3 + 6 = 15	15 < 30
6	6 – 4 = 2	(6 + 2) : 2 = 4	6 + 2 = 8	6 + 2 + 4 + 8 = 20	20 < 30
7	7 – 4 = 3	(7 + 3) : 2 = 5	7 + 3 = 10	7 + 3 + 5 + 10 = 25	25 < 30
8	**8 – 4 = 4**	**(8 + 4) : 2 = 6**	**8 + 4 = 12**	**8 + 4 + 6 + 12 = 30**	**30 = 30**
9	9 – 4 = 5	(9 + 5) : 2 = 7	9 + 5 = 14	9 + 5 + 7 + 14 = 35	35 > 30

Weitere Lösungen kann es nicht geben, denn für größere Anzahlen wird auch die Gesamtanzahl größer als 30. Bei einer so ausführlichen Tabelle ist keine Probe erforderlich, denn die Bedingungen der Aufgabe sind bereits alle in der Tabelle berücksichtigt.

Lösungsvariante: Kürze die Anzahl der Beutel von Quadrato mit Q ab. Entsprechend bezeichnen K, D und R die Anzahlen der Beutel von Kreisa, Frau Dreieck und Herrn Raute. Dann kannst du die Aussagen der Aufgabe als Gleichungen schreiben:

(1) Quadrato hat 4 Beutel mehr als Kreisa: $Q = K + 4$,
(2) Quadrato und Kreisa füllten doppelt so viel wie Frau Dreieck: $Q + K = 2 \cdot D$,
(3) Herr Raute füllte so viel wie Quadrato und Kreisa zusammen: $Q + K = R$,
(4) Insgesamt waren es 30 Beutel: $Q + K + D + R = 30$

Ersetze zum Beispiel in Gleichung (4) zunächst R durch Q + K:

$$Q + K + D + (Q + K) = 30.$$

Nun ist aber nach Gleichung (2) $Q + K = 2 \cdot D$, also gilt

$$(Q + K) + D + (Q + K) = 2 \cdot D + D + 2 \cdot D = 5 \cdot D = 30.$$

So hast du bereits D = 6 gefunden.

Ersetze nun in der Gleichung (2) $Q + K = 2 \cdot D = 12$ die Variable K durch $K = Q – 4$, also

$$Q + Q – 4 = 2 \cdot Q – 4 = 12.$$

Damit findest du Q = 8. Schließlich folgt $K = Q – 4 = 8 – 4 = 4$ und $R = Q + K = 8 + 4 = 12$.

Prüfe mittels einer Probe, ob die gefundenen Zahlen wie gefordert als Summe 30 ergeben:

$$8 + 4 + 6 + 12 = 30.$$

****

Aufgabe 2. Ein paar Tage später gingen Kreisa und Quadrato noch einmal Kastanien sammeln. Sie haben aber diesmal nur wenige gefunden, beide gleich viele. Trotzdem gab Quadrato an: „Wenn du mir nur 4 Kastanien von deinen gibst, habe ich doppelt so viele wie du dann hast.“

Wie viele Kastanien hatten beide Kinder zusammen gesammelt?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Zusammen haben Quadrato und Kreisa 24 Kastanien gesammelt.

Herleitung: Auch hierbei hilft dir eine tabellarische Übersicht. Du kannst mit der Zahl 4 beginnen, denn Kreisa muss mindestens 4 Kastanien haben, damit sie 4 abgeben kann.

Kreisa und Quadrato: Anzahl	Quadrato: Anzahl + 4	Kreisa: Anzahl - 4	Vergleich
4	8	0	$8 > 2 \cdot 0$
5	9	1	$9 > 2 \cdot 1$
6	10	2	$10 > 2 \cdot 2$
7	11	3	$11 > 2 \cdot 3$
8	12	4	$12 > 2 \cdot 4$
9	13	5	$13 > 2 \cdot 5$
10	14	6	$14 > 2 \cdot 6$
11	15	7	$15 > 2 \cdot 7$
12	**16**	**8**	$\mathbf{16 = 2 \cdot 8}$
13	17	9	$17 < 2 \cdot 9$

Da Kreisa und Quadrato jeweils 12 Kastanien sammelten, sind es insgesamt (12 + 12 =) 24 Kastanien. Bei einer so ausführlichen Tabelle ist keine Probe erforderlich, denn die Bedingungen der Aufgabe sind bereits alle in der Tabelle berücksichtigt.

Lösungsvariante: Wenn Quadrato und Kreisa jeweils X Kastanien gesammelt haben, lautet die Aufgabenstellung in Gleichungsform:

$$X + 4 = 2 \cdot (X – 4).$$

Also gilt $X + 4 = 2 \cdot X – 8$. Daraus findest du X = 12. Mit der Probe bestätigst du, dass dir beim Umformen kein Fehler unterlaufen ist:

12 + 4 = 16 ist doppelt so viel wie 12 – 4 = 8.

****

Aufgabe 3. Kreisa brachte buntes Herbstlaub mit nach Hause, und zwar 2 Kastanienblätter, 2 Eichenblätter und 1 Ahornblatt. Sie wollte diese fünf Blätter in einer Reihe aufhängen, aber so, dass zwei gleiche Blätter nicht nebeneinander hängen.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es dafür? Schreibe alle auf!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Es gibt 12 Möglichkeiten, die Blätter wie gefordert anzuordnen:

AEKEK,	AKEKE,	EAKEK,	EKAEK,	EKAKE,	EKEAK,
EKEKA,	KAEKE,	KEAKE,	KEAEK,	KEKAE,	KEKEA.

Zur Kontrolle: In jeder Anordnung sind ein Ahornblatt (A), zwei Eichelblätter (E) und zwei Kastanienblätter (K). Außerdem stehen nie zwei E oder zwei K nebeneinander.

Zur Lösungsfindung: Angenommen, Kreisa beginnt mit A. Als zweites Blatt könnte sie E nehmen. Dann ist die weitere Reihenfolge bereits festgelegt (K-E-K), weil sonst zwei gleiche Blätter nebeneinander wären. Die Reihenfolge lautet also in diesem Fall A-E-K-E-K. Würde sie als zweites Blatt K auswählen, ergibt sich die Reihenfolge A-K-E-K-E. Weitere Möglichkeiten gibt es in diesem Fall nicht. Insgesamt sind es 2 verschiedene Möglichkeiten

Angenommen, Kreisa beginnt mit E. Für die weitere Reihenfolge fertige eine Tabelle an, in der du alle Möglichkeiten der Anordnung einträgst. Beachte, dass das zweite Blatt nicht auch E sein kann. Prüfe nun, ob diese Anordnungen der Aufgabenstellung entsprechen:

2. Blatt	A	A	A	K	K	K	K	***K***	***K***
3. Blatt	E	K	***K***	A	A	E	E	***K***	***K***
4. Blatt	***K***	E	***K***	E	K	A	K	A	E
5. Blatt	***K***	K	E	K	E	K	A	E	A
gemäß Aufgabenstellung	nein	ja	nein	ja	ja	ja	ja	nein	nein

In diesem Fall gibt es also 5 verschiedene Möglichkeiten.

Angenommen, Kreisa beginnt mit K. Dann gibt es auch 5 Möglichkeiten, weil in der Tabelle nur jedes K durch ein E und jedes E durch ein K zu ersetzen ist.

Also gibt es insgesamt (2 + 5 + 5 =) 12 verschiedene Möglichkeiten, die Blätter wie gefordert anzuordnen.

****

Aufgabe 4. Kreisa hatte sich für eine Reihefolge entschieden und die Blätterkette Frau Dreieck geschenkt. Doch am nächsten Morgen war sie zerissen. Frau Dreieck wollte wissen, wem das Missgeschick passierte.

Kreisa sagte: „Ich war es nicht und Quadrato auch nicht“
Quadrato sagte: „Ich war es nicht.“
Herr Raute sagte: „Quadrato war es“.

Frau Dreieck merkte aber, dass eine Antwort nicht wahrheitsgemäß war. Deshalb bekam sie schnell heraus, wer es war.

Findest du es auch heraus? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Herrn Raute war das Missgeschick passiert.

Begründung: Wenn du nacheinander Quadrato, Kreisa und Herrn Raute als Täter annimmst, kannst du prüfen, welche Aussagen richtig (wahrheitsgemäß) und welche Aussagen falsch (nicht wahrheitsgemäß) wären. Nur wenn genau eine Aussage falsch (nicht wahrheitsgemäß) ist – so wie es Frau Dreieck bemerkte – ist der Täter überführt.

Täter	Aussage von Kreisa	Aussage von Quadrato	Aussage von Herrn Raute
Quadrato	falsch	falsch	richtig
Kreisa	falsch	richtig	falsch
Herr Raute	richtig	richtig	falsch

Nur wenn Herrn Raute das Missgeschick passierte, war genau eine Antwort falsch (nicht wahrheitsgemäß). Damit war Herr Raute überführt – ihm war das Missgeschick passiert.

Lösungsvariante: Die Antworten von Quadrato und Herrn Raute widersprechen sich. Also muss eine dieser Aussagen falsch (nicht wahrheitsgemäß) sein. Damit ist aber die Antwort von Kreisa richtig (wahrheitsgemäß): Weder Kreisa noch Quadrato passierte das Missgeschick. Also war es Herr Raute, dem das Missgeschick passierte.

****

Runde 1 — Zahlenspielereien — (Teil B)

Die Kinder von Frau Dreieck und Herrn Raute beschäftigen sich gern mit Zahlen und entdecken dabei viele interessante Eigenschaften.

Aufgabe 1. Kreisa wählt vier verschiedene ungeraden Zahlen so aus, dass deren Summe 22 ergibt.

Aufgabe 1a) Gib auch du 4 verschiedene ungerade Zahlen an, deren Summe 22 ergibt.

Aufgabe 1b) Kannst du 5 verschiedene ungerade Zahlen auswählen, so dass deren Summe 23 ergibt?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Es genügte bei dieser Aufgabenstellung, eione richtige Lösung anzugeben.

Aufgabe 1a): Mit 4 verschiedenen ungeraden Zahlen gibt es folgende Möglichkeiten, die Summe 22 zu bilden:

$1 + 3 + 5 + 13 = 22$, $1 + 3 + 7 + 11 = 22$, $1 + 5 + 7 + 9 = 22$

Aufgabe 1b): Wähle die 5 kleinsten ungeraden Zahlen aus. Deren Summe beträgt

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Sie ist bereits größer als die geforderte Summe 23. Deshalb kann es keine Lösung geben.

****

Aufgabe 2. Quadrato schreibt die vier Zahlen 11, 22, 33 und 44 auf. Er fordert Kreisa auf, davon vier Ziffern jeweils durch eine 0 zu ersetzen, so dass die Summe der dadurch entstehenden vier neuen Zahlen 55 ergibt. Kreisa muss nicht lange suchen und nennt eine Lösung: 10 + 02 + 03 + 40 = 55.

Aufgabe 2a) Findest du weitere Möglichkeiten, unter den Bedingungen der Aufgabe die Summe 55 zu erreichen? Schreibe möglichst viele solche Möglichkeiten auf.

Aufgabe 2b) Kannst du in den Zahlen 11, 22, 33, 44 drei Ziffern durch 0 ersetzen, so dass die Summe der veränderten Zahlen 66 ergibt?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Auch bei dieser Aufgabenstellung genügte es, richtige Möglichkeiten anzugeben.

Beispiele für Aufgabe 2a):	10 + 02 + 03 + 40 = 55,	01 + 20 + 30 + 04 = 55,
	11 + 00 + 00 + 44 = 55,	00 + 22 + 33 + 00 = 55
***Beispiele für Aufgabe 2b)*:**	10 + 22 + 30 + 04 = 66,	01 + 22 + 03 + 40 = 66

****

Aufgabe 3. Quadrato experimentiert immer noch mit den Zahlen 11, 22, 33 und 44. Er versucht, durch Ersetzen von drei Ziffern durch Nullen die Summe 89 zu erreichen. Er schafft es nicht.

Kannst du erklären, warum es nicht gelingen kann?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Um in der Einerstelle der Summe die Ziffer 9 zu erhalten, müssen in den Summanden die Ziffern 2, 3 und 4 enthalten sein. Nur die Einerziffer 1 kann durch eine 0 ersetzt werden.

Da nun noch zwei Zehnerziffern durch 0 zu ersetzen sind, musst du prüfen, ob mit zwei Zehnerziffern die Ziffernsumme 8 erreicht werden kann. Dies ist aber unmöglich, weil die zwei größten Zehnerziffern nur (3 + 4 =) 7 ergeben.

****

Aufgabe 4. Nachdem Kreisa und Quadrato mehrere solche Aufgaben lösten, haben sie eine Vermutung:

Wenn man die Anzahl der Nullen, die die Ziffern ersetzen, geschickt wählt, kann man jede Zahl von 1 bis 100 als Summe erhalten.

So gilt beispielsweise

01 + 00 + 00 + 00 = 1 (sieben Nullen) oder
01 + 22 + 33 + 44 = 100 (eine Null)

Haben Kreisa und Quadrato mit dieser Vermutung Recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Mit einer geschickten Auswahl aus den vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 kann man jede Zahl zwischen 0 und 9 als Summe erhalten.

0 + 0 + 0 + 0 = 0	1 + 0 + 0 + 0 = 1	0 + 2 + 0 + 0 = 2	0 + 0 + 3 + 0 = 3
0 + 0 + 0 + 4 = 4	1 + 0 + 0 + 4 = 5	0 + 2 + 0 + 4 = 6	1 + 2 + 0 + 4 = 7
1 + 0 + 3 + 4 = 8	0 + 2 + 3 + 4 = 9		

Somit kannst du sowohl an der Einerstelle als auch an der Zehnerstelle durch eine passende Anzahl von Nullen jede Ziffer erreichen.

Auch die Zahl 100 ist möglich: 01 + 22 + 33 + 44 = 100. Kreisa und Quadrato haben Recht!

****

Runde 2 Weihnachtszeit (Teil A)

Aufgabe 1 – „Oh es riecht gut ...“. Kurz vor Weihnachten werden Plätzchen gebacken – Kreisa und Quadrato helfen Frau Dreieck, die Plätzchen mit Zuckerguss und Schokolade zu verzieren. Frau Dreieck freut sich über die Hilfe, denn alleine würde sie 2 Stunden benötigen, um all die Plätzchen zu bearbeiten. Würde Kreisa alle Plätzchen allein verzieren, benötigte sie dafür 3 Stunden. Quadrato ist noch nicht so geschickt – er würde allein 6 Stunden für alle Plätzchen benötigen. Doch zusammen macht es nicht nur mehr Spaß, sondern sie bewältigen die süße Aufgabe auch in kurzer Zeit.

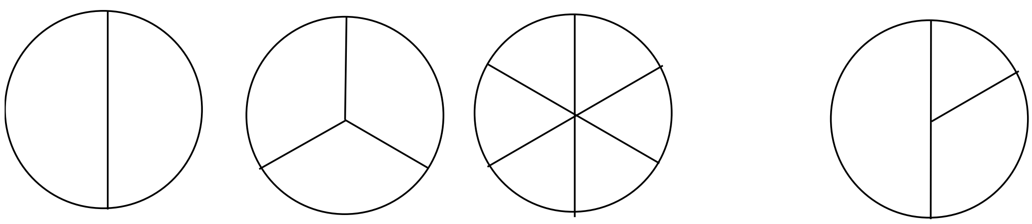
Wieviel Zeit benötigen Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato zum gemeinsamen Verzieren aller Plätzchen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Zum gemeinsamen Verzieren aller Plätzchen benötigen Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato eine Stunde.

Herleitung: Quadrato benötigt für das Verzieren 6 Stunden. In dieser Zeit würde Kreisa zweimal so viele Plätzchen verzieren, Frau Dreieck sogar dreimal so viele Plätzchen. Somit könnten Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato in 6 Stunden insgesamt (3 + 2 + 1 =) 6-mal so viele Plätzchen verzieren. Also schaffen sie die vorgesehene Anzahl in (6 : 6 =) 1 Stunde.

Hinweis: Um die Lösung zu finden, kannst du dir ein Beispiel ausdenken: Es könnten 60 Plätzchen gewesen sein. Frau Dreieck schafft in einer Stunde (60 : 2 =) 30 Plätzchen, Kreisa (60 : 3 =) 20 Plätzchen, Quadrato (60 : 6 =) 10 Plätzchen. Zusammen schaffen sie in einer Stunde (30 + 20 + 10 =) 60 Plätzchen. Also haben sie in einer Stunde alle Plätzchen verziert.

Nun musst du dir aber noch überlegen, ob die Lösung für jede angenommene Anzahl richtig ist. Besser ist es deshalb, die Herleitung ohne eine konkrete Anzahl zu führen: Wenn Frau Raute für alle Plätzchen zwei Stunden benötigt, schafft sie in einer Stunde die Hälfte. Kreisa schafft in einer Stunde ein Drittel und Quadrato in einer Stunde ein Sechstel. Die drei Anteile ergeben zusammen wieder ein Ganzes. Aber du musst nicht mit Brüchen rechnen, sondern kannst das Ergebnis auch zeichnerisch ermitteln:



Frau Dreieck *Kreisa* *Quadrato* *alle zusammen in 1 Stunde*

****

Aufgabe 2 – „Soviel Heimlichkeit ...“. Frau Dreieck hat ihre Weihnachtsgeschenke für Quadrato, Kreisa und Herrn Raute in Geschenkpapier verpackt. Jedes Päckchen hat sie mit zwei verschieden farbigen Schleifen zugebunden. Sie nahm grünes, oranges und blaues Schleifenband, und zwar so, dass sie die Päckchen gut unterscheiden konnte. Doch Schreck - kurz vor der Bescherung bemerkt sie, dass sie keine Namen auf die Päckchen geschrieben hat. Sie weiß aber noch:

- Kreisa liebt orange, deshalb war um ihr Päckchen eine der Schleifen orange.
- Quadrato findet grün nicht schön, deshalb war um sein Päckchen keine der Schleifen grün.

Kannst du Frau Dreieck helfen, die Päckchen mit den richtigen Namen zu beschriften? Finde heraus, welche Schleifenfarben Frau Dreieck um die Päckchen von Kreisa, Quadrato und Herrn Raute auswählte. Schreibe es auf!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Frau Dreieck wählte für Quadrato die Schleifenfarben blau/orange, für Kreisa grün/orange und für Herrn Raute blau/grün aus.

Begründung: Es gibt nur drei Möglichkeiten, zwei verschieden farbige Schleifen auszuwählen: blau/grün, blau/orange und grün/orange. Weil Quadrato grün nicht schön findet, hat Frau Dreieck für Quadrato weder blau/grün noch grün/orange ausgewählt. Somit band sie um sein Päckchen die Schleifenfarben blau/orange. Für das Päckchen für Kreisa wählte sie eine orange Schleife aus, also konnte es nur grün/orange oder blau/orange sein. Da blau/orange schon um Quadratos Päckchen war, konnte es für Kreisa nur grün/orange sein. Schließlich bleibt für Herrn Raute nur blau/grün übrig.

Hinweis: Die Überlegungen lassen sich in einer Tabelle übersichtlich darstellen. Schreibe zum Beispiel in die Tabelle ein +, wenn die Zuordnung zutrifft, und ein -, wenn die Zuordnung nicht zutrifft. Die Zahl in der Tabelle gibt an, in welchem Schritt die Eintragung erfolgt.

1. Schritt: Zwei Zeichen kannst du aufgrund der Aufgabenstellung sofort eintragen.
2. Schritt: In jeder Zeile muss zweimal das Zeichen + stehen. Deshalb kannst du nun die Zeile von Quadrato ausfüllen.
3. Schritt: In jeder Spalte muss auch zweimal das Zeichen + stehen. Deshalb kannst du nun die Spalten unter „grün“ und unter „orange“ ausfüllen.
4. Schritt: Nun kannst du die Tabelle eindeutig vervollständigen.

	blau	grün	orange
Quadrato	2 +	1 -	2 +
Kreisa	4 -	3 +	1 +
Herr Raute	4 +	3 +	3 -

Das Ergebnis kannst du unmittelbar ablesen.

****

Aufgabe 3 – „Oh Tannebaum ...“ Familie Geometrie hat den Weihnachtsbaum geschmückt. Nun stehen sie davor und freuen sich über die bunten Kugeln. Quadrato meint: „So viele - ich denke, es sind 24 Kugeln“. Die anderen drei halten das für reichlich untertrieben. Kreisa schätzt die Zahl auf 27, Frau Dreieck auf 31 und Herr Raute sogar auf 39. Keiner von ihnen hat jedoch die Anzahl richtig geschätzt.

Eine Vermutung ist nur um eine Kugel falsch, eine andere um drei Kugeln, eine dritte um sechs Kugeln und eine vierte sogar um neun Kugeln. Wie viele Kugeln hängen am Weihnachtsbaum?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Am Weihnachtsbaum hängen 30 Kugeln.

Probe: Für 30 Kugeln sind alle Angaben der Aufgabenstellung erfüllt:

Bei Quadrato ist die Vermutung um (30 – 24 =) 6 Kugeln falsch.
Bei Kreisa ist die Vermutung um (30 – 27 =) 3 Kugeln falsch.
Bei Frau Dreieck ist die Vermutung um (31 – 30 =) 1 Kugel falsch.
Bei Herrn Raute ist die Vermutung um (39 – 30 =) 9 Kugeln falsch.

Herleitung – Lösungsvariante 1: Die Lösungsfindung kannst du in einer Tabelle übersichtlich darstellen, wenn du jeweils einträgst, um wie viel falsch jede Vermutung wäre. Dabei kannst du in einer Spalte aufhören, wenn bereits eine nicht angegebene Differenz auftrat:

		Annahme über die Kugelanzahl									
	Vermutung	…	27	28	29	**30**	31	32	33	34	…
Quadrato	24		3	4	5	**6**	7	8	9	10	
Kreisa	27		0			**3**			6		
Frau Dreieck	31					**1**			2		
Herr Raute	39					**9**					

In einer Vorüberlegung stellst du fest, dass es nicht weniger als 30 Kugeln sein können (weil sonst die Vermutung von Herrn Raute um 10 oder mehr Kugeln falsch wäre). Es können aber auch nicht mehr als 33 Kugeln sein (weil sonst die Vermutung von Quadrato um 10 oder mehr Kugeln falsch wäre). Du musst also nur die grauen Spalten ausfüllen.

Lösungsvariante 2: Schreibe alle Möglichkeiten auf, die sich aufgrund der genannten Abweichungen ergeben können. Nur eine Zahl tritt bei allen vier Personen auf: 30 Kugeln.

	Vermutung	mögliche Abweichung							
		-1	+1	-3	+3	-6	+6	-9	+9
Quadrato	24	23	25	21	27	18	**30**	15	33
Kreisa	27	26	28	24	**30**	21	33	18	36
Frau Dreieck	31	**30**	32	28	34	25	37	22	40
Herr Raute	39	38	40	36	42	33	45	**30**	48

****

Aufgabe 4 – „Weihnachten in Familie ...“ Wenn bei Familie Geometrie Weihnachten gefeiert wird, kommen immer richtig viele Leute. Diesmal sind es 8 Kinder und 12 Erwachsene. Damit alle Platz finden können, brauchen sie viele Tische. An einem quadratischen Tisch können 4 Personen sitzen, auf jeder Seite nur eine.

Aufgabe 4a) Wie viele Tische müssen für die 8 Kinder zusammengeschoben werden, damit diese an einer rechteckigen Tischfläche sitzen können?

Aufgabe 4b) Wie viele Tische müssen zusammengeschoben werden, wenn sich die Erwachsenen zu den Kindern an eine lange rechteckige Tischfläche setzen wollen?

Aufgabe 4c) Nach dem Essen gehen die Kinder ins Nachbarzimmer spielen. Die Erwachsenen wollen am Tisch sitzen bleiben. Dafür wollen sie alle Tische der langen rechteckigen Tischfläche anders zusammenstellen, so dass genau 12 Plätze entstehen. Wie würdest du die Tische zusammenstellen? Zeichne es!

(Denke bei diesen Aufgaben daran, dass bei zusammengeschobenen Tischen nicht mehr alle Seiten eines Tisches frei sind.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Es genügt, für die Lösung, eine Zeichnung anzufertigen, in der die Sitzplätze nummeriert sind.

Antwortsatz zu Aufgabe 4a): Es müssen 3 Tische zusammengeschoben werden.

	1	2	3	
8				4
	7	6	5	

Antwortsatz zu Aufgabe 4b): Es müssen 9 Tische zusammengeschoben werden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
20										10
	19	18	17	16	15	14	13	12	11	

Antwortsatz zu Aufgabe 4c): Die 9 Tische müssen zu einem Quadrat zusammengeschoben werden.

	1	2	3	
12				4
11				5
10				6
	9	8	7	

Hinweis: Natürlich können auch bei anderen Anordnungen (mit weniger als 9 Tischen) 12 Erwachsene Platz finden. Obwohl es eigentlich nicht der Aufgabenstellung entspricht, gab es für solche Lösungen ebenfalls einen Punkt.

	1	2	3	4	
12					5
11					6
	10	9	8	7	

	1	2	3	4	5	
12						6
	11	10	9	8	7	

****

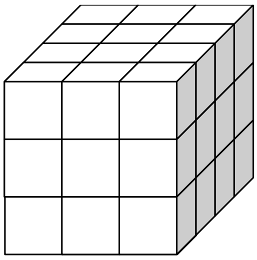
Runde 2 **Baumeister** (Teil B)

Aufgabe 1. Kreisa baut sich einen Quader aus den Steckwürfeln, die sie zu Weihnachten geschenkt bekommen hat. Der Quader soll 3 Würfel hoch, 3 Würfel breit und 4 Würfel lang sein.

Aufgabe 1a) Wie viele Würfel benötigt sie dafür?

Aufgabe 1b) Wie viele kleine Quadratflächen sind nun noch außen zu sehen? (Vergiss nicht die Unterseite.)

Aufgabe 1c) Wie viele Würfel kannst du überhaupt nicht sehen, egal von welcher Seite du schaust?



Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Kreisa benötigt 36 Würfel.

Begründung: In der Abbildung siehst du in der vorderen Reihe (3 · 3 =) 9 Würfel. Es gibt 4 solche Reihen, also insgesamt (9 · 4 =) 36 Würfel.

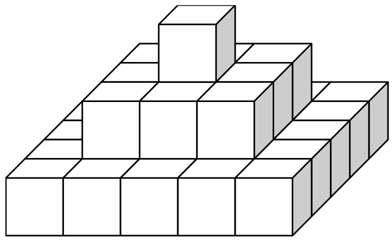
Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Es sind außen 66 Quadratflächen zu sehen.

Begründung: In der Abbildung siehst du vorn (3 · 3 =) 9 Quadratflächen. Hinten (in der Abbildung nicht zu sehen) sind es ebenfalls 9 Flächen. Auf einer Seitenfläche siehst du (4 · 3 =) 12 Quadratflächen. Es gibt 4 solche Seitenflächen. Also sind es insgesamt (9 + 9 + 4 · 12 =) 66 sichtbare Quadratflächen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) – Antwortsatz: Es sind 2 Würfel überhaupt nicht sichtbar.

Begründung: Die 9 Würfel in der vorderen Reihe sind von vorn und die 9 Würfel in der hinteren Reihe von hinten zu sehen. Von oben siehst du weitere 6 Würfel, wie auch von unten weitere 6 Würfel zu sehen sind. Schließlich sind von der rechten Seite weitere 4 Würfel und entsprechend von links nochmals 4 Würfel zu sehen. Insgesamt kannst du (2 · 9 + 2 · 6 + 2 · 2 =) 34 Würfel sehen, also (36 – 34 =) 2 Würfel nicht.

****



Aufgabe 2. Quadrato baut aus einfachen Würfeln eine Pyramide wie in der Abbildung.

Aufgabe 2a) Wie viele Würfel benötigt er dafür?

Aufgabe 2b) Wie viele kleine Quadratflächen sind nun noch außen zu sehen? (Beachte: Da Quadrato keine Steckwürfel verwendet, kann er sein Bauwerk nicht hochheben und kann die Unterseite nicht sehen!)

Aufgabe 2c) Wie viele Würfel kannst du überhaupt nicht sehen, egal von welcher Seite du schaust?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz: Quadrato benötigt 35 Würfel.

Begründung: In der unteren Reihe sind es (5 · 5 =) 25 Würfel, in der mittleren Reihe (3 · 3 =) 9 Würfel. Mit dem einen Würfel an der Spitze sind es insgesamt (25 + 9 + 1 =) 35 Würfel.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Von außen sind 61 Quadratflächen zu sehen.

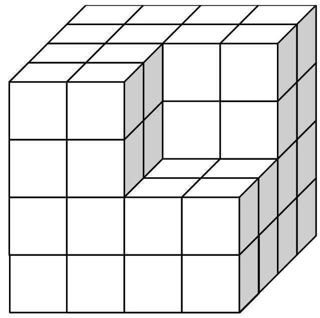
Begründung: Von oben siehst du (5 · 5 =) 25 Flächen. Von jeder Seite sind (5 + 3 + 1 =) 9 Quadratflächen zu sehen. Insgesamt sind es also (25 + 4 · 9 =) 61 Quadratflächen.

Lösungshinweise zu Aufgabde 2c) – Antwortsatz: Wenn Quadrato sein Bauwerk nicht hochheben kann, sind 10 Würfel nicht zu sehen.

Begründung: Die 9 Würfel der unteren Reihe, die sich unter der mittleren Reihe befinden, sind nicht sichtbar. Der 1 Würfel in der mittleren Reihe, der sich unter der Spitze befindet, ist ebenfalls nicht sichtbar. Insgesamt sind es (9 + 1 =) 10 Würfel, die nicht zu sehen sind.

Gelingt es Quadrato aber doch, sein Bauwerk auch von unten anzuschauen, ist nur der 1 Würfel in der Mitte der mittleren Reihe nicht sichtbar. Beide Antworten wurden als richtige Lösung gewertet.

****



Aufgabe 3. Herr Raute beobachtet Kreisa und Quadrato, wie sie mit den Würfeln spielen. Da er weiß, dass beide gerne knobeln, hat er aus kleinen weißen Würfeln einen Körper wie in der Abbildung gebaut und die Oberfläche (also die Flächen, die man noch außen sehen kann) rot angestrichen. Nun fragt er Kreisa und Quadrato:

Aufgabe 3a) Aus wie vielen Würfel besteht dieser Körper?

Aufgabe 3b) Wie viele kleine Quadratflächen sind außen zu sehen? (Vergiss nicht die Unterseite.)

Aufgabe 3c) Wie viele der kleinen Würfel erhalten dabei jeweils eine, zwei drei oder keine rot gefärbte Fläche?

Tipp: Baue auch du dir solche Körper aus Steckwürfeln (oder normalen Spielwürfeln). Dann kannst du die Lösungen ganz leicht finden. Überlege dir aber, wie du das Ergebnis aufschreiben oder aufzeichnen kannst, damit wir erkennen, wie du gezählt hast!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Der Körper besteht aus 56 Würfeln.

Begründung: Der komplette große Würfel besteht aus 4 · 4 · 4 kleinen Würfeln, damit sind 64 Würfel erforderlich. Von diesem wurden (2 · 2 · 2 =) 8 Würfel entfernt. Somit verbleiben (64 – 8 =) 56 Würfel.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Von außen sind 96 Quadratflächen zu sehen.

Begründung: Von jeder Seite sind (4 · 4 =) 16 Quadratflächen zu sehen. Da es 6 Seiten gibt (vorn/hinten, rechts/links und oben/unten) sind es insgesamt (6 x 16 =) 96 Seitenflächen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c) – Antwortsatz: Es sind 4 Würfel ohne Färbung, 18 Würfel mit einer gefärbten Fläche, 24 Würfel mit zwei gefärbten Flächen und 10 Würfel mit drei gefärbten Flächen.

Begründung: Du siehst in der Abbildung 9 Eckwürfel (mit jeweils 3 gefärbten Flächen). Hinten gibt es links unten einen weiteren Eckwürfel (zu sehen): 9 + 1 = 10

Du siehst in der Abbildung 18 Kantenwürfel (mit jeweils 2 gefärbten Flächen). An den drei nicht sichtbaren großen Kanten gibt es je 2 weitere Kantenwürfel: 18 + 3 · 2 = 24

Du siehst in der Abbildung 6 Würfel mit jeweils 1 gefärbten Fläche. An den 3 nicht sichtbaren großen Flächen befinden sich je 4 Würfel mit einer gefärbten Fläche: 6 + 3 · 4 = 18.

Es verbleiben noch (56 – 10 – 24 – 18 =) 4 Würfel, bei denen keine Flächen gefärbt sind.

Wenn du aus kleinen Würfeln so einen Körper zusammensetzt und die sichtbaren Flächen beispielsweise mit Klebezetteln markierst, kannst du das Ergebnis einfach auszählen!

****

Runde 3 **Endlich kommt der Osterhase** (Teil A)

Aufgabe 1. Auch bei Familie Geometrie hoppelte dieses Jahr wieder der Osterhase vorbei und versteckte im Garten Ostereier. Kreisa, Quadrato und ihre Eltern, Frau Dreieck und Herr Raute, suchten den ganzen Vormittag. Als sie endlich alle 25 Ostereier gefunden haben, merken sie:

(1) Frau Dreieck und Herr Raute haben zusammen doppelt so viele Ostereier wie Quadrato gefunden.
(2) Kreisa hat genauso viele Ostereier wie ihre Eltern zusammen gefunden haben.
(3) Frau Dreieck hat 2 Ostereier mehr als Herr Raute gefunden.

Weißt du, wer wie viele Ostereier gefunden hat?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Frau Dreieck hat 6 Ostereier gefunden, Herr Raute 4 Ostereier, Kreisa 10 Ostereier und Quadrato 5 Ostereier.

Wir benutzen für die Familienmitglieder als Abkürzungen für die Anzahl der gefundenen Ostereier die Anfangsbuchstaben ihrer Namen: D, R, K und Q.

Probe: Zusammen haben alle Familienmitglieder (D + R + K + Q = 6 + 4 + 10 + 5 =) 25 Ostereier gefunden. Alle Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt:

(1) $D + K = 6 + 4 = 2 \cdot 5 = 2 \cdot Q$;
(2) $K = 10 = 6 + 4 = D + R$;
(3) $D = 6 = 4 + 2 = R + 2$

Herleitung – Lösungsvariante 1: Solche Aufgaben lassen sich durch systematisches Probieren lösen. Fertige dazu eine Tabelle, in der du für eine Variable (zum Beispiel R) verschiedene Zahlen probierst, was für die anderen Variablen und die Summe folgt. Nimmt die Summe den Wert 25 an, hast du die Lösung gefunden.

R	D = R + 2	K = D + R	Q = (D + R) / 2	R + D + K + Q	Vergleich mit 25
1	3	4	2	10	10 < 25
2	4	6	3	15	15 < 25
3	5	8	4	20	20 < 25
4	**6**	**10**	**5**	**25**	**25 = 25**
5	7	12	6	30	30 > 25

Nur wenn Herr Raute 4 Ostereier gefunden hat, ergibt sich die Gesamtsumme 25. Hätte Herr Raute noch mehr Ostereier gefunden, würde die Summe noch größer werden – du must also nicht weitere Zahlen probieren. In der Tabelle ist die Probe bereits enthalten.

Lösungsvariante 2: Stelle die Aussagen (1) bis (3) in Form von Gleichungen dar und versuche, die Anzahlen D, K und Q durch die Anzahl R auszudrücken.

Beginne bei (3) $D = R + 2$. Hier musst du nichts mehr ändern.
(2) $K = D + R$ Setze (3) ein: $K = (R + 2) + R = 2 \cdot R + 2$

(3) $D + R = 2 \cdot Q$ — Setze (3) ein: $D + R = (R + 2) + R = 2 \cdot R + 2 = 2 \cdot Q$
also $Q = R + 1$

Nun kannst du in die Gleichung zur Gesamtsumme $D + R + K + Q = 25$ alle Anzahlen durch Ausdrücke mit R ersetzen:

$$D + R + K + Q = (R + 2) + R + (2 \cdot R + 2) + (R + 1) = 5 \cdot R + 5 = 25$$

Daraus findest du leicht die Lösung für Herrn Raute ($R = 4$) und dann die vollständige Lösung der Aufgabe. Kontrolliere mit einer Probe, dass du dich nicht verrechnet hast.

****

Aufgabe 2. Als Kreisa am nächsten Morgen in ihr Osternest schaut, stellt sie doch tatsächlich fest, dass jemand ihr schönstes Osterei geklaut hat! Wer könnte das getan haben?

(1) Frau Dreieck sagt: „Quadrato war es natürlich. Wie immer.“
(2) Quadrato sagt: „Das war ganz sicher Anna (Kreisas beste Freundin).“
(3) Anna, die bei Kreisa übernachtet hat, sagt: „Ich würde so etwas niemals machen.“
(4) Herr Raute sagt: „Ich war es auch nicht.“

Doch Kreisa weiß, dass nur eine der 4 Personen die Wahrheit sagte und alle anderen gelogen haben. Deshalb weiß sie auch gleich, wer denn nun ihr Osterei geklaut hat. Weißt du es auch?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Herr Raute hat das Osterei geklaut.

Begründung: Die Aussagen von Quadrato (2) und Anna (3) widersprechen sich. Deshalb sagt entweder Quadrato oder Anna die Wahrheit. Da aber nur eine wahre Antwort gegeben wurde, waren alle anderen Antworten falsch. Deshalb hat Herr Raute gelogen.

Prüfe nun, ob mit diesem Ergebnis alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: Wenn Herr Raute der Täter war, dann hat

(1) Frau Dreieck gelogen (denn Quadrato war es nicht),
(2) Quadrato gelogen (denn Anna war es nicht),
(3) Anna die Wahrheit gesagt (denn Anna war es nicht) und
(4) Herr Raute gelogen (denn Herr Raute war es).

Es sagte tatsächlich nur eine der 4 Personen die Wahrheit und alle anderen haben gelogen.

****

Aufgabe 3. Weil Kreisa und Quadrato zu Ostern immer ihrer Oma besuchen und ihr auch etwas schenken wollen, beschließen sie, dieses Jahr Eier zu bemalen. Dazu teilen sie jedes Ei mit 2 Strichen in drei längliche Streifen, die sie nun einzeln mit den Farben bemalen.

Aufgabe 3a) Sie haben nur 2 verschiedene Farben, gelb und grün. Wie viele Eier können sie damit bemalen, wenn jedes Ei anders aussehen soll?

Aufgabe 3b) Frau Dreieck kaufte ihren Kindern noch orange Farbe. Wie viele verschiedene Eier können sie nun gestalten?

Aufgabe 3c) Kreisa ruft plötzlich: „Wahnsinn! Hätten wir noch eine Farbe, dann könnten wir mehr als doppelt so viele Eier wie jetzt bemalen." Hat sie Recht?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Wird das Ei in drei längliche Streifen eingeteilt, so musst du beachten, dass scheinbar verschiedene Farbkombinationen zur gleichen Bemalung führen können. So sind beispielsweise gelb/gelb/grün und gelb/grün/gelb nicht verschieden: In beiden Fällen entsteht ein breiter gelber Streifen (weil sich die zwei gelben Streifen berühren) und ein schmaler grüner Streifen. Und du kannst das Ei dann immer so drehen, dass der schmale Streifen nach vor zeigt.

Eine Lösungsvariante besteht bei solchen Aufgaben „so viele Möglichkeiten" darin, alle Möglichkeiten aufzuschreiben. Natürlich kannst du die Farbkombinationen auch zeichnen.

Antwortsatz zu Aufgabe 3a): Sie können mit zwei Farben 4 verschiedene Ostereier bemalen.

Begründung:	einfarbige Möglichkeiten:	gelb/gelb/gelb, grün/grün/grün
	zweifarbige Möglichkeiten:	gelb/gelb/grün, gelb/grün/grün

Antwortsatz zu Aufgabe 3b): Sie können mit drei Farben 11 verschiedene Ostereier gestalten.

Begründung: Sie können zuerst nur die Farben gelb und grün verwenden (4 Möglichkeiten aus Aufgabe a) und dann zusätzlich alle Möglichkeiten, bei denen mindestens ein Streifen orange wird:

einfarbige Möglichkeit:	orange/orange/orange
zweifarbige Möglichkeiten:	gelb/gelb/orange, grün/grün/orange, orange/orange/gelb, orange/orange/grün
dreifarbige Möglichkeiten:	gelb/grün/orange, gelb/orange/grün

(Beachte, dass andere dreifarbige Kombinationen zu keiner anderen Bemalung führen. Du kannst nämlich das Ei immer so drehen, dass der gelbe Streifen vorn zu sehen ist. Dann ist rechts vom gelben Streifen entweder ein grüner oder ein orangener Streifen.)

Es gibt also mit der dritten Farbe weitere 7 Möglichkeiten und damit insgesamt (7 + 4 =) 11 Möglichkeiten, die Eier zu gestalten

Antwortsatz zu Aufgabe 3c): Kreisa hat Recht, mit vier Farben könnten sie mehr als doppelt so viele Eier verschieden gestalten. (Wir nehmen an, die vierte Farbe sei rot.)

Begründung - Lösungsvariante 1: Es gibt mit vier Farben 4 Möglichkeiten, Eier einfarbig zu bemalen.

Um Eier zweifarbig zu bemalen, gibt es 4 Möglichkeiten, eine Farbe für den doppelten Streifen auszuwählen und für jede diese Farbe eine der drei anderen Farben hinzuzunehmen, also $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene Möglichkeiten.

Um die Eier dreifarbig zu bemalen, gibt es 4 Möglichkeiten, eine der Farben wegzulassen. Mit den ausgewählten Farben lassen sich jeweils zwei verschiedene Möglichkeiten gestalten, also $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

Insgesamt sind es also (4 + 12 + 8 =) 24 Möglichkeiten. Wegen $24 > 2 \cdot 11$ hat Kreisa Recht.

Begründung – Lösungsvariante 2: Schreibe oder zeichne alle Möglichkeiten auf:

einfarbige Möglichkeit:	gelb/gelb/gelb,	grün/grün/grün/,
	orange/orange/orange,	rot/rot/rot
zweifarbige Möglichkeiten:	gelb/gelb/grün,	gelb/gelb/orange,
	gelb/gelb/rot,	grün/grün/gelb,
	grün/grün/orange,	grün/grün/rot,
	orange/orange/gelb,	orange/orange/grün,
	orange/orange/rot,	rot/rot/gelb,
	rot/rot/grün,	rot/rot/orange,
dreifarbige Möglichkeiten:	gelb/grün/orange,	gelb/orange/grün,
	gelb/grün/rot,	gelb/rot/grün,
	gelb/orange/rot,	gelb/rot/orange,
	grün/orange/rot,	grün/rot/orange.

Es sind insgesamt 24 Möglichkeiten.

Begründung – Lösungsvariante 3: Es geht aber auch ohne viel Rechnen und Schreiben.

Im Aufgabenteil (b) wurden durch Hinzunahme der dritten Farbe 7 neue Farbkombinationen gefunden. Wenn du nun statt der orangenen Farbe die rote Farbe hinzunimmst, entstehen weitere, andere 7 Farbkombinationen. Wenn du bei den Kombinationen mit mindestens einem orangen Streifen statt der gelben Farbe die rote Farbe hinzunimmst, entstehen weitere, andere 4 Farbkombinationen. Aber auch die Farbkombination orange/rot/gelb ist neu. Insgesamt sind es schon (7 + 4 +1 =) 12 neue Farbkombinationen – mehr als mit drei Farben möglich ist.

Hinweis zur Aufgabe 3: Verlaufen die Streifen ringsum das Ei, so gibt es mehr Möglichkeiten, denn der untere und der obere Streifen berühren sich nicht. Auch ist unten und oben beim Ostereieraufhängen festgelegt:

zu Aufgabe 3a): 8 Möglichkeiten

gelb/gelb/gelb, grün/grün/grün
gelb/gelb/grün, gelb/grün/gelb, grün/gelb/gelb
gelb/grün/grün, grün/gelb/grün, grün/grün/gelb

zu Aufgabe 3b): weitere 19 Möglichkeiten

einfarbige Möglichkeiten	orange/orange/orange
zweifarbige Möglichkeiten	orange/orange/gelb, orange/gelb/orange, gelb/orange/orange
	orange/orange/grün, orange/grün/orange, grün/orange/orange
	orange/gelb/gelb, gelb/orange/gelb, gelb/gelb/orange
	orange/grün/grün, grün/orange/grün, grün/grün/orange
dreifarbige Möglichkeiten	gelb/grün/orange, gelb/orange/grün, grün/gelb/orange
	grün/orange/gelb, orange/gelb/grün, orange/grün/gelb

Insgesamt sind es mit drei Farben also (8 + 19 =) 27 Möglichkeiten.

zu Aufgabe 3c): Mit vier Farben gibt es insgesamt 64 verschiedene Möglichkeiten, also mehr als doppelt so viele verschiedene Farbkombinationen wie mit drei Farben. Die dritte Lösungsvariante ist auch hier einfach: Wenn die in den 19 Farbkombinationen zum Aufgabenteil (b) statt der orangenen Farbe die rote Farbe hinzunimmst, erhältst du 19 weitere, andere Farbkombinationen. Wenn du in diesen 19 Farbkombinationen statt der gelben Farbe die rote Farbe hinzunimmst, erhältst du 11 weitere, andere Farbkombinationen. Insgesamt sind das schon (19 + 11 =) 30 Möglichkeiten – mehr als mit drei Farben möglich ist.

****

Aufgabe 4. Kreisa und Quadrato wollen einige Ostereier in 3 verschieden große Kästchen verpacken. Quadrato schlägt vor, in das zweite Kästchen 3 Ostereier mehr als in das erste Kästchen zu legen und in das dritte Kästchen 3 Ostereier mehr als in das zweite Kästchen. Kreisa jedoch möchte in das dritte Kästchen dreimal so viele Ostereier wie ins erste Kästchen legen, die übrigen Ostereier ins zweite Kästchen. Eine Weile streiten sie, welcher Vorschlag besser sei. Doch plötzlich lachen sie: Beide Vorschläge führen zur gleichen Aufteilung auf die Kästchen.

Finde heraus, wie viele Ostereier die beiden verpacken wollen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Kreisa und Quadrato wollen 18 Ostereier verpacken.

Herleitung – Lösungsvariante 1: Diese Aufgabe kannst du wieder mit systematischem Probieren lösen. Verwende wieder eine Tabelle

Q: 1. Kästchen x	Q: 2. Kästchen $x + 3$	Q: 3. Kästchen $(x + 3) + 3$	Vergleich $(x + 3) + 3$ mit $3 \cdot x$	Summe
1	4	7	$7 > 3$	
2	5	8	$8 > 6$	
3	**6**	**9**	$\mathbf{9 = 9}$	**18**
4	7	10	$10 < 12$	

Nun kannst du das Ergebnis aus der Tabelle ablesen.

Herleitung – Lösungsvariante 2: Da beide Vorschläge zur gleichen Verteilung führen, wollen beide in das erste Kästchen die gleiche Anzahl legen. Wir nennen diese Anzahl x.

Dann legt Quadrato in das zweite Kästchen	$x + 3$ Ostereier und
in das dritte Kästchen	$(x + 3) + 3 = x + 6$ Ostereier.
Kreisa legt in das dritte Kästchen	$3 \cdot x$ Ostereier.

Wenn auch im dritten Kästchen die Anzahl beider Vorschläge übereinstimmen soll, gilt $x + 6 = 3 \cdot x$.

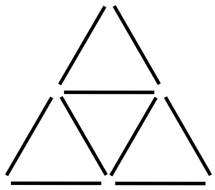
Nun ist es einfach, daraus $x = 3$ herauszufinden. Somit legt Quadrato in das erste Kästchen 3 Ostereier, in das zweite Kästchen (3 + 3 =) 6 Ostereier und in das dritte Kästchen (6 + 3 =) 9 Ostereier. Zusammen sind es (3 + 6 + 9 =) 18 Ostereier. Wegen $3 \cdot 3 = 9$ ist auch der Vorschlag von Kreisa erfüllt.

****

Runde 3 **Knobelspaß mit Hölzchen** (Teil B)

Kreisa und Quadrato bekommen von ihrer Oma viele kleine gleichlange Hölzchen geschenkt. Schnell stellen sie fest, dass sie damit toll knobeln können.

Aufgabe 1. Kreisa baut aus Hölzchen eine Pyramide wie in der Abbildung. Dafür hat sie 9 Hölzchen gebraucht. Die Pyramide hat 2 Etagen.



Aufgabe 1a) Zeichne eine Pyramide mit 3 Etagen. Wie viele Hölzchen brauchst du dafür?

Aufgabe 1b) Kannst du nun die Anzahl der Hölzchen ausrechnen, die für eine Pyramide mit 5 Etagen benötigt werden?

Aufgabe 1c) Kreisa bekam insgesamt 150 Hölzchen und will daraus eine große Pyramide bauen. Wie viele Etagen kann diese Pyramide höchstens haben? Wie hast du es ausgerechnet?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – *A*ntwortsatz: Aus einer Zeichnung kann man ablesen: Es werden 18 Hölzchen gebraucht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz b) Für eine Pyramide mit 5 Etagen werden 45 Hölzchen gebraucht.

Begründung: Stelle in einer Tabelle übersichtlich dar, wie viele Hölzchen für Pyramiden benötigt werden. Dabei bemerkst du sicherlich, wie sich die Zahlen verändern:

- Bei der Pyramide mit 3 Etagen kam zur Pyramide mit 2 Etagen eine Reihe mit 3 Dreiecken, also (3 · 3 =) 9 Hölzchen dazu.
- Bei der Pyramide mit 4 Etagen kam zur Pyramide mit 3 Etagen eine Reihe mit 4 Dreiecken, also (4 · 3 =) 12 Hölzchen dazu usw.

Anzahl Etagen	1	2	3	4	5
Anzahl Hölzchen	3	9	18	30	45
Berechnung		3 + 2·3	9 + 3·3	18 + 4·3	30 + 5·3

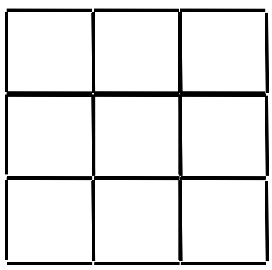
Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) – Antwortsatz: Kreisa kann mit 150 Hölzchen eine Pyramide mit höchsten 9 Etagen bauen.

Begründung: Setze die Tabelle aus Aufgabenteil (b) fort und du erkennst, dass eine Pyramide mit 10 Etagen bereits mehr als 150 Hölzchen benötigt.

Anzahl Etagen	6	7	8	9	10
Anzahl Hölzchen	63	84	108	135	165
Berechnung	45 + 6·3	63 + 7·3	84 + 8·3	108 + 9·3	135 + 10·3

****

Aufgabe 2. Quadrato hingegen baut aus seiner Lieblingsfigur – dem Quadrat – ein Muster wie in der Abbildung.



Aufgabe 2a) Wie viele Quadrate siehst du? Beachte, dass es in dieser Abbildung Quadrate mit unterschiedlicher Größe gibt.

Aufgabe 2b) Wenn Quadrato ein Hölzchen aus der Mitte wegnimmt, wie viele Quadrate hat die Figur dann noch?

Aufgabe 2c) Wie viele und welche Hölzchen muss er wegnehmen, so dass noch genau 7 Quadrate bleiben?

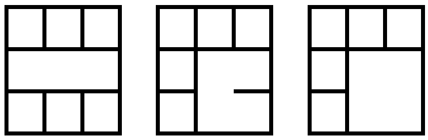
Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz: In der Abbildung sieht man 14 Quadrate.

Begründung: Es sind 9 kleine Quadrate (1x1 Kästchen), 4 mittlere Quadrate (2x2 Kästchen) und das große Quadrat aus allen Kästchen (3x3).

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Nach Wegnehmen von einem mittleren Hölzchen sind noch 10 Quadrate zu sehen.

Begründung: Es gehen durch das Wegnehmen zwei kleine und zwei mittlere Quadrate verloren.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2c) – Antwortsatz: Nach der Wegnahme von zwei Hölzchen können genau 7 Quadrate entstehen. Es sind aber auch Lösungen mit 3 und 4 weggenommenen Hölzchen möglich.



****

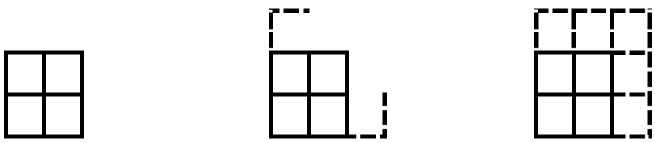
Aufgabe 3. Frau Dreieck hat die Knobeleien ihrer Kinder beobachtet. Sie gibt Kreisa und Quadrato gleich viele Hölzchen und fordert sie auf, um die Wette ihre Muster zu bauen. Kreisa war diesmal geschickter und hatte die Pyramide schneller fertig als Quadrato sein Quadratmuster.

Wie viele Hölzchen könnte Frau Dreieck jedem Kind gegeben haben, wenn sowohl die Pyramide als auch das Quadratmuster vollständig gebaut werden konnte?

Probiere die Knobelspiele doch einmal selbst mit deinen Freunden aus! Sicher findet ihr auch kleine Hölzchen, die sich für die Spiele eignen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Frau Dreieck könnte Kreisa und Quadrato je 84 Hölzchen gegeben haben. Damit konnte Kreise eine Pyramide mit 7 Etagen und Quadrato ein 6x6-Quadrat legen.

Herleitung: Stelle in einer Tabelle dar, wie viele Hölzchen Quadrato für seine Quadrate benötigt. Untersuche wieder, wie sich die Anzahl ändert, wenn du eine Zeile hinzunimmst:



2x2-Quadrat zwei „halbe“ Quadrate 3x3-Quadrat

- Bei einem Quadrat mit 3 Zeilen kommen zu dem Quadrat mit 2 Zeilen 1 Spalte mit 3 „halben“ Quadraten und 1 Zeile mit 3 „halben“ Quadraten, also ($6 \cdot 2 =$) 12 Hölzchen mehr.
- Bei einem Quadrat mit 4 Zeilen kommen zu dem Quadrat mit 3 Zeilen 1 Spalte mit 4 „halben“ Quadraten und 1 Zeile mit 4 „halben“ Quadraten, also ($8 \cdot 2 =$) 16 Hölzchen mehr usw.

Anzahl Zeilen	1	2	3	4	5	6
Anzahl Hölzchen	4	12	24	40	60	84
Berechnung		$4 + 4 \cdot 2$	$12 + 6 \cdot 2$	$24 + 8 \cdot 2$	$40 + 10 \cdot 2$	$60 + 12 \cdot 2$

Wenn das erste Mal eine Hölzchenanzahl auftritt, die auch in der Tabelle von Aufgabe 1 für die Pyramiden vorkommt, ist die Aufgabe gelöst. Das ist mit 84 Hölzchen der Fall.