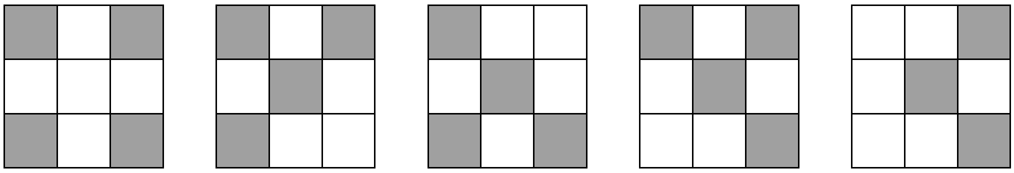
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2015

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 Das angegebene Beispiel ist die einzige Möglichkeit, vier Felder zu färben, ohne dass ein Eckfeld ausgemalt wird. Weiterhin gibt es 5 Möglichkeiten mit ausgemalten Eckfeldern.



Weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Insgesamt sind es also **6 Möglichkeiten**.

Diese Lösung beruht im Wesentlichen auf der Anschauung. Es scheint zwar einsichtig, dass es keine weiteren Lösungen gibt, aber diese eigene Überzeugung ist noch kein Beweis. Man muss also nach Methoden suchen, die eine vollständige Auflistung ermöglicht. Mit Fallunterscheidung kommt man dem näher.

Variante 1: Wenn 4 Felder in einer 3 x 3 – Tafel auszumalen sind, dann müssen mindestens in einer Zeile (waagerechte Reihe der Tafel) zwei Felder ausgemalt werden. In einer Zeile gibt es nur eine Möglichkeit, zwei Felder regelgerecht auszumalen: Es werden das linke und das rechte Feld ausgemalt, das mittlere Feld bleibt weiß.

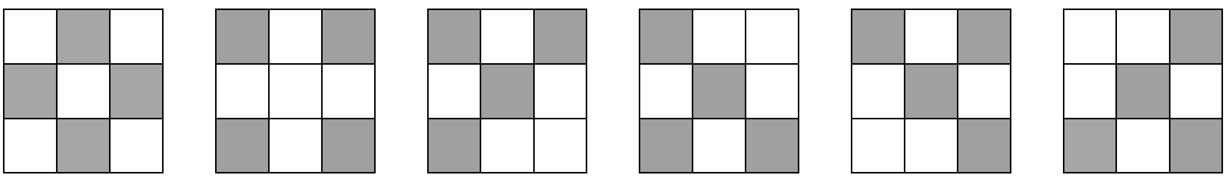
Fall 1: In der ersten (oberen) Zeile sind zwei ausgemalte Felder und in jeder anderen Zeile ist jeweils ein ausgemaltes Feld. In diesem Fall gibt es nur **zwei verschiedene Möglichkeiten**, denn die erste Zeile ist eindeutig bestimmt, in der zweiten (mittleren) Zeile muss das mittlere Feld ausgemalt werden. Das vierte ausgemalte Feld in der dritten (unteren) Reihe kann nun die linke oder die rechte Ecke sein.

Fall 2: In der zweiten Zeile sind zwei ausgemalte Felder und in jeder anderen Zeile ist jeweils ein ausgemaltes Feld. In diesem Fall gibt es nur **eine Möglichkeit**, weil sowohl in der ersten als auch in der dritten Zeile das mittlere Feld ausgemalt werden muss.

Fall 3: In der dritten Zeile sind zwei ausgemalte Felder und in jeder anderen Zeile ist jeweils ein ausgemaltes Feld. Dies entspricht dem Fall 1, es gibt also **zwei verschiedene Möglichkeiten**.

Fall 4: Es gibt zwei Zeilen mit je zwei ausgemalten Feldern. Da die Lage der ausgemalten Felder in einer Zeile eindeutig festgelegt ist, können die beiden Zeilen nicht benachbart sein. Also sind in der ersten und in der dritten Zeile jeweils zwei Felder ausgemalt, und zwar ist dies auf genau **eine Möglichkeit** realisierbar.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, gibt es ingesamt 6 Möglichkeiten:



Fall 2 Fall 4 Fall 1.1 Fall 3.1 Fall 1.2 Fall 3.2

Variante 2: Wir führen die Fallunterscheidung nach dem Mittelfeld.

Fall 1: Das mittlere Feld ist ausgemalt. Dann gibt es regelgerecht vier Felder (die Eckfelder), die noch ausgemalt werden könnten. Da nur drei davon auszumalen sind, gibt es **vier verschiedene Möglichkeiten**, ein Eckfeld nicht auszumalen.

Fall 2: Das mittlere Feld sei nicht ausgemalt. Dann sind vier der acht umgebenden (Rand-) Felder auszumalen. Da immer ein Feld freigelassen werden muss, gibt es genau **zwei verschiedene Möglichkeiten**, dies zu realisieren: Entweder startend in einem Eckfeld oder nicht in einem Eckfeld.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, gibt es ingesamt 6 Möglichkeiten.

****

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Wir verwenden die Variante 1 aus Aufgabe 1 und betrachten eine Fallunterschiedung nach der Lage von ausgemalten Feldern auf jeder Zeile der 4 x 4 - Tafel.

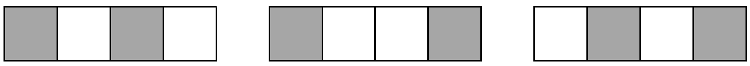
Fall 1: In jeder Zeile befindet sich ein ausgemaltes Feld.

In der ersten Zeile gibt es dafür 4 Möglichkeiten, ein Feld auszumalen (jedes Feld dieser Zeile könnte ausgemalt werden). In der zweiten (und in jeder weiteren) Zeile gibt es 3 Möglichkeiten, ein Feld auszumalen: Alle Felder bis auf das Feld, was direkt unter dem ausgemalten Feld der darüberstehenden Zeile steht, kann ausgemalt werden.

Das sind bei vier Zeilen insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ = **108 Möglichkeiten**.

Fall 2: In einer Zeile sind zwei Felder ausgemalt und in zwei anderen Zeilen ist jeweils ein Feld ausgemalt.

Um in einer Zeile 2 Felder auszumalen, gibt es genau 3 Möglichkeiten:



Fall 2.1: In der 1. Zeile sind zwei Felder ausgemalt.

Möglichkeiten:	Anzahl Möglichkeiten				
	1. Zeile	2. Zeile	3. Zeile	4. Zeile	gesamt
2. Zeile: kein Feld	3	-	4	3	$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
3. Zeile: kein Feld	3	2	-	4	$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$
4. Zeile: kein Feld	3	2	3	-	$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

Insgesamt sind es (36 + 24 + 18 =) **78 Möglichkeiten**.

Fall 2.2: In der 2. Zeile sind zwei Felder ausgemalt.

	Anzahl Möglichkeiten				
	1. Zeile	2. Zeile	3. Zeile	4. Zeile	gesamt
1. Zeile: kein Feld	-	3	2	3	$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$
3. Zeile: kein Feld	2	3	-	4	$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
4. Zeile: kein Feld	2	3	2	-	$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Insgesamt sind es (18 + 24 + 12 =) **54 Möglichkeiten**.

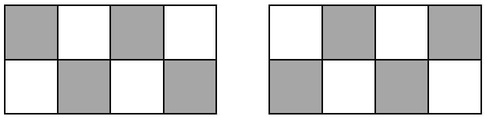
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Fall 2.3: Sind in der 3. Zeile 2 Felder ausgemalt und in zwei anderen Zeilen je ein Feld, so enstpricht dies dem Fall 2.2, also insgesamt **54 Möglichkeiten**.

Fall 2.4: Sind in der 4. Zeile 2 Felder ausgemalt und in zwei anderen Zeilen je ein Feld, so enstpricht dies dem Fall 2.1, also insgesamt **78 Möglichkeiten**.
Also sind es bei den Fällen 2.1 bis 2.4 insgesamt (78 + 54 + 54 + 78 =) **264 Möglichkeiten.**
Fall 3: In zwei Zeilen sind jeweils zwei Felder ausgemalt. Es gibt 6 Möglichkeiten, zunächst dafür zwei Zeilen auszuwählen:

1./2. Zeile, 1./3. Zeile, 1./4. Zeile, 2./3. Zeile, 2./4. Zeile, 3./4. Zeile.

Fall 3.1: Sind die Zeilen benachbart (1./2., 2./3., 3./4.), gibt es für jeder der **drei Auswahlen** jeweils **zwei Möglichkeiten**.



Sind die Reihen nicht benachbart (1./3., 1./4., 2./4.), können in jeder Zeile unabhängig voneinander 3 Möglichkeiten gewählt werden, also gibt es für jeder der **drei Auswahlen** jeweils $3 \cdot 3$ = **9 Möglichkeiten**.

Also sind es bei den Fällen 3.1 und 3.2 insgesamt ($3 \cdot 2 + 3 \cdot 9$ =) **33 Möglichkeiten**.

Somit gibt es in Aufgabe 2 insgesamt (108 + 264 + 33 =) **405 Möglichkeiten**, vier Felder so auszumalen, dass je zwei Felder keine gemeinsame Seite haben.

****

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Wir verwenden die Variante 2 aus Aufgabe 1 und betrachten eine Fallunterschiedung unter Beachtung des Mittelfeldes. Zunächst färben wir die Felder der 5 x 5 - Tafel wie ein Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß. Wir nennen das Feld mit der Nummer 13 **Mittelfeld**, die Felder mit den Nummern 7 bis 9, 12, 14 und 17 bis 19 **Ringfelder** und die übrigen Felder (1 bis 5, 6, 11, 16, 10, 15, 20 und 21 bis 25) **Randfelder**.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
6	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**

Wenn zwei Felder sich an einer Ecke berühren und dabei keine Seite gemeinsam haben, dann liegen die beiden Felder auf gleichfarbigen Schachbrettfeldern. Somit liegen alle 5 ausgemalten Felder auf gleichfarbigen Schachbrettfeldern.

Zunächst suchen wir im Fall 1 alle Möglichkeiten, bei denen das Mittelfeld ausgemalt wurde. Weil das Mittelfeld mit mindestens einem weiteren Feld verbunden sein muss, sind 1, 2, 3 oder 4 Ringfelder ausgemalt. Dafür gibt es nun folgende Fälle:

Fall 1.1: Alle vier Ringfelder sind ausgemalt. Dies ist nur in einer Art möglich (ausgemalte Felder sind mit X markiert).

	X		X	
		X		
	X		X	

Fall 1.2: Genau drei Ringfelder sind ausgemalt. Dann kann das fünfte ausgemalte Feld an einem von sieben verschiedenen Randfeldern regelgerecht platziert sein (die möglichen Felder sind mit ? markiert). Da es vier Auswahlmöglichkeiten für drei Ringfelder gibt, sind es in diesem Fall 4 · 7 = 28 Möglichkeiten

?		?		?
	X		X	
?		X		?
	X			
?		?		

Fall 1.3: Genau zwei benachbarte Ringfelder sind ausgemalt. Dann gibt es nur fünf Randfelder, auf denen die übrigen zwei ausgemalte Felder liegen müssen (die möglichen Felder sind mit ? markiert). Das ist mit zehn verschiedenen Varianten möglich. Da es vier Auswahlmöglichkeiten für zwei ausgemalte benachbarte Ringfelder gibt, sind es in diesem Fall 4 ·10 = **40 Möglichkeiten.**

?		?		?
	X		X	
?		X		?

Fall 1.4: Genau zwei gegenüberliegende Ringfelder sind ausgemalt.. Dann gibt es nur sechs Felder, auf denen die übrigen zwei ausgemalten Felder liegen müssen (die möglichen Felder sind mit ? markiert). Das ist mit 15 verschiedenen Varianten möglich. Da es zwei Auswahlmöglichkeiten für zwei ausgemalte gegenüberliegende Ringfelder gibt, sind es in diesem Fall 2 · 15 = **30 Möglichkeiten**.

		?		?
			X	
?		X		?
	X			
?		?		

Fall 1.5: Schließlich befindet sich nur an einem Eckpunkt des Mittelfeldes ein ausgemaltes Feld. Dann gibt es nur eine Möglichkeit, die restlichen 3 ausgemalten Felder anzuordnen Da es vier Auswahlmöglichkeiten für ein ausgemaltes Ringfeld gibt, sind es in diesem Fall **4 Möglichkeiten**.

?		**?**		
	X			
?		**X**		

Insgesamt gibt es also (1 + 28 + 40 + 30 + 4 =) **103 verschiedene Anordnungen**, bei denen das Mittelfeld zu den ausgemalten Feldern gehört.

Nun betrachten wir alle Möglichkeite bei denen das Mittelfeld nicht ausgemalt wurde. Wir müssen dabei die schwarz- (Fall 2) und weißfarbigen (Fall 3) Varianten gesondert untersuchen

Fall 2.1: Alle vier schwarzen Ringfelder sind ausgemalt - doch dies ist nicht möglich, weil dann nicht alle Ringfelder an einem Eckpunkt mit einen anderen Feld verbunden sein können.

Fall 2.2: Genau drei Ringfelder sind ausgemalt. Hierfür gibt es nur **1 Möglichkeit**, zwei weitere Felder auszumalen (mit # makiert), damit jedes ausgemalte Ringfeld einen Ecknachbar hat.

		#		
	X		**X**	
#				
	X			

Fall 2.3: Genau zwei benachbare Ringfelder sind ausgemalt. Dann muss das verbindende Randfeld ausgemalt werden. Die verbleibenden zwei Randfelder können auf 4 Feldern verteilt sein. Insgesamt sind es 4 · 6 = **24 Möglichkeiten**.

?		#		**?**
	X		**X**	
?				**?**

Fall 2.4: Sind genau zwei gegenüberliegenden Ringfelder ausgemalt, kann die Bedingung der Aufgabe nicht erfüllt werden.

Fall 2.5: Ist genau ein Ringfeld ausgemalt, kann die Bedingung der Aufgabe ebenfalls nicht erfüllt werden.

Fall 2.6: Ist kein Ringfeld ausgemalt, gibt es auch keine Möglichkeit, die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen.

Insgesamt gibt es also im zweiten Fall 0 + 4 + 24 + 0 + 0 + 0 = **28 Möglichkeiten**.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: E-Mail norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Nun untersuchen wir noch die Möglichkeiten, wenn die ausgemalten Felder auf weißen Feldern liegen.

Fall 3.1: Alle vier weißen Ringfelder sind ausgemalt - dann kann das 5. ausgemalte Feld auf einem der 8 weißen Feldern platziert sein. Es gibt also **8 Möglichkeiten**.

	?		?	
?		X		?
	X		X	
?		X		?
	?		?	

Fall 3.2: Es sind drei Ringfelder ausgemalt - die verbleibenden 2 auszumalenden Felder können auf 6 möglichen Felder beliebig platziert werden (mit ? markiert). Dafür gibt es 15 Möglickeiten. Zusätzlich sind die beiden Randmuster (mit # markiert) möglich. Da es vier Auswahlen von drei aiusgemalten Ringfeldern gibt. sind es insgesamt 4 · 17 = **68 Möglichkeiten**.
i

	?		?	
?		X		
	X			
?		X		
	?		?	

			#	
		X		#
	X			
		X		

		X		
	X			
		X		#
			#	

Fall 3.3 Es sind genau zwei benachbarte Ringfelder ausgemalt. Dafür sind

- 3 auszumalende Felder auf 4 Positionen auszuwählen (Abbildung 3.3.1),
- 1 auszumalendes Feld auf 3 Positionen auszuwählen (Abbildung 3.3.2) oder
- 1 auszumalendes Feld auf 3 Positionen auszuwählen (Abbildung 3.3.3).

also (4 + 3 + 3 =) 10 verschiedene Möglichkeiten. Da es 4 Auswahlen von zwei benachbarten Ringfeldern gibt, sind es insgesamt 4 · 10 = **40 Möglichkeiten.**

	?		?	
?		X		
	X			
?				

Fall 3.3.1

	?		#	
?		X		#
	X			
?				

Fall 3.3.2

	?		?	
?		X		
	X			
#				
	#			

Fall 3.3.3

Fall 3.4: Es sind genau zwei gegenüberliegenen Ringfelder ausgemalt - dann gibt es keine Möglichkeiten, weil mindestens ein weiteres Ringfeld ausgemalt werden müsste, um die ausgemalten Felder zu verbinden.

Fall 3.5: Es ist höchstens 1 Ringfeld ausgemalt - auch dann gibt es keine regelgerechte Möglichkeit.

Insgesamt gibt es auf den weißen Shachbrettfeldern 8 + 68 + 40 + 0 + 0 = **116 Möglichkeiten**.

Insgesamt sind es 103 + 28 + 116 = **147 verschiedene Möglichkeiten**, fünf Felder auf einer 5 x 5 – Tafel regelgerecht auszumalen.