Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2020

Wir verwenden zur Beschreibung von Rechtecken die Abkürzung „m x n-Rechteck“, wobei m die Kästchenanzahl in der Breite und n die Kästchenanzahl in der Höhe angeben. So können wir für das Rechteck in der Abbildung 5x3-Rechteck schreiben.

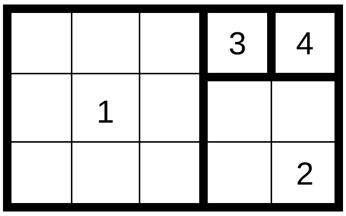


Abb. 1

Quadrate sind natürlich auch Rechtecke, sodass wir zum Beispiel 3x3-Rechteck und 3x3-Quadrat gleichermaßen verwenden dürfen. Jedes Kästchen ist ein 1x1-Quadrat.

Bevor wir die Aufgabe 1 lösen, probieren wir uns an einfacheren Beispielen:

a) Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 2 Quadrate zerlegen kann?

   Antwortsatz: Es gibt nur ein Rechteck: das 2x1-Rechteck (Abbildung 2).

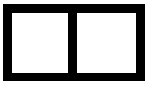


Abb. 2

b) Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 3 Quadrate zerlegen kann?

   Antwortsatz: Es gibt nur zwei solche Rechtecke: das 3x1-Rechteck und das 3x2-Rechteck (Abbildung 3).

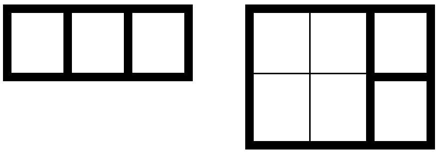


Abb. 3

c) Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 4 Quadrate zerlegen kann?

   Antwortsatz. Es gibt vier Rechtecke: das 4x1-Rechteck, das 4x3-Rechteck, das 5x2-Rechteck (Abbildung 4) und das 5x3-Rechteck (Abbildung 1).

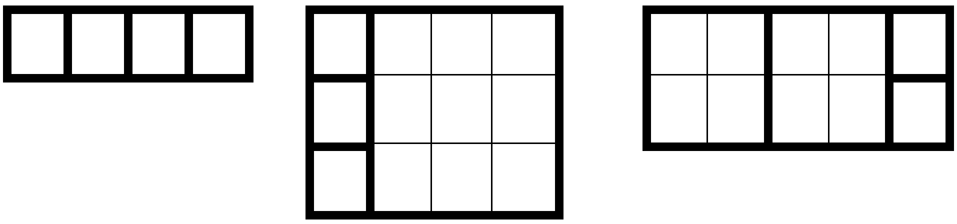


Abb. 4

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wir überlegen uns, wie wir die Möglichkeiten in einer Tabelle übersichtlich angeben können. Dazu tragen wir in jeder Spalte ein, wie viele Quadrate der angegebenen Größe in der Zerlegung vorkommen:

Möglichkeit	1x1-Rechtecke	2x2-Rechtecke	3x3-Rechtecke	Gesamtrechteck
1	4	0	0	4x1
2	3	0	1	4x3
3	2	2	0	5x2
4	2	1	1	5x3

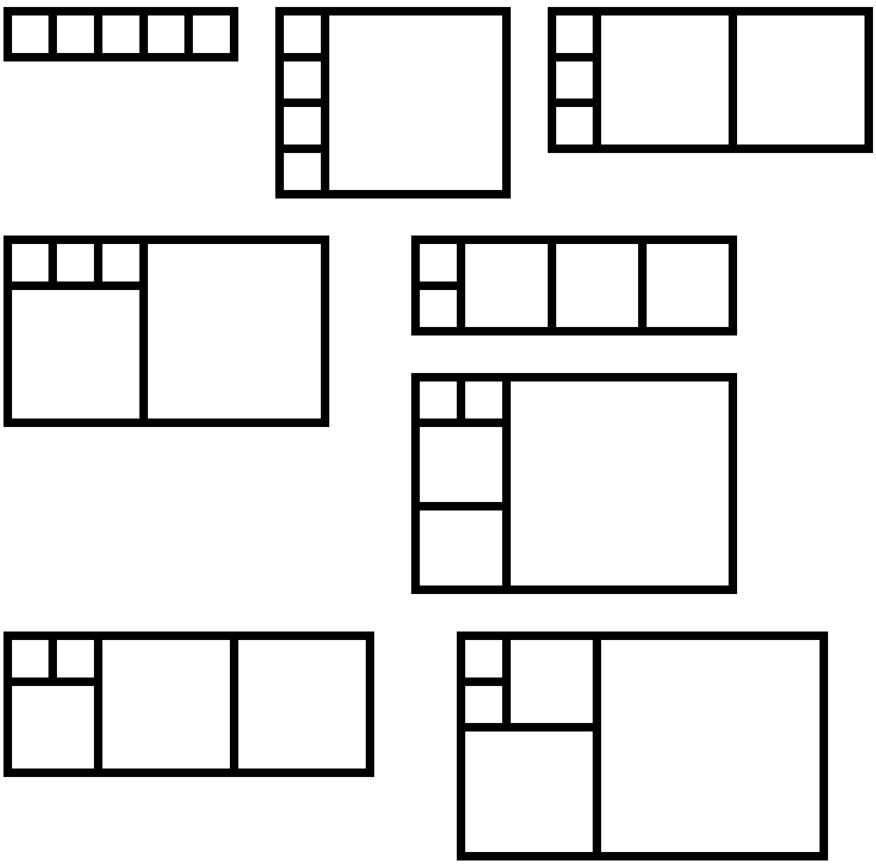
Weitere Möglichkeiten kann es nicht geben, insbesondere kann nicht nur ein 1x1-Rechteck vorkommen.

Nun können wir uns an die Lösung von Aufgabe 1 wagen.

Aufgabe 1. Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 5 Quadrate zerlegen kann?

Antwortsatz. Es gibt 8 verschiedene Rechtecke, die Quadrato durch Abschneiden in 5 Quadrate zerlegen kann.

Zeichnerische Lösung:



Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Tabellarische Lösung:

Nr.	1x1-R.	2x2-R.	3x3-R.	4x4-R.	5x5-R.	Gesamt-R.
1	5	0	0	0	0	5x1
2	4	0	0	1	0	5x4
3	3	0	2	0	0	7x3
4	3	0	1	1	0	7x4
5	2	3	0	0	0	7x2
6	2	2	0	0	1	7x5
7	2	1	2	0	0	8x3
8	2	1	1	0	1	8x5

Aufgabe 2. Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 6 Quadrate zerlegen kann?

Antwortsatz. Es gibt 16 verschiedene Rechtecke, die Quadrato durch Abschneiden in 6 Quadrate zerlegen kann.

Tabellarische Lösung:

Nr.	1x1-R.	2x2-R.	3x3-R.	4x4-R.	5x5-R.	6x6-R.	7x7-R.	8x8-R.	Rechteck gesamt
1	6	0	0	0	0	0	0	0	6x1
2	5	0	0	0	1	0	0	0	6x5
3	4	0	0	2	0	0	0	0	9x4
4	4	0	0	1	1	0	0	0	9x5
5	3	0	3	0	0	0	0	0	10x3
6	3	0	2	0	0	0	1	0	10x7
7	3	0	1	2	0	0	0	0	11x4
8	3	0	1	1	0	0	1	0	11x7
9	2	4	0	0	0	0	0	0	9x2
10	2	3	0	0	0	0	1	0	9x7
11	2	2	0	0	2	0	0	0	12x5
12	2	2	0	0	1	0	1	0	12x7
13	2	1	3	0	0	0	0	0	11x3
14	2	1	2	0	0	0	0	1	11x8
15	2	1	1	0	2	0	0	0	13x5
16	2	1	1	0	1	0	0	1	12x8

Auch wenn wir eine Systematik in der Tabelle erkannt haben – es muss nachgewiesen werden, dass es für jede Zeile eine entsprechende Zerlegung gibt (zum Beispiel durch eine Skizze der Zerlegung).

Aufgabe 3. Gibt es Rechtecke, die Quadrato durch Abschneiden in mehr als 8 Quadrate zerlegen kann, wobei jedes dieser Quadrate eine ungerade Anzahl von Kästchen enthält? Begründe deine Antwort.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Antwortsatz. Es gibt solche Rechtecke. Zum Beispiel lässt sich das 9x1-Rechteck in 9 Quadrate mit ungerader Kästchenzahl (1x1-Quadrate) zerlegen. Aber es gibt mehrere Möglichkeiten. So lässt sich auch das 41x17-Rechteck in 9 Quadrate mit jeweils ungerader Kästchenanzahl zerlegen.

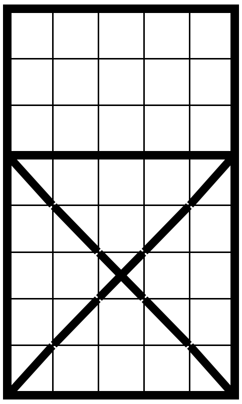
Begründung: Bei dieser Aufgabenstellung genügt es, ein Beispiel anzugeben, das die Bedingungen erfüllt. Als einfachster Fall ist das 9x1-Rechteck geeignet, denn es lässt sich in neun 1x1-Quadrate zerlegen.

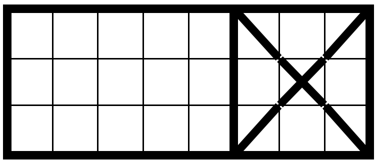
Wir wollen ein größeres Rechteck mit dieser Eigenschaft finden. Dafür untersuchen wir die Zerlegung rückwärts: Wenn nach dem Abschneiden eines Quadrats ein m x n -Rechteck übrigbleibt, so war vorher entweder

- an der langen Seite ein m x m -Quadrat oder
- an der kurzen Seite ein n x n –Quadrat.

Vor dem Abschneiden war das Rechteck also entweder ein m x (m+n) –Rechteck oder ein (m+n) x n-Rechteck.

Beispiel: Ein 5x3-Rechteck kann nur entstehen, wenn von einem 5x8-Rechteck ein 5x5-Quadrat abgeschnitten wurde oder wenn von einem 8x3-Rechteck ein 3x3-Quadrat abgeschnitten wurde.





Diesen Zusammenhang wenden wir nun an:

Wenn ein 1x1-Quadrat übrigbleibt, wurde vorher ein 1x1-Quadrat von einem 2x1-Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 2x1-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 2x2-Quadrat abgeschnitten, weil alle abgeschnittenen Quadrate eine ungerade Anzahl von Kästchen haben sollen. Deshalb wurde vorher ein weiteres 1x1-Quadrat von einem 3x1-Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 3x1-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher ein 3x3-Quadrat von einem 4x3-Rechteck abgeschnitten. Es ist aber auch möglich, dass vorher ein 1x1-Quadrat von einem 4x1-Rechteck abgeschnitten wurde.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wenn ein 4x3-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 4x4-Quadrat abgeschnitten. Deshalb wurde vorher ein 3x3-Quadrat von einem 7x3-Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 7x3-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher ein 7x7-Quadrat von einem 10x7-Rechteck abgeschnitten. Es ist aber auch möglich, dass vorher ein 3x3-Quadrat von einem 7x6-Rechteck abgeschnitten wurde.

Wenn ein 10x7-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 10x10-Quadrat abgeschnitten. Deshalb wurde vorher ein 7x7-Quadrat von einem 17x7-Rechteck abgeschnitten.

Wenn ein 17x7-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher ein 17x17-Quadrat von einem 24x17-Rechteck abgeschnitten. Es ist aber auch möglich, dass vorher ein 7x7-Quadrat von einem 17x14-Rechteck abgeschnitten wurde.

Wenn ein 24x17-Rechteck übrigbleibt, wurde vorher kein 24x24-Quadrat abgeschnitten. Deshalb wurde vorher ein 17x17-Quadrat von einem 41x17-Rechteck abgeschnitten.

Rechteck	Vorher abgeschnittenes Quadrat	Vorher vorliegendes Rechteck	Vorher abgeschnittenes Quadrat	Vorher vorliegendes Rechteck
	1. Möglichkeit		2. Möglichkeit	
1x1	1x1	2x1	entfällt	
2x1	1x1	3x1	2x2 – entfällt	
3x1	3x3	4x3	1x1	4x1
4x3	3x3	7x3	4x4 – entfällt	
7x3	7x7	10x7	3x3	7x6
10x7	7x7	17x7	10x10 – entfällt	
17x7	17x17	24x17	7x7	17x14
24x17	17x17	41x17	24x24 - entfällt	

Nun sind die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Wir können aus der Tabelle ablesen: Wir können ein 41x17-Rechteck durch Abschneiden in drei 1x1-Quadrate und je zwei 3x3-, 7x7- und 17x17-Quadrate zerlegen, insgesamt in 9 Quadrate.

Immer wenn ein Rechteck zwei unterschiedliche Seiten mit ungerader Anzahl von Kästchen besitzt, gibt es zwei Möglichkeiten für das nächste abgeschnittene Quadrat. Insgesamt gibt es deshalb 8 Rechtecke, das man in 9 Quadrate mit jeweils ungerader Kästchenanzahl zerlegen kann:

Nr.	1x1-Q	3x3-Q	5x5-Q	7x7-Q	11x11-Q	13x13-Q	17x17-Q	Gesamt
1	3	6						19x3
2	3	4				2		29x13
3	3	2		4				31x7
4	3	2		2			2	41x17
5	5		4					21x5
6	5		2		2			27x11
7	7			2				15x7
8	9							9x1

Aufgabe 4. Wenn Quadrato ein Rechteck gefunden hat, das er durch Abschneiden in 6 Quadrate zerlegen kann, fällt es ihm nicht schwer, ein Rechteck zu finden, das er durch Abschneiden in 7 Quadrate zerlegen kann. Erkläre, wie es ihm gelingen kann!

Antwortsatz. Wir können die Aussagen aus Aufgabe 3 verwenden: Wenn Quadrato ein Rechteck gefunden hat, dass durch Abschneiden in Quadrate zerlegt werden kann, fügt er diesem Rechteck an eine seiner Seiten ein Quadrat hinzu, dessen Seitenlänge so groß wie diese Seitenlänge des Rechtecks ist. Dieses größere Rechteck kann Quadrato in 7 Quadrate zerlegen.

Aufgabe 5. Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es, die Quadrato durch Abschneiden in 7 Quadrate zerlegen kann? Nutze für die Lösung die Idee aus Aufgabe 4 – finde also eine Möglichkeit, aus der Anzahl von Aufgabe 2 und der Idee aus Aufgabe 4 die gesuchte Anzahl zu ermitteln.

Antwortsatz. Es gibt 32 verschiedene Rechtecke, die Quadrato in 7 Quadrate zerlegen kann.

Begründung. Jedes Rechteck, das sich in 6 Quadrate zerlegen lässt, kann mit der Idee aus der Lösung zu Aufgabe 4 zu zwei verschiedenen Rechtecken erweitert werden:

- durch Hinzufügen eines Quadrates an der längeren Rechteckseite und
- durch Hinzufügen eines Quadrates an der kürzeren Rechteckseite.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Nr.	Rechteck (6 Quadrate) m x n	Hinzufügen eines Quadrates		
		an kurze Seite (m+n) x n	an lange Seite m x (m+n)	Rechteck gedreht
1	6 x 1	7 x 1	6 x 7	7 x 6
2	6 x 5	11 x 5	6 x 11	11 x 6
3	9 x 2	11 x 2	9 x 11	11 x 9
4	9 x 4	13 x 4	9 x 13	13 x 9
5	9 x 5	14 x 5	9 x 14	14 x 9
6	9 x 7	16 x 7	9 x 16	16 x 9
7	10 x 3	13 x 3	10 x 13	13 x 10
8	10 x 7	17 x 7	10 x 17	17 x 10
9	11 x 3	14 x 3	11 x 14	14 x 11
10	11 x 4	15 x 4	11 x 15	15 x 11
11	11 x 7	17 x 7	11 x 18	18 x 11
12	11 x 8	19 x 8	11 x 19	19 x 11
13	12 x 5	17 x 5	12 x 17	17 x 12
14	12 x 7	19 x 7	12 x 19	19 x 12
15	12 x 8	20 x 8	12 x 20	20 x 12
16	13 x 5	18 x 5	13 x 18	18 x 13