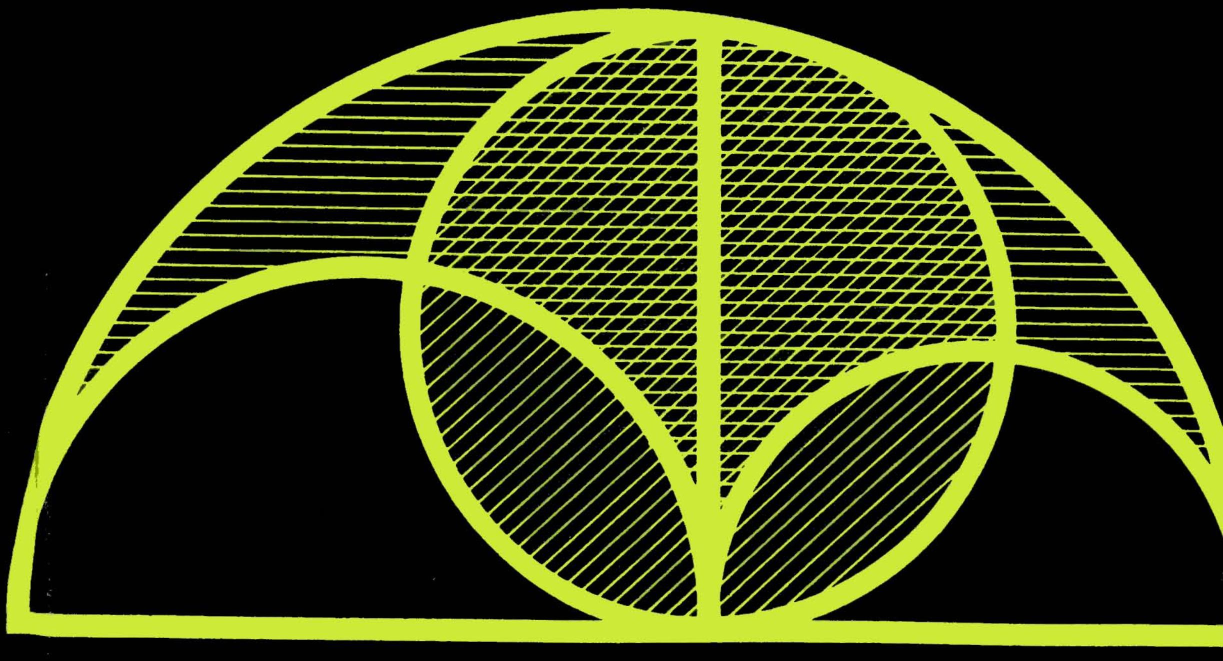
Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Eine Auswahl

Band 2



Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR Band II

Herausgegeben von
Prof. Dr. W. Engel, Universität Rostock
Prof. Dr. U. Pirl, Humboldt-Universität Berlin

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1975

1. Auflage
Lizenz Nr. 203 · 1000/75 (E 00 21 71-1)
LSV 0645
Redaktion: Karlheinz Martin, Ingrid Fabian
Zeichnungen: Heinrich Linkwitz
Einband: Manfred Behrendt
Typographische Gestaltung: Atelier vwv
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö,
Graphischer Großbetrieb, Leipzig III/18/38–5
Schrift: 9/10 p Extended
Redaktionsschluß: 10. Juni 1974
Bestell-Nr. 706 734 1

EVP: 6,00 Mark

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

In dem vorliegenden Band 2 werden lehrreiche geometrische Aufgaben sowie deren Lösungen aus den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR der Jahre 1961/62 bis 1966/67 und aus den beiden Vorolympiaden 1960 und 1961 vorgestellt. Es wurden nur Aufgaben der Olympiadeklassen 9 bis 12 berücksichtigt.
Autoren der Aufgaben und ihrer Lösungen lassen sich nicht angeben, da Aufgaben und Lösungen häufig verändert wurden. Hinter jeder Aufgabe ist jedoch angegeben, aus welcher Olympiade die betreffende Aufgabe stammt. Es bedeutet (x/y/z) die x-te Olympiade (VO 61 bedeutet Vorolympiade 1961), y die Olympiadeklasse (9, 10, 11, 12, 11.12) und z die Stufe. Weitere Informationen über die Mathematik-Oympiaden in der DDR sind im Vorwort des Bandes 1 der *Aufgaben mit Lösungen aus den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR* (Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972) und im Heft 2 der *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der Deutschen Demokratischen Republik, Jahrgang 1971*, enthalten.
In den *Vorbetrachtungen* wird der Versuch unternommen, die Definitionen und wichtigsten Sätze der Geometrie, die im Unterricht und in der außerunterrichtlichen Arbeit benutzt werden, zusammenzustellen. Da die Auffassungen und Bezeichnungsweisen in den z. Z. in der DDR eingeführten Schulbüchern und Nachschlagewerken nicht einheitlich sind, wurde weitgehend eine Anlehnung an das *Kompendium der Mathematik* (Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973) gesucht. Im Interesse einer für die Mathematik-Olympiaden nötigen exakteren Formulierung mußten jedoch auch neue Wege beschritten werden. Zum Beispiel wird hier in der Bezeichnung zwischen der Strecke und ihrer Länge sowie zwischen dem Winkel und seiner Größe unterschieden. Die Bezeichnungen entsprechen denen, die in den Bänden der *Studienbücherei „Mathematik für Lehrer“* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin) benutzt werden.
Die Lösung einer Aufgabe besteht in der Herleitung der Behauptung aus den Sätzen der Vorbetrachtungen bzw. in der Ausführung dessen, was dort unter VI. bezüglich der Konstruktionen gesagt wird. In den Lösungen wird, um den Leser nicht mit Nachschlagen zu langweilen, nicht an jeder Stelle auf die benutzten Sätze usw. verwiesen. Innerhalb der Lösung einer Aufgabe wird auf die Vorbetrachtungen i. allg. höchstens einmal verwiesen, z. B. in der Form: „vgl. Satz III.27“ oder „vgl. I.18“. Vielfach werden gängige Namen der Sätze benutzt, wobei diese aber in der Formulierung der Vorbetrachtungen zu verstehen sind. Man beachte die Unterschiede, die z. B. bei den Kongruenzsätzen, den Ähnlichkeitssätzen und beim Satz des Thales in Schulbüchern, im *Kompendium der Mathematik* und in der *Kleinen Enzyklopädie Mathematik* (VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965) bestehen.

Wir danken unseren Mitarbeitern Dipl.-Math. Dr. paed. Klaus-Dieter Drews (Universität Rostock), Liane Tontschew, Edith Wittmann (beide Humboldt-Universität Berlin) für ihre Vorarbeiten, Frau Helga Engel (Rostock) und Herrn Oberstudienrat Herbert Titze (Berlin) für ihre Unterstützung sowie für die wertvollen Hinweise bei der Endredaktion. Unser Dank gilt ferner der Offizin Andersen Nexö für die sorgfältige Ausführung des Druckes.

Die Herausgeber

VORBETRACHTUNGEN

In den folgenden Abschnitten werden zunächst Definitionen und Sätze der Geometrie, die bei der Lösung der Aufgaben Verwendung finden, systematisch zusammengestellt. Ferner wird der Aufbau der vollständigen Lösung einer Konstruktionsaufgabe erläutert. Die angeführten Sätze werden ohne Beweis wiedergegeben. Einige von ihnen sind als Axiome aufzufassen, werden jedoch nicht als solche gekennzeichnet, da die übrigen hier nicht aus ihnen hergeleitet werden. Außerdem werden auch einige zweckmäßige Bezeichnungen eingeführt, die im Text allgemein Verwendung finden.
Die Redewendungen „heißen", „bedeuten", „genannt werden", „versteht man" werden stets im Sinne von „genau dann, wenn" verwendet.
Mit der Formulierung „Wenn das Gebilde g der Bedingung B genügt, so heißt es ein Element der Menge $\mathfrak{M}$", ist gemeint: „g ist dann und nur dann Element von $\mathfrak{M}$, wenn es der Bedingung B genügt".
Die Redeweise „n paarweise voneinander verschiedene Objekte" (z.B. Zahlen, Punkte, Strecken) wird gleichbedeutend mit der Redeweise „n Objekte, von denen keine zwei gleich sind" verwendet.

I. Einfache Grundrelationen

In den Aufgaben dieses Buches kommt ausschließlich die sogenannte euklidische Geometrie vor, von der ja ein gewisser Teil im Unterricht unserer Schulen behandelt wird. *Grundbegriffe* dieser Geometrie (des Raumes) sind *Punkte, Geraden* und *Ebenen.* Die zwischen ihnen und weiteren *abgeleiteten Begriffen* wie *Strecke, Winkel, Kreis, Kugel* u.a. bestehenden *Relationen,* wie *Inzidenz, Schnitt, Kongruenz, Ähnlichkeit* u.a., sind Gegenstand der euklidischen Geometrie.
Da es oft vorteilhaft ist, die geometrischen Gebilde als Punktmengen zu interpretieren, werden eine Reihe von Bezeichnungen aus der Mengenlehre mit in die Geometrie übernommen, z.B.:

$\in$ – Element von,
$\subseteq$ – Teilmenge von,
$\subset$ – echte Teilmenge von,
$\cup$ – Vereinigung,
$\cap$ – Durchschnitt,
$\emptyset$ – leere Menge

Die Darlegungen unter 1. bis 18. enthalten die wichtigsten Relationen über Inzidenz, Strecken- und Winkelmessung.

1. Zwei Punkte A und B sind entweder *gleich*, in Zeichen

$$A = B$$

– man sagt dafür auch: *sie fallen zusammen, sie inzidieren miteinander* – oder sie sind voneinander verschieden, in Zeichen

$$A \neq B.$$

Dabei gelten für die Gleichheit die drei folgenden Gesetze:

a) Für jeden Punkt A gilt $A = A$.
b) Gilt $A = B$, so gilt auch $B = A$.
c) Gilt $A = B$ und $B = C$, so gilt auch $A = C$.

Entsprechendes trifft auch für je zwei Geraden g und h sowie für je zwei Ebenen ε und η zu.

2. Bezeichnen A einen Punkt, g eine Gerade und ε eine Ebene, so bestehen folgende Alternativen:

a) *A liegt auf g – gehört g an, inzidiert mit g* – in Zeichen $A \in g$, oder nicht, in Zeichen $A \notin g$.
b) *A liegt in ε – gehört ε an, inzidiert mit ε* – in Zeichen $A \in \varepsilon$, oder nicht, in Zeichen $A \notin \varepsilon$.
c) *g liegt in ε – gehört ε an, inzidiert mit ε* – in Zeichen $g \subset \varepsilon$, oder nicht, in Zeichen $g \not\subset \varepsilon$. Dabei folgt aus $A \in g$ und $g \subset \varepsilon$ stets $A \in \varepsilon$.

3. Ist g eine Gerade und A ein Punkt auf ihr, so wird g durch A in zwei von A ausgehende *Halbgeraden* oder *Strahlen* zerlegt.
Jeder von A verschiedene Punkt auf g liegt auf genau einem dieser beiden Strahlen, während A beiden Strahlen angehört. Liegt $B \neq A$ auf einem solchen Strahl, so heißt dieser *Strahl aus A durch B*.
Sind B und C zwei von A verschiedene Punkte auf g, so sagt man, B und C liegen *auf derselben Seite* bzw. *auf verschiedenen Seiten* von A, je nachdem ob sie auf demselben Strahl oder auf verschiedenen Strahlen liegen, die von A ausgehen.

4. Sind A und B zwei nicht zusammenfallende Punkte, so gibt es genau eine Gerade

$$g_{AB} = g_{BA},$$

auf der sowohl A als auch B liegt.
Liegen A und B in der Ebene ε, so liegt auch g_{AB} in ε. Die Menge aller Punkte von g_{AB}, die sowohl auf dem von A ausgehenden, B enthaltenden Strahl als auch auf dem von B ausgehenden, A enthaltenden Strahl liegen, heißt die *Strecke AB*. Es gilt:

$$AB = BA.$$

A und B heißen *Endpunkte* von AB und die übrigen Punkte von AB *innere* Punkte von AB. Im Falle $B = A$ bedeutet AB den Punkt A.
Der Punkt A liegt genau dann auf derselben Seite des Punktes $C \in g_{AB}$ wie B, wenn $C \notin AB$ ist.
Jede *Strecke* wird durch eine nicht negative reelle Zahl $|AB|$, die *Länge der Strecke AB*, gemessen, wobei hier, wie in der höheren Mathematik üblich, kein

Unterschied zwischen der Länge und ihrer Maßzahl gemacht wird, indem man sich alle Längen auf dieselbe Einheit bezogen denkt.
Die Länge hat folgende Eigenschaften:

a) Es gilt stets $|AB| \geq 0$. Die Schreibweise $|AB| = 0$ wird auch verwendet und bedeutet, daß $A = B$ ist.

b) Es gilt stets $|AB| = |BA|$.

c) Für jeden Punkt C gilt $|AB| \leqq |AC| + |CB|$ (*Dreiecksungleichung*), und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn C auf AB liegt.

d) Zu jedem Punkt A und jeder positiven Zahl x gibt es auf jedem von A ausgehenden Strahl genau einen Punkt X, für den $|AX| = x$ gilt.

5. Zu jeder Geraden g gibt es in jeder g enthaltenden Ebene einen nicht auf g gelegenen Punkt. Ist A ein nicht auf g gelegener Punkt, so gibt es genau eine Ebene ε, die sowohl A als auch g enthält. Die Gerade g zerlegt ε in zwei von g begrenzte Halbebenen so, daß jeder Punkt von ε, der nicht auf g liegt, genau einer der beiden Halbebenen angehört, während g zu beiden Halbebenen gehört.
Man sagt: „Zwei Punkte A und B von ε liegen genau dann in derselben von der Geraden $g \subset \varepsilon$ begrenzten Halbebene, wenn g keinen inneren Punkt von AB enthält, und A und B liegen genau dann *auf derselben Seite* von g, wenn g keinen Punkt von AB enthält."

6. Zu jeder Ebene ε gibt es einen nicht in ihr gelegenen Punkt. Jede Ebene ε zerlegt den Raum in zwei von ε begrenzte *Halbräume* so, daß jeder nicht mit ε inzidierende Punkt in genau einem der beiden Halbräume liegt, während ε beiden Halbräumen angehört.
Man sagt: „Zwei Punkte A und B liegen genau dann in demselben von ε begrenzten Halbraum, wenn ε keinen inneren Punkt der Strecke AB enthält, sie liegen genau dann *auf derselben Seite* von ε, wenn ε keinen Punkt der Strecke AB enthält."

7. Auf jeder Geraden g gibt es zu jedem Punkt C des Raumes genau einen Punkt F, so daß $|CF| < |CP|$ für jeden Punkt $P \neq F$ von g gilt. F heißt die *senkrechte Projektion* von C auf g oder auch der *Fußpunkt des Lotes CF von C auf g*. Die Länge $|CF|$ heißt der *Abstand des Punktes C von g*. Liegt C nicht auf g, so *steht g_{CF} auf g senkrecht*.

8. In jeder Ebene ε gibt es zu jedem Punkt C des Raumes genau einen Punkt F, so daß $|CF| < |CP|$ für jeden Punkt $P \neq F$ von ε gilt. F heißt die *senkrechte Projektion* von C auf ε oder auch der *Fußpunkt des Lotes CF von C auf ε*. Die Länge $|CF|$ heißt der *Abstand des Punktes C von ε*. Liegt C nicht in ε, so *steht g_{CF} auf ε senkrecht*.

9. Für zwei nicht zusammenfallende Geraden g und h gibt es genau die drei unter a), b) und c) beschriebenen Möglichkeiten der gegenseitigen Lage.

a) g und h liegen nicht in derselben Ebene. Dann sind sie *windschief* zueinander und haben keinen gemeinsamen Punkt. In diesem Fall gibt es genau ein Punktepaar (A, B) mit $A \in g$ und $B \in h$ derart, daß $|AB| < |PQ|$ für alle Punkte $P \in g$ und $Q \in h$ ausfällt, wenn nicht gleichzeitig $P = A$ und $Q = B$ gilt. $|AB|$ heißt dann der *Abstand von g und h*, und es steht g_{AB} senkrecht auf g und auf h.

b) g und h liegen in derselben Ebene und haben keinen Punkt gemeinsam. In diesem Fall und im Fall $g = h$ heißen g und h zueinander *parallel*, in

Zeichen $g \parallel h$; daß g nicht parallel zu h ist, wird durch die Schreibweise $g \nparallel h$ zum Ausdruck gebracht.
Ist $g \parallel h$, so heißt auch jeder Strahl auf g und jede Strecke von g zu h, zu jedem Strahl auf h und zu jeder Strecke von h parallel.
Ist $g \parallel h$, so gibt es eine Zahl d, den *Abstand* von g und h, derart, daß jeder Punkt von g den Abstand d von h und jeder Punkt von h den Abstand d von g hat.
Ist $g \parallel h$, $g \neq h$, so gibt es nur eine Ebene, die sowohl g als auch h enthält.

c) g und h haben genau einen gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt) S. Dann gibt es genau eine Ebene, der sowohl g als auch h angehört. S zerlegt g und h in je zwei Strahlen g_1, g_2 bzw. h_1, h_2. Jedes der vier Strahlenpaare (g_m, h_n), $m = 1, 2$, $n = 1, 2$, bestimmt einen *Winkel*, in Zeichen

$$\sphericalangle(g_m, h_n) = \sphericalangle(h_n, g_m), \qquad (1)$$

mit der *Größe*

$$|\sphericalangle(g_m, h_n)|,$$

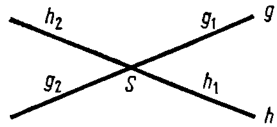


Bild 1

den *Schenkeln* g_m *und* h_n und dem *Scheitel* S (Bild 1). Die Größe jedes Winkels wird dabei durch eine positive Zahl kleiner π im Bogenmaß oder kleiner 180° im Gradmaß gemessen. Außerdem werden die Grenzfälle $\sphericalangle(g_1, g_1)$ der Größe 0° und $\sphericalangle(g_1, g_2)$ der Größe 180° zugelassen.
Von den vier Winkeln (1) haben gleiche Größe:

$$|\sphericalangle(g_1, h_1)| = |\sphericalangle(g_2, h_2)| \quad \text{und} \quad |\sphericalangle(g_1, h_2)| = |\sphericalangle(g_2, h_1)|.$$

Diese beiden Paare gleich großer Winkel werden als *Scheitelwinkel* bezeichnet, die übrigen vier Winkelpaare als *Nebenwinkel*. Die Summe der Größen je zweier Nebenwinkel beträgt im Gradmaß 180°. Hat ein Winkel die gleiche Größe wie sein Nebenwinkel, so ist seine Größe 90° und er heißt ein *rechter Winkel*. Ist einer der Winkel (1) ein rechter, so ist dies auch jeder der drei übrigen, und man sagt, *g steht senkrecht auf h* oder auch *g ist orthogonal zu h*, in Zeichen $g \perp h$.
Außerdem hat die Winkelgröße folgende Eigenschaften: Liegt die Gerade g in der Ebene ε und ist g_1 ein von dem Punkt $S \in g$ ausgehender Strahl auf g, so gibt es zu jeder Zahl α mit $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ in jeder der beiden von g begrenzten Halbebenen von ε genau einen von S ausgehenden Strahl s (freier Schenkel an g_1) mit

$$|\sphericalangle(s, g_1)| = \alpha.$$

Liegt die Gerade g in der Ebene ε und sind s_1 und s_2 zwei von dem auf g gelegenen Punkt S ausgehende Strahlen, die in verschiedenen von g begrenzten Halbebenen von ε liegen, so gilt

$$|\sphericalangle(s_1, s)| + |\sphericalangle(s, s_2)| = |\sphericalangle(s_1, s_2)|,$$

wenn s einen von S ausgehenden Strahl auf g bezeichnet, genauer: einen solchen, der einen Punkt mit einer Strecke gemeinsam hat, deren einer Endpunkt auf s_1 und deren anderer auf s_2 liegt und die nicht zum Punkt S ausgeartet ist. In diesem Fall heißt s, wenn $|\sphericalangle(s_1, s_2)| < 180°$ ist, *innerhalb des Winkels* $\sphericalangle(s_2, s_2)$ gelegen.
Zur Untersuchung ebener Figuren kann nach Einführung einer Orientierung (eines Drehsinns) in der Figurenebene der Begriff des Winkels und

seiner Größe zu dem des *orientierten Winkels* und seiner Größe, in Zeichen $\sphericalangle(g_1, h_1)$ und $|\sphericalangle(g_1, h_1)|$, verfeinert werden. In vielen Fällen wird der Gegenuhrzeigersinn als Orientierung verwendet, man kann aber auch den Uhrzeigersinn wählen.
Für die Größen der orientierten Winkel gilt stets

$$0° \leqq |\sphericalangle(g_1, h_1)| \leqq 360°$$

und

$$|\sphericalangle(g_1, h_1)| + |\sphericalangle(h_1, g_1)| = 360°,$$

wenn das Gradmaß zugrunde gelegt wird. Einer der beiden Summanden auf der linken Seite der letzten Gleichung ist dabei gleich $|\sphericalangle(g_1, h_1)|$ (Bild 2a und b).

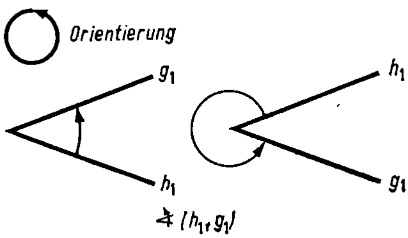


Bild 2a

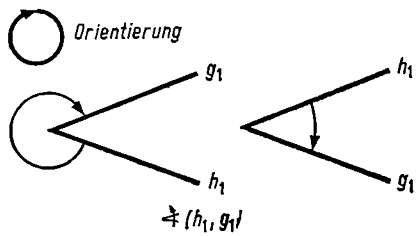


Bild 2b

Ein Winkel heißt ein *spitzer*, *rechter*, *stumpfer* oder *gestreckter* Winkel je nachdem, ob für seine Größe α gilt:

$$\alpha < 90°, \quad \alpha = 90°, \quad 90° < \alpha < 180° \quad \text{oder} \quad \alpha = 180°.$$

Jeder orientierte Winkel, dessen Größe $> 180°$ ist, heißt ein *überstumpfer* Winkel.

10. Für eine Gerade g und eine Ebene ε gibt es genau die drei unter a), b), c) beschriebenen Möglichkeiten der gegenseitigen Lage:

a) g liegt in ε (vgl. 5).
b) g hat mit ε keinen gemeinsamen Punkt.

In beiden Fällen heißt g *parallel* zu ε, in Zeichen $g \parallel \varepsilon$. Alle Punkte von g haben dann den gleichen Abstand von ε, der als Abstand von g und ε definiert wird, und durch jeden Punkt von ε gibt es genau eine Gerade, die zu g parallel ist; sie liegt in ε.

c) g hat mit ε genau einen Punkt (Schnittpunkt) S gemeinsam. Ist dann s einer der von S ausgehenden Strahlen auf g, dann gibt es in ε einen von S ausgehenden Strahl s', so daß $|\sphericalangle(s, s')| \leqq |\sphericalangle(s, t)|$ für alle in ε gelegenen Strahlen t gilt, die von S ausgehen. Der Winkel $\sphericalangle(s, s')$ wird als *Schnittwinkel* von g und ε definiert (Bild 3).

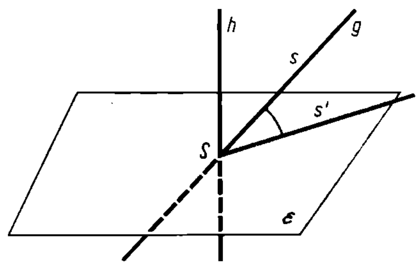


Bild 3

Definiert man im Fall $g \parallel \varepsilon$ die Größe des Schnittwinkels von g und ε als $0°$, so hat jede Gerade mit jeder Ebene einen Schnittwinkel, dessen Größe α im Gradmaß stets der Bedingung $0° \leqq \alpha \leqq 90°$ genügt. Dabei gilt $\alpha = 0°$ genau dann, wenn $g \parallel \varepsilon$ ist, $\alpha = 90°$ genau dann, wenn g auf zwei voneinander verschiedenen durch S gehenden Geraden in ε und damit auf allen in ε gelegenen von S ausgehenden Strahlen senkrecht steht. In diesem Fall sagt man, g *steht auf* ε *senkrecht*, in Zeichen $g \perp \varepsilon$. Im Fall $0° < \alpha < 90°$ gibt es nur einen in ε gelegenen Strahl s', für den $|\sphericalangle(s, s')| = \alpha$ ist. Dabei liegen s', g und die auf ε senkrecht stehende Gerade durch S in ein und derselben Ebene. Durch jeden Punkt jeder Geraden g gibt es genau eine zu g senkrechte Ebene, und durch jeden Punkt jeder Ebene ε gibt es genau eine auf ε senkrecht stehende Gerade.

11. Für zwei nicht zusammenfallende Ebenen ε und η gibt es genau die zwei unter a) und b) beschriebenen Möglichkeiten der gegenseitigen Lage:

a) ε und η haben keinen gemeinsamen Punkt. Dann und im Fall $\varepsilon = \eta$ heißen ε und η zueinander *parallel*, in Zeichen $\varepsilon \parallel \eta$. Genau in diesem Fall gibt es eine Zahl d, den *Abstand* der beiden Ebenen, so daß jeder Punkt von ε den Abstand d von η und jeder Punkt von η den Abstand d von ε hat.

b) ε hat mit η genau eine Gerade g gemeinsam (Schnittgerade). Durch g werden ε und η in je zwei Halbebenen ε_1, ε_2 bzw. η_1, η_2 zerlegt. Ist $S \in g$ und ist ε' die auf g senkrechte Ebene durch S, so schneidet ε' die Halbebene ε_1 in einem von S ausgehenden Strahl s_1 und η_1 in einem von S ausgehenden Strahl t_1. Der orientierte bzw. nicht orientierte Winkel zwischen s_1 und t_1 wird als der entsprechende *Schnittwinkel* (*Neigungswinkel*) von ε_1 und η_1 definiert (Bild 4).

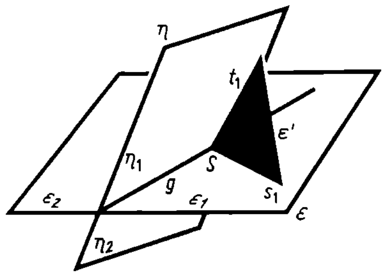


Bild 4

12. Sind A, B, C drei paarweise voneinander verschiedene Punkte, so werden zwei Fälle unterschieden:

a) A, B, C liegen nicht auf derselben Geraden, dann gibt es genau eine Ebene ε_{ABC}, die jeden der drei Punkte enthält.

b) A, B, C liegen auf derselben Geraden. Hier spielen zwei Spezialfälle eine besondere Rolle:

1. $|AC| = |CB|$. Dann liegt der Punkt C auf AB und heißt der Mittelpunkt von AB.
2. Liegt C so auf AB, daß $|AC| : |CB| = |AB| : |AC|$ gilt, so sagt man, *C teile AB stetig.*

13. Bei drei Geraden g_1, g_2, h sind die beiden folgenden Fälle von besonderer Bedeutung:

a) $g_1 \parallel h$, $g_2 \parallel h$. Dann ist $g_1 \parallel g_2$.
b) $g_1 \parallel g_2 \nparallel h$, $g_1 \nparallel g_2$, h in der Ebene durch g_1 und g_2 gelegen (Bild 5).

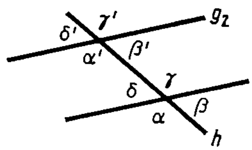


Bild 5

Dann ist $h \nparallel g_1$, und es gilt für die Größen der entstehenden Winkel:

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma', \quad \delta = \delta' \tag{2}$$

$$\alpha = \gamma', \quad \beta = \delta', \quad \gamma = \alpha', \quad \delta = \beta' \tag{3}$$

In (2) heißt jedes der entsprechenden Paare gleichgroßer Winkel *Stufenwinkel*, in (3) *Wechselwinkel.*

14. Für die gegenseitige Lage zweier Geraden g, h und einer Ebene ε ist der Fall $g \parallel h$ von besonderer Bedeutung. Dann ist der Schnittwinkel von g und ε ebenso groß wie der von h und ε. Insbesondere gilt im Fall $g \perp \varepsilon$ genau dann $h \perp \varepsilon$, wenn $g \parallel h$ ist, und im Fall $g \parallel \varepsilon$ gilt $h \parallel \varepsilon$.

15. Für die gegenseitige Lage einer Geraden g und zweier Ebenen ε und η sind folgende Fälle von besonderer Bedeutung:

a) $\varepsilon \parallel \eta$. Dann ist der Schnittwinkel von g und ε ebenso groß wie der von g und η. Insbesondere gilt im Fall $g \perp \varepsilon$ genau dann $g \perp \eta$, wenn $\varepsilon \parallel \eta$ ist, und im Fall $g \parallel \varepsilon$ gilt $g \parallel \eta$.

b) $\varepsilon \perp \eta$, $g \perp \eta$. Dann ist $g \parallel \varepsilon$.

16. Bei der gegenseitigen Lage dreier paarweise voneinander verschiedener Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$. Dann ist $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$.

b) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \nparallel \varepsilon_3$. Dann schneidet ε_3 die Ebenen ε_1 und ε_2 in parallelen Geraden, und die Schnittwinkel von ε_3 mit ε_1 und ε_2 haben gleiche Größe.

c) Keine zwei der ε_i sind parallel.

   1. Es gibt keinen allen drei ε_i angehörenden Punkt. Dann sind die drei Schnittgeraden der ε_i paarweise parallel.
   2. Es gibt genau einen Punkt, der allen drei ε_i angehört, den Schnittpunkt der Schnittgeraden von ε_1, ε_2 von ε_2, ε_3 und von ε_1, ε_3.
   3. Es gibt genau eine Gerade, die allen drei ε_i angehört.

Weitere Fälle gibt es nicht.

17. Zwei Punkte P und P' liegen *spiegelbildlich* oder *symmetrisch* zueinander in bezug auf

$$\left\{\begin{array}{l} \text{den Punkt } M \\ \text{die Gerade } g \\ \text{die Ebene } \varepsilon \end{array}\right\}, \quad \text{wenn } P \text{ und } P' \text{ von } \left\{\begin{array}{c} M \\ g \\ \varepsilon \end{array}\right\}$$

den gleichen Abstand haben und im Falle $P \neq P'$

$$g_{PP'} \left\{\begin{array}{l} M \text{ enthält} \\ g \text{ senkrecht schneidet} \\ \perp \varepsilon \text{ ist,} \end{array}\right\} \text{ und im Fall } P = P''$$

$$\left\{\begin{array}{l} P = M \text{ ist} \\ P \in g \text{ ist} \\ P \in \varepsilon \text{ ist} \end{array}\right\}.$$

Zu jedem Punkt P gibt es in jedem der drei Fälle genau einen Punkt P', der spiegelbildlich zu P liegt.

Zwei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Punktmengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ heißen in bezug auf M, g bzw. ε *spiegelbildlich* gelegen, wenn für jeden Punkt

$P_1 \in \mathfrak{M}_1$ und für jeden Punkt $P_2 \in \mathfrak{M}_2$ der in bezug auf M, g bzw. ε spiegelbildlich gelegene Punkt P_1' bzw. P_2' zu $\mathfrak{M}_2$ bzw. $\mathfrak{M}_1$ gehört, also $P_1' \in \mathfrak{M}_2$, $P_2' \in \mathfrak{M}_1$ gilt.

18. Sind A, B, C drei paarweise voneinander verschiedene Punkte, s und t die von B ausgehenden Strahlen durch A bzw. C, so bedeutet $\sphericalangle ABC = \sphericalangle (s, t)$ bzw. in der Ebene ε_{ABC} nach Einführung einer Orientierung $\measuredangle ABC = \measuredangle (s, t)$. Liegt der Punkt D auf AC, so gilt mit diesen Bezeichnungen $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle ABC|$. Es gilt aber nicht immer $|\measuredangle ABD| + |\measuredangle DBC| = |\measuredangle ABC|$ (Bild 6).
Ist AB gemeinsame Seite des in der von g_{AB} begrenzten Halbebene ε gelegenen *Vielecks* (s. Abschn. III) Ω_1 und des in der von g_{AB} begrenzten Halbebene ε_2 gelegenen Vielecks Ω_2, so wird der *Schnittwinkel* von Ω_1 und Ω_2 bzw. der von Ω_1 und Ω_2 begrenzten Vielecksflächen als der Winkel (Neigungswinkel) zwischen ε_1 und ε_2 definiert.

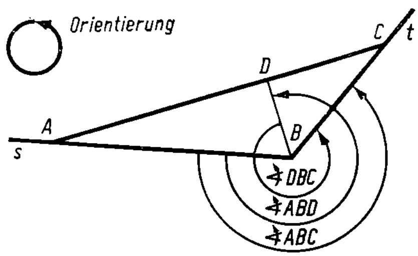


Bild 6

II. Geometrische Örter[1]

Die Aussage, $\mathfrak{M}$ ist die Menge aller Punkte, die der Bedingung $\mathfrak{B}$ genügen, ist gleichwertig mit den beiden folgenden Sätzen, die Umkehrungen voneinander sind:

a) Gehört der Punkt P zur Menge $\mathfrak{M}$, so genügt P der Bedingung $\mathfrak{B}$.
b) Genügt der Punkt P der Bedingung $\mathfrak{B}$, so gehört P zur Menge $\mathfrak{M}$.

Die Kenntnis solcher Mengen ist u.a. für die zeichnerische Konstruktion von Figuren mit Zirkel und Lineal wichtig. Daher sind insbesondere solche Fälle von Interesse, bei denen die Menge aller Punkte einer Ebene ε angegeben wird, die der Bedingung $\mathfrak{B}$ genügen. Man spricht in diesen Fällen auch von dem *geometrischen Ort* $\mathfrak{M}$ aller Punkte (der Ebene ε), die $\mathfrak{B}$ genügen.
Im Hinblick auf die Anwendungen bei Konstruktionen werden hier im wesentlichen nur solche geometrischen Örter aufgeführt, die Geraden, Kreise oder Teile von diesen sind.

Def. II.1 Die Menge aller Punkte des Raumes, die von dem Punkt M denselben Abstand r haben, heißt die *Kugel* mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, sie entsteht durch Drehung eines Kreises. Im Fall $r = 0$ spricht man auch von einer zu einem Punkt *ausgearteten Kugel.* Die Menge aller Punkte, die von M einen kleineren (größeren) Abstand als r haben, heißt das *Innere* (*Äußere*) der Kugel. Die Vereinigungsmenge aus der Kugel und ihrem Inneren heißt *Kugelkörper.*

Def. II.2 Die Menge aller Punkte der Ebene ε, die von dem in ε gelegenen Punkt M den Abstand r haben, heißt der in der Ebene ε gelegene *Kreis* mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Im Fall $r = 0$ spricht man auch von einem zu einem Punkt *ausgearteten Kreis.* Die Menge aller Punkte der Ebene ε, die von M einen kleineren (größeren) Abstand als r haben, heißt das *Innere* (*Äußere*) des Kreises. Die Vereinigungsmenge aus dem Kreis und seinem Inneren heißt *Kreisfläche* oder auch *Kreisscheibe.*

[1] Die Bezeichnung „geometrischer Ort“ wird im wesentlichen aus traditionellen Gründen verwendet.

Def. II.3 *Durchmesser* der Kugel (eines Kreises) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r heißt jede Strecke AB, die M enthält und deren Endpunkte auf der Kugel (dem Kreis) liegen. Für sie gilt $|AB| = 2r$,

Def. II.4 Die Menge aller Punkte des Raumes, die von der Geraden g den Abstand r haben, heißt der *(Kreis-)Zylinder* mit der Achse g und dem Radius r. Er entsteht durch Drehung einer Geraden um die zu ihr parallele, aber verschiedene Gerade g.

Es sei g eine Gerade, die durch den auf ihr gelegenen Punkt S in die beiden Strahlen s und s' zerlegt werde. Ist P ein von S verschiedener Punkt des Raumes, so bezeichne p den von S ausgehenden Strahl durch P.

Def. II.5 Die Menge aller Punkte P des Raumes, für die eine der beiden Größen $|\sphericalangle(p, s)|$, $|\sphericalangle(p, s')|$ den Wert α hat, wobei α zwischen 0° und 90° liegt, bildet zusammen mit S den *(Doppel-)Kegel* mit der *Spitze* S, der *Achse* g und dem *Öffnungswinkel* 2α. Er entsteht durch Drehung einer durch S gehenden Geraden um g (Bild 7).

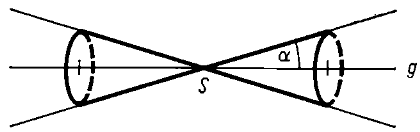


Bild 7

Def. II.6 Die auf der Geraden g_{AB} senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt der Strecke AB heißt die *Symmetrieebene* der Strecke AB. Jede in ihr gelegene Gerade durch den Mittelpunkt von AB heißt *Mittelsenkrechte* von AB, sie steht auf g_{AB} senkrecht.

Satz II.1 Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von der in ihr gelegenen Geraden g denselben Abstand haben, besteht aus zwei spiegelbildlich und parallel zu g gelegenen Geraden.

Satz II.2 Die Menge aller Punkte des Raumes, die von der Ebene ε denselben Abstand haben, besteht aus zwei spiegelbildlich und parallel zu ε gelegenen Ebenen.

Satz II.3 Die Menge aller Punkte des Raumes, die von dem Punkt A den gleichen Abstand wie von dem Punkt $B \neq A$ haben, ist die Symmetrieebene der Strecke AB.

Satz II.4 Die Menge aller Punkte der Ebene ε, die von dem Punkt $A \in \varepsilon$ denselben Abstand haben wie von dem Punkt $B \in \varepsilon$, $B \neq A$, ist die in ε gelegene Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Satz II.5 S sei der Schnittpunkt der in der Ebene ε liegenden Geraden g und h, $g \neq h$. Dann besteht der geometrische Ort aller Punkte von ε, deren Abstand von g gleich dem von h ist, aus zwei sich in S rechtwinklig schneidenden Geraden w und w', deren jede zwei Scheitelwinkel der vier von g und h erzeugten Winkel [vgl. I.9.c)] halbiert.

Satz II.6 Ist g Schnittgerade der Ebenen ε und η, $\varepsilon \neq \eta$, dann besteht die Menge aller Punkte, deren Abstand von ε gleich dem von η ist, aus zwei sich in g senkrecht schneidenden Ebenen ω und ω', deren jede zwei der vier von ε und η erzeugten Winkelräume halbiert.

Die Menge aller Punkte einer Ebene ε, die von einem Punkt $F \in \varepsilon$ den gleichen Abstand haben wie von ein und derselben Geraden $g \subset \varepsilon$, $F \notin g$, ist eine *Parabel*.

Die Menge aller Punkte des Raumes, die

a) von einem Punkt F und ein und derselben Geraden g, $F \notin g$,
b) von einer Geraden g und einer Ebene ε, $g \not\subset \varepsilon$,
c) von einem Punkt F und einer Ebene ε, $F \notin \varepsilon$,
d) von zwei zueinander windschiefen Geraden

den gleichen Abstand haben, ist in den Fällen a) und b) ein *parabolischer Zylinder*, c) ein *Rotationsparaboloid*, d) ein *hyperbolisches Paraboloid* (Sattelfläche).
Diese geometrischen Gebilde kommen in den Aufgaben nicht vor, sondern werden hier nur der Vollständigkeit halber genannt.

Im folgenden bedeuten k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M in der Ebene ε, A, B, $A \neq B$, zwei Punkte von k, $\widehat{b}$ und $\widehat{b'}$, die beiden von A und B begrenzten Bögen von k (ausschließlich ihrer Endpunkte, vgl. Def. IV.3), C einen Punkt von $\widehat{b}$, s den von A ausgehenden Strahl durch B und t den von A ausgehenden Strahl auf einer Tangente an k, die auf derselben Seite von g_{AB} wie $\widehat{b'}$ liegt. Ferner werde der durch den Umlaufsinn $A \to B \to C$ bestimmte Drehsinn in ε zugrunde gelegt (Bild 8).

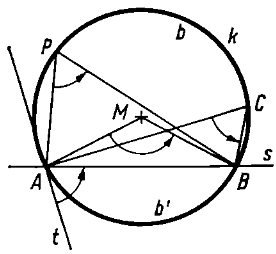


Bild 8

Satz II.7′ *Sehnentangentenwinkelsatz:* Bei den eben eingeführten Bezeichnungen gilt:

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle (t, s)|.$$

Satz II.7″ *Satz über den Zentriwinkel:* Bei den oben eingeführten Bezeichnungen gilt:

$$2|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AMB|.$$

Beide Sätze lassen sich zusammenfassen zu Satz II.7.

Satz II.7 Es ist bei den oben eingeführten Bezeichnungen

$$2|\sphericalangle ACB| = 2|\sphericalangle (t, s)| = |\sphericalangle AMB|.$$

Satz II.8′ *Peripheriewinkelsatz:* Liegt P auf $\widehat{b}$, so ist

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle ACB|. \tag{4}$$

Satz II.8″ *Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes:* Gilt für den Punkt $P \in \varepsilon$ die Beziehung (4), so liegt P auf $\widehat{b}$ (Bild 8).

Die Sätze II.7, II.8′ und II.8″ lassen sich zusammenfassen zu Satz II.8.

Satz II.8 Der Bogen $\widehat{b}$ ist der geometrische Ort aller Punkte P von ε, für die $|\sphericalangle APB|$ ein und denselben Wert α hat. Dabei ist

$$\alpha = |\sphericalangle APB| = |\sphericalangle (t, s)| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle AMB|, \quad \alpha \neq 0°, \quad \alpha \neq 180°.$$

Zusatz zu Satz 8: Der Bogen $\widetilde{b}$, für dessen Punkte $\widetilde{P}$ die Beziehung

$$|\sphericalangle A\widetilde{P}B| = 360° - |\sphericalangle APB|$$

gilt, ist der bezüglich g_{AB} spiegelbildlich zu $\widehat{b}$ gelegene Bogen. Daher ist der geometrische Ort aller Punkte P von ε, für die $|\sphericalangle APB|$ denselben Wert hat, die aus $\widehat{b}$ und $\widetilde{b}$ bestehende Punktmenge.

Def. II.7 Ist Q ein auf derselben Seite von g_{AB} wie $\widehat{b}$ gelegener Punkt, so heißt $\widehat{b}$ der auf derselben Seite von g_{AB} wie Q gelegene, zum Peripheriewinkel der Größe α, $0° < \alpha < 180°$, gehörige *Kreisbogen* über der Strecke AB.

Aus Satz 8′ bzw. Satz 8″ folgt in Verbindung mit Satz 7 der sogenannte Satz des Thales bzw. dessen Umkehrung.

Satz II.9 *Satz des Thales:* Liegt der Punkt P auf einem von A und B begrenzten Halbkreis, so ist $\sphericalangle APB$ ein rechter Winkel.

Satz II.10 *Umkehrung des Satzes des Thales:* Ist $\sphericalangle APB$ ein rechter Winkel, so liegt P auf einem von A und B begrenzten Halbkreis.

III. Kongruenz; Vielecke

Kongruenz

Def. III.1 Zwei Punktmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ heißen *kongruent*, in Zeichen $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, wenn es eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ gibt, bei der für jedes Paar (P, Q) von Punkten von $\mathfrak{M}$ und deren Bildpunkte P', Q' von $\mathfrak{M}'$ stets $|PQ| = |P'Q'|$ gilt.

Satz III.1 Die in Def. III.1 genannte eineindeutige Abbildung ist im Raum entweder eine (gleichsinnige) *Bewegung* – dann heißen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ *direkt kongruent* – oder sie ist aus einer (gleichsinnigen) *Bewegung und genau einer Spiegelung an einer Ebene zusammensetzbar* – dann heißen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ *spiegelbildlich oder indirekt kongruent.* Jede (gleichsinnige) Bewegung ist aus einer Parallelverschiebung (Translation) und einer Drehung um eine Achse zusammensetzbar, wenn die identische Bewegung, die jeden Punkt festläßt, gegebenenfalls als Drehung oder als Translation aufgefaßt wird.

Zwei Strecken sind genau dann kongruent, wenn sie gleiche Länge haben, und zwei Winkel genau dann, wenn sie gleiche Größe haben. Zwei bezüglich einer Geraden spiegelbildlich gelegene Mengen im Raum sind direkt kongruent, zwei bezüglich einer Ebene oder eines Punktes spiegelbildlich gelegene Mengen sind indirekt kongruent. Zwei Mengen können gleichzeitig direkt und indirekt kongruent sein, z.B. ist jede Menge, die eine Symmetrieebene hat, zu sich selbst direkt und indirekt kongruent.
Mit Hilfe dieser für den dreidimensionalen Raum gültigen Ausführungen kann man auch den Begriff der indirekten Kongruenz in einer Ebene bzw. auf einer Geraden einführen,

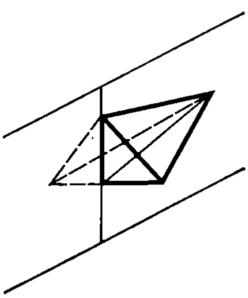


Bild 9a

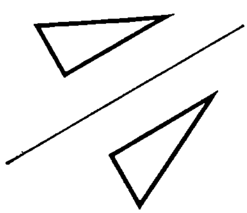


Bild 9b

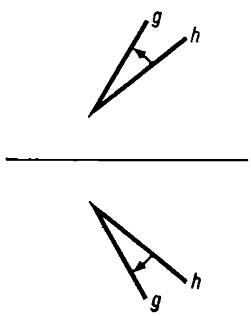


Bild 9c

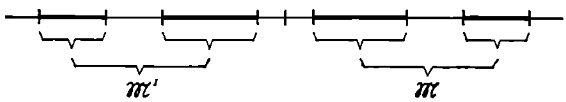


Bild 9d

indem man ‚Spiegelung an einer Ebene' durch ‚Spiegelung an einer Geraden' bzw. ‚Spiegelung an einem Punkt' ersetzt. Denkt man sich z.B. eine Ebene in einen dreidimensionalen Raum eingebettet, so werden indirekt kongruente Figuren in der Ebene zu direkt kongruenten im Raum.[1]
Das Bild 9 zeigt indirekt kongruente Figuren, und zwar 9a im Raum, 9b und 9c in der Ebene, 9d auf einer Geraden – hier bestehen die beiden Figuren aus je zwei Strecken.

Allgemeine n-Ecke

Def. III.2 Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geqq 3$, paarweise voneinander verschiedene Punkte, von denen keine drei aufeinanderfolgende auf derselben Geraden liegen (dabei gilt A_1 als auf A_n folgend), so bilden diese zusammen mit den Strecken $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ eine geometrische Figur, die das *n-Eck* $A_1A_2 \ldots A_n$ heißt. Die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen die *Ecken*, die Strecken $A_1A_2, \ldots,$ $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 die *Seiten* des n-Ecks. Jede der Strecken A_iA_k, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$, $i \neq k$, die nicht Seite ist, heißt *Diagonale* und allgemein jede Strecke PQ, wobei P und Q auf verschiedenen Seiten des n-Ecks liegen, *Transversale* des n-Ecks. Zwei voneinander verschiedene Seiten, die dieselbe Ecke als Endpunkt haben, heißen *benachbart*. Die Summe der Längen der n Seiten heißt der *Umfang* des n-Ecks.

In den Aufgaben kommen nur ebene, nichtüberschlagene (sog. einfache) n-Ecke vor, das sind solche, deren Seiten sämtlich in derselben Ebene liegen und bei denen nur benachbarte Seiten einen gemeinsamen Punkt haben. Im folgenden wird daher unter jedem n-Eck ein ebenes, nichtüberschlagenes verstanden.

Def. III.3 Führt man in der Ebene des n-Ecks $A_1A_2 \ldots A_n$ den der Durchlaufungsrichtung $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to A_1$ entsprechenden Drehsinn ein, so heißen die in diesem Sinn orientierten Winkel $\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, mit $A_0 = A_n$ und $A_{n+1} = A_1$ die *Innenwinkel* des n-Ecks, und zwar heißen die Innenwinkel $\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$ und $\sphericalangle A_{i+2}A_{i+1}A_i$ mit $A_{n+2} = A_2$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ benachbart.
(Die Bilder 10a und b zeigen den Innenwinkel $\sphericalangle A_4A_3A_2$ bei verschiedenen Orientierungen.)

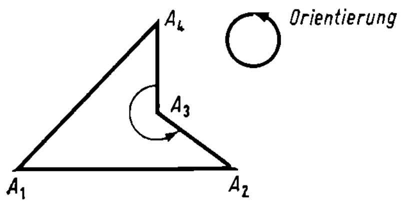


Bild 10a

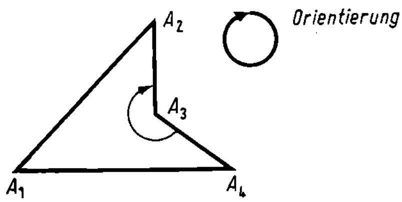


Bild 10b

---
[1] Indirekt kongruente Figuren bezüglich eines dreidimensionalen Raumes sind bezüglich eines vierdimensionalen Raumes stets direkt kongruent, wenn die Begriffe analog definiert werden.

Def. III.4 Zwei *n-Ecke* heißen *kongruent*, wenn sie im Sinne der Def. III.1 als Punktmengen kongruent sind.

Satz III.2 n positive Zahlen sind genau dann die Seitenlängen eines n-Ecks, wenn jede von ihnen kleiner ist als die Summe der übrigen $n - 1$. Für die Summe der Größen der gemäß Def. III.3 erklärten Innenwinkel jedes n-Ecks gilt die Formel:

$$\sum_{i=1}^{n} |\sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}| = (n-2) \cdot 180^\circ. \tag{5}$$

Satz III.3 Zwei n-Ecke sind genau dann kongruent, wenn man die Seitenlängen und Winkelgrößen des einen mit a_i und α_i, $a_{n+1} = a_1$, $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ und die des anderen mit b_i und β_i, $b_{n+1} = b_1$, $\beta_{n+1} = \beta_1$, $i = 1, \ldots, n$, so bezeichnen kann, daß a_{i+1} und a_i, b_{i+1} und b_i die Längen benachbarter Seiten, α_{i+1} und α_i, β_{i+1} und β_i die Größen benachbarter Winkel sind und

$$a_i = b_i, \tag{6}$$

$$\alpha_i = \beta_i \tag{7}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Zusatzbemerkung: Wegen (5) genügt es für die Kongruenz der beiden n-Ecke schon, (6) für alle n Indizes und (7) nur für $n-1$ der Indizes, ja sogar, wie eine genauere Betrachtung zeigt, nur für $n-3$ der Indizes vorauszusetzen.

Satz III.4 Jedes n-Eck zerlegt die Ebene, in der es liegt, in zwei Teile, deren einer das *Innere des n-Ecks*[1] heißt. Das n-Eck bildet zusammen mit seinem Innern eine *n-Ecksfläche*, deren Inhalt gleich dem Inhalt seines Innern ist, der *Flächeninhalt* des n-Ecks genannt wird und mit I bezeichnet wird.

Allgemein ist der *Inhalt* $I(\mathfrak{M})$ *einer Punktmenge* $\mathfrak{M}$ – falls ein solcher erklärt ist – eine reelle Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1. $I(\mathfrak{M}) \geqq 0$
2. Für $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ gilt $I(\mathfrak{M}_1) = I(\mathfrak{M}_2)$.
3. Sind $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zwei Punktmengen ohne gemeinsames Element ($\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \emptyset$), so hat ihre Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ den Inhalt $I(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2)$.
4. Gilt $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3$ und $I(\mathfrak{M}_1) = I(\mathfrak{M}_3)$, so hat $\mathfrak{M}_2$ einen Inhalt $I(\mathfrak{M}_2)$ und dieser ist gleich $I(\mathfrak{M}_1)$.

Die in den meisten Aufgaben vorkommenden n-Ecke sind konvex.

Def. III.5 Ein n-Eck heißt *konvex*, wenn die Größe jedes seiner Innenwinkel kleiner als 180° ist. Die Nebenwinkel der Innenwinkel heißen *Außenwinkel*.

Satz III.5 Die Summe der n Größen der Außenwinkel beträgt für jedes konvexe n-Eck 360°.

Satz III.6 Ein n-Eck ist genau dann konvex, wenn jede seiner Diagonalen ganz in der n-Ecksfläche liegt[2], dann liegen auch alle Transversalen in der n-Ecksfläche.

---

[1] Man kann das Innere durch folgende Erklärung festlegen: Es ist die Menge aller Punkte P der Ebene, die nicht auf dem n-Eck liegen und zu denen es einen von P ausgehenden Strahl gibt, auf dem eine ungerade Anzahl von Punkten des n-Ecks aber kein Eckpunkt liegt.

[2] Allgemein liegen von den $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen jedes n-Ecks mindestens $n-3$, aber nicht immer mehr ganz in der n-Ecksfläche.

Aus dieser Eigenschaft der konvexen n-Ecke folgt unmittelbar, daß ein n-Eck genau dann konvex ist, wenn für je zwei Punkte der zugehörigen n-Ecksfläche deren Verbindungsstrecke ganz in der n-Ecksfläche liegt. Diese letzte Eigenschaft kann auch zur Definition der Konvexität bei allgemeinen Punktmengen benutzt werden.

Eine besondere Rolle spielen die regelmäßigen oder regulären n-Ecke.

Def. III.6 Ein n-Eck heißt *regelmäßig*, wenn je zwei seiner Seiten und je zwei seiner Winkel kongruent sind.

Satz III.7 Jedes regelmäßige n-Eck besitzt folgende Eigenschaften:

a) Es hat einen Umkreis k, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des n-Ecks heißt.

b) Es hat einen Inkreis k', dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Umkreises zusammenfällt.

c) Die Größe jedes Innenwinkels beträgt $\left(1 - \frac{2}{n}\right) 180°$. Jedes regelmäßige n-Eck ist also konvex.

d) Für seinen Flächeninhalt I gilt

$$I = \varrho s = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{n} \quad \text{mit}$$

$$a = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 2 \tan \frac{\pi}{n} = \frac{2s}{n}, \tag{8}$$

wenn a Seitenlänge, r Umkreisradius, ϱ Inkreisradius und $2s$ Umfang des n-Ecks bedeuten.

Im Fall $n = 6$ gilt insbesondere $a = r$. Jedes regelmäßige n-Eck liegt mit Ausnahme seiner auf k liegenden Ecken ganz im Innern von k und mit Ausnahme der Mittelpunkte seiner Seiten, in denen es k' berührt, außerhalb von k'.

Allgemeine Dreiecke

Bei Dreiecken wird, dem bislang üblichen Schulgebrauch Rechnung tragend, anstelle von ABC auch die Bezeichnungsweise $\triangle ABC$ verwendet. Die Längen der den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten werden in dieser Reihenfolge mit a, b, c und die Größen der ihnen gegenüberliegenden Innenwinkel mit α, β, γ bezeichnet.
Unter Berücksichtigung dieser Verabredung bleiben die folgenden Sätze und Formeln über Dreiecke richtig, wenn die Bezeichnungen der Ecken, der Seiten und der Innenwinkel vertauscht werden, wenn also z.B. gleichzeitig ersetzt werden:

A durch B, B durch C, C durch A,
a durch b, b durch c, c durch a,
α durch β, β durch γ, γ durch α.

Satz III.8 Drei positive Zahlen a, b, c sind genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks, wenn sie der Ungleichung (*Dreiecksungleichung*)

$$|a - b| < c < a + b \tag{9}$$

genügen (vgl. auch I.4.c). Die positiven Gradmaße α, β, γ sind genau dann die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks, wenn sie der Bedingung

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \tag{5'}$$

genügen.

Aus (5′) folgt, daß die Größe jedes Innenwinkels jedes Dreiecks kleiner als 180° ist, jedes Dreieck ist also konvex, und man braucht zur Definition des Innenwinkels beim Dreieck, wie überhaupt bei konvexen n-Ecken, den Begriff des orientierten Winkels nicht.

Def. III.7 Das Dreieck $\triangle$ heißt *spitzwinklig*, *rechtwinklig* oder *stumpfwinklig*, je nachdem sein größter Winkel ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer ist. Wegen (5′) hat jedes Dreieck höchstens einen nichtspitzen Winkel.

Satz III.9 Ist α' die Größe eines zu α gehörigen Außenwinkels, so gilt $\alpha' = \beta + \gamma$.

Satz III.10 Die Ungleichung $a < b$ gilt genau dann, wenn $\alpha < \beta$ ist.

Satz III.11 Die beiden Dreiecke $\triangle$ und $\triangle'$ sind genau dann kongruent, wenn sich die Bezeichnung der Seitenlängen a, b, c von $\triangle$ mit den Größen α, β, γ der ihnen gegenüberliegenden Winkel und der Seitenlängen a', b', c' von $\triangle'$ mit den Größen α', β', γ' der ihnen gegenüberliegenden Winkel so wählen läßt, daß in einem der folgenden vier Fälle sämtliche Bedingungen erfüllt sind:

1. $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$ [*Kongruenzsatz* (sws)],
2. $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ [*Kongruenzsatz* (sss)],
3. $a = a' \geqq b = b'$, $\alpha = \alpha'$ [*Kongruenzsatz* (ssw)],
4. $a = a'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ [*Kongruenzsatz* (wsw)].

Die Berechnung der übrigen Seitenlängen und Winkelgrößen aus drei gemäß einem der Fälle 1. bis 4. gegebenen Stücken kann mit Hilfe des Sinus- und des Kosinussatzes vorgenommen werden.

Satz III.12 *Sinussatz:* Bei den oben festgelegten Bezeichnungen gilt:

$$a : \sin\alpha = b : \sin\beta. \tag{10}$$

Wenn r den Radius des Umkreises (s. Def. III.9) bedeutet, gilt:

$$a : \sin\alpha = 2r. \tag{10'}$$

Satz III.13 *Kosinussatz:* Bei den oben festgelegten Bezeichnungen gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha. \tag{11}$$

Def. III.8 Die Gerade g heißt *Mittelsenkrechte* des Dreiecks $\triangle$, wenn sie eine in der Dreiecksebene gelegene Mittelsenkrechte einer Seite von $\triangle$ ist.

Satz III.14 Zu jedem Dreieck gibt es genau einen Punkt M, der jeder der drei Mittelsenkrechten von $\triangle$ angehört. M hat von einer Ecke von $\triangle$ den gleichen Abstand r wie von jeder der beiden übrigen Ecken von $\triangle$. Daher liegt $\triangle$ mit Ausnahme seiner drei auf dem Kreis k um M mit dem Radius r gelegenen Eckpunkte ganz im Innern von k.

Def. III.9 Der in Satz III.14 genannte Kreis k heißt der *Umkreis* von $\triangle$.

Def. III.10 Unter der *(inneren) Winkelhalbierenden* des Dreiecks ABC, die den Innenwinkel von $\triangle ABC$ mit dem Scheitel A halbiert, versteht man die Strecke AD, wobei D derjenige Punkt von BC ist, für den $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle DAC$ gilt. Die Länge der Winkelhalbierenden wird mit w_a bezeichnet.

Satz III.15 Zu jedem Dreieck $\triangle$ gibt es genau einen Punkt O, der jeder der drei Winkelhalbierenden von $\triangle$ angehört. Er hat von einer der drei Geraden g_{BC}, g_{AB}, g_{CA} den gleichen Abstand ϱ wie von jeder der beiden übrigen. Der Kreis k' um O mit dem Radius ϱ berührt jede dieser drei Geraden in einem Punkt einer Dreiecksseite und liegt im übrigen einschließlich seines Innern ganz im Innern von $\triangle ABC$.

Def. III.11 Der in Satz III.15 genannte Kreis k' heißt der *Inkreis* von $\triangle ABC$.

Satz III.16 Der Punkt D der Winkelhalbierenden AD von $\triangle ABC$ teilt BC im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten, d.h., es gilt:

$$|BD| : |DC| = |AB| : |AC|.$$

Def. III.12 Unter einer *Seitenhalbierenden* eines Dreiecks versteht man eine Strecke, deren einer Endpunkt Ecke und deren anderer Endpunkt Mittelpunkt der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite ist. Die Länge der Seitenhalbierenden durch den Punkt A wird mit s_a bezeichnet.

Satz III.17 Zu jedem Dreieck $\triangle$ gibt es genau einen Punkt S, den sogenannten *Schwerpunkt* von $\triangle$, der allen drei Seitenhalbierenden von $\triangle$ angehört. S teilt jede der Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$, und zwar so, daß für die Seitenhalbierende AG von $\triangle ABC$ gilt:

$$|AS| : |SG| = 2 : 1.$$

Def. III.13 Unter einer *Höhe eines Dreiecks* versteht man das Lot (vgl. I.7) von einer Ecke auf die Gerade durch die beiden anderen Ecken. Die Länge der auf g_{BC} senkrechten Höhe wird mit h_a bezeichnet.

Satz III.18 Zu jedem Dreieck $\triangle$ gibt es genau einen Punkt H, den sogenannten *Höhenschnittpunkt* von $\triangle$, der jeder der drei Geraden angehört, die eine der Höhen von $\triangle$ enthalten. H liegt genau dann im Innern von $\triangle$, wenn $\triangle$ spitzwinklig ist, und genau dann außerhalb, wenn $\triangle$ stumpfwinklig ist. Ist $\triangle$ rechtwinklig, so ist H der Scheitel des rechten Winkels.
Für den *Flächeninhalt* I von $\triangle ABC$ gelten folgende Formeln:

$$I = \frac{1}{2} a \cdot h_a = s\varrho = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad (12)$$

wenn $2s = a + b + c$ gesetzt wird und h_a die Länge der auf einer Seite der Länge a senkrechten Höhe ist.

Spezielle Dreiecke

Def. III.14 Ist $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck und C der Scheitel seines rechten Winkels, so heißt AB *Hypotenuse*, und die beiden anderen Seiten AC und BC heißen *Katheten*.

Satz III.19 *Lehrsatz des Pythagoras:* Ist das Dreieck $\triangle$ mit den Seitenlängen a, b, c rechtwinklig und ist c die Hypotenusenlänge, so gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{13}$$

Satz III.20 *Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras:* Gilt für die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks $\triangle$ (13), dann ist $\triangle$ rechtwinklig und hat c als Hypotenusenlänge.

Satz III.21 *Lehrsatz des Euklid* (*Kathetensatz*)*:* Auf der Hypotenuse AB des rechtwinkligen Dreiecks ABC sei F der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{AB}.
Dann gilt:

$$|AB| \cdot |AF| = |AC|^2 \quad \text{und} \quad |AB| \cdot |BF| = |BC|^2. \tag{14}$$

Der Kathetensatz gestattet die beiden folgenden Umkehrungen.

Satz III.22 CF, $C \neq F$, sei das Lot von C auf g_{AB}, $A \neq B$, und es gelte (14). Dann sind A, B, C die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse AB.[1]

Satz III.23 $\triangle ABC$ sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, F sei ein Punkt von g_{AB}, für den (14) gilt. Dann ist CF das Lot von C auf g_{AB}.[2]

Satz III.24 *Höhensatz:* $\triangle ABC$ sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB und der Höhe CF. Dann gilt:

$$|AF| \cdot |FB| = |CF|^2. \tag{15}$$

Satz III.25 *Umkehrung des Höhensatzes:* CF, $C \neq F$, sei das Lot von C auf g_{AB}, $A \neq B$, und es gelte (15). Dann sind A, B, C die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse AB.

Der Versuch, wie beim Kathetensatz auch die 2. Umkehrung des Höhensatzes zu bilden, führt auf den folgenden Satz.

Satz III.26 Ist $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, und liegt der Punkt F auf AB so, daß (15) gilt, dann ist CF entweder Höhe oder Seitenhalbierende von $\triangle ABC$.
Für den Flächeninhalt jedes rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a und b gilt gemäß (12) die Formel:

$$I = \frac{1}{2} a \cdot b. \tag{12'}$$

Def. III.15 Sind zwei Seiten eines Dreiecks zueinander kongruent, so heißt das Dreieck *gleichschenklig*. Sind alle drei Seiten kongruent, so heißt das Dreieck *gleichseitig*. Bei jedem gleichschenkligen, nicht gleichseitigen Dreieck heißen die kongruenten Seiten *Schenkel* und die dritte Seite *Basis*. Die den Schenkeln gegenüberliegenden Winkel heißen *Basiswinkel*.

Satz III.27′ Das Dreieck $\triangle$ ist genau dann gleichschenklig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Zwei Innenwinkel von $\triangle$ sind kongruent (die ihnen gegenüberliegenden Seiten sind dann kongruent).

---

[1] Es genügt nicht vorauszusetzen, daß eine der Gleichungen (14) erfüllt ist.

[2] Es genügt schon vorauszusetzen, daß eine der Gleichungen (14) erfüllt ist.

2. $\triangle$ ist symmetrisch in bezug auf eine seiner Mittelsenkrechten (auf dieser liegen dann die entsprechende Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Höhe).

Satz III.27'' Das Dreieck $\triangle$ ist genau dann gleichseitig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Zwei Innenwinkel von $\triangle$ haben je die Größe 60°.
2. $\triangle$ ist gleichschenklig, und ein Winkel hat die Größe 60°.

Aus (12) ergeben sich für den Flächeninhalt I, die Höhenlänge h, den Umkreisradius r und den Inkreisradius ϱ jedes gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a die Beziehungen:

$$I = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad r = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad \varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}. \tag{12''}$$

Vierecke

Aus Satz III.2 ergibt sich durch Spezialisierung der Satz III.2''.

Satz III.2'' Vier positive Zahlen sind genau dann die Seitenlängen eines Vierecks, wenn jede von ihnen kleiner ist als die Summe der drei übrigen. Die Summe der Größen der vier Innenwinkel beträgt 360°.

Aus Satz III.3 und der Zusatzbemerkung ergibt sich der folgende Satz.

Satz III.3' Zwei Vierecke Ω und Ω' sind genau dann kongruent, wenn sich die Seitenlängen a, b, c, d von Ω und a', b', c', d' von Ω' so bezeichnen lassen, daß bei dieser Anordnung stets Längen benachbarter Seiten nebeneinander stehen, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$, $\alpha = \alpha'$ gilt und α bzw. α' die Größen eines Innenwinkels von Ω bzw. Ω' bedeuten, der von benachbarten Seiten der Längen a und d bzw. a' und d' eingeschlossen wird.

Satz III.28 Bei jedem Viereck liegt wenigstens eine Diagonale ganz in der Vierecksfläche (vgl. auch die Fußnote zu Satz III.6).

Die Untersuchung von Vierecken läßt sich damit auf die von Dreiecken zurückführen. Da sich über allgemeine Vierecke außer den letzten beiden Sätzen nur wenig aussagen läßt, werden im folgenden nur gewisse Klassen spezieller Vierecke behandelt.

Def. III.16 $ABCD$ heißt *Sehnenviereck*, wenn A, B, C, D auf demselben Kreis, dem Umkreis von $ABCD$, liegen.

Satz III.29 Jedes Sehnenviereck ist konvex und liegt mit Ausnahme seiner Ecken ganz im Innern seines Umkreises.

Satz III.30 $ABCD$ ist genau dann Sehnenviereck, wenn die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt, wenn also $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$ ist.

Def. III.17 $ABCD$ heißt *Tangentenviereck*, wenn jede der Seiten AB, BC, CD, DA denselben Kreis k berührt.

Satz III.31 Jedes Tangentenviereck ist konvex und liegt mit Ausnahme der Berührungspunkte ganz außerhalb des in Def. III.17 genannten Kreises k.

Satz III.32 $ABCD$ ist genau dann Tangentenviereck, wenn $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ ist.

Def. III.18 $ABDC$ heißt *Trapez*, wenn zwei seiner Seiten zueinander parallel sind.

Satz III.33 Jedes Trapez ist konvex.

Def. III.19 Ist in dem Trapez $ABCD$ $AB \parallel CD$, so heißt jedes der Lote von einem Punkt einer dieser beiden Seiten auf die die andere Seite enthaltende Gerade *Höhe des Trapezes* in bezug auf das parallele Seitenpaar (AB, CD). Sind E und F die Mittelpunkte von BC und DA, so heißt EF *Mittellinie* des Trapezes.

Satz III.34 Ist EF Mittellinie und h Höhenlänge des Trapezes $ABCD$ bezüglich des parallelen Seitenpaares (AB, CD), I der Flächeninhalt von $ABCD$, so gilt:

$$EF \parallel AB, \quad 2|EF| = |AB| + |CD| \quad \text{und} \quad I = |EF| \cdot h.$$

Def. III.20 Sind in einem Trapez zwei gegenüberliegende Seiten nicht parallel zueinander, so heißen sie *Schenkel*, und die beiden parallelen Seiten heißen *Grundseiten des Trapezes.*

Def. III.21 Hat ein Trapez zwei gleich lange Schenkel oder ist es ein Rechteck (vgl. Def. III.24), so heißt das Trapez *gleichschenklig.*

Satz III.35 Das Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ ist genau dann gleichschenklig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $ABCD$ ist symmetrisch zu der Geraden durch die Mittelpunkte von AB und CD.
2. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DAB$.

Def. III.22 Ein Viereck heißt *Parallelogramm*, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Satz III.36 Jedes Parallelogramm ist Trapez und damit konvex.

Satz III.37 Das Viereck Ω ist genau dann Parallelogramm, wenn eine der folgenden fünf Bedingungen erfüllt ist:

1. Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
2. Je zwei gegenüberliegende Winkel sind kongruent.
3. Die Mittelpunkte beider Diagonalen fallen zusammen.
4. Ω ist ein Trapez mit zwei gleich langen, zueinander parallelen Seiten.
5. Die Summe der Größen je zweier benachbarter Innenwinkel beträgt 180°.

Für den Flächeninhalt I jedes Parallelogramms mit den Längen a, b benachbarter Seiten, einer zu a gehörigen Höhenlänge h_a und der Größe ω eines Innenwinkels gilt:

$$I = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin \omega.$$

Def. III.23 $ABCD$ heißt *Drachenviereck*, wenn es zu einer der Geraden g_{AC}, g_{BD} symmetrisch ist (Bild 11).

Satz III.38 $ABCD$ ist genau dann Drachenviereck, wenn eine der zwei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

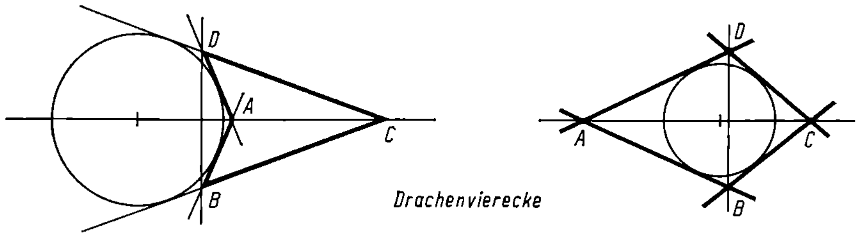


Bild 11

1. Jede Seite von $ABCD$ ist einer benachbarten gleich lang.
2. Es ist $g_{AC} \perp g_{BD}$, und zwei benachbarte Seiten sind gleich lang.

Def. III.24 Ein Viereck heißt *Rechteck*, wenn jeder seiner Innenwinkel ein rechter ist.

Satz III.39 Jedes Rechteck ist konvex.

Satz III.40 Das Viereck Ω ist genau dann Rechteck, wenn eine der folgenden sechs Bedingungen erfüllt ist:

1. Ω hat drei rechte Innenwinkel.
2. Die Diagonalen von Ω sind Durchmesser desselben Kreises.
3. Ω ist Parallelogramm und Sehnenviereck.
4. Ω ist ein Parallelogramm mit einem rechten Innenwinkel.
5. Ω ist ein Trapez mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln.
6. Ω ist ein Sehnenviereck mit zwei benachbarten rechten Winkeln.

Der Flächeninhalt jedes Rechtecks mit den Längen a und b benachbarter Seiten ist

$$I = a \cdot b.$$

Def. III.25 Ein Viereck heißt *Rhombus* oder *Raute*, wenn seine Seiten paarweise gleich lang sind.

Satz III.41 Jeder Rhombus ist konvex.

Satz III.42 Das Viereck Ω ist genau dann Rhombus, wenn eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

1. Ω ist symmetrisch zu jeder der beiden Geraden, die eine der Diagonalen enthalten.
2. Ω ist Parallelogramm mit zwei benachbarten gleich langen Seiten.
3. Ω ist Parallelogramm und Tangentenviereck.
4. Ω ist Trapez und Drachenviereck.

Def. III.26 Ein Viereck heißt *Quadrat*, wenn es regelmäßig ist.

Satz III.43 Das Viereck Ω ist genau dann Quadrat, wenn eine der folgenden sechs Bedingungen erfüllt ist:

1. Die Diagonalen von Ω sind senkrecht aufeinander stehende Durchmesser desselben Kreises.
2. Ω ist Rhombus mit einem rechten Winkel.
3. Ω ist Rhombus und Sehnenviereck.
4. Ω ist Rechteck mit zwei benachbarten gleich langen Seiten.
5. Ω ist Rechteck und Tangentenviereck.

6. Ω ist Sehnenviereck und Tangentenviereck von konzentrischen Kreisen.

Für jedes Quadrat Ω mit der Seitenlänge a gelten die Beziehungen:

$$I = a^2, \quad 2r = d = a\sqrt{2}, \quad 2\varrho = a,$$

wenn I den Flächeninhalt, d die Diagonalenlänge, r den Umkreisradius und ϱ den Inkreisradius bedeuten.

IV. Ähnlichkeitslehre; Kreis- und Kugelgeometrie

Def. IV.1 Zwei Punktmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ heißen zueinander *ähnlich*, in Zeichen $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$, wenn es eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ gibt, bei der für jedes Paar von Punkten P, Q von $\mathfrak{M}$ mit $P \neq Q$ das Verhältnis $|P'Q'| : |PQ|$ denselben (von 0 verschiedenen) Wert hat. Dabei bedeuten P' und Q' die Bilder von P und Q.

Def. IV.2 Zwei Punktmengen heißen *ähnlich* gelegen oder *homothetisch*, wenn es einen Punkt Z, das *Ähnlichkeitszentrum*, eine positive Zahl q und eine eineindeutige Abbildung der beiden Mengen aufeinander gibt, bei der für jedes Paar einander entsprechender Punkte P und P' stets Z, P und P' auf derselben Geraden liegen, und zwar entweder

a) P und P' stets auf demselben von Z ausgehenden Strahl (zentrische Streckung), oder
b) P und P' stets auf verschiedenen von Z ausgehenden Strahlen,

und wenn dabei stets $|ZP'| = q \cdot |ZP|$ gilt.

Bemerkung: Homothetische Punktmengen sind ähnlich.

Grundlegend für die Ähnlichkeitslehre sind die beiden Strahlensätze, von denen der erste umkehrbar ist, der zweite nicht. Es seien g und g' zwei nicht zusammenfallende Geraden mit dem Schnittpunkt S, h_i, $i = 1, 2$, zwei S nicht enthaltende Geraden, die mit g die Schnittpunkte A_i und mit g' die Schnittpunkte A_i' haben, und es sei entweder $S \in A_1A_2$, $S \in A_1'A_2'$ oder $S \notin A_1A_2$, $S \notin A_1'A_2'$ (Bild 12).

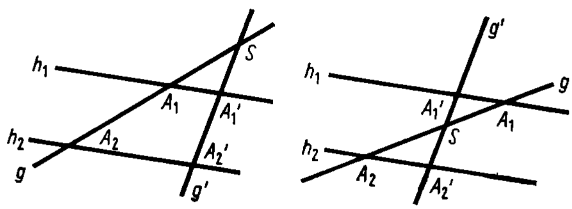


Bild 12

Dann gelten folgende Sätze:

Satz IV.1 *1. Strahlensatz:* Es sei $h_1 || h_2$, dann gilt:

$$|SA_1| : |SA_1'| = |SA_2| : |SA_2'|. \tag{16}$$

Satz IV.2 *Umkehrung des 1. Strahlensatzes:* Es gelte (16), dann ist $h_1 \,||\, h_2$.

Satz IV.3 *2. Strahlensatz:* Es sei $h_1 \| h_2$, dann gilt:

$$|A_1A_1'| : |A_2A_2'| = |SA_1| : |SA_2|.$$

Satz IV.4 Das Dreieck $\triangle$ ist dem Dreieck $\triangle'$ genau dann ähnlich, wenn sich die Seitenlängen von $\triangle$ mit a, b, c und von $\triangle'$ mit a', b', c' so bezeichnen lassen, daß in einem der vier folgenden Fälle sämtliche Relationen erfüllt sind:

1. $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$, (*1. Ähnlichkeitssatz* oder Hauptähnlichkeitssatz),
2. $a : a' = b : b' = c : c'$, (*2. Ähnlichkeitssatz*),
3. $a : a' = b : b'$ und $\gamma = \gamma'$, (*3. Ähnlichkeitssatz*),
4. $a : a' = b : b'$ und $a \geqq b$, $\alpha = \alpha'$ (*4. Ähnlichkeitssatz*).

Satz IV.5 Alle nicht zu einem Punkt ausgearteten Kugeln sind einander ähnlich, und alle nicht zu einem Punkt ausgearteten Kreise sind einander ähnlich.

Satz IV.6 Durch drei paarweise voneinander verschiedene, nicht auf derselben Geraden gelegene Punkte A, B, C gibt es stets genau einen Kreis, den in ε_{ABC} gelegenen *Umkreis* von $\triangle ABC$.

Satz IV.7 Durch vier paarweise voneinander verschiedene, nicht in derselben Ebene gelegene Punkte gibt es stets genau eine Kugel.

Satz IV.8 Ist k ein Kreis und g eine in der Ebene von k gelegene Gerade, so hat g mit k entweder keinen Punkt gemeinsam (dann liegt g ganz außerhalb von k, und k liegt ganz auf ein und derselben Seite von g) oder genau einen Punkt gemeinsam (dann liegt mit Ausnahme dieses Punktes g ganz außerhalb von k, und k liegt ganz auf ein und derselben Seite von g) oder genau zwei Punkte gemeinsam (dann liegt die von ihnen begrenzte Strecke mit Ausnahme ihrer Endpunkte ganz im Innern von k, und die übrigen Teile von g liegen ganz außerhalb von k, und es gibt auf beiden Seiten von g Punkte von k). Weitere Fälle gibt es nicht.

Def. IV.3 Hat die in der Ebene des Kreises k gelegene Gerade g mit k genau einen Punkt B gemeinsam, so heißen g *Tangente* an k und B *Berührungspunkt.* Hat g mit k genau zwei Punkte A, B gemeinsam, so heißen g *Sekante*, AB *Sehne* von k und jede der beiden Mengen aller Punkte von k, die auf derselben Seite von g liegen, ein von A und B begrenzter (*Kreis-*)*Bogen* $\widehat{AB}$ des Kreises k.

Satz IV.9 Ist AB Sehne, aber nicht Durchmesser des Kreises k, so steht AB auf dem Durchmesser CD von k genau dann senkrecht, wenn dieser den Mittelpunkt von AB enthält.

Satz IV.10 Die den Punkt B des nicht zu B ausgearteten Kreises k enthaltende, in der Ebene von k gelegene Gerade g ist genau dann Tangente an k, wenn sie auf dem Durchmesser von k durch B senkrecht steht.

Satz IV.11 Bedeuten A, A', B, B', S fünf paarweise voneinander verschiedene in derselben Ebene gelegene Punkte, von denen keine vier auf derselben Geraden liegen, während A, B, S und A', B', S je auf derselben Geraden liegen und zwar so, daß entweder $S \in AB$ und $S \in A'B'$ oder $S \notin AB$ und $S \notin A'B'$ gilt, so liegen A, B, A', B' auf demselben Kreis k genau dann, wenn

$$|SA| \cdot |SB| = |SA'| \cdot |SB'| \tag{17}$$

ausfällt.

Im Falle $A = B$ oder $A' = B'$ ist unter den übrigen Voraussetzungen (17) genau dann erfüllt, wenn A, B, A', B' auf demselben Kreis k liegen und g_{SA} bzw. $g_{SA'}$ Tangente an k ist.

Der Teil des Satzes IV.11, der aussagt, daß aus der angegebenen Lage der Punkte die Beziehung (17) folgt, ist eine Zusammenfassung des *Sehnen-*, *Sekanten-*, und *Sekantentangentensatzes* (Bild 13).

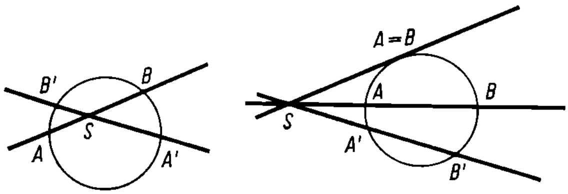


Bild 13

Satz IV.12 Zu jedem Kreis k gibt es durch jeden außerhalb von k gelegenen Punkt P genau zwei Tangenten an k. Sind A und B die Berührungspunkte und M der Mittelpunkt von k, so gilt $|PA| = |PB|$, $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle BPM|$, und g_{PM} ist Mittelsenkrechte von AB.

Def. IV.4 Sind A und B zwei Punkte des Kreises k mit dem Mittelpunkt M, so heißt der von MA, MB und einem der von A und B begrenzten Bögen von k berandete Teil der Kreisfläche *Kreissektor* oder *Kreisausschnitt*, der von AB und einem dieser Bögen berandete Teil *Kreissegment* und der in dem Segment gelegene Teil der Mittelsenkrechten von AB in der Kreisebene *Höhe des Segmentes*.

Satz IV.13 Bei den Bezeichnungen von Def. IV.4 seien b die Länge eines von A und B begrenzten Bogens von k, der nicht auf derselben Seite von g_{AB} liegt wie M, α die im Gradmaß gemessene Größe von $\sphericalangle AMB$, r der Radius, u der Umfang, I der Flächeninhalt von k und I_S der Flächeninhalt des Kreissektors, dessen gekrümmter Randteil der genannte Bogen der Länge b ist. Dann gilt:

$$u = 2\pi r, \quad I = \pi r^2, \quad 2I_S = br, \quad 180° \cdot b = \pi\alpha. \tag{18}$$

Satz IV.14 Ist ε eine Ebene und $\varkappa$ eine Kugel, so hat ε mit $\varkappa$ entweder keinen Punkt gemeinsam – dann liegt ε ganz außerhalb von $\varkappa$ und $\varkappa$ ganz auf ein und derselben Seite von ε – oder genau einen Punkt B gemeinsam – dann liegt mit Ausnahme von B die Ebene ε ganz außerhalb von $\varkappa$ und $\varkappa$ ganz auf ein und derselben Seite von ε – oder genau einen Kreis k gemeinsam – dann liegt das Innere von k ganz innerhalb und das Äußere von k ganz außerhalb von $\varkappa$, und es gibt auf beiden Seiten von ε Punkte von $\varkappa$. Andere Fälle gibt es nicht.

Def. IV.5 Haben die Ebene ε und die Kugel $\varkappa$ genau einen Punkt B gemeinsam, so heißt ε *Tangentialebene* an $\varkappa$ und B *Berührungspunkt*. Haben ε und $\varkappa$ einen Kreis gemeinsam, dann heißt jede der beiden Mengen aller Punkte von $\varkappa$, die auf derselben Seite von ε liegen, *Kugelkappe* oder *Kalotte* und jede der beiden Mengen aller Punkte des von $\varkappa$ begrenzten Kugelkörpers, die auf derselben Seite von ε liegen, *Kugelsegment*.

Satz IV.15 Schneidet die Kugel $\varkappa$ die nicht durch ihren Mittelpunkt gehende Ebene ε in dem Kreis k, so steht ε auf dem Durchmesser AB von $\varkappa$ genau dann senkrecht, wenn AB den Mittelpunkt von k enthält.

Satz IV.16 Hat die Ebene ε mit der nicht zu einem Punkt ausgearteten Kugel $\varkappa$ den Punkt B gemeinsam, so ist sie genau dann Tangentialebene an $\varkappa$, wenn der B enthaltende Durchmesser von $\varkappa$ auf ε senkrecht steht.

Def. IV.6 γ sei ein Kugelsegment, das von dem von $\varkappa$ begrenzten Kugelkörper durch die Ebene ε abgeschnitten wird, und AB sei der auf ε senkrecht stehende Durchmesser von $\varkappa$. Dann heißt die in γ gelegene Teilstrecke von AB *Höhe von* γ.

Satz IV.17 Es seien $\varkappa$ eine Kugel vom Radius r, I ihr Flächeninhalt, V das Volumen des von ihr begrenzten Kugelkörpers, V_h das Volumen eines Segmentes von $\varkappa$ mit der Höhenlänge h und I_h der Flächeninhalt der zugehörigen Kalotte. Dann gelten die Formeln:

$$I = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad I_h = 2\pi r h, \quad V = \frac{\pi}{3} h^2(3r - h). \tag{19}$$

Satz IV.18 Zwei nicht zusammenfallende Kreise in ein und derselben Ebene haben entweder keinen Punkt, genau einen Punkt oder genau zwei Punkte gemeinsam; der erste Fall liegt genau dann vor, wenn einer der beiden Kreise ganz außerhalb des anderen liegt. Im letzten Fall liegt jeweils von den beiden Bögen, in die ein jeder der beiden Kreise durch die Schnittpunkte zerlegt wird, der eine ganz innerhalb und der andere ganz außerhalb des anderen Kreises.

Satz IV.19 Die Menge der Mittelpunkte aller Kreise des Raumes, die die beiden Punkte A und B, $A \neq B$, gemeinsam haben, ist die Symmetrieebene der Strecke AB (vgl. Def. II.6).

Def. IV.7 Haben zwei Kreise (die Kreise dürfen auch zusammenfallen) einen gemeinsamen Punkt B und in B eine gemeinsame Tangente, so berühren sie sich in B. Liegen dabei beide Kreise in derselben Ebene und einer der beiden Kreise ganz innerhalb der anderen Kreisfläche, so *berührt* er den anderen Kreis *von innen*, liegen beide Kreise bis auf ihren Berührungspunkt außerhalb voneinander, so *berührt* jeder von ihnen den anderen *von außen*.

Satz IV.20 Die Menge der Mittelpunkte aller Kreise des Raumes, die den nicht zu einem Punkt ausgearteten Kreis k in dem Punkt B berühren, ist die auf der Tangente an k durch B senkrecht stehende Ebene durch B.

Satz IV.21 Zwei in derselben Ebene gelegene nicht zusammenfallende Kreise berühren sich dann und nur dann, wenn sie genau einen gemeinsamen Punkt haben.

Satz IV.22 Zwei nicht zusammenfallende Kugeln haben entweder keinen Punkt, genau einen Punkt oder genau einen Kreis gemeinsam. Der erste Fall liegt genau dann vor, wenn eine der beiden Kugeln ganz außerhalb der anderen liegt. Im letzten Fall liegt jeweils von den beiden Kalotten, in die k eine jede der beiden Kugeln zerlegt, die eine ganz innerhalb und die andere ganz außerhalb der anderen Kugel.

Satz IV.23 Die Menge der Mittelpunkte aller Kugeln, die den Kreis k gemeinsam haben, ist die auf der Kreisebene senkrecht stehende Gerade durch den Mittelpunkt von k.

Def. IV.8 Haben zwei Kugeln (die Kugeln dürfen auch zusammenfallen) einen gemeinsamen Punkt B und in B eine gemeinsame Tangentialebene, so berühren sie sich in B. Liegt dabei eine der beiden Kugeln ganz innerhalb des anderen Kugelkörpers, so *berührt* sie die andere Kugel *von innen.* Im anderen Fall, in dem beide Kugeln bis auf den Berührungspunkt außerhalb voneinander liegen, *berührt* jede von ihnen die andere *von außen.*

Satz IV.24 Die Menge der Mittelpunkte aller Kugeln, die die nicht zu einem Punkt ausgeartete Kugel $\varkappa$ im Punkt B berühren, ist die auf der Tangentialebene an $\varkappa$ durch B senkrecht stehende Gerade durch B.

Satz IV.25 Zwei nicht zusammenfallende Kugeln berühren sich dann und nur dann, wenn sie genau einen gemeinsamen Punkt haben.

V. Polyeder; gekrümmte Flächen

Polyeder

Def. V.1 Sind die n paarweise voneinander verschiedenen Vielecksflächen Φ_i, $i = 1, \ldots, n$, $n \geqq 4$, derart im Raum gelegen, daß jede Seite jedes der Φ_i Seite von genau zweien der Φ_i ist und je zwei der Φ_i höchstens eine Seite gemeinsam haben, so bilden die Φ_i zusammen mit ihren Seiten und Ecken ein *Polyeder* Π. Dabei heißt jede der Φ_i *Seitenfläche* oder auch *Seite* von Π, jede Seite jedes der Φ_i heißt *Kante* von Π und jede Ecke eines der Φ_i heißt *Ecke* von Π. Jede Strecke, deren Endpunkte Eckpunkte von Π sind, und die selbst nicht Kante ist, heißt *Flächendiagonale*, wenn sie Diagonale einer Seitenfläche Φ_i ist, andernfalls *Raumdiagonale.* Falls nichts zusätzlich bemerkt wird, verstehen wir unter einer Diagonale eine Raumdiagonale. Es werden nur solche Polyeder betrachtet, die sich nicht selbst durchsetzen, d.h. bei denen die Menge der gemeinsamen Punkte je zweier der Φ_i entweder Seite oder Ecke beider Φ_i oder leer ist, und die zusammenhängend sind, d.h. bei denen man von jeder Ecke zu jeder Ecke auf Kanten „wandern“ kann. Je zwei Seitenflächen mit gemeinsamer Kante heißen *benachbart.* Jedes Polyeder bildet zusammen mit seinem Innern[1] einen *Polyederkörper,* dessen Rauminhalt auch als Volumen des Polyeders bezeichnet wird. Die Summe der Flächeninhalte der Φ_i heißt der *Flächeninhalt* des Polyeders Π. Liegt die Verbindungsstrecke je zweier Punkte von Π ganz in dem zugehörigen Polyederkörper, so heißt Π *konvex.* Ist Π ein konvexes Polyeder, so heißt jeder Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen (vgl. I.16) *Innenwinkel* von Π.[2] (Das Bild 14 zeigt ein Polyeder mit 16 Ecken, 32 Kanten, 16 Flächen.)

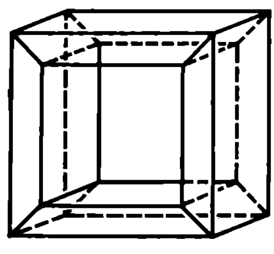


Bild 14

[1] Das Innere kann ähnlich wie in der Fußnote zu Satz III.4 erklärt werden.

[2] Bei nicht konvexen Polyedern verwendet man zur Definition des Innenwinkels einen geeignet orientierten Winkel.

Def. V.2 Unter einem *Tetraeder* versteht man ein aus vier Seitenflächen bestehendes Polyeder (Bild 15).

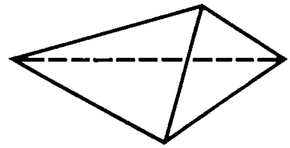


Bild 15

Satz V.1 Jedes Tetraeder ist konvex, besteht aus vier Dreiecksflächen Φ_i und hat vier Ecken A_i und sechs Kanten A_iA_j, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$, wobei die Bezeichnung so gewählt werden kann, daß A_i nicht in der Ebene von Φ_i liegt. Ist (i, j, k, l) irgendeine Anordnung der Zahlen $(1, 2, 3, 4)$, so sind $g_{A_iA_j}$ und $g_{A_kA_l}$ windschief zueinander.

Def. V.3 Bei den Bezeichnungen von Satz V.1 heißt A_i die Φ_i *gegenüberliegende Ecke*, das Lot A_iF_i von A_i auf die Φ_i enthaltende Ebene heißt *Höhe* des Tetraeders auf Φ_i, A_iA_j und A_kA_l heißen *Gegenkanten*. Jedes Tetraeder, dessen sämtliche Seitenflächen gleichseitige Dreiecke (mit der Seitenlänge a) sind, heißt *regelmäßiges Tetraeder* (mit der Kantenlänge a).

Satz V.2 Für das Volumen V jedes Tetraeders gilt die Formel

$$V = \frac{G \cdot h}{3},$$

wenn G den Flächeninhalt einer Seitenfläche und h die Länge der Höhe durch die ihr gegenüberliegende Ecke bedeuten.
Insbesondere gilt für das Volumen V und den Flächeninhalt I jedes regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge a:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3, \quad I = a^2\sqrt{3}. \tag{20}$$

Hexaeder

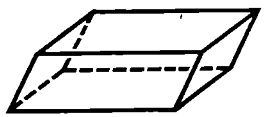


Bild 16

Def. V.4 Unter einem *Hexaeder* versteht man ein aus sechs Seitenflächen bestehendes Polyeder. Jedes Hexaeder, bei dem jede Seitenfläche eine Parallelogrammfläche ist, heißt Parallelepiped (Bild 16).

Satz V.3 Jedes Parallelepiped ist konvex und hat acht Ecken und zwölf Kanten, die drei Quadrupel paralleler Strecken bilden. Die sechs Seitenflächen bilden drei Paare paralleler, einander gegenüberliegender Seitenflächen.

Def. V.5 Das Lot von einem Punkt einer Seitenfläche von Π auf die Ebene der ihr gegenüberliegenden Seitenfläche Φ heißt zu der Seitenfläche Φ gehörige *Höhe* von Π.

Satz V.4 Sind I der Flächeninhalt einer Seitenfläche des Parallelepipeds und h die zugehörige Höhenlänge, so gilt

$$V = I \cdot h$$

für das Volumen V von Π.

Def. V.6 Jedes Parallelepiped, dessen sämtliche Seitenflächen Rechtecksflächen sind, heißt *Quader*.

Satz V.5 Sind a, b, c die Längen dreier von derselben Ecke ausgehender Kanten eines Quaders, so gelten für dessen Diagonalenlänge d und für das Volumen V des zugehörigen Quaderkörpers die Formeln:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad V = a \cdot b \cdot c. \tag{21}$$

Jeder Innenwinkel eines Quaders ist ein rechter Winkel.

Def. V.7 Jeder Quader, dessen sämtliche Seitenflächen Quadratflächen sind, heißt *Würfel*.

Satz V.5′ Für die Diagonale d jedes Würfels mit der Kantenlänge a und das Volumen V des zugehörigen Würfelkörpers gelten die Formeln:

$$d = a\sqrt{3}, \quad V = a^3. \tag{22}$$

Oktaeder

Def. V.8 Ein *Oktaeder* ist ein aus acht Seitenflächen bestehendes Polyeder (Bild 17). Ist jede der acht Flächen eine gleichseitige Dreiecksfläche, so heißt das Oktaeder *regelmäßig*.

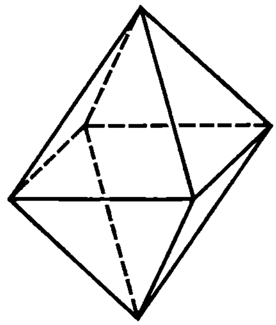


Bild 17

Satz V.6 Jedes regelmäßige Oktaeder ist konvex und hat sechs Ecken, von denen jede mit vier der übrigen durch eine Kante verbunden ist, und zwölf Kanten, die sechs Paare paralleler Kanten bilden. Die acht Seitenflächen bilden vier Paare paralleler Flächen. Die Mittelpunkte der Seitenflächen jedes regelmäßigen Oktaeders bilden die Ecken eines Würfels, und die Mittelpunkte der Seitenflächen jedes Würfels bilden die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders. Für den Flächeninhalt I jedes regelmäßigen Oktaeders mit der Kantenlänge a und das Volumen V des zugehörigen Oktaederkörpers gelten die Formeln:

$$I = 2a^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3. \tag{23}$$

Prisma

Def. V.9 Unter einem *Prisma* versteht man ein Polyeder, das aus zwei kongruenten, in nicht zusammenfallenden parallelen Ebenen gelegenen n-Ecksflächen, der sogenannten *Grund-* und *Deckfläche*, und n, $n \geqq 3$, Parallelogrammflächen, den sogenannten *Mantelflächen*, besteht.

Satz V.7 Sind h der Abstand der Grundflächenebene von der Deckflächenebene und I der Inhalt der Grundfläche eines Prismas, so hat der zugehörige Prismenkörper das Volumen

$$V = I \cdot h.$$

Pyramide

Def. V.10 Unter einer *Pyramide* versteht man ein aus einer ausgezeichneten n-Ecksfläche und n, $n \geqq 3$, Dreiecksflächen bestehendes Polyeder. Die ausgezeichnete n-Ecksfläche heißt die *Grundfläche* der Pyramide, jede der übrigen n Seitenflächen *Mantelfläche.* Die den n Mantelflächen gemeinsame Ecke S heißt die *Spitze* der Pyramide, und das Lot von S auf die Grundflächenebene heißt die *Höhe* der Pyramide.
Eine Pyramide, deren Grundfläche die Fläche eines regelmäßigen n-Ecks ist, heißt *gerade,* wenn ihr Höhenfußpunkt Mittelpunkt des n-Ecks (vgl. Satz III.7.a) ist.[1]

Satz V.8 Jede Pyramide mit dem Grundflächeninhalt I und der Höhenlänge h begrenzt einen Pyramidenkörper vom Volumen

$$V = \frac{I \cdot h}{3}.$$

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird anstelle von Pyramidenkörper aus traditionellen Gründen auch das Wort Pyramide gebraucht.

Einige gekrümmte Flächen

Def. V.11 Schneidet man einen Kreiszylinder (Def. II.4), der die Achse g und den Radius r hat, mit zwei zu g senkrechten Ebenen, die den Abstand h voneinander haben, so heißt der von den beiden Schnittkreisen begrenzte endliche Teil des Zylinders *Zylindermantel.* Jede auf ihm gelegene, die beiden Kreise verbindende Strecke heißt *Mantellinie.* Der Zylindermantel schließt zusammen mit den beiden von seinen Randkreisen begrenzten Kreisscheiben einen (geraden) *Kreiszylinderkörper* vom Radius r und der Höhenlänge h ein.
Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird, dem üblichen Sprachgebrauch folgend, statt Zylinderkörper auch das Wort Zylinder verwendet.

Satz V.9 Für den Flächeninhalt I jedes Zylindermantels vom Radius r und der Höhenlänge h, die Mantellinienlänge l (alle Mantellinien desselben Zylindermantels haben die gleiche Länge) und das Volumen des zugehörigen Zylinderkörpers gilt:

$$I = 2\pi r h, \quad l = h, \quad V = \pi r^2 h.$$

Def. V.12 Schneidet man einen (Doppel-)Kegel (Def. II.5), der die Spitze S und die Achse g hat, mit einer zu g senkrechten Ebene, so heißt der von dem Schnittkreis k und der Spitze S begrenzte endliche Teil des Kegels *Kegelmantel.* Ist A ein auf k gelegener Punkt, so heißt AS *Mantellinie* und k *Grundkreis* des Kegelmantels.

---

[1] Allgemein heißt eine *Pyramide gerade,* wenn ihr Höhenfußpunkt der Schwerpunkt des Grundflächen-n-Ecks ist. Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist in Satz III.17 erklärt. Der Schwerpunkt jedes Parallelogramms ist dessen Diagonalenschnittpunkt. Eine Definition des Schwerpunktes eines allgemeinen n-Ecks geschieht am einfachsten mit Mitteln der analytischen Geometrie oder der Vektorrechnung und wird hier nicht gegeben. Diese Fälle kommen in den Aufgaben nicht vor.

Jeder Kegelmantel begrenzt zusammen mit seiner Grundkreisfläche einen (geraden) *Kreiskegelkörper*. Das Lot SM von S auf die Grundkreisebene heißt die *Höhe* des Kegelkörpers.
Dem üblichen Sprachgebrauch entsprechend, wird sowohl anstelle von Kegelmantel als auch anstelle von Kegelkörper kurz das Wort *Kegel* benutzt, falls keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Satz V.10 Der Höhenfußpunkt jedes Kegelkörpers ist dessen Grundkreismittelpunkt M. Zwischen dem Flächeninhalt I, dem Grundkreisradius r, der Mantellinienlänge s (alle Mantellinien desselben Kegelmantels haben die gleiche Länge), der Höhenlänge h jedes Kegelmantels vom Öffnungswinkel 2α und dem Volumen V des zugehörigen Kegelkörpers bestehen die folgenden Relationen:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad I = \pi r s, \quad s = \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha}. \tag{24}$$

VI. Konstruktionen

Bei einer Konstruktionsaufgabe, z. B. ein Dreieck aus drei gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal (etwas genauer gesagt: unter alleiniger Zuhilfenahme von Zirkel, Lineal ohne Skale und Bleistift[1] auf einem Blatt Papier) zu konstruieren, entstehen i. allg. folgende Fragen:

(1) Wie viele (paarweise voneinander verschiedene) Figuren der geforderten Art gibt es überhaupt? Dabei hängt die Antwort i. allg. von den tatsächlichen Größen der als gegeben zu betrachtenden Stücke ab. Die Größen der „gegebenen" Stücke (Parameter) sind vielfach gar nicht „gegeben", sondern in gewissen Bereichen variabel, aber bei jeder einzelnen der auszuführenden Konstruktionen als festgehalten zu denken.

(2) Wie können alle diese Figuren konstruiert werden? Die Antwort ist in der Beschreibung eines Konstruktionsverfahrens zu sehen. Da im allgemeinen Fall unendlich viele Parameterwerte zu betrachten sind, können nicht alle Figuren tatsächlich konstruiert werden.

Bemerkung 1:

Bei „besonders einfachen" Aufgaben in unteren Klassenstufen sowie auch im konkreten Anwendungsfall in der Technik brauchen vielfach nur endlich viele Parameterwerte betrachtet zu werden. Wenn dies nicht zu viele sind, können sämtliche Lösungen auch tatsächlich konstruiert werden.

Bemerkung 2:

In den unteren Klassen gibt es bei den einfacheren Aufgaben genau eine Figur der verlangten Art, und es wird zur Erleichterung vom Schüler nicht der Nachweis dieser Tatsache verlangt, sondern er darf – vielfach durch die Anschauung gestützt – ohne Beweis von dieser Tatsache ausgehen. Häufig wird sogar nur die Angabe einer Konstruktionsvorschrift, ja manchmal sogar nur die Ausführung einer Konstruktion ohne Beweis für deren Richtigkeit verlangt. Die Konstruktionsaufgaben in den

[1] Anstelle dieser Geräte können auch äquivalente andere zugelassen werden, z. B. Reißfeder, Reißschiene o. ä. Manchmal wird zur Vereinfachung der Ausführung auch die Verwendung von Parallellinealen und Zeichendreiecken (für die Abtragung rechter Winkel) erlaubt. Die Benutzung einer Skale (z. B. cm-Skale) und Winkelmesser (Transporteur) ist nur zulässig, um die „gegebenen Stücke" einmalig auf dem Zeichenblatt aufzutragen. Nicht zulässig ist in diesem Rahmen die Benutzung von Inversoren, Ellipsenzirkeln, mit Reißnägeln befestigten Fäden u. a. m.

Mathematik-Olympiaden der höheren Stufen (3. und 4. Stufe, Olympiadeklasse 9 bis 11/12) sind nicht in dieser vereinfachten Form, sondern in dem unter (1) und (2) erläuterten Sinn zu verstehen, wobei eine solche Figur wirklich gezeichnet werden soll.

Bemerkung 3:

Bei der Behandlung der Aufgaben soll, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, angenommen werden, daß alle „gegebenen" Streckenlängen und Winkelgrößen ungleich Null sind und daß zur Ausführung der Konstruktion Zeichenblätter, Lineale und Zirkel beliebiger Größen zur Verfügung stehen.
Für theoretische Zwecke wäre eine Beschränkung der Größenverhältnisse ohnehin nicht am Platze, und für praktische reichen die wirklich vorhandenen Hilfsmittel gewöhnlich aus. – Niemand wird z.B. in die Verlegenheit kommen, die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Längen 1 Lichtjahr und 1 Nanometer haben, ausführen zu sollen, obwohl dieser Fall natürlich in einer allgemeinen Konstruktionsbeschreibung für ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Kathetenlängen enthalten ist.

Bemerkung 4:

Die Konstruktion einer Geraden, die ja in ihrer Gesamtausdehnung nie gezeichnet werden kann (ähnliches gilt auch für einen Strahl), ist als die Konstruktion zweier ihrer Punkte aufzufassen, auch wenn diese dicht beieinander liegen und daher eine befriedigende technische Ausführung der Konstruktion des ganzen auf dem Zeichenblatt liegenden Teiles der Geraden noch erhebliche Schwierigkeiten bereiten kann. Als Gegenstück hierzu sei außerdem an die bekannte Aufgabe erinnert, eine Gerade durch einen gegebenen Punkt des Zeichenblattes und den nicht auf diesem gelegenen Schnittpunkt zweier anderer gegebener Geraden zu konstruieren – übrigens ein Fall, in dem einmal nicht ein Blatt beliebiger Größe als vorhanden vorausgesetzt wird.

Zur Behandlung von Konstruktionsaufgaben im Sinne der Beantwortung der Fragen (1) und (2) haben sich verschiedene Verfahren herausgebildet, die man in das folgende Schema S bringen kann.
Schema S besteht aus vier Teilen:

a) *Analyse* (oder auch Analysis). Unter der Annahme, daß es eine allen Bedingungen der Aufgabe genügende Figur gibt, wird diese in Teilfiguren zerlegt, die nacheinander mit Hilfe bekannter Verfahren aus den gegebenen Stücken konstruierbar sind, so daß sich ein Satz folgender Art ergibt:
„Wenn es eine allen Bedingungen der Aufgabe genügende Figur gibt, so kann diese auf folgende Weise konstruiert werden." Dann folgt die im Satz angekündigte Beschreibung der Konstruktion.
b) *Konstruktion* (auch Synthese genannt). Es wird angegeben, welche Zeichenschritte auszuführen sind, um eine gesuchte Figur zu erhalten. Dabei ist es zulässig, die nach der folgenden Bemerkung 2 als bekannt anzusehenden Schritte zu zitieren.

Bemerkung 1:

Es wird nicht ausgesagt, daß eine solche Figur nur auf die angegebene Weise konstruiert werden kann, es kann durchaus so sein, daß es noch andere Konstruktionsmöglichkeiten für dieselbe Figur gibt. Es ist also i.allg. nicht so, daß eine Figur nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wenn sie auf die angegebene Weise konstruiert worden ist, sondern wenn sie so konstruierbar ist. Soll eine andere Konstruktion gewählt werden, muß allerdings eine andere Analyse vorausgehen.

Bemerkung 2:

Bei der Beschreibung von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal werden die folgenden elementaren Konstruktionen als bekannt angesehen:
Abtragen einer Strecke gegebener Länge auf einer Geraden,
Abtragen eines Winkels gegebener Größe an einen Strahl,
(Zeichnen eines freien Schenkels)
Konstruktion eines rechten Winkels,

Fällen eines Lotes von einem Punkt auf eine Gerade,
Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt,
Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke,
Halbierung eines Winkels,
Konstruktion des Kreisbogens aus Def. II.7,
Konstruktion eines Dreiecks aus

drei Seiten,
zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren,
einer Seite und zwei Winkeln,

Konstruktion von Um- und Inkreis eines Dreiecks,
Teilung einer Strecke in gegebenem rationalen Verhältnis,
Konstruktion der Tangenten von einem gegebenen Punkt an einen gegebenen Kreis,
Konstruktion eines Rechtecks aus gegebenen Seitenlängen.

c) *Satz* (mit Beweis). Dieser Teil besteht aus der Formulierung und dem Beweis der Umkehrung des unter a) genannten Satzes. Es ist also folgender Satz zu beweisen:
„Wenn jeder der in der Konstruktionsbeschreibung b) angegebenen Schritte ausführbar ist (evtl. auf mehrere Arten), so genügt jede dabei entstehende Figur allen Bedingungen der Aufgabe.“

Bemerkung:

Damit diese Umkehrung überhaupt richtig ist, muß die Konstruktion b) und somit die Analyse a) geeignet gewählt werden: Diese „geeignete Wahl“ ist als eine der Hauptleistungen bei der Lösung der Aufgabe anzusehen.

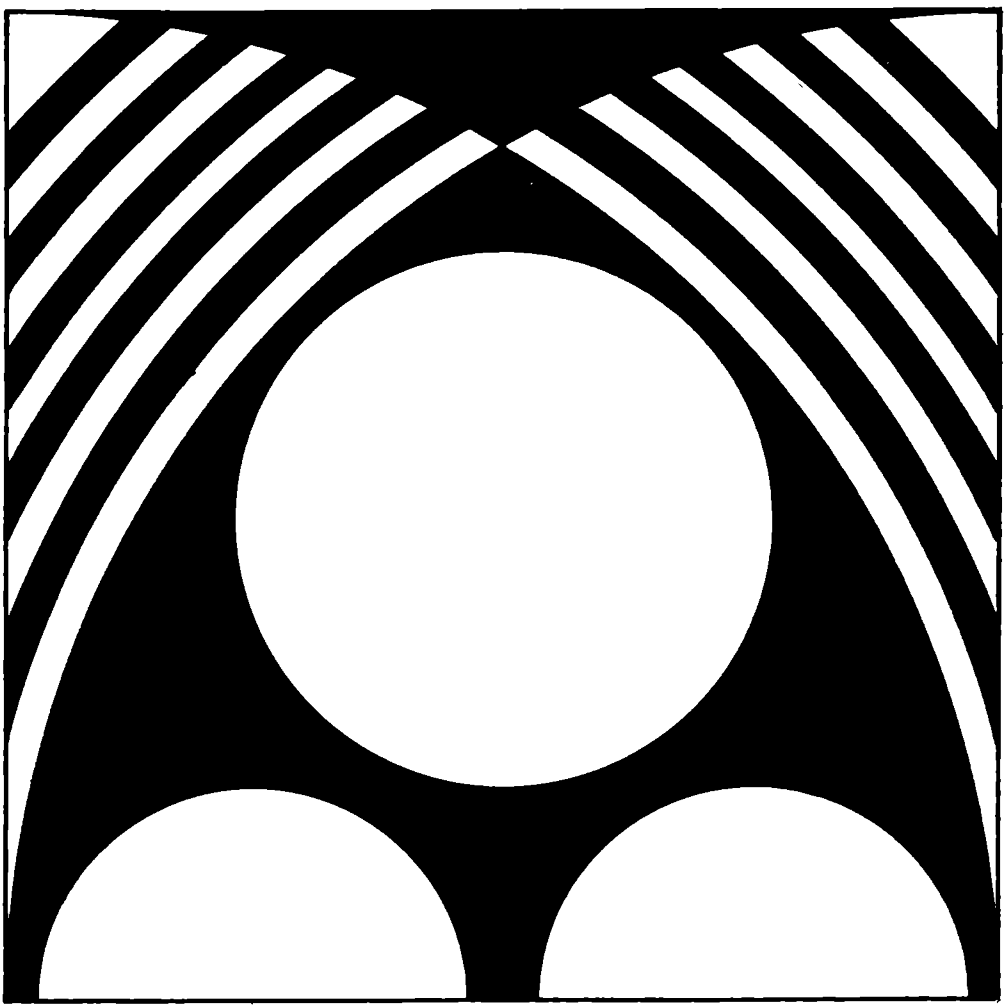
d) *Determination* (auch Diskussion genannt). Sie besteht aus zwei Teilen:

α) *Existenz:* Es wird dargelegt, in welchen Fällen jeder und in welchen Fällen nicht jeder der in b) angegebenen Konstruktionsschritte ausführbar ist.

β) *Eindeutigkeit* (bzw. Mehrdeutigkeit). Für jeden Fall, in dem sämtliche Konstruktionsschritte nach b) ausführbar sind, wird angegeben, auf wie viele Arten dies möglich ist und welche Folgen die verschiedenen Ausführungen für die Endfigur haben (also wie viele inkongruente Endfiguren man erhält, wenn es nicht auf die Lage ankommt).

Mit der Ausführung der Teile a) bis d) ist die Aufgabe im Sinne der Fragen (1) und (2) gelöst, d.h., es ist eine vollständige Lösung angegeben worden. Wenn nämlich nicht alle Konstruktionsschritte b) ausführbar sind, so gibt es wegen des Satzes in a) keine Figur der geforderten Art, während sich anderenfalls aus c) und d) die Anzahl der existierenden Figuren der verlangten Art ergibt. Dazu läßt sich jede von diesen gemäß b) konstruieren.
Soll dem Schüler zur Erleichterung bei einer Konstruktionsaufgabe die Behandlung gewisser Teile der vollständigen Lösung erlassen werden, so ist dies bereits bei der Aufgabenstellung deutlichzumachen, wodurch strenggenommen eine andere Aufgabe entsteht. Bei einem Wettbewerb, wo die Schüler in einer festgelegten Zeit ihre Arbeiten beenden müssen, ist eine solche Erläuterung von großer Bedeutung, da i.allg. für zusätzliche Betrachtungen (bzw. die Lösung einer die gestellte Aufgabe enthaltenden Aufgabe) keine zusätzlichen Punkte gegeben werden und die hierfür aufgewendete Zeit evtl. bei der Lösung anderer Aufgaben fehlt.

AUFGABEN



1. GEOMETRIE IN DER EBENE

A.1.1 $\triangle ABC$ sei ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse AB die Länge $|AB| = 25$ und dessen eine Kathete BC die Länge $|BC| = 20$ hat. Auf dieser Kathete wird die Strecke BD der Länge $|BD| = 15$ abgetragen. E sei der in diesem Fall auf AB gelegene Fußpunkt des Lotes DE von D auf g_{AB}.
Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!
(4/9/1)[1]

A.1.2 Aus der Figur zum Lehrsatz des Pythagoras (Bild A.1.2) mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck. Sein Flächeninhalt soll durch die Kathetenlängen des Ausgangsdreiecks ausgedrückt werden!
(2/10/3)

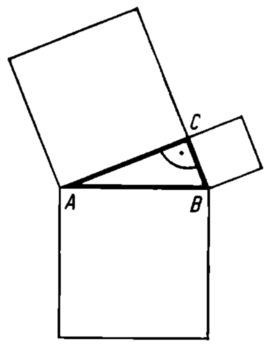


Bild A.1.2

A.1.3 Von sechs Orten A, B, C, D, E und F ist über ihre Entfernungen (in km) voneinander folgendes bekannt:

$$|AB| = 30, \quad |AE| = 63, \quad |AF| = 50, \quad |BF| = 40, \quad |CD| = 49,$$
$$|CE| = 200, \quad |DF| = 38.$$

Welche Entfernung haben B und D voneinander?
(6/10/3)

---

[1] Vgl. den Hinweis im Vorwort!

A.1.4 $\triangle ABC$ sei ein Dreieck mit $|\sphericalangle CBA| = 45°$. P sei ein Punkt auf der Seite BC. Es sei $|BP| : |PC| = 1 : 2$ und $|\sphericalangle CPA| = 60°$.
Man ermittle ohne Benutzung der Trigonometrie die Größe $|\sphericalangle ACB|$.
(3/11.12/4)

A.1.5 Beweisen Sie, daß in jedem Dreieck die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!
(2/10/4)

A.1.6 Beweisen Sie den Satz:
In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.
(6/9/3)

A.1.7 **a)** Folgender Satz ist zu beweisen:
Für jedes Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, den zugehörigen Höhenlängen h_a, h_b und h_c und mit $a \geqq b$ gilt:

$$a + h_a \geqq b + h_b. \qquad (*)$$

b) Man untersuche, wann dabei in (*) das Gleichheitszeichen steht!
(3/10/2)

A.1.8 Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist das Dreieck ABC rechtwinklig, so gilt für jeden Punkt M auf der Hypotenuse AB

$$|AM|^2 \cdot |BC|^2 + |BM|^2 \cdot |AC|^2 = |CM|^2 \cdot |AB|^2.$$

(4/10/4)

A.1.9 Gegeben seien zwei ähnliche Dreiecke mit den in dieser Reihenfolge einander entsprechenden Seitenlängen a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2. Ist ein Dreieck mit den Seitenlängen $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$ zu den gegebenen ähnlich?
Beweisen Sie Ihre Behauptung

a) geometrisch,
b) arithmetisch!
(1/9/2)

A.1.10 In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt: Gegeben ist ein Dreieck ABC; gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck PQR so, daß P innerer Punkt der Strecke BC, Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist.
Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:
Anita glaubt, daß die Aufgabe nicht für jedes Dreieck ABC lösbar ist.
Berthold ist der Meinung, daß es für jedes Dreieck ABC genau eine Lösung gibt.
Claus behauptet, für jedes Dreieck ABC gelte folgendes: „Es gibt unendlich viele Lösungen, und alle Lösungsdreiecke PQR sind einander kongruent."
Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck ABC gebe es unendlich viele Lösungen, sie behauptet dann aber weiter: „Es gibt wenigstens ein Dreieck ABC mit der Eigenschaft, daß nicht alle Dreiecke PQR, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind."
Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!
(6/10/4)

A.1.11 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E, $D \neq E$, schneide.
In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?
(2/11/3)

A.1.12 Unter allen Strecken MN, die das Dreieck ABC in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.
(5/11.12/4)

A.1.13 Man beweise folgenden Satz:
Für die Größen α, β, γ der drei Innenwinkel jedes Dreiecks gilt:

a) $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$

und

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$

(3/12/1)

A.1.14 Beweisen Sie folgenden Satz:
Für die Größen α, β, γ der drei Innenwinkel jedes Dreiecks gilt:

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1.$$

(6/11.12/2)

A.1.15 Beweisen Sie den folgenden Satz:
Ein Dreieck, dessen drei Innenwinkel die Größen α, β und γ besitzen, ist genau dann rechtwinklig, wenn $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ ist.
(3/12/3)

A.1.16 Es ist folgender Satz zu beweisen:
Sind α, β und γ die Größen der drei Innenwinkel desselben Dreiecks, dann gilt:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Weiter ist zu untersuchen, wann dabei in (*) das Gleichheitszeichen steht.
(4/11.12/4)

A.1.17 Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck, dessen drei Innenwinkel die Größen α, β, γ haben,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq \frac{3}{4}$$

gilt!
(2/12/2)

A.1.18 Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn bei einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.
(3/10/4)

A.1.19 Es seien ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis. D sei der Schnittpunkt der Tangenten t_A an k in A und t_B an k in B. Die Parallele durch D zur Tangente t_C an k in C schneide g_{AC} in B' und g_{BC} in A'. Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen

a) sowohl A, B', D als auch A', B, D jeweils die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks sind,
b) es einen Kreis gibt, der durch A, B, A', B' geht.

(2/9/1)

A.1.20 Beweisen Sie ohne Benutzung der Trigonometrie folgenden Satz:
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenlängen gleich der Summe der Durchmesserlängen von Um- und Inkreis.
(3/9/1)

A.1.21 Beweisen Sie ohne Benutzung trigonometrischer Funktionen folgenden Satz:
Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seitenlängen dieses Dreiecks, dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.
(5/9/1)

A.1.22 Es sei r der Radius eines Kreises, der beide Katheten der Längen a bzw. b eines rechtwinkligen Dreiecks berührt und dessen Mittelpunkt auf der Hypotenuse liegt. Es ist zu beweisen, daß

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

gilt.
(2/10/1)

A.1.23 Das Dreieck ABC sei gleichschenklig. Sein Umkreis habe den Radius r_1 und den Mittelpunkt M, sein Inkreis den Radius r_2 und den Mittelpunkt N. Beweisen Sie, daß

$$|MN| = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$$

ist!
(2/11/1)

A.1.24 A, B, C seien die Ecken eines Dreiecks. Es sei D der Fußpunkt des Lotes von A auf g_{BC}. Ein Kreis, der die Gerade g_{BC} in D berührt, schneide die Strecke AB in den Punkten M und N und die Strecke AC in den Punkten P und Q.
Man beweise, daß

$$\frac{|AM| + |AN|}{|AC|} = \frac{|AP| + |AQ|}{|AB|}$$

ist.
(3/12/2)

A.1.25 Gegeben sind die Längen a und b von parallelen Seiten eines Trapezes. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!
(3/10/2)

A.1.26 Es sei E der Mittelpunkt der Diagonalen DB des Parallelogramms $ABCD$ und F derjenige Punkt auf AD, für den

$$|DA| : |DF| = 3 : 1$$

gilt.
Welchen Wert hat das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks DFE zu dem des Vierecks $ABEF$?
(5/10/2)

A.1.27 Es sei ein Rechteck mit den Seitenlängen $2a$ und $2b$ gegeben. Von der Rechtecksfläche sind vier kongruente rechtwinklige Dreiecksflächen derart abgeschnitten, daß die Restfigur die Fläche eines Achteckes bildet, bei dem alle Seiten gleich lang sind (Bild A.1.27).
Man berechne die Seitenlängen des Achtecks (in Abhängigkeit von a und b).
(2/12/4)

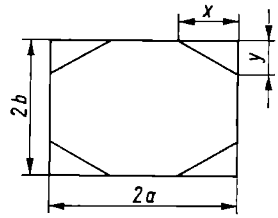


Bild A.1.27

A.1.28 In dem Viereck $ABCD$ wird die Seite AB über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, daß $|BE| = |AB|$ ist. Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, daß der Winkel $\sphericalangle ACE$ ein rechter ist.

Das Viereck $ABCD$ hat

1) vier kongruente Winkel,
2) vier kongruente Seiten,
3) zwei Paare kongruenter Seiten,
4) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamem Eckpunkt,
5) zwei kongruente Winkel.

(6/9/1)

A.1.29 Gegeben sei eine aus drei kongruenten Quadratflächen zusammengesetzte Rechtecksfläche (Bild A.1.29).
Es ist zu beweisen, daß für die Winkel der Größen α und β der Figur

$$\alpha + \beta = 45°$$

ist.
(3/10/4)

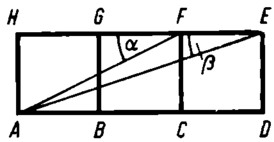


Bild A.1.29

A.1.30 Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonallängen gleich dem Quadrat der Summe der Längen zweier paralleler Trapezseiten.
(3/9/3)

A.1.31 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$, bei dem die Seiten AB und CD parallel und die Seiten BC und AD nicht parallel sind. Der Schnittpunkt der Diagonalen sei H und der von g_{BC} und g_{AD} sei S. Die Parallele zu AB durch H schneide die Seite BC in E und die Seite AD in F. Die Projektion von S auf g_{EF} sei G, und es sei $G \neq E$.
Man beweise, daß $\sphericalangle BGE \cong \sphericalangle EGC$ ist.
(3/11/1)

A.1.32 Über den Seiten eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten des Vierecks als Hypotenusen errichtet. Die Flächeninhalte dieser vier Dreiecke seien mit I_1, I_2, I_3 und I_4 bezeichnet, und zwar so, daß die Dreiecke mit den Flächeninhalten I_1 und I_3 sowie die mit I_2 und I_4 jeweils über gegenüberliegenden Seiten des Vierecks errichtet sind.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

ist!
(2/9/2)

A.1.33 Beweisen Sie den folgenden Satz:
Für jedes ebene konvexe Viereck gilt: Seine Diagonalen schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

ist, wobei a und c die Längen zweier gegenüberliegender Seiten des Vierecks sowie b und d die Längen der beiden übrigen Seiten des Vierecks sind.
(6/9/2)

A.1.34 Jede konvexe Vierecksfläche wird durch ihre Diagonalen in vier Dreiecksflächen zerlegt. Man beweise, daß ein konvexes Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.
(4/10/3)

A.1.35 Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$. Es ist zu beweisen, daß für den Quotienten q aus dem größten und dem kleinsten aller Abstände zweier Eckpunkte voneinander stets gilt:

$$q \geqq \sqrt{2}.$$

(1/11.12/4)

A.1.36 Beweisen Sie folgenden Satz:
Für den Flächeninhalt I jedes Sehnenvierecks mit den Seitenlängen a, b, c, d gilt

$$I = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wenn

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

bedeutet.
(4/12/1)

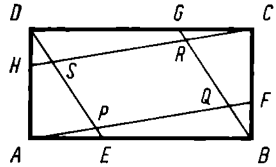


Bild A.1.37

A.1.37 Jede Seite des Rechtecks $ABCD$ werde im Verhältnis $1:2$ geteilt (Bild A.1.37), und zwar derart, daß gilt:

$$|AE| : |EB| = |BF| : |FC| = |CG| : |GD| = |DH| : |HA| = 1 : 2,$$

wobei $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$ und $H \in DA$ ist.
Die Schnittpunkte von g_{AF} mit g_{ED} bzw. g_{BG} seien P bzw. Q und die von g_{HC} mit g_{ED} bzw. g_{BG} seien S bzw. R. P, Q, R, S bilden die Ecken eines Vierecks.

a) Man beweise, daß das Viereck $PQRS$ ein Parallelogramm ist.
b) Man berechne den Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ in Abhängigkeit vom Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

(2/11/2)

A.1.38 Der Flächeninhalt des ebenen Vierecks $ABCD$ sei I, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d.
Man beweise, daß dann die Abschätzung

$$I \leqq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

besteht, und untersuche, wann in ihr das Gleichheitszeichen gilt.
(5/11.12/3)

A.1.39 Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel der Größe 60° wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, daß die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind.
Es ist zu untersuchen, welcher von den beiden Teilen den kleineren Flächeninhalt hat.
(2/10/4)

A.1.40 Vergleichen Sie den Flächeninhalt der von Kreisbögen begrenzten schraffierten Fläche (Bild A.1.40) mit dem des rechtwinkligen Dreiecks ABC!

(Die Dreiecke ACE, ABF bzw. CBD sind gleichschenklig-rechtwinklig; D, E bzw. F sind die Mittelpunkte der begrenzenden Kreisbögen durch B und C, A und C, A und B, und es gilt $|AC| < |BC| < |AB|$. Außerdem liegen CE und CD außerhalb von $\triangle ABC$ und E, F, D auf derselben Seite von g_{AB}.)
(2/10/3)

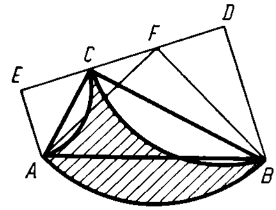


Bild A.1.40

A.1.41 In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten AC und BC der Länge a sind im Innern um jeden Eckpunkt Kreisbögen mit dem Radius $\frac{a}{2}$ geschlagen. Die drei Kreissektoren lassen auf der Dreiecksfläche eine Fläche K mit dem Inhalt I_K frei.

a) Berechnen Sie I_K!
b) Wieviel Prozent des Flächeninhalts I_D des Dreiecks ABC beträgt der Flächeninhalt I_K näherungsweise (bis auf 2 Stellen nach dem Komma)?

(6/10/1)

A.1.42 In ein Quadrat der Seitenlänge a sollen fünf Kreise, von denen keine zwe zusammenfallen, so gezeichnet werden, daß einer der Kreise den Mittelpunkt des Quadrates als Mittelpunkt hat und jeder der vier übrigen Kreise sowohl diesen Kreis als auch je zwei benachbarte Quadratseiten berührt.

a) Berechnen Sie den Radius dieser Kreise!
b) Beschreiben Sie eine Konstruktion dieser fünf Kreise, bei der nur Zirkel und Lineal verwendet werden!

(3/10/1)

A.1.43 In dem in Bild A.1.43 dargestellten Teil eines Ornaments treten als Grundformen Kreise und Kreisbögen auf, die einander in der aus dem Bild ersichtlichen Weise berühren. Es sollen die Radien r_1, r_2 und r_3 der Kreise k_1, k_2 bzw. k_3 und k_3' in Abhängigkeit vom Radius r von k und k' berechnet werden.
(6/10/1)

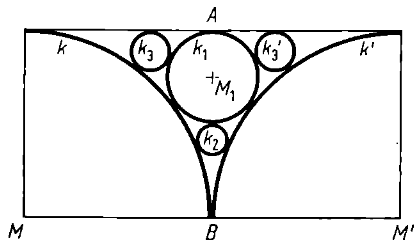


Bild A. 1.43

A.1.44 Einem Kreis k seien drei einander paarweise berührende Kreise einbeschrieben, die den gleichen Radius r haben und von denen jeder auch noch k be-

rührt. Drei kleinere Kreise mit gleicnem Radius x seien so eingezeichnet, daß jeder von ihnen zwei der Kreise mit dem Radius r sowie k berührt.
Es ist x zu berechnen, wenn r gegeben ist.
(3/10/3)

A.1.45 Gegeben sei eine Strecke AB mit dem Mittelpunkt M. M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Strecken AM bzw. MB. Es werden ein Halbkreis k, der den Mittelpunkt M und den Radius $|AM|$ hat, und zwei weitere Halbkreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $\frac{|AM|}{2}$ gezeichnet, die in derselben von g_{AB} begrenzten Halbebene wie k liegen.
Der Kreis k_3 berühre den Halbkreis k von innen und jeden der beiden Halbkreise k_1 und k_2 von außen (Bild A.1.45).
Ermitteln Sie die Lage des Mittelpunktes M_3 von k_3!
(1/11/3)

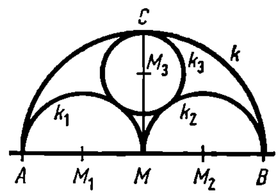


Bild A.1.45

A.1.46 Um die Punkte A und B der Strecke AB der Länge a werden Kreisbögen mit dem Radius a gezeichnet, die sich in D schneiden. Die Mittelpunkte von AB, AE bzw. EB nennen wir E, F bzw. G. Um F und G werden jeweils mit dem Radius $\frac{a}{4}$ die Halbkreise auf derselben Seite von g_{AB} wie D gezeichnet (Bild A.1.46). M ist der Mittelpunkt des Kreises, der die Kreisbögen um A und B von innen und jeden der Halbkreise um F und G von außen berührt.
Man berechne $|ME|$.
(3/12/2)

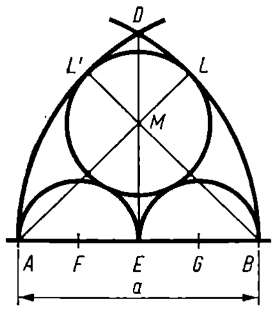


Bild A.1.46

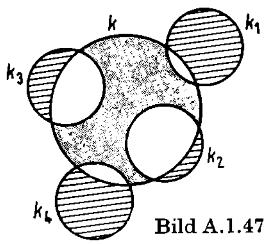


Bild A.1.47

A.1.47 Ein Kreis k mit dem Radius r werde von vier in derselben Ebene wie k liegenden Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4, von denen jeder den Radius $\frac{r}{2}$ hat, so geschnitten, daß keine zwei der Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 einen Punkt gemeinsam haben (Bild A.1.47).

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt der in der Figur gerasterten Teilfläche des Kreises k gleich der Summe der Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen der Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 ist.
(4/11/1)

A.1.48 Gegeben seien zwei konzentrische Kreise.
Man beweise, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes P auf dem äußeren Kreis von den Endpunkten eines Durchmessers des inneren Kreises von der Lage des Punktes P unabhängig ist.
(5/10/3)

A.1.49 In dem Parallelogramm $ABCD$ seien $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $a > b$ und h_a der Abstand der Geraden g_{AB} von der Geraden g_{CD}. Ferner sei eine Kreisscheibe mit dem Radius r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe das Parallelogramm.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche Φ, die von der Kreisscheibe überstrichen wird!
(5/9/3)

A.1.50 Beweisen Sie folgenden Satz:
Liegen die fünf paarweise voneinander verschiedenen Punkte P, P_1, P_2, P_3, P_4 auf demselben Kreis so, daß $|\sphericalangle P_1PP_2| = |\sphericalangle P_2PP_3| = |\sphericalangle P_3PP_4| = 45°$ gilt, dann ist $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat.
(2/9/3)

A.1.51 In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks, bei dem keine Seite Durchmesser des Umkreises ist, werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist das genannte Sehnenviereck ein Trapez, so sind die Schnittpunkte benachbarter Tangenten die Ecken eines Drachenvierecks.

b) Ist dieser Satz umkehrbar?

(4/10/1)

A.1.52 Der „Inversor“ von PEAUCELLIER besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben OA und OB derselben Länge, die in A und B mit einem „Gelenkrhombus“ $APBP'$ verbunden sind (Bild A.1.52). Es sei $|OA| > |PA|$. Man zeige, daß das Produkt der Entfernungen $|OP|$ und $|OP'|$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.
(3/10/4)

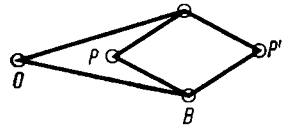


Bild A.1.52

A.1.53 Einem Kreis vom Radius r ist ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Berechnen Sie den Umfang des Zwölfecks!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Zwölfecks!
c) Um wieviel Prozent des Kreisumfanges ist der Umfang des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Das Ergebnis ist auf eine Stelle nach dem Komma genau anzugeben.)
d) Um wieviel Prozent des Kreisinhaltes ist der Flächeninhalt des Zwölfecks kleiner als jener? [Genauigkeit wie bei **c)**]

(5/10/2)

A.1.54 Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des im Bild A.1.54 dargestellten fünfzackigen Sternes!
(6/9/1)

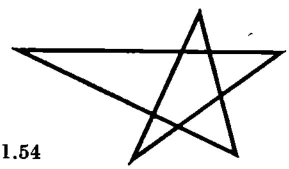


Bild A.1.54

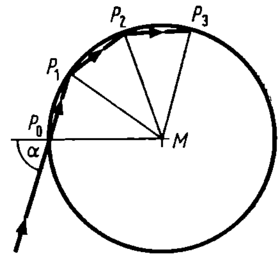


Bild A.1.55

A.1.55 In einem Spiegel, der die Form eines geraden Kreiszylindermantels habe und dessen Innenfläche spiegelt, fällt bei P_0 in einer zur Zylinderachse senkrechten Ebene ein Lichtstrahl derart ein, daß der Einfallswinkel die Größe $\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ hat und daß der Strahl nacheinander an den Punkten P_1, $P_2, \ldots, P_n$ des Mantels, die auf demselben Kreis liegen, reflektiert wird (Bild A.1.55). Man berechne

a) die Bogenlänge $|\widehat{P_0P_n}|$,
b) α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und sich der Polygonzug nicht überschneidet,
c) alle positiven ganzen Zahlen n, für die P_n mit P_0 zusammenfällt, wenn $\alpha = \frac{5}{18}\pi$ ist.

(4/11/1)

A.1.56 Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geqq 3$. Es sei $P_1P_2 \ldots P_n$ ein regelmäßiges n-Eck.
Geben Sie die Anzahl aller stumpfwinkligen Dreiecke $P_kP_lP_m$ an, bei denen P_k, P_l, P_m Ecken von $P_1P_2 \ldots P_n$ sind!
(6/11.12/4)

A.1.57 Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

1. Jedes einem Kreis einbeschriebene gleichseitige Vieleck ist „gleichwinklig“.
2. Jedes einem Kreis einbeschriebene „gleichwinklige“ Vieleck ist gleichseitig.
3. Jedes einem Kreis umbeschriebene gleichseitige Vieleck ist „gleichwinklig“.
4. Jedes einem Kreis umbeschriebene „gleichwinklige“ Vieleck ist gleichseitig.

(3/11.12/4)

A.1.58 In einer Ebene seien n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_1, $P_2, \ldots, P_n$ ($n > 3$) gegeben, von denen keine 3 auf derselben Geraden liegen. Es ist zu untersuchen, ob es einen Kreis gibt, auf dem mindestens drei dieser n Punkte liegen und der im Innern keinen der übrigen Punkte enthält.
(3/11/2)

A.1.59 In einer Ebene seien n Punkte ($n \geqq 2$) so verteilt, daß es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl dieser Vektoren, die in demselben der n Punkte enden können.
(6/11.12/3)

A.1.60 In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegener Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe das Quadrat.
Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R von ε, für die das Dreieck PQR gleichseitig ist!
(6/11.12/4)

A.1.61 Ermitteln Sie die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von den je eine Seite enthaltenden Geraden eines in dieser Ebene gegebenen regelmäßigen Fünfecks fünfmal so groß ist wie der Inkreisradius des Fünfecks!
(4/11.12/4)

A.1.62 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Ermitteln Sie die Menge aller Punkte in der Ebene des Quadrates, für die die Summe der Entfernungen von den Geraden g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA} gleich 4 ist!
(5/10/1)

A.1.63 Zwei Geraden g_1 und g_2 schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Ermitteln Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke AXY, für die $X \in g_1$, $Y \in g_2$, $X \neq A$, $Y \neq A$ und $|XY| = 6$ ist!

(3/10/3)

A.1.64 Der Kreis k rolle unaufhörlich (ohne zu gleiten) auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, so ab, daß er k' von innen berührt. Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft (Bild A.1.64).

Anleitung: Man beweise zunächst den folgenden Hilfssatz:

„Treffen zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehende Strahlen den in einer festen Lage betrachteten Kreis k in den Punkten S_1 bzw. S_2 und den Kreis k' in den Punkten S_1' bzw. S_2', so sind der M' nicht enthaltende Bogen $\overset{\frown}{S_1S_2}$ von k und der kürzere Bogen $\overset{\frown}{S_1'S_2'}$ von k' gleich lang."

(5/10/4)

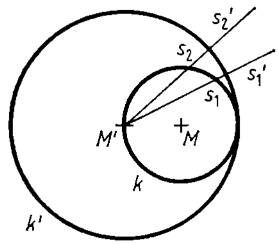


Bild A.1.64

A.1.65 Eine Armbanduhr besitze außer dem im unteren Teil des Zifferblattes angebrachten Sekundenzeiger noch eine Stoppuhreinrichtung mit einem Sekundenzeiger, dessen Achse durch die Mitte des Zifferblattes verläuft. Wenn beide Zeiger in Gang sind, laufen sie mit gleicher Winkelgeschwindigkeit. Da die Stoppuhr willkürlich in Gang gesetzt werden kann, zeigen die beiden Sekundenzeiger entweder in jedem oder in keinem Augenblick die gleiche Zeit an. Im zweiten Fall denken wir uns beide Zeiger in beiden Richtungen beliebig verlängert und zu Geraden idealisiert.

Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte der beiden zu Geraden idealisierten Sekundenzeiger, wenn diese eine halbe Umdrehung ausführen?

(1/10/3)

A.1.66 Das Bild A.1.66 stellt den Grundriß eines Teiles eines Theaters dar. $|AB|$ $(A \neq B, |AB| < |CB|)$ ist die Breite der Bühnenöffnung, CD der Grundriß einer Flucht von Seitenlogen. Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln, von denen aus der Grundriß AB der Bühnenöffnung unter einem möglichst großen Sehwinkel erscheint.

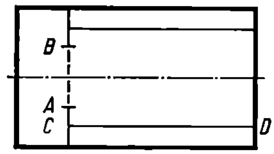


Bild A.1.66

Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\sphericalangle APB$ zu verstehen.

Anmerkung: Die Figur ist eine Skizze. Die Größenverhältnisse im Theaterraum können andere sein.

(6/10/3)

2. GEOMETRIE IM RAUM

A.2.1 Ein regelmäßiges Tetraeder habe die Höhenlänge h. Ein Punkt im Innern des Tetraeders habe von den Seitenflächen die Abstände a, b, c und d.
Man beweise, daß

$$a + b + c + d = h$$

gilt.
(4/10/3)

A.2.2 Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sind bei einem Tetraeder mit den Ecken A, B, C, D die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.
(6/9/3)

A.2.3 Der von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzte Körper wird von 4 Ebenen, von denen jede zu genau einer Seitenfläche des Tetraeders parallel ist, derart geschnitten, daß die Schnittfiguren Flächen regelmäßiger (gleichseitiger) Dreiecke und die verbleibenden Seitenflächen von regelmäßigen Sechsecken berandet sind. Man berechne die Oberfläche des entstandenen Polyeders und das Volumen des von ihm begrenzten Körpers.
(2/11/2)

A.2.4 Die Kantenlänge eines regelmäßigen Tetraeders sei a. Durch den Mittelpunkt einer Kante ist eine Ebene ε so gelegt, daß sie diese Kante nicht enthält und parallel zu zwei Gegenkanten verläuft.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur der Ebene ε mit dem Tetraeder!
(4/10/4)

A.2.5 Die Fläche des Quadrates $ABCD$ sei Seitenfläche eines Würfels der Kantenlänge a, M der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche.
Wie groß ist der Abstand der Geraden g_{BC} und g_{AM} voneinander?
(6/11.12/3)

A.2.6 Auf jede Seitenfläche eines Würfels werde eine gerade Pyramide aufgesetzt, deren Grundfläche Seitenfläche des Würfels ist und deren Mantelflächen mit der Grundfläche Winkel der Größe 45° bilden.

a) Wieviel Seitenflächen besitzt der aus dem Würfelkörper und den Pyramidenkörpern zusammengesetzte Körper, und welche Form haben sie?
b) Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Länge a der Würfelkante an!

(4/9/3)

A.2.7 Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen geradlinig miteinander, so erhält man die Kanten und Diagonalen eines dem Würfel einbeschriebenen regelmäßigen Oktaeders.
Verfährt man in entsprechender Weise bei dem Oktaeder, so erhält man die Kanten und Diagonalen eines Würfels. Man berechne das Verhältnis

a) der Volumina von Würfel und einbeschriebenem Oktaeder,
b) der Volumina von Oktaeder und einbeschriebenem Würfel,
c) der Flächeninhalte von Würfel und einbeschriebenem Oktaeder,
d) der Flächeninhalte von Oktaeder und einbeschriebenem Würfel.

(6/10/2)

A.2.8 Ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' werde mit genau acht Ebenen in verschiedener Weise zum Schnitt gebracht, und zwar so, daß

a) jede der acht Ebenen die Mittelpunkte dreier von derselben Ecke ausgehender Würfelkanten enthält, so daß die angedeutete Figur (Bild A.2.8a) entsteht,

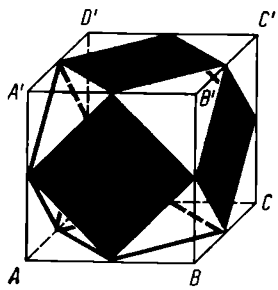


Bild A.2.8a

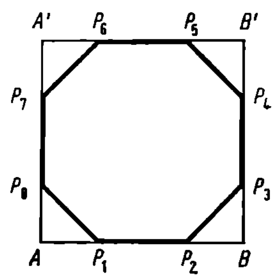


Bild A.2.8b

b) durch Abschneiden aus jeder Seitenfläche des Würfels eine regelmäßige Achtecksfläche entsteht (Bild A.2.8b).

Man berechne die Volumina der entsprechenden Restkörper.
(4/11.12/2)

A.2.9 Das Rechteck $ABCD$ liege in der Ebene ε. P sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene ε durch A.
Es ist zu beweisen, daß die Punkte A, B, D auf der Kugel mit dem Durchmesser PC liegen.
(5/9/2)

A.2.10 A, B, C, D, E, F, G, H seien die Ecken eines Quaders, wobei $AB \parallel DC \parallel EF \parallel HG$, $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$ gilt, und AD und AE Kanten der Länge a und AB Kante der Länge $a\sqrt{3}$ sind. S sei der Schnittpunkt der Diagonalen der Seitenfläche mit den Ecken A, B, C, D.

a) Es ist der Radius r der Kugel, die durch die Punkte A, D, E und S geht, in Abhängigkeit von a zu berechnen.
b) Es ist zu beweisen, daß die Ebene durch die Punkte S, F und G diese Kugel berührt.

(4/12/1)

A.2.11 Aus einem Kugelkörper vom Radius r ist ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegelkörper der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt. Man berechne die Höhe h des Kegels, wenn

a) der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhalts der Kugel ist und
b) das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens des Kugelkörpers ist.

(5/11.12/2)

A.2.12 Es sei M der Mittelpunkt der Kugel $\varkappa_1$, und P sei ein Punkt außerhalb $\varkappa_1$. Ferner sei $\varkappa_2$ die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius $|MP|$, und I sei der Flächeninhalt des innerhalb $\varkappa_1$ liegenden Teiles von $\varkappa_2$.
Beweisen Sie, daß I von der Lage des Punktes P unabhängig ist!
(6/11.12/2)

A.2.13 A, B, C, D seien die Ecken eines Tetraeders. Auf den Kanten DA, DB bzw. DC seien Punkte M, N bzw. P so gewählt, daß die Vierecke $ABNM$ sowie $ACPM$ Sehnenvierecke sind.
Beweisen Sie:

a) das Viereck $BCPN$ ist Sehnenviereck und
b) die Punkte A, B, C, M, N, P liegen auf derselben Kugel.

(2/11.12/4)

A.2.14 Man beweise folgenden Satz:
Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche φ des Raumes mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist φ eine Kugel.
(5/11.12/4)

A.2.15 Drei paarweise voneinander verschiedene Kreise berühren einander in drei paarweise voneinander verschiedenen Punkten.
Man zeige, daß die drei Kreise entweder in derselben Ebene oder auf derselben Kugel liegen.
(4/11.12/3)

A.2.16 Man berechne das Verhältnis des Oberflächeninhalts eines Kegelkörpers, dessen Achsenschnitt die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks ist, zum Oberflächeninhalt eines Zylinderkörpers mit quadratischem Achsenschnitt, wenn die Rauminhalte beider Körper gleich sind.
(5/10/1)

A.2.17 In einem Kreiskegelkörper mit der Spitze S, dessen Achsenschnitt die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt M die Höhe SM' des Kegels im Verhältnis $|SM| : |MM'| = 1 : 2$ teilt. Die Länge eines Durchmessers der Grundfläche des Kegels sei a.
Wie groß ist der Radius r der Kugel?
(3/10/2)

A.2.18 $A, B, C, D, A', B', C', D'$ seien die Ecken eines Würfels der Kantenlänge a, wobei die von dem Quadrat $ABCD$ begrenzte Seitenfläche auf der Kante AA' senkrecht steht.
Man ermittle den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY der Länge a, für die X auf AA' und Y in der von $ABCD$ begrenzten Seitenfläche liegen.
(3/11.12/3)

A.2.19 $A, B, C, D, A', B', C', D'$ seien die Ecken eines Würfels, wobei die von den Quadraten $ABCD$ und $A'B'C'D'$ begrenzten Seitenflächen parallel zueinander sind und $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$ gilt. Ein Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit das Quadrat $ABCD$ von A aus über B, C und D nach A, und ein Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit das Quadrat A', B', C', D' von A' aus über D', C' und B' nach A'. X und Y beginnen ihre Bewegungen zum gleichen Zeitpunkt in A bzw. in A'.
Ermitteln Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY bei gleichzeitig betrachteten X und Y!
(2/12/3)

A.2.20 In eine quaderförmige Schachtel mit den inneren Abmessungen 10 cm, 10 cm und 1 cm sind gleich große Kugeln vom Radius 0,5 cm einzulegen. Jemand behauptet, man könne mehr als 105 dieser Kugeln in der Schachtel unterbringen.
Stellen Sie fest, ob diese Behauptung richtig ist!
(6/11.12/1)

A.2.21 Man beweise folgenden Satz:
Liegen n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqq 2$, so im Raum, daß jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.
(6/11.12/4)

3. GEOMETRISCHE KONSTRUKTIONEN IN DER EBENE

A.3.1 Gegeben sei eine Gerade g und zwei auf derselben Seite von g gelegene Punkte A und B, $A \neq B$, derart, daß g und g_{AB} weder parallel noch senkrecht zueinander sind. AC sei das Lot von A auf g, BD sei das Lot von B auf g.
Konstruieren Sie auf g alle Punkte P, für die $\sphericalangle APC \cong \sphericalangle BPD$ gilt!
(2/9/2)

A.3.2 Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c (insbesondere sei $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 1$ cm).
Konstruieren Sie eine Strecke der Länge

$$d = \frac{a^2 + b^2}{3c}\,!$$

(4/10/3)

A.3.3 Gegeben sei ein Winkel mit den Schenkeln q und r, wobei q und r nicht auf derselben Geraden liegen. P sei innerer Punkt einer Strecke QR, die mit q nur den Punkt Q, mit r nur den Punkt R gemeinsam hat. Es soll eine Gerade durch P konstruiert werden, für deren Schnittpunkte A und B mit den Schenkeln des Winkels $|PA| = |PB|$ gilt.
(1/9/3)

A.3.4 Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $h_a + h_b = 10$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$! Dabei ist h_a die Länge der Höhe durch A, h_b die Länge der Höhe durch B, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$.
(5/10/4)

A.3.5 Man konstruiere ein Dreieck ABC aus $|AC| = b$ und $|AB| = c$ und $|\sphericalangle BMA| = \omega$ ($< 180°$), wenn M der Mittelpunkt der Strecke BC ist (bei der Olympiade genügte es, den Fall $\omega < 90°$ zu behandeln).
(1/12/1)

A.3.6 Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, wenn gegeben sind $a = |BC|$, $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, s_c = Länge der Seitenhalbierenden durch C.
(5/9/3)

A.3.7
a) Es soll ein Dreieck ABC aus $|BC| = 5{,}6$ cm, $|\sphericalangle ACB| = 60°$ und dem Radius des Umkreises $r = 3{,}5$ cm konstruiert werden. Es genügt, ein derartiges Dreieck zu konstruieren.
b) Der Abstand des Umkreismittelpunktes M von der Geraden g_{BC} ist zu berechnen.
c) Es ist zu untersuchen, für welche Werte von r es kein Dreieck ABC gibt, das r als Umkreisradius hat und bei dem $|BC| = 5{,}6$ cm und $|\sphericalangle ACB| = 60°$ ist.
(3/9/1)

A.3.8 Konstruieren Sie ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC aus den Längen s_a und s_c der Seitenhalbierenden von BC bzw. AB!
(3/10/1)

A.3.9
a) Es ist ein gleichseitiges Dreieck aus $\frac{a}{2} + h = 7{,}5$ cm zu konstruieren, wobei a die Seitenlänge und h die Höhenlänge des Dreiecks bezeichnen.
b) Berechnen Sie a!
(1/10/3)

A.3.10 Zu einem spitzwinkligen Dreieck ABC sollen drei Punkte D, E, F mit folgenden Eigenschaften konstruiert werden:
a) E ist innerer Punkt der Strecke BC.
b) F ist innerer Punkt der Strecke AC.
c) D ist innerer Punkt der Strecke AB.
d) $DF \parallel BC$.
e) $\triangle DEF$ ist gleichseitig.
(3/9/2)

A.3.11 Es ist ein Quadrat zu konstruieren, dessen Ecken auf dem Rande ein und derselben gegebenen Halbkreisfläche liegen.
(4/9/3)

A.3.12 Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein Quadrat mit der Seitenlänge a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des Quadrats ist.
(2/10/4)

A.3.13 Zu dem gegebenen Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = |BC|$ und $b = |CA|$ sowie $\gamma = |\sphericalangle ACB|$ ist ein Quadrat des Flächeninhalts $2ab\,|\cos\gamma|$ zu konstruieren.
(6/10/4)

A.3.14 Es sollen alle Trapeze $ABCD$ konstruiert werden, deren Seitenlängen die folgenden Werte haben:

$$|AB| = 6\text{ cm}, \quad |BC| = 4\text{ cm}, \quad |CD| = 4{,}5\text{ cm}, \quad |DA| = 3\text{ cm}$$

und bei denen $AB \parallel CD$ ist.
(3/9/2)

A.3.15 Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α! Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle DAB$.
(5/10/3)

A.3.16 Innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt M liege der von M verschiedene Punkt P.
Konstruieren Sie von allen Sehnen durch P diejenigen kleinster Länge!
(6/9/2)

A.3.17 Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt A außerhalb des Kreises. Konstruieren Sie auf MA einen Punkt X so, daß $|XT| = |XA|$ gilt, wenn T Berührungspunkt einer Tangente des Kreises ist, die durch X geht!
(VO 61/10/3)

A.3.18 Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ ist.

a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt!
b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise mit dieser Eigenschaft?

(2/10/1)

A.3.19 Gegeben sind drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, daß sich diese Kreise paarweise so berühren, daß jeder außerhalb der beiden anderen liegt.
(4/9/2)

A.3.20 Zu einem (nicht zu einem Punkt ausgearteten) Kreis k und einer Geraden g sollen alle (nicht ausgearteten) Kreise k' konstruiert werden, die k berühren und g in einem gegebenen (auf g gelegenen) Punkt A berühren.
(6/9/3)

A.3.21 Für die Größe R des Gesamtwiderstandes von zwei parallel geschalteten Widerständen der Größen R_1 und R_2 gilt die Beziehung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

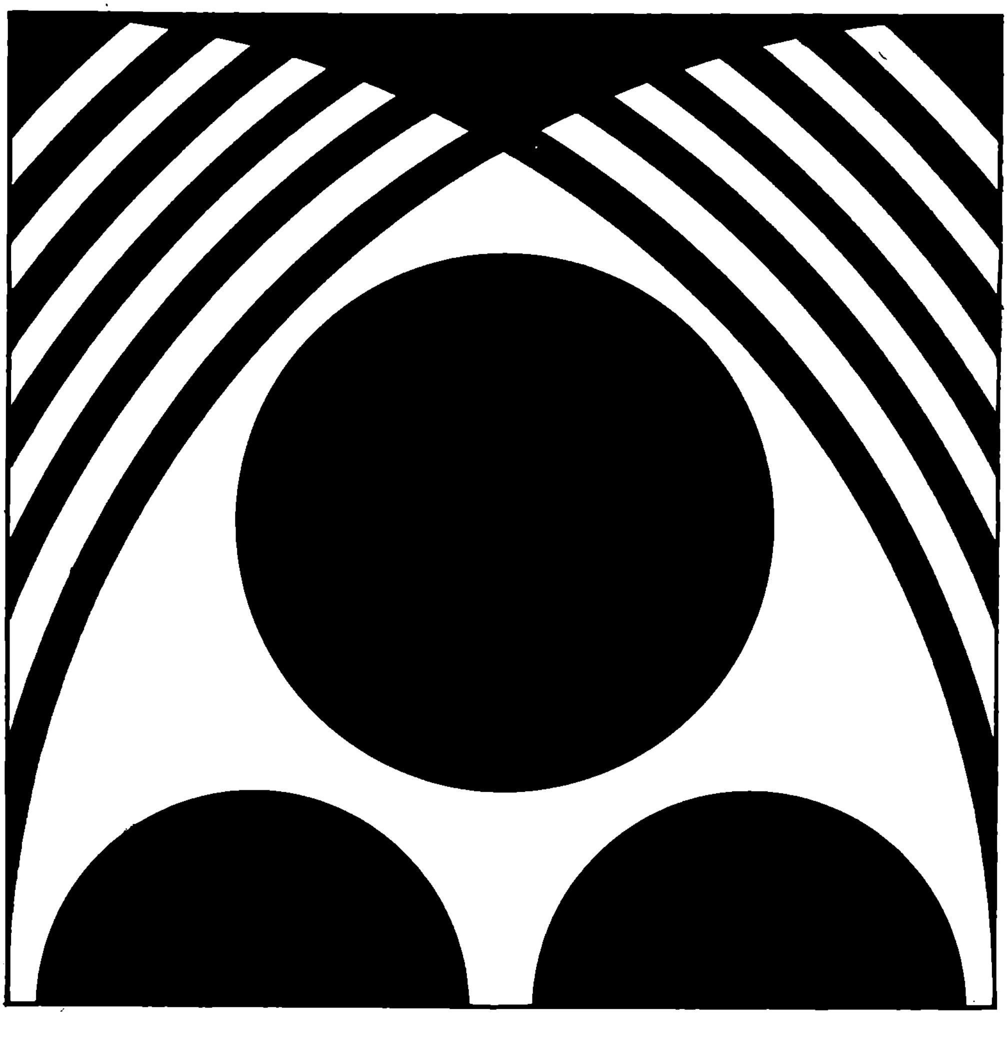
Bei Festlegung geeigneter Maßeinheiten für Widerstände und Streckenlängen kann die Maßzahl von R durch folgende Konstruktion gefunden werden: Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand größer als 0) die Senkrechten g_{AB} und g_{CD} errichtet, wobei B auf derselben Seite von g liegt wie D und die Maßzahlen von $|AB|$ und R_1 sowie die von $|CD|$ und R_2 übereinstimmen. Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E. Ist F der Fußpunkt des Lotes von E auf g, so liefert die Maßzahl von $|EF|$ die Maßzahl von R.

a) Beweisen Sie die Richtigkeit dieses Satzes!
b) Wie kann man graphisch die Größe des Gesamtwiderstandes ermitteln, wenn drei Widerstände, und zwar je einer von $8\,\Omega$, $10\,\Omega$ und $12\,\Omega$ parallel geschaltet werden?

(2/10/3)

A.3.22 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie AC über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E!
Konstruieren Sie über CE das gleichseitige Dreieck CDE, wobei D auf derselben Seite von g_{AE} liegt wie B!
Verbinden Sie A mit D und B mit E, und halbieren Sie jede der beiden Strecken! Die Mittelpunkte seien M und N. Beweisen Sie, daß das Dreieck CMN gleichseitig ist!
(2/10/2)

LÖSUNGEN



1. GEOMETRIE IN DER EBENE

L.1.1 Die Dreiecke ABC und BDE (Bild L.1.1) sind nach dem 1. Ähnlichkeitssatz wegen

$$|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle ABC|$$

und

$$|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle BCA| = 90°$$

ähnlich. Daher gilt

$$|BE| : |BC| = |BD| : |AB|,$$

und es ist

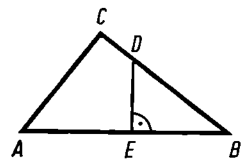


Bild L.1.1

$$|BE| = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

Dann liefert der Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle BDE$,

$$|DE| = \sqrt{|BD|^2 - |BE|^2} = \sqrt{225 - 144} = 9.$$

$\triangle BDE$ hat demnach den Umfang 36.

L.1.2 Die Eckpunkte des Ausgangsdreiecks und des Sechsecks seien so, wie in Bild L.1.2 angegeben, bezeichnet. Es gilt nach dem Kongruenzsatz (sws)

$$\triangle CC_1C_2 \cong \triangle ABC,$$

da beide Dreiecke rechtwinklig sind und $|CC_1| = |CB| = a$ sowie $|CC_2| = |CA| = b$ ist. Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und CC_1C_2 ist

$$I_1 = ab. \qquad (1)$$

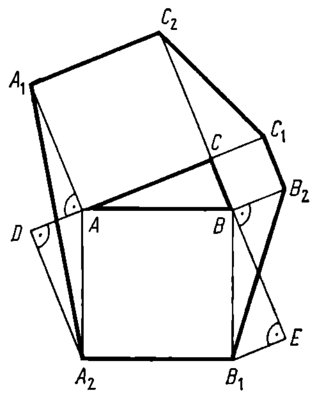


Bild L.1.2

Das Quadrat AA_2B_1B hat aufgrund des Satzes des PYTHAGORAS den Flächeninhalt $a^2 + b^2$. Die Summe der Flächeninhalte der drei Quadrate der Figur (Bild L.1.2) ist

$$I_2 = 2\,(a^2 + b^2). \tag{2}$$

Es bleiben noch die Flächeninhalte der Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 zu berechnen. Ist D der Fußpunkt des Lotes von A_2 auf g_{AC}, so gilt

$$\begin{array}{r}
|\sphericalangle DAA_2| + |\sphericalangle A_2AB| + |\sphericalangle BAC| = 180^\circ \\
|\sphericalangle A_2AB| = 90^\circ \\ \hline
|\sphericalangle DAA_2| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CBA|,
\end{array}$$

so daß die Dreiecke ABC und A_2AD wegen $A_2A \cong AB$ kongruent sind; insbesondere ist daher $|DA| = a$.
Nun gilt $g_{DA} \perp g_{AA_1}$, demnach $DA_2 \parallel AA_1$, und darum hat in $\triangle AA_1A_2$ die zu A_2 gehörige Höhe die Länge a. Weil $|AA_1| = b$ ist, hat $\triangle AA_1A_2$ den Flächeninhalt

$$I_3 = \frac{1}{2}ab. \tag{3}$$

Für $\triangle BB_1B_2$ erhält man analog, indem man $\triangle BB_1E \cong \triangle ABC$ und damit $|EB| = b$ beweist – E sei Fußpunkt des Lotes von B_1 auf g_{BC} –, den Flächeninhalt

$$I_4 = \frac{1}{2}ab. \tag{4}$$

Aus (1), (2), (3) und (4) ergibt sich

$$I = 2(a^2 + ab + b^2)$$

als Flächeninhalt des Sechsecks.

L.1.3 Aus den gegebenen Entfernungen erkennt man, daß

$$|EA| + |AF| + |FD| + |DC| = |EC| \tag{1}$$

ist. Daraus folgt, daß E, A, F, D und C in dieser Reihenfolge auf EC liegen; denn wegen der Dreiecksungleichung muß gelten:

$$\begin{aligned}
|EC| &\leqq |EA| + |AC| \\
|AC| &\leqq |AF| + |FC| \\
|FC| &\leqq |FD| + |DC|,
\end{aligned}$$

und die Gleichheitszeichen stehen genau dann, wenn A auf EC, F auf AC und D auf FC liegen.
Würde nämlich einer der Punkte nicht auf der angegebenen Strecke liegen, so würde in der entsprechenden Abschätzung das Kleinerzeichen gelten und dann könnte nicht die Relation (1) bestehen.
Wegen

$$|AB|^2 + |BF|^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = |AF|^2$$

sind nach der Umkehrung des Lehrsatzes des PYTHAGORAS A, B und F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse AF (Bild L.1.3). Das Doppelte des Flächeninhaltes dieses Dreiecks beträgt, wenn Q der Fußpunkt des Lotes von B auf AF ist:

$$2I = |AF| \cdot |BQ| = |AB| \cdot |BF|.$$

Also ist

$$|BQ| = \frac{|AB| \cdot |BF|}{|AF|} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24.$$

Nach dem Kathetensatz, angewandt auf $\triangle ABF$ ergibt sich

$$|QF| = \frac{|BF|^2}{|AF|} = \frac{40^2}{50} = 32.$$

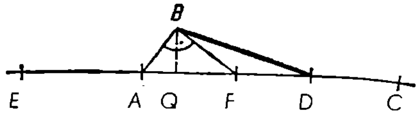


Bild L.1.3

Mithin ist

$$|QD| = |QF| + |FD| = 32 + 38 = 70.$$

Schließlich erhält man nach Anwendung des Lehrsatzes des PYTHAGORAS auf das Dreieck BQD

$$|BD|^2 = |BQ|^2 + |QD|^2 = 24^2 + 70^2 = 5476 = 74^2$$

und damit

$$|BD| = 74.$$

Die Entfernung von B nach D beträgt also 74 km.

L.1.4 Fällt man vom Punkt C (Bild L.1.4) das Lot auf g_{AP} und bezeichnet den Fußpunkt des Lotes mit D, so ist wegen $|\sphericalangle CPA| = 60°$ sicher $D \neq P$ und $|\sphericalangle DCP| = 30°$ [nach Satz III.8 (5')].
Spiegelt man den Punkt P an der Geraden g_{DC} und bezeichnet das Spiegelbild von P mit P', so erhält man (nach I.17 und Satz III.27'') ein gleichseitiges Dreieck $P'PC$ mit der Höhe CD. Also ist $|DP| = \frac{|PC|}{2}$.
Da nach Voraussetzung $|PC| = 2|BP|$ ist, folgt $|DP| = |BP|$. Somit ist das Dreieck DBP nach Definition III.15 gleichschenklig. Ferner gilt, da $\sphericalangle DPB$ Nebenwinkel von $\sphericalangle CPA$ ist, $|\sphericalangle DPB| = 120°$, also $|\sphericalangle BDP| = |\sphericalangle PBD| = 30°$.
Ferner ist (nach I.18)

$$|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle CBA| - |\sphericalangle PBD| = 45° - 30° = 15°.$$

Außerdem gilt

$$|\sphericalangle BAP| = 180° - (|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle DPB|) = 180° - (45° + 120°) = 15°.$$

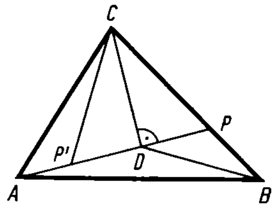


Bild L.1.4

Daher ist $\triangle ABD$ (nach Satz III.27') gleichschenklig, und zwar so, daß

$$|AD| = |DB|$$

gilt. Da auch $\triangle CDB$ wegen $|CD| = |DB|$ nach Definition gleichschenklig ist, gilt $|AD| = |CD|$, und somit ist das Dreieck ADC gleichschenklig-rechtwinklig.
Folglich ist $|\sphericalangle ACD| = 45°$ und daher nach I.18

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCP| + |\sphericalangle ACD| = 30° + 45° = 75°.$$

L.1.5 Sind A, B, C die Ecken eines Dreiecks und werden die üblichen Bezeichnungen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und für die Längen der Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c verwendet, so ist zu zeigen, daß

$$s_a + s_b + s_c < a + b + c \tag{1}$$

gilt. Diese Ungleichung (1) folgt aus den drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} 2s_a &< b + c \\ 2s_b &< c + a \\ 2s_c &< a + b \end{aligned} \tag{2}$$

durch Addition und Division durch 2. Wegen der Willkür in der Bezeichnungswahl genügt es zum Beweis der drei Relationen (2), die erste von ihnen

$$2s_a < b + c \tag{2.1}$$

zu beweisen.
Ist D der Schnittpunkt der Parallelen zu g_{AB} durch C mit der Parallelen zu g_{AC} durch B (D existiert wegen $g_{AB} \nparallel g_{AC}$), so ist (nach Def. III.22) $ABDC$ ein Parallelogramm. Daher ist $|BD| = |CA| = b$ und der Schnittpunkt S seiner Diagonalen ist sowohl Mittelpunkt von AD als auch von BC (nach Satz III.37.3). Folglich ist AS Seitenhalbierende von $\triangle ABC$ und es gilt

$$|AD| = 2|AS| = 2s_a.$$

Somit besteht nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf $\triangle ABD$, die Ungleichung (2.1)

L.1.6 Wäre der Satz falsch, so gäbe es ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a, b und der Hypotenusenlänge c, für das

$$c < \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b), \quad \text{also} \quad 2c^2 < (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

gilt.
Da nach dem Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ ist, müßte also

$$a^2 + b^2 < 2ab,$$

d.h.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 < 0$$

sein, was aber nicht wahr ist.
Daher ist der Satz richtig.

L.1.7 a) Ist I der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt

$$ah_a = 2I \quad \text{und} \quad bh_b = 2I.$$

Damit erhalten wir

$$(a + h_a) - (b + h_b) = \left(a + \frac{2I}{a}\right) - \left(b + \frac{2I}{b}\right)$$
$$= (a - b)\left(1 - \frac{2I}{ab}\right). \qquad (1)$$

Wegen $a \geqq b$ (> 0) und $ab \geqq ab \sin\gamma = 2I$ (γ ist die Größe eines Winkels, der von Dreieckseiten mit den Längen a und b bestimmt wird) folgt hieraus die Aussage

$$(a + h_a) - (b + h_b) \geqq 0,$$

die mit der behaupteten gleichbedeutend ist.

b) Aus (1) folgt, daß $(a + h_a) - (b + h_b) = 0$ genau dann gilt, wenn $ab = 2I$ oder wenn $a = b$ ist, d.h., wenn das Dreieck rechtwinklig ist und a und b die Kathetenlängen sind, oder wenn das Dreieck gleichschenklig ist und a und b die Längen von Schenkeln sind.

L.1.8 Im Fall $M = A$ bzw. $M = B$ reduziert sich die zu beweisende Relation auf die Identität

$$|BA|^2 \cdot |AC|^2 = |CA|^2 \cdot |AB|^2 \quad \text{bzw.} \quad |AB|^2 \cdot |BC|^2 = |CB|^2 \cdot |AB|^2.$$

Im Fall $M \neq A$, $M \neq B$ seien P und Q die Fußpunkte der Lote von M auf g_{AC} bzw. g_{BC} (Bild L.1.8).
M, P, Q und C sind die Ecken eines Rechtecks, und aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich die Relation

$$|MP|^2 + |MQ|^2 = |MC|^2. \qquad (1)$$

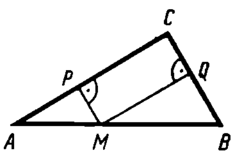


Bild L.1.8

Aus dem 2. Strahlensatz erhalten wir die Beziehung

$$|AM| : |AB| = |MP| : |BC|$$

und damit

$$|AM| \cdot |BC| = |MP| \cdot |AB|. \qquad (2)$$

Analog erhält man

$$|BM| \cdot |AC| = |MQ| \cdot |AB|. \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich durch Quadrieren und Addieren

$$|AM|^2 \cdot |BC|^2 + |BM|^2 \cdot |AC|^2 = (|MP|^2 + |MQ|^2) \cdot |AB|^2,$$

d.h. wegen (1)

$$|AM|^2 \cdot |BC|^2 + |BM|^2 \cdot |AC|^2 = |CM|^2 \cdot |AB|^2.$$

L.1.9 *Behauptung:* Jedes solche Dreieck ist zu den gegebenen ähnlich.

Beweis:

a) Es genügt zu zeigen, daß ein Dreieck mit den Seitenlängen $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$ zu einem kongruenten eines der gegebenen Dreiecke ähnlich ist. In dem Dreieck ABC sei $|BC| = a_1$, $|CA| = b_1$, $|AB| = c_1$. AD sei die B enthaltende Strecke der Länge $|AD| = c_1 + c_2$, F der Schnittpunkt von g_{AC} mit der Parallelen zu g_{BC} durch D, E der Schnittpunkt von g_{DF} mit der Parallelen zu g_{AC} durch B (Bild L.1.9).
Wegen $g_{DF} \parallel g_{BC}$ liegt F auf derselben Seite von g_{BC} wie D. Da wegen $B \in AD$ die Punkte D und A auf verschiedenen Seiten von g_{BC} liegen, liegen auch F und A auf verschiedenen Seiten von g_{BC}, so daß C auf AF liegt. Entsprechend folgt durch Betrachtung von A, F und D bezüglich ihrer Lage zu g_{BE}, daß E auf DF liegt. Infolgedessen liegen E und F auf derselben Seite von g_{AB} wie C. Daher sind $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle EBD$ Stufenwinkel an den Parallelen g_{AC} und g_{BE}, $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BDE$ Stufenwinkel an g_{BC} und g_{DE}, so daß

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle EBD \quad \text{und} \quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BDE$$

ist, woraus

$$\triangle ABC \sim \triangle BDE$$

und wegen $|BD| = c_2$ und der Ähnlichkeit der gegebenen Dreiecke

$$|BE| = b_2 \quad \text{und} \quad |DE| = a_2$$

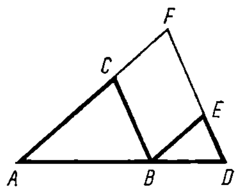


Bild L.1.9

folgt. Da $BEFC$ wegen $BE \parallel CF$ und $BC \parallel EF$ (nach Def. III.22) Parallelogramm ist, gilt

$$|CF| = b_2 \quad \text{und} \quad |EF| = a_1.$$

Somit hat $\triangle ADF$ die Seitenlängen

$$|DF| = a_1 + a_2, \quad |FA| = b_1 + b_2, \quad |AD| = c_1 + c_2$$

und ist wegen

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle FAD \quad \text{und} \quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BDE$$

zu $\triangle ABC$ ähnlich.

b) Aus der Ähnlichkeit der gegebenen Dreiecke folgt

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1$$

und hieraus

$$\frac{a_2}{a_1} + 1 = \frac{b_2}{b_1} + 1 = \frac{c_2}{c_1} + 1$$

also

$$\frac{a_2 + a_1}{a_1} = \frac{b_2 + b_1}{b_1} = \frac{c_2 + c_1}{c_1},$$

woraus sich die behauptete Ähnlichkeit ergibt.

L.1.10 Wir zeigen, daß die Meinung und Behauptung von Dagmar richtig und daher die zu ihnen in Widerspruch stehenden Meinungen der drei anderen falsch sind.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß im gegebenen Dreieck (Bild L.1.10)

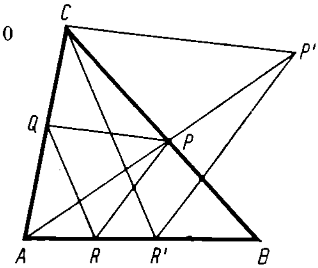
$$|\sphericalangle BCA| \leqq |\sphericalangle ABC| \leqq |\sphericalangle CAB|,$$

insbesondere also

$$|\sphericalangle BCA| \leqq 60° \quad \text{und} \quad |\sphericalangle CAB| \geqq 60°$$

gilt.

Bild L.1.10



Unter diesen Bedingungen sei R' ein beliebiger (innerer) Punkt von AB. P' sei derjenige Punkt, für den $\triangle P'CR'$ gleichseitig ist und der auf der anderen Seite von $g_{CR'}$ wie A liegt. Dann liegt P' auf der anderen Seite von g_{BC} wie A, weil $|\sphericalangle BCA| \leqq 60°$ und $|\sphericalangle P'CA| = |\sphericalangle P'CR'| + |\sphericalangle R'CA| > 60°$ gilt. Außerdem ist $|\sphericalangle P'CA| \leqq 120°$ und $|\sphericalangle P'R'A| \leqq 60° + |\sphericalangle CR'A| < 180°$, so daß $AR'P'C$ ein konvexes Viereck ist und insbesondere R' und C auf verschiedenen Seiten von $g_{AP'}$ liegen. Da R' Punkt von AB ist, liegt B auf derselben Seite von $g_{AP'}$ wie R', so daß die Strecken BC und AP' einen Schnittpunkt haben, der mit P bezeichnet werde. Ist nun Q derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch C, für den

$$|AQ| : |AC| = |AP| : |AP'| \tag{1}$$

gilt, und R derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch B, für den

$$|AR| : |AB| = |AP| : |AP'| \tag{2}$$

gilt, so ist, da wegen $P \in AP'$ sicher $|AP| : |AP'| < 1$ ausfällt, Q innerer Punkt von AC und R innerer Punkt von AB.

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt aufgrund von (1)

$$g_{PQ} \parallel g_{P'C}$$

und aufgrund von (2)

$$g_{PR} \parallel g_{P'R'}.$$

Daher folgt aus dem 2. Strahlensatz, daß die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} |PQ| : |P'C| &= |AP| : |AP'| \\ |PR| : |P'R'| &= |AP| : |AP'| \\ |\sphericalangle QPR| &= |\sphericalangle CP'R'| \end{aligned}$$

bestehen. Da $\triangle P'CR'$ gleichseitig ist, folgt somit

$$|PQ| = |PR| \quad \text{und} \quad |\sphericalangle QPR| = 60°,$$

so daß $\triangle PQR$ gleichseitig ist.

Hieraus ergibt sich weiter, daß $QR \parallel CR'$ ist, so daß keine zwei der gleichseitigen Dreiecke, die zu verschiedenen Lagen von R' auf AB gehören, zusammenfallen können. Es gibt also zu jedem Dreieck ABC unendlich viele verschiedene gleichseitige Dreiecke, die der im Zirkel gestellten Aufgabe entsprechen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß es bei mindestens einem Dreieck ABC unter diesen gleichseitigen Dreiecken mindestens zwei zueinander inkongruente gibt. Dazu wählen wir $\triangle ABC$ gleichseitig. Sind P_1, Q_1, R_1 die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB, so ist $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig und es gilt

$$|P_1Q_1| = \frac{1}{2}|AB|.$$

Sind P_2, Q_2, R_2 die Mittelpunkte von P_1C, Q_1A bzw. R_1B, so ist auch $\triangle P_2Q_2R_2$ gleichseitig und es gilt nach dem Kosinussatz

$$\begin{aligned}|P_2Q_2| &= \sqrt{|BP_2|^2 + |BQ_2|^2 - 2|BP_2|\cdot|BQ_2|\cdot\cos 60^\circ}\\ &= |AB|\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\\ &= |AB|\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} > |P_1Q_1|,\end{aligned}$$

so daß $\triangle P_1Q_1R_1$ und $\triangle P_2Q_2R_2$ infolge unterschiedlicher Seitenlängen inkongruente gleichseitige Dreiecke sind.

L.1.11 Bezeichnet man mit U_1 den Umfang des Dreiecks ADE, mit U_2 den des Dreiecks ABC, mit I_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ADE und mit I_2 den des Trapezes $DBCE$ (Bild L.1.11), so gilt nach Voraussetzung

$$U_1 : U_2 = I_1 : I_2. \qquad (1)$$

Nennt man

$$\begin{aligned}|AB| &= c, & |AD| &= c_1,\\ |BC| &= a, & |DE| &= a_1,\\ |CA| &= b, & |EA| &= b_1\end{aligned}$$

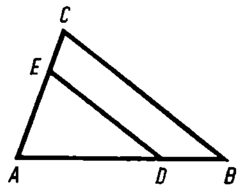


Bild L.1.11

und $|\sphericalangle DAE| = \alpha$, so ist (1) wegen $I_1 = \frac{c_1\cdot b_1\cdot\sin\alpha}{2}$ gleichbedeutend mit

$$(a_1 + b_1 + c_1) : (a + b + c) = b_1c_1\sin\alpha : (b\cdot c\sin\alpha - b_1c_1\sin\alpha). \qquad (2)$$

Da nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ist, gilt

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1.$$

Folglich ist (2) äquivalent mit

$$c_1 : c = b_1c_1 : (bc - b_1c_1)$$

und weiter mit

$$\frac{c}{c_1} = \frac{b_1}{b - b_1}. \qquad (3)$$

Nach dem 1. Strahlensatz gilt:

$$\frac{b_1}{b - b_1} = \frac{c_1}{c - c_1}. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$\frac{c}{c_1} = \frac{c_1}{c - c_1},$$

also teilt D die Seite AB stetig (goldener Schnitt).

L.1.12 Wir betrachten zunächst eine Strecke MN, deren Endpunkt M auf dem Strahl aus A durch B und deren Endpunkt N auf dem Strahl aus A durch C liegt und für die der Inhalt des Dreiecks AMN halb so groß ist, wie der Inhalt des Dreiecks ABC. Die Strecke MN darf auch teilweise außerhalb des gegebenen Dreiecks verlaufen. Setzt man $|AM| = x$ und $|AN| = y$, so ist nach einer bekannten Inhaltsformel (Satz III.18) der Flächeninhalt des Dreiecks AMN genau dann halb so groß wie der des Dreiecks ABC, wenn

$$\frac{1}{2} xy \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} bc \sin\alpha,$$

also

$$2xy = bc$$

gilt.
Bedeutet $d_a = |MN|$, so ergibt sich nach dem Kosinussatz, angewandt auf $\triangle AMN$,

$$\begin{aligned} d_a^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos\alpha \\ &= (x - y)^2 + 2xy\,(1 - \cos\alpha) \\ &= (x - y)^2 + bc\,(1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck ABC,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \\ &= (b - c)^2 + 2bc\,(1 - \cos\alpha), \end{aligned}$$

also

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} d_a^2 &= (x - y)^2 + \frac{1}{2}[a^2 - (b - c)^2] \\ &= (x - y)^2 + 2\frac{a - (b - c)}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \\ &= (x - y)^2 + 2\,(s - b)\,(s - c) \end{aligned}$$

mit $2s = a + b + c$. Unter Verwendung der Inhaltsformel (Satz III.18)

$$I = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)},$$

I = Flächeninhalt des Dreiecks ABC,
ergibt sich somit

$$d_a^2 = (x - y)^2 + \frac{2I^2}{s\,(s - a)}. \tag{2}$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich aus (2) die Formeln

$$d_b^2 = (x' - y')^2 + \frac{2I^2}{s(s-b)}, \quad d_c^2 = (x'' - y'')^2 + \frac{2I^2}{s(s-c)}, \tag{3}$$

wenn x', y' bzw. x'', y'' die entsprechenden Abschnitte bei einer Strecke bedeuten, deren Endpunkte auf den von B bzw. C ausgehenden Strahlen liegen, und d_b bzw. d_c die Längen dieser Strecken sind.
Wir nehmen jetzt o.B.d.A. an, daß $a \leqq b \leqq c$ ist.
Dann gilt:

$$\frac{2I^2}{s(s-a)} \leqq \frac{2I^2}{s(s-b)} \leqq \frac{2I^2}{s(s-c)},$$

und das erste bzw. zweite Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ bzw. $b = c$ ist. Hieraus und aus (2) und (3) ergibt sich, daß jede der Längen d_a, d_b, d_c nicht kleiner als

$$\frac{\sqrt{2}\,I}{\sqrt{s(s-a)}}$$

ist.
Um zu zeigen, daß

$$d = \frac{\sqrt{2}\,I}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{2(s-b)(s-c)}$$

das gesuchte Minimum ist, genügt es zu zeigen, daß die für $x = y$ entstehende Strecke MN, deren Länge $d_a = d$ ist, nicht in das Äußere des Dreiecks eintritt.
Im Fall $x = y$ ergibt sich aus (1)

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

Da $a \leqq b \leqq c$ vorausgesetzt ist, gilt wegen der Dreiecksungleichung $c < a + b \leqq 2b$ und daher

$$\sqrt{\frac{bc}{2}} < \sqrt{b^2} = b \leqq c,$$

so daß jeder der Punkte M und N auf einer der Dreiecksseiten liegt.
Ist $a < b$, so gibt es genau eine kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$.
Ist $a = b < c$, so gibt es genau zwei kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$ und $x' = y'$.
Ist $a = b = c$, so gibt es genau drei kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$, $x' = y'$ und $x'' = y''$.

L.1.13 Bezeichnet man mit r den Radius des Umkreises eines Dreiecks und mit a, b und c die Seitenlängen dieses Dreiecks, so gilt nach dem Sinussatz bzw. dem Kosinussatz

$$
\begin{aligned}
a &= 2r\sin\alpha\,, && (1)\\
b &= 2r\sin\beta\,, && (2)\\
c &= 2r\sin\gamma\,, && (3)\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,. && (4)
\end{aligned}
$$

Aus (4) folgt wegen (1), (2) und (3) die Behauptung **a)**

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\,\sin\gamma\,\cos\alpha\,. \tag{5}$$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ für alle reellen α gilt, folgt aus (5)

$$-\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma = 1\,. \tag{6}$$

Wegen der für alle reellen x und y bestehenden Beziehung

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

gilt

$$\sin\beta \cdot \sin\gamma = -\cos(\beta + \gamma) + \cos\beta \cdot \cos\gamma\,.$$

Da $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist, muß $\cos(\beta + \gamma) = -\cos\alpha$ sein, also gelten

$$\sin\beta \cdot \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma\,. \tag{7}$$

Wegen (7) folgt aus (6) die Behauptung **b)**

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma = 1\,.$$

L.1.14 Sind α und β die Größen von Innenwinkeln desselben Dreiecks, so gilt

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi, \quad 0 < \alpha + \beta < \pi\,.$$

Dann ist

$$\sin(\alpha + \beta) \neq 0, \quad \sin\alpha \neq 0, \quad \sin\beta \neq 0$$

und daher

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\sin\alpha\,\sin\beta} - 1}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}\,,$$

also

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cos\beta}\,. \tag{1}$$

Wegen $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ gilt $\cot\gamma = -\cot(\alpha + \beta)$, woraus durch Berücksichtigung von (1)

$$\cot\gamma = \frac{1 - \cot\alpha \cdot \cot\beta}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

folgt, was hier äquivalent mit

$$\cot\alpha \cdot \cot\gamma + \cot\beta \cdot \cot\gamma = 1 - \cot\alpha \cdot \cot\beta$$

und

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1$$

ist.

L.1.15 a) *Voraussetzung:* Das Dreieck ist rechtwinklig.
Behauptung: $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$.

Beweis: O.B.d.A. sei $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Aus $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ folgt dann

$$2\gamma = \pi - 2\beta.$$

Daher gilt

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \cos\pi + \cos 2\beta + \cos(\pi - 2\beta).$$

Da $\cos(\pi - x) = -\cos x$ für alle reellen x gilt, folgt

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \cos\pi + \cos 2\beta - \cos 2\beta = -1.$$

b) *Voraussetzung:* $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$. (1)
Behauptung: Das Dreieck ist rechtwinklig.

Beweis: Aus $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ und den für alle reellen x geltenden Beziehungen $\cos(2\pi - x) = \cos x$ sowie $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ folgt

$$\begin{aligned}\cos 2\gamma &= \cos[2\pi - 2(\alpha + \beta)]\\ &= \cos 2(\alpha + \beta)\\ &= 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1.\end{aligned}$$

Da

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \qquad (2)$$

für alle reellen x und y gilt, ist

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Daher ist (1) äquivalent mit

$$2\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + 2\cos^2(\alpha + \beta) = 0$$

also mit

$$\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = 0. \qquad (3)$$

Wegen (2) ist (3) gleichbedeutend mit

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot 2\cos\alpha \cdot \cos\beta = 0. \qquad (4)$$

(4) ist genau dann erfüllt, wenn mindestens einer der Faktoren $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ gleich Null ist.

Aus $\cos(\alpha + \beta) = 0$ und $0 < \alpha + \beta < \pi$ folgt $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, also $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Aus $\cos\alpha = 0$ und $0 < \alpha < \pi$ folgt $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Aus $\cos\beta = 0$ und $0 < \beta < \pi$ folgt $\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Da einer dieser drei Fälle vorliegen muß, ist das Dreieck rechtwinklig.

L.1.16 Aus dem Kosinussatz folgt:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2bc}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{2abc}(ab^2 + ac^2 - a^3),$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2ac}(c^2 + a^2 - b^2) = \frac{1}{2abc}(bc^2 + ba^2 - b^3),$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2ab}(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{1}{2abc}(ca^2 + cb^2 - c^3),$$

wenn a, b und c die entsprechenden Seitenlängen des Dreiecks sind.
Daher gilt:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\\
&= \frac{1}{2abc}(ab^2 + bc^2 + ca^2 + ac^2 + ba^2 + cb^2 - a^3 - b^3 - c^3 - 3abc + 3abc)\\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2abc}(ab^2 + bc^2 + ca^2 + ac^2 + ba^2 + cb^2 - a^3 - b^3 - c^3 - 3abc)\\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2abc}[(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) - abc].
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \frac{3}{2} \tag{1}$$

äquivalent damit, daß der Ausdruck

$$d = (a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) - abc$$

kleiner oder gleich Null ist.
Da a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks sind, gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
a + b - c &> 0,\\
a - b + c &> 0,\\
-a + b + c &> 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
(a + b - c)(a - b + c) &= a^2 - (b - c)^2 \leqq a^2,\\
(a - b + c)(-a + b + c) &= c^2 - (a - b)^2 \leqq c^2,\\
(-a + b + c)(a + b - c) &= b^2 - (c - a)^2 \leqq b^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Wegen (2) und $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ folgt aus (3)

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leqq abc,$$

d.h. $d \leqq 0$. Also gilt

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \frac{3}{2}.$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen wegen (3)' genau dann, wenn $a = b = c$, d.h., wenn das Dreieck gleichseitig ist.

L.1.17 Bedeuten a, b, c die Längen der Seiten und α, β, γ die Größen der jeweils gegenüberliegenden Innenwinkel des Dreiecks, so gilt nach dem Kosinussatz

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2. \qquad (1)$$

Daher ist die zu beweisende Ungleichung, die in der Form

$$\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\right) + \left(\cos^2\beta - \frac{1}{4}\right) + \left(\cos^2\gamma - \frac{1}{4}\right) \geqq 0$$

geschrieben werden kann, mit

$$[(b^2 + c^2 - a^2)^2 - b^2c^2]\, a^2 + [(c^2 + a^2 - b^2)^2 - c^2a^2]\, b^2 + [(a^2 + b^2 - c^2)^2 - a^2b^2]\, c^2 \geqq 0 \qquad (2)$$

äquivalent.
Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß $0 < a^2 \leqq b^2 \leqq c^2$ gilt. Setzt man

$$b^2 : a^2 = 1 + x, \quad c^2 : a^2 = 1 + y,$$

so fällt dann

$$0 \leqq x \leqq y \qquad (3)$$

aus, und (2) geht über in

$$a^6 \{(1 + x + y)^2 - (1 + x)(1 + y) + [(1 + y - x)^2 - (1 + y)]\,(1 + x) + [(1 + x - y)^2 - (1 + x)]\,(1 + y)\} \geqq 0$$

und weiter wegen $a \neq 0$ in

$$(y - x)^2 \cdot (1 + x + y) + xy \geqq 0. \qquad (4)$$

Wegen (3) ist die Ungleichung (4) erfüllt. Aus ihr folgt (2) und damit die zu beweisende Ungleichung. Dabei steht in dieser das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (4) steht, also wenn $x = y = 0$ ist, d.h., wenn $a = b = c$ und somit das Dreieck gleichseitig ist.

L.1.18 Ist M Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$, so gilt

$$|MA| = |MB| = |MC|.$$

Ist M Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$, so liegt M auf jeder der drei Winkelhalbierenden von $\triangle ABC$, und es gilt demzufolge:

$$|\sphericalangle MAB| = |\sphericalangle MAC|,\ |\sphericalangle MBA| = |\sphericalangle MBC|,\ |\sphericalangle MCA| = |\sphericalangle MCB|.$$

Daher ist nach dem Kongruenzsatz (ssw)

$$\triangle AMB \cong \triangle BMC \cong \triangle CMA,$$

woraus sich $|AB| = |BC| = |CA|$ ergibt, so daß $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

L.1.19 a) Wir zeigen zunächst, daß sowohl von den drei Punkten A, B', D als auch von den drei Punkten A', B, D keine zwei zusammenfallen. Als Punkt von t_B ist D von A verschieden und als Punkt von t_A ist D von B verschieden. Daher liegt D weder auf g_{AC} noch auf g_{BC}, so daß auch $D \neq A'$ und $D \neq B'$ gilt. Da $\triangle ABC$ nicht rechtwinklig ist, sind AC und BC wegen des Satzes von Thales nicht Durchmesser von k, und folglich sind $t_C \nparallel t_A$ und $t_C \nparallel t_B$. Mithin ist $g_{AB'} \neq t_A$ und daher $A \neq B'$ sowie $g_{A'B} \neq t_B$ und daher $A' \neq B$. Weiter seien A^+ und B^+ auf k so gelegen, daß AA^+ und BB^+ Durchmesser von k sind. Dann werden die folgenden drei Fälle unterschieden:

1. C liegt auf der anderen Seite von $g_{A^+B^+}$ wie D (Bild L.1.19a).
2. C liegt auf derselben Seite von g_{AB} wie D (Bild L.1.19b).
3. C liegt zwischen g_{AB} und $g_{A^+B^+}$ (Bild L.1.19c).

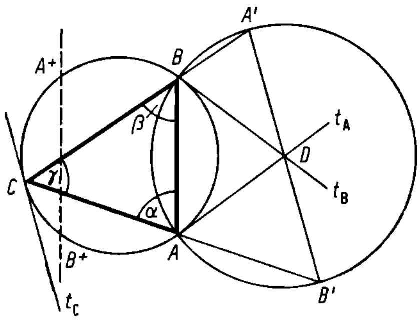


Bild L.1.19a

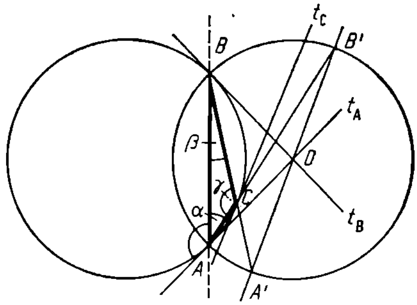


Bild L.1.19b

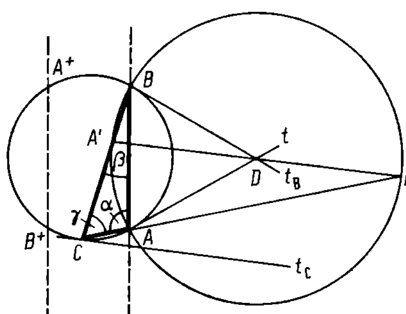


Bild L.1.19c

Damit sind alle zulässigen Lagen für C erfaßt. In allen drei Fällen werden die Größen der Winkel von $\triangle ABC$ in üblicher Weise mit α, β, γ bezeichnet.

1. Fall: In diesem Fall ist $\triangle ABC$ spitzwinklig. Nach dem Sehnentangentenwinkelsatz (Satz II.7′) gilt

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABD| = \gamma \tag{1a}$$

und daher weiter

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BAD| = \alpha + \gamma > 90°, \tag{2a}$$
$$|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ABD| = \beta + \gamma > 90°, \tag{3a}$$

Da $DB' \parallel t_C$ ist und einer der Winkel zwischen t_C und g_{AC} die Größe β hat, ist $|\sphericalangle DB'C|$ entweder β oder $180° - \beta = \alpha + \gamma$.
Wegen (2a) und $B' \neq A$ folgt

$$|\sphericalangle DB'C| = \beta. \tag{4}$$

Entsprechend folgt, daß

$$|\sphericalangle DA'C| = \alpha \tag{5}$$

ist.
Wegen (2a) ist $|\sphericalangle DAB'|$ entweder $\alpha + \gamma$ oder $180° - (\alpha + \gamma) = \beta$.
Da $|\sphericalangle DAB'| < 180° - |\sphericalangle DB'A|$ ist, muß wegen (4)

$$|\sphericalangle DAB'| = \beta$$

sein, womit gezeigt ist, daß $\triangle AB'D$ gleichschenklig (mit der Spitze D) ist. Entsprechend folgt, daß auch $\triangle A'BD$ gleichschenklig (mit der Spitze D) ist.

2. Fall: In diesem Fall ist $\gamma > 90°$ und es gilt

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABD| = 180° - \gamma = \alpha + \beta < 90° \tag{1b}$$

$$|\sphericalangle CAD| = \beta < 90°, \quad |\sphericalangle BAC| = \alpha < 90°.$$

Weiter ist $|\sphericalangle DB'A|$ entweder β oder $180° - \beta$, muß also wegen $|\sphericalangle DAB'| = \beta$ und $|\sphericalangle DAB'| + |\sphericalangle DB'A| < 180°$ gleich β sein, woraus die Gleichschenkligkeit von $\triangle AB'D$ (mit der Spitze D) folgt. Entsprechend ergibt sich, daß $\triangle A'BD$ gleichschenklig (mit der Spitze D) ist.

3. Fall: Es kann o. B. d. A. angenommen werden, daß C auf derselben Seite der Mittelsenkrechten von AB liegt wie A, so daß $\alpha > 90°$ ausfällt. Dann gilt

$$|\sphericalangle CAD| = \alpha + \gamma, \tag{2c}$$

$$|\sphericalangle CBD| = \beta + \gamma \tag{3c}$$

und aus denselben Gründen wie im 1. Fall

$$|\sphericalangle CA'D| = \beta,$$
$$|\sphericalangle DAB'| = \beta.$$

Also ist $\triangle AB'D$ gleichschenklig (mit der Spitze D). Weiter muß $|\sphericalangle DA'B|$ entweder α ($>90°$) oder $180° - \alpha = \beta + \gamma$ ($<90°$) sein und wegen (3c) ist auch $|\sphericalangle DBA'|$ entweder α oder $\beta + \gamma$. Da $|\sphericalangle DBA'| + |\sphericalangle DA'B| < 180°$ ausfällt, haben beide Winkel die Größe $\beta + \gamma$, so daß $\triangle A'BD$ gleichschenklig (mit der Spitze D) ist.

b) Da in allen drei Fällen die beiden Dreiecke $AB'D$ und $A'BD$ gleichschenklig sind und D als gemeinsame Spitze haben und für D als Schnittpunkt von t_A mit t_B sicher $|AD| = |BD|$ gilt, folgt $|A'D| = |AD| = |BD| = |B'D|$. Somit liegen A, A', B, B' auf dem Kreis um D mit dem Radius $|AD|$ und, wie zusätzlich bemerkt sei, mit dem Durchmesser $A'B'$, so daß $\triangle A'B'A$ bei A und $\triangle A'B'B$ bei B einen rechten Winkel hat.

L.1.20 Im Dreieck ABC sei AB die Hypotenuse, und r bzw. ϱ seien die Radien seines Um- bzw. Inkreises. AB ist ein Durchmesser des Umkreises nach der Umkehrung des Satzes des THALES, also gilt

$$|AB| = 2r.$$

Berührt der Inkreis die Hypotenuse in D, die Katheten in E und F (E liege auf BC) (Bild L.1.20), so gelten (nach Satz IV.12) die Gleichungen

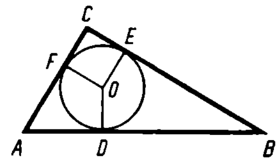


Bild L.1.20

$$2r = |AB| = |AD| + |DB| = |AF| + |BE|.$$

Ist O der Inkreismittelpunkt, dann gilt

$$|OE| = |OF| = \varrho.$$

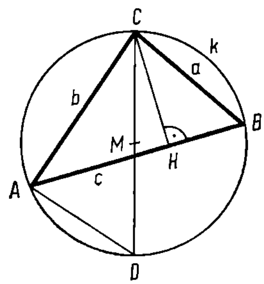
Deswegen, und weil die Winkel bei E, C und F rechte sind, ist das Viereck $OECF$ (nach den Sätzen III.42 und III.43) ein Quadrat. Folglich ist

$$|FC| = |EC| = \varrho.$$

Wir erhalten zusammenfassend:

$$\begin{aligned} |AC| + |BC| &= (|AF| + |FC|) + (|BE| + |EC|) \\ &= (|AF| + |BE|) + (|FC| + |EC|) = 2r + 2\varrho. \end{aligned}$$

L.1.21 Man bezeichne die Eckpunkte des Dreiecks so mit A, B und C, daß keiner der Dreieckswinkel größer als der bei C ist, und sodann die Längen der Dreiecksseiten wie üblich mit a, b und c (Bild L.1.21). Dann ist AC nicht Durchmesser des Umkreises k, weil sonst der Winkel bei B ein rechter und daher größer als der bei C wäre. Ist CD Durchmesser des Umkreises k, so ist $D \notin g_{AC}$. H sei der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{AB}. Dann gilt, wenn r der Umkreisradius ist,



$$|CD| = 2r$$

Bild L.1.21

und für den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC, wenn noch $|HC| = h_c$ gesetzt wird

$$I = \frac{ch_c}{2}. \tag{1}$$

Nach Definition von H ist $|\sphericalangle BHC| = 90°$, und nach dem Satz von THALES gilt

$$|\sphericalangle DAC| = 90°. \tag{2}$$

Der Punkt B liegt auf derselben Seite von g_{AC} wie D, denn andernfalls lägen B und D nach dem obigen auf verschiedenen Seiten von g_{AC}. Dann wäre $ABCD$ ein nicht überschlagenes Sehnenviereck und daher nach Satz III.30

$$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC| = 180°. \tag{3}$$

Wegen (2) ist $|\sphericalangle ADC| < 90°$ und folglich wäre wegen (3) $|\sphericalangle ABC| > 90°$ im Widerspruch dazu, daß $\sphericalangle ACB$ größter Winkel im Dreieck ABC ist. Weiter gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle CDA$. Also gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle BCH \sim \triangle DCA$. Daraus folgt (Satz IV.4.2)

$$a : h_c = 2r : b,$$

d.h.

$$h_c = \frac{ab}{2r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Flächeninhaltsformel (1) ein, so erhält man

$$I = \frac{abc}{4r}.$$

Bemerkung: Unter Benutzung der Trigonometrie ergibt sich die letzte Gleichung aus den Formeln (10′) und (12) der Vorbetrachtungen.

L.1.22 Wir nehmen o.B.d.A. an, daß C der Scheitel des rechten Winkels von $\triangle ABC$ ist. Es sei M der Mittelpunkt des genannten Kreises. M hat von jeder Kathete des Dreiecks ABC den Abstand r. Die Höhen der Dreiecke AMC bzw. BMC von M auf AC bzw. BC haben daher je die Länge r. Der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist die Summe der Flächeninhalte von $\triangle AMC$ und $\triangle BMC$, folglich gilt:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2},$$

woraus man

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

erhält.

L.1.23 O.B.d.A. sei $|AC| = |BC|$ vorausgesetzt. S sei der von C verschiedene Schnittpunkt der Symmetrieachse des Dreiecks (durch C) mit dessen Umkreis (Bild L.1.23). Da das Dreieck gleichschenklig ist, liegen M und N

auf der Symmetrieachse g_{CS}; denn g_{CS} ist die Mittelsenkrechte von AB und enthält die Winkelhalbierende des Dreiecks mit C als Scheitel. R sei der Fußpunkt des Lotes von N auf g_{AC}.
Es ist

$$\triangle RNC \sim \triangle ASC, \tag{1}$$

da $\sphericalangle NCR = \sphericalangle SCA$, $|\sphericalangle CRN| = 90°$ und nach dem Satz des THALES $|\sphericalangle CAS| = 90°$ gilt, letzteres weil SC Durchmesser des Umkreises ist. Weiterhin ist $\triangle ANS$ gleichschenklig.

Beweis: Es ist

$$|\sphericalangle NAS| = 90° - |\sphericalangle CAN|$$

und

$$|\sphericalangle ANS| = 180° - 90° - |\sphericalangle BAN|.$$

Also gilt wegen $|\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle CAN|$ (AN liegt auf der Winkelhalbierenden von $\triangle ABC$ durch A)

$$|\sphericalangle NAS| = |\sphericalangle ANS|.$$

Daraus folgt

$$|AS| = |SN|. \tag{2}$$

Wegen (1) gilt daher

$$|CN| : |NR| = |CS| : |SA|. \tag{3}$$

1. Fall: M liegt auf CN, dann folgt aus (3) mit $d = |MN|$:

$$(r_1 + d) : r_2 = 2r_1 : |SA|$$

und wegen (2)

$$(r_1 + d) : r_2 = 2r_1 : (r_1 - d),$$

also

$$r_1^2 - d^2 = 2r_1r_2,$$
$$d^2 = r_1^2 - 2r_1r_2,$$
$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}.$$

2. Fall: M liegt auf NS, dann folgt aus (3) und (2)

$$(r_1 - d) : r_2 = 2r_1 : (r_1 + d),$$

woraus man ebenfalls

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$$

erhält.
Da d reell ist, folgt noch $r_1 \geqq 2r_2$.

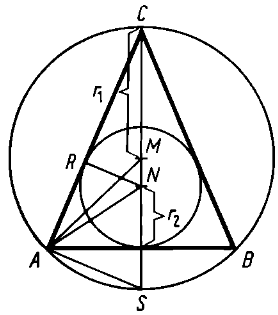


Bild L.1.23

L.1.24 Nach dem Sekanten- bzw. Sekantentangentensatz (Satz IV.11) gilt (Bild L.1.24):

$$|BM| \cdot |BN| = |BD|^2, \tag{1}$$
$$|CP| \cdot |CQ| = |CD|^2, \tag{2}$$

und

$$|AM| \cdot |AN| = |AP| \cdot |AQ|. \tag{3}$$

Weiterhin gilt nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle CAD$ bzw. $\triangle ABD$,

$$|CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2, \tag{4}$$

$$|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2. \tag{5}$$

Aus (1), (2), (4) und (5) folgt

$$|BM| \cdot |BN| - |CP| \cdot |CQ| = |AB|^2 - |AC|^2. \tag{6}$$

Da

$$|BM| = |AB| - |AM|, \quad |BN| = |AB| - |AN|,$$
$$|CP| = |AC| - |AP| \quad \text{und} \quad |CQ| = |AC| - |AQ|$$

gilt, ist (6) äquivalent mit

$$(|AB| - |AM|)(|AB| - |AN|) - (|AC| - |AP|)(|AC| - |AQ|)$$
$$= |AB|^2 - |AC|^2$$

und weiter mit

$$-|AB|(|AM| + |AN|) + |AM| \cdot |AN| =$$
$$-|AC|(|AP| + |AQ|) + |AP| \cdot |AQ|.$$

Wegen (3), $|AB| \neq 0$ und $|AC| \neq 0$, folgt hieraus

$$\frac{|AM| + |AN|}{|AC|} = \frac{|AP| + |AQ|}{|AB|}.$$

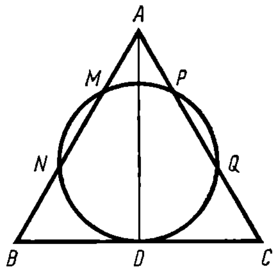


Bild L.1.24

L.1.25 E sei der Schnittpunkt von g_{AB} mit der Parallelen zu g_{AD} durch C. Dann ist $AECD$ nach Def. III.22 ein Parallelogramm. Also gilt

$$|AE| = |DC| \leqq |AB|.$$

Außerdem liegt E auf derselben Seite von g_{AD} wie C, also auch wie B, so daß E auf AB liegt und

$$|EB| = |AB| - |AE| = a - b$$

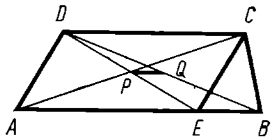


Bild L.1.25

ist (Bild L.1.25).

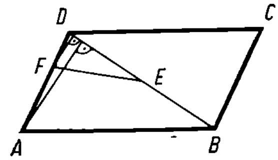
Der Mittelpunkt P von AC ist Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms $AECD$ und daher Mittelpunkt von DE. Also ist $|DP| = |PE|$. Da außerdem laut Aufgabenstellung $|DQ| = |QB|$ gilt, folgt aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes $PQ \parallel EB$ und dann aus dem 2. Strahlensatz

$$|PQ| = \frac{|EB|}{2}, \quad \text{d.h.} \quad |PQ| = \frac{a-b}{2}.$$

L.1.26 Die Höhen der Dreiecke DAB bzw. DFE auf g_{DB} bzw. g_{DE} sind zueinander parallel, da die zu diesen Höhen gehörenden Seiten DB bzw. DE der genannten Dreiecke auf derselben Geraden liegen (Bild L.1.26).

Nach dem 2. Strahlensatz verhalten sich die Längen dieser Höhen aufgrund der Voraussetzung wie 3 : 1. Ferner verhalten sich die Längen der Grundseiten DB bzw. DE zueinander wie 2 : 1. Daher verhalten sich die Flächeninhalte beider Dreiecke wie 6 : 1. Folglich verhält sich der Flächeninhalt des Dreiecks DFE zu dem des Vierecks $ABEF$ wie 1 : 5.

Bild L.1.26



L.1.27 Die Kathetenlängen der abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecksflächen werden mit x und y und die Hypotenusenlänge, die gleich der zu berechnenden Seitenlänge des Achtecks ist, werde mit c bezeichnet.
Dann gilt:

$$2x + c = 2a, \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{2a - c}{2}, \tag{1}$$

$$2y + c = 2b, \quad \text{d.h.} \quad y = \frac{2b - c}{2} \tag{2}$$

und

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{3}$$

also wegen (1) und (2)

$$\frac{(2a - c)^2}{4} + \frac{(2b - c)^2}{4} = c^2,$$

woraus

$$c^2 + 2(a + b)c - 2(a^2 + b^2) = 0 \tag{4}$$

folgt. Hieraus ergibt sich, daß entweder

$$c = -(a + b) + \sqrt{(a + b)^2 + 2(a^2 + b^2)} \tag{5}$$

oder

$$c = -(a + b) - \sqrt{(a + b)^2 + 2(a^2 + b^2)} \tag{6}$$

sein muß.
Da a, b und c positiv sind, kann c nicht der Relation (6) genügen. Falls die Konstruktion überhaupt möglich ist, muß c die Bedingung (5) erfüllen.

Bemerkung: Die Konstruktion ist genau dann möglich, wenn $c < 2 \min(a, b)$ ist, d.h. wenn $\max(a, b) < 3 \min(a, b)$ ausfällt.

L.1.28 Wir zeigen zunächst, daß die Bedingung 4) notwendig dafür ist, daß $\sphericalangle ACE$ ein rechter Winkel ist. Wegen $|BE| = |AB|$ folgt aus der Umkehrung des Satzes des THALES (Satz II.10):

Wenn der Winkel $\sphericalangle\, ACE$ ein rechter ist, so liegt C auf einem Kreis um B mit dem Radius $|AB|$.
Somit ist $|AB| = |BC|$ eine notwendige Bedingung dafür, daß der Winkel $\sphericalangle\, ACE$ ein rechter ist.
Nun weisen wir nach, daß keine der Bedingungen 1), 2), 3) und 5) notwendig dafür ist, daß $|\sphericalangle ACE| = 90°$ ist. Da bei festgehaltenen Punkten A, B, C die Lage von D und damit die Längen von AD und CD sowie die Größen der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle ADC$ und $\sphericalangle DCB$ jeweils ohne Einfluß auf die Größe des Winkels $\sphericalangle ACE$ sind, ist es leicht, Vierecke anzugeben, z. B. das in Bild L.1.28, die keiner der Bedingungen 1), 2), 3) oder 5) genügen, bei denen aber trotzdem $\sphericalangle\, ACE$ ein rechter Winkel ist.
Somit ist also von den Bedingungen 1) bis 5) nur die Bedingung 4) notwendig dafür, daß $\sphericalangle ACE$ ein rechter Winkel ist.

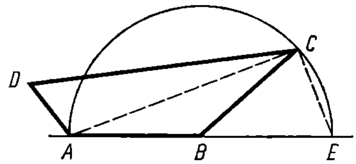


Bild L.1.28

L.1.29 *1. Lösung*
Das gegebene Rechteck werde an g_{EH} gespiegelt, wobei die Punkte A, B, C, D in die Punkte A', B', C', D' übergehen (Bild L.1.29).
Dann gilt $\triangle GEB' \cong \triangle HFA'$ nach dem Kongruenzsatz (sws) und daher

$$|\sphericalangle GEB'| = \alpha$$
$$|\sphericalangle AEB'| = \alpha + \beta .$$

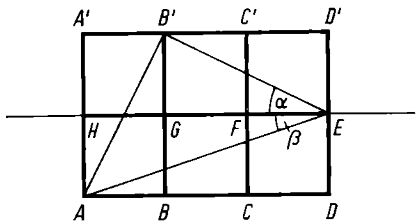


Bild L.1.29

Wegen

$$AA' \cong B'D', \quad A'B' \cong D'E$$

und

$$|\sphericalangle AA'B'| = 90° = |\sphericalangle\, B'D'E|$$

ist

$$\triangle AA'B' \cong \triangle B'D'E .$$

Daher ist $\triangle AB'E$ gleichschenklig mit der Spitze B'. Außerdem ist

$$|\sphericalangle AB'G| = 90° - |\sphericalangle A'B'A|,$$
$$|\sphericalangle GB'E| = |\sphericalangle A'B'A|,$$

also

$$|\sphericalangle AB'E| = |\sphericalangle AB'G| + |\sphericalangle GB'E| = 90°,$$

so daß $\triangle AB'E$ rechtwinklig gleichschenklig ist und

$$|\sphericalangle AEB'| = \alpha + \beta = 45°$$

beträgt.

2. Lösung
Es ist

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \tan\beta = \frac{1}{3} .$$

Aus der in diesem Falle gültigen Beziehung

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

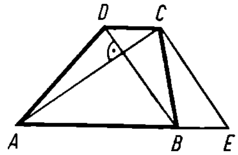
erhält man dann

$$\tan(\alpha + \beta) = 1,$$

d.h., es muß $\alpha + \beta = 45° + k \cdot 180°$ mit geeignetem ganzzahligem k gelten. Wegen $0° < \alpha < 90°$ und $0° < \beta < 90°$ kommt nur $k = 0$ in Frage.

L.1.30 In dem Trapez $ABCD$ (Bild L.1.30) sei $AB \parallel CD$. Vorausgesetzt ist dann $g_{AC} \perp g_{BD}$. Wird der Schnittpunkt von g_{AB} und der Parallelen zu g_{BD} durch C mit E bezeichnet, so ist das Viereck $BECD$ nach Definition III.22 ein Parallelogramm, und es sind folgende Aussagen wahr:

Bild L.1.30



1) $|AE| = |AB| + |BE|$,

weil B auf AE liegt; anderenfalls läge E auf derselben Seite von g_{BD} wie A und nicht wie C, so daß CE von g_{BD} geschnitten würde, was $g_{CD} \parallel g_{AB}$ widerspricht.

2) $|BE| = |CD|$, $|EC| = |BD|$,

weil $BECD$ ein Parallelogramm ist.

3) $g_{EC} \perp g_{AC}$,

weil $g_{EC} \parallel g_{BD}$ und $g_{BD} \perp g_{AC}$ gilt.
In dem rechtwinkligen Dreieck AEC stimmen somit die Kathetenlängen mit den Diagonalenlängen und die Hypotenusenlänge mit der Summe der Grundseitenlängen des Trapezes überein. Die Behauptung folgt dann sofort aus dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle AEC$:

$$(|AB| + |BE|)^2 = |AC|^2 + |CE|^2 .$$

was äquivalent ist mit

$$(|AB| + |CD|)^2 = |AC|^2 + |BD|^2.$$

L.1.31 Da $g_{SG} \nparallel g_{EF}$ ist, gilt auch $g_{SG} \nparallel g_{AB}$ und $g_{SG} \nparallel g_{CD}$. Daher schneidet g_{SG} die Geraden g_{AB} und g_{CD} in je einem Punkt L bzw. K. Wegen $G \neq E$ gilt $K \neq C$ und $L \neq B$ (Bild L.1.31).
Aus den Strahlensätzen folgt dann:

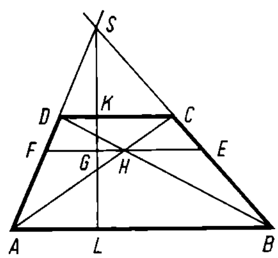


Bild L.1.31

$$\frac{|KG|}{|GL|} = \frac{|CE|}{|EB|} = \frac{|CH|}{|HA|} = \frac{|CD|}{|AB|} \tag{1}$$

und

$$\frac{|SC|}{|SB|} = \frac{|KC|}{|LB|} = \frac{|CD|}{|AB|}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{|KG|}{|GL|} = \frac{|KC|}{|LB|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|KG|}{|KC|} = \frac{|GL|}{|LB|}.$$

Da außerdem die Winkel $\sphericalangle CKG$ und $\sphericalangle GLB$ rechte sind, sind die Dreiecke KGC und GLB ähnlich.
Daher gilt:

$$\sphericalangle BGL \cong \sphericalangle KGC. \tag{3}$$

Da weiter die Winkel $\sphericalangle SGE$ und $\sphericalangle EGL$ rechte sind, folgt wegen (3)

$$\sphericalangle BGE \cong \sphericalangle EGC.$$

L.1.32 Die Diagonalen jedes konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden sich in einem Punkt M, der im Innern des Vierecks liegt (Bild L.1.32).
Aus dem Satz des PYTHAGORAS folgen dann aufgrund der Voraussetzungen die Gleichungen

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2,$$
$$|CD|^2 = |CM|^2 + |DM|^2,$$
$$|BC|^2 = |BM|^2 + |CM|^2,$$
$$|DA|^2 = |DM|^2 + |AM|^2.$$

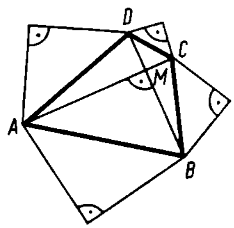


Bild L.1.32

Wir entnehmen daraus

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2. \tag{1}$$

Die Länge der Höhe auf die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist nach dem Höhensatz gleich $\frac{c}{2}$, wenn c die Hypotenusenlänge ist. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist darum gleich $\frac{c^2}{4}$.
Durch Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung (1) mit $\frac{1}{4}$ erhalten wir die nach III.(12) mit der zu beweisenden Gleichung äquivalente Gleichung

$$\frac{1}{4}|AB|^2 + \frac{1}{4}|CD|^2 = \frac{1}{4}|BC|^2 + \frac{1}{4}|DA|^2.$$

L.1.33 *1. Beweis* (ohne Verwendung von Trigonometrie oder Vektorrechnung):
Zu beweisen ist:

a) Wenn die Diagonalen des Vierecks einander rechtwinklig schneiden, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

b) Wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist, so schneiden die Diagonalen des Vierecks einander senkrecht.

Beweis von **a)**:

Die Diagonalen eines ebenen konvexen Vierecks schneiden einander in einem Punkt der Vierecksfläche und nach Voraussetzung senkrecht. Werden die Längen der Diagonalenabschnitte wie im Bild L.1.33a bezeichnet, so gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS:

$$a^2 = w^2 + x^2, \quad b^2 = x^2 + y^2,$$

$$c^2 = y^2 + z^2 \quad \text{und} \quad d^2 = z^2 + w^2.$$

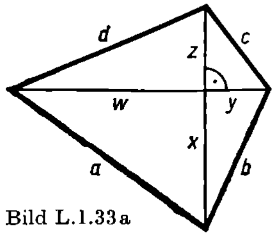


Bild L.1.33a

Daraus folgt

$$a^2 + c^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = b^2 + d^2.$$

Also gilt **a)**.

Beweis von **b)**:

Die Bezeichnung der Seitenlängen sei so eingerichtet, daß a eine größte Seitenlänge ist. O.B.d.A. kann außerdem $a \geqq b \geqq d$ angenommen werden. In diesem Fall gilt

$$a \geqq b \geqq d \geqq c \tag{1}$$

denn $c > d$ würde wegen $a \geqq b$ zu $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ in Widerspruch stehen. Ferner können die Größen der vier Innenwinkel des ebenen konvexen Vierecks nicht alle kleiner als 90° sein, weil ihre Summe 360° ist. Der Scheitelpunkt eines größten Winkels (dessen Größe also mindestens 90° beträgt) sei mit B und die beiden B benachbarten Eckpunkte des Vierecks seien so mit A und C bezeichnet, daß

$$|AB| \geqq |BC| \tag{2}$$

ist. Schließlich sei D der vierte Eckpunkt des Vierecks. Da AB und BC benachbarte Seiten des Vierecks $ABCD$ und a und c Längen gegenüberliegender Seiten sind, gilt wegen (1) und (2) entweder

$$|AB| = a \quad \text{oder} \quad |BC| = c.$$

Im ersten Fall würde $|CD| = c$ und somit wegen (1)

$$|AD| \geqq |CD|, \tag{3}$$

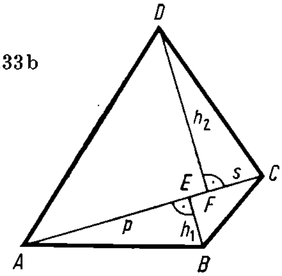
im zweiten Fall dagegen $|AD| = a$, und somit wegen (1) ebenfalls (3) gelten, d.h. (3) ist in jedem Falle richtig. Es seien nun E und F die Fußpunkte der Lote von B bzw. D auf g_{AC} (Bild L.1.33b). Ferner sei

$$|BE| = h_1, \quad |DF| = h_2, \quad |AE| = p, \quad |CE| = q, \quad |AF| = r, \quad |CF| = s;$$

wegen (2) und (3) gilt

$$p \geqq q \quad \text{und} \quad r \geqq s. \tag{4}$$

Bild L.1.33b



Nach der Auswahl von B sind in $\triangle ABC$ die Winkel mit den Scheiteln A und C spitz, so daß E zwischen A und C liegt. Dagegen sind für F die beiden Fälle zu unterscheiden, daß F zu AC gehört oder nicht. Diese beiden Fälle können im folgenden aber gemeinsam behandelt werden, wobei gegebenenfalls das obere Operationszeichen für den ersten, das untere für den zweiten Fall gilt. Es ist

$$p + q = r \pm s \; (= |AC|). \tag{5}$$

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gelten weiterhin die Gleichungen:

$$|AB|^2 = p^2 + h_1^2, \quad |BC|^2 = q^2 + h_1^2,$$
$$|CD|^2 = s^2 + h_2^2, \quad |DA|^2 = r^2 + h_2^2.$$

Daraus folgt (wegen der vorausgesetzten Gleichheit $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$)

$$p^2 + s^2 = q^2 + r^2,$$

und weiter

$$p^2 - q^2 = r^2 - s^2,$$

d.h.

$$(p + q)\,(p - q) = (r + s)\,(r - s).$$

Wegen (5) und $|AC| \neq 0$ gilt daher

$$p - q = r \mp s. \tag{6}$$

(Sämtliche auftretenden Differenzen von Streckenlängen und Flächeninhalten sind wegen (4) nicht negativ. Die untere Gleichung (6) stellt einen Widerspruch dar, da $E \in AC$, und somit $E \neq A$, $E \neq C$, $p < |AC| < r$ gilt; der Fall, daß F nicht zu AC gehört, kann demnach nicht eintreten.
Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt schließlich $p = r$, und somit $E = F$, d.h. E liegt (weil $ABCD$ ein ebenes Viereck ist) auf der Diagonalen BD, und AC sowie BD schneiden einander in E senkrecht. Damit ist **b)** bewiesen.

2. Beweis mit Hilfe der Vektorrechnung

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ die durch die Seiten des Vierecks in Länge und Richtung bestimmten Vektoren, und zwar so orientiert, daß

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{o} \tag{7}$$

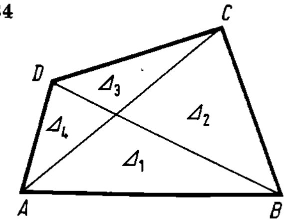
ist. Alle folgenden Gleichungen sind untereinander gleichwertig:

$$\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{d}^2 = \mathfrak{o},$$
$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + (\mathfrak{c} - \mathfrak{d})\,(\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{o},$$
$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - (\mathfrak{c} - \mathfrak{d})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{o} \text{ wegen (7)},$$
$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b} - \mathfrak{c} + \mathfrak{d})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{o},$$
$$-2\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{o} \text{ wegen (7)},$$
$$(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}.$$

Die letzte Gleichung bedeutet Orthogonalität der Diagonalen des Vierecks.

L.1.34 Die Fläche des Vierecks $ABCD$ möge durch ihre Diagonalen AC und BD in die von den vier Dreiecken $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ und $\triangle_4$ berandeten Flächen zerlegt werden. Die Numerierung sei so gewählt, daß die Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ eine gemeinsame Seite besitzen, die auf BD liegt (Bild L. 1.34).

Bild L.1.34



Dann ist die Höhe von $\triangle_1$, die auf der AC enthaltenden Geraden senkrecht steht, auch Höhe von $\triangle_2$. Folglich sind $\triangle_1$ und $\triangle_2$ genau dann flächengleich, wenn der Mittelpunkt von AC auf BD liegt.

Entsprechend ergibt sich, daß $\triangle_2$ und $\triangle_3$ bzw. $\triangle_3$ und $\triangle_4$ genau dann gleichen Flächeninhalt haben, wenn der Mittelpunkt von BD auf AC liegt (bzw. von AC auf BD).

Da AC und BD höchstens einen Punkt gemeinsam haben können, ergibt sich:

Die Flächeninhalte der $\triangle_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind genau dann paarweise gleich, wenn die Mittelpunkte von AC und BD zusammenfallen, also (nach Satz III.37.3) wenn das Viereck ein Parallelogramm ist.

L.1.35 In jedem konvexen Viereck ist die Summe der Größen der Innenwinkel [nach Satz III.2.(5)] gleich 2π, daher können nicht alle Innenwinkel eines solchen Vierecks Größen haben, die kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind.

O.B.d.A. sei $|\sphericalangle ABC| \geqq \frac{\pi}{2}$. In dem Dreieck ABC ist dann nach Satz III.10 AC die längste Seite.

Nach dem Kosinussatz gilt:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cos\gamma, \tag{1}$$

wenn $\gamma = |\sphericalangle ABC|$ ist.

Wegen $\frac{\pi}{2} \leqq \gamma < \pi$ folgt aus (1)

$$|AC|^2 \geqq |AB|^2 + |BC|^2. \tag{2}$$

O.B.d.A. sei $|AB| \leqq |BC|$, dann folgt aus (2)

$$\left(\frac{|AC|}{|AB|}\right)^2 \geqq 1 + \left(\frac{|BC|}{|AB|}\right)^2 \geqq 2,$$

also

$$\frac{|AC|}{|AB|} \geqq \sqrt{2}.$$

Ist M der größte und m der kleinste aller auftretenden Abstände zweier Eckpunkte voneinander, so ist $M \geqq |AC|$ und $m \leqq |AB|$ und folglich

$$q = \frac{M}{m} \geqq \frac{|AC|}{|AB|} \geqq \sqrt{2}.$$

L.1.36 Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, e die Länge der Diagonalen (Sehne) AC und $\beta = |\sphericalangle ABC|$ (Bild L.1.36). Dann gilt $|\sphericalangle CDA| = \pi - \beta$ nach dem Satz, daß im Sehnenviereck die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Winkel π beträgt (Satz III.30).
Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke ABC bzw. ACD, gilt

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \qquad (1)$$

$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta, \qquad (2)$$

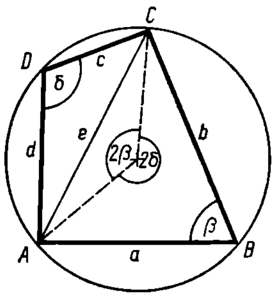


Bild L.1.36

da $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$ für alle reellen β gilt.
Aus (1) und (2) folgt

$$2(ab + cd)\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

und wegen $ab + cd > 0$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}. \qquad (3)$$

Der Flächeninhalt I des Sehnenvierecks $ABCD$ ist

$$I = \frac{1}{2}[ab\sin\beta + cd\sin(\pi - \beta)] \qquad (4)$$
$$= \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\beta,$$

da $\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$ für alle β gilt. Aus (3) und (4) folgt wegen

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

zunächst

$$I^2 = \frac{1}{4}(ab + cd)^2\left[\frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}\right]$$

und weiter

$$\begin{aligned}16I^2 &= [2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)]\\ &\quad\cdot[2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)]\\ &= [(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)]\\ &\quad\cdot[(c^2 + 2cd + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2)],\end{aligned}$$

also

$$16I^2 = (a + b + c - d)\cdot(a + b - c + d)\cdot(c + d + a - b)\cdot(c + d - a + b).$$

Da im konvexen Viereck die Summe der Längen dreier Seiten stets größer ist als die Länge der vierten Seite (Satz III.2), ist jeder Faktor auf der rechten Seite dieser Gleichung positiv, und es folgt:

$$I = \sqrt{\frac{a + b + c + d - 2d}{2}\cdot\frac{a + b + c + d - 2c}{2}}$$
$$\cdot\sqrt{\frac{a + b + c + d - 2b}{2}\cdot\frac{a + b + c + d - 2a}{2}},$$

also

$$I = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

L.1.37 a) Da ein Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind (Satz III.37.1), genügt es zu zeigen, daß

$$|SR| = |PQ| \text{ und } |SP| = |RQ| \text{ gilt.}$$

Nach Voraussetzung ist:

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|CG|}{|GD|} = \frac{|DH|}{|HA|} = \frac{1}{2},$$

also

$$|BF| = \frac{1}{3}|BC| \quad \text{und} \quad |DH| = \frac{1}{3}|AD|,$$

also $|BF| = |DH|$ und analog $|AE| = |CG|$.

Nach dem Kongruenzsatz (sws) ist daher sowohl

$$\triangle ABF \cong \triangle CDH,$$

weil $|AB| = |CD|$, $|BF| = |DH|$ und $|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CDH| = 90°$ gilt,

als auch

$$\triangle AED \cong \triangle CGB,$$

weil $|AE| = |CG|$, $|DA| = |BC|$ und $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle BCG| = 90°$ gilt.

Somit folgt:

$$|AF| = |HC| \quad \text{und} \quad |BG| = |ED|$$

und

$$|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle CGB|, \quad |\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle HCD|,$$
$$|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle GBC|, \quad |\sphericalangle BFA| = |\sphericalangle DHC|.$$

Es gilt daher nach dem Kongruenzsatz (wsw):

$$\triangle AEP \cong \triangle CGR, \quad \triangle BFQ \cong \triangle DHS.$$

Wegen

$$|DE| = |DS| + |SP| + |PE| = |GB| = |GR| + |RQ| + |QB|$$

und

$$|DS| = |QB|, \quad |PE| = |GR|$$

gilt

$$|SP| = |RQ|.$$

Entsprechend folgt

$$|PQ| = |RS|.$$

Also ist das Viereck $PQRS$ ein Parallelogramm.

b) Mit $I(\mathfrak{P})$ wird der Flächeninhalt des Parallelogramms $PQRS$, mit $I(\mathfrak{R})$ der des Rechtecks $ABCD$, mit I_1 der des Dreiecks ABF bzw. des Dreiecks CDH, mit I_2 der des Dreiecks AED bzw. des Dreiecks

BCG, mit I_3 der des Dreiecks AEP bzw. CGR und mit I_4 der des Dreiecks BFQ bzw. DHS bezeichnet.
Es gilt:

$$I(\mathfrak{P}) = I(\mathfrak{R}) - 2I_1 - 2I_2 + 2I_3 + 2I_4. \tag{1}$$

Wegen

$$I_1 = \frac{|AB| \cdot |BF|}{2}, \quad I_2 = \frac{|AE| \cdot |DA|}{2}$$

und

$$|BF| = \frac{1}{3}|BC| \quad \text{und} \quad |AE| = \frac{1}{3}|AB|$$

ist:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{6}|AB| \cdot |BC| = \frac{1}{6} I(\mathfrak{R}). \tag{2}$$

Es gilt weiter (Satz III.18):

$$2I_3 = |PA| \cdot |PE| \sin|\sphericalangle EPA|$$

und

$$2I_4 = |QB| \cdot |QF| \sin|\sphericalangle FQB|.$$

Da

$$|\sphericalangle EPA| = |\sphericalangle SPQ| \quad \text{und} \quad |\sphericalangle FQB| = |\sphericalangle PQR|$$

ist, sowie

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle PQR| = 180° \quad \text{und} \quad \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

gilt, folgt:

$$2I_3 + 2I_4 = \sin|\sphericalangle PQR|(|PA| \cdot |PE| + |QB| \cdot |QF|). \tag{3}$$

Beachtet man nun, daß

$$|AB| = |AE| + |EB|, \quad |BC| = |BF| + |FC| \quad \text{und}$$
$$|PA| = |RC|$$

ist, so erhält man aufgrund der Voraussetzungen nach dem 2. Strahlensatz

$$|PE| : |QB| = |AE| : |AB| = 1:3,$$

also

$$|PE| = \frac{1}{3}|QB| \quad \text{und} \quad |PA| : |QF| = |BC| : |CF| = 3:1,$$

also $|QF| = \frac{1}{3}|PA|$.

Setzt man diese Werte in (3) ein, so folgt

$$2(I_3 + I_4) = \frac{2}{3}|PA| \cdot |QB| \sin|\sphericalangle PQR|. \tag{4}$$

Weiter gilt (Satz III.37)

$$I(\mathfrak{P}) = |PQ| \cdot |QR| \sin |\sphericalangle PQR|. \tag{5}$$

Aus dem 1. Strahlensatz folgt

$$\begin{aligned} |PQ| : |PA| &= |EB| : |AE| = 2:1, \\ |QR| : |QB| &= |FC| : |BF| = 2:1, \end{aligned}$$

woraus sich wegen (4) und (5)

$$2\,(I_3 + I_4) = \frac{1}{6} I(\mathfrak{P}) \tag{6}$$

ergibt. Aus (1), (2) und (6) erhält man

$$I(\mathfrak{P}) = I(\mathfrak{R}) - \frac{2}{3} I(\mathfrak{R}) + \frac{1}{6} I(\mathfrak{P})$$

und hieraus schließlich

$$I(\mathfrak{P}) = \frac{2}{5} I(\mathfrak{R}).$$

L.1.38 Ist $ABCD$ nicht konvex, dann sei o.B.d.A. AC die außerhalb von $ABCD$ gelegene Diagonale (Bild L.1.38).
In diesem Falle konstruiert man den zum Punkt B in bezug auf g_{AC} symmetrisch gelegenen Punkt B'. Für den Flächeninhalt I' des konvexen, $ABCD$ enthaltenden Vierecks $AB'CD$ mit den gleichen Seitenlängen gilt dann $I' > I$.
Wir zeigen nun, daß die Abschätzung für alle konvexen Vierecke gilt und betrachten dazu das konvexe Viereck $ABCD$.
Setzt man $|\sphericalangle DAB| = \alpha$ und bezeichnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABD mit I'', dann gilt nach Satz III.18

$$I'' = \frac{a \cdot d \cdot \sin\alpha}{2}$$

und wegen $\sin\alpha \leqq 1$

$$I'' \leqq \frac{ad}{2},$$

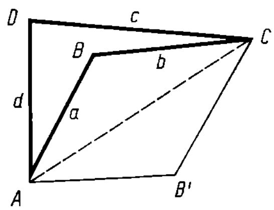


Bild L.1.38

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist.
Entsprechendes gilt für die Dreiecke ABC, ACD und BCD; folglich fällt

$$I \leqq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} \quad \text{und} \quad I \leqq \frac{bc}{2} + \frac{ad}{2}$$

aus, woraus sich

$$2I \leqq \frac{1}{2}(ab + cd + bc + ad) = \frac{1}{2}(a + c)(b + d),$$

also

$$I \leqq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

ergibt.
Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn jeder der vier Innenwinkel von $ABCD$ ein rechter ist, d.h. im Falle eines Rechtecks.

L.1.39 Der Inhalt I des Kreisausschnitts (Bild L.1.39) ist $\frac{1}{6}$ des Inhalts einer Kreisfläche mit dem Radius r. Daher bestehen, wenn b die Länge des entsprechenden Kreisbogens bezeichnet, nach Satz IV.13 die Gleichungen

$$I = \frac{\pi}{6} r^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{\pi}{3} r.$$

Das durch die Teilung des Kreisausschnitts entstehende Teildreieck ist nach Satz III.27″2. gleichseitig, weil die Seiten des Dreiecks, die auf den Schenkeln des Zentriwinkels von 60° liegen, kongruent sind (sie sind Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken, die nach dem Kongruenzsatz (wsw) einander kongruent sind). Dieses gleichseitige Dreieck habe die Seitenlänge a. Die Umfänge der beiden Teile des Kreisausschnitts sind genau dann gleich groß, wenn

$$2a = 2(r-a) + b,$$

also wenn

$$4a = 2r + b = 2r + \frac{\pi}{3} r,$$

d.h.

$$a = \frac{r}{2}\left(1 + \frac{\pi}{6}\right)$$

gilt.

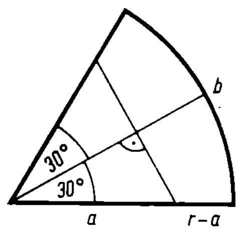


Bild L.1.39

Demnach erhalten wir

$$I_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = r^2\left(1 + \frac{\pi}{6}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{16}$$

für den Flächeninhalt I_1 des gleichseitigen Teildreiecks.

Behauptung: Von den beiden Teilen des Kreisausschnitts hat das Dreieck den kleineren Flächeninhalt.

Beweis:

Die Behauptung ist gleichbedeutend mit der Relation $I_1 < \frac{I}{2}$.

Es genügt deshalb zu beweisen, daß

$$\left(1 + \frac{\pi}{6}\right)^2 \sqrt{3} < \frac{4}{3}\pi$$

gilt oder, was damit äquivalent ist, daß

$$\left(1+\frac{\pi}{6}\right)^4 3 < \frac{16}{9}\pi^2$$

ausfällt. Nun ergibt sich, weil $\pi < 3{,}18$, also $\frac{\pi}{6} < 0{,}53$ ist,

$$\left(1+\frac{\pi}{6}\right)^4 3 < 17$$

und wegen $3{,}10 < \pi$ andererseits $17 < \frac{16}{9}\pi^2$, womit dieser Nachweis erbracht ist.

L.1.40 Wie üblich, seien die Seitenlängen von $\triangle ABC$ mit a, b, c bezeichnet. Dann gilt nach Voraussetzung $b < a < c$. Sind in dieser Reihenfolge r_1, r_2 und r_3 die Radien der Kreise um D, E bzw. F, die die „Sichelfläche" begrenzen, so gelten nach dem Satz des PYTHAGORAS die Gleichungen

$$2r_1^2 = a^2, \quad 2r_2^2 = b^2, \quad 2r_3^2 = c^2.$$

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt daher

$$r_1^2 + r_2^2 = r_3^2. \tag{1}$$

Die „Sichelfläche" entsteht, indem an $\triangle ABC$ über AB das Kreissegment angefügt wird und außerdem die sich nicht überlappenden Kreissegmente über BC und AC abgeschnitten werden. Da $\triangle AEC$ und $\triangle CDB$ gleichschenklig-rechtwinklig sind, ist $|\sphericalangle ECA| = 45° = |\sphericalangle DCB|$, so daß wegen $|\sphericalangle ACB| = 90°$ die Punkte E, C, D auf derselben Geraden liegen. Die Senkrechte zu g_{ED} durch C ist daher gemeinsame Tangente an die Kreise um E und D durch C, so daß sich die Bögen über AC und BC in C berühren. Die Flächeninhalte dieser Kreissegmente sind gleich

$$\frac{\pi}{4}r_i^2 - \frac{1}{2}r_i^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

(„Viertelkreisfläche minus Dreiecksfläche").
Als Flächeninhalt der „Sichelfläche" erhalten wir somit

$$\frac{1}{2}ab + \left(\frac{\pi}{4}r_3^2 - \frac{1}{2}r_3^2\right) - \left(\frac{\pi}{4}r_1^2 - \frac{1}{2}r_1^2\right) - \left(\frac{\pi}{4}r_2^2 - \frac{1}{2}r_2^2\right),$$

also

$$\frac{1}{2}ab + (r_3^2 - r_1^2 - r_2^2)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(r_3^2 - r_1^2 - r_2^2),$$

d.h. nach (1) $\frac{1}{2}ab$.

Ergebnis: „Sichelfläche" und Dreieck haben denselben Flächeninhalt.

Zusatzbemerkung: F liegt auf CD.

Beweis:
Die Dreiecke ABC und ABF sind rechtwinklig; darum liegen A, C, F und B auf dem Kreis k mit dem Durchmesser AB (Umkehrung des Satzes von THALES). Da F auf derselben Seite von g_{AB} wie E und D liegt, liegt es auch auf derselben Seite von g_{AB} wie C. Weiter gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2$$

und daher wegen

$$|AF| = |BF| \quad \text{und} \quad |AC| < |BC|$$

sicher $|BF| < |BC|$, so daß F auf dem A nicht enthaltenden von B und C begrenzten Bogen von k liegt.
Betrachten wir BF als Sehne, so folgt aus dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle BAF \cong \sphericalangle BCF$$

und, weil $\sphericalangle BAF$ Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABF ist,

$$|\sphericalangle BCF| = 45°.$$

Da auch $|\sphericalangle BCD| = 45°$ ist ($\sphericalangle BCD$ ist Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck CBD), liegt F auf CD.

L.1.41 a) Für den Flächeninhalt I_D des Dreiecks ABC gilt

$$I_D = \frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

Ferner gilt:

$$I_K = I_D - I_{D'},$$

wobei $I_{D'}$ die Summe der Flächeninhalte der drei im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Kreissektoren ist. Da nach dem Satz des PYTHAGORAS $|AB| = a\sqrt{2} > a$ gilt, schneiden sich die um A bzw. B jeweils mit dem Radius $\frac{a}{2}$ geschlagenen Kreise nicht (Bild L.1.41).
Diese drei Kreissektoren lassen sich zu einer Halbkreisscheibe zusammensetzen, da die Summe der Winkelgrößen im Dreieck 180° beträgt.
Daher gilt

$$I_{D'} = \frac{\pi a^2}{8}$$

und damit[1]

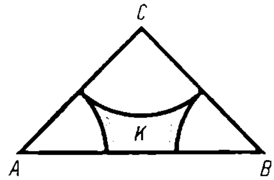


Bild L.1.41

$$I_K = I_D - I_{D'} = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{a^2}{2} \approx 0{,}2146 \cdot \frac{a^2}{2}.$$

[1] Aus einer Tafel entnimmt man $\pi = 3{,}1416 + \delta$ mit $|\delta| < 5 \cdot 10^{-5}$, woraus $1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}2146 - \frac{\delta}{4}$, $\frac{|\delta|}{4} < 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ folgt.

b) Wegen (1) beträgt somit der Inhalt I_K rund 21,46% des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

L.1.42 Wenn sich zwei der fünf Kreise berühren, so müssen sie außerhalb voneinander liegen, da sie gleiche Radien haben und nicht zusammenfallen. Berührt ein Kreis zwei benachbarte Quadratseiten, so liegt sein Mittelpunkt auf der Diagonalen, die von der gemeinsamen Ecke dieser Seiten ausgeht, da er von beiden Seiten gleichen Abstand hat.

a) Ist M der Schnittpunkt der Diagonalen des gegebenen Quadrats und M' der Mittelpunkt eines der zwei benachbarte Quadratseiten berührenden der fünf gegebenen Kreise, dann können die Ecken des Quadrates so mit A, B, C, D bezeichnet werden, daß M' auf AM und M auf AC liegen. Man erhält dann

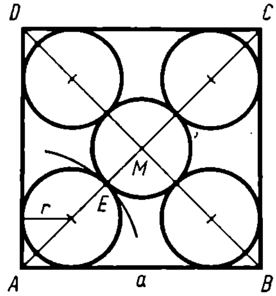


Bild L.1.42

$$|AM| = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad |MM'| = 2r$$

und nach dem 2. Strahlensatz (Satz IV.3)

$$|AM'| : |AM| = r : \frac{a}{2},$$

also

$$|AM'| = r\sqrt{2}.$$

So ergibt sich wegen $|AM| = |AM'| + |M'M|$

$$\frac{a}{2}\sqrt{2} = r\sqrt{2} + 2r.$$

Daraus erhält man

$$\frac{a}{2} = r + r\sqrt{2}$$

und somit die gesuchte Beziehung

$$r = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

b) Man erhält M als Schnittpunkt der Diagonalen des gegebenen Quadrats $ABCD$ und den Berührungspunkt E als Schnittpunkt von AM mit dem Kreis vom Radius $\frac{a}{2}$ um A; denn aus (1) und (2) folgt

$$|AM| - \frac{a}{2} = r,$$

d.h., $|EM|$ ist der Radius der gesuchten Kreise.
Auf den Diagonalen findet man nun die Mittelpunkte der vier übrigen Kreise, indem man von M jeweils eine Strecke der Länge $2r$ abträgt.

L.1.43 Bezeichnet man die Mittelpunkte der Kreise k, k', k_1, k_2 und k_3 der Reihe nach mit M, M', M_1, M_2 und M_3, den Berührungspunkt der Kreise k und k' mit B und den nicht auf BM_1 gelegenen Schnittpunkt von k_1 mit g_{BM_1} mit A, dann gilt

$$|MM_1| = r + r_1 \quad \text{sowie} \quad AB \perp MB \text{ (Bild L.1.43a).}$$

Außerdem gilt

$$|AB| = |MB| = r,$$

und daher

$$|M_1B| = r - r_1.$$

Daraus folgt nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle MBM_1$,

$$(r + r_1)^2 = (r - r_1)^2 + r^2,$$

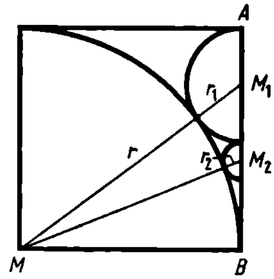


Bild L.1.43a

und somit

$$4rr_1 = r^2, \text{ d.h. wegen } r > 0$$

$$r_1 = \frac{r}{4}.$$

Ferner gilt

$$|MM_2| = r + r_2$$

und

$$|M_2B| = r \cdot 2r_1 - r_2 = \frac{r}{2} - r_2,$$

also nach dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle MBM_2$,

$$(r + r_2)^2 = \left(\frac{r}{2} - r_2\right)^2 + r^2,$$

und somit

$$3rr_2 = \frac{r^2}{4}, \text{ d.h. wegen } r > 0$$

$$r_2 = \frac{r}{12}.$$

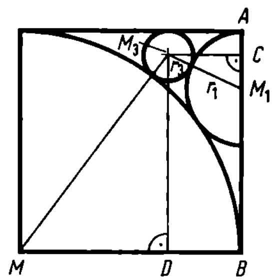


Bild L.1.43b

Weiterhin gilt

$$|M_1M_3| = r_1 + r_3 \quad \text{und} \quad |M_1C| = r_1 - r_3,$$

wobei C der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf AB ist (Bild L.1.43b).
Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle M_1CM_3$, erhält man dann

$$\begin{aligned} |M_3C|^2 &= (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 \\ &= 4r_1r_3 = rr_3, \end{aligned}$$

also

$$|M_3C| = \sqrt{r r_3}.$$

Schließlich gilt:

$$|MM_3| = r + r_3 \quad \text{und} \quad |M_3D| = r - r_3,$$

wobei D der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf MB ist, sowie

$$|MD| = r - |M_3C|,$$

also

$$|MD| = r - \sqrt{r r_3}.$$

Nach dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle\, MDM_3$, gilt dann

$$(r + r_3)^2 = (r - r_3)^2 + \left(r - \sqrt{r r_3}\right)^2,$$

oder auch

$$(r + r_3)^2 - (r - r_3)^2 = \left(r - \sqrt{r r_3}\right)^2,$$

und somit

$$4 r r_3 = r^2 - 2r\sqrt{r r_3} + r r_3,$$

folglich wegen $r > 0$

$$r - 3r_3 = 2\sqrt{r r_3}.$$

Quadriert man beide Seiten dieser Gleichung, so erhält man die Relation

$$r^2 - 6 r r_3 + 9 r_3^2 = 4 r r_3$$

und daher für r_3 die quadratische Gleichung

$$r_3^2 - \frac{10 r r_3}{9} + \frac{r^2}{9} = 0,$$

woraus sich für die Lösungen r_{3_1} und r_{3_2} die Beziehungen

$$r_{3_1} = \frac{5r}{9} + \sqrt{(25r^2 + 9r^2)\frac{1}{81}} = \frac{5r}{9} + \frac{4r}{9} = r$$

und

$$r_{3_2} = \frac{5r}{9} - \frac{4r}{9} = \frac{r}{9}$$

ergeben. Hiernach ist entweder

$$r_3 = r \quad \text{oder} \quad r_3 = \frac{r}{9}.$$

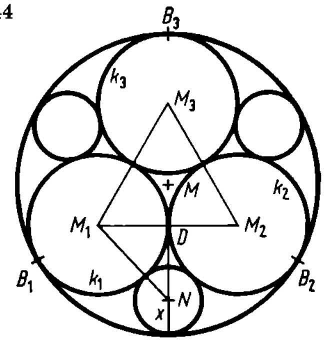
Wegen $r_3 < r$ folgt

$$r_3 = \frac{r}{9}.$$

Zusammenfassend gilt also

$$r_1 = \frac{r}{4},\ r_2 = \frac{r}{12} \text{ und } r_3 = \frac{r}{9}.$$

Bild L.1.44



L.1.44 Die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 der drei Kreise k_1, k_2, k_3 mit dem Radius r sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $2r$ (Bild L.1.44). M sei der Mittelpunkt von k, B_ν der Berührungspunkt von k mit k_ν. Dann folgt aus den Sätzen IV.10 und IV.20 sowie aus der Definition IV.7, daß $M_\nu \in MB_\nu$ ist. Daher ist

$$|MM_\nu| = |MB_\nu| - r$$

und wegen $|MB_1| = |MB_2| = |MB_3|$ auch $|MM_1| = |MM_2| = |MM_3|$. Folglich ist M der Mittelpunkt des Umkreises des gleichseitigen Dreiecks $M_1M_2M_3$ und damit Schnittpunkt der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks. Die Länge der Seitenhalbierenden von $\triangle\, M_1M_2M_3$ ist

$$r\sqrt{3}$$

(Höhe im gleichseitigen Dreieck); daher gilt nach Satz III.17

$$|MM_3| = \frac{2}{3} r\sqrt{3},$$

und der Radius von k ist

$$|MM_3| + r = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right).$$

Wir merken uns für den Mittelpunkt D von M_1M_2 noch die Gleichung

$$|MD| = \frac{r}{3}\sqrt{3}.$$

Ist nun N der Mittelpunkt desjenigen „kleineren Kreises", der die Kreise um M_1 und M_2 berührt, so ist

$$|DN| = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) - \frac{r}{3}\sqrt{3} - x = r\left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) - x.$$

Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle\, M_1DN$, gilt

$$|M_1N|^2 = |M_1D|^2 + |DN|^2,$$

woraus sich nacheinander die folgenden paarweise äquivalenten Gleichungen ergeben:

$$(r + x)^2 = r^2 + \left[r\left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) - x\right]^2,$$

$$r^2 + 2rx + x^2 = r^2 + r^2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) - 2rx\left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) + x^2,$$

$$2x\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}+2\right) = r\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \quad (\text{wegen } r \neq 0),$$

$$x\left(\sqrt{3}+6\right) = r\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$x = r\frac{2+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}} = r\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)}{\left(6+\sqrt{3}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)} = r\frac{9+4\sqrt{3}}{33}.$$

Bemerkung: Aus der letzten Darstellung von x folgt

$$0{,}48266r < x < 0{,}48269r,$$
$$0{,}4826\,r < x < 0{,}4827\,r.$$

L.1.45 Es sei C der Schnittpunkt des Halbkreises k mit der Mittelsenkrechten m von AB.
Ist x der Radius von k_3, so gilt

$$|M_2M_3| = |M_1M_3| = \frac{1}{2}|AM| + x, \tag{1}$$

daher liegt M_3 auf m.
Weiterhin sei P der Berührungspunkt von k_3 mit k_1. Bezeichnet man den Radius des Halbkreises k mit r, so gilt:

$$|M_3M| = r - x.$$

Wegen $|M_1M| = \frac{r}{2}$ und (1) gilt daher nach dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle\, M_1MM_3$,

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r-x)^2 = \left(\frac{r}{2}+x\right)^2.$$

Diese Gleichung ist wegen $r \neq 0$ mit $x = \frac{1}{3}r$ äquivalent.
Also liegt M auf der Mittelsenkrechten von AB im Abstand $\frac{r}{3}$ von C und $\frac{2}{3}r$ von M, also zwischen C und M.

L.1.46 Ist r der Radius des in der Aufgabe genannten Kreises um M, so gilt wegen der vorausgesetzten Berührung von innen nach Satz IV.20

$$|AM| = a - r, \quad |BM| = a - r.$$

Daher liegt M auf der Mittelsenkrechten m von AB. Da E auf m und auf AB liegt, sind die Dreiecke $\triangle AEM$ und $\triangle\, FEM$ bei E rechtwinklig und es folgt aus dem Lehrsatz des PYTHAGORAS

$$|ME|^2 = |AM|^2 - |AE|^2 = (a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{1}$$

sowie

$$|ME|^2 = |FM|^2 - |FE|^2 = \left(\frac{a}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2. \tag{2}$$

Wegen der vorausgesetzten Berührung von außen gilt nämlich nach Satz IV.20

$$|FM| = \frac{a}{4} + r.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(a - r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2,$$

also

$$\frac{3}{4}a^2 - 2ar + r^2 = \frac{ar}{2} + r^2$$

und weiter

$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{5}{2}ar,$$

$$r = \frac{3}{10}a.$$

Mit Hilfe von (1) erhält man hieraus

$$|ME|^2 = \left(\frac{7}{10}a\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{24}{100}a^2,$$

also

$$|ME| = \frac{\sqrt{6}}{5}a.$$

L.1.47 Der Inhalt p der gerasterten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Inhalt πr^2 des Kreises k und dem Inhalt f der in k gelegenen nicht-gerasterten Fläche

$$p = \pi r^2 - f.$$

Der Flächeninhalt s der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus der Summe der Inhalte der vier Kreisscheiben k_ν und f. Da die genannte Summe gleich

$$4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi r^2$$

ist, ergibt sich

$$s = \pi r^2 - f$$

und damit

$$s = p.$$

L.1.48 Es seien M der Mittelpunkt der gegebenen konzentrischen Kreise k_1 und k_2 und A und B die Endpunkte eines Durchmessers des inneren Kreises k_2.

Behauptung: $|PA|^2 + |PB|^2 = c$, wobei c nicht von $P \in k_1$ abhängt.

Beweis:

Es seien C bzw. D die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf g_{MP} und h die Senkrechte zu g_{AB} durch M (Bild L.1.48). Liegt P nicht auf h und nicht auf g_{AB}, so fallen C und D nicht mit A, B oder M zusammen, und es gilt für die Dreiecke ACM und BDM

$$|AM| = |BM| \text{ (als Radien des inneren Kreises)},$$
$$|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle BDM| \text{ (als rechte Winkel)},$$
$$|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle BMD| \text{ (als Scheitelwinkel)}.$$

Folglich sind die Dreiecke ACM und BDM kongruent nach dem Kongruenzsatz (wsw), und es gilt

$$|CM| = |DM| \quad \text{und} \quad |AC| = |BD|.$$

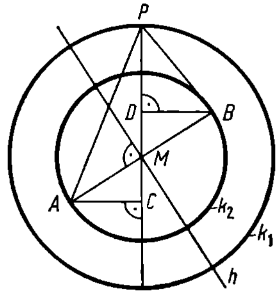


Bild L.1.48

O.B.d.A. kann angenommen werden, daß P auf derselben Seite von h wie B liegt. Dann folgt aus dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle ACP$,

$$|AP|^2 = |AC|^2 + (|CM| + |MP|)^2,$$

sowie, angewandt auf $\triangle BPD$,

$$|BP|^2 = |BD|^2 + (|MP| - |DM|)^2.$$

Wegen $|BD| = |AC|$ und $|DM| = |CM|$ folgt daraus

$$|BP|^2 = |AC|^2 + (|MP| - |CM|)^2.$$

Also ist

$$\begin{aligned} |AP|^2 + |BP|^2 &= |AC|^2 + |CM|^2 + 2\,|CM| \cdot |MP| + |MP|^2 \\ &\quad + |AC|^2 + |MP|^2 - 2\,|CM| \cdot |MP| + |CM|^2 \\ &= 2\,(|AC|^2 + |CM|^2 + |MP|^2). \end{aligned}$$

Weiter gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle ACM$,

$$|AM|^2 = |AC|^2 + |CM|^2,$$

und somit ist

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\,(|AM|^2 + |MP|^2) = c,$$

da $|AM|$ und $|MP|$ die Radien der konzentrischen Kreise sind.
Liegt P auf g_{AB}, und zwar o.B.d.A. auf der Verlängerung von AB über B hinaus, so erhält man

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |BM|)^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

$$\begin{aligned} |AP|^2 + |BP|^2 &= (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |AM|)^2 \\ &= 2\,(|AM|^2 + |MP|^2) = c. \end{aligned}$$

Liegt P auf h, so erhält man durch Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS auf $\triangle AMP$ und $\triangle MBP$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AM|^2 + |MP|^2 + |MP|^2 + |BM|^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\,(|AM|^2 + |MP|^2) = c.$$

L.1.49 Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Für $2r \geqq h_a$ wird die gesamte Parallelogrammfläche überstrichen,
2) Für $2r < h_a$ wird ein Teil der Parallelogrammfläche nicht überstrichen; es gilt nämlich, wenn h_b die zur Seite BC gehörige Höhenlänge des Parallelogramms $ABCD$ bezeichnet, $ah_a = bh_b$, und somit, weil $a > b$ vorausgesetzt ist, $h_a < h_b$, und daher auch $2r < h_b$.

Im Falle 1) läßt sich die überstrichene Fläche Φ in die Teilflächen Φ_1 bis Φ_9 zerlegen (Bild L.1.49a).
Dabei sind

Φ_1 und Φ_5 Rechtecke mit den Seitenlängen a und r,
Φ_3 und Φ_7 Rechtecke mit den Seitenlängen b und r,
Φ_2, Φ_4, Φ_6 und Φ_8 Kreissektoren, die im Radius r übereinstimmen und deren Winkel sich zu einem Winkel der Größe 360° ergänzen.
Daher kann man die vier Kreissektoren Φ_2, Φ_4, Φ_6 und Φ_8 zu einer Kreisscheibe zusammensetzen.

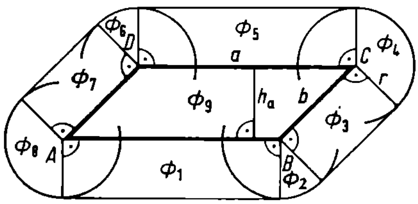


Bild L.1.49a

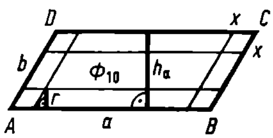


Bild L.1.49b

Also gilt für den Flächeninhalt $I(\Phi)$ der überstrichenen Fläche

$$\begin{aligned} I(\Phi) &= 2\,[I(\Phi_1) + I(\Phi_3)] + I(\Phi_9) + \pi r^2 \\ &= 2\,(ar + br) + \pi r^2 + ah_a, \end{aligned}$$

wobei $I(\Phi_k)$ den Flächeninhalt von Φ_k bedeutet.

Im Falle 2) entstehen außerhalb des Parallelogramms die gleichen Teilflächen wie im Falle 1). Die Fläche des Parallelogramms wird nicht völlig überdeckt. Es bleibt die Fläche Φ_{10} frei.
Φ_{10} ist ein Parallelogramm mit der Seitenlänge $(a - 2x)$ und der zugehörigen Höhenlänge $(h_a - 2r)$, wobei x die Seitenlänge eines der Eckrhomben ist (Bild L.1.49b).

Nach dem 2. Strahlensatz gilt

$$x : r = b : h_a;$$

und damit

$$x = \frac{b_r}{h_a}.$$

Also gilt für den Inhalt $I(\Phi')$ der überstrichenen Fläche im Falle 2)

$$\begin{aligned} I(\Phi') &= I(\Phi) - I(\Phi_{10}) \\ &= 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - \left(ah_a - 2br - 2ar + \frac{4br^2}{h_a}\right), \end{aligned}$$

d.h.

$$I(\Phi') = 4\left(ar + br - \frac{br^2}{h_a}\right) + \pi r^2.$$

L.1.50 Ist M der Mittelpunkt des Kreises durch P, P_1, P_2, P_3, P_4, so gilt nach Satz II.7

$$|\sphericalangle P_1MP_2| = 2|\sphericalangle P_1PP_2| = 90° \tag{1}$$

und entsprechend

$$|\sphericalangle P_2MP_3| = 90°, \tag{2}$$
$$|\sphericalangle P_3MP_4| = 90°. \tag{3}$$

Da P_1 und P_3 voneinander verschiedene Punkte desselben Kreises sind, folgt aus (1) und (2)

$$|\sphericalangle P_1MP_3| = 180°$$

und entsprechend

$$|\sphericalangle P_2MP_4| = 180°,$$

also sind P_1P_3 und P_2P_4 Durchmesser desselben Kreises, die wegen (2) aufeinander senkrecht stehen. Daher ist nach Satz III.43.1 das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat.

L.1.51 Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, bei dem keine Seite Durchmesser des Umkreises ist. Dann sind die Tangenten an den Umkreis von $ABCD$ in benachbarten Eckpunkten nicht parallel zueinander und haben daher einen Schnittpunkt. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Tangenten in A und B mit E und entsprechend den der Tangenten in B und C mit F, in C und D mit G und den der in D und A mit H. E, F, G, H sind (als Folge von Satz IV.12) paarweise voneinander verschieden.
Aufgrund einer bekannten Eigenschaft von Tangentenabschnitten (Satz IV.12) gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$|AE| = |BE|, \quad |BF| = |CF|, \quad |CG| = |DG|, \quad |DH| = |AH|.$$

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$, so gilt außerdem

$$|MA| = |MB| = |MC| = |MD|.$$

Daher ist jedes der Vierecke $AEBM$, $BFCM$, $CGDM$, $DHAM$ ein Drachenviereck (Satz III.38.1). Infolgedessen halbieren ihre Diagonalen ME, MF, MG bzw. MH die Winkel $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle BFC$, $\sphericalangle CBD$ bzw. $\sphericalangle DMA$ (Satz III.38.2) und stehen auf den Strecken AB, BC, CD bzw. DA senkrecht.

a) Ist nun $ABCD$ Trapez, so kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $AB \parallel CD$ ist. In diesem Fall ist auch die auf AB senkrechte Strecke ME parallel zu der auf CD senkrechten Strecke MG. Folglich liegen ME und MG auf der Geraden g_{EG}, so daß die Diagonale EG von $EFGH$ die Winkel $\sphericalangle HEF$ und $\sphericalangle HGF$ halbiert. Daher ist nach dem Kongruenzsatz (sww) $\triangle EFG$ zu $\triangle EHG$ kongruent. Wegen $F \neq H$ liegen diese Dreiecke somit auf verschiedenen Seiten von g_{EG}, und zwar spiegelbildlich zu g_{EG}. Folglich ist $EFGH$ ein Drachenviereck (Def. III.23).

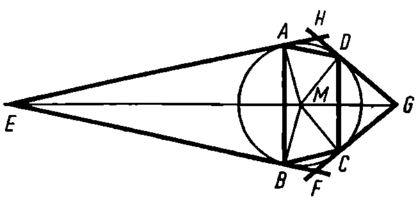


Bild L.1.51a

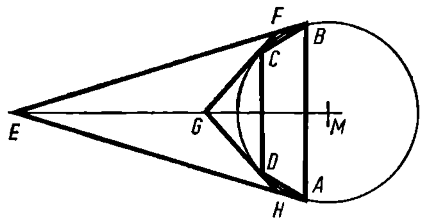


Bild L.1.51b

b) Ja. Dazu ist zu zeigen:
Ist $EFGH$ Drachenviereck, so ist $ABCD$ Trapez.
Beweis:
Wenn $EFGH$ Drachenviereck ist, so kann es o. B. d. A. zu g_{EG} symmetrisch angenommen werden, so daß g_{EG} jeden der beiden Winkel $\sphericalangle HEF$ und $\sphericalangle FGH$ halbiert. Wegen

$$\sphericalangle HEF = \sphericalangle AEB \quad \text{und} \quad \sphericalangle HGF = \sphericalangle DGC \tag{1}$$

halbiert g_{EG} auch die beiden Winkel auf den rechten Seiten von (1). Da g_{ME} den Winkel $\sphericalangle AEB$ und g_{MA} den Winkel $\sphericalangle DGC$ halbiert (Satz IV.12) ist $g_{ME} = g_{EG} = g_{MG}$. Außerdem steht g_{ME} auf AB und g_{MG} auf DC senkrecht. Daher steht sowohl AB als auch DC auf g_{EC} senkrecht, so daß

$$AB \parallel CD$$

gilt.

L.1.52 *1. Lösung:*

Man betrachte den Mechanismus in einer fixierten Stellung, bei der $A \neq B$ und $P \neq P'$ ist. Da die beiden Vierecke $AOBP'$ und $APBP'$ Drachenvierecke sind, gilt für ihre Diagonalen nach Satz III.38.2

$$AB \perp OP' \quad \text{und} \quad AB \perp PP',$$

und demnach liegen O, P und P' auf derselben Geraden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit g_{AB} ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus $APBP'$ und liegt daher auf AB. Er werde mit C bezeichnet.
Der Punkt O liegt außerhalb der Strecke PP'.
Läge O auf PP', so hätte die Größe eines der beiden Winkel $\sphericalangle AOP$, $\sphericalangle AOP'$ einen Wert, der größer oder gleich 90° ist, da ihre Summe 180° beträgt. Daher wäre in einem der Dreiecke POA, $P'OA$ der Winkel mit dem Scheitel O der größte im betreffenden Dreieck. Folglich wäre PA oder $P'A$ nach Satz III.10 die längste Seite im Dreieck, was wegen der Voraussetzung $|P'A| = |PA| < |OA|$ nicht möglich ist.
Daher gilt wegen $|PC| = |P'C|$

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OC| - |CP|)(|OC| + |CP|) = |OC|^2 - |CP|^2;$$

ferner ist nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$|OC|^2 = |OA|^2 - |AC|^2$$

und

$$|CP|^2 = |PA|^2 - |AC|^2,$$

woraus sich ergibt, daß

$$|OP| \cdot |OP'| = |OA|^2 - |PA|^2 \qquad (1)$$

gilt, also $|OP| \cdot |OP'|$ nicht von der Stellung des Mechanismus abhängt.

Bemerkung: In den Grenzfällen $A = B$ oder $P = P'$ ist $APBP'$ kein Rhombus. Es gilt aber trotzdem (1); denn im Fall $A = B$ liegen P und P' auf der Geraden g_{OA}, und dann gilt:

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OA| - |PA|)(|OA| + |PA|) = |OA|^2 - |PA|^2,$$

und im Fall $P = P'$ ist P Fußpunkt der Höhe auf AB im gleichschenkligen Dreieck AOB, und es folgt aus dem Satz des PYTHAGORAS

$$|OP| \cdot |OP'| = |OP|^2 = |OA|^2 - |PA|^2.$$

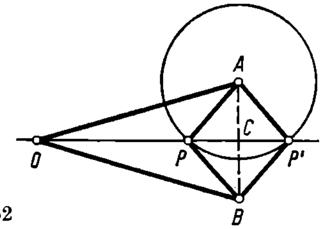


Bild L.1.52

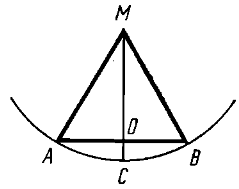
2. Lösung (Bild L.1.52):
O.B.d.A. kann angenommen werden, daß OA festliegt. O, P und P' liegen auf derselben Geraden (siehe erste Lösung), welche Sekante (im Grenzfall Tangente) des Kreises k mit dem Radius $|PA|$ um A ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Sekantentangentensatz (vgl. Satz IV.11):

$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2,$$

wenn Q der Berührungspunkt einer Tangente von O an k ist.

L.1.53 Es sei M der Mittelpunkt des Kreises. Weiter seien C eine Ecke und A und B die beiden C benachbarten Ecken des Zwölfecks (Bild L.1.53). Dann gilt:

Bild L.1.53



$$r = |MA| = |MC| = |MB| = |AB|$$

(AB ist Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks) und

$$MC \perp AB$$

($ACBM$ ist wegen $|AM| = |BM|$ und $|AC| = |BC|$ nach Satz III.38.1 ein Drachenviereck).

a) Die Strecken AB und MC haben einen Schnittpunkt D. Setzt man $|DC| = x$, dann gilt

$$x = r - |MD| = r - r\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(MD ist Höhe im gleichseitigen Dreieck MAB).
Bezeichnet $s = |AC| = |BC|$ die Seitenlänge des Zwölfecks, so gilt nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS, angewandt auf das Dreieck CBD,

$$s^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3} = r^2\left(2 - \sqrt{3}\right),$$

also

$$s = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Der Umfang des Zwölfecks beträgt daher $12r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt I_1 des Dreiecks MBC. Es gilt

$$I_1 = \frac{1}{2} r \cdot r \sin 30° = \frac{r^2}{4}.$$

Der Flächeninhalt $12I_1$ des Zwölfecks beträgt demnach $3r^2$.

c) Es ist

$$12r\sqrt{2 - \sqrt{3}} : 2r\pi \approx 3{,}106 : \pi \approx 0{,}989.$$

Weil

$$3{,}1055^2 < 36\left(2 - \sqrt{3}\right) < 3{,}1065^2,$$

also

$$3{,}1055 < 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < 3{,}1065$$

gilt und wegen $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$

$$0{,}9885 \cdot 3{,}1416 < 3{,}1055 < 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < 3{,}1065 < 0{,}9895 \cdot 3{,}1415$$

ausfällt.

Der Umfang des Zwölfecks ist also um etwa 1,1 % kleiner als der des Kreises.

d) Wegen $0{,}9549 \cdot 3{,}1416 < 3 < 0{,}955 \cdot 3{,}1415$ ist

$$3r^2 : \pi r^2 = 3 : \pi \approx 0{,}955.$$

Der Flächeninhalt des Zwölfecks ist also um etwa 4,5 % kleiner als der des Kreises.

L.1.54 Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 die Scheitelpunkte der Winkel an den Spitzen des Sternes (Bild L.1.54) und für $i = 1, \ldots, 5$ sei α_i die Größe des Innenwinkels mit dem Scheitel A_i.

Geht man – bildlich – von A_1 mit Blickrichtung nach A_2 auf A_1A_2 entlang bis A_2, dreht sich in A_2 im Gegenuhrzeigersinn herum, bis zum erstenmal A_3 in Blickrichtung liegt, geht dann auf A_2A_3 entlang bis A_3, dreht sich dort wieder im ausgezeichneten Sinn, bis zum erstenmal A_4 in Blickrichtung liegt, geht auf A_3A_4 nach A_4 und so fort, bis man in A_1 wieder die Ausgangsstellung erreicht hat, so hat man sich insgesamt zweimal um sich selbst gedreht.

Da diese Drehung in einer Ebene stattfindet, beträgt die Größe des Drehwinkels $2 \cdot 360°$ (bei der von uns vorausgesetzten euklidischen Geometrie).

Andererseits dreht man sich bei dieser „Wanderung" für $i = 1, \ldots, 5$ im Punkt A_i um einen Winkel der Größe $180° - \alpha_i$.

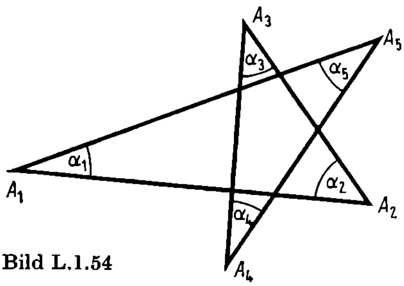


Bild L.1.54

Somit gilt:

$$5 \cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = 2 \cdot 360°,$$

also

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180°.$$

L.1.55 Es gilt

$$|P_0M| = |P_1M| = |P_2M| = \cdots = r$$

und

$$|\sphericalangle P_1P_0M| = |\sphericalangle MP_1P_0| = |\sphericalangle P_2P_1M| = |\sphericalangle MP_2P_1| = \cdots = \alpha,$$

da die Größe des Einfallswinkels gleich der Größe des Reflexionswinkels ist, Basiswinkel in jedem gleichschenkligen Dreieck kongruent sind und $|\sphericalangle P_1P_0M| = \alpha$ (Scheitelwinkel) ist.

Daher sind die Dreiecke P_0MP_1, P_1MP_2, P_2MP_3 usw. untereinander kongruent, und es gilt für die Bögen:

$$\widehat{P_0P_1} \cong \widehat{P_1P_2} \cong \widehat{P_2P_3} \cong \cdots$$

und

$$|\sphericalangle P_0MP_1| = |\sphericalangle P_1MP_2| = |\sphericalangle P_2MP_3| = \cdots = \pi - 2\alpha.$$

a) Dann ist

$$
\begin{aligned}
|\widehat{P_0P_n}| &= |\widehat{P_0P_1}| + |\widehat{P_1P_2}| + \cdots + |\widehat{P_{n-1}P_n}| \\
&= (\pi - 2\alpha)\, r + (\pi - 2\alpha)\, r + \cdots + (\pi - 2\alpha)\, r \\
&= n\,(\pi - 2\alpha)\, r .
\end{aligned}
$$

b) Für $n = 10$ gilt in diesem Falle:

$$|\widehat{P_0P_{10}}| = 10\,(\pi - 2\alpha)\, r = 2\pi r ,$$

also

$$\alpha = \frac{2}{5}\pi .$$

c) Fällt P_n mit P_0 zusammen und ist $\alpha = \frac{5}{18}\pi$, so gilt:

$$n\left(\pi - \frac{5}{9}\pi\right) r = k\, 2\pi r \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

(1) ist äquivalent mit

$$n = \frac{9}{2} k . \tag{2}$$

Da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, wird (2) genau dann erfüllt, wenn $k = 2k'$ mit $k' > 0$ und k' ganzzahlig gilt.
Daher ist

$$n = 9k' \ (k' = 1, 2, 3, \ldots).$$

L.1.56 Die gesuchte Anzahl werde mit A_n bezeichnet. Außerdem wird der Einfachheit der Bezeichnung halber o. B. d. A. angenommen, daß der Umkreis U von $P_1P_2 \ldots P_n$ den Radius 1 hat. Dann wird U durch die P_i in n Bögen k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zerlegt, deren jeder die Länge $\frac{2\pi}{n}$ hat.
Drei Eckpunkte P_k, P_l, P_m, von $P_1P_2 \ldots P_n$ sind aufgrund des Peripheriewinkelsatzes und seiner Umkehrung (Sätze II.8′ und II.8″) genau dann die Ecken eines bei P_l stumpfwinkligen Dreiecks, wenn die Länge des von P_k und P_m begrenzten, P_l enthaltenden Bogens b von U kleiner als π ist.
Daraus erkennt man, daß es in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ keine stumpfwinkligen Dreiecke der geforderten Art gibt. Es ist also $A_3 = A_4 = 0$. Daher wird für das Folgende $n \geqq 5$ vorausgesetzt.
Ist a_n die Anzahl aller derjenigen zu betrachtenden Dreiecke, die denselben Punkt P_l als Ecke haben und dort stumpfwinklig sind, so ist $A_n = n a_n$, da jede Ecke P_l des n-Ecks $P_1P_2 \ldots P_n$ wegen dessen Regelmäßigkeit bei dieser Betrachtung gleichberechtigt ist und zu voneinander verschiedenen P_l niemals gleiche Dreiecke gehören.

Zur Berechnung von a_n beachten wir zunächst, daß der obengenannte Bogen b sich aus j der k_i zusammensetzt, wobei, da die Länge von b kleiner als π ist, $2 \leqq j \leqq N$ mit

$$N = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{bei ungeradem } n \\ \dfrac{n-2}{2} & \text{bei geradem } n \end{cases}$$

gilt.
Der Bogen b kann dabei nur so liegen, daß P_l einer der $j - 1$ von den Endpunkten von b verschiedenen Endpunkte der b bildenden k_i ist. Folglich gilt:

$$a_n = \sum_{j=2}^{N} (j-1) = \sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{(N-1)N}{2}.$$

Daraus ergibt sich für A_n in den Fällen $n \geqq 5$:

$$A_n = n a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{8} n (n-1)(n-3) & \text{für ungerades } n \\ \dfrac{1}{8} n (n-2)(n-4) & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Wegen $A_3 = A_4 = 0$ ist diese Formel auch für $n = 3$ und $n = 4$ richtig.

L.1.57 Die Aussage 1. ist wahr.
Der Mittelpunkt des Kreises und je zwei benachbarte Ecken des Vielecks sind die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Je zwei dieser Dreiecke sind nach dem Kongruenzsatz (sss) untereinander kongruent. Daher sind auch alle einander entsprechenden Winkel dieser Dreiecke kongruent und somit die Winkel des Vielecks.
Die Aussage 2. ist falsch, sie gilt z. B. nicht, wenn das einbeschriebene Vieleck ein nicht quadratisches Rechteck ist.
Die Aussage 3. ist i. allg. falsch, z. B. gilt sie nicht, wenn das umbeschriebene Vieleck ein nicht quadratischer Rhombus ist.
Die Aussage 4. ist wahr.
Zieht man vom Mittelpunkt des Kreises die Verbindungsstrecken zu den Ecken des Vielecks, so werden durch diese Strecken nach Satz IV.12 die Winkel des Vielecks halbiert, da die Seiten des Vielecks Tangenten an den Kreis sind. Je zwei benachbarte Ecken des Vielecks sind zusammen mit dem Mittelpunkt des Kreises die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Je zwei dieser Dreiecke sind nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent, da sowohl ihre Basiswinkel als auch ihre Schenkel kongruent sind. Daher sind auch die Seiten des Vielecks gleich lang.

L.1.58 Es sei d der kleinste aller Abstände je zweier der gegebenen Punkte. O.B.d.A. seien P_1 und P_2 zwei Punkte mit $|P_1P_2| = d$, M sei der Mittelpunkt von P_1P_2 und k sei der Kreis mit dem Durchmesser P_1P_2. Dann liegt weder im

Innern von k noch auf k selbst einer der Punkte $P_3, \dots, P_n$, weil sonst der Abstand eines solchen Punktes von P_1 oder P_2 kleiner als d wäre.
Weiterhin seien k_3 bzw. $k_4, \dots$ bzw. k_n diejenigen Kreise, die durch P_1, P_2, P_3 bzw. $P_1, P_2, P_4, \dots$ bzw. P_1, P_2, P_n gehen.
Unter diesen gibt es einen Kreis mit kleinstem Durchmesser. k_i sei ein Kreis, der im Vergleich zu den anderen Kreisen $k_3, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n$ den kleinsten Durchmesser hat. O.B.d.A. kann $i = 3$ angenommen werden.

Behauptung: k_3 ist ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Beweis:
Es sei k' ein Kreis durch P_1 und P_2 mit dem Mittelpunkt M' und dem Radius $r' > \frac{d}{2}$. Dann liegt M' auf der Mittelsenkrechten m von P_1P_2 und k' schneidet m in zwei Punkten, von denen der eine innerhalb und der andere, der mit S' bezeichnet werde, außerhalb von k liegt. Für S' gilt dann

$$\begin{aligned} |MS'| &= |M'S'| + |MM'| \\ &= |M'S'| + \sqrt{|M'P_1|^2 - |MP_1|^2} \\ &= r' + \sqrt{r'^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ist nun S_ν, $\nu \geqq 3$, der außerhalb von k gelegene Schnittpunkt von k_ν mit m, so gilt wegen $r_\nu \geqq r_3$, wenn $\nu \geqq 4$ ist, aufgrund von (1)

$$|MS_\nu| \geqq |MS_3|. \tag{2}$$

Daher liegt der S_ν enthaltende von P_1 und P_2 begrenzte Bogen b_ν von k_ν nicht innerhalb von k_3; denn M liegt innerhalb von k_3 und daher liegt wegen (2) S_ν und damit b_ν nicht innerhalb von k_3. Der zu b_ν komplementäre Bogen von k liegt dagegen innerhalb von k. Da P_ν nicht innerhalb von k liegen kann, liegt P_ν auf b_ν und damit nicht innerhalb von k_3.

L.1.59 Wir beweisen zunächst den folgenden *Hilfssatz:* Sind P_i, P_j, P_k drei der n zu betrachtenden Punkte und enden die von P_i und P_j ausgehenden Vektoren beide in P_k, so ist $|\sphericalangle P_iP_kP_j|$ größer als 60°.

Beweis:
Wäre $|\sphericalangle P_iP_kP_j| \leqq 60°$, so bildeten P_i, P_j, P_k die Ecken eines Dreiecks, in dem nicht der Winkel bei P_k größer als jeder der beiden anderen Winkel wäre.
Daher wäre nicht die Seite P_iP_j länger als jede der beiden anderen Seiten. Folglich würden nicht beide von P_i und P_j ausgehenden Vektoren in P_k enden. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.
Ist jetzt P_n irgendeiner der n Punkte, so folgt aus dem Hilfssatz, daß höchstens 5 Vektoren in P_n enden können; denn anderenfalls müßten wenigstens zwei von ihnen einen Winkel einschließen, der nicht größer als 60° ist.
Ist $n \leqq 5$, so können höchstens $n - 1$ der Vektoren in P_n enden, da nicht mehr nicht von P_n ausgehende Vektoren vorhanden sind.
Um zu zeigen, daß die angegebenen Schranken die Maximalzahlen sind, genügt es, ein Beispiel anzugeben, bei dem diese Werte angenommen werden.

Wir denken uns 5 von P_n ausgehende Strahlen s_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, von denen keine zwei einen Winkel, dessen Größe kleiner als 72° ist, einschließen. Im Falle $n \geqq 6$ liege P_i auf s_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, (im Falle $n \leqq 5$ nur die P_i mit $i = 1, 2, \ldots, n - 1$) und habe von P_n den Abstand $1 + i \cdot d$, wobei d eine noch näher zu bestimmende Zahl bedeutet, für die $0 < d < 0{,}1$ gilt.
Falls weitere P_i vorhanden sind (also in den Fällen $n \geqq 7$), so mögen diese außerhalb des Kreises k um P_n mit dem Radius 3 liegen. Dann enden die von den P_i ($i = 1, \ldots, 5$ im Falle $n \geqq 6$; $i = 1, \ldots, n - 1$ im Falle $n < 6$) ausgehenden Vektoren alle in P_n. Dazu ist zu zeigen, daß für diese P_i stets P_n der P_i nächtgelegene Punkt ist.
Jeder der außerhalb k gelegenen Punkte hat von jedem der in Rede stehenden P_i einen Abstand größer als 1,5, während P_n von jedem dieser P_i einen Abstand kleiner als $1 + 5 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$ hat. Der Abstand irgend zweier der ersten fünf (bzw. $n - 1$) P_i ist größer als die Seitenlänge eines einem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks. Diese beträgt

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\pi}{5} &= 2\sin 36^\circ \\ &= 2\sin 30^\circ + 2\,(\sin 36^\circ - \sin 30^\circ) \\ &= 1 + 2\,(\sin 36^\circ - \sin 30^\circ). \end{aligned}$$

Wählt man nun d so, daß außer $0 < d < 0{,}1$ noch $5d < 2\,(\sin 36^\circ - \sin 30^\circ)$ ausfällt (wozu nach einer Zahlentafel $d = 0{,}035$ ausreicht), so folgt

$$d < \frac{2}{5}\,(\sin 36^\circ - \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{10}$$

und der Abstand zweier der ersten fünf (bzw. $n - 1$) P_i ist stets größer als der Abstand jedes dieser P_i von P_n.

L.1.60 Zu jedem Punkt Q des Quadrats $ABCD$ gibt es in ε genau zwei Punkte R und R', deren jeder mit P und Q zusammen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bildet, so daß also

$$|\sphericalangle RPQ| = |\sphericalangle R'PQ| = 60^\circ$$

ist.
Daher ist die zu beschreibende Menge $\mathfrak{M}$ die Vereinigungsmenge der beiden Bilder des Quadrates $ABCD$ nach den Drehungen der Ebene ε um 60° im positiven bzw. negativen Sinn mit dem Drehzentrum P, $\mathfrak{M}$ besteht also aus zwei zu $ABCD$ kongruenten Quadraten.

L.1.61 Mit ϱ werde der Radius des Inkreises, mit s die Länge einer Seite und mit I der Flächeninhalt des Fünfecks bezeichnet.
Weiterhin werden mit h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 die Abstände eines beliebigen Punktes P der Ebene von den die entsprechenden Seiten des Fünfecks enthaltenden Geraden bezeichnet.

1. Fall:

P sei ein beliebiger Punkt im Innern des Fünfecks.
Verbindet man den Punkt P mit den Eckpunkten des regelmäßigen Fünfecks (Bild L.1.61 a), so ist der Flächeninhalt des Fünfecks gleich der Summe der Flächeninhalte der 5 entstehenden Dreiecke.
Es gilt also

$$I = \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5). \tag{1}$$

Hieraus ergibt sich insbesondere, wenn P der Mittelpunkt des Inkreises ist,

$$I = \frac{s}{2} \cdot 5\varrho. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$5\varrho = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5.$$

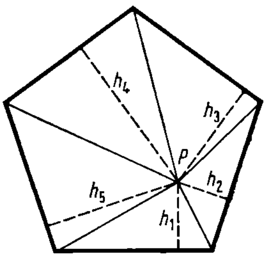


Bild L.1.61 a

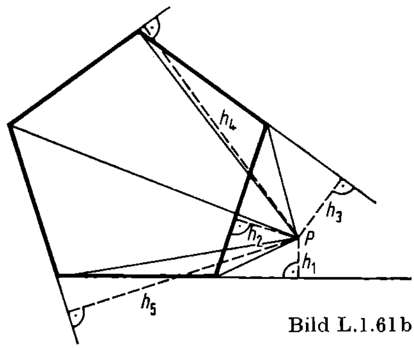


Bild L.1.61 b

2. Fall:

P liege auf einer Seite des Fünfecks. Dann ist mindestens ein Abstand, d.h. mindestens eine der Größen h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 gleich Null.
O.B.d.A. sei $h_5 = 0$.
Man erhält dann analog zu Fall 1

$$I = \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

wobei, falls P Ecke des Fünfecks ist, auch noch genau ein weiteres der h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) Null ist.
Es gilt also ebenfalls:

$$5\varrho = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5.$$

3. Fall:

P liegt außerhalb des Fünfecks und auf keiner Geraden, die eine Seite des Fünfecks enthält (Bild L.1.61 b).
Verbindet man den Punkt P mit den Eckpunkten des regelmäßigen Fünfecks, so erhält man 5 Dreiecke, für die die Länge jeder Grundlinie gleich s ist und deren Höhen die Längen h_1, h_2, h_3, h_4 bzw. h_5 haben.
Der Flächeninhalt des Fünfecks ist in diesem Falle kleiner als die Summe der Flächeninhalte der 5 entstandenen Dreiecke.

Also gilt

$$\frac{5 \cdot s \cdot \varrho}{2} < \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5),$$

d.h.

$$5\varrho < h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5.$$

4. Fall:

Liegt P außerhalb des Fünfecks und auf einer Geraden, die eine Seite des Fünfecks enthält, so ist eine der Größen h_i gleich Null, etwa $h_5 = 0$. Dann erhält man 4 Dreiecke und analog zu Fall 3 ist

$$\frac{5 \cdot s \cdot \varrho}{2} < \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4),$$

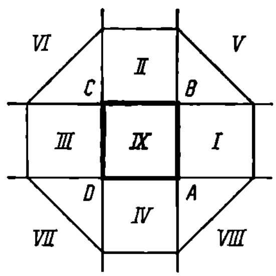
wobei, falls P Schnittpunkt zweier der erwähnten Geraden ist, auch noch genau ein weiteres $h_i = 0$ ist. Es gilt also auch in diesem Fall:

$$5\varrho < h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5.$$

Die Menge aller Punkte, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, ist also die Menge aller Punkte der Fünfecksfläche.

L.1.62 Die Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder, die in Bild L.1.62 mit I bis VIII bezeichnet sind, wobei die Punkte der Trennungsgeraden als zu allen ihnen anliegenden Feldern gehörig betrachtet werden.

Bild L.1.62



Wir betrachten zunächst das Feld I. Die Abstände jedes Punktes P dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ bezeichnen wir mit e_{AB}, e_{BC}, e_{CD} bzw. e_{DA}.

Dann gilt:

$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CD} + e_{DA} = 4.$$

Weil P zwischen den parallelen Geraden g_{BC} und g_{DA} liegt, ist $e_{BC} + e_{DA} = 1$. Da die Geraden g_{AB} und g_{CD} parallel sind, und weil g_{CD} und P auf verschiedenen Seiten von g_{AB} liegen, ist $e_{CD} = e_{AB} + 1$.

Daher folgt:

$$2e_{AB} + 1 + 1 = 4,$$

d.h.

$$e_{AB} = 1.$$

Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf einer Parallelen zu g_{AB} im Abstand 1 liegen. Analog erhält man Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Wir betrachten nun das Feld V.
Die Abstände jedes Punktes Q dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA} bezeichnen wir mit f_{AB}, f_{BC}, f_{CD} bzw. f_{DA}.
Dann gilt:

$$f_{AB} + f_{BC} + f_{CD} + f_{DA} = 4.$$

Analog zum Fall $P \in \mathrm{I}$ ist

$$f_{CD} = f_{AB} + 1 \quad \text{und} \quad f_{DA} = f_{BC} + 1.$$

Daraus folgt

$$2f_{AB} + 2f_{BC} + 2 = 4,$$

d.h.

$$f_{AB} + f_{BC} = 1.$$

Q liegt daher auf der zu g_{AC} parallelen Diagonalen des aus $ABCD$ durch Spiegelung an D entstehenden Quadrates.
Analog erhält man in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der schon gefundenen Strecken in den Feldern II und III, III und IV bzw. IV und I übereinstimmen.
Im Innern des Quadrats (Feld IX) können keine derartigen Punkte liegen, da der Abstand jedes Punktes im Innern von jeder der Quadratseiten kleiner als die Seitenlänge ist, was dann auch für die entsprechenden Summen gilt.
Die gesuchte Punktmenge besteht also aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte alle auf demselben Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ liegen und von dessen Seiten jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates $ABCD$ parallel und kongruent ist.

L.1.63 a) Wir betrachten zunächst den Mittelpunkt Z der Strecke XY. Wegen $|\sphericalangle XAY| = 90°$ folgt aus der Umkehrung des Satzes von THALES, daß Z Mittelpunkt des Kreises durch X, A und Y ist und damit

$$|AZ| = 3$$

gilt. Der Schwerpunkt S von $\triangle AYX$ ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, und dieser teilt AZ im Verhältnis $2:1$ (Satz III.17), d.h. es ist

$$|AS| = 2.$$

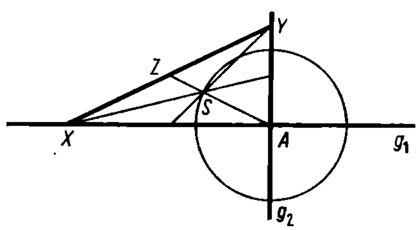


Bild L.1.63

Dies gilt für jede zugelassene Lage von X und Y, so daß jedes derartige S auf dem Kreis vom Radius 2 um A liegt (Bild L.1.63).

b) Liegt S auf dem Kreis um A mit dem Radius 2, so läßt sich SA stets über S hinaus um $\frac{|SA|}{2}$ verlängern. Der so entstandene Punkt heiße Z. Liegt S und damit Z nicht auf den gegebenen Geraden, so bestimmen

die Schnittpunkte X, Y und A des Kreises um Z mit dem Radius $|ZA|$ mit den gegebenen Geraden ein rechtwinkliges Dreieck AXY, dessen Hypotenusenmittelpunkt Z ist. AZ ist also Seitenhalbierende. $|XY|$ ist als Länge des Durchmessers des Kreises gleich $2|AZ| = 6$. S teilt AZ nach Konstruktion im Verhältnis $2:1$, ist also Schwerpunkt von $\triangle AXY$.
Der gesuchte geometrische Ort ist also der Kreis vom Radius 2 um den Punkt A mit Ausnahme seiner Schnittpunkte mit den beiden gegebenen Geraden.

L.1.64 *Beweis des Hilfssatzes:*
Es seien S_1 und S_2 die beiden zweiten Schnittpunkte der Strahlen mit k und $\alpha = |\sphericalangle S_1M'S_2|$ (Bild L.1.64).
Dann ist nach dem Satz über den Zentriwinkel (Satz II.7″) α halb so groß wie $|\sphericalangle S_1MS_2|$, wenn M der Mittelpunkt von k ist. Sind r und r' die Radien von k bzw. k', so gilt für die Länge l des Bogens $\overset{\frown}{S_1S_2}$ und die Länge l' des Bogens $\overset{\frown}{S_1'S_2'}$

$$l : \pi r = 2\alpha : 180° \quad \text{und}$$

$$l' : \pi r' = \alpha : 180°,$$

und somit wegen $r' = 2r$

$$l : l' = 2r : r' = 1\,.$$

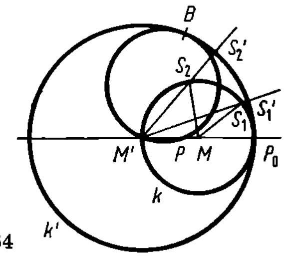


Bild L.1.64

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.
Zur Ermittlung der Bahnkurve des Punktes P gehen wir von der Lage von P aus, in der P Berührungspunkt von k und k' ist. In dieser Lage, in die jeder Punkt von k bei der Rollbewegung einmal kommt, wenn diese genügend lange fortgesetzt wird, bezeichnen wir P mit P_0. B sei der Berührungspunkt von k und k' bei einer anderen Lage von k. Ist $|\sphericalangle P_0M'B| < 90°$, so schneidet die Strecke $M'P_0$ den Kreis k in dieser Lage ein zweites Mal. Wir zeigen, daß dieser Schnittpunkt P_1 der auf k feste Punkt P ist.
Nach dem Hilfssatz hat der kürzere der Bögen $\overset{\frown}{BP_1}$ die gleiche Länge wie der kürzere der Bögen $\overset{\frown}{BP_0}$. Folglich muß der Schnittpunkt P_1 in der Anfangslage der Punkt P_0 gewesen sein. Da es nur einen Punkt auf k gibt, der diese Eigenschaft hat, ist der Schnittpunkt P_1 tatsächlich der auf k festgehaltene Punkt P.
Mithin liegt P bei jeder Lage von k, bei der $|\sphericalangle P_0M'B| < 90°$ ist, auf der Strecke $M'P_0$. Ist $|\sphericalangle BM'P_0| = 90°$, so fallen P und M' zusammen. Da es umgekehrt durch jeden Punkt von $M'P_0$ einen Kreis vom Radius r durch M' gibt, der k' in einem Punkt B berührt (wobei $|\sphericalangle P_0M'B| < 90°$ ausfällt), wird die Strecke $M'P_0$ von P auch vollständig durchlaufen. Wird die Bewegung so lange fortgesetzt, bis B wieder in P_0 ankommt, so hat P aus Symmetriegründen den Durchmesser von k' durch P_0 genau einmal hin und her durchlaufen.

Ergebnis:
Ist P ein beliebiger auf k festgehaltener Punkt, so durchläuft er bei der Rollbewegung (wenn diese genügend lange fortgesetzt wird) den durch ihn gehenden Durchmesser von k', der im Fall $P = M'$ sinngemäß als der k berührende Durchmesser von k' zu verstehen ist. (Dies entspricht dem Fall $|\sphericalangle P_0MB| = 90°$).

L.1.65 Es seien M_1 und M_2 der Drehpunkt von Stopp- bzw. Sekundenzeiger, A_1 bzw. A_2 ihre Endpunkte zu Beginn des Bewegungsvorganges (so daß also M_1 auf A_1M_2 liegt), E_1 und E_2 ihre Stellungen zu einem anderen Zeitpunkt während der Bewegung, P der Schnittpunkt von $g_{M_1E_1}$ mit $g_{M_2E_2}$ sowie

$$\alpha = |\sphericalangle A_1M_2A_2|, \quad g = g_{M_1M_2}.$$

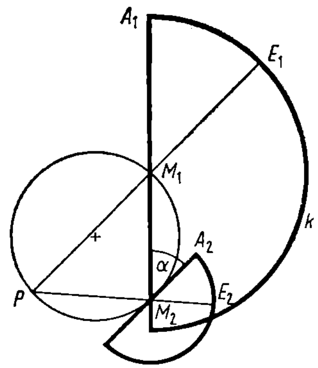


Bild L.1.65

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß A_2 auf derselben Seite von g liegt wie der Halbkreis k um M_1 mit dem Radius $|M_1A_1|$, den E_1 während des Vorganges einmal vollständig durchläuft.
Ist $E_2 = A_2$, so ist $P = M_2$. Liegt E_2 auf g, so ist $P = M_1$. Für alle anderen möglichen Lagen von E_2 liegt P nicht auf g und es gilt nach dem Außenwinkelsatz (Satz III.9)

$$|\sphericalangle M_1PM_2| = |\sphericalangle A_1M_1P| - |\sphericalangle A_1M_2P|. \tag{1}$$

Außerdem gilt, da die Winkelgeschwindigkeiten beider Zeiger nach Größe und Richtung gleich sind

$$|\sphericalangle A_1M_1E_1| = |\sphericalangle A_2M_2E_2|. \tag{2}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle

1. E_2 liegt auf derselben Seite von g wie E_1,
2. E_2 liegt auf der anderen Seite von g.

Im 1. Fall gilt

$$|\sphericalangle A_1M_2E_2| = |\sphericalangle A_1M_2A_2| + |\sphericalangle A_2M_2E_2|, \tag{3.1}$$

im 2. Fall dagegen

$$360° - |\sphericalangle A_1M_2E_2| = |\sphericalangle A_1M_2A_2| + |\sphericalangle A_2M_2E_2|. \tag{3.2}$$

In keinem der beiden Fälle kann P auf derselben Seite von g liegen wie E_2. Wäre das nämlich doch der Fall, so müßte im 1. Fall

$$|\sphericalangle A_1M_1P| = |\sphericalangle A_1M_1E_1|$$

und

$$|\sphericalangle A_1M_2P| = |\sphericalangle A_1M_2E_2|$$

gelten. Daraus ergäbe sich wegen (1)

$$\begin{aligned} |\sphericalangle M_1PM_2| &= |\sphericalangle A_1M_1E_1| - |\sphericalangle A_1M_2E_2| \\ &= |\sphericalangle A_2M_2E_2| - |\sphericalangle A_1M_2E_2| \quad \text{[wegen (2)]} \\ &= -|\sphericalangle A_1M_2A_2| < 0 \qquad \text{[wegen (3.1)]}, \end{aligned}$$

was nicht sein kann.
Im 2. Fall gälte entsprechend

$$|\sphericalangle A_1M_1P| = 180° - |\sphericalangle A_1M_1E_1|$$

und

$$|\sphericalangle A_1M_2P| = |\sphericalangle A_1M_2E_2|.$$

Daraus ergäbe sich wegen (1) der Widerspruch

$$\begin{aligned} |\sphericalangle M_1PM_2| &= 180° - |\sphericalangle A_1M_1E_1| - |\sphericalangle A_1M_2E_2| \\ &= 180° - |\sphericalangle A_2M_2E_2| - |\sphericalangle A_1M_2E_2| \\ &= |\sphericalangle A_1M_2A_2| - 180° < 0. \end{aligned}$$

Da also P nicht auf derselben Seite von g wie E_2 liegen kann, gilt im 1. Fall:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle M_1PM_2| &= 180° - |\sphericalangle A_1M_1E_1| - (180° - |\sphericalangle A_1M_2E_2|) \\ &= |\sphericalangle A_1M_2E_2| - |\sphericalangle A_1M_1E_1|, \end{aligned}$$

also wegen (2) und (3.1)

$$|\sphericalangle M_1PM_2| = |\sphericalangle A_1M_2A_2| = \alpha. \tag{4.1}$$

Im 2. Fall erhält man entsprechend

$$\begin{aligned} |\sphericalangle M_1PM_2| &= |\sphericalangle A_1M_1E_1| - (180° - |\sphericalangle A_1M_2E_2|) \\ &= |\sphericalangle A_2M_2E_2| + (360° - |\sphericalangle A_1M_2A_2| - |\sphericalangle A_2M_2E_2| - 180°) \\ &= 180° - |\sphericalangle A_1M_2A_2| = 180° - \alpha. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (Satz II.8″) liegt daher P auf dem Kreis k durch M_1 und M_2, für den der auf derselben Seite von g wie h gelegene Bogen über M_1M_2 zum Peripheriewinkel $180° - \alpha$ gehört.
Um zu zeigen, daß k der gesuchte geometrische Ort ist, bleibt noch nachzuweisen, daß auch umgekehrt jeder Punkt $P \in k$ Schnittpunkt von $g_{M_1E_1}$ mit $g_{M_2E_2}$ bei einer zulässigen Zeigerstellung ist. Für $P = M_1$ und $P = M_2$ ist dies bereits geschehen. Ist P ein anderer Punkt von k, so gilt, wenn P auf derselben Seite von g wie h liegt, nach dem Peripheriewinkelsatz:

$$|\sphericalangle M_1PM_2| = 180° - \alpha \quad \text{(2. Fall)}$$

und, wenn P auf der anderen Seite von g liegt,

$$|\sphericalangle M_1PM_2| = \alpha \quad \text{(1. Fall)}.$$

Ist nun E_2 der Punkt auf g_{PM_2} mit $|M_2E_2| = |M_2A_2|$, für den M_2 auf PE_2 liegt, und E_1 der Schnittpunkt von g_{PM_1} mit h, so kann man über (4), (3) und (1) auf (2) schließen und damit zeigen, daß (E_1, E_2) eine während des Vorganges auftretende Kombination von Zeigerstellungen bildet.

L.1.66 Ist b ein Kreisbogen mit den Endpunkten A und B, so hat nach dem Peripheriewinkelsatz $|\sphericalangle AVB|$ für jeden Punkt V von b denselben Wert α_b (Bild L.1.66). Dabei gilt folgender *Zusatz:* Sind b_1 und b_2 zwei Kreisbögen, deren jeder die Endpunkte A und B hat und die beide auf derselben Seite von g_{AB} wie D liegen, so gilt, wenn b_2 außerhalb des b_1 enthaltenden Kreises liegt

$$\alpha_{b_1} > \alpha_{b_2}. \tag{1}$$

Beweis:
Ist F der Mittelpunkt von AB und S_ν, $\nu = 1, 2$, der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB mit b_ν, so gilt wegen

$$|AF| = |BF| \quad \text{und} \quad |\sphericalangle AFS_\nu| = |\sphericalangle BFS_\nu| = 90°$$

aufgrund des Kongruenzsatzes (sws)

$$\triangle AFS_\nu \cong \triangle BFS_\nu$$

und daher

$$|\sphericalangle AS_\nu F| = |\sphericalangle BS_\nu F|.$$

Hieraus folgt

$$2\,|\sphericalangle AS_\nu F| = |\sphericalangle AS_\nu B| = \alpha_{b_\nu}.$$

Nach Voraussetzung liegt S_2 als Punkt von b_2 außerhalb des Kreises durch A, B und S_1, während F als Punkt der Sehne AB innerhalb dieses Kreises liegt. Daher liegt S_1 auf FS_2, und es gilt nach dem Außenwinkelsatz

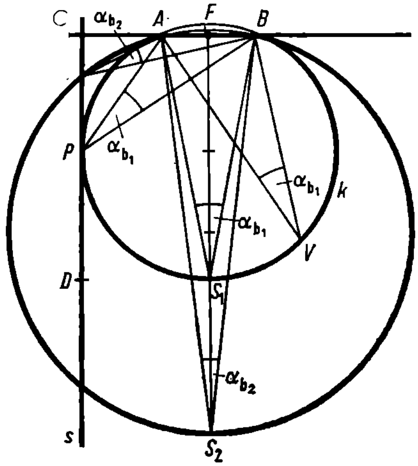


Bild L.1.66

$$\frac{1}{2}\alpha_{b_1} = |\sphericalangle AS_1F| = |\sphericalangle AS_2F| + |\sphericalangle S_1AS_2| > |\sphericalangle AS_2F| = \frac{1}{2}\alpha_{b_2},$$

womit der Zusatz bewiesen ist.
Ist jetzt P derjenige Punkt auf dem Strahl s aus C durch D, für den

$$|CP|^2 = |CA| \cdot |CB|$$

gilt, so berührt nach der Umkehrung des Sekantentangentensatzes (enthalten in Satz IV.11) der Kreis k durch A, B und P den Strahl s in P. Ist Q ein beliebiger von P und C verschiedener Punkt auf s, so liegt Q außerhalb von k und der Q enthaltende Kreisbogen mit den Endpunkten A und B liegt daher (wegen Satz IV.18) ebenfalls außerhalb von k. Folglich gilt wegen (1)

$$|\sphericalangle AQB| < |\sphericalangle APB|.$$

Liegt P auf CD, so ist also der Winkel, unter dem AB von einem Punkt von s und daher erst recht von CD aus gesehen wird, für P und nur für P am größten.
Liegt P nicht auf CD, so ist $|CD| < |CP|$. Ist dann Q ein innerer Punkt der Strecke CD, so liegt Q außerhalb des Kreises k' durch A, B und D.

Andernfalls hätte nämlich CQ mit k' einen Schnittpunkt Q', da C außerhalb von k' liegt. Nach dem Sekantentangentensatz müßte dann

$$|CQ'| \cdot |CD| = |CA| \cdot |CB| = |CP|^2$$

gelten, was wegen

$$|CQ'| < |CD| < |CP|$$

unmöglich ist.
Mit Q liegt auch der Kreisbogen durch Q mit den Endpunkten A und B außerhalb von k', und es gilt wegen (1)

$$|\sphericalangle AQB| < |\sphericalangle ADB|.$$

Der gesuchte Punkt ist also der Berührungspunkt P des s berührenden Kreises durch A und B, falls P auf CD liegt, und der Punkt D, falls P nicht auf CD liegt.

2. GEOMETRIE IM RAUM

L.2.1 P und je drei der vier Ecken des regelmäßigen Tetraeders τ sind die Ecken je eines Tetraeders, so daß also P gemeinsame Ecke von vier Tetraedern ist, deren jedes genau eine Seitenfläche von τ als Seitenfläche hat. Der Flächeninhalt jeder dieser vier untereinander kongruenten Seitenflächen von τ sei mit G bezeichnet. Die Höhen der vier Tetraeder durch P haben nach Voraussetzung die Längen a, b, c, d. Daher sind (Satz V.2) die Volumina der vier Tetraeder $\frac{1}{3}aG$, $\frac{1}{3}bG$, $\frac{1}{3}cG$, $\frac{1}{3}dG$ und das Volumen von τ

$$V = \frac{1}{3}G(a + b + c + d).$$

Andererseits ist $V = \frac{1}{3}Gh$, woraus wegen $G \neq 0$ die Behauptung $h = a + b + c + d$ folgt.

L.2.2. Es sei

$$|BC| = a, \quad |AC| = b, \quad |AB| = c, \quad |AD| = x, \quad |BD| = y, \quad |CD| = z.$$

Dann gilt nach Voraussetzung, wenn man den Umfang einer der Seitenflächen mit u bezeichnet:

$$a + b + c = u \quad (\triangle ABC), \tag{1}$$
$$a + y + z = u \quad (\triangle DCB), \tag{2}$$
$$x + b + z = u \quad (\triangle CDA), \tag{3}$$
$$x + y + c = u \quad (\triangle BAD). \tag{4}$$

Durch Addition und Division durch 2 erhält man aus diesen vier Gleichungen

$$a + b + c + x + y + z = 2u. \tag{5}$$

Addiert man nun (1) und (2) miteinander und subtrahiert davon (5), so erhält man $a - x = 0$.

Entsprechend folgt $b = y$ aus (1), (3) und (5) und $c = z$ aus (1), (4) und (5). Damit hat sich ergeben, daß je zwei Gegenkanten des Tetraeders gleiche Länge haben. Da je zwei Seitenflächen des Tetraeders eine Seite gemeinsam haben und ihre anderen Seiten zwei Paare gegenüberliegender Kanten des Tetraeders bilden, folgt nach dem Kongruenzsatz (sss) die Kongruenz aller vier Seitenflächen zueinander.

L.2.3 Jeder der vier abgeschnittenen Tetraederkörper ist regelmäßig (Bild L.2.3). Sind nämlich S gemeinsame Ecke des gegebenen und eines abgeschnittenen Tetraederkörpers, A_i, $i = 1, 2, 3$, die drei übrigen Ecken des gegebenen und A'_i die von S verschiedene Ecke des betrachteten abgeschnittenen Tetraederkörpers auf SA_i, so gilt nach Voraussetzung

$$A_iA_j \parallel A'_iA'_j \quad \text{für } i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3; \quad i \neq j,$$

und daher nach dem 1. Strahlensatz

$$|SA'_i| : |SA'_j| = |SA_i| : |SA_j|,$$

woraus wegen $|SA_i| = |SA_j|$

$$|SA'_i| = |SA'_j| \tag{1}$$

folgt. Da SA_iA_j nach Voraussetzung gleichseitig ist, gilt $|\sphericalangle A_iSA_j| = 60°$. Folglich ist nach Satz III.27″.2 wegen (1) auch $\triangle A'_iSA'_j$ gleichseitig, d.h., es gilt $|A'_iA'_j| = |SA'_i|$. Daher ist auch $\triangle A'_1A'_2A'_3$ gleichseitig und damit der abgeschnittene Tetraederkörper regelmäßig.

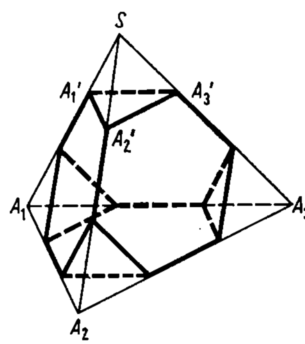


Bild L.2.3

Da aus jeder Seitenfläche des gegebenen Tetraeders ein regelmäßiges Sechseck entsteht, muß jeder der abgeschnittenen Tetraederkörper die Kantenlänge $\frac{a}{3}$ haben, wenn a die Kantenlänge des gegebenen Tetraeders ist. Daher ist das Volumen V' jedes der abgeschnittenen Tetraederkörper nach Satz V.2

$$V' = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{V}{27},$$

wenn V das Volumen des gegebenen Tetraeders bezeichnet. Also ist das Volumen des Restkörpers

$$V_R = V - \frac{4V}{27} = \frac{23}{27} V = \frac{23\sqrt{2}}{324} a^3.$$

Bezeichnen I den Flächeninhalt einer Seitenfläche des gegebenen, I' den einer Seitenfläche eines abgeschnittenen Tetraederkörpers und I_R den Flächeninhalt des den Restkörper begrenzenden Polyeders, so gilt

$$I_R = 4I - 4 \cdot 3 \cdot I' + 4 \cdot I' = 4I - 8I'$$

und, da die Seitenflächen beider Tetraeder gleichseitige Dreiecke sind (Satz III.27″),

$$I = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \text{und} \quad I' = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2,$$

woraus sich

$$I_R = \frac{7\sqrt{3}}{9}a^2$$

ergibt.

L.2.4 A, B, C, D seien die Ecken des Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt von AB (Bild L.2.4). Dann kann ε o.B.d.A. als E enthaltend und parallel zu AD und BC vorausgesetzt werden. Daher schneidet ε weder AD noch BC. Folglich liegen A und D bzw. B und C jeweils auf derselben Seite von ε, während A und B auf verschiedenen Seiten von ε liegen. Mithin schneidet ε die Kanten AC, CD und DB. Die Schnittpunkte seien in dieser Reihenfolge mit F, G und H bezeichnet.

Dann gilt

$$EF \parallel BC \quad \text{und} \quad GH \parallel BC$$

sowie

$$FG \parallel AD \quad \text{und} \quad HE \parallel AD.$$

Daraus folgt nach dem 2. Strahlensatz:

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = \frac{a}{2}.$$

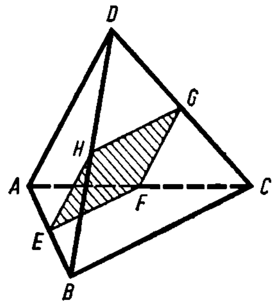


Bild L.2.4

Die Schnittfigur $EFGH$ ist demnach ein Rhombus.

Da wegen der Regelmäßigkeit von τ die Seitenflächen untereinander kongruente regelmäßige Dreiecksflächen sind, sind deren Höhen untereinander kongruent; es gilt also

$$|DE| = |CE| = |DF| = |BF|.$$

Da außerdem $|CD| = |BD|$ ist, gilt nach dem Kongruenzsatz (sss) $\triangle CDE \cong \triangle BDF$ und folglich $\sphericalangle DCE \cong \sphericalangle DBF$. Wegen $|CG| = |BH| \left(= \frac{1}{2}|CD|\right)$ gilt nach dem Kongruenzsatz (sws) $\triangle CGE \cong \triangle BHF$ und mithin $|GE| = |HF|$. Die Mittelpunkte von GE und HF fallen im Schnittpunkt der Diagonalen im Rhombus (Satz III.37.3) zusammen, so daß GE und HF Durchmesser desselben Kreises sind. Damit ist $EFGH$ als Rhombus und Sehnenviereck nach Satz III.43.3 ein Quadrat und hat den Flächeninhalt

$$I = |EF|^2 = \frac{a^2}{4}.$$

L.2.5 Zunächst bemerkt man, daß g_{AM} und g_{BC} windschief zueinander sind, weil g_{AM} mit ε_{ABC} nur den Punkt A gemeinsam hat und folglich die in ε_{ABC} gelegene, A nicht enthaltende Gerade g_{BC} weder schneidet noch zu ihr parallel ist (Bild L.2.5). Daher gibt es (nach I.9.a) genau ein Punktepaar (X, Y) mit $X \in g_{BC}$, $Y \in g_{AM}$, für das $|XY| = d$ gilt, wenn d den zu berechnenden Abstand von g_{BC} und g_{AM} bezeichnet. Dabei gilt außerdem

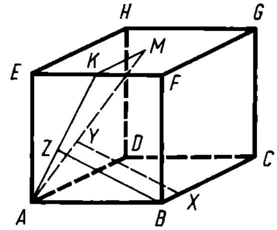


Bild L.2.5

$$g_{XY} \perp g_{AM} \tag{1}$$

und

$$g_{XY} \perp g_{BC}. \tag{2}$$

Die Ebenen ε_{ADM} und ε_{BCY} schneiden sich in einer Y enthaltenden Geraden g. Wegen

$$g_{BC} \parallel g_{AD} \tag{3}$$

ist

$$g_{BC} \parallel g. \tag{4}$$

Andernfalls hätte nämlich g mit g_{BC} einen Schnittpunkt, der auch gemeinsamer Punkt von ε_{ABC} und ε_{ADM} wäre und damit auf g_{AD} läge, was (3) widerspricht.

Aus (2), (3), (4) und (I.13b) folgt $g \perp g_{XY}$. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (1) wegen $g \neq g_{AM}$

$$g_{XY} \perp \varepsilon_{ADM}. \tag{5}$$

Bezeichnet Z den Schnittpunkt der Parallelen zu g_{XY} durch B mit ε_{ADM}, so ist $g_{BZ} \perp \varepsilon_{ADM}$ wegen (5), insbesondere also

$$g_{BZ} \perp g_{AZ} \tag{6}$$

und $|XY| = |BZ|$; denn im Fall $X \neq B$ ist $BXYZ$ ein Parallelogramm, während in dem (übrigens nicht eintretenden) Fall $X = B$ außerdem $Y = Z$ wäre.

Wegen $g_{BZ} \parallel g_{XY}$, (2) und (I.13.b) ist $g_{BZ} \perp g_{BC}$. Somit liegt Z in der auf g_{BC} senkrechten Ebene ε durch B, die eine Seitenfläche des Würfels enthält, deren Rand das Quadrat $ABFE$ ist. Die Ebene ε_{ADM} schneidet die Strecke EF in ihrem Mittelpunkt K. Aufgrund der Bedeutung von M und K ist nämlich $MK \parallel AD$, so daß MK in ε_{ADM} liegt.

Als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen ist nach Satz I.13 dann $|\sphericalangle AKE| = |\sphericalangle KAB|$. Hieraus folgt wegen $Z \in AK$, $AE \perp EK$ und (6) nach dem 1. Ähnlichkeitssatz

$$\triangle AEK \sim \triangle AZB$$

und damit

$$|AZ| : |BZ| = |KE| : |AE| = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2},$$

also

$$|AZ| = \frac{1}{2}|BZ|. \tag{7}$$

Wegen (6) ist $\triangle AZB$ rechtwinklig mit der Hypotenuse AB, so daß aufgrund des Lehrsatzes des PYTHAGORAS und (7)

$$|BZ|^2 = |AB|^2 - |AZ|^2 = a^2 - \frac{1}{4}|BZ|^2,$$

also

$$|BZ| = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

gilt. Mithin ist

$$d = |XY| = |BZ| = \frac{2}{\sqrt{5}}a = \frac{2}{5}a\sqrt{5}.$$

L.2.6 a) Da es sich jeweils um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge a handelt, ist jede Mantelfläche jeder der Pyramiden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge a, und diese Dreiecke sind alle untereinander kongruent.
Wir berechnen die Größe des Winkels zwischen zwei Dreiecksflächen, die dieselbe Würfelkante als Basis haben. Der Winkel setzt sich zusammen aus

1. dem Winkel zwischen einer Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide
2. dem rechten Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen des Würfels und
3. dem Winkel zwischen der anderen Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide. Seine Größe ist mithin $45° + 90° + 45° = 180°$, wie aus I.11.b und I.16 folgt.

Die beiden betrachteten Dreiecke liegen also in derselben Ebene, und weil sie einander kongruent und gleichschenklig sind und eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ihre Schenkel die Seiten eines Rhombus. Da der Würfel 12 Kanten hat, besitzt der zusammengesetzte Körper 12 Rhombusflächen als Seitenflächen; denn keine zwei zu verschiedenen Kanten gehörende Rhomben liegen in derselben Ebene. Die Rhomben sind untereinander kongruent.
Wir zeigen noch, daß die Rhomben keine Quadrate sind. Die Höhen der aufgesetzten Pyramiden haben – wegen des Winkels zwischen Mantel- und Grundfläche jeder Pyramide von der Größe 45° – die Länge $\frac{a}{2}$. Die Höhen der die Mantelflächen bildenden Dreiecksflächen haben dann nach dem Satz des PYTHAGORAS die Länge $\sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}$, d.h. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Damit haben die Diagonalen der Rhomben unterschiedliche Länge, nämlich a und $a\sqrt{2}$.

b) Jede der aufgesetzten Pyramiden hat das Volumen $\frac{1}{3}\left(a^2\frac{a}{2}\right)$, d.h. $\frac{a^3}{6}$. Die sechs aufgesetzten Pyramiden haben somit zusammen mit dem Würfel das Volumen $2a^3$.

L.2.7 Jeder Würfel mit der Kantenlänge a hat das Volumen a^3 und den Flächeninhalt $6a^2$.
Jedes regelmäßige Oktaeder mit der Kantenlänge b hat [nach Satz V.6 (23)] das Volumen $\frac{b^3}{3}\sqrt{2}$ und den Flächeninhalt $2b^2\sqrt{3}$.

a) Die Kantenlänge des äußeren Würfels sei a. Dann gilt für die Kantenlänge b des einbeschriebenen Oktaeders nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Daher ergibt sich für das Volumen V_W des Würfels und für das Volumen V_O des Oktaeders

$$V_W = a^3 \quad \text{und} \quad V_O = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{6}$$

und mithin

$$V_W : V_O = 6:1.$$

b) Der Mittelpunkt S jeder Seitenfläche des Oktaeders liegt auf den Seitenhalbierenden dieses gleichseitigen Dreiecks.
Diese Seitenhalbierenden werden von S im Verhältnis $2:1$ geteilt, so daß jede zu einer Dreiecksseite parallele Strecke durch S, deren Endpunkte auf je einer der beiden anderen Dreiecksseiten liegen, nach dem 2. Strahlensatz die Länge $\frac{2}{3}b$ hat.
Vier solcher Strecken, von denen jede in einer von vier Seitenflächen des Oktaeders mit einem gemeinsamen Eckpunkt liegt (diese vier Seitenflächen sind die Mantelflächen einer vierseitigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche Ω) und parallel zu jeweils einer Seite von Ω ist, bilden ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{2}{3}b$. Die Seitenmittelpunkte dieses Quadrates sind die Eckpunkte einer Seitenfläche des dem Oktaeder einbeschriebenen Würfels W', so daß für die Kantenlänge a' von W' aus dem Satz des PYTHAGORAS

$$a' = \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2} = \frac{b}{3}\sqrt{2}$$

folgt. Daher gilt

$$V_O = \frac{b^3}{3}\sqrt{2}$$

und für das Volumen $V_{W'}$ des Würfels W'

$$V_{W'} = \left(\frac{b}{3}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{2}{27}b^3\sqrt{2}$$

und mithin

$$V_O : V_{W'} = 9:2.$$

c) Für den Flächeninhalt O_W des äußeren Würfels und den Flächeninhalt O_O des Oktaeders gilt

$$O_W = 6a^2 \quad \text{und} \quad O_O = 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3} = a^2\sqrt{3}.$$

Daher ist

$$O_W : O_O = 6 : \sqrt{3} = 2\sqrt{3} : 1.$$

d) Es gilt

$$O_O = 2b^2\sqrt{3}$$

und für den Flächeninhalt $O_{W'}$ des inneren Würfels

$$O_{W'} = 6\left(\frac{b}{3}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{4}{3}b^2.$$

Daher ist

$$O_O : O_{W'} = 3\sqrt{3} : 2.$$

L.2.8 a) Es sei a die Kantenlänge des Würfels. Durch die acht Ebenen werden in diesem Falle die Mantelflächen von acht kongruenten Pyramiden abgeschnitten, deren Grundflächen von gleichseitigen zueinander kongruenten Dreiecken $\triangle$ begrenzt werden.

Die Länge jeder dieser Dreiecksseiten beträgt $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, die der Höhe h_P einer jeden der Pyramiden $\frac{a}{6}\sqrt{3}$; denn es gilt nach dem Satz des Pythagoras $h_P^2 = s^2 - \left(\frac{2}{3}h_\triangle\right)^2$, wobei s die Länge einer von der Spitze der Pyramide ausgehenden Kante und $h_\triangle$ die Länge der Höhe eines der Dreiecke $\triangle$ ist.

Wegen $s = \frac{a}{2}$ und $h_\triangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$ folgt:

$$h_P^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{12},$$

also

$$h_P = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

Der Inhalt der Grundfläche jeder der Pyramiden beträgt als Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ nach Satz III.27″ $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$, und daher ist das Volumen jeder der Pyramiden $\frac{a^3}{8\cdot 6}$.
Also gilt für das Volumen V_R des Restkörpers:

$$V_R = a^3 - 8\cdot\frac{a^3}{8\cdot 6} = \frac{5}{6}a^3.$$

b) $P_1, P_2, \ldots, P_8$ seien die Eckpunkte eines der zu betrachtenden regelmäßigen Achtecke (vgl. Bild A.2.8 b). Bezeichnet b die Seitenlänge des Achtecks, so gilt:

$$b = \sqrt{2x^2},$$

wobei $x = |A'P_6| = |A'P_7| = |P_5B'| = \ldots$ ist.

Weiter gilt: $2x + b = a$, daraus und aus $x = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ folgt dann

$$b = (\sqrt{2} - 1)\, a.$$

Daher ist der Inhalt I der Grundfläche jeder der abgeschnittenen Pyramiden nach Satz III.27″

$$I = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)^2 a^2}{4}.$$

Die Höhenlänge h_P jeder der Pyramiden beträgt

$$\frac{(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{6}}\, a;$$

denn es gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$h_P^2 = x^2 - \left(\frac{2}{3} h_\triangle\right)^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3},$$

d. h.

$$h_P = \frac{h}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} - 1)\, a}{\sqrt{6}}.$$

Daher gilt für das Volumen V_P jeder der Pyramiden nach Satz V.8

$$V_P = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)^3}{3 \cdot 8}\, a^3 = \frac{a^3}{3 \cdot 8}(10 - 7\sqrt{2}).$$

Das Volumen V_R des Restkörpers beträgt also:

$$V_R = a^3 - \frac{a^3}{3}(10 - 7\sqrt{2}) = \frac{7}{3}(\sqrt{2} - 1)\, a^3.$$

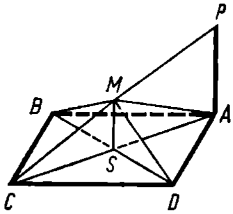
L.2.9 Der Mittelpunkt M der Strecke PC ist der Mittelpunkt der Kugel mit dem Durchmesser PC. Die Punkte A, B und D liegen genau dann auf dieser Kugel, wenn $|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$ ist (Bild L.2.9).

Zum Beweis dieser Gleichheiten fälle man das Lot von M auf ε. Sein Fußpunkt S liegt wegen $MS \parallel PA$ auf AC. Ferner gilt nach dem 1. Strahlensatz wegen $|CM| = |MP|$

$$|CS| = |SA|.$$

Also ist S nach Satz III.37 der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Die Dreiecke CSM, ASM, BSM und DSM sind mithin nach dem Kongruenzsatz (sws) untereinander kongruent.

Bild L.2.9



Daher ist

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|.$$

Die Punkte A, B, C, D und P liegen also auf der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{1}{2}|PC|$, also mit dem Durchmesser PC.

L.2.10 a) Auf der Kugel $\varkappa$ durch A, D, E und S liegen die Kreise durch A, D, E mit dem Mittelpunkt K und durch A, D, S mit dem Mittelpunkt K' (Bild L.2.10). Daher liegt nach Satz IV.15 der Mittelpunkt O von $\varkappa$ sowohl auf der Senkrechten g von ε_{ADE} durch K als auch auf der Senkrechten g' von ε_{ADS} durch K'. Bedeutet T den Fußpunkt des Lotes von K auf ε_{ABC}, so gilt für den Abstand d von g und ε_{ABC}

$$|KT| = d = |OK'|.$$

Wegen $|KT| = \frac{a}{2}$ ist also

$$|OK'| = \frac{a}{2}.$$

Da $g' \perp \varepsilon_{ABC}$ ist, muß $\triangle OK'S$ bei K' rechtwinklig sein, so daß nach dem Satz des PYTHAGORAS

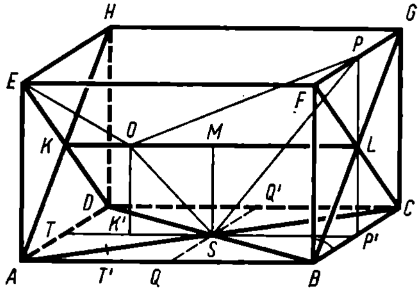


Bild L.2.10

$$r^2 = |OS|^2 = |OK'|^2 + |K'S|^2$$

ausfällt.

Da $\triangle ATS$ bei T rechtwinklig ist, gilt

$$|AS|^2 = |AT|^2 + |TS|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3}{4}a^2 = a^2. \tag{1}$$

Folglich ist $\triangle ADS$ gleichseitig mit der Seitenlänge a. Der Radius seines Umkreises ist daher

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}a = \frac{a}{\sqrt{3}} = |K'S|. \tag{2}$$

Somit ergibt sich

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2, \quad r = \frac{a}{6}\sqrt{21}. \tag{3}$$

b) Es ist zu zeigen, daß $\varepsilon_{SFG} \perp g_{OS}$ gilt. Dazu genügt es (nach I.10.c) zu zeigen, daß $g_{FS} \perp g_{OS}$ und $g_{GS} \perp g_{OS}$ gilt, da eine Gerade genau dann auf einer Ebene senkrecht steht, wenn sie auf zwei verschiedenen Geraden dieser Ebene durch S senkrecht steht. Da $\triangle GSO$ das Spiegelbild von $\triangle FSO$ bezüglich ε_{OSK} ist, gilt $\triangle GSO \cong \triangle FSO$, so daß $g_{GS} \perp g_{OS}$ aus $g_{FS} \perp g_{OS}$ folgt. Dies nun wieder ergibt sich aus der Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS, angewandt auf $\triangle FSO$, weil

$$|FO|^2 = |FS|^2 + |OS|^2 \tag{4}$$

gilt.
Zum Beweis von (4) beachte man die Gültigkeit der folgenden Beziehungen:
Aus

$\triangle FSB \cong \triangle GSC$ nach dem Kongruenzsatz (sws)

sowie

$\triangle FOL \cong \triangle GOL$ nach dem Kongruenzsatz (sws)

folgt

$\triangle FOS \cong \triangle GOS$ nach dem Kongruenzsatz (sss).

Nun gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$|FS|^2 = |BS|^2 + |BF|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

da BF nach Voraussetzung auf ε_{ABC} und damit nach I.10.c auf BS senkrecht steht. Es ist weiter

$$|BS| = |AS| = a,$$

da S Schnittpunkt der Diagonalen im Rechteck $ABCD$ ist [Satz III.40.2 und (1)], und nach Voraussetzung

$$|BF| = a.$$

Mithin folgt

$$|FO|^2 = |FL|^2 + |LO|^2,$$

wenn L der Mittelpunkt des Quadrates $BCGF$ ist nach dem Satz des PYTHAGORAS,

$$|FL| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

als halbe Länge der Diagonalen im Quadrat $BCGF$ und

$$|LO| = a\sqrt{3} - |KO| = a\sqrt{3} - |TK'| = a\sqrt{3} - |ST| + |SK'|$$
$$= \frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{5}{6}a\sqrt{3}$$

nach Voraussetzung und (2).

Damit ergibt sich nach (3)

$$|FO|^2 - |FS|^2 = \frac{31}{12}a^2 - \frac{24}{12}a^2 = \frac{7}{12}a^2 = |OS|^2,$$

womit (4) bewiesen ist.

L.2.11 Bezeichnet man mit r den Radius der Kugel und mit h die Länge der Höhe des Kegelkörpers, so ist der Grundkreisradius des Kegelkörpers nach dem Satz des PYTHAGORAS gleich $\sqrt{r^2 - h^2}$.

a) In diesem Fall erhält man, da $4\pi r^2$ der Inhalt der Kugeloberfläche ist (Satz IV.17) die Gleichung

$$2\pi r\,(r-h) = \frac{1}{3}\,4\pi r^2.$$

Daraus ergibt sich wegen $r \neq 0$, $r - h = \frac{2}{3}r$, also $h = \frac{1}{3}r$, d.h., die Länge der Höhe des Kegelkörpers beträgt ein Drittel des Kugelradius.

b) In diesem Falle erhält man, da das Volumen V_1 des Kegelkörpers nach Satz V.10

$$V_1 = \frac{\pi}{3}(r^2 - h^2)\,h = \frac{\pi}{3}(hr^2 - h^3)$$

und das Volumen V_2 des zugehörigen Kugelsegmentes nach Satz IV.17

$$V_2 = \frac{\pi}{3}(r-h)^2\,[3r - (r-h)] = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3hr^2 + h^3)$$

ist, die folgende Gleichung:

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 2hr^2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Hieraus folgt:

$$2r^2\,(r-h) = \frac{4}{3}r^3,$$

und wegen $r \neq 0$

$$r - h = \frac{2}{3}r,$$

also

$$h = \frac{1}{3}r.$$

In beiden Fällen beträgt also die Länge der Kegelhöhe ein Drittel des Kugelradius.

Der Radius von $\varkappa_1$ sei r. Man lege eine Ebene ε durch M und P (Bild L.2.12). Der Schnittkreis k von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ schneidet ε in zwei Punkten Q_1, Q_2. Der Schnittpunkt von MP und Q_1Q_2 sei S genannt. P_1 sei der von M verschiedene Schnittpunkt von g_{PM} und $\varkappa_2$. Dann ist I der Flächeninhalt der auf $\varkappa_2$ liegenden Kugelkappe, deren Höhe die Länge $|MS|$ hat. Da $|MP|$ der Radius von k_2 ist, gilt nach Satz IV.17

$$I = \pi \cdot 2 \cdot |MP| \cdot |MS|.$$

Da das Dreieck MQ_1P_1 nach dem Satz von THALES rechtwinklig ist, gilt nach dem Kathetensatz:

$$|MQ|^2 = 2|MP| \cdot |MS|.$$

Mithin erhält man

$$I = \pi \cdot |MQ_1|^2 = \pi r^2,$$

womit gezeigt ist, daß I nicht von der Lage des Punktes P abhängt.

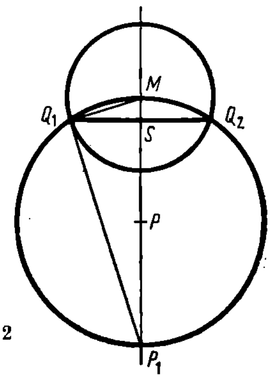


Bild L.2.12

L.2.13 a) Da $ABNM$ und $ACPM$ Sehnenvierecke sind, liegen A, B, N, M sowie A, C, P, M jeweils auf einem Kreis. Die durch D, M, A und D, N, B und D, P, C gehenden Geraden sind Sekanten dieser Kreise. Nach dem Sekantensatz (vgl. Satz IV.11) gilt

$$|DM| \cdot |DA| = |DN| \cdot |DB|$$

und

$$|DM| \cdot |DA| = |DP| \cdot |DC|,$$

also

$$|DN| \cdot |DB| = |DP| \cdot |DC|.$$

Daher liegen nach der Umkehrung des Sekantensatzes die Punkte N, B, C, P auf einem und demselben Kreis und, da nach Aufgabenstellung $NBCP$ ein Viereck ist, ist es ein Sehnenviereck.

b) Sind M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte der Umkreise von $ABNM$ bzw. $ACPM$, r_1 und r_2 ihre Radien und g_1 bzw. g_2 die Senkrechten zu ε_{ABM} durch M_1 bzw. zu ε_{ACM} durch M_2, so gilt

$$|QA| = |QB| = |QM| = |QN| = \sqrt{|QM_1|^2 + r_1^2} \text{ für alle } Q \in g_1 \quad (1)$$
$$|QA| = |QC| = |QM| = |QP| = \sqrt{|QM_2|^2 + r_2^2} \text{ für alle } Q \in g_2. \quad (2)$$

Daher liegt sowohl g_1 als auch g_2 in der zu AM senkrechten Ebene ε durch den Mittelpunkt von AM. Weil $\varepsilon_{ABM} \nparallel \varepsilon_{ACM}$ ist, gilt auch $g_1 \nparallel g_2$. Folglich haben g_1 und g_2 einen Schnittpunkt O. Für ihn gilt wegen (1) und (2)

$$|OA| = |OM| = |OB| = |ON| = |OC| = |OP|.$$

Also liegen A, B, C, M, N, P auf der Kugel um O mit dem Radius $|OA|$.

L.2.14 Als Fläche enthält φ wenigstens einen Punkt.

a) Besteht φ nur aus einem Punkt, so ist φ eine (ausgeartete) Kugel mit dem Radius 0.

b) Liegen auf φ zwei Punkte und ist η eine diese beiden Punkte enthaltende Ebene, so ist der Schnitt von η und φ nach Voraussetzung ein Kreis k. Bezeichnen g die auf η senkrecht stehende Gerade durch den Mittelpunkt von k und ε eine beliebige g enthaltende Ebene, dann hat ε mit k zwei und daher mit φ mindestens zwei Punkte gemeinsam und schneidet folglich φ in einem Kreis k_ε. Die Verbindungsstrecke der beiden Schnittpunkte von k mit ε ist Durchmesser von k (k_ε liegt in η und hat den Mittelpunkt von k als Mittelpunkt), so daß g die in ε gelegene Mittelsenkrechte dieser Strecke ist. Mit Hilfe von Satz IV.9 folgt daraus, daß g den Mittelpunkt von k_ε enthält und daher k_ε in zwei solchen Punkten N und S schneidet, daß NS Durchmesser von k_ε ist. Dabei ist NS für alle ε, die g enthalten, dieselbe Strecke; denn andernfalls hätte g mit φ mindestens drei Punkte gemeinsam, und der Schnitt von φ wäre für keine g enthaltende Ebene ε ein Kreis.

Behauptung: φ ist die Kugel $\varkappa$ mit dem Durchmesser NS.

Beweis:

1) Nach dem vorangehenden liegen N und S sowohl auf φ als auch auf $\varkappa$.
Im folgenden bedeutet P einen von N und S verschiedenen Punkt.

2) Die Ebene ε_{PNS} schneidet φ als eine $g = g_{NS}$ enthaltende Ebene nach dem Vorangehenden in dem in ihr gelegenen Kreis k' mit dem Durchmesser NS und $\varkappa$ als eine NS und damit den Mittelpunkt von $\varkappa$ enthaltende Ebene aufgrund der Definitionen II.1,2,3 ebenfalls in k'. Daher liegt P entweder auf beiden Flächen φ und $\varkappa$ oder auf keiner von beiden, je nachdem ob P auf k' liegt oder nicht.

L.2.15 Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein:
Es bedeuten k_ν, $\nu = 1, 2, 3$, die drei Kreise, ε_ν die k_ν enthaltende Ebene, B_l den Berührungspunkt und t_l die gemeinsame Tangente von k_m und k_n, $\{l, m, n\} = \{1, 2, 3\}$ sowie $\{i, j\} = \{2, 3\}$. Da die drei Kreise und die Berührungspunkte paarweise voneinander verschieden sind, gehört jeder der Berührungspunkte genau zweien der Kreise an, so daß die Bezeichnung wie angegeben gewählt werden kann.

a) Im Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ liegen alle drei Tangenten t_ν in ε_1, da jede von ihnen einen der Kreise k_1, k_2 berührt. Da t_1 und t_2 den Kreis k_3 berühren, liegen beide in ε_3. Nach Voraussetzung ist $B_1 \neq B_2$ und mithin $t_1 \neq t_2$. Daher gibt es nach I.10 nur eine Ebene, die t_1 und t_2 enthält, und es ist $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$.

b) Ist $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, so ist t_3 der Schnitt von ε_1 und ε_2. Da t_2 mit k_2 nur den Punkt B_3 gemeinsam hat, liegt B_1 nicht auf t_3 und damit nicht in ε_1.

Folglich liegen B_1, B_2, B_3 nicht auf derselben Geraden, und k_1 liegt nicht in $\varepsilon_{B_1B_2B_3}$. Ist P ein nicht in $\varepsilon_{B_1B_2B_3}$ gelegener Punkt von k_1, so gibt es nach Satz IV.7 genau eine Kugel $\varkappa$ durch die Punkte B_1, B_2, B_3, P.

Behauptung: Jeder der Kreise k_1, k_2, k_3 liegt auf $\varkappa$.

Beweis:

1) Da P, B_2 und B_3 in ε_1 und auf $\varkappa$ liegen, ist der Schnitt von ε_1 und $\varkappa$ nach Satz IV.14 ein Kreis, und zwar der durch diese drei Punkte, also k_1. Daher gilt $k_1 \subset \varkappa$.
Hieraus folgt, daß die als Tangente von k_1 in ε_1 gelegene Gerade t_i mit k_1 und daher auch mit $\varkappa$ nur den Punkt B_i gemeinsam hat.

2) Der Schnitt von ε_j mit $\varkappa$ ist ein Kreis k'_j durch B_1 und B_i und hat als Teilmenge von $\varkappa$ mit der auch in ε_j gelegenen Geraden t_i nach 1) nur den Punkt B_i gemeinsam. Daher ist nach Satz IV.8 t_i Tangente an k'_j in B_i.
Infolgedessen liegt sowohl der Mittelpunkt von k'_j als auch der von k_j nach den Sätzen IV.19 und IV.20 auf der in ε_j gelegenen Senkrechten g_i zu t_i durch B_i und auf der in ε_j gelegenen Mittelsenkrechten h_i von B_1B_i. Da h_i den auf g_i gelegenen Punkt B_i nicht enthält, fällt h_i nicht mit g_i zusammen, so daß k_i und k'_i denselben Mittelpunkt haben. Da beide Kreise B_1 enthalten, fallen sie aufgrund von Definition II.2 zusammen. Also gilt auch

$$k_2 \subset \varkappa, \quad k_3 \subset \varkappa.$$

L.2.16 Es seien r_1 der Grundkreisradius, I_1 der Oberflächeninhalt und V_1 das Volumen des Kegelkörpers sowie r_2, I_2 und V_2 die entsprechenden Maße des Zylinderkörpers. Die Länge der Mantellinie des Kegels beträgt wegen der Form des Achsenschnittes $2r_1$.
Die Oberfläche des Kegelkörpers setzt sich aus einer Kreisscheibe vom Radius r_1 und einem Kegelmantel vom Grundkreisradius r_1 und der Mantellinienlänge $s = 2r_1$ zusammen. Daher gilt nach den Sätzen IV.13, Formel (18) und V.10, Formel (24)

$$I_1 = \frac{\pi}{2}(2r_1)^2 + \pi r_1^2 = 3\pi r_1^2. \tag{1}$$

Als Fläche eines gleichseitigen Dreiecks hat der Achsenschnitt und damit auch der Kegelkörper die Höhenlänge $2r_1 \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und somit gilt nach Satz V.10 (24)

$$V_1 = \pi r_1^2 r_1 \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi r_1^3}{\sqrt{3}}. \tag{2}$$

Die Oberfläche des Zylinderkörpers setzt sich aus zwei Kreisscheiben vom Radius r_2 und einem Zylindermantel vom Radius r_2 und der Höhenlänge $2r_2$ zusammen. Daher gilt nach den Sätzen IV.13 und V.9

$$I_2 = 4\pi r_2^2 + 2\pi r_2^2 = 6\pi r_2^2 \tag{3}$$

und außerdem

$$V_2 = \pi r_2^2 \, 2r_2 = 2\pi r_2^3. \tag{4}$$

Wegen $V_1 = V_2$ folgt aus (2) und (4)

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{12}, \tag{5}$$

und somit aus (1), (3) und (5)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

L.2.17 Sind SA Mantellinie und MF Lot von M auf g_{SA} (Bild L.2.17), so gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle MFS \sim \triangle AM'S$, also wegen $|AM'| = \frac{a}{2}$, $|SA| = a$ und $|MF| = r$

$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a$$

und damit

$$r = \frac{|SM|}{2}.$$

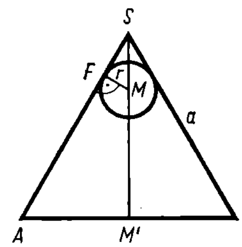


Bild L.2.17

Besitzt die Höhe des Kegelkörpers, d.h. des gleichseitigen Schnittdreiecks mit der Seitenlänge a, die Länge h, so gilt nach Satz III.27''

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Nach Voraussetzung ist weiterhin $|SM| : |MM'| = 1 : 2$, woraus wegen $|SM'| = h$

$$|SM| = \frac{h}{3}$$

folgt, so daß sich schließlich

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{3}$$

ergibt.

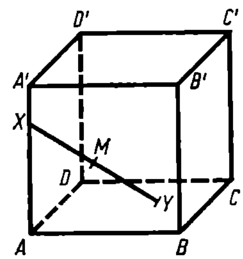


Bild L.2.18

L.2.18 Wir bezeichnen den zu ermittelnden geometrischen Ort mit $\mathfrak{M}$, den Mittelpunkt von XY mit M (Bild L.2.18) und unterscheiden zunächst drei Fälle.

a) $X = A$,
b) $X = A'$,
c) $X \in AA', \quad X \neq A, \quad X \neq A'$.

Zu Fall a):
Ist $M \in \mathfrak{M}$, so liegt $XY = AY$ in ε_{ABC}, und zwar, da Y in der Fläche des Quadrates $ABCD$ liegt, wegen deren Konvexität sogar in dieser Quadratfläche. Wegen

$$|XM| = \frac{1}{2}|XY| = \frac{a}{2}$$

liegt M daher auf dem in ε_{ABC} gelegenen Kreisbogen $\widehat{b}$ um A mit dem Radius $\frac{a}{2}$, für dessen Punkte P

$$0 \leqq |\sphericalangle PAB| \leqq 90^\circ \quad \text{und} \quad 0 \leqq |\sphericalangle PAD| \leqq 90^\circ$$

gilt.
Liegt M auf $\widehat{b}$ und bezeichnet S den Schnittpunkt des Strahls s aus A durch M mit einer A nicht enthaltenden Seite von $ABCD$, der wegen (1) existiert, so gilt

$$|AS| \geqq a.$$

Daher gibt es auf der in der Quadratfläche gelegenen Strecke AS einen Punkt Y mit

$$|AY| = a = 2|AM|,$$

so daß $M \in \mathfrak{M}$ ist. Also ist $\widehat{b} \subset \mathfrak{M}$.

Zu Fall b):
Ist jetzt $M \in \mathfrak{M}$, so ist $Y = A$ wegen $|AA'| = a$ und $AA' \perp \varepsilon_{ABC}$ der einzige Punkt, für den $|XY| = a$ gilt. Daher muß M der Mittelpunkt N der Strecke AA' sein. Offenbar ist N auch tatsächlich Punkt von $\mathfrak{M}$.

Zu Fall c):
Ist jetzt $M \in \mathfrak{M}$, so bilden X, A, Y die Ecken eines bei A rechtwinkligen Dreiecks. Als Mittelpunkt der Hypotenuse XY ist M nach der Umkehrung des Satzes von THALES Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks XAY. Daher gilt

$$|AM| = |XM| = \frac{a}{2}.$$

M liegt also auf der Kugel $\varkappa$ um A mit dem Radius $\frac{a}{2}$. Da mit X und Y wegen der Konvexität des Würfels auch XY im Würfelkörper liegt, ist M sogar Punkt des im Würfel und nicht auf AA' oder ε_{ABC} gelegenen Teiles $\widehat{\varkappa}$ dieser Kugel. Liegt umgekehrt M auf $\widehat{\varkappa}$, so sei X auf dem Strahl aus A durch A' so gelegen, daß $|MX| = \frac{a}{2}$ gilt. Wegen $|AM| = \frac{a}{2}$ ist daher X nach dem Kongruenzsatz (ssw), angewandt auf $\triangle AMX$, eindeutig bestimmt.
Wegen $M \in \widehat{\varkappa}$ ist $0 < |\sphericalangle MAA'| < 90^\circ$ und wegen $|AM| = |MX|$ gilt $|\sphericalangle MXA| = |\sphericalangle MAX|$, so daß g_{MX} zu keiner Seitenfläche des Würfels parallel ist. Insbesondere schneidet daher g_{MX} die Ebene ε_{ABC} in einem Punkt

$Y\ (\neq A)$, so daß $\triangle XAY$ rechtwinklig mit der Hypotenuse XY ist. Nach der Umkehrung des Satzes von THALES ist folglich XY Durchmesser und mithin M Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle XAY$, so daß

$$|MX| = |MY| = \frac{a}{2}$$

gilt.
Zum Nachweis, daß $M \in \mathfrak{M}$ ist, bleibt noch zu zeigen, daß Y in der Fläche des Quadrates $ABCD$ liegt. Wäre das nicht der Fall, so läge Y außerhalb des Quadrates und damit des Würfels. Da M im Würfelkörper liegt, müßten M und Y auf verschiedenen Seiten einer der drei Ebenen liegen, die eine der Seitenflächen des Würfels enthalten, die nicht durch A gehen. Also müßte MY eine dieser Ebenen schneiden. Das ist aber für $\varepsilon_{BCC'}$ und $\varepsilon_{DCC'}$ wegen $|XY| = a$, $M \in XY$ nicht möglich, und für $\varepsilon_{B'C'D'}$ wegen $|MY| = \frac{a}{2}$ nicht möglich, da alle Punkte von $\varepsilon_{B'C'D'}$ von $\widehat{\varkappa}$ einen Abstand $> \frac{a}{2}$ haben.
Zusammenfassung: Damit ist $\mathfrak{M} = \{N\} \cup \widehat{\mathfrak{b}} \cup \widehat{\varkappa}$, also der Schnitt der Kugel $\varkappa$ vom Radius $\frac{a}{2}$ um A mit dem Würfelkörper.

L.2.19 Aufgrund der gegebenen Bedingungen ergibt sich die Lage des Punktes Y aus der von X folgendermaßen (Bild L.2.19):

a) für $X \in AB$ liegt Y auf $A'D'$ so, daß $|AX| = |A'Y|$ ist,
b) für $X \in BC$ liegt Y auf $D'C'$ so, daß $|BX| = |D'Y|$ ist,
c) für $X \in CD$ liegt Y auf $C'B'$ so, daß $|CX| = |C'Y|$ ist,
d) für $X \in DA$ liegt Y auf $B'A'$ so, daß $|DX| = |B'Y|$ ist.

Zur Lösung der Aufgabe werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:

Satz 1: Ist P der Mittelpunkt von AA' und Q der Mittelpunkt von CC', so liegt der Mittelpunkt Z von XY auf PQ.

Satz 2: Liegt Z auf PQ, so ist Z Mittelpunkt einer der Strecken XY.

Aus beiden Sätzen folgt, daß der zu ermittelnde geometrische Ort die Strecke PQ ist.

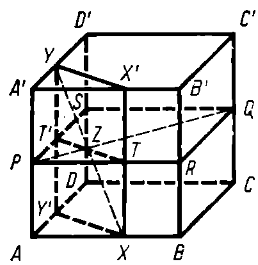


Bild L.2.19

Beweis von Satz 1:
Wird zu einem fest gedachten Zeitpunkt der Bewegung der Würfel an der Achse g_{PQ} gespiegelt, so geht dieser in sich über, und zwar so, daß A, B, C, D und X in dieser Reihenfolge mit A', B', C', D', Y vertauscht werden. Daher liegt Z auf der Symmetrieachse g_{PQ}. Weil jeder Würfel nach Satz V.3 konvex ist, ist PQ die Menge der Punkte von g_{PQ}, die im Würfelkörper liegen. Da aus demselben Grund XY und damit Z im Würfelkörper liegen, gilt $Z \in PQ$.

Beweis von Satz 2:

Es sei ε_2 die auf g_{PQ} senkrecht stehende Ebene durch $Z \in PQ$. Dann liegen P und Q nicht auf derselben Seite von ε_2. Da jede der Kanten AA', BB', CC', DD' zu ε_2 parallel ist, liegen jeweils A und A', B und B', C und C', D und D' nicht auf verschiedenen Seiten von ε_2, während A und C bzw. A' und C' nicht auf derselben Seite von ε_2 liegen.
Die Ebene ε_2 enthält die Strecken BB' und DD' entweder beide – genau dann, wenn Z der Mittelpunkt von PQ ist – oder beide nicht. Folglich hat ε_2 mit jeder der Strecken AB, $A'B'$, AD, $A'D'$ oder mit jeder der Strecken BC, $B'C'$, CD, $C'D'$ einen Punkt gemeinsam. Diese Schnittpunkte vertauschen sich bei der im Beweis von Satz 1 genannten Spiegelung auf die dort beschriebene Weise. Daher gibt es zu jedem Punkt $Z \in PQ$ ein Paar, im Falle $Z \neq P$, $Z \neq Q$ genau zwei Paare (X, Y) zusammengehöriger Punkte X, Y, für die Z Mittelpunkt von XY ist.

L.2.20 Neben der Möglichkeit, 100 Kugeln zu je 10 in 10 Reihen zu legen, gibt es auch die Möglichkeit, in einer Reihe 10 Kugeln, in der nächsten 9 Kugeln, dann wieder 10 Kugeln usw. unterzubringen. Dabei ist der Abstand d der Geraden durch die Mittelpunkte der ersten von der der zweiten Kugelreihe nach Satz III.27″ $d = r \cdot \sqrt{3}$, wobei r der Kugelradius ist; denn der Abstand der Geraden durch die Mittelpunkte ist gleich der Länge einer Höhe eines Dreiecks, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte dreier benachbarter Kugeln sind (Bild L.2.20). Ein derartiges Dreieck ist gleichseitig und hat die Seitenlänge $2r$.
Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Kugelreihen, so gilt für den Abstand h der Tangentialebenen bei der oben beschriebenen Anordnung der Kugeln (Bild L.2.20)

$$h = 2r + (n - 1)\, r \sqrt{3}.$$

Für $n = 11$ folgt $\left(\text{wegen } r = \frac{1}{2}\right)$ $h < 10$.
Man kann daher 11 Reihen in der Schachtel unterbringen. Die Kugeln lassen sich so anordnen, daß 6 Reihen mit je 10 und 5 Reihen mit je 9 Kugeln besetzt sind, also 105 Kugeln in der Schachtel liegen.

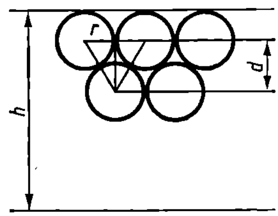


Bild L.2.20

Dabei liegen in den ‚äußeren' Reihen jeweils 10 Kugeln. Ersetzt man nun eine der Reihen zu 9 Kugeln durch eine mit 10 Kugeln, so vergrößert sich der Abstand

$$h = 2r + r\,(11 - 1)\sqrt{3} = 1 + 5 \cdot \sqrt{3}$$

auf

$$h' = 6r + 8r\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} < 3 + 4 \cdot 1{,}74 = 9{,}96.$$

Da $h' < 10$ ist, lassen sich 106 Kugeln in der Schachtel unterbringen. Die Behauptung ist also richtig.

L.2.21 1) *Behauptung:* QP_i und QP_j $(i \neq j)$ sind zwei Strecken, die sich in Q unter einem Winkel treffen, der größer als 60° ist (vgl. L.1.59).

Beweis (indirekt):

a) Lägen P_i und P_j auf dem gleichen von R ausgehenden Strahl, so hätte der weiter von Q entfernte dieser Punkte von dem anderen einen kleineren Abstand als von Q im Widerspruch zur Voraussetzung. Insbesondere fällt kein P_i mit Q zusammen, so daß QP_i eine Strecke ist.

b) Wäre die Größe α_{ij} des Winkels $\sphericalangle P_iQP_j$ nicht größer als 60°, so könnte P_iP_j nicht länger als jede der beiden anderen Seiten des Dreiecks P_iQP_j sein, weil in diesem sonst mindestens ein von $\sphericalangle P_iQP_j$ verschiedener Winkel eine Größe hätte, die nicht kleiner ist als 60° und diesem eine Seite gegenüberläge, die nicht kürzer als P_iP_j ist.

2) Bringt man alle von Q ausgehenden Strahlen, die mit QP_i Winkel einschließen, von denen jeder nicht größer als 30° ist, mit der Kugel $\varkappa$ um Q vom Radius 1 zum Schnitt (Bild L.2.21), so entsteht eine Kugelkappe $\varkappa_i$ mit dem Flächeninhalt

$$I_i = 2\pi \cdot 1 \cdot h_i = 2\pi\,(1 - \cos 30°) = \pi\left(2 - \sqrt{3}\right) \tag{1}$$

3) *Behauptung:* $\varkappa_i$ und $\varkappa_j$ haben für $i \neq j$ keinen Punkt gemeinsam.

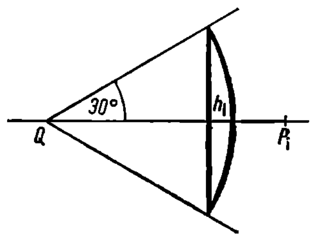


Bild L.2.21

Beweis:

Es sei R_i der Schnittpunkt von $\varkappa$ mit dem Strahl aus Q durch P_i. Dann genügt es zu zeigen, daß alle Punkte von $\varkappa_i$ auf derselben Seite der Symmetrieebene ε von R_iR_j wie R_i liegen. Angenommen, es gäbe einen Punkt $R \in \varkappa_i$, der nicht auf derselben Seite von ε wie $\varkappa_i$ liegt. Dann hat die Strecke RR_i einen Schnittpunkt R' mit ε. Ist k der Schnittkreis von ε und $\varkappa$, so gibt es auf k einen Punkt S' derart, daß R' auf QS liegt; denn ε geht nach Satz II.3, angewandt auf $R_i = A$, $R_j = B$, durch Q.

Hilfssatz: Ist S^* ein solcher Punkt auf k, daß QS den Mittelpunkt M von R_iR_j enthält, dann gilt für jeden Punkt S von k

$$|S^*M| \leqq |SM|.$$

Der Hilfssatz folgt unmittelbar daraus, daß der in ε gelegene Kreis um M durch S^* den Kreis k nach Satz IV.10 in S^* berührt und daher, weil er einen nicht größeren Radius als k hat, ganz in der von k begrenzten Kreisfläche liegt.
Aus dem Hilfssatz ergibt sich

$$|S^*R_i| \leqq |S'R_i|, \tag{2}$$

da aufgrund des Lehrsatzes des PYTHAGORAS, angewandt auf die Dreiecke S^*MR_i und $S'MR_i$,

$$|S^*R_i|^2 = |S^*M|^2 + |MR_i|^2$$

und

$$|S'R_i|^2 = |S'M|^2 + |MR_i|^2$$

gilt. Aus (2) folgt wegen $|\sphericalangle SQR_i| \leqq 90°$ für alle $S \in k$

$$|\sphericalangle S^*QR_i| \leqq |\sphericalangle S'QR_i|.$$

Daher wäre wegen $R \in \varkappa_i$

$$|\sphericalangle S^*QR_i| \leqq |\sphericalangle R'QR_i| = |\sphericalangle RQR_i| - |\sphericalangle RQR'| \leqq |\sphericalangle R_iQR| \leqq 30°,$$

was wegen $|\sphericalangle R_jQR_i| = 2|\sphericalangle S^*QR_i|$ mit der nach 1) gültigen Beziehung

$$|\sphericalangle P_iQP_j| > 60°$$

unvereinbar ist.

4) Aufgrund von 3) ist die Summe der Inhalte der $\varkappa_i$ nicht größer als die Kugeloberfläche, d.h. es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \leqq 4\pi,$$

also wegen (1)

$$n\pi\left(2 - \sqrt{3}\right) \leqq 4\pi,$$

woraus

$$n \leqq \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4\left(2 + \sqrt{3}\right) = 8 + 4\sqrt{3} < 15$$

folgt, denn wegen

$$4^2 \cdot 3 < 7^2 \quad \text{ist} \quad 4\sqrt{3} < 7.$$

Bemerkung: Durch eine genauere Untersuchung läßt sich zeigen, daß unter den Bedingungen der Aufgabe sogar stets $n \leqq 12$ ist, wobei der Fall $n = 12$ realisiert werden kann.

3. GEOMETRISCHE KONSTRUKTIONEN IN DER EBENE

L.3.1 *I. Analyse*

Angenommen, P ist ein Punkt der verlangten Art, dann werden zwei Fälle unterschieden:

a) P liegt auf CD,
b) P liegt nicht auf CD.

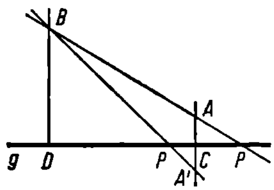


Bild L.3.1

Im Fall a) sei A' das Spiegelbild von A an g. Dann gilt $|\sphericalangle A'PC| = |\sphericalangle APC|$ und $|\sphericalangle BPC| = 180° - |\sphericalangle APC|$, so daß $|\sphericalangle BPA'| = 180°$ ist. Mithin liegt P auf $A'B$.
Im Fall b) gilt $\sphericalangle APD \cong \sphericalangle APC \cong \sphericalangle BPD$, so daß B auf g_{AB}, also P auf g_{AB} liegt.
Daher kann der Punkt P nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn er auf eine der folgenden Weisen konstruierbar ist.

II. Konstruktion

a): Man konstruiere das Lot AC auf g und zeichne g_{AC}. Auf g_{AC} trage man von A nach der Seite, auf der C liegt, eine Strecke der Länge $2|AC|$ ab, wodurch man den Punkt A' erhält. Der Schnittpunkt von $A'B$ mit g sei P.
b): Man zeichne g_{AB}. Der Schnittpunkt von g_{AB} mit g sei P.

III. Satz

Jeder Punkt P, der gemäß II.a) oder II.b) konstruiert wurde, genügt allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Zu a): Ist BD das Lot von B auf g, so haben g_{BD} und g_{AC} keinen gemeinsamen Punkt, weil $AC \parallel BD$ und g_{AB} nicht senkrecht zu g ist. C liegt also auf derselben Seite von g_{BD} wie A'. Da B nicht auf g liegt, ist $P \neq B$, und es liegt P als Punkt von $A'B$ auf derselben Seite von g_{BD} wie A' und C. Folglich liegt P auf dem von D ausgehenden Strahl durch C. Analog ergibt sich, daß P auf dem von C ausgehenden Strahl durch D liegt. Daher ist P ein Punkt der Strecke CD. Nach Konstruktion ist weiter

$|AC| = |A'C|$, $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle A'CP| = 90°$, so daß $\triangle ACP \cong \triangle A'CP$ und $\sphericalangle APC \cong \sphericalangle A'PC$ gilt. Daher ergibt sich $|\sphericalangle BPC| = 180° - |\sphericalangle APC|$ und, da P auf CD liegt, weiter $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle A'PC| = |\sphericalangle APC|$.

Zu b): Jetzt liegt P nicht auf CD. Denn da AB nach Voraussetzung g nicht schneidet, liegt P nicht auf AB. Es liegt also entweder A auf BP oder B auf AP. O.B.d.A. kann der erste Fall angenommen werden. Mithin liegen P und B auf verschiedenen Seiten von g_{AC}. Da $g_{BD} \parallel g_{AC}$ ist, liegt D auf derselben Seite von g_{AC} wie B, so daß PD die Gerade g_{AC}, und zwar in C schneidet. C liegt also auf PD und P nicht auf CD. Daher ist $\sphericalangle BPD \cong \sphericalangle BPC \cong \sphericalangle APC$.

IV. Determination

1. Jede der Konstruktionen II.a) und II.b) ist stets ausführbar (Existenzsatz).

   Beweis:

   Es bleibt nur zu zeigen, daß $A'B$ stets g schneidet. Da AA' die Gerade g in C schneidet, liegen A und A' auf verschiedenen Seiten von g und da B nach Voraussetzung auf derselben Seite von g wie A liegt, befinden sich A' und B auf verschiedenen Seiten von g, so daß $A'B$ sicher g schneidet.
2. Jeder Konstruktionsschritt in II.a) und II.b) ist auf höchstens eine Weise ausführbar (Eindeutigkeitssatz).
   Somit gibt es auf g stets genau zwei Punkte, die allen Bedingungen der Aufgabe genügen. Diese Punkte können nicht zusammenfallen, weil P im Fall II.a) auf CD, im Fall II.b) nicht auf CD liegt.

L.3.2 *I. Analyse*

Auf eine Analyse kann hier verzichtet werden, wenn es gelingt, eine stets zum Ziele führende Konstruktion anzugeben, weil von vornherein klar ist, daß es (bis auf Kongruenz) stets genau eine Lösung gibt.

II. Konstruktion

Man konstruiere ein bei D rechtwinkliges Dreieck FDC mit $|CD| = a$, $|FD| = b$. Danach konstruiere man das bei F rechtwinklige Dreieck AFC mit $|AF| = 3c$. Sodann konstruiere man das bei C rechtwinklige Dreieck ABC mit F auf AB.

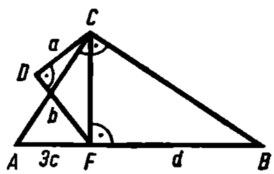


Bild L.3.2.

III. Satz

Wenn B und F gemäß II. konstruiert sind, ist

$$|BF| = \frac{a^2 + b^2}{3c}.$$

Beweis:

In $\triangle ABC$ ist nach Konstruktion CF Höhe und daher gilt nach dem Höhensatz

$$|BF| \cdot |AF| = |CF|^2.$$

In $\triangle CFD$ ist CF Hypotenuse, so daß nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$|CD|^2 + |FD|^2 = |CF|^2$$

gilt. Daher ist

$$|BF| = \frac{|CD|^2 + |FD|^2}{|AF|} = \frac{a^2 + b^2}{3c}.$$

IV. Determination

Eine Determination erübrigt sich aus den in I. angeführten Gründen.

L.3.3 *I. Analyse*

Es sei g_{AB} eine solche Gerade und A ihr Schnittpunkt mit q und B ihr Schnittpunkt mit r. Ist S der Scheitel des Winkels und C der Schnittpunkt der Parallelen zu r durch P mit g_{SA}, dann gilt nach dem 1. Strahlensatz

$$|AC| : |CS| = |AP| : |PB| = 1 : 1, \tag{1}$$

also

$$|AC| = |CS|.$$

Daher kann g_{AB} nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn A und B durch folgende Konstruktion erhalten werden können.

II. Konstruktion

Durch P wird die Parallele zu r gelegt. Ihr Schnittpunkt mit g_{SQ} sei C. Dann wird auf q von S aus eine Strecke der Länge $2|SC|$ abgetragen. Ihr Endpunkt sei A. B sei Schnittpunkt von g_{AP} mit der r enthaltenden Geraden.

III. Satz

Sind A und B gemäß II. konstruiert, so genügt g_{AB} allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Die in der Aufgabe genannte Strecke QR schneidet g_{PC} in P, so daß R und damit wegen $g_{SR} \parallel g_{CP}$ die ganze Gerade g_{SR} auf der anderen Seite von g_{PC} liegt wie Q. Insbesondere liegen S und Q auf verschiedenen Seiten von g_{PC}, so daß C auf SQ und damit auf q liegt. Folglich gilt $|SC| = |CA|$ und daher nach dem 1. Strahlensatz (1), also $|AP| = |PB|$. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß B auf dem Strahl r liegt. Läge B nicht auf r, so lägen B und R auf verschiedenen Seiten von g_{AS}, da B laut Konstruktion auf der r enthaltenden Geraden liegt. Das gleiche gilt dann auch von P und B, da P innerer Punkt von QR ist. Also muß PB die Gerade g_{AS} schneiden, d.h. A läge auf PB. Dann läge A auf derselben Seite von g_{PC} wie B und damit wie S, was nicht sein kann, weil C nach Konstruktion Mittelpunkt von AS ist.

IV. Determination

Sämtliche Konstruktionsschritte sind auf genau eine Weise ausführbar.

L.3.4 *I. Analyse*

Ist $A'B'C'$ ein zu dem gesuchten Dreieck ABC ähnliches Dreieck, so sind auch die rechtwinkligen Dreiecke ähnlich, die AB bzw. $A'B'$ als Hypotenuse und die Höhe von $\triangle ABC$ durch A bzw. von $\triangle A'B'C'$ durch A' oder die Höhe durch B bzw. B' als Kathete besitzen. Daher gilt, wenn $c = |AB|$, $c' = |A'B'|$, $h_{a'}$ die Länge der Höhe durch A' und $h_{b'}$ die Länge der Höhe durch B' ist,

$$c : c' = h_a : h_{a'}, \quad c : c' = h_b : h_{b'}$$

und damit

$$c : c' = (h_a + h_b) : (h_{a'} + h_{b'}). \tag{1}$$

Sind also von einem solchen Dreieck $A'B'C'$ die Größen c' und $h_{a'} + h_{b'}$ bekannt, so ist bei gegebenen $h_a + h_b$ unter allen zu $\triangle A'B'C'$ ähnlichen Dreiecken höchstens ein solches gesuchtes Dreieck $\triangle ABC$, dessen Größe c die Relation (1) erfüllt (Bild L.3.4).

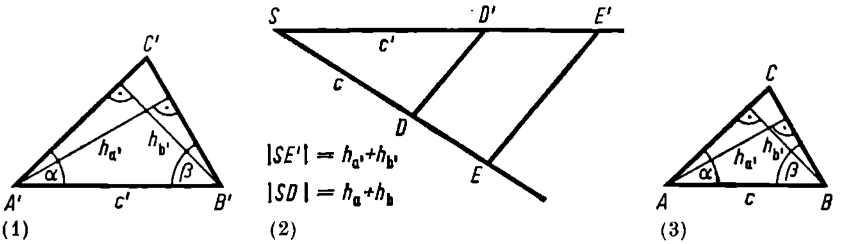


Bild L.3.4

II. Konstruktion

Man gebe sich eine Strecke SD' der Länge c' $(\neq 0)$ vor und konstruiere $\triangle A'B'C'$ mit

$$|A'B'| = c', \quad |\sphericalangle B'A'C'| = \alpha \quad \text{und} \quad |\sphericalangle A'B'C'| = \beta.$$

Sodann konstruiere man in $\triangle A'B'C'$ die Höhen durch A' sowie durch B' und konstruiere mit deren Längen $h_{a'}$ bzw. $h_{b'}$ einen Punkt E' auf $g_{SD'}$ so, daß $|SE'| = h_{a'} + h_{b'}$ wird. Auf einer von $g_{SD'}$ verschiedenen Geraden g durch S sei E so gewählt, daß $|SE| = h_a + h_b$ gilt, während D der Schnittpunkt von g_{SE} mit der Parallelen zu EE' durch D' sei.

III. Satz

Setzt man $c = |SD|$, so hat $\triangle ABC$ mit $|AB| = c$, $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ die geforderten Eigenschaften.

Beweis:

Nach dem 1. Strahlensatz gilt

$$|SD| : |SD'| = |SE| : |SE'|,$$

d.h.

$$c : c' = (h_a + h_b) : (h_{a'} + h_{b'}),$$

und damit ist (1) erfüllt.

IV. Determination

Gilt $h_a + h_b > 0$ und $\alpha + \beta < 180°$, so ist die Konstruktion von $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig möglich. Es sind nämlich alle Hilfskonstruktionen ausführbar und die Länge c ist unabhängig von der Wahl der Geraden g_{SE}.

L.3.5 *I. Analyse*

Angenommen, ABC sei ein Dreieck der geforderten Art, dann liegt M

a) auf einem Kreisbogen $\widehat{b}$ (ausschließlich seiner Endpunkte A und B) über AB mit dem Peripheriewinkel ω, wie sich aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes ergibt,

b) auf dem Kreis k um den Mittelpunkt D von AB mit dem Radius $\frac{b}{2}$.

Denn aus $|BM| : |BC| = 1 : 2$ und $|BD| : |BA| = 1 : 2$ folgt nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes zunächst $AC \parallel DM$ und daher nach dem 2. Strahlensatz

$$|BM| : |BC| = |DM| : |AC|, \quad \text{also } |DM| = \frac{1}{2}|AC|.$$

Schließlich liegt C $(\neq B)$ nach Definition von M

auf der Geraden g_{BM},
auf dem Kreis um M mit dem Radius $|MB|$.

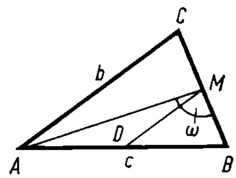


Bild L.3.5a

Daher sind A, B, C nur dann die Ecken eines Dreiecks der geforderten Art, wenn sie auf folgende Weise konstruiert werden können.

II. Konstruktion

1. Über der Strecke AB der gegebenen Länge c werde ein Kreisbogen $\widehat{b}$ mit dem zugehörigen Peripheriewinkel ω konstruiert.
2. Es wird der Mittelpunkt D von AB konstruiert.
3. Um D wird der Kreis k mit dem Radius $\frac{b}{2}$ $(= |DA|)$ gezeichnet. M sei gemeinsamer Punkt von k und $\widehat{b}$.
4. Es wird die Gerade g_{BM} gezeichnet.
5. Von M aus wird auf g_{BM} die Strecke $CM \cong MB$, $C \neq B$, abgetragen.

III. Satz

Ist C auf die in II. angegebene Weise konstruiert, dann genügen A, B, C allen Forderungen der Aufgabe.

Beweis:

a) Nach II.1. ist $|AB| = c$.

b) Aufgrund von II.5 ist $|BC| = 2|BM|$. Wegen $|BA| = 2|BD|$ gemäß II.2 gilt daher

$$|BC| : |BA| = |BM| : |BD|. \tag{1}$$

Da M als Punkt von $\widehat{b}$ nicht auf g_{AB} liegt, ergibt sich aus (1) nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes $AC \parallel MD$ und nach dem 2. Strahlensatz weiter

$$|AC| : |MD| = |AB| : |DB| = 2 : 1.$$

Folglich ist wegen II.3.

$$|AC| = 2\,|MD| = b.$$

c) Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt wegen II.1.

$$|\sphericalangle AMB| = \omega.$$

IV. Determination

1. Jede der Konstruktionen II.1 bis II.5 ist ausführbar, wenn M existiert. Existiert M nicht, so sind II.4 und II.5 nicht ausführbar.
Über die Existenz von M kann anhand des folgenden Hilfssatzes entschieden werden, der hier nicht bewiesen, sondern nur durch die Figur im Bild L.3.5b veranschaulicht wird, wobei

$$|DE_1| = \frac{|DB|}{2}\cot\frac{\omega_1}{2}, \quad |DE_2| = \frac{|DB|}{2}\cot\frac{\omega_2}{2} \text{ gilt.}$$

Hilfssatz:
Ist k' der Kreis um D mit dem Radius $\frac{c}{2}$ und k'' der Kreis um D mit dem Radius $\frac{c}{2}\cot\frac{\omega}{2}$, dann liegt $\widehat{b}$ ganz in der von k' und k'' begrenzten Kreisringfläche und schneidet jeden in dieser gelegenen zu k' konzentrischen Kreis. Im Fall $\omega = 90°$ liegt $\widehat{b}$ auf k.

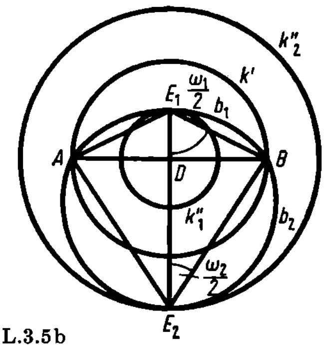


Bild L.3.5b

M existiert genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

a) $\omega < 90°, \quad 1 < \frac{b}{c} \leqq \cot\frac{\omega}{2}$,

b) $\omega > 90°, \quad \cot\frac{\omega}{2} \leqq \frac{b}{c} < 1$,

c) $\omega = 90°, \quad b = c$.

2. Jeder der Schritte II.1 bis II.5 ist – bis auf Kongruenz – für jedes existierende M auf genau eine Weise ausführbar.

a) In jedem der Fälle 1.a) und 1.b) sowie $\frac{b}{c} = \cot\frac{\omega}{2}$ gibt es genau einen Punkt M, der auf $\widehat{b}$ und k liegt.

b) In jedem der Fälle 1.a) und 1.b) sowie $\frac{b}{c} \neq \cot\frac{\omega}{2}$ gibt es genau zwei gemeinsame Punkte von $\widehat{b}$ und k, nämlich M_1 und M_2. Dabei ist sicher $|\sphericalangle ABM_1| \neq |\sphericalangle ABM_2|$, so daß die gemäß II. konstruierten Dreiecke bei Berücksichtigung der Bezeichnungen verschieden ausfallen. Es wird hier nicht untersucht, ob die beiden Dreiecke evtl. kongruent sein können.

c) Im Fall 1.c) ist jeder Punkt von $\widehat{b}$ Punkt von k und führt zu einem gleichseitigen Dreieck mit $b = c$.

L.3.6 *I. Analyse*

Angenommen, ABC sei ein Dreieck der verlangten Art, dann bestehen folgende Lagebeziehungen:
Bezeichnet M den Mittelpunkt von BC und D den Mittelpunkt von AB, dann liegt D

1) auf dem Kreis k um C mit dem Radius s_c,
2) auf einem zu α gehörigen Ortskreisbogen $\widehat{b}$ über BM.

Beweis:

1) gilt aufgrund der Definition des Kreises (Def. II.2).
2) Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt

$$DM \parallel AC$$

und somit

$$\sphericalangle BDM \cong \sphericalangle BAC$$

(als Stufenwinkel an Parallelen), so daß nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes D auf $\widehat{b}$ liegt.

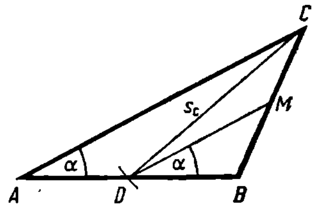


Bild L.3.6

Der Punkt A liegt

1) auf dem von B ausgehenden Strahl durch D (ausschließlich B)
2) auf dem Kreis um D mit dem Radius $|BD|$.

Beide Aussagen folgen unmittelbar daraus, daß D Mittelpunkt von AB ist. Daher können A, B, C nur dann die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks sein, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion

Man zeichne die Strecke BC der gegebenen Länge a. Danach konstruiere man den Mittelpunkt M von BC. Um C schlage man den Kreis k mit dem gegebenen Radius s_c, und über BM errichte man einen zu α gehörigen Ortskreisbogen $\widehat{b}$. Ist D ein gemeinsamer Punkt von k und $\widehat{b}$, so trage man auf dem von B ausgehenden Strahl durch D von D aus nach der B nicht enthaltenden Seite eine Strecke der Länge $|BD|$ ab, deren zweiter Endpunkt A sei.

III. Satz

Sind A, B, C gemäß II. konstruierbar, so bilden sie die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks.

Beweis:

Nach Konstruktion ist $|BC| = a$, D Mittelpunkt von AB und $|CD| = s_c$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$|\sphericalangle BDM| = \alpha$$

und nach dem 1. Strahlensatz und dem Satz über Winkel an geschnittenen Parallelen (I.13)

$$\sphericalangle BDM \cong \sphericalangle CAB,$$

so daß

$$|\sphericalangle CAB| = \alpha$$

ist.

IV. Determination

1. Sämtliche Konstruktionsschritte in II. sind, falls D existiert, ausführbar.
Um die Existenz von D zu untersuchen, werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt:
k' sei der $\widehat{b}$ enthaltende Kreis, r dessen Radius, M_1 dessen Mittelpunkt, $d = |M_1C|$ und $\widehat{b'}$ der Komplementärbogen von $\widehat{b}$ bezüglich k' (ohne die Endpunkte M und B). Mit diesen Bezeichnungen gelten die folgenden beiden Hilfssätze:

Hilfssatz 1:
k und k' haben genau dann einen gemeinsamen Punkt D, wenn

$$d - r \leqq s_c \leqq d + r \tag{1}$$

gilt.

Beweis:

a) Nach der Dreiecksungleichung gilt, wenn D gemeinsamer Punkt von k und k' ist,

$$d - r = |CM_1| - |M_1D| \leqq |CD| \leqq |CM_1| + |M_1D|,$$

was wegen $|CD| = s_c$ mit (1) äquivalent ist.

b) Ist (1) erfüllt, so gilt für den einen Schnittpunkt S von k mit g_{CM_1}

$$|M_1S| = |M_1C| - |CS| = d - s_c \leqq r$$

und für den anderen Schnittpunkt S' von k mit g_{CM_1}

$$|M_1S'| = |M_1C| + |CS'| = d + s_c \geqq r.$$

Daher kann k nicht ganz innerhalb und auch nicht ganz außerhalb von k' liegen und hat folglich mit k' mindestens einen Punkt gemeinsam.
Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2:

Wenn $\widehat{b}$ nicht länger als $\widehat{b'}$ ist (der zu $\widehat{b}$ gehörige Peripheriewinkel ist nicht kleiner als der zu $\widehat{b'}$ gehörige), so hat k mit $\widehat{b}$ genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn k einen inneren Punkt mit BM gemeinsam hat, d.h., wenn $\frac{a}{2} < s_c < a$ gilt.

Zusatz: Wenn $\widehat{b}$ nicht länger als $\widehat{b'}$ ist, so können k und $\widehat{b}$ nicht zwei Punkte gemeinsam haben.

Beweis:

a) D sei gemeinsamer Punkt von k und $\widehat{b}$. Dann gilt nach Voraussetzung $|\sphericalangle BDM| \geqq 90°$. Daher ist $\sphericalangle BDM$ im Dreieck BDM der größte Winkel, so daß BM längste Seite ist. Nun gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|CB| - |BD| < |CD| < |CM| + |MD|$$

und folglich

$$|CB| - |BM| < |CD| < |CM| + |MB|,$$

d.h.

$$|CM| < |CD| < |CB|. \tag{2}$$

Daher gibt es auf MB einen inneren Punkt S mit $|CS| = |CD|$. S liegt auf k.

b) Liegt auf k ein innerer Punkt S von BM, so gilt

$$|CM| < |CS| < |CB|,$$

also liegt M innerhalb und B außerhalb von k.
Daher haben k und k' zwei Schnittpunkte E und E', wobei der eine von diesen Punkten begrenzte Bogen von k' ganz innerhalb von k, der andere ganz außerhalb von k liegt. Daher ist C ein Punkt des erstgenannten, B ein Punkt des letztgenannten Bogens. Mithin liegt einer der Punkte E, E' auf $\widehat{b}$, der andere auf $\widehat{b'}$.
Beachtet man noch, daß wegen

$$d - r = |CM_1| - |M_1M| \leqq |CM| = \frac{a}{2}$$

und

$$a = |CB| \leqq |CM_1| + |M_1B| = d + r$$

die Beziehung (1) sicher erfüllt ist, wenn die mit (2) äquivalente Ungleichung

$$\frac{a}{2} < s_c < a$$

gilt, so ergibt sich aus den beiden Hilfssätzen, daß in folgenden Fällen k und $\widehat{b}$ (mindestens) einen gemeinsamen Punkt haben:

$$1)\quad \alpha \geqq 90^\circ,\quad \frac{a}{2} < s_c < a$$

$$2)\quad \alpha < 90^\circ,\quad d - r \leqq s_c < d + r.$$

In allen anderen Fällen existiert D nicht, und es gibt daher kein Dreieck, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

2. Der Bogen $\widehat{b}$ kann auf genau zwei Weisen gezeichnet werden, die bezüglich g_{BC} spiegelbildlich liegen und daher im folgenden jeweils zu (spiegelbildlich) kongruenten Figuren führen. Es genügt daher eine Lage von $\widehat{b}$ zu betrachten.

Im Fall $\alpha \geqq 90^\circ$, $\frac{a}{2} < s_c < a$, kann nach dem Zusatz k mit $\widehat{b}$ nicht zwei Punkte gemeinsam haben, d.h., D und $\triangle ABC$ sind eindeutig bestimmt (bis auf Kongruenz). In den Fällen $\alpha < 90^\circ$, $d - r = s_c$ und $\alpha < 90^\circ$, $d + r = s_c$ haben k und k' und damit auch k und $\widehat{b}$ höchstens einen gemeinsamen (Berührungs-)Punkt, d.h., D und damit $\triangle ABC$ sind eindeutig bestimmt.

Im Fall $\alpha < 90^\circ$, $\frac{a}{2} \leqq s_c \leqq a$ haben k und $\widehat{b}$ höchstens einen gemeinsamen Punkt: D und $\triangle ABC$ sind eindeutig bestimmt.
In jedem der Fälle

$$\alpha < 90^\circ,\quad d - r < s_c < \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \alpha < 90^\circ,\quad a < s_c < d + r$$

haben k und $\widehat{b}$ genau zwei Schnittpunkte D und D', die dann stets zu inkongruenten Dreiecken ABC und $A'BC$ führen.

Beweis, daß ABC und $A'BC$ inkongruent sind:
Sind DF bzw. $D'F'$ die Lote von D bzw. D' auf g_{BC}, so gilt für die Flächeninhalte:

$$I\,(ABC) = |BC| \cdot |DF|,$$
$$I\,(A'BC) = |BC| \cdot |D'F'|,$$

weil nach dem 2. Strahlensatz

$$|DF| : h_a = |BD| : |BA| = 1 : 2,$$
$$|D'F'| : h'_a = |BD| : |BA'| = 1 : 2$$

gilt, wenn h_a bzw. h'_a die zu A bzw. A' gehörende Höhenlänge bezeichnet.
Wäre $|DF| = |D'F'|$, dann müßte, da $DD' \perp M_1C$ ist, C Fußpunkt des Lotes von M_1 auf g_{BC} sein, was nicht wahr ist, weil C nicht Mittelpunkt von BM ist.
Daher ist $|DF| \neq |D'F'|$ und mithin

$$I\,(ABC) \neq I\,(A'BC), \text{ so daß nicht}$$
$$\triangle ABC \cong \triangle A'BC$$

gelten kann.

Bemerkung: Mit Hilfe trigonometrischer Funktionen können die für die Determination wichtigen Größen d und r durch die gegebenen Stücke a und α wie folgt ausgedrückt werden.

$$r = |MM_1| = \frac{|MH|}{\sin\alpha} = \frac{a}{4\sin\alpha}$$

$$d = |CM_1| = \sqrt{|CH|^2 + |HM_1|^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\cot\alpha\right)^2}$$
$$= \frac{a}{4}\sqrt{9 + \cot^2\alpha}$$

$$d \pm r = \frac{a}{4\sin\alpha}\left[\sqrt{9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \pm 1\right] = \frac{a}{4\sin\alpha}\left[\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha} \pm 1\right].$$

L.3.7 *I. Analyse*

Angenommen, es gibt ein Dreieck der verlangten Art, dann liegt sein Umkreismittelpunkt M

1) auf dem Kreis um B mit dem Radius r,
2) auf dem Kreis um C mit dem Radius r.

Der Punkt A liegt dann

1) auf dem Kreis um M mit dem Radius r,
2) auf einem in C an BC angetragenen freien Schenkel der Winkelgröße 60°.

Daher genügt das Dreieck ABC nur dann allen Bedingungen der Aufgabe a), wenn es auf folgende Weise erhalten werden kann.

II. Konstruktion

Um jeden der Endpunkte B und C der gegebenen Strecke BC der Länge 5,6 cm wird der Kreis vom Radius r geschlagen. M sei Schnittpunkt dieser beiden Kreise k_1, k_2. Dann wird um M der Kreis k mit dem Radius r gezeichnet. In C wird ein freier Schenkel zur Winkelgröße 60° an CB angetragen. A sei Schnittpunkt von k mit diesem freien Schenkel.

III. Satz

Wenn alle unter II. genannten Konstruktionsschritte durchführbar sind, dann ist ABC ein Dreieck der verlangten Art.

Beweis:
Aufgrund der Konstruktion ist

1) $|BC| = 5{,}6$ cm;
2) $|\sphericalangle ABC| = 60°$;
3) $|MA| = r$, $|MB| = r$, $|MC| = r$, so daß r Umkreisradius ist.

IV. Determination (nur teilweise erforderlich)

1. Im Fall $r = 3{,}5$ cm existiert wegen $r > \frac{1}{2}|BC|$ stets ein Schnittpunkt M der beiden Kreise k_1, k_2.

Von den beiden freien Schenkeln muß wenigstens einer auf derselben Seite der Tangente an k in C liegen wie B und daher k in einem zweiten Punkt A schneiden.

2. Die Untersuchung der Einzigkeit ist in der vorliegenden Aufgabe nicht verlangt.
Damit ist der Teil a) der Aufgabe gelöst.

Wir schließen zunächst die Behandlung des Teiles c) der Aufgabe an. Da in allen Fällen, in denen der Kreis k existiert, auch der Schnittpunkt A vorhanden ist, gibt es genau dann kein Dreieck der geforderten Art, wenn M nicht konstruierbar ist, also wenn $r < \frac{1}{2}\,|BC|$, d.h. $r < 2{,}8$ cm ist.

Zur Behandlung von b) bezeichnen wir mit F den Mittelpunkt von BC. Dann ist $\triangle MFB$ bei F rechtwinklig und nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS ergibt sich

$$|MF|^2 = |MB|^2 - |BF|^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}\,|BC|\right)^2$$

$$= (3{,}5^2 - 2{,}8^2)\ \text{cm}^2 = 0{,}7^2\,(5^2 - 4^2)\ \text{cm}^2 = 9 \cdot 0{,}49\ \text{cm}^2$$

also

$$d = |MF| = 2{,}1\ \text{cm},$$

wenn d der zu berechnende Abstand ist.

L.3.8 *I. Analyse*

Angenommen, ABC sei ein Dreieck der geforderten Art und D und E seien die Mittelpunkte von BC bzw. AB. Dann gilt $|AD| = s_a$ sowie $|CE| = s_c$. Weiterhin ist $|AE| = |EB| = s_c$; denn C liegt wegen $|\sphericalangle ACB| = 90°$ nach der Umkehrung des Satzes des THALES auf einem Halbkreis über AB. Aus

$$|AB| : |EB| = |CB| : |DB| = 2 : 1$$

folgt nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$$ED \parallel AC, \quad \text{d.h.} \quad |\sphericalangle EDB| = 90°,$$

so daß D nach der Umkehrung des Satzes des THALES auf einem Halbkreis h (ohne seine Endpunkte) über EB liegt. Daher genügt ABC nur dann allen Bedingungen der Aufgabe, wenn es folgendermaßen konstruiert werden kann (Bild L.3.8).

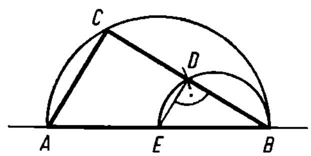


Bild L.3.8

II. Konstruktion

Man zeichne eine Strecke AB der Länge $2s_c$ und konstruiere deren Mittelpunkt E. Über EB schlage man einen Halbkreis h (ohne seine Endpunkte). Sodann zeichne man den Kreis k um A mit dem Radius s_a. D sei gemeinsamer Punkt von k und h. Auf dem von B ausgehenden Strahl durch D trage man eine Strecke der Länge $2\,|BD|$ ab, wodurch man den Punkt C erhält.

III. Satz

Jedes gemäß II. konstruierte Dreieck genügt allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Nach Konstruktion ist D Mittelpunkt von BC und $|AD| = s_a$. Weiter ist E Mittelpunkt von AB. Daher gilt

$$|BC| : |BD| = 2 : 1 = |BA| : |BE|.$$

Folglich ist nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$$AC \parallel ED.$$

Da nach dem Satz des THALES

$$|\sphericalangle EDB| = 90°$$

ist, folgt

$$|\sphericalangle ACB| = 90°.$$

Daher liegt C nach der Umkehrung des Satzes von THALES auf einem Halbkreis über AB, so daß wegen

$$|AB| = 2s_c, \quad \text{also } |AE| = s_c$$

schließlich auch

$$|CE| = s_c$$

erfüllt ist.

IV. Determination

1. Dann und nur dann sind alle Konstruktionsschritte ausführbar, wenn k und h einen gemeinsamen Punkt D haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn $s_c < s_a < 2s_c$ gilt.

   Beweis:

   a) Ist M Mittelpunkt von h, so muß – wenn D existiert – gelten

   $$|AM| - |MD| < |AD| < |AM| + |MD|,$$

   also

   $$\frac{3}{2}s_c - \frac{1}{2}s_c < s_a < \frac{3}{2}s_c + \frac{1}{2}s_c,$$

   d.h.

   $$s_c < s_a < 2s_c.$$

   b) Gilt

   $$s_c < s_a < 2s_c,$$

   so liegt von den beiden Schnittpunkten von k mit g_{AB} einer außerhalb, der andere innerhalb des Kreises k' um M mit dem Radius s_c, so daß k und k' zwei Schnittpunkte haben, die symmetrisch zur Zentralen g_{AM} liegen. Einer dieser Schnittpunkte liegt daher auf h.

2. Mit Ausnahme der Konstruktion von h sind alle Schritte in II. nur auf eine Weise ausführbar. Für h gibt es stets genau zwei zu g_{AB} symmetrische Lagen, die bei allen folgenden Schritten zu (spiegelbildlich) kongruenten Figuren führen.

L.3.9 a) *I. Analyse*

Angenommen, ABC ist ein Dreieck der verlangten Art, dann ist, wenn D den Mittelpunkt von AB bezeichnet, CD Höhe von ABC, also $|CD| = h$. Ist E derjenige Punkt auf dem von D ausgehenden Strahl durch B, für den $|DE| = |DC|$ ist, so ist $\triangle CDE$ gleichschenklig rechtwinklig, so daß $|\sphericalangle CED| = 45°$ gilt. Außerdem ergibt sich

$$|AE| = |AD| + |DE| = \frac{a}{2} + h \ (= 7{,}5 \text{ cm}).$$

Daher kann $\triangle ABC$ nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann.

II. Konstruktion

Zunächst wird eine Strecke AE der Länge 7,5 cm konstruiert. In A wird an AE ein freier Schenkel s unter einem Winkel der Größe 60° angetragen und in E ein solcher unter einem Winkel der Größe 45°, der auf derselben Seite von g_{AE} liegt wie s.
Ist C Schnittpunkt der beiden Schenkel, so wird der Kreis um A mit dem Radius $|AC|$ gezeichnet. Dieser schneidet den von A ausgehenden Strahl durch E in einem Punkt B.

III. Satz

Jedes auf die in II. beschriebene Art konstruierte Dreieck ABC genügt allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Nach Konstruktion ist $|AC| = |AB|$ und $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Daher ist $\triangle ABC$ gleichseitig. Folglich ist CD Höhe von ABC, wenn D den Mittelpunkt von AB bezeichnet. Im Dreieck ACE gilt

$$\begin{aligned}|\sphericalangle ACE| &= 180° - |\sphericalangle CAE| - |\sphericalangle CEA| = 180° - 60° - 45° \\ &= 75° > 60°.\end{aligned}$$

Daher ist $|AE| > |AB|$. Folglich liegt B und damit auch D auf AE, so daß

$$|AE| = |AD| + |DE| \tag{1}$$

gilt. Da $\triangle CDE$ bei D rechtwinklig ist und die Größe von $\sphericalangle CED$ nach Konstruktion 45° beträgt, ist $\triangle CDE$ gleichschenklig, und zwar so, daß $|CD| = |DE|$ ist. Wegen $|AE| = 7{,}5$ cm, $|AD| = \frac{a}{2}$ und $|CD| = h$ gilt daher aufgrund von (1)

$$\frac{a}{2} + h = |AD| + |DE| = |AE| = 7{,}5 \text{ cm}.$$

IV. Determination

1. Alle Konstruktionsschritte sind durchführbar. Zum Beweis braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die beiden freien Schenkel einen Schnittpunkt haben. Aufgrund der Konstruktion sind die beiden Schenkel nicht parallel zueinander. Daher haben die sie enthaltenden Geraden einen Schnittpunkt C. Läge C nicht auf der Seite von g_{AE}, auf der die Schenkel liegen, so läge C auf keinem der beiden Schenkel und es wäre $|\sphericalangle CAE| = 120°$ und $|\sphericalangle CEA| = 135°$, was wegen $|\sphericalangle CAE| + |\sphericalangle CEA| + |\sphericalangle ACE| = 180°$ nicht sein kann.
2. Jeder der Konstruktionsschritte ist mit Ausnahme der Konstruktion von s nur auf eine Weise möglich. Für s gibt es genau zwei zueinander in bezug auf g_{AE} symmetrische Lagen, die bei den folgenden Schritten zu (spiegelbildlich) kongruenten Figuren führen.

b) Berechnung von a

Im gleichseitigen Dreieck ABC gilt $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Aus

$$\frac{a}{2} + h = 7{,}5\ \text{cm}$$

erhält man daher

$$\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) = 7{,}5\ \text{cm},$$

d.h.

$$a = 7{,}5\left(\sqrt{3} - 1\right)\text{cm}\ (\approx 5{,}49\ \text{cm}).$$

L.3.10 *I. Analyse*

Angenommen, D, E, F genügen allen Bedingungen der Aufgabe. Bezeichnet E' den auf der anderen Seite von g_{BC} wie A gelegenen Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite BC, dann ist E der Schnittpunkt von AE' mit g_{BC}.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $FD \parallel CB$ und $|\sphericalangle DFE| = 60°$, und nach Definition $|\sphericalangle BCE'| = 60°$. Da E und E' auf derselben Seite von g_{FD} liegen wie g_{CB}, folgt $CE' \parallel FE$ und entsprechend $FE \parallel BE'$. Die Gerade g_{AE} schneidet $g_{CE'}$ in einem Punkt, der P genannt sei, und die Gerade $g_{BE'}$ in einem Punkt, der Q genannt sei. Dann gelten nach dem 1. Strahlensatz die Beziehungen

$$\begin{aligned}|AD| : |AB| &= |AF| : |AC|,\\ |AD| : |AB| &= |AE| : |AQ'|,\\ |AF| : |AC| &= |AE| : |AF|.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$|AE| : |AP| = |AE| : |AQ|,$$

also

$$|AP| = |AQ|$$

und damit

$$P = Q = E'.$$

Daher ist $\triangle CPB$ gleichseitig; denn jeder der Winkel $\sphericalangle BCP$, $\sphericalangle CBP$ hat entweder die Größe 60° oder 120°, und 120° kommt nicht in Frage, weil die Winkelgrößensumme im Dreieck 180° beträgt.
Daher können E, F, D nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion

Man konstruiere über CB das gleichseitige Dreieck CBE', dessen Ecke E' nicht auf derselben Seite von g_{BC} wie A liegt. Dann schneidet die Strecke AE' die Gerade g_{BC} in einem Punkt E. F sei der Schnittpunkt von g_{AC} mit der Parallelen zu CE' durch E, D der Schnittpunkt von g_{AB} mit der Parallelen zu BE' durch E.

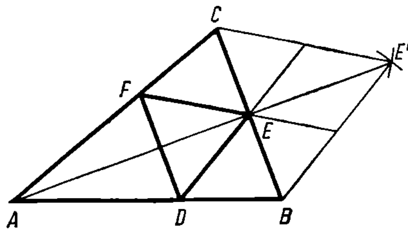


Bild L.3.10

III. Satz

Wenn E, F, D gemäß II. konstruiert sind, genügt $\triangle EFD$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

a) Man überzeugt sich zunächst davon, daß E auf BC liegt: Da nach Voraussetzung $\triangle ABC$ spitz ist und A und E' auf verschiedenen Seiten von g_{BC} liegen, gilt

$$|\sphericalangle ABE'| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBE'| \leqq 90° + 60° < 180°$$

und entsprechend

$$|\sphericalangle ACE'| < 180°.$$

Daher kann E nicht mit B oder C zusammenfallen. Läge E nicht auf BC, so läge BC auf ein und derselben Seite von $g_{AE'}$. Dann wäre einer der beiden Winkel $\sphericalangle EBE'$ oder $\sphericalangle ECE'$ Außenwinkel zum Dreieck BCE'.
O.B.d.A. kann angenommen werden, daß dies der Winkel $\sphericalangle EBE'$ ist. Da A und E' auf verschiedenen Seiten von g_{EC} liegen, läge B im Innern des Dreiecks $AE'C$ und es wäre

$$360° = |\sphericalangle ABE'| + |\sphericalangle E'BC| + |\sphericalangle CBA|,$$

also

$$|\sphericalangle CBA| = 360° - |\sphericalangle ABE'| - |\sphericalangle E'BC| > 360° - 180° - 60° = 120°,$$

d.h. $\triangle ABC$ wäre nicht spitzwinklig.

b) Läge F nicht auf AC, so lägen A und C auf derselben Seite von g_{EF}, und zwar wegen $g_{EF} \parallel g_{CE'}$ auf derselben Seite wie E', so daß AE' keinen Punkt mit g_{EF} gemeinsam hätte. Das ist ein Widerspruch, weil E auf AE' und g_{EF} liegt.

c) Entsprechend zeigt man, daß D auf AB liegt.

d) Wegen $g_{EF} \parallel g_{E'C}$ und $g_{ED} \parallel g_{E'B}$ folgt nun nach dem 1. Strahlensatz

$$|AD| : |AB| = |AE| : |AE'| = |AF| : |AC|$$

und aus

$$|AD| : |AB| = |AF| : |AC|$$

nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$$DF \parallel BC.$$

e) Da EE' die Gerade g_{AC} nicht schneidet (denn der Schnittpunkt von $g_{EE'}$ mit g_{AC} ist A, und A liegt nicht auf EE', weil E auf AE' liegt), liegen E und E' auf derselben Seite von g_{AC}. Daher gilt

$$\sphericalangle AFE \cong \sphericalangle ACE',$$

wegen $FE \parallel CE'$.
Entsprechend ergibt sich, da DB auf derselben Seite von g_{AC} liegt wie EE',

$$\sphericalangle AFD \cong \sphericalangle ACB$$

und weiter

$$|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle BCE'| = 60°.$$

Analog folgt, daß auch die anderen Innenwinkel von $\triangle DEF$ je die Größe 60° haben, so daß $\triangle DEF$ gleichseitig ist.

IV. Determination

Da jeder Konstruktionsschritt stets ausführbar ist, und zwar genau auf eine Weise, gibt es stets genau ein Dreieck DEF, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

L.3.11 *I. Analyse*

Angenommen, $ABCD$ sei ein Quadrat, dessen Ecken auf dem Rande der Halbkreisfläche φ mit dem Durchmesser EG und dem Mittelpunkt M liegen. Dann liegen höchstens zwei Eckpunkte, o.B.d.A. A und B, auf EG. Es liegen auch mindestens zwei Eckpunkte auf EG, denn andernfalls lägen drei Punkte – B, C, D – auf dem Halbkreis. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales müßte dann wegen $|\sphericalangle BCD| = 90°$ die Strecke BD Durchmesser sein, so daß B und D auf EG lägen.
Ist H der Mittelpunkt von DC, so gilt, da DC Sehne ist, $MH \perp DC$ und daher $MH \parallel AD$. Folglich ist $g_{MD} \nparallel g$, wenn g die Parallele von g_{AD} durch E bedeutet. Der Schnittpunkt von g_{MD} mit g werde mit F bezeichnet. Dann gilt nach dem 2. Strahlensatz

$$|EF| : |AD| = |EM| : |AM|. \tag{1}$$

Wegen

$$AD \parallel MH,\ DH \parallel AM \text{ und } |DH| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{2}|AB| \text{ ist}$$

$$|AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|AD|.$$

Daher ist (1) gleichbedeutend mit

$$|EF| = 2\,|EM|.$$

Infolgedessen ist $ABCD$ nur dann ein Quadrat der verlangten Art, wenn es auf folgende Weise konstruiert werden kann (Bild L.3.11).

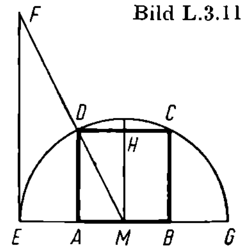


Bild L.3.11

II. Konstruktion

Im Punkt E des Durchmessers EG wird die Senkrechte g zu EG errichtet und auf ihr die Strecke EF der Länge $2\,|EM|$ abgetragen. Der Schnittpunkt von g_{MF} mit der Halbkreislinie werde mit D bezeichnet. A sei das Lot von D auf EG, C der zweite Schnittpunkt der Parallelen zu g_{EG} durch D mit der Halbkreislinie und B der Fußpunkt des Lotes von C auf EG.

III. Satz

Jedes auf diese Weise konstruierte Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat der geforderten Art.

Beweis:

Aus dem 2. Strahlensatz folgt

$$|EF| : |AD| = |EM| : |AM|,$$

also

$$|AD| = 2\,|AM|.$$

Ist nun H der Fußpunkt des Lotes von M auf g_{DC}, so ist H Mittelpunkt von CD, und es gilt $|CD| = 2\,|DH| = 2\,|AM| = |AD|$. Wegen $AD \parallel BC$ und $CD \parallel AB$ gilt weiter $|BC| = |AD|$ und $|AB| = |CD| = |AD|$. Aufgrund von $|\sphericalangle DAB| = 90°$ ist daher $ABCD$ ein Quadrat.

IV. Determination

1. Jeder der in II. angegebenen Konstruktionsschritte ist stets ausführbar.
2. Mit Ausnahme der Konstruktion von F ist jeder Schritt nur auf eine Weise ausführbar. F kann auf genau zwei Arten konstruiert werden, die bei den Fortsetzungen jeweils zu (spiegelbildlich) kongruenten Figuren führen.

L.3.12 *I. Analyse*

Angenommen, es gibt ein derartiges Rechteck. Die Seitenlängen b und c dieses Rechtecks müssen dann die Gleichungen

$$bc = a^2$$

und

$$b + c = 4a$$

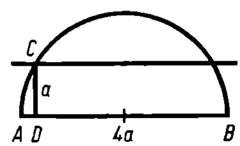


Bild L.3.12

erfüllen; b und c müssen demzufolge die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 4ax + a^2 = 0$$

sein (Bild L.3.12).

II. Konstruktion

Über einer Strecke AB der Länge $4a$ errichte man einen Halbkreis h. C sei Schnittpunkt von h mit der auf derselben Seite von g_{AB} wie h gelegenen Parallelen zu g_{AB} im Abstand a, D der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{AB}. Man konstruiere nun ein Rechteck mit den Seitenlängen

$$a = |BD| \quad \text{und} \quad b = |AD|.$$

III. Satz

Jedes gemäß II. konstruierte Rechteck leistet alles Geforderte.

Beweis:
Nach dem Lehrsatz des THALES ist $\triangle ABC$ bei C rechtwinklig. Da nach Konstruktion CD Höhe von $\triangle ABC$ ist, gilt nach dem Höhensatz

$$|AD| \cdot |BD| = |CD|^2 = a^2.$$

Außerdem gilt

$$|AD| + |BD| = 4a = 2 \cdot (2a).$$

IV. Determination

Die Konstruktion von h ist auf genau zwei Weisen möglich, wobei die beiden Fälle im folgenden jeweils (spiegelbildlich) kongruente Figuren ergeben. Desgleichen ist die Konstruktion des Punktes C auf genau zwei Arten möglich, die jeweils im folgenden zu (spiegelbildlich) kongruenten Figuren führen. Die übrigen Konstruktionen sind (abgesehen von einer Vertauschung der Bezeichnungen) eindeutig ausführbar.

L.3.13 *I. Analyse*

Angenommen, es gibt ein derartiges Quadrat q, dann gilt für seine Seitenlänge s die Beziehung

$$s^2 = 2ab|\cos\gamma|. \qquad (1)$$

O. B. d. A. kann angenommen werden, daß $a \geqq b$ ist. Dann ist wegen $0 < \gamma < \pi$

$$b\,|\cos\gamma| < a$$

und daher $s < \sqrt{2a \cdot a} < a\sqrt{2} < 2a$.
Ist CC' die B enthaltende Strecke der Länge $2a$ und h ein Halbkreis über CC', so schneidet der Kreis k um C mit dem Radius s sicher h in einem Punkt D (Bild L.3.13).

Da $\triangle C'CD$ nach dem Lehrsatz des THALES bei D rechtwinklig ist, gilt, wenn F' der Fußpunkt des Lotes von D auf CC' ist, nach dem Lehrsatz des EUKLID

$$|CC'| \cdot |CF'| = s^2,$$

also

$$2a \cdot |CF'| = 2ab\,|\cos\gamma|$$

und

$$|CF'| = b\,|\cos\gamma|.$$

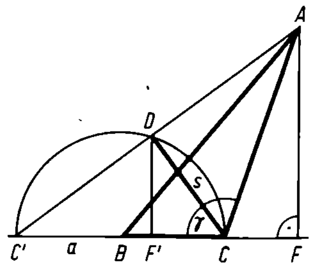


Bild L.3.13

Ist nun A derjenige Punkt auf dem in C an CC' angetragenen freien Schenkel mit $|\sphericalangle ACC'| = \gamma$, für den $|CF| = |CF'|$ ist, wobei F den Fußpunkt des Lotes von A auf $g_{CC'}$ bedeutet, so ist $|AC| = b$. Daher kann q nur dann ein allen Bedingungen der Aufgabe genügendes Quadrat sein, wenn es auf folgende Weise erhalten werden kann.

II. Konstruktion

Auf dem von C ausgehenden B enthaltenden Strahl wird von B aus eine Strecke der Länge a nach der C nicht enthaltenden Seite abgetragen. Deren Endpunkt sei C'. Über CC' wird ein Halbkreis h errichtet. Von A wird das Lot AF auf g_{BC} gefällt. Danach wird von C aus auf der Strecke CB die Strecke CF' der Länge $|CF|$ abgetragen (falls F auf BC liegt, ist $F' = F$). Die Gerade $g_{AC'}$ wird mit h zum Schnitt gebracht, der entstehende Schnittpunkt mit D bezeichnet. Über CD wird das Quadrat q konstruiert.

III. Satz

Falls alle in II. beschriebenen Konstruktionsschritte ausführbar sind, genügt jedes auf diese Weise entstehende Quadrat allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Nach Definition des Kosinus gilt aufgrund der Konstruktion

$$|CF| : |CA| = |\cos(\pi - \gamma)| = |-\cos\gamma|$$

also

$$|CF| = b\,|\cos\gamma|.$$

Nach dem Lehrsatz des THALES ist $\triangle CDC'$ bei D rechtwinklig, und daher gilt nach dem Lehrsatz des EUKLID

$$|CD|^2 = |CC'| \cdot |CF'| = 2a \cdot |CF| = 2ab\,|\cos\gamma|.$$

IV. Determination

1. Die in II. genannten Konstruktionsschritte sind genau dann alle ausführbar, wenn $F \neq C$ ausfällt, d.h., wenn $\gamma \neq 90°$ ist.
2. Alle unter II. genannten Konstruktionen sind mit Ausnahme der des Halbkreises h auf höchstens eine Weise ausführbar, während es für h genau zwei Möglichkeiten gibt, die zu (spiegelbildlich) kongruenten Fortsetzungen der Konstruktion führen.

L.3.14 *I. Analyse*

Angenommen, $ABCD$ sei ein solches Trapez. Dann gibt es auf AB wegen $|AB| > |CD|$ genau einen Punkt A' mit $|AA'| = |CD|$.
$AA'CD$ ist ein Parallelogramm (nach Satz III.37.4), insbesondere ist also $|A'C| = |AD|$. Daher genügt das Viereck $ABCD$ nur dann allen Bedingungen der Aufgabe, wenn es folgendermaßen konstruierbar ist.

II. Konstruktion

Zunächst wird ein Dreieck $A'BC$ aus seinen drei Seiten konstruiert

$$\begin{aligned} |A'B| = |AB| - |CD| &= 1{,}5\text{ cm}, \\ |BC| &= 4\text{ cm}, \\ |A'C| = |AD| &= 3\text{ cm}. \end{aligned}$$

Sodann wird auf dem von B ausgehenden Strahl durch A' von B aus eine Strecke der Länge $|BA| = 6$ cm abgetragen, wodurch man zu A gelangt. Von A aus wird auf dem zu BC parallelen von A ausgehenden und auf derselben Seite von g_{AB} wie C gelegenen Strahl eine Strecke der Länge $|AD| = 3$ cm abgetragen, wodurch man den Punkt D erhält.

Bemerkung: Es kann deswegen behauptet werden, daß AD nach der angegebenen Seite abgetragen werden muß, weil andernfalls CD die Gerade g_{AB} schneiden und daher nicht parallel AB sein würde.

III. Satz

Wenn die Punkte A, B, C, D gemäß II. konstruiert sind, ist $ABCD$ ein Trapez, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Beweis:

Da C und D auf derselben Seite von g_{AB} liegen, schneiden sich AB und CD nicht, und da B und A auf verschiedenen Seiten von $g_{A'C}$ liegen und $AD \parallel A'C$ ist, schneiden sich AD und BC nicht. (Hätten AD und BC einen Schnittpunkt S, so lägen B und S auf verschiedenen Seiten von $g_{A'C}$. Also müßte BS die Gerade $g_{A'C}$ schneiden, was nicht der Fall sein kann, weil g_{BS} und $g_{A'C}$ den nicht auf BS gelegenen Schnittpunkt C haben.) Somit ist $ABCD$ ein (nicht überschlagenes) Viereck. Da $A'C$ sicher nicht AD schneidet, ist auch $AA'CD$ ein Viereck, und zwar wegen $A'C \parallel AD$ und $|A'C| = |AD|$ nach Satz III.37.4 ein Parallelogramm. Also gilt

$$|AA'| = |CD|, \quad AA' \parallel CD$$

und folglich auch $AB \parallel CD$.
Da A' auf AB liegt, ist $|AA'| = |AB| - |A'B| = 6\text{ cm} - 1{,}5\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$ und daher $|CD| = 4{,}5$ cm.
Weil nach Konstruktion $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm und $|AD| = 3$ cm ist, sind somit alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

IV. Determination

1. Wegen $|A'C| - |A'B| = 1{,}5$ cm kleiner als $|BC| = 4$ cm kleiner als $4{,}5\text{ cm} = |A'C| + |A'B|$ ist $\triangle A'BC$ konstruierbar. Alle folgenden Konstruktionen sind ebenfalls ausführbar.

2. Jeder der Konstruktionsschritte kann auf höchstens eine Weise vorgenommen werden. Es gibt also (bis auf Kongruenztransformationen) genau ein Trapez $ABCD$ der geforderten Art.

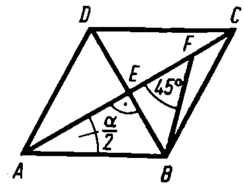


Bild L.3.15

L.3.15 *I. Analyse*

Die Diagonalen im Rhombus haben folgende Eigenschaften:

sie halbieren einander, (1)

sie stehen aufeinander senkrecht, (2)

sie halbieren je zwei Innenwinkel des Rhombus. (3)

Ist E der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus $ABCD$, so gilt wegen (1) aufgrund von Satz III.43

$$|AE| = \frac{e}{2}, \quad |EB| = \frac{f}{2} \quad \text{und} \quad |\sphericalangle EAB| = \frac{\alpha}{2}, \quad |\sphericalangle AEB| = 90°. \quad (4)$$

Das Dreieck AEB ist also rechtwinklig, und die Summe seiner Kathetenlängen ist wegen (4) gleich $\frac{1}{2}(e + f)$. Ist F der Punkt auf dem von A ausgehenden Strahl durch E mit $|AF| = \frac{1}{2}(e + f)$, so ist $\triangle BEF$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse BF, denn es ist $|EF| = |EB| = \frac{f}{2}$. Daher ist $|\sphericalangle EFB| = 45°$.

II. Konstruktion

Man konstruiert ein Dreieck AFB aus der Seite AF der Länge $\frac{1}{2}(e + f)$ und den Winkeln $\sphericalangle BFA$ der Größe 45° und $\sphericalangle FAB$ der Größe $\frac{\alpha}{2}$ $(< 90°)$.
Danach konstruiert man die Spiegelpunkte D von B an g_{AF} und C von A an g_{BD}.

III. Satz

Jedes gemäß II. konstruierte Viereck $ABCD$ ist ein Rhombus der verlangten Art.

Beweis:

Aufgrund der Konstruktion gilt

$$|AB| = |AD|, \quad |AB| = |BC|, \quad |BC| = |CD|,$$

so daß $ABCD$ ein Rhombus ist.
Es sei E der Fußpunkt des Lotes von B auf g_{AC}.
Wegen $|\sphericalangle BAF| < 90°$ liegt E auf AF. Wegen $|\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle BFA| = 45°$

ist auch $|\sphericalangle EBF| = 45°$ und daher $|BE| = |EF|$. Da E Diagonalenschnittpunkt im Rhombus $ABCD$ ist und wegen

$$\frac{1}{2}(e + f) = |AF| = |AE| + |EF| = |AE| + |EB|,$$

ist $e + f$ die Summe der Diagonalenlängen in $ABCD$. Wegen

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle FAD| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

ist auch die Bedingung $|\sphericalangle DAB| = \alpha$ erfüllt.

IV. Determination

Die Konstruktion ist bei beliebigem positivem Wert von $e + f$ und beliebiger positiver Winkelgröße $< 180°$ stets auf genau eine Weise ausführbar. Für $\alpha \geqq 180°$ ist die Konstruktion nicht ausführbar. Es gibt dann keinen Rhombus, der allen geforderten Bedingungen genügt.

L.3.16 Diese mit einem Extremalproblem gekoppelte Konstruktionsaufgabe führen wir durch Behandlung des Extremalproblems in eine reine Konstruktionsaufgabe über.

Es seien CD der Durchmesser und AB eine beliebige Sehne des gegebenen Kreises durch den Punkt P. Dann gilt nach dem Sehnensatz (enthalten in Satz IV.11)

$$\begin{aligned} |AP| \cdot |BP| &= |CP| \cdot |DP| \\ &= (r + |MP|)(r - |MP|) \\ &= r^2 - |MP|^2, \end{aligned}$$

wenn M und r Mittelpunkt bzw. Radius des gegebenen Kreises bezeichnen. Folglich ist

$$\begin{aligned} |AB|^2 = (|AP| + |BP|)^2 &= (|AP| - |BP|)^2 + 4|AP| \cdot |BP| \\ &= 4(r^2 - |MP|^2) + (|AP| - |BP|)^2. \end{aligned}$$

Daher fällt

$$|AB| \geqq 2\sqrt{r^2 - |MP|^2}$$

aus, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn P der Mittelpunkt von AB ist, wenn also AB auf CD senkrecht steht (vgl. Satz IV.9).

Damit ist die Aufgabe auf die Konstruktion der Senkrechten von g_{MP} durch P zurückgeführt, die als so bekannt angesehen werden kann, daß sich eine weitere Behandlung erübrigt.

L.3.17 *I. Analyse* (Bild L.3.17)

Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann ist $\triangle MTX$ bei T rechtwinklig und es gilt

$$\begin{aligned} |MT|^2 &= |MX|^2 - |TX|^2 = |MX|^2 - |XA|^2 \\ &= (|MX| - |XA|) \cdot (|MX| + |XA|) \\ &= |MA| \cdot (|MX| - |XA|). \end{aligned} \tag{1}$$

Ist C Berührungspunkt einer Tangente von A an den Kreis, so ist $\triangle MCA$ bei C rechtwinklig, und ist CB Lot von C auf MA, so gilt nach dem Kathetensatz und (1)

$$|MA| \cdot |MB| = |MC|^2 = |MT|^2 = |MA|\,(|MX| - |XA|). \tag{2}$$

Hieraus folgt

$$|MB| = |MX| - |XA| \tag{3}$$

und weiter

$$|BX| = |XA|; \tag{4}$$

denn X muß außerhalb des Kreises und B innerhalb zwischen M und A liegen, also auch zwischen X und M. Daher kann X nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn X auf folgende Weise konstruierbar ist.

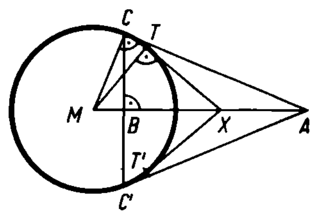


Bild L.3.17

II. Konstruktion

Man konstruiert eine Tangente von A an den Kreis. Ist C der Berührungspunkt, so fälle man von ihm das Lot CB auf MA. X sei der Mittelpunkt von AB.

III. Satz

Jeder gemäß II. konstruierte Punkt X genügt allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:

Bekanntlich liegt B innerhalb des Kreises zwischen A und M. Genügt X der Bedingung (4), so liegt X als Punkt von AB außerhalb des Kreises; denn da B zwischen A und M sowie X zwischen A und B liegt, liegt B zwischen M und X.

Daher folgt aus (4) die Relation (3) und hieraus

$$|MA|\,(|MX| - |XA|) = |MA|\,|MB| = |MC|^2$$

(nach dem Kathetensatz) und weiter

$$\begin{aligned} |MC|^2 &= |MA|\,(|MX| - |XA|) = (|MX| + |XA|)\,(|MX| - |XA|) \\ &= |MX|^2 - |XA|^2, \end{aligned}$$

also $|XM| > |MC|$. Daher gibt es eine Tangente durch X an den Kreis. Ist T ihr Berührungspunkt, so folgt

$$|TX|^2 = |MX|^2 - |MT|^2 = |MX|^2 - |MC|^2 = |XA|^2$$

und

$$|TX| = |XA|.$$

IV. Determination

Die Konstruktion ist stets auf genau zwei Weisen durchführbar (symmetrisch zu g_{MA}) und ergibt daher in beiden Fällen denselben Punkt X.

L.3.18 a) *I. Analyse*

M_0 sei der gemeinsame Mittelpunkt der gegebenen konzentrischen Kreise k_R vom Radius R und k_r vom Radius r. A bzw. B sei der Berührungspunkt eines zu konstruierenden Kreises k mit k_R bzw. k_r, M sei der Mittelpunkt von k, ϱ dessen Radius. Dann liegen nach Satz IV.20 M_0, M, A und B auf derselben Geraden (Bild L.3.18).
Liegen k und k_R bzw. k und k_r außerhalb voneinander, so gilt

$$\left.\begin{aligned} |MM_0| &= |M_0A| + |AM| = R + \varrho \quad \text{bzw.} \\ |MM_0| &= |M_0B| + |BM| = r + \varrho. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Liegt k_R bzw. k_r innerhalb von k, so gilt

$$\left.\begin{aligned} |MM_0| &= |MA| - |AM_0| = \varrho - R \quad \text{bzw.} \\ |MM_0| &= |MB| - |BM_0| = \varrho - r. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Liegt k innerhalb von k_R bzw. k_r, so gilt

$$\left.\begin{aligned} |MM_0| &= |M_0A| - |AM| = R - \varrho \quad \text{bzw.} \\ |MM_0| &= |M_0B| - |BM| = r - \varrho. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus der Voraussetzung $R > r$ folgen:

$$R + \varrho > r + \varrho > |r - \varrho| \tag{4}$$

$$r - \varrho < R - \varrho < R + \varrho. \tag{5}$$

Aus (1), (2), (3) und (4) ergibt sich, daß k nicht außerhalb von k_R liegen kann und aus (1), (2), (3) und (5) unter Berücksichtigung von $|MM_0| \geqq 0$, daß k nicht innerhalb von k_r liegen kann.
Daher gibt es nur folgende Lösungsmöglichkeiten:

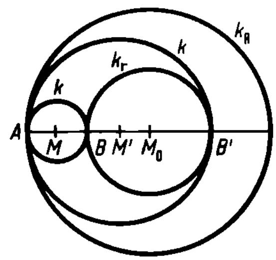


Bild L.3.18

1) k liegt innerhalb k_R und k_r liegt außerhalb k,
2) k liegt innerhalb k_R und k_r liegt innerhalb k.

Im Fall 1) ist $R - \varrho = |MM_0| = r + \varrho$, also

$$\varrho = \frac{1}{2}(R - r) = \frac{1}{2}(|M_0A| - |M_0B|),$$

$$|M_0M| = \frac{1}{2}(R + r) = \frac{1}{2}(|M_0A| + |M_0B|).$$

Im Fall 2) ist $R - \varrho = |MM_0| = \varrho - r$, also

$$\varrho = \frac{1}{2}(R + r) = \frac{1}{2}(|M_0A| + |M_0B|),$$

$$|M_0M| = \frac{1}{2}(R - r) = \frac{1}{2}(|M_0A| - |M_0B|).$$

II. Konstruktion

Man wähle einen Punkt A auf k_R. Die Schnittpunkte von k_r mit g_{M_0A} seien B und B', wobei B auf M_0A liege.
Man konstruiere die Mittelpunkte M und M' von AB bzw. AB' und zeichne die Kreise k und k' um M bzw. M' mit $|MA|$ bzw. $|M'A|$.

III. Satz

Jeder der so konstruierten Kreise k und k' genügt den Forderungen der Aufgabe.

Beweis:

g_{MA} und g_{M_0A} stehen auf der Tangente an k bzw. k_R in A senkrecht. Da M, M_0 und A auf derselben Geraden liegen, ist $g_{MA} = g_{M_0A}$ und die beiden genannten Tangenten fallen zusammen. Folglich berühren sich k und k_R in A. Entsprechend schließt man in den anderen Fällen.

IV. Determination

A kann auf k_R beliebig gewählt werden. Nach Wahl von A sind die beschriebenen Konstruktionen von M und M' stets ausführbar, und zwar auf genau eine Weise.

b) Da jeder Punkt auf k_R als Punkt A gewählt werden kann, besteht der gesuchte geometrische Ort aus zwei Kreisen k^* und k^{**}. Dabei ist k^* der Kreis um M_0 mit dem Radius $\frac{1}{2}(R + r)$. Er ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise k, die k_r und k_R so berühren, daß k innerhalb von k_R liegt sowie k_r und k außerhalb voneinander liegen. k^{**} ist der Kreis um M_0 mit dem Radius $\frac{1}{2}(R - r)$. Er ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise k', die k_r und k_R so berühren, daß k' innerhalb von k_R und k_r innerhalb von k' liegt.

L.3.19 *I. Analyse*

Angenommen, es gibt drei derartige Kreise k_A, k_B, k_C mit den entsprechenden Radien r_A, r_B, r_C. Dann gilt

$$r_A + r_B = |AB| = c,$$
$$r_B + r_C = |BC| = a,$$
$$r_C + r_A = |CA| = b,$$

also $2(r_A + r_B + r_C) = |AB| + |BC| + |CA| = 2s$ (s halber Umfang des Dreiecks ABC), woraus sich ergibt

$$r_A = s - a,$$
$$r_B = s - b,$$
$$r_C = s - c.$$

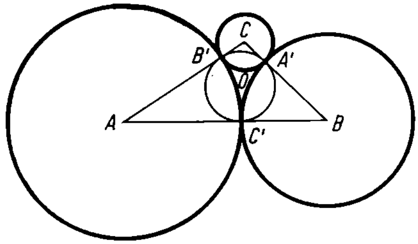


Bild L.3.19

Hieraus folgt, daß die Berührungspunkte des Inkreises von $\triangle ABC$ mit den Seiten gleichzeitig die Berührungspunkte der drei zu konstruierenden Kreise sind.
Daher sind k_A, k_B, k_C drei Kreise der geforderten Art höchstens dann, wenn sie auf folgende Weise erhalten werden können.

II. Konstruktion

Zu dem Dreieck ABC wird der Inkreis k^* konstruiert. Sind A', B', C' die Berührungspunkte von k mit BC, CA, AB, so werden

k_A: Kreis um A mit dem Radius $|AB'| = |AC'| = r_A = s - a$,
k_B: Kreis um B mit dem Radius $|BC'| = |BA'| = r_B = s - b$,
k_C: Kreis um C mit dem Radius $|CA'| = |CB'| = r_C = s - c$

gezeichnet.

III. Satz

Wenn alle Konstruktionen unter II. ausführbar sind, sind k_A, k_B, k_C drei allen Bedingungen der Aufgabe genügende Kreise.

Beweis:
Wegen $|AB'| + |B'C| = |AC|$ berühren sich k_A und k_C in B'. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Kreise.

IV. Determination

1. Alle in II. beschriebenen Konstruktionen sind ausführbar.
2. Alle in II. beschriebenen Konstruktionen sind auf höchstens eine Art ausführbar.

L.3.20 *I. Analyse*

Angenommen, k' ist ein Kreis der geforderten Art, dann werde sein Mittelpunkt mit M' und sein Radius mit r' bezeichnet. Ferner sei M Mittelpunkt und r Radius von k sowie B der Berührungspunkt von k und k'. Dann gelten folgende Beziehungen:

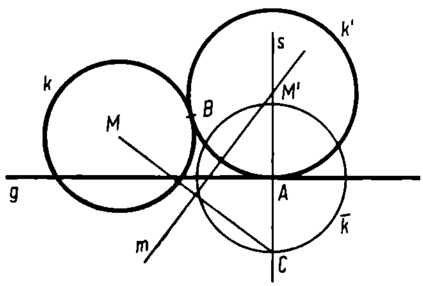


Bild L.3.20

1) M' liegt auf der Senkrechten s zu g durch A und es ist $M' \neq A$.
2) B liegt auf $g_{MM'}$, und es ist $B \neq M$ und $B \neq M'$.
3) Es gilt $|M'A| = |M'B| = r' > 0$ und $|MB| = r > 0$.

Wegen $|M'A| = |M'B| > 0$ und $M' \neq A$ gibt es auf s genau einen Punkt C mit $|M'C| = |M'M|$ und $|AC| = |MB| = r$.

Beweis:
Wegen 2) gilt genau eine der drei Beziehungen

$$|MM'| = |MB| + |BM'|, \quad |MM'| = |MB| - |BM'|,$$
$$|MM'| = |M'B| - |BM|,$$

also entweder

a) $|MM'| = r + r'$ oder
b) $|MM'| = |r - r'|$.

Daher ist C derjenige Punkt auf s mit $|AC| = r$, für den A auf $M'C$ liegt oder nicht, je nachdem der Fall a) oder b) vorliegt.
Daher liegt M'

1) auf s, $M' \neq A$,
2) auf dem geometrischen Ort m aller Punkte P der Ebene mit $|PM| = |PC|$, d.i. die Mittelsenkrechte von MC, falls $M \neq C$, und die ganze Ebene, falls $M = C$ ist.

Mithin genügt k' nur dann allen Bedingungen der Aufgabe, wenn k' auf folgende Weise konstruierbar ist.

II. Konstruktion

1) Man konstruiere die Senkrechte s zu g durch A.
2) Man zeichne den Kreis $\bar{k}$ um A mit dem Radius r. C sei Schnittpunkt von $\bar{k}$ und s.
3) Man „konstruiere" den geometrischen Ort m aller Punkte P der Ebene mit $|PM| = |PC|$.

Ist M' ein gemeinsamer Punkt von s und m, so zeichne man den Kreis k' um M' mit dem Radius $|M'A|$.

III. Satz

Jeder gemäß II. konstruierte Kreis k' genügt allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
1) Da $|M'A|$ als Radius von k nicht 0 ist und M' auf s liegt, gilt $M'A \perp g$, so daß g Tangente an k' in A ist.

2) a) Ist $C = M$, so liegt wegen $|AC| = r > 0$ der Punkt A auf k und es ist $g_{MA} = g_{CA} = s \perp g$. Folglich ist wegen $M'A \perp g$

$$g_{MA} = g_{M'A},$$

und s ist gemeinsame Tangente von k und k' in A, d.h. k und k' berühren sich in A.

b) Ist $C \neq M$, so ist $M' \neq M$ wegen $|MM'| = |CM'|$ und daher ist auch $C \neq M'$. Folglich ist $g_{CM} \nparallel g_{MM'}$. B sei der Schnittpunkt von $g_{MM'}$ mit der Parallelen zu g_{CM} durch A. Dann gilt nach dem 1. Strahlensatz:

$$|M'B| : |M'A| = |M'M| : |M'C| = 1$$

und

$$|MB| : |MM'| = |CA| : |CM'|,$$

also

$$|M'B| = |M'A| = r'$$

und

$$|MB| = |AC| = r.$$

Daher ist B gemeinsamer Punkt von k und k' auf der Zentralen $g_{MM'}$ von k und k' und folglich Berührungspunkt von k und k'.

IV. Determination

1. Die Konstruktionsschritte 1) und 2) sind jeweils stets auf genau eine Weise ausführbar. Dabei entstehen für C stets genau zwei Lagen C_1 und C_2.
Dementsprechend existieren stets genau zwei geometrische Örter $m = m_1$ und $m = m_2$, und zwar ist m die Mittelsenkrechte von CM, falls $C \neq M$ ausfällt, die ganze Ebene, falls $C = M$ ausfällt.
Daher existiert M' genau dann nicht, wenn m eine zu s parallele Gerade ist, wenn also $C \neq M$ und $CM \perp s$ ausfällt. Daraus folgt insbesondere, daß stets mindestens ein M' existiert, weil sonst $MC_1 \perp s$ und $MC_2 \perp s$ folgen würde, was wegen $C_1 \neq C_2$ nicht wahr sein kann.
Mithin ist k' genau dann konstruierbar, wenn $M' \neq A$ ausfällt.
Untersuchung des Falles $M' = A$:
Aus $M' = A$ folgt $|AM| = |AC|$, also wegen $|AC| = r$ weiter $A \in k$.
Liegt A auf k, so bestehen die Schnitte von m_i und s beide nur aus dem Punkt $M' = A$, wenn g nicht Tangente an k ist. Dagegen fällt, wenn g Tangente an k (in A) ist, einer der Punkte C_i mit M zusammen, und der Schnitt des entsprechenden m_i mit s ist s, so daß es $M' \neq A$ gibt, während es für das andere m_i nur $M' = A$ gibt.
Fazit: Falls A auf k liegt und g nicht Tangente an k ist, gibt es keinen Kreis der geforderten Art.

In allen anderen Fällen gibt es mindestens einen Kreis der geforderten Art, und zwar

2. a) Liegt A auf k und ist g Tangente an k, so sind alle von A verschiedenen Punkte von s und nur diese geeignete M', so daß jeder Kreis k' durch A, dessen Mittelpunkt auf s liegt, und kein anderer allen Bedingungen der Aufgabe genügt.
b) Liegt A nicht auf k und ist g Tangente an k mit dem Berührungspunkt B', so ist für eines der C_i das Viereck $AB'MC_i$ wegen $AC_i \perp AB'$, $B'M \perp AB'$, also $AC_i \parallel B'M$ und $|AC_i| = r = |B'M|$ ein Rechteck (nach Satz III.37.4 und III.40.4), so daß $MC_i \perp s$ gilt. Daher existiert für dieses C_i der Punkt M' nicht. Es gibt folglich genau einen Kreis der geforderten Art.
c) Liegt A nicht auf k und ist g nicht Tangente an k, so ist für beide C_i sicher $M \neq C_i$, nicht $MC_i \perp s$, so daß in beiden Fäl-

len genau ein $M' = M'_i$ ($\neq A$) existiert. Dabei ist $M'_1 \neq M'_2$; denn anderenfalls wäre $M'_1 = M'_2$ Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks MC_1C_2 und als Punkt von $g_{C_1C_2}$ der Mittelpunkt A von C_1C_2, so daß $M'_1 = A$ wäre.
Daher existieren im vorliegenden Fall genau zwei Kreise der geforderten Art.

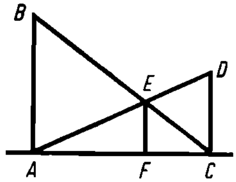
Zusammenfassung:

Ist g Tangente an k, so gibt es unendlich viele oder genau einen Kreis k' der geforderten Art, je nachdem ob A auf k liegt oder nicht. Ist g nicht Tangente an k, so gibt es entweder keinen oder genau zwei Kreise der geforderten Art, je nachdem ob A auf k liegt oder nicht.

L.3.21 a) *Beweis*

Aufgrund der Konstruktion ist $ABDC$ ein Trapez. AD und BC sind seine Diagonalen, die sich folglich schneiden (Bild L.3.21 a). Nach dem 2. Strahlensatz gilt

Bild L.3.21 a



$$|CD| : |FE| = |AC| : |AF| \tag{1}$$

und

$$|AB| : |FE| = |CA| : |CF| = |AC| : (|AC| - |AF|), \tag{2}$$

also

$$|CD| : |AB| = (|AC| - |AF|) : |AF| = |CD| : |FE| - 1.$$

Hieraus folgt

$$|CD| : |FE| = |CD| : (|AB| + 1)$$

und schließlich

$$\frac{1}{|FE|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}$$

Beim Beweis wurde übrigens nicht benutzt, daß AB und CD senkrecht auf g stehen, sondern nur

$$AB \parallel CD \parallel EF.$$

Die Konstruktion kann also entsprechend abgeändert werden.

b) Für die Größe R des Gesamtwiderstandes gilt bekanntlich

$$\frac{1}{|R|} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}.$$

Dabei bedeutet $|R|$ die in Ohm gemessene Maßzahl von R. $|R|$ bestimmt sich aus Bild L.3.21 b.

Beweis:
Es ist

$$\frac{1}{|R_1|} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{|R|} = \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{12},$$

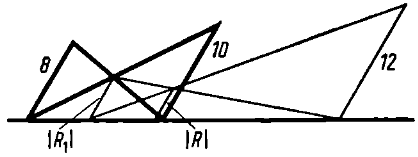


Bild L.3.21 b

d.h.

$$\frac{1}{|R|} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}.$$

Bemerkung: Die Beziehung

$$\frac{1}{|R|} = \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|} + \frac{1}{|R_3|}$$

kann nicht rein mathematisch, d.h. ohne physikalische Kenntnisse (allgemeines KIRCHOFFsches Gesetz) aus dem Gesetz

$$\frac{1}{|R|} = \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|}$$

hergeleitet werden.

L.3.22 Nach Voraussetzung ist

$$|AC| = |BC|$$

und nach Konstruktion

$$|DC| = |EC|,$$

$$|\sphericalangle ACD| = 120° = |\sphericalangle BCE|.$$

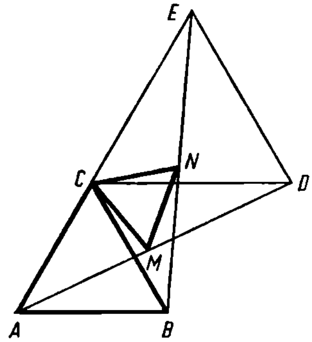


Bild L.3.22

Daher ist $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ und folglich als Länge der von C ausgehenden Seitenhalbierenden

$$|CN| = |CM|,$$

sowie

$$\sphericalangle ACM \cong \sphericalangle BCN, \quad \sphericalangle MCD \cong \sphericalangle NCE.$$

Da D und B auf derselben Seite von g_{AE} liegen, befinden sich auch die Strecken AD und EB und insbesondere M und N auf dieser Seite und wegen

$$|\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle NCE| = |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle MCD| = |\sphericalangle ACD| = 120°$$

gilt

$$|\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle MCN| + |\sphericalangle NCE| = 180°$$

und daher $|\sphericalangle MCN| = 60°$.
Mithin ist $\triangle MCN$ gleichseitig (nach Satz III.27).

ENGEL/PIRL

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR BAND 1

176 Seiten, Pappbd., EVP 6,– Mark, Bestell-Nr. 706 354 3, Kurzwort: 00 21 70 Aufg. Mathe-Olymp. 1

Mit dieser Auswahl wird eine Sammlung von Aufgaben zur Verfügung gestellt, die besonders zur Förderung begabter Schüler, aber auch zur Bereicherung des Unterrichts und für Arbeitsgemeinschaften eingesetzt werden kann.
Der Band 1 enthält Aufgaben aus den Olympiadeklassen 9 bis 12 zu den Stoffgebieten Arithmetik, Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen und zu logisch-kombinatorischen Übungen (Auswahl aus den Olympiaden der DDR 1961/62 bis 1967/68 und aus den Vorolympiaden 1960 und 1961).
Aufgabentexte und Lösungen wurden sorgfältig überarbeitet und im Hinblick auf den erreichten Stand in der Lehrplanentwicklung vereinheitlicht.

Der Titel ist lieferbar.

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG
BERLIN

Kurzwort: 00 21 71 Aufg. Mathe-Olymp. 2
EVP: 6.—