MATHEMATIK

für Ingenieur- und Fachschulen

I

Mathematik
für Ingenieur- und Fachschulen

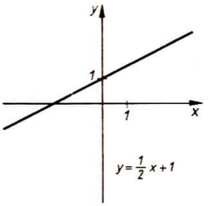
Band I

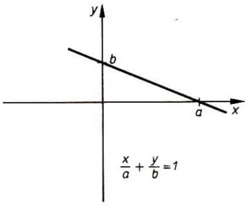
von H. Beinhoff, Dr. S. Völkel, W. Pauli, R. Conrad, Dr. H. Nickel

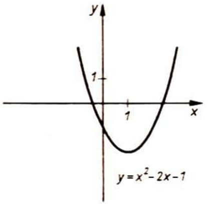
10. Auflage

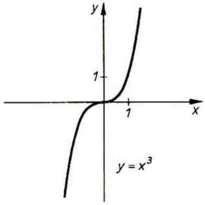
Mit 291 Bildern und 658 Aufgaben mit Lösungen

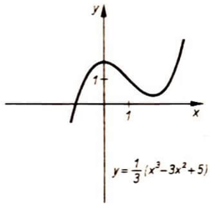
VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

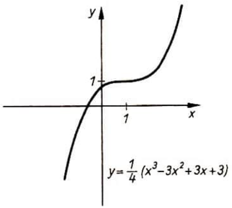

y
1
1
x
$y=\frac{1}{2}x+1$

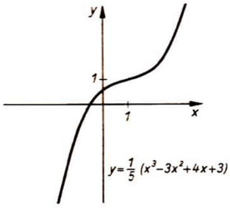

y
b
a
x
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

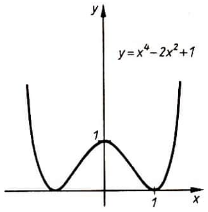

y
1
1
x
$y=x^2-2x-1$

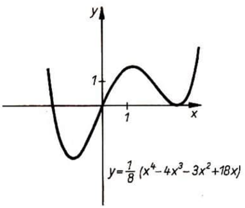

y
1
1
x
$y=x^3$


y
1
1
x
$y=\frac{1}{3}(x^3-3x^2+5)$

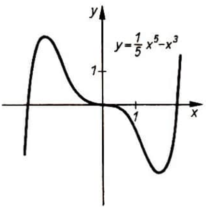

y
1
1
x
$y=\frac{1}{4}(x^3-3x^2+3x+3)$


y
1
1
x
$y=\frac{1}{5}(x^3-3x^2+4x+3)$

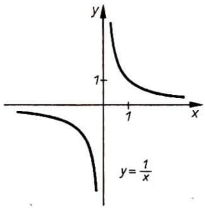

y
$y=x^4-2x^2+1$
1
1
x



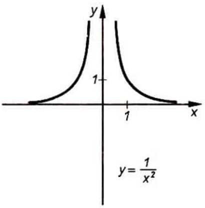
y
1
1
x
$y=\frac{1}{8}(x^4-4x^3-3x^2+18x)$



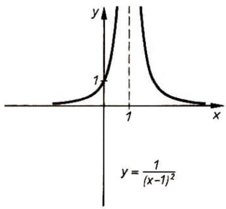
y
$y=\frac{1}{5}x^5-x^3$
1
1
x



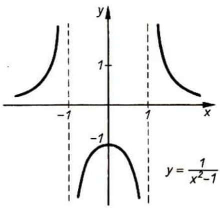
y
1
1
x
$y=\frac{1}{x}$



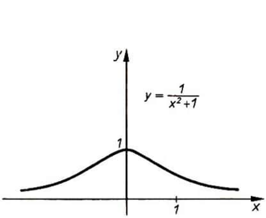
y
1
1
x
$y=\frac{1}{x^2}$



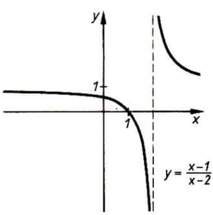
y
1
1
x
$y=\frac{1}{(x-1)^2}$



y
1
−1
1
x
−1
$y=\frac{1}{x^2-1}$



y
$y=\frac{1}{x^2+1}$
1
1
x



y
1
1
x
$y=\frac{x-1}{x-2}$

Lehrbücher der Mathematik

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen

von H. Birnbaum, Dr.-Ing. H. Götzke, Prof. Dr.-Ing. H. Kreul, Dr.-Ing. W. Leupold,

Dr. F. Müller, Prof. Dr. P. H. Müller, Dr. H. Nickel, Prof. Dr. H. Sachs

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Ingenieur- und Fachschulen der DDR anerkannt.
Berlin, Mai 1988 Minister für Hoch- und Fachschulwesen

AUTOREN

Federführung:

Fachschuldozent Dipl.-L. Horst Beinhoff
Ingenieurschule für Kraft- und Arbeitsmaschinenbau „Rudolf Diesel“ Meißen

Autoren der einzelnen Abschnitte:

Studiendirektor Reichsbahnrat Dr. Siegfried Völkel (1., 2.)
Ingenieurschule für Verkehrstechnik „Erwin Kramer“ Dresden

Dipl.-Math. Wolfgang Pauli (3.)

Fachschuldozent Dipl.-L. Horst Beinhoff (4. bis 8.)
Ingenieurschule für Kraft- und Arbeitsmaschinenbau „Rudolf Diesel“ Meißen

Studiendirektor Dr. Heinz Nickel (9., 11.)
Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie Dresden

Fachschuldozent Rudolf Conrad (10.)
Betriebsakademie des VEB Druckmaschinenwerke Planeta Radebeul

Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen. – Leipzig:
Fachbuchverl.,
(Lehrbücher der Mathematik)
Bd. 1. Von H. Beinhoff u. a. – 10. Aufl. –
1989. – 383 S. : 291 Bild. u. 658 Aufg. mit Lösgn.
NE: Beinhoff, Horst [Mitarb.]: GT

Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen
ISBN 3-343-00052-3
Bd. 1 ISBN 3-343-00053-1
Bd. 2 ISBN 3-343-00055-8

ISBN 3-343-00053-1

10. Auflage
Lizenznummer 114-210/9/89
LSV 1003
Verlagslektor: Dipl.-Ing. Christine Fritzsch
Printed in GDR
Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“ Altenburg
Fotomechanischer Nachdruck: Nationales Druckhaus Berlin
Redaktionsschluß: 15. 1. 1989
Bestellnummer: 546 913 6
01080

Geleitwort

Die von Partei und Regierung entwickelte und beschlossene Wirtschaftsstrategie und die sich daraus herleitende Wirtschaftspolitik erfordern eine höhere Qualität und Effektivität der Ausbildung unserer Ingenieure. Eines ihrer Kennzeichen ist gründliches und in Zukunft zunehmend höheres mathematisches Wissen und Können als Teil der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fundierung von Konstruktion, Projektierung und Technologie. Deshalb muß die Zielstellung der mathematischen Ausbildung an den Ingenieur- und Fachschulen darin gesehen werden, auf der Grundlage sicherer Rechenfertigkeiten solche mathematischen Theorien, Gesetze, Methoden und Verfahren bereitzustellen, die ein rationelles und effektives Arbeiten in den naturwissenschaftlich-technischen und ökonomischen Lehrgebieten gestatten.
Die inhaltliche und methodische Gestaltung der Lehre hat dabei so zu erfolgen, daß sie unter Berücksichtigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts eine solide und stabile Basis sowohl für die fachspezifische Ausbildung der Studenten als auch für die ständige individuelle Aneignung neuer Erkenntnisse aus Wissenschaft, Technik und Ökonomie durch die Absolventen bildet.
Mit der Neubearbeitung in der 7. Auflage der beiden Lehrbücher „Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen“ wurden ihre Anpassung an die Lehrprogramme und ihre Eignung für das Selbststudium verbessert. Wir sind überzeugt, daß damit die Qualität des Lehrwerkes erhöht wurde, so daß mit ihm die gute langjährige Tradition in der Praxis bewährter lehrplangebundener mathematischer Fachschulliteratur fortgesetzt wird.
Mögen beide Bände des Lehrwerkes dem Studenten ein wirksames Handwerkszeug zur effektiven Gestaltung seines Studiums sein und dem Fachschullehrer helfen, die Lehrprogrammforderungen in einen qualitativ hochwertigen Mathematikunterricht umzusetzen.
Dem Autorenkollektiv, den Lektoren und dem Verlag sei an dieser Stelle für die sorgfältige und verantwortungsbewußte Arbeit und die hohe Einsatzbereitschaft bei der Neubearbeitung des Lehrwerkes aufrichtig gedankt.
Im Interesse der weiteren Vervollkommnung der Studienliteratur bitten wir alle Nutzer, uns ihre Erfahrungen mit dem Lehrwerk mitzuteilen und uns ihre Verbesserungswünsche zuzuleiten.

Zentrale Fachkommission Mathematik
beim Ministerium
für Hoch- und Fachschulwesen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das vorliegende zweibändige Lehrbuch soll in erster Linie der Mathematikausbildung an Ingenieur- und Fachschulen dienen. Durch die Art der Stoffdarbietung ist es sowohl für den Gebrauch neben dem Unterricht als auch zum Selbststudium geeignet. Das Lehrbuch ist außerdem für den in der Praxis tätigen Ingenieur zur Wiederholung und als Nachschlagewerk verwendbar.
Im wesentlichen wurde der Stoff ausgewählt, der in fast allen Fachstudienrichtungen die mathematische Grundausbildung bestimmt. Zugleich wurde der Anschluß an die weiterführende Literatur gesichert.
Den Anforderungen der Fachstudienrichtungen entsprechend kann beim Studium die Reihenfolge der Abschnitte teilweise verändert werden. Zum Beispiel kann die Differentialrechnung nach der Behandlung der Potenzfunktion unterbrochen und zur Integralrechnung übergegangen werden, ehe der weitere Ausbau auf diesen Gebieten erfolgt. Weiterhin kann innerhalb des Abschnittes „Lineare Systeme" das Austauschverfahren oder der GAUSSsche Algorithmus ausgewählt werden.
Das zu erreichende Ausbildungsziel und die im Unterricht zur Verfügung stehende Zeit zwingen dazu, teilweise auf exakte Beweisführung zu verzichten und dafür die gewünschten mathematischen Aussagen durch anschauliche Betrachtungen zu gewinnen.
Die Beispiele sollen den gebotenen Stoff erläutern und vertiefen. Am Ende der Unterabschnitte wird auf eine Anzahl zugehöriger Aufgaben verwiesen, die am Schluß jedes Hauptabschnittes zusammengefaßt sind. Diese Aufgabenabschnitte enthalten im allgemeinen zwei durch einen Strich getrennte Aufgabengruppen. Die erste Gruppe stellt eine gewisse Minimalmenge an Aufgaben dar, die zur Einübung und Festigung des zugehörigen Stoffkomplexes erforderlich ist. Die zweite Aufgabengruppe bietet zusätzliche Übungsmöglichkeiten und enthält auch etwas schwierigere und weiterführende Aufgaben. Kurze Zielstellungen am Beginn und zur Selbstüberprüfung gedachte Kontrollfragen am Ende der Abschnitte sollen die selbständige Aneignung des Lehrstoffes erleichtern.
Aufgaben, Formeln, Bilder und Beispiele werden innerhalb der Abschnitte fortlaufend numeriert, wobei die Abschnittsnummer vorangestellt ist.

1. Mengen

1.1. Der Begriff der Menge

Die Mengenlehre bildet die Grundlage der Mathematik. Sie ermöglicht eine Vereinheitlichung und Präzisierung der mathematischen Denkweise und mit Hilfe der Logik einen Aufbau der gesamten Mathematik aus wenigen Grundaussagen. In diesem Abschnitt werden Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, die Mengenrelationen und -operationen sowie wichtige aussagenlogische Verknüpfungen eingeführt. Ihre Anwendung in den folgenden Abschnitten führt zu einer rationellen und übersichtlichen Darstellung und erleichtert das Erkennen von Zusammenhängen.
Georg Cantor (1845 bis 1918), der Begründer der Mengenlehre, gab für den Mengenbegriff die

Erklärung

> Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung M bestimmter, wohlunterschiedener Objekte m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte m heißen die **Elemente** von M.

Mengen werden mit großen Buchstaben, Elemente bei allgemeiner Darstellung mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Die Elemente einer Menge werden durch geschweifte Klammern zusammengefaßt.

BEISPIELE

1.1. Alle Studenten einer Ingenieurschule, die derselben Seminargruppe angehören, bilden eine Menge M. Ihre Elemente sind die Studenten dieser Seminargruppe.
1.2. Die Menge N aller Lösungen der Gleichung $x^2 = 16$ enthält nur die beiden Elemente -4 und 4: $N = \{-4, 4\}$.
1.3. Die Menge K aller Primzahlen enthält unendlich viele Elemente: $K = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$.
1.4. Die Menge L aller geraden Primzahlen enthält nur ein Element: $L = \{2\}$.

Ein Objekt ist entweder Element einer Menge oder nicht. Diese Beziehung ist die Grundbeziehung der Mengenlehre.
Man schreibt

$a \in M$, gelesen: „a (ist) Element (von) M“;
$b \notin M$, gelesen: „b (ist) nicht Element (von) M“.

BEISPIEL

1.5. Für N in Beispiel 1.2. gilt $4 \in N$, $5 \notin N$.

Anmerkungen zur Erklärung des Mengenbegriffs:

1. Jedes Element einer Menge muß sich vom anderen unterscheiden lassen. Eine „Menge“ Honig in einem Glas ist demnach im Sinne dieser Erklärung keine Menge.

2. Eine Menge faßt Elemente mit einer gemeinsamen Eigenschaft zusammen. Diese muß so formuliert sein, daß für jedes Objekt feststeht, ob es diese Eigenschaft hat oder nicht. Die Eigenschaft, ein „schnell fahrender Personenkraftwagen" zu sein, ist ein Beispiel für eine ungenaue Formulierung und erklärt keine Menge.
3. Während die Umgangssprache unter einer Menge eine Vielzahl von Elementen versteht, können Mengen im Sinne der angegebenen Erklärung auch aus wenigen Elementen bzw. aus keinem Element bestehen.

Eine Menge, die nur zwei Elemente enthält, heißt Zweiermenge (z. B. N in Beispiel 1.2.). Wenn sie nur ein Element enthält, heißt sie Einermenge (z. B. L in Beispiel 1.4.), und wenn sie kein Element enthält, heißt sie **leere Menge** (Symbol: $\emptyset$).

BEISPIELE

1.6. Die Menge A aller reellen Lösungen der Gleichung $x^2 = -4$ enthält kein Element, denn es gibt keine reelle Zahl, die die Eigenschaft hat, daß ihr Quadrat negativ ist: $A = \emptyset$.

1.7. Die Menge K aller Lösungen der Gleichung $2x = 0$ ist $K = \{0\}$, denn nur für die Zahl 0 ist $2 \cdot 0 = 0$.
K ist nicht die leere Menge, denn K enthält das Element 0, während die leere Menge $\emptyset$ kein Element enthält.
Es besteht also ein Unterschied zwischen der Einermenge, die die Zahl 0 enthält, und der leeren Menge $\emptyset$.

Zwischen dem Mengenbegriff und Grundbegriffen der Logik besteht ein enger Zusammenhang, der in den folgenden Ausführungen dargestellt wird.
Zu den Grundbegriffen der Logik gehört der Begriff „Aussage".

Eine **Aussage** ist ein Gebilde, das einen Sachverhalt der objektiven Realität widerspiegelt. Sie ist **wahr**, wenn sie mit dem Sachverhalt übereinstimmt, anderenfalls ist sie **falsch**.
Die Eigenschaften „wahr (w)" und „falsch (f)" heißen **Wahrheitswerte**.

BEISPIELE

1.8. „Dresden liegt an der Elbe" (w)
1.9. „Kupfer ist ein Nichtmetall" (f)
1.10. $3 + 4 = 7$ (w)
1.11. $3 + 4 = 10$ (f)
1.12. $3 + 4 \neq 7$ (f)
1.13. $3 + 4 < 8$ (w)

Grundlegend ist der

Satz der Zweiwertigkeit

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Es gibt also

1. keinen dritten Wahrheitswert,
2. keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Aussagen sind daran erkennbar, daß sie einen (und nur einen) Wahrheitswert haben. Allerdings läßt sich nicht immer feststellen, welcher Wahrheitswert vorliegt.

BEISPIELE

1.14. $3 + 5$
1.15. „Komm her!"
1.16. H_2O
1.17. $ab + c$
1.18. $3 + 5 = 8$
1.19. „Der Monat März hat 30 Tage."

1.20. „Auf anderen Sternen leben vernunftbegabte Lebewesen."
1.21. „Am 1. Juni 1750 regnete es in Berlin."

Die Beispiele 1.14. bis 1.17. sind keine Aussagen; 1.18. ist eine wahre, 1.19. eine falsche Aussage; 1.20. und 1.21. sind Aussagen, deren Wahrheitswert noch nicht bzw. nicht mehr feststellbar ist.

Die Gebilde der folgenden Beispiele haben keinen Wahrheitswert, sind also keine Aussagen. Sie werden aber bei bestimmten Einsetzungen (Belegungen) für u und x zu Aussagen.

BEISPIELE

1.22. „u ist eine Säure" wird für $u = HCl$ zu einer wahren Aussage und für $u = NaOH$ zu einer falschen Aussage.
1.23. $x^2 = 16$ wird für $x = -4$ zu einer wahren und für $x = 3$ zu einer falschen Aussage.

Die Buchstaben u und x stehen für Leerstellen, denn es ließe sich auch schreiben: „... ist eine Säure"; $(\ldots)^2 = 16$.

Ein Zeichen, das für eine Leerstelle steht, heißt **Variable (Veränderliche).**

Die Beispiele 1.22. und 1.23. enthalten demnach Variablen und gehen in Aussagen über, wenn diese Variablen belegt werden. Solche Gebilde heißen Aussageformen.

Eine **Aussageform** ist ein Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und durch Belegen dieser Variablen zu einer Aussage wird.

Der Bereich der Objekte, aus dem die Belegungen auszuwählen sind, heißt **Grundbereich.** Er ist so festzulegen, daß beim Belegen eine sinnvolle Aussage entsteht. Eine Aussageform wird durch ein Objekt gelöst (erfüllt), wenn sie beim Belegen der Variablen mit diesem Objekt in eine wahre Aussage übergeht. Das Objekt heißt **Lösung (Erfüllung)** der Aussageform (z. B. „HCl" in Beispiel 1.22.).
Mit Hilfe des Begriffs „Aussageform" läßt sich das Prinzip der Mengenbildung erklären.

Wenn eine Aussageform für die Objekte eines Grundbereichs vorliegt, so bilden alle Objekte, die diese Aussageform erfüllen, eine **Menge.**

Die Aussageform (auch definierende Bedingung genannt) drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Elemente der Menge aus. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, eine Menge durch Angabe der Aussageform (und des Grundbereichs) darzustellen, z. B. $A = \{u \mid u \text{ ist eine Säure}\}$, gelesen: „$A$ ist die Menge aller (Elemente) u, für die gilt: u ist eine Säure".
Die andere schon bekannte Möglichkeit ist die Darstellung durch Aufzählen der Elemente.

BEISPIELE

1.22. (Fortsetzung) Als Grundbereich werde die Gesamtheit aller Flüssigkeiten gewählt. Die Lösungen der Aussageform bilden die Menge

$$A = \{u \mid u \text{ ist eine Säure}\} = \{HCl, HNO_3, H_2SO_4, \ldots\}.$$

Ein anderer möglicher Grundbereich könnte die Gesamtheit aller Schwefelverbindungen sein. Für diesen Grundbereich wäre die Lösungsmenge

$$B = \{u \mid u \text{ ist eine Säure}\} = \{H_2SO_3, H_2SO_4, \ldots\}.$$

Ein Bereich, der nicht als Grundbereich gewählt werden darf, ist z. B. die Gesamtheit aller Städtenamen, da sich sinnlose Aussagen ergeben würden (z. B.: „Wien ist eine Säure").

1.23. (Fortsetzung) Für den Grundbereich aller (positiven und negativen) ganzen Zahlen ist die Lösungsmenge

$C = \{x \mid x^2 = 16\} = \{-4, 4\}$.

Bei Einschränkung des Grundbereichs auf nur positive ganze Zahlen gilt

$D = \{x \mid x^2 = 16\} = \{4\}$.

Wie die Beispiele zeigen, hängt die sich ergebende Menge vom vorgegebenen Grundbereich ab.
Eine Menge heißt **Allmenge**, wenn sie alle Objekte des Grundbereichs enthält. Im Abschnitt 1. dieses Buches wird sie mit U bezeichnet.

BEISPIEL

1.24. Grundbereich: Gesamtheit aller reellen Zahlen.
Es gilt $\{x \mid x + x = 2x\} = U$, denn die Gleichung wird durch jede reelle Zahl gelöst.

Kontrollfragen

1.1. Wie ist nach Cantor der Begriff der Menge erklärt?
1.2. Was ist eine Aussage, und woran ist sie erkennbar?
1.3. Was ist eine Variable?
1.4. Was ist eine Aussageform, und wie läßt sich mit ihrer Hilfe das Prinzip der Mengenbildung erklären?

Aufgaben: 1.1. und 1.2.

1.2. Relationen zwischen Mengen

Zwischen zwei Mengen kann die Relation des Enthaltenseins (Teilmengenrelation, Inklusion) oder der Gleichheit bestehen.

BEISPIEL

1.25. Die Menge $A = \{p, r\}$ ist in der Menge $B = \{p, q, r, s\}$ enthalten, denn alle Elemente von A sind auch Elemente von B.

Definition

Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
Schreibweise: $A \subseteqq B$, gelesen „A (ist) Teil-(Unter-)menge von B".

Wenn $A \subseteqq B$, gilt auch $B \supseteqq A$, gelesen „B (ist) Obermenge von A".

BEISPIEL

1.26. Grundbereich sei die Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis 20, also $\{1, 2, \ldots, 20\}$.
Darin ist die Menge der durch 6 teilbaren Zahlen $A = \{x \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\} = \{6, 12, 18\}$, entsprechend ist $B = \{x \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Jedes Element von A ist auch Element von B, folglich besteht zwischen A und B die Relation $A \subseteqq B$.

Wenn zwei Mengen die gleichen Elemente enthalten, besteht zwischen ihnen die Relation der Gleichheit.

Definition

Zwei Mengen A und B heißen **gleich** genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist (d. h., wenn $A \subseteqq B$ und $B \subseteqq A$).
Schreibweise: $A = B$, gelesen „A (ist) gleich B".

BEISPIEL

1.27. Im Grundbereich $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ sei

$A = \{x \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\} = \{6, 12, 18\}$ und

$B = \{x \mid x \text{ ist durch 2 und durch 3 teilbar}\} = \{6, 12, 18\}$.

Jedes Element von A ist auch Element von B und umgekehrt, d. h., A und B enthalten die gleichen Elemente. Folglich besteht zwischen A und B die Relation $A = B$.

Mengen werden oft durch Punktmengen in einer Ebene veranschaulicht, die durch geschlossene Kurven begrenzt werden. In Bild 1.1 ist $A \subseteqq B$ dargestellt: Jedes Element von A (z. B. P_1) muß auch Element von B sein. Ein Element von B kann Element von A sein, muß es aber nicht (z. B. P_2). Andererseits ist ein Element, das nicht zu B gehört (z. B. P_3), mit Sicherheit auch nicht Element von A. In Bild 1.2 ist $A = B$ dargestellt. Für einen beliebigen Punkt gilt: Er liegt entweder sowohl in A als auch in $B(P_1)$ oder weder in A noch in $B(P_2)$.

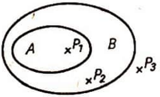


Bild 1.1

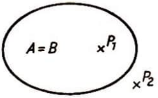


Bild 1.2

Die Definition der Teilmengenrelation fordert, daß alle Elemente der Teilmenge A auch Elemente der Obermenge B sind. Diese Forderung ist aber auch für den Fall $A = B$ erfüllt. Folglich ist die Gleichheitsrelation ein Sonderfall der Teilmengenrelation. (Für jede beliebige Menge A gilt z. B. $A \subseteqq A$.)
Wenn A Teilmenge von B ist und B mindestens ein Element enthält, das nicht in A enthalten ist, so heißt A **echte Teilmenge** von B ($A \subset B$). Für die Mengen in den Beispielen 1.25. und 1.26. ist diese Bedingung erfüllt.
Für die leere Menge $\emptyset$, eine Menge A und die aus den Elementen ihres Grundbereiches gebildete Allmenge U gilt

$$\boxed{\emptyset \subseteqq A \subseteqq U}. \tag{1.1}$$

Wenn zwischen zwei Mengen weder die Teilmengen- noch die Gleichheitsrelation besteht, so können sie gemeinsame Elemente haben, aber jede der beiden Mengen enthält mindestens ein Element, das nicht in der anderen Menge enthalten ist. Falls beide Mengen keine gemeinsamen Elemente haben, heißen sie **disjunkte (elementfremde)** Mengen.

BEISPIEL

1.28. Es seien $P = \{3, 5, 7\}$, $Q = \{4, 6, 8\}$, $R = \{5, 7, 9, 10\}$. Bestehen zwischen diesen Mengen Teilmengen- oder Gleichheitsrelationen?

Lösung: Die Mengen P und Q enthalten keine gemeinsamen Elemente und sind demnach disjunkte Mengen. Gleichfalls sind Q und R disjunkte Mengen. Die Mengen P und R enthalten zwar gemeinsame Elemente, aber jede Menge enthält mindestens ein Element, das nicht in der anderen Menge enthalten ist ($3 \notin R$, $9 \notin P$, $10 \notin P$). Zwischen P, Q und R bestehen also weder Teilmengen- noch Gleichheitsrelationen.

Wenn zwischen A und B eine Mengenrelation besteht, so existieren zwischen den Aussageformen, durch die A und B definiert werden, ganz bestimmte logische Beziehungen, die mit Hilfe von Bindewörtern ausgedrückt werden können.
(1) Wenn die Teilmengenrelation $A \subseteqq B$ besteht, so gilt zwischen den Aussageformen $x \in A$ und $x \in B$ für alle Elemente des Grundbereichs
„wenn $x \in A$ gilt, so muß auch $x \in B$ gelten" (s. Bild 1.1: Da der Punkt P_1 in A liegt, muß er auch in B liegen), und umgekehrt
„wenn $x \in B$ gilt, so kann $x \in A$ gelten" (muß aber nicht; s. Bild 1.1: P_1, P_2 liegen zwar beide in B, aber nur P_1 liegt auch in A).
Eine Verbindung zweier Aussageformen (oder Aussagen) durch die Bindewörter „wenn ..., so muß ...", die bei Vertauschen der Aussageformen (Aussagen) „wenn ..., so kann ..." zu lesen ist, heißt **Implikation** (Symbol: $\Rightarrow$): $x \in A \Rightarrow x \in B$. Der vor dem Zeichen stehende Teil heißt Vorderglied, der andere Hinterglied.
Das Vorderglied einer Implikation heißt hinreichende Bedingung für das Hinterglied, das Hinterglied heißt notwendige Bedingung für das Vorderglied.

BEISPIELE

1.29. Für die Mengen $A = \{x \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\}$ und $B = \{x \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$ des Beispiels 1.26. gilt $A \subseteqq B$. Folglich gilt für die Aussageformen
„x ist durch 6 teilbar $\Rightarrow$ x ist durch 3 teilbar", gelesen „wenn x durch 6 teilbar ist, so muß x durch 3 teilbar sein", und von rechts nach links gelesen „wenn x durch 3 teilbar ist, so kann x durch 6 teilbar sein".
Für eine beliebige Zahl ist demnach die Teilbarkeit durch 6 hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 3 (denn aus der Teilbarkeit durch 6 muß Teilbarkeit durch 3 folgen), aber ist keine notwendige Bedingung (denn es können auch Zahlen durch 3 teilbar sein, die nicht durch 6 teilbar sind, z. B. die Zahl 15). Andererseits ist die Teilbarkeit durch 3 notwendige Bedingung für die Teilbarkeit durch 6 (denn Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, können nicht durch 6 teilbar sein), aber sie ist keine hinreichende Bedingung (denn die Zahl muß auch durch 2 teilbar sein).

1.30. Ist die Bedingung „x ist ein Viereck" hinreichende oder notwendige Bedingung für „x ist ein Trapez"?

Lösung: Es gilt „wenn x ein Viereck ist, so kann x ein Trapez sein", und umgekehrt gilt „wenn x ein Trapez ist, so muß x ein Viereck sein". Demnach gilt

„x ist ein Trapez" $\Rightarrow$ „x ist ein Viereck".

„x ist ein Viereck" ist Hinterglied der Implikation, folglich notwendige Bedingung für „x ist ein Trapez".
(Für die Menge T aller Trapeze und die Menge V aller Vierecke gilt $T \subseteqq V$. Zwischen den Begriffen „Trapez" und „Viereck" besteht eine Relation, die durch die Bezeichnungen „Art-(Unter-)begriff" und „Gattungs-(Ober-)begriff" ausgedrückt wird. Im Beispiel ist „Trapez" der Artbegriff und „Viereck" der Gattungsbegriff.)

1.31. Es seien Q die Menge aller Quader und W die Menge aller Würfel. Aus der zwischen Q und W bestehenden Relation sind die Relationen herzuleiten, die zwischen den definierenden Bedingungen „x ist Quader" und „x ist Würfel" sowie zwischen den Begriffen „Quader" und „Würfel" bestehen.

Lösung: Da der Würfel eine Sonderform des Quaders ist (ein Quader mit gleichen Kantenlängen), gilt $W \subseteqq Q$. Entsprechend gilt „x ist Würfel" ⇒ „x ist Quader"; daraus folgt „x ist Würfel" ist hinreichende Bedingung für „x ist Quader", „x ist Quader" ist notwendige Bedingung für „x ist Würfel". Der Begriff „Würfel" ist Artbegriff, der Begriff „Quader" Gattungsbegriff.

(2) Wenn die Gleichheitsrelation $A = B$ besteht, so gilt für alle Elemente des Grundbereichs
„wenn $x \in A$, so muß $x \in B$" und umgekehrt „wenn $x \in B$, so muß $x \in A$".
Eine Verbindung zweier Aussageformen (Aussagen) durch „wenn ..., so muß ...", die bei Vertauschen der Aussageformen (Aussagen) gleichfalls „wenn ..., so muß ..." zu lesen ist, heißt **Äquivalenz** (Symbol: ⇔): $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
Übliche Lesarten sind „dann und nur dann ..., wenn ..." oder „genau dann ..., wenn ...". „Äquivalenz" heißt wörtlich übersetzt „Gleichwertigkeit". Durch äquivalente Aussageformen werden gleiche Mengen definiert.
Da bei $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ sowohl $x \in A \Rightarrow x \in B$ als auch $x \in B \Rightarrow x \in A$ gelten, heißt jedes Glied notwendige und hinreichende Bedingung für das andere Glied.

BEISPIELE

1.32. Für $A = \{x \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\}$ und $B = \{x \mid x \text{ ist durch 2 und durch 3 teilbar}\}$ gilt $A = B$, folglich gilt für die Aussageformen
„x ist durch 6 teilbar" ⇔ „x ist durch 2 und durch 3 teilbar", gelesen „x ist genau dann durch 6 teilbar, wenn x durch 2 und durch 3 teilbar ist".
Für eine beliebige Zahl ist demnach die Teilbarkeit durch 2 und durch 3 notwendige und hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 6 (und umgekehrt).

1.33. Ist die Bedingung „x ist ein gleichseitiges Viereck" hinreichende, notwendige oder notwendige und hinreichende Bedingung für „x ist ein Rhombus"?

Lösung: Es gilt

„wenn x ein gleichseitiges Viereck ist, so muß x ein Rhombus sein", und umgekehrt „wenn x ein Rhombus ist, so muß x ein gleichseitiges Viereck sein"; demnach gilt „x ist ein gleichseitiges Viereck" ⇔ „x ist ein Rhombus". Die Bedingung „x ist ein gleichseitiges Viereck" ist eine notwendige und hinreichende Bedingung.

(Für die Menge V_g aller gleichseitigen Vierecke und die Menge R aller Rhomben gilt $V_g = R$. Die Begriffe „Rhombus" und „gleichseitiges Viereck" werden äquivalente Begriffe genannt, wobei der eine zur Definition des anderen benutzt werden kann: „Ein Rhombus ist ein gleichseitiges Viereck".)

Kontrollfragen

1.5. Wie ist die Teilmengenrelation definiert?

1.6. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit eine Menge echte Teilmenge einer anderen ist?

1.7. Mit Hilfe welcher Bindewörter ist eine Implikation zu formulieren? Wie ist sie nach Vertauschen von Vorder- und Hinterglied zu lesen? Welche Art von Bedingung sind das Vorder- bzw. Hinterglied?

1.8. Mit Hilfe welcher Bindewörter ist eine Äquivalenz zu formulieren? Welche Art von Bedingung sind Vorder- bzw. Hinterglied?

Aufgaben: 1.3. und 1.4.

1.3. Operationen mit Mengen

Bei einer Operation mit Mengen wird aus zwei gegebenen Mengen eine neue gebildet. Das ist auf verschiedene Weisen möglich. Die neue Menge kann z. B. die Zusammenfassung aller Elemente sein, die sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten sind. Die Menge dieser gemeinsamen Elemente heißt Durchschnitt.

Definition

Gegeben seien zwei Mengen A und B. Ein Element x gehört genau dann zum **Durchschnitt** $A \cap B$ (gelesen: „A geschnitten mit B"), wenn $x \in A$ **und** $x \in B$.

Zwischen $x \in A$ und $x \in B$ steht das Bindewort „und". Eine logische Verbindung zweier Aussageformen (oder Aussagen) durch das Bindewort „und" heißt **Konjunktion** (Symbol: $\wedge$). Sie drückt das Zusammenbestehen zweier Sachverhalte aus.
Mit Hilfe des Symbols für die Konjunktion schreibt sich die Definition des Durchschnitts:

$$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B} \tag{1.2}$$

(gelesen: „x ist Element des Durchschnitts $A \cap B$ genau dann, wenn x Element von A **und** Element von B ist").
In Bild 1.3 ist $A \cap B$ als schraffierte Punktmenge dargestellt. P_1 liegt in A und in B, also im Durchschnitt; P_2, P_3 liegen nur in A bzw. B, also nicht im Durchschnitt; P_4 liegt weder in A noch in B und damit auch nicht im Durchschnitt.

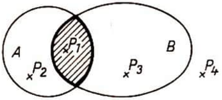


Bild 1.3

BEISPIELE

1.34. Im Grundbereich $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ sei

$A = \{x \mid x \text{ ist durch 2 teilbar}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$,
$B = \{x \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

Dann ist

$A \cap B = \{x \mid x \text{ ist durch 2 und durch 3 teilbar}\} = \{6, 12, 18\}$.

$A \cap B$ enthält also alle Elemente, die A und B gemeinsam haben.

1.35. Es seien $M = \{c, d\}$ und $N = \{a, b, c, d, e\}$, d. h., es gilt $M \subseteqq N$. Dann ist $M \cap N = \{c, d\} = M$.

1.36. Es seien $D = \{x \mid x \text{ ist ein Dreieck}\}$ und $V = \{x \mid x \text{ ist ein Viereck}\}$. Da es keine geometrische Figur gibt, die sowohl Dreieck als auch Viereck ist, sind D und V disjunkte Mengen, und es ist $D \cap V = \emptyset$.

Aus den letzten beiden Beispielen folgt durch Verallgemeinerung:

1. Wenn eine Menge A Teilmenge einer Menge B ist, so ist ihr Durchschnitt gleich der Teilmenge (Bild 1.4): $A \cap B = A$.

2. Wenn zwei Mengen A, B disjunkt sind, so ist ihr Durchschnitt die leere Menge (Bild 1.5): $A \cap B = \emptyset$.

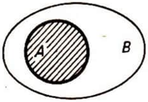


Bild 1.4

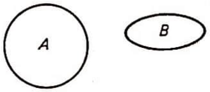


Bild 1.5

Eine weitere Operation mit Mengen ist die Vereinigung. In ihr sind alle Elemente zweier Mengen enthalten, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind.

Definition

Gegeben seien zwei Mengen A und B. Ein Element x gehört genau dann zur **Vereinigung** $A \cup B$ (gelesen: „A vereinigt mit B"), wenn $x \in A$ **oder** $x \in B$.

Zwischen $x \in A$ und $x \in B$ steht das Bindewort „oder". Eine logische Verbindung zweier Aussageformen (oder Aussagen) durch das Bindewort „oder" heißt **Alternative** (Symbol: $\vee$). Sie drückt aus, daß von zwei Sachverhalten mindestens einer besteht.

Da das „oder" der Alternative auch das Zusammenbestehen der beiden Sachverhalte zuläßt, wird es „einschließendes oder" genannt.

Mit Hilfe des Symbols für die Alternative schreibt sich die Definition der Vereinigung:

$$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B} \tag{1.3}$$

In Bild 1.6 ist $A \cup B$ als schraffierte Punktmenge dargestellt. P_1, P_2, P_3 liegen in wenigstens einer der Mengen A, B (P_1 sogar in beiden), also in der Vereinigung; P_4 liegt weder in A noch in B und damit auch nicht in der Vereinigung.

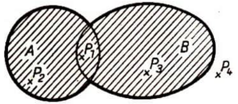


Bild 1.6

Zwischen Durchschnitt und Vereinigung gilt die Relation (vgl. Bilder 1.3, 1.6):

$$\boxed{A \cap B \subseteqq A \cup B}. \tag{1.4}$$

BEISPIELE

1.37. Grundbereich, A und B wie in Beispiel 1.34. Dann ist

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \text{ ist durch 2 oder durch 3 teilbar}\} \\ &= \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}. \end{aligned}$$

$A \cup B$ enthält alle Elemente, die durch mindestens eine der Zahlen 2 oder 3 teilbar sind; also auch die Elemente, die durch 2 und durch 3 teilbar sind.

1.38. Es seien $M = \{c, d\}$ und $N = \{a, b, c, d, e\}$, d. h., es gilt $M \subseteq N$. Dann ist $M \cup N = \{a, b, c, d, e\} = N$.

Aus dem letzten Beispiel folgt durch Verallgemeinerung: Wenn eine Menge A Teilmenge einer Menge B ist, so ist ihre Vereinigung gleich der Obermenge (Bild 1.7): $A \cup B = B$.

BEISPIEL

1.39. A und B seien disjunkte Mengen (Bild 1.8). Die Vereinigung $A \cup B$ ist die im Bild schraffiert dargestellte Menge. Wenn z. B. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ und $B = \{12, 14, 16\}$, so ist $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$.

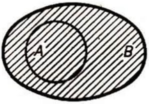


Bild 1.7

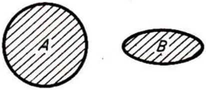


Bild 1.8

Das Bindewort „oder" wird auch verwendet, wenn ausgedrückt werden soll, daß von zwei Sachverhalten genau einer bestehen soll („ausschließendes oder", „entweder — oder"): **Disjunktion.**

Beispiel: „Jede Zahl ist gerade oder ungerade". Für jede ganze Zahl kann nur einer der beiden Sachverhalte gelten.

Bild 1.9 zeigt schraffiert dargestellt eine Punktmenge, die alle Elemente enthält, für die entweder $x \in A$ oder $x \in B$ gilt. Für diese Mengenoperation gibt es kein Operationszeichen. Zu beachten ist, daß die Begriffe Alternative und Disjunktion auch mit vertauschter Bedeutung verwendet werden, z. B. in der Schaltalgebra.

Die nächste Mengenoperation bildet aus nur einer gegebenen Menge mit Hilfe der Allmenge U eine neue Menge.

Definition

Gegeben sei eine Menge A als Teilmenge der Allmenge U. Ein Element x gehört genau dann zum **Komplement** $\bar{A}$, wenn $x \notin A$.

In Bild 1.10 ist $\bar{A}$ als schraffierte Punktmenge dargestellt, wobei U die durch das Rechteck begrenzte Punktmenge sein soll. Es gilt:

$$\boxed{x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A}. \qquad (1.5)$$

BEISPIEL

1.40. Es seien $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$
und $A = \{x \mid x < 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Dann ist $\bar{A} = \{x \mid x \geqq 8\} = \{8, 9, 10\}$.

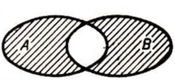


Bild 1.9

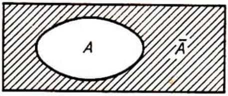


Bild 1.10

Die definierende Bedingung für die Menge $\bar{A}$ ergibt sich aus der definierenden Bedingung für A durch Vorsetzen von „es ist nicht wahr, daß …“. In der Logik wird mit einer solchen Formulierung die **Negation** einer Aussageform (oder Aussage) gebildet. Die gegebene Formulierung ergibt stets die Negation. Die folgenden Beispiele zeigen, daß bei anderen Formulierungen Vorsicht geboten ist.

BEISPIELE

1.41. Für „x ist kleiner als 8 ($x < 8$)“ (vgl. Beispiel 1.40.) heißt die Negation: „Es ist nicht wahr, daß x kleiner als 8 ist“, oder „x ist nicht kleiner als 8 ($x \geqq 8$)“.
Falsch wäre: „x ist größer als 8 ($x > 8$)“.

1.42. Für „Farbe x ist weiß“ heißt die Negation: „Es ist nicht wahr, daß Farbe x weiß ist“, oder „Farbe x ist nicht weiß“.
Falsch wäre: „Farbe x ist schwarz“, denn die Negation von „weiß“ kann **jede** andere Farbe außer „weiß“ bedeuten.

Es gilt der

Satz

Das Komplement des Komplements einer Menge A ist gleich A:

$$\boxed{\bar{\bar{A}} = A}. \tag{1.6}$$

Er folgt aus der Tatsache, daß sich eine zweifache Negation aufhebt. Für die Aussageform aus Beispiel 1.41. heißt z. B. die zweifache Negation: „Es ist nicht wahr, daß x nicht kleiner als 8 ist“. Das bedeutet aber das gleiche wie die ursprüngliche Aussageform.
Mit Hilfe der schon besprochenen Mengenoperationen wird die nächste definiert.

Definition

Gegeben seien zwei Mengen A und B. Ein Element x gehört genau dann zur **Differenz** $A \setminus B$ (gelesen: „A ohne B“), wenn $x \in A$ und $x \notin B$.

Also gilt:

$$\boxed{x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B}. \tag{1.7}$$

Entsprechend wird definiert: $x \in B \setminus A \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$. In Bild 1.11 sind beide Differenzen als schraffierte Punktmengen dargestellt.

Das Symbol der Differenz zweier Mengen wird in der Literatur unterschiedlich gelesen, z. B. „Rest A bezüglich B“.

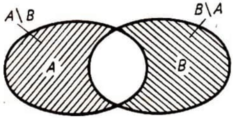


Bild 1.11

Für Differenzmengen gilt stets (vgl. Bild 1.11):

$$\boxed{\begin{array}{ll} A \setminus B = A \setminus (A \cap B); & B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \\ A \setminus B \subseteqq A; & B \setminus A \subseteqq B \end{array}} \quad \begin{array}{r} (1.8) \\ (1.9) \end{array}$$

Die Formeln (1.8) lassen sich vorteilhaft für die Ermittlung von Differenzmengen verwonden. Dabei ist zu beachten, daß stets eine Teilmenge der zuerst geschriebenen Menge entsteht (vgl. Gln. (1.9)).

BEISPIELE

1.43. Grundbereich, A und B wie in Beispiel 1.34. Dann ist

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \text{ ist durch 2 und nicht durch 3 teilbar}\} \\ &= A \setminus (A \cap B) = A \setminus \{6, 12, 18\} = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20\}, \\ B \setminus A &= B \setminus (A \cap B) = B \setminus \{6, 12, 18\} = \{3, 9, 15\}. \end{aligned}$$

1.44. Es seien $M = \{c, d\}$ und $N = \{a, b, c, d, e\}$, d. h., es gilt $M \subseteqq N$. Dann ist

$$\begin{aligned} M \setminus N &= M \setminus (M \cap N) = M \setminus \{c, d\} = \emptyset, \\ N \setminus M &= N \setminus (M \cap N) = N \setminus \{c, d\} = \{a, b, e\}. \end{aligned}$$

1.45. Es seien $A = \{2, 4, 6, 8\}$ und $B = \{12, 14, 16\}$, d. h., A und B sind disjunkte Mengen. Dann ist

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \setminus (A \cap B) = A \setminus \emptyset = A = \{2, 4, 6, 8\}, \\ B \setminus A &= B \setminus (A \cap B) = B \setminus \emptyset = B = \{12, 14, 16\}. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Beispielen folgt durch Verallgemeinerung:

1. Wenn eine Menge A Teilmenge einer Menge B ist, so ist ihre Differenz $A \setminus B$ die leere Menge: $A \setminus B = \emptyset$.
   (Die Menge $B \setminus A$ ist in Bild 1.12 schraffiert dargestellt.)
2. Wenn zwei Mengen A, B disjunkt sind, so gilt für ihre Differenzen: $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

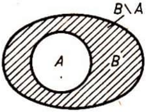


Bild 1.12

Es folgt eine Zusammenstellung der Eigenschaften von Mengenoperationen, ohne sie zu beweisen. Die meisten Eigenschaften sind offensichtlich.
Es gilt stets:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Kommutativität} & \boxed{\begin{array}{l} A \cap B = B \cap A; \qquad A \cup B = B \cup A \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}} \\ \textbf{Assoziativität} & \\ \textbf{Distributivität} & \end{array} \quad (1.10)$$

Bild 1.13 veranschaulicht $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

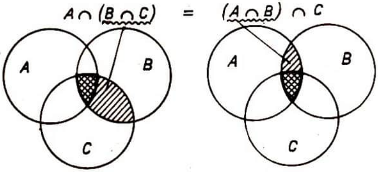


Bild 1.13

BEISPIEL

1.46. Es sei $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, $C = \{c, d, e, f\}$. Es ist zu zeigen, daß $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Lösung: Zunächst werden die in Klammern stehenden Operationen ausgeführt:

$$B \cup C = \{b, c, d, e, f\}, \quad A \cap B = \{b, c, d\}, \quad A \cap C = \{c, d\}.$$

Daraus folgt

$$A \cap (B \cup C) = \{b, c, d\},$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{b, c, d\},$$

also

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Die Differenz zweier Mengen ist im allgemeinen weder kommutativ noch assoziativ:

$A \setminus B \neq B \setminus A$	$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$	(1.11) (1.12)

Zu Formel (1.11) vgl. Beispiele 1.43. bis 1.45.

BEISPIEL

1.47. Für $A = \{m, n, o, p, q\}$, $B = \{o, q, r, s, t\}$, $C = \{p, q, r, u, v\}$ sind $A \setminus (B \setminus C)$ und $(A \setminus B) \setminus C$ zu bilden.

Lösung:

$$B \setminus C = B \setminus (B \cap C) = B \setminus \{q, r\} = \{o, s, t\},$$
$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{o, s, t\} = \{m, n, p, q\};$$
$$(A \setminus B) = A \setminus (A \cap B) = A \setminus \{o, q\} = \{m, n, p\},$$
$$(A \setminus B) \setminus C = \{m, n, p\} \setminus C = \{m, n\}.$$

Entsprechend Formel (1.12) ist $\{m, n, p, q\} \neq \{m, n\}$.

Kontrollfragen

1.9. Mit Hilfe welcher logischer Verbindungen werden Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definiert?

1.10. Es sei A Teilmenge von B. Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$, Vereinigung $A \cup B$ und Differenz $A \setminus B$?

1.11. Es seien A und B disjunkte Mengen. Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$ und die Differenzen $A \setminus B$, $B \setminus A$?

1.12. Welche Relation besteht zwischen Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen?

Aufgaben: 1.5. bis 1.8.

1.4. Aufgaben

1.1. Welche der folgenden Gebilde sind Aussagen, welche sind Aussageformen, und welche sind weder Aussagen noch Aussageformen?

a) $2 + 5 < 3$
b) $5x - 3y = 2$
c) $2a^2 + 5 = 0$
d) $(3r - 4)(3r + 4)$
e) $6 + 4 = 9$
f) 3,26
g) „Monat x hat 31 Tage"

1.2. Die folgenden Mengen sind durch Aufzählen der Elemente darzustellen. Grundbereich sind alle ganzen Zahlen von 0 bis 10.

a) $A = \{x \mid 3x \leqq 12\}$
b) $B = \{u \mid u^2 - 8u + 15 = 0\}$
c) $C = \{y \mid 2y^2 + 32 = 0\}$

1.3. Welche Relation besteht zwischen den Mengen A, B?

a) $A = \{x \mid x$ ist ein Pudel$\}$, $B = \{x \mid x$ ist ein Hund$\}$;
b) $A = \{z \mid z$ ist ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten$\}$,
   $B = \{z \mid z$ ist ein gleichschenkliges Dreieck$\}$;
c) $A = \{u \mid u$ ist ein Trapez$\}$, $B = \{u \mid u$ ist ein Parallelogramm$\}$.

1.4. Es ist festzustellen, ob die Aussageform $H(x)$ hinreichende, notwendige oder notwendige und hinreichende Bedingung für die Aussageform $K(x)$ ist.

a) $H(x)$: „x ist eine Tanne"; $K(x)$: „x ist ein Nadelbaum";
b) $H(x)$: „x ist eine gerade Zahl"; $K(x)$: „x ist eine durch 2 teilbare Zahl";
c) $H(x)$: „x ist ein Rechteck"; $K(x)$: „x ist ein Quadrat".

1.5. Mit $A = \{r, s, t, u\}$, $B = \{q, r, s, t\}$, $C = \{t, u\}$, $D = \{v, w\}$ sind zu bilden:

a) $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$
b) $A \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$
c) $A \cup D$, $A \cap D$, $A \setminus D$, $D \setminus A$

1.6. Mit $A = \{x \mid x \leqq 6\}$, $B = \{u \mid u > 3\}$, $C = \{v \mid v \geqq 8\}$, $D = \{4, 5, 6\}$ sind im Grundbereich aller ganzen Zahlen von 0 bis 10 zu bilden:

a) bis c) Aufgaben wie bei 1.5.

1.7. Mit der Menge A, dem Komplement $\bar{A}$, der leeren Menge $\emptyset$ und der Allmenge U sind zu bilden:

a) $A \cap \emptyset$, $A \cup \emptyset$, $A \setminus \emptyset$, $\emptyset \setminus A$
b) $A \cap U$, $A \cup U$, $A \setminus U$, $U \setminus A$
c) $A \cap \bar{A}$, $A \cup \bar{A}$, $A \setminus \bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$

1.8. Es sind zu bilden:

a) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
c) $A \cup (A \cap B)$
d) $B \cap (A \cup B)$

1.9. Mit $K = \{m, n, o, p, q\}$, $M = \{n, o, p, r, s\}$, $N = \{o, p, q, s, t\}$, $L = \{o, p, q\}$ sind zu bilden:

a) $K \cap (M \setminus N)$
b) $K \cup (M \setminus L)$
c) $K \setminus (M \cup N)$
d) $K \setminus (L \cap N)$

1.10. Es seien: V die Menge aller Vierecke, T die Menge aller Trapeze, D die Menge aller Drachenvierecke, P die Menge aller Parallelogramme, R die Menge aller Rechtecke, S die Menge aller Rhomben und Q die Menge aller Quadrate.

a) Welche Teilmengenrelationen bestehen?
b) Für welche Operationen mit je zwei der gegebenen Mengen ist das Resultat wieder eine dieser Mengen?

1.11. Mit den Mengen der Aufgaben 1.5. und 1.6. sind zu bilden:

a) $(A \cap B) \setminus (C \cup D)$ b) $(B \cup C) \setminus (A \cup D)$

1.12. a) In Bild 1.14 ist zu schraffieren:

$[C \setminus (B \cup D)] \cup [(B \cap D) \setminus (A \cup C)]$

b) Welche Menge stellt die waagerecht schraffierte Fläche in Bild 1.14 dar?

c) Welche Menge stellt die senkrecht schraffierte Fläche in Bild 1.14 dar?

1.13. Durch ebene Punktmengen sind folgende Beziehungen grafisch darzustellen (vgl. Bild 1.13):

a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$ b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

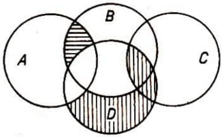


Bild 1.14

2. Zahlenbereiche und Operationen

2.0. Vorbemerkung

Für die Mathematik und ihre Anwendung sind Zahlen und Operationen mit ihnen von fundamentaler Bedeutung. Während der in der Praxis tätige Ingenieur im wesentlichen mit natürlichen Zahlen (z. B. als Stückzahlen) und rationalen Zahlen (z. B. als Zahlenwerte von Größen) arbeitet, werden für die Darstellungen in der Mathematik besonders die reellen Zahlen benötigt.
Die Grundrechenoperationen und ihre Eigenschaften, aber auch die Rechenoperationen dritter Stufe und deren Gesetze müssen beherrscht werden, um z. B. numerische Rechnungen, Lösen von Gleichungen und das Umstellen von Formeln fehlerfrei durchführen zu können.
Im Abschnitt 2.7. wird der Bereich der komplexen Zahlen eingeführt. In ihm sind Rechenoperationen ausführbar, die im Bereich der reellen nicht definiert sind, z. B. Radizieren und Logarithmieren negativer Zahlen. Komplexe Zahlen haben nicht nur Bedeutung in der Mathematik, sondern sie werden auch in der Praxis, so z. B. in der symbolischen Methode der Regelungstechnik, angewendet.

2.1. Der Bereich der reellen Zahlen und seine Teilbereiche

In Form einer Übersicht werden die wichtigsten Eigenschaften folgender Zahlenbereiche und ihrer Elemente dargestellt: natürliche, ganze, rationale (sowie irrationale) und reelle Zahlen.

Natürliche Zahlen: 0, 1, 2, 3, ...

Sie werden benutzt,

- um die Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge anzugeben **(Kardinalzahlen)**,
- um den Platz eines Elements in einer nach einem beliebigen Prinzip geordneten Menge anzugeben (**Ordinalzahlen:** 1., 2., 3., ...).

Alle natürlichen Zahlen bilden eine Menge, die mit N bezeichnet wird. Sie läßt sich auf dem Zahlenstrahl darstellen (Bild 2.1). Jede natürliche Zahl a hat einen (unmittelbaren) **Nachfolger** $a + 1$. Folglich gibt es keine größte natürliche Zahl. Es gibt aber eine kleinste natürliche Zahl, nämlich die Zahl 0.

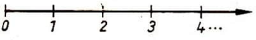


Bild 2.1

Addition und Multiplikation sind uneingeschränkt ausführbar:

$$a \in N, b \in N \Rightarrow a + b \in N, a \cdot b \in N.$$

(Subtraktion und Division sind nicht uneingeschränkt ausführbar.)

Die Zahl 0 gibt als Kardinalzahl die Anzahl der Elemente der leeren Menge an. Es gibt auch die Auffassung, daß sie keine natürliche Zahl ist. Dann ist die Zahl 1 die kleinste natürliche Zahl.

Ganze Zahlen: $\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$

Sie bilden eine Menge, die mit G bezeichnet wird. Sie läßt sich auf der Zahlengeraden darstellen (Bild 2.2), die als Erweiterung des Zahlenstrahls aufgefaßt werden kann. Dabei ist der positiven ganzen Zahl $+a$ und der natürlichen Zahl a derselbe Punkt zugeordnet (gleiches gilt für die ganze Zahl 0 und die natürliche Zahl 0), und die Erweiterung erfolgt durch die Hinzunahme (der Menge) der negativen ganzen Zahlen $-a$. Demnach ist $G \supset N$.

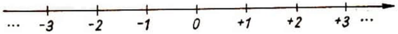


Bild 2.2

Jede ganze Zahl a hat einen Nachfolger $a + 1$. Es gibt weder eine größte noch eine kleinste ganze Zahl. Addition, Multiplikation und Subtraktion (aber nicht die Division) sind uneingeschränkt ausführbar.

Rationale Zahlen: $\frac{a}{b}$, $a \in G, b \in G \setminus \{0\}$

Eine rationale Zahl kann durch jeden **Bruch** $\frac{a}{b}$ zweier ganzer Zahlen ($b \neq 0$) dargestellt werden, der demselben Punkt der Zahlengeraden zugeordnet ist. Im allgemeinen wird derjenige Bruch gewählt, bei dem **Zähler** a und **Nenner** b teilerfremd sind. Die verschiedenen Darstellungsweisen lassen sich durch Erweitern oder Kürzen (Multiplizieren bzw. Dividieren von a und b mit der gleichen Zahl) ineinander umformen.

BEISPIEL

2.1. Für die rationale Zahl $r = \frac{-12}{18}$ sind verschiedene Darstellungsweisen anzugeben.

Lösung: $r = \frac{-12}{18} = \frac{-24}{36} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$.

Die letzte Darstellungsweise ist zu bevorzugen.

Die rationalen Zahlen bilden eine Menge, die mit R bezeichnet wird. Sie läßt sich auf der Zahlengeraden durch Punkte darstellen, die rationale Punkte heißen. Dabei ist der ganzen Zahl a und der rationalen Zahl $\frac{a}{1}$ derselbe Punkt zugeordnet. Demnach ist $R \supset G$. Die vier Grundrechenoperationen (außer Division durch 0, siehe 2.2.) sind uneingeschränkt ausführbar.

Nichtnegative rationale Zahlen werden auch **gebrochene Zahlen** genannt. Sie bilden die Menge R^*. Es ist $R^* \subset R$.

Die Darstellung einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ als **Dezimalbruch** ergibt sich durch Division des Zählers a durch den Nenner b. Es entsteht

— bei abbrechender Division ein endlicher Dezimalbruch
$\left(\text{z. B.: } \frac{7}{4} = 1{,}75;\ \frac{20}{5} = 4\right)$;

— bei nicht abbrechender Division ein unendlicher periodischer Dezimalbruch, weil bei der Division durch b höchstens $b - 1$ verschiedene Reste auftreten können (z. B.: $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$ rein periodischer Dezimalbruch, $-\frac{7}{22} = -0,3\overline{18}$ gemischt periodischer Dezimalbruch).

Da ein endlicher Dezimalbruch auch als unendlicher mit der Periode 0 aufgefaßt werden kann $\left(\text{z. B.: } \frac{20}{5} = 4,\overline{0}\right)$, ergibt sich:

> Jede **rationale Zahl** läßt sich als (unendlicher) **periodischer Dezimalbruch** darstellen.

Umgekehrt läßt sich jeder periodische Dezimalbruch in einen Bruch $\frac{a}{b}$ umformen. Die Begriffe „rationale Zahl" und „periodischer Dezimalbruch" sind demnach äquivalent.

Die rationalen Punkte liegen **dicht** auf der Zahlengeraden, d. h., zwischen je zwei verschiedenen rationalen Punkten liegt stets mindestens ein weiterer rationaler Punkt. Zwischen $a = \frac{5}{7}$ und $b = \frac{6}{7}$ liegt z. B. der Mittelwert $b_1 = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{11}{14}$; zwischen a und b_1 (und damit auch zwischen a und b) liegt z. B. $b_2 = \frac{1}{2}(a + b_1)$ $= \frac{21}{28}$ usw.

Daraus folgt: In R gilt nicht mehr die Nachfolgerrelation, d. h., zu einer beliebigen rationalen Zahl läßt sich nicht der (unmittelbare) Nachfolger angeben.

Obwohl die rationalen Punkte dicht auf der Zahlengeraden liegen, gibt es unendlich viele Punkte, die nicht rational sind. Der Beweis übersteigt den Rahmen dieses Lehrbuchs. Die zugeordneten Zahlen heißen

Irrationale Zahlen

Beispiele sind: die meisten Wurzelwerte $\left(\text{z. B. } \sqrt{2}\right)$, die meisten Logarithmen (z. B. lg 2), die meisten Winkelfunktionswerte (z. B. sin 10°), die Zahl π usw. Es gilt:

> Jede **irrationale Zahl** läßt sich als (unendlicher) **nichtperiodischer Dezimalbruch** darstellen.

Da er nicht vollständig angegeben werden kann, werden rationale Zahlen als Näherungswerte benutzt. Die Näherung kann mit beliebiger Genauigkeit erfolgen, z. B. $\sqrt{2} \approx 1,41$ oder $\sqrt{2} \approx 1,41421$ usw.

Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen entsteht durch Vereinigung der Menge R der rationalen Zahlen mit der Menge der irrationalen Zahlen. Sie wird mit P bezeichnet (großer griech. Buchstabe „Rho", kann aber auch „Pe" gelesen werden). Demnach ist $P \supset R$.

Wie in R sind auch in P die vier Grundrechenoperationen (außer der Division durch 0) uneingeschränkt ausführbar, und auch in P gilt nicht die Nachfolgerrelation.

Bezüglich der Dezimalbruchdarstellung folgt:

> Jede **reelle Zahl** läßt sich als (periodischer oder nichtperiodischer) **Dezimalbruch** darstellen.

Jeder reellen Zahl ist ein Punkt der Zahlengeraden (reeller Punkt) zugeordnet. Umgekehrt ist auch jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl zugeordnet. Die Menge aller reellen Punkte ergibt somit lückenlos die Zahlengerade.
Die Menge P wird durch die Kleiner-Beziehung **geordnet**.

Definition

Für zwei beliebige reelle Zahlen a, b gilt $a < b$ (gelesen „a kleiner als b") genau dann, wenn a auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

Folglich gilt für zwei reelle Zahlen a, b
entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.
Zusammenhängende Teilmengen von P heißen **Intervalle**. Es gibt folgende Bezeichnungen und Schreibweisen (Bild 2.3):

Bezeichnung	Schreibweise	Bedeutung
abgeschlossenes Intervall	$[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$	Menge aller reellen Zahlen von a bis b (einschließlich der Endpunkte)
offenes Intervall	$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$	Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b (ausschließlich der Endpunkte)

Beide Intervalle haben endliche Länge und heißen deshalb endlich. Weitere endliche Intervalle sind (Bild 2.3):

$\{x \mid a < x \leqq b\} = (a, b]$ links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall;
$\{x \mid a \leqq x < b\} = [a, b)$ links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall.

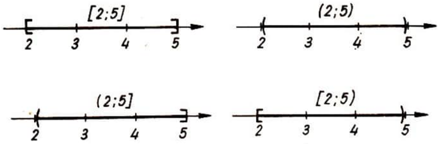


Bild 2.3

Unendliche Intervalle werden mit den Symbolen ∞ (gelesen „unendlich") oder $-\infty$ geschrieben. Sie sind an der Seite, an der diese Symbole stehen, offen. Beispiele sind

$$\{x \mid x \geqq a\} = [a, \infty), \{x \mid x < b\} = (-\infty, b), P = (-\infty, \infty).$$

Die Intervallsymbolik darf nur auf Teilmengen von P angewendet werden. Teilmengen von N oder G sind durch Aufzählen der Elemente darzustellen. Beispiele sind $\{x \mid 2 \leqq x < 5; x \in N\} = \{2, 3, 4\}$, $\{x \mid x > -3; x \in G\} = \{-2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$.
Da Intervalle Mengen sind, lassen sich mit ihnen Mengenoperationen durchführen.

BEISPIELE

2.2. Mit $A = [1, 3]$, $B = (2, 5)$ sind $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$ zu bilden.

Lösung: Aus Bild 2.4 folgt

$A \cap B = (2, 3]$, $A \cup B = [1, 5)$, $A \setminus B = [1, 2]$, $B \setminus A = (3, 5)$.

Intervall $A \setminus B$ ist rechts abgeschlossen, denn $2 \notin B$, folglich $2 \in A \setminus B$. Intervall $B \setminus A$ ist links offen, denn $3 \in A$, folglich $3 \notin B \setminus A$.

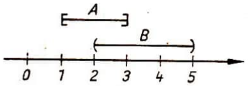


Bild 2.4

2.3. Mit $A = [1, 3]$, $B = [3, 5]$ sind $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$ zu bilden.

Lösung: Einziges gemeinsames Element ist 3, folglich $A \cup B = [1, 5]$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = [1, 3)$, $B \setminus A = (3, 5]$.

$A \cap B$ enthält nur eine Zahl, ist also kein Intervall und muß als Menge mit geschweiften Klammern geschrieben werden.

2.4. Mit $A = [1, 3)$, $B = (3, 5]$ sind $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$ zu bilden.

Lösung: Wegen $3 \notin A$ und $3 \notin B$ enthalten A und B kein gemeinsames Element, folglich $A \cup B = [1, 3) \cup (3, 5] = [1, 5] \setminus \{3\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

Kontrollfragen

2.1. In welchen Zahlenbereichen gilt die Nachfolgerrelation?

2.2. In welchen Zahlenbereichen sind die vier Grundrechenoperationen (außer der Division durch 0) uneingeschränkt ausführbar?

2.3. Wodurch unterscheidet sich die Dezimalbruchdarstellung einer rationalen und einer irrationalen Zahl?

2.4. Welcher Zahlenbereich wird durch $P \setminus R$ gebildet?

Aufgaben: 2.1. und 2.2.

2.2. Rechenoperationen erster und zweiter Stufe

Die vier Grundrechenoperationen sind

Rechenoperation	Symbolik	a	b	c
Addition	$a + b = c$	Summand	Summand	Summe
Subtraktion	$a - b = c$	Minuend	Subtrahend	Differenz
Multiplikation	$a \cdot b = c$	Faktor (Multiplikand)	Faktor (Multiplikator)	Produkt
Division	$a : b = c$ $\frac{a}{b} = c$	Dividend	Divisor	Quotient

Addition, Subtraktion sind die Rechenoperationen 1. Stufe, Multiplikation, Division sind die Rechenoperationen 2. Stufe.
Für Addition und Multiplikation gilt:

Kommutativität	$a + b = b + a; \qquad a \cdot b = b \cdot a$	(2.1)
Assoziativität	$(a + b) + c = a + (b + c); (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(2.2)
Distributivität	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	(2.3)

Das Multiplikationszeichen wird i. allg. weggelassen und nur an den Stellen gesetzt, an denen sich Mißverständnisse ergeben können, z. B. zwischen Zahlen: $4 \cdot 5$ ($\neq 45$), aber $3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$, $2a = 2 \cdot a$, $4(2 + 3) = 4 \cdot (2 + 3)$. Ausnahme: Gemischte Zahlen (Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruches), z. B. $2\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, die von dem mit Multiplikationszeichen zu schreibenden Produkt unterschieden werden müssen, z. B. $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Die vier Grundrechenoperationen sind eindeutig ausführbar, d. h., für $a \in P$, $b \in P$ sind $a + b$, ab, $a - b$ und $a : b$ $(b \neq 0)$ eindeutig bestimmt.

Umkehroperationen

Aus $a + x = c$
$x = c - a$ folgt:

Subtraktion ist die Umkehroperation zur Addition (gesucht ist ein Summand).

Aus $a \cdot x = c$
$x = c : a$ folgt:

Division ist die Umkehroperation zu. Multiplikation (gesucht ist ein Faktor)

Wegen der Kommutativität existiert jeweils nur eine Umkehroperation.

Rechnen mit Null und Eins: Es gilt stets

$$\boxed{\begin{array}{lll} a + 0 = a; & 1 \cdot a = a; & a : 1 = a \\ a - 0 = a; & 0 \cdot a = 0; & a : a = 1\ (a \neq 0) \\ a - a = 0; & & 0 : a = 0\ (a \neq 0) \end{array}}. \qquad (2.4)$$

Aus $a \cdot 0 = 0$ und $0 \cdot 0 = 0$ folgt der

Satz

Ein **Produkt** ist genau dann **gleich Null**, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist:

$$\boxed{a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0}. \qquad (2.5)$$

Dieser Satz wird häufig beim Lösen von Gleichungen benutzt.
Division durch Null: Weder $a : 0$ $(a \neq 0)$ noch $0 : 0$ sind ausführbar, denn

$a : 0 = x$ $(a \neq 0)$ genau dann,
wenn $a = x \cdot 0$.

Wegen $a \neq 0$ ist diese Gleichung für keine Zahl x erfüllbar.

$0 : 0 = x$ genau dann,
wenn $0 = x \cdot 0$.

Diese Gleichung ist für jede Zahl x erfüllbar, also nicht eindeutig erfüllbar.

Satz

Die **Division durch Null** ist nicht ausführbar.

Monotonie bezüglich der Kleiner-Beziehung: Für reelle Zahlen gilt stets

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases} \quad \text{wenn } c \in P \text{ (beliebig reell);}$$

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ a : c < b : c; \end{cases} \quad a < b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ a : c > b : c \end{cases}$$

$$\text{wenn } c > 0 \qquad \text{wenn } c < 0. \tag{2.6}$$

Beispiele: $-2 < 6 \Rightarrow -2 + 3 < 6 + 3$;
$-2 < 6 \Rightarrow (-2) \cdot 3 < 6 \cdot 3$; aber $-2 < 6 \Rightarrow (-2)(-3) > 6(-3)$.

Multiplikation und Division sind also für $c < 0$ bezüglich der Kleiner-Beziehung nicht monoton. Es gilt die

Regel: Beim Multiplizieren oder Dividieren beider Seiten der Ungleichung $a < b$ mit einer negativen Zahl ist das Zeichen „$<$" durch das Zeichen „$>$" zu ersetzen.

Rechnen mit Brüchen

Der Bruch $\frac{a}{b}$ heißt **echter Bruch**, wenn $\frac{a}{b} \in (-1, 1)$, anderenfalls heißt er **unecht**.

Beispiele: $\frac{9}{10}$ und $-\frac{2}{5}$ sind echte Brüche, während $\frac{3}{3}$ und $-\frac{7}{4}$ unechte Brüche sind.

Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ $(c \neq 0)$
Division des Zählers und des Nenners durch die gleiche Zahl c.

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $(c \neq 0)$
Multiplikation des Zählers und des Nenners mit der gleichen Zahl c.

Durch Kürzen oder Erweitern wird ein Bruch in einen anderen umgeformt. Beide sind verschiedene Bezeichnungen für dieselbe rationale Zahl.

Addition, Substraktion zweier Brüche ($b \neq 0$, $d \neq 0$):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}; \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd} \tag{2.7}$$

Gleichnamige Brüche: Die Zähler werden addiert (subtrahiert). Der gemeinsame Nenner wird beibehalten.
Ungleichnamige Brüche sind vor dem Addieren (Subtrahieren) gleichnamig zu machen. Das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner heißt **Hauptnenner**.

Multiplikation zweier Brüche ($b \neq 0$, $d \neq 0$):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{2.8}$$

Die Zähler werden miteinander multipliziert, und die Nenner werden miteinander multipliziert.
Zwei Zahlen (oder Ausdrücke mit Variablen) heißen **reziprok**, wenn ihr Produkt gleich 1 ist.

$$\boxed{a \text{ und } \frac{1}{a}\ (a \neq 0);\ \frac{a}{b} \text{ und } \frac{b}{a}\ (a \neq 0, b \neq 0) \text{ sind reziprok.}} \tag{2.9}$$

Denn $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1;\ \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$

Division zweier Brüche ($b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$):

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c};\ a : b = a \cdot \frac{1}{b}} \tag{2.10}$$

Der Dividend wird mit dem Reziproken des Divisors multipliziert (Rückführung der Division auf die Multiplikation).
Die Multiplikation (Division) eines Bruchs mit einer Zahl kann auf die Gln. (2.8) und (2.10) zurückgeführt werden.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b};\ \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel beim Erweitern, Kürzen und Bestimmen des Hauptnenners ist die **Faktorenzerlegung**. Ihr Ziel ist die Umformung eines mehrgliedrigen Ausdrucks (algebraische Summe, z. B. $a^2c - 4ab + 2a = a^2c + (-4ab) + 2a$; Polynom, griech. „poly", viel) in einen eingliedrigen (Monom, griech. „mono", einzeln). Sie kann durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren, Anwenden binomischer Formeln $[a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$ oder durch Probieren erreicht werden.

BEISPIELE

2.5. $15a^2 + 5a = 5a(3a + 1)$. Das Monom besteht aus den drei Faktoren 5, a und $(3a + 1)$.

2.6. $ac - bc + a - b = c(a - b) + 1(a - b) = (a - b)(c + 1)$. Dieses Monom besteht aus den zwei Faktoren $(a - b)$ und $(c + 1)$.

2.7. $16p^2 - 9q^2 = (4p + 3q)(4p - 3q)$

2.8. $75a^2b - 3b = 3b(25a^2 - 1) = 3b(5a + 1)(5a - 1)$. Zunächst werden die gemeinsamen Faktoren ausgeklammert.

2.9. $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$

2.10. $2a^2 - 5ab - 12b^2 = (2a + 3b)(a - 4b)$.
Auf Grund der Zerlegungen $2a^2 = 2a \cdot a$, $-12b^2 = 3b \cdot (-4b)$ wird versuchsweise das Klammerprodukt angesetzt. Durch Ausmultiplizieren bestätigt sich entweder die Richtigkeit, oder der Ansatz ist zu ändern.

2.11. $25a^2 + b^2$; $4a^2 - 10ab + 9b^2$; $2a^2 - 3ab - 12b^2$ sind nicht zerlegbar.

Brüche können durch **Kürzen** auf eine einfachere Form gebracht werden. Vorher sind Zähler und Nenner in Faktoren zu zerlegen.

BEISPIELE

2.12. $\dfrac{30mn + 36n^2}{25m^2 - 36n^2} = \dfrac{6n(5m + 6n)}{(5m + 6n)(5m - 6n)} = \dfrac{6n}{5m - 6n}$

Das Kürzen des letzten Bruches mit $6n$ führt zu keiner weiteren Vereinfachung:

$$\frac{6n : 6n}{(5m - 6n) : 6n} = \frac{1}{\frac{5m}{6n} - 1}$$

Es entsteht ein Doppelbruch.

2.13. $\dfrac{8ax - 6bx}{6bx^2 - 8ax^2} = \dfrac{2x(4a - 3b)}{2x^2(3b - 4a)} = \dfrac{2x(4a - 3b)}{-2x^2(4a - 3b)} = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$

Um kürzen zu können, wurde im Nenner noch der Faktor -1 ausgeklammert.

2.14. $\dfrac{3x^2 - 2xy - 8y^2}{2x^2 - 8y^2} = \dfrac{(3x + 4y)(x - 2y)}{2(x^2 - 4y^2)} = \dfrac{(3x + 4y)(x - 2y)}{2(x - 2y)(x + 2y)} = \dfrac{3x + 4y}{2(x + 2y)}$

2.15. Kürzen mit -1: $\dfrac{3b - 2a}{v - u} = \dfrac{(3b - 2a) : (-1)}{(v - u) : (-1)} = \dfrac{2a - 3b}{u - v}$

Derselbe Bruch entsteht, wenn mit -1 erweitert wird.

2.16. $\dfrac{16u - 9v}{4u - 3v}$ und $\dfrac{4a + m}{4am}$ lassen sich durch Kürzen nicht vereinfachen, da Zähler und Nenner keine gemeinsamen Faktoren enthalten.

Der **Hauptnenner** ungleichnamiger Brüche wird ermittelt, indem alle Nenner in Faktoren zerlegt werden (die Zahlen in Primfaktoren) und das Produkt aller Faktoren dieser Nenner gebildet wird, wobei jeder Faktor mit dem größten in den Zerlegungen auftretenden Exponenten zu potenzieren ist. Die Faktoren, mit denen die Brüche zu erweitern sind, ergeben sich, wenn der Hauptnenner durch die Nenner dieser Brüche dividiert wird.

BEISPIELE

2.17. $$\frac{r}{\underbrace{12a^3b^5}_{2^2 \cdot 3 \cdot a^3b^5}} + \frac{r - s}{\underbrace{150a^2c}_{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot a^2c}} - \frac{r + 2s}{\underbrace{135b^2c^3}_{3^3 \cdot 5 \cdot b^2c^3}}$$

$$= \frac{r \cdot (3^2 \cdot 5^2 \cdot c^3) + (r - s) \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot ab^5c^2) - (r + 2s) \cdot (2^2 \cdot 5 \cdot a^3b^3)}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^3b^5c^3} = \ldots$$

Der Erweiterungsfaktor des ersten Bruches ist

$(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^3b^5c^3) : (2^2 \cdot 3 \cdot a^3b^5) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot c^3$.

Für die beiden anderen Brüche berechnet er sich entsprechend.

2.18. $$\frac{2a - c}{\underbrace{6a^2 - 4ab}_{2a(3a - 2b)}} - \frac{4b - 3c}{\underbrace{12ab - 8b^2}_{4b(3a - 2b)}} = \frac{(2a - c)\,2b - (4b - 3c)\,a}{4ab(3a - 2b)}$$

$$= \frac{4ab - 2bc - 4ab + 3ac}{4ab(3a - 2b)} = \frac{3ac - 2bc}{4ab(3a - 2b)} = \frac{c(3a - 2b)}{4ab(3a - 2b)} = \frac{c}{4ab}$$

2.19. In diesem Beispiel stellt sich nach der Faktorenzerlegung der Nenner heraus, daß sich nach Erweitern des vierten Bruches mit -1 ein einfacherer Hauptnenner ergibt:

$$\frac{b}{\underbrace{a^2-1}_{(a+1)(a-1)}} + \frac{c}{\underbrace{a^2+a}_{a(a+1)}} + \frac{d}{\underbrace{a}_{a}} + \frac{e}{\underbrace{a-a^2}_{a(1-a)}}$$

$$= \frac{b}{\underbrace{a^2-1}_{(a+1)(a-1)}} + \frac{c}{\underbrace{a^2+a}_{a(a+1)}} + \frac{d}{\underbrace{a}_{a}} + \frac{-e}{\underbrace{a^2-a}_{a(a-1)}}$$

$$= \frac{ba + c(a-1) + d(a+1)(a-1) - e(a+1)}{a(a+1)(a-1)} = \dots$$

2.20. $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{a+b}{ab} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{ab + (a+b)^2 - b(a+b)}{ab(a+b)} = \dfrac{a^2+2ab}{ab(a+b)} = \dfrac{a(a+2b)}{ab(a+b)} = \dfrac{a+2b}{b(a+b)}$

2.21. $\dfrac{r}{a+3} + \dfrac{s}{a+4} + \dfrac{t}{a+12}$

Da sich die Nenner nicht zerlegen lassen, ist jeder Nenner als Faktor aufzufassen, und der Hauptnenner ist das Produkt $(a+3)(a+4)(a+12)$, denn diese Nenner enthalten keinen gemeinsamen Teiler.

Doppelbrüche werden durch Erweitern mit dem Hauptnenner der auftretenden Nenner auf einfache Brüche umgeformt.

BEISPIELE

2.22. $$\frac{R_1R_2 + \dfrac{R_1R_2^2}{R_1+R_2}}{R_1+R_2+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = \frac{\left(R_1R_2 + \dfrac{R_1R_2^2}{R_1+R_2}\right)\cdot(R_1+R_2)}{\left(R_1+R_2+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)\cdot(R_1+R_2)}$$

$$= \frac{R_1R_2(R_1+R_2)+R_1R_2^2}{(R_1+R_2)^2+R_1R_2} = \frac{R_1R_2(R_1+2R_2)}{(R_1+R_2)^2+R_1R_2}$$

2.23. $$\frac{\dfrac{a}{c}+b}{\dfrac{a}{bd}+\dfrac{c}{d}} = \frac{\left(\dfrac{a}{c}+b\right)bcd}{\left(\dfrac{a}{bd}+\dfrac{c}{d}\right)bcd} = \frac{abd+b^2cd}{ac+bc^2} = \frac{bd(a+bc)}{c(a+bc)} = \frac{bd}{c}$$

Die **Division** einer Summe durch ein Monom wird gliedweise ausgeführt.

BEISPIEL

2.24. $\dfrac{8a^2b - 6ab^2 + 10a}{2ab} = \dfrac{8a^2b}{2ab} - \dfrac{6ab^2}{2ab} + \dfrac{10a}{2ab} = 4a - 3b + \dfrac{5}{b}$

Eine Summe wird durch eine Summe nach dem Algorithmus (Rechenvorschrift) der **Partialdivision** dividiert (vgl. Beispiel 2.25.):

(1) Dividend und Divisor sind nach gleichen Gesichtspunkten zu ordnen, z. B. die in den Summanden auftretenden Variablen nach dem Alphabet und nach fallenden Potenzen einer Variablen (im Beispiel: geordnet nach fallenden Potenzen von a);

(2) das erste Glied des Dividenden ist durch das erste Glied des Divisors zu dividieren (im Beispiel: $9a^3 : 3a = 3a^2$);

(3) der berechnete Quotient ist mit dem gesamten Divisor zu multiplizieren (im Beispiel: $(3a + 2b) \cdot 3a^2 = 9a^3 + 6a^2b$);
(4) das Produkt ist vom Dividenden zu subtrahieren (im Beispiel:
$(9a^3 - 9a^2b - 10ab^2) - (9a^3 + 6a^2b) = -15a^2b - 10ab^2$);
(5) falls die Differenz Null ist, ist die Rechnung beendet, anderenfalls wird wieder bei (2) begonnen usw.

BEISPIELE

2.25. $(9a^3 - 10ab^2 - 9a^2b) : (3a + 2b)$

$$
\begin{array}{l}
(9a^3 - 9a^2b - 10ab^2) : (3a + 2b) = 3a^2 - 5ab \\
-\underline{(9a^3 + 6a^2b)} \\
\qquad -15a^2b - 10ab^2 \\
\quad -\underline{(-15a^2b - 10ab^2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

2.26.

$$
\begin{array}{l}
(4a^2 - 10a + 10b - 9b^2) : (2a - 3b) = 2a + 3b - 5 - \dfrac{5b}{2a - 3b} \\
-\underline{(4a^2 - 6ab)} \\
\qquad 6ab - 10a + 10b - 9b^2 \\
\quad -\underline{(6ab \qquad\qquad\quad - 9b^2)} \\
\qquad\qquad -10a + 10b \\
\qquad\quad -\underline{(-10a + 15b)} \\
\text{Rest:} \qquad\qquad\quad -5b
\end{array}
$$

Kontrollfragen

2.5. Wie heißen die Rechenoperationen 1. und 2. Stufe, und wie werden jeweils a, b und c bezeichnet?
2.6. Was ergibt $a \cdot 1$, $a \cdot 0$, $a : a$, $0 : a$ $(a \neq 0)$?
2.7. Bei welchen Operationen ist bei einer Ungleichung das Ungleichheitszeichen zu ändern?
2.8. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch ist?
2.9. Wie heißt die definierende Bedingung für reziproke Zahlen?

Aufgaben: 2.3. bis 2.9.

2.3. Der absolute Betrag

Zwei Zahlen (oder Ausdrücke mit Variablen) heißen zueinander entgegengesetzt, wenn sie sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, z. B. $+3$ und -3 (oder a und $-a$; $u - v$ und $v - u$). Auf der Zahlengeraden liegen sie symmetrisch zur Null, folglich haben sie von ihr gleichen Abstand. Die Null ist zu sich selbst entgegengesetzt: $+0 = -0 = 0$.
Wird vor eine Zahl ein Pluszeichen gesetzt, so bleibt sie unverändert; wird ein Minuszeichen gesetzt, so entsteht die entgegengesetzte Zahl.

BEISPIEL

2.27. Wenn $a = 3$ ist, so ist $+a = +3$ und $-a = -3$;
wenn $a = -4$ ist, so ist $+a = +(-4) = -4$ und $-a = -(-4) = +4$.

Allgemein gilt

$a = +a$	$-a$
> 0	< 0
< 0	$> 0.$

Für den Fall $a < 0$ bedeutet demnach das Symbol $-a$ eine positive Zahl.

Mitunter wird es als Zeichen für eine negative Zahl verwendet. Das ist aber nur richtig, wenn a positiv ist. Die Bedingung „a ist negativ“ lautet für beliebige a „$a < 0$“.

Von zwei entgegengesetzten Zahlen ist stets eine größer oder gleich Null (also nichtnegativ). Das gilt auch für zwei entgegengesetzte Ausdrücke mit Variablen.

Definition

Der **absolute Betrag** $|a|$ der Zahl a (kurz: Betrag von a) ist die nichtnegative der beiden Zahlen a und $-a$:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geqq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}} \tag{2.11}$$

BEISPIEL

2.28. Für die Zahlen 3, 0 und -3 sind die Beträge zu bilden.

Lösung: $|3| = 3$; $|0| = 0$; $|-3| = -(-3) = 3$

Folgerungen: Es gilt stets

a) $|a| \geqq 0;$ **(2.12)**

b) $|-a| = |a|$ **(2.13)**

c) Für $a \geqq 0$ gilt: $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$ **(2.14a)**

(d. h., $x = a \vee x = -a$).

Begründung zu Folgerung c) (vgl. Bild 2.5): Auf der Zahlengeraden läßt sich $|x|$ als Abstand der Zahl x von 0 deuten. Offenbar haben $-a$ und a den gleichen Abstand von 0 (Gl. (2.14a)).

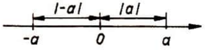


Bild 2.5

BEISPIELE

2.29. Es ist $|-3| = |3|$; $|u^2 - v^2| = |v^2 - u^2|$ (vgl. Gl. (2.13))

2.30. Es ist (vgl. Gl. (2.14a))

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3;$$
$$|u| = k \Leftrightarrow u = \pm k \ (k \geqq 0).$$

Aus Formel (2.14a) folgt durch Verallgemeinerung

$$|x - b| = a \Leftrightarrow x - b = \pm a,$$
$$|x - b| = a \Leftrightarrow x = b \pm a. \tag{2.14b}$$

BEISPIELE

2.31. Durch welche Zahlen wird die Gleichung $|x - 10| = 2$ gelöst?

Lösung: $x - 10 = \pm 2$; $x = 10 \pm 2$.

Die Gleichung wird durch die Zahlen 8 und 12 gelöst. (Beide haben von der Zahl 10 den Abstand 2.)

2.32. Welche Elemente enthält die Menge $A = \{x \mid |x + 4| = 6\}$?

Lösung: $x + 4 = \pm 6$, $x = -4 \pm 6$, $A = \{-10, 2\}$.

Mit Hilfe des Betrages lassen sich die folgenden **Vorzeichenregeln** für die vier Grundrechenoperationen formulieren:

1. Addition: $a + b$

a, b gleiche Vorzeichen

$(+3) + (+5) = +8$
$(-3) + (-5) = -8$

$|a|$ und $|b|$ werden addiert; das Vorzeichen der Summe ist gleich dem Vorzeichen der Summanden.

a, b verschiedene Vorzeichen

$(+3) + (-5) = -2$
$(-3) + (+5) = +2$

$|a|$ und $|b|$ werden subtrahiert, und zwar der kleinere Betrag vom größeren; das Vorzeichen der Summe ist gleich dem Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.

Daraus folgt:

$$\boxed{a + (-a) = 0} \tag{2.15}$$

Zwei Zahlen (oder Ausdrücke mit Variablen) heißen **entgegengesetzt**, wenn ihre Summe gleich Null ist.
Für den Betrag der Summe gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\boxed{|a + b| \leqq |a| + |b|} \tag{2.16}$$

Die Bezeichnung weist auf eine analoge Beziehung im Dreieck hin, in der die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte ist.

2. Subtraktion: Zum Minuenden wird die zum Subtrahenden entgegengesetzte Zahl addiert. Damit wird die Subtraktion auf die Addition zurückgeführt:

$$\boxed{a - b = a + (-b)} \tag{2.17}$$

Z. B.: $(-3) - (-5) = (-3) + (+5) = 2$;

$3a + 2b - (-4a + b) = 3a + 2b + 4a - b = 7a + b$

Für den Betrag der Differenz gilt

$$\boxed{|a - b| \leqq |a| + |b|} \tag{2.18}$$

3. Multiplikation, Division: $a \cdot b$, $\dfrac{a}{b}$

$|a|$ und $|b|$ werden multipliziert (dividiert); das Produkt (der Quotient) ist positiv bei gleichen Vorzeichen von a und b, negativ bei ungleichen Vorzeichen von a und b. Es gilt

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|} \quad \boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}} \qquad (2.19)\ (2.20)$$

Beim **Auflösen von Betragszeichen** sind nach Gl. (2.11) zwei Fälle zu unterscheiden: Während in dem einen Fall ($a \geqq 0$) nur die Zeichen durch Klammern zu ersetzen sind, ist im anderen Fall ($a < 0$) das Vorzeichen vor dem Ausdruck, der in Betragszeichen stand, zu ändern.

BEISPIELE

2.33. Welche Werte nimmt $z = \dfrac{1}{2}(2x + y)$ an, wenn $|x| = 4$, $|y| = 6$ ist?

Lösung: Nach Formel (2.14a) ist $x = \pm 4$, $y = \pm 6$. Für z ergeben sich die in der Tabelle dargestellten 4 Werte:

x	4	4	−4	−4
y	6	−6	6	−6
z	7	1	−1	−7

2.34. In dem Ausdruck $6v + 3\,|3u - 2v|$ sind die Betragszeichen aufzulösen!

Lösung:

$$6v + 3\,|3u - 2v| = \begin{cases} 6v + 3(3u - 2v) = 9u; & 3u - 2v \geqq 0 \\ 6v - 3(3u - 2v) = -9u + 12v; & 3u - 2v < 0 \end{cases}$$

2.4. Das Summenzeichen

Der griechische Großbuchstabe $\sum$ („Sigma") wird zur abkürzenden Schreibweise von Summen benutzt.

Definition

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \qquad (2.21)$$

(gelesen „Summe über a_i für i gleich 1 bis n").
Der Buchstabe i heißt **Summationsindex**. Er darf natürliche (oder ganze) Zahlen annehmen. Die kleinste und die größte Zahl, die i annimmt, werden unten und oben an das Zeichen geschrieben und heißen **untere** und **obere** (Summations-)**Grenze**. Die untere Grenze kann auch eine andere Zahl als 1 sein.

BEISPIELE

2.35. $\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

2.36. $\sum_{j=-2}^{1} b_j = b_{-2} + b_{-1} + b_0 + b_1$

2.37. $\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$

2.38. $\sum_{n=-1}^{1} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}$

Die folgenden Beispiele zeigen, daß für Summen verschiedene Darstellungen möglich sind. Sie sind durch **Indextransformation** ineinander umformbar.

BEISPIELE

2.39. $a_4 + a_5 + a_6 = \sum_{i=4}^{6} a_i = \sum_{i=1}^{3} a_{i+3}$

2.40. $\frac{1}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{2n-3}$; vgl. Beispiel 2.38.

Rechenregeln

Es gilt stets:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i; \tag{2.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{2.23}$$

$$\text{konstanter Faktor: } \sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i; \tag{2.24}$$

$$\text{Konstante: } \sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{2.25}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2.26}$$

Im allgemeinen gilt (d. h., es gibt Ausnahmen):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{2.27}$$

Die folgenden Beispiele sollen diese Regeln veranschaulichen.

BEISPIELE

2.41. $\sum_{i=1}^{3} (a_i \pm b_i) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3)$

$= (a_1 + a_2 + a_3) \pm (b_1 + b_2 + b_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i \pm \sum_{i=1}^{3} b_i;$

vgl. Gln. (2.22, 2.23)

2.42. $\sum_{i=1}^{3} ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 = c(a_1 + a_2 + a_3) = c \sum_{i=1}^{3} a_i$; vgl. Gl. (2.24)

2.43. $\sum_{i=1}^{3} c = c + c + c = 3c$; vgl. Gl. (2.25)

2.44. $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ist zu unterscheiden von

$\sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{i=1}^{3} b_i = (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$; vgl. Gl. (2.27)

Zur abkürzenden Schreibweise von Produkten dient das Produktzeichen $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ (griech. Großbuchstabe „Pi"), für das entsprechende Regeln wie für das Summenzeichen gelten.

Kontrollfragen

2.10. Wie heißt die definierende Bedingung für entgegengesetzte Zahlen (Ausdrücke)?
2.11. Wie heißt die Definition für den absoluten Betrag einer Zahl?
2.12. Wie heißen die Vorzeichenregeln für die Addition zweier Zahlen?
2.13. Läßt sich beim Bilden einer Summe von Summen das Summenzeichen mit dem Pluszeichen „vertauschen", d. h., ist diese Summe zerlegbar (vgl. Gl. (2.22))?
2.14. Läßt sich beim Bilden einer Summe von Produkten das Summenzeichen mit dem Multiplikationszeichen „vertauschen", d. h., ist diese Summe zerlegbar [vgl. Gl. (2.27)]?

Aufgaben: 2.10. bis 2.16.

2.5. Zahlendarstellungen, Näherungswerte

Jede **Darstellung einer Zahl** heißt **Ziffer**. Sie besteht aus **Grundziffern**, die im Positions- (Stellenwert-)system mit der Basis a mit einem Stellenwert a^n zu multiplizieren sind. Zur Darstellung werden a verschiedene Grundziffern benötigt. Zahlen werden fast ausschließlich im dekadischen Positionssystem ($a = 10$) dargestellt, von technischer Bedeutung sind die Systeme mit $a = 2$, $a = 8$ und $a = 16$. Um Mißverständnisse bei der Darstellung zu vermeiden, wird an die in Klammern gesetzte Ziffer die Basis als Index geschrieben.

BEISPIEL

2.45. Die Ziffer 109 ist im dekadischen System dargestellt, denn

$109 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$.

Darstellungen mit den Basen $a = 8$ und $a = 2$ sind

$1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = (155)_8$;

$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$= (1101101)_2 =$ LLOLLOL (wobei L = 1 bedeutet).

Für die **Schreibweise von Zahlen**, die im dekadischen (Dezimal-)System dargestellt werden, sind im DDR-Standard TGL 43839 (verbindlich ab 1. 9. 1986) die folgenden Regeln festgelegt:

1. Signifikante Ziffern sind alle Ziffern von der ersten von Null verschiedenen links bis zur letzten angegebenen Ziffer rechts. Nullen, die sich aus dem Faktor 10^n ergeben, werden nicht berücksichtigt.

2. Wenn betont werden soll, daß eine exakte Zahl vorliegt, ist das Wort „exakt" dahinterzusetzen, oder es ist die letzte Ziffer fett zu drucken.
3. Die Genauigkeit genäherter Zahlen ist durch die Anzahl signifikanter Ziffern festzulegen.
4. Wenn für eine Zahl eine zulässige Abweichung gegeben wird, so müssen die Zahl und die Abweichung eine letzte signifikante Ziffer gleicher Ordnung haben.

BEISPIELE

2.46. Die Zahl 24,00 hat vier signifikante Ziffern.
Wenn es sich um eine exakte Zahl handelt, so kann das durch 24,00 (exakt) oder 24,0**0** betont werden;
wenn es sich um eine genäherte Zahl handelt, so bedeutet die Schreibweise, daß die Hundertstel sicher sind. Der wahre Wert kann also 24,004 oder 23,995 sein, aber nicht 24,012.
Angaben für zulässige Abweichungen könnten sein:
$24{,}00 \pm 0{,}03$ oder $24{,}00 \pm 0{,}12$; falsch wären aber
$24{,}00 \pm 0{,}2$, $24{,}00 \pm 0{,}004$ oder $24{,}00 \pm 0{,}024$.

2.47. Die Zahlen $4{,}72 \cdot 10^4$, $47{,}2 \cdot 10^2$ und 0,0472 haben je drei signifikante Ziffern.
Wenn bei der Zahl 47200 nur die ersten zwei Ziffern sicher sind, so muß $4{,}7 \cdot 10^4$ geschrieben werden.

Für das **Runden von Zahlen** legt der gleiche DDR-Standard fest:

1. Beim Runden einer Zahl werden signifikante Ziffern von rechts bis zu einer bestimmten Stelle weggelassen.
   Die letzte stehenbleibende Ziffer ändert sich nicht, wenn die erste der weggelassenen Ziffern (von links nach rechts gezählt) kleiner als 5 ist;
   sie erhöht sich um 1, wenn die erste der weggelassenen Ziffern größer als 5 oder gleich 5 ist.
2. Die Rundung auf die gewünschte Stellenzahl ist nach Möglichkeit direkt und nicht schrittweise durchzuführen.
3. Wenn die Ergebnisse vorangegangener Rundungen berücksichtigt werden sollen und die erste der weggelassenen Ziffern eine 5 ist, so wird festgelegt:

   Die letzte stehenbleibende Ziffer ändert sich nicht, wenn die 5 durch eine Rundung nach oben entstanden ist;
   sie wird um 1 erhöht, wenn die 5 durch eine Rundung nach unten entstanden ist.

In der Literatur wird eine Ziffer 5, die durch Rundung nach oben entstanden ist, mit $\underline{5}$ bezeichnet; eine durch Rundung nach unten entstandene wird mit $\underset{\cdot}{5}$ bezeichnet. Diese Zeichen werden aber auch mit vertauschter Bedeutung verwendet. Auch das Zeichen $\bar{5}$ wird benutzt. Bei ihm ist darauf zu achten, daß es nicht mit dem Zeichen für die Periode eines Dezimalbruches verwechselt wird.

Gerundete Werte werden durch das Zeichen „$\approx$" gekennzeichnet (gelesen „angenähert gleich" oder „rund"). Wenn keine Mißverständnisse möglich sind, darf das Gleichheitszeichen geschrieben werden.

BEISPIEL

2.48. Die folgenden Zahlen sind auf die geforderte Anzahl signifikanter Ziffern zu runden:

Auf drei signifikante Ziffern $23{,}24 \approx 23{,}2$;
auf zwei signifikante Ziffern $0{,}365 \approx 0{,}37$;

auf vier signifikante Ziffern $12699{,}7 \approx 1{,}270 \cdot 10^4$;
auf zwei signifikante Ziffern $0{,}3647 \approx 0{,}36$
(eine schrittweise Rundung würde ergeben: $0{,}3647 \approx 0{,}365 \approx 0{,}37$; möglichst vermeiden, s. Regel 2);
auf zwei signifikante Ziffern
1,25 (aus 1,248 durch Rundung entstanden) $\approx 1{,}2$;
auf zwei signifikante Ziffern
1,25 (aus 1,253 durch Rundung entstanden) $\approx 1{,}3$.

Der RGW-Standard ST RGW 543-77 gilt für die Anwendung in normativ-technischen und technologischen Dokumentationen sowie in Konstruktionsunterlagen, für alle Angaben von Meß-, Zähl- und Rechenergebnissen, aber nicht für das Geld- und Finanzwesen.

Eine besonders für genäherte Zahlen vorteilhafte Zahlendarstellung ist die **halblogarithmische Form** $x = m \cdot 10^k$, wobei $m \in [1; 10)$ und $k \in G$ ist. Die Potenz 10^k ist gleich dem Stellenwert der links an erster Stelle stehenden signifikanten Ziffer.

BEISPIEL

2.49. Die folgenden Zahlen sind in halblogarithmischer Form darzustellen: 365,4; 0,00037; 12,46; 4,6.

Lösung: $365{,}4 = 3{,}654 \cdot 10^2$; $\quad 0{,}00037 = 3{,}7 \cdot 10^{-4}$;
$12{,}46 = 1{,}246 \cdot 10^1$; $\quad 4{,}6 = 4{,}6 \cdot 10^0$.

Wenn ein wahrer Wert w durch einen Näherungswert x ersetzt wird, so heißt $\varepsilon = x - w$ der **absolute Fehler** und $\frac{\varepsilon}{w}$ der **relative Fehler**. Da w meist nicht bekannt ist, wird ε durch eine positive Zahl Δx geschätzt, wobei $|\varepsilon| \leqq \Delta x$ ist. Der relative Fehler wird durch $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ geschätzt. Für den wahren Wert gilt dann (Bild 2.6):

$$x - \Delta x \leqq w \leqq x + \Delta x; \quad \text{Schreibweise: } w = x \pm \Delta x = x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Im Meßwesen (Metrologie) wird der absolute Fehler als Differenz zwischen dem Meßwert und dem Wert der Meßgröße, der relative Fehler als Verhältnis des absoluten Fehlers zum richtigen Wert der Meßgröße definiert, wobei für den richtigen Wert auch der Meßwert als Divisor eingesetzt werden darf (TGL 31550/04).

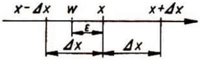


Bild 2.6

Für die Genauigkeit gerundeter Zahlen gilt: Schätzwert für den absoluten Fehler ist die Hälfte des Stellenwertes der letzten signifikanten Ziffer; Schätzwert für den relativen Fehler ist die Hälfte des Stellenwertes der letzten signifikanten Ziffer des Faktors m in der halblogarithmischen Darstellung.

BEISPIELE

2.50. Durch Rundung einer Zahl aus dem Intervall von 0,3465 bis 0,3474 entsteht $x = 0{,}347$. Die letzte signifikante Ziffer ist 7, ihr Stellenwert 10^{-3}; der Schätzwert für den absoluten Fehler ist folglich

$$\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}0005.$$

In der halblogarithmischen Form $x = 3{,}47 \cdot 10^{-1}$ hat die Ziffer 7 im Faktor $m = 3{,}47$ den Stellenwert 10^{-2}; der Schätzwert für den relativen Fehler ist folglich

$$\frac{\Delta x}{x} = 0{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

(Die Rechnung $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}347} < \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 5 \cdot 10^{-3} = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ ergibt den gleichen Wert wie den nach der Regel ermittelten.)

2.51. Für $369{,}4 = 3{,}694 \cdot 10^2$ ist $\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-1}$, $\frac{\Delta x}{x} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$;

für $0{,}03694 = 3{,}694 \cdot 10^{-2}$ ist $\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\Delta x}{x} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$;

für $36{,}9 = 3{,}69 \cdot 10^1$ ist $\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-1}$, $\frac{\Delta x}{x} = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

Aus dem letzten Beispiel folgt:

Zahlen haben die gleiche absolute Genauigkeit, wenn ihre letzten signifikanten Ziffern den gleichen Stellenwert haben;
sie haben die gleiche relative Genauigkeit, wenn sie die gleiche Anzahl signifikanter Ziffern haben.

Für Summe und Produkt zweier Werte $w_1 = x_1 \pm \Delta x_1$, $w_2 = x_2 \pm \Delta x_2$ gilt:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (x_1 \pm \Delta x_1) + (x_2 \pm \Delta x_2) \\ &= x_1 + x_2 \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \leqq x_1 + x_2 + (\Delta x_1 + \Delta x_2); \\ w_1 w_2 &= (x_1 \pm \Delta x_1)(x_2 \pm \Delta x_2) = x_1 \left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1}\right) x_2 \left(1 \pm \frac{\Delta x_2}{x_2}\right) \\ &= x_1 x_2 \left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1} \pm \frac{\Delta x_2}{x_2} \pm \frac{\Delta x_1\, \Delta x_2}{x_1 x_2}\right) \approx x_1 x_2 \left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1} \pm \frac{\Delta x_2}{x_2}\right), \end{aligned}$$

denn $\Delta x_1\, \Delta x_2 \approx 0$, da Δx_1 und Δx_2 als klein angenommen werden. Also ist $w_1 w_2 \leqq x_1 x_2 \left(1 + \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|\right)$. Für Differenz und Quotient verläuft die Rechnung entsprechend.
Ergebnis: Beim Addieren und Subtrahieren addieren sich die geschätzten absoluten Fehler, beim Multiplizieren und Dividieren die geschätzten relativen Fehler. Daraus folgt die

Regel

Beim Rechnen mit Näherungswerten wird die Genauigkeit des Ergebnisses durch den Operanden mit der geringsten Genauigkeit bestimmt. Beim Addieren und Subtrahieren können deshalb vor Ausführung der Rechnung alle Operanden so gerundet werden, daß sie die gleiche absolute Genauigkeit (den gleichen Stellenwert der letzten signifikanten Ziffer), beim Multiplizieren und Dividieren die gleiche relative Genauigkeit haben (die gleiche Anzahl signifikanter Ziffern).

Beim Benutzen eines elektronischen Taschenrechners kann das Runden der Operanden entfallen (s. aber Beispiel 2.55.).

Es ist zweckmäßig, beim Runden der Operanden eine Schutzstelle (in Indexstellung) beizubehalten, um einen möglichst geringen Genauigkeitsverlust durch sich überlagernde Rundungsfehler zu erreichen. Im Resultat fällt die Schutzstelle durch Runden weg.

BEISPIELE

2.52. $x = 47{,}3284 + 1{,}63 + 22{,}5796 + 0{,}0003$

Lösung: Wegen des Operanden 1,63 werden alle Operanden auf 2 Dezimalen (und eine Schutzstelle) gerundet.

$$\begin{array}{rl} & 47{,}32_8 \\ + & 1{,}63 \\ + & 22{,}58_0 \\ + & \underline{0{,}00_0} \\ & 71{,}53_8 \end{array} \qquad x = 71{,}54$$

Damit verringert sich der Arbeitsaufwand, wenn kein elektronischer Taschenrechner zur Verfügung steht und handschriftlich gerechnet wird. Beim Benutzen eines Taschenrechners wird die Summe ohne Runden der Operanden berechnet und wegen des Operanden 1,63 auf zwei Dezimalen gerundet:

$$x = 71{,}5383 \approx 71{,}54.$$

2.53. $x = 0{,}9397 - 0{,}9381 = 0{,}0016$

Während der absolute Fehler für die Operanden und das Resultat der gleiche ist ($\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$), erhöht sich der relative Fehler von $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ bei den Operanden auf $0{,}5 \cdot 10^{-1}$ im Resultat (also um zwei Zehnerpotenzen).

Beim Rechnen mit Näherungswerten ist also zu beachten:

Eine Differenz fast gleicher Zahlen führt zu einer starken Vergrößerung des relativen Fehlers!

2.54. $x = \dfrac{5246{,}8 \cdot 0{,}0468317}{0{,}158}$

Lösung: Wegen des Operanden 0,158 werden alle Operanden auf drei signifikante Ziffern (und eine Schutzstelle) gerundet:

$$\frac{(5{,}24_7 \cdot 10^3) \cdot (4{,}68_3 \cdot 10^{-2})}{1{,}58 \cdot 10^{-1}} = 15{,}5_5 \cdot 10^2; \; x = 1{,}56 \cdot 10^3$$

Beim Benutzen eines elektronischen Taschenrechners wird das Resultat berechnet und wegen des Operanden 0,158 auf drei signifikante Ziffern gerundet.

2.55. $x = \dfrac{0{,}00315 \cdot 17{,}4352 - 12{,}874}{24{,}3 + 184{,}3 \cdot 0{,}0213}$

Lösung: Die Genauigkeit des Resultats wird aus den Genauigkeiten der Zwischenergebnisse ermittelt.

$$x = \frac{a - b}{c + d}$$

$$a = 0{,}00315 \cdot 17{,}4352 \approx 0{,}0549_4$$

$$a - b = 0{,}054_9 - 12{,}874 \approx -12{,}819_1$$

$$d = 184{,}3 \cdot 0{,}0213 \approx 3{,}92_6$$

$$c + d = 24{,}3 + 3{,}9_3 \approx 28{,}2_3$$

$$x = \frac{-12{,}8191}{28{,}2_3} \approx -0{,}454$$

Kontrollfragen

2.15. Welche Regel ist zu beachten, wenn für eine Zahl eine zulässige Abweichung gegeben werden soll?
2.16. Welche Regeln gelten für das Runden von Zahlen, wenn die erste der weggelassenen Ziffern gleich 5 ist, bei direkter Rundung und bei Berücksichtigung vorangegangener Rundungen?
2.17. Welche Form hat die halblogarithmische Darstellung einer Zahl?
2.18. Wodurch wird beim Rechnen mit Näherungswerten die Genauigkeit des Ergebnisses bei Operationen 1. Stufe und bei Operationen 2. Stufe bestimmt?
2.19. Welche Aussage kann über den absoluten und den relativen Fehler einer Differenz fast gleicher Zahlen gemacht werden?

Aufgaben: 2.17. bis 2.22.

2.6. Rechenoperationen dritter Stufe

Die Rechenoperationen dritter Stufe sind

Potenzieren	Radizieren	Logarithmieren
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$\log_5 125 = 3$
$a^n = b$	$\sqrt[n]{b} = a$	$\log_a b = n$
a Basis n Exponent b Potenzwert	b Radikand n Wurzelexponent a Wurzelwert	b Numerus a Basis n Logarithmus

2.6.1. Potenzieren

Definition

Ein Produkt aus n gleichen Faktoren heißt **Potenz:**

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n; \quad n \in N \setminus \{0, 1\}} \tag{2.28}$$

Nach dieser Definition darf n nur eine natürliche Zahl außer 0 und 1 sein, da ein Produkt mindestens zwei Faktoren hat. Dieser Potenzbegriff wird erweitert durch die

Definitionen

$$\boxed{a^1 = a; \quad a^0 = 1 (a \neq 0); \qquad a^{-n} = \frac{1}{a_n} (a \neq 0)} \tag{2.29}$$

Damit ist a^n für alle ganzzahligen Exponenten ($n \in G$) definiert, allerdings für $n \leqq 0$ mit der Einschränkung $a \neq 0$ (denn für $a = 0$ würden die Definitionen für a^{-n} und a^0 — wegen $a^0 = a^{n-n}$ und Gl. (2.34) — auf Divisionen durch Null führen).

Sonderfälle:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 0^n = 0; \quad n \in N \setminus \{0\}; & \\ a > 0 \Rightarrow a^n > 0, \quad 1^n = 1; & \\ a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0, & (-1)^{2n} = 1; \\ a^{2n+1} < 0, & (-1)^{2n+1} = -1; \end{cases} & n \in G \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (2.30) \\ \\ (2.31) \end{array}$$

($2n$ ist das Doppelte einer ganzen Zahl, also eine gerade Zahl; folglich ist $2n + 1$ eine ungerade Zahl.)

Potenzgesetze

Addition, Subtraktion: Es gilt für Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten

$$pa^n \pm qa^n = (p \pm q)\, a^n.$$

Multiplikation, Division: Es gilt für Potenzen

mit gleicher Basis	mit gleichem Exponenten	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	(2.32) (2.33)
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	(2.34) (2.35)

Potenzieren:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m} \qquad (2.36)$$

Diese Gesetze gelten für $\{m, n\} \subset G$ und $\{a, b\} \subset P \setminus \{0\}$.
Aus den Gln. (2.29) und (2.35) folgt

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ d. h., „}a^{-1}\text{ ist das Reziproke von }a\text{“}; \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Aus Gl. (2.31) und Gl. (2.33) folgt wegen $(a - b) = -(b - a)$:

$$(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}; \quad (a - b)^{2n+1} = -(b - a)^{2n+1}.$$

Es ist $(-a)^2 = (-a)(-a) = a^2$, aber $-a^2 = (-1) \cdot a \cdot a = -a^2$.

BEISPIELE

2.56. $(ab)^{-1} = \dfrac{1}{ab}$; $\quad (a + b)^{-1} = \dfrac{1}{a + b}$; $\quad \left(\dfrac{1}{12}\right)^{-1} = 12$

2.57. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \dfrac{16}{9}$; $\quad (-7{,}58)^0 = 1$

2.58. $5(a-b)^3 + 3(b-a)^3 = 5(a-b)^3 + 3[-(a-b)]^3$
$= 5(a-b)^3 + 3(-1)^3(a-b)^3 = 2(a-b)^3$

2.59. $5(a-b)^4 + 3(b-a)^4 = 5(a-b)^4 + 3(-1)^4(a-b)^4 = 8(a-b)^4$

2.60. $(-2a^3)^4 = 16a^{12}$; $(-2a^4)^3 = -8a^{12}$; $-2(a^3)^4 = -2a^{12}$

2.61. $(-a^{-2})^3 = (-1)^3 a^{-6} = -\dfrac{1}{a^6}$; $(-a^{-3})^{-2} = a^6$;

$[(-a)^3]^{-2} = (-1)^{-6} a^{-6} = \dfrac{1}{a^6}$; $-a^{3^2} = (-1)\,a^9 = -a^9$

2.62. $$\frac{(18a^2x)^4}{(27ax^2)^5}\cdot\frac{(15ax^2)^4}{(20a^3x)^2} = \frac{18^4a^8x^4\cdot 15^4a^4x^8}{27^5a^5x^{10}\cdot 20^2a^6x^2} = \frac{(2\cdot 3^2)^4\cdot(3\cdot 5)^4\,a^8a^4x^4x^8}{(3^3)^5\cdot(2^2\cdot 5)^2\,a^5a^6x^{10}x^2}$$
$$= \frac{2^4\cdot 3^8\cdot 3^4\cdot 5^4a^{12}x^{12}}{3^{15}\cdot 2^4\cdot 5^2a^{11}x^{12}} = \frac{5^2a}{3^3} = \frac{25a}{27}$$

Jede Basis wird in Primfaktoren zerlegt.

2.63. $$\frac{u^{2n+1}v^{n+1}}{w^{3n-1}}\cdot\frac{v^{n-3}w^{3n}}{u^{2n-3}} = \frac{u^{(2n+1)-(2n-3)}v^{(n+1)+(n-3)}}{w^{(3n-1)-3n}} = \frac{u^4v^{2n-2}}{w^{-1}} = \frac{u^4v^{2n-2}w}{1} = u^4v^{2n-2}w$$

Wenn das Ergebnis keine negativen Exponenten enthalten soll, wird v^{2n-2} weiter zerlegt:
$$u^4v^{2n}v^{-2}w = \frac{u^4v^{2n}w}{v^2}$$

2.64. $$\frac{(x+y)^{n-1}}{xy^{3n+1}}\cdot\frac{x^{n+5}y^n}{(x+y)^{1-n}} = \frac{(x+y)^{n-1}\,x^{n+5}y^n}{x^1y^{3n+1}(x+y)^{1-n}} = \frac{(x+y)^{2n-2}x^{n+4}}{y^{2n+1}}$$

Für das Ergebnis ist eine Form zu wählen, bei der die Exponenten möglichst wenige Minuszeichen enthalten.

2.65. $$\frac{1}{a^{n+2}} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-3}} = \frac{1}{a^{n+2}} + \frac{1\cdot a^2}{a^n\cdot a^2} + \frac{1\cdot a^5}{a^{n-3}\cdot a^5} = \frac{1+a^2+a^5}{a^{n+2}}$$

Der Hauptnenner ist a^{n+2}, denn $n+2$ ist der größte Exponent.

2.66. $$\left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{c^{-3}d^{-4}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{(a^{-1}bd^2)^{-4}} = \frac{a^4b^2}{c^6d^8a^4b^{-4}d^{-8}} = \frac{a^0b^{2+4}}{c^6d^0} = \frac{b^6}{c^6}$$

Die Potenzgesetze sind auch auf Potenzen mit negativen Exponenten anwendbar.

Aufgaben: 2.23. und 2.24.

2.6.2. Radizieren (Wurzelziehen)

Basis a und Exponent n einer Potenz sind für $a \neq n$ i. allg. nicht vertauschbar: $a^n \neq n^a$ (Beispiel für eine Ausnahme: $2^4 = 4^2$). Deshalb hat das Potenzieren zwei Umkehroperationen. Mit der einen, dem Radizieren, läßt sich bei gegebenem Potenzwert und Exponenten die Basis berechnen (vgl. die Übersicht zu Beginn dieses Abschnitts 2.6.).

Definition

Ist b eine nichtnegative reelle Zahl und n eine natürliche Zahl außer Null, so heißt die eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl a, deren n-te Potenz b ist, die **n-te Wurzel** aus b:

$$\boxed{\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b;\quad n \in N\setminus\{0\},\quad a \geqq 0,\quad b \geqq 0} \qquad (2.37)$$

Die Bezeichnungen für b, n und a sind in der Übersicht zu Beginn dieses Abschnitts enthalten.
Bei der zweiten Wurzel (auch Quadratwurzel oder Wurzel genannt) darf der Wurzelexponent weggelassen werden: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. Die dritte Wurzel wird auch Kubikwurzel genannt.

BEISPIELE

2.67. $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{-8}$ ist nicht definiert, da $b = -8 < 0$.

2.68. $\sqrt{16} = 4$, aber nicht $\sqrt{16} = \pm 4$, denn es wird $a \geqq 0$ gefordert (obwohl $4^2 = 16$ und $(-4)^2 = 16$).

Für $n = 0$ ist die n-te Wurzel nicht definiert, denn nach Gl. (2.37) müßte gelten $\sqrt[0]{b} = a \Leftrightarrow a^0 = b$. Diese Potenzgleichung ist aber nur für $b = 1$ und beliebiges a erfüllt. Folglich ist $\sqrt[0]{b}$ für $b \neq 1$ nicht und für $b = 1$ nicht eindeutig bestimmbar.
Aus Gl. (2.37) folgt

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b; \quad \sqrt[n]{a^n} = a} \qquad (2.38); (2.39)$$

Sonderfälle:

$$\boxed{\sqrt[n]{0} = 0; \quad \sqrt[n]{1} = 1; \quad \sqrt[1]{a} = a,} \qquad (2.40)$$

denn $\quad 0^n = 0; \quad 1^n = 1; \quad a^1 = a$.

In Gl. (2.39) wird für einen geraden Exponenten der Radikand auch für $a < 0$ positiv (vgl. Gl. (2.31)). Folglich läßt sich die Wurzel ziehen. Da in Gl. (2.37) aber $a \geqq 0$ gefordert wird, gilt

$$\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad a \in P} \qquad (2.41)$$

BEISPIELE

2.69. Die Gleichung $x^2 = 16$ ist nach x aufzulösen.

Lösung: Auf beiden Seiten der Gleichung wird die (zweite) Wurzel gezogen.

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$
$|x| = 4$ vgl. Gl. (2.41)
$x = \pm 4$ vgl. (2.14a).

2.70. Die Gleichung $x^3 = -8$ ist nach x aufzulösen.

Lösung: Wegen $-8 < 0$ ist $\sqrt[3]{-8}$ nicht definiert. Aus $-8 < 0$ und dem ungeraden Exponenten 3 folgt aber nach (2.31) $x < 0$, also $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Mit Hilfe des Wurzelbegriffs läßt sich der Potenzbegriff auf beliebige rationale Exponenten erweitern: Für eine Potenz a^x ist x so zu bestimmen, daß $(a^x)^n = a$ ist. Wenn x existiert und Gesetz (2.36) anwendbar ist, so folgt $a^{nx} = a$, $nx = 1$, $x = \frac{1}{n}$. Aus dem

Vergleich mit Gl. (2.38) folgt, daß es sinnvoll ist,
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ zu definieren. Das Potenzieren beider Ausdrücke mit m (bei Anwendung der Gl. (2.36)) führt zu der

Definition

Die Potenz einer positiven reellen Zahl a mit dem rationalen Exponenten $\frac{m}{n}$ wird definiert durch

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}. \quad \text{Für } m = 1 \text{ gilt:} \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}} \qquad (2.42)\ (2.43)$$

(Für $\frac{m}{n} > 0$ bzw. $n > 0$ gelten diese Beziehungen auch für $a \doteq 0$.)

BEISPIELE

2.71. Es ist

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad u^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{u^3}, \quad b^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{b}}$$

2.72. Es ist

$$\sqrt[6]{x^3} = x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Der Potenzbegriff läßt sich auch auf beliebige reelle Exponenten erweitern, indem diese durch rationale Zahlen angenähert werden. Das kann mit beliebiger Genauigkeit geschehen,

$$\text{z. B. ist } a^{\sqrt{2}} \approx a^{1,4} = a^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{a^{14}} \quad \text{oder} \quad a^{\sqrt{2}} \approx a^{1,41} = \sqrt[100]{a^{141}} \quad \text{usw.}$$

Es läßt sich beweisen, daß alle Potenzgesetze (bei positiver Basis) auch für Potenzen mit rationalen oder reellen Exponenten gelten.

Wurzelgesetze

Sie sind wegen Gl. (2.43) Sonderfälle der Potenzgesetze.
Addition, Subtraktion: Es gilt für Wurzeln mit gleichem Radikanden und gleichem Wurzelexponenten $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$.
Multiplikation, Division: Es gilt für Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten (gleichnamige Wurzeln)

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \qquad (2.44);\ (2.45)$$

Demnach können Produkte und Quotienten gleichnamiger Wurzeln zusammengefaßt werden, und umgekehrt lassen sich Wurzeln aus Produkten und Quotienten zerlegen. Zu beachten ist, daß ein Zusammenfassen oder Zerlegen von Summen und Differenzen nicht möglich ist.

Radizieren:

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} \tag{2.46}$$

Aus den Gln. (2.45) und (2.40) für $a = 1$ und den Gln. (2.44) und (2.39) folgen

$$\frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}; \quad \sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}.$$

Wegen Gl. (2.42) läßt sich jede Rechnung mit Wurzeln auch als Rechnung mit Potenzen durchführen.

BEISPIELE

2.73. $\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{a^{n+6}}}{\sqrt[n]{a^4}} = \sqrt[n]{\dfrac{a^{n-2}a^{n+6}}{a^4}} = \sqrt[n]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{n}} = a^2$

2.74. $a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^4}; \; \sqrt[4]{x^{15}} = \sqrt[4]{x^{12}} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^3\sqrt[4]{x^3}$

2.75. $\sqrt[3]{12a^2b} \cdot \sqrt[3]{90a^2b^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3a^2b \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5a^2b^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5a^3ab^3} = 2 \cdot 3ab\sqrt[3]{5a} = 6ab\sqrt[3]{5a}$

2.76. $5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{98} = 5\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 2\sqrt{49 \cdot 2} = 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 14\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{3} + 14\sqrt{2}$

2.77. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b;$
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$

2.78. $\sqrt[4]{144} = \sqrt{\sqrt{144}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}; \quad \sqrt[6]{a} = \sqrt[2\cdot 3]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$

2.79. $\dfrac{\sqrt{u} \cdot \sqrt[3]{u^2} \cdot \sqrt[10]{u}}{\sqrt[5]{u^3}} = \dfrac{u^{\frac{1}{2}}u^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{10}}}{u^{\frac{3}{5}}} = u^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}-\frac{3}{5}} = u^{\frac{20}{30}} = u^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{u^2}$

oder: $\ldots = \sqrt[30]{\dfrac{u^{15} \cdot u^{20} \cdot u^3}{u^{18}}} = \sqrt[30]{u^{20}} = \sqrt[3]{u^2}$

2.80. $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$

oder: $\ldots = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[12]{a^5}$

2.81. Nach Gl. (2.37) ist $\sqrt[n]{b} = a$ nur definiert, wenn die Bedingungen $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ erfüllt sind. Die folgende Rechnung zeigt, daß sich Widersprüche ergeben, wenn diese Bedingungen nicht beachtet werden. Dann wäre nämlich z. B.

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2,$$

also $-2 = 2$, und das ist eine falsche Aussage.

Wenn der Nenner eines Bruches einen Wurzelausdruck enthält, ist es mitunter zweckmäßig, durch Erweitern den Nenner von dem Wurzelausdruck zu befreien: **Rationalmachen des Nenners.**

BEISPIELE

2.82. $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$

2.83. $\frac{a}{\sqrt[4]{a}} = \frac{a \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}} = \frac{a\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4}} = \frac{a\sqrt[4]{a^3}}{a} = \sqrt[4]{a^3}$

2.84. $\frac{10}{\sqrt{50}} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{25 \cdot 2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \sqrt{2}$

Steht im Nenner ein Binom, so ist beim Erweitern die Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ anzuwenden.

BEISPIELE

2.85. $\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a \cdot (b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c}) \cdot (b - \sqrt{c})} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - c}$

2.86. $\frac{10\sqrt{2} - 2\sqrt{30}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} = \frac{(10\sqrt{2} - 2\sqrt{30}) \cdot (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})}$

$$= \frac{50\sqrt{6} - 10\sqrt{90} + 30\sqrt{10} - 6\sqrt{150}}{25(\sqrt{3})^2 - 9(\sqrt{5})^2} = \frac{50\sqrt{6} - 30\sqrt{10} + 30\sqrt{10} - 30\sqrt{6}}{30}$$

$$= \frac{20\sqrt{6}}{30} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Beim **Schätzen von Wurzelwerten** ist der Radikand in zwei Faktoren zu zerlegen, von denen der eine eine Zehnerpotenz ist, die sich radizieren läßt.

BEISPIELE

2.87. $\sqrt{3420{,}6} \approx \sqrt{34 \cdot 10^2} \approx \sqrt{36 \cdot 10^2} = 6 \cdot 10 = 60$

2.88. $\sqrt{0{,}000342} \approx \sqrt{3 \cdot 10^{-4}} \approx \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-2} = 0{,}02$

2.89. $\sqrt[3]{0{,}00008} \approx \sqrt[3]{80 \cdot 10^{-6}} \approx \sqrt[3]{64 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^{-2} = 0{,}04$

Wenn eine Formel einen Potenz- oder Wurzelausdruck enthält, und sie soll nach der Basis des Potenzausdrucks oder dem Radikanden des Wurzelausdrucks aufgelöst werden, so ist bei dieser **Formelumstellung** zu beachten, daß der Potenz- oder Wurzelausdruck zunächst zu isolieren ist, d. h., es sind alle bei diesem Ausdruck stehenden Summanden und Faktoren zu beseitigen, und anschließend ist die Äquivalenz (2.37) anzuwenden.

BEISPIELE

2.90. Für das Flächenträgheitsmoment eines Kreisringes gilt $I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$. Die Formel ist nach D umzustellen.

Lösung: Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit $\frac{64}{\pi}$ und Addition von d^4 wird D^4 isoliert:

$$\frac{64I}{\pi} = D^4 - d^4 \qquad \frac{64I}{\pi} + d^4 = D^4.$$

Radizieren ergibt

$$D = \sqrt[4]{\frac{64I}{\pi} + d^4}.$$

2.91. In der Technischen Wärmelehre gilt bei allgemeiner Zustandsänderung (Polytrope) eines Gases $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$. Die Formel ist nach V_1 umzustellen.

Lösung: Auf beiden Seiten wird der reziproke Wert gebildet:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}$$

Radizieren (d. h. Potenzieren mit $\frac{1}{n-1}$) ergibt

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{n-1}{n-1}} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$V_1 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

2.92. Im Fachgebiet Wasserwirtschaft gilt für die Wasserdruckkraft $W = \sqrt{H^2 + (V_1 - V_2)^2}$ Die Formel ist nach V_2 umzustellen (es sei $V_1 > V_2$).

Lösung: Quadrieren beider Seiten der Gleichung ergibt

$$W^2 = H^2 + (V_1 - V_2)^2$$

$$W^2 - H^2 = (V_1 - V_2)^2$$

$$\sqrt{W^2 - H^2} = |V_1 - V_2| = V_1 - V_2 \quad \text{(da } V_1 - V_2 > 0 \text{ nach Voraussetzung)},$$

$$V_2 = V_1 - \sqrt{W^2 - H^2}.$$

2.93. Für die mittlere Fließgeschwindigkeit des Wassers in offenen Gerinnen gilt

$$v = kR^{\frac{2}{3}}J^{\frac{1}{2}}$$

Die Formel ist nach R umzustellen.

Lösung:

$$\frac{v}{kJ^{\frac{1}{2}}} = R^{\frac{2}{3}}$$

Potenzieren mit dem Exponenten $\frac{3}{2}$ (wegen $\left(R^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = R$) ergibt

$$R = \left(\frac{v}{kJ^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{v}{k\sqrt{J}}\right)^3}.$$

Aufgaben: 2.25. bis 2.29.

2.6.3. Logarithmieren

Die zweite Umkehroperation des Potenzierens ist das Logarithmieren, mit dem sich bei gegebenem Potenzwert und gegebener Basis der Exponent berechnen läßt (vgl. die Übersicht zu Beginn dieses Abschnitts).

Definition

Ist a eine positive reelle Zahl außer 1 und b eine positive reelle Zahl, so heißt die eindeutig bestimmte reelle Zahl n, für die $a^n = b$ gilt, der **Logarithmus** von b zur Basis a:

$$\boxed{\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b; \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0} \tag{2.47}$$

Die Bezeichnungen für a, b und n sind in der Übersicht zu Beginn dieses Abschnitts enthalten.

BEISPIELE

2.94. Es ist $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$; $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$; $5^{-3} = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$; $\sqrt{49} = 49^{\frac{1}{2}} = 7 \Leftrightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$.

2.95. In der folgenden Tabelle sind einige Logarithmen zur Basis 2 zusammengestellt:

x	$0{,}125 = \frac{1}{8}$	$0{,}25 = \frac{1}{4}$	$0{,}5 = \frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Aus Beispiel 2.95. folgt durch Verallgemeinerung:
Der Logarithmus eines echten Dezimalbruchs ist eine negative Zahl.
Logarithmen zur Basis 1 sind nicht definiert, denn wegen Formel (2.47) müßten es Lösungen n der Gleichung $1^n = b$ sein. Diese ist aber für $b \neq 1$ nicht lösbar, und für $b = 1$ ist jede reelle Zahl n Lösung.
Aus Formel (2.47) folgt

$$\boxed{\log_a (a^n) = n; \quad a^{\log_a b} = b} \qquad (2.48); (2.49)$$

Sonderfälle:

$$\boxed{\log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0}, \tag{2.50}$$

denn $a^1 = a$; $a^0 = 1$.

Der Logarithmus ist nur für positive Numeri definiert (Bedingung $b > 0$ in Formel (2.47)), denn wegen $a > 0$ ist auch $b = a^n > 0$ (vgl. Beispiel 2.95.). Folglich ist auch der Logarithmus von der Zahl Null nicht definiert.

Logarithmengesetze

Aus den Potenzgesetzen (2.32), (2.34) und (2.36) für Potenzen mit gleicher Basis lassen sich Gesetze herleiten, die für Logarithmen mit gleicher Basis gelten.
Aus $a^m = b \Leftrightarrow \log_a b = m$ und $a^n = c \Leftrightarrow \log_a c = n$ läßt sich bilden
$a^{m+n} = b \cdot c \Leftrightarrow \log_a (b \cdot c) = m + n$, also $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Die anderen Gesetze lassen sich entsprechend herleiten.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c; & \log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \\[2ex] \log_a(b^n) = n \cdot \log_a b; & \log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b \end{array}} \qquad \begin{array}{l} (2.51);\ (2.52) \\[2ex] (2.53);\ (2.54) \end{array}$$

Wegen $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ folgt Gl. (2.54) aus Gl. (2.53).

BEISPIELE

2.96. $\log_a \dfrac{p^3 q}{r^2 s} = (\log_a p^3 + \log_a q) - (\log_a r^2 + \log_a s)$

$= 3 \log_a p + \log_a q - 2 \log_a r - \log_a s$

2.97. $\log_m \sqrt[3]{\dfrac{1}{m^2 n}} = \dfrac{1}{3} (\log_m 1 - 2 \log_m m - \log_m n) = \dfrac{1}{3} (0 - 2 \cdot 1 - \log_m n)$

$= -\dfrac{1}{3} (2 + \log_m n)$

2.98. $\log_a \dfrac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c = -\log_a c$

2.99. $\log_a (rs)^2 = 2(\log_a r + \log_a s)$; $\log_a (r + s)^2 = 2 \log_a (r + s)$; $\log_a (r^2 + s^2)$ läßt sich nicht umformen.

2.100. $\dfrac{1}{2} (3 \log_c x - 2 \log_c y) = \dfrac{1}{2} (\log_c x^3 - \log_c y^2) = \dfrac{1}{2} \log_c \left(\dfrac{x^3}{y^2}\right) = \log_c \sqrt{\dfrac{x^3}{y^2}}$

2.101. $\log_a r + \log_b s$ läßt sich nach Gln. (2.51) bis (2.54) nicht umformen, da die Logarithmen verschiedene Basen haben.

Logarithmensysteme

Ein Logarithmensystem ist die Menge aller Logarithmen zur gleichen Basis. Die wichtigsten Systeme sind die Systeme der dekadischen und der natürlichen Logarithmen. Die **dekadischen** (oder **Zehner-**)**Logarithmen** sind Logarithmen zur Basis 10:

$$\boxed{\log_{10} x = \lg x} \quad \text{(gelesen „l-g-}x\text{“).} \qquad (2.55)$$

Die Basis der **natürlichen Logarithmen** ist eine irrationale Zahl, die mit e bezeichnet wird:

$$\boxed{\log_e x = \ln x;\ \mathrm{e} = 2{,}718281828459\ldots} \qquad (2.56)$$

(gelesen „Logarithmus naturalis x“ oder kürzer „l-n-x“).
Sie werden in der Mathematik und ihren Anwendungen häufiger als die dekadischen Logarithmen verwendet. Es gilt

$$\boxed{\lg x = y \Leftrightarrow x = 10^y} \qquad \boxed{\ln x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y}. \qquad (2.57)\ (2.58)$$

Für Potenzen mit der Basis e darf geschrieben werden:

$$\boxed{e^y = \exp y}. \tag{2.59}$$

Diese Schreibweise ist platzsparend und wird besonders dann benutzt, wenn der Exponent ein zusammengesetzter Ausdruck ist. Dekadische und natürliche Logarithmen können mit einem elektronischen Taschenrechner (der die Funktionstasten „lg" — auch „log" — und „ln" besitzen muß) oder mit einer Tafel berechnet werden. Wenn eine Tafel verwendet wird, so sind die dekadischen Logarithmen in einer Form darzustellen, die aus der im vorigen Abschnitt eingeführten halblogarithmischen Form des Numerus

$x = m \cdot 10^k$, $m \in [1, 10)$, $k \in G$ folgt

(Beispiele: $815 = 8{,}15 \cdot 10^2$, $m = 8{,}15$, $k = 2$;

$0{,}00815 = 8{,}15 \cdot 10^{-3}$, $m = 8{,}15$, $k = -3$).

Durch Logarithmieren ergibt sich $\lg x = \lg m + k \cdot \lg 10 = \lg m + k$ (denn $\lg 10 = 1$), und wegen $1 \leqq m < 10$ ist $\lg 1 \leqq \lg m < \lg 10$, d. h., $0 \leqq \lg m < 1$. Der Term $\lg m$ ist demnach ein echter Dezimalbruch.

> Der dekadische Logarithmus einer jeden positiven reellen Zahl x (Numerus) läßt sich in der Form darstellen: $\lg x = \lg m + k$;
> $\lg m$ heißt **Mantisse** und ist ein echter Dezimalbruch,
> k heißt **Kennzahl** und ist eine ganze Zahl.

Numeri mit der gleichen Folge signifikanter Ziffern (z. B. 815; 0,00815) haben Logarithmen mit der gleichen Mantisse ($\lg m = \lg 8{,}15$). Die Mantissen sind i. allg. irrationale Zahlen und können einer Mantissentafel entnommen werden, wobei zu beachten ist, daß die Zahlenangaben die (meist auf 4 oder 5 Stellen) gerundeten Dezimalen (d. h. die hinter dem Komma stehenden Grundziffern) sind. Es ist also noch 0,... voranzusetzen.

Die Kennzahl k ergibt sich aus der Darstellung des Numerus x in der halblogarithmischen Form als Exponent der Zehnerpotenz. Formal ist k gleich der Anzahl der Stellen, um die das Komma zu verschieben ist, wenn x in den Faktor m der halblogarithmischen Darstellung umgeformt wird.

BEISPIELE

2.102. Die folgende Tabelle enthält vierstellige dekadische Logarithmen zu Numeri mit der gleichen Folge signifikanter Ziffern:

Numerus x	k	Mantisse $\lg m$	$\lg x$
$815 = 8{,}15 \cdot 10^2$	2	$\lg 8{,}15 = 0{,}9112$	$0{,}9112 + 2 = 2{,}9112$
$8{,}15 = 8{,}15 \cdot 10^0$	0	$\lg 8{,}15 = 0{,}9112$	$0{,}9112 + 0 = 0{,}9112$
$0{,}00815 = 8{,}15 \cdot 10^{-3}$	-3	$\lg 8{,}15 = 0{,}9112$	$0{,}9112 - 3 = -2{,}0888$

Mit einem elektronischen Taschenrechner ergibt sich $\lg x$ unmittelbar durch Eingabe von x und Drücken der Taste „lg" (auch „log"). Beim Verwenden einer Tafel wird $\lg m$ der Tafel entnommen und k aus der halblogarithmischen Form von x bestimmt.

2.103. Der Schallintensitätspegel L_J (in Dezibel: dB) zweier Schallintensitäten J, J_0 (in Watt je Quadratmeter: W m^{-2}) ist definiert durch $L_J = 10 \cdot \lg \frac{J}{J_0}$.

Für $J_0 = 10^{-12}$ W m^{-2} (Schwellenwert: gerade noch wahrnehmbare Schallintensität eines Tones mit der Frequenz 1000 Hz) und $J = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ W m^{-2} ist L_J zu berechnen.

Lösung: $L_J = 10\ \mathrm{dB} \cdot \lg \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W\,m^{-2}}}{10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}}$

$= 10\ \mathrm{dB} \cdot \lg (1{,}6 \cdot 10^{8})$

$= 10 \cdot 8{,}204\ \mathrm{dB} \approx 82\ \mathrm{dB}$

Dieser Schallintensitätspegel entspricht einem sehr starken Lärm.

Wenn der dekadische Logarithmus $\lg x = y$ gegeben ist und der Numerus x ermittelt werden soll, so kann er entweder mit einem elektronischen Taschenrechner nach Gl. (2.57) oder mit einer Mantissentafel aus der Form $\lg x = \lg m + k$ berechnet werden.

BEISPIEL

2.104. Aus $\lg x_1 = 4{,}8541$; $\lg x_2 = -2{,}1287$ sind die Numeri x_1, x_2 zu ermitteln (Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung:

Mit Taschenrechner (Taste „10^x"):

$x_1 = 10^{4{,}8541} = 7{,}15 \cdot 10^4$; $x_2 = 10^{-2{,}1287} = 7{,}44 \cdot 10^{-3}$.

Mit Mantissentafel:

$\lg x_1 = 4{,}8541 = 0{,}8541 + 4$; Mantisse $\lg m_1 = 0{,}8541$, Kennzahl $k_1 = 4$.

In der (vierstelligen) Tafel ist 0,8543 die Mantisse mit dem kleinsten Differenzbetrag zu $\lg m_1$. Aus dem zugehörigen Numerus 7,15 und $k_1 = 4$ ergibt sich $x_1 = 7{,}15 \cdot 10^4$.

Bei $\lg x_2$ sind die Zahlen 3 und -3 zu addieren, um die Form $\lg m + k$ zu erhalten:

$\log x_2 = (-2{,}1287 + 3) - 3 = 0{,}8713 - 3$; $\lg m_2 = 0{,}8713$, $k_2 = -3$. Die Mantissen 0,8710 und 0,8716 der Tafel haben zu $\lg m_2$ den gleichen Differenzbetrag. Als zugehöriger Numerus wird $7{,}435 \approx 7{,}44$ abgelesen, somit ergibt sich $x_2 = 7{,}44 \cdot 10^{-3}$.

Beim Ermitteln natürlicher Logarithmen mit Hilfe von Tafeln sind die folgenden Hinweise zu beachten:

1. Die Tafeln enthalten meist nur Logarithmen für Numeri, die natürliche Zahlen sind. Numeri, die nicht in den Tafeln enthalten sind, müssen umgeformt werden, z. B. gebrochene Zahlen in Quotienten natürlicher Zahlen. Eine Interpolation wird wegen der auftretenden großen Tafeldifferenzen nicht empfohlen.
2. Bei vielen Tafeln ist die Einerstelle des Numerus in der Eingangszeile und die anderen Stellen sind in der Eingangsspalte angeordnet.
3. Der natürliche Logarithmus läßt sich nicht wie der dekadische Logarithmus als eine Summe aus Mantisse und Kennzahl darstellen. Beide Begriffe sind für den natürlichen Logarithmus nicht definiert. Numeri mit der gleichen Folge signifikanter Ziffern haben natürliche Logarithmen, die weder völlig noch teilweise übereinstimmen.

BEISPIELE

2.105. Mit Hilfe einer Tafel sind ln 132; ln 1,32; ln 0,0132 und ln 13200 zu ermitteln (Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung: Es ist $\ln 132 = \ln (13 - 2) = 4{,}88$
(im Schnittpunkt der beiden Reihen mit den Zahlen 13 in der Eingangsspalte und 2 in der Eingangszeile);

$$\ln 1{,}32 = \ln \frac{132}{100} = \ln 132 - \ln 100$$
$$= 4{,}8828 - 4{,}6052 \approx 0{,}278;$$

$$\ln 0{,}0132 = \ln \frac{132}{10000} = 4{,}8828 - 9{,}2103 \approx -4{,}33$$

(wenn $\ln 10000 = 9{,}2103$ nicht in der Tafel enthalten ist, wird 10000 in Faktoren zerlegt, z. B.

$\ln 10000 = \ln (100 \cdot 100) = \ln 100 + \ln 100$);
$\ln 13200 = \ln (132 \cdot 100) = 4{,}8828 + 4{,}6052 \approx 9{,}49$.

2.106. Bei isothermer Zustandsänderung eines Gases (d. h. bei konstanter Temperatur) gilt für die Energie
$W_{12} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$. Welche Energie ist zuzuführen, wenn ein Gas mit dem Anfangsdruck $p_1 = 620$ kPa von $V_1 = 1{,}8\ \mathrm{m}^3$ Volumen auf $V_2 = 1{,}3\ \mathrm{m}^3$ Volumen komprimiert werden soll ($1\ \mathrm{kPa} = 10^3\ \mathrm{N\ m}^{-2}$)?

Lösung: $W_{12} = -620\ \mathrm{kPa} \cdot 1{,}8\ \mathrm{m}^3 \cdot \ln \frac{1{,}3\ \mathrm{m}^3}{1{,}8\ \mathrm{m}^3}$
$= -1116\ \mathrm{kJ} \cdot \ln 0{,}722$
$= -1116\ \mathrm{kJ} \cdot (-0{,}325) = 363\ \mathrm{kJ}$

Es sind $W_{12} = 363$ kJ zuzuführen.

(Das Logarithmieren des echten Dezimalbruchs kann durch die Umformung $\ln \frac{V_2}{V_1} = -\ln \frac{V_1}{V_2}$ (vgl. Beispiel 2.98.) umgangen werden: $W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$.)

Wenn der natürliche Logarithmus $\ln x = y$ gegeben ist und der Numerus x ermittelt werden soll, so ist nach Gl. (2.58) entweder ein elektronischer Taschenrechner (Taste „e^x") oder eine Tafel für die Exponentialfunktionen e^x, e^{-x} zu benutzen. Der Numerus kann auch mit Hilfe dekadischer Logarithmen berechnet werden (vgl. Beispiel 2.111.).

BEISPIEL

2.107. Aus $\ln x_1 = 4{,}88$; $\ln x_2 = -4{,}33$ sind die Numeri x_1, x_2 zu ermitteln (Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung: Es ist $x_1 = e^{4{,}88} \approx 132$; $x_2 = e^{-4{,}33} \approx 0{,}0132$. Wenn eine Tafel benutzt wird, in der diese Potenzwerte nicht enthalten sind, so kann der Exponent in Summanden zerlegt werden, deren Potenzwerte aus der Tafel abgelesen werden können, z. B.

$$e^{4{,}88} = e^{4{,}80+0{,}08} = e^{4{,}80} \cdot e^{0{,}08} = 121{,}51 \cdot 1{,}0833 \approx 132.$$

Logarithmen zu einer beliebigen positiven Basis b ($b \neq 1$) lassen sich aus dekadischen oder natürlichen Logarithmen berechnen. Die **Umrechnungsformeln** folgen aus einer allgemeinen Beziehung, die zwischen den zu zwei verschiedenen Basen a und b gebildeten Logarithmen desselben Numerus besteht:

Aus $\log_a x = u \Leftrightarrow a^u = x$ und $\log_b x = v \Leftrightarrow b^v = x$ folgt

$$a^u = b^v,$$

und durch Logarithmieren zur Basis a

$$
\begin{aligned}
u \cdot \log_a a &= v \cdot \log_a b \\
u &= v \cdot \log_a b \text{ wegen Gl. (2.50)} \\
\log_a x &= \log_b x \cdot \log_a b.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die zu den beiden Basen a und b gebildeten Logarithmen einander proportional sind. Der Proportionalitätsfaktor ist $\log_a b$. Nach $\log_b x$ aufgelöst, ergibt sich

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}} \tag{2.60}$$

speziell für $a = \mathrm{e}$

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = M_b \cdot \ln x} \tag{2.61}$$

$M_b = \dfrac{1}{\ln b}$ heißt **Modul** des Logarithmensystems zur Basis b;

für $a = 10$ $$\boxed{\log_b x = \frac{\lg x}{\lg b}} \tag{2.62}$$

Eine Umrechnungsformel für dekadische in natürliche Logarithmen und umgekehrt folgt aus Gl. (2.61) für $b = 10$:

$$\boxed{\lg x = \mathrm{M}_{10} \cdot \ln x}, \qquad \mathrm{M}_{10} = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343. \tag{2.63}$$

Aus Gl. (2.60) folgt für $x = a$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \tag{2.60a}$$

und aus Gl. (2.63) für $x = \mathrm{e}$

$$\mathrm{M}_{10} = \lg \mathrm{e} \approx 0{,}4343. \tag{2.63a}$$

BEISPIELE

2.108. Die Formel $D = 10 \lg \dfrac{J_1}{J_2}$ für die Dämmzahl (Schwächung des Schalls beim Durchlaufen einer Wand) ist mit natürlichen Logarithmen zu schreiben.

Lösung:

Nach Gl. (2.63) ist $D = 10\,\mathrm{M}_{10} \ln \dfrac{J_1}{J_2} = 4{,}343 \ln \dfrac{J_1}{J_2}$.

2.109. Es ist eine Formel für die Berechnung von Binärlogarithmen $\mathrm{lb}\, x = \log_2 x$ herzuleiten und mit ihr sind lb 12 und lb 0,0625 zu berechnen (Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung: Aus Gl. (2.61) folgt für $b = 2$

$$\text{lb}\, x = M_2 \ln x; \quad M_2 = \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{0{,}6931} = 1{,}443$$
$$\text{lb}\, x = 1{,}443 \ln x.$$

Daraus folgt

$$\text{lb}\, 12 = 1{,}443 \ln 12 = 1{,}443 \cdot 2{,}485 = 3{,}59$$
$$\text{lb}\, 0{,}0625 = 1{,}443 \ln 0{,}0625 = 1{,}443 \cdot (-2{,}773) = -4{,}00$$

(wegen $0{,}0625 = \frac{1}{16} = 2^{-4}$ folgt kürzer $\text{lb}\,(2^{-4}) = -4$).

Dekadische und natürliche Logarithmen sind Hilfsmittel für numerische Rechnungen. Mit ihnen lassen sich Rechenoperationen zweiter und dritter Stufe nach folgender Vorschrift ausführen:
Die um eine Stufe reduzierten Operationen werden auf die Logarithmen der Operanden angewandt und ergeben den Logarithmus des Resultats. Für diesen wird der zugehörige Numerus ermittelt.

BEISPIELE

2.110. $x = \frac{3{,}64 \cdot 10^3}{0{,}0625}$ ist logarithmisch zu berechnen

(Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung: Nach Gl. (2.52) ist

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg (3{,}64 \cdot 10^3) - \lg 0{,}0625 \\ &= 3{,}5611 - (-1{,}2041) \quad \text{(vgl. Beispiel 2.102.)} \\ &= 4{,}7652 \ (\lg m = 0{,}7652;\ k = 4) \end{aligned}$$
$$x = 5{,}82 \cdot 10^4$$

2.111. $x = e^{-7{,}1560}$ ist logarithmisch zu berechnen
(Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung: Nach Gl. (2.53) und (2.63a) ist

$$\lg x = -7{,}1560 \cdot \lg e = -7{,}1560 \cdot 0{,}4343 = -3{,}1079$$

(beim Rechnen mit 4 Dezimalen ist nach dem Multiplizieren wieder auf 4 Dezimalen zu runden)

$$\lg x = (-3{,}1079 + 4) - 4 = 0{,}8921 - 4;$$
$$x = 7{,}80 \cdot 10^{-4}$$

2.112. $x = 0{,}00625^{1{,}41}$ ist logarithmisch zu berechnen
(Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung: Nach Gl. (2.53) ist

$$\lg x = 1{,}41 \cdot \lg 0{,}00625 = 1{,}41 \cdot (-2{,}2041) = -3{,}1078$$
$$x = 7{,}80 \cdot 10^{-4} \text{ (vgl. Beispiel 2.111.)}$$

Mit natürlichen Logarithmen verläuft die Rechnung entsprechend:

$$\ln x = 1{,}41 \cdot \ln 0{,}00625 = 1{,}41 \cdot (-5{,}0752) = -7{,}1560$$
$$x = \exp(-7{,}1560) = 7{,}80 \cdot 10^{-4} \text{ (vgl. Beispiel 2.111.).}$$

2.113. $x = \sqrt[5]{62{,}5}$ ist logarithmisch zu berechnen (Genauigkeit: 3 signifikante Ziffern).

Lösung: Nach Gl. (2.54) ist

$$\lg x = \frac{1}{5} \lg 62{,}5 = \frac{1}{5} \cdot 1{,}7959 = \mathbf{0{,}3592}$$

$$\mathbf{x = 2{,}29 \cdot 10^0 = 2{,}29}$$

Mit einem elektronischen Taschenrechner können Potenz- und Wurzelwerte nach verschiedenen Verfahren berechnet werden:

1. direkt mit der Taste „y^x" oder „$\sqrt[x]{y}$";
2. Potenzwerte x^n mit ganzzahligen Exponenten durch mehrfache Multiplikation und (bei negativen Exponenten) mit der Taste „$\frac{1}{x}$";
3. Wurzelwerte wegen $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ mit der Taste „y^x";
4. logarithmisch wie in den Beispielen 2.111. bis 2.113. mit den Tasten „lg" (auch „log") und „10^x" oder mit den Tasten „ln" und „e^x".

Die Wahl des Verfahrens wird durch den Typ des Taschenrechners beeinflußt, der die benötigten Funktionstasten besitzen muß.
Wenn eine Formel mit einem Potenz- oder Logarithmenausdruck nach dem Exponenten der Potenz oder dem Numerus des Logarithmus aufgelöst werden soll, so ist bei dieser **Formelumstellung** der Ausdruck zunächst zu isolieren, und anschließend ist eine der Äquivalenzen (2.47), (2.57) oder (2.58) anzuwenden.

BEISPIELE

2.114. In der Elektrotechnik gilt für den Abschaltvorgang $i = I \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Die Formel ist nach t umzustellen.

Lösung: Zunächst wird die Potenz isoliert

$$\frac{i}{I} = e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \text{nach Gl. (2.58) folgt}$$

$$\ln \frac{i}{I} = -\frac{t}{\tau}$$

$$t = -\tau \ln \frac{i}{I} = \tau \ln \frac{I}{i} \quad \text{(vgl. Beispiel 2.98.).}$$

2.115. In der Elektrotechnik läßt sich der Selbstinduktionskoeffizient einer Leiterschleife nach $L = l\left(1 + 9{,}2 \lg \frac{s}{r}\right) \cdot 10^{-9}$ berechnen. Die Formel ist nach s umzustellen.

Lösung: Zunächst wird $\lg \frac{s}{r}$ isoliert

$$10^9 L = l + 9{,}2l \cdot \lg \frac{s}{r}$$

$$\frac{10^9 L - l}{9{,}2l} = \lg \frac{s}{r}; \quad \text{nach Gl. (2.57) folgt}$$

$$\frac{s}{r} = 10^{\frac{10^9 L - l}{9{,}2l}} \qquad s = r\, 10^{\frac{10^9 L - l}{9{,}2l}}.$$

Soll die Basis 10 durch die Basis e ersetzt werden, so ist nach Gl. (2.63) zu schreiben

$$\frac{10^9L - l}{9{,}2l} = \mathrm{M}_{10} \ln \frac{s}{r}$$

$$\ln \frac{s}{r} = \frac{10^9L - l}{9{,}2\mathrm{M}_{10}l} \approx \frac{10^9L - l}{4{,}0l}$$

$$= r \exp\left(\frac{10^9L - l}{4{,}0l}\right).$$

Kontrollfragen

2.20. Wie heißen die Rechenoperationen 3. Stufe, und wie werden a, b und n bei diesen Operationen bezeichnet?
2.21. Wie läßt sich der reziproke Wert von a als Potenz schreiben?
2.22. Welches Vorzeichen hat der Wert einer Potenz mit negativer Basis und ganzzahligem Exponenten?
2.23. Für welche unterschiedlichen Teilmengen der reellen Zahlen x sind $\sqrt[n]{x}$ bzw. $\log_a x$ definiert?
2.24. Welchen Wert hat der Logarithmus der Zahl 1, und in welchem Bereich liegt der Logarithmus eines echten Dezimalbruchs?
2.25. In welchem Bereich liegt die Mantisse eines dekadischen Logarithmus, und wie wird die Kennzahl ermittelt?

Aufgaben: 2.30. bis 2.35.

2.6.4. Der binomische Lehrsatz

Es werden zunächst zwei Zeichen erklärt, die in der Mathematik häufig vorkommen, u. a. auch im binomischen Lehrsatz.

Definition

Das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ($n > 1$) wird mit $n!$ bezeichnet und heißt ***n*-Fakultät**

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \tag{2.64}$$

Für $n = 0$ und $n = 1$ wird definiert:

$$\boxed{0! = 1; \quad 1! = 1} \tag{2.65}$$

Am Ende dieses Abschnittes wird gezeigt, daß diese Definitionen zweckmäßig sind.

BEISPIELE

2.116. Es ist $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 2! \cdot 3 = 6$; $4! = 3! \cdot 4 = 24$; $5! = 4! \cdot 5 = 120$; $6! = 5! \cdot 6 = 720$; $7! = 6! \cdot 7 = 5040$.
n-Fakultät wächst also sehr schnell.

2.117. Es ist $\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8$

2.118. Für natürliche Zahlen k ($k < n$) gilt

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-k)(n-k+1) \cdots (n-1)\, n}{1 \cdot 2 \cdots (n-k)} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

Für $n = 8$, $k = 3$ ergibt sich Beispiel 2.117.

Definition

Ist n eine beliebige reelle Zahl und k eine natürliche Zahl, so heißt $\binom{n}{k}$ (gelesen „n über k") **Binomialkoeffizient** und ist definiert durch

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}; \quad k \neq 0} \tag{2.66}$$

Für $k = 0$ wird definiert:

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1} \tag{2.67}$$

Auch diese Definition für $k = 0$ wird sich als zweckmäßig erweisen.

Die Begründung für den Namen „Binomialkoeffizient" liefert Gl. (2.71).

Zähler und Nenner von $\binom{n}{k}$ sind Produkte mit der gleichen Anzahl von k Faktoren. Der erste Faktor des Nenners ist 1, und jeder folgende ist eine Einheit größer; der erste Faktor des Zählers ist n, und jeder folgende ist eine Einheit kleiner.

BEISPIELE

2.119. $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$

2.120. $\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$

2.121. $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$

2.122. $\binom{4}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$

2.123. $\binom{2}{4} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$

2.124. $\binom{-3}{2} = \frac{(-3)(-4)}{1 \cdot 2} = 6$

2.125. $\binom{\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} = -\frac{10}{243}$

Eigenschaften von $\binom{n}{k}$:

1. $\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1$ (2.68)

2. Für $n \in N$ und $k \leqq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ (2.69)

3. Für $n \in N$ und $k > n$ gilt: $\binom{n}{k} = 0$ (2.70)

Eigenschaft 1 (vgl. Beispiele 2.121. und 2.122.) und Eigenschaft 3 (vgl. Beispiel 2.123.) folgen sofort aus Gl. (2.66), denn für natürliche Zahlen n und $k > n$ steht im Zähler der Faktor 0.

Zu Eigenschaft 2: Nach Beispiel 2.118. wird in Gl. (2.66) der Zähler ersetzt. Es ergibt sich $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

In dieser Gleichung wird k durch $n - k$ ersetzt:

$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$. Daraus folgt Gl. (2.69). Für $k = 0$ wird aus Gl. (2.69) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \binom{n}{n}$. Wegen Gl. (2.68) folgt daraus die Zweckmäßigkeit der Definitionen für $\binom{n}{0}$ und $0!$; für $k = 1$ ergibt sich entsprechend die Zweckmäßigkeit der Definition für $1!$.

Aufgaben: 2.36. bis 2.38.

Potenzen des Binoms $a + b$ lassen sich für Exponenten $n \in N$ mit einer Formel berechnen. Diese heißt

Binomischer Lehrsatz: Für $n \in N$ und beliebige a, b gilt

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}} \tag{2.71}$$

Der Satz wird an dieser Stelle nicht bewiesen (s. Abschnitt 23.). Die Summe beginnt mit a^n und endet mit b^n, und der Koeffizient des zweiten Summanden ist stets n (vgl. Gln. (2.67), (2.68)); sie ist nach fallenden Potenzen von a und nach steigenden Potenzen von b geordnet, für jeden Summanden ist die Summe der Exponenten gleich n. Wegen Gl. (2.69) haben symmetrisch zur Mitte der Summe stehende Summanden gleiche Koeffizienten.

BEISPIELE

2.126. $(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

2.127. Von $(2x - 3y)^7$ sind die ersten drei Summanden zu berechnen.

Lösung: $[2x + (-3y)]^7 = (2x)^7 + 7(2x)^6(-3y) + \binom{7}{2}(2x)^5(-3y)^2 + \cdots$

$= 128x^7 - 7 \cdot 64 \cdot 3x^6y + 21 \cdot 32 \cdot 9x^5y^2 - + \cdots$

$= 128x^7 - 1344x^6y + 6048x^5y^2 - + \cdots$

2.128. Es ist Gl. (2.71) für $a = p$, $b = 1 - p$ zu formulieren.

Lösung: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k = [p + (1-p)]^n = 1$

Kontrollfragen

2.26. Wie ist die Fakultät der natürlichen Zahl n definiert? Wie ist speziell $0!$ definiert?

2.27. Wie viele Faktoren enthält der Zähler von $\binom{n}{k}$, und wie viele enthält der Nenner? Wie ist $\binom{n}{0}$ definiert?

2.28. Welche Koeffizienten haben das erste, zweite und letzte Glied in der Summendarstellung von $(a + b)^n$?

Aufgabe: 2.39.

2.6.5. Rechenschemata

Rechenschemata erhöhen bei umfangreichen Rechnungen die Rechensicherheit. Die Rechnung ist zu diesem Zweck in Teilrechnungen zu zerlegen, ihre Reihenfolge genau festzulegen und in Form einer Tabelle eindeutig zu formulieren. Es empfiehlt sich, die Spalten (oder Zeilen) der Tabelle zu numerieren und die Teilrechnungen mit Hilfe dieser Nummern darzustellen.

BEISPIELE

2.129. Für $y = \dfrac{6}{1 + 2e^{-0,5x}}$ ist eine Wertetabelle für die Argumente $x = 0, 1, 2, \ldots, 5$ aufzustellen.

Lösung:

x	$-0,5 \cdot$ (1)	exp (2)	$2 \cdot$ (3)	$1 +$ (4)	6:(5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	y
0	0	1	2	3	2
1	$-0,5$	0,607	1,214	2,214	2,71
2	-1	0,368	0,736	1,736	3,46
3	$-1,5$	0,223	0,446	1,446	4,15
4	-2	0,135	0,270	1,270	4,72
5	$-2,5$	0,082	0,164	1,164	5,15

Die Rechengeschwindigkeit und -sicherheit erhöht sich, wenn die Tabelle spaltenweise erarbeitet wird, d. h., aus Spalte (1) werden zunächst alle Werte der Spalte (2) berechnet, dann alle Werte der Spalte (3) usw. Mit einem elektronischen Taschenrechner ist eine Berechnung von y ohne Notieren von Zwischenergebnissen möglich. In diesem Fall brauchen die Spalten (2) bis (5) nicht ausgefüllt zu werden. Ein Ablaufplan sollte aber in jedem Fall erarbeitet werden. Er ist abhängig vom Leistungsumfang und der logischen Grundstruktur des Rechners.
Für einen Rechner mit algebraischer Logik ohne Hierarchie (Rechner mit Hierarchie führen Rechenoperationen 2. Stufe vorrangig vor denen 1. Stufe aus) ist folgender Ablaufplan möglich:

Eingabe x $\boxed{\times}$ 0,5 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{=}$.

2.130. Für $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ ist eine Wertetabelle für die Argumente $x = 0, 1, 2, 3$ aufzustellen.

Lösung:

x	$(①)^2$	$2 \cdot ①$	$② + ③$	$② + 1$	$④ : ⑤$
①	②	③	④	⑤	y
0	0	0	0	1	0
1	1	2	3	2	1,5
2	4	4	8	5	1,6
3	9	6	15	10	1,5

Ein möglicher Ablaufplan für einen elektronischen Taschenrechner mit algebraischer Logik ohne Hierarchie, der einen rechnenden Speicher besitzt, ist:

Eingabe x $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{M}+}$ 2 $\boxed{\times}$ x $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M}+}$ x $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$.

Dabei bedeuten $\boxed{\text{M}+}$ „Inhalt des Eingaberegisters wird zum Speicherinhalt addiert",

$\boxed{\text{MR}}$ „Speicherinhalt wird in das Eingaberegister übertragen."

Aufgaben: 2.40. und 2.41.

2.7. Der Bereich der komplexen Zahlen

2.7.1. Arithmetische Form der komplexen Zahlen

Für eine beliebige reelle Zahl a gilt $a^2 \geqq 0$. Es gibt also keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist. Ferner sind für negative reelle Zahlen weder Wurzelwerte noch Logarithmen definiert. Diese Eigenschaften der reellen Zahlen stören mitunter bei Rechnungen. Deshalb wird der Bereich P der reellen Zahlen zu einem Zahlenbereich erweitert, in dem diese Operationen ausführbar werden. Er heißt **Bereich der komplexen Zahlen** und wird mit C bezeichnet.

Definition

Eine **komplexe Zahl** z ist ein geordnetes Paar reeller Zahlen:

$$\boxed{z = (a; b); \quad a \in P, b \in P} \tag{2.72}$$

a heißt Realteil von z: $\operatorname{Re} z = a$,
b heißt Imaginärteil von z: $\operatorname{Im} z = b$.

Durch Definitionen wird festgelegt, was unter der Gleichheit zweier komplexer Zahlen zu verstehen ist und wie die Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe auszuführen sind. Diese Definitionen werden in diesem Abschnitt schrittweise eingeführt bzw. erarbeitet und sind in den Gln. (2.77) bis (2.80) zusammengestellt.

Jeder komplexen Zahl läßt sich in einer Ebene mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems eindeutig ein Punkt mit den Koordinaten $(a; b)$ zuordnen und umgekehrt (Bild 2.7). Die Ebene heißt **Gaußsche (komplexe) Zahlenebene.** Die waagerechte Achse heißt **reelle Achse.** Sie ist die Zahlengerade der reellen Zahlen. Der reellen Zahl a und der komplexen Zahl $(a; b)$ mit dem Imaginärteil $b = 0$ ist demnach

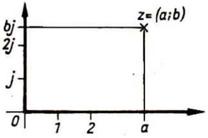


Bild 2.7

der gleiche Punkt zugeordnet: $(a;\ 0) = a$. Die senkrechte Achse heißt **imaginäre Achse,** denn die auf ihr liegenden Zahlen heißen **imaginäre Zahlen.** Um sie von den reellen Zahlen zu unterscheiden, werden sie mit der Einheit j multipliziert. Der imaginären Zahl bj und der komplexen Zahl $(a; b)$ mit dem Realteil $a = 0$ ist demnach der gleiche Punkt zugeordnet: $(0; b) = b\mathrm{j}$. Der imaginären Einheit wird durch Definition eine Eigenschaft zugeschrieben, die auf keine reelle Zahl zutrifft.

Definition

Die **imaginäre Einheit** j ist eine Zahl, deren Quadrat -1 ist:

$$\boxed{(0;1) = \mathrm{j}; \quad \mathrm{j}^2 = -1} \tag{2.73}$$

Die imaginäre Einheit wird häufig auch mit i bezeichnet. In der Technik wird jedoch meist der Buchstabe j verwendet, um Verwechslungen mit i als Symbol für die Stromstärke zu vermeiden.

Die Rechenregeln für imaginäre und komplexe Zahlen sind so definiert, daß formal mit den Real- und Imaginärteilen gerechnet werden kann und nur beim Zahlzeichen j die Eigenschaft (2.73) zu beachten ist.

BEISPIEL

2.131. Für $z_1 = 12\mathrm{j}$, $z_2 = -4\mathrm{j}$ sind

$z_1 + z_2$, $2z_1 - 3z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, z_1^2 und z_2^2 zu berechnen.

Lösung:

$$z_1 + z_2 = 12\mathrm{j} + (-4\mathrm{j}) = 8\mathrm{j};$$
$$2z_1 - 3z_2 = 24\mathrm{j} + 12\mathrm{j} = 36\mathrm{j};$$
$$z_1 \cdot z_2 = -48\mathrm{j}^2 = -48 \cdot (-1) = 48;$$
$$z_1 : z_2 = 12\mathrm{j} : (-4\mathrm{j}) = -3;$$
$$z_1^2 = 144\mathrm{j}^2 = -144; \quad z_2^2 = 16\mathrm{j}^2 = -16.$$

Allgemein gilt: $(b\mathrm{j})^2 = b^2\mathrm{j}^2 = -b^2$, das Quadrat einer imaginären Zahl ist (für $b \neq 0$) eine negative reelle Zahl.
Die Potenzwerte von j wiederholen sich periodisch:

$$\mathrm{j}^1 = \mathrm{j}; \quad \mathrm{j}^2 = -1; \quad \mathrm{j}^3 = \mathrm{j}^2 \cdot \mathrm{j} = -\mathrm{j}; \quad \mathrm{j}^4 = \mathrm{j}^3 \cdot \mathrm{j} = 1;$$
$$\mathrm{j}^5 = \mathrm{j}^4 \cdot \mathrm{j}^1 = \mathrm{j}; \quad \mathrm{j}^6 = \mathrm{j}^4 \cdot \mathrm{j}^2 = -1; \quad \mathrm{j}^7 = \mathrm{j}^4 \cdot \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}; \ \ldots$$

Sie sind gleich, wenn der Exponent bei Division durch 4 den gleichen Rest hat:

$$\boxed{j^{4n} = 1;\ j^{4n+1} = j;\ j^{4n+2} = -1;\ j^{4n+3} = -j, \quad n \in N} \qquad (2.74)$$

Das Reziproke von j ist

$$\frac{1}{j} = \frac{1 \cdot j^3}{j \cdot j^3} = j^3 = -j; \quad \boxed{\frac{1}{j} = -j} \qquad (2.75)$$

BEISPIELE

2.132. $j^{14} = j^{12+2} = j^2 = -1; j^7 = j^{4+3} = -j; j^0 = 1$

2.133. $j^{-5} = \frac{1}{j^5} = \frac{j^3}{j^8} = \frac{-j}{1} = -j; \quad j^{-3} = \frac{1}{j^3} = \frac{j}{j^4} = \frac{j}{1} = j$

Die Summe zweier komplexer Zahlen wird so definiert, daß die Summe der Realteile und die Summe der Imaginärteile zu bilden ist. Für eine reelle Zahl $z_1 = a = (a; 0)$ und eine imaginäre Zahl $z_2 = bj = (0; b)$ ist demnach

$$z_1 + z_2 = a + bj = (a; 0) + (0; b) = (a + 0; 0 + b) = (a; b),$$

und wegen Formel (2.72) folgt der

Satz

Jede komplexe Zahl $z = (a; b)$ läßt sich als Summe einer reellen und einer imaginären Zahl darstellen **(arithmetische Form)**:

$$\boxed{z = a + bj} \qquad (2.76)$$

BEISPIEL

2.134. Für $z_1 = 4 + 6j$, $z_2 = 3 - 2j$ sind
$2z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 und z_2^4 zu berechnen.

Lösung:

$$2z_1 + z_2 = 2(4 + 6j) + (3 - 2j) = 8 + 12j + 3 - 2j = 11 + 10j;$$
$$z_1 - z_2 = (4 + 6j) - (3 - 2j) = 4 + 6j - 3 + 2j = 1 + 8j;$$
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (4 + 6j)(3 - 2j) &= 12 - 8j + 18j - 12j^2 \\ &= 12 - 8j + 18j + 12 = 24 + 10j; \end{aligned}$$
$$z_1^2 = (4 + 6j)^2 = 16 + 48j + 36j^2 = 16 + 48j - 36 = -20 + 48j;$$
$$\begin{aligned} z_2^4 = (3 - 2j)^4 &= 3^4 + \binom{4}{1} 3^3(-2j) + \binom{4}{2} 3^2(-2j)^2 + \binom{4}{3} 3(-2j)^3 + (-2j)^4 \\ &= 81 + 4 \cdot 27 \cdot (-2j) + 6 \cdot 9 \cdot 4j^2 + 4 \cdot 3 \cdot (-8)\, j^3 + 16j^4 \\ &= 81 - 216j - 216 + 96j + 16 \\ &= -119 - 120j \end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung für das Rechnen mit komplexen Zahlen ist der folgende Begriff.

Definition

Zwei komplexe Zahlen z und z^* heißen zueinander konjugiert komplex, wenn sie sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden:
$z = a + b\mathrm{j}$; $z^* = a - b\mathrm{j}$.

Es ist $\quad z + z^* = (a + b\mathrm{j}) + (a - b\mathrm{j}) = 2a$;

$\quad z \cdot z^* = (a + b\mathrm{j})(a - b\mathrm{j}) = a^2 - b^2\mathrm{j}^2 = a^2 + b^2$, d. h.,

Summe und Produkt konjugiert komplexer Zahlen sind reell.
Diese Eigenschaft wird beim Dividieren komplexer Zahlen angewendet: Der Bruch $\frac{z_1}{z_2}$ wird mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl z_2^* erweitert. Der entstehende Nenner ist reell, und die Division läßt sich ausführen.

BEISPIELE

2.135. Für $z_1 = 4 + 6\mathrm{j}$, $z_2 = -3 - 2\mathrm{j}$ ist $z_1 : z_2$ zu berechnen.

Lösung:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 6\mathrm{j}}{-3 - 2\mathrm{j}} = \frac{(4 + 6\mathrm{j})(-3 + 2\mathrm{j})}{(-3 - 2\mathrm{j})(-3 + 2\mathrm{j})}$$
$$= \frac{-12 - 18\mathrm{j} + 8\mathrm{j} + 12\mathrm{j}^2}{9 - 4\mathrm{j}^2} = \frac{-12 - 10\mathrm{j} - 12}{9 + 4} = \frac{-24 - 10\mathrm{j}}{13} = -\frac{24}{13} - \frac{10}{13}\mathrm{j}$$

2.136. Für $z = 4 + 6\mathrm{j}$ ist der reziproke Wert zu berechnen.

Lösung:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4 + 6\mathrm{j}} = \frac{1(4 - 6\mathrm{j})}{(4 + 6\mathrm{j})(4 - 6\mathrm{j})} = \frac{4 - 6\mathrm{j}}{16 - 36\mathrm{j}^2} = \frac{4 - 6\mathrm{j}}{16 + 36} = \frac{4}{52} - \frac{6}{52}\mathrm{j} = \frac{1}{13} - \frac{3}{26}\mathrm{j}$$

Durch Verallgemeinerung der Rechnungen in den Beispielen 2.134. und 2.135. folgen für die Gleichheit und die vier Grundrechenoperationen in der arithmetischen Form die

Definitionen

Wenn $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{j}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{j}$, so ist

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2; \tag{2.77}$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,\mathrm{j}; \tag{2.78}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{j}; \tag{2.79}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}\,\mathrm{j} \quad (z_2 \neq 0) \tag{2.80}$$

Gl. (2.79) entsteht durch formales Ausmultiplizieren von $(a_1 + b_1\mathrm{j})(a_2 + b_2\mathrm{j})$, Gl. (2.80) durch Erweitern mit z_2^* und Ausmultiplizieren. Die Division ist nicht ausführbar, wenn $a_2 = 0$ und $b_2 = 0$, d. h. wenn $z_2 = 0$. In C sind demnach die vier Grundrechenoperationen außer der Division durch Null uneingeschränkt ausführbar. Es läßt sich beweisen, daß Addition und Multiplikation kommutativ, assoziativ und distributiv sind. Eine Ordnungsbeziehung ist in C nicht erklärt, d. h., zwei komplexe

Zahlen können nicht der Größe nach geordnet werden. Die Zeichen < und > sowie die Eigenschaften „positiv" und „negativ" haben für komplexe Zahlen keinen Sinn. Die Bedeutung des Begriffs „absoluter Betrag" wird verallgemeinert (Bild 2.8).

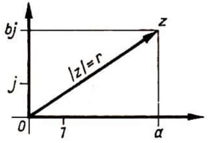


Bild 2.8

Definition

Der **(absolute) Betrag** einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{j}$ ist

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.81}$$

$|z|$ läßt sich als Abstand des Punktes, der der Zahl z zugeordnet ist, vom Nullpunkt der GAUSSschen Zahlenebene deuten. Für den Sonderfall, daß z reell ist ($b = 0$), ergibt sich die Definition des absoluten Betrages für reelle Zahlen (vgl. 2.3.).
Jede komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{j}$ läßt sich als Pfeil (zweidimensionaler Vektor) darstellen, der im Nullpunkt der GAUSSschen Zahlenebene beginnt und bis zum Punkt mit den Koordinaten $(a; b)$ geht (Bild 2.9). Die in Richtung der beiden Achsen liegenden Komponenten sind a und $b\mathrm{j}$. Bild 2.10 zeigt, daß die durch Gl. (2.78) definierte Addition als Vektoraddition dargestellt werden kann. Der eine Vektor wird parallel so verschoben, daß sein Anfang mit der Spitze des anderen zusammenfällt. Die Summe wird durch den Vektor dargestellt, der vom Anfang des ersten (also vom

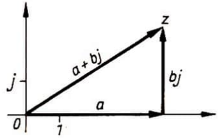


Bild 2.9

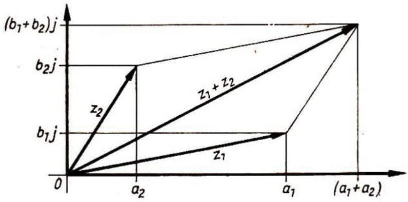


Bild 2.10

Nullpunkt) bis zur Spitze des zweiten Vektors geht. Die Vektoren zweier entgegengesetzter komplexer Zahlen $z = a + b\mathrm{j}$ und $-z = -a - b\mathrm{j}$ liegen symmetrisch zum Nullpunkt (Bild 2.11), die Vektoren zweier konjugiert komplexer Zahlen $z = a + b\mathrm{j}$ und $z^* = a - b\mathrm{j}$ liegen symmetrisch zur reellen Achse (Bild 2.12).

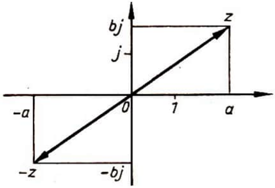


Bild 2.11

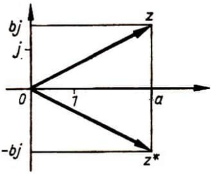


Bild 2.12

Kontrollfragen

2.29. Welchen Wert muß der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl z haben, damit z reell bzw. imaginär ist?

2.30. Wie ist die imaginäre Einheit j definiert? Welche Werte nehmen die Potenzen von j an? Wie groß ist $\frac{1}{\mathrm{j}}$?

2.31. Was sind konjugiert komplexe Zahlen? Welchen Wert haben ihre Summe und ihr Produkt?

2.32. Welche Lage haben die Vektoren konjugiert komplexer Zahlen in der Gaussschen Zahlenebene, und welche Lage haben die Vektoren entgegengesetzter komplexer Zahlen?

2.33. Wie werden zwei komplexe Zahlen in der arithmetischen Form dividiert?

Aufgaben: 2.42. und 2.43.

2.7.2. Goniometrische und Exponentialform der komplexen Zahlen

Nach 2.7.1. läßt sich jeder komplexen Zahl z in der Gaussschen Zahlenebene ein Punkt zuordnen und umgekehrt. In der arithmetischen Form $z = a + b\mathrm{j}$ bedeutet das Zahlenpaar $(a; b)$ die cartesischen Koordinaten dieses Punktes. Für die Zahl z ergibt sich eine andere Form, wenn Polarkoordinaten $(r; \varphi)$ eingeführt werden (Bild 2.13). Die Länge des Vektors, der z darstellt, wird mit r bezeichnet und heißt (absoluter) **Betrag** oder Modul (vgl. Gl. (2.81)). Der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und diesem Vektor wird mit φ bezeichnet und heißt **Argument.** Wenn φ in mathematisch positivem Drehsinn (d. h. entgegen dem Uhrzeigersinn) gemessen wird, so ist $\varphi > 0$, anderenfalls ist $\varphi < 0$.

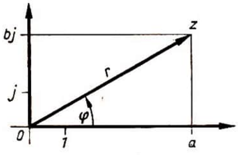


Bild 2.13

Aus Bild 2.13 folgt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; & \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \\ a = r\cos\varphi; & b = r\sin\varphi \end{array}}$$

(2.82); (2.83)
(2.84); (2.85)

Aus Gl. (2.82) folgt $r \geqq 0$. Der Quadrant von φ wird aus der Vorzeichenkombination von a und b ermittelt, da er sich aus Gl. (2.83) nicht eindeutig ergibt. Bei jeder Umrechnung wird empfohlen, sich die Lage des Vektors, der z darstellt, in der GAUSSschen Zahlenebene vorzustellen.
Mit den Gln. (2.84) und (2.85) läßt sich die arithmetische Form umformen:

$$z = a + b\mathrm{j} = r\cos\varphi + r\sin\varphi\cdot\mathrm{j}$$

Satz

Jede komplexe Zahl läßt sich in der Form

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)} \tag{2.86}$$

darstellen **(goniometrische Form)**.

Für $z = 0$ ist $r = 0$, aber φ ist nicht eindeutig bestimmt. Beim Arbeiten mit der goniometrischen Form ist zu beachten, daß die Winkelfunktionen periodisch sind, also:

$$\boxed{\cos(\varphi + k\cdot 360^\circ) + \mathrm{j}\sin(\varphi + k\cdot 360^\circ) = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi;\ k \in G} \tag{2.87}$$

BEISPIELE

2.137. $z = -4 + 3\mathrm{j}$. Es ist die goniometrische Form zu berechnen.

Lösung: Wegen $a = -4 < 0$, $b = 3 > 0$ liegt z im zweiten Quadranten (Bild 2.14). Die Gln. (2.82), (2.83) ergeben $r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$; $\tan\varphi = \dfrac{3}{-4} = -0{,}75$, $\varphi = 180^\circ - 36{,}9^\circ = 143{,}1^\circ$; $z = 5(\cos 143{,}1^\circ + \mathrm{j}\sin 143{,}1^\circ)$.

2.138. $z = -3\mathrm{j}$. Es ist die goniometrische Form zu ermitteln.

Lösung: Für reelle oder imaginäre Zahlen ergibt sich diese Form am schnellsten aus der Darstellung als Vektor in der GAUSSschen Zahlenebene (Bild 2.15): $r = 3$, $\varphi = 270^\circ$ oder $\varphi = -90^\circ$ (wenn im mathematisch negativen Drehsinn, d. h. im Uhrzeigersinn, gemessen wird);

$$z = 3(\cos 270^\circ + \mathrm{j}\sin 270^\circ) = 3[\cos(-90^\circ) + \mathrm{j}\sin(-90^\circ)].$$

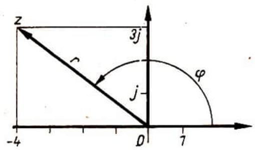


Bild 2.14

Aus Bild 2.16 folgt: $r \geqq |a|$, $r \geqq |b|$, aber $r \leqq |a| + |b|$. Es sollte bei jeder Berechnung des Betrages r geprüft werden, ob diese Ungleichungen erfüllt sind.

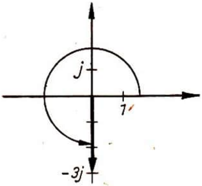


Bild 2.15

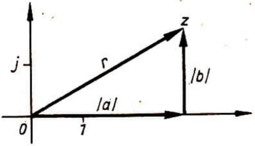


Bild 2.16

BEISPIEL

2.139. $z = -0{,}5 - 1{,}2\mathrm{j}$. Es ist die goniometrische Form zu berechnen.

Lösung: $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow z$ liegt im dritten Quadranten.

$$r = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (-1{,}2)^2} = 1{,}3; \text{ Prüfung: } 1{,}2 \leqq r \leqq 1{,}2 + 0{,}5 \text{(w)}$$

$$\tan \varphi = \frac{-1{,}2}{-0{,}5} = 2{,}4; \ \varphi = 180° + 67{,}4° = 247{,}4°$$

$$z = 1{,}3(\cos 247{,}4° + \mathrm{j} \sin 247{,}4°).$$

Beim Ermitteln der goniometrischen Form läßt sich die mitunter umständliche Berechnung des Wurzelterms vermeiden, wenn der folgende Weg eingeschlagen wird (vgl. Gl. (2.83), (2.84)): Aus $\tan \varphi = \dfrac{b}{a}$ wird φ ermittelt; aus $r = \dfrac{a}{\cos \varphi}$ ergibt sich r.

Um die arithmetische Form aus der goniometrischen zu berechnen, sind die Funktionswerte $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ zu ermitteln und mit r zu multiplizieren:

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot j = a + b\mathrm{j}.$$

Ein anderer Weg, der über die Tangensfunktion führt, ergibt sich, wenn das oben erwähnte Verfahren umgekehrt wird:

$$r \cos \varphi = a; \qquad a \tan \varphi = b.$$

BEISPIELE

2.140. $z = 2\,(\cos 160° + \mathrm{j} \sin 160°)$. Es ist die arithmetische Form zu berechnen.

Lösung: $z = 2(-\cos 20° + \mathrm{j} \sin 20°)$
$= 2(-0{,}9397 + \mathrm{j}\,0{,}3420) = -1{,}8794 + \mathrm{j}\,0{,}6840$

2.141. $z_1 = 4(\cos 90° + \mathrm{j} \sin 90°)$, $z_2 = 8(\cos 180° + \mathrm{j} \sin 180°)$.
Es sind die arithmetischen Formen zu bestimmen.

Lösung: Aus der Darstellung als Vektor in der Gaussschen Zahlenebene folgt ohne Rechnung:

z_1 liegt auf dem positiven Teil der imaginären Achse, $z_1 = 4\mathrm{j}$;
z_2 liegt auf dem negativen Teil der reellen Achse, $z_2 = -8$.

Mit komplexen Zahlen in der goniometrischen Form sind Rechenoperationen zweiter und dritter Stufe ausführbar, während sich komplexe Zahlen nur dann addieren und subtrahieren lassen, wenn sie in der arithmetischen Form vorliegen.

Multiplikation und Division

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1) \qquad \text{und} \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2)$$

werden multipliziert

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{j}^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{j}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Die beiden in runden Klammern stehenden Ausdrücke werden mit Hilfe der Additionstheoreme (s. 3.1.3.) umgeformt. Es entsteht

$$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]} \tag{2.88}$$

Dieses Produkt ist wieder eine goniometrische Form $r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ mit $r = r_1r_2$ und $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$:

Zwei komplexe Zahlen in der goniometrischen Form werden multipliziert, indem ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert werden.

Da die Division die Umkehroperation der Multiplikation ist, gilt:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]; \quad z_2 \neq 0} \tag{2.89}$$

Zwei komplexe Zahlen in der goniometrischen Form werden dividiert, indem ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert werden.

BEISPIELE

2.142. Für $z_1 = 4(\cos 20° + \mathrm{j}\sin 20°)$, $z_2 = 12(\cos 60° + \mathrm{j}\sin 60°)$, $z_3 = 16(\cos 120° + \mathrm{j}\sin 120°)$ ist $z = \dfrac{z_1z_2}{z_3}$ zu berechnen.

Lösung: $r = \dfrac{r_1r_2}{r_3} = \dfrac{4\cdot 12}{16} = 3$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = 20° + 60° - 120° = -40°$$

$$z = 3[\cos(-40°) + \mathrm{j}\sin(-40°)] = 3(\cos 320° + \mathrm{j}\sin 320°)$$

Zur letzten Umformung vgl. Gl. (2.87).

2.143. Für $z_1 = -1{,}59 + 12{,}87\mathrm{j}$, $z_2 = 3{,}5 - 7{,}2\mathrm{j}$, $z_3 = -2{,}5$ ist mit Hilfe der goniometrischen Formen $z = \dfrac{z_1}{z_2z_3}$ zu berechnen und das Ergebnis in der arithmetischen Form darzustellen.

Lösung: Mit den Gln. (2.82), (2.83) ergibt sich

$$z_1 = 12{,}97(\cos 97{,}04° + \mathrm{j}\sin 97{,}04°)$$

$$z_2 = 8{,}01(\cos 295{,}92° + \mathrm{j}\sin 295{,}92°) = 8{,}01[\cos(-64{,}08°) + \mathrm{j}\sin(-64{,}08°)]$$

$$z_3 = 2{,}5(\cos 180° + \mathrm{j}\sin 180°)$$

(Anm. zu z_2: Wenn die komplexe Zahl im vierten Quadranten liegt, wird das Argument oft als negativer spitzer Winkel angegeben.)

$$r = \frac{12{,}97}{8{,}01 \cdot 2{,}5} = 0{,}648; \; \varphi = 97{,}04° - (-64{,}08°) - 180° = -18{,}88°$$

$$z = 0{,}648\,[\cos(-18{,}88°) + \mathrm{j}\sin(-18{,}88°)]$$
$$= 0{,}648(0{,}9462 - \mathrm{j}\,0{,}3236) = 0{,}613 - 0{,}210\mathrm{j}$$

2.144. $z_1 = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ wird mit $z_2 = 2(\cos 20° + \mathrm{j}\sin 20°)$ multipliziert. Wie ändert sich der Vektor, der die Zahl z_1 darstellt?

Lösung: $z_1 z_2 = 2r[\cos(\varphi + 20°) + \mathrm{j}\sin(\varphi + 20°)]$.

Der die Zahl z_1 darstellende Vektor wird auf das Zweifache gestreckt und um 20° in mathematisch positivem Drehsinn gedreht.

Durch Verallgemeinerung des Beispiels 2.144. folgt:

Wenn z_1 mit z_2 multipliziert wird, so findet eine **Drehstreckung** des Vektors statt, der z_1 darstellt. Er wird auf das r_2-fache gestreckt und um φ_2 gedreht.

Sonderfall: Wenn z mit $\mathrm{j} = 1(\cos 90° + \mathrm{j}\sin 90°)$ multipliziert wird, so wird der die Zahl z darstellende Vektor um 90° in mathematisch positivem Drehsinn gedreht. Entsprechend ergibt eine Division durch j eine Drehung um 90° in mathematisch negativem Drehsinn. Da sich die Potenzen j^n ($n \in N$) aus $z = 1$ durch fortgesetztes Multiplizieren mit j ergeben, bedeutet das eine fortgesetzte Drehung des Vektors, der $z = 1$ darstellt, um 90° in mathematisch positivem Drehsinn (Bild 2.17). Folglich müssen sich die Potenzwerte periodisch wiederholen (vgl. Gl. (2.74)). Bild 2.18 veranschaulicht die Gl. (2.75): $\frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$.

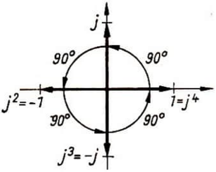


Bild 2.17

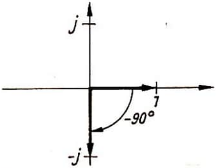


Bild 2.18

Die Exponentialform

Aus Gl. (2.88) folgt für $r_1 = r_2 = 1$:

$$(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2) = [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Die beiden Klammerausdrücke werden also multipliziert, indem ihre Argumente addiert werden. Diese Eigenschaft erinnert an das Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis, bei dem die Exponenten addiert werden. Es besteht Veranlassung zu der Vermutung, daß sich $(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ als Potenz mit einem Exponenten schreiben läßt, der das Argument φ enthält. Tatsächlich hat Euler (1707 bis 1783) eine solche Beziehung gefunden. Sie heißt

Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi} \tag{2.90}$$

Ihre Herleitung übersteigt den Rahmen dieses Lehrbuchs.
Wegen Gl. (2.87) hat $e^{j\varphi}$ die Periode $360° = 2\pi$:

$$\boxed{e^{j(\varphi+k\cdot 360°)} = e^{j\varphi};\quad k \in G} \tag{2.91}$$

Durch Einsetzen in die goniometrische Form Gl. (2.86) ergibt sich für komplexe Zahlen eine weitere Form.

Satz

Jede komplexe Zahl läßt sich in der Form

$$\boxed{z = r\,e^{j\varphi}} \tag{2.92}$$

darstellen **(Exponentialform)**.

Die Exponentialform wird wie die goniometrische Form mit den Polarkoordinaten $(r;\varphi)$ gebildet. Produkt und Quotient von $z_1 = r_1\,e^{j\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\,e^{j\varphi_2}$ ergeben sich demnach aus den Gln. (2.88), (2.89):

$$z_1 z_2 = r_1\,e^{j\varphi_1}\cdot r_2\,e^{j\varphi_2} = r_1 r_2\,e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}; \tag{2.93}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,e^{j\varphi_1}}{r_2\,e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{2.94}$$

Aus den Gleichungen folgt, daß in den Exponentialformen auftretende Potenzen mit der Basis e formal nach den für reelle Zahlen geltenden Gesetzen für Potenzen mit gleicher Basis multipliziert und dividiert werden dürfen.

Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

Nach Gl. (2.93) ist $z^2 = z\cdot z = r\,e^{j\varphi}\cdot r\,e^{j\varphi} = r^2\,e^{j2\varphi}$. Für positive ganzzahlige Exponenten wird folglich vermutet $z^n = r^n\,e^{jn\varphi}$ (I). Diese Formel gilt tatsächlich, der Beweis wird hier nicht geführt. Weiter wird definiert $z^0 = 1$ und $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$. (I) ergibt für $n = 0$ die Gleichung $z^0 = r^0\,e^0$, also $z^0 = 1$ in Übereinstimmung mit der Definition; wenn in (I) n durch $-n$ ersetzt wird, folgt $z^{-n} = r^{-n}\,e^{-jn\varphi}$, und dieser Ausdruck stimmt überein mit $z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n\,e^{jn\varphi}} = \frac{1e^{j0}}{r^n\,e^{jn\varphi}} = r^{-n}\,e^{j(0-n\varphi)} = r^{-n}\,e^{-jn\varphi}$. Also gilt der

Satz

Für beliebige ganzzahlige Exponenten gilt

$$\boxed{z^n = (r\,e^{j\varphi})^n = r^n\,e^{jn\varphi};\quad n \in G} \tag{2.95}$$

Die Potenz $e^{j\varphi}$ darf demnach formal nach dem für reelle Zahlen geltenden Potenzgesetz potenziert werden.
Wegen $(e^{j\varphi})^n = (e^{j(\varphi+k\cdot 360°)})^n = e^{j(n\varphi+nk\cdot 360°)} = e^{jn\varphi}$ (denn $nk \in G$) ist der Potenzwert eindeutig.

BEISPIELE

2.145. Für $z = 2e^{j100°}$ ist z^4 zu berechnen.

Lösung: $z^4 = 2^4 e^{j(4\cdot 100°)} = 16e^{j400°} = 16e^{j40°}$

2.146. Für $z_1 = 3 - 4j$, $z_2 = 1 + j$, $z_3 = -4j$ ist mit Hilfe der Exponentialformen $z = \dfrac{z_1^2 \cdot z_3^3}{z_2^4}$ zu berechnen und das Ergebnis in der arithmetischen Form darzustellen.

Lösung: Die Potenzwerte werden zunächst einzeln berechnet:

$$z_1 = 5e^{-j53,13°};\quad z_1^2 = 5^2 e^{-j(2\cdot 53,13°)} = 25e^{-j106,26°}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\,e^{j45°};\quad z_2^4 = (\sqrt{2})^4 e^{j(4\cdot 45°)} = 4e^{j180°}$$

$$z_3 = 4e^{-j90°};\quad z_3^3 = 4^3 e^{-j(3\cdot 90°)} = 64e^{-j270°}$$

$$z = \frac{25e^{-j106,26°}\cdot 64e^{-j270°}}{4e^{j180°}} = 400e^{-j556,26°}$$

$$= 400e^{j(-556,26°+720°)} \doteq 400e^{j163,74°}$$

$$= 400(\cos 163,74° + j\sin 163,74°) = -384 + 112j$$

Unter $\sqrt[n]{z}$ wird jede komplexe Zahl verstanden, deren n-te Potenz gleich z ist: $\sqrt[n]{r\,e^{j\varphi}} = \varrho\,e^{j\psi} \Leftrightarrow (\varrho\,e^{j\psi})^n = r\,e^{j\varphi}$; folglich ist $\varrho^n = r$, $n\psi = \varphi$, also $\varrho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \dfrac{\varphi}{n}$.

Wenn φ wegen Gl. (2.91) durch $\varphi + k\cdot 360°$ $(k \in G)$ ersetzt wird, ist $\psi = \dfrac{\varphi}{n} + k\,\dfrac{360°}{n}$. Da $\dfrac{360°}{n}$ ein Bruchteil der Periode ist, ergeben sich für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ insgesamt n verschiedene Argumente und damit n verschiedene Wurzelwerte.

Definition

Die n-te Wurzel aus $z = r\,e^{j\varphi}$ ist

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{j\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{360°}{n}\right)};\quad n \in N\setminus\{0\},\quad k \in G} \tag{2.96}$$

Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ergeben sich n verschiedene komplexe Wurzelwerte.

Die n-te Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl ist dagegen im Bereich der reellen Zahlen eindeutig definiert.

BEISPIELE

2.147. Für $z = 8e^{j30°}$ ist $\sqrt[3]{z}$ zu berechnen.

Lösung:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\,e^{j\left(\frac{30°}{3}+k\frac{360°}{3}\right)} = 2e^{j(10°+k\cdot 120°)}$$

$$= \begin{cases} 2e^{j10°} = 2(\cos 10° + j\sin 10°) = 1,97 + 0,347j & (k = 0), \\ 2e^{j130°} = 2(\cos 130° + j\sin 130°) = -1,29 + 1,53j & (k = 1), \\ 2e^{j250°} = 2(\cos 250° + j\sin 250°) = -0,684 - 1,88j & (k = 2). \end{cases}$$

Der Wert für $k = 3$ ist gleich dem Wert für $k = 0$, der Wert für $k = 4$ ist gleich dem Wert für $k = 1$ usw.

2.148. Für $z = -16$ ist $\sqrt{z}$ zu berechnen.

Lösung: $z = -16 = 16e^{j180°}$,

$$\sqrt{z} = \sqrt{16}\, e^{j\left(\frac{180°}{2}+k\frac{360°}{2}\right)} = 4e^{j(90°+k\cdot 180°)}$$
$$= \begin{cases} 4e^{j90°} = 4(\cos 90° + j\sin 90°) = 4j & (k = 0), \\ 4e^{j270°} = 4(\cos 270° + j\sin 270°) = -4j & (k = 1). \end{cases}$$

Während $\sqrt{-16}$ im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert ist, ergeben sich im Bereich der komplexen Zahlen zwei Werte.

Alle bisher eingeführten Rechenoperationen waren so definiert, daß die für reelle Zahlen geltenden Gesetze formal auf die Exponentialform angewendet werden durften. Wenn diese formal logarithmiert wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln\left[r\, e^{j(\varphi+k\cdot 360°)}\right] \\ &= \ln r + j(\varphi + k\cdot 360°)\ln e \\ &= \ln r + j(\varphi + k\cdot 360°) \text{ wegen } \ln e = 1. \end{aligned}$$

Die Definition von $\ln z$ entspricht dieser Umformung.

Definition

Der natürliche Logarithmus von $z = r\,e^{j\varphi}$ $(z \neq 0)$ ist

$$\boxed{\ln z = \ln r + j(\varphi + k\cdot 360°) = \ln r + j(\varphi + k\cdot 2\pi); \quad k \in G} \qquad (2.97)$$

Beim Logarithmieren von z ergibt sich also eine arithmetische Form mit dem Realteil $\ln r$ und dem periodischen Imaginärteil $\varphi + k\cdot 360° = \varphi + k\cdot 2\pi$ (2π ist der in der Einheit Radiant gemessene Vollwinkel 360°).

BEISPIEL

2.149. Für $z_1 = 8e^{j30°}$, $z_2 = 0{,}13e^{j300°}$, $z_3 = -16$ sind die natürlichen Logarithmen zu berechnen.

Lösung:

$\ln z_1 = \ln 8 + j(30° + k\cdot 360°) = 2{,}08 + j(0{,}524 + k\cdot 2\pi)$

Der Winkel wurde in die Einheit Radiant umgerechnet:

$$30° = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} \approx \frac{30°}{57{,}3°} = 0{,}524 \text{ (vgl. 3.1.1.)}$$

$\ln z_2 = \ln 0{,}13 + j(300° + k\cdot 360°) = -2{,}04 + j(5{,}24 + k\cdot 2\pi)$

Die Exponentialform von z_3 ist $z_3 = 16e^{j180°}$, folglich

$\ln z_3 = \ln 16 + j(180° + k\cdot 360°) = 2{,}77 + j(\pi + k\cdot 2\pi)$.

Der Logarithmus einer negativen reellen Zahl läßt sich demnach im Bereich der komplexen Zahlen berechnen, während er im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert ist.

Im Bereich der komplexen Zahlen sind also Rechenoperationen ausführbar, die im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert sind. Ausnahmen sind die Division durch 0 und ln 0. Diese beiden Operationen sind auch im Bereich der komplexen Zahlen nicht ausführbar.

Kontrollfragen

2.34. Mit welchen Formeln werden Betrag und Argument einer komplexen Zahl aus ihrem Real- und Imaginärteil berechnet?

2.35. Wie werden Zahlen in der goniometrischen bzw. Exponentialform multipliziert (dividiert)?

2.36. Was geschieht mit dem Vektor einer komplexen Zahl z, wenn z mit j multipliziert wird?

2.37. Welches ist die Ursache dafür, daß die n-te Wurzel aus z n verschiedene Wurzelwerte hat?

2.38. Welche Rechenoperationen sind auch im Bereich der komplexen Zahlen nicht ausführbar?

Aufgaben: 2.44. bis 2.49.

2.8. Aufgaben

2.1. Als Dezimalbrüche sind zu schreiben:

a) $\frac{16}{75}$ b) $\frac{5}{37}$ c) $\frac{5}{52}$

2.2. Mit den Intervallen $A = [5, 10]$, $B = (7, 15)$, $C = (3, 7)$, $D = [2, 5]$ sind zu bilden:

a) $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ b) $B \cup C, B \cap C, A \cup D, A \cap D$

c) $(A \cup C) \setminus B, (C \cap D) \setminus A$ d) $A \setminus (B \cup C), C \cap (A \setminus D)$

2.3. Es sind zu erweitern:

a) $\frac{5x}{6y}$ auf den Nenner $42y^3$ b) $\frac{9}{11p^2q}$ auf den Nenner $55p^3q^3$

c) $\frac{2a - 3b}{5a - 4b}$ auf den Nenner $10a^2b - 8ab^2$

d) $\frac{4x + 5}{5 - 2x}$ auf den Nenner $6xy - 15y$

e) $\frac{4x}{2u + 3v}$ auf den Nenner $12u^2 - 27v^2$

2.4. Es sind zu kürzen:

a) $\frac{165r^2s^3t^7}{187r^5s^6t^4}$ b) $\frac{12ax - 18ay}{24ap + 30aq}$ c) $\frac{25y^2 - 15xy}{9x^2 - 30xy + 25y^2}$

d) $\frac{15a^2 - 35ab + 9ac - 21bc}{9ab - 15ac - 21b^2 + 35bc}$ e) $\frac{4a^2 + 25b^2}{2a + 5b}$

2.5. Es sind das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (der Hauptnenner) und die Erweiterungsfaktoren zu bestimmen:

a) $12a^2b$; $15b^3c$; $20ac$

b) $8m^2 - 10mn$; $24m^2 + 30mn$; $16m^2 - 25n^2$

c) $a^2 + 4ab$; $3ab + 12b^2$; $6a$

2.6. Es sind zu addieren:

a) $\frac{9x + 10z}{15xz} - \frac{2y - 6z}{3xy} - \frac{5x + 3y}{5yz}$

b) $\frac{3u^2 + 6uv}{15u - 20v} - \frac{5uv - 4v^2}{6u - 8v} - \frac{uv}{3u - 4v} - \frac{5u - 14v}{30}$

c) $\frac{4x^2}{10xy - 25y^2} - \frac{25y^2}{10xy - 4x^2} + \frac{5y}{2x} - \frac{2x}{5y}$

d) $\frac{u - 1}{u^2 + u} - \frac{u + 1}{u^2 - u} - \frac{1}{u} + \frac{4}{u^2 - 1}$

e) $\frac{1}{u + 5} + \frac{3}{u + 15} - \frac{2}{u}$

2.7. Es sind zu berechnen:

a) $\frac{25xy}{24(x + y)} \cdot 32(xy + y^2)$ b) $\frac{36(a^2 + ab)}{11(a + b)^2} : \frac{48(ab + b^2)}{33(a^2 - b^2)}$

2.8. Durch Erweitern sind zu vereinfachen:

a) $\dfrac{\frac{x}{4} + 5y}{\frac{x}{5} + 4y}$ b) $\dfrac{3a - \frac{16b^2}{3a}}{1 + \frac{4b}{3a}}$ c) $\dfrac{\frac{2}{9b^2} + \frac{1}{3ab}}{1 + \frac{2a}{3b}}$ d) $\dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

2.9. Nach dem Algorithmus der Partialdivision sind zu dividieren:

a) $(81u^3 - 18u^2 + 37u + 40) : (9u + 5)$

b) $(81u^2v^2 + 72v^2 - 63uv^2 + 56v - 49uv + 63u^2v) : (9u^2 + 8 - 7u)$

c) $(6a^4 - 2a^3b + 16ab^3 - 15b^4) : (3a^2 + 2ab - 4b^2)$

d) $(625x^8 - 81y^4z^4) : (5x^2 - 3yz)$

2.10. Es ist $a + 2(a - b) + |2b - 3a| - |b|$ zu berechnen für:

a) $a = 3, b = 4$ b) $a = 4, b = -2$ c) $a = 1, b = 0$

2.11. Es sind alle Werte von

a) $2a + 3b + 1$ b) $3a - 4b + 2$

für $|a| = 3$, $|b| = 1$ zu berechnen.

2.12. Es sind die Betragszeichen aufzulösen in:

a) $2r + 8s + 4\,|r - 2s|$ b) $5u - 3\,|2u + v|$

2.13. Es sind die Elemente folgender Mengen zu bestimmen:

a) $A = \{x \mid |x - 15| = 5\}$ b) $B = \{u \mid |u + 2| = 10\}$

2.14. Für

i	1	2	3	4	5
a_i	2	3	1	−2	−3
b_i	4	2	−3	3	−2

sind zu berechnen:

a) $\sum\limits_{i=1}^{5} a_i b_i$ b) $\sum\limits_{i=1}^{5} a_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{5} b_i$

2.15. Es sind zu berechnen:

a) $\sum\limits_{n=3}^{6} (2n - 3) + \sum\limits_{n=3}^{6} (5 - n)$ b) $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - a)$

2.16. Mit Summenzeichen sind darzustellen:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ b) $\frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} + \frac{1}{y_5}$

c) $4 + 8 + 12 + 16 + 20$ d) $1 + 4 + 9 + 16 + 25$

2.17. Es sind auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden:

a) 6,378 b) 3,454 c) 3,785 d) 12,345

2.18. Es sind auf drei signifikante Ziffern zu runden:

a) 0,064348 b) 376200 c) 69,953

2.19. Es ist schrittweise zunächst auf drei und anschließend auf zwei signifikante Ziffern zu runden:

a) 4,647 b) $6{,}253 \cdot 10^4$ c) 894,6

2.20. Unter Beachtung der Regeln über das Rechnen mit Näherungswerten sind zu berechnen:

a) $12{,}7348 - 0{,}043 + 18{,}62 - 19{,}1 + 6{,}374$

b) $\frac{3652 \cdot 6{,}8 \cdot 0{,}3724}{34832}$

2.21. Desgl.:

a) $\frac{4354{,}82 \cdot 26{,}4}{13{,}685 \cdot 0{,}0005 + 0{,}035}$

b) $\frac{(5{,}28 \cdot 10^4) \cdot (3{,}624 \cdot 10^{-2}) - 83{,}2}{3{,}682 \cdot 10^4 + 6{,}2 \cdot 10^5}$

2.22. Desgl.:

$$\frac{34{,}28 - 0{,}00358}{6{,}32 \cdot 183{,}4 - 1{,}19 \cdot 10^3}$$

2.23. Es sind zu vereinfachen:

a) $16 \cdot (-0{,}03)^0$ b) $\left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$ c) $3^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

d) $(-5)^8 + (-3)^5 - 5^8 - 3^5$

e) $2(x - 2y)^6 - (2y - x)^6 + 3(x - 2y)^5 + 2(2y - x)^5 - (x - 2y)^6$

f) $[(-x)^{-3}]^4,\ (-x^{-3})^{-4},\ (-x^4)^{-3},\ -(x^3)^4,\ -x^{3^4}$

2.24. Es sind zu vereinfachen:

a) $\frac{(6^2)^2 \cdot (24^3)^2}{12^{10}}$ b) $\frac{(24a^2b)^4}{(9ab^2)^3} \cdot \frac{(6a^5b^2)^3}{(16a^4b)^5}$

c) $\frac{r^{2a+3} \cdot s^{a-2}}{t^{a-5}} : \frac{s^a}{r^{2a-3} \cdot t^{a-4}}$ d) $\left(\frac{u^3}{v^5w^8}\right)^{12} \cdot \left(\frac{v^8}{u^2w^7}\right)^{12} \cdot \left(\frac{w^{15}}{v^5}\right)^{12}$

e) $\frac{x+1}{x^{n-1}} + \frac{1 - x^4}{x^{n+3}} - \frac{1}{x^{n-2}}$ f) $\left(\frac{u^{-1}v^{-2}}{r^4s^{-3}}\right)^6 \cdot \left(\frac{r^{-6}v^{-4}}{s^{-5}u^2}\right)^{-4}$

g) $\frac{(18a^{-2}b^3)^{-5}}{(27a^6)^{-2}} : (6a^{-4}b^2)^{-5}$

2.25. Es sind in Wurzel- bzw. in Potenzausdrücke umzuformen:

a) $a^{\frac{2}{3}}$ b) $x^{\frac{3}{9}}$ c) $u^{-\frac{2}{5}}$ d) $b^{\frac{3}{2}}$ e) $c^{\frac{11}{3}}$

f) $\sqrt[7]{a^3}$ g) $\sqrt[3]{a^7}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{c^3}}$ i) $x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ j) $\dfrac{x^3}{\sqrt[4]{x^3}}$

2.26. Es sind zu berechnen:

a) $16^{\frac{1}{2}}$ b) $32^{\frac{2}{5}}$ c) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ d) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2.27. Es sind zu vereinfachen:

a) $(4\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{3})^2$ b) $\sqrt{9x^2} \cdot \sqrt{16y^2}$ c) $\sqrt{9x^2 + 16y^2}$

d) $\sqrt{9x^2 + 24xy + 16y^2}$ e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{14}$ f) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{xy^7}$

g) $5\sqrt{72} + 3\sqrt{18} - 5\sqrt{98}$ h) $6\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{375} + 5\sqrt[3]{81}$

i) $(5\sqrt{12} - 6\sqrt{18}) \cdot 3\sqrt{6}$ j) $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(6\sqrt{5} - 5\sqrt{3})$

k) $\sqrt{7 + \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{13}}$ l) $\sqrt[r]{a^{3r-2}} \cdot \sqrt[r]{a^{2+r}}$

m) $\sqrt[5]{n^4} \cdot \sqrt[10]{n^3} \cdot \sqrt[15]{n^7}$ n) $\dfrac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[10]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} \cdot \sqrt[15]{a^2}}$

o) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt{\sqrt[9]{a^7}}$ p) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[8]{a^7}}$

q) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ r) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2}}$

s) $5\sqrt[3]{4\sqrt{2}} + 3\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$

2.28. Es sind die Nenner rational zu machen:

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{a^3}{\sqrt[4]{a}}$ c) $\dfrac{20}{7 + 3\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{6\sqrt{10} - 4\sqrt{21}}{5\sqrt{6} - 2\sqrt{35}}$ e) $\dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

2.29. Es sind die Wurzelwerte zu schätzen:

a) $\sqrt{38\,300}$ b) $\sqrt[3]{60\,000\,000}$ c) $\sqrt{0{,}00008}$ d) $\sqrt[3]{0{,}00008}$

2.30. In den folgenden Gleichungen ist x zu bestimmen:

a) $\log_2 32 = x,\ \log_2 \left(\dfrac{1}{32}\right) = x$ b) $\log_3 243 = x,\ \log_3 \left(\dfrac{1}{243}\right) = x$

c) $\log_4 64 = x,\ \log_{64} 4 = x$ d) $\log_a (a^5) = x,\ \log_a \left(\sqrt[5]{a}\right) = x$

e) $\log_5 x = 3,\ \log_3 x = 2,\ \log_2 x = -4,\ \log_a x = \dfrac{1}{3}$

f) $\log_x 36 = 2,\ \log_x \dfrac{1}{36} = 2,\ \log_x \dfrac{1}{36} = -2,\ \log_x 6 = \dfrac{1}{2}$

2.31. Durch Anwendung der Logarithmengesetze sind zu zerlegen:

a) $\log_a \frac{x^2}{y^3 z}$ b) $\log_u \sqrt[3]{\frac{u^5 v^2}{\sqrt[4]{w}}}$ c) $\log_m \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2}$ d) $\log_b \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

2.32. Durch Anwendung der Logarithmengesetze sind zusammenzufassen:

a) $2 \log_r x - 3 \log_r y$ b) $\frac{1}{3} (\log_a u + 4 \log_a v)$

c) $\frac{1}{2} [\log_m (a + b) + \log_m (a - b) - \log_m (a^2 + b^2)]$

d) $3 \log_x m + 2 \log_x (m - n) - \log_x [m^3(m - n)]$

2.33. Es sind zu berechnen:

a) $\left(\frac{0{,}0376}{32{,}8 \cdot 0{,}214}\right)^5$ b) $\sqrt[3]{\frac{3{,}26 \cdot 10^4}{1{,}45 \cdot 10^5}}$ c) $\sqrt[5]{4{,}96^4 - 1{,}76^5}$

d) $35{,}7^{1{,}4}$ e) $0{,}0258^{0{,}6}$ f) $\sqrt[10]{1{,}35}$

g) $\ln \left(\frac{3{,}8}{2{,}4}\right)^3$ h) $\ln 0{,}04$ i) $\exp\left(-\frac{1{,}2^2}{2}\right)$

j) lb 1,24 k) lb 64 l) $\log_8 100$

2.34. Welche Beziehung besteht zwischen den Pegelmaßen Neper (Np) und Dezibel (dB), wenn die absoluten Spannungspegel durch folgende Formeln definiert sind:

$$p_{s/\mathrm{dB}} = 20 \lg \frac{U_x}{U_0}, \quad p_{s/\mathrm{Np}} = \ln \frac{U_x}{U_0} \quad (U_0 = 0{,}775 \text{ V})?$$

2.35. Die folgenden Formeln sind umzustellen:

a) $f = \frac{q_m l^4}{120 EI}$ nach l b) $\varphi = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^y$ nach T_2

c) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ nach R d) $L = \left(\frac{C}{F}\right)^{\frac{10}{3}}$ nach F

e) $\varphi = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^y$ nach y f) $F_n = F_2(e^{\mu\beta} - 1)$ nach β

g) $p_s = 20 \lg \frac{U_x}{U_0}$ nach U_x h) $Q = \frac{2\pi L\lambda(t_i - t_a)}{\ln \frac{D}{d}}$ nach D

2.36. Ausgehend von $7! = 5040$ (s. Beispiel 2.116.) ist $10!$ zu berechnen.

2.37. Die Basis e des natürlichen Logarithmus kann mit der Formel $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Es ist e bis zur 5. Dezimalen zu berechnen. (Anleitung: Beginnend mit $n = 0$ sind die Summanden als Dezimalbrüche bis zur 6. Dezimalen als Schutzstelle zu berechnen. Die Summierung ist abzubrechen, wenn die erste wesentliche Ziffer in der 6. Dezimalen auftritt und kleiner als 5 ist.)

2.38. Es sind zu berechnen:

a) $\binom{12}{5}$ b) $\binom{12}{7}$ c) $\binom{20}{3}$ d) $\binom{20}{20}$ e) $\binom{20}{24}$ f) $\binom{-2}{3}$ g) $\binom{-2}{4}$

2.39. Mit dem binomischen Lehrsatz sind zu berechnen:

a) $(a - b)^8$ b) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^4$

c) die ersten 4 Glieder von $(a - 1)^{30}$

d) der Koeffizient von a^5 in $(a - 2)^9$

2.40. Für $y = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right]$ ist mit $a = 2$, $b = 4$ eine Wertetabelle mit Hilfe eines Rechenschemas entspr. Beispiel 2.129. für die Argumente $x = 0; 0{,}5; 1; \ldots; 8$ aufzustellen. Die Funktion ist grafisch darzustellen. Maßstäbe: x-Achse $1 \triangleq 1$ cm, y-Achse $0{,}1 \triangleq 2$ cm (d. h., die Einslängen sind $l_x = 1$ cm, $l_y = 20$ cm).

2.41. Für $y = \frac{2}{3}\sqrt{6x - x^2}$ ist mit Hilfe eines Rechenschemas eine Wertetabelle für $x = 0; 0{,}5; 1; \ldots; 3$ aufzustellen.

2.42. Es sind zu berechnen:

a) $2j + 3j - 7j$ b) $2j \cdot 3j$ c) $\frac{3j}{2j}$

d) j^{13}, j^{26}, j^{48} e) $\frac{1}{j^2}, j^{-9}, j^{-14}$

2.43. Mit $z_1 = 5 - 3j$, $z_2 = 2 + 4j$, $z_3 = -3 - 6j$ sind zu berechnen:

a) $z_1 + z_2z_3$ b) $z_1^2z_2$ c) $\frac{z_1z_2}{z_3}$ d) $\frac{1}{z_1z_3} + \frac{1}{z_2}$

e) $z_3^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$ f) z_2^4 g) $z_1z_1^* + (z_2 + z_2^*)$

2.44. Es sind die goniometrischen Formen zu berechnen:

a) $5 + 2j$ b) $4 - 7j$ c) $-18 + 15{,}4j$

d) $-6 - 25j$ e) $183 - 14j$ f) $-63 - 720j$

2.45. Aus der Vektordarstellung sind die goniometrischen Formen ohne Rechnung zu ermitteln:

a) $5j$ b) -10 c) $-8j$ d) 6

2.46. Es sind die arithmetischen Formen zu berechnen:

a) $20(\cos 32{,}6° + j \sin 32{,}6°)$ b) $0{,}3(\cos 245° + j \sin 245°)$

c) $4[\cos(-22{,}6°) + j \sin(-22{,}6°)]$ d) $80(\cos 168{,}3° + j \sin 168{,}3°)$

e) $6{,}7(\cos 87{,}2° + j \sin 87{,}2°)$ f) $0{,}681(\cos 183{,}1° + j \sin 183{,}1°)$

2.47. Aus der Vektordarstellung sind die arithmetischen Formen ohne Rechnung zu ermitteln:

a) $4(\cos 180° + j \sin 180°)$ b) $12(\cos 90° + j \sin 90°)$

c) $3(\cos 0° + j \sin 0°)$ d) $20[\cos(-90°) + j \sin(-90°)]$

2.48. Mit $z_1 = 20e^{j25°}$, $z_2 = 0{,}6e^{j141°}$, $z_3 = 3e^{-j65°}$, $z_4 = 0{,}12e^{j260°}$ sind zu berechnen:

a) z_1z_2 b) $\frac{z_2}{z_3}$ c) $\left(\frac{z_1z_4}{z_2}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{z_2}$

e) $\sqrt{z_3z_4}$ f) $\ln z_1$ g) $\ln z_2$ h) $\ln z_3$

Die Resultate sind in der arithmetischen Form anzugeben.

2.49. Mit $z_1 = 25 + 12j$, $z_2 = 18 - 3j$, $z_3 = 16$ sind mit Hilfe der Exponentialformen zu berechnen:

a) $\dfrac{z_1^2}{z_2^3}$ b) $\sqrt{z_1}$ c) $\ln z_2$ d) $\sqrt[4]{z_3}$

Die Resultate sind in der arithmetischen Form anzugeben.

2.50. Mit $A = [3, 10]$, $B = (5, 12)$, $C = (2, 8]$, $D = (6, 12]$ sind zu bilden:

a) $(B \cap D) \setminus (A \cup C)$ b) $[(A \cap B) \cup C] \setminus (C \cap D)$

c) $(D \setminus B) \cup [(A \cap C) \setminus D]$

2.51. Es sind zu addieren:

a) $\dfrac{20x^2 - 30xy}{8x^2 - 10xy} - \dfrac{4(2x + 3y)}{4x + 5y} - \dfrac{4x^2 - 25xy}{16x^2 - 25y^2}$

b) $\dfrac{2m - 3n}{3m + 4n} - \dfrac{3m - 4n}{2m - 3n} - 3 + \dfrac{7m^2 - 11mn + 5n^2}{6m^2 - mn - 12n^2}$

c) $\dfrac{7a + 2b}{6ab - 2b^2} - \dfrac{6a^2 + 7b^2}{9a^2b - b^3} - \dfrac{6a^2 - 4b^2}{27a^3 - 3ab^2} - \dfrac{3a - 4b}{9a^2 + 3ab}$

d) $\dfrac{1}{r^2 + 4rs + 4s^2} + \dfrac{1}{r^2 - 4s^2} - \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{4s^2}{r^4 - 4r^2s^2}$

2.52. Es sind zu berechnen:

a) $\left(\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{ab}{xy} + \dfrac{b^2}{y^2}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)$ b) $\dfrac{a^2 + 3a + 2}{4p^2 - 9} : \dfrac{a + 2}{2p - 3}$

2.53. Es sind zu vereinfachen:

a) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}$ b) $\dfrac{6 - 10x}{4x + \dfrac{15}{5 + \dfrac{30x}{2 - 6x}}}$

2.54. Es sind zu dividieren:

a) $(1{,}08x^4 + 0{,}96y^4 - 3{,}81x^2y^2 + 0{,}03x^3y - 0{,}92xy^3) : (0{,}9x^2 - 1{,}2y^2 - 1{,}1xy)$

b) $(143r^2 + 57rs + 4rt - 108s^2 + 210st - 90t^2) : (13r - 9s + 11t)$

2.55. Mit $A = \{x \mid |x - 3| = 2\}$, $B = \{x \mid |x + 2| = 3\}$, $C = \{x \mid |x - 4| = 1\}$ sind zu bilden:

a) $(A \setminus B) \cap C$ b) $(B \cup C) \setminus A$

2.56. Es sind alle Werte von $s = 2a + b - c$ für $|a| = 4$, $|b| = 5$, $|c| = 6$ zu berechnen.

2.57. Für $y = \dfrac{1}{4}|2x - 4| + 1$ ist für alle ganzzahligen x mit $-2 \leqq x \leqq 6$ eine Wertetabelle aufzustellen.

2.58. Es sind die Betragszeichen aufzulösen:

a) $|2a| - |3a + 4b|$ b) $|2x + y| - |x| + |y - 2x|$

2.59. Mit Summenzeichen sind darzustellen:

a) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{6}{5}$ b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{1}{8}\right) + \dfrac{1}{16} + \left(-\dfrac{1}{32}\right)$

c) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{7} + \dfrac{9}{10} + \dfrac{16}{13} + \dfrac{25}{16}$

2.60. Das arithmetische Mittel aus n Zahlen x_i ist durch $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ definiert. Es sind zu berechnen

a) die Summe der Abweichungen von $\bar{x}$: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})$

b) die Summe der Abweichungsquadrate von $\bar{x}$: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

2.61. Es ist $\frac{(a^2 - b^2)c}{ab + cd}$ für die Näherungswerte $a = 28{,}7$, $b = 28{,}6$, $c = 3{,}5 \cdot 10^3$, $d = 14$ zu berechnen.

2.62. Es sind zu vereinfachen:

a) $\left(\frac{u^{3r+4}v^{4s-1}}{w^{6t-5}} : \frac{u^{2r-5}v^{3s-4}}{w^{4t+3}}\right) : \frac{u^{7-2r}v^{s-3}}{w^{t-8}}$

b) $\frac{a^m(ab)^{m+n}\,ac^{2m}}{(bc)^m\,[(ab)^m]^2}$ c) $\left(\frac{a^{r-2}b^{3-s}}{c^{2t}}\right)^{-3} \cdot (a^{4-2r}c^{3t+1})^{-2}$

d) $\frac{(r-s)^{2n-3}}{r^{n-2}s} \cdot \frac{r^{2n+3}(r-s)^{4-n}}{s^{3n}} \cdot \frac{rs^{4n+1}}{(r-s)^{2n}}$

2.63. Es sind zu vereinfachen:

a) $\sqrt[n]{a^{2n-3}b^{3n+2}} \cdot \sqrt[n]{a^{3n-4}b^{5-2n}} \cdot \sqrt[n]{a^{7+n}b^{n-7}}$

b) $(2\sqrt{15} - 3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{21} - 2\sqrt{7})^2$

c) $(a\sqrt{a^3x} - b\sqrt{ax^3})\,(b\sqrt{a^2x^3} + a\sqrt{ax^2})$

d) $\sqrt[4]{x^3} : \left(\sqrt[6]{x^5} : \sqrt[9]{x^4}\right)$ e) $\frac{\sqrt[10]{3} \cdot \sqrt[12]{243} \cdot \sqrt[15]{27}}{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{9}}$

2.64. Es sind die Nenner rational zu machen:

a) $\frac{3 + x^2}{2 - \sqrt{1 - x^2}}$ b) $\frac{1}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{3 - \sqrt{8}}}{\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$

2.65. Es sind zu vereinfachen:

a) $\log_{32}\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $\log_e (e^{j\varphi})$ c) $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) + \log_{\frac{1}{a}}(a) + \log_a(a^2)$

2.66. Es ist zu beweisen, daß folgende Gleichung gilt:

$\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

2.67. Es sind zu berechnen:

a) $v = 140 \cdot R^{0{,}645} \cdot J^{\frac{5}{9}}$, $[v] = m/s$, für $R = 3{,}25$, $J = 0{,}25‰$

(Fließgeschwindigkeit v in Asbestzementrohrleitungen)

b) Druck p_1 aus der Formel $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$, wenn $T_1 = 393$ K, $T_2 = 293$ K, $p_2 = 93{,}25$ kPa, $\varkappa = 1{,}405$

c) Resonanzfrequenz f_0 eines Parallelresonanzkreises $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$ für $C = 400$ pF, $L = 0{,}3$ mH, $R = 120\,\Omega$

2.68. Die folgenden Formeln sind umzustellen:

a) $Q = C'A \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]$ nach T_1

b) $\tau_m = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$ nach σ_x

c) $\lambda_0 = 1 - \varepsilon_0 \left[\left(\frac{p_D}{p_S}\right)^{\frac{1}{n'}} - 1\right]$ nach p_D

d) $\varphi_1 = \ln \sqrt{0{,}3\beta^2 + 0{,}7}$ nach β

e) $\left(\frac{0{,}743}{0{,}532}\right)^{1{,}25} = \left(\frac{x}{1{,}54}\right)^{-1{,}47}$ nach x

2.69. Es sind zu berechnen:

a) $\binom{\frac{1}{2}}{4}$ b) $\binom{\frac{1}{2}}{5}$ c) $\binom{-\frac{1}{3}}{2}$ d) $\binom{-\frac{1}{3}}{3}$ e) $\binom{\frac{7}{2}}{6}$

2.70. Die folgenden Formeln sind zu beweisen:

a) $\binom{n}{3} = -\binom{-n+2}{3}$ b) $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}$

2.71. Mit dem binomischen Lehrsatz sind zu berechnen:

a) $(a + 2)^5 - (a - 2)^5$

b) die ersten 5 Glieder von $(1 - a)^{15}$

c) der Koeffizient von a^6 in $\left(\frac{1}{3} + 3a^2\right)^8$

d) $1{,}03^4$ bis zur 3. Dezimalen genau

2.72. Welche Beziehung folgt aus dem binomischen Lehrsatz für $a = b = 1$?

2.73. Für $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ ist mit Hilfe eines Rechenschemas eine Wertetabelle für die Argumente $x = 0; 2; 4; 6; -2; -4; -6$ aufzustellen.

2.74. Für $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ist mit Hilfe eines Rechenschemas eine Wertetabelle für $x = -2; -1{,}5; -1; \ldots; 2$ aufzustellen.

2.75. Es sind zu berechnen:

a) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$ für $z_1 = 150 + 20\mathrm{j}$, $z_2 = 50 - 4\mathrm{j}$

b) $\frac{1 + z}{1 - z}$ für $z = 0{,}63 + 0{,}25\mathrm{j}$

2.76. Es ist in ein Produkt mit 2 Faktoren zu zerlegen

(Anleitung: $a^2 + b^2 = (a + b\mathrm{j})(a - b\mathrm{j})$):

a) $9x^2 + 16y^2$ b) $4a + 5b$ $(a \geqq 0, b \geqq 0)$ c) 29

2.77. Mit $z_1 = 120 - 40j$, $z_2 = 30 + 5j$, $z_3 = 20j$, $z_4 = 0{,}28 + 0{,}12j$ sind mit Hilfe der Exponentialformen zu berechnen:

a) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{z_2}{z_1}}$ c) $\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)^3$

d) $\ln z_2$ e) $\ln z_3$ f) $\ln \sqrt{\dfrac{1 + z_4}{1 - z_4}}$

Die Resultate sind in der arithmetischen Form anzugeben.

3. Ebene Trigonometrie

3.0. Vorbemerkung

Die in der Elementargeometrie auftretenden Gleichungen sind algebraisch (vgl. 4.1.2.). Stellen sie Beziehungen zwischen Stücken des ebenen Dreiecks dar, so enthält eine Gleichung entweder nur Winkel, wie der Satz von der Winkelsumme im Dreieck, oder nur Seiten, wie z. B. der Satz des PYTHAGORAS. Im zweiten Fall können außer den Seiten noch andere Strecken und der Flächeninhalt des Dreiecks auftreten.
Der Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreiecks ist nicht durch algebraische Gleichungen darstellbar. Hierfür bedarf es daher eines besonderen Abschnitts der Geometrie:

> Die **Trigonometrie der Ebene** hat die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Strecken und Winkeln im ebenen Dreieck und in anderen ebenen, geradlinig begrenzten Figuren herzustellen. Sie benutzt hierzu die trigonometrischen Funktionen.

Die Lehre von den Eigenschaften und den gegenseitigen Beziehungen der trigonometrischen Funktionen heißt **Goniometrie** und ist ein Teil der Trigonometrie. Die Trigonometrie im engeren Sinne behandelt die eigentliche Dreiecksberechnung.

3.1. Zusammenfassung und Erweiterung der Goniometrie

3.1.1. Winkelmessung, Winkeleinheiten

In den Abschnitten 3.1.1. bis 3.1.4. werden die wichtigsten Teile der Gebiete der Goniometrie, die der Leser in seiner Grundausbildung kennengelernt hat, wiederholt und mittels weniger Beispiele geübt. Es wird zum Durcharbeiten dieser Abschnitte empfohlen, die behandelten Formeln jeweils in einem entsprechenden Nachschlagewerk aufzusuchen.
Zwei von einem gemeinsamen Punkt O ausgehende Strahlen schließen einen ebenen **Winkel** φ ein. Der Winkel ist also das Maß für den Richtungsunterschied zweier Strahlen. Er ergibt sich, wenn sich ein Strahl um seinen Anfangspunkt O von der Ausgangslage s_1 bis zu einer bestimmten Endlage s_2 dreht (Bild 3.1). Der Winkel heißt positiv oder negativ, je nachdem er durch Drehung eines Strahls gegen oder mit dem Uhrzeigersinn entsteht.

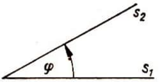


Bild 3.1

Dreht sich der Strahl einmal vollständig um seinen Anfangspunkt O, so wird der **Vollwinkel** φ_V beschrieben (Bild 3.2). Aus Bild 3.2 kann die Proportion $b : 2\pi r = \varphi : \varphi_V$ abgelesen werden. Sie ergibt für den Bogen

$$b = \frac{2\pi}{\varphi_V} r\varphi. \tag{3.1}$$

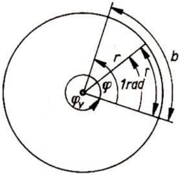


Bild 3.2

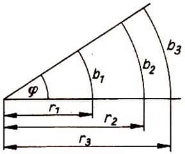


Bild 3.3

BEISPIEL

3.1. Werden um den Scheitelpunkt eines Winkels $\varphi = \frac{1}{12}\varphi_V$ beliebig viele Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3 usw. (Bild 3.3) geschlagen, so ergeben sich aus (3.1), wenn der Winkel φ eingesetzt wird, die Bogen

$$b_1 = \frac{\pi}{6} r_1, \quad b_2 = \frac{\pi}{6} r_2, \quad b_3 = \frac{\pi}{6} r_3, \ldots.$$

Hieraus folgt nach Umstellung

$$\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2} = \frac{b_3}{r_3} = \cdots = \frac{\pi}{6}.$$

Das Verhältnis b/r ist also für einen vorgegebenen Winkel φ bei beliebigen Radien r konstant. Es eignet sich daher als Maß für den Winkel φ.

Definition

Der **Radiant** ist der Winkel zwischen zwei Kreisradien, die aus dem Kreisumfang einen Bogen ausschneiden, dessen Länge gleich dem Radius ist. Er ist eine SI-Einheit und wird mit **rad** abgekürzt: 1 rad = 1 m/m.

Der ebene Winkel wird im allgemeinen als abgeleitete Größe aufgefaßt und ist dann eine Verhältnisgröße: 1 rad = 1 m/1 m.

Nach der Definition und dem Beispiel 3.1. ist **der in rad gemessene Winkel** die Maßzahl des zum Winkel gehörigen Bogens im Einheitskreis. Er wird deshalb auch als **Bogenmaß** des Winkels bezeichnet. Wird, wie oben geschehen, der ebene Winkel als Verhältnisgröße betrachtet, so darf die Einheit rad durch die Einheit Eins ersetzt werden. Daher gilt:

Winkel in Radiant bzw. im Bogenmaß

$$\boxed{\varphi/\mathrm{rad} = \varphi = \frac{b}{r}} \tag{3.2}$$

Wenn es der physikalische Sachverhalt verlangt, so ist die Einheit rad jedoch wie eine Basiseinheit anzuwenden. Im folgenden wird von der Gleichung 1 rad = 1 durchgängig Gebrauch gemacht und das Einheitenzeichen rad stets weggelassen.
Neben der Einheit rad sind für den ebenen Winkel noch die SI-fremden Einheiten Grad (°) und Gon (gon) sowie die Unterteilungen des Grades zugelassen, vgl. Tafel. Es gilt:

Vollwinkel $$\boxed{\varphi_V = 2\pi = 360° = 400 \text{ gon}} \tag{3.3}$$

Aus Gl. (3.1) folgt: $\varphi = \frac{\varphi_V}{2\pi} \cdot \frac{b}{r}$ und daraus mit $\varphi_V = 360°$ und Gl. (3.2) die

Umrechnungsformel von Radiant in Grad $$\boxed{\varphi_{/°} = \frac{180}{\pi} \cdot \varphi} \tag{3.4}$$

Die Schreibweise $\varphi_{/°}$ und φ bedeutet, daß die Maßzahl des in Grad und Radiant angegebenen Winkels einzusetzen ist.

BEISPIELE

3.2. Der Winkel $\varphi = \pi/5$ ist in Grad umzurechnen.

Lösung: Aus (3.4) folgt $\varphi_{/°} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36$; $\varphi = 36°$

3.3. Welcher Winkel in Radiant ergibt sich für $\varphi = 47{,}2°$?

Lösung: Gl. (3.4) ergibt nach Umstellung $\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi_{/°}$ und somit unter Benutzung der Konstanten π des Taschenrechners die Lösung $\varphi = 0{,}824$

Übersicht über die Winkelmaße

Bezeichnung	Grundeinheit	Unterteilung	Vollwinkel	Anwendung
Radiant-Teilung (Bogenmaß)	1 rad = 1	dezimal	2π rad $= 2\pi$	alle Fachgebiete
Dezimale Grad-Teilung	1°	dezimal	360°	Physik Technik Mathematik
Sexagesimale Grad-Teilung	1°	Minute: $1' = 1°/60$ Sekunde: $1'' = 1'/60$	360°	Geographie Astronomie Mathematik Technik
Gon-Teilung	1 gon	dezimal oder mit Vorsatz, z. B. 1 mgon = 0,001 gon	400 gon	Vermessungswesen

BEISPIELE

3.4. **Gegeben:** $\varphi = 0{,}1452$

Gesucht: φ in °, ′, mgon mit 4 signifikanten Ziffern.

Lösung: Aus (3.4) ergibt sich

$$\varphi/° = \frac{180}{\pi} \cdot 0{,}1452 \qquad \varphi = 8{,}319°$$

$$\varphi/' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 0{,}1452 \qquad \varphi = 499{,}2'$$

$$\varphi/\text{mgon} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{400}{360} \cdot 1000 \cdot 0{,}1452 \qquad \varphi = 9244 \text{ mgon}$$

3.5. **Gegeben:** $\varphi = 26°\,16'\,54''$

Gesucht: φ in rad mit 5 signifikanten Ziffern

Lösung: Durch Umstellung von (3.4) folgt die Gleichung

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi/°$$

und hieraus

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \left(26 + \frac{16}{60} + \frac{54}{3600}\right) \qquad \varphi = 0{,}45870$$

3.6. Die Sehschärfe, auch Trennungs- oder Auflösungsvermögen genannt, beträgt am Auge etwa 1′…4′. Dies entspricht bei einer 30fachen Fernrohrvergrößerung einer Erkennbarkeit im Objektraum von etwa $\varphi = 2''\cdots8''$. Wie groß ist die Grenze S_G der Sichtbarkeit in m für Gegenstände der Breite $b = 1, 10, 50$ mm mit Fernrohr mit 30facher Vergrößerung, wenn der Gegenstand noch bequem erkennbar sein soll?

Lösung: Bei $\varphi = 8''$ ergibt sich bequeme Erkennbarkeit. Nach (3.4) sind 8″ ein Winkel von $\varphi = 388 \cdot 10^{-7}$. Aus (3.2) folgt, da $S_G = r$ gilt: $S_G = \dfrac{b}{\varphi}$.

In Zahlen:

b/mm	1	10	50
S_G/m	26	258	1289

Kontrollfragen

3.1. Wann heißt ein Winkel negativ?

3.2. Wie ist die Winkeleinheit Radiant definiert, was zeichnet sie aus und in welcher Beziehung steht sie zum Gradmaß?

3.3. Welches Winkelgradmaß findet am meisten Anwendung, und welches Winkelgradmaß wird für bestimmte Wissenschaften gebraucht und ist daher noch zugelassen, obwohl es für die Zahlenrechnung unpraktisch ist? Begründungen!

Aufgaben: 3.1. bis 3.3.

3.1.2. Trigonometrische Funktionen

Ziel dieses Abschnittes ist die Wiederholung der Erklärung der trigonometrischen Funktionen und deren Eigenschaften.

BEISPIELE

3.7. Die Fahrtstrecken s_1, s_2, ... eines Straßenabschnitts bilden mit den Höhen h_1, h_2, ... rechtwinklige Dreiecke, die sämtlich einander ähnlich sind, weil sie alle den rechten Winkel und den Winkel α enthalten (Bild 3.4). Ähnliche Dreiecke stimmen aber stets im Verhältnis entsprechender Seiten überein:

$$\frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2} = \ldots$$

Es gilt: Für alle rechtwinkligen Dreiecke mit dem gleichen Winkel α ist das Seitenverhältnis $\dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ konstant.

3.8. Wird der Steigungswinkel α bei gleichbleibenden Fahrtstrecken s_1, s_2, ... verändert, so ändern sich die Höhen h_1, h_2, ... und die Verhältnisse $h_1 : s_1$, $h_2 : s_2$, ... ebenfalls (Bild 3.4). Sie werden größer, wenn α wächst, und kleiner, wenn α abnimmt.
Es gilt: Der Wert des Seitenverhältnisses ist ein Funktionswert des Winkels α.

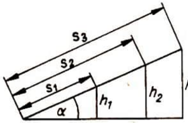


Bild 3.4

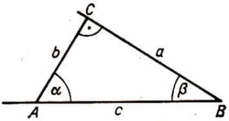


Bild 3.5

Das in den Beispielen 3.7. und 3.8. betrachtete Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck wird mit Sinus α, abgekürzt $\sin \alpha$, bezeichnet. Analog können weitere solche Funktionen definiert werden (Bild 3.5).

Erklärung der trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} \\ \tan\alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \\ \cot\alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} \end{aligned}} \qquad (3.5)$$

Die Werte der trigonometrischen Funktionen sind im allgemeinen irrationale Zahlen. Der geforderten Genauigkeit entsprechend sind diese unendlichen Dezimalbrüche auf eine endliche Stellenzahl zu beschränken.
Die modernen wissenschaftlichen Taschenrechner haben entweder einen Schalter oder eine Taste, mit denen man den jeweiligen Winkelmodus (Winkelmaß) für das Rechnen mit trigonometrischen Funktionen einstellen kann. Auf den Taschenrechnern werden die Winkeleinheiten rad, Grad (°), gon meistens mit RAD, DEG, GRAD bezeichnet. Häufig ist es möglich, die verschiedenen Winkelmaße durch Tastendruck ineinander zu überführen.

Die Funktionswerte für sin, cos, tan werden unmittelbar durch Tastendruck erhalten, während wegen Gl. (3.5) oder (3.10) der cot-Wert mittels Taste $1/x$ über tan zu bilden ist. Die Werte der Umkehrfunktionen arcsin, arccos, arctan werden mit Tasten erhalten, an denen bei manchen Taschenrechnern die Beschriftung $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ steht.

BEISPIELE

3.9. Folgende Funktionswerte sind zu bestimmen (dreistellig)

a) $\sin 28° \, 06' \, 36'' = \sin 28{,}11° = 0{,}471$

b) $\cot 21{,}23° = 1/\tan 21{,}23° = 2{,}574$

c) $\cos 0{,}599 = 0{,}826$

d) $\tan 44{,}73 \text{ gon} = 0{,}847$

3.10. Wie lauten die positiven spitzen Winkel in dezimaler Grad-Teilung und in rad mit 3 Stellen nach dem Komma, die zu den gegebenen Funktionswerten gehören?

a) $\sin\alpha = 0{,}90214$ $\qquad \alpha = 64{,}441° = 1{,}125$

b) $\cot\alpha = 1{,}02648$ $\qquad \tan\alpha = 0{,}97420$

$\alpha = 44{,}251° = 0{,}772$

3.11. Welchen Steigungswinkel α hat eine Gewindespindel, deren Gewindedurchmesser $d = 16{,}0$ mm und deren Ganghöhe $h = 2{,}0$ mm betragen (Bild 3.6)?

Lösung: $\tan\alpha = \dfrac{h}{U}$; $\quad \tan\alpha = \dfrac{2 \text{ mm}}{3{,}1416 \cdot 16 \text{ mm}} = 0{,}0398 \quad \underline{\underline{\alpha = 2{,}28°}}.$

3.12. Aus den Polarkoordinaten r, φ eines im 1. Quadranten liegenden Punktes P sind die rechtwinkligen Koordinaten u, v zu berechnen (Bild 3.7).

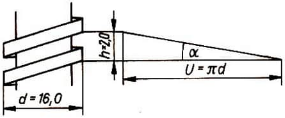


Bild 3.6

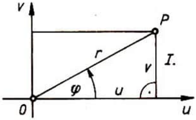


Bild 3.7

Lösung: Wegen $\varphi \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ folgt aus Gl. (3.5) und Bild 3.7

$$\cos\varphi = \frac{u}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{v}{r} \tag{I}$$

oder

$$\underline{\underline{u = r\cos\varphi}} \qquad \underline{\underline{v = r\sin\varphi}}.$$

Ferner läßt sich aus (3.5) und Bild 3.7 ablesen:

$$\tan\varphi = \frac{v}{u}, \qquad \cot\varphi = \frac{u}{v}. \tag{II}$$

Der in den Gln. (I) und (II) des Beispiels 3.12. enthaltene Zusammenhang zwischen rechtwinkligen Koordinaten und Polarkoordinaten für spitze Winkel φ wird auf beliebige Winkel $\varphi \in (-\infty; +\infty)$ erweitert und zur allgemeinen Einführung der trigonometrischen Funktionen (auch goniometrische oder Winkelfunktionen genannt) benutzt (Bild 3.8):

Allgemeine Definition der trigonometrischen Funktionen

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{v}{r} \qquad \cos\varphi = \frac{u}{r} \qquad \tan\varphi = \frac{v}{u} \qquad \cot\varphi = \frac{u}{v}} \tag{3.6}$$

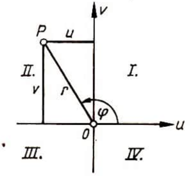


Bild 3.8

Durch Wahl des Punktes P im II. Quadranten im Bild 3.8 wird die Allgemeingültigkeit für beliebig große Winkel φ zum Ausdruck gebracht. Die Gln. (3.6) lassen sich geometrisch veranschaulichen:

Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Sinus bzw. **Cosinus** eines Winkels φ sind gleich der Maßzahl der Ordinate bzw. Abszisse des zu φ gehörigen Punktes P auf dem Einheitskreis (Bilder 3.9 bis 3.12). **Tangens** bzw. **Cotangens** eines Winkels φ sind gleich der Maßzahl der Ordinate des Punktes A bzw. Abszisse des Punktes B auf der Vertikal- bzw. Horizontaltangente des Einheitskreises.

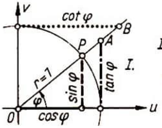


Bild 3.9

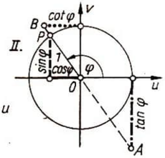


Bild 3.10

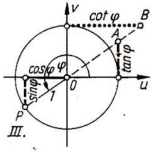


Bild 3.11

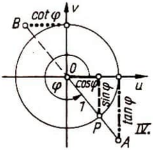


Bild 3.12

Die Vorzeichen der Funktionswerte sind mit denen der angegebenen Abszissen bzw. Ordinaten identisch (Bild 3.13).
In den Formelsammlungen werden diese Vorzeichen tabelliert wiedergegeben. Weiterhin sind dort die Funktionswerte für die besonderen Winkel $\varphi = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°$ zu finden.

Zwischen den Funktionswerten für spitze Winkel φ und denen der zugehörigen Komplementwinkel $90° - \varphi$ gelten die

Komplementbeziehungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(90° - \varphi) = \cos\varphi & \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi \\ \tan(90° - \varphi) = \cot\varphi & \cot(90° - \varphi) = \tan\varphi \end{array}} \qquad (3.7)$$

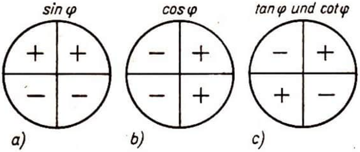


Bild 3.13

Diese letzten Gleichungen veranlassen dazu, die Cosinus- bzw. Cotangensfunktion als Cofunktion der Sinus- bzw. Tangensfunktion zu bezeichnen und umgekehrt.
Eine weitere anschauliche Vorstellung für die trigonometrischen Funktionen vermitteln die in den Bildern 3.14 bis 3.17 wiedergegebenen Kurven. Ihrem Verlauf ist zu entnehmen, daß die Sinus- und Cosinusfunktion für jeden beliebigen Winkel besteht. Hingegen existieren keine Tangenswerte für $\pi/2 = 90°$ sowie alle ungeradzahligen Vielfachen und keine Cotangenswerte für $0, \pi = 180°$ sowie alle ganzzahligen Vielfachen davon.
Bereits die Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionswerte am Einheitskreis läßt erkennen, daß es sich um periodische Funktionen mit der Periode $2\pi = 360°$ bzw. $\pi = 180°$ handelt:

Periodizität der trigonometrischen Funktionen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(\varphi + k \cdot 360°) = \sin\varphi & \\ \cos(\varphi + k \cdot 360°) = \cos\varphi & k \in G \\ \tan(\varphi + k \cdot 180°) = \tan\varphi & \\ \cot(\varphi + k \cdot 180°) = \cot\varphi & \end{array}} \qquad (3.8)$$

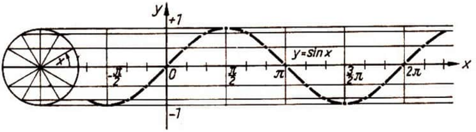


Bild 3.14

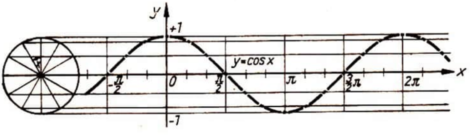


Bild 3.15

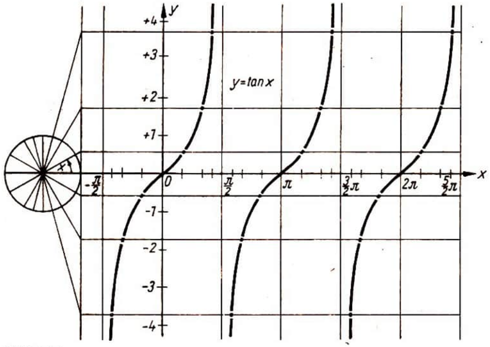


Bild 3.16

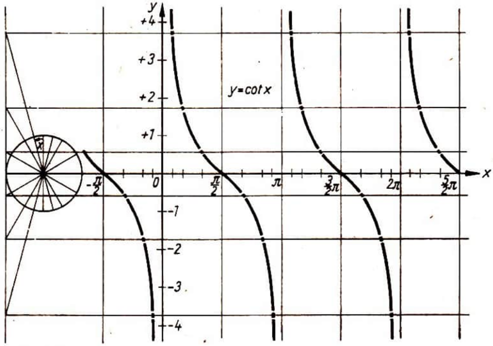


Bild 3.17

Mit (3.8) können trigonometrische Funktionswerte beliebiger Winkel auf Funktionswerte von Winkeln zwischen 0° und 360° bzw. 180° zurückgeführt werden.

BEISPIEL

3.13. a) $\cos(-640°) = \cos(-640° + 2 \cdot 360°) = \underline{\underline{\cos 80°}}$

b) $\tan\left(\frac{13}{4}\pi\right) = \tan\left(\frac{13}{4}\pi - 3\pi\right) = \underline{\underline{\tan\frac{\pi}{4}}}$

Aus (3.6) folgt in Verbindung mit Bild 3.8 der

Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen

$$\boxed{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1} \qquad \boxed{\tan\varphi \cdot \cot\varphi = 1} \qquad (3.9);\ (3.10)$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} \qquad \boxed{\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}} \qquad (3.11);\ (3.12)$$

Die vier Formeln sind bis auf die genannten Ausnahmen für beliebige Winkel gültig. Sie ermöglichen es u. a., die Winkelfunktionen ineinander zu überführen.

BEISPIEL

3.14. Gegeben: $\cot\varphi$, gesucht: $\cos^2\varphi$.

Lösung: Aus (3.9) und (3.12) folgt

$$\cot^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}.$$

Gleichung mit Nenner multiplizieren und Nullform herstellen:

$$\begin{aligned}
\cot^2\varphi - \cot^2\varphi\cdot\cos^2\varphi - \cos^2\varphi &= 0 && \cos^2\varphi \text{ ausklammern}\\
\cot^2\varphi - \cos^2\varphi\cdot(\cot^2\varphi + 1) &= 0 && \text{umordnen}\\
\cos^2\varphi\cdot(\cot^2\varphi + 1) &= \cot^2\varphi\\
\cos^2\varphi &= \frac{\cot^2\varphi}{1+\cot^2\varphi}.
\end{aligned}$$

Alle Umwandlungsmöglichkeiten sind in der folgenden Tafel enthalten:

Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen (3.13)

Gegeben → Gesucht ↓	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
$\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\dfrac{\tan\varphi}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\cos\varphi$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	$\cos\varphi$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\dfrac{\cot\varphi}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\tan\varphi$	$\dfrac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$\tan\varphi$	$\dfrac{1}{\cot\varphi}$
$\cot\varphi$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$	$\dfrac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\dfrac{1}{\tan\varphi}$	$\cot\varphi$

Anmerkung: Von den beiden in der Tabelle angegebenen Vorzeichen für den jeweils gesuchten Funktionswert kommt nur eines in Frage, über dieses Vorzeichen entscheidet der Quadrant des Winkels φ nach Bild 3.13.

BEISPIEL

3.15. Die Deutsche Reichsbahn kennzeichnet Steigungen durch Schilder der Form in Bild 3.18 a). Die Aufschrift bedeutet, daß für $e = 30$ m waagerechte Entfernung die Steigung $h = 1$ m für eine schräge Streckenlänge von $s = 670$ m beträgt (Bild 3.18 b). Zu bestimmen ist der Höhenunterschied Δh zwischen Anfang A und Ende E dieses Streckenabschnittes auf mm genau!

Lösung: Aus Bild 3.18 b folgen

$$\tan\alpha = \frac{h}{e}$$

und

$$\sin\alpha = \frac{\Delta h}{s}$$

oder

$$\Delta h = s \sin\alpha.$$

Entsprechend zum Beispiel 3.14. läßt sich folgende Formel herleiten, die auch aus der Tafel (3.13) entnommen werden kann:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Beim Einsetzen der gegebenen Zahlen ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{1}{30} = 0{,}033\,333 \qquad \sin\alpha = 0{,}033\,314$$

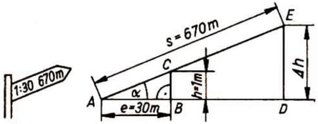
$$\Delta h = 670\ \text{m} \cdot 0{,}033\,314 \qquad \underline{\underline{\Delta h = 22{,}320\ \text{m}.}}$$

Aus Bild 3.19 kann für kleine Winkel $\varphi \in (0; \pi/2)$ im Einheitskreis die Ungleichung $\sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$ abgelesen werden, die auf folgende **Beziehung für die Funktionswerte Sinus und Tangens zum Radiant bei kleinen Winkeln** führt:

$$\boxed{\sin\varphi \approx \varphi \approx \tan\varphi} \qquad (3.14)$$

Die Näherungsformel (3.14) gilt in dem Bereich (ohne Beweis):

Genauigkeit der Rechnung	3-	4-	5-	6stellig
$\lvert\varphi\rvert <$	5,7°	2,6°	1,2°	0,6°



a) b)

Bild 3.18

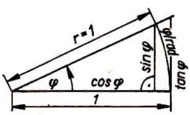


Bild 3.19

BEISPIELE

3.16. Für die Periodendauer T einer Sinusschwingung gilt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{my}{F}}$$

Hierbei bedeuten m die schwingende Masse, y den Ausschlag aus der Ruhelage, F die rücktreibende Kraft. Die Periodendauer des mathematischen Pendels ist für kleine Ausschlagwinkel $\alpha < 5°$ zu berechnen.

Lösung: Der jeweilige Ausschlag ist der zum Winkel α gehörige Bogen $y = l\alpha$, für die rücktreibende Kraft ergibt sich $F = G \sin \alpha = mg \sin \alpha$ (Bild 3.20). Wird für kleine Ausschläge nach (3.14) $\sin \alpha \approx \alpha$ gesetzt, so ergibt sich aus obiger Formel

$$\underline{\underline{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}}\,.$$

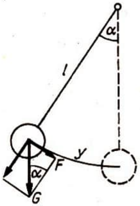


Bild 3.20

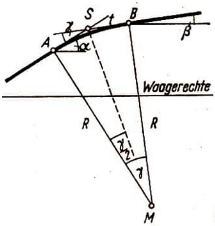


Bild 3.21

3.17. Bei der Projektierung einer Straße ergibt sich die Aufgabe, zwei Geraden mit verschiedenem Anstieg durch einen Kreisbogen abzurunden. Die Neigungen betragen $p_A = 5{,}4\%$ und $p_B = 1{,}4\%$, der Ausrundungshalbmesser soll $R = 2000$ m sein. Für die Absteckung des Profils werden die Tangentenstrecken $t = \overline{AS} = \overline{BS}$ gebraucht. Bild 3.21 zeigt einen Vertikalschnitt durch das Gelände.

Lösung: Aus Bild 3.21 wird abgelesen

$$\tan \alpha = \frac{p_A}{100}, \qquad \tan \beta = \frac{p_B}{100}.$$

Da α, β, γ klein sind, ergibt sich nach Gl. (3.14)

$$\tan \gamma = \tan (\alpha - \beta) \approx \alpha - \beta \approx \tan \alpha - \tan \beta = \frac{p_A - p_B}{100}.$$

Aus Bild 3.21 folgt ferner

$$t = R \tan \frac{\gamma}{2} \approx R\, \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{2}\, \gamma \approx \frac{R}{2} \tan \gamma.$$

Somit: $t \approx \dfrac{R}{200}\,(p_A - p_B)$.

Die gegebenen Werte führen auf

$$\underline{\underline{t \approx 40 \text{ m}.}}$$

Zur Berechnung der Funktionswerte für Winkel über 90° gelten die

Quadrantenbeziehungen

	$90° \pm \varphi$	$180° \pm \varphi$	$270° \pm \varphi$	$360° \pm \varphi$	$-\varphi$
sin...	$+\cos \varphi$	$\mp\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\pm\sin \varphi$	$-\sin \varphi$
cos...	$\mp\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\pm\sin \varphi$	$+\cos \varphi$	$+\cos \varphi$
tan...	$\mp\cot \varphi$	$\pm\tan \varphi$	$\mp\cot \varphi$	$\pm\tan \varphi$	$-\tan \varphi$
cot...	$\mp\tan \varphi$	$\pm\cot \varphi$	$\mp\tan \varphi$	$\pm\cot \varphi$	$-\cot \varphi$

(3.15)

Am Beispiel der Sinusfunktion sind diese Beziehungen am Einheitskreis veranschaulicht (Bilder 3.22 und 3.23). Aus (3.15) ergibt sich, daß bei Bezugnahme auf 180° und 360° stets die Funktionsart erhalten bleibt, während bei 90° und 270° zur Cofunktion überzugehen ist. Allgemein läßt sich dieser Sachverhalt durch

$$|\mathrm{F}\,(180° \pm \varphi)| = |\mathrm{F}\,(360° \pm \varphi)| = |\mathrm{F}\,(\varphi)|$$
$$|\mathrm{F}\,(90° \pm \varphi)| = |\mathrm{F}\,(270° \pm \varphi)| = |\mathrm{co}\,\mathrm{F}\,(\varphi)| \qquad (3.16)$$

wiedergeben, wobei F stellvertretend für sin, cos usw. steht. Die Vorzeichen der Funktionswerte bestimmen sich nach der Vorzeichenregel (vgl. Bild 3.13). In der letzten Spalte von (3.15) sind noch negative Winkel aufgenommen (vgl. 3.1.1.). Die Quadrantenbeziehungen gelten für beliebiges φ.

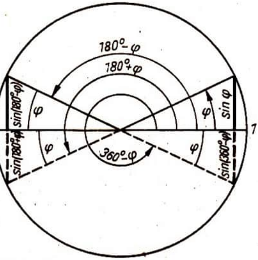


Bild 3.22

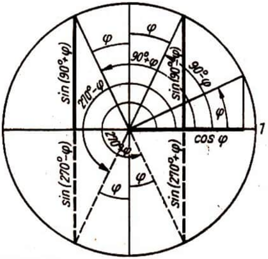


Bild 3.23

BEISPIELE

3.18. Folgende Funktionswerte sind dreistellig zu bestimmen, indem sie auf Funktionswerte positiver spitzer Winkel zurückgeführt werden.

a) $\sin 230{,}833° = \sin(180° + 50{,}833°) = -\sin 50{,}833° = \underline{\underline{-0{,}775.}}$

Es läßt sich auch über 270° rechnen:

$\sin 230{,}833° = \sin(270° - 39{,}117°) = -\cos 39{,}117° = \underline{\underline{-0{,}775.}}$

b) $\tan 3{,}49415 = \tan(\pi + 0{,}35256) = \tan 0{,}35256 = \underline{\underline{0{,}36793}}.$

Zu beachten ist, daß diese hier zur Anwendung von (3.15) bzw. (3.16) gezeigten Beispiele für die Arbeit mit dem Taschenrechner ohne Bedeutung sind, da er diese Umrechnungen selbsttätig vornimmt.

3.19. Welche Winkel $\varphi \in [0°; 360°)$ mit einer Dezimale erfüllen die folgenden Gleichungen? (Anmerkung: Zuerst sind die dem Vorzeichen entsprechenden Quadranten, dann der zum Betrag des Funktionswertes gehörige spitze Winkel zu bestimmen.)

a) $\sin\varphi = 0{,}6032$

Lösung: Quadrant I, II. Aus $\sin\varphi = \sin(180° - \varphi)$ folgt $\underline{\underline{\varphi_1 = 37{,}1°}}$; $\underline{\underline{\varphi_2 = 142{,}9°}}$.

b) $\cos\varphi = -0{,}9494$

Lösung: II, III. Aus $\cos(180° \pm \alpha) = -\cos\alpha = \cos\varphi$ folgt mit $\alpha = 18{,}3°$: $\underline{\underline{\varphi_1 = 161{,}7°}}$; $\underline{\underline{\varphi_2 = 198{,}3°}}$. (Bild 3.24)

c) $\tan\varphi = -1{,}171$

Lösung: II, IV. Aus $\tan(180° - \alpha) = \tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha = \tan\varphi$ folgt mit $\alpha = 49{,}5°$: $\underline{\underline{\varphi_1 = 130{,}5°}}$; $\underline{\underline{\varphi_2 = 310{,}5°}}$.

d) $\cot\varphi = 2{,}164$

Lösung: I, III. Aus $\cot\varphi = \cot(180° + \varphi)$ und $\tan\varphi = 1/\cot\varphi$ folgt: $\underline{\underline{\varphi_1 = 24{,}8°}}$; $\underline{\underline{\varphi_2 = 204{,}8°}}$.

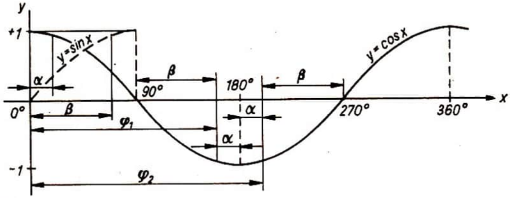


Bild 3.24

Kontrollfragen

3.4. Wie sind die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel definiert?
3.5. Welche Möglichkeiten zur Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionen gibt es, und welche Vorzeichen haben die Funktionswerte in den vier Quadranten?
3.6. Wie lautet die Periode für die trigonometrischen Funktionen?
3.7. Welche Beziehung gilt für kleine Winkel?
3.8. In welchen Gleichungen lassen sich die Quadrantenbeziehungen zusammenfassen?

Aufgaben: 3.4. bis 3.10.

3.1.3. Additionstheoreme und andere goniometrische Formeln

In diesem Abschnitt werden einige goniometrische Formeln hergeleitet, deren Grundlage die sog. Additionstheoreme bilden. Mit dem Wissen um die Handhabung dieser Formeln wird u. a. die Umformung trigonometrischer Terme in ähnlicher Weise möglich wie die algebraischer Summen durch die Regeln der Klammerrechnung.

Funktionen von Winkelsummen und -differenzen

Aus Bild 3.25 sind folgende Beziehungen abzulesen:

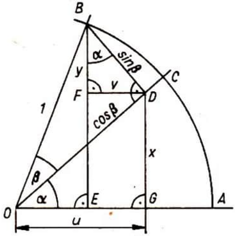


Bild 3.25

Im $\triangle\, OEB$ gilt

$$\sin(\alpha + \beta) = x + y \qquad \text{(I)} \qquad \cos(\alpha + \beta) = u - v \qquad \text{(II)}$$

im $\triangle\, OGD$

$$\sin\alpha = \frac{x}{\cos\beta} \qquad \text{(III)} \qquad \cos\alpha = \frac{u}{\cos\beta} \qquad \text{(IV)}$$

im $\triangle\, DBF$

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sin\beta} \qquad \text{(V)} \qquad \sin\alpha = \frac{v}{\sin\beta}. \qquad \text{(VI)}$$

(III) nach x und (V) nach y aufgelöst und beides in (I) eingesetzt, ergibt

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} \qquad (3.17)$$

Aus (II) folgt mit (IV) und (VI)

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \qquad (3.18)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Formeln (3.17) und (3.18) und damit die aus ihnen noch herzuleitenden Gleichungen für beliebige Winkel gelten. Auf den Beweis wird verzichtet.

Wird in (3.17) und (3.18) der Winkel β durch $(-\beta)$ ersetzt und werden die aus (3.15) folgenden Gln. $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ und $\cos(-\beta) = \cos\beta$ beachtet, so ergibt sich

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \tag{3.19}$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \tag{3.20}$$

Gl. (3.17) durch (3.18) bzw. (3.19) durch (3.20) dividiert und mit $\cos\alpha\cos\beta$ gekürzt, ergibt einschließlich der analogen Formel für die Cotangensfunktion

$$\boxed{\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}} \quad (3.21) \qquad \boxed{\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}} \quad (3.22)$$

Die Formeln (3.17) bis (3.22) heißen **Additionstheoreme.**

BEISPIELE

3.20. tan 15° ist ohne Benutzung von Rechenhilfsmitteln zu bestimmen.

Lösung: Wegen (3.21) und $\tan 45° = 1$, $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ergibt sich:

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \underline{\underline{2 - \sqrt{3} \approx 0{,}26795}}.$$

3.21. Die beiden an einer Schraube wirksamen Kräfte, nämlich Schraubenumfangskraft F und Last F_Q, sind an dem in die Ebene abgewickelten Schraubengang in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur schiefen Ebene zerlegt (Bild 3.26). Für die Aufwärtsverschie-

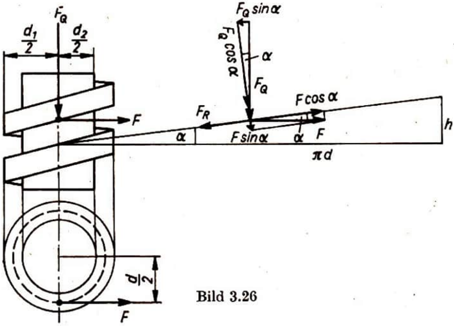


Bild 3.26

bung der Last wirkt nur die dynamische Komponente $F \cos \alpha$ von F. Entgegengesetzt zu dieser Kraft wirken der sich aus F_Q ergebende Hangabtrieb $F_Q \sin \alpha$ und der durch die beiden statischen Komponenten von F_Q und F hervorgerufene Reibungswiderstand $F_R = \mu \cdot F_N$ mit $F_N = F_Q \cos \alpha + F \sin \alpha$. F ist in F_Q auszudrücken, wobei für die Reibungszahl $\mu = \tan \varrho$ gesetzt wird.

Lösung: Gleichgewicht herrscht, wenn

$$F \cos \alpha = F_Q \sin \alpha + \mu \cdot (F_Q \cos \alpha + F \sin \alpha).$$

Durch Umstellung:

$$F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = F_Q(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

oder

$$F = F_Q \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

μ ersetzt und mit $\cos \alpha$ gekürzt:

$$F = F_Q \frac{\tan \alpha + \tan \varrho}{1 - \tan \alpha \tan \varrho}$$

Mit dem Additionstheorem (3.21) für das obere Vorzeichen folgt hieraus:

$$\underline{\underline{F = F_Q \tan (\alpha + \varrho).}}$$

Funktionen des doppelten Winkels

Wird $\beta = \alpha$ in (3.17) und (3.18) gesetzt, so ergibt sich:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (3.23) \qquad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad (3.24)$$

Aus (3.24) folgt bei Beachtung von (3.9)

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1} \quad (3.25) \qquad \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha} \quad (3.26)$$

BEISPIEL

3.22. Von einem gleichschenkligen Dreieck (Bild 3.27) ist die Schenkellänge a und der Basiswinkel α bekannt. Wie lang ist die Höhe h?

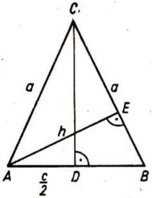


Bild 3.27

Lösung: Die zusätzlich eingezeichnete Höhe $\overline{CD}$ teilt $\triangle\, ABC$ in zwei kongruente Teildreiecke.

Im $\triangle\, ABE$ gilt: $\quad h = c \sin \alpha \quad$ und $\qquad$ (I)

im $\triangle\, ADC$ gilt: $\quad \dfrac{c}{2} = a \cos \alpha. \qquad$ (II)

(I) in (II) eingesetzt: $\quad h = 2a \cos \alpha \sin \alpha.$

Es läßt sich noch Gl. (3.23) verwerten.
Länge der Höhe: $\underline{\underline{h = a \sin 2\alpha.}}$

Verwandlung von Produkten in Summen von Funktionen und umgekehrt

Aus Gln. (3.17) bis (3.20) ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion folgende Formeln:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \tag{3.27}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \tag{3.28}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \tag{3.29}$$

Ist die umgekehrte Aufgabe zu lösen, was bei technischen Problemen zur Vereinfachung der Endformeln notwendig werden kann, so benutzt man die folgenden Formeln, die aus den letzten drei Gleichungen folgen und hier ohne Beweis angegeben sind:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{3.30}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{3.31}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{3.32}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{3.33}$$

BEISPIEL

3.23. Der Ausdruck $x = \dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$ ist zu vereinfachen.

Lösung: Mit Gln. (3.30), (3.32) und (3.12) folgt

$$x = \frac{2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}} = \underline{\underline{\cot \frac{\alpha + \beta}{2}}}.$$

Kontrollfrage

3.9. In welcher Form stellen Gleichungen, die Additionstheoreme genannt werden, die trigonometrischen Funktionen einer Winkelsumme oder -differenz dar?

Aufgaben: 3.11. bis 3.13.

3.1.4. Die allgemeine Sinusfunktion

Die Sinusfunktion eignet sich dazu, bestimmte Schwingungsvorgänge mathematisch zu erfassen. Zur Anpassung an die entsprechenden Verhältnisse ist es erforderlich, die Grundfunktion zu verallgemeinern:

Allgemeine Sinusfunktion, harmonische Funktion $\boxed{y = a \sin (\omega t + \varphi)}$ (3.34)

Als unabhängige Variable tritt hierbei die Zeit t auf. Um den Einfluß der Größen a, ω und φ deutlich werden zu lassen, sind im Vergleich mit $y = \sin t$ dargestellt:

Bild 3.28: $y = a \sin t$ mit $a = -3;\ 1/2;\ 2$,

Bild 3.29: $y = \sin \omega t$ mit $\omega = -1;\ 2/3;\ 2$,

Bild 3.30: $y = \sin (t + \varphi)$ mit $\varphi = -\pi/2;\ \pi/2;\ 3\pi/4$,

Bild 3.31: $y = \dfrac{5}{2} \sin \left(\dfrac{2}{3} t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Wie zu erkennen ist, bewirken in Gl. (3.34)

1. der Faktor a eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Ordinaten auf das $|a|$-fache, je nachdem $|a| > 1$ oder $|a| < 1$, und eine Spiegelung an der t-Achse, falls $a < 0$,
2. der Faktor ω eine gleichmäßige Stauchung oder Dehnung in Richtung der t-Achse auf das $1/|\omega|$-fache, je nachdem, ob $|\omega| > 1$ oder $|\omega| < 1$, und eine Spiegelung an

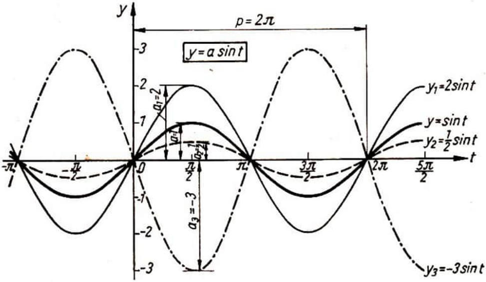


Bild 3.28

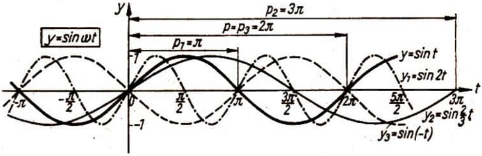


Bild 3.29

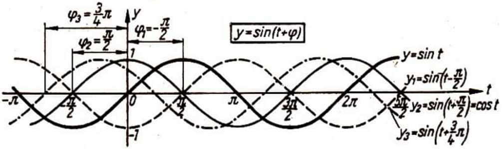


Bild 3.30

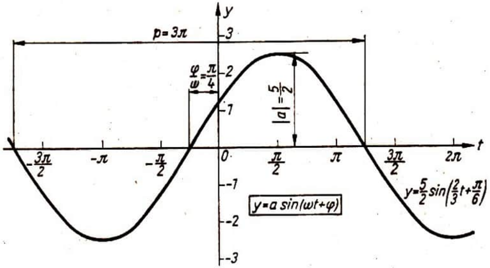


Bild 3.31

der y-Achse für $\omega < 0$. Die ursprüngliche Periodenlänge 2π verändert sich auf $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$. So weist die im Bild 3.31 dargestellte Kurve eine Periodenlänge von $T = 2\pi : \dfrac{2}{3} = 3\pi$ auf.

3. der Summand φ eine Verschiebung der Sinuskurve in Richtung der t-Achse um $\dfrac{\varphi}{\omega}$ nach rechts oder links, je nachdem $\dfrac{\varphi}{\omega} < 0$ oder > 0. Um sie zu bestimmen, ist ω in $\sin(\omega t + \varphi)$ auszuklammern: $\sin \omega \left(t + \dfrac{\varphi}{\omega}\right)$. Für $y = \dfrac{5}{2} \sin\left(\dfrac{2}{3} t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{2} \sin \dfrac{2}{3}\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ beträgt sie $\pi/4$ nach links (vgl. Bild 3.31).

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden die in (3.34) auftretenden Größen als dimensionslos aufgefaßt. Wird die harmonische Funktion auf physikalische Vorgänge angewendet, so haben sie folgende Bedeutung:

y	Elongation	$[y] = \text{m}$
t	Zeit	$[t] = \text{s}$
a	Amplitude	$[a] = \text{m}$
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz ($\omega > 0$)	$[\omega] = 1/\text{s}$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
$\omega t + \varphi$	Phasenwinkel	$[\omega t + \varphi] = 1$
φ	Nullphasenwinkel	$[\varphi] = 1$

Oft werden auf der Abszissenachse nicht die Werte t, sondern ωt abgetragen. Hierbei wird der Zusammenhang zwischen den in Gl. (3.34) auftretenden Konstanten und ihrer geometrischen Bedeutung einfacher.

Satz

Werden auf der Abszissenachse die Werte ωt markiert, so ergeben sich die Periode 2π und die Verschiebung φ. Die Stauchung oder Dehnung entfällt (Bild 3.32).

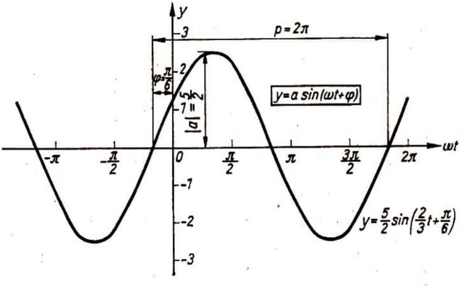


Bild 3.32

BEISPIELE

3.24. Ein mathematisches Pendel der Länge $l = 3{,}15$ m werde ins Schwingen versetzt. Nach einem Ausschlag von $\alpha_0 = 2°$ beginne die Zeitmessung. Der Maximalausschlag betrage $\alpha_{max} = 4°$ (Bild 3.33). Welche harmonische Funktion beschreibt die Schwingung?

Lösung: Nach der Kreisbogenformel ergibt sich als Amplitude $a = \alpha_{max} \cdot l$.

Aus der im Beispiel 3.16. ermittelten Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{folgt} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Mit $y = y_0$ als Elongation zur Zeit $t = 0$ s gilt:

$$y_0 : a = \alpha_0 : \alpha_{max} \Rightarrow y_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_{max}} \cdot a,$$

und nach Gl. (3.34):

$$y_0 = a \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{y_0}{a} = \frac{\alpha_0}{\alpha_{max}}.$$

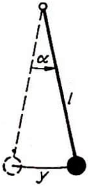


Bild 3.33

Da die Zeitmessung im 1. Viertel der 1. Schwingung beginnt, muß $\varphi \in (0; \pi/2)$ sein. Mit den vorhandenen Werten ergeben sich:

$$a = \frac{4^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 3{,}15 \text{ m} = 0{,}22 \text{ m}; \qquad \omega = \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ m}}{3{,}15 \text{ m s}^2}} = 1{,}76 \frac{1}{\text{s}};$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ = \pi/6.$$

Für die im Bild 3.34 dargestellte Pendelschwingung gilt:

$$\underline{\underline{y = 0{,}22 \text{ m} \cdot \sin\left(1{,}76 \frac{t}{\text{s}} + \frac{\pi}{6}\right)}},$$

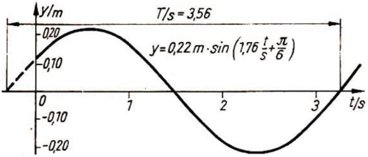


Bild 3.34

3.25. Zur Zeit t nach Beginn einer Periode hat ein Wechselstrom $i = I_{max} \sin \omega t$ mit $I_{max} = 10$ A, $f = 50$ Hz den Momentanwert $i = 2$ A. Wie groß ist die Zeit t in µs? Es gilt $\omega = 2\pi f$.

Lösung: $\sin\left(314{,}16 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) = 0{,}2$

$$314{,}16 \frac{1}{\text{s}} \cdot t = 0{,}20136$$

$$\underline{\underline{t = 641 \ \mu\text{s}.}}$$

3.26. Der Scheitelwert einer Wechselspannung mit der Frequenz $f = 50$ Hz wird $t = 0{,}001$ s nach Beginn der Messung erreicht. Wie groß ist der Winkel φ, um den der Nulldurchgang gegen den Beginn der Messung verschoben ist?

Lösung: $\sin\left(314{,}16\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}001\ \mathrm{s} + \varphi\right) = 1$

$$0{,}31416 + \varphi = 90^\circ;\ \varphi = 90^\circ - 18^\circ$$

$$\underline{\underline{\varphi = 72^\circ.}}$$

Addition von Sinusschwingungen

Bei der Anwendung der harmonischen Funktion (3.34) auf Schwingungsvorgänge ist folgender Satz von Bedeutung.

Satz

Die **Addition zweier Sinusschwingungen** (Bild 3.35) gleicher Kreisfrequenz ω

$$A = a\sin(\omega t + \varphi_a), \qquad B = b\sin(\omega t + \varphi_b)$$

mit dem Phasenunterschied $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ ergibt wieder eine Sinusschwingung

$$C = c\sin(\omega t + \psi).$$

Der Nullphasenwinkel ψ und die Amplitude c folgen aus

$$\boxed{\tan\psi = \frac{a\sin\varphi_a + b\sin\varphi_b}{a\cos\varphi_a + b\cos\varphi_b}} \tag{3.35}$$

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}} \tag{3.36}$$

Zähler und Nenner von (3.35) stimmen im Vorzeichen mit $\sin\psi$ und $\cos\psi$ überein, vgl. (3.11). Der Quadrant von ψ folgt daher aus der Vorzeichenregel, Bild 3.13.

Beweis: Aus $C = A + B$ ergibt sich:

$$c\sin(\omega t + \psi) = a\sin(\omega t + \varphi_a) + b\sin(\omega t + \varphi_b).$$

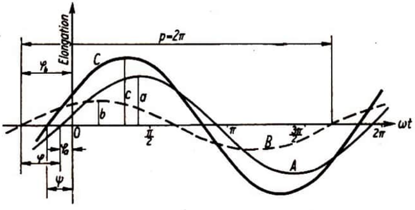


Bild 3.35

Mit Gl. (3.17):

$$\begin{aligned} &c \sin(\omega t) \cos\psi + c\cos(\omega t)\sin\psi \\ &= a\sin(\omega t)\cos\varphi_a + a\cos(\omega t)\sin\varphi_a \\ &\quad + b\sin(\omega t)\cos\varphi_b + b\cos(\omega t)\sin\varphi_b. \end{aligned}$$

Anders geordnet:

$$\begin{aligned} &\sin(\omega t)\, c\cos\psi + \cos(\omega t)\, c\sin\psi \\ &= \sin(\omega t)\,[a\cos\varphi_a + b\cos\varphi_b] + \cos(\omega t)\,[a\sin\varphi_a + b\sin\varphi_b]. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt, d. h., der Ansatz $C = A + B$ ist richtig, wenn die Koeffizienten von $\sin(\omega t)$ bzw. $\cos(\omega t)$ auf der linken und rechten Seite der Gleichung übereinstimmen (Koeffizientenvergleich):

$$c\sin\psi = a\sin\varphi_a + b\sin\varphi_b. \tag{I}$$

$$c\cos\psi = a\cos\varphi_a + b\cos\varphi_b. \tag{II}$$

Die Division von (I) und (II) liefert wegen Gl. (3.11) die Gl. (3.35). Werden die Gln. (I) und (II) quadriert und addiert, so folgt bei Beachtung von Gl. (3.9) und (3.20) nach Ziehen der Quadratwurzel die Gl. (3.36).

BEISPIEL

3.27. Gegeben seien die Sinusschwingungen

$$A = 10\ \text{cm} \cdot \sin\left(4\frac{t}{\text{s}} + 0{,}2404\right) \quad \text{und}$$

$$B = 5\ \text{cm} \cdot \sin\left(4\frac{t}{\text{s}} + 1{,}0419\right).$$

Wie lautet die Summe C beider Schwingungen bei Rechnung mit 4 signifikanten Ziffern?

Lösung: Die Nullphasenwinkel betragen im Gradmaß

$\varphi_a = 13{,}77°$, $\varphi_b = 59{,}70°$, $\varphi = \varphi_b - \varphi_a = 45{,}93°$.

Sie und die Amplituden ergeben für die Gln. (3.35) und (3.36):

$$\tan\psi = \frac{10\ \text{cm}\cdot 0{,}2380 + 5\ \text{cm}\cdot 0{,}8634}{10\ \text{cm}\cdot 0{,}9712 + 5\ \text{cm}\cdot 0{,}5045} = 0{,}5474$$

$$\psi = 28{,}70° = 0{,}5009$$

$$c = \sqrt{100 + 25 + 69{,}53}\ \text{cm} = 13{,}95\ \text{cm}$$

$$\underline{\underline{C = 13{,}95\ \text{cm}\cdot\sin\left(4\frac{t}{\text{s}} + 0{,}5009\right)}},$$

Bild 3.35 stellt dieses Beispiel dar.

Kontrollfragen

3.10. Was bewirken die Konstanten a, ω, φ der harmonischen Funktion $y = a\sin(\omega t + \varphi)$ im Vergleich zur Kurve der einfachen Sinusfunktion $y = \sin t$?

3.11. Welche Vorteile hat die graphische Darstellung mit ωt als Abszisse?

Aufgaben: 3.14. bis 3.16.

3.2. Dreiecksberechnung

3.2.1. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

Wie bereits in 3.1.2. definiert, gelten für die trigonometrischen Funktionen die bekannten Beziehungen (3.5) in Form von Seitenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck (Bild 3.5).
Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks benutzt die Gln. (3.5) und ist dem Leser von seiner früheren Ausbildung her bekannt. Sie wird deshalb in diesem Lehrbuch nicht ausführlich besprochen, sondern nur an Hand von einigen Beispielen wiederholt.
Bei der Lösung einer Aufgabe werden stets zuerst die für die Rechnung notwendigen Formeln zusammengestellt. Dann erfolgt die Zahlenrechnung.

BEISPIELE

3.28. Von einem rechtwinkligen Dreieck seien Hypotenuse $c = 31{,}294$ m und der Winkel $\alpha = 48{,}204°$ gegeben (Bild 3.36). Gesucht sind β, a, b.

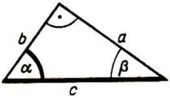


Bild 3.36

Lösung: $\beta = 90° - \alpha$ $\qquad$ $\underline{\underline{\beta = 41{,}796°}}$

$a = c \sin \alpha$ $\qquad$ $\underline{\underline{a = 23{,}331 \text{ m}}}$

$b = c \cos \alpha$ $\qquad$ $\underline{\underline{b = 20{,}857 \text{ m.}}}$

3.29. Ein Gegenstand P befindet sich unter einer Glasplatte mit der Dicke d und der Brechzahl n. Beim Betrachten von P unter einem Winkel α gegen das Einfallslot erscheint der Gegenstand am Bildort P' innerhalb des Glases. Um welche Strecke $x = \overline{PP'}$ wird der Abstand von der Glasoberfläche scheinbar verkürzt? Es ist besonders der Fall für kleine Winkel α zu betrachten.

Lösung: Aus Bild 3.37:

$$\tan \alpha = \frac{y}{d - x} \qquad \text{(I)} \qquad\qquad \tan \beta = \frac{y}{d}, \qquad \text{(II)}$$

$$\text{Brechungsgesetz:} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \qquad \text{(III)}$$

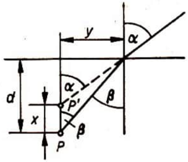


Bild 3.37

Aus (I) und (II): $x = d\left(1 - \dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right).$ (IV)

Mit $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$ und (III) ist

$$x = d\left(1 - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}\right) = d\left(1 - \frac{\cos\alpha}{n\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{n^2}}}\right)$$

$$x = d\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right).$$

Für kleine Winkel α wird $\cos\alpha \approx 1$ und $\sin\alpha \approx 0$, also $x \approx d(1 - 1/n)$. Bei einer Brechzahl $n = 1{,}5$ tritt somit eine Verkürzung um etwa ein Drittel des Glasweges ein.

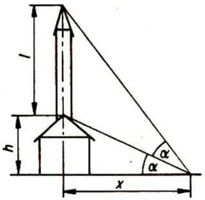


Bild 3.38

3.30. Über dem $h = 18$ m hohen Dachfirst eines Gebäudes erhebt sich ein Turm mit der Länge $l = 30$ m. In welcher Entfernung x vom Fuße des Gebäudes sind Gebäude und Turm unter jeweils gleichem Winkel α zu sehen? Wie groß ist α?

Lösung: Aus Bild 3.38 ist abzulesen:

$$\tan\alpha = \frac{h}{x} \quad \text{(I)} \qquad \tan 2\alpha = \frac{h+l}{x}. \quad \text{(II)}$$

(I) und (II) verbindet die Formel $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ (vgl. Aufgabe 3.11.):

$$\frac{2\,\dfrac{h}{x}}{1-\dfrac{h^2}{x^2}} = \frac{h+l}{x} \qquad \text{nach } x \text{ auflösen}$$

$$x = h\sqrt{\frac{l+h}{l-h}} \qquad \text{und mit (I):} \quad \tan\alpha = \sqrt{\frac{l-h}{l+h}}.$$

Die Entfernung beträgt $x = 36$ m und der Winkel $\alpha = 26{,}565°$.

Kontrollfrage

3.12. Wie sind die vier Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck erklärt?

Aufgaben: 3.17. bis 3.28.

3.2.2. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

Aus der Planimetrie ist bekannt, daß ein schiefwinkliges Dreieck durch drei voneinander unabhängige Stücke bestimmt ist. Bei gegebenen Seiten und Winkeln sind fünf Grundaufgaben zu unterscheiden.

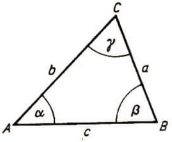


Bild 3.39

Zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks (Bild 3.39) sind die folgenden Sätze notwendig:

Winkelsumme $$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ} \tag{3.37}$$

Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln $$\boxed{\text{Aus } a \lesseqgtr b \text{ folgt } \alpha \lesseqgtr \beta \text{ und umgekehrt}} \tag{3.38}$$

Sinussatz $$\boxed{a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma} \tag{3.39}$$

Cosinussatz $$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}} \tag{3.40}$$

Dreiecksflächeninhalt $$\boxed{A = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \frac{ca}{2}\sin\beta = \frac{ab}{2}\sin\gamma} \tag{3.41}$$

BEISPIELE

3.31. Die drei Kräfte $F_1 = 600$ N, $F_2 = 900$ N und $F_3 = 1200$ N greifen in einem Punkt an und stehen im Gleichgewicht. Welche Winkel schließen sie miteinander ein (Bild 3.40)?

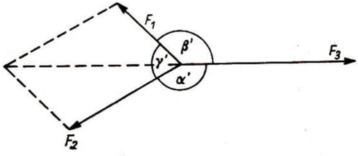


Bild 3.40

Lösung: Die Kräfte stehen im Gleichgewicht, wenn sie ein geschlossenes Krafteck bilden (Bild 3.41). Die gesuchten Winkel sind die Außenwinkel dieses Dreiecks.
Da nur der Cosinussatz zwischen spitzen und stumpfen Winkeln unterscheidet, ist mit ihm der größte Winkel, der wegen (3.38) der größten Seite gegenüberliegt, zu berechnen:

$$\cos\gamma = \frac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2F_1F_2}. \tag{I}$$

Die Winkel α und β können nur spitz sein. Sie folgen aus dem Sinussatz.

$$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{F_3}F_1 \qquad \text{(II)} \qquad\qquad \sin\beta = \frac{\sin\gamma}{F_3}F_2 \qquad \text{(III)}$$

Der gemeinsame Faktor wird einmalig berechnet und gespeichert. Es ergeben sich aus

(I): $\cos\gamma = -0{,}25 < 0 \Rightarrow \gamma = 104{,}4775°$,

(II): $\alpha = 28{,}9550°$ und (III): $\beta = 46{,}5675°$.

Die Kräfte schließen ein:

$\alpha' = 180° - \alpha$ $\quad\beta' = 180° - \beta$ $\quad\gamma' = 180° - \gamma$

$\underline{\underline{\alpha' = 151{,}045°}}$ $\quad\underline{\underline{\beta' = 133{,}433°}}$ $\quad\underline{\underline{\gamma' = 75{,}522°}}$.

Die Probe ergibt $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$.

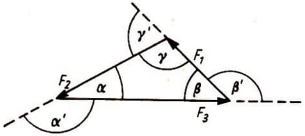


Bild 3.41

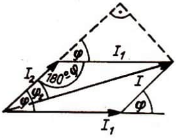


Bild 3.42

3.32. Welchen Gesamtstrom I ergeben die Teilströme $I_1 = 5$ A, $I_2 = 3$ A, wenn I_2 gegenüber I_1 um $\varphi = 60°$ vorauseilt? Unter welchem Winkel φ_2 läuft der Gesamtstrom I dem Strom I_2 hinterdrein?

Lösung: Im Bild 3.42 gilt nach dem Cosinussatz (3.40):

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos(180° - \varphi).$$

Mit (3.15) folgt hieraus, vgl. Gl. (3.36):

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi}. \tag{I}$$

Ferner läßt sich aus Bild 3.42 ablesen:

$$\tan\varphi_2 = \frac{I_1\sin\varphi}{I_2 + I_1\cos\varphi}. \tag{II}$$

Die Zahlenwerte in (I) und (II) eingesetzt:

$\underline{\underline{I = 7\text{ A}}}$; $\quad\tan\varphi_2 = 0{,}78730$, $\quad\underline{\underline{\varphi_2 = 38{,}213°}}$.

In der nachfolgenden Übersicht sind die auftretenden Grundaufgaben und der jeweils zu beschreitende Lösungsweg wiedergegeben.

Übersicht für die Lösung der fünf Grundaufgaben des schiefwinkligen Dreiecks mit Sinus- und Cosinussatz

<table>
<tr><th colspan="2">Grundaufgabe</th><th>Gegebene Stücke z. B.</th><th>Lösung</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>WSW</td><td>α, c, β</td><td>γ aus Winkelsumme; a und b aus Sinussatz; eindeutige Lösung</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>SWW</td><td>c, γ, α</td><td>β aus Winkelsumme; a und b aus Sinussatz; eindeutige Lösung</td></tr>
<tr><td>2a
(doppeldeutiger Fall)</td><td>SSW</td><td>a, b, α</td><td>β aus Sinussatz und (3.38);
γ aus Winkelsumme; c aus Sinussatz

Fallunterscheidung:
<table>
<tr><th colspan="4">Fall</th><th colspan="2">Art der Lösung</th></tr>
<tr><td>I</td><td>$a >$</td><td rowspan="3">$a > b \sin \alpha$</td><td>$\alpha \lesseqgtr 90°$</td><td>$\beta < 90°$</td><td>eindeutig</td></tr>
<tr><td>II</td><td>$a = b$</td><td rowspan="4">$\alpha < 90°$</td><td>$\beta = \alpha$</td><td>eindeutig; gleichsch. Dreieck</td></tr>
<tr><td>III/1</td><td rowspan="3">$a < b$</td><td>$\beta \lessgtr 90°$</td><td>2 Lösungen</td></tr>
<tr><td>III/2</td><td>$a = b \sin \alpha$</td><td>$\beta = 90°$</td><td>eindeutig; rechtwinkl. Dreieck</td></tr>
<tr><td>III/3</td><td>$a < b \sin \alpha$</td><td>—</td><td>keine Lösung</td></tr>
<tr><td colspan="6">Bei II bis III/3 gibt es für $\alpha \geqq 90°$ stets keine Lösung</td></tr>
</table>
(3.42)</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>SWS</td><td>a, γ, b</td><td>c aus Cosinussatz; α und β aus Sinussatz und Winkelsumme bzw. (3.38);
eindeutige Lösung</td></tr>
<tr><td>3</td><td>SSS</td><td>a, b, c (c größte Seite)</td><td>γ aus Cosinussatz; α und β aus Sinussatz (beide spitz); eindeutige Lösung</td></tr>
</table>

Bedingungen für die Grundaufgaben:

1a und 1b: Die Summe der beiden gegebenen Winkel muß kleiner als 180° sein.

2a und 2b: Der gegebene Winkel muß kleiner als 180° sein.

3: Die Summe zweier Seiten muß jeweils größer als die dritte sein.

Die Bedingung zu 2a ist notwendig, alle anderen Bedingungen sind notwendig und hinreichend.

BEISPIELE

3.33. Gegeben: $\alpha = 25{,}2°$; $c = 48{,}2$ m; $\beta = 30{,}9°$
Gesucht: γ, a, b (Grundaufgabe 1a, WSW)

Lösung: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ $\qquad \underline{\underline{\gamma = 123{,}9°}}$

$$a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha \qquad \underline{\underline{a = 24{,}7 \text{ m}}}$$

$$b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta \qquad \underline{\underline{b = 29{,}8 \text{ m}}}.$$

3.34. Gegeben: $a = 19{,}5$ m; $b = 27{,}9$ m; $\alpha = 36{,}8°$
Gesucht: β, γ, c (Grundaufgabe 2a, SSW)

Lösung: $\sin\beta_{1,2} = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$, β_1 (spitz), $\beta_2 = 180° - \beta_1$.

$\gamma_{1,2} = 180° - (\alpha + \beta_{1,2})$, $\qquad c_{1,2} = \dfrac{a\sin\gamma_{1,2}}{\sin\alpha}$

1. Dreieck: $\underline{\underline{\beta_1 = 59{,}0°}}$; $\underline{\underline{\gamma_1 = 84{,}2°}}$; $\underline{\underline{c_1 = 32{,}4 \text{ m}}}$

2. Dreieck: $\underline{\underline{\beta_2 = 121{,}0°}}$; $\underline{\underline{\gamma_2 = 22{,}2°}}$; $\underline{\underline{c_2 = 12{,}5 \text{ m}}}$.

3.35. Am Gewindeschneidmeißel treten der Zahnwinkel ε, der Freiwinkel α und der Spanwinkel γ auf. Der Gewindeschneidmeißel (Bild 3.44) entsteht aus dem Rohstück (Bild 3.43) durch Anschleifen eines Flankenwinkels β und des Spanwinkels γ. Wie groß muß für $\alpha = 15°$ und $\gamma = 30°$ der Zahnwinkel ε gewählt werden, damit der von den oberen Kanten des Schneidmeißels eingeschlossene Winkel $\delta = 60°$ wird? Welche Größe muß der Flankenwinkel β erhalten?

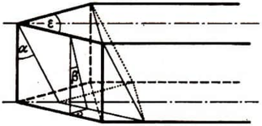


Bild 3.43

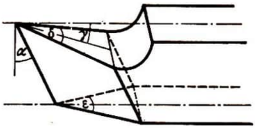


Bild 3.44

Lösung: Aus der Draufsicht (Bild 3.45), Seitenansicht (Bild 3.46) und Schnitt A–A (Bild 3.47) werden in rechtwinkligen Dreiecken nach (3.5) die drei Gleichungen

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{z}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{z}{y}, \qquad \tan\alpha = \frac{x}{y}$$

abgelesen, die folgende Beziehung ergeben:

$$\tan\beta = \tan\alpha \sin\frac{\varepsilon}{2}. \tag{I}$$

Im Bild 3.48 gelten nach (3.5) und (3.39):

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{a}{c}, \qquad \tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{\sin[90° - (\alpha + \gamma)]}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{b}{c}.$$

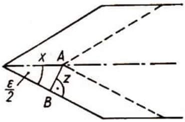


Bild 3.45

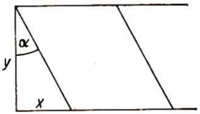


Bild 3.46

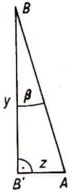


Bild 3.47

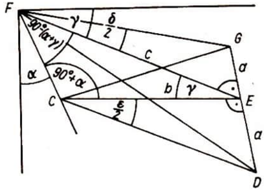


Bild 3.48

Durch Anwendung von (3.15) auf die letzte Gleichung und Elimination der Hilfsgrößen a, b, c folgt:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos\alpha\tan\dfrac{\delta}{2}}{\cos(\alpha+\gamma)} \tag{II}$$

Aus (II) und (I) ergibt sich mit fünfstelligen Funktionswerten:

$\underline{\underline{\varepsilon = 76{,}524°}}$; $\underline{\underline{\beta = 9{,}421°}}$.

Kontrollfragen

3.13. Welche Sätze und Beziehungen werden zur Bestimmung der restlichen Seiten und Winkel eines schiefwinkligen ebenen Dreiecks aus den drei gegebenen Stücken gebraucht?

3.14. Wieviel Grundaufgaben zur Lösung des schiefwinkligen Dreiecks gibt es, und wie heißen diese?

3.15. Wie lauten die Bedingungen für die Grundaufgaben, und welche sind notwendig bzw. hinreichend?

3.16. Drücke die trigonometrische Formel für den Dreiecksflächeninhalt in Worten aus!

Aufgaben: 3.29. bis 3.37.

3.3. Aufgaben

3.1. Folgende Winkel sind in die jeweils anderen Winkelmaße zu verwandeln, und zwar rad auf 5 Dezimalen, Grad (°) auf 3 Dezimalen bzw. in °, ′, ″ und gon auf 3 Dezimalen:

a) 1,53897 rad	b) 4,96327 rad
c) 114,279°	d) 65,352°
e) 195°48′25″	f) 228°32′08″
g) 54,685 gon	h) 248,252 gon

3.2. Welche Länge hat der Bogen des Erdumfangs, der zu einem Mittelpunktswinkel von a) $1°$ b) $15'$ c) $1'$ d) $1''$ gehört? ($R = 6371{,}11$ km). Es sind 4 signifikante Ziffern anzugeben.

3.3. Der Horizontalkreis eines Theodolits[1]) soll in Intervalle von $10'$ eingeteilt werden. Wie groß ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilstrichen, wenn der Kreisdurchmesser 94 mm beträgt?

3.4. Folgende trigonometrische Funktionswerte von Winkeln $\varphi > 360°$ sind auf Funktionswerte von Winkeln zwischen $0°$ und $360°$ bzw. $180°$ zurückzuführen.

a) $\sin(-1021°)$ b) $\cos 795°$ c) $\tan 533°$ d) $\cot 605°$

e) $\sin \frac{17}{2}\pi$ f) $\cos \frac{9}{4}\pi$ g) $\tan\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$ h) $\cot \frac{10}{3}\pi$

3.5. Die Werte der drei anderen Funktionen sind für

a) $\sin\varphi = \frac{7}{25}$ b) $\cos\varphi = 0{,}6$ c) $\tan\varphi = \frac{12}{5}$

zu bestimmen. Dabei sind $\varphi \in (0°; 90°)$.

3.6. Die Gleichungen

a) $1 + \tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ b) $1 + \cot^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi}$

sind zu beweisen.

3.7. Folgende Ausdrücke sind zu vereinfachen.

a) $\frac{\sin\varphi}{\tan\varphi}$ b) $\frac{\cot\varphi}{\cos\varphi}$ c) $\cos\varphi\sqrt{1 + \tan^2\varphi}$

3.8. Folgende Funktionen sind zu vereinfachen

a) $y = \cos(x + \pi)$ b) $y = -\tan(\pi - x)$

c) $y = \cos\left(\frac{5}{2}\pi - 2x\right)$ d) $y = \frac{\sin\left(-x - \frac{3}{2}\pi\right)}{\cot(2\pi - x)}$

mit $x \neq \left(\frac{3}{2} - k\right)\pi$ und $x \neq k\pi$ für $k \in G$.

3.9. Folgende Funktionswerte sind fünfstellig zu bestimmen.

a) $\sin 145°42'15''$ b) $\cos 138°17'22''$
c) $\tan(-230°50'38'')$ d) $\cot(-317°19'07'')$
e) $\sin(-642{,}1452°)$ f) $\cos 411{,}3917°$
g) $\tan 349{,}5988°$ h) $\cot 202{,}2222°$
i) $\sin 3{,}45756$ j) $\cos 2{,}74329$
k) $\tan 1{,}62358$ l) $\cot 4{,}86667$

3.10. Für welche Winkel $\varphi \in [0°; 360°)$ in dezimalgeteiltem Altgrad mit drei Dezimalen werden folgende Gleichungen erfüllt?

a) $\sin\varphi = -0{,}85422$ b) $\cos\varphi = 0{,}23488$

c) $\tan\varphi = 1{,}53864$ d) $\cot\varphi = -4{,}71492$

[1]) Der Theodolit ist ein Instrument des Geodäten für Horizontal- und Vertikalwinkelmessungen.

3.11. Es ist die Formel $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ zu beweisen.

3.12. Folgende Terme sind zu vereinfachen:

a) $\cos(60° + \alpha) + \sin(30° + \alpha)$ b) $\sin(\alpha + 60°) + \sin(\alpha - 60°)$

c) $\cos(\alpha + 45°) + \cos(\alpha - 45°)$

3.13. Die Formel $\sin\alpha + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°) = 0$ tritt in der Wechselstromtechnik auf. Der Beweis ist zu führen.

3.14. Die Periode, die Verschiebung, der Funktionswert y_0 für $t = 0$ und eventuelle Spiegelungen an der Abszissenachse sind für folgende Funktionen anzugeben, wenn auf der Abszissenachse entweder die Werte t oder ωt abgetragen werden:

a) $y = 0{,}3\sin\left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $y = -3\sin\left(2t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

c) $y = 2\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ d) $y = -\dfrac{1}{4}\sin\left(-\dfrac{t}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.15. Wie groß ist 0,015 s nach dem Nulldurchgang der Momentanwert der sinusförmigen Spannung $u = U_{\max}\sin\omega t$, wenn der Scheitelwert $U_{\max} = 90{,}00$ V und die Frequenz $f = 30$ Hz betragen? ($\omega = 2\pi f$)

3.16. Bei welcher Frequenz f mit 4 signifikanten Ziffern nimmt eine Wechselspannung 0,002 s nach dem Nulldurchgang 25% ihres Scheitelwertes an?

3.17. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Bild 3.5) ist zu berechnen aus (Winkel auf ′, Strecken auf mm):

a) $a = 33$ cm; $b = 56$ cm. Gesucht: α, β, c, A, h_c
b) $a = 24$ cm; $c = 74$ cm. Gesucht: α, β, b, A, h_c
c) $a = 40$ cm; $\alpha = 43°36'$. Gesucht: β, b, c, A
d) $b = 60$ cm; $\alpha = 39°48'$. Gesucht: β, c, a, A
e) $c = 50$ cm; $\beta = 53°08'$. Gesucht: α, a, b, A

3.18. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Bild 3.49) ist zu berechnen aus:

a) $a = 41{,}33$ m; $\gamma = 30{,}30°$. Gesucht: α, c, h_c, A
b) $c = 18{,}12$ m; $\alpha = 45{,}30°$. Gesucht: γ, a, h_c, A
c) $c = 28{,}04$ m; $\gamma = 50{,}80°$. Gesucht: α, a, h_c, A
d) $a = 61$ cm; $h_c = 11$ cm. Gesucht: α, γ, c, A
e) $h_c = 35$ cm; $A = 420\ \text{cm}^2$. Gesucht: c, a, α, γ

3.19. Um wieviel mm länger ist der Bogen b als die Sehne s, wenn der Kreisradius $r = 80$ m beträgt und der zu b und s gehörige Zentriwinkel $\alpha = 22{,}33°$ ist?

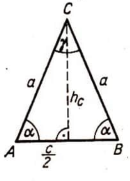


Bild 3.49

3.20. Für den im Bild 3.50 dargestellten Querschnitt eines Zementrohres ist eine Flächenformel mit 5 signifikanten Ziffern zu entwickeln.

3.21. Eine vorgegebene Kraft F ist in zwei Komponenten F_1 und F_2 derart zu zerlegen, daß die Komponenten senkrecht aufeinanderstehen und F_1 mit F den Winkel α einschließt:

a) $F = 440$ N; $\alpha = 30°$ b) $F = 5120$ N; $\alpha = 42{,}5°$

c) $F = 1414$ N; $\alpha = 45°$

3.22. Ein Sparren schließt mit der Horizontalebene einen Winkel $\alpha = 36{,}25°$ ein und erzeugt in seiner Richtung eine Kraft $F = 10000$ N. Der Horizontalschub F_H und die Vertikaldruckkraft F_V in der Mauer am Angriffspunkt des Sparrens sind zu berechnen (Bild 3.51)

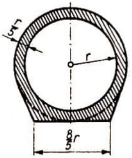


Bild 3.50

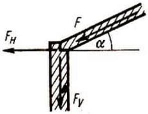


Bild 3.51

3.23. Eine vorgegebene Kraft F ist in zwei gleich große Komponenten F_1 und F_2 zu zerlegen, die miteinander den Winkel α einschließen:

a) $F = 4710$ N; $\alpha = 48°$ b) $F = 2400$ N; $\alpha = 72{,}5°$

3.24. Auf einer geneigten Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 21{,}5°$ gleitet eine Last $F_L = 2232$ N. Wie groß sind die Hangabtriebskraft F_H, die die Reibung erzeugende Normalkraft F_N und die Reibungskraft F_R (Reibungszahl für Gleitreibung $\mu = 0{,}3$)?

3.25. 0,8 m über der Mitte eines runden Tisches von 1,20 m Durchmesser ist eine Lampe mit der Lichtstärke $I = 200$ cd angebracht (Bild 3.52). Wie groß ist die Beleuchtungsstärke E am Rande des Tisches? Zu beachten ist, daß sich E aus der Formel $E = \frac{I}{r^2} \sin\varphi$ (in lx) ergibt, wobei r die Entfernung der Lichtquelle von der beleuchteten Fläche in Metern und φ der Winkel zwischen Lichtstrahlrichtung und beleuchteter Fläche ist.

3.26. Zu berechnen sind

a) die Pfeilhöhe p eines Kreisabschnitts aus dem Radius r und dem Mittelpunktswinkel α,

b) die Fläche A eines gleichschenkligen Dreiecks aus dem Schenkel a und dem Basiswinkel α,

c) die Fläche A eines einem Kreis vom Radius r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

3.27. Der im Bild 3.53 dargestellte Bolzen soll gedreht werden. Wie groß sind Supporteinstellwinkel $\frac{\alpha}{2}$ und Kegelwinkel α?

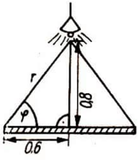


Bild 3.52

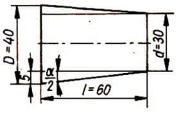


Bild 3.53

3.28. Wird der Waagebalken einer Hebelwaage im Drehpunkt D um den Winkel α gedreht, so tritt neben den beiden Drehmomenten der an den Enden A und B am Arm a wirkenden Massen m_1 und m_2 noch ein drittes Drehmoment auf, das den Schwerpunkt S wieder in seine Ausgangslage zurückzudrehen sucht (Bild 3.54). Die Masse des Waagebalkens sei m_0; sie wirkt am Arm a'. Die Länge des Waagebalkens sei l, der Abstand des Schwerpunktes S vom Drehpunkt D sei s. Die Empfindlichkeit E der Waage, nämlich der Winkel α', um den der Zeiger Z ausschlägt, wenn eine Seite der Waage mit 1 mg überbelastet wird, ist zu bestimmen.

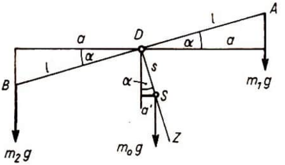


Bild 3.54

3.29. Ein Dreieck ist zu berechnen aus:

a) $b = 191{,}02$ m;	$\alpha = 33{,}550°$;	$\gamma = 17{,}500°$.	Gesucht: β, a, c
b) $c = 68{,}10$ m;	$\alpha = 55{,}684°$;	$\gamma = 18{,}317°$.	Gesucht: β, a, b
c) $b = 112{,}77$ m;	$c = 44{,}33$ m;	$\beta = 130{,}167°$.	Gesucht: γ, α, a
d) $a = 341{,}79$ m;	$b = 435{,}57$ m;	$\alpha = 48{,}728°$.	Gesucht: β, γ, c
e) $a = 120{,}58$ m;	$b = 59{,}13$ m;	$\beta = 110{,}333°$.	Gesucht: α, γ, c
f) $a = 37{,}60$ m;	$b = 100{,}08$ m;	$\gamma = 58{,}205°$.	Gesucht: c, α, β, A
g) $b = 120{,}18$ m;	$c = 8{,}04$ m;	$\alpha = 20{,}339°$.	Gesucht: a, γ, β
h) $a = 205{,}37$ m;	$b = 252{,}76$ m;	$c = 189{,}68$ m.	Gesucht: α, β, γ, A
i) $a = 43{,}55$ m;	$b = 56{,}13$ m;	$c = 20{,}00$ m.	Gesucht: α, β, γ, A.

3.30. Die Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe $h > 56$ cm ist ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seiten $a' = 33$ cm, $b' = 21$ cm, $c' = 45$ cm. Eine durch $C' = C$ gehende Ebene schneidet die den Punkt A' enthaltende Seitenkante des Prismas in A und die dritte Seitenkante in B. Diese Schnittpunkte haben die Höhen $h_A = 28$ cm und $h_B = 56$ cm über der Grundfläche. Es sind Seiten, Winkel und Fläche des entstandenen Schnittdreiecks ABC zu berechnen (Winkel auf 3 Dezimalen).

3.31. Die gebrochene Grenzlinie ABC zwischen zwei Grundstücken G_1 und G_2 soll von C aus durch die neue Grenze $\overline{CD}$ so begradigt werden, daß die Flächeninhalte der Grundstücke erhalten bleiben. Für die Absteckung des Grenzpunktes D ist die Strecke $x = \overline{AD}$ aus den gemessenen Stücken $a = 201{,}10$ m, $c = 246{,}20$ m, $\gamma = 43°17'$, $\delta = 76°23'$ zu berechnen (Bild 3.55).

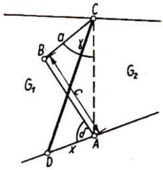


Bild 3.55

3.32. Drei Kräfte $F_1 = 500$ N, $F_2 = 700$ N, $F_3 = 800$ N greifen in einem Punkt an und halten sich das Gleichgewicht. Welche Winkel (2 Dezimalen) schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

3.33. An einem Punkt greifen die drei Kräfte $F_1 = 250$ N, $F_2 = 400$ N und $F_3 = 500$ N an. Ihre Wirkungslinien bilden die Winkel $(F_1F_2) = 61°$ und $(F_2F_3) = 53°$. Die Resultierende F_R ist zu berechnen.

3.34. Eine Kraft $F = 330$ N ist in zwei Komponenten F_1 und F_2 so zu zerlegen, daß diese mit F die Winkel $(F_1F) = 32{,}3°$ und $(FF_2) = 47{,}6°$ bilden.

3.35. $U_2 = 100$ V eilt der Teilspannung U_1 um den Winkel $\varphi = 68°$ voraus, während die Gesamtspannung U der Teilspannung U_2 um $\varphi_2 = 23°$ hinterdreinläuft. Wie groß sind U_1 und U?

3.36. Für die Teilströme $I_1 = 5$ A, $I_2 = 6$ A ergibt sich der Gesamtstrom $I = 7$ A. Um welchen Winkel φ eilt der Strom I_2 dem Strom I_1 voraus?

3.37. Zwei hintereinander geschaltete Generatoren erzeugen die Wechselspannungen U_1, U_2 gleicher Frequenz. Wie groß muß U_2 gewählt werden, damit bei resultierender Gesamtspannung $U = 200$ V die Teilspannung U_2 der Teilspannung $U_1 = 150$ V um $\varphi = 55°$ vorauseilt?

3.38. Folgende Formeln sind zu beweisen:

a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

b) $\tan 3\alpha = \dfrac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$.

3.39. Für folgende Formeln ist der Beweis zu führen:

a) $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$ b) $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$

c) $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ d) $\cot \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \dfrac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

3.40. Folgende Terme sind in Produkte oder Quotienten zu verwandeln:

a) $\dfrac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ b) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ c) $\tan \alpha + \tan \beta$

3.41. Folgender Ausdruck ist in ein Produkt zu verwandeln:

$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

3.42. Zwei im Raum liegende Geraden g_1 und g_2 schließen den Winkel $\alpha = 55{,}00°$ miteinander ein und spannen eine Ebene auf, die gegen die Projektionsebene um den Winkel $\varphi = 68{,}00°$ geneigt ist und die die Projektionsebene in der Geraden g_1 schneidet. Wie groß ist der Winkel α' zwischen g_1 und der Projektion g_2' von g_2?

3.43. Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Ebene gegen die Projektionsebene um den Winkel φ geneigt sei, liege in der Projektionsebene. Die Projektion γ' des rechten Winkels $\gamma = 90°$ ist aus den gegebenen Katheten a, b und dem Neigungswinkel φ zu berechnen. Das Ergebnis der Aufgabe 3.42. kann benutzt werden.

3.44. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 30°$ auf eine planparallele Glasplatte (Dicke der Platte $d = 1$ cm, relative Brechzahl $n = 1{,}5$) und erfährt beim Austritt eine Parallelverschiebung v (Bild 3.56). Für v ist eine allgemeine Formel mit α, d, n zu entwickeln, aus der die Verschiebung im Fall des Zahlenbeispiels auf 0,01 mm genau zu bestimmen ist.

3.45. Im Fall kleiner Zentriwinkel α ist eine Näherungsformel für die Pfeilhöhe p eines Kreisbogens zu entwickeln, die die Sehne s und den Radius r des Kreisbogens enthält.

3.46. Ein Seil läuft über eine kleine Rolle. Es trägt an dem einen Ende die Last $F_Q = 2000$ N und wird am anderen Ende mit der Kraft $F = 2000$ N unter einem Winkel 30° gegen die Horizontale gehalten. Welche Zugkraft F_Z (4 signifikante Ziffern) muß die Pendelstange, an der die Rolle befestigt ist, aufnehmen, und unter welchem Winkel α gegen die Horizontale stellt sie sich ein (Bild 3.57)?

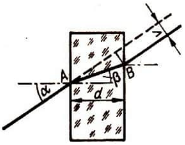


Bild 3.56

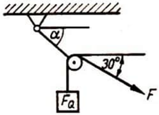


Bild 3.57

3.47. Zwei sinusförmige Ströme mit gleicher Frequenz durchfließen zwei parallelgeschaltete Leiter. Die Momentanwerte zur gleichen Zeit betragen 50% bzw. 30% des betreffenden Scheitelwertes. Wie groß ist der Nullphasenwinkel φ (4 signifikante Ziffern)?

3.48. Sinus- und Cosinussatz sind zu beweisen.

3.49. Die trigonometrische Formel (3.41) für den Dreiecksflächeninhalt ist zu beweisen.

3.50. In einem Parallelogramm mit den Seiten a, b und den Diagonalen e, f gilt

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Die Formel ist zu beweisen.

3.51. Schneiden die Diagonalen e und f eines beliebigen Vierecks einander unter dem Winkel ε, so gilt für den Vierecksflächeninhalt die Formel $A = \frac{ef}{2} \sin \varepsilon$. Der Beweis ist zu führen.

3.52. Ein Scherenkran ist mit $F_Q = 28000$ N belastet. Die Streben s_1 und s_2 greifen unter den Winkeln $\alpha = 36°$ und $\beta = 55°$ an. Es sind die Stabkräfte F_{S1} und F_{S2} sowie die am Spannschloß S auftretende Zugkraft F_Z und Normalkraft F_N (mit 4 signifikanten Ziffern) zu bestimmen (Bild 3.58).

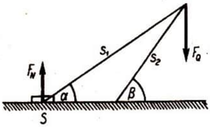


Bild 3.58

3.53. Der Normalschnitt eines dreiseitigen Glasprismas mit der relativen Brechzahl $n = 1{,}5$ sei ein gleichseitiges Dreieck. Der Gang eines parallel zu einer Begrenzungsfläche einfallenden Lichtstrahls ist zu untersuchen (Bild 3.59)

a) Zu zeigen ist, daß ein im unteren Teil einfallender Strahl das Prisma parallel verschoben verläßt, und die Verschiebung d ist als Funktion der Einfallshöhe e und der Seitenlänge a darzustellen.

b) Ein im oberen Teil einfallender Lichtstrahl wird um einen Winkel ε abgelenkt, dieser ist zu berechnen.

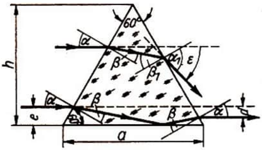


Bild 3.59

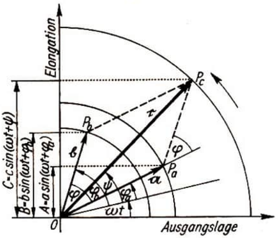


Bild 3.60

c) Es gibt einen Grenzfall e_G der Einfallshöhe, bei dem sich das Verhalten des Lichtstrahls von der Eigenschaft a) zur Eigenschaft b) sprunghaft ändert. e_G ist als Funktion der Seitenlänge a bzw. Höhe h auszudrücken.

3.54. Die Formeln (3.35) und (3.36) des in 3.1.4. angegebenen Satzes über die Addition zweier Sinusschwingungen sind durch Auflösung des Dreiecks OP_aP_b (Bild 3.60) zu beweisen, dessen Seiten die als Vektoren dargestellten Sinusschwingungen sind. Hierbei ist $\overline{OP_a} = |\boldsymbol{a}| = a$, $\overline{OP_b} = |\boldsymbol{b}| = b$, $\overline{OP_c} = |\boldsymbol{c}| = c$.

4 Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen

4.1. Aufbau von Gleichungen und Ungleichungen

4.1.1. Variable, Term

In 1.1. wurde der Begriff Variable als Leerstelle festgelegt. Allgemein werden Variable durch Buchstaben gekennzeichnet. Vertritt eine derartige Variable eine beliebig wählbare, aber innerhalb einer Betrachtung oder Aufgabe dann konstante Zahl, so heißt sie **gebundene Variable** oder Konstante. Meistens werden dafür die Anfangsbuchstaben des Alphabets verwendet. Kann sie jedoch innerhalb einer Betrachtung oder Aufgabe beliebige Werte annehmen, so ist sie **freie Variable** oder kurz, wenn keine Zweifel bestehen, Variable. Als kennzeichnende Buchstaben stehen meist x, y, ...

BEISPIEL

4.1. Je nach Wahl des m und b entsprechen der Gleichung $y = mx + b$ im cartesischen Koordinatensystem verschiedene Geraden. Für eine bestimmte Gerade sind m sowie b gebundene und x sowie y freie Variablen.

Allein schon für den Aufbau von Gleichungen und Ungleichungen ist der Termbegriff bedeutungsvoll. Die Definition dieses viel allgemeineren Begriffes soll auf den hier vorgesehenen Verwendungszweck beschränkt werden.

Definition

Ein **Term** ist ein aus Zahlen, Buchstaben (als Variablen) und Rechenzeichen gebildeter Ausdruck, der beim Belegen der Variablen mit geeigneten Zahlen einen Zahlenwert annimmt.

BEISPIELE

4.2. 235:	konstanter Term
4.3. $ax + b$:	linearer Term mit 1 Variablen (a, b gebundene Variablen)
4.4. $a_1x + a_2y + a$:	linearer Term mit 2 Variablen (a_1, a_2, a gebundene Variablen)
4.5. $ax^2 + bx + c$:	gemischt-quadratischer Term
4.6. $a + b$:	Binom
4.7. $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$:	Polynom
4.8. $\sqrt{x + 3}$:	Wurzelterm.

Die Menge aller Zahlen, mit denen ein Term belegt werden kann, bildet den **Definitionsbereich des Terms.**

BEISPIELE

4.9. $\sqrt{x+3}$ Definitionsbereich: $X = [-3, \infty)$
Begründung: Der Radikand darf nicht negativ sein.

4.10. $\dfrac{1}{2x-6}$ Definitionsbereich: $X = P \setminus \{3\}$
Begründung: Es darf nicht durch 0 dividiert werden.

Soll zum Ausdruck kommen, daß ein Term beispielsweise die Variable x enthält, so wird er durch $T(x)$ symbolisiert (gelesen: T von x).
Die Summe mehrerer, je mit einem Faktor multiplizierter Terme

$$\boxed{k_1T_1 + k_2T_2 + \cdots + k_nT_n} \tag{4.1}$$

heißt **Linearkombination** dieser Terme. Durch sie lassen sich umfangreichere Terme aus einfacheren zusammensetzen.

4.1.2. Gleichungen und Ungleichungen

Definition

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen (Ungleichheitszeichen) miteinander verbunden, so entsteht eine **Gleichung (Ungleichung)**

$$T_1 = T_2 \qquad T_1 < T_2.$$

Als Zeichen der Ungleichheit können noch $\leqq$, $>$ und $\geqq$ auftreten. Wenn im folgenden zumeist nur von Gleichungen die Rede sein wird, so gilt für Ungleichungen Entsprechendes.
Für die weiteren Betrachtungen sei angenommen, daß in den Gleichungen mindestens eine freie Variable enthalten ist. Derartige Gleichungen stellen im Sinne der formalen Logik Aussageformen dar, die bei Belegung der auftretenden Variablen in wahre oder falsche Aussagen übergehen. Unter dem **Definitionsbereich der Gleichung** ist die Durchschnittsmenge der Definitionsbereiche der Terme zu verstehen, aus denen die Gleichung zusammengesetzt ist.

BEISPIEL

4.11. Es ist der im Bereich der reellen Zahlen gelegene Definitionsbereich von

$$\frac{1}{2x-6} = \sqrt{x+3}$$

zu bestimmen.

Lösung: Den Beispielen 4.9. und 4.10. entsprechend ist

Definitionsbereich von $\dfrac{1}{2x-6}$: $X_1 = P \setminus \{3\}$,

Definitionsbereich von $\sqrt{x+3}$: $X_2 = [-3; \infty)$,

Definitionsbereich der Gleichung: $\underline{\underline{X = X_1 \cap X_2 = [-3; \infty) \setminus \{3\}}}$.

Alle Elemente des Definitionsbereiches, mit denen die Gleichung erfüllt wird, d. h. für die aus der Gleichung eine wahre Aussage entsteht, bilden die **Lösungs-** oder **Erfüllungsmenge** der Gleichung. Ein derartiges Element heißt auch im übertragenen Sinne **Wurzel der Gleichung.** Die Lösungsmengen von Ungleichungen sind im allgemeinen Intervalle. Bei Nichterfüllbarkeit der Gleichung oder Ungleichung ist ihre Lösungsmenge leer. In der Schreibweise der Mengenlehre wird die Lösungsmenge einer Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ mit der freien Variablen x durch

$$L = \{x \mid T_1(x) = T_2(x)\}$$

symbolisch dargestellt. Aufgabe ist es, die Lösungselemente zu ermitteln.

BEISPIEL

4.12. Die Lösungsmenge der Gleichung $2x = 3$ wird durch

$$L = \{x \mid 2x = 3\}$$

angesprochen. Es ist $L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Bei verschiedenen Aufgaben, so auch bei Sachaufgaben, macht es sich erforderlich, den eigentlichen Definitionsbereich X der Gleichung oder Ungleichung auf einen Unterbereich $M \subset X$ einzuschränken, weil nur die in M enthaltenen Elemente verwertbar sind. Derartige Beschränkungen sind zusätzlich in L anzugeben.

BEISPIEL

4.13. Für welche natürliche Zahl gilt, daß ihr Zweifaches kleiner als 9 ist?

Lösung: Als Lösungsmenge ist

$$L = \{x \mid 2x < 9 \land x \in N\}$$

anzusetzen. Zunächst ist die uneingeschränkte Ungleichung zu lösen:

$$2x < 9$$
$$x < 4{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 4{,}5).$$

Die Lösungsmenge ergibt sich daraus als Durchschnitt mit dem einschränkenden Bereich:

$$\underline{\underline{L}} = (-\infty; 4{,}5) \cap N = \underline{\underline{\{0; 1; 2; 3; 4\}}}.$$

Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$, die von allen $x \in M$ erfüllt wird, heißt eine über M **identische Gleichung.** Die beiden Terme sind bezüglich M äquivalent und lassen sich gegenseitig austauschen. In diesem Falle ist das Gleichheitszeichen durch das Identitätszeichen $\equiv$ ersetzbar. So ist beispielsweise $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ eine über C identische Gleichung, während $x = \sqrt{x^2}$ nur über der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen als identische Gleichung anzusehen ist.

Für die Gleichungen ergeben sich verschiedene Einteilungsmöglichkeiten, je nachdem, welche Unterscheidungsmerkmale herangezogen werden. Eine erste Unterteilung kann nach der Anzahl der auftretenden freien Variablen erfolgen. Eine weitere Unterteilung wird nach der Art des Auftretens der Variablen vorgenommen. Alle Gleichungen, die sich in die Form

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \qquad a_i \in P, \qquad n \in N$$

bringen lassen, heißen **algebraische Gleichungen n-ten Grades,** wobei n den größten auftretenden Exponenten angibt. Sonderfälle davon sind lineare und quadratische Gleichungen.
Alle anderen Gleichungen heißen **transzendent.** Als Beispiele dazu seien angegeben:

$$\sin x + \cos x = 1 \quad \text{(goniometrische Gleichung)}$$
$$3^{2x+4} = 7^x \quad \text{(Exponentialgleichung)}$$
$$3 \cdot \lg (x + 3) - 2 \cdot \lg x = 1 \quad \text{(logarithmische Gleichung).}$$

In den Abschnitten 4. bis 6. werden algebraische Gleichungen und im Abschnitt 7. transzendente behandelt.

Kontrollfragen

4.1. Was ist unter einem Term zu verstehen?
4.2. Was stellt der Definitionsbereich eines Terms dar?
4.3. Woraus bestimmt sich der Definitionsbereich einer Gleichung?
4.4. Wie ist die Lösungsmenge einer Gleichung festgelegt?
4.5. Wann liegt eine über einen bestimmten Bereich identische Gleichung vor?
4.6. Welche Lösung hat eine Gleichung, deren Definitionsbereich leer ist?

4.2. Umformungen

Die Lösungsverfahren beruhen darauf, die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung so umzuformen, daß die Lösungsmenge direkt ablesbar ist. Bei diesen Umformungen muß die ursprüngliche Lösungsmenge erhalten bleiben, insbesondere dürfen keine Elemente verlorengehen. Sollten sich zusätzliche Elemente einstellen, so lassen sie sich nach der Einsetzprobe an der ursprünglichen Gleichung bzw. Ungleichung wieder entfernen.

Definition

Zwei Gleichungen (Ungleichungen) werden bezüglich einer Menge M als **äquivalent** bezeichnet, wenn sie in dieser Menge definiert sind und in ihr die gleiche Lösungsmenge aufweisen.

Es ist wichtig zu wissen, welche Umformungen wieder zu einer äquivalenten Gleichung (Ungleichung) führen. Hierbei ergeben sich einige Unterschiede zwischen Gleichungen und Ungleichungen. Auf Beweise soll mit einem Hinweis auf die vorbereitenden Betrachtungen in 2.2.1., insbesondere Gl. (2.6), verzichtet werden.
Ein Term $T(x)$ sei im gleichen Bereich wie die umzuformende

Gleichung: $T_1(x) = T_2(x)$, kurz: $T_1 = T_2$

Ungleichung: $T_1(x) < T_2(x)$, kurz: $T_1 < T_2$ (bzw.: $\leqq, >, \geqq$)

definiert.
Zur ursprünglichen Gleichung (Ungleichung) sind äquivalent:

$$\boxed{T_1 \pm T = T_2 \pm T \;\Big|\; T_1 \pm T < T_2 \pm T} \qquad (4.2)$$

Zu beiden Seiten darf derselbe Term addiert (subtrahiert) werden.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} T_1 \cdot T = T_2 \cdot T \\ \dfrac{T_1}{T} = \dfrac{T_2}{T} \end{array}\right\} \text{wenn } T \neq 0} \tag{4.3}$$

Soll eine Gleichung mit einem Term multipliziert oder dividiert werden, so muß er von Null verschieden sein. Diese Forderung läßt sich direkt einhalten, wenn die Operationen mit einer Konstanten ausgeführt werden sollen. Enthält der Term jedoch Variable, so ist bei einer Multiplikation wie im Bsp. 4.18. vorzugehen. Eine Division läßt sich häufig vermeiden, wenn nach der noch anzuführenden Regel (4.5) verfahren wird. Ist die Division durch einen Term $T(x)$ nicht zu umgehen, so sind die Wurzeln der zu bildenden Gleichung $T(x) = 0$ festzuhalten, die auch die ursprüngliche Gleichung erfüllen, da sie sonst verlorengehen (vgl. Bsp. 4.19).

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} T_1 \cdot T < T_2 \cdot T \\ \dfrac{T_1}{T} < \dfrac{T_2}{T} \end{array}\right\} \text{wenn } T > 0 \quad \left.\begin{array}{l} T_1 \cdot T > T_2 \cdot T \\ \dfrac{T_1}{T} > \dfrac{T_2}{T} \end{array}\right\} \text{wenn } T < 0} \tag{4.4}$$

Eine Ungleichung kann beiderseits mit einem von Null verschiedenen Term multipliziert oder dividiert werden, jedoch kehrt sich bei negativem T die Ordnungsrelation um.

$$\boxed{T_1 \cdot T_2 = 0 \Leftrightarrow T_1 = 0 \vee T_2 = 0}\,. \tag{4.5}$$

Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $T_1 \cdot T_2 = 0$ ergibt sich als Vereinigungsmenge der Lösungen der Teilgleichungen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$.
Grundsätzlich sollte jede zu lösende Gleichung dahingehend untersucht werden, ob diese Regel anwendbar ist. Dazu sind alle Terme auf eine Seite der Gleichung zu bringen (Nullform der Gleichung), und anschließend ist eine eventuell mögliche Produktform aufzufinden (vgl. Bsp. 4.19.).
Bei anderen Umformungen (z. B. Potenzieren, Logarithmieren) kann es sein, daß die entstehende Gleichung nicht zur ursprünglichen äquivalent ist. Es ist dann die Einsetzprobe durchzuführen, um die Verträglichkeit der gefundenen Wurzeln festzustellen. Grundsätzlich ist zu beachten, daß alle Operationen mit den beiden Seiten jeweils geschlossen (also nicht einzeln) auszuführen sind.

Es verändert sich:	durch Operation:	in:
$x^{\frac{n}{m}} = a + b$	mit $\dfrac{m}{n}$ potenzieren	$x = (a + b)^{\frac{m}{n}}$
$x = \alpha + \beta$	Sinus bilden	$\sin x = \sin(\alpha + \beta)$.

4.3. Lineare Ungleichungen

An Hand einiger Beispiele soll gezeigt werden, wie beim Lösen von Ungleichungen vorzugehen ist.

BEISPIEL

4.14. Es ist $\{x \mid 3x - 2 \leqq 5x + 4\}$ zu bestimmen.

Lösung: Wie bei den entsprechenden linearen Gleichungen werden alle variablen Terme auf einer Seite zusammengefaßt. Dazu muß zu beiden Seiten $-5x$ und 2 addiert werden:

$$3x - 5x \leqq 4 + 2$$
$$-2x \leqq 6.$$

Bei der nun erforderlichen Division durch -2 ist zu beachten, daß sich die Ordnungsrelation umkehrt:

$$x \geqq -3.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{[-3; \infty)}}$.

Als einfachster Typ einer Ungleichung mit Beträgen, die im Bereich der reellen Zahlen gelöst werden soll, stellt sich

$\lvert x\rvert \leqq a$	$\lvert x\rvert \geqq a$

dar (eventuell auch mit ausgeschlossener Gleichheit), wobei a eine positive reelle Zahl kennzeichnet. Zur Deutung dieser Ungleichung sei der absolute Betrag einer Zahl als der (ungerichtete) Abstand des ihr entsprechenden Punktes auf der Zahlengeraden vom Ursprung interpretiert (vgl. 2.3.). Lösungsmenge der Ungleichung sind dann alle x, deren Abstand vom Nullpunkt

kleiner oder gleich	größer oder gleich
also nicht größer	also nicht kleiner

als a ist. Aus der grafischen Veranschaulichung (Bild 4.1a, b) ergibt sich

$L = [-a; a]$.	$L = (-\infty; -a] \cup [a; \infty)$.

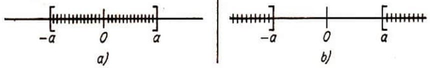


Bild 4.1

Der erweiterte Grundtyp

$\lvert x - x_1\rvert \leqq a$	$\lvert x - x_1\rvert \geqq a$

läßt sich analog deuten, wenn $|x - x_1|$ als der (ungerichtete) Abstand der (variablen) Zahl x von der (festen) Zahl x_1 angesehen wird; der x_1 entsprechende Punkt der Zahlengeraden übernimmt dann die Rolle, die bei der einfacheren Ungleichung der Nullpunkt innehatte. Aus der grafischen Darstellung (Bild 4.2a, b) läßt sich als Lösungsmenge ablesen

$L = [x_1 - a; x_1 + a]$	$L = (-\infty; x_1 - a] \cup [x_1 + a; \infty)$

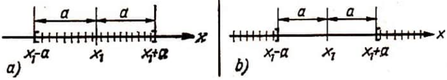


Bild 4.2

Es sind zu x_1 symmetrisch gelegene Intervalle. Mittelpunkt ist der Wert von x, für den $x - x_1 = 0$ ist.

BEISPIELE

4.15. $\{x \mid |x + 2| < 3\}$

Lösung: Mittelpunktsbestimmung: $x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$,

Schwankung um Mittelpunkt: weniger als 3 (ausschließlich),

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = (-5; 1)}}$.

Ein anderer Lösungsweg führt über die betragsfreie Ungleichung

$$-3 < x + 2 < 3$$
$$-5 < x < 1.$$

4.16. Eine auf einer Drehmaschine bearbeitete Welle sei brauchbar, wenn ihr Durchmesser d zwischen 148,4 mm und 149,4 mm liegt. Welche Betragsungleichung spiegelt diesen Toleranzbereich wider?

Lösung: Bereichsmitte: $\frac{1}{2}$ (148,4 + 149,4) mm = 148,9 mm

Toleranz: (149,4 − 148,9) mm = 0,5 mm

Ungleichung: $\underline{\underline{|d - 148{,}9\ \text{mm}| \leqq 0{,}5\ \text{mm}}}$.

Im folgenden Beispiel soll die Variable auch noch außerhalb des Betragsterms auftreten.

BEISPIEL

4.17. $\{x \mid 2 \cdot |x - 3| + 2x \leqq 10\}$

Lösung: Um die x-Terme zusammenfassen zu können, ist die Ungleichung mit Hilfe von Formel (2.11) in zwei betragsfreie Ungleichungen zu überführen.

$$\text{Es ist } |x - 3| = \begin{cases} x - 3 \text{ für } x \geqq 3, \text{ also in } X_1 = [3; \infty) \\ -(x - 3) \text{ für } x < 3, \text{ also in } X_2 = (-\infty; 3). \end{cases}$$

Im Intervall X_1 gilt:

$$2 \cdot (x - 3) + 2x \leqq 10$$
$$2x - 6 + 2x \leqq 10 \mid +6$$
$$4x \leqq 16 \mid :4$$
$$x \leqq 4$$

Das sich zunächst ohne Beachtung von X_1 ergebende Intervall $(-\infty; 4]$ ist auf X_1 zu beschränken:

$$L_1 = (-\infty; 4] \cap [3; \infty)$$
$$= [3; 4].$$

Im Intervall X_2 gilt:

$$-2 \cdot (x - 3) + 2x \leqq 10$$
$$-2x + 6 + 2x \leqq 10$$
$$6 \leqq 10$$

Es stellt sich eine von x unabhängige Aussage heraus, so daß diese Ungleichung für alle x des Intervalls erfüllt ist:

$$L_2 = X_2 = (-\infty; 3).$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = L_1 \cup L_2 = (-\infty; 4]}}$.

Aufgaben: 4.1. bis 4.7.

4.4. Lineare Gleichungen

Dieser Abschnitt sei im wesentlichen auf Beispiele beschränkt, bei denen die Erfordernisse der Ingenieur- und Fachschulausbildung im Vordergrund stehen. Zunächst seien jedoch zwei Beispiele angeführt, die unmittelbar die Anwendung der Umformungsregeln (4.3) und (4.5) demonstrieren sollen.

BEISPIELE

4.18. $\left\{x \,\middle|\, \frac{6}{3x+9} - \frac{5}{9-3x} = \frac{10}{x^2-9}\right\}$

Lösung: Eine derartige Bruchgleichung ist mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, der aus der Produktform der Nenner erkennbar ist.

$$\frac{6}{3\cdot(x+3)} - \frac{5}{3\cdot(3-x)} = \frac{10}{(x-3)(x+3)} \quad \Big| \; 3\cdot(x-3)(x+3)$$

Da der Faktor für $x = 3$ und $x = -3$ verschwindet, ist der Definitionsbereich der neuen Gleichung entsprechend einzuschränken.

$$6\cdot(x-3) + 5\cdot(x+3) = 30 \quad \wedge \quad X = P\setminus\{-3; 3\}$$
$$11x - 3 = 30 \mid +3$$
$$11x \quad = 33 \mid :11$$
$$x = 3 \notin X \Rightarrow \text{ungeeignet.}$$

Ohne die angegebene Einschränkung wäre die entstandene lineare Gleichung nicht der Ausgangsgleichung äquivalent, weil, wie jetzt erkennbar, mit Null multipliziert wurde.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \emptyset}}$.

Folge einer derartigen Multiplikation kann also sein, daß die neue Gleichung Lösungen aufweist, die nicht die Ausgangsgleichung erfüllen. Wurde der Definitionsbereich nicht untersucht, so muß die Einsetzprobe vorgenommen werden, um unbrauchbare Elemente ausschalten zu können. Im Beispiel nehmen zwei der Nenner für $x = 3$ den Wert Null an!

4.19. $\{x \mid 3x^2 = 6x\}$

Lösung: Nullform: $3x^2 - 6x = 0$

Produktform: $3x(x-2) = 0 \mid$ nach (4.5) zerlegen

$$x = 0 \qquad x - 2 = 0$$

Der konstante Faktor 3 blieb unberücksichtigt, da er nicht das Verschwinden des Produktes verursachen kann.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{0; 2\}}}$.

Wäre die Gleichung unbesehen durch $3x$ dividiert worden, so hätte sich nur die Wurzel $x = 2$ ergeben. Der Wert 0 würde, verursacht durch eine zuvor nicht erkannte Division durch Null, verlorengehen.

In den nächsten Beispielen soll die Gleichungslehre zur Formelumstellung verwendet werden.

BEISPIELE

4.20. Für zwei parallel geschaltete Widerstände gilt $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Es ist nach R_1 aufzulösen.

Lösung: R_1 — Term isolieren

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \quad \Big| \text{ rechts zu einem Bruch zusammenfassen}$$

$$= \frac{R_2 - R}{RR_2} \quad \Big| \text{ Kehrwert bilden}$$

$$\underline{\underline{R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}}}.$$

4.21. Es ist $F = \frac{F_v}{1 + F_v \cdot F_r}$ nach F_v aufzulösen.

Lösung:

$$F = \frac{F_v}{1 + F_v \cdot F_r} \quad \Big| \text{ Nenner beseitigen: } \cdot (1 + F_v \cdot F_r)$$

$$F + F \cdot F_v \cdot F_r = F_v \quad \Big| \text{ alle } F_v \text{ vereinigen: } -F \cdot F_v \cdot F_r$$

$$F = F_v - F \cdot F_v \cdot F_r \quad \Big| \; F_v \text{ ausklammern}$$

$$= F_v(1 - F \cdot F_r) \quad \Big| \; :(1 - F \cdot F_r)$$

$$\underline{\underline{F_v = \frac{F}{1 - F \cdot F_r}}}.$$

Kontrollfragen

4.7. Wann sind zwei Gleichungen (Ungleichungen) zueinander äquivalent?

4.8. Durch welche Umformungen wird die Äquivalenz a) bei Gleichungen und b) bei Ungleichungen gewahrt?

4.9. Wie lassen sich nach einer nicht-äquivalenten Umformung eventuelle unzulässige Elemente in der Lösungsmenge aufspüren?

4.10. Bei welcher Umformung besteht die Gefahr, daß Elemente der Lösungsmenge verlorengehen?

Aufgaben: 4.8. bis 4.19.

4.5. Aufgaben

Für die folgenden Ungleichungen sind die Lösungsmengen zu bestimmen.

4.1. $3(x + 2) - 4x < 3(2x - 1) + 4$

4.2. $10 - 2(2 - x) < 3x + 5(2x - 1)$

4.3. $3 - x[2 - 5(3 - x)] < x[1 - 3x - 2(x - 3)]$

4.4. In welchem Bereich ist $T = \sqrt{3 - x}$ definiert?

4.5. $\{x \mid |x + 3| \leqq 2\}$

4.6. $\{x \mid |x + 4| > 3\}$

4.7. Es sind a) $A \cup B$, b) $A \setminus C$, c) $A \cap B \cap C$, d) $C \cup (B \setminus A)$ zu bilden für

$A = \{x \mid |x - 1| \leqq 3\}$, $B = \{x \mid |x - 4| < 4\}$, $C = \{x \mid |x + 1| < 3\}$.

Die folgenden Gleichungen sind nach x aufzulösen.

4.8. $1 + \dfrac{x}{2 - 3x} = \dfrac{2x + 1}{3x + 2}$

4.9. $1 - \dfrac{5}{4 - x} = \dfrac{3x - 7}{x - 4}$

4.10. $\dfrac{2(x + 2)}{x - 3} + \dfrac{2x}{2x - 6} = \dfrac{12}{3x - 9}$

4.11. $\dfrac{3}{2x - 1} - \dfrac{4}{4x + 2} = \dfrac{6}{4x^2 - 1}$

4.12. $x - \dfrac{x}{a - b} = \dfrac{ax + b}{a}$

4.13. $\dfrac{x + u}{x - v} + \dfrac{x + v}{x - u} = 2$

Folgende Formeln sind nach den jeweils angegebenen Variablen aufzulösen:

4.14. $V = \pi hs(2r + s)$ nach r

4.15. $C = a\,\dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 - r_2}$ nach r_1

4.16. $\dfrac{1}{f} = (n - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)$ nach r_1

4.17. $V = \dfrac{\pi h}{3}\left(3p^2 - \dfrac{b^2h^2}{a^2}\right)$ nach a^2

4.18. $y = \dfrac{h}{3}\,\dfrac{a + 2b}{a + b}$ nach b

4.19. $W = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2 - m(v_1 - v_2)\,k}{m_1 + m_2}$ nach v_1

4.20. $\{x \mid 2x - 3(1 - x) + 5 \leqq 3(2 - 3x)\}$

4.21. $\{x \mid 3x + 4 < 5(2 - x) + 8x\}$

4.22. $\{x \mid 2(x + 3) \leqq 3(x - 2) - x\}$

In welchen Bereichen sind die folgenden Terme definiert?

4.23. $T = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$

4.24. $T = \ln(3x - 2)$

Bestimme

4.25. $\{x \mid 4 - 2 \cdot |3 - x| < 2\}$

4.26. $\{x \mid |2 - x| + x < 4\}$

4.27. $\{x \mid |x + 2| - x \geqq 3\}$

4.28. $\{x \mid |3 - 2x| + 1 \leqq x\}$

Es sind wie zu 4.7. zu bilden für

4.29. $A = \{x \mid |x + 2| > 2\}$, $B = \{x \mid |x + 2| \leqq 4\}$, $C = \{x \mid |x - 1| < 2\}$

4.30. $A = \{x \mid |x + 1| \leqq 2\}$, $B = \{x \mid |x + 3| \leqq 3\}$, $C = \{x \mid |x| \geqq 3\}$

Die folgenden Ungleichungen sind zu lösen.

4.31. $\dfrac{1}{x + 1} \leqq 1$

4.32. $|3 - x| < |x + 2|$

4.33. $|2x + 4| - 2 > |6 - 3x|$

4.34. $(x - 3)(2x + 4) > 0$ Hinweis: Da ein Produkt positiv ist, wenn beide Faktoren gleiche Vorzeichen haben, sind die Vorzeichenbereiche der beiden Faktoren festzustellen.

4.35. $(1 - x)(2 + x) \geqq 0$

Die folgenden Gleichungen sind nach x aufzulösen.

4.36. $4 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{4}$ **4.37.** $x - \dfrac{a}{b^2} = \dfrac{x}{b} - a$

4.38. $\dfrac{\dfrac{x}{a} - \dfrac{x-a}{b}}{\dfrac{x}{b} - \dfrac{x+b}{a}} = \dfrac{a}{b}$ **4.39.** $b = \dfrac{x}{a}\left(\dfrac{a}{d} - \dfrac{b}{cx}\right)$

Es ist nach der angegebenen Variablen aufzulösen.

4.40. $\gamma = \dfrac{\gamma_F \cdot G}{G + G_f' - G_f''}$ nach G

4.41. $\eta = \dfrac{1}{1 + \dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\alpha}{\varphi}}$ nach φ

4.42. $z_3 = \dfrac{z_4(i-1)}{\dfrac{z_4}{a} - i}$ nach i

4.43. $K = 4\pi \dfrac{r^2 a \varrho}{1 + \left(\dfrac{\lambda}{2}\pi r\right)^2}$ nach r^2

4.44. $F_S' = F_S\left(1 - \dfrac{r}{n} - 0{,}4\,\dfrac{a}{n}\right)$ nach n

4.45. $S = \dfrac{pD_1}{200\,\dfrac{k}{s}\,v - p} + c$ nach s

5. Lineare Systeme

5.1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt Grundsätzliches über Gleichungen festgestellt und auf lineare Gleichungen mit einer Variablen angewendet wurde, soll nun auf lineare Gleichungssysteme übergegangen werden. An Systemen, die zunächst auf zwei Variable beschränkt seien, sollen die prinzipiellen Verhaltensweisen derartiger Systeme aufgezeigt werden, die dann auch entsprechend für umfangreichere Systeme zutreffen.
Außerordentlich viele technische und ökonomische Problemstellungen führen bei ihrer Lösung auf derartige Gleichungssysteme, so daß die Beherrschung der Lösungsverfahren sehr bedeutungsvoll ist.
Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit zwei Variablen

$$L = \{(x; y) \mid a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \wedge a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0\}^{1)}$$

ist die Menge aller Wertepaare $(x; y)$ mit $x, y \in P$, die beide Gleichungen in wahre Aussagen überführen. Alle Wertepaare $(x; y)$, die jeweils eine der beiden Gleichungen

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$$

erfüllen, liegen, als Punktmenge in einem cartesischen Koordinatensystem dargestellt, jeweils auf einer Geraden. Da sich zwei Geraden in einem Punkt schneiden können, stellen seine Koordinaten das Lösungselement des Gleichungssystems dar.

BEISPIEL

5.1. Es ist $\{(x; y) \mid 3x + 2y - 8 = 0 \wedge x - 3y + 1 = 0\}$ zu bestimmen.

Lösung: Die Lösungsmengen der beiden Einzelgleichungen

$$L_1 = \{(x; y) \mid 3x + 2y - 8 = 0\} \qquad L_2 = \{(x; y) \mid x - 3y + 1 = 0\}$$

lassen sich bestimmen, indem jeweils eine der freien Variablen als unabhängige Variable (auch Parameter genannt) mit beliebigen Werten belegt wird und die zugehörigen Werte der anderen, der abhängigen Variablen ermittelt werden. Dazu ist es zweckmäßig, die Gleichungen nach der abhängigen Variablen aufzulösen. Mit x als unabhängiger Variabler ist

$$y = -\frac{3}{2}x + 4 \qquad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

---

1) Die Koeffizienten sind durch Doppelindizes gekennzeichnet. Der erste Index benennt die zugehörige Gleichungsnummer (desgl. der Index des absoluten Gliedes), während der zweite die Zugehörigkeit zur ersten Variablen x bzw. zur zweiten y angibt. Lies a_{21} als „a—zwei—eins“.

und somit

$$L_1 = \left\{\left(x; -\frac{3}{2}x + 4\right) \middle| x \in P\right\} \quad L_2 = \left\{\left(x; \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) \middle| x \in P\right\}.$$

Auszugsweise lassen sich beide Lösungsmengen in einer Wertetabelle wiedergeben:

x	-1	0	1	2	3
$-\frac{3}{2}x + 4$	$\frac{11}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

x	-1	0	1	2	3
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$

Bild 5.1 zeigt die entsprechenden Geraden.

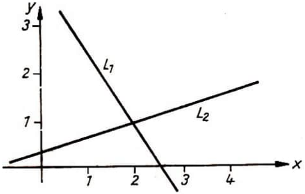


Bild 5.1

Da die Lösungsmengen in dem Wertepaar (2; 1) übereinstimmen, ist

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = L_1 \cap L_2 = \{(2; 1)\}}}$.

Grundgedanke aller rechnerischen Verfahren ist, aus den gegebenen Gleichungen neue zu erzeugen, die jeweils nur noch eine Variable enthalten. Neben dem Einsetz- und dem Gleichsetzverfahren ist besonders das Additionsverfahren geeignet. Es beruht darauf, daß jede durch Linearkombination [vgl. Gl. (4.1)] gebildete Gleichung $k_1(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + k_2(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = 0$ von der Lösungsmenge der kombinierten Gleichungen erfüllt wird und deshalb eine der beiden Gleichungen ersetzen kann.

BEISPIEL

5.1. (Fortsetzung) Die Gleichungen werden untereinander angegeben und durch Striche zusammengefaßt. Die Faktoren sind so zu wählen, daß die Koeffizienten der herausfallenden Variablen entgegengesetzt gleich sind (kgV!).

$$\begin{array}{|r|c|c} 3x + 2y - 8 = 0 & \cdot 3 & \cdot 1 \\ x - 3y + 1 = 0 & \cdot 2 & \cdot (-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{|r|} 9x + 6y - 24 = 0 \\ 2x - 6y + 2 = 0 \\ \hline \end{array} \;\longleftarrow \qquad \longrightarrow\; \begin{array}{|r|} 3x + 2y - 8 = 0 \\ -3x + 9y - 3 = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$11x \qquad -22 = 0 \qquad\qquad\qquad 11y - 11 = 0$$

$$x = 2 \qquad\qquad\qquad\qquad y = 1.$$

Es genügt auch, durch Linearkombination nur eine Gleichung aufzustellen, sie zu lösen und den Wert der anderen Variablen durch Einsetzen zu bestimmen.

Nicht in jedem Fall werden sich zwei Geraden in einem Punkt schneiden, ist das System also eindeutig lösbar. Das folgende Beispiel zeigt nebeneinander die übrigen Möglichkeiten.

BEISPIEL

5.2. Zu lösen sind die Systeme

$\left\| \begin{array}{l} 4x + 2y - 6 = 0 \\ 6x + 3y - 15 = 0 \end{array} \right\|$	$\left\| \begin{array}{l} 4x + 2y - 6 = 0 \\ 6x + 3y - 9 = 0 \end{array} \right\|$

Lösung: **Beide Gleichungssysteme unterscheiden sich nur im absoluten Term der zweiten Gleichung. Es soll x eliminiert werden.**

$\begin{array}{l\|l} 4x + 2y - 6 = 0 & \cdot 3 \\ 6x + 3y - 15 = 0 & \cdot (-2) \\ \hline 12 = 0 & \end{array}$	$\begin{array}{l\|l} 4x + 2y - 6 = 0 & \cdot 3 \\ 6x + 3y - 9 = 0 & \cdot (-2) \\ \hline 0 = 0 & \end{array}$

In beiden Fällen verschwindet auch y. Es entsteht eine

falsche	**wahre**

Aussage. Vergleich der Lösungsmengen der Einzelgleichungen:

$$L_1 = \{(x; -2x + 3) \mid x \in P\}$$

$L_2 = \{(x; -2x + 5) \mid x \in P\}$	$L_2 = \{(x; -2x + 3) \mid x \in P\} = L_1.$
Die y-Werte unterscheiden sich für alle x um 2. Die zugehörigen Geraden sind parallel. Die Lösungsmenge ist leer:	**Beide sind gleich. Die zugehörigen Geraden fallen zusammen, also ist eine Gleichung überflüssig. Die Lösungsmenge hat unendlich viele Elemente:**
$L = \emptyset$	$L = \{(x; -2x + 3) \mid x \in P\}.$

Allgemein hat ein Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{array} \right|$$

stets dann eine leere Lösungsmenge, wenn $a_{21} = k \cdot a_{11}$, $a_{22} = k \cdot a_{12}$ aber $a_2 \neq k \cdot a_1$ ist. Die Gleichungen werden als einander **widersprechend** bezeichnet. Gilt aber auch für den absoluten Term $a_2 = k \cdot a_1$, so stellt die eine Gleichung lediglich das k-fache der anderen dar. Es lassen sich in diesem Fall Linearkombinationen bilden, bei denen sich alle Terme aufheben:

$$k_1 \cdot (a_{11}x + a_{12}y + a_1) + k_2 \cdot (a_{21}x + a_{22}y + a_2) \equiv 0 \qquad k_1 \cdot k_2 \neq 0.$$

Die Gleichungen werden als **linear abhängig** bezeichnet.
Eindeutig ist ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen nur lösbar, wenn die einander entsprechenden Koeffizienten nicht zueinander proportional sind.
Insbesondere wenn nichtganzzahlige Koeffizienten auftreten und ein Rechner eingesetzt werden soll, ist es zweckmäßig, nur eine der beiden Gleichungen mit einem Faktor zu multiplizieren.

BEISPIEL

5.3. Es ist mit dem Taschenrechner zu lösen

$$\left|\begin{array}{l} 1{,}50x - 2{,}10y = 0{,}42 \\ 1{,}30x + 1{,}80y = 3{,}26 \end{array}\right|.$$

Lösung: **Es ist günstiger, die absoluten Terme auf den rechten Seiten anzugeben. Um x zu entfernen, kann die erste Gleichung mit $c = -1{,}3:1{,}5$ oder die zweite mit $c = -1{,}5:1{,}3$ multipliziert und jeweils zur anderen addiert werden. Aus Genauigkeitsgründen ist die Möglichkeit mit $|c| < 1$ zu bevorzugen. Wegen seiner zweimaligen Verwertung werde c gespeichert.**

$$\left|\begin{array}{l} 1{,}50x - 2{,}10y = 0{,}42 \\ 1{,}30x + 1{,}80y = 3{,}26 \end{array}\right| \quad \cdot c = -1{,}3:1{,}5$$

$$(-2{,}1 \cdot c + 1{,}8)\, y = 0{,}42 \cdot c + 3{,}26$$

$$y = \frac{0{,}42 \cdot c + 3{,}26}{-2{,}1 \cdot c + 1{,}8} = 0{,}80$$

Dieser Wert ist nun für die spätere Kontrollrechnung zu speichern. Mit ihm ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$x = \frac{y \cdot 2{,}1 + 0{,}42}{1{,}5} = 1{,}40.$$

Die an der zweiten Gleichung vorzunehmende Probe bestätigt die Richtigkeit.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{(1{,}40;\, 0{,}80)\}}}.$

Verschiedentlich besteht die Aufgabe, ein System von linearen Funktionen

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2,$$

das zwei Variablen x_1 und x_2 in die neuen Variablen y_1 und y_2 überführt und als **System von Lineartransformationen** bezeichnet wird, nach den x_i aufzulösen. Als Ergebnis entsteht das **Umkehr-** oder **inverse System.**

BEISPIEL

5.4. Nach x_1 und x_2 ist aufzulösen:

$$y_1 = 5x_1 + 4x_2$$
$$y_2 = 2x_1 + 2x_2.$$

Lösung: **Es ist wie bei einem linearen Gleichungssystem vorzugehen.**

$$\left|\begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 - 2y_2 \\ 2x_2 & = & -2y_1 + 5y_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Umkehrsystem:} \begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 - 2y_2 \\ x_2 & = & -y_1 + \frac{5}{2}\, y_2. \end{array}$$

Zu einer ähnlichen Aufgabe führt das nächste Beispiel, das der Vierpoltheorie der Elektrotechnik entnommen ist.

BEISPIEL

5.5. Für den im Bild 5.2 dargestellten Vierpol gelten die Ansätze $U_1 = R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2)$ und $U_2 = -R_2 I_2 + R_3(I_1 - I_2)$, aus denen sich das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} U_1 = (R_1 + R_3)\, I_1 \qquad - R_3\, I_2 \\ U_2 = \qquad R_3\, I_1 - (R_2 + R_3)\, I_2 \end{array} \right| \quad \text{„Widerstandsform"}$$

aufstellen läßt, das U_1 und U_2 in Abhängigkeit von I_1 und I_2 darstellt. Es ist so umzuformen, daß U_1 und I_1 als von U_2 und I_2 abhängig erscheinen.

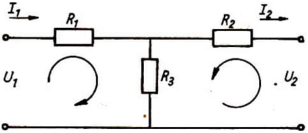


Bild 5.2

Lösung: Als zweckmäßig erweist sich das Einsetzverfahren. Die nach I_1 aufgelöste zweite Gleichung erfüllt bereits die gestellte Forderung bezüglich I_1:

$$I_1 = \frac{1}{R_3}\, U_2 + \left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right) I_2.$$

Wird sie in die erste Gleichung eingesetzt, so folgt

$$U_1 = (R_1 + R_3) \left[\frac{1}{R_3}\, U_2 + \left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right) I_2\right] - R_3 I_2$$

und nach Vereinfachung

$$\left| \begin{array}{l} U_1 = \left(\frac{R_1}{R_3} + 1\right) U_2 + \left(\frac{R_1 R_2}{R_3} + R_1 + R_2\right) I_2 \\ I_1 = \qquad \frac{1}{R_3}\, U_2 + \left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right) \qquad I_2. \end{array} \right| \quad \text{„Kettenform"}$$

Wie bei der Gleichung im Beispiel 4.18. können auch bei Systemen Gleichungen auftreten, die zuerst in eine lineare Form zu überführen sind. Im nächsten Beispiel werden dazu neue Variable eingeführt.

BEISPIEL

5.6. $\{(x; y) \mid -4x + 3y = 10xy \wedge 6x + y = 7xy\}$

Lösung: Neben den linearen Termen tritt noch der gemischte xy-Term auf. Er verschwindet, wenn durch $T = xy$ dividiert wird. Zuvor ist (siehe Bemerkungen nach Regel 4.3) der Fall $T = 0$ zu untersuchen!

Es ist $xy = 0$ für:		Die Gleichungen gehen damit über in:
$x = 0$	$y \neq 0$	falsche Aussagen
$x \neq 0$	$y = 0$	falsche Aussagen
$x = 0$	$y = 0$	wahre Aussagen! $\Rightarrow$ vermerken: $(0; 0)$.

Nun kann durch $T = xy \neq 0$ dividiert werden.

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{4}{y} + \dfrac{3}{x} = 10 \\ \dfrac{6}{y} + \dfrac{1}{x} = 7 \end{array}\right|$$

Es ist der veränderte Definitionsbereich zu beachten!

Das reziproke System läßt sich mit $u = 1/y$, $v = 1/x$ linearisieren.

$$\left|\begin{array}{l} -4u + 3v = 10 \\ 6u + v = 7 \end{array}\right| \cdot (-3) \qquad \left.\begin{array}{l} u = 1/y \\ v = 1/x \end{array}\right\} \in P \setminus \{0\}$$

$$\begin{array}{lcl} -22u = -11 & & \\ u = 1/2 & \Rightarrow & y = 1/u = 2 \\ v = 4 & \Rightarrow & x = 1/v = 1/4 \end{array}$$

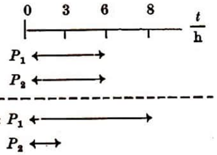
Lösungsmenge: $L = \left\{(0;0);\ \left(\frac{1}{4};\ 2\right)\right\}.$

Wesentlich bei der Lösung textlich gegebener Anwendungsaufgaben ist, den Sachverhalt zu analysieren und in übersichtlicher Form zu skizzieren. Die Bedeutung der einzuführenden Variablen, die sich aus der Fragestellung ergibt, muß eindeutig formuliert werden. Es sind Maßeinheiten festzulegen, und es sollte die Größenordnung der zu erwartenden Lösung abgeschätzt werden. Der Sachverhalt ist dann in Gleichungsform auszudrücken, also mathematisch zu modellieren. Grundsätzlich ist es möglich, die Gleichungen in Form von Größengleichungen, zugeschnittenen Größengleichungen oder auch Zahlenwertgleichungen anzusetzen. Im letztgenannten Fall sollte eine getrennte Untersuchung der Maßeinheiten erfolgen.

BEISPIELE

5.7. Ein Behälter sollte durch die gleichzeitig betriebenen Pumpen P_1 und P_2 in 6 Stunden gefüllt werden. Da aber nach 3 Stunden P_2 abgeschaltet wurde, war der Behälter erst nach weiteren 5 Stunden gefüllt. In welcher Zeit hätten die Pumpen jeweils einzeln den Behälter gefüllt?

Lösung:



Festlegung der Variablen:

P_1 benötigt allein x Std.

P_2 benötigt allein y Std.

Demnach beträgt die Füllmenge/Std.:

$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ausgedrückt in Bruchteilen der Gesamtmenge.

Dem Sachverhalt nach gilt: $x, y > 6$.

Zustand I: Je 6 Stundenleistungen ergeben die Gesamtmenge (Gesamtmenge = Summe der in Bruchteilen ausgedrückten Teilmengen = 1): $\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$.

Zustand II: Den anderen Zeiten entsprechend gilt:

$$\frac{8}{x} + \frac{3}{y} = 1.$$

Mit der Substitution $1/x = u$, $1/y = v$ mit $u, v \in (0; 1/6)$ ist zu lösen:

$$\left|\begin{array}{l} 6u + 6v = 1 \\ 8u + 3v = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$10u = 1$$

$$u = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{6}{10} + 6v = 1 \Rightarrow 6v = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$v = \frac{1}{15}$$

Es benötigen allein P_1 10 Stunden und P_2 15 Stunden.

5.8. Durch Mischen zweier Flüssigkeiten F_1 und F_2 mit den Dichten ϱ_1 und $\varrho_2 (\varrho_1 < \varrho_2)$ soll eine Flüssigkeit F mit der Dichte ϱ hergestellt werden. Wie ist die prozentuale Volumenzusammensetzung, und wie ist das Mischungsverhältnis?

Lösung: Mit relativen Größen (Dichte, Prozentsatz, Geschwindigkeit usw.) lassen sich Gleichungen nicht unmittelbar aufstellen, wohl aber mit den darin enthaltenen absoluten Größen, also Masse und Volumen. Die prozentuale Zusammensetzung ist direkt ablesbar, wenn als Endvolumen 100 dm³ angesetzt wird.

	F_1	F_2		F
Dichte:	ϱ_1	ϱ_2		ϱ_2
Volumen:	x_1	x_2	$\rightarrow$	100 dm³
Masse:	$\varrho_1 x_1$	$\varrho_2 x_2$		100ϱ dm³

$$\begin{array}{ll} \text{Volumengl.:} & \left|\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 100\ \text{dm}^3 \\ \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 = 100\varrho\ \text{dm}^3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot \varrho_2 \\ \cdot(-1) \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot(-\varrho_1) \\ \downarrow \end{array}\right. \\ \text{Massegl.:} & \end{array}$$

$$(\varrho_2 - \varrho_1)\, x_1 = (\varrho_2 - \varrho) \cdot 100\ \text{dm}^3 \qquad (\varrho_2 - \varrho_1)\, x_2 = (\varrho - \varrho_1) \cdot 100\ \text{dm}^3.$$

Die prozentuale Zusammensetzung beträgt:

$$F_1\colon x_{1p} = \frac{\varrho_2 - \varrho}{\varrho_2 - \varrho_1} \cdot 100\% \qquad F_2\colon x_{2p} = \frac{\varrho - \varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \cdot 100\%.$$

Mischungsverhältnis: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\varrho - \varrho_1}{\varrho_2 - \varrho}$.

Die Mischung erfolgt im umgekehrten Verhältnis der aus den Dichten gebildeten Differenzen („Andreaskreuz").

$$\begin{array}{ccc} \varrho_2 & & \boxed{\varrho - \varrho_1} \\ & \varrho & : \\ \varrho_1 & & \boxed{\varrho_2 - \varrho} \end{array}$$

Gleiches gilt, wenn die Konzentration der zu mischenden Flüssigkeiten durch ihren Prozentgehalt angegeben ist.

Kontrollfragen

5.1. Mit welchen Verfahren lassen sich lineare Gleichungssysteme lösen, und welches dieser Verfahren ist besonders geeignet?
5.2. Was ist über die Koeffizienten zweier linear abhängiger Gleichungen auszusagen?
5.3. Welche Fälle können bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems eintreten, wie können die Lösungsmengen beschaffen sein?
5.4. Wie verlaufen die den Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen entsprechenden Geraden in den einzelnen Fällen zueinander?
5.5. Wann ist ein aus zwei linearen Gleichungen bestehendes System mit zwei Variablen unlösbar?

Aufgaben: 5.1. bis 5.19.

5.2. Lineare Gleichungssysteme mit n Variablen

5.2.0. Vorbemerkung

Um umfangreichere Systeme in übersichtlicher Weise lösen zu können, ist es zweckmäßig, den Vorgang in Form eines Algorithmus zu systematisieren. Es sollen dafür zwei wählbar einsetzbare Verfahren behandelt werden.

5.2.1. Der Gaußsche Algorithmus

Lineare Systeme mit mehr als zwei Variablen und Gleichungen lassen sich genauso wie die in 5.1. behandelten Systeme mit Hilfe des Additionsverfahrens lösen. Dazu sind in einem System von n Gleichungen mit n Variablen $(n - 1)$-mal je zwei Gleichungen so linear zu kombinieren, daß dabei jeweils eine bestimmte Variable herausfällt. Das neu entstehende System, nun aus $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Variablen bestehend, ist dem gleichen Prozeß zu unterziehen usw., bis schließlich nur noch eine Gleichung mit einer Variablen übrigbleibt. Gauss, der bei Vermessungsarbeiten auf derartige, und zwar sehr umfangreiche Systeme stieß, gestaltete dafür das Additionsverfahren in einem Algorithmus so, daß ein möglichst rationelles und übersichtliches Lösen gewährleistet ist.
Der Grundgedanke des Verfahrens — es soll hier an einem System von drei Gleichungen entwickelt werden — besteht darin, das in rechteckiger Form vorliegende System

$$\left| \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_3 \end{aligned} \right|$$

in die gestaffelte Form

$$\left| \begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 &= b_2 \\ b_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right|$$

zu überführen. Mit x_3 beginnend, können nun die x_k aus den Gleichungen berechnet werden, in denen sie jeweils als erste Variable auftreten.
Zu lösen sei das System

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|} \text{(I)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & 19 \\ \text{(II)} & 4x & - & 4y & + & 3z & = & 22 \\ \text{(III)} & -6x & - & y & + & 5z & = & 7 \end{array}$$

Eine Gleichung, sie muß die Variable x enthalten, wird in das gestaffelte System übernommen und dient dazu, in den anderen Gleichungen x zu entfernen, zu eliminieren. Für den vorliegenden Fall sei es die Gleichung (I). Sie ist mit den angegebenen Faktoren zu multiplizieren und dann zu den gekennzeichneten Gleichungen zu addieren.

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l} \text{(I)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & 19 & \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ \text{(II)} & 4x & - & 4y & + & 3z & = & 22 & \\ \text{(III)} & -6x & - & y & + & 5z & = & 7 & \end{array}$$

Als neue Gleichungen (II′) und (III′) ergeben sich

$$\begin{array}{l|rcrcr|} \text{(II}'\text{)} & 2y & - & 5z & = & -16 \\ \text{(III}'\text{)} & -10y & + & 17z & = & 64 \end{array}\,.$$

Mit einer dieser beiden Gleichungen, die wiederum in das gestaffelte System zu übernehmen ist, wird in der anderen die nächste Variable y eliminiert. Gleichung (II′) sei dazu mit 5 multipliziert und zu (III′) addiert, so daß sich als neue Gleichung

$$\text{(III}''\text{)} \quad -8z = -16$$

ergibt. Das gestaffelte System

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|} \text{(I)} & 2x & - & 3y & + & 4z & = & 19 \\ \text{(II}'\text{)} & & & 2y & - & 5z & = & -16 \\ \text{(III}''\text{)} & & & & & -8z & = & -16 \end{array}$$

läßt sich schrittweise, mit z beginnend, auflösen:

$$z = 2, \quad y = -3 \quad \text{und} \quad x = 1.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{(1;\ -3;\ 2)\}}}$.

Dieser gesamte Vorgang ist noch von überflüssiger Schreibarbeit zu befreien, und das ergibt dann den GAUSSschen Algorithmus. Dazu sind die Koeffizienten und absoluten Glieder in dem Schema

x	y	z	1
2	−3	4	19
4	−4	3	22
−6	−1	5	7

wiederzugeben. Die zur Elimination dienende Zeile (im Beispiel 1. Zeile) kennzeichnet der Buchstabe E. Vor den Zeilen, in denen mit Hilfe von E eine Variable eliminiert werden soll, ist anzugeben, welches Vielfache der E-Zeile zu addieren ist, damit sich als neuer Koeffizient der betreffenden Variablen eine Null ergibt. Die zu addierenden Vielfachen von E können noch neben (oder) unter den betreffenden Elementen vermerkt werden (kursive Zahlen).

	x	y	z	1
E	2	−3	4	19
−2	4 *−4*	−4 *+6*	3 *−8*	22 *−38*
3	−6 *+6*	−1 *−9*	5 *+12*	7 *+57*

Mit dem angegebenen Faktor ist **nicht** die betreffende Zeile, sondern die E-Zeile zu multiplizieren!

Mit der so veränderten 2. und 3. Zeile

x	y	z	1
0	2	−5	−16
0	−10	17	64

ist analog zu verfahren:

	x	y	z	1
E	0	2	−5	−16
5	0	−10 *+10*	17 *−25*	64 *−80*
		0	−8	−16

Die beiden E-Zeilen und die letzte Zeile enthalten die Koeffizienten und Absolutglieder des gestaffelten Systems, das bereits gelöst wurde.
Zur Probe sind die drei Ausgangsgleichungen mit der gefundenen Lösungsmenge zu belegen. Eine vereinfachte Probe kann an der Gleichung vorgenommen werden, die durch Addition aller Gleichungen des Systems entsteht. Die Erfüllung dieser Summengleichung ist allerdings nur eine notwendige Bedingung. Wird sie nicht erfüllt, so stimmt die Lösungsmenge nicht. Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind die Summen der jeweils in einer Spalte des Ausgangsschemas stehenden Elemente (Spaltensummen σ_k). Sie werden gleich nach dem Anlegen des Schemas gebildet und als zusätzliche Zeile zwischen der Kopfzeile und der 1. Zeile des Schemas eingetragen.
Für eine mitlaufende **Kontrollrechnung** ist von jeder Zeile (auch der Zeile der Spaltensummen) die Summe aller ihrer Elemente, die Zeilensumme s_i, zu bilden und in einer rechts anzufügenden Zusatzspalte anzugeben.

x	y	z	1	K
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	s
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_1	s_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_2	s_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_3	s_3

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}$$

$$s_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} + a_i$$

$$s = \sum_{k=1}^{4} \sigma_k$$

Die Zahl s, die als Summe der σ_k entstanden ist, muß gleichzeitig die Summe der s_i sein, was zu überprüfen ist. Erst wenn diese zusätzlichen Elemente gebildet sind, wird

mit dem GAUSSschen Algorithmus begonnen. Mit s_1, s_2 und s_3 ist dabei ebenso wie mit den Elementen der gleichen Zeile zu verfahren. Jede neu gebildete Zeile ist dahingehend zu überprüfen, ob das in der Kontrollspalte entstandene Element gleich der Zeilensumme der links davon stehenden Elemente ist. Ergibt sich ein anderer Wert, so muß ein Rechenfehler vorliegen. Der hier nicht weiter ausgeführte Beweis folgt aus der Tatsache, daß die Summe der Linearkombinationen der einzelnen Elemente gleich der Linearkombination der Summen dieser Elemente ist.
Das bereits behandelte System sei noch einmal einschließlich der Kontrollrechnung geschlossen wiedergegeben:

	x	y	z	1	K	Kontrollrechnung:
	0	−8	12	48	52	$= 0 - 8 + 12 + 48 \overset{!}{=} 22 + 25 + 5$
E	2	−3	4	19	22	
−2	4 *−4*	−4 *+6*	3 *−8*	22 *−38*	25 *−44*	
3	−6 *+6*	−1 *−9*	5 *+12*	7 *+57*	5 *+66*	
E	0	2	−5	−16	−19	$-19 \overset{!}{=} 2 - 5 - 16$
5	0	−10 *+10*	17 *−25*	64 *−80*	71 *−95*	$71 \overset{!}{=} -10 + 17 + 64$
		0	−8	−16	−24	$-24 \overset{!}{=} -8 - 16.$

Mit der bereits weiter vorn angegebenen Lösungsmenge $\{(1; -3; 2)\}$ wird $0x - 8y + 12z = 48$ belegt:

$$0 \cdot 1 - 8 \cdot (-3) + 12 \cdot 2 \overset{!}{=} 48$$
$$48 = 48.$$

Daß dieses Erfülltsein der Kontrollgleichung nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung ist, läßt sich hier u. a. daran erkennen, daß ein fehlerhafter x-Wert nicht bemerkbar wäre, da der zugehörige Koeffizient zufälligerweise eine Null ist.
Der GAUSSsche Algorithmus ist nicht auf drei Gleichungen beschränkt, und es muß keinesfalls immer die 1. Gleichung sein, die als E-Zeile dient. Um mit ganzzahligen Erweiterungsfaktoren auskommen zu können, ist als E-Zeile die zu bevorzugen, die als Koeffizient der zu eliminierenden Variablen eine Eins oder einen Teiler der entsprechenden Koeffizienten in den anderen Zeilen aufweist. Sind derartige Werte im anfänglichen System nicht vorhanden, so lassen sie sich meist durch eine Linearkombination zweier Gleichungen erreichen.

BEISPIEL

5.9. Welche Lösungsmenge hat

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 \qquad\quad + 9x_4 = 25 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 27 \\ 4x_1 + 6x_2 - 15x_3 + 5x_4 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 12x_4 = 32 \end{array}\right| \;?$$

Lösung: In keiner der Gleichungen liegt als Koeffizient von x_1 eine Eins vor. Es läßt sich aber sofort eine Gleichung mit dieser Eigenschaft bilden, indem z. B. die 1. Gleichung von der 2. abgezogen wird:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 \qquad\;\; + \; 9x_4 = 25 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 27 \end{array}\right| \begin{array}{l} - \\ + \end{array}$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2.$$

Diese neue Gleichung ersetzt dann eine der an der Kombination beteiligten, so z. B. die 2. Gleichung

	x_1	x_2	x_3	x_4	1	K
	10	4	−22	28	54	74
−2	2 *−2*	−4 *−2*	0 *+6*	9 *−4*	25 *−4*	32 *−6*
E	1	1	−3	2	2	3
−4	4 *−4*	6 *−4*	−15 *+12*	5 *−8*	−5 *−8*	−5 *−12*
−3	3 *−3*	1 *−3*	−4 *+9*	12 *−6*	32 *−6*	44 *−9*
3	0	−6 *+6*	6 *−9*	5 *−9*	21 *−39*	26 *−51*
E	0	2	−3	−3	−13	−17
1	0	−2 *+2*	5 *−3*	6 *−3*	26 *−13*	35 *−17*
E		0	−3	−4	−18	−25
		0	2	3	13	18 Anm.
2			6 *−6*	9 *−8*	39 *−36*	54 *−50*
			0	1	3	4

Anmerkung: Um auch hier ohne Brüche auskommen zu können, werden alle Elemente der Zeile mit 3 multipliziert, damit das zu eliminierende Element gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von 2 und 3 ist.

Gestaffeltes System:

$$\left|\begin{array}{r} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = \quad 2 \\ 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -13 \\ -3x_3 - 4x_4 = -18 \\ x_4 = \quad 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 1 \\ \Rightarrow x_2 = 1 \\ \Rightarrow x_3 = 2 \\ \Rightarrow x_4 = 3. \end{array}$$

Kontrolle:

$$10 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 22 \cdot 2 + 28 \cdot 3 \stackrel{?}{=} 54$$

$$54 = 54$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{(1; 1; 2; 3)\}}}$.

Bei nichtganzzahligen Koeffizienten und Einsatz von Rechnern ist jeweils die Zeile zur Elimination heranzuziehen, deren Anfangselement den größten absoluten Betrag aufweist. Es wird dadurch erreicht, daß die Beträge der Erweiterungsfaktoren kleiner als Eins sind und so die auftretenden Ungenauigkeiten möglichst klein bleiben.

In den bisherigen Beispielen lagen Systeme mit eindeutiger Lösungsmenge vor. Die folgenden Beispiele sollen nun zeigen, wie sich der Algorithmus bei abhängigen und widersprechenden Gleichungssystemen gestaltet (vgl. zuvor Bsp. 5.2.).

BEISPIEL

5.10. Das folgende Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\left| \begin{array}{rl} x + 2y - z + 3u &= 6 \\ 2y + z + 2u &= 2 \\ 2x + 10y + z + 12u &= 18 \\ 3x + 4y - 4z + 7u &= 16 \end{array} \right|$$

Lösung:

	x	y	z	u	1	K
	6	18	−3	24	42	87
E	1	2	−1	3	6	11
0	0	2	1	2	2	7
−2	2	10	1	12	18	43
−3	3	4	−4	7	16	26
E	0	2	1	2	2	7
−3	0	6	3	6	6	21
1	0	−2	−1	−2	−2	−7
		0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0

Das gegebene System ist unterbestimmt, denn es weist für die 4 Variablen nur die 2 unabhängigen Gleichungen

$$\left| \begin{array}{rl} x + 2y - z + 3u &= 6 \\ 2y + z + 2u &= 2 \end{array} \right|$$

auf. Die restlichen Gleichungen $0 \cdot z + 0 \cdot u = 0$ werden von allen $z, u \in P$ erfüllt. Ihre Koeffizienten und Absolutglieder verschwinden, weil sie von den beiden ersten linear abhängig sind. Werden die Ausgangsgleichungen mit I bis IV numeriert, so gelten für die Gleichungen (III) und (IV) folgende Abhängigkeiten:

$$(\mathrm{III}) = 2 \cdot (\mathrm{I}) + 3 \cdot (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{IV}) = 3 \cdot (\mathrm{I}) - (\mathrm{II}),$$

d. h., daß z. B. die 3. Gleichung lediglich die Summe des Zweifachen der 1. und des Dreifachen der 2. Gleichung darstellt.
Da nur zwei unabhängige Gleichungen vorliegen, verbleiben nur zwei Variablen in den linken Seiten, die anderen gehen als Parameter auf die rechten Seiten. Sie können mit beliebigen reellen Zahlen belegt werden. Es ist zweckmäßig, dafür noch nicht elimi-

nierte Variable zu wählen. Mit den Parametern z und u ist

$$\left| \begin{aligned} x + 2y &= 6 + z - 3u \\ 2y &= 2 - z - 2u \end{aligned} \right| \cdot (-1)$$

und so: $x = 4 + 2z - u, \quad y = 1 - \frac{1}{2} z - u.$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \left\{\left(4 + 2z - u;\ 1 - \frac{1}{2} z - u;\ z; u\right) \middle| z, u \in P\right\}}}.$

Die Lösungsmenge läßt sich noch in anderen Formen wiedergeben. Werden dafür z. B. neue **Parameter** mittels $s = \frac{1}{2} z$ und $t = u$ eingeführt, so erscheint als

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{(4 + 4s - t; 1 - s - t; 2s; t) \mid s; t \in P\}}}.$

Im nächsten Beispiel zeigt sich, wie der Gaussche Algorithmus auf ein lineares System mit einander widersprechenden Gleichungen reagiert.

BEISPIEL

5.11. Welche Lösungsmenge hat

$$\left| \begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 19 \\ 4x - 4y + 3z &= 22 \\ 6x - 7y + 7z &= 10 \end{aligned} \right| ?$$

Lösung:

	x	y	z	1	K
	12	−14	14	51	63
E	2	−3	4	19	22
−2	4	−4	3	22	25
−3	6	−7	7	10	16
E	0	2	−5	−16	−19
−1	0	2	−5	−47	−50
		0	0	−31	−31

Die aus der letzten Zeile entstehende Gleichung

$$0 \cdot z = -31$$

ist für keinen Wert z erfüllbar. Das Gleichungssystem ist widersprechend, die Lösungsmenge ist leer: $\underline{\underline{L = \emptyset}}.$

Zusammenfassende Betrachtung des Gaußschen Algorithmus

Allgemein läßt sich ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = a_r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mr}x_r + \cdots + a_{mn}x_n = a_m \end{array} \right|$$

durch entsprechende Eliminationen in die gestaffelte Form

$$\left| \begin{array}{r} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r + \cdots + b_{1n}x_n = b_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2r}x_r + \cdots + b_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{rr}x_r + \cdots + b_{rn}x_n = b_r \\ 0 + \cdots + 0 \quad = b_{r+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad = b_m \end{array} \right|$$

überführen, wobei eventuell einige Gleichungen umnumeriert werden müssen.

Fall I: Alle $b_i \in \{b_{r+1}; \cdots; b_m\}$ sind gleich Null.

Das aus r linear unabhängigen Gleichungen bestehende System ist grundsätzlich lösbar.

Unterfall 1: Ist $r = n \leqq m$, so liegt das eindeutig lösbare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = b_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{nn}x_n = b_n \end{array} \right|$$

vor.

Unterfall 2: Für $r < n \leqq m$ oder $r \leqq m < n$ ist die Anzahl der unabhängigen Gleichungen kleiner als die der Variablen. Es sind $(n - r)$ Variablen als Parameter auf die rechten Seiten zu bringen, wobei darauf zu achten ist, daß die links verbleibenden r Variablen in der Hauptdiagonalen vertreten sind. Die Lösungsmenge umfaßt unbegrenzt viele Elemente.

Fall II: Mindestens ein $b_i \in \{b_{r+1}; \cdots; b_m\}$ ist ungleich Null. Das Gleichungssystem ist unlösbar.

Aufgaben: 5.20 bis 5.26.

5.2.2. Das Austauschverfahren

Bereits in 5.1. wurde für ein aus zwei Gleichungen bestehendes System von Lineartransformationen das inverse System aufgestellt (vgl. Beispiel 5.4.). In diesem Abschnitt wird nun ein Verfahren entwickelt, mit dem sich umfangreichere Systeme umkehren lassen und das zudem auch für maschinelles Rechnen geeignet ist.

Gegeben sei zunächst ein aus drei linearen Gleichungen bestehendes System

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

das nach den x_k aufzulösen ist. In dem zu entwickelnden Verfahren soll schrittweise jeweils ein x_k gegen ein y_i ausgetauscht werden, so z. B. zunächst x_1 gegen y_1. Dazu sei die 1. Gleichung nach x_1 aufgelöst:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \\ &= \frac{1}{p} y_1 + kx_2 + lx_3 \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

mit

$$p = a_{11}, \quad k = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{-p}, \quad l = -\frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{a_{13}}{-p}.$$

Damit soll nun x_1 aus der 2. Gleichung eliminiert werden:

$$\begin{aligned} y_2 &= a_{21}\left(\frac{1}{p} y_1 + kx_2 + lx_3\right) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ &= \frac{a_{21}}{p} y_1 + (a_{22} + ka_{21})\, x_2 + (a_{23} + la_{21})\, x_3 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

und analog

$$y_3 = \frac{a_{31}}{p} y_1 + (a_{32} + ka_{31})\, x_2 + (a_{33} + la_{31})\, x_3. \qquad \text{(III)}$$

Eine schematische Darstellung gebe lediglich die Koeffizienten wieder.
Ausgangssystem

	x_1	x_2	x_3
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Austauschsystem mit den Gleichungen (I), (II) und (III):

	y_1	x_2	x_3
x_1	$\frac{1}{p}$	$\frac{a_{12}}{-p}\ (= k)$	$\frac{a_{13}}{-p}\ (= l)$
y_2	$\frac{a_{21}}{p}$	$a_{22} + ka_{21}$	$a_{23} + la_{21}$
y_3	$\frac{a_{31}}{p}$	$a_{32} + ka_{31}$	$a_{33} + la_{31}$.

Die Zeile, in der die auszutauschende Variable y_i steht, wird **Pivotzeile** und die Spalte mit der auszutauschenden Variablen x_k **Pivotspalte** genannt. In ihrem Kreuzungspunkt steht das **Pivotelement.**

Für die praktische Durchführung ergibt sich folgende Schrittfolge:

1. Pivotelement p durch den reziproken Wert ersetzen.
2. Die übrigen Elemente der Pivotspalte durch p dividieren.
3. Die übrigen Werte der Pivotzeile durch $-p$ dividieren. Da diese Werte als Faktoren (k, l) zur Umwandlung der restlichen Elemente dienen, sind sie noch zusätzlich unter dem zu transformierenden System als **Kellerzeile** anzubringen.
4. Die restlichen Elemente um das k- bzw. l-fache des in der gleichen Zeile stehenden Elementes der Pivotspalte vermehren.

Wenn auch nur speziell für den Austausch von x_1 und y_1 hergeleitet, so läßt sich nach diesem Algorithmus jedes x_k und y_i austauschen, vorausgesetzt, das entsprechende Pivotelement a_{ik} ist von Null verschieden. Das Verfahren ist so oft zu wiederholen, wie noch austauschfähige Variablen vorhanden sind. Das jeweilige Pivotelement ist zweckmäßig auszuwählen, wobei vorhandene Einselemente besonders geeignet sind.

BEISPIEL

5.12. Für

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 &= -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ y_3 &= 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

ist das inverse System zu bestimmen.

Lösung: Das umzukehrende System ist zu tabellieren, anschließend sind die vier Schritte auszuführen:

	x_1	x_2	x_3
y_1	$\boxed{2}$	2	3
y_2	-4	-2	3
y_3	4	3	2
		-1	$-\frac{3}{2}$

Pivotelement: $\boxed{}$

Kellerzeile

1. Schritt	y_1	x_2	x_3	
x_1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	3. Schritt
y_2	-2	$-2+(-1)(-4)$	$3+\left(-\frac{3}{2}\right)(-4)$	4. Schritt
2. Schritt				
y_3	2	$3+(-1)\cdot 4$	$2+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 4$	

Nach dem ersten Durchgang ist also

	y_1	x_2	x_3
x_1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$
y_2	-2	2	9
y_3	2	$\boxed{-1}$	-4

Im 2. Durchgang soll x_2 gegen y_3 ausgetauscht werden, weil das zugehörige Pivotelement $p = -1$ besonders geeignet ist. Einschließlich Kellerzeile ergibt sich:

	y_1	y_3	x_3
	2		-4
x_1	$\frac{1}{2} + 2(-1)$	1	$-\frac{3}{2} + (-4)(-1)$
y_2	$-2 + 2 \cdot 2$	-2	$9 + (-4) \cdot 2$
x_2	2	-1	-4

Nachdem die Summen berechnet worden sind, sollen die noch zur Verfügung stehenden Variablen x_3 und y_2 ausgetauscht werden. Zunächst ist die dazugehörige Kellerzeile aufzustellen. Um unnötige Schreibarbeit zu vermeiden, sind die im 4. Schritt zu addierenden Produkte gleich mit im Austauschschema anzuführen.

	y_1	y_3	x_3
x_1	$-\frac{3}{2}\ \mathit{-5}$	$1\ \mathit{+5}$	$\frac{5}{2}$
y_2	2	-2	$\boxed{1}$
x_2	$2\ \mathit{+8}$	$-1\ \mathit{-8}$	-4
	-2	2	

geradstehende Zahlen:
Ergebnis des 2. Durchgangs,
kursive Zahlen:
Vorbereitung des 3. Durchgangs.

	y_1	y_3	y_2
x_1	$-\frac{13}{2}$	6	$\frac{5}{2}$
x_3	-2	2	1
x_2	10	-9	-4

In geordneter Reihenfolge ergibt sich als Lösung:

$$x_1 = -\frac{13}{2} y_1 + \frac{5}{2} y_2 + 6y_3$$

$$x_2 = 10y_1 - 4y_2 - 9y_3$$

$$x_3 = -2y_1 + y_2 + 2y_3$$

Es ist zweckmäßig, eine **Kontrollrechnung** einzuführen, die es ermöglicht, jeden Austausch zu überprüfen. Dazu seien alle Gleichungen durch zusätzliche Absolutglieder d_i so abgewandelt, daß bei der Belegung aller Variablen mit dem Wert 1 alle Gleichungen erfüllt sind. So verändert sich die Gleichung

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \quad \text{in} \quad y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + d_i,$$

die für $x_1 = x_2 = x_3 = y_i = 1$ in

$$1 = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + d_i$$

übergehen soll. Die d_i müssen demnach die aus den Koeffizienten gebildeten Summen zu 1 ergänzen. Sie werden, sobald das umzuwandelnde System tabelliert ist, berechnet und in einer Zusatzspalte angeführt. Mit dieser Kontrollspalte K wird bei den einzelnen Durchgängen ebenso verfahren wie mit den Nichtpivotspalten. Sobald nun im Austauschverfahren eine neue Zeile berechnet worden ist, wird die Zeilensumme aller Elemente (einschließlich Element der Kontrollspalte) gebildet, die wiederum gleich 1 sein muß. Diese Eigenschaft ist sofort einzusehen. Da beim Austauschverfahren die Gleichungen des Systems jeweils nur nach einer anderen Variablen aufgelöst werden, muß die Belegung der Variablen mit dem Wert 1 auch die neuen Gleichungen erfüllen. Für die Kellerzeile gilt die Kontrollrechnung nicht.
Am 1. Durchgang des Beispiels 5.12. soll diese Kontrollrechnung gezeigt werden.

5.12. (Fortsetzung) Das Ausgangsschema wird um die Kontrollspalte erweitert:

	x_1	x_2	x_3	K		Berechnung der Kontrollwerte d_i:
y_1	$\boxed{2}$	2	3	−6		$2 + 2 + 3 + d_1 = 1 \Rightarrow d_1 = -6$
y_2	−4	−2	3	4	*−12*	$-4 - 2 + 3 + d_2 = 1 \Rightarrow d_2 = 4$
y_3	4	3	2	−8	*+12*	$4 + 3 + 2 + d_3 = 1 \Rightarrow d_3 = -8.$
		−1	$-\frac{3}{2}$	3		

	y_1	x_2	x_3		Kontrollrechnung
x_1	$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$	3	$\frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} + 3 \overset{?}{=} 1$
y_2	−2	2	9	−8	$-2 + 2 + 9 - 8 \overset{?}{=} 1$
y_3	2	−1	−4	4	$2 - 1 - 4 + 4 \overset{?}{=} 1$

Das Austauschverfahren ist nicht auf Systeme mit 3 Gleichungen beschränkt.

BEISPIEL

5.13. Es ist nach den x_k aufzulösen

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3 \\ y_2 &= 5x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} - 8x_4 - 1 \\ y_3 &= x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 7 \\ y_4 &= -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 5. \end{aligned}$$

Lösung: **Das System weist zusätzlich noch absolute Glieder auf. Sie sind in einer weiteren Spalte als Koeffizienten einer Variablen x_5 mit $x_5 = 1$ aufzuführen, die jedoch nicht gegen ein y_i austauschbar ist.**

	x_1	x_2	x_3	x_4	1	K
y_1	2	$\boxed{1}$	−1	−1	3	−3
y_2	5 *−4*	2	0 *+2*	−8 *+2*	−1 *−6*	3 *+6*
y_3	1 *−2*	1	−2 *+1*	3 *+1*	7 *−3*	−9 *+3*
y_4	−9 *+8*	−4	2 *−4*	8 *−4*	−5 *+12*	9 *−12*
	−2		1	1	−3	3

	x_1	y_1	x_3	x_4	1	K
x_2	−2 *−1*	1 *+1*	1	1 *+4*	−3 *+4*	3 *−6*
y_2	1 *−2*	2 *+2*	2	−6 *+8*	−7 *+8*	9 *−12*
y_3	−1	1	$\boxed{-1}$	4	4	−6
y_4	−1 *+2*	−4 *−2*	−2	4 *−8*	7 *−8*	−3 *+12*
	−1	1		4	4	−6

	x_1	y_1	y_3	x_4		
x_2	−3	2 *−12*	−1 *+6*	5 *−6*	1 *−3*	−3 *+9*
y_2	$\boxed{-1}$	4	−2	2	1	−3
x_3	−1	1 *−4*	−1 *+2*	4 *−2*	4 *−1*	−6 *+3*
y_4	1	−6 *+4*	2 *−2*	−4 *+2*	−1 *+1*	9 *−3*
		4	−2	2	1	−3

	y_2	y_1	y_3	x_4		
x_2	3 *+ $\frac{1}{2}$*	−10 *+1*	5	−1	−2	6 *−3*
x_1	−1 *−1*	4 *−2*	−2	2	1	−3 *+6*
x_3	1 *−1*	−3 *−2*	1	2	3	−3 *+6*
y_4	−1	−2	0	$\boxed{-2}$	0	6
	$-\frac{1}{2}$	−1	0		0	3

	y_2	y_1	y_3	y_4		
x_2	$\frac{7}{2}$	−9	5	$\frac{1}{2}$	−2	3
x_1	−2	2	−2	−1	1	3
x_3	0	−5	1	−1	3	3
x_4	$-\frac{1}{2}$	−1	0	$-\frac{1}{2}$	0	3

Umkehrsystem:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2y_1 - 2y_2 - 2y_3 - y_4 + 1\\
x_2 &= -9y_1 + \frac{7}{2}\,y_2 + 5y_3 + \frac{1}{2}\,y_4 - 2\\
x_3 &= -5y_1 + y_3 - y_4 + 3\\
x_4 &= -y_1 - \frac{1}{2}\,y_2 - \frac{1}{2}\,y_4
\end{aligned}$$

Bei nichtganzzahligen Koeffizienten und Einsatz von Rechnern ist möglichst das Element mit dem größten Betrag als Pivotelement auszuwählen. Da dann die Beträge der in der Kellerzeile erscheinenden Faktoren kleiner als eins sind, wird gewährleistet, daß die entstehenden Rechenungenauigkeiten möglichst klein bleiben. Es ist zweckmäßig, nicht erst sämtliche Elemente der Kellerzeile zu ermitteln, sondern sofort mit dem errechneten zunächst alle übrigen Elemente der betreffenden Spalte umzurechnen. Dann erst wird das nächste Element der Kellerzeile bestimmt und mit ihm ebenso verfahren.
Wie das nächste Beispiel zeigt, muß nicht in jedem Fall ein inverses System existieren.

BEISPIEL

5.14. Es ist umzukehren

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 1\\
y_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2\\
y_3 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 4.
\end{aligned}$$

Lösung:

	x_1	x_2	x_3	1	K
y_1	2	4	5	1	−11
y_2	$\boxed{1}$	2	3	2	−7
y_3	1	2	1	−4	1
		−2	−3	−2	7
	y_2	x_2	x_3		

	y_2	x_2	x_3	1	K
y_1	2	0	$\boxed{-1}$	−3	3
x_1	1	−2	−3	−2	7
y_3	1	0	−2	−6	8
	2	0		−3	3

	y_2	x_2	y_1		
x_3	2	0	−1	−3	3
x_1	−5	−2	3	7	−2
y_3	−3	0	2	0	2

Da eine Null als Pivotelement ungeeignet ist, bricht der Austausch ab.

Es ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3y_1 - 5y_2 - 2x_2 + 7\\
x_3 &= -y_1 + 2y_2 - 3\\
y_3 &= 2y_1 - 3y_2.
\end{aligned}$$

Die Ursache des Abbrechens liegt darin, daß sich eine der Gleichungen als Linearkombination der anderen herausstellt, also eine Gleichung linear abhängig ist. Welche der

Gleichungen sich am Schluß als abhängig herausstellt, hängt mit davon ab, in welcher Reihenfolge die Variablen ausgetauscht werden. Das Ausgangssystem besteht nur aus zwei unabhängigen Gleichungen.

Aufgaben: 5.27. bis 5.30.

Lösung von linearen Gleichungssystemen

Mit Hilfe des Austauschverfahrens sollen nun Gleichungssysteme gelöst werden. Dazu liege

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_3 = 0 \end{array} \right|$$

vor. Treten an die Stelle der Nullen die Variablen y_1, y_2 und y_3, so entsteht eine Lineartransformation, deren Variablen auszutauschen sind. Werden im entstehenden Umkehrsystem

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + b_1 \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + b_2 \\ x_3 &= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + b_3 \end{aligned}$$

wieder $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ gesetzt, so ist als Lösungstripel $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$ und $x_3 = b_3$ in der Spalte der absoluten Glieder abzulesen.

BEISPIEL

5.15. Es ist die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen.

$$\left| \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad - 8x_4 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 7 = 0 \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 - 5 = 0 \end{array} \right|$$

Lösung: Die entsprechende Lineartransformation wurde bereits im Beispiel 5.13. umgekehrt. Als Lösungsmenge ist abzulesen:

$$\underline{\underline{L = \{(1; -2; 3; 0)\}}}.$$

Für das Lösen eines Gleichungssystems läßt sich das Austauschverfahren verkürzen. Da die Koeffizienten der ausgetauschten y_i für die weitere Rechnung bedeutungslos sind, ist bei jedem Durchgang die Spalte auszulassen, die sich aus der jeweiligen Pivotspalte ergibt.

Für eine **Kontrollrechnung** erhalten die Gleichungen des Systems wiederum zusätzliche Absolutglieder d_i:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_i + d_i,$$

die so zu wählen sind, daß für $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ und nun $y_i = 0$ die Gleichungen erfüllt werden:

$$0 = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_i + d_i.$$

Die Kontrollzahlen d_i müssen demnach die aus den Koeffizienten und dem Absolutglied gebildeten Summen zu Null ergänzen. Diese Eigenschaft bleibt beim Austausch für alle noch mit einem y_i bezeichneten Zeilen erhalten, während alle x_k-Zeilen (einschließlich Kellerzeile) die Zeilensumme 1 annehmen. In einer Endkontrolle ist festzustellen, ob die gefundene Lösungsmenge alle Gleichungen des Systems erfüllt. Eine vereinfachte Kontrolle kann an der Gleichung vorgenommen werden, die durch Addition aller Gleichungen des Systems entsteht. Die Erfüllung dieser Summengleichung ist allerdings nur eine notwendige Bedingung. Wird sie nicht erfüllt, so stimmt die Lösungsmenge nicht.

BEISPIEL

5.16. Welche Lösungsmenge hat

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \end{array}\right| ?$$

Lösung: In einer Zusatzspalte sei hier vermerkt, welchen Wert die Zeilensummen annehmen müssen.

	x_1	x_2	x_3	1	K	
y_1	2	$\boxed{1}$	−1	0	−2	0
y_2	5	2	0	−8	1	0
y_3	1	1	−2	5	−5	0
	−2		1	0	2	1

	x_1	x_3			
x_2	−2	1	0	2	1
y_2	1	2	−8	5	0
y_3	−1	$\boxed{-1}$	5	−3	0
	−1		5	−3	1

	x_1	1	K	
x_2	−3	5	−1	1
y_2	$\boxed{-1}$	2	−1	0
x_3	−1	5	−3	1
		2	−1	1

x_2	−1	2	1
x_1	2	−1	1
x_3	3	−2	1

$x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 3.$

Verkürzte Probe mit: $8x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3 = 0$

$$8 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 - 3 \stackrel{?}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{(2;\ -1;\ 3)\}}}$.

Nicht in jedem Fall weist ein lineares Gleichungssystem eine eindeutige Lösungsmenge auf, und nicht immer stimmt die Anzahl der Gleichungen mit der der Variablen überein. Das folgende Beispiel zeigt an Hand von zwei Systemen die eintretenden Möglichkeiten.

BEISPIEL

5.17. Es sind zwei Gleichungssysteme I und II zu lösen, die sich jedoch nur in den Absolutgliedern unterscheiden.

$$\left|\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + a_1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + a_2 = 0 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 + 12x_4 + a_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + 7x_4 + a_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 + a_5 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{System I:} \\ a_1 = -6 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = -18 \\ a_4 = -10 \\ a_5 = -16 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{System II:} \\ a_1 = -6 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = -18 \\ a_4 = -12 \\ a_5 = -15 \end{array}\right.$$

Lösung: Da für beide Systeme die gleiche Koeffizientenmatrix vorliegt, lassen sich beide gleichzeitig lösen. Lediglich die Spalte der Absolutglieder und die Kontrollspalte sind getrennt zu führen.

					I		II	
	x_1	x_2	x_3	x_4	1	K	1	K
y_1	$\boxed{1}$	2	−1	3	−6	1	−6	1
y_2	0	2	1	2	−2	−3	−2	−3
y_3	2	10	1	12	−18	−7	−18	−7
y_4	1	6	1	7	−10	−5	−12	−3
y_5	3	4	−4	7	−16	6	−15	5
		−2	1	−3	6	−1	6	−1

	x_2	x_3	x_4				
x_1	−2	1	−3	6	−1	6	−1
y_2	2	$\boxed{1}$	2	−2	−3	−2	−3
y_3	6	3	6	−6	−9	−6	−9
y_4	4	2	4	−4	−6	−6	−4
y_5	−2	−1	−2	2	3	3	2
	−2		−2	2	3	2	3

	x_2	x_4				
x_1	−4	−5	8	2	8	2
x_3	−2	−2	2	3	2	3
y_3	0	0	0	0	0	0
y_4	0	0	0	0	−2	2
y_5	0	0	0	0	1	−1

Das Verfahren bricht vorzeitig ab. Es ergeben sich:

I:		II:	
	$x_1 = -4x_2 - 5x_4 + 8$		$x_1 = -4x_2 - 5x_4 + 8$
	$x_3 = -2x_2 - 2x_4 + 2$		$x_3 = -2x_2 - 2x_4 + 2$
$(y_3 =)\ 0 = \ \ 0$		$(y_3 =)\ 0 = \ \ 0$	
$(y_4 =)\ 0 = \ \ 0$		$(y_4 =)\ 0 = -2$	
$(y_5 =)\ 0 = \ \ 0.$		$(y_5 =)\ 0 = \ \ 1.$	

I: Das System weist nur zwei unabhängige Gleichungen auf. Die Variablen x_2 und x_4 stellen frei wählbare Parameter dar. Werden andere Pivotelemente gewählt, treten lediglich andere Variablen x_k als Parameter auf.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{(8 - 4x_2 - 5x_4;\ x_2;\ 2 - 2x_2 - 2x_4;\ x_4) \mid x_2, x_4 \in P\}}}.$

II: Die 3. Gleichung erweist sich als linear abhängig. Da sich jedoch aus der 4. und 5. Gleichung Widersprüche entwickeln, ist das Gleichungssystem unlösbar.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \emptyset}}.$

In einer zusammenfassenden Betrachtung sollen die gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems verallgemeinert werden. Gegeben sei dazu ein aus m Gleichungen mit n Variablen bestehendes Gleichungssystem.
Das dafür anzusetzende Austauschverfahren möge nach r Durchgängen abbrechen, weil kein von Null verschiedenes Pivotelement mehr vorhanden ist. r kann dabei nicht größer als die kleinere der beiden Zahlen m und n sein: $r = \min(m, n)$. Es seien $x_1 \ldots x_r$ gegen $y_1 \ldots y_r$ ausgetauscht.

Anfangsschema

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	a_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	a_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	a_m
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Schema nach r Durchgängen

	$\ldots$ x_{r+1}	$\ldots$ x_n	1
x_1	$b_{1,r+1}$	$\ldots$ b_{1n}	b_1
x_2	$b_{2,r+1}$	$\ldots$ b_{2n}	b_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_r	$b_{r,r+1}$	$\ldots$ b_{rn}	b_r
y_{r+1}	0	$\ldots$ 0	b_{r+1}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	0	$\ldots$ 0	b_m

Fall I: Alle $b_i \in \{b_{r+1}; \cdots; b_m\}$ sind gleich Null.

Das aus r linear unabhängigen Gleichungen bestehende System ist grundsätzlich lösbar, $m - r$ Gleichungen heben sich auf.
Unterfall 1: Stimmt die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen mit der Anzahl der Variablen überein: $r = n \leqq m$, so ist das System eindeutig lösbar.
Unterfall 2: Ist $r < n \leqq m$ oder $r \leqq m < n$, so sind weniger linear unabhängige Gleichungen vorhanden als Variable (unterbestimmtes System). In diesem Fall treten $n - r$ Variable als frei wählbare Parameter auf.

Fall II: Mindestens ein $b_i \in \{b_{r+1}; \ldots; b_m\}$ ist ungleich Null. Das gegebene Gleichungssystem ist unlösbar: $L = \emptyset$.

Aufgaben: 5.27. bis 5.30.

5.3. Matrizen

5.3.1. Definition, Bezeichnungen

In der Physik, Technik, Ökonomie und vielen anderen Gebieten werden für die unterschiedlichsten Belange Zusammenstellungen in Form von Tabellen verwendet, so beispielsweise Zusammenstellungen über den Verbrauch bestimmter Materialien in den einzelnen Betriebsteilen, über die Bearbeitungszeiten verschiedener Erzeugnisse auf den einzelnen Maschinen usw.

BEISPIEL

5.18. Die nebenstehende Aufstellung gibt wieder, in welchen Stückzahlen die Einzelteile E_1, E_2, E_3 und E_4 in jeder der zu fertigenden Baugruppen B_1, B_2 und B_3 enthalten sind. So sind für B_1 erforderlich: 5 Stück E_1, 3 Stück E_2 und 2 Stück E_3.

Einzelteil	Baugruppe		
	B_1	B_2	B_3
E_1	5	2	3
E_2	3	4	
E_3	2	3	5
E_4		1	

Derartige Tabellen sind nun wiederum häufig auf verschiedenste Weise miteinander zu verflechten. So ist z. B. aus einer Stückliste und der Preisliste der Einzelteile der Gesamtpreis zu ermitteln. Diese Verknüpfungen lassen sich in Form mathematischer Operationen ausführen, so daß dafür die elektronische Datenverarbeitung einsetzbar ist. Um dazu die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten für derartige Tabellen aufstellen zu können, soll von der unterschiedlichsten Bedeutung, die den einzelnen Zeilen und Spalten zukommt, abgesehen werden. Übrig bleibt ein rechteckiges Schema von zumeist Zahlen, das als Matrix bezeichnet wird.

Definition.

Eine **Matrix vom Typ (m, n)** ist ein rechteckiges Schema von **Elementen**, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind.

In dieser allgemeinen Form sollen die Elemente durch a_{ik} gekennzeichnet sein, wobei die erste Ziffer des Doppelindex die Zeile und die zweite die Spalte angeben, in der das Element steht. Das gesamte Schema ist seitlich mit runden Klammern und durch $\boldsymbol{A}_{(m,n)}$ zu kennzeichnen, wobei das halbzeilig tiefer angesetzte Wertepaar den Typ der betreffenden Matrix ausweist:

$$\boldsymbol{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ z. B. } \boldsymbol{A}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

In einer verkürzten Darstellungsweise wird zwischen den Matrizenklammern lediglich ein allgemeines a_{ik} angeführt, das die Menge aller Elemente der Matrix repräsentiert:

$$\boldsymbol{A}_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)}.$$

Der Typangabe gemäß hat i alle Werte von 1 bis m und k die von 1 bis n zu durchlaufen.
Die Typangabe kann entfallen, wenn diesbezüglich keine Zweifel bestehen, oder wenn es sich um eine Matrix mit beliebiger Anzahl von Zeilen und Spalten handelt.

BEISPIEL

5.18. (Fortsetzung) Der angegebenen Verteilung entspricht

$$\boldsymbol{A}_{(4,3)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unter anderem durch eine platzsparende Schreibweise für Matrizen mit großer Zeilen- und kleiner Spaltenzahl begründet, wird festgelegt:

Definition

Werden in einer Matrix $\boldsymbol{A}$ die Zeilen mit den gleichstelligen Spalten vertauscht, so entsteht die **transponierte Matrix** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

$$\boxed{\boldsymbol{A} = (a_{ik})_{(m,n)} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ki})_{(n,m)}} \tag{5.1}$$

So geht beim Transponieren

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

über. Nochmaliges Transponieren führt wieder auf $\boldsymbol{A}$, also $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.
Ihrem jeweiligen Aufbau entsprechend, sind einige Sonderformen von Matrizen zu unterscheiden.
Eine Matrix heißt Vektor, wenn sie aus nur einer Spalte oder Zeile besteht.

$$\textbf{Spaltenvektor: } \boldsymbol{a}_{(m,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \textbf{Zeilenvektor: } \boldsymbol{b}_{(1,n)} = (b_1\, b_2\, \ldots\, b_n).$$

Allgemein werden Vektoren durch kleine Buchstaben gekennzeichnet. Wie in der Physik, der dieser Begriff entstammt, ist es auch üblich, die Elemente eines Vektors als seine Komponenten zu bezeichnen. Ebenso wird in der Matrizenrechnung als **Skalar** eine Größe definiert, die keine Komponenten aufweist.

Eine quadratische Matrix liegt vor, wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten übereinstimmt, sie also vom Typ (n, n) ist.

$$\textbf{quadratische Matrix: } \boldsymbol{A}_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Unter einer Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix zu verstehen, bei der alle Elemente, die nicht auf der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen (Hauptdiagonale) liegen, den Wert Null haben. Die Elemente auf der Hauptdiagonalen können beliebige Werte annehmen.

$$\textbf{Diagonalmatrix: } \boldsymbol{D}_{(n,n)} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

Im Fall $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ wird sie **Skalarmatrix** und speziell für $d = 1$ Einheitsmatrix genannt.

$$\textbf{Einheitsmatrix: } \boldsymbol{E}_{(n,n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Gleichheit von Matrizen

Für Matrizen wird nur eine Relation, die Gleichheit, angeführt.

Definition

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}_{(m,n)}$ und $\boldsymbol{B}_{(m,n)}$ sind dann und nur dann gleich, wenn die an gleichen Stellen stehenden Elemente jeweils gleich sind.

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{(m,n)} = \boldsymbol{B}_{(m,n)} \Leftrightarrow a_{ik} = b_{ik} \text{ für alle } i, k} \qquad (5.2)$$

Grundvoraussetzung ist, daß beide Matrizen vom gleichen Typ sind.

BEISPIEL

5.19. Wann stimmt $\boldsymbol{x} = (x_1 \dots x_n)$ mit $\boldsymbol{a} = (3 \;\; 0 \;\; -5)$ überein?

Lösung: Es muß $\boldsymbol{x}$ ebenfalls vom Typ $(1, 3)$ sein: $\boldsymbol{x} = (x_1 \; x_2 \; x_3)$, und es müssen gelten: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = -5$.

5.3.2. Addition von Matrizen

Das folgende Beispiel soll auf die Definition einer Summe zweier Matrizen vorbereiten.

BEISPIEL

5.20. In den nachfolgenden Tabellen ist der Rohstoffverbrauch (in t) zweier Betriebsteile B_1 und B_2 für die ersten beiden Quartale angegeben.

I. Quartal

	R_1	R_2	R_3
B_1	50	15	3
B_2	20	25	12

II. Quartal

	R_1	R_2	R_3
B_1	35	21	0
B_2	29	20	14

Wie groß ist der Halbjahrsverbrauch?

Lösung: Es sind die an jeweils gleicher Stelle stehenden Verbrauchswerte zu addieren.

1. Halbjahr:

	R_1	R_2	R_3
B_1	85	36	3
B_2	49	45	26

Im gleichen Sinne ist die Matrizenaddition definiert.

Definition

Zwei Matrizen werden addiert (subtrahiert), indem die jeweils an gleicher Stelle stehenden Elemente addiert (subtrahiert) werden.

$$\boxed{(a_{ik})_{(m,n)} \pm (b_{ik})_{(m,n)} = (a_{ik} \pm b_{ik})_{(m,n)}} \tag{5.3}$$

Beide Matrizen müssen vom gleichen Typ sein!

BEISPIELE

5.21. Es sind zu subtrahieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 3+5 & 5-2 \\ 4-1 & 2-2 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.22. Für die im Bild 5.3 angegebenen Kräfte ist die Resultierende zu bestimmen.

Lösung: Aus der Physik ist bekannt, daß die jeweils gleichgerichteten Komponenten zu addieren sind. Die zusammenzufassenden Kräfte sind dazu als Spalten- oder Zeilenvektoren darzustellen und zu addieren.

$$F_R = F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Die Differenz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}$ zweier Matrizen ist eine Matrix, deren Elemente alle den Wert Null haben, die Nullmatrix.

$$\textbf{Nullmatrix: } \boldsymbol{O}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

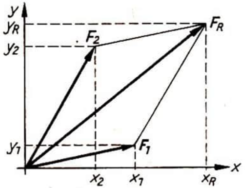


Bild 5.3

Das Symbol $\boldsymbol{O}$ der Nullmatrix darf nicht mit der Zahl 0 verwechselt werden! Es gilt: $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$.
Für die Addition zweier Matrizen gilt offensichtlich die

$$\textbf{Kommutativität} \quad \boxed{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}}, \tag{5.4}$$

denn für die Elemente ist $a_{ik} + b_{ik} = b_{ik} + a_{ik}$. Sind mehr als zwei Matrizen zu addieren, so ist die Reihenfolge der Additionen beliebig:

$$\textbf{Assoziativität} \quad \boxed{(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}} \tag{5.5}$$

Aufgaben: 5.31. bis 5.34.

5.3.3. Multiplikation von Matrizen

Für die Matrizenrechnung sind zwei verschiedene Arten der Multiplikation festzulegen, je nachdem, ob die Matrix mit einer Zahl (Skalar) oder mit einer Matrix zu multiplizieren ist.

Multiplikation mit einem Skalar

Die zu definierende Multiplikation mit einem Skalar s muß sich im Sonderfall $s \in N$ an die bereits bestehende Addition anschließen, denn es gilt beispielsweise $3 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}$.

Definition

Eine Matrix wird mit einem Skalar s multipliziert, indem jedes Element der Matrix damit multipliziert wird.

$$\boxed{s \cdot \boldsymbol{A} = s \cdot (a_{ik}) = (s \cdot a_{ik})} \tag{5.6}$$

In ausführlicher Form ist

$$s \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_{11} & s \cdot a_{12} & \dots & s \cdot a_{1n} \\ s \cdot a_{21} & s \cdot a_{22} & \dots & s \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s \cdot a_{m1} & s \cdot a_{m2} & \dots & s \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

In ihrer Umkehrung bedeutet die Definition, daß ein Faktor, der allen Elementen gemeinsam ist, als Faktor vor die Matrix gesetzt werden kann. Dem entspricht, daß beispielsweise in einer Tabelle alle Preise in Tausendmark eingesetzt sind. Haben alle Elemente die gleiche Maßeinheit, so wird sie nur einmal als Faktor hinter der Matrix angegeben.

BEISPIELE

5.23. Es ist $\boldsymbol{A}$ mit $-1{,}5$ zu multiplizieren.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$-1{,}5 \cdot \boldsymbol{A} = -1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4{,}5 \\ -1{,}5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.24. Aus $\boldsymbol{A}$ ist ein geeigneter Faktor herauszuziehen.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10\,000 & -14\,000 & 3000 \\ -500 & 1700 & 22\,500 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Als Faktor erscheint 10^3 zweckmäßig:

$$\boldsymbol{A} = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & -14 & 3 \\ -0{,}5 & 1{,}7 & 22{,}5 \end{pmatrix}.$$

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar gelten:

Kommutativität	$\boxed{s \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot s}$	(5.7)
Assoziativität	$\boxed{s \cdot (t \cdot \boldsymbol{A}) = (s \cdot t) \cdot \boldsymbol{A} = s \cdot t \cdot \boldsymbol{A}}$	(5.8)
Distributivität	$\boxed{(s \pm t) \cdot \boldsymbol{A} = s \cdot \boldsymbol{A} \pm t \cdot \boldsymbol{A}}$	(5.9)
	$\boxed{s \cdot (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = s \cdot \boldsymbol{A} \pm s \cdot \boldsymbol{B}}$	(5.10)

Multiplikation mit einer Matrix

Auch die Multiplikation zweier Matrizen soll zunächst an Hand eines Beispieles eingeführt werden.

BEISPIEL

5.25. Für ein Stück der Baugruppe B sind die Einzelteile E_1, E_2 und E_3 in den Stückzahlen e_1, e_2 und e_3 erforderlich. Die Stückpreise für die Einzelteile betragen p_1, p_2 und p_3. Welchen Materialpreis hat die Baugruppe?

Lösung: Der Gesamtpreis ergibt sich als Summe der Produkte einander entsprechender Stückzahlen und Preise

$$P = e_1 p_1 + e_2 p_2 + e_3 p_3.$$

Derartige Produktsummen treten in vielen Anwendungen auf und rechtfertigen die folgende Definition.

Definition

Das **Skalarprodukt** eines Zeilenvektors $\boldsymbol{a}_{(1,n)}$ mit einem Spaltenvektor $\boldsymbol{b}_{(n,1)}$ ist die Summe der aus den entsprechenden Elementen gebildeten Produkte $a_i b_i$.

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i} \tag{5.11}$$

Grundsätzlich müssen beide Vektoren gleich viel Elemente enthalten. Beim Skalarprodukt ist der linke Faktor stets ein Zeilenvektor und der rechte ein Spaltenvektor!

BEISPIELE

5.26. Mit $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind Skalarprodukte zu bilden.

$$\boldsymbol{a} = (3 \quad 2 \quad -4), \quad \boldsymbol{b} = (2 \quad -3 \quad 1)$$

Lösung: Es lassen sich $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ bilden:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = (3 \quad 2 \quad -4) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 = -4.$$

$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ führt zum gleichen Ergebnis.

5.27. Welche physikalische Bedeutung hat das Skalarprodukt, das mit den im Bild 5.4 dargestellten Vektoren gebildet werden kann?

Lösung: Als Skalarprodukt ergibt sich

$$(x_1 \ \ y_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_2 \ \ y_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

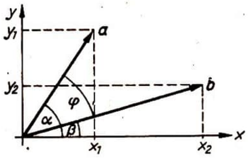


Bild 5.4

Haben die Pfeile die Längen a und b, so gilt

$$x_1 = a \cdot \cos\alpha \qquad x_2 = b \cdot \cos\beta$$
$$y_1 = a \cdot \sin\alpha \qquad y_2 = b \cdot \sin\beta$$

und

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 &= a \cdot b\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= a \cdot b \cdot \cos(\alpha - \beta) \quad \text{nach Gl. (3.20)} \\ &= a \cdot b \cdot \cos\varphi . \end{aligned}$$

In der Physik kennzeichnen die Längen der Pfeile die Beträge der betreffenden Vektoren. Das Skalarprodukt ist demnach das mit dem Cosinus des Zwischenwinkels multiplizierte Produkt der Beträge beider Vektoren. Kennzeichnet der eine Vektor eine Kraft und der andere einen Weg, so ist das Skalarprodukt gleich der verrichteten Arbeit.
Für $\boldsymbol{F} = (5\ \ 9)$ N und $\boldsymbol{s} = (10\ \ 12)$ m ist

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (5\ \ 9)\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix} \text{N m} = 158 \text{ N m}.$$

Um allgemein zwei Matrizen zu multiplizieren, sind alle Skalarprodukte zu berechnen, die sich aus den Zeilen des linken Faktors und den Spalten des rechten Faktors bilden lassen. So sind aus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\5 & -2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\\3 & 2\end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

zu bilden:

$$(3\ \ 2\ \ -4)\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = -4, \qquad (3\ \ 2\ \ -4)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = 1,$$

$$(5\ \ -2\ \ 3)\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 17, \qquad (5\ \ -2\ \ 3)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = 21.$$

Als Matrizenprodukt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ wird die aus diesen Skalarprodukten zusammengestellte Matrix definiert:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}-4 & 1\\17 & 21\end{pmatrix}.$$

Definition

Das Element c_{ik} des Matrizenproduktes $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ist das aus der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ als Zeilenvektor und der k-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$ als Spaltenvektor gebildete Skalarprodukt.

$$\boxed{(a_{ik})_{(m,n)} \cdot (b_{ik})_{(n,p)} = (c_{ik})_{(m,p)}} \tag{5.12}$$

Da ein Skalarprodukt nur dann existiert, wenn die beiden Vektoren gleich viel Elemente enthalten, kann ein Matrizenprodukt nur dann aufgestellt werden, wenn die Anzahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ gleich ist der Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$. Diese Forderung wird als **Verkettbarkeit** bezeichnet. Die Zeilenanzahl von $\boldsymbol{A}$ und die Spaltenanzahl von $\boldsymbol{B}$ sind beliebig. Sie bestimmen ihrerseits den Typ des Produktes.

$$\boldsymbol{A}_{(m,n)} \cdot \boldsymbol{B}_{(n,p)} = \boldsymbol{C}_{(m,p)}$$

Verkett-
barkeit

Um übersichtlich rechnen zu können, werden die zu multiplizierenden Matrizen, wie im nachfolgenden Beispiel ausgeführt, in der Höhe versetzt. Das jeweilige Skalarprodukt ist dann dort anzugeben, wo sich die Verlängerungslinien der beteiligten Zeile von $\boldsymbol{A}$ und der Spalte von $\boldsymbol{B}$ schneiden (Schema von Falk).

BEISPIEL

5.28. Für die angegebenen Matrizen ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ zu bilden.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

					3	2	2
					−2	4	0
		A · B			1	6	1
					−1	−3	−1
					0	−2	3
2	−1	0	3	1	5	−11	4
3	0	2	−1	2	12	17	15
2	2	1	3	1	0	7	5

			2	−1	0	3	1
	B · A		3	0	2	−1	2
			2	2	1	3	1
3	2	2	16	1	6	13	9
−2	4	0	8	2	8	−10	6
1	6	1	22	1	13	0	14
−1	−3	−1	−13	−1	−7	−3	−8
0	−2	3	0	6	−1	11	−1

Die Produktmatrizen sind dem betreffenden Schema zu entnehmen.

Offensichtlich besteht das Kommutativgesetz nicht. Wenn überhaupt neben $\boldsymbol{A}_{(m,n)} \cdot \boldsymbol{B}_{(n,p)}$ auch $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ existieren soll, muß $m = p$ sein. Im Fall $m = p \neq n$ ist $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ vom Typ (n, n), während $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ den Typ (m, m) aufweist. Somit sind beide Produkte allein schon vom Typ her verschieden. Aber auch im Fall quadratischer Matrizen $(m = n = p)$ ist im allgemeinen

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}} \qquad (5.13)$$

Auch für die Matrizenmultiplikation gilt die **Distributivität**

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}} \qquad (5.14)$$

Wird eine Matrix mit einer verkettbaren Nullmatrix multipliziert, so ergibt sich wieder eine Nullmatrix:

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}} \tag{5.15}$$

Als Produkt zweier Matrizen kann aber auch eine Nullmatrix auftreten, ohne daß eine der beiden eine Nullmatrix ist.

BEISPIEL

5.29. Welche Produktmatrix $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ergeben $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$?

Lösung: Es ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$, (aber $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$).

Da für verschiedene Anwendungen bedeutungsvoll, soll eine Matrix $\boldsymbol{A}$ mit einer jeweils verkettbaren Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$ sowohl von rechts als auch von links multipliziert werden. $\boldsymbol{A}$ sei dazu beispielsweise vom Typ (2, 3).

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D}$ erfordert $\boldsymbol{D}_{(3,3)}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & d_1 & 0 & 0 \\
 & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} & & 0 & d_2 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & d_3 \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & a_{13}d_3 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & a_{23}d_3
\end{array}$$

$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}$ erfordert $\boldsymbol{D}_{(2,2)}$:

$$\begin{array}{cc|ccc}
\multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 & & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
\hline
d_1 & 0 & a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & a_{13}d_1 \\
0 & d_2 & a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & a_{23}d_2
\end{array}$$

Satz

Wird eine Matrix $\boldsymbol{A}$ mit einer Diagonalmatrix von rechts (links) her multipliziert, so werden die Elemente von $\boldsymbol{A}$ spaltenweise (zeilenweise) mit den Diagonalelementen multipliziert.

BEISPIEL

5.30. Für die im Beispiel 5.18. angeführten Einzelteile sollen als Preise gelten:

Einzelteil	E_1	E_2	E_3	E_4
Preis in Mark	2	3	1	4

Welche Kostenanteile weisen die in die einzelnen Baugruppen eingebauten Einzelteile auf?

Lösung: Da in der Verteilungsmatrix die Stückzahlen des jeweiligen Einzelteiles zeilenweise angegeben sind, ist von links her mit der entsprechenden Diagonalmatrix zu multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 9 & 12 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Produktmatrix sagt aus, daß z. B. in der Baugruppe B_3 Einzelteile E_1 im Werte von 6 Mark und Einzelteile E_3 im Werte von 5 Mark enthalten sind.

Offensichtlich gilt mit jeweils verkettbarer Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}} \tag{5.16}$$

Das Multiplizieren zweier Matrizen läßt sich noch durch eine mitlaufende **Kontrollrechnung** ergänzen. Sofort beim Anlegen des FALKschen Schemas erhält dazu die linke Matrix eine zusätzliche Zeile, in der die Summen der Spaltenelemente (Spaltensummen) dieser Matrix anzugeben sind. Mit dieser Zeile wird bei der Multiplikation genauso wie mit den übrigen Zeilen verfahren. Die so entstehenden Elemente müssen wiederum gleich den Spaltensummen der Produktmatrix sein, was zu überprüfen ist. Eine andere Möglichkeit besteht darin, an die rechte Matrix eine Zusatzspalte mit den Zeilensummen dieser Matrix anzufügen und mit ihr analog zu verfahren.

BEISPIEL

5.31. Es ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ zu bilden.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Kontrollrechung erfolgt mittels

Kontrollzeile der Spaltensummen von $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{array}{rrrr|rr}
 & & & & 1 & 3 \\
 & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} & & & -1 & 1 \\
 & & & & 2 & 0 \\
\hline
2 & +\ 3 & +\ 1 & + & 1 & 9 \\
-3 & +\ 0 & +\ 2 & + & 1 & -9 \\
K\colon -1 & 3 & 3 & & 2 & 0
\end{array}$$

Kontrollrechnung: $0 \stackrel{?}{=} 9 - 9$, $\quad 2 \stackrel{?}{=} 1 + 1$

Kontrollspalte der Zeilensummen von $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{array}{rrr|rr:r}
 & & & & & K\colon \\
 & & & 1 & 3 & 4 \\
 & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} & & -1 & 1 & 0 \\
 & & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
2 & 3 & 1 & 1 & 9 & 10 \stackrel{?}{=} 1 + 9 \\
-3 & 0 & 2 & 1 & -9 & -8 \stackrel{?}{=} 1 - 9
\end{array}$$

Kontrollrechnung:

Das Matrizenprodukt kann sich auch auf mehr als zwei Matrizen erstrecken, wobei selbstverständlich die Verkettbarkeit gewährleistet sein muß. Es ist zu beachten, daß unbedingt die Reihenfolge der Faktoren einzuhalten ist. Das Matrizenprodukt

$$\boldsymbol{A}_{(m,n)} \cdot \boldsymbol{B}_{(n,p)} \cdot \boldsymbol{C}_{(p,q)} \cdot \boldsymbol{D}_{(q,r)}$$

Verkettbarkeit

läßt sich mit Hilfe des FALKschen Schemas schrittweise entweder von links oder rechts her aufbauen:

$[(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}] \cdot \boldsymbol{D}$

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{D}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}$
K: .	.	.	.

Die Kontrollrechnung erfolgt mittels:

Kontrollzeile der Spaltensummen

$\boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D})]$

		K:
	$\boldsymbol{D}$	.
$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}$	.
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}$	.
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}$	.

Kontrollspalte der Zeilensummen.

BEISPIEL

5.32. Es ist das Produkt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

in beiden Formen zu bilden.

Lösung:

von links her:

						2	3	−2
			3	−2	0	0	−1	1
			0	1	2	−1	2	−1
	2	3	6	−1	6	6	31	−19
	−1	2	−3	4	4	−10	−5	6
K:	1	5	3	3	10	−4	26	−13

von rechts her:

						K:
			2	3	−2	3
			0	−1	1	0
			−1	2	−1	0
3	−2	0	6	11	−8	9
0	1	2	−2	3	−1	0
	2	3	6	31	−19	18
	−1	2	−10	−5	6	−9

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 6 & 31 & -19 \\ -10 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Matrizenproduktes läßt sich ein System von Lineartransformationen in übersichtlicher Form als Matrizengleichung darstellen.

BEISPIELE

5.33. Der im Beispiel 5.18. angegebene Sachverhalt ist durch eine Matrizengleichung wiederzugeben.

Lösung: Bezeichnen b_1, b_2 und b_3 die Stückzahlen der herzustellenden Baugruppen und e_1, e_2, e_3, e_4 die Stückzahlen der dafür bereitzustellenden Einzelteile, so entspricht der Tabelle das System

$$\begin{aligned} e_1 &= 5b_1 + 2b_2 + 3b_3 \\ e_2 &= 3b_1 + 4b_2 \\ e_3 &= 2b_1 + 3b_2 + 5b_3 \\ e_4 &= \phantom{5b_1 + {}} b_2. \end{aligned}$$

Werden

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Koeffizientenmatrix)}$$

eingeführt, so lautet die Matrizengleichung

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Die Identität mit dem System läßt sich nachweisen, indem die Elemente der Produktmatrix $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$ den entsprechenden Elementen von $\boldsymbol{e}$ gleichgesetzt werden.

5.34. Den im Beispiel 5.5. aufgestellten Vierpolgleichungen entsprechen die Matrizengleichungen

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{W} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen werden dabei als

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ R_3 & -(R_2 + R_3) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{R_1}{R_3} + 1 & \dfrac{R_1 R_2}{R_3} + R_1 + R_2 \\ \dfrac{1}{R_3} & \dfrac{R_2}{R_3} + 1 \end{pmatrix}$$

Widerstandsmatrix Kettenmatrix

bezeichnet.

Allgemein läßt sich ein System

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + a_m, \end{aligned}$$

das die n Variablen x_k auf die m Variablen y_i transformiert, mit

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

durch

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$$

zusammenfassen. Derartige Systeme von Lineartransformationen treten in den verschiedensten Anwendungen auf. Ihre Wiedergabe durch eine Matrizengleichung ermöglicht es, Zusammenhänge zu erkennen und übersichtlich darzustellen.

BEISPIELE

5.33. (Fortsetzung) Der nachstehenden Tabelle gemäß sind die Baugruppen B_k zu den Fertigteilen F_i zusammenzusetzen.

	F_1	F_2	F_3
B_1	3	2	
B_2	5	3	2
B_3		2	3

a) Das dieser Tabelle entsprechende System ist als Matrizengleichung darzustellen.
b) In welchen Stückzahlen sind die Einzelteile in den Fertigteilen enthalten?

Lösung:

a) Mit

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{f}.$$

b) Es gilt für den Zusammenhang zwischen

Einzelteil/Baugruppe	Baugruppe/Fertigteil
$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{f}$

und folglich für Einzelteil/Fertigteil

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{f}.$$

Die Einzelteile sind also gemäß $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{F}$ in den Fertigteilen enthalten:

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 25 & 22 & 13 \\ 29 & 18 & 8 \\ 21 & 23 & 21 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d. h.}$$

	F_1	F_2	F_3
E_1	25	22	13
E_2	29	18	8
E_3	21	23	21
E_4	5	3	2

5.34. (Fortsetzung) Welcher Matrizengleichung genügt die Kettenschaltung zweier Vierpole (Bild 5.5)?

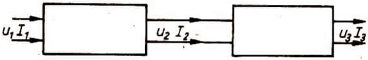


Bild 5.5

Lösung: Zur Aufstellung der Gleichung sind die Vierpolgleichungen in der Kettenform heranzuziehen, da in ihnen die Eingangs- mit den Ausgangswerten verknüpft sind.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1 \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad \text{ergeben} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

Es ist demnach $\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2$ die Kettenmatrix der Kettenschaltung.

Aufgaben: 5.35. bis 5.50.

5.3.4. Die inverse Matrix

Eine Division durch Matrizen ist nicht definiert. Die Anwendungen erfordern jedoch, daß eine durch die Matrizengleichung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ gegebene Lineartransformation unter bestimmten Bedingungen nach dem Vektor $\boldsymbol{x}$ aufzulösen, also in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{y}$ umzuformen ist. Grundsätzlich muß dazu $\boldsymbol{A}$ quadratisch sein. Überführt die eine Transformation den Vektor $\boldsymbol{x}$ in den Vektor $\boldsymbol{y}$, so führt die andere von $\boldsymbol{y}$ auf $\boldsymbol{x}$. Werden beide Transformationen vereinigt, indem jede der beiden Gleichungen jeweils in die andere eingesetzt wird, so müssen

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$$

mit

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

identisch sein, da nun wieder $\boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{y}$ bzw. $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{x}$ übergeführt wird. Es ist deshalb zu fordern, daß sowohl $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ als auch $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ gleich der entsprechenden Einheitsmatrix sind. $\boldsymbol{B}$ heißt die zu $\boldsymbol{A}$ gehörige **inverse Matrix** oder **Kehrmatrix.** In zur Potenzrechnung analoger Symbolik ($a \cdot a^{-1} = 1$) wird sie mit $\boldsymbol{A}^{-1}$ gekennzeichnet, was aber nicht $\boldsymbol{A}^{-1} = 1/\boldsymbol{A}$ bedeuten soll.

Definition

Zwei quadratische Matrizen heißen zueinander **invers,** wenn ihr Produkt gleich der Einheitsmatrix ist.

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}} \tag{5.17}$$

Jede der beiden Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist jeweils die inverse Matrix der anderen. Es gilt

$$\boxed{(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}} \tag{5.18}$$

BEISPIEL

5.35. Die Koeffizientenmatrizen des im Beispiel 5.4. umzukehrenden Systems und des Umkehrsystems sind zueinander invers. Es ist

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da viele Anwendungen die Inverse einer Matrix vom Typ (2, 2) erfordern, soll sie nun auch allgemein aufgestellt werden. Sie ist die Koeffizientenmatrix des inversen Systems von

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}$$

das dazu nach x_1 und x_2 aufzulösen ist.

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= y_2 \end{aligned}} \begin{array}{l} \cdot\, a_{22} \\ \cdot\, (-a_{12}) \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \cdot\, (-a_{21}) \\ \cdot\, a_{11} \end{array}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = a_{22}y_1 - a_{12}y_2 \quad \Big| \quad (-a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22})\, x_2 = -a_{21}y_1 + a_{11}y_2$$

Es sei $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D$ gesetzt. Danach ist

$$D \cdot x_1 = a_{22}y_1 - a_{12}y_2 \quad \Big| \quad D \cdot x_2 = -a_{21}y_1 + a_{11}y_2,$$

so daß sich als Umkehrsystem

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{D}\, y_1 - \frac{a_{12}}{D}\, y_2 \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{D}\, y_1 + \frac{a_{11}}{D}\, y_2 \end{aligned}$$

und als **inverse Matrix vom Typ (2,2)**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{D} & -\frac{a_{12}}{D} \\ -\frac{a_{21}}{D} & \frac{a_{11}}{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

ergibt. Die Größe D, **Determinante** genannt, läßt sich übersichtlich bilden, wenn sie mit dem aus den Koeffizienten gebildeten Schema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \tag{5.20}$$

identifiziert wird (Differenz der Diagonalprodukte). Häufig ist sie auch als det A gekennzeichnet.

BEISPIELE

5.35. (Fortsetzung) Die Kehrmatrix ist mittels Formel (5.19) aufzustellen.

Lösung: Für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \det A = D = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 2$$

und

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

5.36. Es ist die im Bsp. 5.5. aufgestellte Kettenform nach U_2 und I_2 aufzulösen (siehe auch Bsp. 5.34.).

Lösung: Für das System

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{R_3} + 1 & \frac{R_1R_2}{R_3} + R_1 + R_2 \\ \frac{1}{R_3} & \frac{R_2}{R_3} + 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\det A = \left(\frac{R_1}{R_3} + 1\right)\left(\frac{R_2}{R_3} + 1\right) - \frac{1}{R_3}\left(\frac{R_1R_2}{R_3} + R_1 + R_2\right) = 1$$

und

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_3} + 1 & -\left(\frac{R_1R_2}{R_3} + R_1 + R_2\right) \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_1}{R_3} + 1 \end{pmatrix}.$$

Umfangreichere Matrizen vom Typ (n, n) werden, wie anschließend ausgeführt, mit Hilfe des GAUSSschen Algorithmus oder des Austauschverfahrens umgekehrt. Ist das jeweilige Verfahren nach r Durchgängen beendet, so existiert im Falle $r < n$ die inverse Matrix nicht, da $n - r$ Zeilen linear abhängig sind.

Definition

Eine Matrix hat den **Rang** $r(A)$, wenn sie aus r linear unabhängigen Zeilen besteht. Eine quadratische Matrix heißt **regulär,** wenn die inverse Matrix existiert, andernfalls heißt sie **singulär.**

Eine reguläre Matrix hat grundsätzlich den Rang $r(A) = n$. Der Rangbegriff läßt sich auch für rechteckige Matrizen vom Typ (m, n) verwenden. Ihr Rang kann nicht größer als die kleinere der beiden Zahlen m und n sein: $r(A) \leqq \min(m, n)$.

Umkehrung mit Gaußschem Algorithmus

Wenn im folgenden die entsprechenden Überlegungen nur für eine Matrix vom Typ (3, 3) angestellt werden, so gelten die gewonnenen Erkenntnisse allgemein für Matrizen vom Typ (n, n).

Die Inverse zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{sei} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Der Definition gemäß gilt

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der zu bildenden Produktmatrix müssen den an jeweils gleicher Stelle stehenden Elementen der Einheitsmatrix gleich sein. Wird spaltenweise verglichen:

1. Spalte: $$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} &= 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} &= 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2. Spalte: $$\begin{aligned} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} &= 1 \\ a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

3. Spalte: $$\begin{aligned} a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} &= 0 \\ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} &= 0 \\ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so ergeben sich drei Gleichungssysteme. Es ist zu beachten, daß sie alle die gleichen Koeffizienten a_{ik} aufweisen, nämlich die Elemente der umzukehrenden Matrix A. Mit dem 1. System, dessen rechte Seiten die Elemente der 1. Spalte der Einheitsmatrix sind, lassen sich die Elemente der 1. Spalte von A^{-1} bestimmen. Entsprechendes gilt für das 2. und 3. System. Diese Besonderheiten erlauben es, alle drei Systeme durch

$$\begin{array}{c|c|c|c} \text{für:} & k = 1 & k = 2 & k = 3 \\ A \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

zu erfassen, wobei jedem System der entsprechende Wert k zugeordnet ist. Um die b_{ik} mit dem GAUSSschen Algorithmus ermitteln zu können, ist er in der Form

b_{1k}	b_{2k}	b_{3k}	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	K
a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	

anzusetzen. Die drei Spalten für die absoluten Glieder werden bei den einzelnen Schritten parallel mitgeführt.

BEISPIELE.

5.37. Welche Matrix ist invers zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}?$$

Lösung:

	b_{1k}	b_{2k}	b_{3k}	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	K
-2	$2 \quad -2$	$1 \quad -2$	$-1 \quad +4$	1	0	$0 \quad -2$	$3 \quad -2$
-5	$5 \quad -5$	$2 \quad -5$	$0 \quad +10$	0	1	$0 \quad -5$	$8 \quad -5$
E	1	1	-2	0	0	1	1
E		-1	3	1	0	-2	1
-3		$-3 \quad +3$	$10 \quad -9$	$0 \quad -3$	1	$-5 \quad +6$	$3 \quad -3$
			1	-3	1	1	0

gestaffeltes System:

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$b_{1k} - b_{2k} - 2b_{3k} =$	0	0	1
$- b_{2k} + 3b_{3k} =$	1	0	-2
$b_{3k} =$	-3	1	1
$b_{1k} =$	4	-1	-2
$b_{2k} =$	-10	3	5
$b_{3k} =$	-3	1	1

Mit b_{3k} beginnend, werden in Verbindung mit der Spalte $k = 1$ zunächst b_{31}, b_{21} und b_{11} berechnet, mit Spalte $k = 2$ dann b_{32}, b_{22} und b_{12} usw.

Inverse Matrix:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -10 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zwecks Kontrolle ist zu überprüfen, ob $A \cdot A^{-1} = E$ ist. Es ist $r(A) = 3$ und A regulär.

5.38. Es ist die Kehrmatrix zu bestimmen für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

	b_{1k}	b_{2k}	b_{3k}	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	K
-2	$2 \quad -2$	$1 \quad -2$	$-1 \quad +4$	1	0	$0 \quad -2$	$3 \quad -2$
-5	$5 \quad -5$	$2 \quad -5$	$-1 \quad +10$	0	1	$0 \quad -5$	$7 \quad -5$
E	1	1	-2	0	0	1	1
E		-1	3	1	0	-2	1
-3		$-3 \quad +3$	$9 \quad -9$	$0 \quad -3$	1	$-5 \quad +6$	$2 \quad -3$
			0	-3	1	1	-1

Die Kehrmatrix existiert nicht, denn die letzte Gleichung des gestaffelten Systems ist nicht lösbar, weil der Koeffizient des b_{3k} gleich Null ist. Damit ist das ganze System unlösbar. Die Matrix weist nur zwei unabhängige Zeilen auf. So läßt sich beispielsweise die 2. Zeile aus den anderen linear kombinieren, indem von der mit 3 multiplizierten 1. Zeile die 3. Zeile abgezogen wird. Die Matrix hat den Rang $r(A) = 2$ und ist singulär.

Umkehrung mit Austauschverfahren

Mit dem Austauschverfahren ergibt sich die inverse Matrix A^{-1} als Koeffizientenmatrix des zu $y = A \cdot x$ inversen Systems.

BEISPIEL

5.39. Es ist A^{-1} zu bestimmen für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das entsprechende System wurde bereits im Beispiel 5.12. umgekehrt. Aus dem Ergebnis läßt sich die inverse Matrix ablesen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & 6 \\ 10 & -4 & -9 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zwecks Probe ist zu überprüfen, ob $A \cdot A^{-1} = E$ ist. Der Rang ist $r(A) = 3$. A ist regulär.

Die Koeffizientenmatrix des im Bsp. 5.14. umgekehrten Systems weist nur zwei unabhängige Zeilen auf. Sie ist singulär und hat den Rang $r(A) = 2$.

Kontrollfragen

5.6. Was kennzeichnet die Typangabe einer Matrix?
5.7. Welche Matrizen werden als Vektor bezeichnet?
5.8. Was ist eine
a) Einheitsmatrix, b) Nullmatrix, c) Diagonalmatrix?
5.9. Wie wird eine Matrix transponiert?
5.10. Unter welcher Voraussetzung lassen sich Matrizen
a) addieren (subtrahieren), b) multiplizieren?
5.11. Wann sind zwei Matrizen gleich?
5.12. Was ist unter einer Skalarmultiplikation einer Matrix zu verstehen?
5.13. Wann werden zwei Matrizen als zueinander invers bezeichnet?
5.14. Was gibt der Rang einer Matrix an?
5.15. Welche Matrix ist regulär und welche singulär?

Aufgaben: 5.51. bis 5.59.

5.3.5. Matrizengleichungen

Die in derartigen Gleichungen auftretenden Terme sind Matrizen, die Variablen sind Matrizen mit variablen Elementen. Im Rahmen dieses Lehrbuches sollen nur einfache Fälle linearer Matrizengleichungen behandelt werden. Wie bei den linearen Gleichungen der Algebra kommt es auch hier darauf an, die Gleichung schrittweise so umzuformen, daß auf der einen Seite nur die gesuchte Matrix selbst verbleibt. Die dabei zu verwendenden Umformungsregeln werden sich von den in 4.2. angeführten Regeln der Gleichungslehre unterscheiden, da das Matrizenprodukt nicht kommutativ und eine Division durch Matrizen nicht definiert ist.
Es sei vorausgesetzt, daß die in den folgenden Umformungen vorzunehmenden Operationen ausführbar sind, daß bei der Addition die Matrizen vom gleichen Typ und sie bei der Multiplikation verkettbar sind. Von der Gleichung

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

ausgehend, gilt

$$\boxed{\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{C}} \tag{5.21}$$

Zu den beiden Seiten einer Matrizengleichung darf die gleiche Matrix addiert (subtrahiert) werden.

$$\boxed{\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B} \\ \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{O}} \end{array}} \tag{5.22}$$

Die beiden Seiten einer Matrizengleichung dürfen entweder jeweils von rechts oder jeweils von links her mit derselben Matrix multipliziert werden. Dabei sind im Sonderfall

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

zu beachten.

BEISPIEL

5.40. Es ist

$$6 \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} = 4 \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$$

zu lösen.

Lösung: Von beiden Seiten sind $4 \cdot \boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{A}$ abzuziehen.

$$\begin{aligned} 6 \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} &= 4 \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} \quad | -4 \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A} \\ 2 \cdot \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \quad | :2 \\ \boldsymbol{X} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

Mit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

ist $\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}$.

Probe:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ -12 & -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ -9 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ -9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein lineares Gleichungssystem stellt sich auch in Form einer Matrizengleichung dar.

BEISPIELE

5.41. Es ist $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ zu lösen.

Lösung: Da $\boldsymbol{a}$ ein Spaltenvektor sein soll, muß es auch $\boldsymbol{x}$ sein. Um auf der linken Seite $\boldsymbol{A}$ zu eliminieren, muß sie von links her mit der Kehrmatrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ von $\boldsymbol{A}$ multipliziert werden. Es ist vorauszusetzen, daß $\boldsymbol{A}$ umkehrbar, also regulär ist.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \quad | \ \boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{a} \qquad \text{Beachte: } \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{a}}}$$

Für $\left| \begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ 5x + 2y &= 0 \\ x + y - 2z &= -2 \end{aligned} \right|$ also $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

ist $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -10 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vgl. Bsp. 5.37.).

Damit ergibt sich

$$x = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -10 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}}}, \text{ also } x = 8;\ y = -20;\ z = -5.$$

Liegen weitere Systeme vor, die sich nur in den rechten Seiten unterscheiden, lassen sich so bei bekannter Kehrmatrix direkt die Lösungen angeben.

5.42. Welche Lösung hat $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$?

Lösung: Damit auch hier auf der linken Seite das Produkt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ entsteht, ist nun von rechts her mit $\boldsymbol{A}^{-1}$ zu multiplizieren.

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$$
$$\underline{\underline{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}.}}$$

So ist für

$$\boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}}}$$

Probe:

$$\begin{array}{rr|rr} & & 3 & 2 \\ & & 4 & 3 \\ \hline 10 & -7 & 2 & -1 \\ -12 & 9 & 0 & 3. \end{array}$$

5.43. Wie lautet die Lösung für $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}$?

Lösung: Um alle $\boldsymbol{X}$ auf der linken Seite zu vereinigen, ist $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X}$ zu subtrahieren.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{C} \quad | \quad -\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X}$$

$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ | $\boldsymbol{X}$ als rechten Faktor ausklammern (Beachte: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{X}$)

$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$ | mit $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})^{-1}$ von links multiplizieren

$$\underline{\underline{\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{C}.}}$$

Für

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

folgt mit

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

als Lösung

$$\underline{\underline{\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -7 \end{pmatrix}}}, \quad \text{denn} \quad \begin{array}{rr|rrr} \multicolumn{2}{l|}{(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{C}} & 1 & 3 & -1 \\ & & 2 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 3/2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 & -7. \end{array}$$

Aufgaben: 5.60. bis 5.63.

5.4. Aufgaben

Systeme mit zwei Variablen

5.1. $\left|\begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 6x - 3y = 30 \end{array}\right|$

5.2. $\left|\begin{array}{l} x = 3y - 19 \\ y = 3x - 23 \end{array}\right|$

5.3. $\left|\begin{array}{l} 3x = 4y - 15 \\ 5y = 11 - 4x \end{array}\right|$

5.4. $\left|\begin{array}{l} 4{,}5x + 1{,}5y - 3 = 0 \\ 3{,}6x + 1{,}2y - 2{,}4 = 0 \end{array}\right|$

Die Lösungen der beiden folgenden Systeme sind mit 4 Dezimalstellen anzugeben.

5.5. $\left|\begin{array}{l} 0{,}85x + 1{,}24y = 1{,}23 \\ 1{,}14x - 0{,}95y = 2{,}14 \end{array}\right|$

5.6. $\left|\begin{array}{l} 2{,}13x - 1{,}52y = 5{,}40 \\ -1{,}50x + 0{,}85y = -3{,}40 \end{array}\right|$

5.7. $\left|\begin{array}{l} 3x + 5y = 36a - 7b \\ 2x - 3y = 5a - 11b \end{array}\right|$

5.8. $\left|\begin{array}{l} 5x + 2y = 10a \\ 2x + \frac{4}{5}y = 4a \end{array}\right|$

5.9. $\left|\begin{array}{l} ax + by = a \\ x - y = 0 \end{array}\right|$

5.10. $\left|\begin{array}{l} ax + by = 2a \\ a^2x - b^2y = a^2 + b^2 \end{array}\right|$

5.11. $\left|\begin{array}{l} \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right)^2 x - \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 y = b^2 \\ \frac{a^2 + b^2}{2a} x + \frac{a^2 - b^2}{2a} y = a \end{array}\right|$

5.12. $\left|\begin{array}{l} \frac{7}{x} + 4y = 8 \\ \frac{1}{x} - y = -2 \end{array}\right|$

5.13. $\left|\begin{array}{l} 4y - 9x = -xy \\ 6y + 3x = 4xy \end{array}\right|$

5.14. $(x + 2):(y + 3):(2y - 5x) = 1:3:5$

5.15. Wird die lange Seite eines Rechtecks um 4 cm verkürzt und die kurze um 6 cm verlängert, so entsteht ein Quadrat mit gleich langer Diagonale. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

5.16. Zum Betreiben eines Zweitaktmotors ist Öl und Benzin im Verhältnis 1:50 zu mischen. Der Preis für Öl beträgt 3,50 M/l und der für Benzin 1,50 M/l. Wieviel Öl und Benzin werden verbraucht, wenn dafür 50,— M zu bezahlen sind?

5.17. Ein Probestück einer Kupfer-Zink-Legierung hat die Masse 500,0 g und das Volumen 61,8 cm³. Wieviel Kupfer und Zink sind in ihm enthalten? Welches Mischungsverhältnis liegt vor? ($\varrho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}92\ \mathrm{g/cm^3}$, $\varrho_{\mathrm{Zn}} = 7{,}18\ \mathrm{g/cm^3}$)

5.18. Auf einer kreisförmigen Bahn von 440 cm Länge begegnen sich zwei Körper bei gleichgerichteter Bewegung alle 20 min, bei entgegengesetzter alle 5 min. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Körper?
Hinweis: Als günstiger Beobachtungsstandpunkt ist einer der Körper selbst zu wählen (mitbewegter Beobachter). Für den Beobachter erscheint dieser Körper ruhend, während sich der andere mit der jeweiligen Relativgeschwindigkeit bewegt.

5.19. Eine Legierung mit der Dichte ϱ ist aus zwei Legierungsbestandteilen B_1 und B_2 mit den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 zusammengesetzt ($\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$). Es sind die prozentuale Massenzusammensetzung und das Mischungsverhältnis zu bestimmen.

Systeme mit 3 und mehr Variablen

5.20. $\left| \begin{aligned} x + y - z - 17 &= 0 \\ x - y + z - 13 &= 0 \\ -x + y + z - 7 &= 0 \end{aligned} \right|$

5.21. $\left| \begin{aligned} 2x - 3y + z - 12 &= 0 \\ -x + 5y - 2z + 11 &= 0 \\ 3x - 8y + 5z - 39 &= 0 \end{aligned} \right|$

5.22. $\left| \begin{aligned} x + 3y - 2z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= 6 \\ 4x + 7y - 7z &= -5 \end{aligned} \right|$

5.23. $\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 13 \\ 3x_1 + 9x_2 + 27x_3 &= 34 \end{aligned} \right|$

5.24. $\left| \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 1 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 + 7 &= 0 \end{aligned} \right|$

5.25. $\left| \begin{aligned} 2x + 2y + 4u &= 0 \\ 5x + 6y - z + 11u &= -4 \\ -x - 2y + 2z - 3u &= 6 \\ 2x - z + 3u &= 4 \end{aligned} \right|$

Es ist bis auf 0,001 genau zu lösen:

5.26. $\left| \begin{aligned} 1{,}18x + 0{,}75y - 0{,}92z &= -0{,}56 \\ 0{,}45x - 1{,}15y + 0{,}65z &= 1{,}95 \\ -0{,}83x + 1{,}11y + 1{,}24z &= -0{,}16 \end{aligned} \right|$

Die folgenden Systeme sind mit dem **Austauschverfahren** umzukehren.

5.27. $\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 6x_2 + x_3 + 2 \\ y_2 &= -x_1 + 3x_2 + x_3 + 3 \\ y_3 &= -2x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{aligned}$

5.28. $\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ y_3 &= 4x_1 + 9x_2 - 4x_3 \end{aligned}$

5.29. $\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6 \\ y_3 &= x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}$

5.30. $\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 \\ y_2 &= 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 11 \\ y_3 &= -2x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 29 \end{aligned}$

Matrizen

Die folgenden Matrizen sind zu addieren bzw. subtrahieren:

5.31.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = ?$

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = ?$

5.32.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} u & -2v & 3w \\ 2u & 3v & -w \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3u & v & -w \\ 0 & -3v & 2w \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = ?$

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = ?$

5.33.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = ?$

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = ?$

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = ?$

5.34. $\begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & -2c & 3b \\ c & 3a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & -b & 0 \\ 2b & 3c & b \\ -c & -a & -5a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & -2b & c \\ 3b & c & 4b \\ 0 & 2a & -3a \end{pmatrix} = ?$

5.35. Mit

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

sind zu bilden: a) $2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{B}$, b) $3\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{C}$, c) $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{C}$.

Es ist ein geeigneter Faktor vor die Matrix zu ziehen:

5.36. $\begin{pmatrix} 0{,}0015 & 0{,}013 & 0{,}0002 \\ 0{,}0011 & -0{,}004 & 0{,}003 \end{pmatrix}$ 5.37. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & -12 \\ 21 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

5.38. $\begin{pmatrix} 1000 & 1200 & -2100 \\ 3200 & 0 & 4300 \end{pmatrix}$ 5.39. $\begin{pmatrix} 2/3 & -4/12 & 5/4 \\ 1/6 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$

Für die folgenden Vektoren ist $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ bzw. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ zu bilden:

5.40. $\boldsymbol{a} = (2 \quad 1 \quad -1)$ 5.41. $\boldsymbol{x} = (a \quad b \quad c)$ 5.42. $\boldsymbol{a} = (2 \quad 3 \quad 1 \quad 1)$

$\boldsymbol{b} = (-1 \quad 3 \quad 2)$ $\boldsymbol{y} = (1 \quad 1 \quad 1)$ $\boldsymbol{b} = (2 \quad -1 \quad 1 \quad 3)$

Es sind zu bilden

5.43. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5.44. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$

5.45. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 5.46. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5.47. Bei welcher Matrizenoperation entsteht aus einer Matrix $\boldsymbol{A}_{(2;3)}$ ein Spaltenvektor (Zeilenvektor), dessen Elemente die Zeilensummen (Spaltensummen) von $\boldsymbol{A}$ sind?

5.48. Mit zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ vom Typ (3, 3), deren Elemente willkürlich zu wählen sind, sollen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ gebildet und miteinander verglichen werden. Welche Gesetzmäßigkeit wird erkennbar?

Es sind zu multiplizieren (Genauigkeit 0,01):

5.49. $\begin{pmatrix} 1{,}15 & 0{,}50 & 2{,}15 \\ 2{,}50 & 3{,}85 & 1{,}35 \\ 1{,}35 & 4{,}00 & 4{,}35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}20 & 4{,}40 \\ 3{,}00 & 2{,}60 \\ 1{,}20 & 2{,}00 \end{pmatrix}.$

5.50. $\begin{pmatrix} 1{,}23 & 1{,}33 \\ 2{,}14 & 2{,}14 \\ -0{,}75 & 0{,}28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}15 & 1{,}24 & -1{,}35 \\ 3{,}00 & 2{,}14 & 2{,}16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hinweis: Es ist auf eine zweckmäßige Reihenfolge der Multiplikationen zu achten!

Es ist die Kehrmatrix zu bilden.

5.51. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 5.52. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ 5.53. $\begin{pmatrix} 1{,}8 & 2{,}4 \\ 2{,}7 & 3{,}6 \end{pmatrix}$

5.54. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5.55. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5.56. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Desgl. (Genauigkeit 0,001):

5.57. $\begin{pmatrix} 1{,}25 & 1{,}14 \\ 2{,}14 & -0{,}36 \end{pmatrix}$ 5.58. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 5.59. $\begin{pmatrix} 1{,}34 & -2{,}35 & 1{,}36 \\ 3{,}27 & 1{,}85 & -0{,}85 \\ -2{,}84 & -0{,}72 & 0{,}72 \end{pmatrix}$

Welche Lösungsmengen haben die folgenden Matrizengleichungen?

5.60.
$$2\boldsymbol{X} + 3\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 10 & -7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

5.61. $3\boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{C} + 5\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.62. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.63.
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

5.64. $\left|\begin{aligned} 1{,}42x - 1{,}16y &= 4{,}1 \\ 8{,}52x - 6{,}96y &= 24{,}6 \end{aligned}\right|$

5.65. $\left|\begin{aligned} 5{,}1x - 5{,}7y &= 3{,}3 \\ -6{,}8x + 7{,}6y &= 5{,}2 \end{aligned}\right|$

5.66. $\left|\begin{aligned} \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y &= 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y &= \frac{12}{5} \end{aligned}\right|$

5.67. $\left|\begin{aligned} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y &= -\frac{17}{12} \\ \frac{6}{5}x + \frac{2}{3}y &= \frac{26}{15} \end{aligned}\right|$

5.68. $\left|\begin{aligned} 1{,}85x - 2{,}14y &= 1{,}60 \\ 2{,}13x + 1{,}75y &= -0{,}375 \end{aligned}\right|$

5.69. $\left|\begin{aligned} 4{,}15x - 2{,}75y &= 2{,}87 \\ -2{,}14x + 1{,}85y &= -0{,}94 \end{aligned}\right|$

5.70. $\left|\begin{aligned} 2(7x + 3y) - 4(5x + 2y - 1) &= x - 13 \\ 5(3 - 2y) + 3(11x - 3y - 20) &= 90 - y \end{aligned}\right|$

5.71. $\left|\begin{aligned} \frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{2} &= \frac{x-2y}{5} \\ \frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} &= \frac{x-2(y-1)}{3} \end{aligned}\right|$

5.72. $\left|\begin{aligned} \frac{3x-4y}{2} + \frac{5-3x}{3} - \frac{4y-1}{4} &= \frac{23+6x}{12} \\ \frac{2x-y}{3} + \frac{2y-5x}{6} &= -\frac{x}{6} \end{aligned}\right|$

5.73. $\left|\begin{aligned} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a} &= 2b - a \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a-b} &= b \end{aligned}\right|$

5.74. $\left|\begin{aligned} \frac{x}{2a} + \frac{y}{a-b} &= a + 3b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{2b} &= a + b \end{aligned}\right|$

5.75. $\left|\begin{aligned} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} &= 1 \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} &= 1 \end{aligned}\right|$

5.76. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 1 \\ \dfrac{x}{a-b} + \dfrac{y}{a+b} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \end{array} \right|$

5.77. $\left| \begin{array}{l} a(x+y) + b(x-y) = 2 \\ a(x-y) + b(x+y) = 0 \end{array} \right|$

5.78. $\left| \begin{array}{l} 2a(x+y) + 4a(a+b) = 2(x+y) + 4a^2(a+b) \\ (x+y+2a)\,(x-y-2b) = (x+y-2a)\,(x-y+2b) \end{array} \right|$

5.79. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \end{array} \right|$

5.80. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} = 3 \\ \dfrac{7}{x} - \dfrac{1}{y} = 2 \end{array} \right|$

5.81. $\left| \begin{array}{l} 5y + 8x = 3xy \\ 2x - y = 0 \end{array} \right|$

5.82. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{2x+3y}{3x-y} = \dfrac{17}{9} \\ \dfrac{3x+4y}{6x-1} = 2 \end{array} \right|$

5.83. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{2x-3y}{2x-6} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{3x-2y}{x+y} = 1 \end{array} \right|$

5.84. $\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x+y+1} = \dfrac{1}{4x-3y+1} \\ \dfrac{1}{3x+y+2} = \dfrac{2}{4+3(x+2y)} \end{array} \right|$

5.85. $(x+1):(y+2):(x+y+1) = 3:4:6$

5.86. Zwei Bautrupps A und B sollen eine Anlage zusammen in 30 Tagen montieren. Da aber Trupp A bereits nach 12 Tagen abgezogen wird, benötigt B noch 27 Tage zur Fertigstellung der Arbeit. In welcher Zeit hätte jeder Trupp allein die Montage durchführen können?

5.87. Wie groß sind die Ströme I_1 und I_2 der im Bild 5.6 dargestellten Verzweigung? Bekannt sind I, R_1 und R_2.

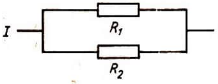


Bild 5.6

5.88. Das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder sei i, der Achsabstand betrage a. Es sind die Durchmesser der beiden Teilkreise zu bestimmen.

5.89. Wird die lange Seite eines Rechtecks um a verkürzt und die kurze um b verlängert, so entsteht ein Quadrat, dessen Inhalt um ΔA größer ist als der des Rechtecks. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks? Welchen Bedingungen müssen a, b und ΔA genügen, damit ein derartiges Rechteck existieren kann ($a \neq b$)?

5.90. Desgl. für $a = b$.

5.91. $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 4z = 15 \\ x + 3y + 9z = 23 \end{array} \right|$

5.92. $\left| \begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 11 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 29 = 0 \end{array} \right|$

5.93. $\left|\begin{array}{rl} -4x + 3y - 2z = & 8 \\ 5x + 4y - 6z = & -8 \\ -3x + 2y + 4z = & 19 \end{array}\right|$

5.94. $\left|\begin{array}{l} y + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{array}\right|$

5.95. $\left|\begin{array}{r} 6x - 4y + 8z = 0 \\ -9x + 6y - 12z = 0 \\ 15x - 10y + 20z = 0 \end{array}\right|$

5.96. $\left|\begin{array}{rl} x + 4y + 2z + 5u = & -9 \\ 2x + 9y + 4z + 11u = & -19 \\ -3x + 2y - 5z - u = & 10 \\ 2x - 2y + 3z + u = & -6 \end{array}\right|$

5.97. $\left|\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = & 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = & 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = & 6 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = & 6 \end{array}\right|$

5.98. $\left|\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = & 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = & 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = & 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = & 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = & 10 \end{array}\right|$

5.99. $\left|\begin{array}{l} 2x - 4y + 2z - u = 2 \\ 3x - 3z + 2u = 3 \\ 7x - 8y + z = 7 \\ x + 4y - 5z + 3u = 1 \\ 4x + 4y - 8z + 5u = 4 \end{array}\right|$

5.100. $\left|\begin{array}{rl} x + 2y - u = & 3 \\ 2x + 3z + 2u = & -1 \\ 4x + 4y + 3z = & 7 \end{array}\right|$

5.101. $\left|\begin{array}{rl} 2{,}14x - 0{,}92y + 1{,}43z = & -1{,}74 \\ 1{,}84x + 2{,}15y - 0{,}85z = & 8{,}64 \\ 0{,}85x + 1{,}12y + 1{,}34z = & 1{,}06 \end{array}\right|$ (Genauigkeit 0,001)

5.102. $\left|\begin{array}{rl} 0{,}72x - 0{,}43y + 0{,}85z = & 4{,}78 \\ 1{,}32x + 1{,}34y - 1{,}38z = & -1{,}32 \\ 0{,}14x - 0{,}28y - 0{,}54z = & 0{,}05 \end{array}\right|$ desgl.

5.103. Drei Zahnräder eines Getriebes haben zusammen 80 Zähne. Bei 10 Umdrehungen des ersten Rades drehen sich das zweite 18- und das dritte 45mal. Wieviel Zähne hat jedes Rad?

5.104. Ein Schnellzug benötigt für eine bestimmte Strecke 2,5 Stunden weniger Fahrzeit als ein Personenzug, da er stündlich 25 km mehr als dieser zurücklegt. Ein Güterzug, dessen Geschwindigkeit um 15 km/h geringer ist als die des Personenzuges, benötigt für die Strecke 3,5 Stunden mehr als der Personenzug. Wie lang ist die Strecke, und mit welchen Geschwindigkeiten fahren die Züge?

Es sind umzukehren:

5.105.
$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 \\ y_2 &= 5x_1 + 6x_2 - x_3 + 11x_4 + 4 \\ y_3 &= -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 6 \\ y_4 &= 2x_1 - x_3 + 3x_4 - 4 \end{aligned}$$

5.106.
$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + 2 \\ y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 + 1 \\ y_3 &= 7x_1 + x_2 - x_3 + 7 \end{aligned}$$

5.107.
$$\begin{aligned}
y_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 10x_5\\
y_2 &= x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5\\
y_3 &= 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 7x_4 + 17x_5\\
y_4 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5
\end{aligned}$$

Es sind zu bilden:

5.108. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1\\ -2 & 6\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.109. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = ?\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{b} = ?\quad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = ?$

5.110. $\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}23 & 1{,}10\\ -1{,}40 & 1{,}54 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}20 & -1{,}40\\ 0{,}30 & 0{,}20\\ 0{,}80 & 3{,}00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}25 & 2{,}11\\ 1{,}35 & -1{,}42 \end{pmatrix}$

5.111. Die nachfolgenden Tabellen geben an, in welchen Stückzahlen die Einzelteile E_k in den Bauteilen B_i und diese wiederum in den Fertigteilen F_l enthalten sind.

	B_1	B_2	B_3
E_1	5	2	3
E_2	3	4	0
E_3	2	3	5
E_4	0	1	0

	F_1	F_2	F_3
B_1	2	1	0
B_2	3	2	3
B_3	0	4	4

Preisliste:

	E_1	E_2	E_3	E_4
Preis/M	2	3	1	5

Produktionsauflage:

	F_1	F_2	F_3
Stück	10	20	5

Wieviel Einzelteile sind bereitzustellen, und wie hoch ist der Materialpreis? Die erforderlichen Operationen sind mit Hilfe von Matrizen auszuführen.

5.112. Welche Operation ist mit $A = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix}$ auszuführen, damit

a) sich die 1. und 2. Zeile miteinander vertauschen;

b) die 1. Spalte zur 2., die 2. Spalte zur 3. und die 3. Spalte zur 1. Spalte wird?

Es ist die Kehrmatrix zu bilden.

5.113. $\begin{pmatrix} 5 & 3\\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

5.114. $\begin{pmatrix} a & 0\\ c & b \end{pmatrix}$

5.115. $\begin{pmatrix} 1{,}25 & 1{,}14\\ 2{,}14 & 0{,}36 \end{pmatrix}$

5.116. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5.117. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

5.118. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

5.119. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.120. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3 & 3\\ 2 & 4 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.121. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ 5.122. $\begin{pmatrix} 2{,}13 & -1{,}24 & 0{,}83 \\ -1{,}34 & 0{,}94 & -2{,}14 \\ 0{,}85 & -1{,}83 & 0{,}35 \end{pmatrix}$

Welche Lösungen haben die folgenden Matrizengleichungen?

5.123.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.124.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.125.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

6. Algebraische Gleichungen höheren Grades

6.1. Quadratische Gleichungen

6.1.0. Vorbemerkung

In diesem Abschnitt sollen die Kenntnisse über quadratische Gleichungen gefestigt und, da der Bereich der komplexen Zahlen zugrunde gelegt wird, erweitert werden. Wesentlich erscheint, daß dieses Gebiet besonders dazu geeignet ist, Rechenfertigkeiten zu entwickeln.
Eine quadratische Gleichung mit einer freien Variablen x hat die

allgemeine Form: $Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad A, B, C \in P, A \neq 0$

die nach Division durch A in die

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

übergeht. Sie ist im allgemeinen aus einem quadratischen, einem linearen und einem absoluten Glied zusammengesetzt. Die Elemente ihrer Lösungsmenge werden häufig auch als Wurzeln der Gleichung bezeichnet.

6.1.1. Sonderfälle

Fehlt das absolute Glied ($C = q = 0$), so liegt eine **gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied** vor. Eine derartige Gleichung wurde bereits im Beispiel 4.19. gelöst. In diesem Sonderfall treten stets zwei reelle Wurzeln auf, wobei eine den Wert Null aufweist.
Eine **reinquadratische Gleichung** zeichnet sich dadurch aus, daß in ihr das lineare Glied fehlt ($B = p = 0$). Zur Lösung der in $x^2 = -q$ umgeformten Gleichung stellt sich die Aufgabe, alle x zu bestimmen, deren Quadrat bekannt ist. Es müssen sich zwei, nur im Vorzeichen unterschiedliche Elemente ergeben. Das nächste Beispiel zeigt die auftretenden Möglichkeiten.

BEISPIEL

6.1. $\{x \mid x^2 - 16 = 0\}$	$\{x \mid x^2 + 16 = 0\}$

Lösung: Für

$x^2 = 16$	$x^2 = -16$

müssen die Wurzeln so beschaffen sein, daß ihre Quadrate

positiv	negativ

sind. Demnach müssen sie selbst

	reell	imaginär
sein:	$x_{1;2} = \pm 4$	$x_{1;2} = \pm 4\mathrm{j}$.
Lösungsmenge:	$\underline{\underline{L = \{-4; 4\}}}$	$\underline{\underline{L = \{-4\mathrm{j}; 4\mathrm{j}\}}}$.
Probe:	$(\pm 4)^2 - 16 = 0$	$(\pm 4\mathrm{j})^2 + 16 = 0$
	$16 - 16 = 0$	$-16 + 16 = 0$.

Das Ergebnis des Beispiels läßt sich verallgemeinern:

Satz

Eine reinquadratische Gleichung $x^2 + q = 0$ hat die beiden, sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Wurzeln

$$\boxed{x_{1;2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-q} & \text{wenn} \quad q \leqq 0 \\ \pm\mathrm{j}\sqrt{q} & \text{wenn} \quad q > 0 \end{cases}} \tag{6.1}$$

Die Fallunterscheidung ist überflüssig, wenn die in (2.96) für den Bereich der komplexen Zahlen gegebene Definition der Wurzel beachtet wird. Soll ein elektronischer Rechner eingesetzt werden, so ist sie jedoch einzuhalten, da die Rechner zumeist bei einem negativen Radikanden mit einer Fehleranzeige reagieren.

6.1.2. Allgemeiner Fall

Nur wenn eine alle Terme enthaltende **gemischtquadratische Gleichung** vorliegt, wird von der Lösungsformel Gebrauch gemacht.

Satz

Die gemischtquadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt stets die zwei Wurzeln

$$\boxed{x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \tag{6.2}$$

die im Fall

a) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ voneinander verschieden und reell

b) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ einander gleich (reell)

c) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ konjugiert komplex

sind.

Der Term $D = (p/2)^2 - q$ heißt **Diskriminante** der Gleichung.

BEISPIEL

6.2. $\{x \mid x^2 + 4x + 13 = 0\}$

Lösung: $x_{1;2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13}$
$= -2 \pm \mathrm{j}\sqrt{9}$

Da $D = -9 < 0$, ist $\sqrt{-9}$ durch $\mathrm{j}\sqrt{9}$ zu ersetzen.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{-2 + 3\mathrm{j}; -2 - 3\mathrm{j}\}}}$.

In der Elementarmathematik weist das Auftreten komplexer Wurzeln bei Anwendungsaufgaben auf die Nichtlösbarkeit des Problems hin. In der höheren Mathematik kommt jedoch den komplexen Wurzeln eine außerordentliche Bedeutung zu. Für den Rechnereinsatz sind die Beziehungen bedeutungsvoll, die zwischen den Wurzeln der quadratischen Gleichung bestehen. Mit

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

lassen sich bilden

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = q.$$

Satz

Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung erfüllen die

Wurzelsätze von Vieta $\boxed{x_1 + x_2 = -p \quad \middle| \quad x_1 \cdot x_2 = q}$ (6.3)

Die Lösungsformel der quadratischen Gleichung erzeugt x_1 und x_2 aus den bereitzustellenden Werten $-p/2$ und $\sqrt{D}$. Ist jedoch der Rechner nur mit einem Speicher M versehen, so ist nur $-p/2$ zu speichern: $\rightarrow \langle\mathrm{M}\rangle$. Ist im Fall $D > 0$ dann x_1 bestimmt, so läßt sich x_2 mittels des nach x_2 aufgelösten 1. Wurzelsatzes

$$x_2 = -p - x_1 = -x_1 + 2 \cdot \langle\mathrm{M}\rangle$$

ermitteln, indem das Vorzeichen des noch in der Anzeige befindlichen x_1 geändert und zweimal der Speicherinhalt addiert wird. Die Probe erfolgt über $x_1 \cdot x_2 = q$.

BEISPIELE

6.3. Es ist $1{,}52x^2 - 5{,}05x + 2{,}84 = 0$ zu lösen (Genauigkeit 10^{-3}).

Lösung:	Anzeige:
Eingeben $-\frac{p}{2} = \frac{5{,}05}{2 \cdot 1{,}52} = 1{,}6612 \rightarrow \langle\mathrm{M}\rangle$, quadrieren	2,7595
subtrahieren $q = \frac{2{,}84}{1{,}52} = 1{,}8684$	$0{,}8911 = D$
Vorzeichenkontrolle von D: $D > 0$, radizieren	0,9440
Speicherinhalt $\langle\mathrm{M}\rangle$ addieren	$\underline{2{,}6052 = x_1}$
Vorzeichenwechsel, $\langle\mathrm{M}\rangle$ zweifach addieren	$\underline{\underline{0{,}7172 = x_2}}$

Kontrolle: $x_2 \cdot x_1 \cdot 1{,}52 \stackrel{?}{=} 2{,}84$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{0{,}717;\, 2{,}605\}}}$.

6.4. $\{x \mid x^2 - 2{,}34x + 2{,}50 = 0\}$

Lösung:

Eingeben $-\frac{p}{2} = 1{,}17 \rightarrow \langle M \rangle$, quadrieren	1,3689
subtrahieren $q = 2{,}50$	$-1{,}1311 = D$
Vorzeichenkontrolle von D: $D < 0$, Vorzeichenwechsel, radizieren	$\underline{1{,}0635 = \mathrm{Im}}$

Die Lösung ist komplex. Der Realteil ist mit $\langle M \rangle$ identisch.

Kontrolle: $x_1 \cdot x_2 = 1{,}17^2 - 1{,}064^2 \mathrm{j}^2 = 1{,}17^2 + 1{,}064^2 \stackrel{?}{=} 2{,}50$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{1{,}170 + 1{,}064\mathrm{j};\, 1{,}170 - 1{,}064\mathrm{j}\}}}$.

Die Wurzelsätze bestätigen, daß sich aus dem Produkt

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{-p} x + \underbrace{x_1 x_2}_{q} \qquad \text{nach Gl. (6.3)} \\ &= x^2 + px + q\end{aligned}$$

der quadratische Term bilden läßt, der für $x = x_1$ und $x = x_2$ jeweils den Wert Null annimmt. Die Werte x_1 und x_2 heißen **Nullstellen** des quadratischen Terms, und das aus Linearfaktoren gebildete Produkt $(x - x_1)(x - x_2)$ stellt eine **Produktform** dar.

Satz

Sind x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt die Identität

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \qquad (6.4)$$

BEISPIEL

6.5. Welche quadratische Gleichung (Normalform) hat als Wurzeln $x_1 = 2$, $x_2 = -3$?

Lösung: Es bestehen zwei Lösungsmöglichkeiten:

mit (6.3): $-p = x_1 + x_2 = -1$	mit (6.4): $(x - 2)(x + 3) = 0$
$q = x_1 \cdot x_2 = -6.$	ausmultiplizieren.

Gesuchte Gleichung: $\underline{\underline{x^2 + x - 6 = 0}}$.

Bei Anwendungsaufgaben, die auf eine quadratische Gleichung führen, ist stets zu prüfen, ob alle Wurzeln, eventuell nur eine oder keine Wurzel verwertbar sind. Danach ist das Problem auf zweierlei Art, eindeutig oder nicht lösbar.

BEISPIEL

6.6. Im Bild 6.1 ist der Querschnitt eines Hohlkörpers mit überall gleicher Wandstärke und den Außenmaßen 80 cm und 30 cm dargestellt. Der Materialquerschnitt soll 60% des Gesamtquerschnittes ausmachen. Wie groß muß die Wandstärke sein?

Lösung: Die Wandstärke betrage x cm. Es muß $x < 15$ sein.
Es ist einfacher, den Inhalt des Hohlraumquerschnittes, der 40% des Gesamtquerschnittes ($= 0{,}4A$) betragen muß, anzusetzen:

$$(80 - 2x)(30 - 2x) = 0{,}4 \cdot 80 \cdot 30$$
$$80 \cdot 30 - 2 \cdot 30x - 2 \cdot 80x + 4x^2 - 0{,}4 \cdot 80 \cdot 30 = 0$$
$$4x^2 - 2 \cdot 110x + 0{,}6 \cdot 80 \cdot 30 = 0$$
$$x^2 - 55x + 360 = 0$$
$$x_{1;2} = 27{,}5 \pm \sqrt{726{,}25 - 360}$$
$$= 27{,}5 \pm 19{,}91$$
$$x_1 = 47{,}4 > 30 \text{ entfällt; } x_2 = 7{,}59$$

Die Wandstärke muß 7,6 cm betragen.

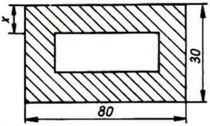


Bild 6.1

6.1.3. Geometrische Deutung der Diskriminante

Um zu einer geometrischen Deutung zu kommen, sei die aus $x^2 + px + q = 0$ gewonnene Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ grafisch dargestellt. Das Bild 6.2 veranschaulicht, wie die in der Lösungsformel auftretenden Größen $-p/2$ und D (angenommen wurde $D > 0$) die Lage der Parabel und damit die Wurzeln der quadratischen Gleichung, die an den Schnittpunkten von Kurve und x-Achse abzulesen sind, beeinflussen.

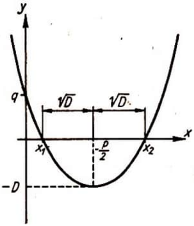


Bild 6.2

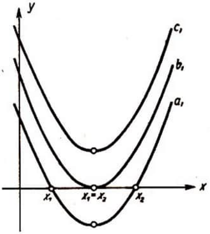


Bild 6.3

Der Scheitel liegt für

a) $D > 0$:	b) $D = 0$:	c) $D < 0$:
unterhalb	auf	oberhalb

der x-Achse (Bild 6.3). Im Fall a) schneidet die Kurve die x-Achse bei x_1 und x_2. Wird die gebundene Variable q vergrößert und damit die Kurve in Richtung der positiven y-Achse verschoben, so nähern sich die beiden Schnittpunkte einander, um im Fall b) als Berührungspunkt zusammenzufallen. Die quadratische Gleichung weist dann die Doppelwurzel $x_1 = x_2 = -p/2$ auf. Bei noch größerem q schneiden sich Kurve und x-Achse nicht mehr. Die Lösungsmenge besteht dann aus zwei komplexen Zahlen. Nur in den Fällen a) und b) ist es möglich, die Wurzeln der quadratischen Gleichung grafisch zu ermitteln.
Für alle $x \notin \{x_1; x_2\}$ gilt $Ax^2 + Bx + C > 0$ (bzw. < 0), falls entsprechende Kurvenpunkte oberhalb (bzw. unterhalb) der x-Achse liegen. Diese Bereiche werden durch die reellen Wurzeln x_1 und x_2, falls sie existieren, getrennt.

BEISPIEL

6.7. Welchen Definitionsbereich hat $\sqrt{10 + 8x - 2x^2}$?

Lösung: Der Radikand darf nicht negativ sein:

$$-2x^2 + 8x + 10 \geqq 0.$$

Die Wurzeln der zugehörigen Gleichung

$$\begin{aligned} -2x^2 + 8x + 10 &= 0 \qquad | \quad :(-2) \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ x_{1;2} &= 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3, \end{aligned}$$

also $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$, trennen die Bereiche.
Sie selbst erfüllen die Ungleichung. Es ist noch zu entscheiden, ob die gesuchten x innerhalb oder außerhalb des durch x_1 und x_2 begrenzten Bereiches liegen. Dazu ist mit einem beliebig gewählten $x \neq x_1; x_2$ die Probe an der Ungleichung durchzuführen:

Für $x = 0 \in [-1; 5]$ ergibt sich die wahre Aussage $10 \geqq 0$.

Definitionsbereich: $\underline{\underline{X = [-1; 5]}}$.

Hätte sich eine falsche Aussage ergeben, so wäre als Definitionsbereich die Komplementärmenge anzugeben.

Kontrollfragen

6.1. Wie unterscheiden sich die allgemeine Form und die Normalform einer quadratischen Gleichung voneinander?
6.2. In welchen Fällen läßt sich eine quadratische Gleichung ohne Lösungsformel lösen?
6.3. In welcher Form muß die quadratische Gleichung vorliegen, damit die Lösungsformel anwendbar ist?
6.4. Wie können die Lösungen einer quadratischen Gleichung beschaffen sein?
6.5. Was ist die Diskriminante, und wie verhält sie sich in den einzelnen Fällen?
6.6. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Wurzeln einer quadratischen Gleichung?
6.7. Was ist unter der Produktform eines quadratischen Terms zu verstehen?

Aufgaben: 6.1. bis 6.42.

6.1.4. Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Verschiedene Gleichungen lassen sich durch Umformen bzw. Einführen einer neuen Variablen auf quadratische Gleichungen zurückführen. Wie schon bei den linearen Gleichungen, so ist auch hier zu überprüfen, ob die neu entstehende Gleichung zur ursprünglichen äquivalent ist. Es wird dazu der Definitionsbereich der zu lösenden Gleichung festgestellt und auf die neue Gleichung entsprechend übertragen. Zumindest ist am Schluß die Einsetzprobe an der ursprünglichen Gleichung vorzunehmen.

BEISPIELE

6.8. $\{x \mid x^4 + 5x^2 - 36 = 0\}$

Lösung: Definitionsbereich: C,

neue Variable: $u = x^2$ (keine Einschränkung),

quadratische Gleichung: $u^2 + 5u - 36 = 0$

$$u_{1;2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{13}{2} \quad u_1 = 4, \quad u_2 = -9.$$

Für x ergeben sich die beiden reinquadratischen Gleichungen

$$x^2 = 4 \qquad\qquad x^2 = -9$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2, \qquad\qquad x_3 = 3\text{j},\ x_4 = -3\text{j}.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{2;\ -2;\ 3\text{j};\ -3\text{j}\}}}$.

Ergeben sich für die quadratische Hilfsgleichung komplexe Wurzeln, so sind die reinquadratischen Gleichungen für x^2 mit Hilfe von Formel (2.96) zu lösen.

6.9. $\{x \mid x + 2\sqrt{x} - 15 = 0\}$

Lösung: Definitionsbereich: $[0; \infty)$,

neue Variable: $u = \sqrt{x}$ mit $u \geqq 0$,

quadratische Gleichung: $u^2 + 2u - 15 = 0 \wedge u \in [0; \infty)$

$$u_{1;2} = -1 \pm 4 \quad u_1 = 3, \quad (u_2 = -5 \text{ entfällt}).$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{9\}}}$.

Werden zunächst $u_1 = 3$ und $u_2 = -5$, also $x_1 = 9$ und $x_2 = 25$ als Lösungen angesehen, so führt x_2 bei der Probe auf eine falsche Aussage $25 + 2\sqrt{25} - 15 = 0$.

Auch Wurzelgleichungen können auf quadratische Gleichungen führen. Um die Wurzeln aufzuheben, sind sie ein- oder mehrmals zu quadrieren. Da aber nicht nur die Gleichung $T_1 = T_2$ durch Quadrieren auf $T_1^2 = T_2^2$ führt, sondern auch $T_1 = -T_2$, ist zu erwarten, daß nicht alle Wurzeln der neuen Gleichung die ursprüngliche erfüllen. Es ist deshalb grundsätzlich die Einsetzprobe vorzunehmen, damit sich unzulässige Elemente ausschalten lassen.

BEISPIELE

6.10. $\{x \mid 3x - 8 - 4\sqrt{4x + 1} = 0 \wedge x \in P\}$

Lösung: Der Definitionsbereich läßt sich als Durchschnittsmenge der Lösungsmengen der beiden Ungleichungen

$3x - 8 \geqq 0$ (weil der nachfolgende Wurzelterm nicht negativ sein kann),

$4x + 1 \geqq 0$ (weil Radikand nicht negativ sein darf)

bestimmen: $X = \left[\frac{8}{3}; \infty\right)$.

Wurzel isolieren: $3x - 8 = 4\sqrt{4x+1}$,

beiderseitig quadrieren: $9x^2 - 48x + 64 = 16(4x + 1)$

$$x^2 - \frac{112}{9}x + \frac{48}{9} = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{56}{9} \pm \frac{52}{9}$$

$$x_1 = 12, \quad (x_2 = 4/9 \text{ entfällt}).$$

Die Einsetzprobe führt nur für $x_1 = 12$ auf eine wahre Aussage.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{12\}}}$.

6.11. $\{x \mid \sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 1 \wedge x \in P\}$

Lösung: Treten mehrere Wurzelterme auf, so wird zunächst einer

isoliert: $\sqrt{2-x} = 1 - \sqrt{x-3}$

quadrieren: $2 - x = 1 - 2\sqrt{x-3} + x - 3$

zusammenfassen und
Wurzel isolieren: $2\sqrt{x-3} = 2x - 4 \mid :2$

$$\sqrt{x-3} = x - 2$$

quadrieren: $x - 3 = x^2 - 4x + 4$

$$x^2 - 5x + 7 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{28}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{3} \notin P.$$

Eine vorherige Untersuchung des Definitionsbereiches der Gleichung: $(-\infty; 2] \cap [3; \infty) = \emptyset$ hätte bereits ergeben, daß die Gleichung unlösbar ist!

Aufgaben: 6.43. bis 6.50.

6.2. Das Schema von Horner

6.2.0. Vorbemerkung

Die bisher behandelten linearen und quadratischen Gleichungen sind Sonderfälle der **algebraischen Gleichung n-ten Grades**

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad a_n \neq 0,$$

in der die a_i beliebige reelle Koeffizienten darstellen und $n \in N$ ist. Wie schon im Bsp. 4.7. angegeben, wird der auf der linken Seite auftretende Term **als Polynom n-ten Grades** bezeichnet, wobei sich der Grad aus dem größten Exponenten bestimmt.

Derartige Polynome sind auch Bestandteil der Gleichungen, mit denen ganzrationale Funktionen beschrieben werden (vgl. 10.4.1.):

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Das Auffinden der Nullstellen derartiger Funktionen — also der Werte für x, für die y verschwindet — ist identisch mit der Aufgabe, algebraische Gleichungen zu lösen. Es ist erforderlich, derartige Polynome näher zu untersuchen.

6.2.1. Einführung des Horner-Schemas

Die grundsätzlichen, verallgemeinerungsfähigen Erkenntnisse sollen am Polynom dritten Grades $g_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ gewonnen werden. Es ist sein Wert an der Stelle x_1 zu bestimmen. Dazu sei

$$g_3(x_1) = a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0$$

in der Form

$$g_3(x_1) = [(a_3 x_1 + a_2)\, x_1 + a_1]\, x_1 + a_0$$

dargestellt. Aus ihr ist zu erkennen, daß sich die gleichbleibende Multiplikation mit x_1 und die Addition der Koeffizienten ständig abwechseln. Von HORNER wurde 1819 ein nach ihm benanntes Schema angegeben, in dem sich die Operationen übersichtlich ausführen lassen. Es werden zunächst die gegebenen Koeffizienten a_i, mit a_3 beginnend, in einer Zeile niedergeschrieben (für fehlende Potenzen ist der Koeffizient 0 einzusetzen). Nachdem a_3 unverändert nach unten übertragen wurde, ist in der angegebenen Pfeilrichtung mit x_1 zu multiplizieren und in Vertikalrichtung zu addieren. Die unter dem Strich erscheinenden Zwischenwerte sollen abkürzend mit b_2, b_1, b_0 und der Endwert mit r_0 bezeichnet sein. Diesen b_i kommt im weiteren Verlauf eine besondere Bedeutung zu.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & \nearrow\ b_2 x_1 & \nearrow\ b_1 x_1 & \nearrow\ b_0 x_1 \\
\hline
x_1 & a_3 & b_2 x_1 + a_2 & b_1 x_1 + a_1 & b_0 x_1 + a_0 \\
 & = b_2 & = b_1 & = b_0 & = r_0 = g_3(x_1)
\end{array} \qquad \text{(I)}$$

BEISPIEL

6.12. Es ist der Wert des Polynoms $g_3(x) = 3x^3 - 10x^2 + 10x - 1$ für $x_1 = 2$ zu berechnen.

Lösung:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -10 & 10 & -1 \\
 & & 6 & -8 & 4 \\
\hline
2 & 3 & -4 & 2 & \underline{\underline{3 = g_3(2)}}.
\end{array}$$

Soll $g_3(x_1)$ mit Hilfe eines Rechners bestimmt werden, so ist x_1 zu speichern und jeweils zum Multiplizieren abzurufen. Die Koeffizienten werden einzeln eingegeben und addiert. Interessiert nur $g_3(x_1)$ selbst, so ist es nicht notwendig, die b_i zu notieren.

BEISPIEL

6.13. Mit dem Rechner ist $g_3(1{,}5)$ für $g_3(x) = 2x^3 - 1{,}4x^2 + 1{,}2x - 0{,}8$ zu bestimmen.

Lösung: Die im Schema eingeklammerten Zahlen sollen lediglich dem Vergleich dienen.

	2	$-1{,}4$	$1{,}2$	$-0{,}8$
		(3)	(2,4)	(5,4)
1,5	(2)	(1,6)	(3,6)	$\underline{\underline{4{,}6 = g_3(1{,}5)}}$.

Aufgaben: 6.51. bis 6.55.

6.2.2. Erweiterung des Schemas von Horner

Wie schon erwähnt, sind die in (I) mit b_i bezeichneten Zwischenwerte bedeutungsvoll. Mit ihrer Hilfe läßt sich das Polynom als eine Summe darstellen, deren einer Summand ein Produkt aus dem Linearfaktor $x - x_1$ und einem Polynom 2. Grades ist:

$$g_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) + r_0. \quad \text{(II)}$$

Diese Darstellung sei zunächst an Hand des Beispieles 6.12. nachgewiesen. Danach muß gelten:

$$3x^3 - 10x^2 + 10x - 1 = (x - 2)(3x^2 - 4x + 2) + 3.$$

Zur Bestätigung sind die Klammern der rechten Seite aufzulösen.

$$\begin{array}{rlll} \ldots = 3x^3 - & 4x^2 + & 2x + 3 & \quad \text{(Multiplikation mit } x\text{)} \\ - & 6x^2 + & 8x - 4 & \quad \text{(Multiplikation mit } -2\text{)} \\ \hline = 3x^3 - & 10x^2 + & 10x - 1 & \quad \text{(Zusammenfassung)} \end{array}$$

Bevor (II) in gleicher Weise behandelt wird, sollen die in (I) eingeführten b_i untersucht werden. Es sind

$$\begin{array}{lll} b_3 = a_3 & & \\ b_1 = b_2x_1 + a_2 & \text{bzw.} & b_1 - b_2x_1 = a_2 \\ b_0 = b_1x_1 + a_1 & & b_0 - b_1x_1 = a_1 \\ r_0 = b_0x_1 + a_0 & & r_0 - b_0x_1 = a_0. \end{array}$$

Das Auflösen der Klammer der rechten Seite von (II) ergibt:

$$\begin{array}{llll} \ldots = b_2x^3 + b_1x^2 & +b_0x & +r_0 & \quad \text{(Multiplikation mit } x\text{)} \\ \quad -b_2x_1x^2 & -b_1x_1x & -b_0x_1 & \quad \text{(Multiplikation mit } -x_1\text{)} \\ \hline \end{array}$$

$$= \underbrace{b_2}_{a_3}x^3 + \underbrace{(b_1 - b_2x_1)}_{a_2}x^2 + \underbrace{(b_0 - b_1x_1)}_{a_1}x + \underbrace{(r_0 - b_0x_1)}_{a_0}. \quad \text{(Zusammenfassung)}$$

Damit hat sich die Identität der beiden Seiten herausgestellt. In einer abgeänderten Darstellung läßt sich (II) auch als sogenannte Partialdivision deuten, in der $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ durch $x - x_1$ dividiert wird. Ergebnis ist $b_2x^2 + b_1x + b_0$ und, da diese Division im allgemeinen nicht aufgeht, der Rest r_0:

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - x_1) = b_2x_2 + b_1x + b_0 \quad \text{Rest } r_0$$

oder

$$\frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x - x_1} = b_2x^2 + b_1x + b_0 + \frac{r_0}{x - x_1}.$$

Die am Beispiel eines Polynoms 3. Grades gewonnenen Erkenntnisse gelten uneingeschränkt für Polynome n-ten Grades.

Satz

Ein Polynom n-ten Grades läßt sich als Summe darstellen, deren einer Summand ein aus einem Linearfaktor und einem Polynom $(n - 1)$-ten Grades gebildetes Produkt und deren anderer Summand eine Konstante ist.

$$\underbrace{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}_{g_n(x)} = (x - x_1)\,\underbrace{(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0)}_{g_{n-1}(x)} + r_0 \qquad (6.5)$$

Die Koeffizienten b_k sind der 3. Zeile des Schemas

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
		x_1b_{n-1}	x_1b_{n-2}	$\cdots$	x_1b_1	x_1b_0
x_1	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r_0

zu entnehmen.

In der Form $g_n(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-1}(x) + r_0$ läßt sich die oben herausgestellte Bedeutung des r_0 gut erkennen. Wird für x der Wert x_1 eingesetzt, mit dem das Schema durchgerechnet wurde, so ergibt sich

$$g_n(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot g_{n-1}(x_1) + r_0 = r_0.$$

Satz

Der Rest r_0 ist gleich dem Wert des Polynoms an der Stelle x_1.

$$\boxed{g_n(x_1) = r_0} \qquad (6.6)$$

Das HORNERsche Schema eignet sich außer zur Funktionswertberechnung ganzrationaler Funktionen auch zur rationellen Durchführung der Polynomdivision mit linearem Divisor.

Um noch eine **Kontrollrechnung** einschalten zu können, sind die Koeffizientensummen

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = s_n \text{ von } g_n(x)$$

und

$$b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_1 + b_0 = s_{n-1} \text{ von } g_{n-1}(x)$$

zu bilden. Die identische Gleichung

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x - x_1)\,(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0) + r_0$$

nimmt für $x = 1$ die Form

$$\underbrace{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}_{s_n} = (1 - x_1)\,\underbrace{(b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0)}_{s_{n-1}} + r_0$$

an, und so muß $s_n = (1 - x_1) \cdot s_{n-1} + r_0$ bzw.

$$\boxed{s_n + (x_1 - 1) \cdot s_{n-1} = r_0} \quad \textbf{Kontrollgleichung} \tag{6.7}$$

sein.

BEISPIEL

6.12. (Fortsetzung) Für das angegebene Beispiel ergibt sich

$$s_n \ = s_3 = 3 - 10 + 10 - 1 = 2$$
$$s_{n-1} = s_2 = 3 - 4 + 2 = 1$$

Kontrollrechnung: $2 + (2 - 1) \cdot 1 \stackrel{?}{=} 3$.

Ergibt sich für ein x_1 speziell $r_0 = 0$, ist also $g_n(x_1) = 0$, dann ist dieses x_1 eine **Nullstelle des Polynoms.** Für die Gleichung $g_n(x) = 0$ stellt es eine Wurzel und für die durch $y = g_n(x)$ gegebene Funktion eine Nullstelle dar.

Satz

Hat ein Polynom n-ten Grades die Nullstelle x_1, so läßt es sich als Produkt aus dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und dem entsprechenden Polynom $(n - 1)$-ten Grades darstellen.

$$\boxed{g_n(x_1) = 0 \Leftrightarrow g_n(x) = (x - x_1) \cdot g_{n-1}(x)} \tag{6.8}$$

BEISPIEL

6.14. Es ist $x_1 = 2$ eine Nullstelle von

$$g_4(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48.$$

Der entsprechende Linearfaktor soll ausgeklammert werden.

Lösung:

	1	−3	−12	52	−48	$s_4 = -10$	
		2	−2	−28	48		Kontrolle:
2	1	−1	−14	24	0	$s_3 = 10$	$-10 + (2 - 1) \cdot 10 \stackrel{?}{=} 0.$

$$\underline{\underline{g_4(x) = (x - 2)\,(x^3 - x^2 - 14x + 24).}}$$

Nun kann es sein, daß auch $g_{n-1}(x)$ ebenfalls für x_1 verschwindet. Dann stellt dieses x_1 eine zweifache Nullstelle des ursprünglichen Polynoms dar usw. Um das festzustellen, wird lediglich das Schema fortgesetzt und dabei der r-Wert des vorhergehenden Durchgangs ausgelassen.

BEISPIEL

6.15. Es ist das Polynom

$$g_5(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72$$

auf die Vielfachheit der Nullstelle $x_1 = 2$ hin zu untersuchen und als Produkt mit der entsprechenden Potenz von $(x - 2)$ darzustellen.

Lösung:

							s_i:	K:
	1	0	−15	10	60	−72	−16	
		2	4	−22	−24	72		
2	1	2	−11	−12	36	0	16	$-16 + 1 \cdot 16 \overset{?}{=} 0$
		2	8	−6	−36			
2	1	4	−3	−18	0		−16	$16 + 1 \cdot (-16) \overset{?}{=} 0$
		2	12	18				
2	1	6	9	0			16	$-16 + 1 \cdot 16 \overset{?}{=} 0$
		2	16					
2	1	8	$25 \neq 0$				9	$16 + 1 \cdot 9 \overset{?}{=} 25$

$x_1 = 2$ ist dreifache Nullstelle.

Produktdarstellung: $g_5(x) = (x - 2)^3 (x^2 + 6x + 9)$

$$\underline{\underline{g_5(x) = (x - 2)^3 (x + 3)^2.}}$$

Kontrollfragen

6.8. Was ist ein Polynom mit einer Variablen, und was ist unter seinem Grad zu verstehen?
6.9. Welche Bedeutung ergab sich bei der weiterführenden Betrachtung für die in der 3. Zeile des Schemas entstehenden Werte?
6.10. Was ist unter der Nullstelle eines Polynoms zu verstehen?
6.11. In welcher Form läßt sich das Polynom darstellen, wenn das Schema für eine Nullstelle entwickelt wurde?

Aufgaben: 6.56. bis 6.60.

6.3. Algebraische Gleichungen n-ten Grades

Im folgenden soll gezeigt werden, wieviel Wurzeln eine algebraische Gleichung n-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0; a_i \in P; n \in N)$$

im Bereich der komplexen Zahlen aufweist.
Die Lösungsmenge einer in dieser Form gegebenen linearen Gleichung besteht grundsätzlich aus einem Element, während die einer quadratischen Gleichung aus zwei (eventuell gleichen) Elementen besteht. Vermutlich wird nun allgemein eine Gleichung n-ten Grades n Wurzeln aufweisen. In seiner Dissertation hat C. F. Gauss 1799 den folgenden **Fundamentalsatz der Algebra** bewiesen:

Jede algebraische Gleichung n-ten Grades mit einer freien Variablen hat im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Wurzel.

Nach Gl. (6.8) läßt sich aber dann die linke Seite der Gleichung als Produkt mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$, wobei x_1 die zumindest existierende Wurzel ist, darstellen:

$$(x - x_1)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) = 0.$$

Erwartungsgemäß entsteht daraus für $x = x_1$ eine wahre Aussage. Das Verschwinden der linken Seite kann aber auch eine Folge des Nullwerdens des zweiten Faktors sein. So liegt mit

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0 = 0$$

nun eine Gleichung $(n-1)$-ten Grades vor, auf die wiederum der Fundamentalsatz zutrifft, für die also mindestens eine Wurzel x_2 besteht, die nicht unbedingt von x_1 verschieden sein muß. Es läßt sich demnach ein Faktor $(x - x_2)$ abspalten. Wird diese Überlegung fortgesetzt, so geht schließlich die in der allgemeinen Form gegebene Gleichung n-ten Grades in die **Produktform**

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$$

über. Daraus folgt unmittelbar der Satz:

Satz

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit einer freien Variablen hat im Bereich der komplexen Zahlen stets n Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$. Für das zugehörige Polynom gilt die Identität

$$\boxed{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} \tag{6.9}$$

Über die Art der Wurzeln sagt der Satz nichts aus. Sie können teilweise reell oder komplex, voneinander verschieden oder gleich sein. Ohne Beweis seien noch angeführt:

Satz

Hat eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Wurzel x_1, dann muß sie ein Teiler des absoluten Gliedes a_0 sein.

Die im Satz vorausgesetzte Existenz einer ganzzahligen Wurzel ist keinesfalls grundsätzlich gesichert. Sie ist durch Probieren festzustellen.

Satz

Ist eine komplexe Zahl $a + bj$ Wurzel einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist es auch die dazu konjugiert komplexe Zahl $a - bj$.

Komplexe Wurzeln treten also grundsätzlich nur paarweise auf.

Satz

Nimmt für zwei verschiedene x-Werte $g_n(x)$ ungleiche Vorzeichen an, so muß zwischen diesen beiden x mindestens eine reelle Nullstelle liegen.

Mit Hilfe dieses Satzes ist es möglich, vorhandene reelle Wurzeln einzugabeln.

BEISPIELE

6.16. Welche Lösung hat $x^3 - 8 = 0$?

Lösung: Die vorliegende Gleichung weist neben dem kubischen nur noch den absoluten Term auf. Eine erste, und zwar reelle Wurzel ergibt sich in diesem Fall direkt aus

$$x^3 = 8$$

als

$$x_1 = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}.$$

Mit dem für $x_1 = 2$ zu entwickelnden Hornerschen Schema

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ & & 2 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \qquad \text{Bestätigung der 1. Wurzel: } r_0 = 0$$

läßt sich die Gleichung in die Produktform

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

überführen, aus der sich für die noch fehlenden Wurzeln eine quadratische Gleichung ergibt.

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{2;3} &= -1 \pm \sqrt{1 - 4} \\ &= -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{2;\ -1 + \mathrm{j}\sqrt{3};\ -1 - \mathrm{j}\sqrt{3}\}}}$.

6.17. $\{x \mid x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 30x = 0\}$

Lösung: Da das absolute Glied fehlt, läßt sich x ausklammern

$$x \cdot (x^3 + 4x^2 - 11x - 30) = 0$$

und mit Regel (4.5) daraus $x_1 = 0$ als Wurzel ablesen.

Eventuelle ganzzahlige Wurzeln der restlichen Gleichung

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$$

können nur die Teiler $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \ldots$ des absoluten Gliedes sein. Bei der Belegung mit ± 1 entstehen offensichtlich falsche Aussagen. Für die nächsten Teiler soll das Hornersche Schema herangezogen werden.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -11 & -30 \\ & & 2 & 12 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 6 & 1 & -28 \\ & & -2 & -4 & 30 \\ \hline -2 & 1 & 2 & -15 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \text{2 ist keine Wurzel} \\ \\ x_2 = -2. \end{array}$$

Vereinfachtes Hornersches Schema, in dem die Ausgangskoeffizienten nur einmal geschrieben sind.

Aus dem für $x = -2$ aufgestellten Schema ergibt sich für die weiteren Wurzeln die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

mit $x_3 = 3$ und $x_4 = -5$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{-5;\ -2;\ 0;\ 3\}}}$.

Der folgende Satz ergibt eine Möglichkeit, den Bereich, in dem reelle Wurzeln auftreten können, abzugrenzen.

Satz

Weisen alle Werte b_i und r_0 der dritten Zeile des HORNERschen Schemas

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & x_1 b_{n-1} & \cdots & x_1 b_1 & x_1 b_0 \\ \hline x_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & r_0 \end{array}$$

für positives x_1 gleiche Vorzeichen auf, so existiert keine weitere Nullstelle für noch größere $x > x_1$. Haben sie bei negativem x_1 wechselnde Vorzeichen, so kann für noch kleinere $x < x_1$ keine Nullstelle mehr auftreten.

Weist eine algebraische Gleichung keine ganzzahlige Wurzel auf, so muß eines der im Abschnitt 8. beschriebenen Näherungsverfahren herangezogen werden.

Kontrollfragen

6.12. Welche Form hat eine algebraische Gleichung n-ten Grades?
6.13. Wieviel Wurzeln hat eine algebraische Gleichung im Bereich der komplexen Zahlen?
6.14. Wie können die Wurzeln einer algebraischen Gleichung beschaffen sein?
6.15. Wie ist die Produktform eines Polynoms n-ten Grades gebildet?

Aufgaben: 6.61. bis 6.66.

6.4. Aufgaben

Die folgenden Gleichungen sind zu lösen.
Reinquadratische Gleichungen:

6.1. $x^2 - 144 = 0$
6.2. $x^2 + 9 = 0$
6.3. $4x^2 + 25 = 0$
6.4. $5x^2 + 10 = 34$
6.5. $ax^2 + b = 0 \quad (a \cdot b < 0)$
6.6. $ax^2 + b = 0 \quad (a \cdot b > 0)$

Gemischtquadratische Gleichungen:

6.7. $x^2 + x - 12 = 0$
6.8. $x^2 - 7x + 10 = 0$
6.9. $x^2 + x - 90 = 0$
6.10. $x^2 - 6x + 13 = 0$
6.11. $2x^2 - 3x = 0$
6.12. $3x^2 + 4x = 0$
6.13. $4x^2 - 4x + 3 = 0$
6.14. $8x^2 - 6x + 1 = 0$
6.15. $4x^2 - 4ax = b^2 - a^2$
6.16. $x^2 - ax + bx = 2ab + 2b^2$
6.17. $a(a - b)\, x^2 + b^2x = a(a + b)$
6.18. $m(m + n) = n(2m - nx)\, x$
6.19. $(a - x)^2 + (x - b)^2 = a^2 + b^2$
6.20. $\dfrac{2c^2}{x^2 - a^2} + \dfrac{c}{x + a} = -\dfrac{x}{a - x}$

Es sind mit einer Genauigkeit von 0,0001 zu lösen:

6.21. $1{,}73x^2 + 0{,}85x - 0{,}47 = 0$
6.22. $0{,}14x^2 - 0{,}015x + 0{,}035 = 0$
6.23. $2{,}16x^2 + 0{,}185x + 0{,}012 = 0$
6.24. $-0{,}030x^2 + 0{,}150x + 0{,}185 = 0$

Die folgenden Terme sind als Produkte von Linearfaktoren darzustellen:

6.25. $x^2 + 2x - 15$ 6.26. $x^2 - 4x$ 6.27. $ax^2 + bx + adx + bd$

Welche quadratische Gleichung (Normalform) weist die angegebene Lösungsmenge auf?

6.28. $\{3; -2\}$ 6.29. $\{0; 5\}$ 6.30. $\{-4\}$ (zweifach)

6.31. $\{3 + 2\mathrm{j}; 3 - 2\mathrm{j}\}$ 6.32. $\{a + 2b; 2a + b\}$

Es sind die im Bereich der reellen Zahlen liegenden Lösungsmengen folgender Ungleichungen zu bestimmen:

6.33. $x^2 - 3 \geqq 0$ 6.34. $x^2 + 3 > 0$

6.35. $x^2 - 6x + 10 < 0$ 6.36. $3 - 4x \geqq 4x^2$

6.37. Wird die eine Seite eines Quadrates um 3 cm verlängert und die andere um ebensoviel verkürzt, so hat das entstehende Rechteck einen Flächeninhalt von 55 cm². Wie lang sind die Seiten des Quadrates?

6.38. Aus einem rechteckigen Blech mit den Seiten 3,00 m und 5,00 m ist ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von 4,00 m² herauszuschneiden. Es soll dabei ein Rahmen mit überall gleicher Breite entstehen. Wie breit ist der Rand?

6.39. Um welchen Betrag muß der Durchmesser d eines Kreises vergrößert werden, damit sich seine Fläche verdoppelt? Wie groß ist der Durchmesser des vergrößerten Kreises?

6.40. Zwei Widerstände ergeben bei Parallelschaltung $3\,\Omega$. Die Einzelwiderstände unterscheiden sich um $8\,\Omega$. Wie groß sind sie?

6.41. Ein Zylinder wird auf die Hälfte seiner ursprünglichen Höhe gestaucht. Welchen Radius hat der gestauchte Zylinder?

6.42. Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen, läßt man einen Stein frei hineinfallen und hört ihn nach 6 s im Wasser aufschlagen. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit 333 m/s; Fallbeschleunigung 9,81 m/s². Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.)

Die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen, sind zu bestimmen.

6.43. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 6.44. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

6.45. $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$ 6.46. $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$

6.47. $x - \sqrt{-x} + 2 = 0$ 6.48. $\sqrt{2x^2 + 4x - 6} - x - 3 = 0$

6.49. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 3} = 1$ 6.50. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 4} = 3$

Es sind die Werte der Polynome $g_n(x)$ an den Stellen x_1 und x_2 zu bestimmen:

6.51. $g_3(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2;\ x_1 = 2;\ x_2 = -3$

6.52. $g_3(x) = 2x^3 - 3x - 1;\ x_1 = -1;\ x_2 = 3$

6.53. $g_4(x) = x^4 - 2x^2 + x + 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = -3$

Desgl. mit einer Genauigkeit von 0,001:

6.54. $g_3(x) = 1{,}14x^3 - 0{,}85x^2 + 1{,}13x - 0{,}75;\ x_1 = -1{,}34;\ x_2 = 0{,}85$

6.55. $g_4(x) = 2{,}1x^4 - 5{,}3x^3 + 2{,}6x - 0{,}8;\ x_1 = -1{,}6;\ x_2 = 2{,}4$

Die folgenden Polynome sind als Produkte mit dem Linearfaktor $x - x_1$ darzustellen.

6.56. $g_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4;\ x_1 = 2$

6.57. $g_4(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9;\ x_1 = -3$

Welche Vielfachheit hat die Nullstelle x_1? Wie lautet die entsprechende Produktdarstellung?

6.58. $g_3(x) = x^3 + 3x^2 - 4;\ x_1 = -2$

6.59. $g_3(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8;\ x_1 = 2$

6.60. $g_4(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36;\ x_1 = 2$

Es sind die im Bereich der komplexen Zahlen gelegenen Wurzeln der folgenden kubischen Gleichungen zu ermitteln.

6.61. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

6.62. $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$

6.63. $x^3 - 4x^2 + 25x - 100 = 0$

6.64. $x^3 - 11x^2 + 55x - 125 = 0$

6.65. Bei einem Quader ist die erste Kante um 2 cm länger als die zweite und um 4 cm kürzer als die dritte. Sein Volumen beträgt 576 cm³. Welche Länge haben die Kanten?

6.66. Eine quadratische Säule mit dem Inhalt 480 cm³ ist einer Kugel mit dem Radius 7 cm einbeschrieben. Wie hoch ist sie?

Es sind die Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichungen zu bestimmen.

6.67. $\dfrac{a+b}{a-b}x^2 = a^2 - b^2$

6.68. $\dfrac{x}{x+a} + \dfrac{x}{x-a} = 1$

6.69. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{a} = \dfrac{x}{ab^2} + \dfrac{ab^2}{x}$

6.70. $\dfrac{a}{b}x^2 = a^3b + 2a^2b + ab$

6.71. $2x^2 + 4x + 5 = 0$

6.72. $3x^2 - 22x + 35 = 0$

6.73. $\dfrac{x+11}{x+3} = \dfrac{2x+1}{x+5}$

6.74. $\dfrac{7x-5}{10x-3} = \dfrac{5x-3}{6x+1}$

6.75. $\dfrac{5x-1}{9} + \dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{2}{x} + x - 1$

6.76. $\dfrac{5x-7}{9} + \dfrac{14}{2x-3} = x - 1$

6.77. $\dfrac{7}{2x-3} + \dfrac{5}{x-1} = 12$

6.78. $\dfrac{7-x}{11-2x} + \dfrac{4x-5}{3x-1} = 2$

6.79. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x-3} = \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-5x+6}$

6.80. $\dfrac{x^3-10x^2+1}{x^2-6x+9} = x - 3$

6.81. $\dfrac{21}{x} - \dfrac{10}{x-2} - \dfrac{4}{x-3} = 0$

6.82. $b^2x^2 - 2bcx + 2abx - 4ac = 0$

6.83. $cx^2 - 2c^2x + x = 0$

6.84. $\dfrac{x-a}{b} - 2 = \dfrac{a}{b-x}$

Desgl. mit der Genauigkeit 0,0001.

6.85. $0{,}84x^2 - 5{,}91x + 7{,}28 = 0$

6.86. $12{,}5x^2 + 18{,}7x + 37{,}2 = 0$

6.87. $\dfrac{3}{7}x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{3}{4} = 0$

6.88. $\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{3}{7}x + \dfrac{5}{6} = 0$

Die folgenden Terme sind als Produkte darzustellen.

6.89. $x^2 - 6x + 25$

6.90. $4x^2 + 8x - 5$

6.91. $x^2 - ax - bx + ab$

6.92. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Welche quadratischen Gleichungen (Normalform) weisen die angegebenen Lösungsmengen auf?

6.93. $\{a; -a\}$

6.94. $\{a\mathrm{j}; -a\mathrm{j}\}$

6.95. $\{a(1 + \mathrm{j}); a(1 - \mathrm{j})\}$

6.96. $\{2a + 3b\mathrm{j}; 2a - 3b\mathrm{j}\}$

6.97. $\{(2a + 3b)\,\mathrm{j}; -(2a + 3b)\,\mathrm{j}\}$

Welche Lösungen weisen die folgenden Ungleichungen auf?

6.98. $x^2 + 3 \leqq 0$

6.99. $x^2 - 2x + 1 \leqq 0$

6.100. $4x^2 - 4x + 1 > 0$

6.101. $ab + (a - b)\,x - x^2 \geqq 0 \; (a; b > 0)$

6.102. $(x - 1) \cdot (x + 2) > 0$

6.103. $|x - 2| \cdot |x - 4| > 3$

6.104. $\dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{2}{x - 1} < 1$

6.105. Zwei Monteure stellen zusammen eine Anlage in $6\dfrac{2}{3}$ Tagen fertig. Wie lange müßte jeder allein arbeiten, wenn der zweite 3 Tage mehr als der erste benötigt?

6.106. Um einen Behälter zu füllen, benötigt die eine von zwei Pumpen 24 min mehr als die zweite. Bei gleichzeitigem Betrieb beider Pumpen wird der Behälter in 35 min gefüllt. In welcher Zeit schafft das die erste Pumpe allein?

6.107. Die Resultierende zweier rechtwinklig aufeinander wirkender Kräfte beträgt 170 N. Wird die eine Kraft um 40 N und die andere um 10 N vergrößert, so wächst die Resultierende um 30 N. Wie groß sind die Kräfte?

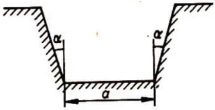


Bild 6.4

6.108. Ein Graben habe einen Querschnitt in Form eines gleichschenkligen Trapezes (Bild 6.4). Es ist die für $a = 3{,}00$ m, $\alpha = 35°$ und den Flächeninhalt $A = 10{,}0$ m² erforderliche Tiefe h zu bestimmen.

6.109. Wird der Radius einer Kugel um 2 cm verändert, so verdoppelt sich ihre Oberfläche. Wie groß war der Radius?

6.110. Der Außenradius einer Kreisringfläche betrage 11,0 cm und ihr Flächeninhalt 44,9 cm². Wie groß ist der Innenradius?

6.111. Eine Hohlkugel aus Stahl ($\varrho = 7{,}85$ kg/dm³) von 3 cm Wandstärke hat eine Masse von 39,360 kg. Wie groß sind die Durchmesser?

6.112. Aus einem Metallzylinder mit dem Durchmesser D und der Höhe h soll ein Kegelstumpf mit der gleichen Grundfläche und Höhe, jedoch mit halbem Volumen gefertigt werden. Wie groß muß der Durchmesser der Deckfläche sein? Die Lösung ist allgemein und dann speziell für $D = 28$ cm, $h = 40$ cm herzustellen.

6.113. Ein Ruderer rudert auf einem Fluß, der mit der Geschwindigkeit v_F fließt, zunächst eine Strecke s stromauf und anschließend zurück. Er benötigt dafür die Zeit t. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Wasser?

6.114. Bei der Brinellhärteprüfung einer Stahlsorte, bei der eine Stahlkugel mit 10 mm Durchmesser auf die Oberfläche des zu prüfenden Werkstückes gedrückt wird, ergibt sich ein Kugeleindruck mit 5 mm Durchmesser (gemessen auf der ebenen Oberfläche des Werkstückes). Wie tief ist die Kugel in das Werkstück eingedrungen?

Die folgenden Gleichungen lassen sich auf quadratische zurückführen. Welche Wurzeln haben sie?

6.115. $x^4 - 8x^2 = 0$

6.116. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

6.117. $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

6.118. $x^4 - 9 = 0$

6.119. $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$

6.120. $x - 5\sqrt{x} = 0$

6.121. $x - a\sqrt{x} = ab + b^2$ $(a; b > 0)$

6.122. $x + 1 - \sqrt{2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5} = 0$

6.123. $x + 2 - \sqrt{2x^2 - 2x + 12} = 0$

6.124. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 4} = 2$

6.125. $\sqrt{2x + 15} - \sqrt{x + 4} = 2$

6.126. $\sqrt{x + 8} + \sqrt{x + 3} - \sqrt{x} = 0$

6.127. $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b} = \sqrt{a - b}$ $(0 < b < a)$

6.128. $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x - 4}} = 4$

6.129. $\sqrt{x + 2 - \sqrt{2x - 6}} = 2$

6.130. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x - 1{,}5} = \dfrac{6}{\sqrt{2x - 1}}$

Welche Werte haben die Polynome $g_n(x)$ an den Stellen x_1 und x_2?

6.131. $3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x + 4;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2$

6.132. $x^5 - 4x^3 + 3x - 1;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2$

Desgl. mit einer Genauigkeit von 0,001:

6.133. $g_3(x) = 0{,}85x^3 - 2{,}13x + 0{,}84;\ x_1 = -1{,}34;\ x_2 = 0{,}13$

6.134. $g_3(x) = 1{,}24x^3 - 0{,}98x^2 + 1{,}12x + 1{,}14;\ x_1 = -0{,}72;\ x_2 = 1{,}43$

6.135. $g_4(x) = -2{,}14x^4 - 3{,}45x^2 + 4{,}13x + 1{,}25;\ x_1 = -0{,}24;\ x_2 = 1{,}26$

6.136. $g_4(x) = 3{,}2x^4 - 4{,}3x^3 + 5{,}2;\ x_1 = -1{,}1;\ x_2 = 1{,}3$

6.137. $g_5(x) = 1{,}1x^5 - 4{,}3x^3 + 2{,}1x^2 - 1{,}4;\ x_1 = -2{,}1;\ x_2 = 1{,}7$

Die folgenden Polynome sind als Produkt mit dem Linearfaktor $x - x_1$ darzustellen.

6.138. $g_3(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3;\ x_1 = -1$

6.139. $g_5(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4;\ x_1 = 1$ und $x_2 = 2$

Welche Wurzeln haben im Bereich der komplexen Zahlen:

6.140. $x^3 - 5 = 0$

6.141. $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$

6.142. $x^3 + 5x^2 = 0$

6.143. $x^3 + x^2 - 6x - 56 = 0$

6.144. $x^3 - 7x^2 + 9x - 63 = 0$

6.145. $x^3 - 2x^2 - 23x + 150 = 0$

6.146. Von den Radien dreier Kugeln ist der zweite 2 cm und der dritte 4 cm größer als der erste. Wie groß sind die Radien, wenn das Volumen der dritten Kugel den dreifachen Inhalt der beiden anderen zusammen aufweist?

6.147. Einer Kugel mit dem Radius 6 cm ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Inhalt sich wie 5 : 9 zu dem der Kugel verhält. Welche Höhe hat der Zylinder?

7. Transzendente Gleichungen

7.0. Vorbemerkung

Läßt sich eine Gleichung nicht in Form einer algebraischen Gleichung darstellen, so heißt sie **transzendent.** Insbesondere liegen derartige Gleichungen vor, wenn in ihnen Exponentialterme, logarithmische und goniometrische Terme vorkommen. Im allgemeinen sind sie nur mit Hilfe von Näherungsverfahren lösbar. In Sonderfällen jedoch ist es möglich, sie geschlossen zu lösen. Für die Anwendungen sind diese Sonderfälle besonders bedeutungsvoll. Im Rahmen dieses Lehrbuches ist eine umfassende Behandlung dieses umfangreichen Gebietes nicht möglich. So soll an Hand von Beispielen, die größtenteils diesen praktischen Anwendungen entnommen sind, ein Einblick gewährt werden.
Grundsätzlich sei für alle folgenden Betrachtungen der Bereich der reellen Zahlen bzw. gegebenenfalls eine Untermenge davon zugrunde gelegt.

7.1. Exponentialgleichungen

Eine Gleichung heißt **Exponentialgleichung**, wenn die freie Variable mindestens in einem Exponenten auftritt.
Im Rahmen dieses Abschnittes sollen einige Exponentialgleichungen behandelt werden, die sich auf den **Grundtyp**

$$a^x = b \quad \text{mit} \quad a; b \in P \wedge a; b > 0 \wedge a \neq 1$$

zurückführen lassen. Grundsätzlich wird das unter anderem nicht möglich sein, wenn die Variable auch außerhalb der Exponenten auftritt. Die Grundgleichung ist ohne besondere Hilfsmittel in eine einfachere Form überführbar, wenn sich die rechte Seite als Potenz mit der auf der linken Seite auftretenden Basis darstellen läßt:

$$a^x = a^c.$$

Da zwei Potenzen mit gleicher Basis infolge der Monotonie der Exponentialfunktion nur dann gleich sein können, wenn ihre Exponenten gleich sind, so folgt

$$x = c.$$

BEISPIEL

7.1. $\{x \mid 2^{4x+2} = 8 \cdot 2^{2x+5}\}$

Lösung: Die rechte Seite läßt sich insgesamt als Potenz mit der Basis 2 darstellen.

$$2^{4x+2} = 2^3 \cdot 2^{2x+5}$$

$$2^{4x+2} = 2^{2x+8}$$

$$4x + 2 = 2x + 8 \quad \text{(Exponentenvergleich)}$$

$$x = 3.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{3\}}}$.

Bietet sich ein derartiger Lösungsweg nicht an, so sind beide Seiten der Gleichung zu logarithmieren. Es läßt sich das Logarithmengesetz (2.53) verwenden, das den Exponenten x zum Faktor werden läßt. Gleichgültig ist, ob dazu dekadische oder natürliche Logarithmen herangezogen werden. Aus der Grundgleichung $a^x = b$ entsteht die lineare Gleichung

$$x \cdot \lg a = \lg b \quad \text{bzw.} \quad x \cdot \ln a = \ln b$$

und so

$$x = \frac{\lg b}{\lg a} \qquad x = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Die rechten Seiten sind nicht mit $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$ (analog ln) zu verwechseln! Es stellen $\lg b$ und $\lg a$ bzw. $\ln b$ und $\ln a$ den Zähler und den Nenner des Bruches dar und sind zu dividieren.

BEISPIELE

7.2. $\{x \mid 1{,}32^x = 5{,}40\}$

Lösung: Die Gleichung ist beiderseitig zu logarithmieren

$$x \cdot \lg 1{,}32 = \lg 5{,}40 \qquad x \cdot \ln 1{,}32 = \ln 5{,}40$$

$$x = \frac{\lg 5{,}40}{\lg 1{,}32} \qquad x = \frac{\ln 5{,}40}{\ln 1{,}32}.$$

Obwohl alle Operationen ohne Unterbrechung mit dem Rechner ausführbar sind, seien zum Vergleich die (gerundeten) Zwischenwerte angegeben.

$$x = \frac{0{,}7324}{0{,}1206} \qquad x = \frac{1{,}6864}{0{,}2776}$$

$$x = 6{,}074 \qquad x = 6{,}074$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{6{,}074\}}}$.

7.3. $\{x \mid 0{,}8^{1-x} \cdot 1{,}5^{2x-1{,}2} = 1{,}82\}$

Lösung: Die Aufgabe läßt mehrere Lösungswege zu. So ist sie in die Grundform überführbar, indem zunächst die Potenzen mit zusammengesetzten Exponenten als Produkte dargestellt und anschließend alle x-Terme auf einer Seite vereinigt werden.

$$0{,}8 \cdot 0{,}8^{-x} \cdot 1{,}5^{2x} \cdot 1{,}5^{-1{,}2} = 1{,}82$$

$$\frac{1{,}5^{2x}}{0{,}8^x} = \frac{1{,}82 \cdot 1{,}5^{1{,}2}}{0{,}8}$$

Nachdem noch x als Exponent ausgeklammert wurde [Formel (2.33)], ist die so erreichte Grundform zu logarithmieren und nach x aufzulösen.

$$\left(\frac{1{,}5^2}{0{,}8}\right)^x = \frac{1{,}82 \cdot 1{,}5^{1{,}2}}{0{,}8}$$

$$x = \frac{\lg \dfrac{1{,}82 \cdot 1{,}5^{1{,}2}}{0{,}8}}{\lg \dfrac{1{,}5^2}{0{,}8}} \qquad \left(= \frac{\lg 3{,}7008}{\lg 2{,}8125} = \frac{0{,}5683}{0{,}4491}\right)$$

$$= 1{,}2654$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{1{,}2654\}}}$.

Es ist auch möglich, die Gleichung zuerst zu logarithmieren:

$$(1 - x) \cdot \lg 0{,}8 + (2x - 1{,}2) \cdot \lg 1{,}5 = \lg 1{,}82,$$

und im Anschluß die so entstandene lineare Gleichung zu lösen:

$$-x \cdot \lg 0{,}8 + 2x \cdot \lg 1{,}5 = \lg 1{,}82 - \lg 0{,}8 + 1{,}2 \cdot \lg 1{,}5$$

$$x = \frac{\lg 1{,}82 - \lg 0{,}8 + 1{,}2 \cdot \lg 1{,}5}{2 \cdot \lg 1{,}5 - \lg 0{,}8}$$

$$x = \frac{\lg \dfrac{1{,}82 \cdot 1{,}5^{1,2}}{0{,}8}}{\lg \dfrac{1{,}5^2}{0{,}8}}.$$

7.4. Hat ein Gas anfänglich die Temperatur T_1 und den Druck p_1 und am Ende einer Zustandsänderung T_2 und p_2, so gilt

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \qquad (n\text{: Polytropenexponent}).$$

Die Formel ist nach n aufzulösen.

Lösung:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{n-1}$$

$$n \cdot \lg T_1/T_2 = n \cdot \lg p_1/p_2 - \lg p_1/p_2$$

$$\lg p_1/p_2 = n \cdot (\lg p_1/p_2 - \lg T_1/T_2)$$

$$n = \frac{\lg p_1/p_2}{\lg p_1/p_2 - \lg T_1/T_2}.$$

Wird die Formel numerisch verwertet, so ist $\lg p_1/p_2$ nur einmal zu berechnen und dann zu speichern.

7.5. Häufig treten in den Anwendungen Exponentialterme auf, so z. B. in

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Wie lautet die Auflösung nach x?

Lösung: Es sei zunächst abkürzend $z = e^x$ substituiert. Damit ist

$$y = \frac{z - 1/z}{2}$$

$$2y = z - \frac{1}{z} \quad \Big| \cdot z$$

$$2yz = z^2 - 1 \qquad \text{quadratische Gleichung}$$

$$z^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$z_{1;2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Das Minuszeichen vor der Wurzel muß entfallen, da stets $z = e^x$ positiv ist. Da Potenzen mit der Basis e durch natürliche Logarithmen aufgehoben werden (beachte Formel (2.58), ist

$$\underline{\underline{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).}}$$

7.6. Anlaufprozesse (Erwärmung von Maschinen, elektrische Einschaltvorgänge usw.) verlaufen nach

$$y = y_E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

worin y_E der sich einstellende Endwert, t die ablaufende Zeit und τ eine Konstante, die sogenannte Zeitkonstante, ist. Die Formel ist nach t aufzulösen. Nach welcher Zeit ist

a) die Hälfte des Endwertes und
b) 63,2% des Endwertes
erreicht?

Lösung: Es ist zunächst nach dem Term aufzulösen, der t enthält.

$$y = y_E - y_E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$y_E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = y_E - y$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{y_E - y}{y_E} \quad \text{Kehrwert bilden}$$

$$e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{y_E}{y_E - y}$$

$$\underline{\underline{t = \tau \cdot \ln \frac{y_E}{y_E - y} = \tau \cdot \ln \frac{1}{1 - y/y_E}.}}$$

a) $t\left(\frac{y_E}{2}\right) = \tau \cdot \ln \frac{1}{1 - 1/2} = \tau \cdot \ln 2 = \underline{\underline{0{,}693\tau.}}$

b) $t(0{,}632 y_E) = \tau \cdot \ln \frac{1}{1 - 0{,}632} = -\tau \cdot \ln 0{,}368 = \underline{\underline{\tau.}}$

Aufgaben: 7.1. bis 7.10.

7.2. Logarithmische Gleichungen

In einer logarithmischen Gleichung tritt die freie Variable im Argument logarithmischer Terme auf. An Hand von Beispielen soll gezeigt werden, wie sich einige logarithmische Gleichungen auf eine Grundgleichung vom Typ

$$\log_a x = b$$

zurückführen lassen, die nach dem Potenzieren mit der Basis $a > 0$ die Gestalt

$$x = a^b$$

annimmt. Läßt sich die rechte Seite der Grundgleichung als Logarithmus mit der Basis a darstellen,

$$\log_a x = \log_a c,$$

so folgt aus der Eineindeutigkeit der Logarithmusfunktion, wonach zwei Logarithmen gleicher Basis dann und nur dann gleich sind, wenn die Logarithmanden gleich sind:

$$x = c.$$

Bei allen logarithmischen Gleichungen ist zu beachten, daß nur Logarithmen von positiven Zahlen definiert sind. Da beim Lösen derartiger Gleichungen häufig nichtäquivalente Umformungen vorzunehmen sind, empfiehlt es sich, zu Beginn des Lösungsvorgangs den der Gleichung zukommenden Definitionsbereich festzustellen. Dadurch wird von vornherein vermieden, daß unzulässige Elemente in der Lösungsmenge erscheinen.

BEISPIEL

7.7. $\{x \mid 2 \cdot \ln x = \ln 16\}$

Lösung: Definitionsbereich $(0; \infty)$

Die zuletzt erwähnte Grundform ist erreicht, wenn es gelingt, den Faktor 2 zu beseitigen. Mit Hilfe des Logarithmengesetzes (2.53) läßt er sich als Exponent auswerten, und zwar kann das in Verbindung mit den Termen $\ln x$ oder $\ln 16$ geschehen.

$\ln x = \frac{1}{2} \ln 16$	$\ln x^2 = \ln 16$
$= \ln 16^{\frac{1}{2}}$	$x^2 = 16$
$= \ln 4$	$x_{1;2} = \pm 4$
$x = 4$	$x_1 = 4$
Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{4\}}}$.	$x_2 = -4$ entfällt, da $-4 \notin (0; \infty)$

Der rechtsstehende Weg zeigt, daß die formale Anwendung des Logarithmengesetzes auf einen variablen Term zu einer nichtäquivalenten Gleichung führte.

Allgemein ist bei einem Übergang von $2n \cdot \log_a x$ auf $\log_a x^{2n}$ (geradzahliger Faktor) die Verträglichkeit der gefundenen Lösung mit dem Definitionsbereich zu überprüfen, oder es ist die Probe an der Ausgangsgleichung vorzunehmen. Andererseits dürfen aber auch keine Elemente verlorengehen. So muß $\log_a x^{2n}$ durch $2n \cdot \log_a |x|$ ersetzt werden, da $\log_a x^{2n}$ für $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$ definiert ist. Lediglich wenn x von vornherein auf positive reelle Zahlen eingeschränkt ist, darf auf die Absolutstriche verzichtet, also das dritte Logarithmengesetz formal angewendet werden.

BEISPIELE

7.8. $\{x \mid \lg 16x^2 - \lg 8x^2 = 2 \cdot \lg 4x^2 - \lg x^2 - \lg 8\}$

Lösung: $x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$

$$\lg 16x^2 - \lg 8x^2 - \lg 16x^4 + \lg x^2 + \lg 8 = 0$$

$$\lg \frac{16x^2 \cdot x^2 \cdot 8}{8x^2 \cdot 16x^4} = 0$$

$$\lg \frac{1}{x^2} = 0$$

$$-2 \cdot \lg |x| = 0 \Rightarrow |x| = 1.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{-1; 1\}}}$.

7.9. $\{x \mid \ln x = -2 \cdot \ln(a+2) + \ln b\}$

Lösung: Die rechte Seite ist zu einem logarithmischen Term zusammenzufassen

$$\ln x = \ln \frac{b}{(a+2)^2} \qquad x = \frac{b}{(a+2)^2}.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \left\{\frac{b}{(a+2)^2}\right\}}}.$

7.10. $\{x \mid \ln x = 1{,}8 + \ln b\}$

Lösung: Der Term $\ln b$ wird auf der linken Seite mit $\ln x$ vereinigt:

$$\ln x - \ln b = 1{,}8$$

$$\ln \frac{x}{b} = 1{,}8 \qquad x = b \cdot e^{1{,}8} = 6{,}05b.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{6{,}05b\}}}.$

7.11. Es ist $\Delta S = c_v \cdot m \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \cdot m \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$ nach V_1 aufzulösen.

Lösung: Die Gleichung sei zunächst durch den konstanten Faktor des Terms dividiert, der V_1 enthält: $c_p \cdot m$.

$$\frac{\Delta S}{m \cdot c_p} = \frac{c_v}{c_p} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad \text{log-Terme vereinigen}$$

$$= \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{c_v}{c_p}} \cdot \frac{V_2}{V_1}\right]$$

$$e^{\frac{\Delta S}{m \cdot c_p}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{c_v}{c_p}} \cdot \frac{V_2}{V_1}$$

$$\underline{\underline{V_1 = V_2 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{c_v}{c_p}} \cdot e^{-\frac{\Delta S}{m \cdot c_p}}}}.$$

7.12. $\{x \mid 4^{3 \cdot \lg x} = 2\}$

Lösung: $x \in (0; \infty)$

$$3 \cdot \lg x \cdot \lg 4 = \lg 2$$

$$\lg x = \frac{\lg 2}{3 \cdot \lg 4} = \frac{\lg 2}{6 \cdot \lg 2} = \frac{1}{6}$$

$$x = 1{,}4678$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{1{,}4678\}}}.$

Aufgaben: 7.11. bis 7.17.

7.3. Goniometrische Gleichungen

In einer goniometrischen Gleichung tritt die freie Variable im Argument goniometrischer Terme auf. Ihre Lösungsmöglichkeiten sind z. T. sehr vielfältig, so daß hier nur eine Auswahl getroffen werden kann. Schon in der Trigonometrie traten

goniometrische Gleichungen in ihrer einfachsten Form auf, indem für einen bekannten Funktionswert die zugehörigen Winkel zu bestimmen waren. Kamen dort nur Winkel zwischen 0° und 180° in Frage, so umfassen die Lösungsmengen goniometrischer Gleichungen sämtliche möglichen Winkel im Bereich $(-\infty; \infty)$.
Als Grundgleichungen sind anzusehen:

$$\sin x = a \qquad \cos x = a \qquad \tan x = a \qquad \cot x = a$$

mit: $a \in [-1; 1]$ $\qquad$ $a \in (-\infty; \infty)$.

BEISPIEL

7.13. $\{x \mid \sin x = -0{,}674\}$ (Genauigkeit bis 0,1°)

Lösung: Zunächst ist die Hilfsgleichung mit positivem Funktionswert im I. Quadranten zu lösen.

$$\sin x' = 0{,}674 \quad \text{ergibt:} \quad x' = 42{,}4°$$

Da die sin-Werte im III. und IV. Quadranten negativ sind, ergeben sich als Lösungen für den Bereich $[0°; 360°)$, häufig auch als Hauptwerte der Grundgleichung bezeichnet,

$$x_1 = 180° + x' \qquad x_2 = 360° - x'$$
$$= 222{,}4° \qquad\qquad = 317{,}6°$$

Wegen der Periodizität folgt aus ihnen als

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{222{,}4° + k \cdot 360°; 317{,}6° + k \cdot 360° \mid k \in G\}}}$.

Grafisch läßt sich die Gleichung lösen, indem die zu $y = \sin x$ und $y = -0{,}674$ gehörigen Kurven gezeichnet und die Abszissen ihrer Schnittpunkte abgelesen werden (Bild 7.1).

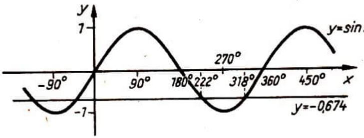


Bild 7.1

Weist die goniometrische Gleichung nicht das einfache Argument x auf, so ist eine neue Variable einzuführen, mit der dann die Gleichung wieder die Grundform annimmt.

BEISPIELE

7.14. $\{x \mid \cos 2x = 0{,}831\}$

Lösung: Mit $z = 2x$ ist als Grundgleichung

$$\cos z = 0{,}831$$

zu lösen. Wegen $\cos z > 0$ müssen die Hauptwerte im I. und IV. Quadranten liegen.

$$z_1 = 33{,}8° \qquad\qquad z_2 = 360° - 33{,}8° = 326{,}2°$$

Für die ursprüngliche Gleichung gelten dann

$$2x_1 = 33{,}8° + k \cdot 360° \qquad 2x_2 = 326{,}2° + k \cdot 360°$$
$$x_1 = 16{,}9° + k \cdot 180° \qquad x_2 = 163{,}1° + k \cdot 180°,$$

oder, bezogen auf eine Periodenlänge von 360°,

$$x_1 = 16{,}9° + k \cdot 360°, \quad x_2 = 163{,}1° + k \cdot 360°, \quad x_3 = 196{,}9° + k \cdot 360°,$$
$$x_4 = 343{,}1° + k \cdot 360°.$$

Die k-Werte dieser Darstellung sind andere als die der oberen.

Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \{16{,}9° + k \cdot 180°;\ 163{,}1° + k \cdot 180° \mid k \in G\}}},$$
$$\underline{\underline{= \{16{,}9° + k \cdot 360°;\ 163{,}1° + k \cdot 360°;\ 196{,}9° + k \cdot 360°;\ 343{,}1° + k \cdot 360° \mid k \in G\}}}.$$

7.15. $\left\{x \,\middle|\, \cos\left(\frac{x}{2} - 20°\right) = -\frac{1}{2}\right\}$

Lösung: Mit der neuen Variablen $z = \frac{x}{2} - 20°$ entsteht als neue Grundgleichung

$$\cos z = -\frac{1}{2}.$$

Ihre Hauptwerte müssen im II. und III. Quadranten liegen. Mit dem aus

$$\cos z' = \frac{1}{2}$$

zu ermittelnden Hilfswinkel $z' = 60°$ ist

$$z_1 = 180° - 60° = 120° \qquad z_2 = 180° + 60° = 240°.$$

Damit sind

$$\frac{x_1}{2} - 20° = 120° + k \cdot 360° \qquad \frac{x_2}{2} - 20° = 240° + k \cdot 360°$$
$$x_1 = 280° + k \cdot 720° \qquad x_2 = 520° + k \cdot 720°.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{280° + k \cdot 720°;\ 520° + k \cdot 720° \mid k \in G\}}}$.

Die Gleichung soll nun mehrere goniometrische Terme enthalten, die aber alle gleiche Argumente aufweisen. Handelt es sich dabei um gleiche Terme, so ist für diesen Term eine neue Variable z einzuführen. Treten jedoch unterschiedliche Terme auf, dann ist zunächst auf eine Termart zurückzugehen (s. Formelsammlungen).

BEISPIEL

7.16. $\{x \mid 2 \cdot \sin x - 3 \cdot \cos x = 1\}$

Lösung: Um mit $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ den cos-Term auf einen sin-Term zurückführen zu können, wird er isoliert und anschließend die Gleichung quadriert (!).

$$2 \cdot \sin x - 1 = 3 \cdot \cos x$$
$$4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \sin x + 1 = 9 \cdot \cos^2 x$$
$$4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \sin x + 1 = 9 \cdot (1 - \sin^2 x).$$

Es sei $z = \sin x$ eingeführt, nach fallenden Potenzen von z geordnet und gelöst:

$$4z^2 - 4z + 1 = 9 - 9z^2$$

$$13z^2 - 4z - 8 = 0$$

$$z_1 = 0{,}953 \qquad z_2 = -0{,}646.$$

Die sich aus den Grundgleichungen

$$\sin x = 0{,}953 \qquad \sin x = -0{,}646$$

ergebenden Hauptwerte

$$x_1 = 72{,}4° \quad x_2 = 107{,}6° \quad x_3 = 220{,}2° \quad x_4 = 319{,}8°$$

müssen unbedingt der Probe unterzogen werden, da die Gleichung quadriert wurde.

$$x_1\colon\ 2\cdot\sin 72{,}4° - 3\cdot\cos 72{,}4° \stackrel{?}{=} 1 \qquad x_3\colon\ 2\cdot\sin 220{,}2° - 3\cdot\cos 220{,}2° \stackrel{?}{=} 1$$

$$1{,}906 - 0{,}906 \stackrel{?}{=} 1 \qquad -1{,}291 + 2{,}291 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$

$$x_2\colon\ 2\cdot\sin 107{,}6° - 3\cdot\cos 107{,}6° \stackrel{?}{=} 1 \qquad x_4\colon\ 2\cdot\sin 319{,}8° - 3\cdot\cos 319{,}8 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1{,}906 + 0{,}906 \stackrel{?}{=} 1 \qquad -1{,}291 - 2{,}291 \stackrel{?}{=} 1$$

$$2{,}812 \neq 1 \qquad -3{,}582 \neq 1$$

Die Proben von x_2 und x_4 ergeben falsche Aussagen. Die Lösungsmenge ist auf x_1 und x_3 aufzubauen.
Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{72{,}4° + k\cdot 360°;\ 220{,}2° + k\cdot 360° \mid k \in G\}}}$.

Der im letzten Beispiel eingeschlagene Weg ist prinzipiell immer möglich, jedoch lassen sich einige Gleichungen kürzer lösen.

BEISPIEL

7.17. $\{x \mid 4\cdot\sin x - 3\cdot\cos x = 0\}$

Lösung: Nach Division durch $\cos x$ würde nur noch ein tan-Term auftreten [vgl. Gl. (3.11)]. Da $\cos x$ den Wert Null annehmen kann, aber nicht durch Null geteilt werden darf, ist dieser Fall zuvor zu untersuchen:

$\cos x = 0$ führt auf $x = 90°$.

Dieser Wert erfüllt die gegebene Gleichung nicht. Hätte sich mit ihm jedoch eine wahre Aussage ergeben, so wäre mit ihm bereits ein Lösungselement bekannt. Unabhängig davon ist für den weiteren Verlauf $\cos x \neq 0$ anzusehen.

$$4\cdot\sin x - 3\cdot\cos x = 0 \qquad |: \cos x$$

$$4\cdot\tan x - 3 = 0$$

$$\tan x = 3/4$$

$$x_1 = 36{,}9° \qquad x_2 = 216{,}9°$$

Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \{36{,}9° + k\cdot 360°;\ 216{,}9° + k\cdot 360° \mid k \in G\}}}$$

$$\underline{\underline{= \{36{,}9° + k\cdot 180° \mid k \in G\}.}}$$

Sind die Argumente der in der Gleichung auftretenden Terme nicht gleich, so ist zuerst diese Unterschiedlichkeit zu beseitigen.

BEISPIEL

7.18. $\{x \mid \sin 2x - \cos x = 0\}$

Lösung: Mit $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ [vgl. Gl. (3.23)] läßt sich die Gleichung in

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$$

umformen. Nach dem Ausklammern von $\cos x$

$$\cos x \cdot (2 \cdot \sin x - 1) = 0$$

ist die Gleichung in

$$\cos x = 0 \qquad 2 \cdot \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

zerlegbar. Mit den Hauptwerten dieser beiden Teilgleichungen

$$x_1 = 90° \qquad x_2 = 270° \qquad x_3 = 30° \qquad x_4 = 150°$$

ergibt sich als

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{30° + k \cdot 360°;\, 90° + k \cdot 180°;\, 150° + k \cdot 360° \mid k \in G\}}}$.

Aufgaben: 7.18. bis 7.25.

7.4. Aufgaben

Welche Wurzeln haben die folgenden **Exponentialgleichungen?**

7.1. $a^{x+5} = a^{12}$

7.2. $b^{3-x} = b^8$

7.3. $(r^{x-3})^{x-4} = (r^{x-2})^{x-7}$

7.4. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

7.5. $3^x = 10$

7.6. $\left(\frac{3{,}11}{5{,}24}\right)^x = \frac{11{,}12}{4{,}48}$

7.7. $4{,}3 \cdot 1{,}34^{x-2} = 3{,}5 \cdot 1{,}78^{x+2}$

7.8. $0{,}57^{1-x} \cdot 1{,}50^{2x-2{,}34} = 1{,}82$

7.9. Für den Riementrieb (Bild 7.2) gilt auf Grund des Eulerschen Gesetzes für die Seilreibung, wenn der Riemen nicht rutschen soll, die Forderung $F_{S1} : F_{S2} = e^{\mu\alpha}$. Hierbei bedeuten F_{S1} die Seilkraft in dem ziehenden Riementeil, F_{S2} die Seilkraft im gezogenen Teil, $\mu = 0{,}25$ die Haftreibzahl von Leder auf Grauguß und α den in rad gemessenen Umschlingungswinkel. Wie groß muß α in ° sein, wenn sich F_{S1} zu F_{S2} wie 5:2 verhält?

7.10. Nach α ist aufzulösen $K = \dfrac{1 - e^{-\mu\alpha}}{1 + e^{-\mu\alpha}}$.

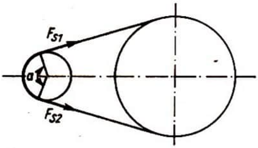


Bild 7.2

Welche Wurzeln haben die folgenden **logarithmischen Gleichungen?**

7.11. $4 + 3 \cdot \lg x = 5{,}2$

7.12. $5 - 2 \cdot \lg 3x = 12{,}4$

7.13. $\ln x^3 + 2 \cdot \ln x^2 = 20{,}4$

7.14. $\lg x^5 = \lg x^2 + 6$

7.15. $\lg (2x + 3) = \lg (x - 1) + 1$

7.16. $\ln x = -\ln a + 2$

7.17. Nach D_0 ist aufzulösen: $\varphi = \ln \dfrac{D_0}{D_0 - d} - 0{,}16$.

Welche Wurzeln haben die folgenden **goniometrischen Gleichungen?**

7.18. $\sin 3x = -0{,}348$

7.19. $\cos (x - 10°) = -0{,}933$

7.20. $3 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x = 5$

7.21. $\cos x - \sin x = 1$

7.22. $1{,}5 \cdot \sin x - 2{,}1 \cdot \cos x = 0{,}8$

7.23. $\cos x \cdot \cot x = -3$

7.24. $\sin 2x = \cot x$

7.25. $2 \cdot \tan x - 3 \cdot \cot x = 1$

7.26. $a(a^{x-2})^{x+3} = a^{3x+8}(a^{x+1})^{x-5}$

7.27. $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2x-3} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{3x+5}$

7.28. $5^x = 100$

7.29. $0{,}025^x = 1000$

7.30. $\left(\dfrac{97}{12}\right)^{1/x} = \dfrac{15}{33}$

7.31. $0{,}85 \cdot 1{,}435^{x+2} = 0{,}72 \cdot 0{,}725^{x-2}$

7.32. $3{,}5 \cdot 4{,}25^{1{,}2x} = 5{,}18^{1{,}5(x-1)}$

7.33. $1{,}85^{1{,}3} \cdot 273^{x-1} = 1{,}25^{1{,}2} \cdot 373^x$

7.34. $25 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5x-2} = 37 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+5}$

7.35. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ (setze $e^x = z$)

7.36. $2e^x - 3e^{-x} = 1$

7.37. $3e^{4x} - 2e^{3x} = 0$

7.38. Nach wieviel (n) Jahren beträgt der Zeitwert K_Z einer Maschine noch 50% des Neuwertes K, wenn jährlich $p = 10\%$ abgeschrieben werden? Es gilt: $K_Z = K(1 - p/100)^n$.

7.39. Bei einer gedämpften Schwingung bilden die Amplituden eine fallende geometrische Folge, nehmen also ständig um den gleichen Prozentsatz ab. Beträgt diese Amplitudenabnahme 0,5%, so ist der Quotient der Folge $q = 0{,}995$ und die Amplitude der n-ten Schwingung $A_n = A_1 q^{n-1}$, wobei A_1 die Anfangsamplitude kennzeichnet. Bei welcher Periode unterschreitet die Amplitude 1% des Anfangswertes?

7.40. Ein Kondensator mit der Kapazität C entladet sich nach $U_t = U_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$, wobei U_0 die bei Beginn ($t = 0$) des Entladungsvorganges vorhandene Kondensatorspannung und R die Größe des Ableitungswiderstandes angeben. Nach welcher Zeit ist die Spannung auf die Hälfte abgesunken?

7.41. Haben zwei Orte den in m gemessenen Höhenunterschied h, so besteht zwischen den jeweils herrschenden Luftdrücken p_0 und p_h: $p_h = p_0 \cdot 0{,}988^{\frac{h}{100\,\mathrm{m}}}$. (Die Formel besagt, daß bei je 100 m Höhenunterschied der Luftdruck um 1,2% sinkt.) Welchen Höhenunterschied weisen die Orte auf, wenn p_h 93% von p_0 ausmacht?

7.42. Nach n ist aufzulösen:

$$W = cT \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right].$$

7.43. $\lg \sqrt[3]{2x} = 0{,}876$

7.44. $\dfrac{1}{3} \cdot \lg x^2 + \dfrac{1}{2} \cdot \lg x^3 = 0{,}0234$

7.45. $\lg 5^x = \lg 2^x + 2$

7.46. $5^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x}$

7.47. $2 \cdot \lg x = 3 \cdot \lg 4$

7.48. $\lg x^2 = 3 \cdot \lg 4$

7.49. $\ln x = \ln a + b$

7.50. $\ln x = 3(1 - \ln a)$

7.51. $\ln x = 2 \cdot \ln u + 3 \cdot \ln v$

7.52. $\ln x - \ln a + \ln b = 0$

7.53. Die Gleichung $A \cdot B^{C \cdot \lg D + E} = F$ ist nach A, B, C, D und E umzustellen.

7.54. $\tan 2x = 0{,}364$

7.55. $\cot\left(\frac{x}{2} + 20°\right) = 1{,}450$

7.56. $1{,}5 \cdot \sin x - 2{,}2 \cdot \cos x = -1{,}2$

7.57. $3 \cdot \sin x + 2 \cdot \tan x = 0$

7.58. $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos x = 0{,}2$

7.59. $\sin x + \cos 2x = 0$

7.60. In 3.1.4. wurden zwei phasenverschobene Sinusschwingungen zusammengesetzt: $y = a \sin(\omega t + \varphi_1) + b \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$. Zu welchem Zeitpunkt liegt erstmalig nach $t = 0$ ein Nulldurchgang vor, und in welchen Abständen wiederholen sie sich? Die Aufgabe ist allgemein und speziell für

$$y = 4 \cdot \sin(3x + 0{,}4) + 3 \cdot \sin(3x + 1{,}5)$$

zu lösen. (Hinweis: Ein Lösungsweg ergibt sich, indem mit Hilfe der Additionstheoreme die Klammern aufgelöst werden.)

8. Näherungsverfahren

8.0. Vorbemerkung

Die Lösungsmengen linearer und quadratischer Gleichungen konnten stets durch Anwendung bestimmter Verfahren bzw. Lösungsformeln in geschlossener Form ermittelt werden. Zwar lassen sich für Gleichungen dritten und vierten Grades auch noch Lösungsformeln angeben, jedoch ist deren Handhabung zu umständlich. Es sollen daher allgemeine Näherungsverfahren entwickelt werden, nach denen sich nicht nur diese, sondern auch Gleichungen noch höheren Grades und transzendente Gleichungen lösen lassen. Es wäre jedoch ein Irrtum, wollte man diese Näherungsverfahren als zweitrangig ansehen. Wenn mit ihnen die Elemente der Lösungsmengen mit jeder gewünschten Genauigkeit zu ermitteln sind, so stellen sie ebenfalls exakte, völlig gleichberechtigte Lösungsverfahren dar.

8.1. Grafische Ermittlung erster Näherungswerte

Grundsätzlich setzt die Anwendung eines numerischen Näherungsverfahrens die Kenntnis eines mehr oder weniger groben Näherungswertes voraus. Derartige Näherungen lassen sich, sollten sie nicht schon anderweitig bekannt sein (Abschätzungen, Probieren usw.), grafisch ermitteln.

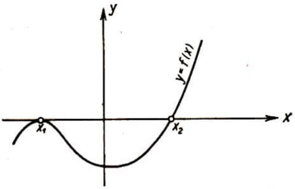


Bild 8.1

Hierzu können zwei Wege eingeschlagen werden:

1. Die in der Form $f(x) = 0$ gegebene Gleichung wird zur Kurvengleichung $y = f(x)$ umgewandelt und die zugehörige Kurve in ein cartesisches Koordinatensystem eingezeichnet. An den Schnitt- und den Berührungspunkten der Kurve mit der x-Achse lassen sich dann die Näherungswerte ablesen (Bild 8.1).

2. Ein Teil der auf der linken Seite von $f(x) = 0$ stehenden Terme ist auf die rechte Seite zu bringen, so daß die Gleichung die Form $f_1(x) = f_2(x)$ annimmt. Die durch Aufspaltung gewonnenen Kurvengleichungen

$$y = f_1(x) \qquad \text{und} \qquad y = f_2(x)$$

mit den Definitionsbereichen X_1 und X_2 sind im gemeinsamen Bereich $X = X_1 \cap X_2$ grafisch darzustellen. Die gesuchten Näherungswerte erscheinen als Abszissen der Schnitt- und Berührungspunkte der beiden Kurven (Bild 8.2).

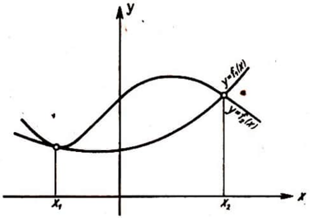


Bild 8.2

BEISPIEL

8.1. $\{x \mid \ln x - \sin x = 0\}$ ist grafisch zu lösen.

Lösung: In diesem Fall erscheint der 2. Weg vorteilhaft, denn die aus

$$\ln x = \sin x$$

zu bildende Zerlegung in

$$y = \ln x \qquad y = \sin x$$

verweist auf Grundfunktionen. Beide zusammen sind im Bereich $(0; \infty)$ definiert. Da $\sin x \leqq 1$ ist, genügt es, bis zu dem x zu zeichnen, für das $\ln x = 1$ ist, also bis $x = e \approx 2{,}7$. Bild 8.3 läßt sich dann als Näherungswert $x = 2{,}2$ entnehmen.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{2{,}2\}}}$.

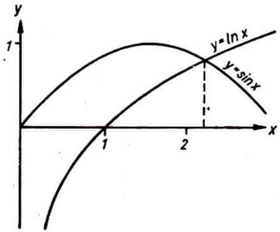


Bild 8.3

8.2. Die Intervallschachtelung

Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist, die zu ermittelnde Wurzel x_0 der Gleichung $f(x) = 0$ durch immer enger werdende Intervalle einzuschachteln. Dazu wird mit zwei Näherungswerten x_1 und x_2 ein erstes Intervall $(x_1; x_2)$ gebildet, das x_0 einschließt: $x_1 < x_0 < x_2$. Die $y = f(x)$ entsprechende Kurve ist nun innerhalb dieses Intervalls durch eine Sekante zu ersetzen, die ihrerseits die x-Achse bei x_3, dem verbesserten Näherungswert, schneidet (Bild 8.4). Dazu müssen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Der Wert x_3 läßt sich einfach durch Teilung des Intervalls im Verhältnis $|f(x_1)|:|f(x_2)| = m:n$ bestimmen. Dazu wird die Intervallbreite $x_2 - x_1$ in $m + n$ Teile zerlegt, und davon sind dann m Teile zu x_1 zu addieren. Auf dieser Überlegung basiert die Formel für die

$$\textbf{regula falsi} \quad \boxed{x_3 = x_1 - f(x_1)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}}. \tag{8.1}$$

Je nach Krümmungsrichtung der Kurve liegt x_3 zwischen x_1 und x_0 oder x_0 und x_2 (Bilder 8.4 und 8.5). Soll nun erneut verbessert werden, so ist ein weiterer Wert x_4 heranzuziehen, der in Verbindung mit x_3 wiederum x_0 einschachtelt, und zwar muß

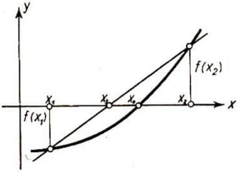


Bild 8.4

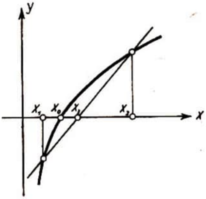


Bild 8.5

x_4 bei Vorzeichengleichheit von $f(x_3)$ und $f(x_1)$ zwischen x_2 und x_3 und bei Ungleichheit zwischen x_1 und x_3 liegen. Das Verfahren ist so oft zu wiederholen, bis die gewünschte Genauigkeit von x_0 erreicht ist. Zweckmäßigerweise wird bei jedem Durchgang eine Verbesserung um höchstens zwei Dezimalstellen vorgenommen.

BEISPIEL

8.2. Welche Lösungsmenge hat die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 8x + 18 = 0?$$

Die Elemente sind bis auf Tausendstel genau anzugeben.

Lösung:

1. Aufstellen einer Wertetabelle für ganzzahlige x, um eventuell vorhandene ganzzahlige Wurzeln nachweisen und andere reelle Wurzeln eingabeln zu können.
Direkt ergeben sich: $f(0) = 18$; $f(1) = 8$; $f(-1) = 22$.

Die weiteren Werte lassen sich mit dem Hornerschen Schema bestimmen:

	1	−3	−8	18	
		2	−2	−20	
2	1	−1	−10	$-2 = f(2)$	Da $f(1) > 0$ und $f(2) < 0$, muß eine Wurzel im Intervall (1; 2) liegen: $x_1 \in (1; 2)$.
		3	0	−24	
3	1	0	−8	$-6 = f(3)$ ↘	
					$x_2 \in (3; 4)$
		4	4	−16 ↗	
4	1	1	−4	$2 = f(4)$	
		5	10	10	
5	1	2	2	$28 = f(5)$	Nur positive Glieder, keine Wurzel im Intervall $[5; \infty)$.
		−2	10	−4	
−2	1	−5	2	$14 = f(-2)$ ↘	
					$x_3 \in (-3; -2)$
		−3	18	−30 ↗	
−3	1	−6	10	$-12 = f(-3)$	Wechselnde Vorzeichen, keine Wurzel im Intervall $(-\infty; -3]$.

2. Näherungslösung für $x_1 \in (1; 2)$. Als eingabelnde Werte lassen sich die Intervallgrenzen verwenden. In der Umgebung dieser Wurzel weist ein $f(x) < 0$ auf einen zu großen Näherungswert hin.

Intervall:	(1; 2)	(1,7; 1,8)
Teilungsverh.:	8:2	643:288
verb. Wert x:	1,8	1,769
zugehör. $f(x)$:	−0,288	−0,0042
2. Gabelungswert:	1,7	1,768
zugehör. $f(x)$:	0,643	0,0050

Die zugehörigen Funktionswerte lassen sich wiederum mit Hilfe des Hornerschen Schemas bestimmen.

Da $f(1{,}768) : f(1{,}769) = 50 : 42 > 1$ ist, liegt x_1 dichter an 1,769, so daß als ausreichend genaue Näherung $x_1 = 1{,}769$ gilt.

3. Näherungswerte für x_2 und x_3: In analoger Weise ließe sich auch mit diesen beiden Werten verfahren. Es ist aber auch möglich (vgl. Bsp. 6.14. und 6.17.), dafür die quadratische Gleichung heranzuziehen, die sich aus dem für $x = 1{,}769$ aufzustellenden Hornerschen Schema

	1	−3	−8	18
		−1,769	−2,1776	−18,0042
1,769	1	−1,231	−10,1776	−0,0042

ergibt: $x^2 - 1{,}231x - 10{,}1776 = 0$

$$x_{2;3} = 0{,}6155 \pm \sqrt{0{,}3788 + 10{,}1776}$$

$$= 0{,}6155 \pm 3{,}2491$$

$$x_2 = 3{,}865 \qquad x_3 = -2{,}634.$$

Überprüfung von x_2:

$f(3{,}865) = 0{,}0016$

$f(3{,}864) = -0{,}012$

x_2 liegt näher an 3,865

Überprüfung von x_3:

$f(-2{,}634) = -0{,}016$

$f(-2{,}633) = 0{,}012$

x_3 liegt näher an $-2{,}633$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{-2{,}633;\ 1{,}769;\ 3{,}865\}}}$.

Es ist möglich, den einen der beiden eingabelnden Werte unverändert zu lassen und den anderen mit jedem Durchgang zu verbessern. Bei dieser Fixpunktmethode sind allerdings meist mehr Durchgänge erforderlich.

Aufgaben: 8.1. bis 8.8.

8.3. Das Newtonsche Näherungsverfahren

Während bei dem zuvor behandelten Näherungsverfahren lediglich Operationen der Elementarmathematik Verwendung fanden, stützt sich das von dem englischen Naturwissenschaftler Newton (1643 bis 1727) angegebene Verfahren auf die Elemente der Differentialrechnung, setzt also deren Kenntnis voraus.
Die der zu lösenden Gleichung $f(x) = 0$ zuzuordnende Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ wird in der Umgebung ihres Schnittpunktes mit der x-Achse durch eine Tangente ersetzt (Bild 8.6). Sie ist im Punkt $P_1(x_1;\ f(x_1))$, dessen Abszisse x_1 der

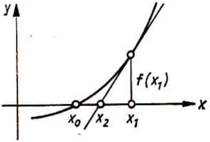


Bild 8.6

1. Näherungswert ist, anzulegen. Nach Bild 8.6 gilt

$$\tan \alpha = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Der so erhaltene Wert läßt sich wiederum als Ausgangswert einer erneuten Verbesserung verwenden. Allgemein kann so aus einem Näherungswert x_i mit

Newtonsche Näherung $\boxed{x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$ (8.2)

ein verbessertes x_{i+1} gebildet werden, bis mit dem n-ten Schritt die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.
Wie die Bilder 8.6 und 8.7 zeigen, kann diese Annäherung entweder von einer oder von beiden Seiten her erfolgen. Formel (8.2) setzt voraus, daß die Funktion f diffe-

renzierbar ist und, da nicht durch Null dividiert werden darf, ihre Ableitung für alle Näherungswerte x_i und somit für alle x einer Umgebung der Stelle x_0 von Null verschieden ist. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend dafür, daß die Näherungswerte gegen x_0 konvergieren. So wurde im Bild 8.8 der 1. Näherungswert x_1 nicht

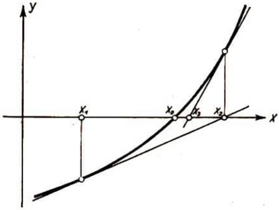


Bild 8.7

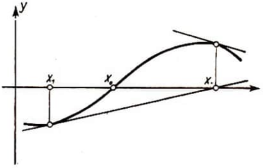


Bild 8.8

„nahe genug" gewählt. Als hinreichende Bedingung gilt die

Konvergenzbedingung $\boxed{\left|\dfrac{f(x_i)\cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2}\right| < 1}$ (8.3)

Diese Formel, die im nächsten Abschnitt hergeleitet wird, setzt die Existenz der 2. Ableitung voraus. Es ist durchaus möglich, ohne diese Konvergenzuntersuchung sofort mit der Verbesserung zu beginnen. Dann aber muß beobachtet werden, ob die Abstände $|x_{i+1} - x_i|$ der aufeinanderfolgenden Näherungswerte auch wirklich ständig kleiner werden, daß also die x_i der Nullstelle zustreben.

BEISPIELE

8.3. $\left\{x \mid x + \sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x} - 11 = 0\right\}$

Lösung: Mit der neuen Variablen $z = x^{\frac{1}{4}}$ entsteht eine algebraische Gleichung vierten Grades

$$f(z) = z^4 + z^2 - 7z - 11 = 0,$$

die bei Beschränkung ihrer Variablen auf reelle $z \geqq 0$ zur anfangs gegebenen Gleichung äquivalent ist.
Aus Bild 8.9 kann als 1. Näherungswert $z_1 = 2$ abgelesen werden. Auch aus einer Wertetabelle mit $f(0) = -11$; $f(1) = -16$;

	1	0	1	−7	−11	
		2	4	10	6	
2	1	2	5	3	−5	$= f(2) < 0$
		3	9	30	69	
3	1	3	10	23	58	$= f(3) > 0$

$z_1 \in (2; 3)$
Nur gleiche Vorzeichen: keine Wurzel im Intervall $[3; \infty)$.

ist zu ersehen, daß das Intervall $(2; 3)$ eine Wurzel enthält, die wegen $|f(2)| < |f(3)|$ näher an $z_1 = 2$ liegen muß.

Die zur Konvergenzuntersuchung erforderlichen $f'(2)$ und $f''(2)$ bestimmen sich aus

$f'(z) = 4z^3 + 2z - 7,$ $\qquad f''(z) = 12z^2 + 2.$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 0 & 2 & -7 \\ & & 8 & 16 & 36 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 18 & 29 = f'(2) \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 12 & 0 & 2 \\ & & 24 & 48 \\ \hline 2 & 12 & 24 & 50 = f''(2). \end{array}$$

Konvergenzuntersuchung: $\left|\dfrac{f(2) \cdot f''(2)}{[f'(2)]^2}\right| = \left|\dfrac{-5 \cdot 50}{29^2}\right| \approx \dfrac{1}{3} < 1.$

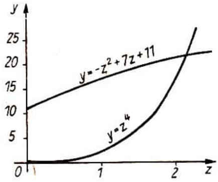


Bild 8.9

In der folgenden Tabelle sind die einzelnen Verbesserungsschritte dargestellt. Ausnahmsweise sollen alle vom Rechner ausgewiesenen Stellen berücksichtigt werden, um zu verdeutlichen, inwieweit sie sinnvoll sind. Weiterhin erfolgt die Verbesserung, bis die Kapazitätsgrenze des Rechners erreicht ist. In der Spalte $|z_{i+1} - z_i|$ steht die (gerundete) Größenordnung der erreichten Verbesserung. Die letzte Spalte weist den Näherungswert bis zur letzten gewährleisteten Stelle aus. Als Ausgangswert für den jeweils nächsten Durchgang ist der in der 4. Spalte angegebene und gespeicherte Wert ⟨M⟩ angesetzt. Die Rechnung läßt sich ohne Unterbrechung ausführen.

z_i	$f(z_i)$	$f'(z_i)$	$z_{i+1} \to$ ⟨M⟩	$\|z_{i+1} - z_i\|$	z_{i+1}
2	-5	29	2,172 ...	0,2	2,2
⟨M⟩	0,785	38,35 ...	2,151945633	$2 \cdot 10^{-2}$	2,152
⟨M⟩	0,0122 ...	37,165 ...	2,151617166	$3 \cdot 10^{-4}$	2,151617
⟨M⟩	$3{,}1 \ldots \cdot 10^{-6}$	37,146 ...	2,151617083	$8 \cdot 10^{-8}$	2,151617083
⟨M⟩	$-7 \cdot 10^{-11}$	37,146 ...	keine weitere Verbesserung		

Es ist deutlich erkennbar, wie sich anfänglich die Werte langsam, dann aber immer schneller verbessern. Bereits nach vier Durchgängen ist die Kapazitätsgrenze erreicht. Beachtenswert ist weiterhin, wie sich $f'(z_i)$ immer weniger verändert. Es ist danach möglich, für die späteren Schritte dafür einen konstanten Wert einzusetzen.
Mit dem zuletzt ermittelten z_i ist dann $x = z^4 = 21{,}43186351$.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{21{,}43186\}}}$.

8.4. $\{x \mid \ln x - x + 2 = 0\}$ ist bis zur 4. Dezimalstelle zu bestimmen.

Lösung: Um zunächst grafisch anzunähern, sind aus $\ln x = x - 2$ die Kurvengleichungen

$$y = \ln x \qquad y = x - 2$$

zu bilden. Bild 8.10, das den Verlauf der entsprechenden Kurven wiedergibt, lassen sich als erste Näherungswerte $x_1 = 0{,}2$ und $x_2 = 3$ entnehmen. Mit

$$f(x) = \ln x - x + 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

bestätigt	für $x_1 = 0{,}2$:	für $x_2 = 3$:
$\left\lvert\dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right\rvert$	$= 0{,}3 < 1$	$= 0{,}02 < 1$,

daß x_1 und x_2 als Ausgangswerte verwendbar sind.

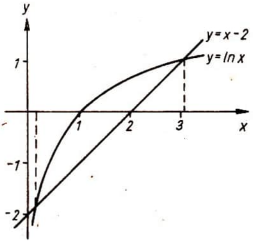


Bild 8.10

Näherungsformel: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{\ln x_i - x_i + 2}{\dfrac{1}{x_i} - 1} = \dfrac{\ln x_i + 1}{1 - \dfrac{1}{x_i}}$.

Die Formel ist in ihrer vereinfachten Form so oft zu durchlaufen, bis sich die 4. Dezimalstelle nicht mehr ändert. Die nächste Dezimalstelle wird noch als Schutzstelle notiert.

	x_1:	x_2:
1. Durchgang:	$0{,}1523_6$	$3{,}1479_2$
2. Durchgang:	$0{,}1584_5$	$3{,}1461_9$
3. Durchgang:	$0{,}1585_9$	$3{,}1461_9$
4. Durchgang:	$0{,}1585_9$	

Für x_1 ist die geforderte Genauigkeit nach dem 3. und für x_2 bereits nach dem 2. Durchgang erreicht (kleinerer Betrag der Konvergenzbedingung!). Für x_1 erreicht der Rechner beim 4. Durchgang und für x_2 beim 3. Durchgang seine mögliche Kapazität.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{0{,}1586;\ 3{,}1462\}}}$.

Aufgaben: 8.1. bis 8.8.

8.4. Die Iteration

Eine weitere Möglichkeit, einen bekannten Näherungswert der Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$ beliebig genau zu verbessern, bietet das Verfahren der Iteration. Auch hierbei erfolgt die Verbesserung durch wiederholte Ausführung ein und derselben Rechenvorschrift.

Zur Aufstellung dieser Iterationsvorschrift ist die gegebene Gleichung so in eine Form $x = \varphi(x)$ zu überführen, daß beim Einsetzen des Näherungswertes x_1 in die rechte Seite mit $x_2 = \varphi(x_1)$ und dann mit $x_3 = \varphi(x_2)$ usw., allgemein mit der

Iterationsvorschrift $\boxed{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$ (8.4)

eindeutig immer bessere Näherungswerte entstehen.
In Bild 8.11 ist die Wirkungsweise des Verfahrens zu erkennen. Ausgehend von x_1 stellt die Ordinate des Punktes $P_1(x_1; \varphi(x_1))$ den nächsten Näherungswert x_2 dar. Die durch diesen Punkt laufende Parallele zur x-Achse schneidet die Gerade $y = x$

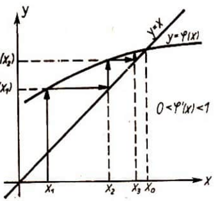


Bild 8.11

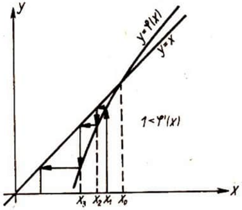


Bild 8.12

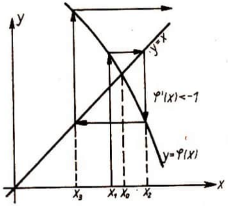


Bild 8.13

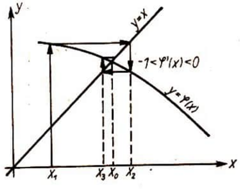


Bild 8.14

in dem Punkt, für den der Näherungswert x_2 nun die Abszisse darstellt. Mit diesem Wert wird der Vorgang wiederholt und x_3 gefunden usw. Es entsteht so die durch die Pfeile angedeutete Annäherung an den Schnittpunkt, dessen Abszisse die gesuchte Wurzel ist. Die x_i konvergieren von einer Seite her gegen x_0. Die Bilder 8.12 und 8.13 lassen erkennen, daß sich $x_2, x_3, \ldots$ immer mehr von x_0 entfernen, während in Bild 8.14 sich die Pfeile wieder, jetzt aber spiralförmig, dem Schnittpunkt nähern. Die x_i konvergieren von beiden Seiten her gegen x_0.
Die mit Hilfe der Iterationsvorschrift ermittelten x_i konvergieren offensichtlich nur dann gegen x_0, wenn für alle x einer Umgebung X_0 der Stelle x_0, dem Näherungsintervall, die der Kurvengleichung $y = \varphi(x)$ entsprechende Kurve entweder nur

Tangentenwinkel zwischen 0° und 45° oder zwischen 135° und 180° aufweist, wenn also $\varphi'(x)$ als Tangens des Tangentenwinkels der Bedingung

$$\textbf{Konvergenzbedingung} \quad \boxed{|\varphi'(x)| < 1 \quad (x \in X_0)} \tag{8.5}$$

genügt.
Diese der geometrischen Anschauung entnommene Bedingung läßt sich auch analytisch bestätigen. Für die oben angegebenen Winkel muß $\varphi'(x)$ zwischen -1 und 1 liegen, und es sei m der größte Wert, den $|\varphi'(x)|$ im Näherungsintervall annehmen kann:

$$m = \max |\varphi'(x)| < 1 \qquad (x \in X_0).$$

Für zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte $x_i, x_{i+1} \in X_0$, die der Iterationsvorschrift (8.5) genügen, stellt, wird noch $x_0 = \varphi(x_0)$ gesetzt,

$$\frac{x_0 - x_{i+1}}{x_0 - x_i} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_i)}{x_0 - x_i}$$

den Differenzenquotienten der Funktion φ an der Stelle x_i dar. Da aber der absolute Betrag des Differenzenquotienten (Tangens des Sekantenwinkels) nicht größer als der im gleichen Intervall größtmögliche absolute Betrag der Ableitung (Tangens des Tangentenwinkels) sein kann, ist

$$\left|\frac{x_0 - x_{i+1}}{x_0 - x_i}\right| \leqq m < 1$$

und somit

$$|x_0 - x_{i+1}| < |x_0 - x_i|.$$

Wie gefordert, liegt also der Näherungswert x_{i+1} näher an x_0 als x_i, und zwar um so näher, je kleiner $|\varphi'(x)|$ ist. Praktisch verwertbar ist die Iterationsgleichung für $|\varphi'(x)| < 0{,}8$.
Sollte es zu aufwendig sein, $\varphi'(x)$ zu bilden und deshalb die vorherige Konvergenzuntersuchung unterbleiben, so ist bei den aufeinanderfolgenden Iterationsdurchgängen zu beobachten, ob die x_i konvergieren. Entfernen sie sich voneinander, so ist die Iterationsgleichung nicht geeignet, oder der 1. Näherungswert liegt nicht nahe genug am gesuchten Wurzelwert.
Ein erstes Beispiel zeigt, wie das Verfahren bei einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ wirkt, in der der Betrag von q klein gegenüber dem von p ist: $|q| \ll |p|$.

BEISPIEL

8.5. Für die quadratische Gleichung

$$x^2 - 200x + 10 = 0$$

ist die Lösungsmenge bis auf Hundertstel genau zu bestimmen.

Lösung: Mit der normalen Lösungsformel

$$x_{1,2} = 100 \pm \sqrt{10000 - 10}$$

$$= 100 \pm \sqrt{9990} \approx 100 \pm 100$$

würden sich $x_1 \approx 0$ und $x_2 \approx 200$ ergeben, da sich der Wert der Wurzel mit elementaren Mitteln nicht genau bestimmen läßt. Um x_1 iterativ ermitteln zu können, ist die Gleichung nach dem x des linearen Gliedes aufzulösen.

Iterationsvorschrift: $x = 0{,}05 + \dfrac{x^2}{200}$ mit $\varphi'(x) = \dfrac{x}{100}$.

Für x_1 ist $x_{1:1} = 0$ als 1. Näherungswert anzusehen.

Konvergenzuntersuchung: $|\varphi'(x_{1:1})| = \left|\dfrac{x_{1:1}}{100}\right| = 0 < 1$.

1. Verbesserung: $x_{1:1} = 0 \quad \Rightarrow x_{1:2} = 0{,}05$,

2. Verbesserung: $x_{1:2} = 0{,}05 \Rightarrow x_{1:3} = 0{,}05 + \dfrac{0{,}0025}{200} = 0{,}050012$.

Mit der geforderten Genauigkeit ist demnach: $x_1 = 0{,}05$.
Aus dem Vietaschen Wurzelsatz folgt

$$x_2 = -p - x_1 = 200 - x_1 = 199{,}95.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{0{,}05;\, 199{,}95\}}}$.

Allgemein folgt aus $x^2 + px + q = 0$ für $|q| \ll |p|$:

$$x_1 = -\frac{q}{p}, \qquad x_2 = -p - x_1.$$

8.6. $\{x \mid \ln x - x + 2 = 0\}$ ist bis zur 4. Dezimalstelle zu bestimmen.

Lösung: Diese Gleichung wurde im Beispiel 8.4. mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens gelöst. Die dort festgestellten ersten Näherungswerte $x_1 = 0{,}2$ und $x_2 = 3$ lassen sich übernehmen. Die Gleichung kann nach jedem der beiden x aufgelöst werden.

1. $\ln x = x - 2$

$$x = e^{x-2}$$

Konvergenzuntersuchung mit $\varphi'(x) = e^{x-2}$:

$$|\varphi'(0{,}2)| = 0{,}2 < 1 \qquad |\varphi'(3)| = e > 1.$$

Iterationsgleichung: $x_{i+1} = e^{x_i-2}$

Sie ist nur für $x_1 = 0{,}2$ geeignet und so oft zu durchlaufen, bis sich die 4. Dezimalstelle nicht mehr ändert. Die angegebene 5. Dezimalstelle dient als Schutzstelle.

1. Durchgang:	$0{,}1653_0$	4. Durchgang:	$0{,}1586_2$
2. Durchgang:	$0{,}1596_6$	5. Durchgang:	$0{,}1586_0$
3. Durchgang:	$0{,}1587_6$		

$$x_1 = 0{,}1586.$$

2. $x = \ln x + 2$

Die Konvergenzbedingung $|\varphi'(x)| = \left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$ erfüllt nur $x_2 = 3$.

Iterationsgleichung: $x_{i+1} = \ln x_i + 2$

1. Durchgang:	$3{,}0986_1$	6. Durchgang:	$3{,}1460_4$
2. Durchgang:	$3{,}1309_5$	7. Durchgang:	$3{,}1461_4$
3. Durchgang:	$3{,}1413_4$	8. Durchgang:	$3{,}1461_8$
4. Durchgang:	$3{,}1446_5$	9. Durchgang:	$3{,}1461_9$
5. Durchgang:	$3{,}1457_0$		

$$x_2 = 3{,}1462.$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{0{,}1586;\, 3{,}1462\}}}$.

Das im vorhergehenden Abschnitt behandelte NEWTONsche Näherungsverfahren ist ebenfalls ein Iterationsverfahren, für das speziell

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

gilt. Aus der allgemeinen Konvergenzbedingung $|\varphi'(x)| < 1$ folgt dafür

$$|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|.$$

Aufgaben: 8.1. bis 8.8.

8.5. Vergleich der Näherungsverfahren

Grundsätzlich kommt die **Intervallschachtelung** ohne die Elemente der Differentialrechnung aus. Es wird vor allem dann angewendet, wenn die für das NEWTONsche Verfahren erforderliche 1. Ableitung nicht oder nur sehr aufwendig zu bilden ist. Weiterhin wird es eingesetzt, wenn sich eine Iterationsgleichung nur sehr schwierig aufstellen läßt. Das Verfahren verlangt jedoch, ständig mit zwei eingabelnden Werten der Variablen und den zugehörigen Funktionswerten zu arbeiten. Möglich ist, daß ein Gabelungswert bei jedem Durchgang unverändert beibehalten wird (Fixpunkt).
Das **Newtonsche Näherungsverfahren** zeichnet sich durch seine schnelle Konvergenz aus. Bereits nach drei Durchgängen ist größtenteils die praktisch erforderliche Genauigkeit unterschritten. Es ist jedoch nur anzuwenden, wenn die 1. Ableitung, die zudem noch von Null verschieden sein muß, existiert. Jeder Durchgang erfordert eine verhältnismäßig große Anzahl von durchzuführenden Operationen.
Beim **Iterationsverfahren** sind fast immer für jeden Durchgang nur wenige Operationen nötig. Jedoch sind häufig mehr Durchgänge als beim NEWTONschen Verfahren erforderlich, da es nicht so schnell konvergiert. Stärkere Unterschiede treten diesbezüglich auf, wenn höhere Genauigkeiten verlangt werden. Die erforderlichen Auflösungen nach der Variablen erweisen sich zuweilen als aufwendig. Weist die Gleichung mehrere Wurzeln auf, so kann es sein, daß diese Wurzeln unterschiedliche Iterationsgleichungen verlangen.

Kontrollfragen

8.1. Wie läßt sich eine erste Näherung für die Lösung einer Gleichung bilden?
8.2. Welche Näherungsverfahren wurden behandelt?
8.3. Was sind die Grundgedanken dieser Verfahren?
8.4. Wie ist zu sichern, daß die aufeinanderfolgenden Werte gegen den gesuchten Wert konvergieren?

8.6. Aufgaben

Welche Wurzeln haben die folgenden Gleichungen (Genauigkeit 0,001)?

8.1. $2x^3 - 5x - 1 = 0$ 8.2. $x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 0$
8.3. $x^3 - 3x - 16 = 0$ 8.4. $2^x + 3^{-x} = 4$
8.5. $\sin 2x - e^x + 3x = 0$ 8.6. $\ln x + 3 = x$

8.7. Eine Kugel ist durch parallele Schnitte in drei volumengleiche Teile zu zerlegen. In welchen Höhen sind die Schnitte anzubringen (anzugeben als Bruchteile des Radius)?

8.8. In welchen Höhen sind an der Stirnseite eines liegenden zylindrischen Kessels Marken für 1/4, 1/2 und 3/4 Füllung anzubringen? Hinweis: Bei den jeweiligen Füllständen stellt auch die im Bild 8.15 dargestellte Fläche A' den entsprechenden Bruchteil der Querschnittsfläche dar. Es ist φ als Variable einzuführen und damit dann h zu berechnen.

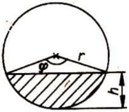


Bild 8.15

8.9. $x^3 - 12x^2 + 25 = 0$

8.10. $x^4 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$

8.11. $x^2 - 1 = \sqrt[3]{x}$

8.12. $\tan x - x = 0 \wedge x \in [0; 2\pi)$

8.13. $x^x = 5$

8.14. $x^2 - 2 = \cos x$

8.15. Wie tief taucht eine Kugel ($r = 5$ cm) aus Eichenholz ($\varrho = 0{,}68$ g/cm^3) in Benzin ($\varrho = 0{,}71$ g/cm^3) ein?

9. Abbildungen und Kurvengleichungen

9.0. Vorbemerkung

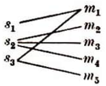
Der für die Mathematik grundlegende Begriff der Abbildung wird definiert, und es werden einige Abbildungseigenschaften erläutert. Durch Verwendung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems wird eine eineindeutige Abbildung der Punkte der Ebene auf geordnete Paare reeller Zahlen hergestellt und damit die Anwendung analytischer Methoden bei der Behandlung geometrischer Probleme ermöglicht. Ebene Kurven werden durch Gleichungen zwischen den Koordinaten ihrer Punkte beschrieben. Als einfachster Fall wird zunächst die Gleichung der Geraden behandelt. Auf die Punkte der Ebene werden als spezielle Abbildungen die Schiebung, die Streckung bzw. Stauchung und die Spiegelung angewendet. Damit dient dieser Abschnitt zur ersten Einführung in die Methoden der analytischen Geometrie und zur Vorbereitung der Behandlung der Funktionen in den folgenden Abschnitten.

9.1. Abbildungen

Der Abbildungsbegriff wird zunächst an Beispielen veranschaulicht.

BEISPIELE

9.1. In einem Arbeitsraum befinden sich 5 Maschinen. Sie werden mit m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 bezeichnet. Durch 3 Schalter s_1, s_2, s_3 können diese Maschinen ein- bzw. ausgeschaltet werden. Jedem Schalter sind diejenigen Maschinen zugeordnet, die durch ihn ein- und ausgeschaltet werden. Der folgende Graph bzw. die Tabelle geben die Zuordnung an:



s_i	m_i
s_1	m_1
s_2	m_2, m_3, m_4
s_3	m_1, m_5

Jedem Element der Menge $S = \{s_1; s_2; s_3\}$ werden ein oder mehrere Elemente der Menge $M = \{m_1; m_2; m_3; m_4; m_5\}$ zugeordnet. Einander zugeordnete Elemente aus beiden Mengen können zu Paaren zusammengefaßt werden. Es ergibt sich die Menge

$$F = \{(s_1; m_1); (s_2; m_2); (s_2; m_3); (s_2; m_4); (s_3; m_1); (s_3; m_5)\},$$

die ebenfalls die Zuordnung zwischen S und M beschreibt. Die Elemente von F sind geordnete Paare, da jedes Paar an erster Stelle ein Element aus S und an zweiter Stelle ein Element aus M enthält. Die durch den Graph, die Tabelle oder die Menge F gegebene Zuordnung wird als Abbildung bezeichnet.

9.2. Jeder natürlichen Zahl der Menge $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ sei der reziproke Wert ihres Quadrates zugeordnet.
Diese Abbildung wird durch die Menge

$$F = \{(1; 1); (2; 1/4); (3; 1/9); (4; 1/16); (5; 1/25)\}$$

beschrieben und stellt eine Zuordnung zwischen den Mengen X und $Y = \{1; 1/4; 1/9; 1/16; 1/25\}$ dar.

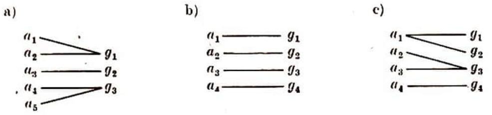
Definition

Gegeben sind zwei (nicht leere) Mengen X und Y. Sind aufgrund einer Vorschrift Elementen $x \in X$ ein oder mehrere Elemente $y \in Y$ zugeordnet, so heißt die Menge F der geordneten Paare $(x; y)$ eine **Abbildung** aus X in Y, geschrieben: $F: x \to y$.

Im Paar $(x; y)$ heißt y das **Bild** von x und x das **Urbild** von y. Die Menge X heißt **Urbildmenge** oder **Definitionsbereich** von F, die Menge Y heißt **Bildmenge** oder **Wertebereich** von F.
Besondere Bedeutung haben zwei Abbildungsarten. Ist jedem Urbild x nur ein Bild y zugeordnet, so liegt eine **eindeutige Abbildung** vor. Hat bei einer eindeutigen Abbildung außerdem jedes Bild y nur ein Urbild x, so wird von einer **eineindeutigen Abbildung** gesprochen.

BEISPIEL

9.3. In einem Labor sind die Mitarbeiter $(a_1, a_2, \ldots)$ auf diejenigen Geräte $(g_1, g_2, \ldots)$ verteilt, die sie bedienen gemäß folgender Zuordnung:



Die Zuordnung a) ist eine eindeutige Abbildung, da jeder Mitarbeiter nur ein Gerät bedient. Nach b) bedient jeder Mitarbeiter nur ein Gerät, und jedes Gerät wird nur von einem Mitarbeiter bedient, die Abbildung ist eineindeutig. Die Zuordnung c) ist keine eindeutige Abbildung, da der Mitarbeiter a_1 die zwei Geräte g_1, g_2 bedient.

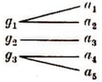
Eindeutige Abbildungen werden Funktionen genannt und in Abschnitt 10. ausführlich behandelt.
Werden in einer Abbildung $F: x \to y$ die Bilder als Urbilder und die Urbilder als Bilder betrachtet, d. h. wird die Zuordnung umgekehrt, so entsteht eine neue Abbildung $G: y \to x$.

BEISPIEL

9.4. Durch die Abbildungen in Beispiel 9.3. sind den Mitarbeitern die von ihnen bedienten Geräte zugeordnet. Die Umkehrung führt zu der Fragestellung, welche Mitarbeiter ein bestimmtes Gerät bedienen, das heißt, den Geräten sind bestimmte Mitarbeiter zugeordnet. Zum Beispiel entsteht aus der Abbildung a)

$$F = \{(a_1; g_1); (a_2; g_1); (a_3; g_2); (a_4; g_3); (a_5; g_3)\}$$

die neue Abbildung



oder $G = \{(g_1; a_1); (g_1; a_2); (g_2; a_3); (g_3; a_4); (g_3; a_5)\}$.

In jedem Paar von G ist die Reihenfolge gegenüber der Abbildung F vertauscht.

Definition

Die aus einer Abbildung F aus X in Y durch Vertauschen von Urbildmenge X und Bildmenge Y entstehende Abbildung aus Y in X heißt **Umkehrabbildung** von F und wird mit F^{-1} bezeichnet.

Die symbolische Schreibweise F^{-1} für G bedeutet nicht etwa $\frac{1}{F}$. Das Beispiel 9.3.b) zeigt, daß eine Abbildung F genau dann eineindeutig ist, wenn zugleich F und seine Umkehrabbildung F^{-1} eindeutig sind.

Kontrollfragen

9.1. Wie ist eine Abbildung definiert?
9.2. Welche Darstellungsarten gibt es für Abbildungen?
9.3. Was sind eindeutige und eineindeutige Abbildungen?
9.4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Abbildung und Umkehrabbildung?

Aufgaben: 9.1. bis 9.3.

9.2. Das rechtwinklige Koordinatensystem

Zur eindeutigen gegenseitigen Festlegung von Punkten in der Ebene dienen ebene Koordinatensysteme. Besondere Bedeutung hat das **rechtwinklige** oder **kartesische ebene Koordinatensystem**[1]). In der Ebene werden zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden ausgewählt, die sich im Punkt O, dem **Ursprung**, schneiden (Bild 9.1). Die

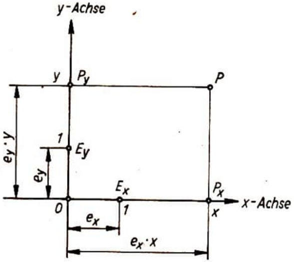


Bild 9.1

[1]) nach René Descartes, lat. Cartesius, französischer Philosoph, Mathematiker und Physiker, 1596 bis 1650.

Geraden werden als x-Achse oder **Abszissenachse** und als y-Achse oder **Ordinatenachse** bezeichnet. Jede Achse wird durch Festlegen einer positiven Richtung mit Hilfe eines **Pfeiles orientiert.** Von O aus wird auf der x-Achse in positiver Richtung eine beliebige Strecke e_x abgetragen. Dem erhaltenen Punkt E_x wird die Zahl 1 zugeordnet. Entsprechend wird nach Wahl der Strecke e_y dem Punkt E_y der y-Achse die Zahl 1 zugeordnet. Die Strecken $\overline{OE_x} = e_x$ und $\overline{OE_y} = e_y$ heißen **Einheitsstrecken.** Meist wird $e_x = e_y$ gewählt, jedoch können auch unterschiedliche Einheitsstrecken vorteilhaft sein.

Durch die Festlegung von Orientierung und Einheitsstrecken werden die Achsen zu Zahlengeraden, so daß jedem Punkt auf der x- oder y-Achse eineindeutig eine reelle Zahl zugeordnet werden kann.

P sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Die Lote von P auf die Koordinatenachsen haben die Fußpunkte P_x und P_y, denen durch $\overline{OP_x} = e_x \cdot x$ und $\overline{OP_y} = e_y \cdot y$ die reellen Zahlen x bzw. y zugeordnet sind. Damit wird jeder Punkt P der Ebene eindeutig auf ein geordnetes Paar $(x; y)$ reeller Zahlen abgebildet. Umgekehrt läßt sich zu jedem geordneten Paar reeller Zahlen $(x; y)$ eindeutig ein Punkt der Ebene konstruieren: In den zu x und y gehörenden Punkten P_x und P_y werden die Senkrechten zu den Achsen errichtet, die sich in P schneiden.

Satz

Durch ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene ist eine eineindeutige Abbildung der Punkte der Ebene auf die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen gegeben.

Die reellen Zahlen x, y sind die rechtwinkligen Koordinaten von P. x heißt **Abszisse** und y heißt **Ordinate.** Für den Punkt P mit den Koordinaten x, y wird $P(x; y)$ geschrieben.

Die Koordinatenachsen zerlegen die Ebene in vier Quadranten (Bild 9.2).

Die Bilder 9.3 und 9.4 zeigen Beispiele für unterschiedliche Einheitsstrecken e_x und e_y. Für jeden der Punkte P_1 bis P_4 ist die Ordinate y gleich der 3. Potenz seiner Abszisse x.

Kontrollfragen

9.5. Durch welche Festlegungen entsteht ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene?

9.6. Auf welche Zahlenpaare werden die Punkte der x- bzw. y-Achse abgebildet?

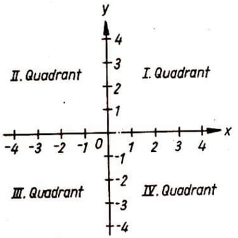


Bild 9.2

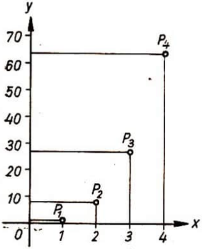


Bild 9.3

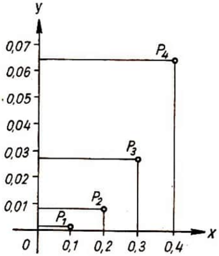


Bild 9.4

9.3. Die Strecke

Sind die Endpunkte P_1 und P_2 einer Strecke durch ihre Koordinaten x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 gegeben, dann wird die Länge der Strecke nach PYTHAGORAS aus

$$\boxed{e = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{9.1}$$

berechnet. Die Formel wird unmittelbar aus Bild 9.5 abgelesen. Sie gilt, ebenso wie die folgenden Formeln, auch dann, wenn die Punkte P_1 und P_2 eine beliebige Lage in den vier Quadranten des Koordinatensystems haben.

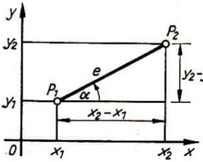


Bild 9.5

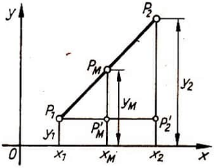


Bild 9.6

Unter dem Anstiegswinkel der Strecke $\overline{P_1P_2}$ wird der Winkel $\alpha \in [0°, 180°)$ verstanden, den diese Strecke mit der positiv gerichteten x-Achse bildet. α ergibt sich nach Bild 9.5 aus

$$\boxed{m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{9.2}$$

$m = \tan \alpha$ heißt **Anstieg oder Richtungsfaktor der Strecke.**

Der Mittelpunkt $P_M(x_M; y_M)$ der Strecke $\overline{P_1P_2}$ sei gesucht (Bild 9.6). Aus $\overline{P_1P_2} = 2\overline{P_1P_M}$ sowie aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $P_1P_M'P_M$ und $P_1P_2'P_2$ folgt

$$\frac{x_M - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overline{P_1P_M}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{y_M - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\overline{P_1P_M}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{1}{2}.$$

Nach x_M bzw. y_M aufgelöst ergibt

$$x_M = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) + x_1, \quad y_M = \frac{1}{2}(y_2 - y_1) + y_1$$

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}} \tag{9.3}$$

BEISPIEL

9.5. Gegeben sind die Punkte $P_1(-2; -3)$, $P_2(-6; 7)$. Die Länge der Strecke ist

$$e = \overline{P_1P_2} = \sqrt{[-6-(-2)]^2 + [7-(-3)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + 10^2}$$

$$\underline{\underline{e = \sqrt{116} \approx 10{,}77.}}$$

Für den Anstiegswinkel folgt

$$\tan\alpha = \frac{7-(-3)}{-6-(-2)} = \frac{10}{-4} = -2{,}5; \quad \underline{\underline{\alpha = 111{,}8^\circ}}$$

und der Mittelpunkt P_M der Strecke hat die Koordinaten

$$\underline{\underline{x_M}} = \frac{-2+(-6)}{2} = \underline{\underline{-4}}, \quad \underline{\underline{y_M}} = \frac{-3+7}{2} = \underline{\underline{2}} \quad \text{(Skizze anfertigen!).}$$

Aufgaben: 9.4. bis 9.6.

9.4. Kurvengleichungen

In der Ingenieurtätigkeit ist die Beschreibung und Untersuchung von Kurven, wie sie zum Beispiel von bewegten Teilen in Getrieben erzeugt werden, eine wichtige Aufgabe.
Jede Kurve läßt sich als Menge von Punkten auffassen, die bestimmte Bedingungen erfüllen müssen. Diese Bedingungen können durch Worte festgelegt sein.

BEISPIELE

9.6. Die Menge der Punkte einer Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten A und B der Ebene jeweils gleich sind, ist die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{AB}$ (Bild 9.7).

9.7. Die Menge der Punkte einer Ebene, die von einem Punkt M der Ebene den gleichen Abstand r haben, ist der Kreis um M mit dem Radius r.

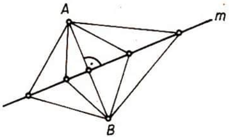


Bild 9.7

In der Planimetrie ist für die Kurve als Punktmenge der Name „Geometrischer Ort“ gebräuchlich.
Unter Zugrundelegung eines cartesischen Koordinatensystems kann die die Kurve fixierende Bedingung in analytischer Form durch eine Gleichung in den Variablen x und y, den Koordinaten der Kurvenpunkte, gegeben sein. Eine derartige Kurvengleichung läßt sich im allgemeinen in die Form

$$F(x; y) = 0 \tag{I}$$

bringen, die als **implizite Form der Kurvengleichung** bezeichnet wird. Zu jedem geordneten Paar $(x; y)$ reeller Zahlen, das Gleichung (I) erfüllt, gehört eineindeutig ein Punkt $P(x; y)$ der Ebene, und die Menge aller derartigen Punkte bildet im allgemeinen eine ebene Kurve. Für die als Punktmenge aufgefaßte Kurve k mit der Kurvengleichung $F(x; y) = 0$ läßt sich schreiben:

$$k = \{P(x; y) \mid F(x; y) = 0\}. \tag{II}$$

$P(x; y)$ ist ein beliebiger Punkt der Kurve. Da seine Koordinaten Variablen sind, heißt P **variabler Punkt.** Sind X und Y die Mengen der Zahlen x bzw. y und ändert sich $x \in X$ stetig, so folgt daraus im allgemeinen auch eine stetige Änderung von $y \in Y$, und der zugehörige Punkt bewegt sich auf der Kurve. Für die Darstellung eines festen Kurvenpunktes werden Indizes verwendet, z. B. $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(2; -5)$. Für die Anwendung ergibt sich aus (II) die wichtige **Folgerung:**

Erfüllt ein Wertepaar $(x_0; y_0)$ die Kurvengleichung $F(x; y) = 0$, dann liegt der Punkt $P_0(x_0; y_0)$ auf der Kurve. Umgekehrt erfüllen die Koordinaten jedes Kurvenpunktes die Kurvengleichung.

Aus der impliziten Form (I) ergibt sich durch Auflösen nach y, falls dieses möglich ist, die explizite Form der Kurvengleichung. Ist die Abbildung $x \to y$ eindeutig, dann stellt sie eine Funktion dar, und es kann für die **explizite Form der Kurvengleichung**

$$y = f(x) \tag{III}$$

geschrieben werden. Bei einer mehrdeutigen Abbildung $x \to y$ zerfällt die explizite Darstellung in mehrere Kurvengleichungen $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ...

BEISPIELE

9.8. Gegeben sind die Punkte $A(2; 7)$ und $B(4; 1)$. $P(x; y)$ sei der variable Punkt der Mittelsenkrechten m der Strecke $\overline{AB}$ (Bild 9.8). Die in Beispiel 9.6. angegebene Bedingung für m lautet

$$\overline{AP} = \overline{BP}. \tag{IV}$$

Aus (IV) ergibt sich mit der Formel (9.1) für die Länge einer Strecke die Kurvengleichung von m:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}.$$

Werden die Gleichungen quadriert, die Klammern aufgelöst und die entstandenen Terme umgestellt, so ergibt sich die

implizite Form $\quad F(x; y) = x - 3y + 9 = 0 \quad$ bzw. die

explizite Form $\quad y = \frac{1}{3}x + 3 = f(x).$

In ausführlicher Schreibweise folgt

$$m = \{P(x; y) \mid x - 3y + 9 = 0\}.$$

Der Punkt $P_0(-3; 2)$ liegt wegen

$$F(x_0; y_0) = x_0 - 3y_0 + 9 = -3 - 3 \cdot 2 + 9 = 0$$

auf der Kurve: $P_0 \in m$, während der Punkt $P_1(1; 2)$ wegen

$$F(x_1; y_1) = x_1 - 3y_1 + 9 = 1 - 3 \cdot 2 + 9 = 4 \neq 0$$

kein Kurvenpunkt ist: $P_1 \notin m$.

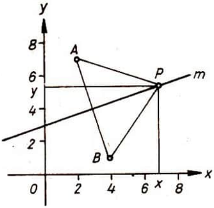


Bild 9.8

9.9. Die Gleichung der Kurve $k = \{P(x; y) \mid y^2 - 3x + 6 = 0\}$ lautet in expliziter Form

$$y = \pm \sqrt{3x - 6}, \tag{V}$$

d. h., es ergeben sich zwei explizite Kurvengleichungen

$$y = \sqrt{3x - 6} = f_1(x) \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{3x - 6} = f_2(x).$$

Damit der Radikand nicht negativ wird, muß $x \geqq 2$ gewählt werden. Nach der Wertetabelle

x	2	3	4	5
y	0	$\pm 1{,}73$	$\pm 2{,}45$	± 3

sind einige Kurvenpunkte in Bild 9.9 konstruiert. Die Kurve ist wegen der zwei Vorzeichen in (V) symmetrisch zur x-Achse. Der Punkt $P_0(2{,}48; 1{,}22)$ scheint nach dem Bild auf der Kurve zu liegen. Die Rechnung erlaubt jedoch eine genauere Aussage und weist aus, daß wegen $y = f(2{,}48) = 1{,}20 \neq 1{,}22$ P_0 kein Kurvenpunkt ist.

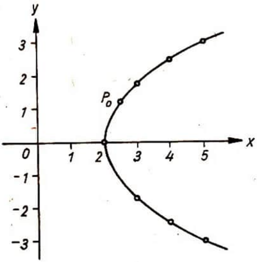


Bild 9.9

Häufig sind die **Schnittpunkte zweier Kurven**

$$k_1 = \{P(x; y) \mid F_1(x; y) = 0\} \quad \text{und} \quad k_2 = \{P(x; y) \mid F_2(x; y) = 0\}$$

zu berechnen. Für einen Schnittpunkt P_1 gilt $P_1 \in k_1$ und $P_1 \in k_2$, also auch $P_1 \in k_1 \cap k_2$. Schneiden sich die zwei Kurven in n Punkten P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dann ist

$$k_1 \cap k_2 = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}.$$

Die Koordinaten jedes Schnittpunktes P_i müssen beide Kurvengleichungen erfüllen:

$$F_1(x_i; y_i) = 0, \qquad F_2(x_i; y_i) = 0. \tag{VI}$$

(VI) ist ein Gleichungssystem mit zwei Variablen, dessen Lösungsmenge aus den Koordinatenpaaren $(x_i; y_i)$ der Schnittpunkte besteht.

Satz

> Um die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Kurven zu berechnen, werden die zugehörigen Kurvengleichungen zu einem Gleichungssystem zusammengefaßt und dessen Lösungsmenge bestimmt.

Da alle Koordinaten reelle Zahlenpaare sind, bedeutet das Auftreten von komplexen Zahlen in einem Zahlenpaar der Lösungsmenge, daß diesem Paar kein Schnittpunkt zuzuordnen ist.

BEISPIEL

9.10. Die Schnittpunkte der folgenden Kurven sind zu berechnen:

$$k_1 = \{P(x; y) \mid x^2 - 10x - 2y + 30 = 0\},$$
$$k_2 = \{P(x; y) \mid x - y - 1 = 0\}.$$

Lösung: Für einen Schnittpunkt P_i gilt

$$\left| \begin{array}{r} x_i^2 - 10x_i - 2y_i + 30 = 0 \\ x_i - y_i - 1 = 0. \end{array} \right|$$

Die nach y_i aufgelöste 2. Gleichung in die 1. Gleichung eingesetzt ergibt: $x_i^2 - 12x_i + 32 = 0$. Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 8$, $x_2 = 4$. Aus der 2. Gleichung folgt $y_1 = 7$, $y_2 = 3$. Die Kurven schneiden sich in den Punkten $P_1(8; 7)$, $P_2(4; 3)$, d. h., $k_1 \cap k_2 = \{P_1(8; 7), P_2(4; 3)\}$ (Bild 9.10).

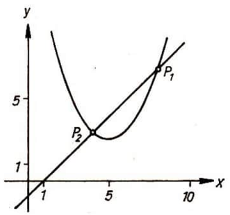


Bild 9.10

Kontrollfragen

9.7. Aufgrund welcher Festlegungen läßt sich einer Gleichung mit den Variablen x und y eineindeutig eine Kurve in der Ebene zuordnen?
9.8. Wie erkennt man bei vorliegender Kurvengleichung, ob ein gegebener Punkt auf der Kurve liegt oder nicht?
9.9. Wie werden auf analytischem Wege die Schnittpunkte von zwei Kurven ermittelt?

Aufgaben: 9.7. bis 9.11.

9.5. Die Gerade

Eine lineare Kurvengleichung

$$\boxed{F(x;y) = Ax + By + C = 0} \tag{9.4}$$

in der A, B, C beliebig reelle Zahlen und A, B nicht beide zugleich Null sind, beschreibt stets eine Gerade g. Jede Geradengleichung läßt sich umgekehrt stets auf die Form (9.4) bringen. Die implizite Gl. (9.4) heißt **allgemeine Form der Geradengleichung.** Die Koeffizienten A, B, C haben keine unmittelbare geometrische Bedeutung und sind der Geraden nicht eindeutig zugeordnet, da (9.4) stets noch mit einem Faktor multipliziert werden kann. Aus (9.4) folgt die explizite Kurvengleichung

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (\text{für } B \neq 0).$$

Wird $-A/B = m$ und $-C/B = b$ gesetzt, so entsteht die

Normalform der Geradengleichung $\boxed{y = mx + b}$ (9.5)

Um b geometrisch zu deuten, werden die Koordinaten des Schnittpunktes $P_0(x_0 = 0;\ y_0)$ zwischen g und der y-Achse in (9.5) eingesetzt:

$$y_0 = m \cdot 0 + b = b \quad (\text{Bild } 9.11).$$

Zur geometrischen Deutung von m werden zwei auf g liegende Punkte $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$ betrachtet. Nach der Folgerung in 9.4.(S. 242) gilt:

$$y_1 = mx_1 + b, \qquad y_2 = mx_2 + b.$$

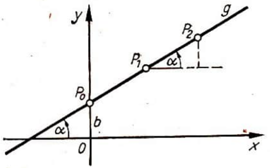


Bild 9.11

Durch Subtraktion dieser Gleichung folgt

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

d. h., m ist nach (9.2) der Anstieg der Strecke $\overline{P_1P_2}$ und damit auch der Anstieg der Geraden g: $= \tan \alpha$

In der Geradengleichung $y = mx + b$ ist m der Anstieg der Geraden gegen die x-Achse, und b ist die Ordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse.

Sonderfälle: Für $A = 0$ folgt aus (9.4): $By + C = 0$ oder $y = -\frac{C}{B}$. Durch diese Gleichung werden alle Punkte ausgewählt, die die gleiche Ordinate $-\frac{C}{B}$ haben. Daher ist es die Gleichung einer Parallelen zur x-Achse. Für $B = 0$ folgt entsprechend mit $x = -\frac{C}{A}$ die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse.
Für $C = 0$ folgt $b = -\frac{C}{B} = 0$, d. h., die Gerade geht durch den Ursprung.

BEISPIELE

9.11. Um die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}3x + 0{,}6$ im Koordinatensystem darzustellen, wird der Schnittpunkt $P_0(0; 0{,}6 = b)$ mit der y-Achse bestimmt und nach Bild 9.12 durch Konstruktion des Anstiegsdreiecks $P_0P_1'P_1$ ein zweiter Punkt P_1 der Geraden gezeichnet. Damit ist $g = P_0P_1$ festgelegt. (Bei $m = -1{,}3$ wäre diese Strecke von P_1' nach unten abzutragen.)

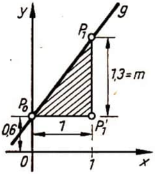


Bild 9.12

9.12. Eine Gerade geht durch $P_1(1; -3)$ und $P_2(7; 6)$. Wie heißt die Normalform der Geradengleichung?

Lösung: Aus $y = mx + b$ folgt wegen

$$P_1 \in g\colon \quad -3 = m \cdot 1 + b; \qquad P_2 \in g\colon \quad 6 = m \cdot 7 + b.$$

Dieses Gleichungssystem für m und b ergibt die Lösungen $m = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{9}{2}$. Die Geradengleichung lautet: $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}}}$.

Ist der **Schnittpunkt** der zwei Geraden mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1&\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ g_2&\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned} \tag{I}$$

zu berechnen, dann ist das Gleichungssystem (I) zu lösen. Den drei möglichen Geradenlagen entsprechen drei Fälle für die Lösungen (vgl. 5.2.):

g_1, g_2 schneiden sich $\Leftrightarrow$ es existiert genau eine Lösung
$g_1 = g_2 \Leftrightarrow$ es existieren unendlich viel Lösungen
$g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow$ es existiert keine Lösung.

Für den **Schnittwinkel** δ zwischen den zwei Geraden mit den Gleichungen

$$g_1\colon\ y = m_1 x + b_1, \qquad g_2\colon\ y = m_2 x + b_2$$

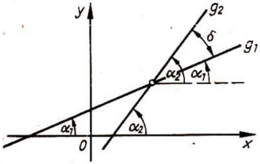


Bild 9.13

gilt (Bild 9.13): $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ und nach (3.21)

$$\tan\delta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

$$\boxed{\tan\delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}} \tag{9.6}$$

Sind g_1, g_2 parallel, dann ist $\alpha_1 = \alpha_2$, d. h., $m_1 = m_2$:

$$\boxed{g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2} \tag{9.7}$$

Stehen g_1 und g_2 senkrecht aufeinander, dann ist wegen $\delta = 90°$ in (9.6) $\tan\delta$ nicht definiert. Das tritt nur ein, wenn der Nenner gleich Null ist: $1 + m_2 m_1 = 0$ oder $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

$$\boxed{g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}} \tag{9.8}$$

BEISPIEL

9.13. Wie heißt die Gleichung der Geraden g_2, die durch $P_1(8; 3)$ geht und senkrecht zur Geraden g_1: $y = 4x - 1$ verläuft?

Lösung: Es ist $m_1 = 4$ und $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{4}$. Die Gleichung von g_2 lautet damit $y = -\frac{1}{4}x + b$. P_1 liegt auf g_2: $3 = -\frac{1}{4} \cdot 8 + b$. Daraus ergibt sich $b = 5$, und die Gleichung von g_2 lautet: $\underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x + 5}}$.

Kontrollfragen

9.10. Welche Form muß eine Kurvengleichung haben, damit sie eine Gerade beschreibt?

9.11. Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten in der expliziten Form der Geradengleichung?

9.12. Woran erkennt man an den Geradengleichungen, ob zwei Geraden senkrecht zueinander oder parallel sind?

Aufgaben: 9.12. bis 9.16.

9.6. Spezielle Abbildungen, Koordinatentransformationen

9.6.0. Vorbemerkung

Werden in einer Kurvengleichung zu den Variablen x und y Konstante addiert bzw. werden x und y mit Konstanten multipliziert, so verändert sich die Lage der Kurve im Koordinatensystem bzw. die Form der Kurve. Diese Lage- und Formänderungen können als spezielle Abbildungen gedeutet werden. Zahlreiche Kurven lassen sich durch solche Abbildungen aus gewissen Grund- oder Normalformen gewinnen. Im folgenden werden als spezielle Abbildungen nur die Schiebung, die Streckung bzw. Stauchung und die Spiegelung behandelt.

9.6.1. Die Schiebung

BEISPIEL

9.14. Ein Koordinatensystem habe den Ursprung O und die Achsen x und y (Bild 9.14). Es werde mit $K(O; x; y)$ bezeichnet. In $K(O; x; y)$ ist eine Parabel durch die Gleichung $y = x^2$ gegeben. Gesucht wird die Gleichung der Parabel in einem zweiten Koordinatensystem $\overline{K}(\overline{O}; \overline{x}; \overline{y})$, dessen $\overline{x}$-Achse parallel zur x-Achse und dessen $\overline{y}$-Achse parallel zur y-Achse ist. Der Ursprung O habe im System $\overline{K}$ die Koordinaten $\overline{x}_0 = 3$, $\overline{y}_0 = 2$ (Bild 9.14).

Lösung: Zwischen den Koordinaten eines beliebigen Parabelpunktes P in beiden Systemen bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= x + 3\\ \overline{y} &= y + 2\end{aligned}\quad \text{(I)} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned}x &= \overline{x} - 3\\ y &= \overline{y} - 2\end{aligned}\quad \text{(II)}$$

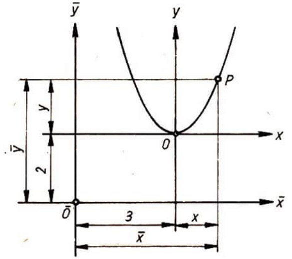


Bild 9.14

Werden in der Parabelgleichung $y = x^2$ die Koordinaten x und y durch die rechten Seiten von (II) ersetzt, dann ergibt sich die Parabelgleichung in den neuen Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$:

$$\bar{y} - 2 = (\bar{x} - 3)^2$$
$$\underline{\underline{\bar{y} = (\bar{x} - 3)^2 + 2.}}$$

Sind allgemein $K(O; x, y)$ und $\bar{K}(\bar{O}; \bar{x}, \bar{y})$ zwei Koordinatensysteme mit zueinander parallelen Abszissen- bzw. Ordinatenachsen und hat der Ursprung O im System $\bar{K}$ die Koordinaten $\bar{x}_0 = m$, $\bar{y}_0 = n$, dann lauten die Gleichungen zwischen den Koordinaten eines Punktes P in beiden Systemen:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= x + m \\ \bar{y} &= y + n \end{aligned}} \tag{9.9}$$

Die Gln. (9.9) lassen zwei Deutungen zu.

1. Deutung: $x; y$ und $\bar{x}; \bar{y}$ werden als Koordinaten **eines Punktes** P **in zwei Koordinatensystemen** K und $\bar{K}$ betrachtet (Bild 9.15a). K geht aus $\bar{K}$ durch Parallelverschiebung um m bzw. n in Richtung der x- bzw. y-Achse hervor. Der Übergang vom System K zum System $\bar{K}$ heißt *Koordinatentransformation* und stellt im vorliegenden Fall geometrisch eine Parallelverschiebung oder kurz **Schiebung** des Koordinatensystems dar. Die Gln. (9.9) heißen die **Transformationsgleichungen** der Schiebung.
2. Deutung: Die beiden Koordinatensysteme K und $\bar{K}$ werden als zusammenfallend angenommen, so daß $x; y$ und $\bar{x}; \bar{y}$ die Koordinaten **zweier Punkte** P und $\bar{P}$ **in einem Koordinatensystem** sind: $K = \bar{K}$ (Bild 9.15b). Jedem Punkt $P(x; y)$ wird durch (9.9) eindeutig ein Punkt $\bar{P}(\bar{x}; \bar{y})$ zugeordnet: $P \to \bar{P}$. Die Gln. (9.9) beschreiben eine **eindeutige** (und auch eineindeutige) **Abbildung** der Ebene auf sich selbst. Der Bildpunkt $\bar{P}$ ergibt sich aus dem Urbild P durch eine Schiebung um m in Richtung der x-Achse und um n in Richtung der y-Achse. Einer Kurve als Urbild wird durch die Schiebung eine Bildkurve zugeordnet.

BEISPIEL

9.15. Gegeben ist die Sinuskurve mit der Gleichung $y = \sin x$. Eine Abbildung hat die Gleichungen

$$\bar{x} = x + \frac{\pi}{3} \qquad \bar{y} = y \tag{III}$$

Gesucht wird die Bildkurve.

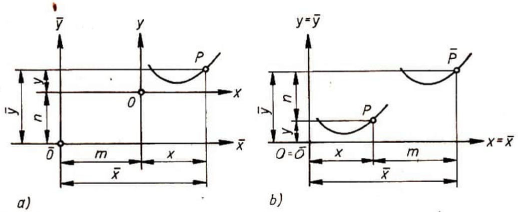


Bild 9.15

Lösung: Die Gleichungen (III) werden nach x bzw. y umgestellt:

$$x = \bar{x} - \frac{\pi}{3} \qquad y = \bar{y}$$

und in die Kurvengleichung eingesetzt:

$$\underline{\underline{\bar{y} = \sin\left(\bar{x} - \frac{\pi}{3}\right).}}$$

Die Abbildung bewirkt, wie Bild 9.16 zeigt, eine Verschiebung der Sinuskurve um $\pi/3$ in Richtung der x-Achse (vgl. 3.1.4.).

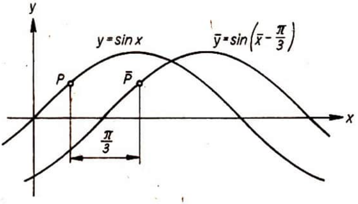


Bild 9.16

Satz

Wird auf die Punkte einer Kurve mit der Gleichung $F(x; y) = 0$ die Abbildung mit den Gleichungen

$$\bar{x} = x + m$$
$$\bar{y} = y + n$$

angewendet, so werden alle Kurvenpunkte um m in Richtung der x-Achse und um n in Richtung der y-Achse verschoben. Die Gleichung der Bildkurve lautet

$$F(\bar{x} - m; \bar{y} - n) = 0.$$

9.6.2. Die Streckung und die Stauchung

Unter Verwendung der 2. Deutung ($K = \bar{K}$) werden die Abbildungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x \\ \bar{y} &= \mu y \end{aligned}} \qquad (9.10)$$

betrachtet. Die erste Gleichung bedeutet, daß die Abszisse jedes Punktes der Ebene für $\lambda > 1$ auf das λ-fache vergrößert und für $\lambda < 1$ auf das λ-fache verkleinert wird. Es liegt also eine **Streckung** bzw. **Stauchung** in Richtung der x-Achse vor. Entsprechend bewirkt die zweite Gleichung für $\mu \gtrless 1$ eine Streckung bzw. Stauchung in Richtung der y-Achse.

BEISPIELE

9.16. Gegeben sind die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ und die Abbildungsgleichungen

$$\bar{x} = 2x \qquad \bar{y} = y.$$

Gesucht wird die Bildkurve.

Lösung: Die Abbildungsgleichungen sind nach x bzw. y aufzulösen und in die Parabelgleichung einzusetzen:

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{2}\,\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\bar{x}^2.$$

Die zugehörige Parabel als Bildkurve entsteht wegen $\lambda = 2$ durch eine Streckung der Abszissen aller Kurvenpunkte auf das Doppelte (Bild 9.17).

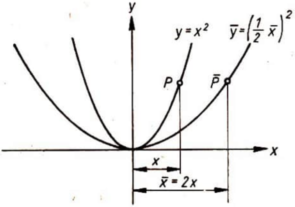


Bild 9.17

9.17. Gesucht wird die Bildkurve der Kosinuskurve: $y = \cos x$ bezüglich der Abbildung

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\,x \qquad \bar{y} = 2y.$$

Lösung: Mit $x = 3\bar{x}$, $y = \dfrac{1}{2}\,\bar{y}$ ergibt sich für die Gleichung der Bildkurve:

$$\bar{y} = 2\cos 3\bar{x}.$$

Mit $\lambda = \dfrac{1}{3}$ und $\mu = 2$ folgt die Bildkurve aus der Kosinuskurve durch Stauchen der Abszissen auf ein Drittel und Strecken der Ordinaten auf das Doppelte (Bild 9.18).

Satz

Wird auf die Punkte einer Kurve mit der Gleichung $F(x; y) = 0$ die Abbildung

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \lambda x\\ \bar{y} &= \mu y\end{aligned} \quad \text{mit} \quad \lambda > 0,\ \mu > 0$$

angewendet, so werden die $\begin{Bmatrix}\text{Abszissen}\\ \text{Ordinaten}\end{Bmatrix}$ aller Kurvenpunkte auf das $\begin{Bmatrix}\lambda\text{-fache}\\ \mu\text{-fache}\end{Bmatrix}$ gestreckt bzw. gestaucht, je nachdem, ob $\begin{Bmatrix}\lambda \gtrless 1\\ \mu \gtrless 1\end{Bmatrix}$ ist. Die Gleichung der Bildkurve lautet $F\left(\dfrac{1}{\lambda}\,\bar{x}; \dfrac{1}{\mu}\,\bar{y}\right) = 0.$

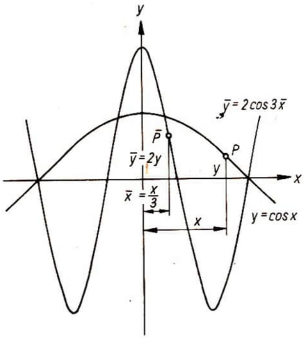


Bild 9.18

9.6.3. Die Spiegelung

Es werden die Abbildungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{x} &= -x\\ \bar{y} &= y\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\bar{x} &= x\\ \bar{y} &= -y\end{aligned}} \qquad (9.11\text{a}) \quad (9.11\text{b})$$

betrachtet. Die durch (9.11a) beschriebene Abbildung bewirkt eine **Spiegelung** aller Kurvenpunkte an der y-Achse (Bild 9.19a). Die Abbildungsgleichungen (9.11b) beschreiben eine Spiegelung an der x-Achse (Bild 9.19b).

BEISPIELE

9.18. Eine Parabel hat die Gleichung $y = (x - 3)^2 + 2$. Welche Gleichung hat das Bild der Parabel nach der Spiegelung: $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = y$?

Lösung: Mit $x = -\bar{x}$, $y = \bar{y}$ folgt aus der Parabelgleichung:

$$\bar{y} = (-\bar{x} - 3)^2 + 2$$

$$\underline{\underline{\bar{y} = (\bar{x} + 3)^2 + 2.}}$$

Die Parabel wurde an der y-Achse gespiegelt (Bild 9.20).

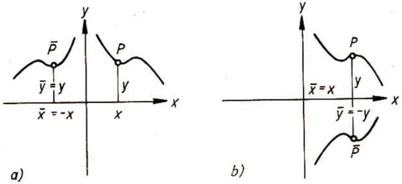


Bild 9.19

9.19. Welches Bild hat die Gerade g: $y = \frac{1}{2}x - 1$ nach der Abbildung $\bar{x} = x$, $\bar{y} = -y$?

Lösung: Mit $x = \bar{x}$, $y = -\bar{y}$ folgt aus der Geradengleichung

$$-\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} - 1 \quad \text{bzw.}$$

$$\underline{\underline{\bar{y} = -\frac{1}{2}\bar{x} + 1.}}$$

Die Gerade und ihr Bild liegen symmetrisch zur x-Achse (Bild 9.21).

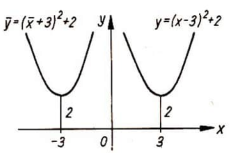


Bild 9.20

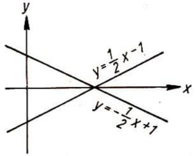


Bild 9.21

Satz

Wird auf die Punkte einer Kurve mit der Gleichung $F(x; y) = 0$ die Abbildung

$$\bar{x} = -x \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{x} = x$$
$$\bar{y} = y \qquad\qquad\qquad \bar{y} = -y$$

angewendet, so werden alle Kurvenpunkte an der y- bzw. x-Achse gespiegelt. Die Gleichung der Bildkurve lautet $F(-\bar{x}; \bar{y}) = 0$ bzw. $F(\bar{x}; -\bar{y}) = 0$.

Anmerkung: In der Gleichung der Bildkurve können die Querstriche wieder weggelassen werden.

Zusammenfassung

In der Kurvengleichung $F(x; y) = 0$

wird x bzw. y ersetzt durch:	Für alle Kurvenpunkte folgt dann:
$x - m$	Verschiebung um m in Richtung der x-Achse
$y - n$	Verschiebung um n in Richtung der y-Achse
$\frac{1}{\lambda}x$ $0 < \lambda < 1$	Stauchung der Abszissen auf das λ-fache
$\frac{1}{\lambda}x$ $1 < \lambda < \infty$	Dehnung der Abszissen auf das λ-fache
$\frac{1}{\mu}y$ $0 < \mu < 1$	Stauchung der Ordinaten auf das μ-fache
$\frac{1}{\mu}y$ $1 < \mu < \infty$	Dehnung der Ordinaten auf das μ-fache
$-x$	Spiegelung an der y-Achse
$-y$	Spiegelung an der x-Achse

Kontrollfragen

9.13. Welche zwei unterschiedlichen Interpretationen lassen die Gleichungen $\bar{x} = x + m$, $\bar{y} = y + n$ mit $\bar{x}, \bar{y}, x, y$ als Koordinaten und m, n als Konstanten zu?

9.14. Wie ändert sich die Lage einer Kurve im Koordinatensystem bzw. die Form einer Kurve, wenn in der Kurvengleichung die Koordinaten mit Konstanten multipliziert werden? Welche Fälle sind je nach Vorzeichen und Größe der Konstanten zu unterscheiden?

Aufgaben: 9.17. und 9.18.

9.7. Aufgaben

9.1. Welche der folgenden Abbildungen mit dem Urbildbereich X und dem Bildbereich Y sind eindeutig bzw. eineindeutig?

a) X: Menge der Studenten einer Schule.
Y: Menge der Seminargruppen der Schule
Jedem Studenten wird die Seminargruppe zugeordnet, der er angehört.

b) $X = \{1; 2; 3; 4\}$, $Y = \{y \mid y = x^2\}$

c) X: Menge der Pkw eines Landes
Y: Menge der Pkw-Kennzeichen in diesem Land

d) $X = \{x \mid x \in P\}$, $Y = \{y \mid y = \sin x\}$

e) X: Menge der reellen Zahlen, aufgefaßt als Zahlenwerte von Dreiecksflächen
Y: Menge aller Dreiecke

9.2. Die folgenden Abbildungen sind durch Graphen darzustellen. Welche Abbildungen sind eindeutig bzw. eineindeutig?

a) $F = \{(a; k); (b; l); (b; m); (c; l); (c; n); (d; n)\}$

b) $F = \{(a; 1); (b; 2); (c; 3); (d; 4)\}$

c) $F = \{(x_1; y_1); (x_1; y_3); (x_2; y_2); (x_2; y_4)\}$

d) $F = \{(s; x); (t; x); (u; x)\}$

9.3. Es sind die Umkehrabbildungen F^{-1} der in Aufgabe 9.2. gegebenen Abbildungen als Graphen und als Mengen von Wertepaaren darzustellen. Welche Umkehrabbildungen sind eindeutig?

9.4. Gesucht werden die Länge, der Anstiegswinkel und der Mittelpunkt für die durch folgende Punkte gegebene Strecke.

a) $A(3; 7)$, $B(8; 1)$ b) $P_1(-2,5; 3,1)$, $P_2(-5,7; -1,3)$

c) $R(-4,54; -2,18)$, $Q(2,40; -2,18)$

d) $M(5,63; 0)$, $N(12,80; 6,17)$

9.5. Gesucht wird ein Punkt P, der auf der x-Achse liegt und von dem Punkt $A(-4; 8)$ den Abstand 17 hat.

9.6. Welcher Punkt P hat von $A(-4; 2)$ den Abstand 13 und von $B(15; -17)$ den Abstand 25?

9.7. Die Kurven

$$k_1 = \{P(x; y) \mid y = 2x - 4\}$$

$$k_2 = \{P(x; y) \mid x^2 + 6y - 9 = 0\}$$

$$k_3 = \begin{cases} \{P(x; y) \mid x^2y - 6 = 0\} \text{ für } X = (0; \infty) \\ \{P(x; y) \mid x^2y + 6 = 0\} \text{ für } X = (-\infty; 0) \end{cases}$$

$$k_4 = \left\{ P(x; y) \mid y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2} \right\}$$

sind unter Verwendung einer Wertetabelle zu zeichnen.

9.8. Welche von den Punkten $P_1(0; 5)$, $P_2(4; 3)$, $P_3(0; -2)$, $P_4\left(3; \frac{1}{2}\right)$ liegen auf den Kurven

$k_1 = \left\{P(x; y) \mid y = \frac{5}{1 + x^2}\right\}$

$k_2 = \{P(x; y) \mid 5x^2 - 16y - 32 = 0\}$

$k_3 = \{P(x; y) \mid x^2 + y^2 - 25 = 0\}$

$k_4 = \{P(x; y) \mid 5x - 6y - 12 = 0\}$?

9.9. Gegeben sind zwei Kurvengleichungen. In welchen Punkten schneiden sich die zugehörigen Kurven:

a) $x - y + 7 = 0$, $3x + y + 13 = 0$,

b) $x^2 - 9x - y + 18 = 0$, $x + y - 6 = 0$,

c) $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$?

9.10. Wo schneiden die Kurven mit den Gleichungen

a) $y = 2x - 6$, b) $9x^2 + 25y^2 - 900 = 0$, c) $y = x^2 - 5x + 4$,

d) $x^2 - 4x - 4y + 28 = 0$ die x-Achse?

9.11. Wo schneiden die Kurven mit den Gleichungen

a) $5x + y - 3 = 0$, b) $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$, c) $x^2y + y - 1 = 0$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

die y-Achse?

9.12. Gesucht wird die Gleichung der Geraden, die durch einen Punkt P hindurchgeht und den Anstiegswinkel α besitzt.

a) $P(-4; 1)$, $\alpha = 60°$ b) $P(2{,}4; -1{,}5)$, $\alpha = 124°$

c) $P(5{,}6; 0{,}8)$, $\alpha = 0°$ d) $P(-7{,}21; 2{,}19)$, $\alpha = 135°$

e) $P(3{,}48; 5{,}72)$, $\alpha = 90°$

9.13. Es ist die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Punkte P_1 und P_2 zu bestimmen.

a) $P_1(-2; 4)$, $P_2(6; -1)$ b) $P_1(1{,}2; 5{,}4)$, $P_2(-4{,}8; 2{,}1)$

c) $P_1(6{,}4; 2{,}8)$, $P_2(9{,}6; 4{,}2)$ d) $P_1(1{,}7; 9{,}3)$, $P_2(1{,}7; 6{,}4)$

9.14. Wie heißen die Gleichungen der in Bild 9.22 gezeichneten Geraden?

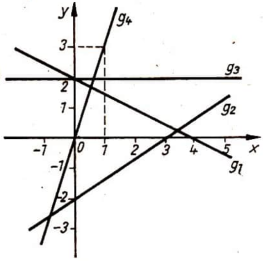


Bild 9.22

9.15. Gesucht werden die Schnittpunkte und Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2:

a) g_1: $y = x - 6$ g_2: $y = -3x + 10$ b) g_1: $y = 4x - 3{,}6$ g_2: $y = -0{,}25x + 6{,}1$

c) g_1: $y = \frac{3}{4}x + 2$ g_2: $y = \frac{3}{4}x - 5$ d) g_1: $y = \frac{4}{5}x + 3{,}2$ g_2: $y = -\frac{1}{9}x + 3{,}2$

9.16. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch $P(4{,}8;\,12)$ geht und a) parallel, b) senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $2{,}4x - 7{,}2y + 10 = 0$ verläuft?

9.17. Gegeben sind eine Kurve und eine Abbildung durch ihre Gleichungen. Gesucht wird die Gleichung der Bildkurve. Die Kurve und ihre Bildkurve sind zu skizzieren, die Abbildung ist geometrisch zu deuten.

a) $y = \frac{3}{2}x - 3$; $\quad \bar{x} = x,\ \bar{y} = \frac{1}{3}y$

b) $y = x^2$; $\quad \bar{x} = x + 3,\ \bar{y} = -y$

c) $y = \frac{1}{x}$; $\quad \bar{x} = -x,\ \bar{y} = 3y$

d) $y = \sin x$; $\quad \bar{x} = 2x - \pi,\ \bar{y} = \frac{2}{3}y$

9.18. Durch welche Abbildung ergibt sich die Parabel mit der Gleichung

a) $\bar{y} = (\bar{x} + 2)^2 - 8$ b) $\bar{y} = 4\bar{x}^2 - 1$ c) $\bar{y} = \frac{1}{2}(\bar{x} + 4)^2$

aus der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$?

9.19. Es seien A die Menge der Gäste in einem Hotel und B die Menge der Zimmer in diesem Hotel. Jedem Gast ist das Zimmer zugeordnet, das er bewohnt. Wann ist diese Abbildung $A \to B$ a) eindeutig b) eineindeutig?

9.20. Welche Eigenschaft haben die folgende Abbildung $A \to B$ und ihre Umkehrabbildung für folgende Mengen:

a) A: Menge aller Strecken $\overline{AB}$ (Bild 9.23, A fest, $B \in g$ variabel)
B: Menge aller positiven reellen Zahlen
Zuordnung: Jeder Strecke ist die Maßzahl ihrer Länge zugeordnet.

b) A: Menge aller Quadrate $ABCD$ [Bild 9.23, A, B wie in a)]
B: Menge aller positiven reellen Zahlen
Zuordnung: Jedem Quadrat ist die Maßzahl seiner Fläche zugeordnet.

c) A: Menge aller Rechtecke $ABCD$
B: Menge aller positiven reellen Zahlen
Zuordnung: Jedem Rechteck ist die Maßzahl seiner Fläche zugeordnet.

d) A: Menge der Etagen eines Hauses
B: Menge der Zimmer des Hauses
Zuordnung: Jeder Etage sind die Zimmer zugeordnet, die zu dieser Etage gehören.

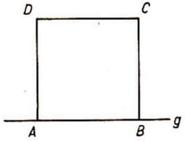


Bild 9.23

9.21. Gesucht werden die Länge und der Anstiegswinkel der durch folgende Punkte gegebenen Strecken:

a) $A(4{,}18; 9{,}24)$, $B(17{,}03; -2{,}49)$

b) $E(-2{,}8; -5{,}1)$, $F(-2{,}8; 11{,}4)$

c) $P(126{,}40; 51{,}78)$, $Q(0; 51{,}14)$

d) $M(63{,}17; 41{,}05)$, $N(-12{,}28; 4{,}13)$

9.22. Welcher Punkt P hat von den Punkten $A(7{,}1; 2{,}8)$, $B(-1{,}4; 2{,}3)$, $C(3{,}6; -1{,}9)$ den gleichen Abstand?

9.23. Gegeben sind zwei Kurven durch ihre Gleichungen. In welchen Punkten schneiden sich beide Kurven?

a) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
$x^2 - 3y = 0$

b) $5x^2 - 4y^2 = 20$
$(x - 2)^2 + y^2 = 1$

c) $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 3 = 0$
$5x - 6y + 44 = 0$

d) $y = x^2 - 6x + 11$
$y = -x + 1$

9.24. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(-2; -3)$, $B(10; 2)$, $C(-1; 6)$. Gesucht werden

a) die Längen der Dreieckseiten,

b) die Gleichungen der Geraden, auf denen die Dreieckseiten liegen,

c) die Gleichungen der Höhen des Dreiecks,

d) der Schnittpunkt der Höhen,

e) die Gleichungen der Seitenhalbierenden,

f) der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden,

g) die Innenwinkel.

9.25. Durch welche Abbildung ergibt sich die Kurve mit der Gleichung

a) $\bar{y} = 4 \sin 3\bar{x}$

b) $\bar{y} = \sin\left(0{,}5\bar{x} - \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $\bar{y} = a \sin(\omega\bar{x} + \varphi)$

aus der Sinuskurve: $y = \sin x$?

10. Funktionen

10.1. Der Funktionsbegriff

Funktionen sind für Ökonomie, Naturwissenschaft und Technik zur Darstellung von Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten unentbehrlich. In diesem Abschnitt werden vorhandene Kenntnisse zusammengefaßt und erweitert. Dabei wird eine systematische Übersicht über elementare Funktionen und ihre wesentlichen Eigenschaften gegeben. Wird zu verschiedenen Tageszeiten die Lufttemperatur gemessen, so ist jeder gewählten Tageszeit genau eine Temperatur zugeordnet. Jede Menge einer Ware ist mit einem Preis ausgezeichnet. Die Bewegung eines Körpers wird beschrieben, indem jeder Zeit der in dieser Zeit zurückgelegte Weg zugeordnet wird. Den genannten Beispielen ist gemeinsam, daß den Elementen einer Menge jeweils genau ein Element einer anderen Menge zugeordnet ist. Solche eindeutigen Abbildungen (vgl. auch 9.1.) treten in der Praxis vielfach bei der Beschreibung von Vorgängen oder Zuständen auf. Sie werden als Funktionen bezeichnet und so durch einen eigenen Namen unter den Abbildungen hervorgehoben.

Definition

Ist jedem Element x einer Menge X genau ein Element y einer Menge Y zugeordnet, so heißt die Menge f der geordneten Paare $(x; y)$ eine **Funktion.**

Die Menge X heißt **Definitionsbereich,** die Menge Y **Wertebereich** oder **Wertevorrat** der Funktion f. Das Element x wird **unabhängige Variable, Argument** oder Urbild von f genannt; das zugeordnete Element y heißt **abhängige Variable, Funktionswert** oder Bild von f an der Stelle x. Funktionen, deren Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen sind, werden kurz als **reelle Funktionen** bezeichnet. Im Rahmen der Analysis sollen ausschließlich reelle Funktionen betrachtet werden.
Sind verschiedene Funktionen zu unterscheiden, so stehen an Stelle von f auch andere Bezeichnungen wie $g, h, \varphi, \psi, f_1, f_2, \ldots$ Fest gewählte Argumente erhalten Bezeichnungen wie $a, b, \ldots, a_0, a_1, a_2, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots$ Für den Funktionswert y wird oft $f(x)$ — lies: f von x — geschrieben. Diese Schreibweise erfaßt das Wesen des Funktionsbegriffes, nämlich die Zuordnung des Funktionswertes $f(x)$ zu dem Argument x. Die Schreibweisen $f(0), f(a), f(x_1), y(0), y(a), y_2, \ldots$ geben den Funktionswert von f an einer bestimmten Stelle an.

10.2. Die Darstellung reeller Funktionen

Eine Funktion f ist gegeben, wenn jedes ihrer Elemente $(x; y)$ angegeben oder angebbar ist. Bei einer konkreten Funktion bedient man sich dazu verschiedener Darstellungsarten. Üblich und geeignet sind

die Darstellung durch eine Wertetabelle,
die grafische Darstellung,
die Darstellung durch eine Funktionsgleichung.

Gelegentlich werden auch andere Darstellungsarten benutzt. Aus der Darstellung einer Funktion muß eindeutig hervorgehen, welche Paare $(x; y)$ zur Funktion f gehören.

Die Wertetabelle

Jedem Element der Menge $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ sei als Funktionswert die Hälfte seines Wertes zugeordnet. Damit ist die Menge der Wertepaare

$$f = \{(0; 0); (1; 0{,}5); (2; 1); (3; 1{,}5); (4; 2); (5; 2{,}5)\}$$

gegeben. Diese Menge wird übersichtlicher in Form einer Wertetabelle geschrieben:

f:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5

In der Praxis wird die Wertetabelle u. a. zur Wiedergabe der Ergebnisse von Meßreihen und Beobachtungen verwendet. Hat der Definitionsbereich unendlich viele Elemente, so kann nur eine Auswahl von Wertepaaren angegeben werden. Bekannte Beispiele dafür sind Quadrat- und Wurzeltafeln, Tafeln der logarithmischen, der trigonometrischen und der Exponentialfunktionen.

Die grafische Darstellung

Da jedem Zahlenpaar $(x; y)$ ein Punkt im cartesischen Koordinatensystem zugeordnet ist, läßt sich jede Funktion grafisch darstellen. Bild 10.1 zeigt die grafische Darstellung der oben durch eine Wertetabelle gegebenen Funktion f. Ist der Definitionsbereich ein Intervall der reellen Zahlen, so bildet die Menge aller Punkte eine Kurve. Diese grafische Darstellung der Funktion heißt Graph (auch Kurve) der Funktion.

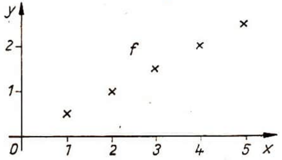


Bild 10.1

Die grafische Darstellung gibt eine anschauliche Vorstellung vom Funktionsbegriff. Die Zuordnung $x \to y$ ist für jeden Wert x des dargestellten Definitionsbereichs ablesbar (Bild 10.2). Auch die Änderung des Funktionswertes bei Änderung des Argumentes findet in der grafischen Darstellung ihre Widerspiegelung. Bild 10.3 zeigt das Abklingen der Spannung beim Entladen eines Kondensators, Bild 10.4 das Pulsieren der Stromstärke bei einem Wechselstrom.
In der Praxis finden vielfach Geräte Verwendung, die eine sich ändernde Größe, wie Druck, Temperatur, Spannung, Strom, in Abhängigkeit von der Zeit als Kurvenzug aufzeichnen. Bekannte Geräte sind Barograph, Elektrokardiograph und Oszillograph. Die von solchen Geräten aufgezeichneten Kurven stellen Funktionen dar. Der Definitionsbereich ist das Zeitintervall der Messung, der Wertebereich die in diesem Zeitintervall aufgezeichnete Menge der Meßwerte der gemessenen Größe.
Nicht jede Kurve kann als Graph einer Funktion aufgefaßt werden. Wegen der in der Definition geforderten Eindeutigkeit ist eine Kurve nur dann Darstellung einer Funktion, wenn jede Parallele zur y-Achse mit der Kurve höchstens einen Punkt gemeinsam hat. So ist mit den Kurvenstücken in Bild 10.5 eine Funktion f dargestellt, während die Kurve in Bild 10.6 nicht Graph einer Funktion ist, da im Intervall $[0{,}4; 2{,}2]$ keine eindeutige Zuordnung $x \to y$ vorliegt.
Mitunter ist es notwendig, auf x- und y-Achse unterschiedliche Einheitsstrecken festzulegen. Die Kurve der Funktion erscheint dann verzerrt. Bild 10.7 zeigt dieselbe Funktion wie Bild 10.8, aber bei unterschiedlichen Einheitsstrecken auf x- und y-Achse.

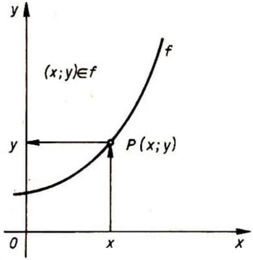


Bild 10.2

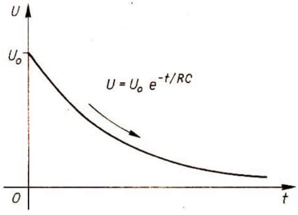


Bild 10.3

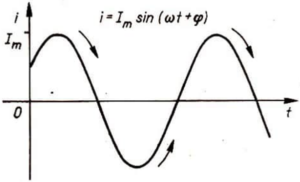


Bild 10.4

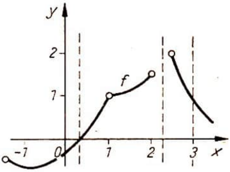


Bild 10.5

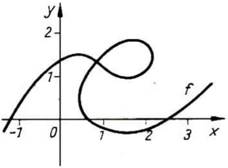


Bild 10.6

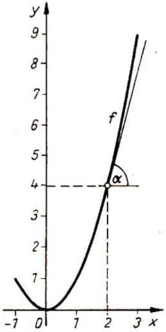


Bild 10.7

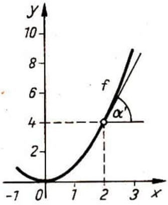


Bild 10.8

Zu beachten ist, daß bei verschiedenen Einheitsstrecken auf den Koordinatenachsen Winkel nicht mehr der Zeichnung entnommen werden können.
Bei der grafischen Darstellung von Zuordnungen zwischen Größen, wie sie in Naturwissenschaft und Technik auftreten, ist zu beachten, daß im Koordinatensystem nur Zahlenwerte verwendet werden. Die Koordinatenachsen werden deshalb mit dem Quotienten Größe/Maßeinheit gekennzeichnet.

BEISPIEL

10.1. Das Weg-Zeit-Gesetz der verzögerten Bewegung

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

soll für $v_0 = 9{,}6$ m/s, $a = 1{,}8$ m/s² im Intervall $0 \leqq t \leqq 5$ s grafisch dargestellt werden. Als Einheitsstrecken sind $e_x = 8$ mm, $e_y = 2$ mm zu wählen.

Lösung: Aus

$$s = 9{,}6 \text{ m/s}\, t - 0{,}9 \text{ m/s}^2\, t^2$$

folgt nach Division durch die Einheit m die zugeschnittene Größengleichung

$$\frac{s}{\text{m}} = 9{,}6 \frac{t}{\text{s}} - 0{,}9 \left(\frac{t}{\text{s}}\right)^2.$$

Wird für die Maßzahlen der in Sekunden bzw. Meter gemessenen Größen $t/_s = x$ bzw. $s/_m = y$ geschrieben, so ergibt sich als Beziehung zwischen den Maßzahlen die Funktionsgleichung

$$y = 9{,}6x - 0{,}9x^2.$$

Diese Funktion wird wie üblich im Koordinatensystem mit $e_x = 8$ mm, $e_y = 2$ mm dargestellt. Die Koordinatenachsen werden mit $t/_s$ bzw. $s/_m$ bezeichnet (vgl. Bild 10.9). In dieser Darstellung ist t im Maßstab $m_t = 8$ mm/s, s im Maßstab $m_s = 2$ mm/m gezeichnet. Das bedeutet: 1 s wird durch die Strecke 8 mm, 1 m durch die Strecke 2 mm dargestellt.

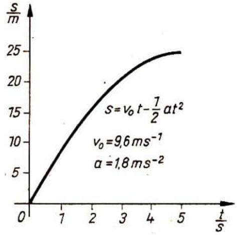


Bild 10.9

Die Darstellung durch eine Funktionsgleichung

Eine Gleichung $y = f(x)$ oder $F(x; y) = 0$ mit $x \in X$ und $y \in Y$ definiert eine Menge von Wertepaaren

$$f = \{(x; y) \mid y = f(x) \land x \in X, \ \ y \in Y\}.$$

Ist die durch die Gleichung getroffene Zuordnung $x \to y$ eindeutig, so heißt die gegebene Gleichung **Funktionsgleichung**, im Zusammenhang mit der grafischen Darstellung auch **Kurvengleichung** (vgl. 9.4.).
Wird die gegebene Gleichung durch kein reelles Zahlenpaar erfüllt, so ist f die leere Menge, z. B.

$$f = \left\{(x; y) \mid y = \sqrt{-1 - x^2} \land x \in P, y \in P\right\}.$$

Zumeist werden vereinfachte Schreib- und Sprechweisen verwendet, wie „die Funktion $f: y = f(x)$" oder „die Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$". Wird noch kürzer in der Form „die Funktion $y = f(x)$" formuliert, so muß Klarheit darüber bestehen, daß $y = f(x)$ nicht die Funktion, sondern ihre Gleichung ist.
Werden Definitions- und Wertebereich nicht angegeben, dann sind die jeweils größtmöglichen Bereiche zugelassen.

BEISPIELE

10.2. Für $y = \sqrt{x - 2}$ ergeben sich aus $x - 2 \geqq 0$ Definitionsbereich und Wertebereich:

$$\underline{\underline{X = [2; \infty)}}, \qquad \underline{\underline{Y = [0; \infty)}}.$$

10.3. $y = \ln(1 - x^2)$. Im Reellen ist der Logarithmus nur für positiven Numerus definiert Aus

$$1 - x^2 > 0 \quad \text{folgt} \quad |x| < 1, \quad \text{also } x \in (-1; 1).$$

Damit ergibt sich für den Numerus der Bereich

$$0 < 1 - x^2 < 1.$$

Definitions- und Wertebereich lauten deshalb

$$\underline{\underline{X = (-1; 1)}}, \qquad \underline{\underline{Y = (-\infty; 0]}}.$$

Bei vielen Funktionen tritt jede reelle Zahl als Funktionswert auf. Beispiele sind

$$f\colon\; y = x, \quad x \in P \quad \text{und} \quad f\colon\; y = x^3, \quad x \in P.$$

Alle Funktionen, deren Wertevorrat die reellen Zahlen umfaßt, für die also $Y = P$ gilt, heißen **unbeschränkt**.
Funktionen, deren Wertevorrat nach einer oder nach beiden Seiten begrenzt ist, heißen **beschränkt**. So ist die Funktion $y = f(x) = x^2$ mit $Y = [0; \infty)$ nach unten beschränkt und hat $y = 0$ als untere **Schranke** (Bild 10.7).
Die Funktion $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist nach oben und unten beschränkt. Sie hat die untere Schranke $y = 0$ und erreicht für $x = 0$ ihre obere Schranke $y = r$ (vgl. Bild 9.4). Die obere (untere) Schranke braucht nicht zum Wertevorrat zu gehören. So hat die Funktion $y = f(x) = 2^x$ keinen negativen Funktionswert und nimmt nirgends den Wert 0 an, denn jede Potenz mit positiver Basis ist positiv. Jedoch kann der Funktionswert beliebig kleine positive Werte annehmen. So ist $2^{-10} = 1/1024 \approx 0{,}001$, $2^{-20} \approx 0{,}000001$ (vgl. Bild 10.39). Der Wert $y = 0$ wird in einem solchen Fall als größte untere Schranke der Funktion bezeichnet. Der Wertevorrat der Funktion ist demnach $Y = (0; \infty)$.
Bei Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik sind Definitionsbereich und Wertevorrat meist durch die in der Praxis gegebenen Bedingungen eingeschränkt.
So ist beim Gasgesetz von Boyle-Mariotte dem Druck p ein Volumen V nach der Gleichung $pV = c$ zugeordnet. Diese Gleichung ist nur sinnvoll für $p > 0$, $V > 0$. Nach oben ist p dadurch eingeschränkt, daß das Gesetz nur für sogenannte ideale Gase streng gilt.
Die Darstellung durch eine Funktionsgleichung wird häufig als **analytische Darstellung** der Funktion bezeichnet. Die in einer Funktionsgleichung auftretenden festen Größen werden, im Unterschied zu den einander zugeordneten Größen, **Konstanten** genannt.

Kontrollfragen

10.1. Wie ist eine Funktion definiert?

10.2. Wie zeigt sich die Eindeutigkeit einer Funktion an ihrem Graph?

10.3. Wodurch kann der Definitionsbereich einer durch eine Gleichung gegebenen Funktion eingeschränkt sein?

Aufgaben: 10.1. bis 10.5.

10.3. Die Umkehrfunktion

Der wesentliche Inhalt des Funktionsbegriffes ist die eindeutige Zuordnung bestimmter Objekte zu bestimmten anderen Objekten, wobei es auf die Richtung der Zuordnung ankommt. Wird die Zuordnung umgekehrt, so entsteht eine Abbildung, die, wenn sie eindeutig ist, wieder eine Funktion darstellt.

BEISPIEL

10.4. Bei einem Quadrat ist jeder Seite a genau ein Flächeninhalt A zugeordnet. Mit dieser Zuordnung ist eine Menge von Wertepaaren

$$f = \{(a; A) \mid A = a^2 \wedge a \geqq 0, A \geqq 0\}$$

gegeben.
Die Fragestellung nach der Quadratseite bei gegebener Quadratfläche kehrt die Zuordnung um. Die Zuordnung $A \to a$ ergibt die Umkehrabbildung

$$g = \{(A; a) \mid a = \sqrt{A} \wedge A \geqq 0, a \geqq 0\}$$

(vgl. 9.1.).
Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung ist g eine Funktion. Sie wird, da sie aus f durch Umkehrung der Zuordnung entsteht, Umkehrfunktion von f genannt und mit f^{-1} bezeichnet.

Definition

Ist die aus einer Funktion f durch Umkehrung der Zuordnung hervorgehende Umkehrabbildung eindeutig, so heißt sie die **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** f^{-1} von f.

Nicht immer bleibt bei Umkehrung der Zuordnung die Eindeutigkeit erhalten. Ein einfaches Beispiel zeigt Bild 10.10. Hier ist die Umkehrung eine Abbildung und keine Funktion, weil dem Element y_1 zwei Werte zugeordnet sind, nämlich $f^{-1}(y_1) = x_1$ und $f^{-1}(y_1) = x_2$.

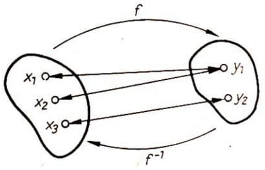


Bild 10.10

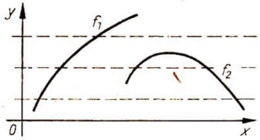


Bild 10.11

Die Umkehrung einer Funktion ist eindeutig, wenn zu verschiedenen Argumenten stets auch verschiedene Funktionswerte gehören. Der Graph der Funktion hat dann mit jeder Parallelen zur x-Achse höchstens einen Punkt gemeinsam. Funktionen mit eindeutiger Umkehrung heißen **eineindeutig**. Die in Bild 10.11 dargestellte Funktion f_2 ist nicht eineindeutig.

Satz

Eine Funktion f hat genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie eineindeutig ist.

Eine wichtige Klasse von eineindeutigen Funktionen ist die der **monotonen Funktionen**.

Definition

Eine Funktion f heißt im Intervall $I \subseteq X$ **monoton wachsend**, wenn für jedes Argumentepaar $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Sie heißt **monoton fallend**, wenn mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Funktionen, für die $f(x_1) \leqq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geqq f(x_2)$ gilt, heißen nicht-fallend bzw. nicht-wachsend. Gilt das Gleichheitszeichen nicht, so wird die Funktion eigentlich monoton genannt.
Die Funktionswerte einer eigentlich monotonen Funktion nehmen mit wachsendem Argument nur zu oder nur ab. Bei einer eigentlich monotonen Funktion wiederholt sich also kein Funktionswert, d. h., sie ist eineindeutig. Es gilt der

Satz

Zu einer eigentlich monotonen Funktion existiert stets die Umkehrfunktion.

Bemerkung: Auch eine nicht monotone Funktion kann eineindeutig sein (vgl. Bild 10.12).

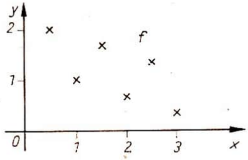


Bild 10.12

Ist $(a; b)$ Element der eineindeutigen Funktion f, so ist $(b; a)$ Element der Umkehrfunktion f^{-1}. Aus $(b; a) \in f^{-1}$ folgt wiederum $(a; b) \in f$.

Satz

Funktion und Umkehrfunktion sind zueinander invers.

Es entsprechen einander:

f $\longleftrightarrow$	f^{-1}
Argument	Funktionswert
Funktionswert	Argument
Definitionsbereich	Wertebereich
Wertebereich	Definitionsbereich

Der Zusammenhang zwischen Funktion und Umkehrfunktion wird auch durch folgende Darstellung deutlich:

$$a \in X \xrightarrow{(a;b)\in f} b = f(a)$$
$$a = f^{-1}(b) \xleftarrow[(b;a)\in f^{-1}]{} b \in Y.$$

Soll in üblicher Weise auch bei der Umkehrfunktion das Argument mit x, der Funktionswert mit y bezeichnet werden, so ist beim Übergang zur Umkehrfunktion die Bezeichnung der Variablen zu vertauschen. Anschließend ist die Funktionsgleichung nach y umzustellen:

Funktion f:	$y = f(x)$,	z. B. $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 1$,
Vertauschen der Bezeichnungsweise:	$x = f(y)$	$x = f(y) = \frac{1}{2}y - 1$,
Auflösen nach y:	$y = f^{-1}(x)$	$y = f^{-1}(x) = 2x + 2$.

Da im ersten Schritt nur x für y bzw. y für x geschrieben wird, bleibt der Term auf der rechten Gleichungsseite unverändert. Er erscheint nur in der neuen Schreibweise $f(y)$. Beim Auflösen nach y entsteht ein neuer Term, der in Anlehnung an die Umkehrfunktion f^{-1} mit $f^{-1}(x)$ bezeichnet wird. In der grafischen Darstellung geht bei der Umkehrung der Punkt $P(a; b)$ der Funktion f in den Punkt $P'(b; a)$ der Umkehrfunktion über. Im gleichgeteilten cartesischen Koordinatensystem liegen P und P' spiegelbildlich zur Geraden $y = x$. Das gilt für alle Punkte der grafischen Darstellung von f und f^{-1}. Bild 10.13 demonstriert das am bisher behandelten Beispiel.

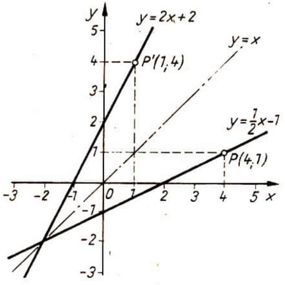


Bild 10.13

Satz

Die Kurven von Funktion und Umkehrfunktion liegen im gleichgeteilten cartesischen Koordinatensystem spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

Bei Funktionen, die nicht eineindeutig sind, führt die Umkehrung — wie schon erwähnt — auf mehrdeutige Abbildungen. Ein Beispiel ist die quadratische Funktion f: $y = x^2$, deren Umkehrung auf die zweideutige Abbildung f^{-1}: $y^2 = x$ führt. Da

$f: y = x^2$ in den Intervallen $x \geqq 0$ und $x \leqq 0$ jeweils eigentlich monoton ist, kann innerhalb dieser Intervalle die Umkehrfunktion gebildet werden. Zu den eineindeutigen Funktionen

$$f_1:\ y = x^2,\quad x \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad f_2:\ y = x^2,\quad x \leqq 0$$

gehören die Umkehrfunktionen

$$f_1^{-1}:\ y = \sqrt{x} \quad \text{bzw.} \quad f_2^{-1}:\ y = -\sqrt{x}$$

(vgl. Bild 10.14).

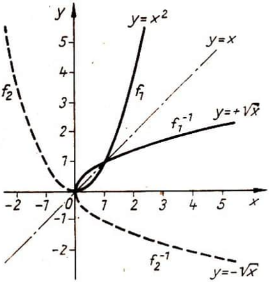


Bild 10.14

Jede Wertetabelle einer Funktion ist, wird sie umgekehrt gelesen, auch Wertetabelle ihrer Umkehrfunktion.

$$f: y = \frac{1}{2}x - 1 \downarrow \quad \begin{array}{c|cccccc|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & y \\ \hline y & -1{,}5 & -1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1 & x \end{array} \quad \uparrow f^{-1}: y = 2x + 2$$

Wegen dieses Zusammenhanges werden Funktionstafeln für Funktion und Umkehrfunktion benutzt. So ist die Quadrattafel auch als Quadratwurzeltafel verwendbar (vgl. Bild 10.15). Bei Taschenrechnern, die Funktionstasten haben, sind Umkehrfunktionen teilweise mit f^{-1} gekennzeichnet und gewöhnlich über eine Taste „INV" (invers) aufzurufen.

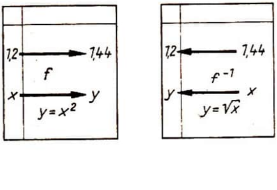


Bild 10.15

Kontrollfragen

10.4. Wie ist die Umkehrfunktion definiert?

10.5. Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen dem Graphen einer Funktion und dem ihrer Umkehrfunktion?

10.6. Was ist unter einer eineindeutigen Funktion zu verstehen?

Aufgaben: 10.6. und 10.7.

10.4. Algebraische Funktionen

10.4.1. Ganzrationale Funktionen

Alle durch eine Funktionsgleichung der Form

$$\boxed{y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \qquad (10.1)$$

darstellbaren Funktionen, wobei $n \geqq 0$ und ganzzahlig ist, heißen **ganzrationale Funktionen.** Für $a_n \neq 0$ heißt eine solche Funktion ganzrationale Funktion n-ten Grades.

BEISPIEL

10.5. a) $y = x^2 + 3$ b) $y = \dfrac{3x^2 - 5}{2} = 1{,}5x^2 - 2{,}5$

c) $y = \pi x^2 - x\sqrt{3} + 2$ d) $y = 2$

e) $y = (2x + 1)^2 (x^2 - 2x) = 4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 2x$

f) $y = \dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 + 2}$ Die Partialdivision führt auf den Term einer ganzrationalen Funktion: $y = x^2 - 1$.

Die einfachsten ganzrationalen Funktionen sind die **Potenzfunktionen** mit der Gleichung

$$y = ax^n, \qquad n \in N.$$

Wegen $x^0 = 1$ kann auch $y = ax^0 = a$ zu den Potenzfunktionen gezählt werden.

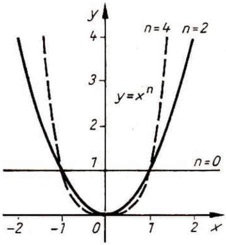


Bild 10.16

Die Kurven der Potenzfunktionen mit $n \geqq 2$ heißen Parabeln n-ten Grades, wobei die zu $y = x^2$ gehörige **Normalparabel** genannt wird. Für $a = 1$ sind im Bild 10.16 die Potenzfunktionen mit $n = 0; 2; 4$, im Bild 10.17 die mit $n = 1; 3; 5$ dargestellt.
Es fällt auf, daß die Kurven aller geraden Potenzfunktionen (das sind die Potenzfunktionen mit geradem Exponenten) achsensymmetrisch zur y-Achse liegen, während die Kurven aller ungeraden Potenzfunktionen zentralsymmetrische Kurven mit dem Koordinatenursprung als Symmetriezentrum sind. Auch die Kurven anderer Funktionen können die genannten Symmetrieeigenschaften aufweisen.

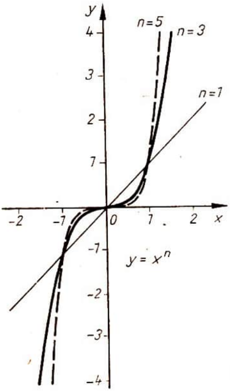


Bild 10.17

Definition

Eine Funktion, bei der für alle $x \in X$

$f(-x) = f(x)$	$f(x) = -f(-x)$

gilt, heißt

gerade Funktion	**ungerade** Funktion.

Die entsprechende Funktionskurve liegt

axialsymmetrisch zur y-Achse	zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Für $|f(-x)| \neq |f(x)|$ liegt keine derartige Symmetrie vor.

BEISPIELE

10.6. $y = f(x) = x^3 - 2x$ ist eine ungerade Funktion, denn es ist

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 2(-x) \\ &= -x^3 + 2x \\ &= -(x^3 - 2x). \end{aligned}$$

Somit gilt $f(-x) = -f(x)$.

10.7. $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ist wegen

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2}$$
$$= \sqrt{1 - x^2} = f(x)$$

eine gerade Funktion.

10.8. Die Funktion $y = f(x) = x^2 + x$ ist weder gerade noch ungerade. Es ist nämlich

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)$$
$$= x^2 - x.$$

Damit ist sowohl $f(-x) \neq f(x)$ als auch $f(-x) \neq -f(x)$.

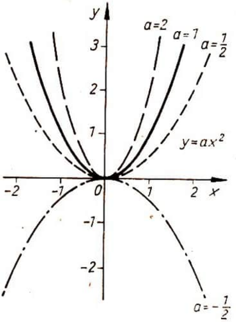


Bild 10.18

Auch bei Abbildungen sind Symmetrieverhältnisse der Kurven an den Gleichungen erkennbar. So liegt die Kurve von $y^2 = x$ achsensymmetrisch zur x-Achse, die Kurve von $y^3 = x$ zentralsymmetrisch zu O. Die Kurve von $x^2 + y^2 = r^2$ ist sowohl achsensymmetrisch zur y-Achse als auch achsensymmetrisch zur x-Achse (Bild 9.4).
Ist bei einer Potenzfunktion der konstante Faktor $a \neq 1$, so bleiben die Symmetrieeigenschaften erhalten. Eine Vorzeichenumkehr von a bewirkt eine Spiegelung an der x-Achse, da dann jeder Funktionswert $f(x)$ in den entgegengesetzten Wert $-f(x)$ übergeht. Für $|a| > 1$ sind die Kurven gegenüber der Normalform $(a = 1)$ in y-Richtung gestreckt, für $|a| < 1$ gestaucht. Dieser Zusammenhang ist in Bild 10.18 für die Potenzfunktion $y = ax^2$ dargestellt.
Der Graph einer Funktion mit der Gleichung

$$y = a(x - x_1)^n + y_1$$

geht aus dem von $y = ax^n$ durch Parallelverschiebung hervor (vgl. Zusammenfassung am Ende von 9.6.).

BEISPIEL

10.9. Der Graph von $y = -0{,}5\,(x-2)^3 + 1$ geht aus dem der gestauchten, an der x-Achse gespiegelten kubischen Parabel $y = -0{,}5x^3$ durch Verschiebung des Symmetriezentrums nach $S(2;\,1)$ hervor (Bild 10.19).

Die ganzrationale Funktion 1. Grades heißt **lineare Funktion.** Ihre Funktionsgleichung $y = a_1x + a_0$ wird gewöhnlich in der Form $y = mx + b$ geschrieben (vgl. Bild 9.11).
Die lineare Funktion findet vielfach zur Vereinfachung von Problemen Anwendung. So wird mitunter — in zulässigen Grenzen — eine kompliziertere Funktion durch eine lineare Funktion ersetzt und das vorliegende Problem linearisiert.

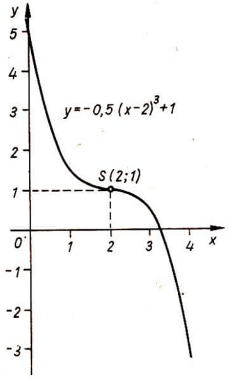


Bild 10.19

Ein Beispiel dafür ist die **lineare Interpolation.** In der Praxis besteht vielfach die Aufgabe, aus gegebenen Tafelwerten einer Funktion Zwischenwerte zu ermitteln. Der Graph einer solchen Funktion ist gewöhnlich eine gekrümmte Linie. Diese wird bei linearer Interpolation zwischen zwei durch die Tafelwerte gegebenen Punkten durch eine Strecke $\overline{P_1P_2}$ ersetzt (Bild 10.20). Nach dem Strahlensatz: $\dfrac{\Delta\bar{y}}{\Delta x} = \dfrac{k}{h}$ folgt der Näherungswert:

$$\bar{y} = y_1 + \Delta\bar{y} = y_1 + \frac{k}{h}\cdot\Delta x.$$

Der ermittelte Näherungswert $\bar{y}$ weicht um einen Betrag ε vom wahren Funktionswert ab. Das ist so lange zulässig, als ε keinen Einfluß auf die letzte in der Tafel berücksichtigte Dezimalstelle 10^{-q} hat. Die lineare Interpolation ist zulässig, wenn die Differenz zweier benachbarter Tafeldifferenzen nicht größer als acht Einheiten der letzten Stelle der aufgeführten Funktionswerte ist:

$$|k_2 - k_1| \leqq 8\cdot 10^{-q}.$$

Beim Herausgehen aus der Tafel wird ein Näherungswert $\bar{x}$ ermittelt. Nach dem Strahlensatz (Bild 10.21): $\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta y} = \frac{h}{k}$ folgt der Näherungswert: $\bar{x} = x_1 + \Delta\bar{x} = x_1 + \frac{h}{k} \cdot \Delta y$. Ist die Tafeldifferenz der Funktionswerte zu klein, dann wird $\Delta\bar{x}$ und damit $\bar{x}$ unsicher.

BEISPIELE

10.10. Aus nebenstehendem Ausschnitt einer Wurzeltafel ist durch lineare Interpolation $\sqrt{1,36}$ zu ermitteln.

x	$\sqrt{x}$	$k \cdot 10^4$	$(k_2 - k_1) \cdot 10^4$
1,2	1,0954		
		448	
1,3	1,1402		−18
		430	
1,4	1,1832		

Lösung: Da $|k_2 - k_1| = 18 \cdot 10^{-4} > 8 \cdot 10^{-4}$ ist, liefert die lineare Interpolation keinen bis in die 4. Dezimalstelle sicheren Wert. Wird verkürzt bis auf die 3. Dezimale gerechnet, dann ist $k_1 = 45 \cdot 10^{-3}$, $k_2 = 43 \cdot 10^{-3}$ und $|k_2 - k_1| = 2 \cdot 10^{-3} < 8 \cdot 10^{-3}$, die lineare Interpolation also zulässig. Es folgt

$$\bar{y} = 1,1402 + \frac{0,043}{0,1} \cdot 0,06 = 1,1660.$$

Die Interpolation liefert einen auf drei Dezimalstellen sicheren Näherungswert:

$$\sqrt{1,36} = \underline{\underline{1,166.}}$$

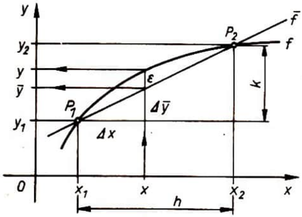


Bild 10.20

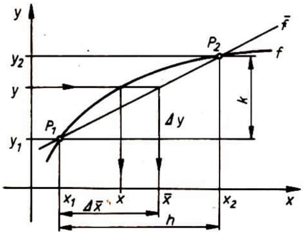


Bild 10.21

10.11. In einer vierstelligen Tafel der Sinusfunktion findet man

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863
⋮	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
87	0,9986	9987	9988	9989	9990	9990

Für $\sin\alpha = 0{,}9850$ liefert die Interpolation $\alpha = 80{,}07°$. Die letzte Dezimale ist aber unsicher. Ein genauerer Wert ist $\alpha = 80{,}064°$. Bei $\sin\alpha = 0{,}9990$ ist sogar die erste Dezimale von α unsicher, denn es gibt aus dem Zahlenwert 0,9990 allein keinen Anhaltspunkt, welcher von den Werten 87,4° und 87,5° vorzuziehen ist. Wird ein genaueres Ergebnis verlangt, müssen andere Hilfsmittel herangezogen oder ein anderer Rechenweg gesucht werden.

Die ganzrationale Funktion 2. Grades heißt **quadratische Funktion.** Die Kurve der ganzrationalen Funktion $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ geht durch Verschieben der Kurve von $y = a_2x^2$ im Koordinatensystem hervor. Die Öffnung der Parabel wird durch das Vorzeichen von a_2 bestimmt (vgl. 6.1.3. und Bild 6.3).

BEISPIEL

10.12. Die Parabel mit der Gleichung $y = -0{,}5x^2$ ist mit dem Scheitel nach $S(1; 4{,}5)$ zu verschieben (Bild 10.22). Wie lautet die Gleichung der verschobenen Parabel?

Lösung: Nach 9.6. (Zusammenfassung) ist x durch $x - 1$ und y durch $y - 4{,}5$ zu ersetzen:

$$y - 4{,}5 = -0{,}5(x - 1)^2$$

$$\underline{\underline{y = -0{,}5x^2 + x + 4.}}$$

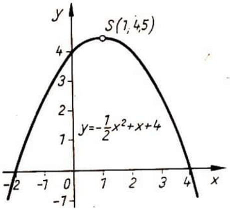


Bild 10.22

Bei den ganzrationalen Funktionen von höherem als 2. Grade sind die Zusammenhänge zwischen Koeffizienten der Funktionsgleichung und Kurve der Funktion nicht so einfach. Der Kurvenverlauf wird später mit Mitteln der Analysis untersucht werden. Die Bilder 10.23 und 10.24 zeigen zwei Beispiele einer ganzrationalen Funktion 3. Grades.
Die Berechnung des Funktionswertes einer ganzrationalen Funktion wird besonders einfach durch Anwenden des Hornerschen Schemas (vgl. 6.2.).

Kontrollfragen

10.7. Wie ist die Klasse der ganzrationalen Funktionen definiert?
10.8. Welche Symmetrieeigenschaften haben die Graphen der Potenzfunktionen?
10.9. Wann wird eine Funktion gerade bzw. ungerade genannt?
10.10. In welchem Fall liefert die lineare Interpolation exakte Werte?

Aufgaben: 10.8. bis 10.13.

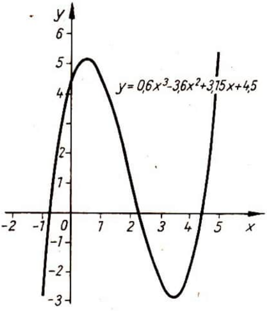


Bild 10.23

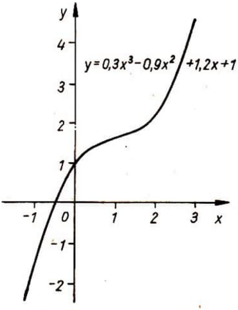


Bild 10.24

10.4.2. Gebrochenrationale Funktionen

Ist der Term $f(x)$ der Quotient zweier ganzrationaler Terme, so heißt die durch $y = f(x)$ gegebene Funktion eine **gebrochenrationale Funktion:**

$$\boxed{y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}} \tag{10.2}$$

Im Falle $n < m$ liegt eine echt gebrochenrationale, im Falle $n \geqq m$ eine unecht gebrochenrationale Funktion vor.
Die einfachsten Vertreter sind Potenzfunktionen mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{x^n}, \qquad n \in N \setminus \{0\}.$$

Wegen $0^n = 0$ sind die Funktionen für $x = 0$ nicht definiert. Ihre Kurven, Hyperbeln genannt, bestehen deshalb aus zwei durch die y-Achse getrennten Hyperbelästen. In Bild 10.25 sind zwei ungerade, in Bild 10.26 zwei gerade Potenzfunktionen dargestellt. Die Kurven liegen bei ungeradem n zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung, bei geradem n axialsymmetrisch zur y-Achse.

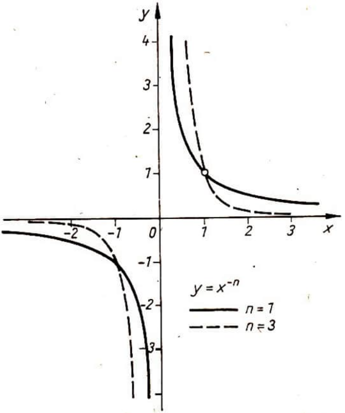


Bild 10.25

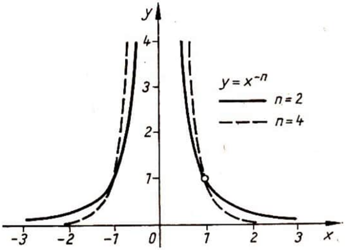


Bild 10.26

Da $f(0)$ nicht existiert, soll das Verhalten in der Umgebung von $x = 0$ genauer untersucht werden. Nähert sich das Argument x dem Wert 0, so wächst der Funktionswert dem Betrage nach unbeschränkt:

x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	...	...	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
$y = 1/x$	-1	-10	-10^2	-10^3	...	...	10^3	10^2	10	1
$y = 1/x^2$	1	10^2	10^4	10^6	...	...	10^6	10^4	10^2	1

In der grafischen Darstellung kommt das dadurch zum Ausdruck, daß sich die Funktionskurve der y-Achse mit kleiner werdendem $|x|$ nähert. Die Gerade $x = 0$ (y-Achse) heißt deshalb Asymptote[1]) der Kurve.

[1]) asymptotos (gr.), nicht zusammenfallend

Die Stelle $x = 0$, an der $y = 1/x^n$ dieses Verhalten zeigt, heißt **Pol** der Funktion. Für ungerades n wechselt der Funktionswert bei $x = 0$ das Vorzeichen. Ein solcher Pol heißt **ungerade** (vgl. Bild 10.25). Für gerades n haben die Funktionswerte links und rechts des Pols gleiches Vorzeichen. Ein solcher Pol heißt **gerade** (vgl. Bild 10.26).
Der Quotient $1/x^n$ kann nie Null werden; deshalb hat die Funktion $y = 1/x^n$ keine Nullstelle. Wächst das Argument x dem Betrage nach, so wird $1/x^n$ dem Betrage nach sehr klein. Die x-Achse ist deshalb ebenfalls Asymptote der Hyperbel $y = 1/x^n$.
Die wesentlichen Eigenschaften sollen noch einmal in einer Übersicht zusammengestellt werden.

	$y = x^{-n}$, n ungerade	$y = x^{-n}$, n gerade
Definitionsbereich X	$P \setminus \{0\}$	$P \setminus \{0\}$
Wertebereich Y	$P \setminus \{0\}$	$P \setminus \{0; \infty\}$
gemeinsame Punkte	$P_1(1; 1)$, $P_2(-1; -1)$	$P_1(1; 1)$, $P_2(-1; 1)$
Nullstellen	keine	keine
Pol	$x = 0$, ungerade	$x = 0$, gerade
Asymptoten	$y = 0$, $x = 0$	$y = 0$, $x = 0$
Symmetrie der Kurven	zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung	axialsymmetrisch zur y-Achse

Die Potenzfunktionen $y = a/x^n$ haben im grundsätzlichen die gleichen Eigenschaften. Für $|a| < 1$ sind die Kurven gegenüber der jeweiligen Normalform in y-Richtung im Verhältnis $1 : |a|$ gestaucht, für $|a| > 1$ in y-Richtung gestreckt. Eine Vorzeichenänderung von a bewirkt wieder eine Spiegelung der Funktionskurve an der x-Achse. Bild 10.27 zeigt diese Zusammenhänge am Beispiel der Funktion $y = a/x$ (vgl. 9.6.).

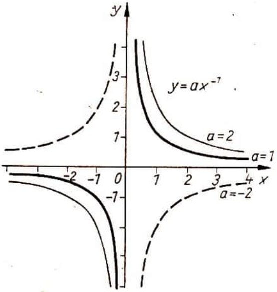


Bild 10.27

Eine gebrochenrationale Funktion $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist überall dort nicht definiert, wo der Nenner $h(x)$ verschwindet.
Am einfachsten sind Funktionen der Form

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

zu übersehen. Sie haben stets einen ungeraden Pol und eine horizontale Asymptote.

BEISPIELE

10.13. Die Funktion $y = \frac{2}{5x + 6}$ ist grafisch darzustellen.

Lösung: Der Zähler ist konstant; die Funktion hat keine Nullstelle. Die Nullstelle des Nenners $x_P = -1{,}2$ ist daher Polstelle der Funktion. Die y-Achse wird bei $y = 1/3$ geschnitten. Die Kurve der Funktion hat die Geraden $x = -1{,}2$ und $y = 0$ zu Asymptoten (Bild 10.28).

10.14. Die Funktion $y = \frac{4x + 2}{2x + 3}$ ist grafisch darzustellen.

Lösung:

1. Achsenschnittpunkte:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2/3$$

$$4x + 2 = 0 \Rightarrow x_N = -0{,}5; \text{ Nullstelle, da } h(-0{,}5) \neq 0.$$

2. Pole:

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x_P = -1{,}5; \text{ Pol, da } g(-1{,}5) \neq 0.$$

Aus der durch Partialdivision gewonnenen Form

$$(4x + 2):(2x + 3) = 2 - \frac{4}{2x + 3} = 2 - \frac{2}{x + 1{,}5}$$

ist zu erkennen, daß sich für betragsmäßig wachsendes x der Funktionswert dem Wert 2 nähert. $y = 2$ ist Asymptote der Kurve. Weiterhin ist zu entnehmen, daß das Bild der Funktion aus dem von $y = 1/x$ durch Streckung mit dem Faktor 2, Spiegelung an der x-Achse sowie Verschiebung um $x_1 = -1{,}5$ in x-Richtung und um $y_1 = 2$ in y-Richtung hervorgeht (Bild 10.29)

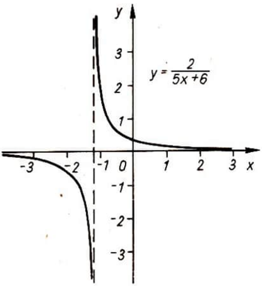


Bild 10.28

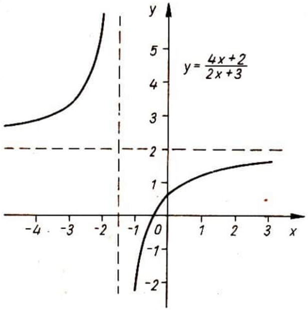


Bild 10.29

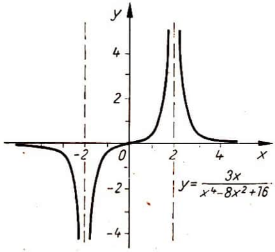


Bild 10.30

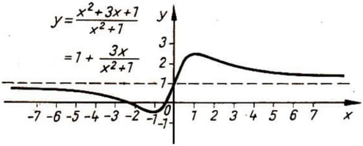


Bild 10.31

Bei höherem Grad der Zähler- und Nennerpolynome sind die Zusammenhänge im allgemeinen verwickelter und nicht so einfach zu überschauen. Wesentliche Anhaltspunkte sind Nullstellen, Pole und Asymptoten. Nullstellen des Zählers — sofern sie nicht mit Nullstellen des Nenners zusammenfallen — sind Nullstellen der Funktion. Nullstellen des Nenners, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählers sind, sind Polstellen der Funktion. Es sind gerade und ungerade Pole zu unterscheiden, je nachdem die Nullstelle des Nenners von gerader oder ungerader Vielfachheit ist. Bild 10.30 zeigt eine Funktion mit zwei geraden Polen. Die in Bild 10.31 dargestellte Funktion

hat keinen Pol, da der Nenner $x^2 + 1$ für jedes reelle x verschieden von Null ist. Im Falle einer unecht gebrochenrationalen Funktion läßt sich der Term $\frac{g(x)}{h(x)}$ durch Partialdivision in die Summe eines ganzen und eines echt gebrochenen Terms zerlegen. Da für betragsmäßig großes Argument dieser echt gebrochene Summand sehr klein wird, bestimmt für betragsmäßig großes x der ganzrationale Term den Verlauf der Kurve. Ein einfaches Beispiel zeigt Bild 10.32.
Genauer können gebrochenrationale Funktionen erst mit Mitteln der Analysis untersucht werden.

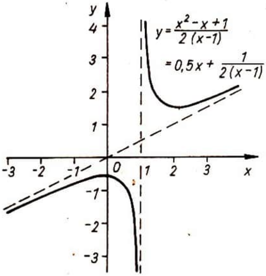


Bild 10.32

Kontrollfragen

10.11. Wie ist die Klasse der gebrochenrationalen Funktionen definiert?
10.12. Was ist unter der Polstelle einer Funktion zu verstehen?
10.13. Was sind gerade und ungerade Pole?
10.14. Was sind Asymptoten? Für welche Funktionen sind sie charakteristisch?

Aufgaben: 10.14. und 10.15.

10.4.3. Wurzelfunktionen

Einfachste Vertreter der Wurzelfunktionen sind Funktionen mit der Gleichung

$$y = a\sqrt[n]{x}.$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Radikanden definiert ist, ist der Definitionsbereich $X = [0; \infty)$.
Die Wurzelfunktionen $y = \sqrt[n]{x}$ sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $y = x^n$ $(x \geqq 0)$:

$$y = x^n \qquad (x \geqq 0,\ y \geqq 0),$$
$$x = y^n \qquad (y \geqq 0,\ x \geqq 0),$$
$$y = \sqrt[n]{x} \qquad (x \geqq 0,\ y \geqq 0).$$

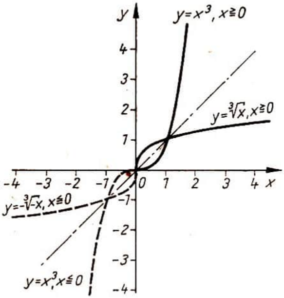


Bild 10.33

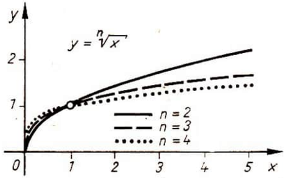


Bild 10.34

Die Kurve von $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqq 0)$ ergibt sich deshalb durch Spiegelung der Kurve von $y = x^n$ $(x \geqq 0)$ an der Geraden $y = x$. Die Einschränkung des Definitionsbereiches ist wegen der auf nichtnegative Radikanden beschränkten Wurzeldefinition notwendig. Bild 10.33 zeigt neben der Umkehrfunktion von $y = x^3$, $x \geqq 0$, auch die Umkehrfunktion von $y = x^3$, $x \leqq 0$, deren Funktionsgleichung wegen der Wurzeldefinition in der Form $y = -\sqrt[3]{-x}$ $(x \leqq 0)$ zu schreiben ist. Bild 10.34 zeigt die Wurzelfunktionen $y = \sqrt[n]{x}$ für $n = 2, 3, 4$. Die Kurven sind wegen des Zusammenhanges mit den Potenzfunktionen Parabeln. Der Graph der Funktion $y = \sqrt[n]{ax + b} + c$ läßt sich aus dem von $y = \sqrt[n]{x}$ erschließen. Für $a > 0$ ist nach Abtrennen des Faktors $\sqrt[n]{a}$:

$$\sqrt[n]{ax + b} = \sqrt[n]{a(x + b/a)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt{x + b/a}$$

zu erkennen, daß das Bild aus dem von $y = \sqrt[n]{x}$ durch Strecken mit dem Faktor $\sqrt[n]{a}$ sowie durch Verschieben um $x_1 = -b/a$ in x-Richtung und um $y_1 = c$ in y-Richtung hervorgeht.

Im Falle $a < 0$ kommt, wie die Umformung

$$\sqrt[n]{ax + b} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-(x + b/a)}$$

zeigt, noch eine Spiegelung an der y-Achse hinzu.

BEISPIELE

10.15. Der Graph von

$$y = \sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$$

ergibt sich aus dem von $y = \sqrt{x}$ durch Streckung um den Faktor $\sqrt{2}$ in y-Richtung (vgl. Bild 10.35).

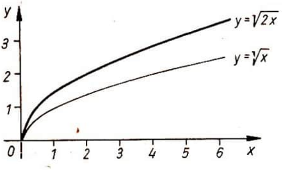


Bild 10.35

10.16. Der Graph der Funktion

$$y = 1 - \sqrt{2x + 3} = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x + 1{,}5}$$

geht aus dem von $y = \sqrt{x}$ durch Spiegelung an der x-Achse ($y = -\sqrt{x}$), Strecken um den Faktor $\sqrt{2}$ ($y = -\sqrt{2}\sqrt{x}$) sowie durch Verschieben um $x_1 = -1{,}5$ und $y_1 = +1$ hervor (Bild 10.36).

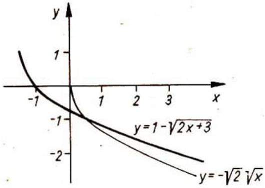


Bild 10.36

10.17. Der Graph der Funktion

$$y = 2 - \sqrt{7{,}5 - 3x}$$

ist zu skizzieren.

Lösung: Wegen $a < 0$ wird wie folgt umgeformt:

$$y = 2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-(x - 2{,}5)}$$

Der Graph ergibt sich aus dem von $y = \sqrt{x}$ durch

Spiegeln an der x-Achse ($y = -\sqrt{x}$),

Spiegeln an der y-Achse ($y = -\sqrt{-x}$),

Strecken um den Faktor $\sqrt{3}$ ($y = -\sqrt{3}\sqrt{-x}$),

Verschieben um $x_1 = 2{,}5$, $y_1 = 2$ (vgl. Bild 10.37).

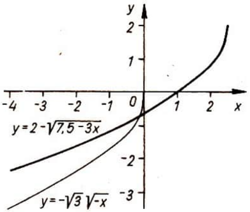


Bild 10.37

Kontrollfragen

10.15. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Potenz- und Wurzelfunktionen?

10.16. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen von

a) $y = \sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$, b) $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{-x}$?

Aufgabe: 10.16.

10.5. Transzendente Funktionen

10.5.1. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Funktionen mit der Gleichung $y = a^x$ $(a > 0)$ heißen Exponentialfunktionen. Ist $a > 1$, so wachsen die Funktionswerte mit wachsendem Argument; die Funktion ist monoton wachsend. Da jede Potenz mit positiver Basis positiv ist, treten nur positive Funktionswerte auf. Wegen $a^0 = 1$ haben alle Exponentialfunktionen mit der Gleichung $y = a^x$ das Wertepaar (0; 1) gemeinsam. Alle Kurven nähern sich asymptotisch der x-Achse. Das Bild 10.38 zeigt Beispiele für $a = 2$, $a = \mathrm{e}$ und $a = 10$. Die Kurven von $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ liegen spiegelbildlich zur y-Achse. Dieser Zusammenhang erlaubt es, ausgehend von der Kurve der Funktion $y = 2^x$ die Kurve von $y = (1/2)^x = 2^{-x}$ zu skizzieren (vgl. Bild 10.39). Daraus läßt sich weiter ableiten, daß die Exponentialfunktion für $a < 1$ monoton fällt.

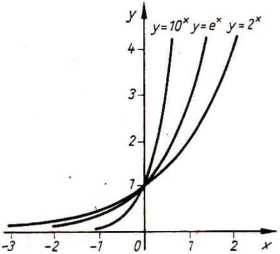


Bild 10.38

Die Exponentialfunktion $y = a^x$ kann für jedes a nach Gl. (2.49) umgeformt werden:

$$\boxed{y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}} \tag{10.3}$$

Alle Exponentialfunktionen lassen sich somit auf die Funktion $y = e^{k \cdot x}$ mit $k = \ln a$ zurückführen. Für $|\ln a| > 1$ ist der Graph von $y = a^x$ gegenüber dem von $y = e^x$ in x-Richtung gestaucht, für $|\ln a| < 1$ in x-Richtung gestreckt. Beispiele sind $y = 10^x$ mit $\ln 10 > 1$ und $y = 2^x$ mit $\ln 2 < 1$ (vgl. Bild 10.38).

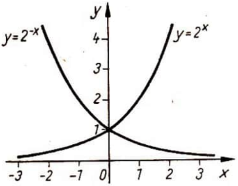


Bild 10.39

Wegen ihrer Bedeutung für Naturwissenschaft und Technik soll auf die Funktion

$$y = ae^{bx} \quad \text{bzw.} \quad y = ae^{-bx} \; (b > 0)$$

noch etwas näher eingegangen werden.
Für $x = 0$ ist $y = a \cdot e^0 = a \cdot 1 = a$. Der Graph beider Funktionen schneidet bei $y = a$ die y-Achse. Die Funktion $y = a\,e^{bx}$ wächst für $a > 0$ monoton, wie auch nachstehende Wertetabelle zeigt.

x	0	$1/b$	$2/b$	$\ldots$	n/b
y	a	ae	ae^2	$\ldots$	ae^n

Jeder Argumentzuwachs um $\Delta x = 1/b$ läßt den Funktionswert auf das e-fache wachsen. Für $b = 0{,}4$ geschieht dieses Anwachsen in Schritten von $\Delta x = 2{,}5$, für $b = 2$ in Schritten von $\Delta x = 0{,}5$ (vgl. Bild 10.40).

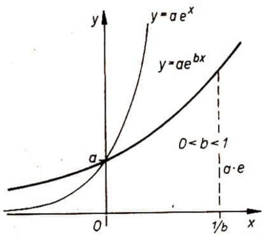


Bild 10.40

Die Funktion $y = ae^{-bx}$ $(a > 0)$ fällt monoton. Wie nachstehende Wertetabelle zeigt:

x	0	$1/b$	$2/b$	$\dots$	n/b
y	a	ae^{-1}	ae^{-2}	$\dots$	ae^{-n}

fällt der Funktionswert auf das e^{-1}-fache, wenn x um $\Delta x = 1/b$ wächst (vgl. Bild 10.41).
In den Anwendungen ist die unabhängige Veränderliche oftmals die Zeit. Deshalb interessiert vornehmlich der Funktionsverlauf für $x \geqq 0$. Wegen der dargestellten

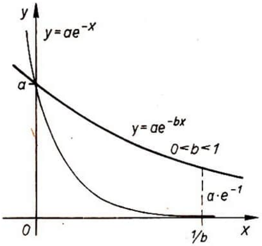


Bild 10.41

Eigenschaften lassen sich mit Hilfe der Exponentialfunktion Prozesse des Wachsens und des Abklingens beschreiben. Als Beispiele seien genannt:

organisches Wachstum:	$b = b_0\, e^{\alpha t}$	b_0 Anfangsbestand α Wachstumsrate,
Gesetz des radioaktiven Zerfalls:	$N = N_0\, e^{-\lambda t}$	N_0 Anzahl der zur Zeit $t = 0$ aktiven Atomkerne λ Zerfallskonstante,
Kondensatorladung bei Gleichspannung:	$U = U_0(1 - e^{-t/\tau})$	U_0 Ladespannung $\tau = RC$ Zeitkonstante.

Beim radioaktiven Zerfall interessiert die Halbwertszeit $T_{1/2}$. Das ist die Zeit, in der die Hälfte der aktiven Atomkerne zerfallen sind, die Radioaktivität also auf die Hälfte abgeklungen ist.
Aus

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda T_{1/2}} = 0{,}5$$

folgt

$$e^{\lambda T_{1/2}} = 2, \qquad \text{also} \qquad \lambda T_{1/2} = \ln 2,$$

und als Halbwertszeit: $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

BEISPIELE

10.18. Die Abkühlung eines erwärmten Körpers in einer kälteren Umgebung erfolgt nach dem NEWTONschen Abkühlungsgesetz

$$\Delta T = T_0\,\mathrm{e}^{-mt}.$$

Dabei ist T_0 die Übertemperatur zur Umgebung zur Zeit $t = 0$, m die sogenannte Abkühlungskonstante. Das Gesetz ist für $T_0 = 120$ K, $m = 0{,}06\ \mathrm{min}^{-1}$, $0 \leqq t \leqq 30$ min grafisch darzustellen.

Lösung: Mit $t/_\mathrm{s} = x$ und $\Delta T/_\mathrm{K} = y$ ergibt sich die Zahlenwertgleichung

$$y = 120\,\mathrm{e}^{-0{,}06x}$$

Wertetabelle:

x	0	10	20	30
y	120	66	36	20

Das Gesetz ist in Bild 10.42 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die Abkühlung um so langsamer fortschreitet, je weniger sich die Temperatur des Körpers von der der Umgebung unterscheidet.

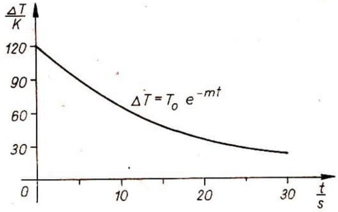


Bild 10.42

10.19. Die Funktion

$$y = 4(1 - \mathrm{e}^{-0{,}6x})$$

ist im Bereich $0 \leqq x \leqq 6$ grafisch darzustellen.

Lösung: Es ist eine zweckmäßige Wertetabelle aufzustellen.

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{e}^{-0{,}6x}$	1	0,55	0,30	0,17	0,09	0,05	0,03
$1 - \mathrm{e}^{-0{,}6x}$	0	0,45	0,70	0,83	0,91	0,95	0,97
y	0	1,80	2,80	3,32	3,64	3,80	3,88

Da $\mathrm{e}^{-0{,}6x}$ mit wachsendem x immer kleiner wird, $(1 - \mathrm{e}^{-0{,}6x})$ sich also dem Wert 1 nähert, ist $y = 4$ eine Asymptote der Kurve (vgl. Bild 10.43).

Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ $(a > 0)$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$:

$$y = a^x \qquad \big(x \in P,\ y \in (0;\infty)\big),$$
$$x = a^y \qquad \big(y \in P,\ x \in (0;\infty)\big),$$
$$y = \log_a x \qquad \big(x \in (0;\infty),\ y \in P\big).$$

Aus diesem Zusammenhang ergibt sich, daß die Logarithmusfunktion nur für positive x definiert und für $a > 1$ eine monoton steigende Funktion ist (vgl. Bild 10.44). Die Wertetabelle der Logarithmusfunktion ist leicht über die der zugehörigen Exponentialfunktion zu gewinnen:

$$f\colon y = 2^x \;\downarrow\; \begin{array}{c|ccccc|c} x & -2 & -1 & 0 & 0{,}5 & 1 & y \\ \hline y & 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & \sqrt{2} & 2 & x \end{array} \;\uparrow\; f^{-1}\colon y = \log_2 x$$

Alle Logarithmusfunktionen lassen sich nach Gleichung (2.60) auf die Logarithmusfunktion mit der Basis e zurückführen.

$$\boxed{y = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x} \tag{10.4}$$

Bild 10.45 zeigt die Kurve der Logarithmusfunktion für $a = 2$, e, 10. Erwähnt seien noch die Funktionen

$$y = \log_a (cx) \qquad \text{und} \qquad y = \log_a x^r,$$

deren Kurven sich nach der Umformung

$$y = \log_a x + \log_a c \qquad \text{bzw.} \qquad y = r \log_a x$$

unmittelbar aus der von $y = \log_a x$ gewinnen lassen (vgl. Bild 10.46).

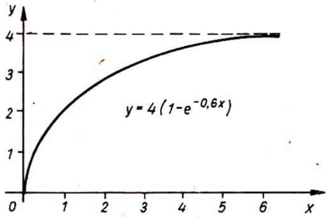


Bild 10.43

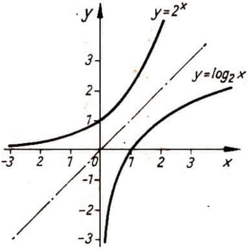


Bild 10.44

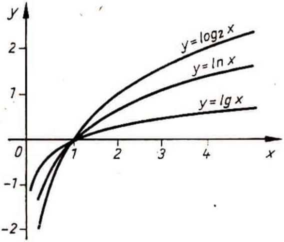


Bild 10.45

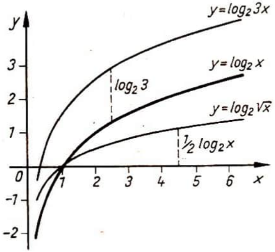


Bild 10.46

Kontrollfragen

10.17. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen?
10.18. Wodurch ist der Definitionsbereich einer Logarithmusfunktion eingeschränkt?

Aufgaben: 10.17 bis 10.19.

10.5.2. Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen gehören zu den periodischen Funktionen.

Definition

Eine Funktion f heißt **periodisch**, wenn eine reelle Zahl $a > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ und $x + ka \in X$ sowie $k \in G$

$$f(x + ka) = f(x)$$

gilt.

Die Konstante a heißt **Periode** der Funktion f. Die kleinste Periode p wird primitive Periode genannt. Meist wird unter Periode die kleinste Periode verstanden.

Die trigonometrischen Funktionen

$$y = \sin x \qquad \text{und} \qquad y = \cos x$$

haben die Periode $p = 2\pi$,

$$y = \tan x \qquad \text{und} \qquad y = \cot x$$

die Periode $p = \pi$ (vgl. Bilder 3.14 bis 3.17). Für sie gilt

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = \sin x$	P	$[-1; 1]$
$y = \cos x$	P	$[-1; 1]$
$y = \tan x$	$P \setminus \left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in G\right\}$	P
$y = \cot x$	$P \setminus \{k\pi \mid k \in G\}$	P

(10.5)

Für $y = \tan x$ bzw. $y = \cot x$ sind die Geraden $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ bzw. $x = k\pi$ $(k \in G)$ Asymptoten.

10.5.3. Zyklometrische Funktionen

Die zyklometrischen Funktionen — auch Arcusfunktionen genannt — sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen[1].) Da nur eigentlich monotone Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, muß bei der Umkehrung der trigono-

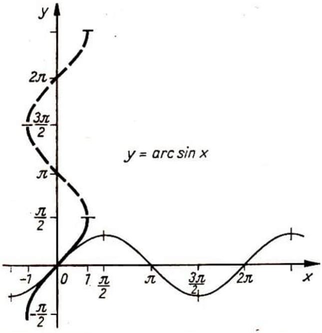


Bild 10.47

[1]) Der gemeinsame Name der Funktionen rührt von ihrer anschaulichen Deutung am Kreis her. Der Funktionswert y wird am Kreis (griech. kyklos) durch den Kreisbogen (lat. arcus) dargestellt.

metrischen Funktionen der Definitionsbereich in geeigneter Weise eingeschränkt werden. Es ist üblich, für die Umkehrung ein Intervall zu wählen, das den Nullpunkt enthält.

Im Bild 10.47 ist zunächst die Sinuskurve insgesamt an der Geraden $y = x$ gespiegelt. Der durchgehend gezeichnete Teil dieser Spiegelkurve, den auch Bild 10.48 wiedergibt, entspricht der Umkehrfunktion mit der Gleichung $y = \arcsin x$, dem Definitionsbereich $[-1; 1]$ und dem Wertebereich $[-\pi/2; \pi/2]$. Die Bezeichnung „arcsin x" leitet sich daraus ab, daß der Funktionswert am Einheitskreis als „arcus, dessen Sinuswert x ist" zu deuten ist.

Ebenso lassen sich für die anderen trigonometrischen Funktionen Intervalle der Länge π angeben, in denen sie eigentlich monoton und damit umkehrbar sind. In nachstehender Tabelle sind die zyklometrischen Funktionen mit Definitions- und Wertebereich zusammengestellt.

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$y = \arctan x$	P	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{arccot} x$	P	$(0; \pi)$

(10.6)

Die Bilder 10.48 bis 10.51 zeigen diese Funktionen. Ihnen lassen sich die folgenden Beziehungen für negative Argumente entnehmen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \arcsin(-x) = -\arcsin x; & \arccos(-x) = \pi - \arccos x \\ \arctan(-x) = -\arctan x; & \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x \end{array}} \qquad (10.7)$$

Zur Bestimmung von Funktionswerten der zyklometrischen Funktionen kann — wie in 10.3. demonstriert — von der Umkehrfunktion ausgegangen werden.

Auf Taschenrechnern werden die zyklometrischen Funktionen häufig mit $\sin^{-1}$ usw. bezeichnet. Da die Funktionswerte in diesem Zusammenhang zumeist in rad anzu-

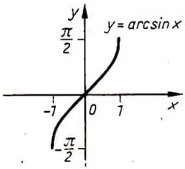


Bild 10.48

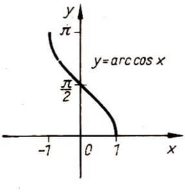


Bild 10.49

gebende Winkel sind, muß der entsprechende Modus eingestellt sein. Die Rechner geben die Funktionswerte im genannten Wertebereich an. Wegen $\cot\alpha = 1/\tan\alpha$ wird $\operatorname{arccot} x$ als $\arctan(1/x)$ berechnet. Dabei ist im Falle $x < 0$ der unterschiedliche Wertebereich zu beachten. In den folgenden Beispielen sind zusätzlich die Winkel in ° angegeben, wie sie bei der Verwendung von Tabellen anfallen.

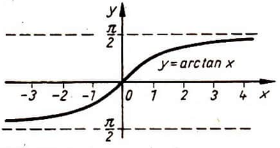


Bild 10.50

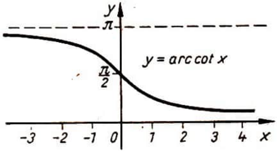


Bild 10.51

BEISPIEL

10.20. Es ist a) $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2}$, b) $\arctan 1{,}2$, c) $\arccos(-0{,}85)$, d) $\operatorname{arccot}(-0{,}8)$ zu bestimmen.

Lösung:

a) $y = \sin x$ ↓ ↑ $y = \arcsin x$

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	y
y	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	x

$\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2} = \underline{\underline{\pi/4.}}$

b) $y = \arctan 1{,}2 = 50{,}2° = \underline{\underline{0{,}876.}}$

c) Mit (10.7) folgt $\arccos(-0{,}85) = \pi - \arccos 0{,}85 = 180° - 31{,}8° = 148{,}2° = \underline{\underline{2{,}59.}}$
Der Taschenrechner zeigt unmittelbar 2,59 an.

d) Mit (10.7) folgt $\operatorname{arccot}(-0{,}8) = \pi - \operatorname{arccot} 0{,}8 = 180° - 51{,}3° = 128{,}7° = \underline{\underline{2{,}25.}}$

Mit dem Taschenrechner ist durch Addition der Periode π auf den Wertebereich von $\operatorname{arccot} x$ überzugehen:

$\operatorname{arccot}(-0{,}8) = \arctan(-1/0{,}8) + \pi = 2{,}25.$

Aus den bekannten Zusammenhängen zwischen den trigonometrischen Funktionen ergeben sich Beziehungen zwischen den zyklometrischen Funktionen. So folgt aus

$$x = \cos y = \sin(\pi/2 - y)$$
$$y = \arccos x \quad \text{und} \quad \pi/2 - y = \arcsin x.$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \pi/2} \tag{10.8}$$

In gleicher Weise kann die Beziehung

$$\boxed{\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2} \tag{10.9}$$

hergeleitet werden.

Kontrollfragen

10.19. Welche Periode haben die einzelnen trigonometrischen Funktionen?
10.20. Warum können die Winkelfunktionen nicht in ihrem gesamten Definitionsbereich umgekehrt werden?
10.21. Wie sind die Wertebereiche der zyklometrischen Funktionen festgelegt?

Aufgaben: 10.20. bis 10.22.

10.6. Operationen mit Funktionstermen

10.6.1. Rationale Operationen

Bei den Zahlen sind die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division definiert. Das Ergebnis der Verknüpfung zweier Zahlen ist wieder eine Zahl, das der ausgeführten Operation entsprechend Summe, Differenz, Produkt bzw. Quotient genannt wird. Da ein Term $f(x)$ bei Belegung der freien Variablen mit einer reellen Zahl eine reelle Zahl ist, lassen sich Funktionsterme ebenso verknüpfen. Der durch die Verknüpfung entstehende neue Term definiert wieder eine Funktion. Es lassen sich also die in nachstehender Tabelle aufgeführten Operationen zur Bildung von Funktionen aus zwei gegebenen Funktionen ausführen.

Operation	Name der gebildeten Funktion	abhängige Variable	Definitionsbereich
$f + g$	Summe	$s(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
$f - g$	Differenz	$d(x) = f(x) - g(x)$	$D_f \cap D_g$
fg	Produkt	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_f \cap D_g$
$\dfrac{f}{g}$	Quotient	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g,\ g(x) \neq 0$

Summe und Differenz zweier Funktionen können auch grafisch durch punktweise Konstruktion gebildet werden. Dabei ist es zweckmäßig, besonders geeignete Punkte auszuwählen.

BEISPIEL

10.21. Der Graph von

$$y = \sin x + 1{,}5 \cos x$$

ist durch grafische Addition zu gewinnen.

Lösung: Für die grafische Addition sind geeignete Stellen auszuwählen. Günstig sind die Nullstellen der Summanden (Punkte 1 bis 5 in Bild 10.52). Stellen mit entgegengesetzten Funktionswerten liefern Nullstellen der Summenfunktion (Punkte 6, 7), in den Schnittpunkten sind die Ordinaten zu verdoppeln (Punkte 8, 9). Unter Umständen liegt dann schon eine ausreichende Anzahl von Punkten der Summenfunktion vor.

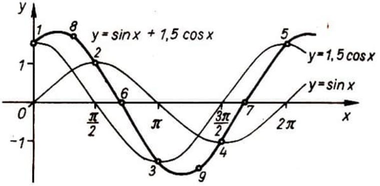


Bild 10.52

Mitunter werden die Funktionswerte eines der Summanden mit wachsendem x betragsmäßig immer kleiner, so daß sein Einfluß immer mehr verschwindet. Bei Funktionswertberechnungen braucht dieser Summand schließlich nicht mehr berücksichtigt zu werden. Im Bild ist der „betragsmäßig große" Summand Asymptote der Kurve. Auch die Symmetrieverhältnisse bei geraden und ungeraden Funktionen sind zu berücksichtigen. Bei $f(x) = f(-x)$ oder $f(x) = -f(-x)$ wird die Wertetabelle nur für $x \geqq 0$ aufgestellt.

BEISPIEL

10.22. Die Funktion

$$y = 1{,}25(e^{0{,}4x} + e^{-0{,}4x}) \quad \text{(Kettenlinie)}$$

ist im Intervall $-5 \leqq x \leqq 5$ grafisch darzustellen.

Lösung:

Aus $f(x) = 1{,}25(e^{0{,}4x} + e^{-0{,}4x})$

und $f(-x) = 1{,}25(e^{-0{,}4x} + e^{0{,}4x})$

folgt $f(x) = f(-x)$.

Da f eine gerade Funktion ist, liegt der Graph symmetrisch zur y-Achse. Die Wertetabelle ist nur für $x \geqq 0$ aufzustellen. Außerdem wird $e^{-0{,}4x}$ für große x-Werte sehr klein. $y = 1{,}25e^{0{,}4x}$ ist Asymptote der Kurve. Nullstellen treten keine auf, da beide Summanden für jeden Wert x positiv sind.

x	0	1	2	3	4	5
$e^{0{,}4x}$	1	1,492	2,226	3,320	4,953	7,389
$e^{-0{,}4x}$	1	0,670	0,449	0,301	0,202	0,135
$e^{0{,}4x} + e^{-0{,}4x}$	2	2,162	2,675	3,621	5,155	7,524
y	2,5	2,70	3,34	4,53	6,44	9,41

Die Kurve zeigt Bild 10.53.

Beim Produkt zweier Funktionen ist jede auftretende Nullstelle eines der Faktoren auch Nullstelle des Produktes. Die Eigenschaften der Faktoren gehen in das Produkt ein. Dieser Zusammenhang ist aber nur in besonderen Fällen überschaubar. Bei Quotienten liegt für $g(a) = 0$ und $f(a) \neq 0$ eine Polstelle vor.

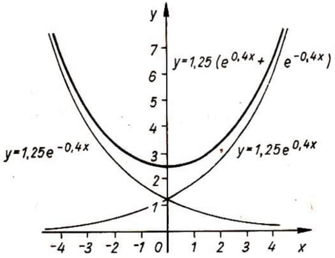


Bild 10.53

BEISPIEL

10.23. Die Funktion $y = \dfrac{e^x}{x}$ ist für $x \in [-2; 3]$ grafisch darzustellen.

Lösung: Der Zähler ist für jedes x verschieden von Null. Die Funktion hat keine Nullstelle, aber einen Pol bei $x = 0$. Symmetrie liegt wegen $|f(-x)| \neq |f(x)|$ nicht vor. Neben ganzzahligen Argumenten sind zweckmäßig weitere Argumente — vor allem in der Umgebung des Poles — zu wählen.

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}2$	0	$0{,}2$	$0{,}5$	1	2	3
y	$-0{,}02$	$-0{,}07$	$-0{,}37$	$-1{,}21$	$-4{,}09$	--	$6{,}11$	$3{,}30$	$2{,}72$	$3{,}69$	$6{,}70$

Die Funktion ist in Bild 10.54 dargestellt.

10.6.2. Verkettung von Funktionen

Eine weitere Möglichkeit, Funktionen zu verknüpfen, ist die **Verkettung** zweier Funktionen g und h zu einer neuen Funktion $f = h \circ g$. Unter der Verkettung von g und h wird das Nacheinanderausführen der Funktionen g und h verstanden. Sind g und h durch die Funktionsgleichungen

$$u = g(x) \qquad \text{und} \qquad y = h(u)$$

gegeben, so entsteht die Gleichung der Funktion f durch Einsetzen von $u = g(x)$ in $h(u)$:

$$y = f(x) = h\big(g(x)\big).$$

Die so gebildete Funktion f wird auch **mittelbare Funktion** genannt. Die Funktion g wird als **innere Funktion**, h als **äußere Funktion** bezeichnet.

Die Funktion g ordnet x den Funktionswert u zu, während u durch h der Funktionswert y zugeordnet wird:

$$x \xrightarrow{g} u \xrightarrow{h} y.$$

u ist also zugleich Funktionswert von g und Argument von f. Da der Wertebereich W von g nicht notwendig mit dem Definitionsbereich D von h übereinstimmen muß, kann der Definitionsbereich von f gegenüber dem von g und h eingeschränkt sein. Wie Bild 10.55 zu entnehmen ist, muß u Element von $W(g)$ und $D(h)$ sein, d. h.

$$u \in W(g) \cap D(h).$$

Deshalb gilt für Definitions- und Wertebereich von f:

$$X \subseteq D(g) \qquad \text{und} \qquad Y \subseteq W(h).$$

BEISPIEL

10.24. Für die Funktionen

$$\begin{aligned} &u = g(x) = 1 - x^2 && \text{und} && y = h(u) = 2\sqrt{u} \quad \text{gilt} \\ &D(g) = (-\infty; +\infty), && && D(h) = [0; +\infty), \\ &W(g) = (-\infty; 1], && && W(h) = [0; +\infty). \end{aligned}$$

Wegen $u \in W(g) \cap D(h) = [0; 1]$ ist für die Verkettung $f = h \circ g$:

$$y = f(x) = 2\sqrt{1 - x^2},$$

der Definitionsbereich auf $X = [-1; 1] \subseteq D(g)$ und der Wertebereich auf $Y = [0; 2] \subseteq W(h)$ eingeschränkt.

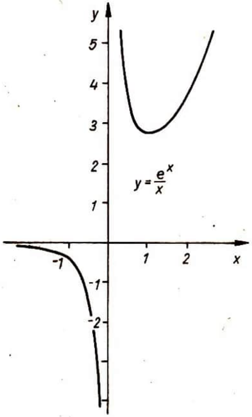


Bild 10.54

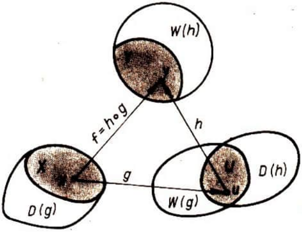


Bild 10.55

Wenn kein Anlaß zu Verwechslungen oder Unklarheiten gegeben wird, kann die Verkettung auch ohne Umbenennung der Variablen durchgeführt werden. Sind zwei Funktionen

$$y = g(x) \qquad \text{und} \qquad y = h(x)$$

gegeben, so folgt, wenn g die innere Funktion sein soll:

$$h \circ g\colon\ y = h(g(x)).$$

Soll h die innere Funktion sein, so ergibt sich

$$g \circ h\colon\ y = g(h(x)).$$

Dabei ist im allgemeinen $h \circ g \neq g \circ h$.

BEISPIEL

10.25. Aus den Funktionen

$$y = g(x) = 2x - 3 \quad \text{und} \quad y = h(x) = \sqrt{x}$$

sind die Funktionen $f_1 = g \circ h$ und $f_2 = h \circ g$ zu bilden und der Definitionsbereich von f_1 und f_2 zu ermitteln.

Lösung: $f_1 = g \circ h\colon\ y = g(h(x)) = 2\sqrt{x} - 3, \qquad X = [0; \infty)$

$f_2 = h \circ g\colon\ y = h(g(x)) = \sqrt{2x - 3}, \qquad X = [1{,}5; \infty).$

Auch die Verkettung von mehr als zwei Funktionen ist möglich. In den Anwendungen ist es oft erforderlich, innere und äußere Funktion einer mittelbaren Funktion zu erkennen und den Definitionsbereich zu bestimmen.

BEISPIEL

10.26. a) Die zu der mittelbaren Funktion

$$y = f(x) = \ln \cos (2x - \pi)$$

verketteten Funktionen sind zu ermitteln.

b) Der Definitionsbereich im Bereich $0 < x < \pi$ ist zu bestimmen.

Lösung:

a) Die Vorstellung, in welchen Schritten ein Funktionswert zu bestimmen ist, führt leicht auf die gesuchten Funktionen. Der Reihe nach werden berechnet:

$$u = 2x - \pi \ \rightarrow\ v = \cos u \ \rightarrow\ y = \ln v.$$

Es ist also $f = g \circ h \circ l$ mit

$u = l(x) = 2x - \pi$, innere Funktion,
$v = h(u) = \cos u$, nächstinnere Funktion,
$y = g(v) = \ln v$, äußere Funktion.

b) Bei der Ermittlung des Definitionsbereiches ist zu beachten, daß der Logarithmus nur für positiven Numerus definiert ist. Aus der Forderung

$$\cos (2x - \pi) > 0$$

folgt unter Beachtung der Periode 2π der Cosinusfunktion

$$-\pi/2 + 2k\pi < 2x - \pi < \pi/2 + 2k\pi,$$
$$\pi/2 + 2k\pi < 2x < 3\pi/2 + 2k\pi,$$
$$\pi/4 + k\pi < x < 3\pi/4 + k\pi$$

und schließlich gemäß Aufgabenstellung: $\underline{\underline{X = (\pi/4; 3\pi/4).}}$

Die Verkettung von Funktion und Umkehrfunktion führt auf die Funktion $y = x$. Da z. B.

$$y = g(x) = e^x \quad \text{und} \quad y = h(x) = \ln x$$

zueinander inverse Funktionen sind, folgt

$$g \circ h\colon\ y = g(h(x)) = e^{\ln x} = x$$

Kontrollfragen

10.22. Welche Einschränkungen können sich bei der Verknüpfung von Funktionstermen ergeben?
10.23. Was ist unter der Verkettung von Funktionen zu verstehen?
10.24. Was ist mit den Begriffen innere und äußere Funktion gemeint?

Aufgaben: 10.23. und 10.24.

10.7. Einteilung der reellen Funktionen

Die Einteilung der Funktionen in Funktionsklassen geschieht nach unterschiedlichen Gesichtspunkten. An dieser Stelle sollen nur zwei oft gebrauchte Einteilungsprinzipien genannt werden.
Alle Funktionen, die sich durch eine Gleichung der Form

$$p_n(x)\, y^n + p_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + p_1(x)\, y + p_0(x) = 0$$
$$(p_i(x) \text{ Polynom von } x)$$

darstellen lassen und gewissen Bedingungen genügen, die hier nicht erschöpfend erklärt werden können, heißen **algebraische Funktionen**. Einfache Beispiele sind

$$y - 2x^2 + 3x - 1 = 0, \quad xy - 2 = 0, \quad 2xy + x^2 - 1 = 0$$
$$y^2 - x^2 + 1 = 0 \quad (y \geqq 0), \quad y^3 - xy + 2 = 0 \quad (y \geqq 1).$$

Zu den algebraischen Funktionen zählen alle ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen, die Wurzelfunktionen und zusammengesetzte Typen wie $y = f(x) = 2x^2 - \sqrt[4]{x + \sqrt{1 - x^2}}$.
Funktionen, die nicht algebraisch sind, werden **transzendente Funktionen** genannt. Einfache Vertreter sind Exponentialfunktionen, logarithmische Funktionen, trigonometrische und zyklometrische Funktionen. Alle bisher aufgeführten Funktionen lassen sich durch einen analytischen Ausdruck darstellen und gehören zu den **elementaren Funktionen.**
Eine andere Einteilung der Funktionen ist die in **rationale** und **nichtrationale Funktionen.** Zu den nichtrationalen Funktionen gehören alle Wurzelfunktionen, die transzendenten Funktionen und aus ihnen zusammengesetzte Funktionen wie

$$y = x + \ln(x^2 + 1), \qquad y = \sqrt{x} - \sin(2x^2 + 1).$$

Die nichtrationalen Funktionen umfassen sowohl einen Teil der algebraischen Funktionen als auch transzendente Funktionen, die nicht elementar zu sein brauchen.

10.8. Logarithmische Funktionsleitern und Funktionspapiere

Grafische Darstellungen sind unentbehrliche Instrumente der Praxis. Sie vermitteln anschauliche Vorstellungen und geben Aufschluß über Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten. Grafische Lösungsverfahren helfen, Aufgaben mit vermindertem Rechenaufwand zu lösen. Funktionsleitern und Funktionspapiere erschließen dazu neue und vielfältige Möglichkeiten. Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist die Geradstreckung von Kurven in Funktionspapieren.

10.8.1. Logarithmische Funktionsleitern

Im cartesischen Koordinatensystem tragen die Koordinatenachsen eine gleichmäßige Teilung, bei der mittels der **Leitergleichung** $s(x) = e_x \cdot x$ einer Zahl x_1 ein Punkt P_1 auf der Koordinatenachse zugeordnet wird (vgl. 9.2.). Die durch Anschreiben gleichabständiger x-Werte entstehende Leiter heißt **reguläre Leiter.** Soll eine solche Leiter mit dem Anfangswert x_0 an einem gewählten Anfangspunkt P_0 beginnen, so lautet die Leitergleichung

$$\boxed{s(x) = e_x(x - x_0).} \tag{10.10}$$

$s(x)$ ist die Entfernung des dem Wert x zugeordneten Punktes P vom Anfangspunkt P_0, e_x die Einheitsstrecke (vgl. Bild 10.56).

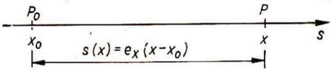


Bild 10.56

Werden gleichabständige x-Werte nach der Leitergleichung

$$\boxed{s(x) = e_x(\lg x - \lg x_0)} \tag{10.11}$$

von einem Anfangspunkt P_0 aus auf einer orientierten Geraden abgetragen, so entsteht eine **logarithmische Leiter**. Charakteristisch für eine solche Funktionsleiter ist, daß die Teilstrichabstände gleichabständiger x-Werte $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ nicht mehr untereinander gleich sind, da diese Abstände die jeweilige Funktionswertdifferenz $\lg x_{i+1} - \lg x_i$ darstellen. Die Einheitsstrecke e_x erscheint als Abstand zweier Argumente a und $10a$ wegen $\lg 10a - \lg a = \lg 10 = 1$.

BEISPIEL

10.27. Es ist eine Funktionsleiter für die Logarithmusfunktion $y = \lg x$ im Bereich $0{,}1 \leq x \leq 50$ mit $e_x = 40$ mm herzustellen.

Lösung: Der Anfangswert ist $x_0 = 0{,}1$. Die Leitergleichung lautet somit:

$$s(x) = 40 \text{ mm} \cdot (\lg x - \lg 0{,}1),$$
$$s(x) = 40 \text{ mm} \cdot (1 + \lg x).$$

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{s(x)}{\text{mm}}$	0	12,0	19,1	24,1	28,0	31,1	33,8	36,1	38,2	40,0

Weitere Teilpunkte müssen nicht berechnet werden, weil sich die Teilung wegen $\lg 10^n x = \lg 10^n + \lg x = n + \lg x$ zwischen 1 und 10 und 10 und 100 wiederholt (vgl. Bild 10.57). Die Einheitsstrecke e_x erscheint als Abstand aufeinanderfolgender Zehnerpotenzen. So haben 0,1 und 1 auf der Funktionsleiter den Abstand $e_x = 40$ mm. Die Stufe Δx muß abschnittsweise verändert werden, weil die Teilstriche mit wachsendem x immer enger zusammenrücken.

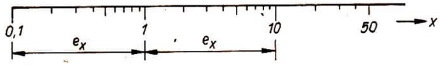


Bild 10.57

10.8.2. Einfach-logarithmisches Papier

Bei den folgenden Betrachtungen wird im Interesse einer besseren Lesbarkeit der Formeln s_x statt $s(x)$ geschrieben.
In einfach-logarithmischem Papier ist eine Achsenrichtung regulär, die andere logarithmisch geteilt. Der Graph einer Funktion erscheint in einem solchen Parallelkoordinatensystem verzerrt. Es soll untersucht werden, welche Funktionen in einem solchen Funktionspapier als Geraden dargestellt werden. Die x-Achse sei regulär, die y-Achse logarithmisch geteilt. Da x_0 und $\lg y_0$ als Konstanten nur Parallelverschiebungen im Koordinatensystem bewirken, soll zur Vereinfachung $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$, also $\lg y_0 = 0$, gesetzt werden. Dann lauten die Leitergleichungen der Koordinatenachsen

$$s_x = e_x \cdot x, \qquad s_y = e_y \cdot \lg y.$$

Für eine Gerade durch die Punkte $P_0(0; b)$ und $P(x; y)$ ergibt sich aus dem Anstieg (vgl. Bild 10.58)

$$m = \frac{s_y - s_b}{s_x}$$

die der linearen Funktion entsprechende Beziehung

$$\boxed{s_y = m \cdot s_x + s_b.} \tag{10.12}$$

Nach Einsetzen der Leitergleichungen folgt

$$e_y \cdot \lg y = m \cdot e_x x + e_y \lg b$$

$$\lg y = m \frac{e_x}{e_y} \cdot x + \lg b.$$

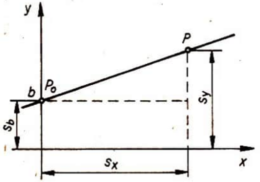


Bild 10.58

Die Werte $me_x/e_y = p$ und $\lg b$ sind Zahlen, die durch die Einheitsstrecke und durch die Lage der dargestellten Geraden bestimmt sind. Aus

$$\lg y - \lg b = px$$

folgt

$$\frac{y}{b} = 10^{px} = (10^p)^x$$

und mit $10^p = a$

$$y = b \cdot a^x.$$

Satz

In einfach-logarithmischem Papier mit regulärer x-Achse wird die Exponentialfunktion

$$\boxed{y = b \cdot a^x} \tag{10.13}$$

als Gerade dargestellt.

Um $y = b \cdot a^x$ in einfach-logarithmischem Papier zu zeichnen, genügt es demnach, zwei Wertepaare der Funktion zur Gewinnung zweier Punkte zu bestimmen. Die y-Achse wird wegen $a^0 = 1$ in $P(0; b)$ geschnitten. Bild 10.59 zeigt die Funktionen

$$y = 1{,}5^x, \quad y = 2^x, \quad y = 4^x, \quad y = 0{,}5^x.$$

Weil $b = 1$ ist, laufen alle diese Geraden durch den Punkt $P(0; 1)$. Für $a > 1$ steigt, für $0 < a < 1$ fällt die Gerade. $y = 2^x$ und $y = 0{,}5^x$ liegen wie im cartesischen Koordinatensystem spiegelbildlich zur Geraden $x = 0$, da $0{,}5^x = 2^{-x}$ ist. Die Graphen der Funktionen

$$y = 2^x, \quad y = 0{,}5 \cdot 2^x, \quad y = 3 \cdot 2^x, \quad y = 8 \cdot 2^x$$

verlaufen parallel, weil sie wegen gleicher Basis $a = 2$ alle den gleichen Anstieg haben (Bild 10.60).

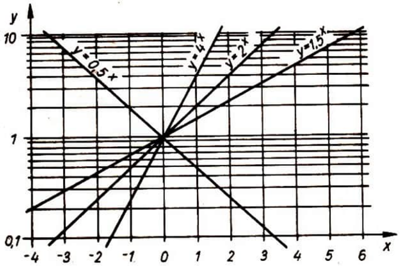


Bild 10.59

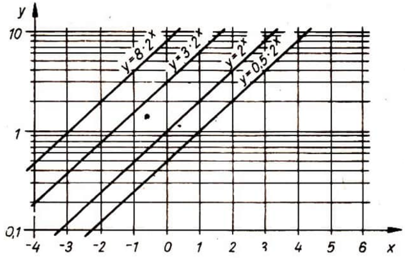


Bild 10.60

Werden in einer Exponentialfunktion

$$y = p \cdot q^x$$

die Variablen x und y vertauscht, so ergibt sich die Umkehrfunktion

$$x = p \cdot q^y .$$

Logarithmiert und umgestellt folgt

$$\lg x = \lg p + y \lg q ,$$

$$y = \frac{\lg x}{\lg q} - \frac{\lg p}{\lg q} .$$

Das ist eine Funktion der Form $y = a \lg x + b$.

Satz

In einfach-logarithmischem Papier mit regulärer y-Achse wird die Funktion

$$\boxed{y = a \lg x + b} \qquad (10.14)$$

als Gerade dargestellt.

BEISPIELE

10.28. Die Funktion $y = 2e^{-0{,}3x}$ ist für $-5 \leqq x \leqq 5$ in einfach-logarithmischem Papier mit der logarithmischen Einheitsstrecke 62,5 mm als Gerade darzustellen.

Lösung: Wegen $2e^{-0{,}3x} = 2(e^{-0{,}3})^x$ entspricht die Funktionsgleichung der Gl. (10.13) und kann gemäß der Aufgabenstellung als Gerade dargestellt werden. Mit der Wertetabelle

x	0	5	−5
y	2	0,45	9,0

sind zwei Punkte der Geraden und ein Kontrollpunkt gegeben (Bild 10.61).

10.29. Die Funktion $y = \ln x$ ist für $0{,}1 \leqq x \leqq 20$ in einfach-logarithmischem Papier als Gerade darzustellen.

Lösung: Wegen $\ln x = \ln 10 \cdot \lg x$ entspricht die Funktionsgleichung der Gl. (10.14). Die Ordinatenachse ist regulär zu teilen. Es genügt wieder, zwei Punkte und einen Kontrollpunkt der Geraden zu bestimmen:

x	0,1	1	10
y	−2,3	0	2,3

(vgl. Bild 10.62).

10.30. Eine Flüssigkeit, deren Temperatur zur Zeit $t = 0$ um 50,2 °C über der Umgebungstemperatur liegt, kühlt sich ab. Dabei wird folgender Verlauf der Übertemperatur beobachtet:

t/min	0	2	4	6	8	10	12
$\Delta T/\text{K}$	50,2	46,2	42,8	39,8	36,8	34,3	32,2

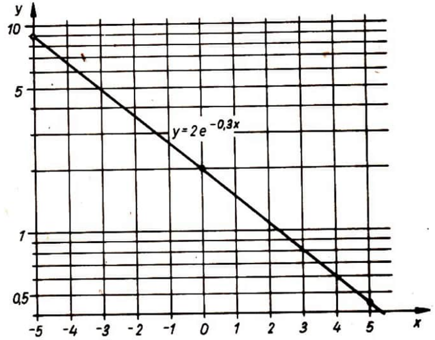


Bild 10.61

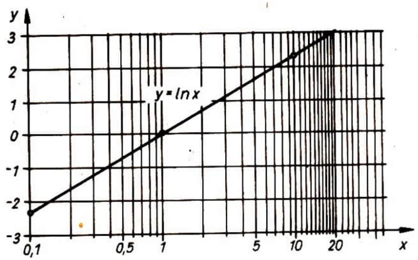


Bild 10.62

Es ist zu überprüfen, ob die Abnahme der Übertemperatur dem NEWTONschen Abkühlungsgesetz $\Delta T = T_0\,e^{-mt}$ folgt. Das Gesetz ist aufzustellen.
Welche Übertemperatur ist nach 20 min zu erwarten?

Lösung: In Bild 10.63 sind die im Versuch ermittelten Punkte in einfach-logarithmischem Papier eingetragen. Sie liegen annähernd auf einer Geraden. Die Wertepaare genügen also einer Funktionsgleichung der Form

$$y = b \cdot a^x \tag{I}$$

mit $y = \Delta T/_\mathrm{K}$ und $x = t/_\mathrm{min}$. Günstig zu allen Punkten liegt eine Gerade durch die Punkte (0; 50,2) und (10; 34,3). Diese beiden Wertepaare liefern durch Einsetzen in (I) zwei Gleichungen für a und b. Aus

$$50{,}2 = b \cdot a^0 \quad \text{folgt} \quad b = 50{,}2.$$

Mit dem zweiten Wertepaar ergibt sich

$$34{,}3 = 50{,}2 \cdot a^{10}, \qquad a = 0{,}9626.$$

Damit lautet die Funktionsgleichung

$$y = 50{,}2 \cdot 0{,}9626^x.$$

Die Basis e wird durch $a = e^{\ln a}$ eingeführt. Mit $\ln a = -0{,}038$ folgt

$$y = 50{,}2 \cdot e^{-0{,}038x}.$$

Abkühlungsgesetz: $\underline{\underline{\Delta T = 50{,}2\ \mathrm{K} \cdot e^{-0{,}038t/\mathrm{min}}}}$.

$$\Delta T\ (20\ \mathrm{min}) = 50{,}2\ \mathrm{K} \cdot e^{-0{,}038 \cdot 20} = \underline{\underline{23{,}5\ \mathrm{K}}}.$$

Die Übertemperatur beträgt nach 20 min 23,5 K.

Bemerkung: $m = 0{,}038\ \mathrm{min}^{-1}$ ist die sogenannte Abkühlungskonstante. Sie kann näherungsweise so interpretiert werden, daß sich die Übertemperatur in einer Minute um etwa 3,8% verringert.

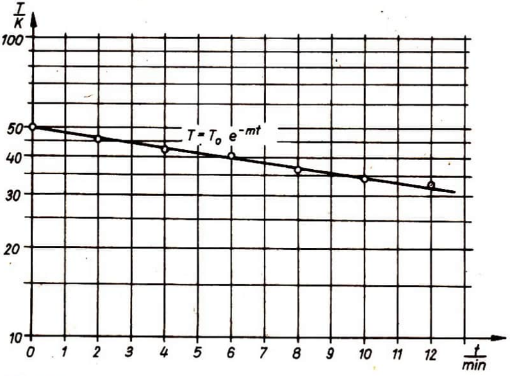


Bild 10.63

10.8.3. Doppelt-logarithmisches Papier

In doppelt-logarithmischem Papier sind die beiden Achsen mit gleicher Einheitsstrecke $e_x = e_y$ geteilt. Wird wieder vereinfachend $x_0 = y_0 = 1$ gewählt, so lauten die Leitergleichungen

$$s_x = e_x \cdot \lg x \qquad s_y = e_x \cdot \lg y.$$

Um festzustellen, welche Funktionen in diesem Papier als Gerade dargestellt werden, sind die Leitergleichungen in Gl. (10.12) einzusetzen:

$$\begin{aligned} e_x \cdot \lg y &= m \cdot e_x \cdot \lg x + e_x \cdot \lg b, \\ \lg y &= m \cdot \lg x + \lg b, \\ y &= b \cdot x^m. \end{aligned}$$

Dabei bestimmt b den Schnittpunkt mit der Geraden $x = x_0 = 1$, also der y-Achse, und der Exponent m den Richtungsfaktor der Geraden.

Satz

In doppelt-logarithmischem Papier wird die Potenzfunktion

$$\boxed{y = b \cdot x^n} \tag{10.15}$$

als Gerade dargestellt.

Bild 10.64 zeigt die Funktionen

$$y = x, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = x^{-2}, \quad y = \sqrt{x},$$

Bild 10.65 die Funktionen

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad y = 5\sqrt{x}, \quad y = 0{,}2\sqrt{x}.$$

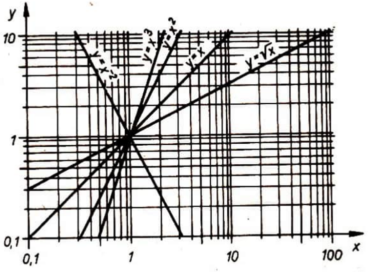


Bild 10.64

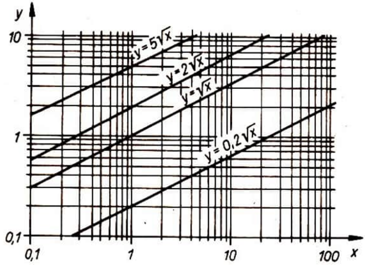


Bild 10.65

BEISPIEL

10.31. Bei der Untersuchung einer geradlinigen, ungleichförmigen Bewegung ergeben sich folgende Meßwerte:

$t/_s$	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
$s/_m$	0,11	0,44	1,00	1,77	2,77	3,99

Die Meßpunkte sind in doppelt-logarithmisches Papier zu übertragen.
Das Weg-Zeit-Gesetz der Bewegung ist aufzustellen.

Lösung: Die Meßpunkte liegen auf einer Geraden (Bild 10.66). Mit $t/_s = x$ und $s/_m = y$ besteht zwischen den Wertepaaren die Beziehung

$$y = b \cdot x^n,$$

in die, um b und n ermitteln zu können, zwei Wertepaare einzusetzen sind. Sie lassen sich beliebig auswählen, da sie alle der gesuchten Beziehung zumindest näherungsweise genügen.

$$1{,}00 = b \cdot 0{,}9^n \tag{I}$$

$$3{,}99 = b \cdot 1{,}8^n \tag{II}$$

Es wird b eliminiert, indem (II) durch (I) dividiert wird:

$$\frac{3{,}99}{1{,}00} = \left(\frac{1{,}8}{0{,}9}\right)^n \quad \text{also} \quad n = \frac{\lg 3{,}99}{\lg 2} = 2{,}00.$$

Aus (I) ergibt sich mit $n = 2$

$$1{,}00 = b \cdot 0{,}9^2, \qquad b = 1{,}23.$$

Kurvengleichung: $y = 1{,}23x^2$.

Das Bewegungsgesetz lautet: $\underline{\underline{s = 1{,}23\ \text{m/s}^2 \cdot t^2}}$

und stellt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $a = 2{,}46\ \text{m/s}^2$ dar.

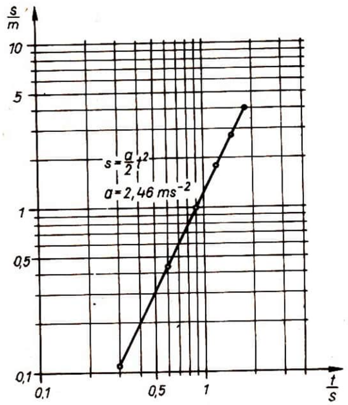


Bild 10.66

Kontrollfragen

10.25. Welche Funktionen werden in einfach-logarithmischem Papier als Gerade dargestellt?

10.26. Unter welcher Bedingung ergeben mehrere Exponentialfunktionen in einfach-logarithmischem Papier a) eine parallele Geradenschar; b) ein Geradenbüschel durch den Punkt $P(0; k)$?

10.27. a) Welche Funktionen werden in doppelt-logarithmischem Papier als Gerade dargestellt?
b) Wodurch wird der Anstieg dieser Geraden bestimmt?

Aufgaben: 10.25. bis 10.31.

10.9. Aufgaben

10.1. Von den folgenden Funktionen sind Definitionsbereich und Wertevorrat zu bestimmen.

a) $y = -x$ b) $y = 2x^2 - 3$ c) $y = \sqrt{1 - x^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e) $y = \lg(1 + x)$ f) $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$

g) $A = f(a) = a^2$ (A Fläche, a Seite eines Quadrates)

10.2. Wie lautet die explizite Form der Funktionsgleichung?

a) $2x + 3y - 6 = 0$ b) $2x^2 - 4y = 6$

c) $y^2 + x = 0,\ \ y \leqq 0$ d) $xy - 1 = 0$ e) $x^2y = x + y$

10.3. Welche der durch die nachstehenden Wertetabellen gegebenen Abbildungen sind keine Funktionen? Begründung!

F_1:

x	-1	0	-2
y	2	3	-4

F_2:

x	1	2	3	2
y	2	-4	1	3

F_3:

x	-2	1	0	-1
y	2	2	2	2

F_4:

x	-1	1	-1	1
y	2	0	3	1

10.4. Der Wertebereich ist so einzuschränken, daß durch die nachstehenden Gleichungen eine Funktion gegeben ist. Es ist die explizite Form der Funktionsgleichung aufzustellen.

a) $y^2 - x = 0$ b) $y^2 + x - 1 = 0$ c) $y^2 - x^3 = 0$

10.5. Für die in 10.4. ermittelten Funktionsgleichungen ist der Funktionswert $y(3)$ zu bestimmen.

10.6. Von den nachstehenden Funktionen sind die Umkehrfunktionen zu bilden.

a) f:

x	0	1	2	3
y	2	-1	2	3

b) f:

x	-2	0	1	2
y	-1	0	2	3

10.7. Die nachstehenden Funktionen sind umzukehren.

a) $y = f(x) = 2x - 3$ b) $y = f(x) = -\dfrac{2}{3}x - 4$

c) $y = f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ d) $y = f(x) = 1 - x^2, \quad x \in P$

e) $y = f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad x \geqq -1$

10.8. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche ungerade?

a) $y = 2x$ b) $y = 2x^3 - x + 2$ c) $y = \dfrac{1}{x}$

d) $y = \dfrac{1}{x + 1}$ e) $y = 2x^2 - x$ f) $y = -3x^4 + 2x^2 + 2$

10.9. Einer Zahlentafel sind nebenstehende Wertepaare entnommen.

a) Welche Werte haben $f(2{,}14)$ und $f(2{,}27)$?

b) Zu $y_1 = 0{,}9724$ und $y_2 = 0{,}9798$ sind x_1 und x_2 zu bestimmen.

x	$y = f(x)$
2,1	0,9705
2,2	0,9757
2,3	0,9801

10.10. Die Dichte ϱ trockener Luft bei 101,30 kPa ist aus nachstehender Tabelle für $t = 12\,°C$, 18 °C, 24 °C, 27 °C zu bestimmen.

$t/°C$	0	5	10	15	20	25	30
$\varrho/\mathrm{kg\,m^{-3}}$	1,293	1,270	1,248	1,226	1,205	1,185	1,165

10.11. Für die Siedetemperatur des Wassers in Abhängigkeit vom Druck liefert eine Tabelle folgende Werte:

p/kPa	200,05	300,08	400,11	500,13	600,16	700,19	800,22	1000,27
t_S/°C	120,2	133,5	143,6	151,8	158,8	164,9	170,4	180,0

a) Kann in dieser Tabelle linear interpoliert werden?

b) Durch lineare Interpolation ist t_S für $p = 735{,}49$ kPa zu bestimmen. Ist die erste Dezimale nach dem Komma als sicher anzunehmen?

10.12. Art und Verlauf der Kurven der folgenden Funktionen sind zu beschreiben.

a) $y = 2x^4 - 3$ b) $y = -\frac{1}{2}(x-3)^5 + 1$

c) $y = -\frac{4}{3}(x+2)^4 + 3$ d) $y = \frac{5}{8}(x+1{,}5)^7 - 2$

10.13. Für die angegebenen Funktionen ist unter Anwendung des HORNERschen Schemas (vgl. 6.2.) eine Wertetabelle aufzustellen.

a) $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 15x - 9,\quad x \in \{-2; -1; \ldots; 3; 4\}$

b) $y = f(x) = 2{,}3x^3 - 3{,}2x^2 + 5{,}5,\quad x \in \{-3; -2; \ldots; 2; 3\}$

c) $y = f(x) = -0{,}3x^4 + 1{,}8x^2 + 1{,}2x - 4{,}8,\quad x \in \{-2; -1; \ldots; 3; 4\}$

d) $y = f(x) = -0{,}3x^4 + 1{,}3x^3 - 4{,}6x + 3{,}1,\quad x \in \{2{,}0;\ 2{,}2; \ldots; 3{,}4\}$

10.14. Nullstellen, Pole und Asymptoten nachstehender Funktionen sind zu bestimmen.

a) $y = \frac{2}{4x+5}$ b) $y = \frac{3x}{2x-5}$

c) $y = \frac{2x+5}{x-3}$ d) $y = \frac{6-4x}{2x+3}$

10.15. Welche der nachstehenden Funktionen sind im gesamten Definitionsbereich eigentlich monoton? Die Art der Monotonie ist anzugeben. Bei nichtmonotonen Funktionen sind die Monotonieintervalle zu nennen.

a) $y = x^3$ b) $y = |x|$ c) $y = \frac{1}{x}$ d) $y = x^2 - 2x + 4$

10.16. Die Bilder der folgenden Funktionen sind zu skizzieren.

a) $y = \sqrt{x-2}$ b) $y = \sqrt{2-x}$ c) $y = \sqrt[3]{x+1}$

10.17. Die Funktionsgleichung $y = \log_a x$ ist in $y = \frac{1}{\ln a} \ln x$ umzuformen.

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_2 x$ c) $y = \lg x$

10.18. Die Kondensatorspannung u_C klingt bei der Entladung nach dem Gesetz

$$u_C = f(t) = U_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ab (U_0 Spannung zur Zeit $t = 0$, τ Zeitkonstante). Die Funktion ist für $U_0 = 3$ kV, $\tau = 2$ s, $0 \leqq t \leqq 8$ s grafisch darzustellen.

10.19. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche ungerade?

a) $y = e^{2x}$ b) $y = e^{x^2}$

10.20. Desgl.

a) $y = \cos x$ b) $y = x \sin x$ c) $y = 2 \sin x + \tan x$

10.21. Es sind zu bestimmen:

a) arcsin 0,5 b) arccos 0,5 c) arctan 1

d) arccos (−1) e) $\arccos \frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

10.22. Desgl.

a) arctan 1,85 b) arcsin (−0,64) c) arccos (−0,81)

d) arccos (−0,12) e) arcsin (−0,91) f) arccot (−2,66)

10.23. Nachstehende Funktionen sind im Bereich $0 \leqq x \leqq 2\pi$ grafisch darzustellen:

a) $y = 0{,}5x + \sin 2x$ b) $y = \sin x + \sin 2x$

10.24. Die folgenden Funktionen sind grafisch darzustellen:

a) $y = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$

10.25. Die folgenden Funktionen sind im Bereich $-5 \leqq x \leqq 5$ in einfach-logarithmischem Papier darzustellen. Für das Argument x_1 ist der Funktionswert abzulesen.

a) $y = 1{,}2^x, \quad x_1 = 0{,}5$ b) $y = 2 \cdot 0{,}8^x, \quad x_1 = 1{,}5$

c) $y = 2^{-0{,}3x}, \quad x_1 = -3$

10.26. Die folgenden Funktionen sind für $0{,}1 \leqq x \leqq 10$ in doppelt-logarithmischem Papier darzustellen. Für das Argument x_1 ist der Funktionswert abzulesen.

a) $y = \dfrac{2}{x}, \quad x_1 = 0{,}3$ b) $y = \sqrt[5]{x}, \quad x_1 = 0{,}25$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x_1 = 0{,}7$

10.27. Die Frequenz des Fadenpendels beträgt bei kleiner Amplitude

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

a) Die Beziehung ist für $0{,}1\ \text{m} \leqq l \leqq 2\ \text{m}$ als Gerade darzustellen ($g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$, $2\pi \approx 6{,}28$).

b) Aus der Darstellung ist die Fadenlänge abzulesen, für die $f = 1\ \text{s}^{-1}$ beträgt.

10.28. Beim freien Fall gilt

$$v = \sqrt{2gh}.$$

a) Das Gesetz ist für $0{,}1\ \text{m} \leqq h \leqq 10\ \text{m}$ als Gerade darzustellen ($g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$).

b) Aus der grafischen Darstellung ist die Geschwindigkeit bei einem Fallweg von 6 m zu entnehmen.

10.29. Die Funktion

$$y = 0{,}5 \ln \frac{2}{x}$$

ist als Gerade darzustellen.

10.30. Die Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ist in Funktionspapier für $0{,}1\ \text{s} \leqq T \leqq 5\ \text{s}$ als Gerade darzustellen.

10.31. Wird die Bewegung eines Körpers gleichmäßig bis zum Stillstand verzögert, so ergibt sich seine Anfangsgeschwindigkeit bei der Verzögerung a aus dem Bremsweg s:

$$v = \sqrt{2as}.$$

Die Beziehung ist für $a = 2\ \text{m/s}^2$, $3\ \text{m/s}^2$, $4\ \text{m/s}^2$ und für $1\ \text{m} \leqq s \leqq 50\ \text{m}$ als Gerade darzustellen.

10.32. Von den folgenden Funktionen sind Definitionsbereich und Wertevorrat zu bestimmen.

a) $y = -\sqrt{1 + x^2}$ b) $y = 2 - 3x$ c) $y = 1 - x^2$

d) $y = 1 + 2^x$ e) $y = \lg \frac{1}{x}$ f) $y = 2^{-x} - 1$

g) $p = f(A) = \frac{F_0}{A}$ (p Druck, F_0 die auf die Fläche A wirkende Kraft)

10.33. Wie lautet die explizite Form der Funktionsgleichung?

a) $4y^2 - x + 4 = 0, \quad y \geqq 0$ b) $y^3 + x = 0, \quad y \leqq 0$

c) $y^2 - 4y - 2x = 0, \quad y \geqq 2$ d) $xy = x + y + 2$

10.34. Der Wertebereich ist so einzuschränken, daß durch die nachstehenden Gleichungen eine Funktion gegeben ist. Es ist die explizite Form der Funktionsgleichung aufzustellen.

a) $y^2 - 2y + x^2 = 0$ b) $y^2 + 4y - x^2 = 0$ c) $y^2 - x^2 = 0$

10.35. Für die in 10.34. ermittelten Funktionsgleichungen ist $y(-2)$ zu bestimmen.

10.36. Die nachstehenden Funktionen sind umzukehren.

a) $y = f(x) = |x|$ b) $y = f(x) = x^2 - 2x + 1, x \geqq 1$

c) $y = f(x) = -\sqrt[5]{x}, \quad x \geqq 0$

10.37. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche ungerade?

a) $y = 3x^2 + 1$ b) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$ c) $y = 2x^3 - 4x$

d) $y = \frac{x^2 + 2}{x^3 - 2x}$ e) $y = \frac{x}{x^2 + 2}$ f) $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

10.38. Aus der grafischen Darstellung sind die Nullstellen der nachstehenden Funktionen zu bestimmen (Millimeterpapier!).

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ b) $y = x^3 - 3{,}25x + 1{,}5$

c) $y = x^3 - 2{,}5x^2 + 4x - 10$ d) $y = 2x^3 - 5{,}2x^2 + 5{,}12$

10.39. Die Nullstellen der Funktion $y = x^3 + ax + b$ lassen sich auf grafischem Wege ermitteln, indem die Abszissen der Schnittpunkte der zu $y = x^3$ und $y = -ax - b$ gehörenden Kurven ermittelt werden (vgl. 8.1.).

a) $y = x^3 - 2x + 1$ b) $y = x^3 - 3{,}01x - 1{,}14$

c) $y = -x^3 - 0{,}5x + 3{,}2$ d) $y = 1{,}2x^3 + 0{,}72x - 2{,}88$

10.40. Nullstellen, Pole und Asymptoten nachstehender Funktionen sind zu bestimmen.

a) $y = \frac{2}{4 - 3x}$ b) $y = \frac{3x + 6}{4 - 2x}$ c) $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$

d) $y = \frac{2x^2 - 4x}{3x^2 + 6}$ e) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 6x - 4}$

10.41. Welche der nachstehenden Funktionen sind im gesamten Definitionsbereich eigentlich monoton? Die Art der Monotonie ist anzugeben. Bei nichtmonotonen Funktionen sind die Monotonieintervalle zu nennen.

a) $y = -x^4 + 2$ b) $y = 1 - \frac{1}{x}$ c) $y = x^n$ d) $y = |x - 1|$

10.42. Die Bilder der nachstehenden Funktionen sind zu skizzieren.

a) $y = -\sqrt{1{,}5 - x}$ b) $y = \sqrt{2{,}25x + 4{,}5}$ c) $y = 1 - \sqrt{6 - 4x}$

10.43. Funktion $y = f(x) = a^x$ und Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ sind grafisch darzustellen für

a) $a = 3$ b) $a = 1/2$.

10.44. Die Funktionsgleichung $y = \log_a x$ ist in $y = \frac{1}{\ln a} \ln x$ umzuformen.

a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $y = \log_{0,8} x$ c) $y = \log_{0,1} x$

10.45. Die Kurven der Funktionen f_2, f_3, f_4 in Bild 10.67 sind aus der Funktion f_1 durch kongruente Transformationen (Verschiebung und Spiegelung) hervorgegangen. Wie lauten die Funktionsgleichungen?

10.46. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche ungerade?

a) $y = x^2 e^x$ b) $y = \sin x$ c) $y = \sin x + \cos x$
d) $y = \sin^2 x$ e) $y = e^{\cos x}$ f) $y = e^{x^2} \sin x$

10.47. Das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen ist im gesamten Definitionsbereich zu beschreiben.

a) $y = \ln x$ b) $y = 2^{-x}$ c) $y = \ln \frac{1}{x}$

10.48. Die folgenden Funktionen sind im Bereich $-5 \leqq x \leqq 5$ in einfach-logarithmischem Papier darzustellen. Für das Argument x_1 ist der Funktionswert abzulesen.

a) $y = 1{,}6^{-x}$, $x_1 = 2{,}5$ b) $y = 2^{-x}$, $x_1 = 0{,}5$
c) $y = 2{,}5e^{0{,}2x}$, $x_1 = -4$

10.49. Ein Betrag b_0 wächst bei einem Zinsfuß p durch Zinseszins in n Zinsperioden auf den Endwert

$$b_n = b_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

a) Das Gesetz ist für $b_0 = 100$ M, $p = 3$; 3,25; 5 und für $0 \leqq n \leqq 50$ als Gerade darzustellen.
b) In welcher Zeit hat sich ein Betrag bei $p = 3$; 3,25; 5 verdoppelt, wenn die Zinsperiode 1 Jahr ist?

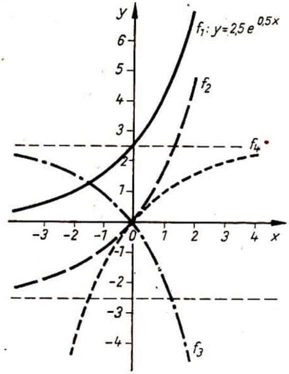


Bild 10.67

10.50. Die folgenden Funktionen sind für $0{,}1 \leqq x \leqq 10$ in doppelt-logarithmischem Papier darzustellen. Für das Argument x_1 ist der Funktionswert abzulesen.

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_1 = 0{,}6$ b) $y = 1{,}5\sqrt[3]{x}$, $x_1 = 2{,}4$

c) $y = 0{,}1x\sqrt{x}$, $x_1 = 6$

10.51. Nach dem WEBER-FECHNERschen Gesetz wächst die Stärke der Empfindung eines Reizes wie der Logarithmus der physikalisch gemessenen Reizstärke. Als Maß für den Schallintensitätspegel ist deshalb

$$L_J = 10 \lg \frac{J}{J_0} \quad \text{(Dezibel)}$$

definiert, mit $J_0 = 10^{-12}$ W/m² (Schallintensität an der Hörschwelle bei 1 kHz). Die Schallintensität ist für $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \leqq J \leqq 10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}$ als Gerade darzustellen.

10.52. Das Entladungsgesetz des Kondensators

$$u_c = U_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

ist für $0 \leqq t \leqq 30$ s als Gerade darzustellen ($U_0 = 200$ V, $R = 600$ kΩ, $C = 20$ µF). $\tau = RC$ ist die sogenannte Zeitkonstante. Die Spannung des Kondensators nach $t = \tau$, sowie 2τ ist einzuzeichnen.

11. Kurven zweiter Ordnung

11.0. Vorbemerkung

In diesem Abschnitt werden anhand ausgewählter Kurven, die für die Naturwissenschaft und Technik von besonderer Bedeutung sind, die Fähigkeiten zur Untersuchung geometrischer Probleme mit analytischen Methoden weiter vertieft. Es wird gezeigt, wie aus der planimetrischen Definition einer Kurve die Kurvengleichung hergeleitet werden kann, und wie sich dann aus der Kurvengleichung besondere Eigenschaften der Kurve erkennen lassen. Gleichzeitig werden grundlegende Kenntnisse über diese Kurven, unter anderem auch einige Konstruktionsvorschriften, vermittelt.
Es werden diejenigen Kurven betrachtet, die in einem cartesischen Koordinatensystem durch eine **Kurvengleichung 2. Grades** der allgemeinen Form

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{11.1}$$

dargestellt werden. Die zu (11.1) gehörenden Kurven, die sich je nach der Wahl der Koeffizienten A bis F, d. h. nach ihrer Belegung mit reellen Zahlen ergeben, heißen **Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel** und haben den gemeinsamen Namen **Kurven 2. Ordnung** oder **Kegelschnitte,** da sie als Schnittkurven beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene auftreten.

11.1. Der Kreis

Bekannt ist aus der Planimetrie für den Kreis die

Definition

Der **Kreis** ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene einen konstanten Abstand haben.

Der feste Punkt heißt Mittelpunkt M, der konstante Abstand heißt Radius r des Kreises.
Die zum Kreis gehörende Kurvengleichung ist aufzustellen. Der Mittelpunkt M habe in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten x_M, y_M. Es sei $P(x; y)$ ein variabler Punkt des Kreises (Bild 11.1). Nach der Definition ist stets

$$\overline{PM} = r.$$

Daraus folgt nach (9.1) mit den Koordinaten von P und M:

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r \qquad \text{bzw. die}$$

allgemeine Kreisgleichung $\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.}$ (11.2)

Die Gleichung wird einfacher, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, daß der Ursprung O und der Mittelpunkt M zusammenfallen (Bild 11.2). Mit $x_M = 0$, $y_M = 0$ folgt aus (11.2) die

Mittelpunktsgleichung des Kreises $\boxed{x^2 + y^2 = r^2.}$ (11.3)

oder in expliziter Form

$$\boxed{y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}}. \qquad (11.4)$$

Damit der Radikand in (11.4) positiv bleibt, ist in Übereinstimmung mit Bild 11.2 $x \in X = [-r; r]$ zu wählen, woraus nach (11.4) $y \in Y = [-r; r]$ folgt. Für $x \notin [-r; r]$, also $x < -r$ und $x > r$, wird y imaginär, und es gibt entsprechend Bild 11.2 keine Kurvenpunkte mehr.
In (11.3) kommen x und y nur in der 2. Potenz vor. Erfüllt daher ein Wertepaar $(x_1; y_1)$ die Kurvengleichung, d. h. ist $P_1(x_1; y_1)$ ein Punkt des Kreises, dann liegen auch die Punkte $P_2(-x_1; y_1)$, $P_3(x_1; -y_1)$, $P_4(-x_1; -y_1)$ auf dem Kreis (Bild 11.3). Die x- und die y-Achse sind Symmetrieachsen des Kreises. Auch bei anderen Kurvengleichungen, die x und y nur in der 2. Potenz enthalten, kann gefolgert werden, daß die Koordinatenachsen Symmetrieachsen sind.
Für das Pluszeichen in (11.4) ergibt sich der über der x-Achse, für das Minuszeichen der unter der x-Achse gelegene Halbkreis (Bild 11.4).

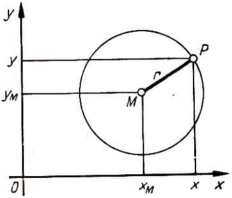


Bild 11.1

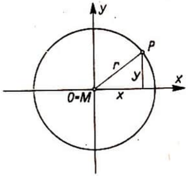


Bild 11.2

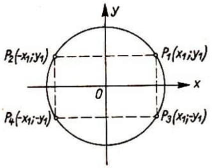


Bild 11.3

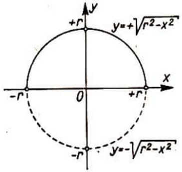


Bild 11.4

BEISPIELE

11.1. Wie heißt die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und der durch den Punkt $P_0(1{,}5;\ -2)$ geht?

Lösung: Die Koordinaten von P_0 müssen die Mittelpunktsgleichung (11.3) erfüllen:

$$1{,}5^2 + (-2)^2 = r^2.$$

Daraus folgt $r^2 = 6{,}25$, und die Kreisgleichung lautet

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = 6{,}25.}}$$

11.2. Gegeben ist ein Kreis mit der Gleichung

$$3x^2 + 3y^2 - 30x + 18y + 54 = 0. \tag{I}$$

Wo liegt sein Mittelpunkt, und wie groß ist sein Radius?

Lösung: Gleichung (I) wird auf die Form (11.2) gebracht, so daß sich x_M und y_M sowie r sofort ablesen lassen.
Die Division der Kurvengleichung durch 3 und Umstellung ergibt

$$x^2 - 10x + y^2 + 6y = -18.$$

Nach Addition der quadratischen Ergänzungen der Glieder mit x und y folgt:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = 25 + 9 - 18$$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Der Vergleich mit (11.2) liefert $\underline{\underline{x_M = 5}}$, $\underline{\underline{y_M = -3}}$ und $\underline{\underline{r = 4}}$.

11.3. Von der Achse eines im Kreisbogen liegenden Eisenbahngleises sind die Koordinaten dreier Punkte bekannt:
$A(201{,}20;\ 300{,}04)$, $B(285{,}58;\ 214{,}36)$, $C(436{,}85;\ 129{,}71)$.
Gesucht werden Radius und Mittelpunkt des Kreises.

Lösung: Der Kreis hat allgemein die Gleichung (11.2). Die Punkte A, B, C sollen auf dem Kreis liegen; das ergibt die Bedingungen:

$$A \in k: \quad (201{,}20 - x_M)^2 + (300{,}04 - y_M)^2 = r^2 \tag{II}$$

$$B \in k: \quad (285{,}58 - x_M)^2 + (214{,}36 - y_M)^2 = r^2 \tag{III}$$

$$C \in k: \quad (436{,}85 - x_M)^2 + (129{,}71 - y_M)^2 = r^2 \tag{IV}$$

Aus den drei Gleichungen (II), (III) und (IV) können die drei Unbekannten x_M, y_M und r berechnet werden. Durch Ausmultiplizieren entstehen die Gleichungen:

$$x_M^2 + y_M^2 - 402{,}40x_M - 600{,}08y_M + 130\,505{,}44 = r^2 \tag{V}$$

$$x_M^2 + y_M^2 - 571{,}16x_M - 428{,}72y_M + 127\,506{,}15 = r^2 \tag{VI}$$

$$x_M^2 + y_M^2 - 873{,}70x_M - 259{,}42y_M + 207\,662{,}61 = r^2. \tag{VII}$$

Die Gleichungen werden paarweise subtrahiert:

$$\text{(V)}-\text{(VI)}: \quad 168{,}76x_M - 171{,}36y_M + 2\,999{,}29 = 0$$

$$\text{(VI)}-\text{(VII)}: \quad 302{,}54x_M - 169{,}30y_M - 80\,156{,}46 = 0.$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem ergeben sich

$$\underline{\underline{x_M = 612{,}03}},\ \underline{\underline{y_M = 620{,}25}}$$

und durch Einsetzen dieser beiden Werte in eine der Gleichungen (II) bis (IV)

$$\underline{\underline{r = 520{,}88.}}$$

11.4. Ein auf der Innenseite versilberter Kugelabschnitt stellt einen Hohlspiegel dar. Eine Ebene durch die Kugelmitte schneide den Spiegel im Bogen eines Kreises mit der Gleichung: $x^2 + y^2 = 144$. Ein in der Schnittebene liegender und auf den Spiegel auftreffender Strahl habe die Gleichung: $y = -\frac{1}{4}x + 8$. Gesucht wird die Gleichung des reflektierten Strahles.

Lösung: Es sei g_1 der einfallende, g_2 der reflektierte Strahl (Bild 11.5). Zunächst wird der Schnittpunkt P zwischen dem Kreis k und g_1 berechnet:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{4}x + 8\right)^2 = 144$$

$$x^2 - 3{,}765x - 75{,}294 = 0.$$

Nach Bild 11.5 wird nur die positive Lösung der quadratischen Gleichung verwendet:

$$x_P = 10{,}76139.$$

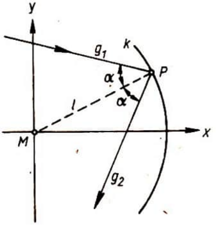


Bild 11.5

Durch Einsetzen von x_P in die Gleichung von g_1 folgt $y_P = 5{,}30965$
$MP = l$ ist das Einfallslot in P und hat die Gleichung:

$$y = \frac{y_P}{x_P}x = 0{,}49340x.$$

Der Einfallswinkel α ist der Winkel zwischen g_1 und l. Unter Verwendung der Anstiege $m_1 = -0{,}25$ der Geraden g_1 und $m_l = 0{,}49340$ der Geraden l folgt mit (9.6):

$$\tan\alpha = \frac{m_l - m_1}{1 + m_l m_1} = 0{,}84800.$$

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel, das ist der Winkel zwischen l und g_2:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_l}{1 + m_2 m_l}$$

und umgestellt nach m_2:

$$m_2 = \frac{\tan\alpha + m_l}{1 - \tan\alpha\, m_l} = 2{,}30641.$$

Damit lautet die Gleichung der Geraden g_2: $y = 2{,}30641x + b$. Wegen $P \in g_2$ gilt: $5{,}30965 = 2{,}30641 \cdot 10{,}76139 + b$, woraus $b = -19{,}510$ folgt.
Die Gleichung des reflektierten Strahles lautet:

$$\underline{\underline{y = 2{,}306x - 19{,}510.}}$$

In Bild 11.6 sei P ein beliebiger Punkt des Kreises und t der Winkel zwischen der positiven Richtung der x-Achse und dem Radius $\overline{OP}$. Dann gilt: $x = r \cos t$, $y = r \times \sin t$. Wird bei konstantem r der Winkel t als variabler Winkel betrachtet, dann sind auch x und y Variable. Durchläuft t alle Werte von 0° bis 360°, so durchläuft der Punkt P einmal den Kreis. Seine Koordinaten x und y sind getrennt als Werte der Funktionen $x = x(t)$ bzw. $y = y(t)$ mit der unabhängigen Variablen t dargestellt.

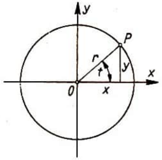


Bild 11.6

t wird als **Parameter** bezeichnet und stellt eine „Hilfsvariable" dar. Die aus Bild 11.6 abgelesenen Beziehungen für die Koordinaten heißen die

Parameterdarstellung des Kreises $\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos t = x(t) \\ y &= r \sin t = y(t) \end{aligned}}$ $t \in [0°, 360°)$. (11.5)

Bei vielen physikalischen und technischen Anwendungen ist der Parameter proportional zur Zeit, woraus sich auch die Bezeichnung t herleitet.

BEISPIEL

11.5. Ein Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit $v = 1{,}5$ m/s auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r = 20$ m. Der Kreismittelpunkt falle mit dem Ursprung eines cartesischen Koordinatensystems zusammen. Zu Beginn der Bewegung befinde sich der Körper im Punkt $P_0(20; 0)$ (Bild 11.7).

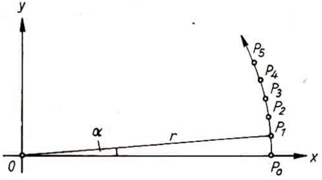


Bild 11.7

Wie lauten die Koordinaten der Punkte, in denen sich der Körper nach 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s befindet?

Lösung: Nach 1 s befindet sich der Körper in P_1, und es ist $\alpha = \dfrac{1{,}5 \text{ m}}{20 \text{ m}} = 0{,}075$.

Die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ergeben sich nach (11.5) mit den Parameterwerten $t = \alpha$, 2α, 3α, 4α, 5α entsprechend folgender Wertetabelle:

t	0,075	0,150	0,225	0,300	0,375
x	19,944	19,775	19,496	19,107	18,610
y	1,499	2,989	4,462	5,910	7,325

Aufgaben: 11.1. bis 11.8.

11.2. Die Ellipse

Definition

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die festen Punkte F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse. Für

die konstante Abstandsumme wird

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \qquad \text{(I)}$$

den Abstand der Brennpunkte wird

$$\overline{F_1F_2} = 2e \qquad \text{(II)}$$

gesetzt (Bild 11.8). Die Größe e heißt **lineare Exzentrizität** der Ellipse. Durch e und a ist die Ellipse eindeutig bestimmt, und zwar muß $e < a$ sein. Das Verhältnis $\varepsilon = e/a < 1$ heißt **numerische Exzentrizität.** Aus der Definition folgt unmittelbar die **Fadenkonstruktion**: Um zwei Reißzwecken im Abstand $2e$ wird ein Faden gelegt, der zu einer Schlinge verknüpft ist und den Umfang $2a + 2e$ hat (Bild 11.9). Mit einem in die Schlinge gesteckten Bleistift wird der Faden gespannt und die Kurve umfahren.

Die Kurvengleichung der Ellipse wird am einfachsten, wenn die x-Achse durch die Brennpunkte gelegt wird und O den Abstand der Brennpunkte halbiert (Bild 11.10). Für einen variablen Ellipsenpunkt $P(x; y)$ gilt nach der Definitionsgleichung (I)

$$r_1 + r_2 = 2a$$

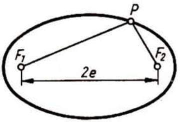


Bild 11.8

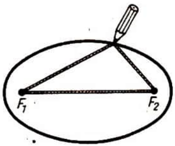


Bild 11.9

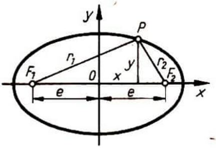


Bild 11.10

oder

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2}+\sqrt{(e-x)^2+y^2}=2a$$

bzw.

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2}=2a-\sqrt{(e-x)^2+y^2}.$$

Quadriert ergibt

$$e^2+2ex+x^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}+e^2-2ex+x^2+y^2$$

$$ex-a^2=-a\sqrt{(e-x)^2+y^2}.$$

Hier wird nochmals quadriert und zusammengefaßt:

$$(a^2-e^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2). \qquad \text{(III)}$$

Zur Abkürzung wird

$$\boxed{a^2-e^2=b^2} \qquad (11.6)$$

gesetzt, womit aus (III) folgt:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Die Division durch a^2b^2 ergibt die

Mittelpunktsgleichung der Ellipse $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (11.7)$$

Die Ellipse ist abhängig von a und b bzw. allgemeiner wegen (11.6) von zwei der drei Größen a, b und e. Daher ist die Ellipse in der Mittelpunktslage durch zwei Punkte festgelegt. Da die Mittelpunktsgleichung in x und y quadratisch ist, sind x- und y-Achse Symmetrieachsen der Ellipse. Die mit der x-Achse zusammenfallende Symmetrieachse heißt **Hauptachse**, die dazu senkrechte Symmetrieachse heißt **Nebenachse** der Ellipse.
Für $y = 0$ folgt aus (11.7) $x = \pm a$ und für $x = 0$ folgt $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die x-Achse in den Punkten $A_1(-a;\ 0)$ und $A_2(a; 0)$, die **Hauptscheitelpunkte** heißen, und die y-Achse in den Punkten $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$, die **Nebenscheitelpunkte** genannt werden (Bild 11.11) (vgl. 18.5.). Die Strecke $\overline{A_1A_2} = 2a$ und $\overline{B_1B_2} = 2b$ heißen große bzw. kleine Achse der Ellipse. a heißt **große Halbachse,** b **kleine Halbachse.**

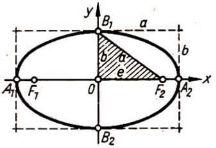


Bild 11.11

Aus (11.7) folgt die

explizite Form der Ellipsengleichung $\boxed{y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}$ (11.8)

Damit die Wurzel reell bleibt, muß $X = [-a; a]$ sein, woraus $Y = [-b; b]$ folgt. Die Ellipse liegt daher, wie auch im Bild ersichtlich, völlig im Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$.
Gl. (11.6) läßt sich nun auch unmittelbar aus Bild 11.11 ablesen. Für B_1 gilt nach (I): $\overline{F_1B_1} + \overline{F_2B_1} = 2a$, und wegen $\overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1}$ folgt $\overline{F_2B_1} = a$. Aus dem Dreieck B_1F_2O ergibt sich nach dem pythagoreischen Satz Gl. (11.6).
Sonderfall: Für $a = b$ geht (11.8) in die Kreisgleichung (11.4) über ($a = b = r$). Der Kreis ist ein Sonderfall der Ellipse, beide Brennpunkte fallen wegen $e = 0$ im Kreismittelpunkt zusammen.

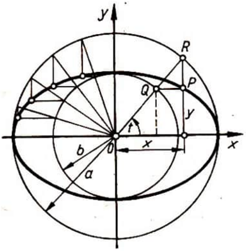


Bild 11.12

Vorteilhaft ist die folgende **Ellipsenkonstruktion**:
Gegeben sind die Halbachsen a und b der Ellipse. Um den Ellipsenmittelpunkt O wird ein Kreis mit dem Radius a, der **Hauptscheitelkreis**, und ein Kreis mit dem Radius b, **der Nebenscheitelkreis**, gezeichnet (Bild 11.12). Ein beliebiger Strahl durch O schneidet den Hauptscheitelkreis in R und den Nebenscheitelkreis in Q. Die Parallele zur Hauptachse (x-Achse) durch Q schneidet die Parallele zur Nebenachse (y-Achse) durch R in dem Ellipsenpunkt P.
Beweis: Ist t der positiv gemessene Winkel zwischen dem Strahl OR und der x-Achse, dann folgt sofort aus dem Bild 11.12

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t. \tag{IV}$$

Die erste Gleichung wird durch a, die zweite durch b dividiert, und beide Gleichungen werden quadriert:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$$

und addiert:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

das ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse. Für $t \in [0°; 360°)$ ergeben sich nach (IV) alle Ellipsenpunkte. (IV) ist eine wichtige

Parameterdarstellung der Ellipse: $\boxed{\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned}}$ $\quad t \in [0°; 360°)$ (11.9)

Der Winkel t heißt exzentrische Anomalie.

Bei der Lösung ingenieurtechnischer Aufgaben ist häufig ein Kreis durch senkrechte Projektion auf eine Ebene abzubilden. Ist die Ebene des Kreises nicht parallel zur Bildebene, dann ergibt sich als Projektion des Kreises eine Ellipse. Beweis: In Bild 11.13 ist π die Bildebene, ε ist die Ebene des Kreises (vereinfachend wird nur der

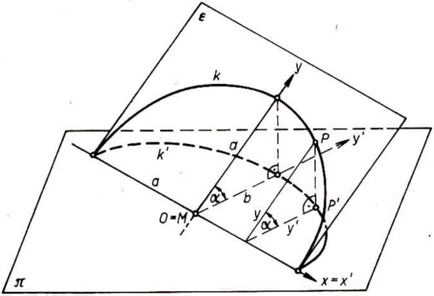


Bild 11.13

Halbkreis dargestellt). In ε wird ein Koordinatensystem x, y so gewählt, daß der Ursprung O im Kreismittelpunkt und die x-Achse in π liegen. Die Projektion der Achsen x, y auf die Ebene π ergibt die Achsen x' und y', wobei x und x' zusammenfallen. Im x,y-System hat der Kreis k mit dem Radius a die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{V}$$

Die Kurve k' ist die Projektion von k auf π. $P(x; y)$ sei ein beliebiger Kreispunkt, $P'(x'; y')$ als seine Projektion ist ein Punkt von k'. Ist α der Winkel zwischen π und ε, dann ergeben sich nach Bild 11.13 folgende Beziehungen zwischen den Koordinaten von P und P':

$$\begin{aligned} x' &= x & \qquad & & x &= x' \\ & & \text{bzw.} & & & \\ y' &= y \cos\alpha & & & y &= \frac{y'}{\cos\alpha} \end{aligned} \tag{VI}$$

Damit folgt aus (V)

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\cos^2\alpha} = a^2$$

oder

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 1. \tag{VII}$$

(VII) ist die Gleichung der Kurve k' und stellt eine Ellipse mit den Halbachsen a und $b = a \cos \alpha$ dar.

BEISPIELE

11.6. Eine Ellipse hat die Gleichung $4x^2 + 5{,}76y^2 - 23{,}04 = 0$. Gesucht werden ihre Halbachsen, Brennpunkte und die numerische Exzentrizität.

Lösung: Nach Division durch 23,04 wird die Gleichung auf die Form (11.7) gebracht

$$\frac{x^2}{5{,}76} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

so daß $a = 2{,}4$ und $b = 2$ abgelesen werden können. Die lineare Exzentrizität ist nach (11.6)

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5{,}76 - 4} = \sqrt{1{,}76} = 1{,}33,$$

und damit sind die Brennpunkte $F_1(-1{,}33;\, 0)$, $F_2(1{,}33;\, 0)$. Die numerische Exzentrizität ist $\varepsilon = e/a = 1{,}33/2{,}4 = 0{,}55$.

11.7. Die Endpunkte R und Q einer Strecke konstanter Länge gleiten auf zwei zueinander senkrechten Geraden. Welche Kurve durchläuft ein Punkt P der Strecke, dessen Entfernung von R gleich m und von Q gleich n ist?

Lösung: Die zueinander senkrechten Geraden werden als Koordinatenachsen gewählt, und es wird $\sphericalangle\, OQP = t$ gesetzt. Aus Bild 11.14 werden die Gleichungen $x = m \cos t$, $y = n \sin t$ abgelesen. Nach (11.9) beschreibt also P einen Ellipsenbogen. Für $m > n$ ist $m = a$, $n = b$, für $m < n$ wird $n = a$, $m = b$. Im zweiten Fall fällt die Hauptachse der Ellipse mit der y-Achse zusammen.
Auf dieser Eigenschaft beruht erstens die Papierstreifenkonstruktion der Ellipse — die Strecke $\overline{RQ}$ wird durch einen Papierstreifen realisiert, auf dem P markiert ist — und zweitens die Wirkungsweise des Ellipsenzirkels. Bei diesem sind die senkrechten Geraden durch Schienen ersetzt, und in P ist eine Schreibvorrichtung angebracht.

11.8. Bei der Rekonstruktion eines historischen Gebäudes ist ein Tor durch einen Ellipsenbogen zu überwölben. Die Breite des Tores ist gleich der Länge einer zur Hauptachse parallelen Sehne der Ellipse und beträgt $s = 4{,}8$ m (Bild 11.15), die zugehörige Pfeilhöhe ist $p = 0{,}8$ m. Das Verhältnis von großer zu kleiner Ellipsenachse beträgt 2 : 1. Es sind die Halbachsen a und b der Ellipse zu berechnen.

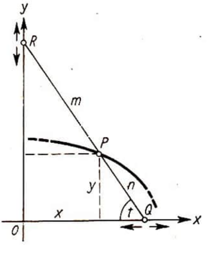


Bild 11.14

Lösung: Das Koordinatensystem wird nach Bild 11.15 so gewählt, daß für die Ellipse Gleichung (11.7) gilt. Aus $a : b = 2 : 1$ folgt $a = 2b$, und (11.7) lautet:

$$\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{VIII}$$

Für den Punkt Q gilt:

$$x_Q = \frac{s}{2} = 2{,}4; \qquad y_Q = b - p = b - 0{,}8.$$

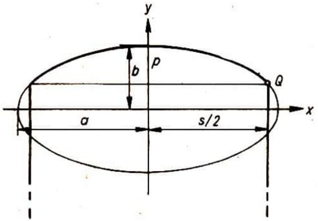


Bild 11.15

Die Koordinaten von Q erfüllen die Ellipsengleichung (VIII):

$$\frac{2{,}4^2}{4b^2} + \frac{(b - 0{,}8)^2}{b^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung für b folgt:

$\underline{\underline{b = 1{,}3}}$ und damit $\underline{\underline{a = 2{,}6}}$.

Aufgaben: 11.9. bis 11.13.

11.3. Die Parabel

Definition

Die **Parabel** ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einer festen Geraden und einem festen Punkt gleich sind.

Die feste Gerade heißt **Leitlinie** l, und der feste Punkt heißt **Brennpunkt** F. Der Abstand des Brennpunktes F von der Leitlinie l wird **Halbparameter** p genannt und bestimmt die Gestalt der Parabel eindeutig (Bild 11.16). P sei ein beliebiger Parabelpunkt, und L ist der Fußpunkt des von P auf die Leitlinie l gefällten Lotes.
Laut Definition gilt stets

$$\overline{PF} = \overline{PL}. \tag{I}$$

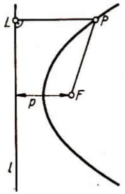


Bild 11.16

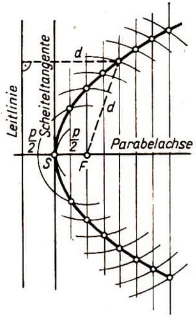


Bild 11.17

Aus (I) folgt unmittelbar eine **Parabelkonstruktion**:

Mit gegebenem Halbparameter p werden l und F und anschließend eine Schar von Parallelen zu l gezeichnet (Bild 11.17). Wird eine Parallele ausgewählt und um F mit dem Radius, der gleich dem Abstand d dieser Parallele von der Leitlinie ist, der Kreisbogen geschlagen, so schneidet dieser die Parallele in zwei Parabelpunkten, falls $d > \frac{p}{2}$ ist. Für $d = p/2$ ergibt sich ein Berührungspunkt, der **Scheitelpunkt** S genannt wird. Für $d < p/2$ existieren keine Parabelpunkte. S halbiert den Abstand zwischen Brennpunkt und Leitlinie. Die Strecke $\overline{SF} = p/2 = f$ wird **Brennweite** der Parabel genannt. Die Konstruktion zeigte, daß die Parabel die Gerade SF als Symmetrieachse hat. Die Parallele zur Leitlinie durch S berührt die Parabel und heißt **Scheiteltangente.**

Die Gleichung der Parabel wird am einfachsten, wenn der Koordinatenursprung im Scheitelpunkt liegt und die x-Achse mit der Parabelachse zusammenfällt. Für einen variablen Parabelpunkt gilt nach Bild 11.18:

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad \overline{PL} = x + \frac{p}{2}.$$

Nach (I) folgt

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

quadriert

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

und als

Scheitelgleichung der Parabel $\boxed{y^2 = 2px}$ (11.10) explizite Form:

$$\boxed{y = \pm\sqrt{2px}} \tag{11.11}$$

Gl. (11.10) enthält p als einzige Konstante. Da zu deren Bestimmung nur eine Gleichung benötigt wird, ist die Parabel in der angegebenen Scheitellage des Bildes 11.18 durch die Koordinaten eines Punktes bestimmt. Wegen $p > 0$ muß nach (11.11) auch $x > 0$ sein. Für $x \to \infty$ folgt $y \to \infty$. Es gilt daher $X = [0, \infty)$, $Y = P$. Das doppelte Vorzeichen in (11.11) bringt wieder die Symmetrie der Parabel bezüglich der x-Achse (Parabelachse) zum Ausdruck. Für $x = p/2$ wird $y = \pm p$. Die Strecke $P_1(p/2; p)\, P_2(p/2; -p)$ ist eine Sehne der Parabel (Bild 11.19).

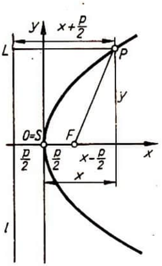


Bild 11.18

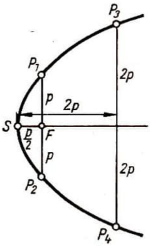


Bild 11.19

Die Parabelsehne, die im Brennpunkt auf der Parabelachse senkrecht steht, ist gleich dem Parameter $2p$.

Mit Hilfe der 3 Punkte $S(0; 0)$, $P_1(p/2; p)$, $P_2(p/2; -p)$ bzw. der noch hinzugenommenen Punkte $P_4(2p; 2p)$, $P_5(2p; -2p)$ läßt sich eine durch p gegebene Parabel schnell und annähernd genau skizzieren.

BEISPIEL

11.9. Eine Parabel in Scheitellage entsprechend Bild 11.18 geht durch den Punkt $P_1(8; 12)$. Gesucht werden die Parabelgleichung und die Koordinaten des Brennpunktes.

Lösung: In die Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ werden die Koordinaten von P_1 eingesetzt:

$$144 = 2p \cdot 8.$$

Für den Halbparameter folgt $p = 9$. Die Parabelgleichung lautet

$$\underline{\underline{y^2 = 18x}}$$

und der Brennpunkt ist $F(p/2; 0) = \underline{\underline{F(4{,}5; 0)}}$.

Das Bild 11.18 stellt eine nach rechts geöffnete Parabel dar. Die Bilder 11.20 bis 11.22 zeigen **nach links, oben bzw. unten geöffnete Parabeln,** deren Gleichungen durch (11.12), (11.13) und (11.14) gegeben sind.

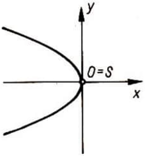


Bild 11.20

$$\boxed{y^2 = -2px} \quad (11.12)$$

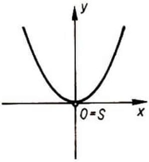


Bild 11.21

$$\boxed{x^2 = 2py} \quad (11.13)$$

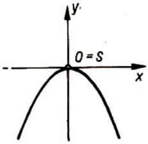


Bild 11.22

$$\boxed{x^2 = -2py} \quad (11.14)$$

Zum Beispiel ergibt sich (11.12) aus (11.10) durch die Abbildung mit den Gleichungen $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = y$, wobei die Querstriche anschließend wieder weggelassen werden. Diese Abbildung stellt aber nach (9.11a) eine Spiegelung der zu (11.10) gehörenden Parabel an der y-Achse dar. Die Gleichungen (11.13) und (11.14) ergeben sich aus (11.10) und (11.12) durch Vertauschen von x und y.
Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich, wenn der Scheitelpunkt der Parabel nicht mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Wird auf die Punkte der Parabel des Bildes 11.18 eine Schiebung entsprechend Abschnitt 9.6.1 durchgeführt, so daß der Scheitelpunkt die Koordinaten x_S und y_S erhält (Bild 11.23), dann geht die Scheitelgleichung (11.10) über in die Parabelgleichung (11.15). Entsprechende Verallgemeinerungen ergeben sich aus den Gleichungen (11.12) bis (11.14).

Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(x_S; y_S)$, nach rechts geöffnet

$$\boxed{(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S)} \quad (11.15)$$

nach links geöffnet

$$\boxed{(y - y_S)^2 = -2p(x - x_S)} \quad (11.16)$$

nach oben geöffnet

$$\boxed{(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S)} \quad (11.17)$$

nach unten geöffnet

$$\boxed{(x - x_S)^2 = -2p(y - y_S)} \quad (11.18)$$

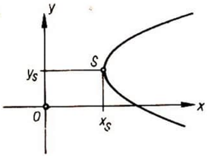


Bild 11.23

Werden in den Gleichungen (11.15) und (11.16) bzw. (11.17) und (11.18) die Klammern ausgerechnet und die Gleichungen nach x und y umgestellt, so ergeben sich die Parabelgleichungen als ganzrationale Funktionen 2. Grades:

$$\boxed{x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2} \qquad \boxed{y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \qquad (11.19) \quad (11.20)$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten a_i, b_i, aber $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Die Achsen der zu (11.19) gehörenden Parabeln sind parallel zur x-Achse; die Achsen der zu (11.20) gehörenden Parabeln sind parallel zur y-Achse.

BEISPIELE

11.10. Ein parabolischer Brückenbogen hat die Spannweite $l = 32$ m und die Pfeilhöhe $h = 6$ m. In Abständen von je 4 m sind Vertikalstäbe angebracht. Ihre Längen sind zu berechnen.

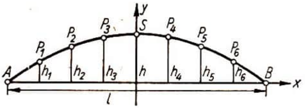


Bild 11.24

Lösung: Die x-Achse wird durch die Auflagepunkte A und B gelegt, die y-Achse durch den Scheitelpunkt S (Bild 11.24). Die Parabel ist nach unten geöffnet und hat die Gleichung $x^2 = -2p(y - 6)$ entsprechend (11.18) mit $S(0; 6)$. Da $A(-16; 0)$ auf der Parabel liegt, gilt

$$256 = 12p \qquad \text{oder} \qquad 2p = \frac{128}{3}.$$

Die Parabelgleichung lautet

$$x^2 = -\frac{128}{3}(y - 6) \quad \text{bzw.} \quad y = 6 - \frac{3}{128}x^2.$$

Für $x_1 = -12$ und $x_6 = 12$ wird $y_1 = y_6 = \dfrac{21}{8}$,

für $x_2 = -8$ und $x_5 = 8$ wird $y_2 = y_5 = \dfrac{9}{2}$,

für $x_3 = -4$ und $x_4 = 4$ wird $y_3 = y_4 = \dfrac{45}{8}$.

Die Längen der Vertikalstäbe sind

$$\underline{\underline{h_1 = h_6 = 2{,}625\text{ m}}}, \quad \underline{\underline{h_2 = h_5 = 4{,}500\text{ m}}}, \quad \underline{\underline{h_3 = h_4 = 5{,}625\text{ m}}}.$$

11.11. Das Leiterseil einer 110-kV-Leitung hat infolge des Durchhanges annähernd die Form einer Parabel mit senkrechter Achse. Der waagerechte Abstand zweier Masten beträgt $s = 301{,}4$ m, der Höhenunterschied der Aufhängepunkte A und B ist $h = 23{,}6$ m (Bild 11.25). Der in der Mitte zwischen A und B gemessene „Durchhang" ist $f = 8{,}4$ m. Gesucht werden die Gleichung der Parabel in dem angegebenen Koordinatensystem und die Koordinaten des Scheitelpunktes.

Lösung: Die Parabelachse ist parallel zur y-Achse, deshalb wird Gleichung (11.20) verwendet:

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2. \tag{II}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten b_0, b_1, b_2 sind drei Gleichungen notwendig. Es müssen deshalb drei Punkte der Parabel bekannt sein. Aus Bild 11.25 lassen sich die Koordinaten der drei Parabelpunkte A, B, C ablesen:

$$A(0;\,0),\quad B(301{,}4;\,-23{,}6),\quad C(150{,}7;\,-20{,}2).$$

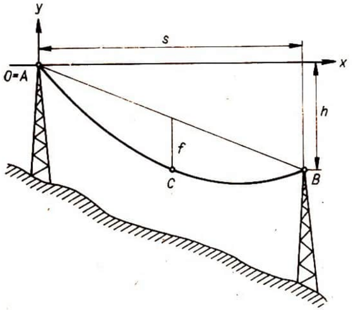


Bild 11.25

Diese Koordinaten müssen jeweils (II) erfüllen:

$$\begin{aligned} 0 &= b_0 \\ -23{,}6 &= b_0 + 301{,}4b_1 + 301{,}4^2b_2 \\ -20{,}2 &= b_0 + 150{,}7b_1 + 150{,}7^2b_2. \end{aligned}$$

Aus den drei Gleichungen werden b_0, b_1, b_2 berechnet:

$$b_0 = 0,\quad b_1 = -0{,}18978,\quad b_2 = 0{,}00037.$$

Die Parabelgleichung lautet:

$$\underline{\underline{y = -0{,}18978x + 0{,}00037x^2}} \tag{III}$$

Gleichung (III) läßt sich schrittweise auf die Form (11.17) bringen:

$$x^2 - 513{,}1x = 2703{,}4y$$

quadratische Ergänzung addieren:

$$\begin{aligned} x^2 - 513{,}1x + 65817{,}9 &= 2703{,}4y + 65817{,}9 \\ (x - 256{,}5)^2 &= 2703{,}4(y + 24{,}3) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Koordinaten x_S, y_S des Scheitelpunktes ablesen:

$$\underline{\underline{S(256{,}5;\,-24{,}3).}}$$

11.12. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v unter einem Winkel α gegen die Horizontalebene abgeworfen. Der Abwurfort liegt in der Horizontalebene.

a) Für die Bahnkurve des Körperschwerpunktes sollen eine Parameterdarstellung sowie eine parameterfreie Gleichung angegeben werden.

b) Die erreichte Wurfhöhe h und die Wurfweite w sind zu bestimmen.

Lösung: a) Nach Bild 11.26 wird ein Koordinatensystem gewählt, dessen Ursprung in dem Abwurfort liegt. Ohne den Einfluß der Schwerkraft würde sich der Körper auf der

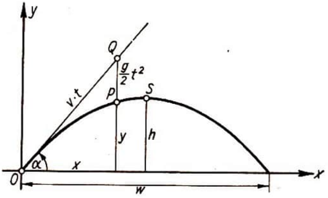


Bild 11.26

Geraden $y = \tan\alpha \cdot x$ bewegen. Nach der Zeit t würde er die Strecke $\overline{OQ} = vt$ zurückgelegt haben und sich im Punkte Q befinden. Durch die Einwirkung der Schwerkraft fällt er aber gleichzeitig um die Strecke $\overline{QP} = \frac{g}{2}\,t^2$. Nach der Zeit t befindet sich daher der Körperschwerpunkt im Punkt P der gesuchten Bahnkurve. Aus dem Bild ist eine Parameterdarstellung mit t als Parameter abzulesen:

$$x = vt\cos\alpha = x(t), \quad \text{(IV)} \qquad y = vt\sin\alpha - \frac{g}{2}\,t^2 = y(t). \quad \text{(V)}$$

Wird t aus (IV) berechnet ($\alpha \neq 90°$) und in (V) eingesetzt, dann ergibt sich die parameterfreie Gleichung

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}\,x^2. \tag{VI}$$

Da nur die Variable x den Exponenten 2 hat, ist die Bahnkurve eine Parabel. Sie läßt sich auf die Form (11.18) bringen:

$$\left(x - \frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = -\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}\left(y - \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\right).$$

b) Die Wurfhöhe ist $h = y_S = \dfrac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$,

und die Wurfweite ist wegen der Symmetrie der Parabel bezüglich ihrer Achse

$$w = 2x_S = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Die Wurfweite w ergibt sich auch aus (VI) als eine Lösung der Gleichung $y = 0$.

Aufgaben: 11.14. bis 11.19.

11.4. Die Hyperbel

Definition

> Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Diese Definition folgt aus der Definition der Ellipse, wenn dort lediglich die Summe durch die Differenz ersetzt wird. Zwischen den Sätzen bzw. Gleichungen beider Kurven bestehen daher trotz der unterschiedlichen Bilder im allgemeinen nur Vorzeichenunterschiede. Für die konstante Differenz wird

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \tag{I}$$

und für den Abstand der **Brennpunkte** F_1, F_2 wird wieder

$$\overline{F_1F_2} = 2e$$

gesetzt (Bild 11.27). e ist die **lineare Exzentrizität** der Hyperbel. Für sie muß $e > a$ sein. $\varepsilon = e/a > 1$ ist die **numerische Exzentrizität.**
Zur Aufstellung der Kurvengleichung wird wie bei der Ellipse die x-Achse durch die Brennpunkte gelegt, und der Ursprung O halbiert den Abstand $\overline{F_1F_2}$ (Bild 11.28). Aus der Definition folgt nach (I) für einen beliebigen Hyperbelpunkt $P(x; y)$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

bzw.

$$\left|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Ähnliche Umformungen wie bei der Ellipse führen zur Gleichung

$$(e^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2). \tag{II}$$

Sie stimmt mit der Ellipsengleichung (III) aus 11.2. formal überein. Da aber für die Hyperbel $e > a$ ist, wird jetzt abkürzend

$$\boxed{e^2 - a^2 = b^2} \tag{11.21}$$

gesetzt. Damit geht (II) über in

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \tag{III}$$

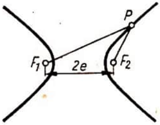


Bild 11.27

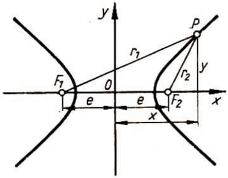


Bild 11.28

Nach Division durch a^2b^2 folgt daraus die

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ (11.22)

Die Hyperbel ist durch zwei der drei Größen a, b und e bestimmt. Die Mittelpunktsgleichung ist rein quadratisch in x und y, d. h., x- und y-Achse sind Symmetrieachsen der Hyperbel. Für $y = 0$ folgt aus (11.22) $x = \pm a$. Die Hyperbel schneidet die x-Achse in den **Hauptscheitelpunkten** $A_1(-a; 0)$ und $A_2(a; 0)$ (Bild 11.29). Mit $x = 0$ ergibt sich aus (11.22) $y = \pm b\mathrm{j}$. Es existieren keine (reellen) Schnittpunkte mit der y-Achse, d. h., die Hyperbel besteht aus zwei getrennten Ästen.
a heißt die **reelle Halbachse**, b die **imaginäre Halbachse**. Zwischen a und b sind im Gegensatz zur Ellipse die Relationen $a < b$, $a = b$ und $a > b$ möglich.
Die Mittelpunktsgleichung (11.22) lautet explizit

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad (11.23)$$

Die Wurzel ist reell für $|x| \geqq a$, d. h., $X = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Für $x \in (-a, a)$ wird y imaginär; es existieren in diesem Intervall keine Hyperbelpunkte. Aus $|x| \to \infty$ folgt $|y| \to \infty$, d. h., $Y = P$. Die beiden Äste erstrecken sich von A_1 bzw. A_2 aus nach beiden Seiten unbegrenzt. Dabei zeigt die Hyperbel ein typisches, von der Parabel abweichendes Verhalten, das untersucht werden soll. Wegen der Symmetrie der Hyperbel bezüglich beider Koordinatenachsen wird die Betrachtung auf den im I. Quadranten liegenden Kurventeil beschränkt. Gl. (11.23) wird in der Form

$$y = \frac{b}{a}\, x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \quad (x \geqq a) \qquad (\mathrm{IV})$$

geschrieben. Wird x unbegrenzt größer, dann wird a^2/x^2 **immer kleiner und** nähert sich der Null. Damit nähert sich aber $\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}$ der Eins. Die Ordinaten $\bar{y}$ und y eines Punktes Q der Geraden mit der Gleichung $y = \dfrac{b}{a}\,x$ bzw. eines Punktes P der Hyperbel mit der Gleichung (IV) unterscheiden sich daher um so weniger, je größer x ist (Bild 11.30). Entsprechendes gilt für die anderen Quadranten. Die Hyperbel

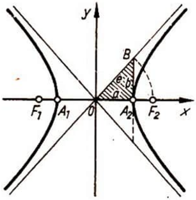


Bild 11.29

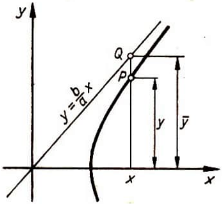


Bild 11.30

nähert sich also von der x-Achse her immer mehr zwei durch den Ursprung gehenden Geraden, ohne sie aber je zu berühren oder zu schneiden. Diese Geraden heißen

Asymptoten der Hyperbel $\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x}$ (11.24)

Mit den Richtungsfaktoren $\pm \frac{b}{a}$ der Asymptoten und der Beziehung (11.21) ergibt sich das in Bild 11.29 dargestellte rechtwinklige Dreieck OA_2B. Es zeigt, wie aus den gegebenen Größen a und b die Asymptoten und die Brennpunkte konstruiert werden können. Sind Scheitelpunkte und Asymptoten bekannt, dann läßt sich die Hyperbel leicht angenähert zeichnen.

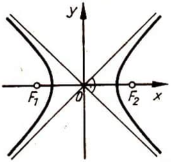


Bild 11.31

Während der Sonderfall $a = b$ bei der Ellipse den Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ lieferte, ergibt sich hier für $a = b$ die

gleichseitige Hyperbel $\boxed{x^2 - y^2 = a^2.}$ (11.25)

Ihre Asymptoten $y = \pm x$ schneiden die Koordinatenachsen unter 45° und einander unter 90° (Bild 11.31).

BEISPIELE

11.13. Eine Hyperbel hat den Hauptscheitelpunkt $A_2(6/5; 0)$ und geht durch den Punkt $P_1(2; 32/15)$. Wie heißen die Hyperbel- und die Asymptotengleichungen; welchen Winkel bilden die Asymptoten miteinander?

Lösung: Mit dem Hauptscheitelpunkt ist die Halbachse $a = 6/5$ gegeben. In die aus (11.22) folgende Hyperbelgleichung

$$\frac{25x^2}{36} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

werden die Koordinaten von P_1 eingesetzt:

$$\frac{25 \cdot 4}{36} - \frac{1024}{225b^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung wird b berechnet: $b = 8/5$.

Hyperbelgleichung: $\underline{\underline{\frac{25x^2}{36} - \frac{25y^2}{64} = 1}}$, Asymptotengleichungen: $\underline{\underline{y = \pm \frac{4}{3} x}}$.

Für den Winkel φ zwischen den Asymptoten folgt aus $\varphi = 2\alpha$ und $\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ schließlich $\alpha = 53° 08'$, $\underline{\underline{\varphi = 106° 16'}}$.

11.14. Die Mantelfläche des Kühlturmes eines Heizkraftwerkes sei Teil eines „einschaligen Rotationshyperboloids" (Bild 11.32). Diese Fläche entsteht, wenn ein Ast der Hyperbel mit der Gleichung (11.22) um die y-Achse gedreht wird. Alle ebenen Schnitte durch die Drehachse ergeben als Schnittkurven Hyperbeln, während die ebenen Schnitte senkrecht zur Drehachse Kreise ergeben. Der Kreis mit dem kleinsten Durchmesser heißt Kehlkreis (k). Er wird von dem Scheitelpunkt des rotierenden Hyperbelastes erzeugt.

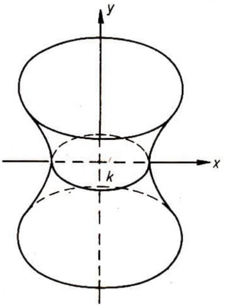


Bild 11.32

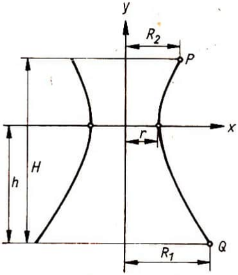


Bild 11.33

Von dem Kühlturm sind nach Bild 11.33 der Radius $R_1 = 17$ m des Kreises der Grundfläche, der Radius $R_2 = 9{,}5$ m des Kreises der Deckfläche sowie die Gesamthöhe $H = 48$ m und die Höhe $h = 40$ m bis zum Kehlkreis gegeben. Gesucht wird der Radius r des Kehlkreises.

Lösung: Bei Zugrundelegung des in Bild 11.33 gewählten Koordinatensystems hat die Hyperbel die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und es ist $r = a$. Bekannt sind nach Bild 11.33 die zwei Hyperbelpunkte $P(9{,}5;\ 8)$, $Q(17;\ -40)$. Ihre Koordinaten erfüllen die Hyperbelgleichung:

$$\frac{90{,}25}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1$$

$$\frac{289}{a^2} - \frac{1\,600}{b^2} = 1\,.$$

Wird die 1. Gleichung mit 25 multipliziert und davon die 2. Gleichung subtrahiert, dann ergibt sich

$$\frac{1\,967{,}25}{a^2} = 24 \qquad \text{bzw.} \qquad a = 9{,}05\,.$$

Der Radius des Kehlkreises ist $\underline{\underline{r = 9{,}05 \text{ m.}}}$

11.15. Gesucht wird die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, wenn deren Asymptoten als Koordinatenachsen gewählt werden.

Lösung: Die Asymptoten werden entsprechend Bild 11.34 orientiert und als x'- und y'-Achse bezeichnet. P ist ein variabler Hyperbelpunkt mit den Koordinaten x, y im ursprünglichen und x', y' im neuen Koordinatensystem. Unter Verwendung der eingezeichneten Hilfslinien sowie der Winkel $\beta = 45°$ werden die Beziehungen abgelesen:

$$x' = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{DC} = x \cos 45° - y \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x - y) \quad \text{(V)}$$

$$y' = \overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DP} = \overline{BC} + \overline{DP} = x \sin 45° + y \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x + y). \quad \text{(VI)}$$

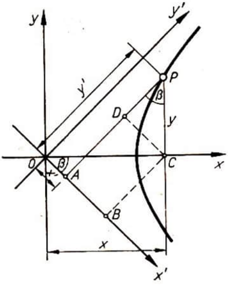


Bild 11.34

Die Gleichungen (V) und (VI) multipliziert, ergeben

$$x'y' = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

und mit (11.25)

$$x'y' = \frac{1}{2}a^2. \quad \text{(VII)}$$

Das Produkt der Abstände eines Hyperbelpunktes von den Asymptoten ist also konstant. Diese Eigenschaft gilt übrigens allgemein und ist nicht auf gleichseitige Hyperbeln beschränkt. Mit $c = \frac{1}{2}a^2$ folgt aus (VII) für die explizite Form

$$\boxed{y' = \frac{c}{x'}.} \quad \text{(11.26)}$$

Die gleichseitige Hyperbel erscheint hier als Graph einer gebrochenrationalen Funktion (vgl. 10.4.2.).

11.16. Es ist zu beweisen: Wenn eine Gerade die Hyperbel in den Punkten P_1, P_2 und die Asymptoten in den Punkten P_3, P_4 schneidet, dann sind die Strecken $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{P_2P_4}$ gleich lang (Bild 11.35).

Beweis: Zuerst werden die Schnittpunkte P_1, P_2 und P_3, P_4 berechnet, dann wird der Mittelpunkt P_M der Strecke $\overline{P_1P_2}$ sowie der Mittelpunkt P'_M der Strecke $\overline{P_3P_4}$ bestimmt. Wenn beide Mittelpunkte zusammenfallen, muß $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_4}$ sein.
Da die Rechnungen mit einer beliebigen Hyperbel und einer beliebigen Geraden durchgeführt werden, ist dieser „analytische Beweis" allgemein gültig.
Die Hyperbel h, die Gerade g und die Asymptoten k_1, k_2 haben die Gleichungen

$$h\colon b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad \text{(VIII)} \qquad g\colon y = mx + n \qquad \text{(IX)}$$

$$k_1\colon y = \frac{b}{a}x \qquad \text{(X)} \qquad k_2\colon y = -\frac{b}{a}x. \qquad \text{(XI)}$$

Durch Einsetzen von (X) bzw. (XI) in (VIII) berechnen sich die Abszissen der Schnittpunkte P_1, P_2:

$$b^2x_{1,2}^2 - a^2(mx_{1,2} + n)^2 = a^2b^2.$$

Die Normalform dieser quadratischen Gleichung lautet:

$$x_{1,2}^2 - 2\,\frac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2}\,x_{1,2} - \frac{a^2(n^2 + b^2)}{b^2 - a^2m^2} = 0 \qquad \text{(XII)}$$

Die Abszisse des Mittelpunktes P_M ist nach (9.3) $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Nach dem Wurzelsatz von VIETA ist aber $x_1 + x_2 = -p$ (vgl. Gl. (6.3)). Damit folgt aus (XII):

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2}.$$

Die Abszissen der Schnittpunkte P_3, P_4 werden durch Gleichsetzen von (IX) und (X) bzw. (IX) und (XI) berechnet:

$$mx_3 + n = \frac{b}{a}x_3; \qquad mx_4 + n = -\frac{b}{a}x_4.$$

$$x_3 = \frac{an}{b - am}; \qquad x_4 = \frac{-an}{b + am}.$$

Die Abszisse x'_M des Mittelpunktes P'_M ist mit obigen Werten

$$x'_M = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2}.$$

Wegen $x_M = x'_M$ ist auch $P_M = P'_M$, und der Beweis ist geführt.

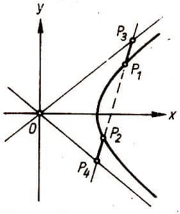


Bild 11.35

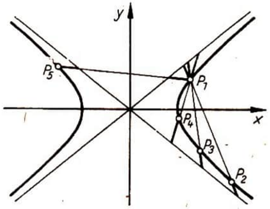


Bild 11.36

Diese Hyperbeleigenschaft kann zur einfachen Konstruktion von Hyperbelpunkten dienen, wenn mit den Asymptoten auch ein Hyperbelpunkt, z. B. P_1, bekannt ist (Bild 11.36). Es werden beliebige Geraden durch P_1 gelegt und die jeweiligen Strecken von P_1 bis zur Asymptote entsprechend Bild 11.35 von der anderen Asymptote aus bis zu den Hyperbelpunkten $P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$ abgetragen. Die Gerade kann auch beide Hyperbeläste schneiden. Mit Hilfe der erhaltenen Punkte können dann weitere Hyperbelpunkte konstruiert werden.

Aufgaben: 11.20. bis 11.23.

11.5. Kurven zweiter Ordnung als Kegelschnitte

Die Kurven 2. Ordnung wurden in den vorangegangenen Abschnitten rein planimetrisch definiert als Menge von Punkten der Ebene, die bestimmte Bedingungen erfüllen müssen. Es wurde aber bereits auf die stereometrische Definition als ebene Schnitte eines Drehkegels hingewiesen.

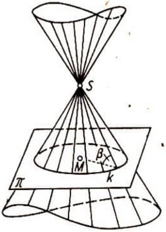


Bild 11.37

In einer Ebene π liege ein Kreis k und senkrecht zu π über dem Kreismittelpunkt M ein Punkt S. Die Menge der Geraden durch S und durch die Punkte von k bilden einen Drehkegel. Die Geraden sind Mantellinien des Kegels und schließen mit π den Winkel β ein (Bild 11.37).
Eine Ebene ε habe gegen π den Neigungswinkel α. Die Schnittkurve zwischen der Ebene ε und dem Kegel ist abhängig von der Größenbeziehung zwischen α und β.

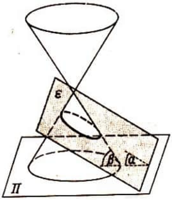


Bild 11.38

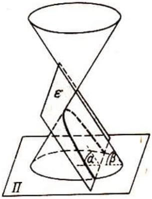


Bild 11.39

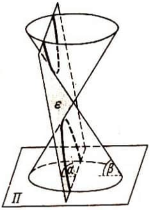


Bild 11.40

Als Schnittkurve ergibt sich für

$\alpha < \beta$ die Ellipse (Bild 11.38), für $\alpha = 0$ den Kreis,

$\alpha = \beta$ die Parabel (Bild 11.39)

$\alpha > \beta$ die Hyperbel (Bild 11.40).

Anmerkung: Ein Beweis für die Übereinstimmung der Kurven 2. Ordnung mit den Kegelschnitten wird mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln geführt, worauf hier nicht eingegangen wird. Auf die besondere Bedeutung der Brennpunkte der Kegelschnitte, das heißt auf ihre „Brennpunkteigenschaften" kann hier ebenfalls nicht eingegangen werden. Einige Beispiele werden im Abschnitt 18. behandelt.

Kontrollfragen

11.1. Wie heißen die planimetrischen Definitionen von Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel als Punktmengen der Ebene?

11.2. Wieviel Konstanten sind notwendig und welche sind es bzw. können es sein, um jeden der Kegelschnitte (unabhängig von seiner Lage in der Ebene) festzulegen?

11.3. Wieviel Symmetrieachsen hat jeder der Kegelschnitte?

11.4. Welche Punkte, Strecken und Geraden haben bei den Definitionen oder Konstruktionen der Kegelschnitte eine besondere Bedeutung?

11.5. Welche geometrischen Konstruktionen sind für die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel bekannt?

11.6. Woran erkennt man an einer Kurvengleichung, daß sie (abgesehen von Sonderfällen) einen Kegelschnitt beschreibt? Wann liegen ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel vor?

11.7. Durch wieviel Punkte ist ein Kegelschnitt in der Ebene festgelegt, wenn mindestens eine Symmetrieachse parallel zu einer Koordinatenachse ist oder mit dieser zusammenfällt und der Mittelpunkt bzw. Scheitelpunkt des Kegelschnitts a) im Koordinatenursprung liegt, b) eine beliebige Lage im Koordinatensystem hat? Die Antwort ist unter Verwendung der zugehörigen Kurvengleichung zu begründen.

11.8 Was ist unter der Parameterdarstellung einer Kurve zu verstehen?

11.6. Aufgaben

11.1. Wie lautet die allgemeine Gleichung des Kreises mit

a) $M(3; -5)$, $r = 8$ b) $M(0; 10)$, $r = 10$

c) $M(1/8; -1/6)$, $r = 5/24$ d) $M(-4; 7)$, $r = 7$?

11.2. Es sind Mittelpunkt und Radius der durch folgende Gleichungen bestimmten Kreise zu ermitteln:

a) $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 99 = 0$ b) $x^2 + y^2 + y - 2 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 8x = 0$ d) $x^2 + y^2 - 10{,}4x - 1{,}6y + 7{,}43 = 0$

e) $5x^2 + 5y^2 - \frac{20}{3}x - 2y - \frac{7}{9} = 0$ f) $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{6} = 0$

g) $x^2 + y^2 + 2x - y + \frac{5}{4} = 0$

11.3. Wie heißt die Gleichung des Kreises, der den Mittelpunkt $M\left(3; -\frac{5}{4}\right)$ hat und durch den Ursprung geht?

11.4. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right)$ geht durch den Punkt $P_1\left(\frac{3}{4}; \frac{16}{3}\right)$. Gesucht wird seine Gleichung.

11.5. Ein Kreis berührt die y-Achse im Punkt $P_1\left(0; -\frac{2}{5}\right)$ und geht durch den Punkt $P_2\left(1; \frac{8}{5}\right)$. Wie heißt seine Gleichung?

11.6. Wie heißt die Gleichung des Kreises durch die drei Punkte $P_1(8; 16)$, $P_2(15; 9)$, $P_3(8; -8)$?

11.7. Es sind die Schnittpunkte zwischen Kreis und Gerade zu bestimmen. Welche Lage hat die Gerade zum Kreis?

a) $x^2 + y^2 = 100$
$y = 7x - 50$

b) $x^2 + y^2 = 74$
$y = \frac{5}{7}x + \frac{74}{7}$

c) $x^2 + y^2 = 30$
$x - 3y - 20 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 6 = 0$
$2x + 4y - 26 = 0$

11.8. Der Kreis mit $M(4; -4)$ und $r = 10$ wird von der Geraden $y = -7x + 74$ geschnitten. Man berechne die Länge s der Sehne, den Sehnenmittelpunkt S und zeige, daß die Gerade MS senkrecht zur Sehne ist.

11.9. Man bestimme die Mittelpunktsgleichung der Ellipse aus

a) $a = 11; \quad e = 8$ b) $a = 8; \quad \varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{7}$ c) $e = 12; \quad \varepsilon = 0{,}75$

11.10. Man bestimme die Halbachsen, die Brennpunkte und ε der Ellipsen

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{4{,}41} + \frac{y^2}{8{,}41} = 1$ c) $27x^2 + 43y^2 - 1161 = 0$

11.11. Von einer Ellipse in Mittelpunktslage sind die große Halbachse $a = 5$, die auf der x-Achse liegt, sowie ein Punkt $P(4; -1{,}8)$ gegeben. Wie heißt ihre Gleichung?

11.12. a) Von der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind die Punkte $P_1(8; 3{,}6)$, $P_2(6; 4{,}8)$ gegeben. Wie groß sind ihre Halbachsen?

b) Desgl. für $P_1(10; 5)$, $P_2(6; 13)$.

11.13. Man bestimme die Schnittpunkte von der Ellipse und der Geraden:

a) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1; \quad y = -\frac{1}{2}x + 3$

b) $\frac{x^2}{42} + \frac{y^2}{21} = 1; \quad y = -x + 9$

c) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1; \quad y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x + 8\sqrt{2}$

11.14. Es sind Parabeln mit den Halbparametern $p = 0{,}5$ cm, 1 cm, 3 cm und 5 cm zu konstruieren.

11.15. Man zeichne mit Hilfe von Wertetabellen die folgenden, durch ihre Scheitelgleichungen gegebenen Parabeln:

a) $y^2 = \frac{3}{2}x$ b) $y^2 = 4x$ c) $y^2 = -3x$

d) $y = x^2$ e) $x^2 = -5y$

11.16. a) Eine Parabel geht durch den Punkt $P_1(9; 6)$, ihr Scheitelpunkt liegt in O, und ihre Achse fällt mit der x-Achse zusammen. Wie heißt die Scheitelgleichung?

Desgleichen b) $P_1\left(-\frac{5}{8}; \frac{5}{2}\right)$, c) $P_1(2{,}75; -1{,}42)$

11.17. Man ermittle die Gleichung einer Parabel aus

a) $S(-2; -5)$, $p = 4$, Parabel nach rechts geöffnet,

b) $S(3; 0)$, $p = 0{,}5$, Parabel nach unten geöffnet,

c) $S(-1; 10)$, $p = \frac{3}{2}$, Parabel nach links geöffnet,

d) $S(6; -6)$, $p = 7$, Parabel nach oben geöffnet.

11.18. Eine Parabel ist durch drei Punkte und ihre Achsenrichtung bestimmt. Gesucht werden die Scheitel- und die Brennpunktkoordinaten.

a) $P_1(10; 15)$, $P_2(1; -3)$, $P_3(-5/4; 6)$, Parabelachse parallel zur x-Achse.

b) $P_1(1; 23/6)$, $P_2(2; 10/3)$, $P_3(8/3; 4/3)$, Parabelachse parallel zur y-Achse.

c) $P_1(-2{,}15; 0{,}60)$, $P_2(-2{,}60; 1{,}20)$, $P_3(-3{,}35; 1{,}80)$, Parabelachse parallel zur x-Achse.

11.19. Der parabolische Träger einer Brücke mit aufgehängter Fahrbahn CD hat die Spannweite l und die zugehörige Pfeilhöhe $h + a$ (Bild 11.41).

a) Es ist die Gleichung der Parabel im angegebenen System aufzustellen.

b) Es sei in a) speziell $a = h$. Wie groß ist die Länge CD der Fahrbahn?

c) Für $l = 36$ m, $h = 6$ m, $a = 3$ m berechne man die Länge der Fahrbahn CD sowie die Längen der Vertikalstäbe, die 5 m bzw. 10 m von der Brückenmitte entfernt angebracht sind.

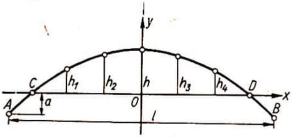


Bild 11.41

11.20. Man bestimme die Halbachsen, die Brennpunkte und die Asymptotengleichungen der folgenden Hyperbeln:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{144} = 1$ b) $225x^2 - 64y^2 + 14400 = 0$,

c) $x^2 - y^2 - 196 = 0$

11.21. Welchen Winkel schließen die Asymptoten der Hyperbel $16x^2 - 36y^2 = 576$ miteinander ein?

11.22. Eine Hyperbel hat die Asymptoten $y = \pm(45/28)\,x$ und den Brennpunkt $F_1(-53/18; 0)$. Wie groß sind die Halbachsen?

11.23. Man berechne die Schnittpunkte zwischen der Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ und den folgenden Geraden und veranschauliche sich die Ergebnisse an einer Skizze.

a) $y = 2x - 8$ b) $x - 2y - 1 = 0$ c) $y = 2x + 3$

d) $5x + 6y + 9 = 0$ e) $2x + 3y + 15 = 0$

11.24. Ein Kreis enthält die Punkte $P_1\left(\frac{7}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ und $P_2\left(-2; \frac{19}{2}\right)$. Sein Mittelpunkt liegt auf der Geraden $y = -\frac{4}{11}x + \frac{3}{2}$. Gesucht wird die Kreisgleichung.

11.25. Von einem Dreieck sind die Eckpunkte $P_1(-11; 0)$, $P_2(12; -7)$, $P_3(12; 23)$ gegeben. Man berechne die Gleichungen der Mittelsenkrechten und die Gleichung des Umkreises.

11.26. Von einem Dreieck ABC sind die Seite c und das Verhältnis $a:b = m:n$ der Seiten a und b gegeben. Auf welcher Kurve liegen die Punkte C aller Dreiecke, die die gegebenen Werte haben?

11.27. Von einem Punkt $A(a; 0)$ wird auf eine Gerade g durch O das Lot gefällt. Gesucht wird eine Parameterdarstellung für die Menge der Lotfußpunkte F, die den verschiedenen Lagen der Geraden entsprechen, sowie eine parameterfreie Gleichung der sich ergebenden Kurve.

11.28. Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und der Punkt $A(0; b)$ mit $b > r$. Eine variable Gerade durch A schneide aus dem Kreis eine Sehne aus. Gesucht wird die Menge der Sehnenmittelpunkte.

11.29. Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ist eine Parabel zu legen, deren Scheitelpunkt in einer Ecke des Dreiecks liegt. Wie groß ist der Halbparameter p?

11.30. Von den folgenden Parabeln sind die Koordinaten des Scheitelpunktes und des Brennpunktes zu bestimmen.

a) $2y^2 - 24x - 12y - 6 = 0$ b) $5x^2 + 40x + 25y + 230 = 0$

c) $y^2 + 4x + 20y + 100 = 0$ d) $3x^2 - 21x - 3y + 36 = 0$

11.31. Gesucht wird die Menge der Mittelpunkte aller Kreise, die einen Halbkreis mit dem Radius r und den zugehörigen Kreisdurchmesser berühren.

11.32. Man lege durch den Brennpunkt der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 4x$ eine Gerade mit dem Anstieg $-\frac{4}{3}$. Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt der auf der Geraden liegenden Parabelsehne?

11.33. Sind von einer Parabel die Tangenten t_1 und t_2 durch ihre Berührungspunkte P_1 und P_2 und ihren Schnittpunkt P_0 gegeben, dann kann man weitere Parabeltangenten durch folgende Konstruktion finden: Man teilt die Strecken $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{P_0P_2}$ in je n Teile (n beliebig). Die erhaltenen Punkte $R_i \in t_1$ und $Q_i \in t_2$ numeriert man in der Reihenfolge

$R_0 = P_1, R_1, R_2, \ldots, R_n = P_0$

$Q_0 = P_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n = P_2.$

Die Verbindungslinien R_iQ_i von Punkten mit gleichen Indizes sind dann die Parabeltangenten (*Hüllkonstruktion* der Parabel). Man konstruiere danach für $n = 10$ und $\overline{P_0P_1} = 7$ cm, $\overline{P_0P_2} = 13$ cm, $\sphericalangle P_1P_0P_2 = 50°$ die Parabel durch einhüllende Tangenten.

11.34. Von der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sind die Punkte $P_1(-3{,}6; 4)$ und $P_2(4{,}8; -3)$ gegeben. Man bestimme die numerische Exzentrizität ε und die Abstände der Punkte P_1 und P_2 von den Brennpunkten.

11.35. In die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist ein Quadrat einzuzeichnen, dessen Eckpunkte auf der Ellipse liegen (und dessen Seiten damit parallel zu den Ellipsenachsen sind). Wie groß ist seine Fläche?

11.36. Man berechne die numerische Exzentrizität der elliptischen Erdbahn, wenn sich die Entfernungen der Erde von der im Brennpunkt stehenden Sonne in Sonnennähe (Perihel) und in Sonnenferne (Aphel) näherungsweise wie 29:30 verhalten.

11.37. Zwei Stäbe $\overline{OR} = m$ und $\overline{RP} = n$ sind in R durch ein Gelenk miteinander verbunden. $\overline{OR}$ dreht sich um O linksläufig mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen die Ebene, während sich $\overline{RP}$ um R mit der Winkelgeschwindigkeit 2ω gegen $\overline{OR}$ rechtsläufig dreht. Welche Bahn beschreibt Punkt P?

11.38. Eine Ellipse hat die Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. P_1 und P_2 sind zwei symmetrisch zur x-Achse gelegene Ellipsenpunkte. Durch P_1 wird eine Gerade g_1 parallel zur x-Achse gelegt und durch P_2 und den rechten Hauptscheitelpunkt A_2 eine Gerade g_2. Gesucht wird die Menge der Schnittpunkte der Geraden g_1 und g_2.

11.39. Wie lang ist die Sehne, die durch die Ellipse $100x^2 + 625y^2 = 62500$ aus der Geraden $y = -\frac{2}{5}x + \frac{34}{5}$ herausgeschnitten wird?

11.40. Eine Hyperbel hat ihre Scheitelpunkte in den Brennpunkten der Ellipse $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{36} = 1$ und die gleiche Nebenachse wie die Ellipse. Wo schneiden sich beide Kurven?

11.41. Eine Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ geht durch den Punkt $P(2; 3)$, ihre Asymptoten schließen den Winkel $2\alpha = 120°$ ein. Man berechne die Halbachsen.

11.42. Eine Ellipse hat die Gleichung $19x^2 + 64y^2 = 76$. Welche Hyperbel hat mit der Ellipse die Brennpunkte gemeinsam und geht durch den Punkt $P_1(5/4; 2)$?

11.43. Welches ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Entfernung von dem Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB} = 2a$ die mittlere Proportionale zwischen ihren Entfernungen von A und B ist?

11.44. Die Seite $\overline{BC} = a$ eines Dreiecks liegt fest, während die Spitze A sich so bewegt, daß $\gamma = 2\beta$ ist. Auf welcher Bahnkurve bewegt sich der Punkt A des Dreiecks?

11.45. Eine Kurve ist durch eine Parameterdarstellung gegeben. Man stelle eine Wertetabelle auf, zeichne die Kurve und bestimme ihre parameterfreie Gleichung $F(x; y) = 0$.

a) k_1: $x = t - 1$, $y = \frac{1}{2}t^2 - 3$,

b) k_2: $x = \frac{t}{1-t}$, $y = \frac{1+t}{1-t}$,

c) k_3: $x = 2\cos t + 3$, $y = 2\sin t$,

d) k_4: $x = 3\cot t$, $y = \frac{2}{\sin t}$

Lösungshinweis: Bei dem Übergang von der Parameterdarstellung zur parameterfreien Darstellung wird im allgemeinen t dadurch eliminiert, daß die Gleichung $x = x(t)$ nach t aufgelöst und der erhaltene Wert für t in die zweite Gleichung $y = y(t)$ eingesetzt wird.

Lösungen

1.1. Aussagen: a), e); Aussageformen: b), c), g);
weder Aussagen noch Aussageformen: d), f)

1.2. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ b) $B = \{3, 5\}$ c) $C = \emptyset$ (vgl. Beispiel 1.6.)

1.3. a) „Pudel" ist Artbegriff, „Hund" Gattungsbegriff: $A \subseteq B$ (es gilt sogar: $A \subset B$)
b) $A = B$ c) $A \supseteq B$ (es gilt sogar: $A \supset B$)

1.4. Vgl. Beispiele 1.30., 1.32.
a) $H(x) \Rightarrow K(x)$, $H(x)$ ist hinreichende Bedingung
b) notwendige und hinreichende Bedingung
c) notwendige Bedingung

1.5. a) $\{q, r, s, t, u\}$; $\{r, s, t\}$; $\{u\}$; $\{q\}$
b) $\{r, s, t, u\} = A$; $\{t, u\} = C$; $\{r, s\}$; $\emptyset$
c) $\{r, s, t, u, v, w\}$; $\emptyset$; $\{r, s, t, u\} = A$; $\{v, w\} = D$

1.6. a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $\{4, 5, 6\}$; $\{0, 1, 2, 3\}$; $\{7, 8, 9, 10\}$
b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$; $\emptyset$; A; C
c) A; D; $\{0, 1, 2, 3\}$; $\emptyset$

1.7. Beachte Formel (1.1) und Bild 1.10
a) $\emptyset$; A; A; $\emptyset$ b) A; U; $\emptyset$; $\bar{A}$ c) $\emptyset$; U; A; $\bar{A}$

1.8. a) Vgl. Bild 1.11: $A \cup B$ b) $\emptyset$ c) A d) B

1.9. a) $K \cap \{n, r\} = \{n\}$ b) $K \cup \{n, r, s\} = \{m, n, o, p, q, r, s\}$
c) $K \setminus \{n, o, p, q, r, s, t\} = \{m\}$ d) $K \setminus \{o, p, q\} = \{m, n\}$

1.10. a) $Q \subset R$, $Q \subset S$, $R \subset P$, $S \subset P$, $S \subset D$, $P \subset T$, $T \subset V$, $D \subset V$
(folglich: $Q \subset P$, $Q \subset T$, $Q \subset V$, $Q \subset D$, $R \subset T$, $R \subset V$, $S \subset T$, $S \subset D$, $S \subset V$, $P \subset V$)
b) $R \cap S = Q$, $T \cap D = S$, $P \cap D = S$

1.11. a) $\{r, s\}$; $\{4, 5, 6\} \setminus \{4, 5, 6, 8, 9, 10\} = \emptyset$
b) $\{q\}$; $\{7, 8, 9, 10\}$

1.12. a) Siehe Bild L 1
b) $(A \cap B) \setminus D$ c) $[D \setminus (A \cup B)] \cup (C \cap D)$

1.13. a) Siehe Bild L 2 b) Siehe Bild L 3

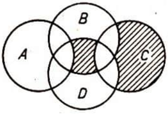
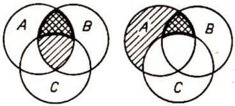
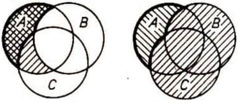


Bild L 1



$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$

Bild L 2



$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Bild L 3

2.1. a) $0{,}21\bar{3}$ b) $0{,}\overline{135}$ c) $0{,}09\overline{615384}$

2.2. a) $[5, 15)$, $(7, 10]$, $[5, 7]$, $(10, 15)$

b) vgl. Beispiele 2.3., 2.4.: $(3, 7) \cup (7, 15) = (3, 15) \setminus \{7\}$, $\emptyset$, $[2, 10]$, $\{5\}$

c) $(3, 10] \setminus B = (3, 7]$, $(3, 5] \setminus A = (3, 5)$

d) $A \setminus ((3, 7) \cup (7, 15)) = \{7\}$, $C \cap (5, 10] = (5, 7)$

2.3. a) $\dfrac{35xy^2}{42y^3}$ b) $\dfrac{45pq^2}{55p^3q^3}$ c) Erw.-f.: $2ab$; $\dfrac{4a^2b - 6ab^2}{10a^2b - 8ab^2}$

d) Erw.-f.: $-3y$; $\dfrac{-12xy - 15y}{6xy - 15y}$

e) Erw.-f.: $3(2u - 3v)$; $\dfrac{24ux - 36vx}{12u^2 - 27v^2}$

2.4. a) $\dfrac{15t^3}{17r^3s^3}$ b) $\dfrac{2x - 3y}{4p + 5q}$ c) $-\dfrac{5y}{3x - 5y}$

d) $\dfrac{(5a + 3c)(3a - 7b)}{(3b - 5c)(3a - 7b)} = \dfrac{5a + 3c}{3b - 5c}$ e) nicht kürzbar

2.5. a) $60a^2b^3c$; Erw.-f.: $5b^2c$, $4a^2$, $3ab^3$

b) $6m(4m + 5n)(4m - 5n)$; Erw.-f.: $3(4m + 5n)$, $(4m - 5n)$, $6m$

c) $6ab(a + 4b)$; Erw.-f.: $6b$, $2a$, $b(a + 4b)$

2.6. a) $\dfrac{9xy + 10yz - 10yz + 30z^2 - 15x^2 - 9xy}{15xyz} = \dfrac{2z^2 - x^2}{xyz}$

b) $\dfrac{(3u - 4v)(u - v)}{30(3u - 4v)} = \dfrac{u - v}{30}$

c) den zweiten Bruch mit -1 erweitern: $\ldots + \dfrac{25y^2}{4x^2 - 10xy}$

$+ \ldots \dfrac{8x^3 + 125y^3 + 50xy^2 - 125y^3 - 8x^3 + 20x^2y}{10xy(2x - 5y)} = \dfrac{2x + 5y}{2x - 5y}$

d) $\dfrac{-u^2 + 1}{u(u + 1)(u - 1)} = \dfrac{-(u^2 - 1)}{u(u + 1)(u - 1)} = -\dfrac{1}{u}$ e) $\dfrac{2u^2 - 10u - 150}{u(u + 5)(u + 15)}$

2.7. a) $\dfrac{100xy^2}{3}$ b) $\dfrac{9a(a-b)}{4b(a+b)}$

2.8. a) $\dfrac{5}{4}$ b) $3a - 4b$ c) $\dfrac{1}{3ab}$ d) $\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$

2.9. a) $9u^2 - 7u + 8$ b) Ordnen! $9v^2 + 7v$

c) $2a^2 - 2ab + 4b^2 + \dfrac{b^4}{3a^2 + 2ab - 4b^2}$

d) $125x^6 + 75x^4yz + 45x^2y^2z^2 + 27y^3z^3$

2.10. a) -2 b) 30 c) 6

2.11. Vgl. Beispiel 2.33.; a) 10, 4, -2, -8 b) 7, 15, -11, -3

2.12. Vgl. Beispiel 2.34.; a) $\begin{cases} 6r, & r - 2s \geqq 0 \\ -2r + 16s, & r - 2s < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -u - 3v, & 2u + v \geqq 0 \\ 11u + 3v, & 2u + v < 0 \end{cases}$

2.13. Vgl. Beispiel 2.32.; a) $A = \{10, 20\}$ b) $B = \{-12, 8\}$

2.14. a) 11 b) 4; vgl. Beispiel 2.44.

2.15. a) $\sum\limits_{n=3}^{6} (n + 2) = 26$ b) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - na$

2.16. a) $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2$ b) $\sum\limits_{i=3}^{5} \dfrac{1}{y_i}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{5} 4n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{5} n^2$

Es sind auch andere Darstellungen möglich.

2.17. a) 6,38 b) 3,45 c) 3,78 d) 12,35

2.18. a) 0,0643 b) $3{,}76 \cdot 10^5$ c) 70,0

2.19. a) $4{,}65 \approx 4{,}6$ b) $6{,}25 \cdot 10^4 \approx 6{,}3 \cdot 10^4$ c) $895 \approx 8{,}9 \cdot 10^2$

2.20. a) 18,6 b) 0,27

2.21. a) $\dfrac{1{,}15_0 \cdot 10^5}{6{,}8_4 \cdot 10^{-3} + 0{,}035} = \dfrac{1{,}15_0 \cdot 10^5}{0{,}041_8} = 2{,}7 \cdot 10^6$

b) $\dfrac{1{,}91_3 \cdot 10^3 - 83{,}2}{6{,}5_7 \cdot 10^5} = \dfrac{1{,}83_0 \cdot 10^3}{6{,}5_7 \cdot 10^5} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$

2.22. $\dfrac{34{,}27_6}{1{,}15_9 \cdot 10^3 - 1{,}19 \cdot 10^3} = \dfrac{34{,}27_6}{-0{,}03_1 \cdot 10^3} = -1$

Die Differenz zweier fast gleicher Zahlen im Nenner führt zu einer relativen Genauigkeit von nur einer signifikanten Ziffer!

2.23. a) 16 b) 8 c) $\dfrac{1}{24}$ d) $5^8 - 3^5 - 5^8 - 3^5 = -2 \cdot 3^5 = -486$

e) vgl. Beispiel 2.61.: $(x - 2y)^5$

f) $\dfrac{1}{x^{12}}$, x^{12}, $-\dfrac{1}{x^{12}}$, $-x^{12}$, $-x^{81}$

2.24. a) $\dfrac{(2\cdot 3)^4\cdot(2^3\cdot 3)^6}{(2^2\cdot 3)^{10}}=4$ b) $\dfrac{3}{32b}$ vgl. Beispiel 2.63.

c) $\dfrac{r^{4a}s^{-2}t^1}{1}=\dfrac{r^{4a}t}{s^2}$ d) $\left(\dfrac{u^3v^8w^{15}}{v^5w^8u^2w^7v^5}\right)^{12}=\left(\dfrac{u}{v^2}\right)^{12}$

e) $\dfrac{(x+1)\,x^4+(1-x^4)-1\cdot x^5}{x^{n+3}}=\dfrac{1}{x^{n+3}}$

f) $\dfrac{u^2v^4}{s^2}$ vgl. Beispiel 2.66. g) $\dfrac{3a^2}{b^5}$

2.25. a) $\sqrt[3]{a^2}$ b) $x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{u^2}}$ d) $\sqrt{b^3}=b\sqrt{b}$

e) $\sqrt[3]{c^{11}}=c^3\sqrt[3]{c^2}$ f) $a^{\frac{3}{7}}$ g) $a^{\frac{7}{3}}$ h) $c^{-\frac{3}{4}}$

i) $x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{3}}$ j) $x^{\frac{9}{4}}$

2.26. a) 4 b) $\left(\sqrt[5]{32}\right)^2=4$ c) $\dfrac{4}{9}$ d) $\dfrac{3}{4}$

2.27. a) $80-75=5$ b) $3x\cdot 4y=12xy$ c) nicht zerlegbar

d) $\sqrt{(3x+4y)^2}=3x+4y$ e) $\sqrt{5\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 7}=10\sqrt{7}$ f) $xy^2\sqrt[3]{y^2}$

g) vgl. Beispiel 2.76.; $4\sqrt{2}$ h) $12\sqrt[3]{3}$

i) $15\sqrt{2\cdot 6\cdot 6}-18\sqrt{3\cdot 6\cdot 6}=18\left(5\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right)$ j) $3\left(20-\sqrt{15}\right)$

k) $\sqrt{7^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}=6$ l) $\sqrt[r]{a^{4r}}=a^4$ m) $\sqrt[30]{n^{47}}=n\sqrt[30]{n^{17}}$

n) $\sqrt[30]{a^{11}}$ o) $\sqrt[18]{a^{12}}=\sqrt[3]{a^2}$ p) $\sqrt[72]{a^{41}}$ q) $\sqrt{a}$

r) $\sqrt[12]{128}$ s) $8\sqrt[6]{32}$

2.28. a) $\dfrac{5}{6}\sqrt{3}$ b) $a^2\sqrt[4]{a^3}$ c) $5\left(7-3\sqrt{5}\right)$ d) $\dfrac{2}{5}\sqrt{15}$

e) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}=x+\sqrt{x^2-1}$

2.29. a) $\approx 2\cdot 10^2$ b) $\approx 4\cdot 10^2$ c) $\approx 9\cdot 10^{-3}$ d) $\approx\sqrt[3]{80\cdot 10^{-6}}\approx 4\cdot 10^{-2}$

2.30. Vgl. Beispiel 2.90.; a) $5, -5$ b) $5, -5$ c) $3, \dfrac{1}{3}$ d) $5, \dfrac{1}{5}$

e) $125, 9, \dfrac{1}{16}, \sqrt[3]{a}$ f) $6, \dfrac{1}{6}, 6, 36$

2.31. a) $2\log_a x-3\log_a y-\log_a z$ b) $\dfrac{1}{3}\left(5+2\log_u v-\dfrac{1}{4}\log_u w\right)$

c) $\log_m(x^2+y^2)-2\log_m(x+y)$ d) $\dfrac{1}{2}\left[\log_b(1+x)-\log_b(1-x)\right]$

2.32. a) $\log_r\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$ b) $\log_a \sqrt[3]{uv^4}$ c) $\log_m \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$

d) $\log_x\left[\frac{m^3(m-n)^2}{m^3(m-n)}\right] = \log_x(m-n)$

2.33. a) $\lg x = (-1{,}4248 - 0{,}8463) \cdot 5 = -11{,}3555 = (-11{,}3555 + 12) - 12$
$= 0{,}6445 - 12;\ x = 4{,}411 \cdot 10^{-12}$

b) $\lg x = (-0{,}6482):3 = (-0{,}2161 + 1) - 1 = 0{,}7839 - 1;\ x = 0{,}6081$

c) $x = \sqrt[5]{605{,}2 - 16{,}9} = \sqrt[5]{588{,}3} = 3{,}580$ vgl. Beispiel 2.107.

d) 149,2 e) 0,1114 f) $\lg x = (\lg 1{,}35):10 = 0{,}0130;\ x = 1{,}030$

g) $\ln 3{,}969 = 1{,}379$ h) $\ln 4 - \ln 100 = -3{,}219 \left(\text{oder: } -\ln \frac{100}{4} = -\ln 25\right)$

i) 0,4868 j) $(\ln 1{,}24):(\ln 2) = 0{,}3103$ k) 6 l) 2,215

2.34. $20 \lg \frac{U_x}{U_0}\,\text{dB} = \ln \frac{U_x}{U_0}\,\text{N};\ 8{,}686\,\text{dB} = 1\,\text{N},\ 1\,\text{dB} = 0{,}115\,\text{N}$

2.35. a) $l = \sqrt[4]{\frac{120EIf}{q_m}}$ b) $T_2 = \frac{T_1}{\sqrt[y]{\varphi}}$ c) $R = 2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \omega^2}$

d) $\frac{C}{F} = L^{\frac{3}{10}},\ F = \frac{C}{L^{\frac{3}{10}}}$ e) $\ln\varphi = y \ln\frac{T_1}{T_2},\ y = \frac{\ln\varphi}{\ln\frac{T_1}{T_2}} = \frac{\ln\varphi}{\ln T_1 - \ln T_2}$

f) $F_n = F_2\,\mathrm{e}^{\mu\beta} - F_2,\ \beta = \frac{1}{\mu}\ln\frac{F_n + F_2}{F_2}$

g) $U_x = U_0 \cdot 10^{\frac{p_e}{20}}$ h) $\ln\frac{D}{d} = \frac{2\pi L\lambda(t_i - t_a)}{Q}$ $D = d\exp\left[\frac{2\pi L\lambda(t_i - t_a)}{Q}\right]$

2.36. 3628800

2.37. $\mathrm{e} = 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}166667 + 0{,}041667 + 0{,}008333$
$+ 0{,}001389 + 0{,}000198 + 0{,}000025 + 0{,}000003 + \ldots$
$= 2{,}71828$

Anleitung: z. B. $\frac{1}{4!} = \frac{1}{3! \cdot 4} = 0{,}166667:4$ usw.

2.38. a) 792 b) 792 c) 1140 d) 1 e) 0 f) -4 g) 5

2.39. a) $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

b) $\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{6}x^2y^2 + \frac{2}{27}xy^3 + \frac{1}{81}y^4$

c) $a^{30} - 30a^{29} + 435a^{28} - 4060a^{27} + - \ldots$ d) $\binom{9}{4}(-2)^4 = 2016$

2.40. $y = \frac{1}{5{,}013}\exp\left[-\frac{(x-4)^2}{8}\right]$

x	① − 4	(②)²	− ③:8	exp ④	⑤:5,013
①	②	③	④	⑤	y

$y_i = 0{,}027;\ 0{,}043;\ 0{,}065;\ 0{,}091;\ 0{,}121;\ 0{,}151;\ 0{,}176;\ 0{,}193;\ 0{,}199;\ 0{,}193;\ 0{,}176;\ \ldots;$
$0{,}027$. — Bild L 4

2.41.

x	$6 \cdot ①$	$(①)^2$	$② - ③$	$\sqrt{④}$	$\frac{2}{3} \cdot ⑤$
①	②	③	④	⑤	y

$y_i = 0;\ 1{,}106;\ 1{,}491;\ 1{,}732;\ 1{,}886;\ 1{,}972;\ 2$

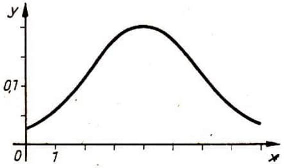


Bild L 4

2.42. a) $-2\mathrm{j}$ b) -6 c) $1{,}5$ d) $\mathrm{j}, -1, 1$ e) $-1, -\mathrm{j}, -1$

2.43. a) $23 - 27\mathrm{j}$ b) $(16 - 30\mathrm{j})(2 + 4\mathrm{j}) = 152 + 4\mathrm{j}$

c) $\dfrac{22 + 14\mathrm{j}}{-3 - 6\mathrm{j}} = \dfrac{-150 + 90\mathrm{j}}{45} = -\dfrac{10}{3} + 2\mathrm{j}$

d) $\dfrac{1}{-33 - 21\mathrm{j}} + \dfrac{1}{2 + 4\mathrm{j}} = \left(-\dfrac{11}{510} + \dfrac{7}{510}\mathrm{j}\right) + \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{5}\mathrm{j}\right) = \dfrac{4}{51} - \dfrac{19}{102}\mathrm{j}$

e) $(-27 + 36\mathrm{j}) + \left(\dfrac{-1 + 13\mathrm{j}}{17}\right)^2 = -27{,}58 + 35{,}91\mathrm{j}$

f) $[(2 + 4\mathrm{j})^2]^2 = (-12 + 16\mathrm{j})^2 = -112 - 384\mathrm{j}$ g) 38

2.44. a) $5{,}39(\cos 21{,}8° + \mathrm{j} \sin 21{,}8°)$ b) $8{,}06[\cos(-60{,}3°) + \mathrm{j} \sin(-60{,}3°)]$

c) $23{,}7(\cos 139{,}5° + \mathrm{j} \sin 139{,}5°)$ d) $25{,}7(\cos 256{,}5° + \mathrm{j} \sin 256{,}5°)$

e) $183{,}5[\cos(-4{,}37°) + \mathrm{j} \sin(-4{,}37°)]$

f) $722{,}8(\cos 265{,}0° + \mathrm{j} \sin 265{,}0°)$

2.45. a) $5(\cos 90° + \mathrm{j} \sin 90°)$ b) $10(\cos 180° + \mathrm{j} \sin 180°)$

c) $8[\cos(-90°) + \mathrm{j} \sin(-90°)]$ d) $6(\cos 0° + \mathrm{j} \sin 0°)$

2.46. a) $16{,}9 + 10{,}8\mathrm{j}$ b) $-0{,}127 - 0{,}272\mathrm{j}$ c) $3{,}69 - 1{,}54\mathrm{j}$

d) $-78{,}3 + 16{,}2\mathrm{j}$ e) $0{,}327 + 6{,}69\mathrm{j}$ f) $-0{,}680 - 0{,}0368\mathrm{j}$

2.47. a) -4 b) $12\mathrm{j}$ c) 3 d) $-20\mathrm{j}$

2.48. a) $-11{,}64 + 2{,}90\mathrm{j}$ b) $0{,}2\mathrm{e}^{\mathrm{j}206°} = -0{,}1798 - 0{,}0877\mathrm{j}$

c) $(4\mathrm{e}^{\mathrm{j}144°})^3 = 19{,}8 + 60{,}9\mathrm{j}$

d) $0{,}575 + 0{,}617\mathrm{j}\ (k = 0),\ -0{,}821 + 0{,}190\mathrm{j}\ (k = 1),\ 0{,}246 - 0{,}806\mathrm{j}\ (k = 2)$

e) $-0{,}0783 + 0{,}595\mathrm{j}\ (k = 0),\ 0{,}0783 - 0{,}595\mathrm{j}\ (k = 1)$

f) $3{,}00 + (0{,}436 + k \cdot 2\pi)\,\mathrm{j}$ g) $-0{,}511 + (2{,}46 + k \cdot 2\pi)\,\mathrm{j}$

h) $1{,}099 - (1{,}134 + k \cdot 2\pi)\,\mathrm{j}$

2.49. $z_1 = 27{,}7\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}25{,}6°},\ z_2 = 18{,}2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}9{,}5°},\ z_3 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°}$

a) $0{,}127\mathrm{e}^{\mathrm{j}79{,}7°} = 0{,}0227 + 0{,}125\mathrm{j}$

b) $5{,}27\mathrm{e}^{\mathrm{j}(12{,}8^\circ + k\cdot 180^\circ)} = \pm(5{,}14 + 1{,}17\mathrm{j})$

c) $2{,}90 + \mathrm{j}(-9{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ) = 2{,}90 + \mathrm{j}(-0{,}166 + k \cdot 2\pi)$

d) $2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(0^\circ + k\cdot 90^\circ)} = 2;\ 2\mathrm{j};\ -2;\ -2\mathrm{j}$

2.50. a) $(6, 12) \setminus (2, 10] = (10, 12)$

b) $(2, 10] \setminus (6, 8] = (2, 6] \cup (8, 10]$

c) $D \setminus B = \{12\}$, $A \cap C = [3, 8]$; Ergebnis: $\{12\} \cup [3, 6]$

2.51. a) $\dfrac{8x^3 + 14x^2y - 30xy^2}{2x(4x + 5y)\,(4x - 5y)} = \dfrac{x + 3y}{4x + 5y}$

b) $\dfrac{-16m^2 - 20mn + 66n^2}{(3m + 4n)\,(2m - 3n)} = -\dfrac{8m + 22n}{3m + 4n}$

c) $\dfrac{27a^3 + 9a^2b - 6ab^2}{6ab(3a + b)\,(3a - b)} = \dfrac{3a + 2b}{2a(3a + b)}$

d) $\dfrac{r^3 - 2r^2s + r^3 + 2r^2s - r^3 - 2r^2s + 4rs^2 + 8s^3 - 4rs^2 - 8s^3}{r^2(r + 2s)^2\,(r - 2s)} = \dfrac{1}{(r + 2s)^2}$

2.52. a) $\dfrac{b^2x}{ay^2} - \dfrac{a^2y}{bx^2} = \dfrac{b^3x^3 - a^3y^3}{abx^2y^2}$ b) $\dfrac{a + 1}{2p + 3}$

2.53. a) $\dfrac{RR_1R_2}{R_1R_2 - RR_2 - RR_1}$ b) $\dfrac{6 - 10x}{4x + \dfrac{15(2 - 6x)}{10}} = 2$

2.54. a) $1{,}2x^2 + 1{,}5xy - 0{,}8y^2$ b) $11r + 12s - 9t + \dfrac{-3st + 9t^2}{13r - 9s + 11t}$

2.55. a) $\{5\}$ b) $\{-5, 3\}$

2.56.

a	4	4	4	4	−4	−4	−4	−4
b	5	5	−5	−5	5	5	−5	−5
c	6	−6	6	−6	6	−6	6	−6
s	7	19	−3	9	−9	3	−19	−7

2.57.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	3	2,5	2	1,5	1	1,5	2	2,5	3

2.58. a) $\begin{cases} -a - 4b; & 2a \geqq 0,\ 3a + 4b \geqq 0 \\ 5a + 4b; & 2a \geqq 0,\ 3a + 4b < 0 \\ -5a - 4b; & 2a < 0,\ 3a + 4b \geqq 0 \\ a + 4b; & 2a < 0,\ 3a + 4b < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 2y; & 2x + y \geqq 0,\ x \geqq 0,\ y - 2x \geqq 0 \\ 3x; & 2x + y \geqq 0,\ x \geqq 0,\ y - 2x < 0 \\ x + 2y; & 2x + y \geqq 0,\ x < 0,\ y - 2x \geqq 0 \\ 5x; & 2x + y \geqq 0,\ x < 0,\ y - 2x < 0 \\ -5x; & 2x + y < 0,\ x \geqq 0,\ y - 2x \geqq 0 \\ -x - 2y; & 2x + y < 0,\ x \geqq 0,\ y - 2x < 0 \\ -3x; & 2x + y < 0,\ x < 0,\ y - 2x \geqq 0 \\ x - 2y; & 2x + y < 0,\ x < 0,\ y - 2x < 0 \end{cases}$

2.59. a) $\sum\limits_{k=2}^{5} \frac{k+1}{k}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{5} -\left(\frac{1}{2}\right)^k$ c) $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{i^2}{3i+1}$

Es sind auch andere Darstellungen möglich.

2.60. a) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$ (denn aus der Definition folgt $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$)

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$

2.61. $$\frac{0{,}05_7 \cdot 10^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^3}{0{,}0820_8 \cdot 10^4 + 4{,}9_0 \cdot 10^4} = \frac{0{,}2_0 \cdot 10^5}{5{,}_0 \cdot 10^4} = 0{,}4$$

2.62. a) $\frac{u^{r+9}v^{s+3}}{w^{2t-8}} \cdot \frac{w^{t-8}}{u^{7-2r}v^{s-3}} = \frac{u^{3r+2}v^6}{w^t}$

b) $\frac{a^m a^{m+n} b^{m+n} a^1 c^{2m}}{b^m c^m a^{2m} b^{2m}} = \frac{a^{n+1}c^m}{b^{2m-n}}$ c) $\frac{a^{r-2}b^{3s-9}}{c^2}$

d) $(r-s)^{1-n}\, r^{n+6} s^n = \frac{r^{n+6}s^n}{(r-s)^{n-1}}$

2.63. a) $\sqrt[n]{a^{6n}b^{2n}} = a^6 b^2$ b) $8\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$

c) $a^3bx^2\sqrt{a} - ab^2x^3\sqrt{a} + a^4x\sqrt{x} - a^2bx^2\sqrt{x}$

d) $\sqrt[36]{\frac{x^{27}x^{16}}{x^{30}}} = \sqrt[36]{x^{13}}$ e) $\sqrt[60]{\frac{3^6 \cdot 3^{25} \cdot 3^{12}}{3^{10} \cdot 3^{30}}} = \sqrt[20]{3}$

2.64. a) $2 + \sqrt{1-x^2}$ b) $\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2 - 3} = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3+4\sqrt{2}} = \frac{2+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{23}$

c) $\sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}{9-8}} = 3 - \sqrt{8}$

2.65. a) $-\frac{1}{5}$ b) $\mathrm{j}\varphi$ (denn $\log_e e = 1$) c) $-1 - 1 + 2 = 0$

2.66. $-\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$, Rationalmachen des Nenners durch Erweitern mit $x - \sqrt{x^2-1}$

2.67. a) $J = \frac{0{,}25}{1000}$, $v = 2{,}99\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

b) $\left(\frac{p_1}{93{,}25}\right)^{\frac{0{,}405}{1{,}405}} = \frac{393}{293}$; $p_1 = 93{,}25 \cdot \left(\frac{393}{293}\right)^{\frac{1{,}405}{0{,}405}} = 258{,}2\ \mathrm{kPa}$

c) $C = 400 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}$, $L = 0{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{8{,}33 \cdot 10^{12} - 0{,}16 \cdot 10^{12}} = 455\ \mathrm{kHz}$$

2.68. a) $T_1 = 100\sqrt[4]{\frac{Q}{C'A} + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}$ b) $\sigma_x = \sigma_y + 2\sqrt{\tau_m^2 - \tau^2}$

c) $p_D = p_S \left(\dfrac{1-\lambda_0}{\varepsilon_0} + 1\right)^{n'}$ d) $\beta = \sqrt{\dfrac{\exp(2\varphi_1) - 0{,}7}{0{,}3}}$

e) $\dfrac{x}{1{,}54} = \left(\dfrac{0{,}743}{0{,}532}\right)^{-\frac{1{,}25}{1{,}47}}$; $x = 1{,}159$

2.69. Vgl. Beispiel 2.125. a) $-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} = -\dfrac{5}{128}$

b) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} = \dfrac{7}{256}$ c) $\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6} = \dfrac{2}{9}$ d) $-\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9} = -\dfrac{14}{81}$ e) $\dfrac{7}{1024}$

2.70. a) $\dbinom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = (-1)^3\,\dfrac{(-n+2)(-n+1)(-n)}{1\cdot 2\cdot 3} = -\dbinom{-n+2}{3}$

b) $\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{n(n-1)\,[3+(n-2)]}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{(n+1)\,n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$

2.71. a) $20a^4 + 160a^2 + 64$ b) $1 - 15a + 105a^2 - 455a^3 + 1365a^4$

c) $\dbinom{8}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\cdot 3^3 = \dfrac{56}{9}$ d) $(1+0{,}03)^4 \approx 1{,}126$

2.72. $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} + \cdots + \dbinom{n}{n}$

2.73.

x	①^2	② + 1	$\sqrt{③}$	④ + ①	ln ⑤
①	②	③	④	⑤	y

$y_i = 0;\ 1{,}44;\ 2{,}09;\ 2{,}49;\ -1{,}44;\ -2{,}09;\ -2{,}49$

2.74.

x	$e^{①}$	1 : ②	② − ③	② + ③	④ : ⑤
①	②	③	④	⑤	y

$y_i = -0{,}964;\ -0{,}905;\ -0{,}762;\ -0{,}462;\ 0;\ 0{,}462;\ \ldots;\ 0{,}964$

2.75. a) $\dfrac{7580 + 400\mathrm{j}}{200 + 16\mathrm{j}} = \dfrac{10^2\cdot(15224 - 412{,}8\mathrm{j})}{40256} = 37{,}8 - 1{,}03\mathrm{j}$

b) $\dfrac{1{,}63 + 0{,}25\mathrm{j}}{0{,}37 - 0{,}25\mathrm{j}} = \dfrac{0{,}5406 + 0{,}5\mathrm{j}}{0{,}1994} = 2{,}71 + 2{,}51\mathrm{j}$

2.76. a) $(3x + 4y\mathrm{j})(3x - 4y\mathrm{j})$ b) $\left(2\sqrt{a} + \sqrt{5b}\,\mathrm{j}\right)\left(2\sqrt{a} - \sqrt{5b}\,\mathrm{j}\right)$

c) $(5 + 2\mathrm{j})(5 - 2\mathrm{j})$

2.77. $z_1 = 126{,}5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}18{,}43°}$, $z_2 = 30{,}41\mathrm{e}^{\mathrm{j}9{,}46°}$, $z_3 = 20\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}$, $z_4 = 0{,}3046\mathrm{e}^{\mathrm{j}23{,}20°}$

a) $z_1 + z_2 = 150 - 35\mathrm{j} = 154{,}0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}13{,}13°}$;

$24{,}98\mathrm{e}^{\mathrm{j}4{,}16°} = 24{,}91 + 1{,}81\mathrm{j}$

b) $\sqrt[3]{0{,}2404\mathrm{e}^{\mathrm{j}27{,}89°}} = 0{,}6218\mathrm{e}^{\mathrm{j}(9{,}30° + k\cdot 120°)}$

$= 0{,}614 + 0{,}100\mathrm{j};\ = -0{,}394 + 0{,}481\mathrm{j};\ = -0{,}220 - 0{,}582\mathrm{j}$

c) $(1{,}52\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}80{,}54°})^3 = -1{,}67 + 3{,}09\mathrm{j}$

d) $3{,}41 + \mathrm{j}(9{,}46° + k\cdot 360°) = 3{,}41 + \mathrm{j}(0{,}165 + k\cdot 2\pi)$

e) $3{,}00 + \mathrm{j}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)$

f) $\dfrac{1 + z_4}{1 - z_4} = \dfrac{1{,}28 + 0{,}12\mathrm{j}}{0{,}72 - 0{,}12\mathrm{j}} = 1{,}761\mathrm{e}^{\mathrm{j}14{,}82°}$;

$0{,}283 + \mathrm{j}(7{,}41° + k\cdot 180°) = 0{,}283 + \mathrm{j}(0{,}129 + k\cdot\pi)$

3.1. a) 1,53897 $= 88{,}176° = 88°10'35'' = 97{,}974$ gon
b) 4,96327 $= 284{,}374° = 284°22'28'' = 315{,}972$ gon
c) 114,279° $= 114°16'44'' = 126{,}977$ gon $= 1{,}99454$
d) 65,352° $= 65°21'07'' = 72{,}613$ gon $= 1{,}14061$
e) 195°48'25'' $= 195{,}807° = 3{,}41748 = 217{,}563$ gon
f) 228°32'08'' $= 228{,}536° = 3{,}98870 = 253{,}928$ gon
g) 54,685 gon $= 0{,}85899 = 49{,}216° = 49°12'59''$
h) 248,252 gon $= 3{,}89953 = 223{,}427° = 223°25'36''$

3.2. a) 111,2 km b) 27,80 km c) 1853 m ($\approx$ 1 Seemeile) d) 30,89 m

3.3. 137 μm

3.4. a) sin 59° b) cos 75° c) tan 173° d) cot 65°
e) $\sin\frac{\pi}{2}$ f) $\cos\frac{\pi}{4}$ g) $\tan\frac{3}{5}\pi$ h) $\cot\frac{4}{3}\pi$

3.5. a) $\cos\varphi = \frac{24}{25}$; $\tan\varphi = \frac{7}{24}$; $\cot\varphi = \frac{24}{7}$
b) $\sin\varphi = 0{,}8$; $\tan\varphi = 1{,}\bar{3}$; $\cot\varphi = 0{,}75$
c) $\sin\varphi = \frac{12}{13}$; $\cos\varphi = \frac{5}{13}$; $\cot\varphi = \frac{5}{12}$

3.6. a) Mit Beachtung von (3.11) und (3.9) ergibt sich:

$$1 + \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

b) Analog zu a) bei Beachtung von (3.12) und (3.9)

3.7. a) $\cos\varphi$ b) $\frac{1}{\sin\varphi}$ c) 1

3.8. a) $y = -\cos x$ b) $y = \tan x$ c) $y = \sin 2x$ d) $y = -\sin x$
Durch Grenzwertuntersuchung ergibt sich bei d), daß die vereinfachte Funktion sogar für die in der Aufgabenstellung ausgenommenen Winkel gilt.

3.9. a) 0,56347 b) −0,74652 c) −1,22804 d) 1,08440
e) 0,97762 f) 0,62399 g) −0,18356 h) 2,44771
i) −0,31074 j) −0,92172 k) −18,92765 l) −0,15552

3.10. a) $\varphi_1 = 238{,}674°$; $\varphi_2 = 301{,}326°$
b) $\varphi_1 = 76{,}415°$; $\varphi_2 = 283{,}585°$
c) $\varphi_1 = 56{,}979°$; $\varphi_2 = 236{,}979°$
d) $\varphi_1 = 168{,}025°$; $\varphi_2 = 348{,}025°$

3.11. Folgt aus (3.21) für $\beta = \alpha$ und das obere Vorzeichen

3.12. a) Aus (3.17) und (3.18) mit $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
folgt als Lösung: $\cos\alpha$
Entsprechend: b) $\sin\alpha$ c) $\sqrt{2}\cos\alpha$

3.13. Es ist Gl. (3.17) anzuwenden.

3.14.

Aufgabe	t		ωt		$y_0 = a \sin \varphi$	Spiegelung
	Periode	Versch.	Periode	Versch.		
a)	4π	$-\pi$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	$-0,3$	nein
b)	π	$\frac{\pi}{3}$	2π	$\frac{2\pi}{3}$	$-2,598$	ja
c)	2π	$\frac{\pi}{4}$	2π	$\frac{\pi}{4}$	$1,414$	nein
d)	6π	$-\frac{\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{6}$	$-0,125$	nein

3.15. $\omega t = 2,8274 = 162°$; $u = 27,81$ V

3.16. $\sin \omega t = \sin (6,2832\, f \cdot 0,002\text{ s}) = 0,25$

$\omega t = 14,48° = 0,2527$; $f = 20,11$ Hz

3.17. a) $\alpha = 30°31'$; $\beta = 59°29'$; $c = 65$ cm; $A = 924\text{ cm}^2$; $h_c = 28,4$ cm

b) $\alpha = 18°55'$; $\beta = 71°05'$; $b = 70$ cm; $A = 840\text{ cm}^2$; $h_c = 22,7$ cm

c) $\beta = 46°24'$; $b = 42$ cm; $c = 58$ cm; $A = 840\text{ cm}^2$

d) $\beta = 50°12'$; $c = 78,1$ cm; $a = 50$ cm; $A = 1500\text{ cm}^2$

e) $\alpha = 36°52'$; $a = 30$ cm; $b = 40$ cm; $A = 600\text{ cm}^2$

3.18. a) $\alpha = 74,85°$; $c = 21,60$ m; $h_c = 39,89$ m; $A = 430,9\text{ m}^2$

b) $\gamma = 89,40°$; $a = 12,88$ m; $h_c = 9,16$ m; $A = 82,9\text{ m}^2$

c) $\alpha = 64,60°$; $a = 32,69$ m; $h_c = 29,53$ m; $A = 414,0\text{ m}^2$

d) $\alpha = 10,39°$; $\gamma = 159,22°$; $c = 120$ cm; $A = 660\text{ cm}^2$

e) $c = 24$ cm; $a = 37$ cm; $\alpha = 71,08°$; $\gamma = 37,85°$

3.19. $b - s = 196$ mm

3.20. $A = 1,6089 r^2$

3.21. a) $F_1 = 381$ N; $F_2 = 220$ N b) $F_1 = 3780$ N; $F_2 = 3460$ N

c) $F_1 = F_2 = 1000$ N

3.22. $F_H = 8060$ N; $F_V = 5910$ N

3.23. a) $F_1 = F_2 = 2580$ N b) $F_1 = F_2 = 1490$ N

3.24. $F_H = 818$ N; $F_N = 2077$ N; $F_R = 623$ N

Zu beachten ist, daß für die Reibung gilt: $F_R = \mu \cdot F_N$

3.25. $E = 160$ lx

3.26. a) $p = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ b) $A = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$ c) $A = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360°}{n}$

3.27. Supporteinstellwinkel $\frac{\alpha}{2} = 4{,}76°$; Kegelwinkel $\alpha = 9{,}52°$

3.28. Drehmomentensumme muß Null sein (Hebelgesetz):

$$m_1 ga + m_0 ga' - m_2 ga = 0$$

Im Bild 3.54 gilt: $\cos\alpha = \frac{a}{l}$; $\sin\alpha = \frac{a'}{s}$

Einsetzen von a und a' sowie Division mit g:

$$m_1 l \cos\alpha + m_0 s \sin\alpha - m_2 l \cos\alpha = 0$$

Hieraus mit $m_2 - m_1 = \Delta m$: $\frac{\tan\alpha}{\Delta m} \approx \frac{\alpha}{\Delta m} = \frac{l}{m_0 s} = E.$

3.29. a) $\beta = 128{,}950°$; $a = 135{,}75$ m; $c = 73{,}86$ m

b) $\beta = 105{,}999°$; $a = 178{,}98$ m; $b = 208{,}30$ m

c) $\gamma = 17{,}482°$; $\alpha = 32{,}351°$; $a = 78{,}97$ m

d) $\beta_1 = 73{,}297°$; $\gamma_1 = 57{,}975°$; $c_1 = 385{,}56$ m

$\beta_2 = 106{,}703°$; $\gamma_2 = 24{,}569°$; $c_2 = 189{,}08$ m

e) nicht lösbar

f) $\alpha = 21{,}709°$; $\beta = 100{,}086°$; $c = 86{,}40$ m; $A = 1\,599{,}1\ \text{m}^2$

g) $\beta = 158{,}240°$; $\gamma = 1{,}421°$; $a = 112{,}68$ m

h) $\alpha = 53{,}012°$; $\beta = 79{,}448°$; $\gamma = 47{,}540°$; $A = 19\,148\ \text{m}^2$

i) $\alpha = 42{,}551°$; $\beta = 119{,}356°$; $\gamma = 18{,}093°$; $A = 379{,}58\ \text{m}^2$

3.30. $a = 65$ cm; $b = 35$ cm; $c = 53$ cm; $A = 926{,}3\ \text{cm}^2$;

$\alpha = 92{,}951°$; $\beta = 32{,}531°$; $\gamma = 54{,}518°$

3.31. Zweimalige Anwendung von Gln. (3.41) ergibt

$$x = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\alpha + \delta)} = 147{,}14\ \text{m}$$

3.32. Das Krafteck ist ein Dreieck, die gesuchten Winkel sind die Außenwinkel des Dreiecks: 141,79°; 120,00°; 98,21°.

3.33. Die Berechnung in zwei Kräfteparallelogrammen ergibt $F_R = 842$ N.

3.34. $F_1 = 248$ N; $F_2 = 179$ N

3.35. $\varphi_1 = \varphi - \varphi_2 = 45°$. Aus Bild L 5: $\tan\varphi_1 = \frac{U_2 \sin\varphi}{U_1 + U_2 \cos\varphi}$.

Durch Umstellung: $U_1 = \frac{U_2 \sin\varphi}{\tan\varphi_1} - U_2 \cos\varphi = 55{,}3$ V.

Aus Bild L 5 mit (3.40): $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi} = 131$ V

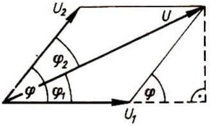


Bild L 5

3.36. (3.40): $\cos\varphi = \dfrac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_1I_2} = -0{,}2; \quad \varphi = 101{,}5°$

3.37. Aus (3.40) durch Umstellung: $U_2^2 + U_2 \cdot 2U_1 \cos\varphi + U_1^2 - U^2 = 0; \quad U_2 = 71{,}8$ V

3.38. a) Anwendung von (3.17) auf 2α und α sowie Umformung mit Gln. (3.23), (3.28) und (3.9)

b) analog zu a)

3.39. a) und b) folgen aus (3.26) und (3.25), c) und d) aus a) und b). Zweite Lösung durch Erweitern mit $1 - \cos\alpha$ bzw. $1 + \cos\alpha$ unter der Wurzel

3.40. a) $\cot(\alpha - 45°)$ wegen (3.30) und (3.31) bei Beachtung von $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

b) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$ nach Zerlegung mit der 3. binomischen Formel und Anwendung von (3.30) und (3.31)

c) Anwendung von (3.11) und Bringen auf den Hauptnenner ergibt

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}, \text{ was mit Hilfe von (3.17) auf } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \text{ führt.}$$

3.41. Benutzung der Gln. (3.30) und (3.23), Berücksichtigung von Gl. (3.7) und schließlich Anwendung von Gl. (3.29) führen auf $4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

3.42. $\tan\alpha' = \tan\alpha\cos\varphi; \quad \alpha' = 28{,}15°$

3.43. $\tan\gamma' = -\dfrac{(a^2 + b^2)\cot\varphi}{ab\sin\varphi}$

3.44. $v = d\sin\alpha\left(1 - \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) = 1{,}94$ mm

3.45. Aus Bild L 6: $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{s}{2r}$, $\tan\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{2p}{s}$. Hieraus mit Gl. (3.14): $p \approx \dfrac{s^2}{8r}$.

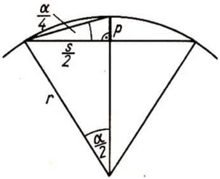


Bild L 6

3.46. Damit die Kräfte im Gleichgewicht sind, muß $F_{Z'} = -F_Z$ die Resultierende von F und F_Q werden (Bild L 7). Da die Beträge von F und F_Q gleich sind, ergibt sich als Krafteck ein gleichschenkliges Dreieck (Bild L 8), aus dem abgelesen werden kann: $\alpha = 60°$; $F_Z = 3464$ N.

3.47. $\sin(\omega t + \varphi) = 0{,}5; \quad \sin\omega t = 0{,}3; \quad \omega t = 17{,}46°; \quad \varphi = 12{,}54°$

3.48. Einzeichnen der Höhe h_c im Dreieck. Beweis von (3.39) durch Ansetzen von $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ sowie Auflösen der Gln. nach h_c, Beweis von (3.40) durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras und Einführung von $\cos\alpha$. Anschließend zyklische Vertauschung

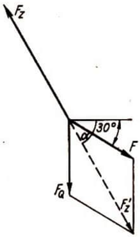


Bild L 7

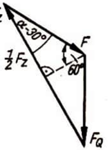


Bild L 8

3.49. Mit der Höhe $h_c = b \sin \alpha$ folgt aus $A = \frac{1}{2}\,ch_c$ die Formel $A = \frac{bc}{2} \sin \alpha$.

3.50. Zweimalige Anwendung von Gl. (3.40).

3.51. Ergänzung des Vierecks zu einem Parallelogramm und Bestimmung von dessen Fläche mit Gl. (3.41)

3.52. Die Last F_Q und die Stabkräfte bilden ein schiefwinkliges Dreieck, die Zerlegung von F_{S1} in zwei rechtwinklige Komponenten ergibt F_Z und F_N: $F_{S1} = 49\,330$ N (Zug); $F_{S2} = 69\,580$ N (Druck); $F_Z = 39\,910$ N; $F_N = 29\,000$ N.

3.53. a) $\alpha = 30°$; $\quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{2}$; $\quad \sin \beta = \frac{1}{3}$; $\quad \cos \beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$;

$$d = 2e - \frac{\sqrt{3}}{16}\,a\left(4 - \sqrt{6}\right) = 2e - 0{,}167\,85a$$

b) $\varepsilon = \alpha - \beta + \alpha_1 - \beta_1$; $\quad \beta_1 = 60° - \beta$; $\quad \varepsilon = \alpha + \alpha_1 - 60°$; $\quad \varepsilon = 47{,}095°$.

c) $e_G = \frac{\sqrt{3}}{16}\,a\left(4 - \sqrt{6}\right) = 0{,}167\,85a = 0{,}193\,81h$. Somit $d = 2e - e_G$.

3.54. Gl. (3.35) kann aus Bild 3.60 nach Einzeichnung entsprechender Hilfslinien (Lote von P_a, P_b und P_c auf den variablen Schenkel des Winkels ωt und Parallelen zu diesem Schenkel durch P_a und P_b) abgelesen werden. Gl. (3.36) folgt aus $\triangle\, OP_aP_c$ mit Gl. (3.40)

4.1. $(5/7; \infty)$ **4.2.** $(1; \infty)$ **4.3.** $(-\infty; -1/2)$

4.4. $(-\infty; 3]$ **4.5.** $[-5; -1]$ **4.6.** $P \setminus [-7; -1]$

4.7. a) $[-2; 8)$ b) $[2; 4]$ c) $(0; 2)$ d) $(-4; 8) \setminus [2; 4]$

4.8. $\{-2\}$ **4.9.** $\emptyset$ (4 unbrauchbar) **4.10.** $\{0\}$

4.11. $\emptyset$ **4.12.** $\left\{-\frac{b}{a}(a - b)\right\} = \left\{\frac{b}{a}(b - a)\right\}$

4.13. $\left\{\frac{u + v}{2}\right\}$ **4.14.** $r = \frac{V - \pi h s^2}{2\pi h s} = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\pi h s} - s\right)$

4.15. $r_1 = \frac{cr_2}{c - ar_2}$ **4.16.** $r_1 = \frac{(n - 1)\,fr_2}{r_2 - (n - 1)\,f}$

4.17. $a^2 = \frac{\pi b^2 h^3}{3(\pi h p^2 - V)}$ **4.18.** $b = \frac{(3y - h)\,a}{2h - 3y}$

4.19. $v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)\,W - (m_2 + km)\,v_2}{m_1 - km}$ 4.20. $(-\infty; 2/7]$

4.21. P 4.22. $\emptyset$ 4.23. $(-\infty; -2)$

4.24. $(2/3; \infty)$ 4.25. $P \setminus [0; 6]$ 4.26. $(-\infty; 3)$

4.27. $(-\infty; -5/2]$ 4.28. $[4/3; 2]$

4.29. a) P b) $P \setminus [-4; 3)$ c) $(0; 2]$ d) $[-4; 3)$

4.30. a) $[-6; 1]$ b) $(-3; 1]$ c) $\{-3\}$ d) C

4.31. $P \setminus [-1; 0)$ 4.32. $(1/2; \infty)$ 4.33. $(4/5; 8)$

4.34. $P \setminus [-2; 3]$ 4.35. $[-2; 1]$ 4.36. $\{60\}$

4.37. $\left\{-\dfrac{a}{b}(1 + b)\right\} = \left\{-a\left(\dfrac{1}{b} + 1\right)\right\}$ 4.38. $\left\{\dfrac{ab}{a - b}\right\}$

4.39. $\left\{\dfrac{bd}{ac}(ac + 1)\right\} = \left\{bd\left(1 + \dfrac{1}{ac}\right)\right\}$

4.40. $G = \dfrac{\gamma(G_t' - G_t'')}{\gamma_F - \gamma}$ 4.41. $\varphi = \dfrac{2\alpha^2\eta}{3[\alpha - (\alpha + a)\,\eta]}$

4.42. $i = \dfrac{z_4(z_3 + a)}{a(z_3 + z_4)}$ 4.43. $r^2 = \dfrac{4K}{\pi(16a\varrho - \lambda^2\pi K)}$

4.44. $n = \dfrac{(r + 0{,}4a)\,F_s}{F_s - F_s'}$ 4.45. $s = \dfrac{200kv(s - c)}{p(D_1 + s - c)}$

5.1. $\{(4; -2)\}$ 5.2. $\{(11; 10)\}$ 5.3. $\{(-1; 3)\}$

5.4. $\{(x; 2 - 3x) \mid x \in P\}$ 5.5. $\{(1{,}7208; -0{,}1877)\}$

5.6. $\{(1{,}2311; -1{,}8275)\}$ 5.7. $\{(7a - 4b; 3a + b)\}$

5.8. $\left\{\left(x; \dfrac{10a - 5x}{2}\right) \,\middle|\, x \in P\right\}$ 5.9. $\left\{\left(\dfrac{a}{a + b}; \dfrac{a}{a + b}\right)\right\}$

5.10. $\left\{\left(\dfrac{a + b}{a}; \dfrac{a - b}{b}\right)\right\}$ 5.11. $\{(1; 1)\}$ 5.12. $\emptyset$

5.13. $\{(0; 0); (2; 3)\}$ 5.14. $\{(-1; 0)\}$ 5.15. 17 cm; 7 cm

5.16. 0,637 l Öl 5.17. 288,5 g Cu 5.18. 55 cm/min
31,847 l Benzin 211,5 g Zn 33 cm/min

5.19. B_1: $\dfrac{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)}{\varrho(\varrho_2 - \varrho_1)} \cdot 100\%$; B_2: $\dfrac{\varrho_2(\varrho - \varrho_1)}{\varrho(\varrho_2 - \varrho_1)} \cdot 100\%$; Misch.-Verh.: $\dfrac{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)}{\varrho_2(\varrho - \varrho_1)}$

5.20. $\{(15; 12; 10)\}$ 5.21. $\{(5; 2; 8)\}$ 5.22. $\emptyset$

5.23. $\{(5/6; 3/2; 2/3)\}$ 5.24. $\{(-1; t; t) \mid t \in P\}$ 5.25. $\{(0; -4; 2; 2)\}$

5.26. $\{(0{,}854; -0{,}738; 1{,}103)\}$

5.27. $$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - 5y_2 + 3y_3 + 8 \\ x_2 &= -y_1 + 3y_2 - 2y_3 - 5 \\ x_3 &= 5y_1 - 13y_2 + 9y_3 + 20 \end{aligned}$$

5.28. $$\begin{aligned} x_1 &= -7y_1 - 8y_2 + 6y_3 \\ x_2 &= 4y_1 + 4y_2 - 3y_3 \\ x_3 &= 2y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned}$$

5.29. $x_1 = \frac{1}{4} y_1 + \frac{5}{12} y_2 - \frac{1}{12} y_3 + 1$

$x_2 = \frac{1}{3} y_2 - \frac{2}{3} y_3 + 2$

$x_3 = \frac{1}{4} y_1 + \frac{1}{12} y_2 - \frac{5}{12} y_3 - 1$

5.30. $x_1 = -66y_1 + 39y_2 - 8y_3 + 1$

$x_2 = 41y_1 - 24y_2 + 5y_3 + 1$

$x_3 = 17y_1 - 10y_2 + 2y_3 + 2$

5.31. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

5.32. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4u & 2u \\ -v & 0 \\ 2w & w \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2u & 2u \\ -3v & 6v \\ 4w & -3w \end{pmatrix}$

5.33. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.34. $\boldsymbol{O}$

5.35. a) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 15 & -6 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -6 \\ 8 & -2 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -16 \\ -9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

5.36. $10^{-3} \begin{pmatrix} 1,5 & 13 & 0,2 \\ 1,1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

5.37. $3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

5.38. $10^2 \begin{pmatrix} 10 & 12 & -21 \\ 32 & 0 & 43 \end{pmatrix}$

5.39. $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 15 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

5.40. -1

5.41. $a + b + c$

5.42. 5

5.43. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

5.44. $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -21 \\ -2 & -7 & -14 \end{pmatrix}$

5.45. $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$

5.46. $\begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix}$

5.47. Der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \end{pmatrix}$ entsteht, wenn von rechts her mit $(1 \quad 1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$, und der Zeilenvektor $(a_{11} + a_{21} \; a_{12} + a_{22} \; a_{13} + a_{23})$ entsteht, wenn von links her mit $(1 \quad 1)$ multipliziert wird.

5.48. Es gilt allgemein $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

5.49. $\begin{pmatrix} 6,61 & 10,66 \\ 18,67 & 23,71 \\ 20,19 & 25,04 \end{pmatrix}$

5.50. $\begin{pmatrix} 36,12 \\ 59,04 \\ 1,84 \end{pmatrix}$

5.51. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

5.52. $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

5.53. existiert nicht

5.54. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.55. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.56. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5.57. $\begin{pmatrix} 0,125 & 0,395 \\ 0,741 & -0,433 \end{pmatrix}$

5.58. $\begin{pmatrix} 0{,}429 & 0{,}000 & -0{,}143 \\ -1{,}143 & 1{,}000 & 0{,}714 \\ -0{,}286 & 0{,}000 & 0{,}429 \end{pmatrix}$

5.59. $\begin{pmatrix} 0{,}151 & 0{,}149 & -0{,}109 \\ 0{,}012 & 1{,}012 & 1{,}172 \\ 0{,}608 & 1{,}602 & 2{,}132 \end{pmatrix}$

5.60. $\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - 3\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.61. $\boldsymbol{X} = -(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}) = -\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.62. $\boldsymbol{X} = 5\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.63. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 28 \\ 11 & 13 & 27 \end{pmatrix}$

5.64. $\left\{\left(x; \frac{1{,}42x - 4{,}1}{1{,}16}\right) \middle| x \in P\right\}$

5.65. $\emptyset$

5.66. $\{(3; 2)\}$

5.67. $\{(1/3; 2)\}$

5.68. $\{(0{,}2562; -0{,}5262)\}$

5.69. $\{(1{,}5199; 1{,}2501)\}$

5.70. $\{(3; -2)\}$

5.71. $\{(14; 2)\}$

5.72. $\{(x; 0) \mid x \in P\}$

5.73. $\{[b(a + b); a(b - a)]\}$

5.74. $\{(2a(a + b); 2b(a - b))\}$

5.75. $\left\{\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}; \frac{a^2 - b^2}{2a}\right)\right\}$

5.76. $\left\{\left(\frac{a + b}{2}; \frac{a - b}{2}\right)\right\}$

5.77. $\left\{\left(\frac{1}{a + b}; \frac{1}{a - b}\right)\right\}$

5.78. $\{[(a + b)^2; a^2 - b^2]\}$

5.79. $\{(3; 6)\}$

5.80. $\{(3; 3)\}$

5.81. $\{(0; 0); (3; 6)\}$

5.82. $\{(1/3; 1/4)\}$

5.83. $\emptyset$

5.84. $\left\{\left(x; \frac{3}{4}x\right) \middle| x \in P\right\}$

5.85. $\{(5; 6)\}$

5.86. A: 90 Tage; B: 45 Tage

5.87. $I_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}$; $I_2 = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}$

5.88. $d_1 = \frac{2a}{i + 1}$; $d_2 = \frac{2ai}{i + 1}$

5.89. $\frac{\Delta A - a^2}{b - a}; \frac{\Delta A - b^2}{b - a}$ Ist $b > a$, so muß $\Delta A > b^2$ sein, ist $b < a$, so muß $\Delta A < b^2$ sein.

5.90. Es existieren unbegrenzt viele Rechtecke mit den Seiten $x > 2a$ und $y = x - 2a$, jedoch nur für $\Delta A = a^2$.

5.91. $\{(5; 3; 1)]$

5.92. $\{(1; 1; 2)\}$

5.93. $\{(-1; 3; 2{,}5)\}$

5.94. $\left\{\left[\frac{1}{2}(b + c - a); \frac{1}{2}(a + c - b); \frac{1}{2}(a + b - c)\right]\right\}$

5.95. $\left\{\left[\frac{2}{3}(y - 2z); y; z\right] \middle| y, z \in P\right\}$

5.96. $\{(2; 0; -3; -1)\}$

5.97. $\{(3; 2; 1; 0)\}$

5.98. $\{(4; 7; 3; 9; -1)\}$

5.99. $\{(1 + z + 8t; z - 7t; z; 12t) \mid z, t, \in P\}$

5.100. $\emptyset$

5.101. $\{(1{,}342; 2{,}140; -1{,}848)\}$

5.102. $\{(3{,}149; -2{,}179; 1{,}854)\}$

5.103. 45; 25; 10 Zähne

5.104. 315 km; $v_S = 70$ km/h; $v_P = 45$ km/h; $v_G = 30$ km/h

5.105.
$$\begin{aligned} x_1 &= 17y_1 - 7y_2 - 4y_3 - y_4 \\ x_2 &= 7{,}5y_1 - 3y_2 - 2y_3 - y_4 - 4 \\ x_3 &= -2y_1 + y_2 + y_3 + 2 \\ x_4 &= -12y_1 + 5y_2 + 3y_3 + y_4 + 2 \end{aligned}$$

5.106.
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - 1 \\ x_2 &= -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + x_3 \\ y_3 &= 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

5.107.
$$\begin{aligned} x_1 &= 4y_1 - y_2 - 2y_3 - 2x_3 - x_5 \\ x_2 &= -y_1 + 2y_2 - x_3 \\ x_4 &= -y_1 - y_2 + y_3 - 2x_5 \\ y_4 &= 2y_1 - y_3 \end{aligned}$$

5.108. $\begin{pmatrix} 1 & 33 \\ -8 & 23 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5.109. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}^T)^T; \quad \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b} = 12 = \boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{a}$

5.110. $\begin{pmatrix} 5{,}633 & -1{,}935 \\ 1{,}539 & -5{,}791 \end{pmatrix}$

5.111. Mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{p} &= (2 \quad 3 \quad 1 \quad 5) \\ \boldsymbol{a} &= (10 \quad 20 \quad 5) \end{aligned}$$

Materialbereitstellg.: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}^T = \begin{pmatrix} 670 \\ 460 \\ 835 \\ 85 \end{pmatrix}$ d. h.: E_1: 670 St. E_2: 460 St. E_3: 835 St. E_4: 85 St.

Materialpreis: $P = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{M}$ Mark $= 3980$ Mark

5.112. Es ist $\boldsymbol{A}$ zu multiplizieren

a) von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.113. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

5.114. $\frac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}$

5.115. $\begin{pmatrix} -0{,}181 & 0{,}573 \\ 1{,}076 & -0{,}628 \end{pmatrix}$

5.116. $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5.117. $\begin{pmatrix} 6{,}5 & -5{,}5 & 2{,}5 \\ 6 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

5.118. $\begin{pmatrix} -7 & -8 & 6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5.119. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.120. $\begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.121. $\begin{pmatrix} 0{,}298 & 0{,}105 & -0{,}035 \\ -0{,}088 & 0{,}263 & 0{,}246 \\ -0{,}053 & 0{,}158 & -0{,}053 \end{pmatrix}$

5.122. $\begin{pmatrix} 0{,}781 & 0{,}236 & -0{,}408 \\ 0{,}294 & -0{,}009 & -0{,}750 \\ -0{,}360 & -0{,}619 & -0{,}074 \end{pmatrix}$

5.123. $X = A(2E - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 22 \\ 20 & 8 & 26 \\ 9 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

5.124. $X = (A - E)^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.125. $X = (A - C)^{-1}(D - 2B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

6.1. $\{-12; 12\}$ **6.2.** $\{-3j; 3j\}$ **6.3.** $\left\{-\frac{5}{2}j; \frac{5}{2}j\right\}$

6.4. $\left\{-2\sqrt{6/5}; 2\sqrt{6/5}\right\}$ **6.5.** $\left\{-\sqrt{-b/a}; \sqrt{-b/a}\right\}$ **6.6.** $\left\{-j\sqrt{b/a}; j\sqrt{b/a}\right\}$

6.7. $\{-4; 3\}$ **6.8.** $\{2; 5\}$ **6.9.** $\{-10; 9\}$

6.10. $\{3 + 2j; 3 - 2j\}$ **6.11.** $\{0; 3/2\}$ **6.12.** $\{-4/3; 0\}$

6.13. $\left\{\frac{1}{2}\left(1 + j\sqrt{2}\right); \frac{1}{2}\left(1 - j\sqrt{2}\right)\right\}$ **6.14.** $\{1/4; 1/2\}$ **6.15.** $\left\{\frac{a-b}{2}; \frac{a+b}{2}\right\}$

6.16. $\{-2b; a + b\}$ **6.17.** $\left\{-\frac{a}{a-b}; \frac{a+b}{a}\right\}$ **6.18.** $\left\{\frac{m}{n} + j\sqrt{\frac{m}{n}}; \frac{m}{n} - j\sqrt{\frac{m}{n}}\right\}$

6.19. $\{0; a + b\}$ **6.20.** $\{2c - a; -c\}$ **6.21.** $\{-0{,}8219: 0{,}3306\}$

6.22. $\{0{,}0536 + 0{,}4971j; 0{,}0536 - 0{,}4971j\}$

6.23. $\{-0{,}0428 + 0{,}0610j; -0{,}0428 - 0{,}0610j\}$ **6.24.** $\{-1{,}0237; 6{,}0237\}$

6.25. $(x - 3)(x + 5)$ **6.26.** $x(x - 4)$ **6.27.** $(ax + b)(x + d)$

6.28. $x^2 - x - 6 = 0$ **6.29.** $x^2 - 5x = 0$ **6.30.** $x^2 + 8x + 16 = 0$

6.31. $x^2 - 6x + 13 = 0$ **6.32.** $x^2 - 3(a + b)x + 2a^2 + 5ab + 2b^2 = 0$

6.33. $P \setminus \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ **6.34.** P **6.35.** $\emptyset$

6.36. $[-3/2; 1/2]$ **6.37.** 8 cm **6.38.** 0,88 m

6.39. Vergr.: $d\left(\sqrt{2} - 1\right)$; $D = d\sqrt{2}$ **6.40.** $4\,\Omega$; $12\,\Omega$ **6.41.** $r\sqrt{2}$

6.42. Die insgesamt verstreichende Zeit setzt sich aus zwei Teilen zusammen: 1. Zeit, während der der Stein gleichmäßig beschleunigt fällt, 2. Zeit für die gleichförmige Bewegung des Schalles.
Brunnentiefe: 151 m.

6.43. $\{-3; -2; 2; 3\}$ **6.44.** $\{-2; -1; 1; 2\}$ **6.45.** $\{9\}$

6.46. $\emptyset$ **6.47.** $\{-1\}$ **6.48.** $\{-3; 5\}$

6.49. $\{-1\}$ **6.50.** $\emptyset$ **6.51.** 4; -71

6.52. 0; 44 **6.53.** 8; 62 **6.54.** $-6{,}533$; 0,296

6.55. 30,511; 1,846 **6.56.** $(x^2 - 3x + 2)(x - 2)$

6.57. $(x^3 - 5x^2 + 2x + 3)(x + 3)$ 6.58. zweif., $(x + 2)^2 (x - 1)$

6.59. einf., $(x - 2)(x^2 + 3x - 4)$ 6.60. zweif., $(x - 2)^2 (x^2 - 9)$

6.61. 0; 1; 2 6.62. −7; 3; 5 6.63. 4; 5j; −5j

6.64. 5; 3 + 4j; 3 − 4j 6.65. 8 cm; 6 cm; 12 cm 6.66. 6 cm; 10 cm

6.67. $a - b$; $b - a$ 6.68. $-a$j; aj 6.69. $-ab$; ab

6.70. $-b(a + 1)$; $b(a + 1)$ 6.71. $-1 + \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{6}$; $-1 - \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{6}$ 6.72. 7/3; 5

6.73. −4; 13 6.74. 1; 7/4 6.75. −45/7; 2

6.76. −3; 5 6.77. 29/24; 2 6.78. −10; 4

6.79. $\emptyset$ 6.80. −28; 1 6.81. 18/7; 7

6.82. $-\frac{2a}{b}$; $\frac{2c}{b}$ 6.83. 0; $2c - \frac{1}{c}$ 6.84. $a + b$; $2b$

6.85. 1,5921; 5,4436 6.86. −0,7480 + 1,5545j; −0,7480 − 1,5545j

6.87. 0,5194; 3,3695 6.88. 0,4821 + 1,2816j; 0,4821 − 1,2816j

6.89. $(x - 3 + 4\mathrm{j})(x - 3 - 4\mathrm{j})$ 6.90. $(2x - 1)(2x + 5)$ 6.91. $(x - a)(x - b)$

6.92. $(x - a + b\mathrm{j})(x - a - b\mathrm{j})$ 6.93. $x^2 - a^2 = 0$ 6.94. $x^2 + a^2 = 0$

6.95. $x^2 - 2ax + 2a^2 = 0$ 6.96. $x^2 - 4ax + 4a^2 + 9b^2 = 0$

6.97. $x^2 + (2a + 3b)^2 = 0$ 6.98. $\emptyset$ 6.99. {1}

6.100. $P \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ 6.101. $[-b; a]$ 6.102. $P \setminus [-2; 1]$

6.103. $P \setminus [1; 5]$ 6.104. $(-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (5; \infty)$

6.105. Ansatz: Benötigt der eine Monteur allein x Tage, so hat er eine Tagesleistung von $1/x$ (gemessen als Bruchteil der Gesamtarbeit). Lösung: 12 bzw. 15 Tage.

6.106. 84 min 6.107. 80 N; 150 N 6.108. 2,2 m

6.109. 4,83 cm 6.110. 10,33 cm 6.111. $D = 26$ cm; $d = 20$ cm

6.112. $d = \frac{1}{2} D \left(\sqrt{3} - 1\right) = 0{,}366D = 10{,}25$ cm

6.113. Kennzeichnet v die gesuchte Relativgeschwindigkeit des Ruderers, so fährt er mit der Geschwindigkeit $v - v_F$ relativ zum Ufer stromauf und mit $v + v_F$ stromab.

$$v = \frac{s}{t} + \sqrt{\left(\frac{s}{t}\right)^2 + v_F^2}$$

6.114. 0,67 cm 6.115. $-2\sqrt{2}$; 0 zweif.; $2\sqrt{2}$

6.116. −1; 1; −2j; 2j 6.117. −4; 4; $-\mathrm{j}\sqrt{3}$; $\mathrm{j}\sqrt{3}$

6.118. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\mathrm{j}\sqrt{3}$; $\mathrm{j}\sqrt{3}$ 6.119. 9; 25 6.120. 0; 25

6.121. $(a + b)^2$ 6.122. 1/2; 1 6.123. 2; 4

6.124. 5; 13 6.125. −3; 5 6.126. $\emptyset$

6.127. a; b 6.128. 10 6.129. $\emptyset$

6.130. 2,5 6.131. -2; 90 6.132. -7; 5

6.133. 1,649; 0,565 6.134. $-0{,}637$; 4,364

6.135. 0,053; $-4{,}417$ 6.136. 15,608; 4,892

6.137. 2,758; $-0{,}838$ 6.138. zweif., $(x+1)^2 (x-3)$

6.139. x_1 dreif., x_2 zweif., $(x-1)^3 (x-2)^2$

6.140. $\sqrt[3]{5}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}\left(-1+\mathrm{j}\sqrt{3}\right)$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}\left(-1-\mathrm{j}\sqrt{3}\right)$ 6.141. 0; $3+2\mathrm{j}$; $3-2\mathrm{j}$

6.142. 0 zweif.; -5 6.143. 4; $\frac{1}{2}\left(-5+\mathrm{j}\sqrt{31}\right)$; $\frac{1}{2}\left(-5\,\mathrm{j}-\mathrm{j}\sqrt{31}\right)$

6.144. 7; 3j; -3j 6.145. -6; $4+3\mathrm{j}$; $4-3\mathrm{j}$

6.146. 2 cm; 4 cm; 6 cm 6.147. 8 cm; 5,8 cm

7.1. 7 7.2. -5 7.3. 1 7.4. -5

7.5. 2,096 7.6. $-1{,}743$ 7.7. $-5{,}398$ 7.8. 1,537

7.9. 210,0° 7.10. $\frac{1}{\mu}\ln\frac{1+K}{1-K}$

7.11. 2,512 7.12. $6{,}651\cdot 10^{-5}$

7.13. 18,436 7.14. 100 7.15. 13/8 7.16. $7{,}389a^{-1}$

7.17. $D_0 = \dfrac{d\cdot \mathrm{e}^{\varphi+0{,}16}}{\mathrm{e}^{\varphi+0{,}16}-1} = \dfrac{d}{1-\mathrm{e}^{-(\varphi+0{,}16)}}$

Für die folgenden Lösungen gilt $k \in G$.

7.18. $66{,}8° + k\cdot 120°$; $113{,}2° + k\cdot 120°$

7.19. $168{,}9° + k\cdot 360°$; $211{,}1° + k\cdot 360°$

7.20. $53{,}1° + k\cdot 360°$ 7.21. $0° + k\cdot 360°$; $270° + k\cdot 360°$

7.22. $72{,}5° + k\cdot 360°$; $216{,}4° + k\cdot 360°$

7.23. $197{,}6° + k\cdot 360°$; $342{,}4° + k\cdot 360°$

7.24. $45° + k\cdot 90°$; $90° + k\cdot 180°$

7.25. $56{,}3° + k\cdot 180°$; $135° + k\cdot 180°$ 7.26. 4 7.27. $-2/5$

7.28. 2,861 7.29. $-1{,}873$ 7.30. $-2{,}650$ 7.31. $-0{,}359$

7.32. 5,090 7.33. $-16{,}268$ 7.34. 2,140

7.35. $\ln 3 = 1{,}099$ 7.36. $\ln 1{,}5 = 0{,}405$ 7.37. $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} = -0{,}203$

7.38. 7 Jahre (6,58) 7.39. Bei der 919. Periode

7.40. $RC\cdot\ln 2$ 7.41. 601 m

7.42. $\dfrac{\ln p_2/p_1}{\ln\dfrac{p_2 cT}{p_1(W+cT)}}$ 7.43. 212,310

7.44. 1,025 **7.45.** 5,026 **7.46.** 22,747

7.47. 8 **7.48.** −8; 8 **7.49.** $a \cdot e^b$

7.50. $e^3a^{-3} = 20{,}086a^{-3}$ **7.51.** u^2v^3 **7.52.** a/b

7.53. $A = \dfrac{F}{B^{C\cdot\lg D+E}}$; $B = \left(\dfrac{F}{A}\right)^{\frac{1}{C\cdot\lg D+E}}$; $C = \dfrac{\lg F - \lg A - E\cdot\lg B}{\lg B\cdot\lg D}$;

$D = 10^{\frac{\lg F - \lg A - E\cdot\lg B}{C\cdot\lg B}}$; $E = \dfrac{\lg F - \lg A - C\cdot\lg B\cdot\lg D}{\lg B}$

7.54. $10° + k\cdot 90°$

7.55. $29{,}2° + k\cdot 360°$ **7.56.** $28{,}9° + k\cdot 360°$; $262{,}5° + k\cdot 360°$

7.57. $0° + k\cdot 180°$; $131{,}8° + k\cdot 360°$; $228{,}2° + k\cdot 360°$

7.58. $78{,}5° + k\cdot 360°$; $281{,}5° + k\cdot 360°$

7.59. $90° + k\cdot 360°$; $210° + k\cdot 360°$; $330° + k\cdot 360°$

7.60. $\tan \omega t = -\dfrac{a\cdot\sin\varphi_1 + b\cdot\sin\varphi_2}{a\cdot\cos\varphi_1 + b\cdot\cos\varphi_2}$; $0{,}760 + k\cdot 1{,}047$

8.1. −1,470; −0,203; 1,673 **8.2.** −1,262; 0,660; 3,602

8.3. 2,914; −1,457 + 1,835j; −1,457 − 1,835j **8.4.** −1,153; 1,957

8.5. 0,266; 1,545 **8.6.** 0,052; 4,505 **8.7.** $0{,}774r$; $1{,}226r$

8.8. $V/4$: $0{,}596r$; $V/2$: r; $3V/4$: $1{,}404r$

8.9. −1,368; 1,546; 11,821

8.10. 1,000; 1,486; −1,243 + 1,071j; −1,243 − 1,071j

8.11. 1,461 **8.12.** 0; 4,493 **8.13.** 2,129

8.14. −1,455; 1,455 **8.15.** 8,76 cm

9.1. a) eindeutig b) eineindeutig c) eineindeutig
d) eindeutig e) nicht eindeutig

9.2. a) $a-k$

$b-l$

$c \quad m$

$d-n$

nicht eindeutig

b) $a-1$

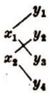
$b-2$

$c-3$

$d-4$

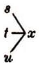
eineindeutig

c)



nicht eindeutig

d)



eindeutig

9.3. a) $k - a$

$l - b$

$m \quad c$

$n - d$

$F^{-1} = \{(k; a), (l; b), (l; c), (m; b), (n; c), (n; d)\}$

b) $1 - a$

$2 - b$

$3 - c$

$4 - d$

$F^{-1} = \{(1; a), (2; b), (3; c), (4; d)\}$
eineindeutig

c) y_1

$y_2 \quad x_1$

$y_3 \quad x_2$

y_4

$F^{-1} = \{(y_1; x_1), (y_2; x_2), (y_3; x_1), (y_4; x_2)\}$
eindeutig

d) x — s, t, u

$F^{-1} = \{(x; s), (x; t), (x; u)\}$

9.4. a) $\overline{AB} = 7{,}81$; $\alpha = 129{,}8°$; $M(5{,}5; 4)$
b) $\overline{P_1P_2} = 5{,}44$; $\alpha = 54{,}0°$; $M(-4{,}10; 0{,}9)$
c) $\overline{RQ} = 6{,}94$; $\alpha = 0°$; $M(-1{,}07; -2{,}18)$
d) $\overline{MN} = 9{,}46$; $\alpha = 40{,}7°$; $M(9{,}22; 3{,}09)$

9.5. Zwei Lösungen: $P_1(11; 0)$, $P_2(-19; 0)$

9.6. Es ist das Gleichungssystem

$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 169$

$(x - 15)^2 + (y + 17)^2 = 625$

zu lösen. Zwei Lösungen: $P_1(8; 7)$, $P_2(-9; -10)$

9.7. Bild L 9

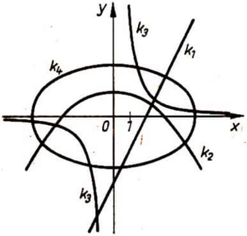


Bild L 9

9.8. $P_1 \in k_1$, $P_1 \in k_3$, $P_2 \in k_2$, $P_2 \in k_3$, $P_3 \in k_2$, $P_3 \in k_4$, $P_4 \in k_1$, $P_4 \in k_4$

9.9. a) $P_1(-5; 2)$, b) $P_1(6; 0)$, $P_2(2; 4)$, c) kein Schnittpunkt

9.10. a) $x_1 = 3$ b) $x_{1;2} = \pm 10$ c) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
d) kein Schnittpunkt

9.11. a) $y_1 = 3$, b) $y_{1;2} = \pm 5$, c) $y_1 = 1$
d) kein Schnittpunkt

9.12. In die Gleichungen $y = mx + b = \tan\alpha \cdot x + b$ werden die Koordinaten von P eingesetzt, und b wird berechnet.

a) $y = 1{,}73x + 7{,}93$ b) $y = -1{,}48x + 2{,}06$
c) $y = 0{,}8$ d) $y = -x - 5{,}02$
e) $x = 3{,}48$

9.13. a) $y = -\dfrac{5}{8}x + \dfrac{11}{4}$ b) $y = 0{,}55x + 4{,}74$
c) $y = 0{,}437x$ d) $x = 1{,}7$

9.14. g_1: $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ g_2: $y = \dfrac{2}{3}x - 2$
g_3: $y = 2$ g_4: $y = 3x$

9.15. a) $P_0(4; -2)$, $\delta = 63^\circ\,26'$ bzw. $116^\circ\,34'$
b) $P_0(2{,}28; 5{,}52)$, $\delta = 90^\circ$
c) kein Schnittpunkt, da $g_1 \parallel g_2$, $\delta = 0^\circ$
d) $P_0(0; 3{,}2)$, $\delta = 45^\circ$ bzw. 135°

9.16. a) $y = \dfrac{1}{3}x + 10{,}4$ b) $y = -3x + 26{,}4$

9.17. (Die Querstriche wurden weggelassen)

a) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ (Bild L 10)

Stauchung auf 1/3 in Richtung der y-Achse

b) $y = -(x - 3)^2$ (Bild L 11)

Schiebung um 3 in Richtung der x-Achse, Spiegelung an der x-Achse

c) $y = -\dfrac{3}{x}$ (Bild L 12)

Streckung auf das 3fache in Richtung der y-Achse, Spiegelung an der y-Achse

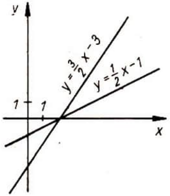


Bild L 10

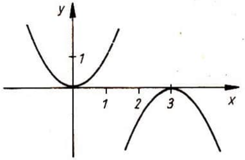


Bild L 11

d) $y = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ (Bild L 13)

Schiebung um $-\frac{\pi}{2}$ in Richtung der x-Achse,

Streckung auf das 2fache in Richtung der x-Achse,

Stauchung auf das $\frac{2}{3}$ fache in Richtung der y-Achse

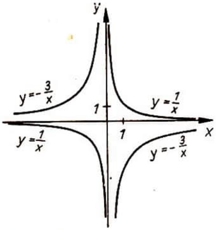


Bild L 12

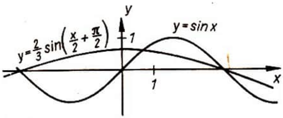


Bild L 13

9.18. a) $\bar{x} = x - 2, \bar{y} = y - 8$
Schiebung um -2 in Richtung der x-Achse und um -8 in Richtung der y-Achse

b) $\bar{x} = \frac{1}{2} x, \bar{y} = y - 1$

Schiebung um -1 in Richtung der y-Achse, Stauchung auf das $\frac{1}{2}$ fache in Richtung der x-Achse

c) $\bar{x} = x - 4, \bar{y} = \frac{1}{2} y$

Schiebung um -4 in Richtung der x-Achse, Stauchung auf das $\frac{1}{2}$ fache in Richtung der y-Achse

9.19. a) Wenn jeder Gast nur ein Zimmer bewohnt (es können aber mehrere Gäste in einem Zimmer wohnen)

b) Wenn jeder Gast nur ein Zimmer bewohnt und in jedem Zimmer nur ein Gast wohnt.

9.20. a) $A \to B$ eineindeutig, $B \to A$ eineindeutig
b) $A \to B$ eineindeutig, $B \to A$ eineindeutig
c) $A \to B$ eindeutig, $B \to A$ nicht eindeutig
d) $A \to B$ nicht eindeutig, $B \to A$ eindeutig

9.21. a) $\overline{AB} = 17{,}40$, $\alpha = 137{,}609°$
b) $\overline{EF} = 16{,}5$ $\alpha = 90°$
c) $\overline{PQ} = 126{,}40$, $\alpha = 17'\,24''$
d) $\overline{MN} = 84{,}00$, $\alpha = 26{,}074°$

9.22. Die Bedingungen $\overline{AP} = \overline{BP}$ und $\overline{BP} = \overline{CP}$ ergeben zwei Gleichungen, aus denen sich die Koordinaten von P berechnen lassen: $P(2{,}86;\ 2{,}30)$

9.23. a) $P_1(2{,}74;\ 2{,}51)$, $P_2(-2{,}74;\ 2{,}51)$

b) $P_1(2{,}18;\ 0{,}97)$, $P_2(2{,}18;\ -0{,}97)$

c) $P_0(2;\ 9)$

d) kein Schnittpunkt

9.24. a) $a = 11{,}70$, $b = 9{,}06$, $c = 13{,}0$

b) $AB\colon\ y = \frac{5}{12}x - \frac{13}{6}$, $BC\colon y = -\frac{4}{11}x + \frac{62}{11}$,

$AC\colon\ y = 9x + 15$

c) $h_a\colon\ y = \frac{11}{4}x + \frac{5}{2}$, $h_b\colon y = -\frac{1}{9}x + \frac{28}{9}$

$h_c\colon\ y = -\frac{12}{5}x + \frac{18}{5}$

d) $H(0{,}21;\ 3{,}09)$

e) $s_a\colon y = \frac{14}{13}x - \frac{11}{13}$, $s_b\colon y = \frac{1}{23}x + \frac{36}{23}$

$s_c\colon y = -\frac{13}{10}x + \frac{47}{10}$

f) $S(7/3;\ 5/3)$

g) $\alpha = 61{,}0°$, $\beta = 42{,}6°$, $\gamma = 76{,}4°$

9.25. a) $\bar{x} = \frac{1}{3}x$, $\bar{y} = 4y$

Stauchung auf das $\frac{1}{3}$ fache in Richtung der x-Achse, Streckung auf das 4fache in Richtung der y-Achse

b) $\bar{x} = 2x + \frac{\pi}{3}$, $\bar{y} = y$

Schiebung um $\frac{\pi}{3}$ und Streckung auf das 2fache in Richtung der x-Achse

c) $\bar{x} = \frac{1}{\omega}x - \frac{\varphi}{\omega}$, $\bar{y} = ay$

Schiebung um das $-\frac{\varphi}{\omega}$-fache und Streckung bzw. Stauchung auf das $\frac{1}{\omega}$-fache in Richtung der x-Achse, Streckung bzw. Stauchung auf das a-fache in Richtung der y-Achse

10.1. a) $X = P;\ Y = P$

b) $X = P;\ Y = [-3;\ \infty)$

c) $X = [-1;\ 1];\ Y = [0;\ 1]$

d) $X = P \setminus (-1;\ 1);\ Y = [0;\ \infty)$

e) $X = (-1;\ \infty);\ Y = P$

f) $X = [-1;\ 1];\ Y = [2;\ 3]$

g) $a > 0$, $A > 0$

10.2. a) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$ c) $y = -\sqrt{-x}$

d) $y = \frac{1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

10.3. F_2 und F_4. Die Zuordnungen sind nicht eindeutig.

10.4. a) 1. $y^2 - x = 0$, $\quad y \geqq 0$; $\quad y = \sqrt{x}$

2. $y^2 - x = 0$, $\quad y \leqq 0$; $\quad y = -\sqrt{x}$

b) 1. $y^2 + x - 1 = 0$, $\quad y \geqq 0$; $\quad y = \sqrt{1 - x}$

2. $y^2 + x - 1 = 0$, $\quad y \leqq 0$; $\quad y = -\sqrt{1 - x}$

c) 1. $y^2 - x^3 = 0$, $\quad y \geqq 0$; $\quad y = x\sqrt{x}$

2. $y^2 - x^3 = 0$, $\quad y \leqq 0$; $\quad y = -x\sqrt{x}$

10.5. a) $\sqrt{3}$ bzw. $-\sqrt{3}$ b) nicht reell c) $3\sqrt{3}$ bzw. $-3\sqrt{3}$

10.6. a) nicht eineindeutig b) f^{-1}:

x	-1	0	2	3
y	-2	0	1	2

10.7. a) $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ b) $y = f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x - 6$

c) $y = f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{x}$ d) nicht eineindeutig

e) $y = f^{-1}(x) = x^2 - 1,\ x \geqq 0$

10.8. a) ungerade b) — c) ungerade d) —
e) — f) gerade

10.9. a) 0,9726; 0,9788 b) 2,14; 2,29

10.10. $\varrho/\text{kg m}^{-3} = 1{,}239;\ 1{,}213;\ 1{,}189;\ 1{,}177$

10.11. a) Nur im Bereich $p/\text{kPa} = 600{,}16 \ldots 800{,}22$
b) $t_s = 166{,}8\,°\text{C}$. Die letzte Ziffer ist sicher.

10.12. a) gestreckte Parabel 4. Grades, n. o. geöffnet, $S(0; -3)$
b) gestauchte Parabel 5. Grades, gegenüber der Normallage an der Geraden $y = 1$ gespiegelt, um $+3$ in x-Richtung verschoben
c) gestreckte Parabel 4. Grades, n. u. geöffnet, $S(-2; 3)$
d) gestauchte Parabel 7. Grades, um $-1{,}5$ in x-Richtung, um -2 in y-Richtung verschoben

10.13. a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-63	-29	-9	3	13	27	51

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-85{,}4$	$-25{,}7$	0	$5{,}5$	$4{,}6$	$11{,}1$	$38{,}8$

c)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$-4{,}8$	$-4{,}5$	$-4{,}8$	$-2{,}1$	0	$-9{,}3$	$-48{,}0$

d)

x	$2{,}0$	$2{,}2$	$2{,}4$	$2{,}6$	$2{,}8$	$3{,}0$	$3{,}2$	$3{,}4$
y	$-0{,}50$	$-0{,}21$	$0{,}08$	$0{,}28$	$0{,}32$	$0{,}1$	$-0{,}48$	$-1{,}53$

10.14. a) keine Nullstelle; $x_P = -1{,}25$; $y = 0$
b) $x_N = 0$; $x_P = 2{,}5$; $y = 1{,}5$
c) $x_N = -2{,}5$; $x_P = 3$; $y = 2$
d) $x_N = 1{,}5$; $x_P = -1{,}5$; $y = -2$

10.15. a) monoton steigend
b) $(-\infty; 0]$: monoton fallend; $[0; \infty)$: monoton steigend
c) Für alle $x \neq 0$ monoton fallend
d) $(-\infty; 1]$: monoton fallend; $[1; \infty)$: monoton steigend

10.16. a) vgl. Bild L 14 b) $y = \sqrt{-(x-2)}$, vgl. Bild L 14
c) vgl. Bild L 15

10.17. a) $y = 0{,}910 \ln x$ b) $y = 1{,}44 \ln x$ c) $y = 0{,}434 \ln x$

10.18. vgl. Bild L 16

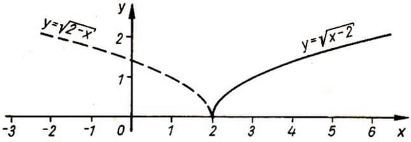


Bild L 14

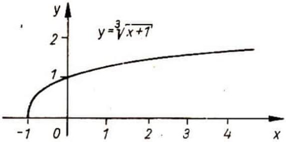


Bild L 15

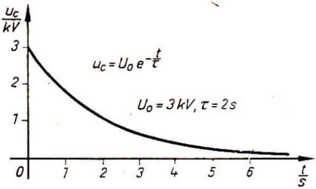


Bild L 16

10.19. a) — b) gerade

10.20. a) gerade b) gerade c) ungerade

10.21. a) $\pi/6$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) π e) $\pi/4$ f) $-\pi/3$

10.22. a) 1,075 b) −0,694 c) 2,515 d) 1,691 e) −1,143 f) 2,782

10.23. a) vgl. Bild L 17 b) vgl. Bild L 18

10.24. a) vgl. Bild L 19 b) vgl. Bild L 20

10.25. a) vgl. Bild L 21; 1,10 b) vgl. Bild L 21; 1,43
c) vgl. Bild L 22; 1,9

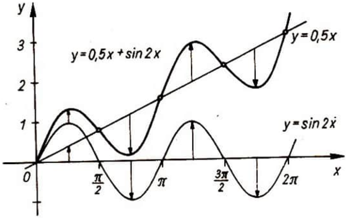


Bild L 17

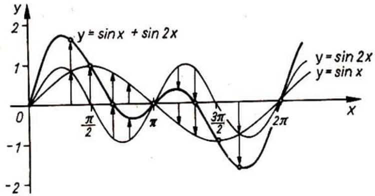


Bild L 18

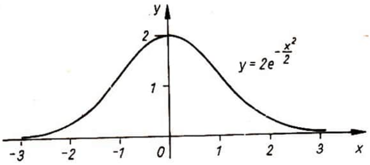


Bild L 19

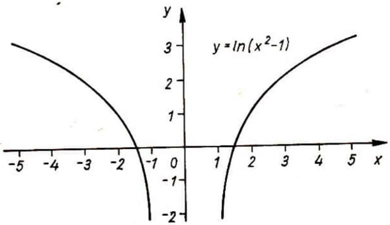


Bild L 20

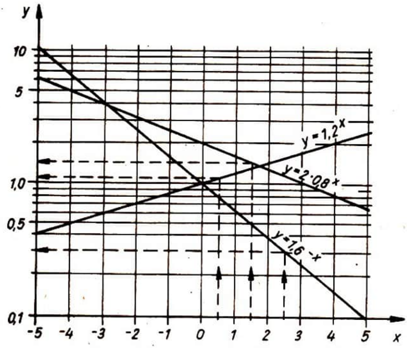


Bild L 21

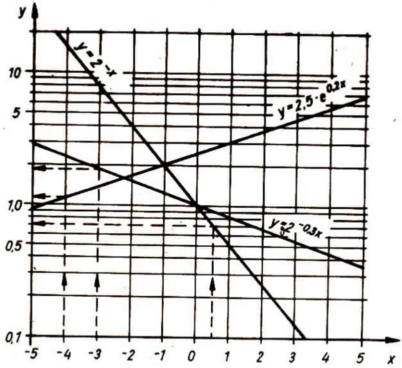


Bild L 22

10.26. **a) vgl. Bild L 23; 6,7**

b) vgl. Bild L 23; 0,76

c) vgl. Bild L 24; 1,13

10.27. **a) vgl. Bild L 25** **b) 0,25 m**

10.28. **a) vgl. Bild L 26** **b) 10,8 m s^{-1}**

10.29. **vgl. Bild L 27**

10.30. **vgl. Bild L 28**

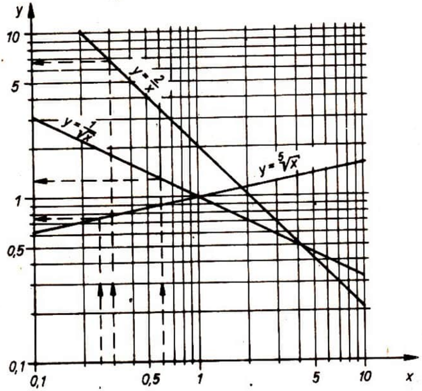


Bild L 23

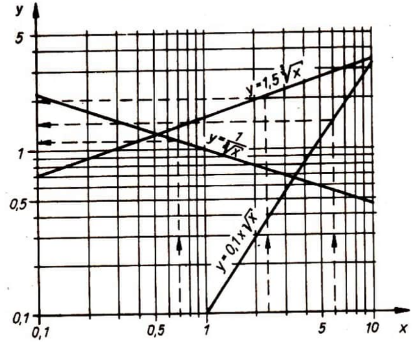


Bild L 24

10.31. vgl. Bild L 29

10.32. a) $X = P$; $Y = (-\infty; -1]$ b) $X = P$; $Y = P$

c) $X = P$; $Y = (-\infty; 1]$ d) $X = P$; $Y = (1; \infty)$

e) $X = (0; \infty)$; $Y = P$ f) $X = P$; $Y = (-1; \infty)$

g) $A > A_0$, $0 < p < p_0$

($p_0 = F_0/A_0$ kritischer, vom Material abhängiger Druck.)

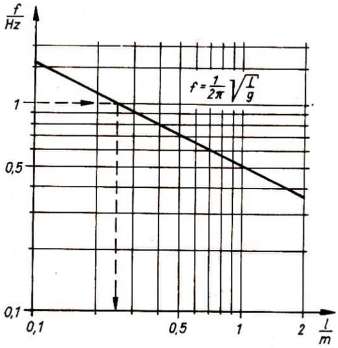


Bild L 25

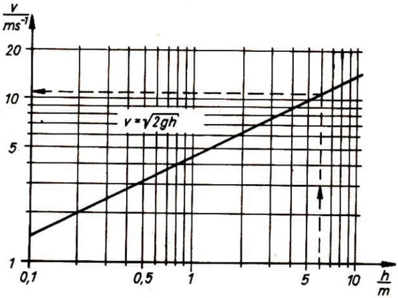


Bild L 26

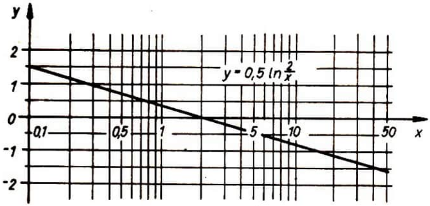


Bild L 27

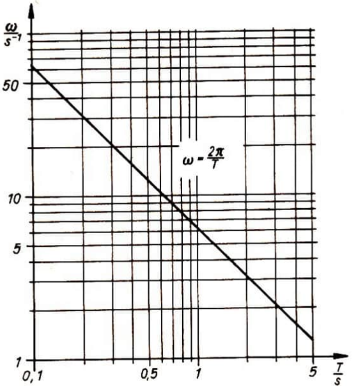


Bild L 28

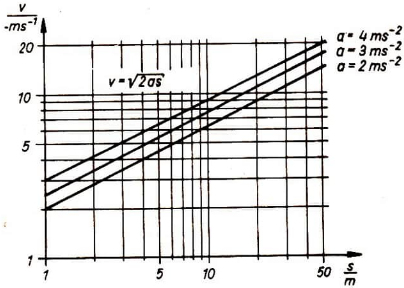


Bild L 29

10.33. a) $y = \frac{\sqrt{x-4}}{2}$ b) $y = -\sqrt[3]{x}$ c) $y = 2 + \sqrt{4 + 2x}$

d) $y = \frac{x+2}{x-1}$

10.34. a) 1. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y \geqq 1$; $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$

2. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y \leqq 1$; $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

b) 1. $y^2 + 4y - x^2 = 0$, $y \geqq -2$; $y = -2 + \sqrt{4 + x^2}$

2. $y^2 + 4y - x^2 = 0$, $y \leqq -2$; $y = -2 - \sqrt{4 + x^2}$

c) 1. $y^2 - x^2 = 0$, $y \geqq 0$; $y = |x|$

2. $y^2 - x^2 = 0$, $y \leqq 0$; $y = -|x|$

10.35. a) nicht reell b) $-2 + \sqrt{8}$ bzw. $-2 - \sqrt{8}$
c) 2 bzw. -2

10.36. a) nicht eineindeutig b) $y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x},\ \ x \geqq 0$
c) $y = f^{-1}(x) = -x^5,\ \ x \leqq 0$

10.37. a) gerade b) gerade c) ungerade d) ungerade
e) ungerade f) –

10.38. a) 2; -2 b) 1,5; 0,5; -2 c) 2,5 d) 1,6; 1,86; $-0{,}86$

10.39. a) 0,62; 1; $-1{,}62$ b) 1,90; $-0{,}40$; $-1{,}50$ c) 1,36 d) 1,19

10.40. a) keine Nullstelle; $x_P = 4/3$; $y = 0$
b) $x_N = -2$; $x_P = 2$; $y = -1{,}5$
c) keine Nullstelle; $x_P = 1$, gerade; $y = 2$
d) $x_N = 0; 2$; kein Pol; $y = 2/3$
e) $x_N = 0{,}5; 1$; $x_P = -0{,}5$ ungerade, $x_P = 2$ ungerade; $y = 0{,}5$

10.41. a) $(-\infty, 0]$: monoton steigend; $[0; \infty)$: monoton fallend
b) für alle $x \neq 0$ monoton steigend
c) n gerade:
$(-\infty; 0]$: monoton fallend; $[0; \infty)$: monoton steigend
n ungerade: monoton steigend
d) $(-\infty; 1]$: monoton fallend; $[1; \infty)$: monoton steigend

10.42. a) $y = -\sqrt{-(x - 1{,}5)}$, vgl. Bild L 30
b) $y = 1{,}5\sqrt{x + 2}$, vgl. Bild L 31
c) $y = 1 - 2\sqrt{-(x - 1{,}5)}$, vgl. Bild L 32

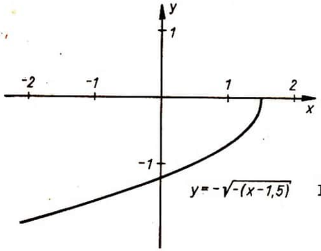


Bild L 30

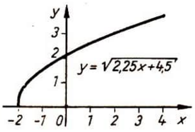


Bild L 31

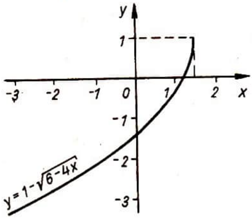


Bild L 32

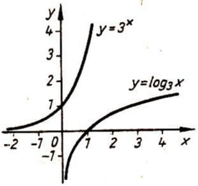


Bild L 33

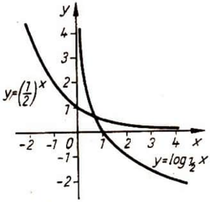


Bild L 34

10.43. a) vgl. Bild L 33 b) vgl. Bild L 34

10.44. a) $y = -1{,}44 \ln x$ b) $y = -4{,}48 \ln x$ c) $y = -0{,}434 \ln x$

10.45. f_2: $y = 2{,}5(e^{0{,}5x} - 1)$, f_3: $y = 2{,}5(1 - e^{0{,}5x})$,
f_4: $y = 2{,}5(1 - e^{-0{,}5x})$

10.46. a) – b) ungerade c) – d) gerade e) gerade
f) ungerade

10.47. a) monoton steigend b) monoton fallend c) monoton fallend

10.48. a) vgl. Bild L 21; 0,31 b) vgl. Bild L 22; 0,71 c) vgl. Bild L 22; 1,12

10.49. a) vgl. Bild L 35
b) 23,4 Jahre, 21,7 Jahre, 14,2 Jahre

10.50. a) vgl. Bild L 23; 1,29
b) vgl. Bild L 24; 2,01
c) vgl. Bild L 24; 1,47

10.51. vgl. Bild L 36

10.52. vgl. Bild L 37

11.1. a) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 30 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 20y = 0$,
c) $x^2 + y^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 0$ d) $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 16 = 0$

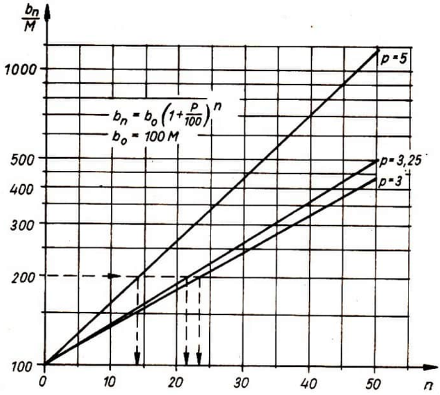


Bild L 35

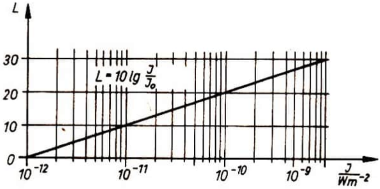


Bild L 36

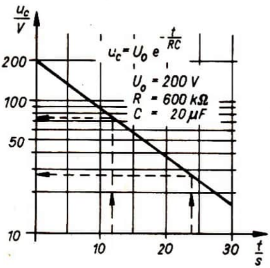


Bild L 37

11.2. a) $M(6; -3)$, $r = 12$, b) $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $r = \frac{3}{2}$

c) $M(-2; 0)$, $r = 2$, d) $M(5,2; 0,8)$, $r = 4,5$,

e) $M\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{5}\right)$, $r = \frac{4}{5}$,

f) $M\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$, $r = \frac{5}{6}$ j, keine reelle Kurve

g) $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $r = 0$, Punkt

11.3. $(x - 3)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{169}{16}$

11.4. $\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{169}{4}$

11.5. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25}{4}$

11.6. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 169$

11.7. a) $P_1(8; 6)$, $P_2(6; -8)$: Die Gerade schneidet den Kreis.
b) $P_1(-5; 7) = P_2$: Die Gerade ist Tangente des Kreises.
c) $P_1(2 + 3j; -6 + j)$, $P_2(2 - 3j; -6 - j)$: Die Gerade schneidet den Kreis nicht.
d) $P_1(7; 3) = P_2$: Die Gerade ist Tangente.

11.8. $s = 10\sqrt{2}$; $S(11; -3)$; Richtungsfaktor der Sehne: $m_1 = -7$; Richtungsfaktor der Geraden: $m_2 = \frac{1}{7}$

11.9. a) $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{57} = 1$, b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$, c) $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1$

11.10. a) $a = 10$; $b = 6$; $F_1(-8; 0)$; $F_2(8; 0)$; $\varepsilon = 0,8$;
b) $a = 2,9$; $b = 2,1$; $F_1(0; 2)$; $F_2(0; -2)$; $\varepsilon = 0,69$;
c) $a = \sqrt{43}$; $b = 3\sqrt{3}$; $F_1(-4; 0)$; $F_2(4; 0)$; $\varepsilon = 0,61$;

11.11. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

11.12. a) $a = 10$; $b = 6$, b) $a = \frac{10\sqrt{10}}{3}$; $b = 5\sqrt{10}$

11.13. a) $P_1(4; 1)$; $P_2(2; 2)$, b) kein Schnittpunkt
c) $P_0\left(4\sqrt{3}; 2\sqrt{2}\right)$; g ist Tangente

11.15. Parabel nach a), b) rechts, c) links, d) oben, e) unten geöffnet.

11.16. a) $y^2 = 4x$, b) $y^2 = -10x$, c) $y^2 = 0,733x$

11.17. a) $(y + 5)^2 = 8(x + 2)$, b) $(x - 3)^2 = -y$,
c) $(y - 10)^2 = -3(x + 1)$, d) $(x - 6)^2 = 14(y + 6)$

11.18. a) $S(-2; 3)$; $F(1; 3)$, b) $S\left(\frac{4}{3}; 4\right)$; $F\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{6}\right)$,

c) $S(-2; 0)$; $F(-2{,}6; 0)$

11.19. a) $x^2 = -\frac{l^2}{4(h+a)}(y-h)$

b) $a = h \Rightarrow x^2 = -\frac{l^2}{8h}(y-h)$, $y_D = 0 \Rightarrow x_D = \frac{l}{4}\sqrt{2}$,

wegen $\overline{CO} = \overline{OD} = x_D$ folgt $\overline{CD} = \frac{l}{2}\sqrt{2}$

c) $\overline{CD} = 29{,}4$ m; $h_1 = h_4 = 3{,}22$ m; $h_2 = h_3 = 5{,}31$ m

11.20. a) $a = 6$; $b = 12$; $F_1\left(-6\sqrt{5}; 0\right)$; $F_2\left(6\sqrt{5}; 0\right)$; $y = \pm 2x$

b) $a = 15$; $b = 8$; $F_1(0; 17)$; $F_2(0; -17)$; $y = \pm\frac{15}{8}x$,

c) $a = b = 14$; $F_1\left(-14\sqrt{2}; 0\right)$; $F_2\left(14\sqrt{2}; 0\right)$; $y = \pm x$

11.21. $2\alpha = 67°\,23'$

11.22. $a = \frac{14}{9}$; $b = \frac{5}{2}$

11.23. a) $P_1(3{,}44; -1{,}12)$; $P_2(5{,}56; 3{,}12)$,
b) $P_1(3{,}56; 1{,}28)$; $P_2(-6{,}14; -3{,}57)$,
c) kein Schnittpunkt
d) Tangente: $P_0\left(-5; \frac{8}{3}\right)$, e) $P_1(-4{,}35; -2{,}1)$

11.24. $\left(x + \frac{33}{8}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{2\,993}{64} = 46{,}766$

11.25. $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 289$; $S_1\colon y = \frac{23}{7}x - \frac{36}{7}$, $S_2\colon y = 8$,

$S_3\colon y = -x + 12$

11.26. Wählt man das Koordinatensystem so, daß gilt: $A(0; 0)$, $B(c; 0)$, dann folgt die Kurvengleichung

$$\left(x - \frac{n^2c}{n^2 - m^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{nmc}{n^2 - m^2}\right)^2.$$

Die gesuchte Kurve ist ein Kreis.

11.27. $x_F = \frac{a}{1+t^2}$, $y_F = \frac{at}{1+t^2}$, das ist die Parameterdarstellung einer Geraden mit dem Richtungsfaktor $m = t$ der Geraden als Parameter. Die Kurve ist ein Kreis mit der Gleichung

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

11.28. Kreisbogen, der auf dem Kreis mit der Gleichung $x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$ liegt und durch $x_1 = -\frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2}$, $x_2 = \frac{r}{b}\sqrt{b^2 - r^2}$ begrenzt wird.

11.29. $p = \frac{a}{12}\sqrt{3}$

11.30. a) $S(-1; 3)$; $F(2; 3)$, b) $S(-4; -6)$; $F\left(-4; -\frac{29}{4}\right)$,

c) $S(0; -10)$; $F(-1; -10)$, d) $S\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{4}\right)$; $F\left(\frac{7}{2}; 0\right)$

11.31. Parabel mit $p = r$, zum Durchmesser hin geöffnet

11.32. $M\left(\frac{17}{8}; -\frac{3}{2}\right)$

11.33. Bild L 38

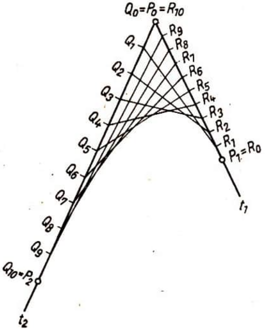


Bild L 38

11.34. $\varepsilon = \frac{\sqrt{11}}{6} = 0{,}553$; P_1: $r_1 = 4{,}01$; $r_2 = 7{,}99$; P_2: $r_1 = 8{,}65$; $r_2 = 3{,}35$

11.35. $A = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$

11.36. $\varepsilon = \frac{1}{59} = 0{,}017$

11.37. $x = (m + n) \cos \omega t$
$y = (m - n) \sin \omega t$; Ellipse mit $a = m + n$, $b = m - n$

11.38. Ellipse mit der Gleichung $b^2(x - 2a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Diese Ellipse ist gegenüber der gegebenen Ellipse um $2a$ in der positiven Richtung der x-Achse verschoben.

11.39. $s = 33{,}39$

11.40. $x = \pm 4\sqrt{\frac{26}{17}} = \pm 4{,}95$; $y = \pm \frac{18}{\sqrt{17}} = \pm 4{,}36$

11.41. $a = 1$; $b = \sqrt{3}$

11.42. $\dfrac{x^2}{\frac{9}{16}} - \dfrac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$

11.43. Es sei $O = M$: $x^2 - y^2 = \dfrac{a^2}{2}$

11.44. Man wähle B als Ursprung: $\dfrac{\left(x - \frac{a}{3}\right)^2}{\frac{a^2}{9}} - \dfrac{y^2}{\frac{a^2}{3}} = 1$

11.45. a) $\dfrac{1}{2}x^2 + x - y - \dfrac{5}{2} = 0$, b) $2x - y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$, d) $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$

Bild L 39

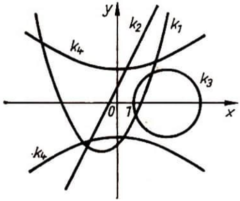
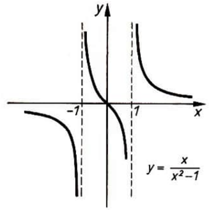
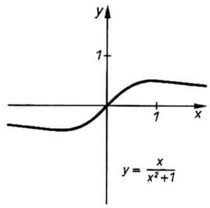
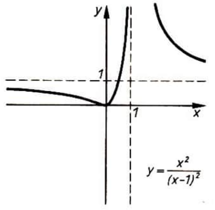


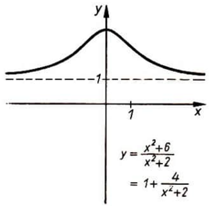
Bild L 39

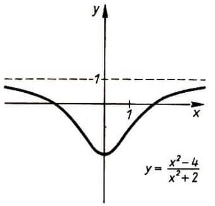
Sachwortverzeichnis

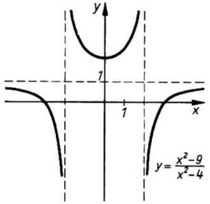

y
x
-1
1
$y = \frac{x}{x^2-1}$

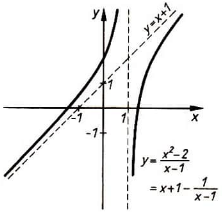

y
x
1
1
$y = \frac{x}{x^2+1}$

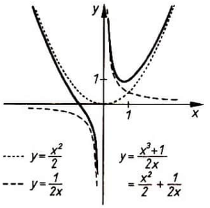

y
x
1
1
$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

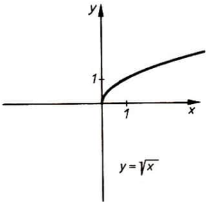

y
x
1
1
$y = \frac{x^2+6}{x^2+2}$
$= 1 + \frac{4}{x^2+2}$

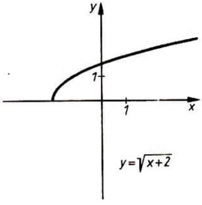

y
x
1
1
$y = \frac{x^2-4}{x^2+2}$

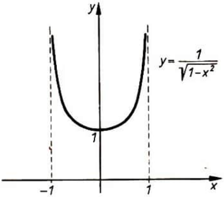

y
x
1
1
$y = \frac{x^2-9}{x^2-4}$

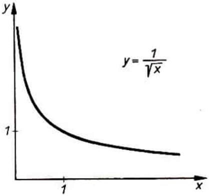

y
x
y=x+1
1
-1
1
-1
$y = \frac{x^2-2}{x-1}$
$= x+1-\frac{1}{x-1}$

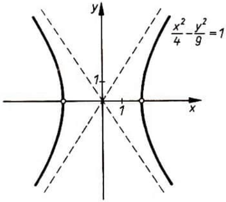

y
x
1
1
$y = \frac{x^2}{2}$
$y = \frac{1}{2x}$
$y = \frac{x^3+1}{2x}$
$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x}$

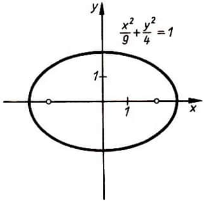

y
x
1
1
$y=\sqrt{x}$

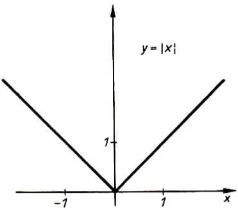

y
x
1
1
$y=\sqrt{x+2}$

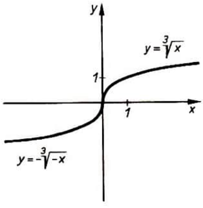

y
x
1
-1
1
$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$


y
x
1
1
$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$


y
x
1
1
$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$


y
x
1
1
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$


x
1
-1
1
$y=|x|$


y
x
1
1
$y=\sqrt[3]{x}$
$y=-\sqrt[3]{-x}$