5

Methodische Beiträge zum Unterricht im Fach

MATHEMATIK

Methodik der Vektorrechnung

DEUTSCHES PÄDAGOGISCHES ZENTRALINSTITUT

Methodische Beiträge zum Unterricht im Fach
MATHEMATIK

Zur Methodik der Vektorrechnung in der erweiterten Oberschule

Herausgegeben vom
Deutschen Pädagogischen Zentralinstitut
— Sektion Unterrichtsmethodik und Lehrpläne —

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN · 1961

Ausgearbeitet von:

W. Friedrich	Markkleeberg-Ost
B. Gonschorek	Oschatz
M. Knöspel	Reichenbach/OL
E. Lehmann	Rostock
H. Simon	Dresden
H. Stenzschell	Potsdam
H. Voigt	Groitzsch

Redaktion:
H. Junge / Dr. F. Neigenfind
Deutsches Pädagogisches Zentralinstitut

Redaktionsschluß: 27. 4. 1961
ES 10 C · Best.-Nr. 27922-1 · Lizenz Nr. 203 · 1000/61 (E)
Satz und Druck: C. G. Röder, Leipzig III/18/2

Vorwort

Die Vektorrechnung trägt in hohem Maße zur Lösung zahlreicher naturwissenschaftlicher und technischer Probleme bei. Sie gestattet die exakte und umfassende Formulierung von Gesetzmäßigkeiten und Strukturen, auch innerhalb der mathematischen Wissenschaft, in einer hohen Allgemeingültigkeit und stellt zugleich Verfahren von hohem praktischem Wert zur Lösung konkreter Einzelaufgaben zur Verfügung.

Im Mathematikunterricht der sozialistischen Schule werden die Bedürfnisse der gesellschaftlichen Praxis berücksichtigt. Deshalb wurde im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts der erweiterten Oberschule in dem für das Schuljahr 1959/60 gültigen Lehrplan festgelegt: „In der Klasse 12B wird es dem Lehrer freigestellt, an Stelle der sphärischen Trigonometrie eine Einführung in die Vektorrechnung zu geben.“[1] Ein großer Teil der Mathematiklehrer der damaligen 12. Klassen entschied sich für die Behandlung der Vektorrechnung und sammelte wertvolle methodische Erfahrungen.

In der Direktive zum Mathematiklehrplan für das Schuljahr 1960/61 heißt es: „Die Vektorrechnung ist . . . verbindlicher Lehrstoff. Die bisherige Regelung, entweder Vektorrechnung oder sphärische Trigonometrie zu betreiben, wird damit außer Kraft gesetzt . . . Die Vektorrechnung ist anschaulich zu behandeln, die verschiedenen Verknüpfungen von Vektoren werden geometrisch gedeutet.“[2] Einige Überspitzungen, die sich im Schuljahr 1959/60 herausgestellt hatten, wurden aus den Formulierungen des Plans herausgenommen.

Im Unterricht in der Vektorrechnung mußten vor allem zwei Schwierigkeiten überwunden werden: Einerseits konnte noch kein Lehrbuch für die Hand des Schülers zur Verfügung stehen, andererseits konnten noch nicht von allen Lehrern in genügendem Maße Erfahrungen auf diesem Gebiete gewonnen werden.

In dem vorliegenden Methodischen Beitrag teilen eine Reihe von Lehrern ihre im Unterricht in den letzten beiden Schuljahren gesammelten Erfahrungen mit und stellen diese zur Diskussion. Neben den Einzelbeiträgen, in denen die Verfasser schildern, wie sie stofflich und methodisch ihre Lehrgänge beziehungsweise deren Teilabschnitte planten und durchführten, findet der Leser einen Abschnitt, dem ein in der Schulpraxis verwendetes Beiblatt zum Mathematiklehrbuch der Klasse 12 als Manuskript zugrunde liegt. Ferner sind Vorschläge für entsprechende

[1] Mathematik-Lehrplan für die erweiterte Oberschule für das Schuljahr 1959/60, 9. bis 12. Klasse, S. 148.

[2] Direktive über die Unterrichtsgestaltung in den Klassen 10 bis 12 der erweiterten Oberschule im Schuljahr 1960/61, S. 22.

Kontrollarbeiten enthalten. Schließlich werden Möglichkeiten gezeigt, die Vektorrechnung im Mathematik- und Physikunterricht sinnvoll wirksam werden zu lassen.

Die in den einzelnen Diskussionsbeiträgen vertretenen Standpunkte und Meinungen decken sich keineswegs immer. Die Diskussion zu den Ausführungen dieses Sammelbandes soll helfen bei

a) der Verbesserung der Formulierungen des Lehrplans,
b) der Gestaltung entsprechender Lehrbuchkapitel und
c) der methodischen Durchdringung der Vektorrechnung im Unterricht.

Das Deutsche Pädagogische Zentralinstitut bittet alle Lehrer, sich unter Beachtung der obengenannten Gesichtspunkte recht rege an der Diskussion zu beteiligen.

H. Junge / Dr. F. Neigenfind
Wissenschaftliche Mitarbeiter des
Deutschen Pädagogischen Zentralinstituts

DISKUSSIONSBEITRAG NR. 1

Harald Stenzschell

1. Zur Bedeutung der Vektorrechnung für den Mathematikunterricht

Die Vektorrechnung wurde zu Beginn des Schuljahres 1960/61 obligatorisch in den Lehrplan der erweiterten Oberschule aufgenommen. Die Gründe dafür liegen vor allem in dem Wert der Vektorrechnung für die Ausbildung der Raumvorstellung sowie für die Erfassung und Deutung technischer, physikalischer und mathematischer Gesetzmäßigkeiten. Darüber hinaus gewinnt die Vektorrechnung auch noch aus einem anderen Grunde an Bedeutung:

Mit Hilfe der Vektorrechnung lernt der Schüler erstmalig erkennen, daß die Gültigkeit der ihm bisher bekannten Rechengesetze auf *Zahlen* beschränkt ist und daß für Vektoren zum Teil andere als diese Rechengesetze – wenn auch oft mit denselben Bezeichnungen – gelten. Ein recht instruktives Beispiel hierfür liefert ein Vergleich zwischen der Multiplikation von Zahlen und der von Vektoren. So folgt etwa aus dem Produkt $a \cdot b = 0$ zweier reeller Zahlen a, b das Verschwinden wenigstens eines der beiden Faktoren a, b. Es folgt aber weder aus dem skalaren Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = 0$ noch aus ihrem vektoriellen Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{o}$ unbedingt das Verschwinden eines der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Im ersten Falle können die beiden Vektoren senkrecht aufeinanderstehen; im zweiten Falle können sie kollinear sein. Ich habe im Unterricht den Vergleich von Rechenoperationen mit Zahlen und Vektoren auch auf Drehungen ausgedehnt. Jede Drehung um eine feste Achse kann durch eine gerichtete Strecke dargestellt werden. Dazu wird die Strecke in die Richtung der Drehachse gelegt und die Streckenlänge entsprechend der Größe des Drehwinkels festgesetzt. Es erhebt sich die Frage, ob diese gerichteten Strecken Bilder von Vektoren sind. Die Schüler überprüfen dazu, ob die für Vektoren geltenden Rechengesetze auch für Drehungen Gültigkeit besitzen. Wenn unter der Addition zweier Drehungen ihre Nacheinanderausführung verstanden wird, so ist die Nichtgültigkeit des Kommutativgesetzes bei der Addition zweier Drehungen leicht zu zeigen, wie aus Abb. 1 hervorgeht.

Die Schüler erkennen somit, daß Drehungen (mit endlichen Drehwinkeln) nicht als Vektoren angesehen werden können.

Durch solche und ähnliche Vergleiche werden gleichzeitig eine Reihe wichtiger Voraussetzungen für das Verständnis des Aufbaues des Zahlenbereiches geschaffen. Erfahrungsgemäß bereitet es einem Teil der Schüler immer wieder begriffliche Schwierigkeiten einzusehen, daß die Grundgesetze der Addition beziehungsweise der Multiplikation von Zahlen einer Bestätigung beziehungsweise eines Beweises bedürfen.

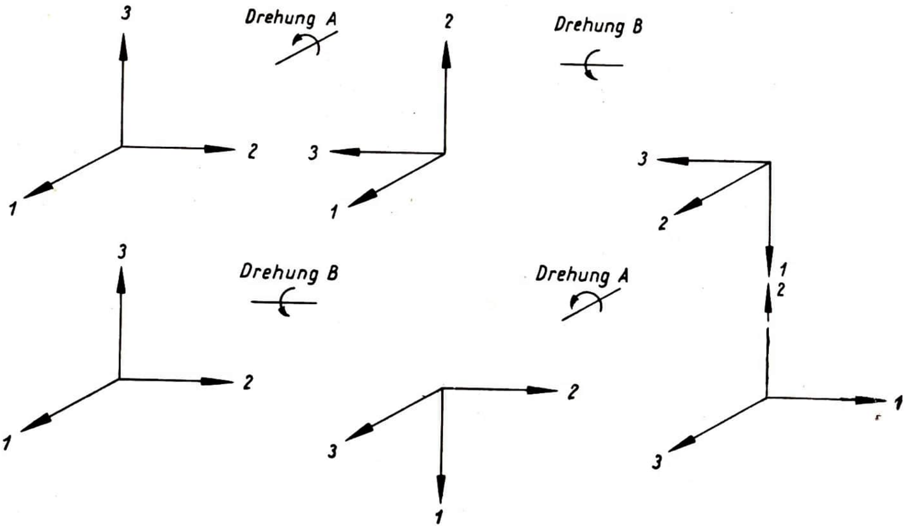
3
Drehung A
2
Drehung B
2
3
3
1
1
3
2
1
2
3
Drehung B
Drehung A
2
2
1
1
3
3
1

Abb. 1

2. Zu den Unterrichtsverfahren

Bei der Vorbereitung der unterrichtlichen Behandlung des Stoffgebietes „Vektorrechnung“ muß sich der Lehrer im klaren darüber sein, daß erhebliche Anforderungen an das abstrakt-logische Denken der Schüler gestellt werden.

Die Erfolge der Arbeit zeigten, daß es richtig war, bei der Wahl der Unterrichtsverfahren das erarbeitende Unterrichtsgespräch und die eigene schöpferische Tätigkeit der Schüler in den Vordergrund zu stellen. Es ist Aufgabe des Lehrers, die Schüler nicht nur zum Verständnis der grundlegenden Tatsachen, sondern bis zu einem gewissen Grade auch zur *selbständigen* Handhabung der Vektorrechnung zu führen, damit sie in die Lage versetzt werden, zumindest einfache Probleme ohne fremde Hilfe und Anleitung zu lösen. Hierzu bieten sich vor allem die Beweise von Sätzen aus der Geometrie und der Trigonometrie an. Ich stellte derartige Probleme sehr häufig als Hausaufgaben, wobei ich öfter notwendige Erläuterungen zum Lösungsweg gab. Hausaufgaben ließ ich, soweit möglich, zu jeder Stunde anfertigen; die dafür notwendige durchschnittliche Arbeitszeit wurde mit 30 bis 40 Minuten veranschlagt. Am Beginn der nachfolgenden Stunde trugen einzelne Schüler die Lösung der Hausaufgabe vor oder skizzierten zumindest den zur Lösung notwendigen Gedankengang. Im Falle einer falschen oder unvollständigen Lösung legte ich großen Wert darauf, daß der Schüler seine Gedanken mindestens bis zu dem Punkte darzustellen in der Lage war, von dem ab er in der Lösung der Aufgabe nicht weitergekommen war. Sofern Schwierigkeiten bei mehreren Schülern auftraten, erarbeitete ich die Lösung noch einmal mit der gesamten Klasse.

3. Zur Einführung des Vektorbegriffes

Im Physik- und Mathematikunterricht der vorhergehenden Klassen haben die Schüler bereits Vektoren kennengelernt. Es handelte sich dabei vornehmlich um die Darstellung von Kräften, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Es erschien deshalb als zweckmäßig, diese bereits bei den Schülern vorhandenen Kenntnisse für die Einführung des Vektorbegriffes nutzbar zu machen.

Am Beispiel von Kräften können verhältnismäßig leicht die „Bestimmungsstücke“ veranschaulicht werden, die einen Vektor charakterisieren: Größe, Richtung und Durchlaufsinn. Größen, die diese „Bestimmungsstücke“ nicht in sich vereinigen, werden als Skalare bezeichnet. So sind zum Beispiel Temperatur, Wichte und Masse Skalare, da sie lediglich durch ihre Größe bestimmt sind. Nach diesen einführenden Erläuterungen zeigte ich, daß Verschiebungen aller Punkte des zwei- und dreidimensionalen Raumes durch Vektoren beschrieben werden können.

Anschließend wurden die additiven Verknüpfungen von Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar behandelt.

Den Ausgangspunkt für die Behandlung der Komponentendarstellung von Vektoren bildete die Einführung der beiden Begriffe Einheitsvektor und Ortsvektor. Die Problemstellung „Wie kann man die Lage eines Punktes im dreidimensionalen

Raum bestimmen, etwa die Lage des tiefsten Punktes der Lampe im Klassenzimmer?“ leitete unter Verwendung dieser beiden Begriffe über zur Komponentendarstellung.

Die Schüler erkannten bald, daß die Lage eines Punktes im dreidimensionalen Raum durch ein Zahlentripel eindeutig bestimmt ist. Sie gelangten damit zur „algebraischen“ Charakterisierung des Vektors. Schließlich erkannten sie auch, daß es eine Reihe physikalischer Größen gibt, die durch Vektoren dargestellt werden können. Dabei kann der Fall eintreten, daß der Vektor nicht mehr

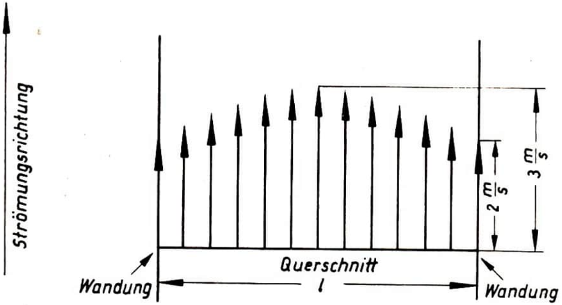

Abb. 2

frei beweglich, sondern an einen Raumpunkt gebunden ist. Die am häufigsten auftretende Art gebundener Vektoren stellen die sogenannten Feldvektoren dar: Jedem Punkt eines Raumes ist ein Vektor zugeordnet. Beispiele dafür liefern etwa die elektrische oder die magnetische Feldstärke sowie die Geschwindigkeit einer Strömung. Zur Veranschaulichung des letztgenannten Sachverhalts und zur gleichzeitigen Wiederholung der Integralrechnung dienten Aufgaben[1] wie die folgende:

Die Geschwindigkeit v eines Luftstromes in einem Windkanal von rechteckigem Querschnitt von der Breite l und der Höhe h möge in der Höhenrichtung gleichmäßig verteilt, in der Querrichtung des Kanals aber parabolisch veränderlich sein $(y = a + b x^2)$. An den Seitenwänden $\left(x = \pm \frac{1}{2}\right)$ sei sie $2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, in der Mitte $3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Man berechne aus diesen Angaben die durchströmende Luftmenge:

$$Q = h \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} v \, d x .$$

In dieser Aufgabe wird der Begriff des Vektorfeldes besonders deutlich. Jedem Punkt (Luftteilchen) eines bestimmten Querschnittes ist ein Vektor zugeordnet,

[1] Aus Rothe: Höhere Mathematik, Teil IV, Heft 1/2, S. 53. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1949.

dessen Maßzahl der Länge gleich der Maßzahl der Geschwindigkeit des Luftteilchens ist und dessen Richtung durch die Strömungsrichtung angegeben wird (Abb. 2).

Diese und ähnliche Beispiele verdeutlichen den Schülern, daß unter Umständen dem Vektor, der eine physikalische Größe darstellt, mehr Bedingungen auferlegt werden müssen, als es die mathematische Definition erfordert.

4. Zur Auswahl von Anwendungsaufgaben zur Vektorrechnung

Zweckvoll ausgewählte Anwendungsaufgaben sind ein wichtiges Mittel, engere Verbindungen zwischen dem Unterrichtsfach Mathematik und den naturwissenschaftlichen Disziplinen sowie der sozialistischen Produktion zu knüpfen.

Es würde den Rahmen dieses Beitrages übersteigen, sämtliche behandelten Anwendungsaufgaben und die daran zu knüpfenden Betrachtungen darzustellen. Deshalb sollen nur einige wenige Beispiele stellvertretend für viele stehen.

Naturgemäß ergeben sich für das Stoffgebiet Vektorrechnung die engsten Beziehungen zur Physik und insbesondere zur technischen Mechanik. Diesem Problemkreis entstammen die im folgenden skizzierten Anwendungsaufgaben.

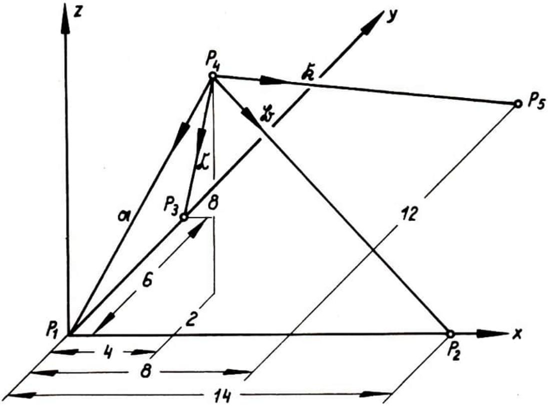

Abb. 3

Nach der Behandlung der Komponentendarstellung von Vektoren wurde folgende Aufgabe gestellt:

An der Spitze eines Gerüstes, dessen Maße der Abb. 3 zu entnehmen sind, ist ein Seil befestigt, an dessen Ende mit einer Kraft $\mathfrak{K}$ gezogen wird.
Bestimmen Sie Größe und Art der Beanspruchung der Stäbe!

Nach den Gesetzen der Mechanik herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe aller in der Spitze angreifenden Kräfte Null ist:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{K} = \mathfrak{o}.$$

Im weiteren Verlauf der Lösung erfolgt die Zerlegung der Kräfte in ihre Komponenten, wobei sich die Richtungskosinus aus den Koordinaten der Punkte P_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) ergeben.

Danach kann geschrieben werden:

$$A(\cos\alpha_1\,\mathfrak{i} + \cos\beta_1\,\mathfrak{j} + \cos\gamma_1\,\mathfrak{k}) + B(\cos\alpha_2\,\mathfrak{i} + \cos\beta_2\,\mathfrak{j} + \cos\gamma_2\,\mathfrak{k})$$
$$+ C(\cos\alpha_3\,\mathfrak{i} + \cos\beta_3\,\mathfrak{j} + \cos\gamma_3\,\mathfrak{k}) + K(\cos\alpha_4\,\mathfrak{i} + \cos\beta_4\,\mathfrak{j} + \cos\gamma_4\,\mathfrak{k}) = \mathfrak{o}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathfrak{i}(\cos\alpha_1 A + \cos\alpha_2 B + \cos\alpha_3 C + \cos\alpha_4 K) + \mathfrak{j}(\cos\beta_1 A + \cos\beta_2 B + \cos\beta_3 C + \cos\beta_4 K)$$
$$+ \mathfrak{k}(\cos\gamma_1 A + \cos\gamma_2 B + \cos\gamma_3 C + \cos\gamma_4 K) = \mathfrak{o}.$$

Dann sind die einzelnen Komponenten für sich gleich Null; es entsteht ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten A, B, C. Ein negatives Vorzeichen im Ergebnis bedeutet, daß der Vektor seinen Durchlaufsinn umgekehrt hat, daß also in dem betreffenden Stab Druckkräfte auftreten.

Nun wird der Belastungsfall geändert und dadurch die Aufgabe etwas komplizierter:

Das Gerüst sei in der Weise belastet, daß ein Seil bei P_5 befestigt ist, bei P_4 über eine feste Rolle läuft und – mit einem Gewicht G belastet – senkrecht herabhängt. Es ist die Beanspruchung der Stäbe des Gerüstes unter diesen Umständen zu bestimmen.

Eine anschließende Auswertung der Aufgabenstellung konzentrierte sich vor allem auf folgende Punkte:

1. Wo kommen in der Praxis derartige Belastungsfälle vor?
   Die Schüler fanden sehr bald Beispiele, wie die Belastung eines Oberleitungsmastes elektrischer Bahnen durch die Seilkraft und die Belastung eines Kranauslegers oder eines Förderturmes.
   Die Schüler dieser Klasse haben im Unterricht in der sozialistischen Produktion im Schuljahr 1959/60 im Bauwesen und im Schuljahr 1960/61 in einer Werkzeugmaschinenfabrik gearbeitet. Dadurch ergaben sich auch sofort Einsichten in das Prinzip der Berechnung von Hebezeugen.
2. Welche Vorteile bietet die vektorielle Berechnung gegenüber anderen Berechnungsmethoden?
   Hierzu erkannten die Schüler, daß die Art der Belastung (Zug oder Druck) durch das Vorzeichen des Ergebnisses sichtbar wird und daß besonders im dreidimensionalen Raume mit Vektoren wesentlich rationeller gerechnet werden kann, als es etwa mit trigonometrischen Hilfsmitteln möglich ist.

Nach Behandlung des skalaren Produktes zeigte ich einige Anwendungen dieses Produktes, unter anderem in der Physik. Insbesondere der physikalische Begriff der Arbeit erfährt durch das skalare Produkt insofern eine umfassendere Bedeutung, als Kraft und Weg im dreidimensionalen Raum betrachtet werden können.

Eine Aufgabe lautete:
Der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{K} = 6\,\mathfrak{i} - 4{,}5\,\mathfrak{j} + 9\,\mathfrak{k}$ (Komponenten in kp) wird vom Punkt P_1 (6; 7; 2) zum Punkt P_2 (3; 8; 4) (Koordinaten in m) geradlinig verschoben (Abb. 4).

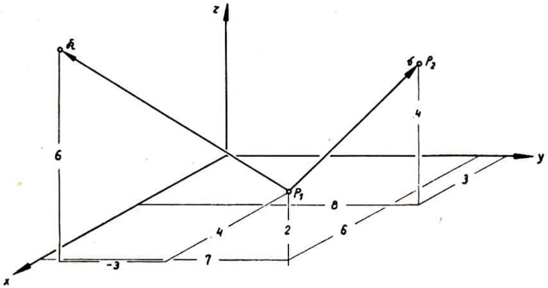

Abb. 4

a) Bestimmen Sie die Größe der Kraft K!
b) Bestimmen Sie den Verschiebungsvektor $\mathfrak{s}$!
c) Welche Arbeit tritt bei der Verschiebung auf?
Wird diese Arbeit gewonnen oder muß sie geleistet werden?

Es ergibt sich: a) $|\mathfrak{K}| = \sqrt{137{,}25} \approx 11{,}7.$
Die Kraft K beträgt angenähert 11,7 kp.
b) Der Verschiebungsvektor lautet:
$\mathfrak{s} = -3\,\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\,\mathfrak{k}.$
c) $A = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s} = -4{,}5.$
Es muß eine Arbeit $A = 4{,}5$ kpm geleistet werden.

Nach der Behandlung des vektoriellen Produktes ging ich zu einigen Anwendungen des vektoriellen Produktes speziell in der Mechanik über, insbesondere zur Darstellung des Momentes einer Kraft als $\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}$.
Eine Aufgabe lautete:

Bestimmen Sie Größe und Richtung des Drehmomentes nach Abb. 5!

Eine anschließende Auswertung der Aufgabenstellung zeigte, daß die Darstellung des Moments als Vektorprodukt erheblich umfassender als eine skalare Gleichung ist; das Vektorprodukt liefert neben dem Betrag des Moments auch die Drehebene und durch das Vorzeichen des Momentenvektors auch noch die Drehrichtung.

Hier ergab sich nun ein Ansatzpunkt, um einen Ausblick auf die vektorielle Behandlung der Mechanik zu geben, insbesondere darauf, daß mit weitergehenden Hilfsmitteln, etwa der Differentiation von Vektoren, nicht nur Probleme der Statik, sondern auch der Kinematik gelöst werden können.

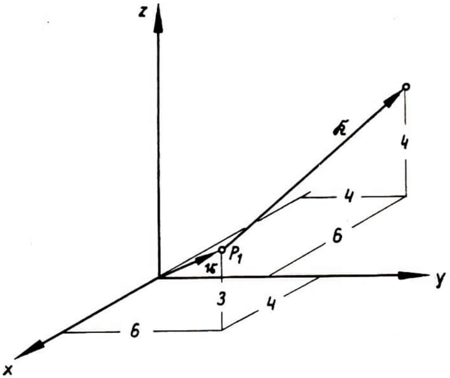

Abb. 5

5. Zum Inhalt und zu den Ergebnissen der Klassenarbeiten

Da der Inhalt und die Ergebnisse der Klassenarbeiten bis zu einem gewissen Grade Aufschluß über den Leistungsstand einer Klasse geben können, möchte ich auf die drei Klassenarbeiten eingehen, in denen Aufgaben aus der Vektorrechnung enthalten waren.

1. Klassenarbeit (nach Behandlung der additiven Verknüpfungen und der Komponentendarstellung):
Arbeitszeit für die folgenden zwei Aufgaben etwa 50 Minuten.

Aufgabe 1: Ein Vektor hat die skalaren Komponenten $A_x = 7$; $A_y = A_z = 4$.
Bestimmen Sie seine Länge und seine Richtungskosinus!

Aufgabe 2: Gegeben sind drei Vektoren:
$\mathfrak{A}$: $A_x = 4$; $A_y = 5$; $A_z = -3$;
$\mathfrak{B}$: $|\mathfrak{B}| = 9$; $B_x = 1$; $B_y = 8$; $B_z < 0$;
$\mathfrak{C}$ ist zu bestimmen aus $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{o}$.
Bestimmen Sie den absoluten Betrag und die Richtungswinkel von $\mathfrak{D} = -\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$!

Die erste Aufgabe lösten 17 von insgesamt 21 Schülern vollständig und richtig, das sind 81%; die zweite Aufgabe 15 Schüler oder 72%.

2. Klassenarbeit (nach Behandlung des skalaren und vektoriellen Produktes):
Arbeitszeit für die folgenden vier Aufgaben etwa 75 Minuten.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie Größe und Richtung des in P_1 angreifenden Moments nach Abb. 6!

Aufgabe 2: Gegeben sind zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j} + 2\,\mathfrak{k};$$
$$\mathfrak{B} = 4\,\mathfrak{i} + 7\,\mathfrak{j} + 6\,\mathfrak{k}.$$

a) Welchen Winkel bilden beide Vektoren miteinander?

b) Berechnen Sie $(2\,\mathfrak{A} - 4\,\mathfrak{B}) \cdot (3\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$!

Aufgabe 3: Leiten Sie entweder den Sinussatz oder den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie mit Hilfe vektoralgebraischer Überlegungen her!

Aufgabe 4: $(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k}) \times [(-\mathfrak{j}) \times (-\mathfrak{i})]$.

An dieser Aufgabe sollte geprüft werden, ob die Schüler ein wirkliches Verständnis der Produktbildungen in der Vektoralgebra erreicht haben und nicht nur formal die Rechentechniken beherrschen.

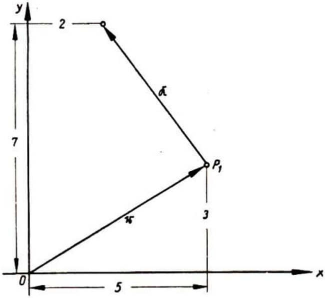

Abb. 6

Die erste Aufgabe lösten 12 Schüler oder 57% vollständig und richtig; die zweite Aufgabe 14 Schüler oder 67%; die dritte Aufgabe 18 Schüler oder 86% und die vierte Aufgabe 15 Schüler oder 72%.

3. *Klassenarbeit* (während der Vorbereitungszeit auf die Reifeprüfung): Arbeitszeit für die folgende Aufgabe etwa 30 Minuten.

Aufgabe: Bei der Konstruktion von Behältern für den chemischen Apparatebau ist der Winkel zwischen den beiden Strecken AB und CB aus Abb. 7 zu bestimmen.

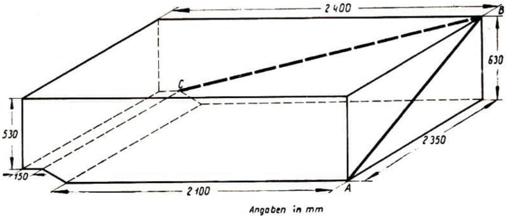

Abb. 7

Diese Aufgabe lösten 18 von insgesamt 20 Schülern oder 90% vollständig und richtig.

Eine Zusammenstellung der Noten würde insofern ein falsches Bild über die Unterrichtsergebnisse aus der Vektorrechnung liefern, als in jeder Klassenarbeit grundsätzlich ein erheblicher Teil der Aufgaben nicht dem gerade behandelten Stoffgebiet, sondern weiter zurückliegenden Stoffgebieten – teilweise bis zur Klasse 7 – entnommen wird.

DISKUSSIONSBEITRAG NR. 2

Eberhard Lehmann

Dem gesellschaftlichen Bedürfnis entsprechend, wurden Teile der Vektorrechnung in den Lehrplan der erweiterten Oberschule aufgenommen. Die Stoffdarbietung muß faßlich sein. Ich habe die Vektorrechnung aus der Anschauung aufgebaut und damit gute Unterrichtserfolge erzielt. Ehemalige Abiturienten, jetzt Studenten an der Technischen Universität Dresden oder Diplomingenieure, berichten, daß die Vektorrechnung in ihrer in der Schule dargebotenen, unkomplizierten Form für das anschließende Studium von großem Wert gewesen ist.

Im folgenden sollen die stofflichen und methodischen Schwerpunkte des von mir erprobten Unterrichtsganges gekennzeichnet werden.

1. Translationen

Das Hintereinanderausführen von zwei oder mehr Translationen erklären wir als Summe von Translationen.

Wir wollen eine Translation n-mal hintereinander ausführen:

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_1 + \cdots + \mathfrak{v}_1 = n\,\mathfrak{v}_1 .$$

Die Gültigkeit der Distributivgesetze wird geometrisch erläutert:

$$(m + n)\,\mathfrak{v} = m\,\mathfrak{v} + n\,\mathfrak{v} \quad \text{(Abb. 8)}$$

$$n\,(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) = n\,\mathfrak{v}_1 + n\,\mathfrak{v}_2 \quad \text{(Abb. 9).}$$

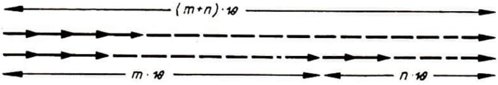

Abb. 8

Beim Versuch, das Hintereinanderausführen von Translationen umzukehren, kann von der Summation dreier Translationen, die nicht in einer Ebene liegen, ausgegangen werden. Eine einzige Translation ist imstande, die drei Einzeltranslationen zu ersetzen:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3 .$$

Es ist jetzt $\mathfrak{v}$ vorgegeben, gefragt ist nach „der" Zerlegung in Einzeltranslationen. Die Schüler stellen zunächst fest, daß diese Aufgabe vieldeutig ist. Bei der Lösung des hier neu auftretenden Problems werden als zusätzliche Bedingungen die Richtungen der Einzeltranslationen vorgeschrieben.

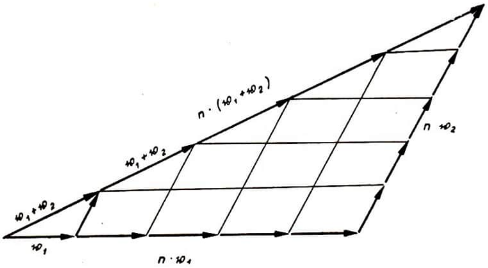

Abb. 9

Wir wählen die Achsen eines räumlichen, rechtwinkligen Koordinatensystems. Jetzt ist die Aufgabe lösbar. Die Einzeltranslationen heißen „Komponenten von $\mathfrak{v}$“. Die Komponenten werden mit $\mathfrak{v}_x$; $\mathfrak{v}_y$; $\mathfrak{v}_z$ bezeichnet (Abb. 10). Es gilt:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x + \mathfrak{v}_y + \mathfrak{v}_z .$$

Als Koordinaten von $\mathfrak{v}$ bezeichnen wir die Koordinaten des Raumpunktes, der durch die Spitze des die Translation symbolisierenden Pfeiles bestimmt ist. Die Koordinaten sind die Längen der Projektionen von $\mathfrak{v}$ auf die Achsen des Koordinatensystems, dessen Ursprung mit dem Anfangspunkt von $\mathfrak{v}$ zusammenfällt.

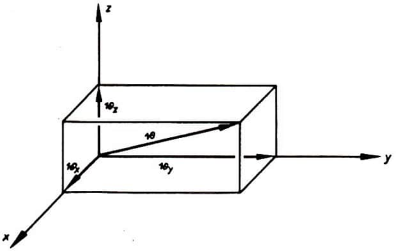

Abb. 10

Nachdem die Schüler die Begriffe „Koordinaten“ und „Komponenten“ kennengelernt haben, wird der Begriff des Vektors mit seinen Grundeigenschaften an einfachen Beispielen eingeführt. Es wird auf das Zusammensetzen von Geschwindigkeiten, auf die Addition von Kräften hingewiesen. Wir fügen zwei Beispiele an.

1. Ein Lautsprecher wiegt 5 kp. Er hängt an 2 Drahtseilen, die mit der Waagerechten Winkel von 30° bilden. Wie groß ist die Zugkraft in den Seilen (Abb. 11)?

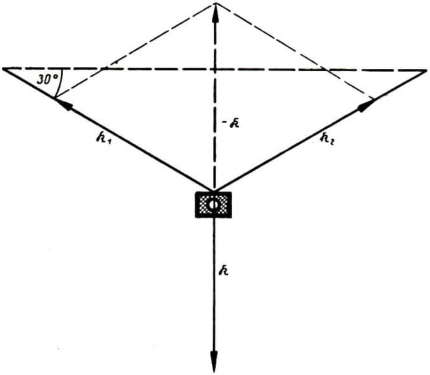

Abb. 11

Die senkrecht nach unten wirkende Kraft von 5 kp zeichnen wir nach Größe und Richtung ein. Die Zugkräfte in den Seilen müssen dieser Kraft das Gleichgewicht halten, sie müssen addiert die zu der gegebenen Kraft $\mathfrak{K}$ entgegengesetzte Kraft $-\mathfrak{K}$ ergeben. Die durch die Pfeilspitze von $-\mathfrak{K}$ gelegten Parallelen zu den die Seile darstellenden Strecken schneiden diese in den Endpunkten der Pfeile, die die gesuchten Zugkräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ symbolisieren.

Es gilt:

$$|\mathfrak{K}_1| = |\mathfrak{K}_2| = \frac{|\mathfrak{K}|}{2 \cdot \sin 30^\circ} = |\mathfrak{K}|.$$

$$K_1 = K_2 = K = 5.$$

Die Beträge der Zugkräfte in den Seilen sind gleich dem Betrag des Gewichts des Lautsprechers.

2. Das Foucault-Pendel gibt eine experimentelle Beweismöglichkeit für die Erdrotation. Eine an einem genügend langen Seil (möglichst reibungslos) aufgehängte Masse schwingt so lange, daß während dieser Zeit eine scheinbare Drehung der Pendelebene beobachtet werden kann. Nach den Gesetzen der Physik bleibt die Schwingungsebene aber konstant. Die Folgerung, die wir aus dem Versuch ziehen, kann also nur sein, daß sich die Erde während der betreffenden Zeitspanne unter der Schwingungsebene des Pendels hinweggedreht hat. Am Nordpol würden wir eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene von 360° in 24 Stunden beobachten können, am Äquator wäre diese Drehung gleich Null.

Um wieviel Grad je Stunde würde sich die Schwingungsebene eines Foucault-Pendels in Berlin scheinbar drehen?

Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde stellen wir als Pfeil in Richtung der Erdachse dar:

$$\omega = \frac{360}{24} \text{ Grad je Stunde.}$$

An einem Ort P der Erdoberfläche mit der geographischen Breite $\varphi \neq 0°$ beziehungsweise 90° kann sich die Schwingungsebene nur um die Achse des für den Ort gültigen Erdradius drehen. In diese Richtung muß also der die Winkelgeschwindigkeit ω^* symbolisierende Pfeil zeigen (Abb. 12).

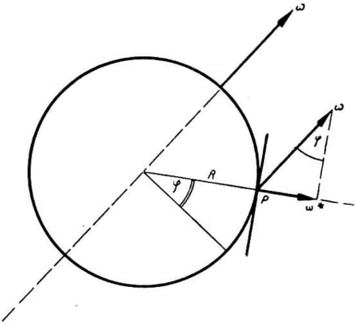

Abb. 12

Von der Rotationsgeschwindigkeit ω der Erde kann für die Drehung der Schwingungsebene eines Pendels am Ort P nur die Komponente in Frage kommen, die in Richtung von R zeigt. Das ist die Projektion von ω auf die Richtung des zu P gehörigen Erdradius:

$$\omega^* = \omega \cdot \sin \varphi.$$

Für Berlin ist

$$\varphi = 52° \, 30' \, 18''.$$

Damit wird $|\omega^*| = 11° \, 54'$ je Stunde. In Berlin dreht sich die Schwingungsebene eines Foucault-Pendels in einer Stunde scheinbar um den Winkel $11° \, 54'$. Die anfänglich durch Überlegung gefundenen Lösungen für die Sonderfälle $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ können nunmehr rechnerisch überprüft werden.

Die hier geschilderte Art der Einführung des Vektorbegriffs könnte zu breit angelegt erscheinen. Sie bietet jedoch wesentliche Vorteile, insbesondere kann durch solche und ähnliche Einführungsbeispiele als Ausgangspunkt die Behandlung des gesamten Stoffgebietes der Vektorrechnung den Schülern gegenüber leicht motiviert werden.

2. Vektoren

Eine Strecke bekannter Länge und Richtung mit festgelegtem Durchlaufsinn ist das Bild eines Vektors. Aus der Schar der vielen parallelen Strecken, die Bilder des gleichen Vektors sind, wird für den praktischen Gebrauch eine ausgewählt. Es kann den Schülern mitgeteilt werden, daß in der Mathematik Vektoren oft nicht nur als geometrische, sondern auch als arithmetische Größen aufgefaßt werden. Diesen arithmetischen Größen sind gerichtete Strecken dann etwa in der Weise zugeordnet wie den Zahlen die Punkte der Zahlengeraden. Die Punkte werden den reellen Zahlen umkehrbar eindeutig zugeordnet, eine ähnliche Zuordnung besteht dann zwischen den Vektoren und den gerichteten Strecken. Den Schülern ist bekannt, daß bei der Darstellung von Geschwindigkeiten und Kräften von Vektoren gesprochen wird. Auf die eigentlich hier vorliegende Unkorrektheit kann hingewiesen werden.

Es werden folgende Symbole eingeführt: $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; ... $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; ... Auf Feldvektoren, linien- und ortsgebundene Vektoren wird hingewiesen; es genügt hier, ein Magnet- oder Strömungsfeld zu skizzieren. Die nicht gebundenen Vektoren heißen „freie Vektoren". Im Gegensatz zum ortsgebundenen Vektor soll der „Ortsvektor" Repräsentant eines freien Vektors sein; er ist einer aus der Schar der vielen zueinander parallelen Ortsvektoren.

Die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}$ sind die drei Teilvektoren auf den Koordinatenachsen, die addiert $\mathfrak{v}$ ergeben. Die für die Translationen erarbeiteten Gesetzmäßigkeiten werden auf die Vektoren übertragen. Nach Einführung der allgemeinen Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$ und der speziellen Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$; $\mathfrak{j}$; $\mathfrak{k}$ können wir die Komponentendarstellung und die Koordinatendarstellung erarbeiten:

$$\mathfrak{v} = |\mathfrak{v}|\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{v}} = v\, \mathfrak{e}_{\mathfrak{v}}$$

$$\mathfrak{v}_x = x\,\mathfrak{i};\quad \mathfrak{v}_y = y\,\mathfrak{j};\quad \mathfrak{v}_z = z\,\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{v} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}.$$

Die Koordinaten eines Vektors legen diesen fest, jedem Raumpunkt läßt sich ein Vektor zuordnen. Ein Vektor im Raum ist durch drei Skalare bestimmt.

Ein Vektor $\mathfrak{v}$ ist dann und nur dann gleich dem Nullvektor, wenn alle drei Koordinaten des Vektors gleich 0 sind. Zwei Vektoren sind einander gleich, wenn sie in allen entsprechenden Koordinaten übereinstimmen:

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2,\ \text{wenn}\ x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2.$$

Die Nachweise der Gültigkeit des Kommutativ- und Assoziativgesetzes für die Addition und der Distributivgesetze für die Vielfachbildung könnten jetzt Schülerübungen sein.

Es wird die Länge eines Vektors $\mathfrak{v}$ bestimmt (Abb. 13):

$$|\mathfrak{v}| = v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

denn v ist die Länge der Raumdiagonale in dem Quader mit den Seiten x; y und z.

Wir stellen nun die Frage nach den Winkeln, die $\mathfrak{v}$ mit den Achsen des Systems bildet:

$$\sphericalangle(\mathfrak{v};\mathfrak{i}) = \alpha;\quad \sphericalangle(\mathfrak{v};\mathfrak{j}) = \beta;\quad \sphericalangle(\mathfrak{v};\mathfrak{k}) = \gamma.$$

Aus Abb. 6 folgt:

$$\cos\alpha = \frac{x}{v};\quad \cos\beta = \frac{y}{v};\quad \cos\gamma = \frac{z}{v}.$$

Wir quadrieren, addieren und erhalten:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{v^2} = 1.$$

Allgemein gilt: Die Quadratsumme der Richtungskosinus ist gleich 1:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Die Richtungskosinus sind ausführlich:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

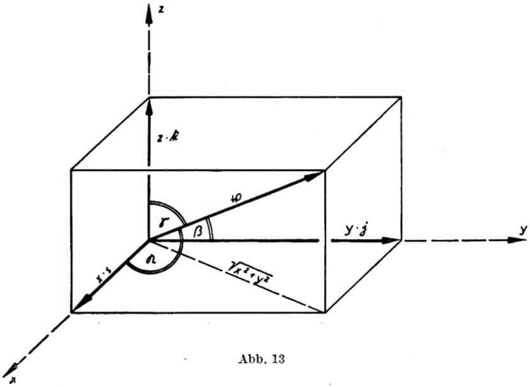

Abb. 13

Für die Koordinaten gilt:

$$x = |\mathfrak{v}|\cos\alpha; \quad y = |\mathfrak{v}|\cos\beta; \quad z = |\mathfrak{v}|\cos\gamma.$$

Hieraus folgt eine weitere wichtige Darstellung für den Vektor:

$$\mathfrak{v} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k} = |\mathfrak{v}|\,(\cos\alpha\,\mathfrak{i} + \cos\beta\,\mathfrak{j} + \cos\gamma\,\mathfrak{k}).$$

Für den Einheitsvektor in der $\mathfrak{v}$-Richtung gilt hiermit:

$$\mathfrak{e}_{\mathfrak{v}} = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \cos\beta\,\mathfrak{j} + \cos\gamma\,\mathfrak{k}.$$

Beispiele folgender Art werden angeschlossen:
Ein Vektor $\mathfrak{v}$ hat die Länge $v = 9$. Von seinen Koordinaten sind $x = -4$ und $y = 8$ gegeben. Wie heißt die z-Koordinate, und wie lauten die Richtungskosinus des Vektors $\mathfrak{v}$?

$$v = |\mathfrak{v}| = 9 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{16+64+z^2};$$

$$81 = 16 + 64 + z^2;$$

$$z = \pm 1.$$

$$\cos\alpha = -\frac{4}{9}; \quad \cos\beta = \frac{8}{9}; \quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{9}.$$

Als Anwendung der Vektorrechnung kann folgendes Beispiel gebracht werden. Es zeigt deutlich die Vorteile der Vektorrechnung: knappe, übersichtliche Darstellung bei scharfer mathematischer Schlußfolgerung.

Es ist zu beweisen, daß die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt S schneiden und daß S jede Seitenhalbierende im Verhältnis $m : n = 2 : 1$ teilt (Abb. 14).

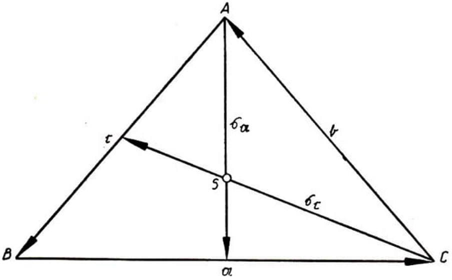

Abb. 14

Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}_\mathfrak{c}$ sei S, die Teilstrecken der Seitenhalbierenden von den Eckpunkten des Dreiecks bis zum Punkt S sollen $\lambda\,\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ und $\mu\,\mathfrak{s}_\mathfrak{c}$ heißen. Hierbei sind λ und μ zunächst beliebige Koeffizienten. Aus Abb. 14 folgen die Beziehungen:

$$\mu \cdot \mathfrak{s}_\mathfrak{c} - \lambda \cdot \mathfrak{s}_\mathfrak{a} = \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{s}_\mathfrak{c} = -\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{c}}{2}; \quad \mathfrak{s}_\mathfrak{a} = \mathfrak{c} + \frac{\mathfrak{a}}{2}; \quad \mathfrak{b} = -\mathfrak{a} - \mathfrak{c}.$$

In der ersten Gleichung ersetzen wir die Vektoren $\mathfrak{s}_\mathfrak{c}$, $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke der übrigen Gleichungen:

$$\mu\left(-\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{c}}{2}\right) - \lambda\left(\mathfrak{c} + \frac{\mathfrak{a}}{2}\right) = -\mathfrak{a} - \mathfrak{c}$$

oder

$$-\mathfrak{a}\,\mu - \mathfrak{a}\,\frac{\lambda}{2} + \mathfrak{a} = -\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\,\frac{\mu}{2} + \mathfrak{c}\,\lambda.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{a}\left(1 - \mu - \frac{\lambda}{2}\right) = \mathfrak{c}\left(\lambda + \frac{\mu}{2} - 1\right).$$

Nach Division dieser Gleichung durch $\left(1 - \mu - \frac{\lambda}{2}\right)$ erhalten wir einen Ausdruck der Form $\mathfrak{a} = k \cdot \mathfrak{c}$, wobei k eine Konstante ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, denn diese Gleichung sagt aus, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ das k-fache des Vektors $\mathfrak{c}$ ist, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ die Richtung des Vektors $\mathfrak{c}$ hat. Vorausgesetzt waren aber verschiedene Richtungen der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$. Bei Division der Gleichung durch

$\left(\lambda + \frac{\mu}{2} - 1\right)$ stoßen wir auf den gleichen Widerspruch. Die Widersprüche können nur durch $1 - \mu - \frac{\lambda}{2} = 0$ und $-1 + \lambda + \frac{\mu}{2} = 0$ gelöst werden. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich λ und μ bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} 2 - 2\mu - \lambda &= 0 \\ -1 + \frac{\mu}{2} + \lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \nearrow\!\!\searrow\; 1 - \frac{3}{2}\mu = 0$$

$$\mu = \frac{2}{3}.$$

$$\left.\begin{aligned} 1 - \mu - \frac{\lambda}{2} &= 0 \\ -2 + \mu + 2\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \nearrow\!\!\searrow\; 1 - \frac{3}{2}\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{2}{3}.$$

Die Koeffizienten λ und μ sind einander gleich: $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$. Daraus folgt:

$$\lambda : (1 - \lambda) = \mu : (1 - \mu) = m : n = \frac{2}{3} : \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1.$$ [1]

3. Das Skalarprodukt

In der Physik werden Definitionen zahlreicher Begriffe gefordert. Oft wird zum Beispiel kurz formuliert: „Arbeit gleich Weg *mal* Kraft in Wegrichtung". Diese

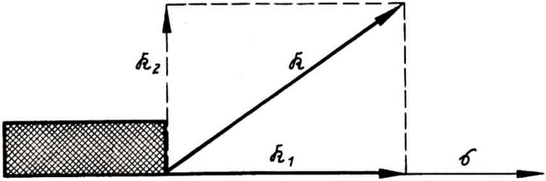

Abb. 15

und ähnliche Anforderungen in den Naturwissenschaften sind es, die zur Einführung eines „Produkts" zweier Vektoren zwingen. Das Produkt selbst, in unserem Fall die Arbeit, ist kein Vektor, sondern eine skalare Größe. Deshalb wird es als „skalares Produkt" bezeichnet. Es soll wieder von der Anschauung ausgegangen werden, indem wir uns bei der Definition der Produktbildung nach dem Sachverhalt unseres Beispieles richten (Abb. 15). Die Komponente in der Weg-

[1] Weitere Aufgaben sind von Dr. J. Kusch in „Mathematik und Physik in der Schule" 1960, Heft 2, S. 73ff. angegeben.

richtung ist gleich der Größe der Kraft $\mathfrak{K}$, multipliziert mit dem Kosinus des von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{s}$ eingeschlossenen Winkels. Die geleistete Arbeit ist also:

$$A = K \cdot s \cos(\mathfrak{K}; \mathfrak{s}).$$

Allgemein wird definiert:

Das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist das Produkt aus der Länge des einen Vektors und der Länge der Projektion des anderen auf die Richtung des ersten:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a \cdot b \cdot \cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}).$$

Das skalare Produkt heißt auch das innere Produkt oder Punktprodukt (nach der Sprechweise „$\mathfrak{a}$ punkt $\mathfrak{b}$").

Es werden nun eine Reihe von Folgerungen erarbeitet:

1. Eine Division wie bei Zahlen gibt es nicht!
   Aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = c$ ist $\mathfrak{x}$ nicht eindeutig bestimmbar. Alle Vektoren mit gleicher Projektion auf $\mathfrak{a}$ sind Lösungsvektoren.
2. Aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ folgt nicht notwendig, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, es bleibt vielmehr die dritte Möglichkeit, daß $\cos(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = 0$, das heißt $\sphericalangle(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) = 90°$. Es ergibt sich hieraus die wichtige Beziehung für die Orthogonalität zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

$$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \nearrow\!\!\searrow \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0; \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0 \nearrow\!\!\searrow \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$$
$$\text{mit } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o},\ \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}.$$

Die folgenden Erkenntnisse können von den Schülern weitgehend selbständig erarbeitet werden.

3. Es gilt das Kommutativgesetz: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$.
4. Ein Assoziativgesetz gibt es nicht, da es kein skalares Produkt von drei Vektoren gibt.
5. Es gilt das Distributivgesetz: $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$.
   Der geometrische Nachweis bereitet den Schülern keine Schwierigkeit.
6. Die skalaren Produkte der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}; \mathfrak{j}; \mathfrak{k}$ werden gebildet:

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 1 \quad (\text{wegen } \cos 0° = 1)$$
$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} = 0 \quad (\text{wegen } \cos 90° = 0).$$

7. Das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ wird in Koordinatenschreibweise ermittelt.
   Mit
   $$\mathfrak{v}_1 = x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} + z_1\,\mathfrak{k}$$
   und
   $$\mathfrak{v}_2 = x_2\,\mathfrak{i} + y_2\,\mathfrak{j} + z_2\,\mathfrak{k}$$
   wird
   $$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$
8. Das skalare Produkt eines Vektors $\mathfrak{v}$ mit sich selbst ergibt:

$$\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} = x^2 + y^2 + z^2 = v^2, \text{ also } |\mathfrak{v}| = v = \sqrt{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}}.$$

9. Die Bestimmung des von zwei Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ eingeschlossenen Winkels ergibt:
   $$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos\varphi$$
   $$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2}{v_1 \cdot v_2};$$

oder ausführlich:

$$\cos\varphi = \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\,.$$

Sind die Vektoren in der Darstellungsweise:

$$\mathfrak{v}_1 = v_1\,(\cos\alpha_1\cdot\mathfrak{i} + \cos\beta_1\cdot\mathfrak{j} + \cos\gamma_1\cdot\mathfrak{k});$$
$$\mathfrak{v}_2 = v_2\,(\cos\alpha_2\cdot\mathfrak{i} + \cos\beta_2\cdot\mathfrak{j} + \cos\gamma_2\cdot\mathfrak{k})$$

gegeben, so gilt:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2.$$

Es soll als Beispiel angeschlossen werden:

Der Angriffspunkt einer Kraft $\mathfrak{K}$ wird vom Punkt A (2; 5) verschoben bis zum Punkt B (8; 3). Welche Arbeit wird geleistet, wenn $|\mathfrak{K}| = K = 5$ kp und wenn $\mathfrak{K}$ die Richtung des Vektors $\mathfrak{r} = 6\,\mathfrak{i} + \frac{9}{2}\mathfrak{j}$ hat (Abb. 16)?

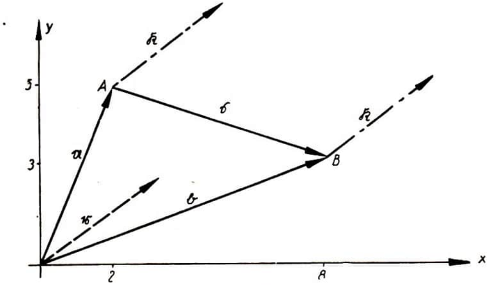

Abb. 16

Den Punkten A und B werden Vektoren zugeordnet:

$$\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j};\ \ \mathfrak{b} = 8\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}.$$

Dann lautet der Vektor des Weges von A nach B:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} = 6\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j}.$$

Der Kraftvektor heißt mit unbestimmten Koordinaten:

$$\mathfrak{K} = x_k\cdot\mathfrak{i} + y_k\cdot\mathfrak{j} \qquad\qquad x_k = \frac{4}{3}\,y_k$$

$$K = |\mathfrak{K}| = 5 = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \qquad\qquad \frac{25}{9}\,y_k^2 = 25$$

$$x_k^2 + y_k^2 = 25$$

$$x_k : y_k = 6 : \frac{9}{2} = 4 : 3 \qquad\qquad y_k = \pm\,3;\ \ x_k = \pm\,4.$$

Da die Richtung von $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{r} = 6\,\mathfrak{i} + \frac{9}{2}\,\mathfrak{j}$ festgelegt ist, müssen für x_k und y_k die positiven Zahlen $+\,4$ und $+\,3$ gewählt werden, so daß gilt:

$$\mathfrak{K} = 4\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$$
$$A = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s} = 24 - 6 = 18\,.$$

Die gesuchte Arbeit ist das skalare Produkt aus $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{s}$ und beträgt 18 kpm.

4. Das Vektorprodukt

Mit einer einzigen Art der „Produktbildung" kommt die Vektorrechnung nicht aus. Es sei wiederum ein Beispiel aus der Physik zugrunde gelegt.

Ein Körper sei um den Punkt 0 drehbar, im Punkt P greife an diesem Körper eine Kraft $\mathfrak{K}$ an (Abb. 17). Dem Punkt P ordnen wir den von 0 ausgehenden Ortsvektor $\mathfrak{r}$ zu. Der Körper erfährt bei Einwirken der Kraft ein Drehmoment, das bestimmt werden soll. Das Ergebnis muß richtungsabhängig, also wieder ein Vektor sein.

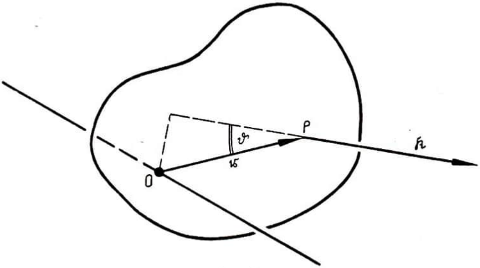

Abb. 17

Aus der Mechanik ist bekannt: Drehmoment gleich Kraft mal Kraftarm. Der Kraftarm wird dargestellt durch das vom Drehpunkt auf die Richtung der Kraft gefällte Lot. Seine Länge ist gleich dem Produkt aus der Länge des Vektors $\mathfrak{r}$ und dem Sinus des von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{K}$ eingeschlossenen Winkels ϑ. Dem Drehmoment wird ein Vektor zugeordnet, dessen absoluter Betrag gleich dem Produkt aus Kraft und Kraftarm ist und der so in Richtung der Drehachse zeigt, daß von seiner Spitze aus die Drehung im Gegenuhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn, erfolgt. Ist $\mathfrak{e}_{\mathfrak{M}}$ der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse in der eben beschriebenen Weise, so lautet die Formel für das Drehmoment:

$$\mathfrak{M} = (r \cdot K \cdot \sin\vartheta)\,\mathfrak{e}_{\mathfrak{M}}\,.$$

Nach diesen Festlegungen wird die zweite Art des Produktes aus zwei Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, die den Winkel ϑ miteinander einschließen, definiert. Das Ergebnis ist ein Vektor und heißt Vektorprodukt, äußeres Produkt oder Kreuzprodukt (nach der Sprechweise „$\mathfrak{v}_1$ kreuz $\mathfrak{v}_2$").

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ ist gleich dem Vektor, der soviel Längeneinheiten lang ist, wie das von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ gebildete Parallelogramm Flächeneinheiten hat, und der auf der Ebene dieses Parallelogrammes in der Weise senkrecht steht, daß die kürzeste Drehung von $\mathfrak{v}_1$ in die Richtung von $\mathfrak{v}_2$ von seiner Spitze aus als mathematisch positive Drehung erscheint (Abb. 18):

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 = [v_1 \cdot v_2 \cdot \sin(\mathfrak{v}_1; \mathfrak{v}_2)]\, \mathfrak{e}_\mathfrak{v}.$$

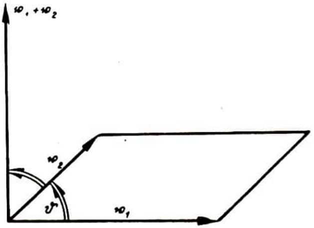

Abb. 18

Auch die Folgerungen aus dem Vektorprodukt werden zum größten Teil von den Schülern in Hausaufgaben oder in Schülerübungen während des Unterrichts erarbeitet:

1. Das Kommutativgesetz gilt nicht.

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \neq \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -[\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}].$$

2. Es gilt : $(n\,\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = n\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \times (n\,\mathfrak{b})$.
3. Es gilt das Distributivgesetz: $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$.
4. Eine Division als Umkehrung des Vektorproduktes existiert nicht. Aus der Gleichung $\mathfrak{a} \times \mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ ist $\mathfrak{x}$ nicht eindeutig bestimmbar. Jeder Vektor $\mathfrak{x}$ mit gleicher Projektion auf die in 0 auf $\mathfrak{a}$ in der Parallelogrammebene errichtete Senkrechte ist Lösungsvektor.
5. Die Bedingung für die Parallelität zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ lautet:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \text{ mit } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o} \text{ und } \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o} \quad (\sin\vartheta = 0;\ \vartheta = 0^\circ).$$
$$\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o};\ \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \Rightarrow \mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b} \quad (\text{mit } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o};\ \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}).$$

Es gilt stets:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}.$$

6. Die Vektorprodukte der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$; $\mathfrak{j}$; $\mathfrak{k}$ werden bestimmt:

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{o} \quad (\sin\vartheta = 0);$$
$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k};\ \mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{i};\ \mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j};$$
$$\mathfrak{j} \times \mathfrak{i} = -\mathfrak{k};\ \mathfrak{k} \times \mathfrak{j} = -\mathfrak{i};\ \mathfrak{i} \times \mathfrak{k} = -\mathfrak{j}.$$

7. Die Berechnung des Vektorprodukts der Vektoren

$$\mathfrak{v}_1 = x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} + z_1\,\mathfrak{k} \text{ und } \mathfrak{v}_2 = x_2\,\mathfrak{i} + y_2\,\mathfrak{j} + z_2\,\mathfrak{k}$$

in Koordinatenschreibweise ergibt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 &= (x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} + z_1\,\mathfrak{k}) \times (x_2\,\mathfrak{i} + y_2\,\mathfrak{j} + z_2\,\mathfrak{k}) \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,\mathfrak{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,\mathfrak{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Die Richtigkeit der Folgerungen 1 bis 3 ist geometrisch leicht nachzuweisen:

1. Ungültigkeit des Kommutativgesetzes (Abb. 19a und b):

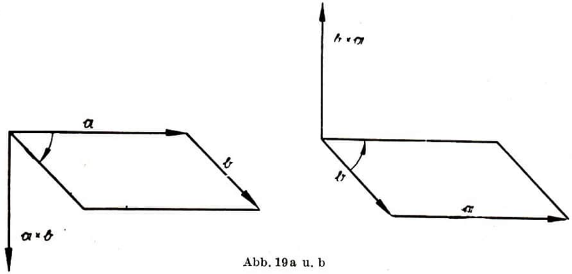

Abb. 19a u. b

2. Gültigkeit des zweiten Gesetzes (Abb. 20a und b):
   Die Richtung des Produktvektors bleibt erhalten. Beim Ver-n-fachen einer Parallelogrammseite ver-n-facht sich der Flächeninhalt.

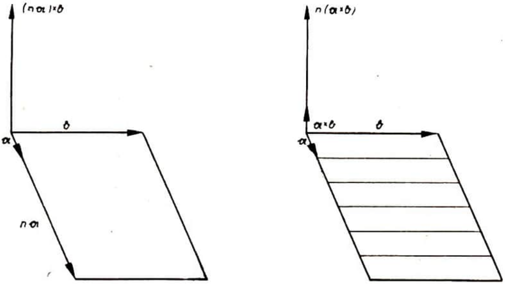

Abb. 20a u. b

3. Gültigkeit des Distributivgesetzes (Abb. 21):
   Das Parallelogramm, gebildet aus $\mathfrak{a}$ und $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$, ist flächengleich der Summe der Parallelogramme, gebildet aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$.

Folgendes Beispiel sei durchgerechnet (Abb. 22):
Ein Körper sei um den Punkt $P_0\,(3; 2; 1)$ drehbar. Im Punkt $P_1\,(6; -4; -1)$ greife an diesem Körper die Kraft $\mathfrak{K} = 2\,\mathfrak{i} + 5\,\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ an. Es soll der Einheits-

vektor in Richtung des Drehmoments berechnet werden. Gesucht ist ferner die absolute Größe des Momentes.

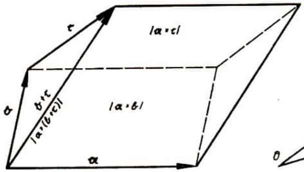

Abb. 21

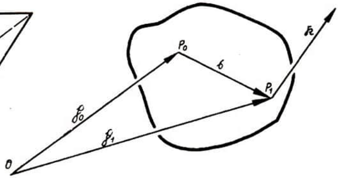

Abb. 22

Den beiden Punkten des starren Körpers ordnen wir Vektoren zu:

$$\mathfrak{p}_0 = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k};$$
$$\mathfrak{p}_1 = 6\mathfrak{i} - 4\mathfrak{j} - \mathfrak{k}.$$

Der Vektor $\mathfrak{s}$, der vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft führt, ist

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_0 = 3\mathfrak{i} - 6\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}.$$

Das Moment erhalten wir durch Bildung des Vektorproduktes:

$$\mathfrak{M} = 4\mathfrak{i} - 7\mathfrak{j} + 27\mathfrak{k}.$$

Die absolute Größe wird

$$M = \sqrt{16 + 49 + 729} \approx 28{,}14.$$

Wir bestimmen die Richtungskosinus:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{794}}; \quad \cos\beta = \frac{-7}{\sqrt{794}}; \quad \cos\gamma = \frac{27}{\sqrt{794}}.$$

Hiermit ergibt sich der Einheitsvektor in Richtung der Drehachse:

$$\mathfrak{e}_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{\sqrt{794}}(4\mathfrak{i} - 7\mathfrak{j} + 27\mathfrak{k}).$$

5. Anwendungen der Vektorrechnung in der Geometrie

Aus der Fülle der Anwendungen sollen einige Beispiele durchgerechnet werden.

1. Gesucht sind die Koordinaten des Punktes P, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis λ teilt (Abb. 23).

Den Endpunkten der Strecke $\overline{AB}$ mit $A(x_a; y_a; z_a)$ und $B(x_b; y_b; z_b)$ ordnen wir Vektoren zu:

$$\mathfrak{a} = x_a\,\mathfrak{i} + y_a\,\mathfrak{j} + z_a\,\mathfrak{k};$$
$$\mathfrak{b} = x_b\,\mathfrak{i} + y_b\,\mathfrak{j} + z_b\,\mathfrak{k}.$$

Der Vektor $\mathfrak{r}$ teile die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $\lambda : 1$.

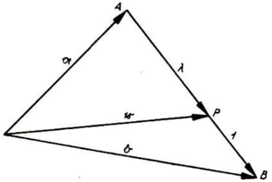

Abb. 23

Aus Abb. 23 folgt:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}; \; \overrightarrow{PB} = \mathfrak{b} - \mathfrak{r}$$

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{a} = \lambda\,(\mathfrak{b} - \mathfrak{r})$$

oder

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{a} + \lambda\,\mathfrak{b}}{1 + \lambda}.$$

Wir heben hervor, daß diese eine Vektorgleichung drei andere Gleichungen ersetzt:

$$x = \frac{x_a + \lambda \cdot x_b}{1 + \lambda}; \; y = \frac{y_a + \lambda \cdot y_b}{1 + \lambda}; \; z = \frac{z_a + \lambda \cdot z_b}{1 + \lambda}.$$

Welcher Punkt teilt die Strecke $\overline{AB}$ mit $A(2; -3; 8)$ und $B(2; 11; -6)$ im Verhältnis $\lambda = 3:4$?

$$\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + 8\mathfrak{k}; \; \mathfrak{b} = 2\mathfrak{i} + 11\mathfrak{j} - 6\mathfrak{k}.$$

$$\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}.$$

Der gesuchte Teilpunkt ist $P(2; 3; 2)$.

2. Es ist die Gleichung der Geraden zu bestimmen, die durch das vom Ursprung auf die Gerade gefällte Lot p und den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ in Richtung dieses Lotes gegeben ist.

Es muß eine Bedingung dafür gesucht werden, daß die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{r}$ auf dieser Geraden liegen. Wir erkennen aus Abb. 24, daß alle Vektoren, deren Projektionen auf die Richtung von $\mathfrak{n}$ gleich p sind, dieser Bedingung genügen. Diese Projektionen erhalten wir aber durch die skalaren Produkte der Vektoren $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{n}$. Die Gleichung der Geraden ist:

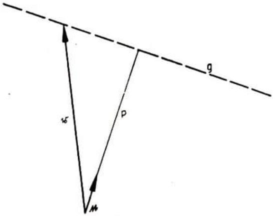

Abb. 24

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n} = p.$$

Diese Gleichung wird als die *Hessesche Normalform* der Geradengleichung bezeichnet.

Sie ermöglicht es, auf einfache Weise den Abstand eines Punktes P_1 von einer gegebenen Geraden zu bestimmen (Abb. 25). Der zu P_1 gehörige Ortsvektor sei $\mathfrak{r}_1$. Multiplizieren wir diesen Vektor $\mathfrak{r}_1$ skalar mit $\mathfrak{n}$, so erhalten wir die Projektion von $\mathfrak{r}_1$ auf die Richtung von $\mathfrak{n}$. Die Länge dieser Projektion ist aber gleich der Summe aus der Länge des gesuchten Abstandes d und der Länge des Lotes p vom Ursprung auf die Gerade:

$$d = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{n} - p.$$

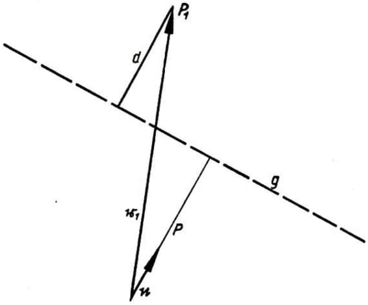

Abb. 25

3. Welchen Abstand hat der Punkt $P_1(12; 8)$ von der Geraden, die durch ihren Abstand $p = 6$ vom Ursprung und durch den Winkel $\alpha = 30°$, den die Abstandsgerade mit der x-Achse bildet, gegeben ist?

$$\mathfrak{r}_1 = 12\mathfrak{i} + 8\mathfrak{j}.$$

Von $\mathfrak{n}$ sind die Richtungswinkel $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$ bekannt.

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,; \quad \cos\beta = \frac{1}{2}$$

$$\mathfrak{n} = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \cos\beta\,\mathfrak{j} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{j}$$

$$\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{n} = 6\sqrt{3} + 4.$$

Der gesuchte Abstand des Punktes P_1 von der Geraden ist

$$d = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{n} - p = 6\sqrt{3} + 4 - 6;$$

das sind angenähert 8,392 Längeneinheiten.

4. Die Hessesche Normalform spielt auch im dreidimensionalen Raum eine große Rolle. Hier gibt sie die Gleichung einer Ebene an. Der Abstand einer solchen Ebene vom Ursprung sei p, $\mathfrak{n}$ sei der Einheitsvektor vom Ursprung in Richtung des Abstandslotes.
Welchen Abstand hat der Punkt $P_1(10; 15; 12)$ von der Ebene, die durch das Dreieck mit den Eckpunkten $A(7; -2; 3)$; $B(-5; 1; 3)$; $C(3; 3; 1)$ gegeben ist (Abb. 26)?

Wir bestimmen zunächst den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ vom Ursprung in Richtung des vom Ursprung auf die Ebene gefällten Lotes; $\mathfrak{n}$ steht senkrecht auf der Ebene des Dreiecks und somit auch senkrecht auf den Dreiecksseiten $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$. Die skalaren Produkte aus einer Dreiecksseite mit diesem Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ müssen verschwinden.

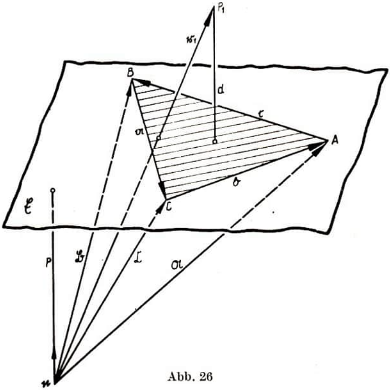

Abb. 26

Wir setzen allgemein an:

$$\mathfrak{n} = x_n\,\mathfrak{i} + y_n\,\mathfrak{j} + z_n\,\mathfrak{k}.$$

Den Punkten des Dreiecks werden Vektoren zugeordnet:

$$\mathfrak{A} = 7\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k};\ \mathfrak{B} = -5\mathfrak{i} + 1\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k};\ \mathfrak{C} = 3\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 1\mathfrak{k}.$$

Für den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ gelten die Bedingungen:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n} = 0;\ \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n} = 0;\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1.$$

Es gilt ferner:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{C} - \mathfrak{B} = 8\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k};$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{A} - \mathfrak{C} = 4\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}.$$

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{n} = 8x_n + 2y_n - 2z_n = 0;$$

$$\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n} = 4x_n - 5y_n + 2z_n = 0.$$

$$12x_n - 3y_n = 0;\quad 4x_n = y_n;$$

$$2z_n = 8x_n + 8x_n = 16x_n;\quad z_n = 8x_n;$$

$$x_n^2 + 16x_n^2 + 64x_n^2 = 1;$$

$$81x_n^2 = 1;$$

$$x_n = \frac{1}{9};\ y_n = \frac{4}{9};\ z_n = \frac{8}{9}.$$

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{9}\mathfrak{i} + \frac{4}{9}\mathfrak{j} + \frac{8}{9}\mathfrak{k}.$$

An dieser Stelle sollten die Schüler überprüfen, ob die Länge von $\mathfrak{n}$ wirklich gleich 1 ist und ob $\mathfrak{n}$ wirklich senkrecht auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ steht.

Die Projektion eines Vektors $\mathfrak{r}$ vom Ursprung zu einem Punkt der Ebene auf die $\mathfrak{n}$-Richtung ergibt die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Ebene.

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{n} = \frac{7}{9} - \frac{8}{9} + \frac{24}{9} = \frac{23}{9} = p\,.$$

Der Abstand des Punktes P_1 von der Ebene (mit $\mathfrak{r}_1 = 10\,\mathfrak{i} + 15\,\mathfrak{j} + 12\,\mathfrak{k}$) ist also

$$d = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{n} - p$$
$$d = \frac{10}{9} + \frac{60}{9} + \frac{96}{9} - \frac{23}{9} = \frac{143}{9}\,;$$

das sind also angenähert 15,89 Längeneinheiten.

DISKUSSIONSBEITRAG NR. 3

Wolfgang Friedrich

Die Direktive für den Mathematikunterricht in der Klasse 12 des B-Zweiges der erweiterten Oberschule im Schuljahr 1960/61 schreibt eine Einführung in die Vektorrechnung vor.

Die Fachlehrer der Rudolf-Hildebrand-Schule Markkleeberg haben ihre in den beiden Schuljahren 1959/60 und 1960/61 bei der unterrichtlichen Behandlung dieses Stoffgebiets gesammelten Erfahrungen zusammengestellt, um diese auch anderen Kollegen mitzuteilen.

Im folgenden möchte ich eine Darstellung der Stoffauswahl geben, versehen mit einigen methodischen Erläuterungen. Auch sollen die Aufgaben, die verwendet worden sind, zur Anregung dienen, an einzelnen Stellen die Betrachtungen noch weiter auszubauen beziehungsweise zu begrenzen.

In der zeitlichen Aufgliederung hielten wir uns an den Lehrplan, der 40 Stunden vorsah; es hätte sogar etwas mehr Zeit zur Übung zur Verfügung stehen können.

In der Auswahl der Problemstellung und der Übungsaufgaben stand das mathematische Vorhaben im Vordergrund. Da an unserer Schule Mathematik- und Physikunterricht nicht in einer Hand liegen, ist diese Auffassung naheliegend.

1. Der Vektorbegriff

Bei der Einführung gingen wir von der analytischen Geometrie aus, die mit den Grundgebilden Punkt und Gerade arbeitet. In der neueren Zeit ist es üblich geworden, Punkt und Vektor als Grundgebilde zu verwenden. Der Vektorbegriff wurde am Verschiebungsmodell eingeführt und folgendermaßen definiert:

I. *Ein Vektor $\mathfrak{a}$ ordnet jedem Punkt P des Raumes genau einen Bildpunkt Q zu, den wir mit $Q = P + \mathfrak{a}$ bezeichnen* (Abb. 27).

II. *Es gibt zu zwei vorgegebenen Punkten P und Q genau einen Vektor $\mathfrak{a}$, für den $P + \mathfrak{a} = Q$ ist. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{a} = Q - P$* (Abb. 28).

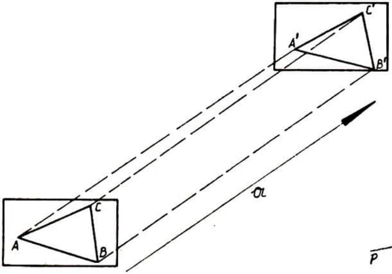

Abb. 27

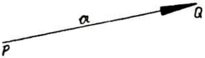

Abb. 28

Durch das Verschiebungsmodell entsteht die Vorstellung, daß der Vektor eine Größe ist, die definiert ist durch Betrag, Richtung und Durchlaufsinn. Fallen die Punkte P und Q zusammen, so entsteht durch Definition der Nullvektor.

2. Die Vektoraddition

Als erste Verknüpfung der Vektoren wird die Vektoraddition behandelt. Hierzu bedient man sich des Vektorparallelogramms.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= Q - P \\ \mathfrak{b} &= R - Q \qquad\qquad (Q - P) + (R - Q) = R - P\,. \\ \mathfrak{c} &= R - P \end{aligned}$$

Eigenschaft: *Zu zwei beliebigen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ existiert genau ein Vektor $\mathfrak{c}$ derart, daß für einen beliebigen Punkt P*

$$(P + \mathfrak{a}) + \mathfrak{b} = P + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

ist.

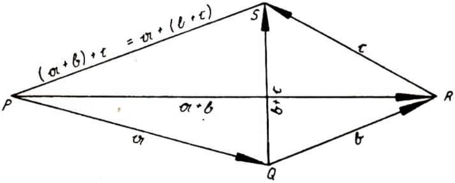

Abb. 29

Der Vektor $\mathfrak{c}$ *heißt die Summe der Vektoren* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$.

Hier könnte eventuell noch einmal auf das Verschiebungsmodell zurückgegriffen werden. Vor allem aber läßt sich hieraus das *Assoziativgesetz* der Vektoraddition herleiten. Zur Bestätigung dieser Gesetzmäßigkeiten halte ich sowohl den geometrischen als auch den rechnerischen Beweis für angebracht.

Der geometrische Beweis ergibt sich aus Abb. 29.

Der rechnerische Beweis sieht folgendermaßen aus:

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$$

$$[(Q-P)+(R-Q)]+(R-P)=(Q-P)+[(R-Q)+(R-P)].$$

Nach Auflösen der Klammern ergibt sich die Gleichheit.

Ebenso gilt in der Vektorrechnung für die Addition das *Kommutativgesetz.*

3. Vervielfachung von Vektoren

Im folgenden wird die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar durch nachstehende Überlegung dargestellt:

Es sei $\mathfrak{a}=Q-P$ eine nicht identische Verschiebung und λ eine beliebige reelle Zahl. Dann ist $\lambda\,\mathfrak{a}=\lambda\,(Q-P)$ eine Streckung, eine Stauchung beziehungsweise eine Umkehr des Durchlaufsinns, je nachdem $|\lambda| \gtreqless 1$ beziehungsweise $\lambda<0$ ist (Abb. 30).

Die Aussagen werden von den Schülern geometrisch beziehungsweise rechnerisch bewiesen:

$$1\,\mathfrak{a}=\mathfrak{a};$$

$$\lambda\,(\mu\,\mathfrak{a})=(\lambda\,\mu)\,\mathfrak{a};$$

$$(\lambda+\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda\,\mathfrak{a}+\mu\,\mathfrak{a};$$

$$\lambda\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\lambda\,\mathfrak{a}+\lambda\,\mathfrak{b}.$$

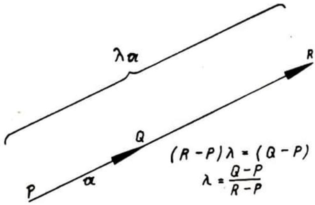

Abb. 30

Als Beispiel soll die Beziehung $(\lambda+\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda\,\mathfrak{a}+\mu\,\mathfrak{a}$ rechnerisch bewiesen werden:

Dazu führen wir ein:
$$\lambda\,\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \text{ und } \mu\,\mathfrak{a}=\mathfrak{c}.$$

Dann ist
$$\lambda\,(Q-P)=(R-P) \text{ und } \mu\,(Q-P)=(S-P)$$

oder
$$\lambda=\frac{(R-P)}{(Q-P)} \text{ und } \mu=\frac{(S-P)}{(Q-P)}.$$

Betrachten wir nun die Gleichung
$$(\lambda+\mu)\,\mathfrak{a}=\mathfrak{b}+\mathfrak{c},$$

so muß geschrieben werden:
$$\left[\frac{(R-P)}{(Q-P)}+\frac{(S-P)}{(Q-P)}\right](Q-P)=(R-P)+(S-P),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

4. Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren

Um mit den eingeführten Begriffen wirklich arbeiten zu können, ist es notwendig, die Koordinatenschreibweise für Vektoren einzuführen. Dabei stützen wir uns auf die analytische Geometrie der Ebene, wo jeder Punkt durch die Angabe eines Koordinatenpaares eindeutig bestimmt ist (Abb. 31).

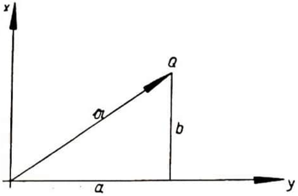

Abb. 31

Wenn beispielsweise der Punkt Q die Koordinaten (a, b) hat, so bedeutet das doch, daß a ein Vielfaches der Einheit auf der x-Achse und daß b ein Vielfaches der Einheit auf der y-Achse ist. Die Einheit auf der x-Achse bezeichnen wir als Vektor $\mathfrak{e}_1$, die auf der y-Achse als Vektor $\mathfrak{e}_2$. So kann der Vektor $\mathfrak{a}$ nach dem Punkt Q auch dargestellt werden durch die Gleichung:

$$\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{e}_1 + b\,\mathfrak{e}_2.$$

Diese Darstellung nennen wir die Komponentendarstellung eines Vektors. Ebenso kann

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Hier ist die Bezugnahme auf die orthogonalen Basiseinheitsvektoren äußerlich nicht mehr sichtbar, steht aber unausgesprochen dahinter. Diese Art der Darstellung heißt Koordinatenschreibweise.

Der Vektor $\mathfrak{a}$ kann auch aus zwei beliebigen anderen Vektoren zusammengesetzt gedacht werden; das führt dann zum schiefwinkligen Koordinatensystem. Wichtig ist, die Schüler erkennen zu lassen, daß das Koordinatensystem nicht von vornherein gegeben ist, sondern der jeweiligen Aufgabenstellung angepaßt werden kann.

Eine Verallgemeinerung für den dreidimensionalen Anschauungsraum bereitet keine Schwierigkeiten. Ein beliebiger Vektor $\mathfrak{a}$ kann in Komponentendarstellung gegeben sein:

$$\mathfrak{a} = a_x\,\mathfrak{e}_1 + a_y\,\mathfrak{e}_2 + a_z\,\mathfrak{e}_3:$$

oder er erscheint in Koordinatenschreibweise:

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Für den dreidimensionalen Raum muß die Darstellung eines Vektors intensiv geübt werden. Schülerzeichnungen oder Veranschaulichungen an einem Stäbchenmodell sind hierbei unerläßlich. Das Vorstellungsvermögen unserer Schüler für den dreidimensionalen Raum ist oft viel zuwenig entwickelt, und wir sollten jede Gelegenheit nützen, um diesem Übel abzuhelfen.

Bei der Einführung der Koordinatenschreibweise haben wir zwei verschiedene mathematische Objekte durch ein und dasselbe Symbol dargestellt: einen Punkt und den zu diesem Punkt hinweisenden Vektor. Um diese Inkorrektheit zu beseitigen, denken wir an folgende, schon in den ersten Definitionen gegebene Beziehung:

$$\text{Punkt} - \text{Punkt} = \text{Vektor};$$

$$\text{Punkt} + \text{Vektor} = \text{Punkt}.$$

Diese Beziehung bleibt bestehen, wenn man zur Unterscheidung beim Vektor als letzte Koordinate eine Null, beim Punkt eine Eins anfügt. Die endgültige Darstellung ist also folgende:

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinter diesen Darstellungen stehen – für den Schüler nicht im einzelnen formuliert – die Begriffe „lineare Abhängigkeit“ beziehungsweise „Vektorraum“. Als Basisvektoren eines Vektorraumes dürfen nur solche Vektoren verwendet werden, die voneinander linear unabhängig sind. So dürfen die Basisvektoren des dreidimensionalen Anschauungsraumes beispielsweise nicht in einer Ebene liegen. Ich möchte – nur für den unterrichtenden Lehrer – hier noch einmal die exakte Definition der linearen Unabhängigkeit formulieren:

Alle Elemente eines n-dimensionalen Vektorraumes, das heißt alle n-dimensionalen Vektoren, sind eindeutig darstellbar als Linearformen $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ mit Hilfe von n festen „Basisvektoren“ $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

5. Geradengleichungen und ihre Anwendungen

Als nächstes wird die *Parametergleichung der Geraden* behandelt. Dazu sei ein Punkt A des Raumes durch seinen Ortsvektor gegeben. Durch A möge eine (durch

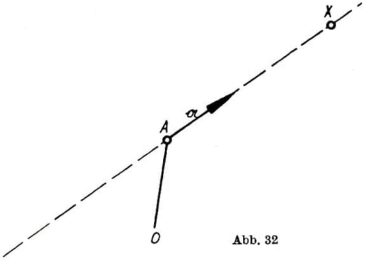

Abb. 32

ihre Richtung) bestimmte Gerade laufen. Die Richtung sei gekennzeichnet durch den Vektor $\mathfrak{a}$. Ist X irgendein Punkt der Geraden, so ist $X - A$ ein zu $\mathfrak{a}$ kollinearer Vektor: $X - A = t\,\mathfrak{a}$.

Folglich heißt die Geradengleichung:

$$X = A + t\,\mathfrak{a} \quad \text{(Abb. 32)}.$$

Dieser Sachverhalt wird an einem Beispiel aus der analytischen Geometrie der Ebene nachgeprüft:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x = 3 + 2t; \; t = \frac{x-3}{2};$$

$$y = 5 + 7t;$$

$$y = 5 + 7\,\frac{x-3}{2};$$

$$y = \frac{7}{2}\,x - \frac{11}{2}.$$

Die Geradengleichung durch zwei Punkte bereitet dann auch keine Schwierigkeiten mehr: Der Vektor $\mathfrak{a}$ kann auch durch $(B - A)$ dargestellt werden, was zu der Gleichung

$$X = X(t) = A + t(B - A)$$

führt.

Um mit der Geradengleichung operieren zu können, das heißt, um zum Beispiel den Schnittpunkt zweier Geraden zu ermitteln, muß folgende Vorüberlegung angestellt werden: Während zwei Geraden einer Ebene, wenn sie nicht parallel laufen, immer einen Schnittpunkt haben, braucht das im dreidimensionalen Raum nicht der Fall zu sein (windschiefe Geraden). Im Raum muß nachgeprüft werden, ob die Vektoren $(A_1 - A_2)$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ linear abhängig sind. Diese Bedingung kann aus der unmittelbaren Anschauung mit Hilfe von Stäbchenmodellen gewonnen werden. Ein Beispiel für den dreidimensionalen Raum möchte ich anführen:

Gegeben seien die Punkte beziehungsweise Vektoren:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \; \mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die gleichindizierten Stücke bestimmen jeweils eine Gerade. Nachdem die lineare Abhängigkeit durch $(A_1 - A_2) = \mathfrak{a}_1 + 2\,\mathfrak{a}_2$ nachgeprüft ist, wird der Schnittpunkt durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen ermittelt:

$$X = X(t_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = X = X(t_2) = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit entsteht ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit den zwei Unbekannten t_1 und t_2. Die dritte Gleichung ist, wie vorher nachgewiesen, eine Linearkombination aus den beiden anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} -3 + t_1 &= -8 + 2t_2 \quad ; \quad t_1 = 2t_2 - 5 \\ 4 + 3t_1 &= -7 + 4t_2 \\ 7 + 5t_1 &= -4 + 3t_2. \end{aligned}$$

Daraus folgen $t_2 = 2$ und $t_1 = -1$.

Die Probe ist leicht auszuführen.

Eine weitere Anwendung ist die Teilung einer Strecke im Verhältnis λ. Der Punkt $X_1 = A + r(B - A)$ teile den Vektor $(B - A)$ so, daß $(X_1 - A)$ das r-fache von $(B - A)$ ist (Abb. 33). Der zur Gewinnung des Teilverhältnisses benötigte Vektor $(X_1 - B)$ ist das s-fache von $(B - A)$. Daraus entsteht die Gleichung:

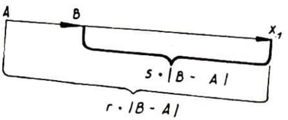

Abb. 33

$$r(B - A) - s(B - A) = (B - A)$$

beziehungsweise:

$$(B - A)(r - s - 1) = \mathfrak{o}.$$

Da die erste Klammer nicht gleich Null sein kann, folgt die Bedingung $r - s = 1$; wegen $\lambda = \frac{r}{s}$ wird $\lambda = -\frac{r}{1 - r}$ oder $r = -\frac{\lambda}{1 - \lambda}$.

Damit kann die Geradengleichung für jeden Punkt eindeutig als Funktion des Teilverhältnisses angegeben werden:

$$X = X(\lambda) = A - \frac{\lambda}{1 - \lambda}(B - A)$$

$$X(\lambda) = \frac{A + \lambda B}{1 - \lambda}.$$

Das Teilverhältnis ist ein Parameter.

Als Anwendung in der ebenen Geometrie berechnen wir den Schwerpunkt eines Dreiecks (Abb. 34):

Durch die Ortsvektoren sind die Eckpunkte des Dreiecks ABC gegeben. Die Halbierungspunkte der Seiten werden durch Einsetzen von $\lambda = -\frac{1}{1}$ in die Gleichung $X = A + t(B - A)$ gewonnen.

Für die Schwerlinien ergeben sich folgende Gleichungen:

$$X_a = \frac{B + C}{2} + r\left(A - \frac{B + C}{2}\right);$$

$$X_b = \frac{A + C}{2} + s\left(B - \frac{A + C}{2}\right);$$

$$X_c = \frac{A + B}{2} + t\left(C - \frac{A + B}{2}\right).$$

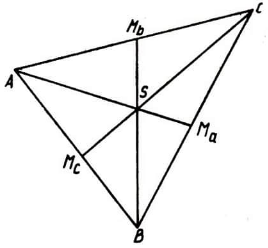

Abb. 34

Um S zu bestimmen, kann man zwei Gleichungen gleichsetzen und dann unter Elimination von r und s beispielsweise t

berechnen. Aus den Gleichungen aber ersieht man, daß $r = s = t = \frac{1}{3}$ die Gleichungen erfüllt. Es folgt:

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{SM_c}{SC} = \frac{SM_a}{SA} = \frac{SM_b}{SB} = \frac{1}{2}.$$

Deutung des Ergebnisses:
Der Schwerpunkt im ebenen Dreieck teilt jede Schwerlinie im Verhältnis $\lambda = -\frac{1}{2}$.

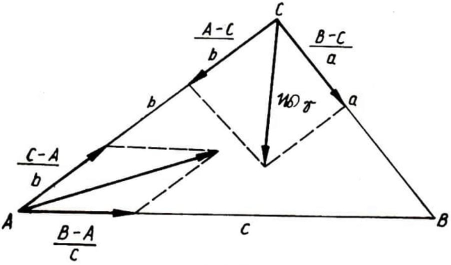

Abb. 35

Als weitere Aufgabe könnte der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden berechnet werden (Abb. 35). Wenn a, b, c die Längen der drei Seiten sind, so entstehen die Gleichungen der Winkelhalbierenden:

$$X_a = A + \; l\,\mathfrak{w}_\alpha;$$
$$X_b = B + m\,\mathfrak{w}_\beta;$$
$$X_c = C + \; n\,\mathfrak{w}_\gamma;$$

wobei die Richtungsvektoren $\mathfrak{w}_\alpha$, $\mathfrak{w}_\beta$, $\mathfrak{w}_\gamma$ aus nachstehender Überlegung gewonnen werden:

$$\mathfrak{w}_\alpha = \frac{B - A}{c} + \frac{C - A}{b} = \frac{b(B - A) + c(C - A)}{b\,c};$$

$$\mathfrak{w}_\beta = \frac{C - B}{a} + \frac{A - B}{c} = \frac{c(C - B) + a(A - B)}{a\,c};$$

$$\mathfrak{w}_\gamma = \frac{B - C}{a} + \frac{A - C}{b} = \frac{b(B - C) + a(A - C)}{a\,b}.$$

Nun ist aus der Beziehung $A + l\,\mathfrak{w}_\alpha = B + m\,\mathfrak{w}_\beta$ folgende Gleichung herzuleiten:

$$A + l\,\frac{(B - A)\,b + (C - A)\,c}{b\,c} = B + m\,\frac{(C - B)\,c + (A - B)\,a}{a\,c}.$$

Unter Hinzunahme der Dreiecksbedingung $(A - B) = (C - B) + (A - C)$ entsteht schließlich:

$$(A - B)\left[1 - \frac{l}{c} - \frac{m}{a} - \frac{m}{c}\right] = (A - C)\left[\frac{l}{b} - \frac{m}{a}\right].$$

Da aber $(A - B)$ und $(A - C)$ nicht kollinear sind, folgt, daß die beiden Skalare verschwinden müssen:

$$l = \frac{b\,c}{a + b + c}\,; \quad m = \frac{a\,c}{a + b + c}\,.$$

Das aber führt zum Schnittpunkt der Winkelhalbierenden beziehungsweise zum Inkreismittelpunkt:

$$W = \frac{a\,A + b\,B + c\,C}{a + b + c}\,.$$

An Zahlenbeispielen wird die Verwendung dieser Formel geübt.

Weiterhin werden folgende Aufgaben gelöst:

1. Beweise den Satz: Verbindet man die Ecke eines Parallelogramms mit der Mitte einer nicht von dieser Ecke ausgehenden Seite geradlinig, so teilt diese Gerade die nicht von dieser Ecke ausgehende Diagonale im Verhältnis $-\frac{1}{2}$!
2. Beweise, daß die beiden Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren!

6. Ebenengleichungen

Im weiteren Unterricht gehen wir zur Behandlung der *Parametergleichung der Ebene* über:

In der Ebene gibt es zwei linear unabhängige Vektoren. Unter Verwendung dieser beiden Vektoren kann jeder beliebige Punkt Z dadurch erreicht werden, daß folgende Vorschrift beachtet wird:

$Z = A + u\,\mathfrak{p} + v\,\mathfrak{q}$ (Abb. 36).

Das aber ist bereits die Parametergleichung der Ebene. Interessant ist es nun, für die Parameter u und v gewisse Beschränkungen anzugeben und den Sachverhalt geometrisch zu deuten. Dabei treten Begriffe wie „Halbebene“ beziehungsweise „ebene Fläche“ auf. Auch solche Sachverhalte sollten an Beispielen gezeigt werden.

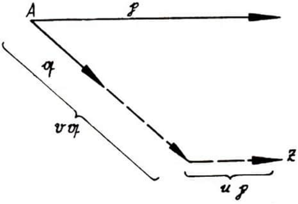

Abb. 36

Die nächste Aufgabe ist das Bestimmen der *parameterfreien Form der Ebenengleichung*. Übrigens bereitete das den Schülern ziemliche Schwierigkeiten.

Ferner kann der Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden bestimmt werden. Es gibt hierzu wieder sehr viel Übungsmöglichkeiten.

Schließlich folgt zur Festigung und Vertiefung eine Zusammenstellung der bisher behandelten Formeln und Gesetzmäßigkeiten. Dabei werden für den dreidimensionalen Raum die Rechts- beziehungsweise Linksorientierung erläutert und für die Vektoren die Begriffe „Betrag“ und „Richtungskosinus“ eingeführt. Beides fällt nicht schwer, da genügend Anknüpfungspunkte aus der elementaren Geometrie vorhanden sind.

7. Skalarprodukt und Vektorprodukt

Zur Einführung der produktartigen Verknüpfungen zweier Vektoren, das heißt zur Behandlung der Operationen „skalares Produkt“ und „vektorielles Produkt“, müssen einerseits die Grundgesetze der Multiplikation von Zahlen, andererseits Begriffe und Gesetze der Physik (Arbeit, Drehmoment usw.) Ausgangspunkte sein.

Grundgesetze der Multiplikation von Zahlen:

1. Die Multiplikation ordnet zwei Zahlen aus einer bestimmten Menge eine bestimmte Zahl derselben Menge zu.
2. Die Multiplikation ist assoziativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Die Multiplikation ist in dem Sinne umkehrbar, daß zu beliebigen a und b die Gleichungen $a \cdot x = b$ und $y \cdot a = b$ mit x und y aus derselben Menge existieren.
4. Die Multiplikation ist kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$.
5. Die Multiplikation ist mit der Addition distributiv verknüpft: $a \cdot (b + c) = ab + ac$; $(a + b) \cdot c = ac + bc$.
6. Aus $a \cdot b = 0$ folgt stets entweder $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = b = 0$ (Gesetz über die Nullteilerfreiheit).

Diese Gesetzmäßigkeiten können von den Schülern erarbeitet werden; sie werden für den „Aufbau des Zahlbereichs“ doch benötigt.

Vom Begriff der Arbeit ausgehend, wird zunächst die Kraftkomponente in Wegrichtung und damit der Projektionssatz dargestellt. Der zwischen den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eingeschlossene Winkel wird mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bezeichnet (Abb. 37). Damit wird definiert:

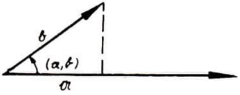

Abb. 37

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren, so bezeichnet man den Ausdruck $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ als „skalares Produkt“, „inneres Produkt“ beziehungsweise „Punktprodukt“. Es ist gegeben durch:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a \cdot b \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Mit Hilfe dieser Definition wird nun der Reihe nach die Gültigkeit der Gesetzmäßigkeiten 1 bis 6 auch für die Verknüpfung von Vektoren nachgeprüft und dabei festgestellt: 4, 5 gelten, die anderen nicht. Damit ist gerechtfertigt, nur von „produktartigen Verknüpfungen“ zu sprechen. Bei der Beziehung 6 muß deutlich gemacht werden, daß entweder $|\mathfrak{a}|$ oder $|\mathfrak{b}|$ oder $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gleich Null ist. Das letztere führt ohne Einschränkung zur Feststellung:

$$\text{Aus } \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0 \text{ folgt } \mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}.$$

Darüber hinaus wird festgelegt, daß der Nullvektor auf jedem beliebigen anderen Vektor senkrecht steht.

Um auch dann zwei Vektoren skalar miteinander multiplizieren zu können, wenn sie in Koordinaten gegeben sind, muß das skalare Produkt zweier Einheitsvektoren bestimmt werden. Die Beträge der Einheitsvektoren sind gleich 1, das Produkt zweier zueinander senkrechter Einheitsvektoren ist gleich 0.

Damit ergibt sich die Aussage:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} &= (a_x\, \mathfrak{e}_1 + a_y\, \mathfrak{e}_2 + a_z\, \mathfrak{e}_3) \cdot (b_x\, \mathfrak{e}_1 + b_y\, \mathfrak{e}_2 + b_z\, \mathfrak{e}_3) \\
&= (a_x\, b_x)\, \mathfrak{e}_1 + (a_y\, b_y)\, \mathfrak{e}_2 + (a_z\, b_z)\, \mathfrak{e}_3 .
\end{aligned}
$$

In der ersten Übungsaufgabe berechnen wir den Winkel, den die Vektoren

$$
\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

einschließen. Dazu leiten wir die Formel $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dfrac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|}$ her und wenden sie bei der Lösung der Aufgabe an.

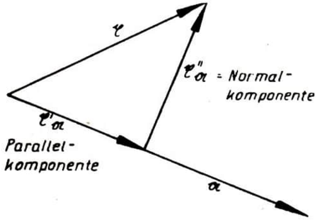

Abb. 38

Mit Hilfe des Skalarprodukts können wir nun die Zerlegung eines Vektors $\mathfrak{x}$ in Parallel- und Normalkomponente bezüglich des Vektors $\mathfrak{a}$ rechnerisch erfassen (Abb. 38). Es ist:

$$
\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{x}''_{\mathfrak{a}}; \quad \mathfrak{x} = \lambda\, \mathfrak{a} + \mathfrak{x}''_{\mathfrak{a}}.
$$

Wir ermitteln den skalaren Faktor λ, indem wir mit $\mathfrak{a}$ skalar multiplizieren. Wegen $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{x}''_{\mathfrak{a}}$ folgt:

$$
\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \cdot \lambda\, \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}''_{\mathfrak{a}};
$$

$$
\lambda = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}}{\mathfrak{a}^2}; \quad \mathfrak{x}'_{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}}{\mathfrak{a}^2}\, \mathfrak{a}; \quad \mathfrak{x}''_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}}{\mathfrak{a}^2}\, \mathfrak{a}.
$$

Diese Überlegung benutzen wir, um die Höhenvektoren im Dreieck

$$
A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zu berechnen (Abb. 39).}
$$

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'_{\mathfrak{c}} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{c}}; \quad \mathfrak{h}_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{b} - \mathfrak{b}'_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{b} - \frac{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}}{\mathfrak{c}^2}\,\mathfrak{c};$$

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{c}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{61}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix} -57 \\ 180 \\ 128 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{77}\begin{pmatrix} 2 \\ -141 \\ -214 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 55 \\ -39 \\ 86 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

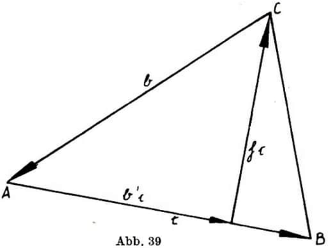

Abb. 39

Als letzte Anwendung für das Skalarprodukt betrachten wir die Formeln:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2;$$
$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2 - 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2;$$
$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2.$$

Diese Formeln werden zunächst aus der Definition des Skalarproduktes bewiesen. Dann bedeutet die erste Formel einfach den Kosinussatz der ebenen Geometrie. Nun erlaubt das Ganze eine geometrische Deutung:

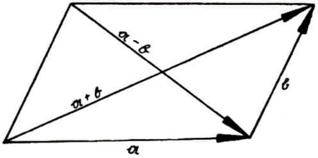

Abb. 40

Die Ausdrücke $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2$ und $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2$ seien die Diagonalen eines Parallelogramms (Abb. 40). Durch Addition der beiden ersten oben stehenden Gleichungen kann der Satz: „Im Parallelogramm ist die Summe der Diagonalenquadrate gleich der doppelten Summe der Seitenquadrate“ bewiesen werden.

Durch den Ansatz $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$ beziehungsweise $\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = 0$ beweisen wir die Aussage: „Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.“

Für das Vektorprodukt wird von der Definition ausgegangen:

Sind $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Vektoren, so nennen wir* $\mathfrak{v}$ *das „vektorielle“ oder das „äußere Produkt“ oder das „Kreuzprodukt“ der beiden Vektoren* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$, *in Zeichen* $\mathfrak{v} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $|\mathfrak{v}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$;

2. $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{a}$;

3. $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{b}$;

4. ist $|\mathfrak{v}| > 0$, *so ist* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{v}$ *ein rechtsorientiertes Dreibein des Raumes* (Abb. 41).

Die Beziehung 1. kann geometrisch gedeutet werden:

Der Betrag des Kreuzproduktes ist gleich der Maßzahl des Flächeninhalts des von den beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *aufgespannten Parallelogramms.*

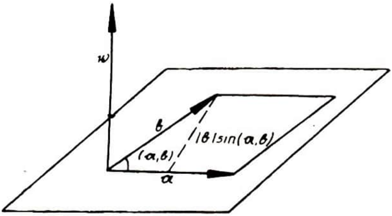

Abb. 41

Weiterhin interessiert der Ausdruck $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = 0$.

Die Schüler erkennen: Der Betrag des Kreuzprodukts ist dann gleich 0, wenn entweder einer der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Nullvektor ist oder wenn die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Nullvektoren sind oder wenn die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zueinander parallel sind.

Werden die sechs Gesetzmäßigkeiten der Multiplikation von Zahlen betrachtet, so stellt sich heraus, daß bei der Bildung des Vektorprodukts nur 5. erfüllt ist. Also kann auch hier wieder nur von einer „produktartigen Verknüpfung“ gesprochen werden. Um zur Koordinatendarstellung des Vektorproduktes zu gelangen, müssen wir alle möglichen Kreuzprodukte der Einheitsvektoren berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{o}; \quad &&\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_1 = -\mathfrak{e}_3; \quad &&\mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2;\\
&\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3; \quad &&\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{o}; \quad &&\mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_2 = -\mathfrak{e}_1;\\
&\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_3 = -\mathfrak{e}_2; \quad &&\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_1; \quad &&\mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{o}.
\end{aligned}$$

Ausgehend von der Komponentendarstellung zweier Vektoren, ist obige Zusammenstellung bei der Produktbildung zu beachten. Das ergibt also:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} &= (a_x\, \mathfrak{e}_1 + a_y\, \mathfrak{e}_2 + a_z\, \mathfrak{e}_3) \times (b_x\, \mathfrak{e}_1 + b_y\, \mathfrak{e}_2 + b_z\, \mathfrak{e}_3)\\
&= (a_y\, b_z - a_z\, b_y)\, \mathfrak{e}_1 + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\, \mathfrak{e}_2 + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\, \mathfrak{e}_3.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle fand ich Zeit, die vereinfachende Schreibweise mit Hilfe von Determinanten einzuführen.

Um den Begriff „Determinante" mit bereits bekanntem Stoff zu verknüpfen, wurde in zwei Stunden die Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems, zunächst von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, später von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, betrachtet.

Unter Verwendung der Determinantenschreibweise ergibt sich also folgende Darstellung des Vektorprodukts:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Als erste Anwendung berechnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hierfür gilt:

$$F = \frac{1}{2} \left| (B - A) \times (C - A) \right|.$$

Als Lösung ergibt sich:

$$(B - A) \times (C - A) = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -\ 4\,\mathfrak{e}_1 + 6\,\mathfrak{e}_2 + 24\,\mathfrak{e}_3 \\ -18\,\mathfrak{e}_1 + 8\,\mathfrak{e}_2 - \ 4\,\mathfrak{e}_3. \end{matrix}$$

$$(B - A) \times (C - A) = F \approx \frac{1}{2} \cdot 32{,}9 = 16{,}45.$$

Weiterhin berechnen wir die Oberfläche eines Tetraeders, das gegeben ist durch:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$O = 3F_1 + F_2;$$

$$F_1 = \left| (C - A) \times (B - A) \right| = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left| -\mathfrak{e}_3 \right| = 1;$$

$$F_2 = \left| (C - B) \times (D - B) \right| = \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 \right| = \sqrt{3}.$$

Damit lautet das Ergebnis:

$$O = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

Schließlich wird der Abstand der zwei windschiefen Geraden $X_1 = A_1 + t_1 \mathfrak{a}_1$ und $X_2 = A_2 + t_2 \mathfrak{a}_2$ berechnet. Die Anschauung sagt uns, daß die den Abstand darstellende Verbindungsstrecke senkrecht auf den beiden gegebenen Geraden, richtiger auf den Richtungsvektoren beider Geraden, stehen muß. Der Einheitsvektor dieser auf den beiden Geraden senkrecht stehenden Verbindungsstrecke ist also $\frac{\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|}$. Wir fügen dem Punkt X_1 der ersten Geraden das d-fache dieses Einheitsvektors hinzu und erhalten auf der zweiten Geraden einen Punkt X_2:

$$A_1 + t'_1 \mathfrak{a}_1 + d \frac{\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|} = A_2 + t'_2 \mathfrak{a}_2 .$$

Um diese Gleichung nach d aufzulösen, multiplizieren wir zunächst skalar mit $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)$:

$$(A_1 - A_2) \cdot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) + d \frac{(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)^2}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|} = 0 .$$

Die Glieder $t'_1 \mathfrak{a}_1 \cdot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)$ beziehungsweise $t'_2 \mathfrak{a}_2 \cdot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)$ fallen weg, da beide Vektoren senkrecht aufeinanderstehen. Um d zu isolieren, klammern wir $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)$ auf der linken Seite aus. Nach Voraussetzung ist der Betrag des ersten Vektors nicht gleich Null, und es stehen nicht beide Vektoren senkrecht aufeinander, also muß der Betrag des zweiten Vektors gleich Null sein:

$$(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \left[(A_1 - A_2) + d \frac{\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|} \right] = 0 .$$

Das bedeutet also:

$$d \frac{\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|} = (A_2 - A_1) .$$

Nach erneuter Skalarmultiplikation mit dem ganzen Faktor bei d wird

$$d = \frac{(A_2 - A_1) \cdot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|} .$$

Diese Formel dient zur Lösung eines Zahlenbeispiels:
Es soll der Abstand berechnet werden, den die zwei durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \ B_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}; \ B_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmten Geraden voneinander haben.

Wir setzen an:

$$\mathfrak{a}_1 = (B_1 - A_1) = 2 \mathfrak{e}_1 + 4 \mathfrak{e}_2 + 4 \mathfrak{e}_3 ;$$
$$\mathfrak{a}_2 = (B_2 - A_2) = 8 \mathfrak{e}_1 + 2 \mathfrak{e}_2 - 13 \mathfrak{e}_3 .$$

Damit wird $$d = \frac{300 + 58 - 196}{\sqrt{7748}} = \frac{162}{\sqrt{7748}} \approx 1{,}84 .$$

Die hier gegebene Darstellung erhebt nicht Anspruch auf Vollständigkeit, und es können sicher auch noch andere Wege zur Behandlung der Vektorrechnung gegangen werden. Trotzdem glaube ich, daß durch diesen Beitrag die Stimmen, die die Behandlung der Vektorrechnung in der Schule als Überforderung der Schüler ablehnen, weniger werden. Die Aufnahme des Stoffgebietes in den Lehrplan der erweiterten Oberschule trägt der Entwicklung der Mathematik Rechnung, und wir geben den Schülern, die ein naturwissenschaftliches oder technisches Studienfach ergreifen, eine entscheidende Hilfe.

Auch war mein Anliegen, deutlich zu machen, daß die jetzt im Lehrplan geforderte Vektorrechnung nicht eine Neuauflage der bereits vor Jahren im 10. Schuljahr behandelten Vektorrechnung ist, daß man also das damals gültige Lehrbuch nicht heranziehen kann.

DISKUSSIONSBEITRAG NR. 4

Hans Simon

Auf der Grundlage von Diskussionen in einer Arbeitsgemeinschaft von Mathematiklehrern der Dresdener erweiterten Oberschulen

1. Allgemeine Vorbemerkungen

1. Es wird empfohlen, die Probleme zunächst stets an Hand von ebenengebundenen Vektoren zu erörtern, dann aber, wo sich die Möglichkeit bietet, auch zur Betrachtung im Raum überzugehen.
2. Die aufgeführten Anwendungsbeispiele sind so zahlreich, daß sie nicht alle in der vorgesehenen Stundenzahl behandelt werden können. Der Lehrer muß nach fachlichen und methodischen Gesichtspunkten eine Auswahl treffen und dabei solche Aufgaben bevorzugen, denen in der Praxis besondere Bedeutung zukommt.
3. Ebenso wie die Gesetze und Rechenregeln werden auch die Anwendungen aus der analytischen Geometrie in dieser Arbeit meistens nur in allgemeinen Symbolen dargestellt. Im Unterricht müssen außerdem durch Zahlenbeispiele bei den Schülern gewisse Fertigkeiten im Umgang mit Vektoren und im Übergang zum Rechnen in kartesischen Koordinaten erreicht werden.
   Dazu lassen sich alle Aufgaben verwenden, die in den üblichen Lehrbüchern bei den Abschnitten zur analytischen Geometrie in Koordinatendarstellung als Übungen zu finden sind, wenn sie statt mit kartesischen Koordinaten in vektorieller Form gegeben werden. Deshalb wird im folgenden von einer Zusammenstellung solcher Zahlenbeispiele abgesehen, zumal auch deren Auswahl nach Anzahl und Schwierigkeitsgrad der jeweiligen Klassensituation angepaßt und daher dem Lehrer überlassen werden muß. Auf gar keinen Fall darf aber auf solche Zahlenbeispiele verzichtet werden.

2. Zur Einführung des Vektorbegriffs

Bei der Einführung wird zweckmäßigerweise an solche physikalische Größen angeknüpft, die bereits im Physikunterricht mit Hilfe von Vektoren dargestellt wurden, zum Beispiel Kraft, Geschwindigkeit, Weg ... Dabei muß aber sofort der Vektorbegriff wie folgt vertieft und präzisiert werden:

a) Charakteristisch für eine Größe, die mit Hilfe von Vektoren und nicht durch Skalare dargestellt werden kann, sind die drei Bestimmungsstücke: Betrag, Richtung und Richtungs- oder Durchlaufsinn.

b) Es muß betont werden, daß die meisten bisher im Physikunterricht aufgetretenen Größen dieser Art nicht durch „allgemeine Vektoren" darstellbar sind, sondern „Sonderfälle" bedeuten, wie zum Beispiel die Kraft als liniengebundener Vektor. Die systematische Untersuchung dieser Sonderfälle sowie die Einführung der Fachbezeichnungen erfolgt aber besser erst nach der Definition des freien Vektors; vgl. unten.

c) Es werden einheitlich allgemeine Schriftsymbole und graphische Symbole festgelegt. Als Schriftsymbole werden große und kleine Frakturbuchstaben empfohlen, da sie „das Besondere und Neue" des Vektors auch äußerlich unterstreichen; als graphische Symbole sind Pfeile allgemein üblich.

d) Beide Symbole versinnbildlichen zugleich alle drei Bestimmungsstücke je durch ein einziges Zeichen. Bei konkreten Zahlenbeispielen bedarf es statt des einen allgemeinen Symbols stets der Angabe dreier Bestimmungszahlen, von denen die beiden für Richtung und Durchlaufsinn oft durch eine einzige ersetzt werden können. Der Betrag ist dabei von vornherein mathematisch korrekt, das heißt als Zahlenwert, anzugeben und nicht als eine mit Maßeinheit versehene Größe, auch dann nicht, wenn durch den Vektor eine physikalische Größe, zum Beispiel eine Kraft, dargestellt wird.

Beispiel: $\mathfrak{K}$ oder das in Abb. 42 dargestellte Symbol entspricht den Angaben „Vektor vom Betrag 2 und der Richtung 225°". Die Winkelangabe folgt dabei den üblichen Festlegungen im kartesischen Koordinatensystem. Auch wenn $\mathfrak{K}$ eine Kraft darstellt, wird vom Betrag „2" und nicht von „2 kp" gesprochen.

Die Kurzform $\mathfrak{K}$ (2; 225°) wird wegen der Gefahr der Verwechslung mit den Polarkoordinaten eines Punktes nicht empfohlen. Die Form $\mathfrak{K}$ (2 kp; 225°) sollte deshalb aus beiden eben erwähnten Gründen vermieden werden.

Abb. 42

Eine besonders anschauliche Beschreibung eines Vektors mit seinen drei Bestimmungsstücken ist durch den Weg einer gleichförmigen Bewegung möglich; physikalisch: Weg $\mathfrak{s}$ eines Fahrzeugs oder eines strömenden flüssigen oder gasförmigen Mediums; mathematisch: Translation $\mathfrak{T}$ (im Raum). Daraus ergibt sich eine *Definition des Vektors*:

Ein Vektor kann durch eine Verschiebung aller Punkte des Raumes beschrieben werden. Er wird durch ein Kurzzeichen, zum Beispiel $\mathfrak{a}$, *symbolisiert, das man als Rechengröße definiert und für das man besondere Verknüpfungsgesetze festlegt. Mit Hilfe des Vektors kann man dann umgekehrt die Translation aller Raumpunkte mathematisch eindeutig erfassen. Ein solcher Vektor heißt freier Vektor.*

Dazu sind einige besondere Hinweise wichtig:

a) Die Translation oder der Weg einer gleichförmigen Bewegung sind nicht die einzig möglichen Beschreibungen eines freien Vektors. Dazu können vielmehr alle diejenigen mathematischen oder physikalischen Begriffe oder Prozesse dienen, die zu ihrer Bestimmung der Angabe dreier Zahlen bedürfen, die den Bestimmungsstücken der Translation (Betrag, Richtung, Durchlaufsinn) entsprechen. Zur Erläuterung müssen Beispiele gegeben werden, die den Schülern bekannt sind: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Feldstärke, ... Daß außerdem gefordert werden muß, daß die für Vektoren noch festzulegenden Verknüpfungsgesetze gelten, so daß also zum Beispiel die Drehung nicht zur Beschreibung eines Vektors dienen kann, sollte hier noch nicht betont, sondern frühestens bei Behandlung der Gesetze der additiven Verknüpfung nachgeholt werden.

b) Es ist nötig, von jetzt an streng zwischen „Vektor“ und „vektorieller Größe“ zu unterscheiden. Wege, Geschwindigkeiten, Kräfte ... sind vektorielle Größen, die durch Vektoren mathematisch erfaßt werden können. Vektoren sind mathematische Gebilde. Die Aussage: „Die Kraft ist ein Vektor“ (statt: „... eine vektorielle Größe“) ist eine ähnliche sprachliche Nachlässigkeit wie die ebenfalls oft gebrauchte ungenaue Formulierung: „Die Ordinate eines Punktes ist das von ihm auf die x-Achse gefällte Lot“ (statt: „... die mit Vorzeichen versehene Maßzahl des von ihm auf die x-Achse gefällten Lotes“). Im Interesse einer klaren Begriffsbildung ist von Anfang an auf einwandfreie Ausdrucksweise zu achten.

c) Ein Vektor beschreibt die Bewegung *aller* Punkte (des Raumes, des Fahrzeugs, des strömenden Mediums, ...), nicht nur einer Auswahl solcher Punkte. Zur Kennzeichnung genügt ein *einziges* Symbol ($\mathfrak{s}$) oder ein *einzelner* Pfeil (Abb. 43). Wenn zum Beispiel gelegentlich eine Windströmung durch mehrere

Abb. 43

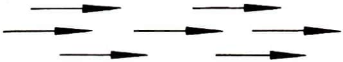

Abb. 44

gleiche Pfeile veranschaulicht wird (Abb. 44), so sind das nicht „mehrere gleiche Vektoren“, sondern das ist ein einziger Vektor, der – unnötigerweise – durch mehrere gleiche graphische Symbole dargestellt wird, obwohl ein einziges genügt hätte. Auch der Ausdruck: „Ein Vektor ist im Raum frei beweglich“ beziehungsweise: „... kann parallel zu sich verschoben werden“ ist in diesem Sinne ungeschickt und irreführend.

d) Es gibt Vektoren, die nicht für alle Raumpunkte gelten, so zum Beispiel ebenengebundene, liniengebundene (oder Stäbe; hierzu gehört beispielsweise der an die Wirkungslinie gebundene Kraftvektor der Physik) und an einen Punkt gebundene (ortsgebundene Vektoren oder Ortsvektoren). Dazu ist insbesondere zu beachten:

α) Wenn im Physikunterricht der Schule schon gelegentlich das Wort Vektor verwendet wurde, handelte es sich meist nicht um freie Vektoren, sondern um gebundene Vektoren. Der aus dem Physikunterricht erwachsene Vektorbegriff muß also bewußt zum Begriff des freien Vektors erweitert werden.

β) Gebundene Vektoren bedürfen mehr als nur dreier Bestimmungsstücke; beim Ortsvektor muß zum Beispiel noch der Angriffspunkt angegeben werden.

γ) Jeder (freie) Vektor kann durch irgendwelche gebundene Vektoren (beispielsweise durch einen Ortsvektor) „repräsentiert“ werden, doch sind beide nicht identisch.

Anschaulich leicht einzusehen ist die Festsetzung:

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sollen genau dann gleich heißen, wenn sie in allen ihren Bestimmungsstücken übereinstimmen.

Zwei ungleiche Vektoren brauchen sich nicht in allen Bestimmungsstücken zu unterscheiden, es genügt bereits die Abweichung in einem einzigen Stück. Dazu müssen Beispiele gegeben werden, etwa:

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleicher Richtung und gleichen Durchlaufsinns, aber verschiedenen Betrags; oder:

Zwei Ortsvektoren, die denselben freien Vektor repräsentieren, aber verschiedene Anfangspunkte haben.

Am Ende des ersten Abschnittes müssen drei besondere Vektoren besprochen und ihre Symbole festgelegt werden.

a) Vektoren vom Betrag 1: Vorschlag für das Schriftsymbol: $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{B}^0$, ...; für die Sprechweise: Einheitsvektor zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, ... (auf keinen Fall: $\mathfrak{a}$ hoch Null oder $\mathfrak{a}$ Null; allenfalls: $\mathfrak{a}$ gehoben Null).

b) Vektoren vom Betrag 0: Vorschlag für das Schriftsymbol: $\mathfrak{o}$; Sprechweise: Nullvektor.
Man achte von Anfang an streng auf die Unterscheidung in den Schriftsymbolen für die skalare Zahl 0 und den Nullvektor $\mathfrak{o}$! Frakturschrift üben lassen!

c) Der Vektor vom gleichen Betrag und von gleicher Richtung wie der Vektor $\mathfrak{a}$, aber von entgegengesetztem Durchlaufsinn; Symbol: $-\mathfrak{a}$; Sprechweise: entgegengesetzter Vektor zu $\mathfrak{a}$.

3. Additive und subtraktive Verknüpfung

Es wird empfohlen, die additive Verknüpfung nicht als „Rechenoperation Addition“, sondern als Symbol für diejenige Translation $\mathfrak{T}_3$ einzuführen, die zwei nacheinander ausgeführte Translationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zu ersetzen vermag, da sie zum gleichen Ergebnis führt. Stellt man $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ in dieser Reihenfolge durch die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ dar, so wird festgesetzt:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

Beispiel: Der Weg zur gegenüberliegenden Ecke eines rechteckigen Platzes führt einmal als gebrochener Streckenzug längs der Platzbegrenzungen, dann längs der Diagonale. Daraus folgt das graphische Symbol durch Pfeile. Dabei ist „Anfang“ und „Ende“ des Pfeiles anschaulich besser durch „Fußpunkt“ und „Spitze“ zu unterscheiden. Die Bezeichnung „Addition“ und das Symbol „+“ sind dadurch gerechtfertigt, daß für diese Verknüpfungsoperation Gesetze gelten, die, wie beispielsweise das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz, den Gesetzen der Addition von Zahlen entsprechen:

$$1.\quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a};$$
$$2.\quad \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}.$$

Diese Gesetze sind anschaulich zu erläutern, die Zweckmäßigkeit ihrer Festsetzung ist zu betonen. Es müssen sich einige graphische Übungen mit Zahlenbeispielen anschließen, wobei die Vektoren nach Betrag, Richtung und Durchlaufsinn zu geben sind. Hierbei ist die Zusammensetzung von Kräften nur bedingt verwendbar, da es sich dabei nicht um freie, sondern um gebundene Vektoren handelt, die überdies nicht direkt Translationen bedeuten. Geeigneter sind Zusammensetzungen von Bewegungen wie die bei einer Flußfähre und ähnliche.

Die Subtraktion wird entsprechend als die Translation $\mathfrak{T}_2$ eingeführt, die zu einer Translation $\mathfrak{T}_1$ dazukommen muß, um zum selben Ergebnis zu führen, das eine Translation $\mathfrak{T}_3$ liefert. Als Symbol wird in Analogie zur Symbolik der Algebra festgelegt:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \longleftrightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}.$$

Das graphische Bild bestätigt, daß das gleichwertig mit der Addition

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{c} + (-\mathfrak{a})$$

ist.

Nur in der letzten Form sollte die graphische Subtraktion an Zahlenbeispielen geübt werden.

4. Vervielfachung eines Vektors

Definitorische Einführung: Ein Vektor $\mathfrak{b}$, der in Richtung und Durchlaufsinn mit einem Vektor $\mathfrak{a}$ übereinstimmt, dessen Betrag aber das t-fache des Betrages von $\mathfrak{a}$ ist, soll symbolisiert werden durch $\mathfrak{b} = t\,\mathfrak{a}$.

Dabei ist ein Symbol für den Betrag eines Vektors festzusetzen. Es wird empfohlen, dafür zunächst ausschließlich $|\mathfrak{a}|$ zu benutzen und das Symbol a erst später bei der Koordinatendarstellung zu verwenden. Dann kann man sagen:

$\mathfrak{b} = t\,\mathfrak{a}$ bedeutet einen Vektor, für den Richtung und Durchlaufsinn mit dem des Vektors $\mathfrak{a}$ übereinstimmen und für den gilt:

$$|\mathfrak{b}| = t\,|\mathfrak{a}|.$$

Dabei ist folgendes besonders zu beachten:

Bei $|\mathfrak{b}| = t\,|\mathfrak{a}|$ wäre, da es sich um eine Skalarmultiplikation handelt, auch $|\mathfrak{b}| = t \cdot |\mathfrak{a}|$ vertretbar; bei $\mathfrak{b} = t\,\mathfrak{a}$ ist der Malpunkt ($\mathfrak{b} = t \cdot \mathfrak{a}$) zwar erlaubt, würde aber eine neue Symbolfestsetzung bedeuten und dem Anfänger die Unterscheidung vom Skalarprodukt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ erschweren. Deshalb wird empfohlen, seine Verwendung zu vermeiden, ebenso die Bezeichnung „Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar“. Daß t jede reelle Zahl sein kann, wird nicht bewiesen, wohl aber erwähnt.

Jeder Vektor kann als Vielfaches seines Einheitsvektors dargestellt werden, wenn als Vervielfacher sein Betrag genommen wird:

$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{a}^0.$$

Daraus folgt, daß auch jeder Einheitsvektor als Vielfaches jedes Vektors dargestellt werden kann, der mit ihm in Richtung und Durchlaufsinn übereinstimmt:

$$\mathfrak{a}^0 = \frac{1}{|\mathfrak{a}|}\,\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}.$$

Die Vervielfacher sind dabei stets positive Zahlen. Läßt man auch negative Zahlen zu, kann ein Vektor $\mathfrak{a}$ auch als Vielfaches des Einheitsvektors dargestellt werden, der dem entgegengesetzt gerichteten Vektor $-\mathfrak{a}$ entspricht, mit $\mathfrak{a}$ also nur noch in der Richtung, aber nicht mehr im Durchlaufsinn übereinstimmt:

$$\mathfrak{a} = -|\mathfrak{a}|\,(-\mathfrak{a})^0.$$

Der Unterschied zwischen Richtung und Durchlaufsinn tritt hier besonders deutlich hervor!

Folgende *Gesetze* sind zu veranschaulichen und zu beweisen:

1. $r\,t\,\mathfrak{a} = (r\,t)\,\mathfrak{a} = r\,(t\,\mathfrak{a}) = t\,(r\,\mathfrak{a})$;
2. $(r + t)\,\mathfrak{a} = r\,\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{a}$;
3. $r\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r\,\mathfrak{a} + r\,\mathfrak{b}$.

Als wichtige *Sonderfälle* müssen Zusammensetzungen mit dem Nullvektor ausführlich behandelt werden:

1. $\mathfrak{a} - \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$;
2. $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a} - \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$; $\mathfrak{o} - \mathfrak{a} = -\mathfrak{a}$;
3. $0\,\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ (besondere Sorgfalt bei den Symbolen 0 und $\mathfrak{o}$!);
4. Graphisch muß an mehreren Beispielen gezeigt werden, daß

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \cdots + \mathfrak{n} = \mathfrak{o}$$

einen geschlossenen Vektorzug (Polygonzug) bedeutet, da diese Beziehung die Grundlage für die meisten vektoriell geführten Beweise geometrischer Lehrsätze ist.

Anwendungen:

1. Parallelogramm beziehungsweise Polygon der Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte (Zusammensetzung und Zerlegung) in mannigfachen praktischen Beispielen.
2. Bewegungsgesetz von Körpern, die in einem Medium (ohne und mit Berücksichtigung der Reibung) fallen. Der „freie Fall" ergibt sich dabei als Sonderfall.
3. Beweise einfacher geometrischer Lehrsätze, zum Beispiel:

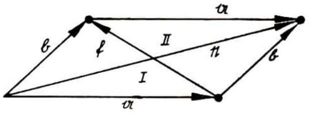

Abb. 45

a) „Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander" (Abb. 45).
Streckenzug von Dreieck I:

$$\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{f} - r\,\mathfrak{e} = \mathfrak{o}. \tag{1}$$

(t und r sind die Unbekannten.)

Streckenzug von Dreieck II:

$$\mathfrak{a} - (1 - r)\,\mathfrak{e} + (1 - t)\,\mathfrak{f} = \mathfrak{o}. \tag{2}$$

$$(1) - (2){:}\quad t\,\mathfrak{f} - r\,\mathfrak{e} + (1 - r)\,\mathfrak{e} - (1 - t)\,\mathfrak{f} = \mathfrak{o}. \tag{3}$$

Der Beweis dieses Lehrsatzes wie auch der meisten anderen Lehrsätze führt an sich auf das Problem der linearen Unabhängigkeit von Vektoren, hier von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$, und damit auf den Begriff des Vektorraumes. Es wird aber empfohlen, statt dessen mit dem Koeffizientenvergleich zu arbeiten. Dazu wird (3) umgestellt zu:

$$t\,\mathfrak{f} + (1 - r)\,\mathfrak{e} = (1 - t)\,\mathfrak{f} + r\,\mathfrak{e}. \tag{4}$$

Wird jetzt die Gleichheit zweier Vektoren als Übereinstimmung in Richtung, Durchlaufsinn und Betrag rechnerisch schärfer gefaßt das heißt: $m\,\mathfrak{a} = n\,\mathfrak{a}$ genau dann, wenn $m = n$, so folgt:

$$t = 1 - t \quad ; \qquad 1 - r = r;$$

$$t = \frac{1}{2} \quad ; \qquad r = \frac{1}{2};$$

was zu beweisen war (w. z. b. w.).

b) Umkehrung zu a): „Halbieren in einem Viereck die Diagonalen einander, so ist es ein Parallelogramm“ (Abb. 46).

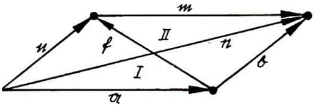

Abb. 46

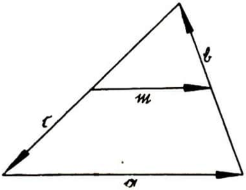

Abb. 47

Im Dreieck I:

$$\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{f} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{e} = \mathfrak{o}. \tag{1}$$

Im Dreieck II:

$$\mathfrak{m} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{e} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{f} = \mathfrak{o}. \tag{2}$$

(Diesmal ist $\mathfrak{m}$ die Unbekannte.)

$$(1) - (2){:}\quad \mathfrak{a} - \mathfrak{m} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{f} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{f} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{e} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{e} = \mathfrak{o}; \tag{3}$$

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}; \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Entsprechend folgt aus den beiden anderen Dreiecken: $\mathfrak{n} = \mathfrak{b}$ für die zweite Unbekannte $\mathfrak{n}$.

c) „Die Verbindung der Mittelpunkte zweier Dreieckseiten ist zur dritten parallel und halb so groß wie diese“ (Abb. 47).

Im großen Dreieck:

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{o}. \tag{1}$$

Im kleinen Dreieck:

$$\mathfrak{m}+\frac{1}{2}\mathfrak{b}+\frac{1}{2}\mathfrak{c}=\mathfrak{o}. \tag{2}$$

(Die Unbekannte ist $\mathfrak{m}$.)

$$(1)-(2)-(2):\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\mathfrak{m}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}=\mathfrak{o} \tag{3}$$

$$\mathfrak{m}=\frac{1}{2}\mathfrak{a}\,; \qquad \text{w. z. b. w.}$$

d) Umkehrung zu c).
e) Aufgaben c) und d) für das Trapez (Mittelparallele im Trapez).
f) Strahlensätze und ihre Umkehrungen.
g) „Die Verbindung der Seitenmitten eines beliebigen Vierecks ergibt ein Parallelogramm.“
h) „Die Mittellinien im Dreieck teilen einander im Verhältnis 1 : 2“ (Abb. 48).

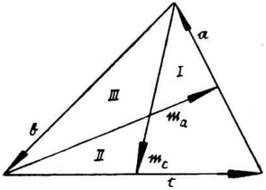

Abb. 48

Im großen Dreieck:

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{o}. \tag{1}$$

Im Dreieck I:

$$r\,\mathfrak{m}_a+\frac{1}{2}\mathfrak{a}+(1-t)\,\mathfrak{m}_c=\mathfrak{o}. \tag{2}$$

(Die Unbekannten sind r und t.)

Im Dreieck II:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{c}-t\,\mathfrak{m}_c-(1-r)\,\mathfrak{m}_a=\mathfrak{o}. \tag{3}$$

Im Dreieck III:

$$\mathfrak{b}+(1-r)\,\mathfrak{m}_a-(1-t)\,\mathfrak{m}_c=\mathfrak{o}. \tag{4}$$

(2) + (2) + (3) + (3) + (4) − (1):

$$2r\,\mathfrak{m}_a+2(1-t)\,\mathfrak{m}_c-2t\,\mathfrak{m}_c-2(1-r)\,\mathfrak{m}_a+(1-r)\,\mathfrak{m}_a-(1-t)\,\mathfrak{m}_c=\mathfrak{o}; \tag{5}$$

$$(1-r)\,\mathfrak{m}_a+2(1-t)\,\mathfrak{m}_c-2t\,\mathfrak{m}_c=2(1-r)\,\mathfrak{m}_a-2r\,\mathfrak{m}_a+(1-t)\,\mathfrak{m}_c\,;$$

$$1-r=2(1-r)-2r\quad;\quad 2(1-t)-2t=1-t\,;$$

$$r=\frac{1}{3}\,;\qquad t=\frac{1}{3}\,;\qquad \text{w. z. b. w.}$$

Es erscheint zweckmäßig, die Anwendungen erst nach der Einführung der Vervielfachung zu besprechen, wenn auch manche schon im Anschluß an die additive und subtraktive Verknüpfung behandelt werden könnten.

5. Komponentendarstellung; Koordinaten

Jeder Vektor $\mathfrak{c}$ läßt sich vielfältig in zwei „Komponenten“ zerlegen, so daß gilt:

$$\mathfrak{c}=\mathfrak{d}+\mathfrak{e}=\mathfrak{f}+\mathfrak{g}=\cdots \quad \text{(anschaulich erläutern!).}$$

Sind Richtung und Durchlaufsinn der Komponenten vorgeschrieben, so wird die Zerlegung eindeutig:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Werden Richtung und Durchlaufsinn der Komponenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{b}^0$ festgelegt, so folgt:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{a}^0 + |\mathfrak{b}|\,\mathfrak{b}^0.$$

Hier ist es zweckmäßig, neue Symbole für die Beträge der Vektoren einzuführen:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = a\,\mathfrak{a}^0 + b\,\mathfrak{b}^0.$$

Man nennt a und b die *Koordinaten* (oder skalaren Komponenten) in bezug auf das Basissystem $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{b}^0$; $\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{b} = b\,\mathfrak{b}^0$ die vektoriellen Komponenten oder kurz die *Komponenten* in bezug auf das Basissystem $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{b}^0$.

Meist wird das Basissystem orthonormiert gewählt, das heißt, $\mathfrak{a}^0, \mathfrak{b}^0$ stehen senkrecht aufeinander und haben gleiche Einheiten:

$$|\mathfrak{a}^0| = |\mathfrak{b}^0| = 1.$$

Für zwei Vektoren $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ in Komponentendarstellung in bezug auf das gleiche Basissystem gilt:

1. $\mathfrak{c}_1 \pm \mathfrak{c}_2 = (a_1\,\mathfrak{a}^0 + b_1\,\mathfrak{b}^0) \pm (a_2\,\mathfrak{a}^0 + b_2\,\mathfrak{b}^0) = (a_1 \pm a_2)\,\mathfrak{a}^0 + (b_1 \pm b_2)\,\mathfrak{b}^0$;
2. $t\,\mathfrak{c} = t(a\,\mathfrak{a}^0 + b\,\mathfrak{b}^0) = t\,a\,\mathfrak{a}^0 + t\,b\,\mathfrak{b}^0$;

das heißt, Addition, Subtraktion und Vervielfachung von Vektoren in Komponentendarstellung werden mit Hilfe der Koordinaten durchgeführt (graphisch und rechnerisch begründen!).

6. Ortsvektoren im Ursprung des Koordinatensystems

6.1 Begriffserklärungen

Ein Punkt P_1 in der Koordinatenebene kann statt durch seine kartesischen Koordinaten $(x_1; y_1)$ auch durch den Ortsvektor im Koordinatenursprung 0 mit der Spitze in P_1 eindeutig festgelegt werden (anschaulich begründen!).

Als Schriftsymbol für den Ortsvektor im Ursprung wird (zumindest anfänglich) $\overrightarrow{OP_1}$ oder $(\mathfrak{p}_1)$ empfohlen, um ihn deutlich vom freien Vektor $\mathfrak{p}_1$ zu unterscheiden, den er zwar repräsentiert, mit dem er aber nicht identisch ist.

Wird $\overrightarrow{OP_1}$ in Komponenten in bezug auf das kartesische Achsenkreuz zerlegt, wobei die orthonormierten Basisvektoren in Richtung der positiven x- bzw. y-Achse mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ bezeichnet werden, so folgt:

$$\overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_1) = x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j}.$$

Diese fundamentale Beziehung ist anschaulich an vielen Beispielen, bei denen P_1 nicht nur im 1. Quadranten liegen darf, zu erläutern und zu beweisen.

Damit ist die Brücke zur kartesischen Koordinatendarstellung geschlagen: Die „skalaren Komponenten" oder „Koordinaten" des Ortsvektors sind in diesem Falle gleich den „kartesischen Koordinaten" des durch ihn dargestellten Punktes.

Hier ist es zweckmäßig, auch die Übertragung auf den Raum vorzunehmen:

$$P_1(x_1; y_1; z_1) \longrightarrow \overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_1) = x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} + z_1\,\mathfrak{k}.$$

Dabei ist nur auf die Orientierung von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ im Rechtssystem einzugehen; dieses ist aber ausführlich an Hand von Stabmodellen zu erklären.

Wichtig sind hierbei ausgedehnte Übungen im Übergang von der kartesischen Bestimmung eines Punktes zur vektoriellen Darstellung und umgekehrt an Hand von Zahlenbeispielen:

$$P_1\left(-2; \frac{1}{5}\right) \longrightarrow \overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_1) = -2\,\mathfrak{i} + \frac{1}{5}\,\mathfrak{j};$$

$$\overrightarrow{OP_2} = (\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 3\,\mathfrak{k} \longrightarrow P_2(1; -1; 3);$$

$$\overrightarrow{OP_3} = (\mathfrak{p}_3) = (2\,\mathfrak{p}_2) = 2\,\mathfrak{i} - 2\,\mathfrak{j} + 6\,\mathfrak{k} \longrightarrow P_3(2; -2; 6).$$

Die Schüler müssen dabei erfassen, daß der große Vorteil der Vektorsymbolik, ihre Prägnanz und Kürze, nur in Erscheinung tritt, wenn Herleitungen und Umformungen in allgemeinen Symbolen durchgeführt werden, daß aber konkrete Zahlenaufgaben den Übergang zur kartesischen Koordinatenschreibweise nötig machen.

6.2 Anwendungen aus der Trigonometrie und der analytischen Geometrie

Es wird empfohlen, dabei allmählich von der Schreibweise mit Ortsvektoren zur Schreibweise mit freien Vektoren überzugehen, aber immer wieder auf den Unterschied hinzuweisen.

6.201 Entfernung l zweier Punkte P_1 und P_2 in der Ebene und im Raum

Die „gerichtete Entfernung" entspricht dem Differenzvektor aus den beiden Ortsvektoren:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_2) - (\mathfrak{p}_1) \triangleq \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1.$$

Die Entfernung l selbst ist der Betrag dieses Vektors:

$$l = |(\mathfrak{p}_2) - (\mathfrak{p}_1)| \triangleq |\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1|.$$

Aus der graphischen Darstellung läßt sich für einen beliebigen Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_1) = x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j}$ zeigen:

$$|\overrightarrow{OP_1}| = |(\mathfrak{p}_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Folglich ergibt sich wegen

$$(\mathfrak{p}_2) - (\mathfrak{p}_1) = (x_2 - x_1)\,\mathfrak{i} + (y_2 - y_1)\,\mathfrak{j}$$

in kartesischen Koordinaten:

$$l = |(\mathfrak{p}_2) - (\mathfrak{p}_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Obwohl die Herleitung des Betrags eines Vektors aus dem skalaren Produkt als $|\mathfrak{p}| = \sqrt{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}}$ dem Sinne der Vektorrechnung besser entspricht, erscheint es zweckmäßig, bereits an dieser Stelle den Wert des Betrags in kartesischen

Koordinaten zu erarbeiten, um recht bald einen systematischen Aufbau der analytischen Geometrie in vektorieller Darstellung zu ermöglichen.

Im Raum ergibt sich:

$$(\mathfrak{p}_2) - (\mathfrak{p}_1) = (x_2 - x_1)\,\mathfrak{i} + (y_2 - y_1)\,\mathfrak{j} + (z_2 - z_1)\,\mathfrak{k};$$
$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

6.202 Neigungswinkel des Ortsvektors gegen die x-Achse

Anschaulich ist zu erarbeiten, daß ein Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$, der mit der x-Achse den Winkel φ einschließt, folgender Beziehung genügt:

$$\overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_1) = x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} = |\mathfrak{p}_1| \cos\varphi\,\mathfrak{i} + |\mathfrak{p}_1| \sin\varphi\,\mathfrak{j}.$$

Ist $\overrightarrow{OP_1}$ ein Einheitsvektor $(\mathfrak{p}_1^0)$, so gilt wegen $|\mathfrak{p}_1^0| = 1$:

$$(\mathfrak{p}_1^0) = \cos\varphi\,\mathfrak{i} + \sin\varphi\,\mathfrak{j}.$$

6.203 Additionstheoreme der Trigonometrie (Abb. 49)

$$\overrightarrow{OA} = (\mathfrak{a}^0) = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \sin\alpha\,\mathfrak{j}; \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OB} = (\mathfrak{b}^0) = \cos(\alpha + \beta)\,\mathfrak{i} + \sin(\alpha + \beta)\,\mathfrak{j}; \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OC} = (\mathfrak{c}^0) = \cos(90^\circ + \alpha)\,\mathfrak{i} + \sin(90^\circ + \alpha)\,\mathfrak{j} = -\sin\alpha\,\mathfrak{i} + \cos\alpha\,\mathfrak{j}. \tag{3}$$

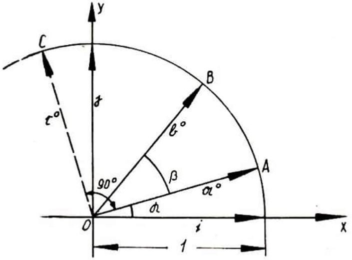

Abb. 49

Andererseits kann $\mathfrak{b}^0$ auch im orthonormierten Basissystem $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{c}^0$ dargestellt werden:

$$\overrightarrow{OB} = (\mathfrak{b}^0) = \cos\beta\,\mathfrak{a}^0 + \sin\beta\,\mathfrak{c}^0. \tag{4}$$

Gleichsetzen der rechten Seiten von (2) und (4) ergibt:

$$\cos(\alpha + \beta)\,\mathfrak{i} + \sin(\alpha + \beta)\,\mathfrak{j} = \cos\beta\,\mathfrak{a}^0 + \sin\beta\,\mathfrak{c}^0.$$

Mit (1) und (3) folgt schließlich:

$$\cos(\alpha + \beta)\,\mathfrak{i} + \sin(\alpha + \beta)\,\mathfrak{j} = \cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{i} + \sin\alpha\cos\beta\,\mathfrak{j} - \sin\alpha\sin\beta\,\mathfrak{i} + \cos\alpha\sin\beta\,\mathfrak{j}.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Mit $\alpha+\beta=\gamma$; $\alpha=\delta$; $\beta=\gamma-\delta$ folgen durch Auflösung nach $\sin(\gamma-\delta)$ beziehungsweise $\cos(\gamma-\delta)$ die beiden Formeln für die Winkeldifferenz.

6.204 Flächeninhalt eines Dreiecks $P_1P_2P_3$ (Abb. 50)

$$F = OP_1P_2 + OP_2P_3 - OP_1P_3$$
$$= \frac{1}{2}|\mathfrak{p}_1||\mathfrak{p}_2|\sin(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}|\mathfrak{p}_2||\mathfrak{p}_3|\sin(\gamma-\beta) - \frac{1}{2}|\mathfrak{p}_1||\mathfrak{p}_3|\sin(\gamma-\alpha).$$

Es folgt mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}2F &= |\mathfrak{p}_1||\mathfrak{p}_2|\sin\beta\cos\alpha - |\mathfrak{p}_1||\mathfrak{p}_2|\cos\beta\sin\alpha\\ &+ |\mathfrak{p}_2||\mathfrak{p}_3|\sin\gamma\cos\beta - |\mathfrak{p}_2||\mathfrak{p}_3|\cos\gamma\sin\beta\\ &- |\mathfrak{p}_1||\mathfrak{p}_3|\sin\gamma\cos\alpha + |\mathfrak{p}_1||\mathfrak{p}_3|\cos\gamma\sin\alpha\\ &= x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 + x_3y_1\\ &= x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2).\end{aligned}$$

Obwohl die Herleitung mit Hilfe des vektoriellen Produkts einfacher ist, stellt diese Herleitung ein gutes Beispiel für die Beziehung zwischen Vektoren und kartesischen Koordinaten dar.

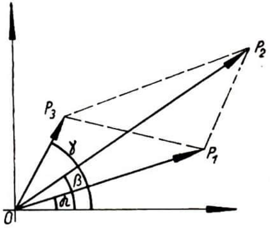

Abb. 50

6.205 Mittelpunkt P_3 *einer Strecke* P_1P_2

Grundgedanke: Ein Vektor (hier $\overrightarrow{P_1P_3}$) wird doppelt ausgedrückt:

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1);$$
$$\mathfrak{p}_3 = \frac{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}{2}.$$

Diese Beziehung gilt unabhängig davon, ob die Betrachtung in der Ebene oder im Raum durchgeführt wird. Darin liegt einer der großen Vorteile der vektoriellen Darstellung.

Der Unterschied zwischen planimetrischer und stereometrischer Betrachtungsweise zeigt sich erst beim Übergang zur Koordinatendarstellung:

In der Ebene:

$$x_3\mathfrak{i} + y_3\mathfrak{j} = \frac{x_1+x_2}{2}\mathfrak{i} + \frac{y_1+y_2}{2}\mathfrak{j}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt hieraus:

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2};\quad y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Im Raum:

$$x_3\,\mathfrak{i} + y_3\,\mathfrak{j} + z_3\,\mathfrak{k} = \frac{x_1 + x_2}{2}\,\mathfrak{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\,\mathfrak{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\,\mathfrak{k}\,;$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}\,;\ y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}\,;\ z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}\,.$$

Das Beispiel ist besonders gut geeignet, den Schülern den Vorteil der vektoriellen Darstellung durch deren Kürze und Klarheit vor Augen zu führen. Dazu muß herausgearbeitet und betont werden, daß einer einzigen Gleichung zwischen Vektoren in der Ebene zwei, im Raum sogar drei Gleichungen zwischen den (skalaren) kartesischen Koordinaten entsprechen.

Mit Hilfe von Zahlenbeispielen muß weiter gezeigt werden, daß dieser Vorteil aber verlorengeht, sobald statt mit allgemeinen Symbolen ($\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$) mit speziellen Zahlen gearbeitet wird.

Gegebenenfalls kann entsprechend der Teilpunkt T für ein beliebiges Teilverhältnis λ bestimmt werden.

6.206 Transformation durch Schiebung (Abb. 51)

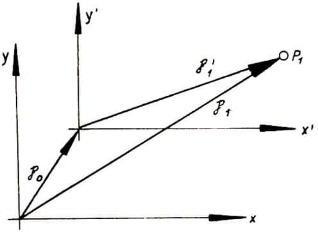

Abb. 51

x-y-System $\rightarrow$ x'-y'-System;

Verschiebungsvektor $\mathfrak{p}_0 = x_0\,\mathfrak{i} + y_0\,\mathfrak{j}$:

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}'_1\,;$$

$$x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} = (x_0 + x'_1)\,\mathfrak{i} + (y_0 + y'_1)\,\mathfrak{j}\,;$$

$$x_1 = x'_1 + x_0;\ y_1 = y'_1 + y_0.$$

Im Raum gilt entsprechend:

x-y-z-System $\rightarrow$ x'-y'-z'-System;

Verschiebungsvektor $\mathfrak{p}_0 = x_0\,\mathfrak{i} + y_0\,\mathfrak{j} + z_0\mathfrak{k}$ (an einem Modell veranschaulichen, nicht nur zeichnen!):

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{p}'_1\,;$$

$$x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} + z_1\,\mathfrak{k} = (x_0 + x'_1)\,\mathfrak{i} + (y_0 + y'_1)\,\mathfrak{j} + (z_0 + z'_1)\,\mathfrak{k}\,;$$

$$x_1 = x_0 + x'_1;\ y_1 = y_0 + y'_1;\ z_1 = z_0 + z'_1.$$

6.207 Geradengleichungen

Bei der Herleitung treten zwei Begriffe auf, die für den Schüler grundlegend neu sind:

a) der „veränderliche Vektor“ $\mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j}$;
b) der (die) „Parameter“, der (die) in der Gleichung zwischen Vektoren gewissermaßen die zweite (oder dritte) Veränderliche darstellt (darstellen).

A. *Punktrichtungsform* (Abb. 52)

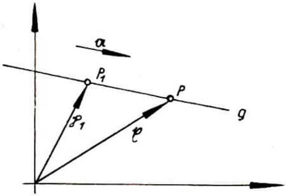

Abb. 52

Gegeben: $\mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{a}$.

$\overrightarrow{P_1P}$ wird doppelt ausgedrückt:

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{p}_1 = t\,\mathfrak{a}\,;$$

$$\mathfrak{x} = \underbrace{\mathfrak{p}_1}_{\text{Punkt}} + t\,\underbrace{\mathfrak{a}}_{\text{Richtung}}.$$

B. *Zweipunkteform* (Abb. 53)

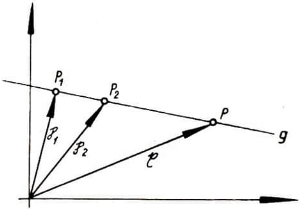

Abb. 53

Gegeben: $\mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_2$.

$\overrightarrow{P_1P}$ wird doppelt ausgedrückt:

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{p}_1 = t\,(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)\,;$$

$$\mathfrak{x} = \underbrace{\mathfrak{p}_1}_{\text{1. Punkt}} + t\,(\underbrace{\mathfrak{p}_2}_{\text{2. Punkt}} - \mathfrak{p}_1).$$

Das wichtigste Problem ist der Rechenweg beim Übergang zu den kartesischen Gleichungen; dieser bedarf deshalb einer methodisch gut durchdachten, ausführlichen Erörterung:

1. Schritt: Jeder Vektorgleichung entsprechen 2 Koordinatengleichungen (s. o.).

Zu A: Der die Richtung der Geraden bestimmende Vektor $\mathfrak{a}$ sei gegeben durch

$$\mathfrak{a} = a_x\,\mathfrak{i} + a_y\,\mathfrak{j} = |\mathfrak{a}|\cos\alpha\,\mathfrak{i} + |\mathfrak{a}|\sin\alpha\,\mathfrak{j},$$

wenn α sein Neigungswinkel gegen die x-Achse ist. Dann folgt:

$$(x - x_1)\,\mathfrak{i} + (y - y_1)\,\mathfrak{j} = t\,a_x\,\mathfrak{i} + t\,a_y\,\mathfrak{j}\,;$$

$$x - x_1 = t\,a_x;$$

$$y - y_1 = t\,a_y.$$

Zu B:

$$(x - x_1)\,\mathfrak{i} + (y - y_1)\,\mathfrak{j} = t\,(x_2 - x_1)\,\mathfrak{i} + t\,(y_2 - y_1)\,\mathfrak{j}\,;$$

$$x - x_1 = t\,(x_2 - x_1)\,;$$

$$y - y_1 = t\,(y_2 - y_1).$$

2. Schritt: Beide Koordinatengleichungen enthalten noch den Parameter t, der eliminiert werden muß, zweckmäßigerweise jeweils durch Division entsprechender Seiten beider Gleichungen durcheinander. Ergebnis:

Zu A:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a_y}{a_x} = \frac{|\mathfrak{a}|\sin\alpha}{|\mathfrak{a}|\cos\alpha} = \tan\alpha = m\,.$$

Zu B:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Es ist dringend notwendig, hierzu mannigfache Zahlenbeispiele in der vektoriellen und in der kartesischen Form einander gegenüberzustellen. Als wertvolle Übung sollten die Schüler die in den Lehrbüchern in Koordinatenform gegebenen Aufgaben zunächst in die vektorielle Form umgestalten.

Beispiel zu A:

Übliche Koordinatenform:		Umgestaltet in die vektorielle Form:
Geg.: $P_1\,(7;-3)$;	$\longrightarrow$	Geg.: $(\mathfrak{p}_1) = 7\,\mathfrak{i} - 3\,\mathfrak{j}$;
$m = -1{,}5$;	$\longrightarrow$	$\mathfrak{a} = -3\,\mathfrak{i} + 2\,\mathfrak{j}$
		oder $\mathfrak{a} = 3\,\mathfrak{i} - 2\,\mathfrak{j}$.

Der zweite Schritt bedarf einer genauen Erläuterung:

$$m = -1{,}5 = -\frac{3}{2} = \frac{-3}{2} = \frac{3}{-2} = \frac{a_y}{a_x}.$$

Daraus folgen:

$$a_y = -3k;\; a_x = 2k$$

oder

$$a_y = 3k;\; a_x = -2k$$

mit beliebigem reellen k;

und für $k = 1$:

$$a_y = -3;\; a_x = 2 \text{ bzw. } a_y = 3;\; a_x = -2;$$

also:

$$\mathfrak{a} = -3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} \text{ bzw. } \mathfrak{a} = 3\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j}.$$

Beispiel zu B:

Übliche Koordinatenform:		Umgestaltet in die vektorielle Form:
Geg.: $P_1\,(-2;3)$;	$\longrightarrow$	Geg.: $(\mathfrak{p}_1) = -2\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$;
$P_2\left(\frac{1}{2};\frac{7}{8}\right)$;	$\longrightarrow$	$(\mathfrak{p}_2) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{i} + \frac{7}{8}\,\mathfrak{j}$.

6.208 Wertetafel für Koordinaten von Punkten einer Geraden

Jedem Punkt der Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\,(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)$ ist ein bestimmter Parameterwert t zugeordnet. Man erhält die Ortsvektoren beliebiger Geradenpunkte, wenn t beliebige reelle Werte durchläuft. Daraus ergeben sich aber auch die Punktkoordinaten.

Beispiel:

Gegeben:

$$\mathfrak{p}_1 = -3\mathfrak{i} + 7\mathfrak{j};\; \mathfrak{p}_2 = 5\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j}.$$

Geradengleichung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= -3\mathfrak{i} + 7\mathfrak{j} + t\,(+5\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + 3\mathfrak{i} - 7\mathfrak{j}) \\ &= -3\mathfrak{i} + 7\mathfrak{j} + t\,(8\mathfrak{i} - 9\mathfrak{j}); \\ x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} = \mathfrak{x} &= (-3 + 8t)\,\mathfrak{i} + (7 - 9t)\,\mathfrak{j}; \\ x &= -3 + 8t;\; y = 7 - 9t. \end{aligned}$$

Wertetafel:

t	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+1$	$+2$	$+10$
x	-19	-7	-3	$-\frac{1}{3}$	$+5$	$+13$	$+77$
y	$+25$	$+11\frac{1}{2}$	$+7$	$+4$	-2	-11	-83

Man sollte dabei besonders herleiten: Für $t = 0$ ergibt sich $\mathfrak{p}_1$, für $t = 1$ ergibt sich $\mathfrak{p}_2$ mit den entsprechenden Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$.

6.209 Besondere Geradengleichungen

Parallele zur x-Achse: $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}$, also: $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\,\mathfrak{i}$;
x-Achse selbst: $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$, also: $\mathfrak{x} = t\,\mathfrak{i}$;
Parallele zur y-Achse: $\mathfrak{a} = \mathfrak{j}$, also: $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\,\mathfrak{j}$;
y-Achse selbst: $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$, also: $\mathfrak{x} = t\,\mathfrak{j}$.

6.210 Ebenengleichungen

Die dem Abschnitt 6.207 entsprechende Aufgabe im Raum ist die Herleitung der Ebenengleichung, nicht die der Geradengleichung. Es wird empfohlen, dabei zunächst drei Punkte P_1, P_2, P_3 als Bestimmungsgrößen zu verwenden und an die Herleitung von 6.207 B anzuschließen:

P_1 und P_2 bestimmen eine Gerade (I) in der Ebene:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\,(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1). \tag{I}$$

Durch $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{p}_1 + t_0\,(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)$ ist dann ein beliebiger Einzelpunkt X_0 dieser Geraden (I) festgelegt, der mit P_3 eine in der gleichen Ebene liegende Gerade (II) bestimmt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \mathfrak{p}_3 + r\,(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{p}_3)\\ &= \mathfrak{p}_3 + r\,[\mathfrak{p}_1 + t_0\,(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1) - \mathfrak{p}_3].\end{aligned} \tag{II}$$

Wandert X_0 auf der Geraden (I), so muß t_0 wieder durch den variablen Parameter t ersetzt werden. Dann überstreicht die Gerade (II) die gesamte Ebene, und

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_3 + r\,[\mathfrak{p}_1 + t\,(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1) - \mathfrak{p}_3]$$

gilt für jeden Punkt der Ebene. Es wird noch umgeformt zu:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_3 + r\,(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_3) - r\,t\,(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2)$$

und mit $-r\,t = s$ schließlich zu:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_3 + r\,(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_3) + s\,(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2).$$

Diese Gegenüberstellung sollte an einem Zahlenbeispiel fortgeführt werden.

Aus der Ebenengleichung läßt sich entsprechend 6.208 eine Wertetafel der Koordinaten beliebiger Ebenenpunkte gewinnen, wenn den Parametern r und s beliebige reelle Werte zugeordnet werden.

Nach 6.201 bedeuten $\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2$ die in der Ebene liegenden Vektoren $\overrightarrow{P_3P_1}$ beziehungsweise $\overrightarrow{P_2P_1}$. Werden sie mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet, so ergibt sich die „Punktrichtungsform" der Ebenengleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_3 + r\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}$$

im Gegensatz zur oben hergeleiteten „Dreipunkteform". Jene erfordert zur Festlegung der „Richtung" der Ebene zwei in dieser Ebene gelegene „Richtungsvektoren" $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ an Stelle eines einzigen Vektors, der zur Festlegung der Richtung einer Geraden genügt.

6.211 Schnittpunkt zweier Geraden

Der Grundgedanke zur Bestimmung des Schnittpunktes zweier Kurven muß wie folgt für die Koordinatenmethode und für die vektorielle Darstellung in Form einer Gegenüberstellung klar herausgearbeitet werden.

A. Nach der Koordinatenmethode:
Die Koordinaten x_s; y_s des Schnittpunktes müssen beide Kurvengleichungen erfüllen. Aus dem Gleichungssystem lassen sich die Unbekannten x_s; y_s errechnen.

B. In vektorieller Darstellung:
Der Ortsvektor $\mathfrak{x}_s$ des Schnittpunktes muß beide Kurvengleichungen erfüllen. Er läßt sich eliminieren, so daß ein Gleichungssystem mit den beiden Parametern r_s und t_s als Unbekannten übrigbleibt. Die Parameter und damit indirekt (zweifach! Kontrolle!) $\mathfrak{x}_s$ lassen sich errechnen.

Diese Gegenüberstellung sollte an einem Zahlenbeispiel fortgeführt werden.

Zahlenbeispiel: Gerade I sei bestimmt durch $P_1\,(2;\,2)$ und $P_2\,(7;\,6)$;
Gerade II sei bestimmt durch $P_3\,(3;\,5)$ und $P_4\,(6;\,1)$.

A.

$$\text{I.}\quad \frac{y_s - 2}{x_s - 2} = \frac{6-2}{7-2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{II.}\quad \frac{y_s - 5}{x_s - 3} = \frac{1-5}{6-3} = -\frac{4}{3}.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$x_s = \frac{129}{32}\,;\; y_s = \frac{29}{8}.$$

B.

$$\text{I.}\quad \mathfrak{x}_s = 2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + r_s(7-2)\,\mathfrak{i} + r_s(6-2)\,\mathfrak{j}$$

$$\text{II.}\quad \mathfrak{x}_s = 3\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + t_s(6-3)\,\mathfrak{i} + t_s(1-5)\,\mathfrak{j}$$

$$2\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + 5r_s\mathfrak{i} + 4r_s\mathfrak{j} = 3\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 3t_s\mathfrak{i} - 4t_s\mathfrak{j}$$

$$2 + 5r_s = 3 + 3t_s$$

$$2 + 4r_s = 5 - 4t_s.$$

Daraus folgt zunächst: $r_s = \dfrac{13}{32}$; $t_s = \dfrac{11}{32}$,

und dann aus I oder II: $\mathfrak{x}_s = \dfrac{129}{32}\mathfrak{i} + \dfrac{29}{8}\mathfrak{j}$;

$$x_s = \frac{129}{32}\,;\; y_s = \frac{29}{8}.$$

Das Durchrechnen dieser Grundaufgabe mit allgemeinen Symbolen ist nur in Ausnahmefällen ratsam, wohl aber sind mehrere Zahlenbeispiele empfehlenswert, um den Umgang mit Vektoren in Komponentendarstellung zu üben.

6.212 Kreisgleichung (Abb. 54)

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r \quad \text{mit} \quad \mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j};\ \mathfrak{m} = c\,\mathfrak{i} + d\,\mathfrak{j}$$

ergibt:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = r$$

oder:

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2.$$

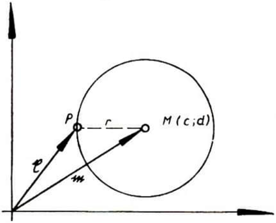

Abb. 54

6.213 Kugelgleichung

Die Kugelgleichung ist vektoriell identisch mit der Kreisgleichung: $|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r$. Der Unterschied liegt nur in der Koordinatenform:

$$\mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{m} = c\,\mathfrak{i} + d\,\mathfrak{j} + e\,\mathfrak{k};$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2} = r \quad \text{oder} \quad (x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2 = r^2.$$

7. Zur Einführung des skalaren und des vektoriellen Produkts

Dabei sollte nicht von Anwendungsbeispielen ausgegangen werden, da diese den Schülern meist nur wenig geläufig sind, sondern es sollte lieber herausgearbeitet werden, daß gewisse rechnerische Ausdrücke, die mit Hilfe zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildet werden können, in der Praxis so oft vorkommen, daß es sich lohnt, dafür
a) einen besonderen Namen und eine besondere Symbolik einzuführen und
b) die dafür gültigen Rechenregeln besonders zu untersuchen und zu formulieren.

Das trifft zu für:

A. einen Skalar c
von der Größe $c = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Name: Skalares Produkt.
Symbol: $c = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.

B. einen Vektor $\mathfrak{c}$
vom Betrage $|\mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, der so gerichtet ist, daß in der Reihenfolge $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ durch diese 3 Vektoren ein Rechtssystem gebildet wird.

Name: Vektorielles Produkt.
Symbol: $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

Die anderen zugelassenen Symbole werden nicht empfohlen.

Beispiele für das Auftreten dieser Rechenausdrücke in der Physik und in der Geometrie:

Zu A.

(1) Arbeit beim Bewegen einer Last auf einer schiefen Ebene

$$A = [|\mathfrak{G}| \cos(\mathfrak{G}, \mathfrak{s})]\,|\mathfrak{s}|$$

(Abb. 55a)

oder $$A = |\mathfrak{G}|\,[|\mathfrak{s}| \cos(\mathfrak{G}, \mathfrak{s})],$$

(Abb. 55b)

das heißt in beiden Fällen: $A = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{s}$;

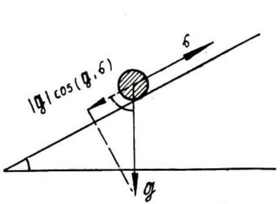

Abb. 55a

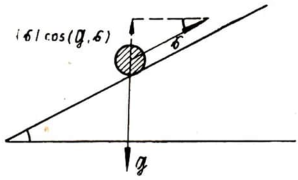

Abb. 55b

(2) Projektion eines Vektors auf einen anderen;
(3) Winkel zwischen zwei Vektoren vermittels des Kosinus;
(4) Richtungskosinus;
(5) Orthogonalität zweier Vektoren;
(6) Betrag eines Vektors.

Zu B.

(1) Mit Vorzeichen behafteter Flächeninhalt von Parallelogramm oder Dreieck (Unterschiedlicher Umlaufsinn; vgl. Integration!)

$$|\mathfrak{F}_1| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$$

(Abb. 56a)

$$|\mathfrak{F}_2| = |\mathfrak{b}|\,|\mathfrak{a}| \sin(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = |\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}|$$

(Abb. 56b)

$|\mathfrak{F}_1| = |\mathfrak{F}_2|$, aber $\mathfrak{F}_1 = -\mathfrak{F}_2$;

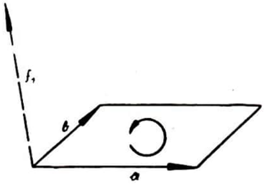

Abb. 56a

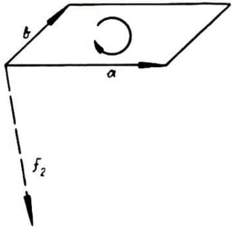

Abb. 56b

(2) Drehmoment;
(3) Winkel zwischen zwei Vektoren vermittels des Sinus;
(4) Parallelität zweier Vektoren.

Es wird empfohlen, beide Produkte (wie bei der Addition und Subtraktion) nicht als „Rechenoperation Multiplikation", sondern als zweckmäßiges Symbol für oft vorkommende Rechenausdrücke einzuführen. Die Bezeichnungen „Produkt" und „multiplikative Verknüpfung" werden erst durch die Rechenregeln motiviert, die beim skalaren Produkt weitgehend denen der Multiplikation von Zahlen ähneln. Beim vektoriellen Produkt trifft das nicht zu; diese Wortbildung erfolgt in Analogie zum Begriff „skalares Produkt", weil die Beträge beider Produkte durch ganz ähnliche Ausdrücke dargestellt sind:

$$|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \text{ bzw. } |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

8. Das skalare Produkt

8.1 Rechengesetze und Koordinatendarstellung

Für das skalare Produkt gelten drei Gesetze, die dem Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz bei der Multiplikation von Zahlen entsprechen. Wie bei der Produktbildung zweier rationaler Zahlen, zum Beispiel $(+3)\cdot(-4)$, nicht nur der Betrag der Faktoren berücksichtigt, sondern durch das Vorzeichen dem Ergebnis, hier (-12), auf derZahlengeraden auch eine bestimmte Richtung zugewiesen wird, ist auch bei dem skalaren Produkt zweier Vektoren neben den Beträgen ihr Richtungsunterschied durch $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zu berücksichtigen.

1. $$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}.$$

(Anschaulich erläutern und rechnerisch beweisen mit

$$\cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \cos[-(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})] = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})!)$$

2. $$\mathfrak{a}\cdot(t\,\mathfrak{b}) = (t\,\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{b} = t\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}).$$

(Anschaulich und rechnerisch beweisen!)

3. $$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}.$$

Die Begründung bei allgemeiner räumlicher Lage von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ist schwierig; deshalb wird die Beschränkung auf den Fall, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in ein und derselben Ebene liegen, empfohlen. Dafür kann der Beweis mit Hilfe des Projektionssatzes unter strenger Beachtung der Unterschiede zwischen Vektor und Skalar geführt werden.

Aus $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x} = z$ läßt sich $\mathfrak{x}$ nicht eindeutig bestimmen (anschaulich zeigen!), daher ist die Umkehrung zu einem der Division entsprechenden Symbol nicht möglich.

Folgende *Sonderfälle* sind eingehend zu besprechen:

a) $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = 0$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ ist möglich, falls $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 90°$; $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = 0$ ist also die Bedingung für die Orthogonalität zweier Vektoren. Man achte streng auf die Schreibweise mit der Zahl 0 im Gegensatz zum Nullvektor $\mathfrak{o}$! Es ist zu betonen, daß hier ein „Produkt" gleich 0 werden kann, ohne daß einer seiner „Faktoren" Null sein muß, im Gegensatz zum Zahlenprodukt, für das $a\cdot b = 0$ nur dann gilt, wenn wenigstens $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

b) $$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}||\mathfrak{a}|\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = |\mathfrak{a}|^2 \text{ wegen } \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 1.$$

Nunmehr erfolgt die Festlegung einer neuen Symbolik:

1. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$. Daraus folgt: $|\mathfrak{a}|^2 = \mathfrak{a}^2$.
Während auf der linken Seite der Gleichung das Quadrat eines Skalars steht, auf das ohne weiteres die Wurzelgesetze des Rechnens mit Zahlen angewendet werden können, also $\sqrt{|\mathfrak{a}|^2} = \left(\sqrt{|\mathfrak{a}|}\right)^2 = |\mathfrak{a}|$, trifft das für die rechte Seite nicht zu. Hier wird weiter als neues Symbol festgesetzt:

2. $\sqrt{\mathfrak{a}^2} = |\mathfrak{a}|$, ohne daß dabei die Wurzelgesetze des Rechnens mit Zahlen zur Anwendung kommen dürfen. Es ist zu betonen:

$$\sqrt{\mathfrak{a}^2} \neq (\sqrt{\mathfrak{a}})^2\text{; also } \sqrt{\mathfrak{a}^2} \neq \mathfrak{a}.$$

Das bereitet den Schülern erfahrungsgemäß anfänglich größte Schwierigkeiten. Deshalb sollte anfangs statt $\mathfrak{a}^2$ lieber $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}$ geschrieben werden.

c)
$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 1, \text{ da stets } \mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{a}^0 = 1.$$
$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} = 0.$$

Jetzt kann die *Koordinatendarstellung des skalaren Produkts* rechnerisch hergeleitet werden:

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j};\ \mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j};$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j}) \cdot (b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j}) = \cdots = a_x b_x + a_y b_y.$$

Es ist zu beachten, daß dabei das Gesetz 3. in der erweiterten Form $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$ gebraucht wird. Der Hinweis auf die formale Analogie zur Klammermultiplikation mit Zahlen ist kein Beweis. Es muß vielmehr rechnerisch gezeigt werden, daß aus den Gesetzen über die skalare Multiplikation tatsächlich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}$ als Ergebnis folgt.

8.2 Anwendungen, speziell aus der analytischen Geometrie

8.201 Betrag eines Vektors $\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j}$ *(nachträgliche vektorielle Begründung)*

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Im Raum:
$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k};$$
$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

8.202 Betrag eines Ortsvektors $\overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_1) = x_1 \mathfrak{i} + y_1 \mathfrak{j}$;

$$|\overrightarrow{OP_1}| = |(\mathfrak{p}_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Im Raum:
$$\overrightarrow{OP_1} = (\mathfrak{p}_1) = x_1 \mathfrak{i} + y_1 \mathfrak{j} + z_1 \mathfrak{k};$$
$$|\overrightarrow{OP_1}| = |(\mathfrak{p}_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

8.203 Entfernung l zweier Punkte P_1 und P_2 (Wiederholung und nachträgliche vektorielle Herleitung)

$$l = \sqrt{(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1) \cdot (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Im Raum: $$l = \sqrt{(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1) \cdot (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

8.204 Kreisgleichung und Kugelgleichung

(Wiederholung und vektorielle Herleitung)

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r; \quad |\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = \sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{m}) \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{m})}$$

gilt gleichzeitig für Kreis und Kugel:

Kreis

$$\mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{m} = c\,\mathfrak{i} + d\,\mathfrak{j}$$
$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$
$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2.$$

Kugel

$$\mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{m} = c\,\mathfrak{i} + d\,\mathfrak{j} + e\,\mathfrak{k}$$
$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2}$$
$$(x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2 = r^2.$$

8.205 Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|} = \mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{b}^0 = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a\,b}.$$

Im Raum: $$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a\,b}.$$

8.206 Richtungskosinus

Als Richtungskosinus werden die Kosinuswerte der Winkel α, β, γ des Vektors $\mathfrak{a} = a_x\,\mathfrak{i} + a_y\,\mathfrak{j} + a_z\,\mathfrak{k}$ gegen die Basisvektoren $\mathfrak{i}$ bzw. $\mathfrak{j}$ bzw. $\mathfrak{k}$ definiert. Sie lassen sich als Sonderfälle von 8.205 herleiten, wenn $\mathfrak{b}$ der Reihe nach gleich $\mathfrak{i}$ bzw. $\mathfrak{j}$ bzw. $\mathfrak{k}$ gesetzt wird.

a) $\mathfrak{b} = \mathfrak{i} = 1\mathfrak{i} + 0\mathfrak{j} + 0\mathfrak{k};$

$$\cos\alpha = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{i}) = \frac{a_x}{a}.$$

b) $\mathfrak{b} = \mathfrak{j} = 0\mathfrak{i} + 1\mathfrak{j} + 0\mathfrak{k};$

$$\cos\beta = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{j}) = \frac{a_y}{a}.$$

c) $\mathfrak{b} = \mathfrak{k} = 0\mathfrak{i} + 0\mathfrak{j} + 1\mathfrak{k};$

$$\cos\gamma = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Wird statt $\mathfrak{a}$ der Einheitsvektor $\mathfrak{a}^0 = (a^0)_x\,\mathfrak{i} + (a^0)_y\,\mathfrak{j} + (a^0)_z\,\mathfrak{k}$ verwendet, so folgt, wegen $|\mathfrak{a}^0| = a^0 = \sqrt{(a^0)_x^2 + (a^0)_y^2 + (a^0)_z^2} = 1$ und wegen

$$\cos\alpha = \frac{(a^0)_x}{(a^0)} = (a^0)_x; \quad \cos\beta = \frac{(a^0)_y}{(a^0)} = (a^0)_y; \quad \cos\gamma = \frac{(a^0)_z}{(a^0)} = (a^0)_z \quad :$$

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1, \text{ also } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

In der x-y-Ebene ergibt sich, wegen $(a^0)_z = 0$, als Spezialfall

$$\mathfrak{a}^0 = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \cos\beta\,\mathfrak{j}$$

und mit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ oder $\cos\beta = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha$ schließlich

$$\mathfrak{a}^0 = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \sin\alpha\,\mathfrak{j}.$$

Das wurde bereits im Abschnitt 6.202 hergeleitet.

8.207 Additionstheorem der Trigonometrie (Abb. 57)

$$\mathfrak{a}^0 = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \sin\alpha\,\mathfrak{j}$$

$$\mathfrak{b}^0 = \cos\beta\,\mathfrak{i} + \sin\beta\,\mathfrak{j}$$

$$\cos(\mathfrak{b}^0, \mathfrak{a}^0) = \cos(\alpha - \beta) = \mathfrak{b}^0 \cdot \mathfrak{a}^0 = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$$

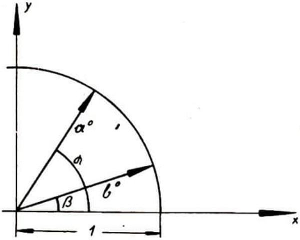

Abb. 57

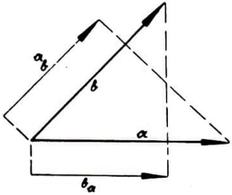

Abb. 58

8.208 Projektion eines Vektors auf einen anderen (Abb. 58)

Es interessieren nur die Beträge der Projektionsvektoren:

$$|\mathfrak{a}_\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^0;$$

$$|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}^0.$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ Vektoren mit gleicher Richtung und gleichem Durchlaufsinn sind, folgt:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}_\mathfrak{a}|\cos 0^\circ = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}.$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}$$

und daraus:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}.$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist gleich dem skalaren Produkt aus dem einen von beiden und dem Projektionsvektor des anderen auf den ersten.

8.209 Hessesche Form der Geradengleichung (Abb. 59)

In der bisher verwendeten Punktrichtungsform der Geradengleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\,\mathfrak{a}$ bedeutet $\mathfrak{p}_1$ den Ortsvektor eines beliebigen Geradenpunktes. Jetzt soll statt dessen der Ortsvektor $\mathfrak{n}$ verwendet werden, der senkrecht auf der Geraden steht, der also zum Fußpunkt N des Lotes (der Normalen) von 0 auf die Gerade führt. Für ihn gilt: $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{a} = 0$.

Dann lautet die Geradengleichung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n} + t\,\mathfrak{a} \text{ mit } \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{a} = 0, \text{ also auch } \mathfrak{n}^0 \cdot \mathfrak{a} = 0$$

Als neue, in der Vektorrechnung häufig angewandte Umformung einer Vektorgleichung tritt zum erstenmal die „skalare Multiplikation aller Glieder mit ein

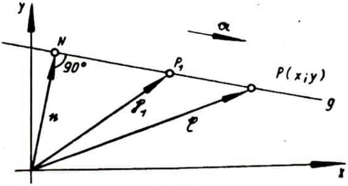

Abb. 59

und demselben geeigneten Vektor“ auf. In diesem Fall werden alle Glieder der Gleichung skalar mit $\mathfrak{n}^0$ multipliziert:

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}^0 + t\,\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{n}^0.$$

Mit $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}^0 = |\mathfrak{n}|\,\mathfrak{n}^0 \cdot \mathfrak{n}^0 = |\mathfrak{n}| = n$ und $t\,\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{n}^0 = 0$ folgt schließlich:

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}^0 - n = 0.$$

Wird $\sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{n}^0) = \varphi$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\mathfrak{n}^0 = \cos\varphi\,\mathfrak{i} + \sin\varphi\,\mathfrak{j},$$

und wegen $\mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j}$ folgt für $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}^0 - n = 0$

schließlich: $(x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j}) \cdot (\cos\varphi\,\mathfrak{i} + \sin\varphi\,\mathfrak{j}) - n = 0.$

Das ist in kartesischen Koordinaten als Hessesche Form bekannt:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - n = 0.$$

Das Umformen einer Gleichung $Ax + By + C = 0$ in die Hessesche Form ist wie üblich mit dem Proportionalitätsfaktor

$$f = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

mit der Bedingung $f \cdot C < 0$ zu erörtern:

Aus $f \cdot Ax + f \cdot By + f \cdot C = x\cos\varphi + y\sin\varphi - n$ folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$f \cdot A = \cos\varphi,$$
$$f \cdot B = \sin\varphi,$$
$$f^2(A^2 + B^2) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$
$$f = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}};\; n = f \cdot C < 0.$$

8.210 Abstand d eines Punktes P von einer Geraden g (Abb. 60)

Der Betrag des Projektionsvektors von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{n}$ ist $d + n$, also $|\mathfrak{p}_\mathfrak{n}|$.

Nach 8.208 gilt: $|\mathfrak{p}_\mathfrak{n}| = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{n}^0$. Daraus folgt $d = |\mathfrak{p}_\mathfrak{n}| - n = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{n}^0 - n$. Für $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{n}^0 - n$ kann gesetzt werden: $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n}^0 - n = x \cos\varphi + y \sin\varphi - n$ mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} = x_0 \mathfrak{i} + y_0 \mathfrak{j}$. Dann ergibt sich:

$$d = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - n.$$

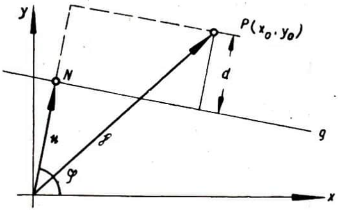

Abb. 60

8.211 Kosinussatz der ebenen Trigonometrie

In jedem Dreieck gilt:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}; \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b}.$$

Jede Seite der zweiten Gleichung wird skalar mit sich selbst multipliziert:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}).$$

$$|\mathfrak{a}|^2 = |\mathfrak{c}|^2 - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} - \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b} + |\mathfrak{b}|^2. \tag{1}$$

Daraus folgt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$.

Es ist zu beachten: $(c - b)^2$ darf dabei nicht ohne Begründung auf $(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$ übertragen werden!

Der pythagoreische Lehrsatz folgt aus (1) für $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} = 0$.

8.212 Beweise von Lehrsätzen, speziell von solchen, bei denen die Orthogonalität eine Rolle spielt.

Beispiele:

a) „Die Winkelhalbierenden von Nebenwinkeln stehen senkrecht aufeinander."

Vorbereitung: Die Winkelhalbierende $\mathfrak{w}$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wird mit Hilfe der Einheitsvektoren $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{b}^0$, die einen Rhombus bilden, bestimmt.

Es ergibt sich bei zwei Nebenwinkeln also:

$$\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0;$$
$$\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{a}^0 - \mathfrak{b}^0.$$

Es wird gebildet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_1 \cdot \mathfrak{w}_2 &= (\mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0) \cdot (\mathfrak{a}^0 - \mathfrak{b}^0) \\ &= \mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0 \cdot \mathfrak{a}^0 - \mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{b}^0 - \mathfrak{b}^0 \cdot \mathfrak{b}^0 \\ &= 1 - 1 = 0; \end{aligned}$$

$\mathfrak{w}_1 \cdot \mathfrak{w}_2 = 0$ bedeutet aber, daß $\mathfrak{w}_1 \perp \mathfrak{w}$; w. z. b. w.

b) „Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in ein und demselben Punkt“ (Abb. 61).

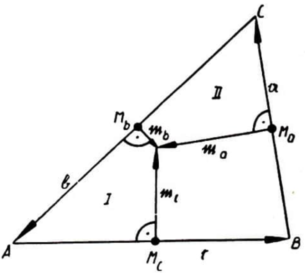

Abb. 61

Voraussetzung:

$$\mathfrak{m}_c \cdot \mathfrak{c} = 0,$$
$$\mathfrak{m}_a \cdot \mathfrak{a} = 0,$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}.$$

Behauptung:

$$\mathfrak{m}_b \cdot \mathfrak{b} = 0.$$

Beweis:

In (I):

$$\mathfrak{m}_c = \mathfrak{m}_b - \frac{\mathfrak{b}}{2} - \frac{\mathfrak{c}}{2} = \mathfrak{m}_b + \frac{\mathfrak{a}}{2}.$$

In (II):

$$\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_b + \frac{\mathfrak{a}}{2} + \frac{\mathfrak{b}}{2} = \mathfrak{m}_b - \frac{\mathfrak{c}}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}_c \cdot \mathfrak{c} &= \mathfrak{m}_b \cdot \mathfrak{c} + \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{2} = 0 \\ \mathfrak{m}_a \cdot \mathfrak{a} &= \mathfrak{m}_b \cdot \mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}}{2} = 0 \end{aligned}\right| +$$

$$\mathfrak{m}_b \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{m}_b \cdot (-\mathfrak{b}) = -\mathfrak{m}_b \cdot \mathfrak{b} = 0;$$

w. z. b. w.

c) „Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in ein und demselben Punkt“ (Abb. 62).

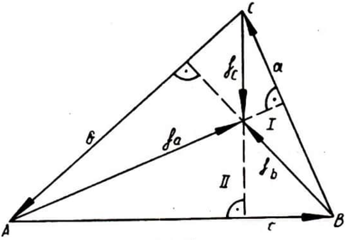

Abb. 62

Voraussetzung:

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{h}_c = 0,$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{h}_a = 0.$$

Behauptung:

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h}_b = 0.$$

Beweis:

In (I):

$$\mathfrak{h}_c = \mathfrak{h}_b - \mathfrak{a}.$$

In (II):

$$\mathfrak{h}_a = \mathfrak{c} + \mathfrak{h}_b.$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{h}_b - \mathfrak{a}) &= \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{h}_b - \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} = 0 \\ \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{h}_b) &= \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{h}_b = 0 \end{aligned}\right| +$$

$$\mathfrak{h}_b \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{h}_b \cdot (-\mathfrak{b}) = -\mathfrak{h}_b \cdot \mathfrak{b} = 0;$$

w. z. b. w.

9. Das vektorielle Produkt

9.1 Rechengesetze und Koordinatendarstellung

Die Behandlung des vektoriellen Produkts verlangt die räumliche Betrachtungsweise; Modelle (Parallelogrammschablone mit senkrechtem Stab mit Pfeilspitze) müssen die Raumvorstellung unterstützen.

Es muß besonders herausgearbeitet werden, daß $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ nicht unbedingt als in den Raum weisender Vektor definiert werden müßte; vielmehr geschieht das deshalb, um in einfacher Weise den Flächenumlaufsinn darstellen zu können. Dazu sollte auch der Fachbegriff „Stellungsvektor der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Ebene" eingeführt werden.

Analog zum skalaren Produkt gibt es auch beim Vektorprodukt drei grundlegende Verknüpfungsgesetze.

1. $$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \neq \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}, \text{ sondern } \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}),$$
$$\text{aber: } |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}|.$$

Zu diesem Gesetz sollte eine anschauliche Begründung am Modell und ein rechnerischer Beweis mit $\sin(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \sin[-(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})] = -\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gegeben werden. Es ist besonders zu beachten und bei allen Gelegenheiten klar herauszuarbeiten, daß es beim Vektorprodukt gewisse Aussagen und Gesetze gibt, die den Vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ selbst, und andere, die nur seinen Betrag $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ betreffen.

2. $$t(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = t\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times t\,\mathfrak{b}.$$

Da es sich um eine Vervielfachung eines Vektors handelt, muß sich der Beweis in erster Linie auf den Betrag erstrecken; denn bei $t > 0$ erfolgt keine Richtungsänderung, bei $t < 0$ nur eine Richtungsumkehr.

3. $$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}.$$

Auf den sehr schwierigen Beweis sollte verzichtet werden. Dagegen ist die Wichtigkeit der Beibehaltung der richtigen Reihenfolge zu betonen.

Aus $\mathfrak{a} \times \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ läßt sich $\mathfrak{x}$ nicht eindeutig bestimmen (anschaulich begründen!), daher ist die Umkehrung zu einem der Division entsprechenden Symbol nicht möglich.

Auf die Möglichkeit drei- und mehrfacher Produktbildungen (rückschauend und vergleichend unter Einbeziehung der Vervielfachung und der skalaren Multiplikation) kann kurz eingegangen werden, doch entfällt jede systematische Untersuchung.

Folgende *Sonderfälle* sind eingehend zu besprechen:

a) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$ ist möglich, falls $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0°$.
$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist also die Bedingung für die Parallelität zweier Vektoren, die der Orthogonalitätsbedingung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ entspricht. Im Unterricht ist streng auf die Unterscheidung von $\mathfrak{o}$ und 0 zu achten, die Schüler sind immer wieder zur Erläuterung dieses Unterschieds zu veranlassen.

b) Auch das Vektorprodukt liefert eine Orthogonalitätsbedingung, nämlich:
$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|, \text{ falls } \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 90°.$$
Sie ist aber weniger gebräuchlich als $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$.

c) $$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}.$$

Es muß besonders betont werden, daß Quadrat- und Wurzelsymbol hier im Gegensatz zum skalaren Produkt nicht verwendet werden.

d) $$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{o} \text{ (Aussage über die Vektoren!)}$$
$$|\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}| = |\mathfrak{j} \times \mathfrak{k}| = |\mathfrak{k} \times \mathfrak{i}| = 1 \text{ (Aussage über die Beträge!)}$$

Dagegen: $\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = -(\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) = \mathfrak{k}$ (Aussage über die Vektoren! Zyklische
$\mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = -(\mathfrak{k} \times \mathfrak{j}) = \mathfrak{i}$ Vertauschung ist zu beachten!)
$\mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = -(\mathfrak{i} \times \mathfrak{k}) = \mathfrak{j}$.

Jetzt kann die *Koordinatendarstellung* des Vektorprodukts rechnerisch hergeleitet werden. Dabei wird empfohlen, zunächst $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nur in der $\mathfrak{i}$-$\mathfrak{j}$-Ebene anzunehmen:

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j}; \quad \mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j}.$$

Dann folgt:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j}) \times (b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j}) = \cdots$$
$$= (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathfrak{k}.$$

Für zwei Ortsvektoren

$$\overrightarrow{OP}_1 = (\mathfrak{p}_1) = x_1 \mathfrak{i} + y_1 \mathfrak{j}; \quad \overrightarrow{OP}_2 = (\mathfrak{p}_2) = x_2 \mathfrak{i} + y_2 \mathfrak{j}$$

ergibt sich dann:

$$(\mathfrak{p}_1) \times (\mathfrak{p}_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\mathfrak{k}$$

und

$$|(\mathfrak{p}_1) \times (\mathfrak{p}_2)| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Im räumlichen Koordinatensystem ergibt sich mit

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k} \quad \text{für } \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$$

ein Ausdruck, der zwar in der Literatur gewöhnlich in Determinantenform geschrieben wird, der aber unter Verzicht auf diese Symbolik trotzdem hergeleitet werden sollte:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k}) \times (b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k}) = \cdots$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathfrak{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathfrak{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathfrak{k}.$$

9.2 Anwendungen

9.21 Sinus des Winkels zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$

$$\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|} = |\mathfrak{a}^0 \times \mathfrak{b}^0| = \frac{|a_x b_y - a_y b_x|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{|a_x b_y - a_y b_x|}{a\,b}.$$

Es ist zu beachten, daß die Übertragung in den Raum – im Gegensatz zu $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ – zu einer wesentlich komplizierteren Beziehung führt. Deshalb sollte die Herleitung nur erfolgen, wenn es die Klassensituation erlaubt.

9.22 Tangens des Winkels zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$

$$\tan(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} = \frac{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = \frac{|a_x b_y - a_y b_x|}{a_x b_x + a_y b_y}.$$

Die Division durch $a_x b_x$ führt über die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{b}^0$ zur Schnittwinkelformel $\tan\delta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

9.23 Additionstheorem der Trigonometrie (Abb. 63)

$$\mathfrak{a}^0 = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \sin\alpha\,\mathfrak{j};$$
$$\mathfrak{b}^0 = \cos\beta\,\mathfrak{i} + \sin\beta\,\mathfrak{j}.$$
$$\sin(\mathfrak{b}^0, \mathfrak{a}^0) = \sin(\alpha - \beta) = |\mathfrak{b}^0 \times \mathfrak{a}^0| = |\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha|.$$

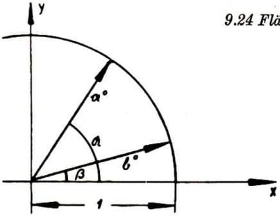

Abb. 63

9.24 Fläche von Parallelogramm und Dreieck (Abb. 64)

$$F_P = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |a_x b_y - a_y b_x|;$$
$$F_D = \frac{1}{2} F_P.$$

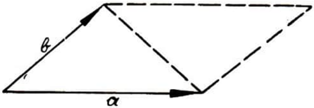

Abb. 64

9.25 Sinussatz der Trigonometrie

Es gilt folgender Grundgedanke: Die doppelte Dreiecksfläche wird dreimal, je durch zwei andere Seitenvektoren, berechnet:

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}| = |\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}|;$$
$$|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|\sin\gamma = |\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|\sin\alpha = |\mathfrak{c}||\mathfrak{a}|\sin\beta \quad |: |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|$$
$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$

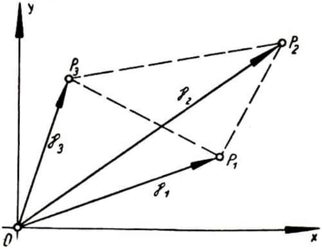

Abb. 65

9.26 Flächeninhalt eines Dreiecks $P_1P_2P_3$ (Abb. 65)

$$F_D = OP_1P_2 + OP_2P_3 - OP_1P_3;$$
$$\begin{aligned} 2F_D &= |\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_2| + |\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_3| - |\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_3| \\ &= x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ &= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

9.27 Projektion eines Vektors auf das Lot zu einem anderen (Abb. 66)

Der Projektionsvektor von $\mathfrak{b}$ auf das Lot zu $\mathfrak{a}$ sei $\mathfrak{b}_l$, der Projektionsvektor von $\mathfrak{a}$ auf das Lot zu $\mathfrak{b}$ sei $\mathfrak{a}_l$ genannt.
Dann gilt:

$$|\mathfrak{b}_l| = |\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

und da

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

ergibt sich:

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}_l|.$$

Andererseits ist:

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_l| = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}_l| \sin 90° = |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}_l|.$$

Daraus folgt $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_l|$. Da beide Vektoren offenbar auch gleiche Richtung und gleichen Durchlaufsinn haben, gilt:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_l.$$

Entsprechendes läßt sich für $\mathfrak{a}_l \times \mathfrak{b}$ zeigen, so daß gilt:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_l = \mathfrak{a}_l \times \mathfrak{b}.$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist gleich dem in gleicher Anordnung gebildeten Vektorprodukt aus dem einen von beiden und der Projektion des anderen auf das Lot zum ersten.

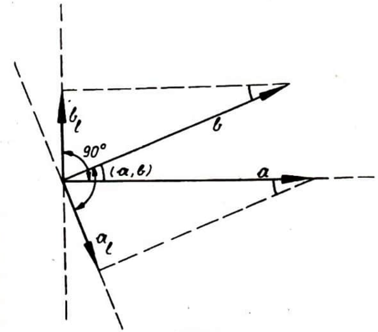

Abb. 66

DISKUSSIONSBEITRAG NR. 5

Einführung in die Vektorrechnung

Bruno Gonschorek

Diesem Beitrag liegt ein vom Pädagogischen Bezirkskabinett Leipzig veröffentlichtes und von J. Fritscher bearbeitetes Beiblatt zum Lehrbuch für Mathematik der Klasse 12 der erweiterten Oberschule zugrunde.

1. Allgemeine Betrachtungen

1.1 Skalare

Viele physikalische Größen, wie zum Beispiel die Temperatur, die Zeit, die Masse, die Arbeit und andere, sind durch die Angabe einer einzigen Zahl eindeutig bestimmt oder charakterisiert. Das gleiche trifft zu für die Größe eines Winkels, für die Länge einer Strecke, für den Inhalt einer Fläche oder für das Volumen eines Körpers.

Größen, die durch eine einzige Zahl charakterisiert sind, nennen wir *Skalare*[1]. Skalare lassen sich veranschaulichen, zum Beispiel durch Strecken oder durch Flächen. Sie werden mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

1.2 Gerichtete Größen oder Vektoren

In der Physik stoßen wir in der Mehrzahl der Fälle auf Größen, die durch die Angabe einer einzigen Zahl nicht eindeutig festgelegt sind. Bei einer Kraft reicht beispielsweise die Angabe ihrer Größe nicht aus. Die Kraft wirkt in einer bestimmten Richtung und ist damit erst durch die Angabe ihrer Größe (veranschaulicht durch eine Strecke), des Richtungswinkels ihrer Trägergeraden und des Durchlaufsinns eindeutig festgelegt. Solche Größen bezeichnen wir als *gerichtete Größen* oder auch als *Vektoren*.

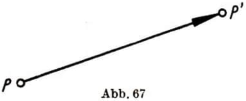

Abb. 67

Ein Vektor läßt sich durch einen Pfeil veranschaulichen (Abb. 67). Die Pfeilspitze gibt den Durchlaufsinn an, die Länge des Pfeils entspricht dem Zahlenwert und seine Richtung der Richtung der betreffenden (physikalischen) Größe.

Beispiele für vektorielle Größen sind die Kraft, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Schwerefeldstärke, die elektrische und magnetische Feldstärke, das Drehmoment.

Vektoren bezeichnen wir mit deutschen Buchstaben.

2. Vektordefinition und Bezeichnungen

2.1 Vektorbegriff

Ein Vektor stellt eine Verschiebung des Raumes dar, wobei jeder Punkt des Raumes in derselben Richtung und um denselben Betrag verschoben wird. Demnach sind Vektoren gleich, wenn sie gleiche Länge, gleichen Durchlaufsinn und gleiche Richtung haben. Man bezeichnet solche Vektoren auch als freie Vektoren.

Damit stellt jede gerichtete Strecke $\overrightarrow{AB}$ mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B einen Vektor dar.

2.2 Linienflüchtige Vektoren und Ortsvektoren

2.21 Linienflüchtige Vektoren

Vektoren, die man nur auf ihrer Trägergeraden verschieben darf, nennt man linienflüchtige Vektoren (Kraft).

Linienflüchtige Vektoren sind dann und nur dann gleich, wenn sie gleiche Länge und gleichen Durchlaufsinn haben und auf derselben Geraden liegen.

[1] scalae (lat.) heißt: die Leiter.

2.22 *Ortsvektoren*

Vektoren, deren Anfangspunkt nicht verschoben werden darf, nennen wir Ortsvektoren (Weg, Geschwindigkeit, Feldstärke).

Ortsvektoren sind dann und nur dann gleich, wenn sie gleiche Länge, dieselbe Richtung, denselben Durchlaufsinn und denselben Anfangspunkt haben.

2.3 *Übungen*

1. Alle Vektoren in Abb. 68 seien Ortsvektoren. Welche sind dann gleich?
2. Alle Vektoren in Abb. 68 mögen linienflüchtig sein. Welche sind dann gleich?
3. Alle Vektoren in Abb. 68 seien freie Vektoren. Welche sind dann gleich?

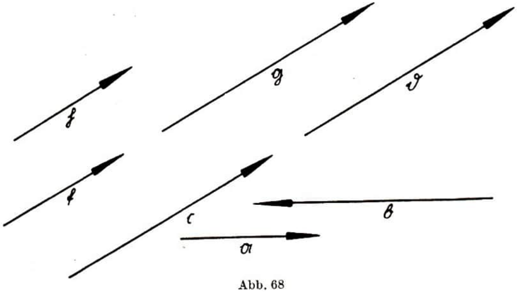

Abb. 68

2.4 *Weitere Bezeichnungen*

1. Einen Vektor von der Länge 1 nennt man Einheitsvektor und bezeichnet ihn mit dem Buchstaben $\mathfrak{e}$.
2. Einen Vektor von der Länge Null nennt man Nullvektor und bezeichnet ihn mit $\mathfrak{o}$. Wir können ihm keine oder jede Richtung zuordnen.
3. Die Länge des Vektors $\mathfrak{a}$ drückt man durch $|\mathfrak{a}|$ aus, gesprochen „$\mathfrak{a}$ absolut", oder durch a, gesprochen „Länge von $\mathfrak{a}$".

2.5 *Ortsvektoren des Nullpunktes*

Oftmals ist es notwendig, Vektoren im Koordinatensystem festzulegen. Ortsvektoren des Nullpunktes sind Vektoren, deren Anfangspunkte im Nullpunkt des Koordinatensystems liegen. Wir benutzen sie zur Festlegung ihres Endpunktes (Abb. 69).

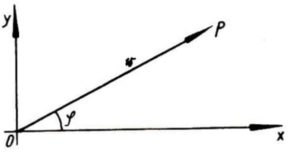

Abb. 69

1. Durch $|\mathfrak{r}| = r$ und den Richtungswinkel φ sind der Vektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}$ und damit auch der Punkt P eindeutig festgelegt.
2. Der Vektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}(r; \varphi)$ ist durch die Koordinaten des Endpunktes P eindeutig festgelegt.

2.6 Übungen zur Bestimmung von Vektoren im zweidimensionalen Raum

1. Zeichne den Vektor $\mathfrak{r}(r; \varphi)$ und bestimme die Koordinaten seines Endpunktes zeichnerisch und rechnerisch!

   a) $\mathfrak{r}_1(3; 40°)$ b) $\mathfrak{r}_2(4; 60°)$ c) $\mathfrak{r}_3(5; 30°)$ d) $\mathfrak{r}_4(6{,}5; 140°)$.

2. Zeichne den Vektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}$ aus den Koordinaten seines Endpunktes P und bestimme r und φ aus der Zeichnung sowie rechnerisch!

   a) $P_1(4; 5)$ b) $P_2(6; 3)$ c) $P_3(3; -4)$ d) $P_4(-4; -6)$.

3. Der freie Vektor $\mathfrak{v}$ verschiebe den Punkt P in P'. Bestimme P' zeichnerisch und rechnerisch!

   a) $P_1(4; 5)$, $\mathfrak{v}_1(3; 60°)$ b) $P_2(-4; 3)$, $\mathfrak{v}_2(5; 230°)$ c) $P_3(2; -3)$, $\mathfrak{v}_3(6{,}5; 310°)$.

4. Gehe von dem Vektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}$ aus und stelle die Verschiebung des Punktes P nach P' als Vektor dar!

   a) $P_1(3; 4)$, $P'_1(5; 6)$ b) $P_2(1; 3)$, $P'_2(-3; 5)$.

5. Stelle die folgenden reellen Zahlen als Vektor von der Form $\mathfrak{r}(r; \varphi)$ dar!

   a) 4 b) -7 c) $-2{,}5$ d) $\frac{1}{2}$.

3. Rechenoperationen 1. Stufe für Vektoren

3.1 Umkehr des Durchlaufsinns

Kehren wir bei einem Vektor $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{c}$ den Durchlaufsinn um, so erhalten wir den Vektor, der B in A überführt. Wir symbolisieren ihn mit $\overrightarrow{BA} = -\mathfrak{c}$. Es ist also $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\mathfrak{c}$.

3.2 Vektoraddition

Die Verknüpfung zweier Vektoren $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, die jeweils eine Kraft symbolisieren und in ein und demselben Punkt angreifen, führt uns auf ein aus der Physik bekanntes Resultat. Der wirksame Vektor entspricht, sowohl in seiner Größe als auch in seiner Richtung und seinem Durchlaufsinn der Diagonalen des aus $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gebildeten Parallelogramms (Abb. 70). Dabei wird der Punkt P nach P' verschoben. Das gleiche Ergebnis wird aber auch erzielt, wenn die beiden Kräfte nacheinander wirken, das heißt, wenn P nach P_1 und dann P_1 nach P' oder P nach P_2 und dann P_2 nach P' verschoben werden. Die Reihenfolge der Verschiebungen ist demnach beliebig.

Für die vektorielle Zusammensetzung können die Vektoren $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ vorübergehend als freie Vektoren behandelt werden. Dafür gelten, wie wir gleich sehen werden, dieselben Grundgesetze wie für die Addition von Zahlen.

1. Die Summe zweier Zahlen ist eindeutig bestimmt, ebenso die additive Verknüpfung zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, denn nach dem Parallelogrammsatz ergibt sich ein eindeutig bestimmter Vektor $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

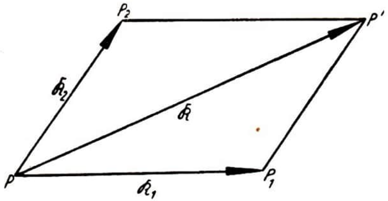

Abb. 70

2. Es gilt das Kommutativgesetz (bei Zahlen $a + b = b + a$), da die Reihenfolge der beiden Teilverschiebungen beliebig ist: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.
3. Bei der Addition mehrerer Zahlen gilt das Assoziativgesetz. Es ist $a + (b + c) = (a + b) + c$.

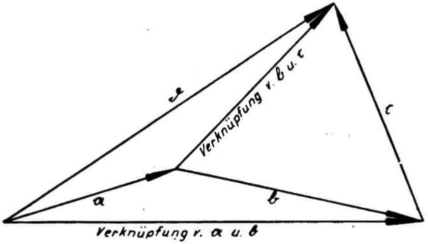

Abb. 71

Bei der Zusammensetzung dreier Vektoren ist es gleichgültig, ob der Vektor $\mathfrak{a}$ mit der Zusammensetzung von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ oder die Zusammensetzung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit dem Vektor $\mathfrak{c}$ verknüpft wird (Abb. 71). Man erhält in beiden Fällen denselben Vektor $\mathfrak{d}$.

Es gilt also: $$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}.$$

Die Übereinstimmung mit einigen Grundgesetzen der Zahlenaddition berechtigt uns, auch bei Vektoren von einer Addition zu sprechen. Das Ergebnis der Vektoraddition nennen wir geometrische Summe oder kurz die Summe. Wir schreiben: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Diese Summe darf nicht verwechselt werden mit der Summe der absoluten Beträge.

4. Die Vektoraddition ist umkehrbar. Zu zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gibt es stets einen Vektor $\mathfrak{x}$, so daß $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$. Die Lösung ergibt sich mit Hilfe des Vektors $(-\mathfrak{a})$ (Abb. 72):

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} + (-\mathfrak{a}).$$

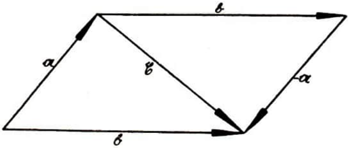

Abb. 72

Führen wir für die beiden nacheinander ausgeführten Operationen, Umkehr des Durchlaufsinns und Addition, das abkürzende Zeichen „–" ein, dann können wir schreiben:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}.$$

$\mathfrak{x}$ heißt die Differenz der Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$. Der Vektor $\mathfrak{x}$ führt, wenn die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in einem Punkt beginnen, vom Endpunkt des Subtrahenden $\mathfrak{a}$ zum Endpunkt des Minuenden $\mathfrak{b}$.

5. Bei der Addition zweier gleich großer, aber entgegengesetzt gerichteter Vektoren erhalten wir den Nullvektor. Es ist:

$$\mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = \mathfrak{o}.$$

3.3 Vielfache des Vektors $\mathfrak{a}$

1. Die Summe zweier gleichgerichteter Vektoren ergibt sich durch die Addition ihrer Längen bei festgehaltener Richtung (Abb. 73). Die Vektorsumme $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$ stellt einen Vektor dar, der die gleiche Richtung hat wie $\mathfrak{a}$, aber von dreifacher Länge ist. Die abgekürzte Schreibweise ist $3\,\mathfrak{a}$ (ohne Multiplikationszeichen). Entsprechend bedeutet $m\,\mathfrak{a}$ einen Vektor von der gleichen Richtung wie $\mathfrak{a}$, aber von m-facher Länge.

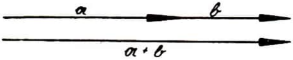

Abb. 73

Festsetzung:
Wir setzen fest, daß $m\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,m$. Ist $m > 0$, so hat der Vektor $m\,\mathfrak{a}$ den Durchlaufsinn von $\mathfrak{a}$, für $m < 0$ den entgegengesetzten Durchlaufsinn.

3.4 Darstellung eines Vektors mit Hilfe eines Einheitsvektors

Ist $\mathfrak{e}_a$ der Einheitsvektor in der Richtung von $\mathfrak{a}$, so läßt sich $\mathfrak{a}$ darstellen als: $|\mathfrak{a}|\,\mathfrak{e}_a$. Es ist dann:

$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{e}_a = a\,\mathfrak{e}_a$$

und damit:

$$\frac{\mathfrak{a}}{a} = \mathfrak{e}_a.$$

3.5 *Distributivgesetz*

Das erste Distributivgesetz für die Vielfachbildung von Vektoren ergibt sich ohne weiteres aus den Gesetzen über das Rechnen mit Zahlen.

Es gilt:
$$(m + n)\,\mathfrak{a} = m\,\mathfrak{a} + n\,\mathfrak{a}.$$

3.6 *Übungen*

1. Addiere die folgenden Vektoren des Nullpunktes!
   a) $\mathfrak{r}_1\,(4; 0^\circ)$, $\mathfrak{r}_2\,(3; 30^\circ)$ b) $\mathfrak{r}_1\,(2{,}5; 80^\circ)$, $\mathfrak{r}_2\,(5; 220^\circ)$ c) $\mathfrak{r}_1\,(3; 60^\circ)$, $\mathfrak{r}_2\,(3; 240^\circ)$.
2. Addiere folgende Vektoren!
   a) $\mathfrak{a}\,(5; 0^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(4; 180^\circ)$ b) $\mathfrak{a}\,(2; 90^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(3; 270^\circ)$.
3. Bestimme einen dritten Vektor $\mathfrak{c}$ so, daß $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ den Nullvektor ergibt!
   a) $\mathfrak{a}\,(4; 90^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(3; 0^\circ)$ b) $\mathfrak{a}\,(6; 80^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(8; 180^\circ)$.
4. Die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sollen ein geschlossenes Dreieck mit gleichem Umlaufsinn bilden. Welche Gleichung bringt das zum Ausdruck?
5. Bestimme die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ zeichnerisch und rechnerisch!
   a) $\mathfrak{a}\,(4; 0^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(2; 0^\circ)$ b) $\mathfrak{a}\,(4; 0^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(2; 60^\circ)$ c) $\mathfrak{a}\,(5; 135^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(3; 260^\circ)$.
6. Gegeben sei der Vektor $\mathfrak{a}$ und die Zahl m. Berechne $m\,\mathfrak{a}$!
   a) $\mathfrak{a}\,(3; 60^\circ)$, $m = 5$ b) $\mathfrak{a}\,(6{,}9; 35^\circ)$, $m = -3{,}5$
   c) $\mathfrak{a}\,(4; 45^\circ)$, $m = \frac{2}{3}$ d) $\mathfrak{a}\left(\frac{5}{4}; 60^\circ\right)$, $m = -\frac{4}{5}$.

3.7 *Vektoren auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raum; der Zerlegungssatz*

3.71 *Vektoren auf einer Geraden*

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren auf einer Geraden g. Dann ist, wenn $\mathfrak{e}_g$ der Einheitsvektor auf g ist, $\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{e}_g$ und $\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}|\,\mathfrak{e}_g$. Daraus erhalten wir:
$$\mathfrak{e}_g = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|},$$
und somit:
$$\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} = \frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|}\,\mathfrak{a}.$$

Setzen wir $\frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|} = m$, so ergibt sich $\mathfrak{b} = m\,\mathfrak{a}$.

Dies führt uns zu folgendem Satz:

Jeder Vektor auf einer Geraden läßt sich mit Hilfe eines einzigen darstellen.

3.72 *Vektoren in einer Ebene*

Zwei richtungsverschiedene Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmen eine Ebene. Der Vektor $\mathfrak{b}$ kann nicht mit Hilfe von $\mathfrak{a}$ dargestellt werden. Nehmen wir in der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Ebene einen dritten, von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ richtungsverschiedenen Vektor $\mathfrak{c}$ (Abb. 74), so zeigt uns Abb. 75, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ dargestellt werden kann.

Es ist:

$$\mathfrak{a} + (-m\,\mathfrak{b}) + (n\,\mathfrak{c}) = \mathfrak{o}:$$

$$\mathfrak{a} = m\,\mathfrak{b} - n\,\mathfrak{c}.$$

Es ergibt sich folgender Satz:

Jeder Vektor $\mathfrak{a}$ *kann als Summe von Vielfachen zweier beliebiger, untereinander und von* $\mathfrak{a}$ *richtungsverschiedener, mit* $\mathfrak{a}$ *in einer Ebene gelegenen Vektoren dargestellt werden.*

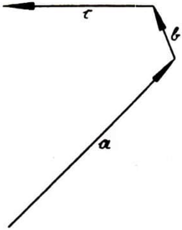

Abb. 74

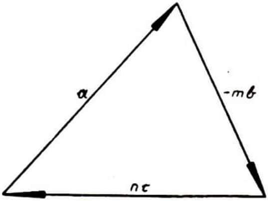

Abb. 75

Die Konstruktion der Abb. 75 macht verständlich, daß die Darstellung von $\mathfrak{a}$ mit Hilfe von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ eindeutig ist, das heißt, daß es keine zweite Lösung gibt.

3.73 Vektoren des Raumes

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmen eine Ebene. Der Summenvektor $\mathfrak{x}$ aus Vielfachen von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$ liegt ebenfalls in dieser Ebene.

Ein dritter Vektor $\mathfrak{c}$, der nicht in dieser Ebene liegt (und ihr auch nicht parallel ist), bestimmt mit $\mathfrak{x}$ eine zweite Ebene (Abb. 76). Da $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{x}$ richtungsverschieden sind, brauchen wir noch einen dritten Vektor $\mathfrak{d}$ in der Ebene von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{x}$.

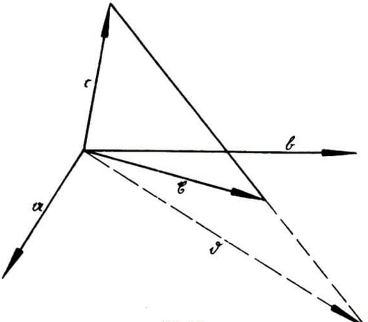

Abb. 76

Es ergeben sich dann folgende Darstellungen:

$$\mathfrak{x} = m\,\mathfrak{a} + n\,\mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{x} = r\,\mathfrak{c} + t\,\mathfrak{d}.$$

Und daraus folgt:

$$m\,\mathfrak{a} + n\,\mathfrak{b} = r\,\mathfrak{c} + t\,\mathfrak{d},$$
$$r\,\mathfrak{c} = m\,\mathfrak{a} + n\,\mathfrak{b} + (-t\,\mathfrak{d}),$$
$$\mathfrak{c} = \frac{m}{r}\,\mathfrak{a} + \frac{n}{r}\,\mathfrak{b} - \frac{t}{r}\,\mathfrak{d}$$

und schließlich: $$\mathfrak{c} = u\,\mathfrak{a} + v\,\mathfrak{b} + w\,\mathfrak{d},$$

wenn wir $\frac{m}{r} = u$, $\frac{n}{r} = v$, $-\frac{t}{r} = w$ setzen.

Der Vektor $\mathfrak{c}$ läßt sich nicht mit Hilfe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ allein darstellen, wohl aber durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$.

Es ergibt sich folgender Satz:

Jeder Vektor $\mathfrak{c}$ des Raumes läßt sich als Summe von Vielfachen dreier beliebiger, untereinander und von $\mathfrak{c}$ richtungsverschiedener Vektoren des Raumes, die nicht in einer Ebene gelegen sind, darstellen (*Zerlegungssatz*).

3.74 Eindeutigkeit einer Zerlegung

Wir nehmen an, daß es für die Zerlegung eines Vektors $\mathfrak{c}$ des Raumes zwei Lösungen gäbe. Es sei erstens:

$$\mathfrak{c} = u\,\mathfrak{a} + v\,\mathfrak{b} + w\,\mathfrak{d},$$

zweitens:

$$\mathfrak{c} = u_1\,\mathfrak{a} + v_1\,\mathfrak{b} + w_1\,\mathfrak{d}.$$

Daraus erhält man:

$$\mathfrak{o} = (u - u_1)\,\mathfrak{a} + (v - v_1)\,\mathfrak{b} + (w - w_1)\,\mathfrak{d}.$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, was im Rahmen dieser Abhandlung nicht bewiesen werden kann, wenn

$$\left.\begin{array}{r} u - u_1 = 0 \\ v - v_1 = 0 \\ w - w_1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{und damit} \quad \left\{\begin{array}{l} u = u_1 \\ v = v_1 \\ w = w_1 \end{array}\right. \quad \text{ist.}$$

Damit ist die Eindeutigkeit einer Zerlegung nachgewiesen.

3.8 Komponenten und Koordinaten eines Vektors

3.81 Vektoren im eindimensionalen x-Koordinatensystem

Bezeichnen wir den Einheitsvektor in der x-Richtung mit $\mathfrak{i}$, so läßt sich der eindimensionale Vektor $\mathfrak{a}$ auf der x-Achse folgendermaßen darstellen:

$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{i} = a_x\,\mathfrak{i}, \text{ wenn } |\mathfrak{a}| = a_x.$$

3.82 Vektoren im zweidimensionalen x-y-Koordinatensystem

Bezeichnen wir die Einheitsvektoren in Richtung der x- und y-Achse mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$, so läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{a}$ nach dem Zerlegungssatz mit Hilfe von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ eindeutig darstellen (Abb. 77).

Es ist:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y = |\mathfrak{a}_x|\,\mathfrak{i} + |\mathfrak{a}_y|\,\mathfrak{j} = a_x\,\mathfrak{i} + a_y\,\mathfrak{j}.$$

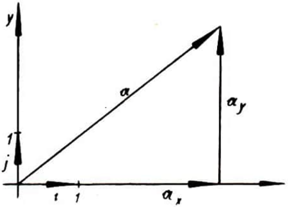

Abb. 77

a_x und a_y heißen Koordinaten, $\mathfrak{a}_x$ und $\mathfrak{a}_y$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$. Die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ erhalten wir, indem wir den Vektor $\mathfrak{a}$ auf die Achsen des Koordinatensystems projizieren.

3.83 Vektoren im dreidimensionalen x-y-z-Koordinatensystem

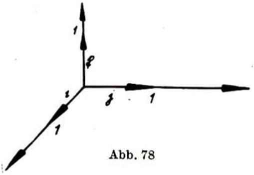

Abb. 78

Entsprechend der Darstellung eines zweidimensionalen Vektors, erhalten wir bei einem dreidimensionalen Vektor $\mathfrak{a}$ (Abb. 78) folgende Darstellung:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_z = a_x\,\mathfrak{i} + a_y\,\mathfrak{j} + a_z\,\mathfrak{k}\,.$$

Abgekürzt wird geschrieben: $\mathfrak{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

3.9 Zweites Distributivgesetz für die Vielfachbildung von Vektoren

Es sagt aus, daß $m\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = m\,\mathfrak{a} + m\,\mathfrak{b}$. Das Gesetz ergibt sich sofort bei Beachtung des Strahlensatzes (Abb. 79).

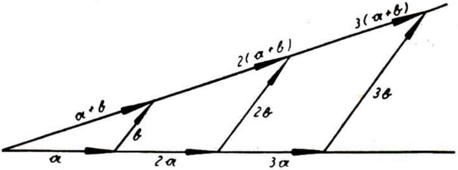

Abb. 79

3.10 Übungen

1. Stelle folgende Vektoren durch ihre Komponenten dar!
   a) $\mathfrak{a}\,(5; 30°)$ b) $\mathfrak{b}\,(4; 60°)$ c) $\mathfrak{c}\,(6; 135°)$ d) $\mathfrak{d}\,(3; 160°)$.
2. Addiere folgende Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zeichnerisch und überlege die rechnerische Bestimmung der Komponenten der Summe an Hand der Zeichnung!
   a) $\mathfrak{a} = 3\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 2\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$
   b) $\mathfrak{a} = 5{,}3\,\mathfrak{i} + 2{,}3\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 4{,}6\,\mathfrak{i} + 5{,}2\,\mathfrak{j}$
   c) $\mathfrak{a} = -4{,}7\,\mathfrak{i} - 3{,}2\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 3\,\mathfrak{i} - 2\,\mathfrak{j}$
   d) $\mathfrak{a} = 4{,}6 - 3{,}7$, $\mathfrak{b} = 4{,}8 + 6{,}7$
   e) $\mathfrak{a} = -2{,}5\,\mathfrak{i} + 1{,}9\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 3{,}6\,\mathfrak{i} - 2{,}8\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{c} = 4{,}5\,\mathfrak{i} + 3{,}1\,\mathfrak{j}$.
3. Stelle den Vektor $\mathfrak{a} = 3\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j}$ mit Hilfe des Einheitsvektors in der Richtung von $\mathfrak{a}$ dar!
4. Bestimme Richtungswinkel und Betrag des Vektors
   $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y$ zeichnerisch und rechnerisch!
   a) $\mathfrak{a}_1 = 2\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$ b) $\mathfrak{a}_2 = 3\,\mathfrak{i} - 4\,\mathfrak{j}$ c) $\mathfrak{a}_3 = -4\,\mathfrak{i} - 3\,\mathfrak{j}$
   d) $\mathfrak{a}_4 = 2\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j}$ e) $\mathfrak{a}_5 = 2{,}15\,\mathfrak{i} + 3{,}75\,\mathfrak{j}$ f) $\mathfrak{a}_6 = 2\,\mathfrak{i} - 3{,}25\,\mathfrak{j}$.

5. Bestimme Richtungswinkel und Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$!

   a) $\mathfrak{a}_1 = (2{,}5; 3{,}5)$ b) $\mathfrak{a}_2 = (-3{,}5; 4{,}9)$ c) $\mathfrak{a}_3 = (-4{,}7; 3{,}9)$.
6. Zerlege den Vektor $\mathfrak{a}$ mit $a = 5$ in zwei Komponenten, die mit der Richtung von $\mathfrak{a}$ die Winkel 30° und 45° bilden! Löse die Aufgabe a) zeichnerisch, b) trigonometrisch!
7. Zerlege eine Kraft $\mathfrak{K}$ von 300 kp in zwei Komponenten, deren Richtung mit der Richtung von $\mathfrak{K}$ die Winkel a) 45° und 45°, b) 30° und 60° bilden!
8. Eine Kraft $\mathfrak{K}$ von 400 kp sei in die Komponenten von der Größe 200 kp und 300 kp zerlegt. Bestimme die Winkel, die die Komponenten mit der Richtung von $\mathfrak{K}$ bilden! Löse die Aufgabe zeichnerisch und trigonometrisch!
9. Bestimme die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_b$ eines Motorbootes und $\mathfrak{v}_s$ des Stromes, wenn das Boot stromaufwärts die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ ($v_1 = 8{,}5\ \text{m sec}^{-1}$), stromabwärts $\mathfrak{v}_2$ ($v_2 = 10{,}2\ \text{m sec}^{-1}$) hat. Löse die Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch!
10. Ein Boot überquert senkrecht zum Ufer mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ($v = 2\ \text{m sec}^{-1}$) einen 150 m breiten Strom und wird bis zur Ankunft am anderen Ufer um 50 m abgetrieben. Bestimme die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_s$ des Stromes zeichnerisch und rechnerisch!
11. Ein Tragarm von 2 m Länge wird von einem Zugseil, welches 1 m oberhalb des Trägers befestigt ist, gehalten (Abb. 80). Am Ende des Tragarms hänge eine Last von 200 kp. Berechne die Druckbeanspruchung des Tragarms und die Zugspannung des Zugseils trigonometrisch!
12. Löse die Aufgabe 11 mit Hilfe der Komponentendarstellung! Beachte dabei Abb. 80 und folgenden Hinweis: Da die Last und die zu bestimmenden Kraftkomponenten in einem Punkte angreifen, kann die Aufgabe mit freien Vektoren gelöst werden. Führe die Zerlegung in Richtung des Zugseils und des Tragarms durch.

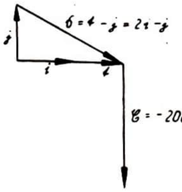

Abb. 80

4. Skalarprodukt

4.1 Allgemeine Betrachtungen

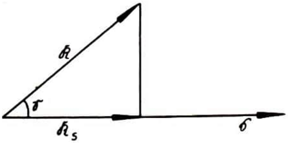

Abb. 81

Der Kraftvektor $\mathfrak{K}$, der im Schwerpunkt eines Körpers angreift, bilde mit dem Wegvektor $\mathfrak{s}$ den Winkel γ. Welche Arbeit leistet die Kraft, wenn sie den Körper längs $\mathfrak{s}$ um $|\mathfrak{s}| = s$ verschiebt?

Die in Richtung des Weges wirkende Kraftkomponente (Abb. 81) ist gleich $\mathfrak{K}_s = \mathfrak{K} \cos\gamma$, und da die Arbeit A gleich dem Produkt aus dem Betrag der in Wegrichtung wirkenden Kraft, K, und der Wegstrecke, s, ist, ergibt sich für unseren Fall $A = K \cdot s \cdot \cos\gamma$.

Da das Zusammenwirken der beiden Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{s}$ eine produktartige Verknüpfung ergibt und das Produkt als Arbeit ein Skalar ist, wird dieses Produkt auch *Skalarprodukt* der beiden Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{s}$ genannt.

4.2 Definition des Skalarprodukts

Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man eine Zahl (Skalar), die gleich ist dem Produkt aus den Beträgen $|\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{b}|$ und dem Kosinus des von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eingeschlossenen Winkels γ.

Die Schreibweise für das Skalarprodukt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ oder auch $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$. Es ist also:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = a \cdot b \cdot \cos\gamma .$$

Das Skalarprodukt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet man auch als *inneres Produkt* von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Manchmal spricht man auch kurz von $\mathfrak{a}$ *Punkt* $\mathfrak{b}$.

In vektorieller Schreibweise lautet also die Formel für die Arbeit:

$$A = (\mathfrak{K}\,\mathfrak{s}) = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s} .$$

4.3 Grundgesetze des Skalarprodukts

1. *Für das Skalarprodukt gilt das Kommutativgesetz*

Aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a \cdot b \cdot \cos\gamma$ und $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = b \cdot a \cdot \cos(-\gamma)$ folgt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$.

2. *Das Assoziativgesetz gilt für die skalare Multiplikation nicht*

Es ist $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}$ nicht gleich $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$, denn $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}$ ist ein Vielfaches von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ ist ein Vielfaches von $\mathfrak{a}$, da zum Beispiel $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ ein Skalar ist.

3. *Die Gleichung* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$

Aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a \cdot b \cdot \cos\gamma = 0$ folgt, daß entweder $\mathfrak{a}$ ein Nullvektor oder $\mathfrak{b}$ ein Nullvektor oder $\cos\gamma = 0$ und damit $\gamma = 90°$ ist. Damit ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ Bedingung für die Orthogonalität[1] der beiden von Null verschiedenen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

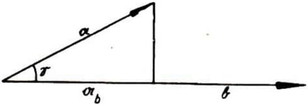

Abb. 82

4. *Inneres Produkt und Projektion*

Es sei $\mathfrak{a}_b$ die Projektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ (Abb. 82). Da $|\mathfrak{a}_b| = |\mathfrak{a}| \cos\gamma$ ist, erhält man:

$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos\gamma = |\mathfrak{a}_b| \cdot |\mathfrak{b}| = \mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{b}$.

Ebenso ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_a$.

Das innere Produkt zweier Vektoren ist das innere Produkt aus der Projektion des einen auf den anderen mit dem anderen.

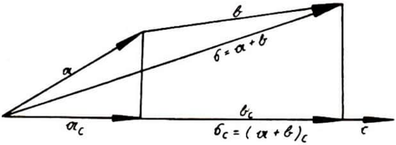

Abb. 83

5. Aus Abb. 83 ergibt sich ohne weiteres, daß

$$\mathfrak{s}_c = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_c = \mathfrak{a}_c + \mathfrak{b}_c \text{ ist.}$$

[1] orthogonal = senkrecht.

Satz:

Die Projektion eines Summenvektors ist gleich der Summe der Projektionen der Komponenten (Projektionssatz).

6. *Das Distributivgesetz der skalaren Multiplikation*

Das Distributivgesetz sagt aus, daß $\mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}$ ist.

Beweis:

Für den Fall der Abb. 83 gilt: $s_c = a_c + b_c$, wenn $s_c = |\mathfrak{s}_c|$ usw.

Dann ist $c \cdot s_c = c \cdot a_c + c \cdot b_c$.

Nach dem Projektionssatz gilt:

$$c \cdot s_c = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{s}_c = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{s}.$$

Demnach ergibt sich:

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}.$$

7. Beweise das Distributivgesetz für den Fall der Abb. 84! Beachte dabei, daß der Winkel γ für die Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ stumpf ist!

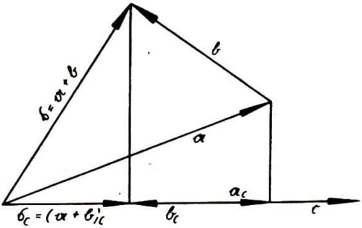

Abb. 84

4.4 Koordinatendarstellung des Skalarprodukts

1. *Das innere Produkt eines Einheitsvektors mit sich selbst*

Es ist $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e} = |\mathfrak{e}| \cdot |\mathfrak{e}| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Dementsprechend ist $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = 1$, $\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = 1$ und $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 1$.

2. Man erhält für $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = |\mathfrak{i}| \cdot |\mathfrak{j}| \cdot \cos 90°$ die Zahl Null, da $\cos 90° = 0$.

Es gilt also:

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = 0,$$

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k} = 0,$$

$$\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = 0.$$

3. Unter Beachtung der Ergebnisse von 1. und 2. und durch Anwendung des Distributivgesetzes ergibt sich:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (a_x\, \mathfrak{i} + a_y\, \mathfrak{j}) \cdot (b_x\, \mathfrak{i} + b_y\, \mathfrak{j}) = a_x b_x + a_y b_y.$$

4. Weise nach, daß für dreidimensionale Vektoren gilt:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

4.5 *Anwendungen*

4.51 *Berechnung von Längen*

Bilden wir das innere Produkt eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit sich selbst, so erhalten wir:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2 = a_x\, a_x + a_y\, a_y;$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Für einen dreidimensionalen Vektor $\mathfrak{a}$ erhalten wir dementsprechend:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

4.52 *Beweis des Kosinussatzes für das ebene Dreieck*

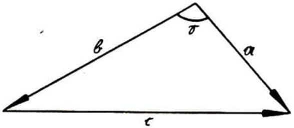

Abb. 85

Nach Abb. 85 ist $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$.

Demnach ergibt sich:

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$$

$$= \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} - 2\,\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma.$$

4.6 *Aufgaben*

1. Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!
   a) $\mathfrak{a}\,(4;\, 10^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(3;\, 70^\circ)$ b) $\mathfrak{a}\,(3{,}7;\, 60^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(5{,}8;\, 140^\circ)$ c) $\mathfrak{a}\,(3{,}5;\, 160^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(4\;;\, 260^\circ)$ d) $\mathfrak{a}\,(3{,}4;\, 240^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(2{,}7;\, 350^\circ)$.
2. Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!
   a) $\mathfrak{a} = 2\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 3\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j}$ b) $\mathfrak{a} = 3\,\mathfrak{i} - 2\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 6\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j}$ c) $\mathfrak{a} = -2\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 4{,}6\,\mathfrak{i} - 6\,\mathfrak{j}$
   d) $\mathfrak{a} = (-6{,}3;\, -4)$, $\mathfrak{b} = (-2{,}5;\, 3{,}8)$ e) $\mathfrak{a} = (-3;\, -4)$, $\mathfrak{b} = (-5;\, -6)$ f) $\mathfrak{a} = (-4;\, -3)$, $\mathfrak{b} = (3;\, 4)$.
3. Kann man die skalare Multiplikation umkehren?
   (Anleitung: Folgt aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$?)
4. Welche Bedeutung hat $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{v}$, wenn $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{i}$ den Winkel γ bildet?
5. Beweise den Satz des Pythagoras mit Hilfe der Vektorrechnung!
6. Welche Arbeit leistet die Kraft $\mathfrak{K}$, wenn sie einen Körper längs des Weges $\mathfrak{s}$ um $|\mathfrak{s}| = s$ verschiebt?
   a) $\mathfrak{s}$ (3 cm; 45°), $\mathfrak{K}$ (4 kp; 75°) b) $\mathfrak{s}$ (2 m; 60°), $\mathfrak{K}$ (3 kp; 90°) c) $\mathfrak{s}$ (10 cm; 35°), $\mathfrak{K}$ (40 p; 95°)
   d) $\mathfrak{s}$ (2,7 m; 30°), $\mathfrak{K}$ (50 p; 60°) e) $\mathfrak{s}$ (3,4 m; 45°), $\mathfrak{K}$ (5,6 kp; 90°) f) $\mathfrak{s}$ (2,7 cm; 40°), $\mathfrak{K}$ (6,8 kp; 80°).
7. Wann wird das Skalarprodukt negativ?
8. Bestimme die Länge des Vektors $\mathfrak{a}$!
   a) $\mathfrak{a} = 2\,\mathfrak{i} + 5\,\mathfrak{j}$ b) $\mathfrak{a} = 5\,\mathfrak{i} - 6\,\mathfrak{j}$ c) $\mathfrak{a} = (3{,}5;\, 4{,}7)$
   d) $\mathfrak{a} = (3;\, 4)$ e) $\mathfrak{a} = (3{,}4;\, 7{,}8)$ f) $\mathfrak{a} = (5{,}8;\, -4{,}7)$.

5. Das Vektorprodukt

5.1 Allgemeine Betrachtungen

Neben der produktartigen Verknüpfung zweier Vektoren zum Skalarprodukt kennen wir noch eine zweite produktartige Verknüpfung zweier Vektoren.

Greift eine Kraft $\mathfrak{K}$ an dem Hebelarm $\mathfrak{r}$ derart an, daß $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{K}$ den Winkel γ miteinander bilden (Abb. 86), so ist nur die zu $\mathfrak{r}$ senkrechte Komponente $\mathfrak{K}_1$ von der Größe $|\mathfrak{K}| \cdot \sin\gamma$ wirksam.

Die Größe des Drehmoments ergibt sich nach dem Hebelgesetz zu:

$$M = |\mathfrak{r}| \cdot |\mathfrak{K}| \cdot \sin\gamma = r\,K \sin\gamma = r \cdot K_1,$$

und wenn $\gamma = 90°$, zu: $M = r \cdot K$.

Das Drehmoment ist ein Vektor, da es zu der zahlenmäßigen Angabe noch einer Angabe des Drehsinnes bedarf.

Die Richtung von $\mathfrak{M}$ ist so festgelegt, daß sie parallel zur Drehachse liegt, in unserer Zeichnung also senkrecht zur Zeichenebene. Liegt der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{K}$ „rechts" von 0, dann weist der Vektor $\mathfrak{M}$ nach „unten", liegt dagegen der Angriffspunkt „links" von 0, dann weist der Vektor $\mathfrak{M}$ nach „oben".

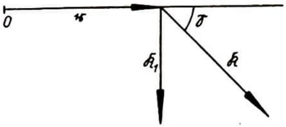

Abb. 86

Das Drehmoment ist ein Vektor, den wir durch eine andersgeartete produktartige Verknüpfung der Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{r}$ erhalten. Dieses Produkt bezeichnen wir als *Vektorprodukt.*

5.2 Definition des Vektorprodukts

Unter dem Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *versteht man einen auf dem von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *gebildeten Parallelogramm senkrecht stehenden Vektor* $\mathfrak{c}$ *vom Betrag* $a \cdot b \cdot \sin\gamma$. *Dabei ist* $|\mathfrak{c}| = a \cdot b \cdot \sin\gamma$ *gleich der Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms.*

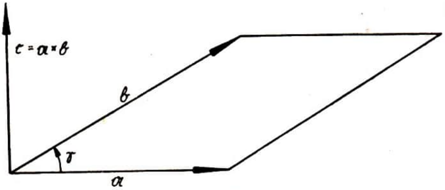

Abb. 87

Die Richtung von $\mathfrak{c}$ *ist positiv, wenn die Drehung von* $\mathfrak{a}$ *in die Richtung von* $\mathfrak{b}$ *eine Rechtsdrehung ergibt* (Drehung um den kleinen Winkel, Abb. 87).

Umgekehrt würde die Drehung von $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{a}$ eine Linksdrehung ergeben (Abb. 88).

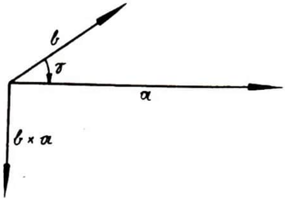

Abb. 88

Für das Vektorprodukt sind folgende Schreibweisen gebräuchlich:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}].$$

Lies „$\mathfrak{a}$ kreuz $\mathfrak{b}$" beziehungsweise „Vektorprodukt aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$"! Es ist

$$c = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin\gamma,$$

denn $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin\gamma$. Das Drehmoment $\mathfrak{M}$ ist somit durch die Formel

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}]$$

darstellbar.

5.3 Grundgesetze des Vektorprodukts

1. Für das Vektorprodukt gilt nicht das Kommutativgesetz

Da $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a} = -\mathfrak{c}$ ist, ergibt sich:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}).$$

2. Ist $\gamma = 0°$ beziehungsweise $\gamma = 180°$, so wird $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$. Das Vektorprodukt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ „wird Null", wenn $c = a \cdot b \cdot \sin\gamma = 0$ wird, das heißt, wenn entweder $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ der Nullvektor oder $\gamma = 0°$ beziehungsweise $\gamma = 180°$ ist. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht Nullvektoren, so bedeutet $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, daß $\gamma = 0°$ beziehungsweise $\gamma = 180°$ ist, das heißt aber, daß $\mathfrak{a}$ parallel (oder antiparallel) zu $\mathfrak{b}$ ist.

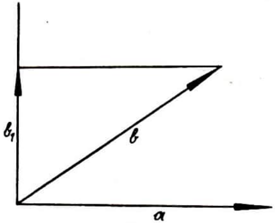

Abb. 89

3. Es ist $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{b} = 0$.

Das ergibt sich sofort, da $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ sowohl senkrecht zu $\mathfrak{a}$ als auch senkrecht zu $\mathfrak{b}$ steht und $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}$ beziehungsweise $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}$ (wegen $\gamma = 90°$) gleich Null ist.

4. $(m\,\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (m\,\mathfrak{b}) = m\,(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$, da durch ein m-faches von $\mathfrak{a}$ beziehungsweise von $\mathfrak{b}$ der Flächeninhalt des Parallelogramms m-mal so groß wird.

5. $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{o}$, da $\gamma = 0°$.

6. $\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = -(\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) = \mathfrak{k}$,
$\mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = -(\mathfrak{k} \times \mathfrak{j}) = \mathfrak{i}$,
$\mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = -(\mathfrak{i} \times \mathfrak{k}) = \mathfrak{j}$.

7. Es sei $\mathfrak{b}_1$ die Komponente von $\mathfrak{b}$ senkrecht zu $\mathfrak{a}$ (Abb. 89).

Da $b_1 = |\mathfrak{b}_1| = |\mathfrak{b}| \sin\gamma$, so ergibt sich für $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = a \cdot b \cdot \sin\gamma = a \cdot b_1$.

Ebenso ist:

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1| = a \cdot b_1 \cdot \sin 90° = a\,b_1.$$

Da nun $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1$ Vektoren gleicher Richtung und gleichen Betrages sind, ergibt sich:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}.$$

8. *Das Distributivgesetz der vektoriellen Multiplikation.*

Es lautet: $$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}.$$

Beweis:

Es seien $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{x}_1$ die Komponenten von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{x}$ senkrecht zu $\mathfrak{a}$ (Abb. 90).

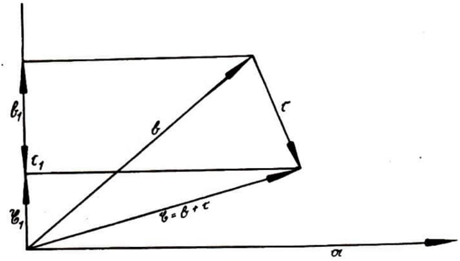

Abb. 90

Dann gilt:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2,$$
$$\mathfrak{c} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{a} = \mathfrak{c}_2,$$
$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2.$$

Nun ist aber:

$$|\mathfrak{x}_2| = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}_1| = a \cdot x_1,$$
$$|\mathfrak{c}_2| = |\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{a}| = c_1 \cdot a,$$
$$|\mathfrak{b}_2| = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1| = a \cdot b_1.$$

Da sich das Rechteck aus a und b_1 als Summe der beiden anderen darstellen läßt (Abb. 90), ergibt sich $a\,x_1 + c_1\,a = a\,b_1$ und damit $|\mathfrak{x}_2| + |\mathfrak{c}_2| = |\mathfrak{b}_2|$.

Da aber alle drei Vektoren $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{b}_2$ senkrecht zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und sämtlich nach „oben" gerichtet sind, können wir schreiben:

$$\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{b}_2,$$
$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{c}_2$$

oder:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}_1,$$
$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}.$$

5.4 Koordinatendarstellung des Vektorprodukts

Auf Grund des Distributivgesetzes wird bei

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_x\,\mathfrak{i} + a_y\,\mathfrak{j} + a_z\,\mathfrak{k}) \times (b_x\,\mathfrak{i} + b_y\,\mathfrak{j} + b_z\,\mathfrak{k})$$

jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert.

Führe die Rechnung selbst durch unter Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeiten für $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ und weise nach, daß

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathfrak{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathfrak{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathfrak{k}$$

ist!

5.5 Aufgaben zum Vektorprodukt

1. Bestimme $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!
   a) $\mathfrak{a}\,(1;\ 65^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(2;\ 170^\circ)$ b) $\mathfrak{a}\,(4;\ 135^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(6{,}2;\ 270^\circ)$ c) $\mathfrak{a}\,(6;\ 280^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(7{,}5;\ 310^\circ)$ d) $\mathfrak{a}\,(4{,}9;\ 215^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(3{,}8;\ 65^\circ)$.
2. Berechne $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$, wenn der zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrechte Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ ist!
   a) $\mathfrak{a}\,(2;\ 135^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(4{,}5;\ 80^\circ)$ b) $\mathfrak{a}\,(4;\ 275^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(6;\ 300^\circ)$ c) $\mathfrak{a}\,(4{,}2;\ 240^\circ)$, $\mathfrak{b}\,(4;\ 85^\circ)$.
3. Bestimme $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$!
   a) $\mathfrak{a} = 2\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 3\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j}$ b) $\mathfrak{a} = -2\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 5\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$ c) $\mathfrak{a} = 4\,\mathfrak{i} - 3\,\mathfrak{j} + 4\,\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = 2\,\mathfrak{i} + 4\,\mathfrak{j} - 3\,\mathfrak{k}$.
4. Zeige, daß in einem Dreieck $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}|$ ist! Beweise daraus den Sinussatz!
   Anleitung: Stelle die Vektorgleichung $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ durch ein Dreieck dar und bilde $\mathfrak{a} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$!
5. Weise nach, daß der Inhalt eines Dreiecks $J = \frac{1}{2}|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ ist! Berechne danach den Inhalt des aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Dreiecks!
   a) $\mathfrak{a} = 2\,\mathfrak{i} + 3\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = 4\,\mathfrak{i} + 6\,\mathfrak{j}$ b) $\mathfrak{a} = 2\,\mathfrak{i} + 5\,\mathfrak{j} - 4\,\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = 4\,\mathfrak{i} - 6\,\mathfrak{j} + 7\,\mathfrak{k}$.

6. Mathematische Anwendung der Vektorrechnung

6.1 Parameterdarstellung der Geraden

Ortsvektoren des Nullpunktes bezeichnet man auch als Punktvektoren, da wir sie zur Festlegung ihres Endpunktes benutzen. Wir bezeichnen sie entsprechend ihrem Endpunkt und schreiben:

$$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{a}.$$

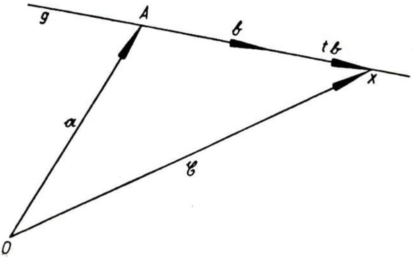

Abb. 91

Gegeben sei eine Gerade g im Raum, und A sei ein Punkt dieser Geraden. Die Richtung der Geraden sei durch den Vektor $\mathfrak{b}$ gekennzeichnet. Ist X ein beliebiger Punkt der Geraden g, so ist $\overrightarrow{AX} = t\,\mathfrak{b}$ (Abb. 91). Der zum Punkt X gehörende Punktvektor ist dann:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\,\mathfrak{b}.$$

Man bezeichnet t als Parameter.

6.2 Darstellung der Geraden durch zwei Punkte A und B

In diesem Falle ist der Richtungsvektor der Geraden $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$. Die Geradengleichung geht dann in folgende Form über:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = (1 - t)\cdot\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{b};$$

$$\mathfrak{x} = r\,\mathfrak{a} + s\,\mathfrak{b}, \text{ wenn } 1 - t = r,\ t = s.$$

6.3 Gleichung einer Ebene

Aus Abb. 92 ergibt sich ohne weiteres, daß $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + r\,\mathfrak{a}_1 + s\,\mathfrak{a}_2$, da der Vektor $\overrightarrow{AX}$ durch $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ dargestellt werden kann.

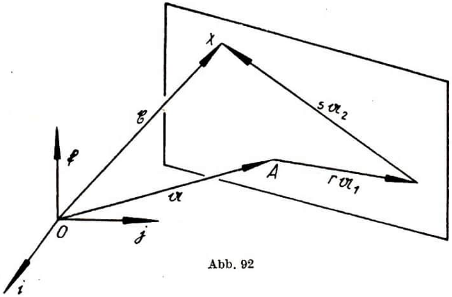

Abb. 92

6.4 Teilpunkte eines Vektors $\overrightarrow{AB}$

Es ist $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a} + r(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$. Wie wir aus Abb. 93 ersehen, ist:

$$r(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a},$$

$$(r + s)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$$

$$r + s = 1.$$

Außerdem ist:

$$\frac{\overrightarrow{AX_1}}{\overrightarrow{BX_1}} = \frac{r(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})}{-s(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})}$$

$$= \frac{-r}{s} = \lambda.$$

λ ist das Teilverhältnis der Vektoren $\overrightarrow{AX_1}$ und $\overrightarrow{BX_1}$.

Aus $r + s = 1$ und $\lambda = \frac{-r}{s}$ erhalten wir $r = -\frac{\lambda}{1-\lambda}$ und damit:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{a} + \left(-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) = \frac{\mathfrak{a} - \lambda\mathfrak{b}}{1-\lambda}.$$

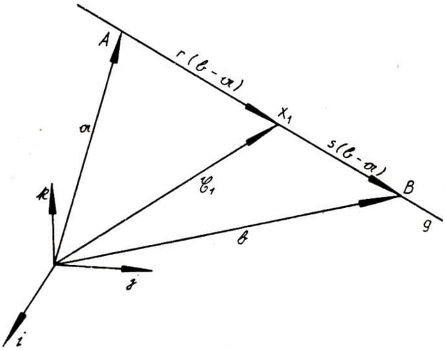

Abb. 93

6.5 Der Schwerpunkt eines Dreiecks

Bezeichnen wir die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks mit M_a, M_b und M_c (Abb. 94), so gilt:

$$\mathfrak{m}_a = \mathfrak{b} + \frac{\mathfrak{c} - \mathfrak{b}}{2} = \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}}{2},$$

$$\mathfrak{m}_b = \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{c} - \mathfrak{a}}{2} = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{c}}{2},$$

$$\mathfrak{m}_c = \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b} - \mathfrak{a}}{2} = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2}.$$

Für die Seitenhalbierenden ergeben sich folgende Gleichungen (Parameterdarstellung):

$$\mathfrak{x}_a = \mathfrak{m}_a + r(\mathfrak{a} - \mathfrak{m}_a) = \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}}{2} + r\left(\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}}{2}\right),$$

$$\mathfrak{x}_b = \mathfrak{m}_b + s(\mathfrak{b} - \mathfrak{m}_b) = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{c}}{2} + s\left(\mathfrak{b} - \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{c}}{2}\right),$$

$$\mathfrak{x}_c = \mathfrak{m}_c + q(\mathfrak{c} - \mathfrak{m}_c) = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2} + q\left(\mathfrak{c} - \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2}\right).$$

Für den Schnittpunkt Y gilt:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{b}} \ (= \mathfrak{x}_{\mathfrak{c}}).$$

$$\frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2} + r\left(\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2}\right) = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}{2} + s\left(\mathfrak{b} - \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}{2}\right),$$

$$\mathfrak{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2} - r\right) + \mathfrak{b}\left(s + \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\right) + \mathfrak{c}\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) = \mathfrak{o}.$$

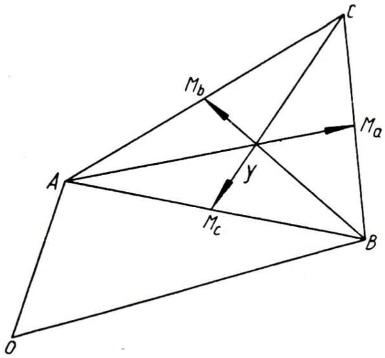

Abb. 94

Da $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ drei richtungsverschiedene Vektoren des Raumes sind, muß

$$\frac{1}{2} - \frac{s}{2} - r = 0,$$

$$s + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} - \frac{s}{2} = 0$$

sein (Zerlegungssatz!).

Aus der letzten Gleichung ergibt sich $r = s$. Setzen wir für s in die erste oder die zweite Gleichung r ein, so erhalten wir $r = \frac{1}{3}$ und $s = \frac{1}{3}$.

Ebenso würden wir $q = \frac{1}{3}$ erhalten, wenn wir $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x}_{\mathfrak{c}}$ setzen.

Wir erhalten nun für Y:

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2} + \frac{1}{3}\left(\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2}\right),$$

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{3}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}).$$

6.6 *Winkel im Raum*

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren im Raum, so ergibt sich aus

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a \cdot b \cdot \cos\gamma = a \cdot b \cdot \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

$$\cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{a\,b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\,.$$

6.7 *Richtungskosinus*

Unter dem Richtungskosinus eines Vektors verstehen wir den Kosinus des Winkels, den der Vektor mit den Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ bildet.

Nach der Formel für Winkel im Raum ergibt sich:

$$\cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{i}) = \frac{a_x}{a}\,,$$

$$\cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{j}) = \frac{a_y}{a}\,,$$

$$\cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) = \frac{a_z}{a}\,.$$

6.8 *Übungen*

1. Teile den Vektor $\overrightarrow{AB}$ im Verhältnis $\lambda = -\frac{2}{3}$!

   a) $\mathfrak{a} = (2; 3; 5)$, $\mathfrak{b} = (6; 1; 2)$ b) $\mathfrak{a} = (3; 2; 6)$, $\mathfrak{b} = (8; 6; 1)$.

2. Bestimme den Schwerpunkt eines Dreiecks aus den Eckpunkten!

   a) $\mathfrak{a} = (-4; -3; 1)$, $\mathfrak{b} = (10; 1; 1)$, $\mathfrak{c} = (4; 5; 1)$ b) $\mathfrak{a} = (-3; -2; 1)$, $\mathfrak{b} = (7; 4; 1)$, $\mathfrak{c} = (3; 6; 1)$.

3. Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren des Raumes. Welchen Winkel bilden die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$?

   a) $\mathfrak{a} = (2; 2; 1)$, $\mathfrak{b} = (4; 10; 8)$ b) $\mathfrak{a} = (1; 1; 1)$, $\mathfrak{b} = (3; 3; 3)$ c) $\mathfrak{a} = (2; 2; 2)$, $\mathfrak{b} = (-3; -3; -3)$.

4. Bestimme den Richtungskosinus für folgende Vektoren!

   a) $\mathfrak{a}_1 = (3; 4; 0)$ b) $\mathfrak{a}_2 = (2; 3; 4)$ c) $\mathfrak{a}_3 = (5; 4; 3)$.

DISKUSSIONSBEITRAG NR. 6

Zur Einführung des Skalarproduktes und des Vektorproduktes

Manfred Knöspel

1. Drei Wege zur Einführung

Zur Einführung der Produkte zweier Vektoren werden sowohl in der Hochschulliteratur als auch in den für Schulzwecke bestimmten Veröffentlichungen die verschiedensten Wege eingeschlagen. Die wichtigsten davon seien hier kurz angedeutet.

Zur Definition des *Skalarprodukts* wird meistens die Gleichung

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a\,b \cos \sphericalangle (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

an die Spitze gestellt.

Daraus werden – in sehr unterschiedlicher Reihenfolge und Formulierung – die Komponentendarstellung, die Eigenschaften und die geometrische beziehungsweise physikalische Deutung des Skalarprodukts entwickelt. Manche Darstellungen gehen auch den Weg von

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= A\,B\,[\cos(A, x) \cos(B, x) + \cos(A, y) \cos(B, y) + \cos(A, z) \cos(B, z)]\end{aligned}$$

zu $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = A B \cos(A, B)$ oder in umgekehrter Richtung.

Bei einer dritten Gruppe von Veröffentlichungen wird das Skalarprodukt vom Begriff der Arbeit und von der Gleichung

$$A = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{s} = |\mathfrak{K}|\,|\mathfrak{s}| \cos \sphericalangle (\mathfrak{K}, \mathfrak{s})$$

aus definiert.

Schließlich findet man den bekannten Vergleich mit dem Kosinussatz, also den Vergleich von

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} - 2\,\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}$$

mit

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2\,c\,b \cos \alpha$$

an den Anfang gestellt.

Das *Vektorprodukt* wird ebenfalls häufig unter Voranstellung der Definitionsgleichung und der Kennzeichnung des Produktvektors nach Betrag und Richtung eingeführt. Oft findet man aber weiter ausholende Vorbetrachtungen über gerichtete Flächenstücke, Plangrößen, Bivektoren und Flächenvektoren oder ähnliche Begriffe und Ausdrücke. Andere Darstellungen gehen vom Drehmomentvektor aus oder arbeiten sofort mit Determinanten.

Es gibt außerdem die nebeneinander herlaufende Einführung des skalaren und des vektoriellen Produkts.

In meinem Unterricht habe ich zur Einführung der beiden Produkte von zwei Vektoren drei verschiedene Wege praktisch erprobt, die mir für eine Verwendung in der erweiterten Oberschule brauchbar erscheinen.

Der erste Weg war – vor Jahren – für den Unterricht in Klasse 10 bestimmt. Dabei führte ich sowohl das skalare als auch das vektorielle Produkt von konkreten physikalischen Beispielen her ein. Der Vorzug dieses Verfahrens ist meines Erachtens darin zu sehen, daß die Schüler eine anschauliche Grundvorstellung gewinnen und daß ihnen auch einleuchtet, wieso gerade diese beiden Definitionen für zwei verschiedene Arten der „Multiplikation" zweier Vektoren gewählt werden. Obwohl im Grunde genommen bei der Behandlung der Produktbildungen zweier Vektoren an einer Stelle eben doch mehr oder minder willkürliche, wenn auch nachträglich als sinnvoll und zweckmäßig erwiesene Definitionen gegeben werden müssen, sollte der Lehrer den trockenen, abstrakten Kern der Dinge in eine möglichst gefällige Gestalt bringen. Unter Benutzung geeigneter physikalischer Demonstrationsmodelle und Freihandversuche oder praktischer Untersuchungen über Arbeit beziehungsweise Drehmoment ist das gut möglich.

Der zweite von mir erprobte Weg, bei einem kleineren Unterrichtsversuch ebenfalls in Klasse 10 benutzt, unterscheidet sich nicht grundsätzlich von dem zuerst angegebenen. Er stellt vielmehr eine Vervollkommnung und Ergänzung desselben von der geometrischen Seite her dar.

Ich ging dabei in einer Vorbetrachtung von zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus, die mit gemeinsamem Anfangspunkt an die Tafel gezeichnet wurden. Der Vektor $\mathfrak{b}$ wurde nun in seine Parallel- und seine Normalkomponente bezüglich $\mathfrak{a}$ zerlegt, die Beträge der Komponenten als $b_1 = b \cos \gamma$ beziehungsweise $b_2 = b \sin \gamma$ bestimmt (Abb. 95). Erst danach stellte ich die Frage, wo denn in der Physik beziehungsweise in der Geometrie vektorielle Größen oder gerichtete Strecken beziehungsweise deren Längen miteinander „malgenommen" würden (zum Beispiel a) bei der Berechnung der Arbeit aus Kraft und Weg und b) bei der Berechnung von Rechteck-, Dreieck- oder Parallelogrammflächen usw.). Das Skalarprodukt wurde im weiteren Verlauf des Unterrichts also wieder vom konkreten physikalischen Beispiel her, gleichzeitig aber auch allgemein als Produkt aus dem Betrag von $\mathfrak{a}$ und dem Betrag der Parallelkomponente von $\mathfrak{b}$ bezüglich $\mathfrak{a}$ eingeführt. Das Vektorprodukt hingegen führte ich diesmal vom Parallelogramminhalt her ein, der ja für das von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannte Parallelogramm gleich dem Produkt aus der Länge (dem Betrag) von $\mathfrak{a}$ und der Länge (dem Betrag) der Normalkomponente von $\mathfrak{b}$ bezüglich $\mathfrak{a}$ ist. Um die Eigenschaften des Produktvektors besser verständlich zu machen, stellte ich in geringem Umfang Betrachtungen über gerichtete Flächenstücke an. Die Ausgangssituation ermöglichte es außerdem, daß des öfteren Vergleiche zwischen beiden Produktbildungen durchgeführt werden konnten.

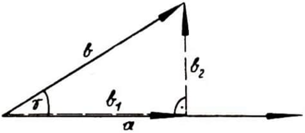

Abb. 95

In einer gänzlich anderen Weise ging ich schließlich auf einem dritten Wege bei einem größeren Unterrichtsversuch in Klasse 11 an die Produkte heran. Auf dieser Stufe glaubte ich, eine Synthese zwischen der rein geometrischen und der algebraischen Heranführung an die Probleme verwenden zu können. Dieser Unterrichtsgang soll im folgenden näher geschildert werden.

2. Das Problem der multiplikativen Verknüpfung zweier Vektoren

An den Anfang stelle ich eine Untersuchung über das allgemeine Problem der multiplikativen Verknüpfung zweier Vektoren. Zur Vorbereitung werden die Rechengesetze der Addition beziehungsweise Subtraktion von Zahlen wiederholt und zusammengestellt; dabei wird darauf hingewiesen, daß diese gleichermaßen für die additive Verknüpfung von Zahlen wie von Vektoren gelten. Danach werden die Gesetze der Multiplikation von Zahlen wiederholt. Es wird klargestellt, daß die früher eingeführte „Multiplikation eines Vektors mit einer (reellen) Zahl (einem Skalar)" mit dem Problem, das wir untersuchen wollen, nichts zu tun hat. Es handelt sich bei dieser Operation nicht um eine Verknüpfung zweier Vektoren, sie ist deshalb besser als „Vervielfachung" eines Vektors zu kennzeichnen. (Der Lehrer weiß dabei, daß es sich um eine Operatoranwendung im Rahmen der Gesetzmäßigkeiten des Vektorraumes als algebraischer Struktur handelt.)

Dann überlegen wir:

Wenn wir zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ „multiplizieren" wollen, so müssen wir beachten, daß jeder von ihnen die Angaben über Länge (Betrag), Richtung und Durchlaufsinn enthält. Es wäre falsch, etwa nur die Beträge zu multiplizieren. Wie sollen aber die Angaben über Richtung und Durchlaufsinn miteinander verknüpft werden?

Versuchen wir es einmal mit der Komponentendarstellung:

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k}\,,$$
$$\mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k}$$

und „multiplizieren" vorerst nach den Regeln für die Multiplikation von algebraischen Summen. Dort, wo zwei Zahlen zu verknüpfen sind, können wir die dafür übliche Schreibweise benutzen. Wo gleiche oder ungleiche Einheitsvektoren zu verbinden sind, schreiben wir ein vorläufiges, „neutrales" Multiplikationssymbol.

Es steht dann an der Tafel:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} &= (a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} + a_z \mathfrak{k}) \circ (b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k})\\ &= a_x b_x (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{i}) + a_x b_y (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{j}) + a_y b_x (\mathfrak{j} \circ \mathfrak{i})\\ &+ a_y b_y (\mathfrak{j} \circ \mathfrak{j}) + a_y b_z (\mathfrak{j} \circ \mathfrak{k}) + a_z b_y (\mathfrak{k} \circ \mathfrak{j})\\ &+ a_z b_z (\mathfrak{k} \circ \mathfrak{k}) + a_z b_x (\mathfrak{k} \circ \mathfrak{i}) + a_x b_z (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{k}). \qquad \text{(I)}\end{aligned}$$

Die Schüler erkennen leicht, worin jetzt das Problem besteht: Welche Bedeutung haben die „Produkte" der Basisvektoren, also $\mathfrak{i} \circ \mathfrak{i}$, $\mathfrak{j} \circ \mathfrak{j}$, $\mathfrak{k} \circ \mathfrak{k}$ beziehungsweise $\mathfrak{i} \circ \mathfrak{j}$, $\mathfrak{j} \circ \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} \circ \mathfrak{i}$ usw.; oder besser: Welche Bedeutung soll ihnen beigelegt werden?

3. Einführung des Skalarproduktes

Wir wollen zunächst untersuchen, ob Teile des Ausdrucks (I) eine bestimmte Deutung zulassen, und beschränken uns auf die Glieder, bei denen zwei gleiche Einheitsvektoren stehen:

$$a_x b_x (\mathfrak{i} \circ \mathfrak{i}) + a_y b_y (\mathfrak{j} \circ \mathfrak{j}) + a_z b_z (\mathfrak{k} \circ \mathfrak{k}).$$

Früher hatten wir schon einmal gesehen, daß

$$\mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k} \qquad (1)$$

auch geschrieben werden kann als

$$\mathfrak{b} = b \cos \beta_x \mathfrak{i} + b \cos \beta_y \mathfrak{j} + b \cos \beta_z \mathfrak{k}, \qquad (2)$$

wobei $\cos \beta_x$ usw. die Richtungskosinus des Vektors $\mathfrak{b}$ sind ($\mathfrak{b}^0 = \cos \beta_x \mathfrak{i} + \cos \beta_y \mathfrak{j} + \cos \beta_z \mathfrak{k}$).

Wir betrachten nun unser Anschauungsmodell, das die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im 1. Oktanten des rechtwinkligen räumlichen kartesischen Koordinatensystems zeigt. (Sie sind mit Knetmasse, Holzpfeilen, Bindfäden und Pappdreiecken in ein aus Glasplatten zusammengesetztes Modell der drei Koordinatenebenen eingebaut. Die Glasplatten werden durch einfache Haltekreuze aus Blech, angefertigt im Unterricht in der sozialistischen Produktion, gehalten. Das Modell wird hier durch Abb. 96 dargestellt.)

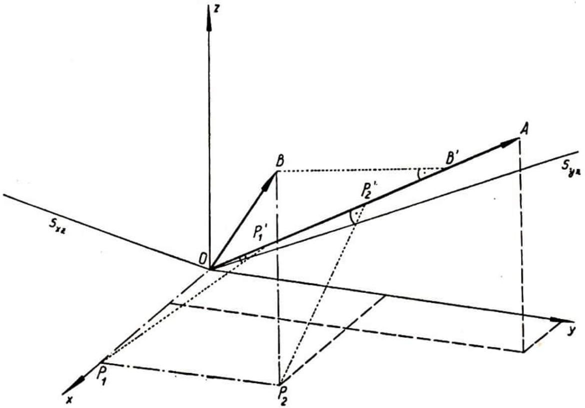

Abb. 96

Bemerkungen zu Abb. 96

In dieser Abbildung wurde das folgende Zahlenbeispiel in genormter axonometrischer (dimetrischer) Projektion[1] dargestellt:

$$A = (3;\ 10;\ 6)$$
$$B = (8;\ \ 5;\ 6).$$

Die Gleichung der von $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{OB}$ aufgespannten Ebene wurde als

$$\mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0$$

beziehungsweise

$$6x + 6y - 13z = 0$$

berechnet.

Das ergab die Spurgeraden

$$x + y = 0,$$
$$6x - 13z = 0,$$
$$6y - 13z = 0;$$

von denen die letzten beiden eingezeichnet wurden.

[1] Vgl. Lehrbuch der Mathematik für die Oberschule, Zehntes Schuljahr (Ausgabe 1955). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1956, S. 89f.

$P_1 = (8;0;0)$, $P_2 = (8;5;0)$ und $B = (8;5;6)$ sind die Punkte, von denen die Lote auf $\mathfrak{a}$ gefällt wurden, und
$P'_1 = (0{,}5;\,1{,}67;\,1{,}0)$; $P'_2 = (1{,}5;\,5{,}1;\,3{,}1)$; $B' = (2{,}3;\,7{,}6;\,4{,}6)$
die Fußpunkte dieser Lote.

Rechengang dazu:

$$(\overrightarrow{OP}_1 - \overrightarrow{OP'_1}) \cdot \mathfrak{a} = 0; \quad \overrightarrow{OP'_1} = \mu\,\mathfrak{a}; \quad \overrightarrow{OP}_1 \cdot \mathfrak{a} = \mu\,\mathfrak{a}^2;$$

das ergibt:

$$\mu = \frac{\overrightarrow{OP}_1 \cdot \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2};$$

und entsprechend liefern

$$\overrightarrow{OP'_2} = \nu\,\mathfrak{a}; \quad \nu = \frac{\overrightarrow{OP}_2 \cdot \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2}$$

und

$$\overrightarrow{OB'} = \lambda\,\mathfrak{a}; \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^2}$$

die Koordinaten der anderen Fußpunkte. Die Winkel α_x, α_y, α_z sowie β_x, β_y, β_z und $\gamma = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ wurden nicht bezeichnet, um die Übersichtlichkeit nicht zu mindern. – Ähnliche Beispiele scheinen für eine Behandlung in Klasse 12 geeignet.

Wir erkennen, daß der Vektor $\mathfrak{b}$ auch dargestellt werden kann als

$$\mathfrak{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2B}.$$

Projizieren wir die Punkte P_1, P_2, B senkrecht auf den zweiten Vektor $\mathfrak{a} = \overrightarrow{OA}$, so erhalten wir die Punkte P'_1, P'_2 und B'. Die Streckenlängen sind:

$$OP'_1 = b_x \cos\alpha_x,$$
$$P'_1P'_2 = b_y \cos\alpha_y,$$
$$P'_2B' = b_z \cos\alpha_z.$$

($\cos\alpha_x$ usw.: Richtungskosinus von $\mathfrak{a}$).

Demnach ist:

$$\begin{aligned} OB' &= OP'_1 + P'_1P'_2 + P'_2B' \\ &= b_x \cos\alpha_x + b_y \cos\alpha_y + b_z \cos\alpha_z. \end{aligned}$$

Dann gilt aber wegen (1) und (2) auch:

$$OB' = b \cos\beta_x \cos\alpha_x + b \cos\beta_y \cos\alpha_y + b \cos\beta_z \cos\alpha_z$$

beziehungsweise:

$$OB' = b\,(\cos\alpha_x \cos\beta_x + \cos\alpha_y \cos\beta_y + \cos\alpha_z \cos\beta_z). \tag{3}$$

In dem bei B' rechtwinkligen Dreieck $OB'B$ ist aber, wenn der von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eingeschlossene Winkel mit $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \gamma$ bezeichnet wird,

$$OB' = OB \cos\gamma = b \cos\gamma, \tag{4}$$

so daß wir aus (3) und (4) die Gleichung erhalten:

$$b\,(\cos\alpha_x \cos\beta_x + \cos\alpha_y \cos\beta_y + \cos\alpha_z \cos\beta_z) = b \cos\gamma. \tag{5}$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß wie in (2) für den Vektor $\mathfrak{a}$ ebenfalls gilt:

$$a_x = a \cos\alpha_x, \quad a_y = a \cos\alpha_y, \quad a_z = a \cos\alpha_z,$$

so folgt:

$$a_x b_x = a\, b \cos\alpha_x \cos\beta_x, \quad a_y b_y = a\, b \cos\alpha_y \cos\beta_y \text{ usw.}$$

Wir können daher schreiben:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\, b\, (\cos\alpha_x \cos\beta_x + \cos\alpha_y \cos\beta_y + \cos\alpha_z \cos\beta_z), \qquad (6)$$

und wegen (5) erhalten wir schließlich:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\, b \cos\gamma \text{ mit } \gamma = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}). \qquad (7)$$

Die nächste Frage lautet:

Durch welche Festsetzung über die „Produkte" der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ könnten wir erreichen, daß wir aus (I) nur den Ausdruck

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

erhalten?

Die Schüler finden selbst, daß dazu die „Produkte" aus zwei gleichen Einheitsvektoren gleich 1 und die „Produkte" aus zwei ungleichen Einheitsvektoren gleich 0 gesetzt werden müssen.

Das Ergebnis dieser „Multiplikation" ist demnach eine Zahl, ein Skalar. Wir nennen $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ das Skalarprodukt aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und schreiben dafür endgültig:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\, b \cos\gamma.$$

Das „neutrale" Multiplikationssymbol vom Anfang ist dabei durch den Punkt ersetzt worden, der somit hier eine spezielle Bedeutung erhalten hat.

Damit ist die Definitionsgleichung gleichzeitig in der invarianten und in der koordinatenmäßigen Darstellung gewonnen, und zwar sofort für den Raum. Es können jetzt durch Spezialisierung die Ausdrücke für zwei Vektoren in der x-y-Ebene, für die skalare Multiplikation eines Vektors mit sich selbst und anschließend die Sonderfälle $\gamma = 0°$ und $\gamma = 90°$ untersucht werden. Beim Skalarprodukt

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$$

bietet sich noch einmal Gelegenheit, die Zweckmäßigkeit der von uns getroffenen Festsetzungen über die Produkte der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ geometrisch nachzuweisen.

Natürlich werden auch in algebraischer Hinsicht die Eigenschaften der skalaren Multiplikation nicht vergessen.

Ich benötigte in meinem Unterricht in Klasse 11 für diese Einführung bis zur Definitionsgleichung zwei Unterrichtsstunden, für die weiteren Untersuchungen wurde zunächst eine Stunde verwendet.

Der Weg über den Kosinussatz, der ebenfalls gleichzeitig beide Darstellungen des Skalarproduktes für räumliche Vektoren liefert, scheint vielleicht einfacher. Ich glaube aber, daß der hier geschilderte Unterrichtsgang das räumliche Anschauungsvermögen stärker schult und größere Klarheit über das Wesen der Richtungskosinus vermittelt.

4. Einführung des Vektorproduktes

Zurückgreifend auf die Untersuchung über das allgemeine Problem der multiplikativen Verknüpfung zweier Vektoren wird die Gleichung (I) aus Abschnitt 2. nochmals an eine Seitenwandtafel angeschrieben. Ich gebe als Ziel an, daß wir nach weiteren sinnvollen Möglichkeiten für die „Multiplikation" zweier Vektoren suchen wollen. Zu diesem Zweck sollen wieder einige geometrische Vorbetrachtungen angestellt und dabei die bereits erworbenen Kenntnisse über das Skalarprodukt verwendet werden.

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ spannen ein Parallelogramm auf. Der Flächeninhalt F dieses Parallelogramms kann berechnet werden als:

$$F = a\,b \sin\gamma, \text{ wobei } \gamma = \sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Wir bilden:

$$F^2 = a^2 b^2 \sin^2\gamma \qquad \text{und setzen darin } \sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma,$$

also:

$$F^2 = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2\gamma = a^2 b^2 - (a\,b\cos\gamma)^2.$$

Wie wir inzwischen wissen, können wir das auch schreiben als:

$$F^2 = \mathfrak{a}^2\,\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2$$

beziehungsweise:

$$F^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2.$$

Die eine Hälfte der Klasse berechnet jetzt das Produkt, die andere Hälfte das Quadrat auf der rechten Seite dieser Gleichung. An der Tafel wird beides zusammengeschrieben, vereinfacht und neu geordnet. Schließlich werden die drei Ausdrücke, die vollständige Quadrate darstellen, in Klammern zusammengefaßt, so daß dann entsteht:

$$F^2 = (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2.$$

Betrachten wir diesen Ausdruck aufmerksam, so finden wir, daß er gedeutet werden könnte als skalares Produkt eines Vektors $\mathfrak{F}$ mit sich selbst, also als „Quadrat" dieses Vektors $\mathfrak{F}$, der die Form haben müßte:

$$\mathfrak{F} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathfrak{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathfrak{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathfrak{k}.$$

Wir wenden uns jetzt noch einmal der Gleichung (I) zu, die an der anderen Tafel steht, und fragen: Durch welche Festsetzung über die „Produkte" der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ könnte erreicht werden, daß als Ergebnis einer multiplikativen Verknüpfung der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dieser Vektor $\mathfrak{F}$ erzeugt wird? Die Schüler finden nach einigem Suchen und Überlegen, daß dazu definiert werden müßte $\mathfrak{i} \bigcirc \mathfrak{i} = \mathfrak{o}$ usw. und $\mathfrak{i} \bigcirc \mathfrak{j} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{j} \bigcirc \mathfrak{i} = -\mathfrak{k}$ usw.

Wir fassen zusammen:

Wir erklären eine zweite Art der „Multiplikation" zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, deren Ergebnis ein Vektor ist. Als neues Verknüpfungssymbol wählen wir ein Kreuz ($\times$). Für die Basisvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ definieren wir:

$$\mathfrak{i}\times\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\times\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\times\mathfrak{k} = \mathfrak{o},$$

$$\mathfrak{i}\times\mathfrak{j} = \mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{j}\times\mathfrak{k} = \mathfrak{i}, \qquad \mathfrak{k}\times\mathfrak{i} = \mathfrak{j},$$

$$\mathfrak{j}\times\mathfrak{i} = -\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{k}\times\mathfrak{j} = -\mathfrak{i}, \qquad \mathfrak{i}\times\mathfrak{k} = -\mathfrak{j}.$$

Damit erhalten wir als „Vektorprodukt“ zweier Vektoren den Ausdruck:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{F} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathfrak{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathfrak{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathfrak{k}$$

mit

$$|\mathfrak{F}| = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = a\, b \sin\gamma.$$

Für die Richtung von $\mathfrak{F}$ gilt: $\mathfrak{F} \perp \mathfrak{a}$, $\mathfrak{F} \perp \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{F}$ im „Rechtssystem“. Die Orthogonalität wird noch durch die Berechnung von $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{b}$ nachgewiesen.

Es können sich wieder Untersuchungen über Sonderfälle, Spezialisierungen für die Ebene und für das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst sowie systematisierende Zusammenstellungen der Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten anschließen.

Auch hier bin ich mit der Entwicklung bis zur Definitionsgleichung in zwei Stunden fertig gewesen. Die beim ersten Kennenlernen etwas verwirrende Form des Produktvektors in der koordinatenmäßigen Darstellung wird den Schülern leichter verständlich und zugänglich, wenn sie ihr Augenmerk auf die Reihenfolge der Indizes lenken und sich nur diese einprägen.

Außerdem habe ich auch die Determinantenschreibweise gezeigt.

Es ist eine oft zuwenig beachtete Aufgabe des Mathematikunterrichts, nach Möglichkeit die inneren Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Teilgebieten der mathematischen Wissenschaft herauszuarbeiten. Erst recht gilt das natürlich für die Zusammenhänge innerhalb *eines* solchen Zweiges wie der Vektorrechnung. Nicht zuletzt aus diesem Grunde halte ich die vorstehend beschriebene Heranführung an die Definitionen für Skalar- und Vektorprodukt zweier Vektoren von einer gemeinsamen Wurzel aus für wertvoll.

Weiterführende Erörterungen, die mit der Einführung oder Benutzung anderer Koordinatensysteme zusammenhängen, halte ich in der Schule nicht für unbedingt erforderlich. Sie lassen sich aber wohl ohne Schwierigkeiten nachtragen.

5. Vektorielle Behandlung der Kegelschnitte

Wenn in der analytischen Geometrie nur die Gerade und die Ebene, eventuell noch der Kreis und die Kugel, mit vektoriellen Methoden behandelt, bei den Kegelschnitten aber keine Vektoren verwendet werden, so birgt das eine gewisse Gefahr in sich. Die Schüler können dadurch leicht zu der Ansicht kommen, daß es mit dem Wert und mit den Vorzügen der vektoriellen Methode nicht viel auf sich habe, wenn bei schwierigeren Problemen doch zur Koordinatengeometrie zurückgekehrt wird.

Nun ist allerdings ein geschlossener Unterrichtsgang, bei dem von vornherein Ellipse, Parabel und Hyperbel als räumliche Schnitte ihrer Entstehung nach vektoriell behandelt werden, aus zeitlichen Gründen im Rahmen unseres Lehrplanes kaum durchführbar. Es müßte also nach einfachsten Möglichkeiten gesucht werden, mit denen in kurzer Zeit grundlegende Kenntnisse über die Kegelschnitte unter Verwendung vektorieller Methoden vermittelt werden können.

Eine solche Möglichkeit ergibt sich, wenn man die bekannten einfachen Parameterdarstellungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel in vektorieller Form schreibt und für die so entstandenen Gleichungen die Gültigkeit der Ortsdefinitionen nachweist. Dieser Nachweis kostet weniger Mühe als zum Beispiel die Herleitung der Ellipsengleichung aus der Ortsdefinition. Aus der Vektorgleichung wird aber ganz leicht auch die parameterfreie Form der jeweiligen Kegelschnittgleichung gewonnen; es kann dann mit beiden Typen von Gleichungen an die weiteren Untersuchungen herangegangen werden. Je nach dem Problem, das in einer Aufgabe gestellt ist, kann die eine oder die andere Form benutzt werden. Mit der vektoriellen Form ist es außerdem leicht möglich, Beispiele für Kegelschnitte im Raum zu behandeln.

Der Unterricht müßte dabei also von den Ortsdefinitionen der Kegelschnitte ausgehen, nachdem diese unter Zuhilfenahme der Dandelinschen Kugeln gewonnen wurden.

5.1 Die Ellipse

Die Behandlung der *Ellipse* sieht dann etwa so aus:

Definition: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, bei denen die Summe der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene konstant ist.

Die festen Punkte heißen Brennpunkte der Ellipse, ihren Abstand voneinander bezeichnen wir mit $2e$, die konstante Summe mit $2a$.

5.11 Trigonometrische Parameterdarstellung und vektorielle Form

Die beiden Brennpunkte einer Ellipse seien:

$$F_1(-e;\ 0) \text{ und } F_2(+e;\ 0).$$

Wir behaupten, daß nach der obigen Definition für jeden Punkt P der Ellipse der zugehörige Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j}$ beschrieben werden kann durch die Gleichung:

$$\mathfrak{r} = a\cos\varphi\,\mathfrak{i} + b\sin\varphi\,\mathfrak{j} \quad (0 \leqq \varphi < 2\pi).$$

Dabei ist die Größe b erklärt durch die Festsetzung:

$$b^2 = a^2 - e^2.$$

Die geometrische Bedeutung des Winkels φ wird an Hand einer Konstruktion erläutert, hier ist er nur als Parameter zu betrachten.

Beweis:

Mit

$$\overrightarrow{OF_1} = \mathfrak{f}_1 = -e\,\mathfrak{i} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OF_2} = \mathfrak{f}_2 = +e\,\mathfrak{i}$$

wird

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_1P} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF_1} = \mathfrak{r} - \mathfrak{f}_1 \\
&= a\cos\varphi\,\mathfrak{i} + b\sin\varphi\,\mathfrak{j} + e\,\mathfrak{i}, \\
\overrightarrow{F_1P} &= (a\cos\varphi + e)\,\mathfrak{i} + b\sin\varphi\,\mathfrak{j}, \\
(\overrightarrow{F_1P})^2 &= (a\cos\varphi + e)^2 + b^2\sin^2\varphi \\
&= a^2\cos^2\varphi + 2a\,e\cos\varphi + e^2 + b^2 - b^2\cos^2\varphi \\
&= (a^2 - b^2)\cos^2\varphi + 2a\,e\cos\varphi + e^2 + b^2 \\
&= e^2\cos^2\varphi + 2a\,e\cos\varphi + a^2;
\end{aligned}$$

oder:

$$(\overrightarrow{F_1P})^2 = (e\cos\varphi + a)^2.$$

Daraus folgt für die Länge $|\overrightarrow{F_1P}|$:

$$|\overrightarrow{F_1P}| = e\cos\varphi + a.$$

Entsprechend erhält man aus

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_2P} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF_2} = \mathfrak{r} - \mathfrak{f}_2\\ &= a\cos\varphi\,\mathfrak{i} + b\sin\varphi\,\mathfrak{j} - e\,\mathfrak{i}\end{aligned}$$

die Länge $|\overrightarrow{F_2P}|$ zu:

$$|\overrightarrow{F_2P}| = -e\cos\varphi + a.$$

(Die zweite mögliche Wurzel wäre negativ!)

Es folgt daraus:

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a,$$

entsprechend unserer Definition.

5.12 *Parameterfreie Gleichung*

Aus $\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} = a\cos\varphi\,\mathfrak{i} + b\sin\varphi\,\mathfrak{j}$ folgt sofort:

$$x = a\cos\varphi \qquad y = b\sin\varphi;$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\varphi \qquad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

beziehungsweise:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Nun können sich Betrachtungen über Halbachsen und Symmetrieeigenschaften anschließen, wobei die Parameterdarstellung und die parameterfreie Gleichung übereinstimmende Ergebnisse liefern. Weiterhin können Ellipsenkonstruktionen folgen. Mit der Konstruktion über Haupt- und Nebenscheitelkreis kann die geometrische Bedeutung des Parameters φ sehr gut demonstriert werden.

Die Ableitung des Ortsvektors nach dem skalaren Parameter bereitet hier keine Schwierigkeiten, sie stellt sogar ein günstiges Anwendungsbeispiel für die Differentiationsregeln dar. Man gewinnt also sehr leicht die Tangentengleichung. Weitere Möglichkeiten sollen hier nicht ausgeführt werden.

5.2 *Die Hyperbel*

Bei der Behandlung der *Hyperbel* kann von der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{r} = \frac{a}{\cos\varphi}\,\mathfrak{i} + b\tan\varphi\,\mathfrak{j}$$

ausgegangen werden.

Dabei müßten wieder die Definition und die entsprechenden Angaben über die Brennpunkte, über deren Abstand und über die konstante Differenz vorausgehen. Die Festsetzung über die Größe b wird ebenfalls gegeben, φ wird wieder als Parameter benutzt. Der Nachweis, daß für die angegebene Gleichung die Ortsdefinition der Hyperbel zutrifft, sieht dann etwa folgendermaßen aus:

Mit

$$\overrightarrow{OF_1} = \mathfrak{f}_1 = -e\,\mathfrak{i} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OF_2} = \mathfrak{f}_2 = +e\,\mathfrak{i}$$

wird

$$\overrightarrow{F_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF_1} = \mathfrak{r} - \mathfrak{f}_1$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi}\,\mathfrak{i} + b\tan\varphi\,\mathfrak{j} + e\,\mathfrak{i},$$

$$\overrightarrow{F_1P} = \left(\frac{a}{\cos\varphi} + e\right)\mathfrak{i} + \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\mathfrak{j},$$

$$(\overrightarrow{F_1P})^2 = \left(\frac{a}{\cos\varphi} + e\right)^2 + \frac{b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2\varphi} + \frac{2ae}{\cos\varphi} + e^2 + \frac{b^2(1-\cos^2\varphi)}{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{\cos^2\varphi} + \frac{2ae}{\cos\varphi} + e^2 - b^2$$

$$= \frac{e^2}{\cos^2\varphi} + \frac{2ae}{\cos\varphi} + a^2;$$

oder:

$$(\overrightarrow{F_1P})^2 = \left(\frac{e}{\cos\varphi} + a\right)^2.$$

Für den Abstand des Hyperbelpunktes P vom Brennpunkt F_1 folgt daraus:

$$|\overrightarrow{F_1P}| = \frac{e}{\cos\varphi} + a.$$

Entsprechend erhält man aus

$$\overrightarrow{F_2P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF_2} = \mathfrak{r} - \mathfrak{f}_2$$

$$= \frac{a}{\cos\alpha}\,\mathfrak{i} + b\tan\varphi\,\mathfrak{j} - e\,\mathfrak{i}$$

als Abstand des Hyperbelpunktes P vom Brennpunkt F_2:

$$|\overrightarrow{F_2P}| = \frac{e}{\cos\varphi} - a.$$

Es ergibt sich also:

$$|\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| = 2a,$$

was auch hier wieder der Definition entspricht.

Sehr schnell kommt man nun zur parameterfreien Gleichung:

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j}$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi}\,\mathfrak{i} + b\tan\varphi\,\mathfrak{j},$$

also:

$$x = \frac{a}{\cos\varphi} \qquad y = b\tan\varphi;$$

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad \frac{y}{b} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi};$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1$$

beziehungsweise:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Die weitere Entwicklung soll ebenfalls nicht näher beschrieben werden. Auf einen Punkt sei aber noch hingewiesen. Es besteht die Gefahr, daß die Schüler die Rolle des Parameters φ in der Vektorgleichung der Hyperbel verkennen. Sie könnten denken, φ sei der Winkel, den der Ortsvektor mit der x-Achse bildet. Bei der Ellipse wird das dadurch ausgeschaltet, daß die Konstruktion mit Haupt- und Nebenscheitelkreis gezeigt wird. Bei der Hyperbel könnte das Problem im Zusammenhang mit der Frage nach den Asymptotenrichtungen geklärt werden. Es ergibt sich doch für den Anstieg des Ortsvektors der Ausdruck $m = \frac{b}{a}\sin\varphi$, und das zeigt, daß für $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ Grenzlagen erreicht werden.

Wenn im Unterricht vor der Behandlung der Kegelschnitte in irgendeiner Form die Hyperbelfunktionen eingeführt worden sind oder wenn das eventuell hier geschehen soll, läßt sich wohl ohne weiteres auch die Gleichung:

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} = a\,\mathfrak{Cos}\,u\,\mathfrak{i} + b\,\mathfrak{Sin}\,u\,\mathfrak{i}$$

als eine neue Parameterdarstellung verwenden.

Vor allem für eine Schülerarbeitsgemeinschaft sehe ich hier reizvolle Möglichkeiten: Vergleich mit den trigonometrischen Funktionen, Deutung des neuen Parameters als Fläche u. a. m.

Bei Ellipse und Hyberbel kann man durch den Übergang von $a\,\mathfrak{i}$ zu $\mathfrak{a}$ und von $b\,\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{b}$ sowie durch Hinzufügen eines konstanten Vektors, der den Mittelpunkt des Kegelschnittes angibt, zur räumlichen Darstellung übergehen. Dabei bleibt natürlich auf die Orthogonalität der dann verwendeten Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ hinzuweisen. Jedenfalls dürften nach der vorangegangenen Behandlung in der Ebene die Gleichungen:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{a}\cos\varphi + \mathfrak{b}\sin\varphi$$

und

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \frac{\mathfrak{a}}{\cos\varphi} + \mathfrak{b}\tan\varphi \quad \text{mit } \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = 0$$

für die Schüler nicht zu große Schwierigkeiten bieten. Je nach der verfügbaren Zeit könnte damit das eine oder andere räumliche Beispiel bearbeitet werden.

Auf die Untersuchung der *Parabel* soll nicht näher eingegangen werden. Die Parameterdarstellung mit

$$x = \frac{\lambda^2}{2p}, \quad y = \lambda$$

bietet hier kaum Schwierigkeiten, auch die Bestätigung der Ortsdefinition ist leicht verständlich darzustellen.

Abschließend sei nochmals betont, daß nach meiner Ansicht auch in der analytischen Geometrie der Kegelschnitte nicht einseitig nur mit Vektoren oder nur koordinatenmäßig gearbeitet werden sollte.

Eine sinnvolle gegenseitige Ergänzung der Koordinatengeometrie und der vektoriellen analytischen Geometrie scheint für die Schule wohl am günstigsten.

DISKUSSIONSBEITRAG NR. 7

Zur Anwendung der Vektorrechnung im Physikunterricht

Hans Voigt

1. Vorbemerkung

Im Mathematikunterricht der erweiterten Oberschule wird die Vektorrechnung aus fachlichen und aus methodischen Gründen erst in den oberen Klassen eingeführt und angewendet. Im Physikunterricht dagegen wird schon wesentlich früher mit dem Vektorbegriff anschaulich gearbeitet, und zwar unter Voraussetzungen, die zu Unklarheiten führen können. Wenn die Behandlung des Stoffes in beiden Fächern eine Einheit ergeben soll, dann ist es notwendig, daß sich der Lehrer im Physikunterricht sehr exakt an die mathematische Schreibweise anschließt und andererseits im Mathematikunterricht Formulierungen verwendet, die für den Physikunterricht zweckmäßig sind. Mit dem Ziel, die mathematische und physikalische „Sprache“ besser aufeinander abzustimmen, soll im folgenden versucht werden, einige Beispiele aus der Physik auszuwählen, die vom Inhalt her leicht in die Vektorschreibweise übertragen werden können.

Ohne Zweifel gewinnt die Vektorrechnung für Physik und Technik immer mehr an Bedeutung, zumal sie in vielen Fällen erlaubt, mehrere Einzeltatsachen zu einem allgemeineren Gesetz zusammenzufassen.[1] Solche Raffungen des Stoffs sind unbedingt nötig, wenn der Physikunterricht nicht in den Herleitungen von Einzelgesetzen steckenbleiben, sondern die Aufgabe erfüllen soll, zum Verständnis der Zusammenhänge zwischen den physikalischen Gesetzmäßigkeiten und der modernen Technik zu führen.

2. Vektorielle Größe und Vektorfeld

Wir gliedern die physikalischen Größen zweckmäßigerweise in zwei Gruppen auf: Skalare Größen werden durch Maßzahl und Maßeinheit hinreichend charakterisiert (z. B. Masse, Dichte, Temperatur, Energie).

Größen, die außerdem noch einer Richtungsangabe im Raum bedürfen, heißen vektorielle Größen. Diese Bezeichnung deckt sich nicht mit dem Begriff „Vektor“, und es empfiehlt sich, hierin von Anfang an streng zu unterscheiden:

[1] Vgl. z. B. Gliederungspunkt 5.

Ein durch seinen Betrag, seine Richtung und seinen Durchlaufsinn eindeutig festgelegter Vektor kann im Raum unendlich viele Darstellungen finden, je nachdem, an welchem Raumpunkt er angetragen wird. Wird durch ihn eine räumliche Schiebung charakterisiert, so kann dieses Geschehen demnach zu jedem Raumpunkt hin verlagert werden. Mit diesem generellen Vektorbegriff, dem „freien" Vektor, können wir jedoch im Physikunterricht nur in einzelnen Sonderfällen etwas anfangen. So ist bei Berechnung der Abtrift eines Flugzeugs in der Luft oder eines Schiffes auf dem Meer oder einem Strom die gleichförmige Bewegung beziehungsweise die konstante Geschwindigkeit des homogen angenommenen Mediums ein Vektor, der an beliebiger Stelle angesetzt werden kann.

Meist gehen jedoch die Forderungen physikalischer Probleme über diesen Vektorbegriff hinaus. Das ist bereits bei der in der Physik zuerst auftauchenden gerichteten Größe, der Kraft, der Fall. Hier muß außer Betrag, Richtung und Durchlaufsinn, den für einen Vektor charakteristischen Angaben, noch die Festlegung eines Angriffspunktes oder allgemeiner einer Wirkungslinie gefordert werden, längs der der Kräftepfeil beliebig verschoben werden darf. Eine Verlagerung des Geschehens auf Raumpunkte außerhalb der Wirkungslinie beziehungsweise eine beliebige Parallelverschiebung des Pfeils, durch den wir den Vektor darstellen, ist jedoch nicht mehr gestattet. Diese Einschränkung rechtfertigt die Prägung des neuen Begriffs „vektorielle Größe".

Genau besehen, liegt hier bereits ein Sonderfall eines Vektorfeldes vor, das heißt eines Raums, in dem sich für jeden einzelnen Punkt angeben läßt, welchen Betrag und welche Richtung der Feldvektor besitzt. Diese Erklärung ist bei der Behandlung der Kräfte im Physikunterricht zweifellos verfrüht, hilft aber sicherlich dem Lehrer selbst, die Elemente des Allgemeinen und des Besonderen in den Begriffen „Vektor" und „vektorielle Größe" zu überschauen. Es ist darum nicht unfruchtbar, diesem Gedankengang etwas zu folgen.

Die Festlegung eines Feldvektors kann einmal durch eine Ortsfunktion gegeben sein. Besonders übersichtlich sind zum Beispiel das kugelsymmetrische Gravitationsfeld der auf einen Punkt konzentrierten Masse, das ebenfalls kugelsymmetrische elektrische Feld einer Punktladung oder das in ähnlicher Weise idealisierte Feld eines Magnetpols. Bei der Behandlung dieser Themen im Physikunterricht entstehen drei einheitlich aufgebaute Gesetze in skalarer Form, bei denen allerdings durch einen beigefügten Text geklärt werden muß, in welcher Richtung sich die Kräfte auswirken. Die Schüler verstehen ohne weiteres, daß die formale Übereinstimmung des Gravitationsgesetzes, des Coulombschen Gesetzes der Elektrostatik und des Coulombschen Gesetzes des Magnetismus kein Zufall, sondern in der Kugelsymmetrie begründet ist, und fordern oft von sich aus, das Typische solcher Felder zu einer einheitlichen Rechenvorschrift zusammenzufassen. Das geht leider vorläufig über den Rahmen des Oberschulstoffes hinaus: Es verlangt die Einführung der Polarkoordinaten im Kraftzentrum eines der beiden beteiligten Körper und des Einheitsvektors $\frac{\vec{r}}{r}$ in radialer Richtung. Dann könnten die Gesetze einheitliche vektorielle Form erhalten und auch ohne beigegebenen Text eindeutig sein.

Gravitationsgesetz:

$$\vec{P} = -f \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r};$$

Coulombsches Gesetz (Elektrostatik):

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r};$$

Coulombsches Gesetz (Magnetismus):

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\Phi_1 \Phi_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Das negative Vorzeichen im ersten Fall weist darauf hin, daß der Einheitsvektor vom Koordinatenursprung fort, die Kraft aber zum Ursprung hin zeigt. Beim Coulombschen Gesetz des Magnetismus müssen Nord- und Südpol durch unterschiedliches Vorzeichen gekennzeichnet werden.

Die Vektorschreibweise läßt also das Gemeinsame aller kugelsymmetrischen Kraftfelder viel stärker zutage treten. Das können wir im Augenblick unseren Schülern weder im Mathematik- noch im Physikunterricht so deutlich zeigen; aber warum sollte das nicht später einmal möglich sein, wenn die Vektorrechnung noch größeren Einfluß auf beide Fächer gewinnt?

Die Ortsabhängigkeit des Feldvektors kann aber auch durch die Vorschrift gegeben sein, daß sein Betrag an allen Stellen des Raums verschwinden und nur auf einer bestimmten Wirkungslinie von Null verschieden sein soll. Das entspricht dem „Feld“ der an einem Punkt angreifenden Kraft. Wir müssen also die Kräfte eigentlich als Feldvektoren einführen, wenn wir ihre spezielle Beschränkung auf die Wirkungslinie zum Ausdruck bringen und Widersprüche mit der mathematischen Behandlung vermeiden wollen. Von Anfang an muß im Physikunterricht darüber Klarheit herrschen, und ich schlage als Definition vor:

„*Ein Vektor ist eine Größe, die durch Betrag, Richtung im Raum und Durchlaufsinn charakterisiert ist.*

Eine vektorielle Größe ist ein Feldvektor, der an einen bestimmten Punkt im Raum (Angriffspunkt) beziehungsweise an eine Gerade durch diesen Punkt (Wirkungslinie) gebunden ist.“

Um Vektorfelder leicht zu überschauen, reihen wir die Feldvektoren zu „Stromlinien“ aneinander. Die Stärke der Feldgröße drücken wir durch die Dichte der Stromlinien aus. Ein derartiges Feld ist zum Beispiel das der Magnetflußdichte B. Das Veranschaulichen des Feldlinienbildes wurde früher manchmal im elementaren Unterricht dahingehend übertrieben, daß versucht wurde, „eine Feldlinie pro cm^2“ zu definieren. Das ist allerdings unnötig, denn statt der „Feldlinie“ kann ja sofort die Einheit der Flächendichte des betrachteten Vektors gesetzt werden, also in unserem Fall die Dichte des Magnetflusses. Aus diesem Grunde ist wohl die Bezeichnung „Magnetflußdichte B“ der unanschaulicheren „magnetische Induktion B“ vorzuziehen.

Bei der Darstellung gerichteter Größen wird vorwiegend die Schreibweise in „deutscher“ Schrift angewendet. Damit wurde für die deutschsprachige Fach-literatur eine konsequente Unterscheidung skalarer und vektorieller Größen in einheitlicher Weise möglich. Im Interesse der internationalen Verständigung über physikalische Probleme wäre jedoch zu erwägen, ob statt dessen nicht die Kennzeichnung durch einen Pfeil über dem Größenzeichen gewählt werden sollte (z. B. $\vec{P}$, $\vec{v}$), da

a) die Elemente der „deutschen“ Schrift seit Jahren nicht mehr gelehrt werden und auch keine internationale Bedeutung besitzen,
b) eine konsequente Verwendung dieser Schreibweise nicht mehr möglich wäre, sobald griechische Größenzeichen verwendet werden (z. B. Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$) oder Strecken bezeichnet werden sollen ($\overrightarrow{AB}$).

Natürlich kann es nicht Aufgabe der Schule allein sein, in der Vektorschreibweise einen neuen Weg zu beschreiten. Das Signal hierzu müßte vom Deutschen Amt für Maß und Gewicht kommen und gesetzlichen Charakter tragen. Daß aber die „deutsche“ Schrift aus den genannten Gründen keine befriedigende Lösung mehr ist, liegt auf der Hand, und es ist an der Zeit, dieses Problem ins Auge zu fassen.

In den eben erwähnten Ausnahmefällen ($\vec{\omega}$, $\overrightarrow{AB}$) ist es bereits üblich, Vektoren durch einen überschriebenen Pfeil zu bezeichnen. Es ist zweifellos naheliegend, dieses Verfahren auf alle Vektoren auszudehnen. Dadurch erhält man eine konsequente und eindeutige Schreibweise, die besonders in der Physik sehr handlich ist. Um das zu demonstrieren, soll die Kennzeichnung der Vektoren durch Pfeile im folgenden Anwendung finden. Der Betrag des Vektors entspricht dem Größenzeichen: $|\vec{P}| = P$, $|\vec{v}| = v$. Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen werden in der Experimentalphysik in den seltensten Fällen geschrieben (im Gegensatz zu den Abhandlungen der theoretischen Physik). Fast immer werden vektorielle Komponenten gewählt. So lautet für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ die Vektorgleichung:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z\,;$$

und die Betragsgleichung:

$$\vec{v}^2 = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\,.$$

3. Vektorielle Addition

Verschiedengerichtete vektorielle Größen werden geometrisch addiert, das heißt, sie werden zeichnerisch aneinandergereiht.

Dieses Verfahren entwickeln wir meist am Beispiel zusammenwirkender Kräfte und weisen die Richtigkeit experimentell nach. Erinnern wir uns an den im Abschnitt 2 unternommenen Versuch einer konsequenten Definition, so wird nun eine gedankliche Schwierigkeit besonders deutlich: Das Aneinanderreihen läßt sich zeichnerisch nur mit paralleler Verschiebung durchführen. Warum dürfen wir so verfahren, wenn Kräfte – wie eben ausgeführt – an eine Wirkungslinie gebunden sind? Diese Frage taucht tatsächlich häufig auf und zwingt uns auch hier zur Präzision. Die geometrische Addition von Kräften führt den speziellen Namen „Kräftezug“. Ihr geht zweckmäßigerweise eine Erläuterung des Kräfteparallelogramms voraus

(Abb. 97), gewöhnlich mit dem einleuchtenden Gedanken, daß die gleichzeitig wirkenden Kräfte (Weg 1) dasselbe Ergebnis erzielen, als wenn sie nacheinander wirkten. Wir lassen also erst Kraft $\vec{P}_A$ für eine bestimmte kurze Zeit gewähren, anschließend $\vec{P}_B$ für dieselbe Zeit (Weg 2) und gelangen zu dem Punkt, der auch erreicht wird, wenn beide gleichzeitig wirksam sind. Ein Parallelogramm entsteht auch dann, wenn wir als dritte Möglichkeit erst $\vec{P}_B$, dann $\vec{P}_A$ ansetzen (Weg 3). Am Schluß steht jedenfalls die Feststellung, daß alle drei Wege zum gleichen Ergebnis führen. Abstrakt bedeutet das: Kräfte überlagern sich, das heißt, zur Kraft $\vec{P}_A$ tritt unvermindert und unbeeinflußt die Kraft $\vec{P}_B$.

Wesentlich für unsere Betrachtung ist jedoch, daß die Kräftezüge genügend klein zu denken sind. Wir lassen also für die einzeln wirkenden Kräfte nur infinitesimal kleine (sogenannte virtuelle) Verrückungen zu; etwa grob vergleichbar der Gewohnheit, daß man an einer aufgestellten Leiter probeweise rüttelt, um das Kräftespiel zu durchschauen, ohne daß dabei die Lage der Leiter verändert wird. Durch diese Angabe sichern wir die Konsequenz der Kräftebehandlung.

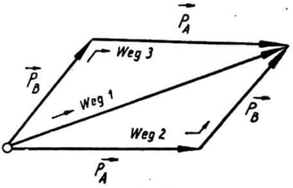

Abb. 97

Dasselbe gilt für die vielen Beispiele zusammengesetzter Bewegungen: Die elementare Herleitung der Radialbeschleunigung erfolgt am besten aus der Überlagerung einer gleichförmigen tangentialen Bewegung $\vec{s}_1 = \vec{v} \cdot t$ mit einer radialen beschleunigten $\vec{s}_2 = \frac{\vec{b}}{2} \cdot t^2$ (Abb. 98) in Form einer Sägezahnkurve. Auch hier werden wir darauf hinweisen, daß die Zähne infinitesimal klein zu denken sind, wenn auch die Skizze übertreiben muß.

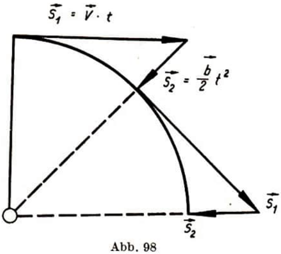

Abb. 98

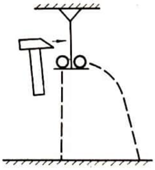
Abb. 99

Daß sich Bewegungen unabhängig voneinander überlagern, kann im Unterricht experimentell überzeugend nachgewiesen werden (Abb. 99)[1]: Schlagen wir an den

[1] Nach Prof. Dr. A. Recknagel: Physik-Mechanik. VEB Verlag Technik, Berlin 1955, S. 60.

Schaft des Hammers, so fallen beide Kugeln und treffen gleichzeitig auf dem Boden auf. Beide Körper führen die gleiche Fallbewegung durch; der Bewegung des rechten Körpers überlagert sich eine annähernd gleichförmige Bewegung nach rechts. Wir stellen also fest, daß auch vektorielle Größen, wie Kräfte und Bewegungsgrößen, dem Gesetz der vektoriellen Addition genügen.

Es sei nur grundsätzlich davor gewarnt, eine Kräftefigur mit einer *endlichen* Bewegungsfigur zu identifizieren, da beide Dinge auf verschiedenen Betrachtungsebenen liegen: Die gleichförmige Bewegung, mit der wir gern arbeiten, ist charakteristisch für den kräftefreien Zustand; konstante Kräfte dagegen bewirken beschleunigte Bewegungen, haben also zeitlich wachsende Geschwindigkeiten zur Folge.

4. Skalares Produkt

Das skalare Produkt zweier Vektoren entsteht dann, wenn man einen Vektor auf die Wirkungslinie des zweiten projiziert und den Betrag der projizierten Komponente mit dem des zweiten Vektors multipliziert. Das Ergebnis ist ein Skalar C, und die Rechenoperation wird „$\vec{A}$ Punkt $\vec{B}$“ ausgesprochen oder ausführlich: „$\vec{A}$ skalar multipliziert mit $\vec{B}$“:

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B};$$

$$C = AB \cos(\vec{A}, \vec{B}).$$

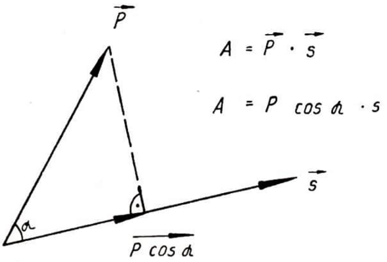

Abb. 100

Dieses Produkt erhält in der Physik sehr häufig seinen Sinn für zwei vektorielle Größen verschiedener Art. Ein besonders überzeugendes Beispiel ist der Begriff der mechanischen Arbeit (Abb. 100). Darum wird die Arbeit in der Mechanik definiert:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraftkomponente in Wegrichtung mal Weg};$$

$$A = P \cos\alpha \cdot s.$$

Dasselbe Verfahren liegt in der Wechselstromtechnik der Bildung des Leistungsfaktors bei Vorhandensein induktiver und kapazitiver Schaltelemente zugrunde:

$$\text{Wirkleistung } N_w = U \cdot J \cdot \cos\varphi = U \cdot J_w.$$

Das Optimum aller Anwendungsfälle des skalaren Produkts ist erreicht, wenn beide Vektoren die gleiche Richtung haben, denn dann wird $\cos 0° = 1$. Das entspricht in der Mechanik dem rationellsten Ansatz der Kraft, bei der Wechselstromleistung dem Fehlen oder vollständiger gegenseitiger Kompensation von Blindwiderständen.

5. Vektorielles Produkt

Während das skalare Produkt, zwar nicht dem Namen nach, aber inhaltlich, in einleuchtender Weise im Physikunterricht der erweiterten Oberschule verwendet wird, werden Sachverhalte, deren Behandlung das vektorielle Produkt erfordert, meist gänzlich umgangen. Das vektorielle Produkt erscheint zwar auch im Mathematikunterricht, aber häufig losgelöst von jeder praktischen Verwendung. Geometrisch entspricht das Vektorprodukt zweier Vektoren der Größe der Parallelogrammfläche, die von ihnen aufgespannt wird (Abb. 101). Das Produkt selbst ist jedoch in diesem Fall ein Vektor $\vec{C}$, der senkrecht auf dieser Fläche steht:

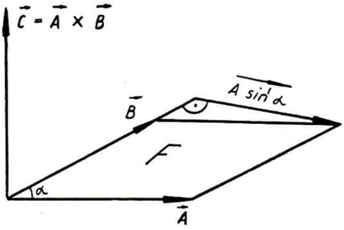

Abb. 101

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B};$$
$$C = AB \sin \alpha.$$

Die Rechenoperation wird gesprochen: „$\vec{A}$ Kreuz $\vec{B}$“ oder ausführlich: „$\vec{A}$ vektoriell multipliziert mit $\vec{B}$“.

Die Richtung von $\vec{C}$ ist die einer Rechtsschraube mit dem Drehsinn, der von der Richtung $\vec{A}$ auf dem kürzesten Weg zur Richtung $\vec{B}$ und $\vec{C}$ führt. Dabei darf die Reihenfolge der Vektoren nicht vertauscht werden, da das zur Umkehrung des Produktvektors führt.

Diese Schraubenregel ist jedoch eine rein mechanische Gedankenhilfe, die sich in physikalischen Anwendungen wenig bewährt. Dort werden wir anders verfahren: In fast jedem Anwendungsfall interessiert eine Komponente $\overrightarrow{A \sin \alpha}$, die senkrecht auf $\vec{B}$ steht (oder umgekehrt eine Komponente $\overrightarrow{B \sin \alpha}$ senkrecht auf $\vec{A}$). Die von $\overrightarrow{A \sin \alpha}$ und $\vec{B}$ aufgespannte Rechteckfläche ist gleich der des Parallelogramms aus $\vec{A}$ und $\vec{B}$, so daß die Rechenvorschrift nicht verletzt wird. Mit diesem neuen Vektorpaar kann ein „Rechtssystem“, ähnlich dem der kartesischen Koordinaten, aufgespannt werden. Der Name bedeutet, daß derartige Systeme mit der rechten Hand nach folgendem Schema gebildet werden können:

Koordinaten:	x	y	z;
Vektorprodukt:	$\overrightarrow{A \sin \alpha}$	$\vec{B}$	$\vec{C}$;
anzugeben mit:	Daumen	Zeigefinger	Mittelfinger

der *rechten* Hand.

Die Anwendung derartiger Rechtssysteme ist in der Physik so vielfältig, daß es lohnt, diesen Begriff bereits in der erweiterten Oberschule und den Abiturklassen der Berufsschule vorzubereiten. So halte ich es zum Beispiel für wünschenswert, das Generator- und Motorprinzip als Rechtssysteme zu erläutern und endgültig mit der Vielzahl von Handregeln zu brechen, die in fataler Weise an Handwerkelei erinnern. Ich lehne grundsätzlich die Verwendung einer Rechte-Hand-Regel für Generator und einer Linke-Hand-Regel für den Motor ab, wobei Bewegungen mit dem Daumen und Ströme mit dem Mittelfinger angezeigt werden. Ich möchte mich aber auch in gleicher Weise gegen die Erläuterungsweise aussprechen, nach der stets vom Magnetfeld ausgegangen wird: Beim Motorprinzip ergeben die Feldlinien des Magnetfeldes und des Leiters eine Verdichtung an der der Bewegung abgewandten Seite; dagegen wird beim Generator die Spannung so gebildet, daß nach der Lenz'schen Regel die Bewegung gegen ein verdichtetes Kraftlinienpolster geführt wird. Während die erstere Methode dem eigentlichen physikalischen Vorgang überhaupt nicht gerecht wird, durchdenkt ihn derjenige, der die letztere anwendet, zwar recht gründlich, aber in einer Weise, als gäbe es keine tiefgründigere mathematische Behandlung des elektrotechnischen Problems.

Demgegenüber ist meines Erachtens die Erläuterung zu empfehlen, die als „UVW-Regel“ sich bereits durchzusetzen beginnt und die besonders gegenüber den Faustregeln der erstgenannten Art wesentliche Vorzüge besitzt. Sowohl Generator- als auch Motorprinzip sind Rechtssysteme nach der (übrigens alphabetischen) Reihenfolge: Ursache, Vermittlung (magnetisches Feld), Wirkung.

Das Schema dieser Regel erlaubt es, in knapper und übersichtlicher Weise beide Erscheinungen gleichzeitig zu besprechen:

	Ursache	Vermittlung	Wirkung
Induktionsgesetz, Generatorprinzip:	Bewegung	magnetisches Feld	Spannung
Elektrodynamisches Kraftgesetz, Motorprinzip:	Strom	magnetisches Feld	bewegende Kraft
anzugeben mit:	Daumen	Zeigefinger	Mittelfinger
		der rechten Hand	

Wir entwickeln im Physikunterricht dieses Schema aus einer Versuchsreihe mit einem schaukelförmigen elektrischen Leiter im Feld eines Hufeisenmagneten[1], und zwar zunächst unter der Voraussetzung, daß im ersten Fall die Bewegung und im zweiten der stromführende Leiter senkrecht auf dem homogen angenommenen Magnetfeld steht (Abb. 102 u. 103).

[1] Vgl. Lehrbuch der Physik für die Oberschule, Elftes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1955, Abb. 13/1.

Beim Übergang zur rotierenden Leiterschleife des Generators setzen wir die Bewegungskomponente $\overrightarrow{v \sin (v, B)}$ ein, die für das „Schneiden" der Kraftlinien oder besser für die Veränderung des von der Schleife umfaßten Magnetflußteils

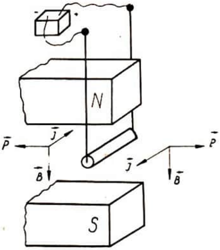

Abb. 102

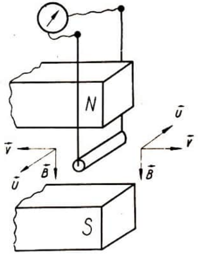

Abb. 103

verantwortlich ist (Abb. 104). Aus ihr läßt sich dann die Sinusform der induzierten Wechselspannung ableiten.

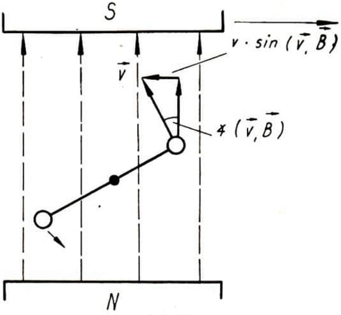

Abb. 104

Für das Motorprinzip kommt die Wahl einer derartigen Komponente wohl kaum zur Sprache: Der Winkel zwischen stromführendem Leiter und Magnetfeld bleibt bei rotierender Schleife stets 90°, und damit wäre die Kraft im homogenen Magnetfeld konstant, nur kann sie nicht in allen Lagen der rotierenden Schleife in gleicher Weise zur Rotation beitragen. Hier interessiert also die zum Feld senkrechte Komponente des Produktvektors.

Es ist offensichtlich, daß in beiden Fällen Vektorprodukte zugrunde liegen. Das ist beim Generator besonders leicht zu übersehen:

Die elektrische Feldstärke E ist erklärt durch:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

Andererseits ist:

$$\vec{E} = \frac{\text{Spannung } \vec{U}}{\text{Leiterlänge } l}.$$

Damit ergibt sich für die Spannung:

$$\vec{U} = l \cdot (\vec{v} \times \vec{B});$$

$$U = l \cdot v \cdot B \cdot \sin(\vec{v}, \vec{B}).$$

Die letzte Fassung des Induktionsgesetzes ist bereits im elementaren Unterricht verwendbar und braucht nur mit geeigneten Maßeinheiten versehen zu werden.

Die mathematische Umschreibung des Motorprinzips als Vektorprodukt ist etwas komplizierter:

Eine bewegte elektrische Ladung q erfährt in einem Magnetfeld eine geschwindigkeitsproportionale Kraft:

$$\vec{P} = q \cdot \vec{E} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

In der Elektrotechnik spielt dieser Ausdruck als „Lorentzkraft" eine wichtige Rolle. Bewegen sich zum Beispiel im metallischen Leiter viele Ladungen mit der gleichen Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, dann gilt für die Ladungsmenge dQ im Leiterstück ds:

$$dQ \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot ds = J \cdot ds.$$

Werden die Leiterstücken ds über die gesamte wirksame Leiterlänge l summiert, so ergibt sich:

$$\vec{P} = l \cdot (\vec{J} \times \vec{B}).$$

Die Kraft $\vec{P}$ ruft eine Bewegung hervor, die nach dem oben erwähnten Rechtssystem angezeigt werden kann.

Bedenkt man noch, daß das Generatorprinzip nach der Lenz'schen Regel stets mit dem Motorprinzip, der Motor andererseits stets mit einer Gegenurspannung gemäß dem Induktionsgesetz verknüpft ist, dann zeigt die eben erläuterte Darstellungsweise meines Erachtens ganz besonders deutlich, daß beide Erscheinungen eine dialektische Einheit zweier gegensätzlicher Elemente bilden.

Die letzten Erläuterungen sind natürlich nur für den Lehrer gedacht. Die oben erwähnte Lorentzkraft können wir allerdings im Physikunterricht gut gebrauchen, um zu erklären, wie bei der Aufspaltung der drei Komponenten der natürlichen radioaktiven Strahlung, im Elektronenmikroskop oder im Teilchenbeschleuniger, elektrisch geladene Partikel durch magnetische Felder abgelenkt werden (Abb. 105; der magnetische Nordpol soll vor, der Südpol hinter der Zeichenebene liegen). Gewiß kann der Lehrer in jedem Fall auf das elektrodynamische Kraftgesetz zurückgreifen und die Ablenkung der β-Strahlen etwa wie folgt erläutern: „Ein Strom von Elektronen aus der Bleikassette heraus entspricht einem technischen Strom in die Kassette hinein; Anwendung der UVW-Regel ergibt Ablenkung

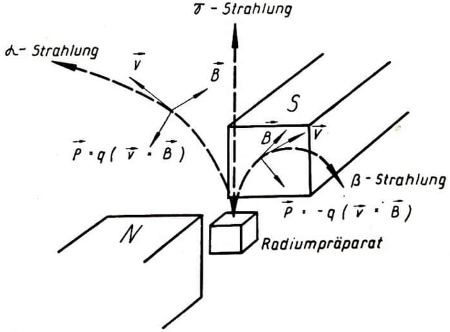

Abb. 105

nach rechts.“ Geben wir jedoch die Lorentzkraft an – und nach der Einführung der Vektorrechnung können wir mit ihr sehr gut arbeiten –, dann haben wir die Möglichkeit, nicht nur dieses Problem, sondern auch besonders die Spiralbahnen im Zyklotron besser zu behandeln: Stets krümmt die Lorentzkraft die Teilchenbahn und wirkt damit senkrecht zur Bahngeschwindigkeit. Die Vektorgleichung:

$$\vec{P}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

gibt an, in welcher Richtung die Teilchen abgelenkt werden; dann können wir allerdings skalar weiterrechnen, weil in den Beschleunigergeräten auch $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{v}$ steht.

Gleichzeitig mit der Lorentzkraft entsteht eine gleich große, aber entgegengesetzte Fliehkraft, und es gilt:

$$\frac{m v^2}{r} = q v B,$$

$$\frac{v}{r} = \frac{q}{m} B.$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist konstant, solange das Feld konstant bleibt und solange die Teilchenmasse sich nicht ändert (d. h., solange die

Geschwindigkeit wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist). Unter diesen Voraussetzungen entspricht auch der wachsenden Geschwindigkeit ein wachsender Krümmungsradius, also eine Spiralbahn.

Wenn wir also im Physikunterricht mit Kenntnissen der Schüler über das Vektorprodukt rechnen können, ist uns die Einführung der Lorentzkraft eine gute Hilfe.

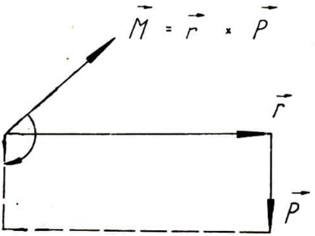

Abb. 106

Ein weiteres Beispiel sei zur Veranschaulichung des Vektorprodukts empfohlen:

Das Drehmoment wird im Physikunterricht zu einem Zeitpunkt behandelt, in dem die Vektorrechnung noch nicht vorausgesetzt werden kann. Man definiert elementar:

„Das Drehmoment ist das Produkt aus Kraft und Kraftarm. Der Kraftarm ist der Abstand der Wirkungslinie der Kraft vom Drehpunkt."

Hier kann der Mathematikunterricht zur Vertiefung des Physikstoffs beitragen: Bilden wir $\vec{r} \times \vec{P}$, so zeigt der Drehmomentenvektor $\vec{M}$ in die Zeichenebene hinein, und die zu erwartende Drehung entspricht der einer Rechtsschraube (Abb. 106).

Das leicht zu überschauende Beispiel wird die Anwendbarkeit des Vektorprodukts auf praktische physikalische Probleme deutlich machen, wenn im Mathematikunterricht das Vektorprodukt behandelt wird.

Wir können noch einige andere physikalische Gesetze, die mit Hilfe von Vektorprodukten dargestellt und erst auf Hochschulniveau exakt formuliert werden können, als Rechtssysteme ihrem kausalen Ablauf nach vorbereiten. Zwar paßt hier die Bezeichnung „UVW-Regel" nicht mehr genau, obwohl sie den kausalen Ablauf bereits enthielt, sondern besser eine Aufeinanderfolge: „Voraussetzung – äußere Einwirkung – Ergebnis".

So stehen zum Beispiel beim Kreisel die drei Achsen:

ursprünglicher Drehimpuls $\vec{D}$,

Drehmoment $\vec{M}$ eines von außen einwirkenden Zwangs
und Präzession des Kreisels mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{Pr}$

als Rechtssystem aufeinander senkrecht. Diese Zuordnung ist eine gute Gedankenstütze, und wir werden sie nutzen, falls das Vektorprodukt besprochen wird. Für die rechnerische Herleitung müßte allerdings anders gruppiert werden:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_{Pr} \times \vec{D}.$$

Ein anderes Beispiel bietet die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Raum: Elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und magnetische Feldstärke $\vec{H}$ stehen stets senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Mit dem Energieströmungsvektor $\vec{S}$ ergibt sich ein Rechtssystem:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Auch hier werten wir das Vektorprodukt nicht aus, skizzieren aber das Rechtssystem.[1]

Durch die Erörterung der Beispiele dieses Beitrags wurde das Ziel verfolgt, die Übereinstimmung der Aussagen im Mathematik- und Physikunterricht auf dem Gebiet der Vektorrechnung zu verbessern. In beiden Fächern können wir Lehrer viel dazu tun, unsere Schüler von der Notwendigkeit und Klarheit der Vektorrechnung zu überzeugen. Zwar ist bedauerlich, daß der Physikunterricht bei der Behandlung der meisten der genannten Themen noch nicht auf die Vektorrechnung zurückgreifen kann. Die Gesetze können jedoch so formuliert werden, daß der Mathematiklehrer leicht auswertbare Beispiele vorfindet. Es wird notwendig sein, diesen Gedanken ernsthaft nachzugehen und eine Annäherung beider Fachgebiete auch an anderer Stelle zu erstreben, da eine enge Koordinierung für die Vermittlung eines sicheren Wissens unerläßlich ist.

[1] Vgl. Lehrbuch der Physik für die Oberschule, Zwölftes Schuljahr. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1958, Abb. 29/1.

Inhaltsverzeichnis